SZIGMA

Matematikai közgazdasági folyóirat

A Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai-Közgazdasági Szakosztályának lapja

*

E szám szerzői:

BÁGER GUSZTÁV, kandidátus, Országos Tervhivatal Tervgazdasági Intézete, BRÓDY ANDRÁS, a közgazdaságtudományok doktora, az MTA Közgazdaságtudományi Intézete tudományos főosztályvezetője, DANCS ISTVÁN, kandidátus, Országos Tervhivatal Tervgazdasági Intézete, FUTÓ PÉTER, a természettudományok doktora, az Építéstudományi Intézet tudományos munkatársa, Dr. HÜTTL ANTÓNIA, az Országos Tervhivatal Tervgazdasági Intézete munkatársa, KOVÁCS ÁLMOS, az INFELOR csoportvezetője, LEE ANNA, az MTA Matematikai Kutató Intézete tudományos munkatársa, NAGY SÁNDOR, Központi Statisztikai Hivatal, SIMON GYÖRGY, a közgazdaságtudományok doktora, a KGST Szocialista Világrendszer Gazdasági Problémakutató Nemzetközi Intézete igazgatóhelyettese, Moszkva, STAHL JÁNOS, a DATORG gazdasági-műszaki tanácsadója, Dr. ZALAI ERNŐ, a Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem Népgazdaság Tervezése Tanszék adjunktusa.

*

Szerkesztőség: 1361 Budapest, Münnich Ferenc u. 7.

Terjeszti a Magyar Posta. Előfizethető bármely postahivatalnál, a kézbesítőknél, a Posta hírlapüzleteiben és a Posta Központi Hírlap Irodánál (KHI 1900 Budapest V., József nádor tér 1.) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI. 215–96162 pénzforgalmi jelzőszámára. Egyes példányok beszerezhetők a Budapest V., Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban.

Előfizethető és példányonként megvásárolható: az AKADÉMIAI KIADÓ-nál, 1363 Budapest V., Alkotmány u. 21. Telefon: 111–010. Pénzforgalmi jelzőszámunk: 215–11488, és a AKADÉMIAI KÖNYVESBOLT-ban, 1368 Budapest V., Váci utca 22. Telefon: 185–612.

Előfizetési díj egy évre: 40,– Ft

Bródy András

Szabályozási modellekről

Kornai—Martos [9], majd Virág [10] vizsgált a Szigma lapjain egy szabályozási rendszert, amelyet [5] is taglalt. E vizsgálatokhoz hozzászólva néhány további szabályozást is bemutatok.

A dolgozat első része a modell megválasztását indokolja, a második a szabályozás jóságának kritériumait definiálja, a harmadik egy szabályozáscsalád nyolc változatát mutatja be.

I.

A modell

Az alapvető gazdasági folyamat modelljéül az egyszerű újratermelés Leontief-féle zárt ábrázolását választottam, azaz olyan nemnegatív és irreducibilis F ráfordítási matroxot, amelynek legnagyobb sajátértéke (spektrális rádiusza) éppen 1-gyel egyenlő. Választásomat az indokolja, hogy a bővített újratermelés $F = A + \lambda B$ alakú matrixa (amely tehát áramlatokat is és lekötött eszközöket is ábrázol) hasonló tulajdonságokkal bír. Így, rögzített λ mellett, az eredmények a bővített újratermelésre is interpretálhatók. E modell két vonatkozásban egyszerűsíti az idézett tanulmányokban tárgyalt modellt: a) nem különbözteti meg az anyagkészletet a termékkészlettől; b) a modell zárt, külső fogyasztása nincs.

Az anyag és termékkészlet megkülönböztetése nem fizikai, hanem csupán tulajdonjogi megkülönböztetés. Elhanyagolása mégis erősen csökkenti modellem realitását. Mint Kornai—Martos modellje, ez is teljes készletinformációt követel meg.

A modell zártsága csak látszólagos megkötés, hisz az F matrix perturbációja ugyanúgy jelenthet technikai, mint ízlésbeli változást, tehát a fogyasztási struktúra változását. A zártság révén azonban ábrázolásra kerülhet a munkaerő is, amelyet az említett modell nem vesz figyelembe. Egyébként a tapasztalat azt mutatja, hogy a személyi fogyasztás nem szakadhat el a gazdaság struktúrájától és növekedésétől, így a zárt rendszer ellen ilyen elvont tárgyalás esetében nem emelhető elvi kifogás.

Hogyan értelmezhetők azonban az ilyen elvont és szimpla modellek és elvont szabályozási előírások révén nyert eredmények?

Ha a szabályozás ilyen elvont modell esetében nem kielégítő, akkor a modell tagoltabbá tételével általában nem javítható. (Esetleg persze javítható a szabályozás módosításával, csillapító előírásokkal stb. — de ez nem a modell, hanem a szabályozási kör kiterjesztését jelenti.) Ha a szabályozás ilyen szimpla modell esetében kielégítő (minden szempontból kielégítő szabályozást még erre az igen szimpla modellre sem találtam), akkor e szabályozási előírást természetesen tovább kell vizsgálni, részletesebb modellek segítségével.

Az elvont és szimpla modellek segítségével történő vizsgálat tehát képes megszűrni a lehetséges szabályozási javaslatokat és kirostálni az elégtelennek mutatkozó előírásokat. Nem biztosítja azonban, hogy a szűrőn csak a színarany javaslatok kerülhetnek át — ehhez a szűrő túl durva. Ugyanakkor azonban arra is kényszeríti, hogy a szabályozás jóságának kritériumait és a szabályozás főbb feladatait egyre szabatosabban fogalmazzuk meg.

II.

Stabilitás

A szabályozás megítélésekor a Ljapunov-kritériumokból [2] indultunk ki. Legyen a kívánt állapottól való eltérés a t időpontban $|z_t|$, akkor a szabályozás *stabil*, ha minden $\varepsilon > 0$ értékhez található oly δ, amelyre

$$|z_0| < \delta \text{ esetén } |z_t| < \varepsilon.$$

Aszimptotikusan stabil, ha stabil és van olyan $\delta > 0$, amelyre

$$\lim_{t\to\infty} |z_t| = 0.$$

Az aszimptotikusan stabil szabályozás tehát egyben stabil, de nem megfordítva.

A kívánt állapottól való eltérés, $|z_t|$ értéket különféle módon értelmezhetjük. Lehet vektorok különbségének valamilyen mérőszáma, például két vektor euklideszi távolsága (az elemenkénti eltérések négyzetösszegének négyzetgyöke), vagy az eltérésvektor valamilyen normája (például maximális elemének abszolút értéke, vagy elemei abszolút értékének összege). Lehet azonban, ha nem egy megkívánt pontba, hanem egy megkívánt pályára kívánjuk vinni a rendszert, két vektor által bezárt szög is. Így mérhetjük egy egyensúlyi pálya, $\bar{x}$ és egy tényleges x_t pálya különbségét, mint a két pálya által bezárt szög cosinusának [8] az egységtől való eltérését, tehát vizsgálhatjuk az

$$1 - \frac{(\bar{x}, x_t)}{\sqrt{(\bar{x}, \bar{x})}\sqrt{(x_t, x_t)}}$$

értéket, mint az eltérés mérőszámát a t időpontban.

Az ökonómiában is hasznosnak látszik a két fajta stabilitás megkülönböztetése. Ezzel eltérünk [9] terminológiájától, amely az aszimptotikusan stabil szabályozást nevezi stabilnak, a fentiekben definiált pusztán stabil szabályozást instabilnak tartja. E terminológiában elvész az a fontos különbség, hogy a szabályozás képes-e legalább a kívánt állapot környezetében tartani a rendszert (amikor az eltérés korlátos marad, habár nem biztos, hogy csökken vagy megszűnik), vagy pedig nem (amikor az eltérés minden határon túl nőhet).

Ljapunov kritériumai a következő egyszerű módon függnek össze a stabilitás vizsgálatára általában használt lineáris differenciálegyenletrendszer együttható mátrixának, tehát valamely $\dot{z}_t = Dz_t$ egyenlet D matrixának sajátértékeivel [6]:

Ha az összes sajátérték reális része negatív, akkor a szabályozás aszimptotikusan stabil (és természetesen stabil), mert az eltérésvektor zérushoz tart. Ha van olyan sajátérték, amelynek reális része pozitív, akkor megfelelő kezdeti érték esetén az eltérésvektor minden határon túl nő.

Végül, ha a sajátértékek reális része ugyan nempozitív, de van közte zérus reális részű, tehát tisztán képzetes sajátérték, akkor a szabályozás stabil, de nem aszimptotikusan stabil, mert az eltérésvektor fluktuál, de korlátos marad.

Differencia-egyenletrendszer esetén a $z_{n+1} = Dz_n$ egyenlet D matrixának sajátértékei akkor vezetnek aszimptotikus stabilitáshoz, ha abszolút értékben mind egynél kisebbek. Ha van egynél nagyobb sajátérték, akkor az eltérés minden határon túl növekszik. Ha nincs, ugyan egynél nagyobb sajátérték, de van olyan, amelynek abszolút értéke 1-gyel egyenlő, akkor a szabályozás stabil, de nem aszimptotikusan stabil.

A stabilitás esetében azonban külön vizsgálandó a többszörös gyökök esete, mert instabilitáshoz vezethet.

Az ökonómiai vizsgálatokban szükség volna a fentebbieknél szigorúbb kritériumra is. Ilyen szigorúbb kritérium lehetne a *helyes orientáció* megkövetelése.

Helyesen orientálónak egy olyan szabályozást tekinthetünk, amelyben az eltérésvektor z_t minden eleme monoton csökkenve konvergál zérushoz. Az ilyen szabályozás biztosítja azt, hogy a rendszer minden része egyenesen a kívánt állapot felé tart.

Miért volna ilyen szigorú kritériumra szükség? Azért, mert a mechanikai rendszerektől az ökonómiai rendszert az különbözteti meg, hogy egy-egy konfigurációjának (paramétereinek, belső arányainak, ténylegesen kvantifikált modelljének) relevanciája igen rövid életű a viszonylag lassan ható szabályozás időigényéhez képest. Így a $t \to \infty$ határátmenet az ökonómiában sohanapján megvalósuló szabályozást jelent: mire a kívánt állapothoz való közeledés megtörtént volna, e kívánt állapot (vagy pálya) már rég megváltozott. A távoli jövőben aszimptotikusan konvergáló szabályozás helyett a szabályozás adott pillanatban érvényesülő hatását kellene vizsgálni, mivel a tranziens jelenségeknek az ökonómiában sokkalta nagyobb szerepük van, mint a végállapotnak. Ha a szabályozás nem közvetlenül a kívánt állapot felé visz, ha egyes szabályozott jellemzők eltérése akár csak átmenetileg is növekedhet, akkor a szabályozás nyilván dezorientál.

Sem a stabil, sem az aszimptotikusan stabil szabályozás nem biztosítja a helyes orientációt ebben az értelemben. A stabil szabályozás esetén az egyes elemek fluktuálnak; az aszimptotikus szabályozás esetén, bár végső soron az elemek a zérushoz tartanak, de eleinte még növekedhetnek, vagy — csillapítva — fluktuálhatnak.

Mivel az eltérésvektort kormányzó egyenlet matrixának sajátértékeire tett szigorúbb kikötések, például a komplex sajátérték kizárása sem vezet a kívánt eredményre, nyilván csak olyan matrixtranszformációra gondolhatunk, amely a (tisztán reális) sajátértékek negativitását megtartva a matrix összes sajátvektorát nemnegatívvá vagy nempozitívvá, azaz egyező előjelűvé teszi.

Ilyen, az általános esetben felhasználható transzformációt eddig nem találtam, úgy vélem azonban, hogy e kérdés megoldhatóságának tisztázása az ökonómiai szabályozáselmélet egyik fontos problémája.

III.

Szabályozási előírások

1. Készletek szintjéről vezérelt szabályozás

1.1. Folytonos eset

A készletek növekedése a termelés és a fogyasztás különbségével egyenlő:

$$\dot{k}_t = (1 - F)x_t. \tag{1.1.1}$$

A $\overset{*}{k}$ készletnormától való eltérés arányában módosítjuk a termelést:

$$\dot{x}_t = \overset{*}{k} - k_t. \tag{1.1.2}$$

Az utóbbi egyenletet deriválva és az eredményt (1.1.1)-be helyettesítve:

$$\ddot{x}_t = (F - 1)x_t. \tag{1.1.3}$$

F maximális abszolút értékű sajátértéke 1. Ezért $(F - 1)$ sajátértékei mind negatív valós részűek, az egy zérus kivételével, amely az $F\bar{x} = \bar{x}$ egyensúlyi állapothoz tartozik. Mivel differenciálegyenletünk másodfokú, e sajátértékek négyzetgyöke adja a megoldásokat. A tisztán valós és negatív sajátértékek négyzetgyöke tisztán képzetes, valós része $= 0$. Tehát ha F sajátértékei mind tisztán valósak (pl. ha szimmetrikus, vagy hasonló egy szimmetrikus matrixhoz), akkor a szabályozás stabil. A rendszer viselkedése: az $\bar{x}$ egyensúlyi helyzetnek az x_0 kezdeti állapotban meglevő komponense az időben változatlanul megmarad, a többi (nem egyensúlyi) sajátvektor irányában a rendszer kezdeti állapota által meghatározott állandó amplitúdójú csillapítatlan rezgőmozgást végez a képzetes sajátértékeknek megfelelő frekvenciákkal.

A szabályozás ösztönzése, ill. fékezése 1-nél nagyobb vagy kisebb γ skalár megválasztásával az

$$\dot{x}_t = \gamma(\overset{*}{k} - k_t) \tag{1.1.2*}$$

egyenletre vezet. A rendszer együtthatómatrixa tehát $\gamma(F - 1)$ alakú lesz, amiből nyilvánvaló, hogy a rendszer viselkedése nem változik, csupán a frekvenciák növekednek $\gamma > 1$ esetén, illetve csökkennek $\gamma < 1$ esetén. Az ösztönzés gyorsabb lüktetéshez, a fékezés lassúbbodáshoz vezet, a sajátvektorok persze nem változnak.

Eredményeink eddig hasonlítanak a [9] dolgozat 4. pontjában levezetett eredményekhez.

Ha azonban az $F-1$ matrixnak konjugált komplex sajátértékei is vannak s ez az általános esetben nem zárható ki, sőt valószínű, akkor ezek négyzetgyöke biztosan ad pozitív valós részű gyököt, s ez esetben a szabályozás instabil lesz.

1.2. Diszkrét eset

(1.2.1) $$\Delta k_n = (1-F)x_n$$

(1.2.2) $$\Delta x_n = \overset{*}{k} - k_n$$

(1.2.3) $$\Delta^2 x_n = (F-1)x_n, \text{ vagyis}$$

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = (F-1)x_n$$

tehát

$$\begin{pmatrix} 2 & F-2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$$

Ez a differencia-egyenlet azonban már a legegyszerűbb gazdaságban is instabil szabályozáshoz vezethet matrixának többszörös gyöke miatt. $F = 1$ helyettesítéssel ugyanis az egyenletrendszer matrixa

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

alakú, ennek sajátértéke 1, kétszeres gyök. Legyen a kezdeti $x_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Ha most $a = b$ akkor a folyamat egyensúlyban marad, de $a > b$ esetén $+\infty$ felé, $a < b$ esetén pedig $-\infty$ felé tart.

2. Készletek változásáról vezérelt szabályozás

2.1. Folytonos eset

Mint az előbbiekben is

(2.1.1) $$\dot{k}_t = (1-F)x_t$$

Most a készletváltozással fordított arányban módosítjuk a termelést

(2.1.2) $$\dot{x}_t = -\dot{k}_t$$

Behelyettesítve ezt 2.1.1-be

(2.1.3) $$\dot{x}_t = (F-1)x_t$$

Ez elsőfokú differenciál-egyenletrendszer, együtthatómatrixa (1.1.3) matrixával egyező, azaz negatív valós részű sajátértékekkel bír a zéruson kívül. Ezért a szabályozás aszimptotikusan stabil, az $F\bar{x} = \bar{x}$ egyensúlyi állapot komponense változatlan marad, míg a többi sajátvektorokhoz negatív reális részű sajátértékek tartoznak.

Az ösztönző $\gamma >$ skalár beiktatásával

(2.1.2*) $$\dot{x}_t = -\gamma \dot{k}_t$$

Így a rendszer matrixa $\gamma(F-1)$ lesz. Ennek sajátértékei az eredeti rendszer γ-szorosai. Ezért ha F második legnagyobb pozitív reális részű sajátértéke β s így az eredeti rendszer leglassabban elhaló tagja $e^{(\beta-1)t}$ mértékében csökken, akkor a γ skalárral ösztönzött rendszer $e^{\gamma(\beta-1)t}$ mértékében tart zérushoz. $\gamma\beta - \gamma$ tetszőlegesen nagy negatív számmá tehető, s így a konvergencia sebessége tetszés szerint fokozható.

2.2. Diszkrét eset

(2.2.1) $$\Delta k_n = (1-F)x_n$$

(2.2.2) $$\Delta x_n = -\Delta k_n$$

Ezekből

(2.2.3) $$\Delta x_n = (F-1)x_n$$

azaz

$$x_{n+1} - x_n = (F-1)\,x_n$$

tehát

$$x_{n+1} = Fx_n\,.$$

Ez azonos a Mises-féle iterációval, amelyről tudjuk, hogy a matrix maximális 1 sajátértékéhez tartozó $F\bar{x} = \bar{x}$ egyensúlyi vektorhoz konvergál. A szabályozás ez esetben is aszimptotikusan stabil.[1]

Ha — mint az imént is — a második legnagyobb pozitív sajátérték β, akkor az ehhez tartozó zavaró sajátvektor β^n mértékben hal el. Ha azonban ösztönözzük a szabályozó egyenletet

(2.2.2*) $$\Delta x_n = -\gamma \Delta k_n,$$

amiből

(2.2.3*) $$\Delta x_n = \gamma(F-1)x_n$$

azaz

$$x_{n+1} - x_n = \gamma(F-1)\,x_n,$$

tehát

$$x_{n+1} = (\gamma F + 1 - \gamma)\,x_n.$$

A régi β sajátérték helyére most $\gamma\beta + 1 - \gamma$ nagyságú sajátérték lép. Bár ez $\gamma = -\dfrac{1}{\beta - 1} = \dfrac{1}{1-\beta}$ megválasztásával zérussá tehető, ugyanakkor ez az eljárás a többi sajátérték abszolút nagyságát növelheti. Pl. $\beta = 0{,}5$ esetén $\gamma = 2$, e választás azonban egy eredetileg mondjuk $-0{,}1$ nagyságú sajátértéket $2\,(-0{,}1) + 1 - 2 = -1{,}2$ nagyságúvá tesz, s ezzel a szabályozás instabillá válik. Az ösztönzés tehát csak az F matrix maximális negatív valós részű sajátértékének ismeretében alkalmazható a különösen veszélyesnek tartott zavaró vektorok erőteljes szűrésére vagy teljes kiiktatására.[2]

[1] Ha azonban $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ alakú, azaz ciklikus, s így sajátértékei ± 1, akkor a szabályozás csak stabil. Ezt az elméleti határesetet azonban a gyakorlatban figyelmen kívü hagyhatjuk, feltesszük, hogy a matrix nem ciklikus.

[2] Simonovits András felhívta figyelmemet, hogy a (2.2.2) egyenletszabályozásának gyakorlati kivitelezése lehetetlen. Helyesebb volna a $\Delta x_{n+1} = -\Delta k_n$ előírást adni a szabályozásra. Ekkor $x_{n+2} - x_{n+1} = (F-1)\,x_n$, azaz

$$\begin{pmatrix} 1 & F-1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Ez ismét instabilitáshoz vezethet többszörös gyökei miatt.

2.3. *A készletszabályozásról általában*

A készletszintről történő szabályozás részben stabil, részben instabil, a készletváltozásról történő szabályozás viszont általában aszimptotikusan stabil eredményekhez vezet. A differenciaegyenletek azonban, amelyek a szabályozás késleltetésének elemi ábrázolására alkalmasak, általában a készletszabályozás ellen szólnak.

Egy további probléma is felvetődik: ha az F matrixot úgy perturbáljuk, hogy legnagyobb sajátértéke kissé megnő, azaz a rendszer már csak *szűkített* újratermelésre képes, akkor a készletszabályozások *növekvő* termelési szintekhez vezetnek. Ha viszont csökken valamelyest e sajátérték, azaz a termelés *bővíthető* volna (illetve az $F = A + \lambda B$ alak figyelembevételével a növekedési ráta emelhető volna), akkor ellenkezőleg a szabályozók *csökkentik* a termelési szinteket. Még ha továbbra is jó arányok felé vezet a szabályozás, akkor is helytelen szintek alakulnak ki.

Nyilvánvaló ezenkívül, hogy mindezen szabályozások révén az F matrix perturbációjának kívánatos vagy nem kívánatos voltát nem tudjuk felmérni. A technikai változás az egyik legfontosabb ilyen perturbáció, s jogosan várhatjuk, hogy a szabályozás e kérdésre is feleletet adjon.

Ez utóbbi persze lehetne külön szabályozási mechanizmus tárgya, mert elvben a *mennyit termeljünk?* kérdése elválasztható a *hogyan termeljünk?* kérdésétől. A gyakorlatban azonban e két kérdés nem vált ketté, s ezért meg kell vizsgálni hasonló módon az árak révén történő szabályozást is. Az árak révén ugyanis mindkét kérdésre választ remélhetünk.

3. Nyereségről vezérelt szabályozás

3.1. *Folytonos eset*

Legyen az árvektor p, s ennek változása legyen egyenes arányban a túlkereslettel:

$$\dot{p}_t = (F-1)\,x_t. \tag{3.1.1}$$

Vegyük észre, hogy az így definiált árváltozás a negatívja az (1.1.1)-ben megadott készletváltozásnak. Érdekes ezt egybevetni azzal a korai „értékelméleti" nézettel, hogy az ár a termék ritkaságának következménye, magas ára olyan terméknek van, amely szűkös, míg a bőségben található termék ára alacsony.

Legyen most egy adott árrendszerrel a termékegységen elérhető nyereség $p - F^T p$, tehát az ár és önköltség különbsége, s változzék a termelés színvonala a nyereséggel egyenes arányban:

$$\dot{x}_t = (1-F^T)\,p_t. \tag{3.1.2}$$

Akkor e két egyenletrendszer összefogásával kapjuk:

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_t \\ \dot{x}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & F-1 \\ 1-F^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_t \\ x_t \end{pmatrix}. \tag{3.1.3}$$

Egyenletrendszerünk együttható matrixa ferdén szimmetrikus, s így* ismét csak tisztán képzetes gyökökkel van dolgunk, az $F\bar{x} = \bar{x}$ és $F^T\bar{p} = \bar{p}$ egyensúlyi volumen és árvektorokhoz tartozó zérus sajátértékeken kívül. A szabályozás stabil, a rendszer az egyensúlyi állapot körül csillapítatlan rezgéseket végez. Ösztönzésre, ill. fékezésre az (1.1.3) rendszerhez hasonlóan a rezgések gyorsulásával vagy lassulásával válaszol. E rendszert először Goodwin vizsgálta [7], egyes variánsainak gyakorlati adatokra való alkalmazása a [3] dolgozatban található.

E rendszer egyébként a klasszikus piaci mechanizmus egy igen szimpla modellje s némi útmutatást látszik adni a tőkés rendszerben kialakuló periodicitás létrejöttére, valamint frekvenciáira vonatkozóan.

3.2. Diszkrét eset

(3.2.1) $$\Delta p_n = (F-1)x_n$$

(3.2.2) $$\Delta x_n = (1-F^T)p_n$$

(3.2.3) $$\begin{pmatrix}\Delta p_n\\ \Delta x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & F-1\\ 1-F^T & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_n\\ x_n\end{pmatrix}$$

azaz

$$\begin{pmatrix}p_{n+1}\\ x_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & F-1\\ 1-F^T & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_n\\ x_n\end{pmatrix}$$

Az egyenletrendszer matrixa az előbbi rendszer matrixának és az egységmatrixnak összege. Sajátértékei tehát az egyensúlyi helyzethez tartozó 1 sajátértéken kívül 1+ képzetes rész nagyságúak, abszolút értékben tehát mind nagyobbak 1-nél, ezért a szabályozás instabil. Ezt az ösztönzés vagy fékezés sem képes megváltoztatni. A tiszta piaci mechanizmus tehát már az ilyen egyszerűen késleltetett alakjában sem ad stabilnak tekinthető szabályozást. Az eltérést Arrow—Hurwitz [1] eredményeitől az okozza, hogy nem tételezzük fel a termelési függvények konvexitását. A lineáris termelési függvények esetén létrejövő esetleges fluktuációra egyébként ők is utalnak tanulmányuk 83. oldalán.

4. Nyereségváltozásról vezérelt szabályozás

4.1. Folytonos eset

Legyen mint az imént is a piac egyenlete

(4.1.1) $$\dot{p}_t = (F-1)x_t$$

Szabályozzuk a volumenváltozást most a nyereség változásáról

(4.1.2) $$\dot{x}_t = (1-F^T)\dot{p}_t$$

a két egyenlet összekapcsolásával

(4.1.3) $$\dot{x}_t = (1-F^T)\,(F-1)x_t$$

* Lásd pl. [6].

Lineáris egyenletrendszer, amelynek együttható matrixa egy Gram-féle matrix negatívja. Mivel a matrix szimmetrikus, így a sajátértékek mind reálisak. Mivel továbbá a Gram-féle $M^T M$ alakú matrixok pozitív szemidefinitek vagy pozitív definitek [8], ezért a Gram matrix negatívja az esetleges szingularitáson kívül csupa negatív sajátértéket ad. A szingularitás nyilván ismét az $F\bar{x} = \bar{x}$ egyensúlyi helyzethez tartozik. A szabályozás aszimptotikusan stabil és megfelelő transzformációval (azaz „ösztönző" matrixszal) helyesen orientálóvá is tehető. A γ általános ösztönző faktor bevezetésével a konvergencia tetszés szerint fokozható.

4.2. Diszkrét eset

$$\Delta p_n = (F-1)x_n \tag{4.2.1}$$

$$\Delta x_n = (1-F^T)\Delta p_n \tag{4.2.2}$$

$$\Delta x_n = (1-F^T)(F-1)x_n \tag{4.2.3}$$

azaz

$$x_{n+1} = [(1-F^T)(F-1)+1]x_n$$

Ha a folytonos (4.1.3) rendszer sajátértékei λ_i értékűek ($\lambda_1 = 0$, $\lambda_n < \lambda_{n-1} < \\ < \ldots < \lambda_2 < 0$), akkor a jelen rendszer sajátértékei $1 + \lambda_i$ alakúak lesznek. Az $1 + \lambda_1 = 1$ értékhez megint az egyensúlyi állapot $F\bar{x} = \bar{x}$ sajátvektora tartozik. Ha $|\lambda_n| < 2$, akkor a rendszer aszimptotikusan stabil. Megfelelő *fékező* faktor beépítésével azonban $|\lambda_n| < 2$ mindig biztosítható.

4.3. A nyereségszabályozásról általában

Az árrendszeren s így a nyereségen alapuló szabályozás stabil, illetőleg instabil, a nyereségváltozásról történő szabályozás azonban aszimptotikusan stabil, illetve azzá tehető. Valószínűleg helyesen orientáló volta is biztosítható.

Az F matrix legnagyobb 1 sajátértékének perturbálása a nyereségváltozásról történő szabályozás esetében helyes irányba vezet. Mind a folytonos, mind a diszkrét esetben ugyanis a sajátérték növekedése a termelési szint csökkentéséhez, csökkenése a szint növekedéséhez vezet.

Mint másutt részletesen kimutattam, az egyensúlyú árrendszer alkalmas a technikai változások megítélésére [4]. Fennmaradó fogas probléma azonban, hogy az egyenletek p_t, illetve p_n értékére nem adnak jó megoldást — az áraknak az egyensúlyi ár felé való szabályozását (amely a helyes technológiai döntések előfeltétele) nem biztosítják. E probléma elméleti megoldását még nem látom világosan. Annyi a fentiekből világos, hogy ez itt nem bízható valamilyen „mechanizmusra", hiszen ha $\dot{p}_t$, illetve Δp_n értékét másként határozzuk meg, mint ahogy az a (4.1.1), ill. (4.2.1) egyenletekből adódik, akkor veszélyeztetjük a volumenszabályozás stabilitását. Csak időszakonkénti „külső" árrendezések jöhetnek tekintetbe, ezek pillanatnyi módosító „ugrását" a szabályozó mechanizmusnak figyelmen kívül kellene hagynia. Ez a megoldás azonban gyakorlatilag tisztázatlan.

(Beérkezett: 1972. december 21.)

IRODALOM

1. ARROW, K. J.—HURWITZ, L.: Decentralization and computation in resource allocation. Essays in Economics and Econometrics. Chapel Hill, 1960. University of North Carolina Press.
2. BELLMAN, R.: Stability theory of differential equations. New York, 1953. McGraw-Hill.
3. BRÓDY, A.: An input-output model of the market, a BRÓDY—CARTER (szerk.): Input-output techniques. 574—581. Amsterdam, 1972. North-Holland kötetben.
4. BRÓDY A.: Érték és újratermelés. Budapest, 1969. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
5. DANCS I.—SIVÁK J.: Készletjelzésen alapuló szabályozás egy Leontief-modellben. Kézirat.
6. GANTMACHER, F. R.: Matrizenrechnung I. Berlin, 1965. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.
7. GOODWIN, R. M.: Static and dynamic linear equilibrium models. Proceedings of the First International I—O. Conference.
8. KREKÓ, B.: Matrixszámítás. Budapest, 1964. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
9. KORNAI J.—MARTOS B.: Gazdasági rendszerek vegetatív működése. Szigma. 1971. IV. évf. 1—2. 35—50. o.
10. VIRÁG I.: Gazdasági rendszerek vegetatív működése sztochasztikus külső fogyasztással. Szigma 1971. IV. évf. 261—268. o.

ON CONTROL MODELS

The paper, continuing the investigation of Kornai—Martos examines 8 different control prescriptions on a simpler model.

The first part describes and motivates the model. The core of the model is a matrix $F = A + \lambda B$ which gives the current flow and fixed capital coefficients of the simple (or extended) reproduction. It is a nonnegative irreducible and primitive matrix, its spectral radius is 1. It does not distinguish material and commodity stocks, but it also contains the reproduction of labour. By the aid of this modelcore and the vector $\dot{x}$ of production levels, vector $\dot{k}$ of stock change and vector p of price change can be defined. By the aid of the price vector p the vectors of profit and profit change can be defined.

After introducing the Ljapunov stability the second part points out the criteria of control with correct orientation. This can be realized by a differential equation, with negative real eigen values and eigen vectors of identical sign.

Finally the third part, investigating the different simple control prescriptions obtains the following results:

Control signal	Continuous case Differential equation	Discrete case Difference equation
1. From level of stocks	stable or unstable	stable or unstable
2. From change of stocks	asymptotically stable (convergence can be increased)	asymptotically stable (convergence can be increased) or unstable
3. From profits	stable	unstable
4. From change of profits	asymptotically stable, (convergence can be increased) can be adjusted to orient correctly	asymptotically stable, or asymptotic stability can be ensured

О КОНТРОЛЬНЫХ МОДЕЛЯХ

Труд в продолжении исследования Корнаи—Мартош исследует 8 разных контрольных предписаний проще той модели.

Первая часть излагает и мотивирует модель. Ядро модели матрица $F = A + \lambda B$, которая дает текущие индексы и индексы капиталоемкости простого (или расширенного) воспроизводства. Это — такая не-отрицательная ирредуцибильная и примитивная матрица, спектральный радиус которой — I. Она не дает различия в материальных и товарных запасах, но содержит и воспроизводство рабочей силы. При помощи ядра модели и уровней производства $\dot{x}$ можно установить векторы изменения запасов $\dot{k}$ и измененич цен $\dot{p}$. А при помощи ценового вектора $\dot{p}$ можно установить векторы прибыли и изменения прибыли.

После изложения критериев стабильности по Ляпунову вторая часть показывает критерий правильно ориентировочного контроля. Это можно осуществлять дифференциальным уравнением, индекс-матрица которого дает отрицательные реальные основные стоимости и основные векторы одинакового знака после спектрального разложения.

Наконец третья часть, исследуя разные простые контрольные предписания, получает следующие результаты:

Управление контролем	Продолжительный случай Дифференциальное уравнение	Дискретный случай Уравнение разницы
1. С уровня запасов 2. С изменения запасов	стабильное или инстабильное асимптотически стабильное конвергенцию можно усилить	стабильное или инстабильное асимптотически стабильное конвергенцию можно усилить или инстабильное
3. С прибыли 4. С изменения прибыли	стабильное асимптотически стабильное, конвергенцию можно усилить, можно сделать правильно ориентировочным	инстабильное асимптотически стабильное, или из-за тормозирующего фактора асимптотическую стабильность можно обеспечить

Kovács Álmos—Stahl János

Dekompozíciós eljárás a vállalati érdekeltség mutatójának maximalizálása esetén

1. A nyereség kötelező megosztását előíró jövedelemszabályozási rendszer a vállalati érdekeltség középpontjába állítja a $q = \frac{N}{sB + E}$ mutatót. A q szerinti optimalizálás jellemző vonásaival foglalkoztunk [5]-ben. Egyúttal utaltunk arra is, hogy ez a célfüggvény nem csak vállalati szinten alkalmazható, hanem egy nagyobb aggregátum termelési tevékenységének optimalizálása során is cél lehet megfelelő q mutató maximalizálása, ha nem is állítjuk, hogy minden esetben ez a célfüggvény a legfontosabb. Érdemes mindenesetre utalnunk arra, hogy a számláló az adott aggregátumban létrehozott nemzeti jövedelemnek az erőforrás felhasználás által nem meghatározott részét reprezentálja — tehát adott termelési tényező felhasználás esetén a nemzeti jövedelem növekmény a nyereségben jelentkezik —, míg a nevező csökkenése azt eredményezheti, hogy több termelési tényező fordítható az életszínvonal alakulása szempontjából rendkívül fontos nem termelői ágazatok tevékenységének fokozására.

[5]-ben megmutattuk, hogy q maximalizálása elméletileg egy olyan decentralizált irányítási rendszerben is biztosítható, amelyben az egyes tevékenységek alkalmazásáról az eredeti feladathoz rendelt duális feladat feltételi egyenletei által definiált „gazdaságossági" vizsgálat alapján születik döntés, és az esetleg szükséges központi beavatkozás — a tevékenységek mértékének meghatározása — nem rontja a részegységek helyzetét. A gyakorlatban ritkán fordul elő, hogy valamennyi tevékenység önálló részrendszernek felel meg, sokkal jellemzőbb az olyan szerkezet, amelyben az egyes részrendszerek több tevékenységet fognak át, mégpedig oly módon, hogy a tevékenységek mértékének megszabásakor meghatározó szerepet játszó feltételek nagyobb része az illető részrendszerre vonatkozó speciális feltétel, és viszonylag kevés az olyan feltételek száma, amelyek összefűzik az egyes részterületeket. Ilyen szerkezettel reprezentálható mind a nagyvállalatok, mind pedig a nagyobb gazdasági egységek legtöbbje: a helyi feltételek a speciális gyári, ill. ágazati sajátosságokat, adottságokat tükrözik, míg a központi feltételek a vállalat, ill. a kérdéses gazdasági aggregátum egészében mozgatható erőforrásokra vonatkozó kikötéseket, ill. egyes, a rendszer egésze által teljesítendő feladatokra vonatkozó elvárásokat írnak le.

Egy ilyen rendszer lineáris programozási modelljének megoldására az egyik lehetőség a Dantzig—Wolfe eljárás alkalmazása [3]. Az ún. hiperbolikus [6] és a lineáris programozás bizonyos hasonlóságai alapján várható, hogy ez az eljárás hányados célfüggvény, így q maximalizálása esetén alkalmazható lesz.

A továbbiakban ezzel a kérdéssel foglalkozunk és tekintsük az alábbi programozási modellt:

$$\sum_j A_j x_j = b$$

$$B_j x_j = b_j \qquad (j = 1,2\ldots)$$

$$x_j \geq 0$$

$$\max \frac{\sum_j \bar{n}_j x_j + \sum_j \bar{v}_j}{\sigma \sum_j \bar{b}_j x_j + \sum_j \bar{e}_j x_j + \sigma \sum_j \bar{\beta}_j + \sum_j \bar{\varepsilon}_j}$$

ahol x_j a j részegység tevékenységeinek mértékeit mutató vektor ($j = 1, 2\ldots$);

A_j a j részegység tevékenységeinek a központi erőforrásokra és feladatokra vonatkozó fajlagos igényeinek és hozzájárulásainak mátrixa;

b a központi erőforrások és feladatok szintje;

B_j a j részegység tevékenységeinek az egyértelműen a részegységhez köthető (helyi) erőforrásokra és feladatokra vonatkozó fajlagos igényeinek és hozzájárulásainak mátrixa;

b_j a j részegység helyi erőforrásainak és feladatainak vektora, az $\bar{n}_j$, $\bar{v}_j$, $\bar{b}_j$, $\bar{e}_j$, $\bar{\beta}_j$, $\bar{\varepsilon}_j$ értékek a j részegység nyereség, bér és eszközmutatói, σ pedig a bérszorzó.

Az előbb elmondottaknak megfelelően ilyen modellel reprezentálható egy több gyáregységet egyesítő nagyvállalat, vagy valamely nagyobb gazdasági aggregátum, akár a népgazdaság egésze is. Az ilyen célfüggvény választását első esetben a szabályozó rendszer szinte kötelezővé teszi, utóbbi esetekben pedig legalábbis egy fontos alternatív célfüggvényről van szó. Egy Dantzig–Wolfe-típusú eljárás felhasználása sok esetben előnyös lehet egy ilyen modell megoldása során, így a megoldási eljárások vizsgálata is elvezethet ahhoz a kérdéshez, hogy milyen módosításokkal alkalmazható hányados célfüggvény esetén a módszer. E technikai probléma mellett felvetődik az a kérdés is, hogyan módosul hányados célfüggvény esetén az a szabályozási mechanizmus, amely lineáris célfüggvény esetén az eljárásra építhető. Egy ilyen szabályozási mechanizmus gyakorlati megoldást jelenthet a nagyvállalatok belső érdekeltségi rendszerének kérdésében. A belső érdekeltségi rendszer kialakítása a nagyvállalatokban fontos probléma, miután könnyen belátható, hogy az általános rendszer már számviteli okok miatt sem alkalmazható és további nehézséget jelent, hogy az egyes részegységek adottságaiban meglevő különbségeket is figyelembe kell venni. Nagyvállalati szinten egy dekompozíciós eljárásra épített belső érdekeltségi rendszer gyakorlati realizációja nem elképzelhetetlen, és bár nagyobb rendszerek esetén nem tartjuk reális alternatívának egy ilyen szabályozási mechanizmus kialakítását, jellemző vonásainak ismerete sokat segíthet a tényleges szabályozás helyes értékelésében.

2. A következőkben tehát a

$$
\begin{aligned}
&\sum_j A_j x_j = b \\
&B_j x_j = b_j \qquad (j = 1, 2 \ldots) \\
(1) \qquad &x_j \geq 0 \\
&\max \frac{\sum_j c_j x_j + \gamma}{\sum_j d_j x_j + \delta}
\end{aligned}
$$

programozási feladat dekompozíciós eljárással történő megoldásával foglalkozunk, ahol az A_j-k, B_j-k adott, megfelelő méretű mátrixok, az adott b, b_j-k, c_j-k, d_j-k és az ismeretlen x_j-k megfelelő méretű vektorok, γ és δ pedig adott számok. Mint eddig is, a továbbiak során nagybetűvel mátrixot, kisbetűvel vektort, görög betűvel pedig számot jelölünk és a méretek megfelelő voltát sem hangsúlyozzuk külön.

Azt vizsgáljuk, hogy a fenti feladat megoldásához milyen módosítások szükségesek a Dantzig—Wolfe eljárásban, vagy megfordítva a Dantzig—Wolfe eljárásbeli transzformáció után adódó, a fenti feladattal ekvivalens feladat megoldására miképpen alkalmazható a hányados célfüggvényű programozási feladatok megoldására javasolt [2]-beli eljárás. A szóbanforgó eljárásokat ismertnek tételezzük fel, ezért az adódó algoritmus verifikálását mellőzzük.

Feltételezzük, hogy minden j-re $\{x_j \mid Bx_j = b_j,\ x_j \geq 0\} \neq 0$. Ellenkező esetben az (1) feladatnak nyilván nincs megoldása. A későbbi algoritmusba egyébként egyszerűen beilleszthető ezen feltevés vizsgálata is. Feltesszük továbbá, hogy az 1)-beli feltételeket kielégítő minden $x = (\ldots x_j \ldots)$-re $\sum_j d_j x_j + \delta > 0$.

Jelöljük az $\{x_j \mid B_j x_j = b_j,\ x_j \geq 0\}$ poliéder kanonikus felbontásának elemeit $\bar{x}_{j1}, \bar{x}_{j2} \ldots, \bar{\bar{x}}_{j1}, \bar{\bar{x}}_{j2} \ldots$ -vel, ahol egyszeres felülvonás korlátos, kétszeres felülvonás pedig kúp összetevőbeli elemre utal [4].

Pontosan azért és ugyanolyan értelemben, mint lineáris programozási feladat esetén, az (1) feladat ekvivalens [3] a λ_{jk} és μ_{jk} változókra vonatkozó

$$
\begin{aligned}
&\sum_j \Big(\sum_k \bar{a}_{jk} \lambda_{jk} + \sum_k \bar{\bar{a}}_{jk} \mu_{jk}\Big) = b \\
&\sum_k \lambda_{jk} = 1 \qquad (j = 1, 2 \ldots) \\
&\lambda_{jk}, \mu_{jk} \geq 0 \\
(2) \qquad &\max \frac{\sum_j \Big(\sum_k \bar{\gamma}_{jk} \lambda_{jk} + \sum_k \bar{\bar{\gamma}}_{jk} \mu_{jk}\Big) + \gamma}{\sum_j \Big(\sum_k \bar{\delta}_{jk} \lambda_{jk} + \sum_k \bar{\bar{\delta}}_{jk} \mu_{jk}\Big) + \delta}
\end{aligned}
$$

programozási feladattal, ahol

$$
\begin{aligned}
\bar{a}_{jk} &= A_j \bar{x}_{jk} & \bar{\bar{a}}_{jk} &= A_j \bar{\bar{x}}_{jk} \\
\bar{\gamma}_{jk} &= c_j \bar{x}_{jk} & \bar{\bar{\gamma}}_{jk} &= c_j \bar{\bar{x}}_{jk} \\
\bar{\delta}_{jk} &= d_j \bar{x}_{jk} & \bar{\bar{\delta}}_{jk} &= d_j \bar{\bar{x}}_{jk}
\end{aligned}
$$

[2] alapján (2)-ben bevezetve a

$$\tau = \frac{1}{\sum\limits_j (\sum\limits_k \bar{\delta}_{jk} \lambda_{jk} + \sum\limits_k \bar{\bar{\delta}}_{jk} \mu_{jk}) + \delta}$$

$$\alpha_{jk} = \frac{\lambda_{jk}}{\sum\limits_j (\sum\limits_k \bar{\delta}_{jk} \lambda_{jk} + \sum\limits_k \bar{\bar{\delta}}_{jk} \mu_{jk}) + \delta}$$

$$\beta_{jk} = \frac{\mu_{jk}}{\sum\limits_j (\sum\limits_k \bar{\delta}_{jk} \lambda_{jk} + \sum\limits_k \bar{\bar{\delta}}_{jk} \mu_{jk}) + \delta}$$

változókat a

$$\sum_j (\sum_k \bar{a}_{jk} \alpha_{jk} + \sum_k \bar{\bar{a}}_{jk} \beta_{jk}) - b\tau = 0$$

$$\sum_k \alpha_{jk} - \tau = 0$$

$$(3) \qquad\qquad (j = 1,2\ldots)$$

$$\sum_j (\sum_k \bar{\delta}_{jk} \alpha_{jk} + \sum_k \bar{\bar{\delta}}_{jk} \beta_{jk}) + \delta\tau = 1$$

$$\alpha_{jk},\ \beta_{jk} \geq 0$$

$$\max\ (\sum_j (\sum_k \bar{\gamma}_{jk} \alpha_{jk} + \sum_k \bar{\bar{\gamma}}_{jk} \beta_{jk}) + \gamma\tau)$$

lineáris programozási feladat adódik. Ennek megoldásához sem szükséges a feladat explicit ismerete, a [3]-beli alapgondolat felhasználásával az alábbi algoritmust kapjuk:

2.1. Legyen $(f \ldots \varphi_j \ldots \varphi)$ (3) egy bázismegoldásához tartozó multiplikátor rendszer. (Megjegyezzük, hogy τ mindig bázisváltozó.)

2.2. Tekintsük a

$$B_j x_j = b_j$$

$$(4) \qquad x_j \geq 0$$

$$\max\ (c_j - f A_j - \varphi\, d_j) x_j$$

lineáris programozási feladatokat ($j = 1,2\ldots$).

2.3. Ha minden j-re (4) egy optimális extremális $\bar{x}_j$ megoldására

$$(5) \qquad (c_j - f A_j - \varphi\, d_j)\bar{x}_j \leq \varphi_j$$

az eljárás véget ér.

Ha az — egyébként a (3) lineáris programozási feladat optimális bázis megoldását szolgáltató — aktuális bázishoz tartozó $\tau \neq 0$, a bázismegoldásból képezhető

$$x = \frac{1}{\tau}(\ldots \sum_k \alpha_{jk} \bar{x}_k + \sum_k \beta_{jk} \bar{\bar{x}}_k \ldots)$$

optimális megoldása (1)-nek.

Ha $\tau = 0$ teljesül, a pillanatnyi (3)-beli célfüggvényérték, ami (3) optimumértéke is, az (1) feladat lehetséges célfüggvényértékeinek olyan felső korlátja, mely az aktuális bázis megoldás alapján nyerhető $\overline{\overline{x}} = (\ldots \sum_k \beta_{jk} \overline{\overline{x}}_k \ldots)$ irány mentén haladva tetszőleges pontossággal megközelíthető.

2.4. Ha valamely j-re a (4) feladat optimális megoldására (5) nem teljesül, vagy a szóbanforgó feladatnak nincs optimális megoldása, végezzük el a szimplex módszernél szokásos módon az aktuális bázisnak az $(A_j\overline{x}_j, 0, \ldots 1, \ldots 0, c_j\overline{x}_j)$ vagy $(A_j\overline{\overline{x}}_j, 0 \ldots 0 \ldots 0\, c_j\overline{\overline{x}}_j)$ vektorral történő transzformációját, ahol $\overline{x}_j$ (4)-nek egy (5)-t nem kielégítő extremális megoldása, illetve $\overline{\overline{x}}_j$ (4) megoldása során a nem korlátos esetben adódott olyan irány, melyre

$$(c_j - fA_j - \varphi d_j)\overline{\overline{x}}_j > 0$$

Ha a bázistranszformáció eredménye az, hogy az (5) feladat nem korlátos, nem korlátos az (1) feladat sem és az eljárás véget ér.

Ellenkező esetben az új bázishoz tartozó multiplikátor rendszert felhasználva folytassuk 2.2-től.

Ezen algoritmus esetleges számológépi realizálásakor nyilván végrehajthatók a [3]-mal kapcsolatban ismert és szokásos számítástechnikai fogások: pl. (4)-nek nem feltétlenül egy megoldása alapján módosítani (3) egy bázisát, bizonyos j-kre a (4)-beli feltételeket a „közös" $\sum_j A_j x_j = b$ feltételekhez soroljuk stb. ([1]) — természetesen az eljárás „játékszabályainak" szükséges módosítását is végrehajtva. Ide tartozik az a megjegyzés is, hogy a 2.1—2.4 algoritmus konvergencia szempontjából nyilván pontosan olyan, mint [3]. Így itt is kihasználható a [3]-mal kapcsolatos azon tapasztalat ([1]), hogy egy feladat megoldása során kezdetben az egy (vagy fix számú) iterációra eső célfüggvényváltozás általában nagyobb, mint a későbbiekben.

Ha (1)-re vonatkozóan még feltesszük, hogy (4) minden megoldására $d_jx_j > 0$, akkor 2.2. úgy is fogalmazható, hogy van-e a

$$B_jx_j = b$$

$$x_j \geq 0$$

$$\max \frac{(c_j - fA_j)\, x_j - \varphi_j}{d_j\, x_j}$$

hányados programozási feladatnak olyan megoldása, amelyhez φ-nél nagyobb célfüggvényérték tartozik.

(2) megoldására alkalmazhattuk volna a [6]-beli eljárást is. Mint ismeretes ([7]), ezen eljárás nyújtotta minden megoldásnak megfelel a [2] szerint nyert egy megoldás és megfordítva, valamint ugyanazon megoldástól indulva a két eljárásnál általában ugyanazon megoldások adódnak. Míg egy „közönséges" feladat megoldásakor a [6]-beli eljárást alkalmazva viszonylag egyszerűbb eszközökkel biztosítható, hogy ameddig csak lehetséges, úgy transzformáljuk a bázist, hogy a feltételek meghatározta konvex poliéder korlátos részében maradjunk, ugyanakkor az explicite nem adott (2) feladat esetén ezt csak jelentős többletráfordítással látjuk megoldhatónak. Természetesen nem lép fel ilyen probléma, ha a (2) feladat feltételei meghatározta poliéder korlátos, és így általában egy valóságos gazdasági problémából származó modell ese-

tében sem. Elsősorban azonban a következő részbeli interpretáció miatt részletezzük némileg ezt a lehetőséget is.

Legyen $(p \ldots \pi_j, \ldots)$ a (2)-beli tört számlálójához, illetve $(r \ldots, \varrho_j, \ldots)$ a nevezőjéhez, mint azonos feltételrendszerű lineáris programozási feladat célfüggvényéhez tartozó multiplikátor rendszer valamilyen bázismegoldás esetén és jelölje ekkor Γ és Δ a számláló, illetve nevező értékét. [6] szerint most olyan λ_{jk}-t, vagy μ_{jk}-t kell meghatároznunk, melyre

$$\Delta(\bar{\gamma}_{jk} - p\bar{a}_{jk} - \pi_j) - \Gamma(\bar{\delta}_{jk} - r\bar{a}_{jk} - \varrho_j) > 0,$$

illetve

$$\Delta(\bar{\bar{\gamma}}_{jk} - p\bar{\bar{a}}_{jk}) - \Gamma(\bar{\bar{\delta}}_{jk} - r\bar{\bar{a}}_{jk}) > 0.$$

Ugyanúgy, mint az előbb, ez a

$$Bx_j = b_j$$
$$x_j \geq 0$$
$$\max\,(\Delta)\,(c_j - pA_j)x_j - \pi_j(-\Gamma)\,(d_j - rA_j(x_j - \varrho_j)$$

$(j = 1,2 \ldots)$ lineáris programozási feladatok, illetve ezek optimumértékének vizsgálatát jelenti.[1]

Ha egy ilyen feladat korlátos és optimumértéke pozitív, a (2) feladat aktuális bázisába kerülő vektornak mindig lesz pozitív komponense: pl. a $\sum_k \lambda_{jk} = 1$ egyenletnek megfelelő és így a (2) feltételek meghatározta konvex poliéder korlátos részében maradunk.

Ha az utolsó feladatok valamelyik nem korlátos, megfelelő $\bar{\bar{x}}_j$-t pl. a

$$B_j x_j = 0$$
$$ex_j = 1$$
$$(\Delta(c_j - pA_j) - \Gamma(d_j - rA_j))x_j \geq \varepsilon \tag{6}$$
$$\max\, eB^{-1}A_j x_j$$

lineáris programozási feladat megoldásával kereshetünk, ahol B^{-1} a (2)-beli aktuális bázismegoldáshoz tartozó inverz mátrix megfelelő része, ε pedig alkalmas, pl. számológépi realizációtól függő kis pozitív szám. Minthogy (2) aktuális bázisának transzformációjához bármely pozitív célfüggvény értéket adó x_j-ből nyert vektor felhasználható, a [6]-beli algoritmus a (2) feladat megoldására való alkalmazásánál ezt célszerű figyelembe venni és (6) vizsgálatával csak szükség esetén foglalkozni.

3. A matematikai tárgyalás után a szektorfeladatok gazdasági értelmezési lehetőségeivel foglalkozunk és ezek kapcsán röviden vázoljuk az eljárásra építhető szabályozási mechanizmusokat is.

A részegységek által maximalizálandó célfüggvényt többféleképpen fogalmazhatjuk. Az első változat esetén a szektorok, az 1-beli jelöléseket használva az

$$(\bar{n}_j - fA_j - \varphi\,(\sigma\bar{b}_j + \bar{e}_j))x_j$$

[1] A cikk lektorának és Martos Bélának utalásai alapján [8]-ban megtaláltuk korlátos (4)-beli feltételrendszerek esetére az eljárás ezen változatát.

célfüggvényt maximalizálják. Ez a célfüggvény a nyereség maximalizálását írja elő úgy, hogy a tevékenységek hozamát $(\bar{n}_j x_j)$ csökkenteni kell az erőforrás felhasználásáért fizetendő „adókkal" $(fA_j x_j)$ és a termelési tényezők lekötéséért fizetendő járulékkal $\big(\varphi(\sigma\bar{b}_j + \bar{e}_j)x_j\big)$. Az adók között negatív értékek, „járadékok" is szerepelhetnek, ha a központi feltételek között az erőforrás korlátok mellett kötelező feladatok is vannak. Ennek a célfüggvénynek egy olyan decentralizált irányítási rendszer feleltethető meg, amelyben központilag az erőforrás felhasználásért fizetendő adókulcsokat, a kötelező feladatokhoz való hozzájárulásért fizetendő járadékkulcsokat és az újonnan lekötött termelési tényezőkért fizetendő járulék kulcsot írják elő. A részegységek egyedi adóztatására ebben a rendszerben nincs szükség, elegendő, ha a központ hasonlítja össze a φ_j értékeket és a szektorok nyereségmutatóit. Így biztosítható, hogy a szektor érdekeltségét kifejező mutató általában pozitív értéket kapjon, tehát optimális értéke nem lesz zérus.

Ha a feladatban szereplő részegységek mindegyike esetén feltehetjük, hogy bármely lehetséges szektorprogram új termelési tényezők felhasználását is előírja — tehát a változó termelési tényező lekötés $(\sigma\bar{b}_j + \bar{e}_j/x_j > 0$ — akkor a szektorok célfüggvénye

$$\frac{(\bar{n}_j - fA_j)\,x_j - \varphi_j}{(\sigma\bar{b}_j + \bar{e}_j)\,x_j}$$

formában is írható. Ez a célfüggvény tehát az egységnyi újonnan lekötött termelési tényező mennyiségre jutó nyereség maximalizálását írja elő. A hozamot ebben az esetben az erőforrás felhasználásáért fizetendő adók mellett a részegység számára központilag előírt egyedi adóval kell csökkenteni. Így a megfelelő decentralizált irányítási rendszerben az erőforrás adók (és járadékkulcsok) mellett a részegységek egyedi adójának meghatározására van szükség, de nem kell előírni a termelési tényező lekötésre vonatkozó járalékkulcsokat. A szabályozók módosítását a központ ebben az esetben φ és a szektorokban kialakult termelési tényező arányos hozam összehasonlítása alapján kezdheti el. A szektorok érdekeltségét kifejező mutató ebben a rendszerben mindig pozitív lesz.

A harmadik — talán némileg mesterkéltnek tűnő — megoldás esetén a részegységek érdekeltségét az

$$\bar{n}_j x_j - pA_j x_j - \frac{\Gamma}{\Delta}\big((\sigma\bar{b}_j + \bar{e}_j)\,x_j - rA_j x_j - \varrho_j\big).$$

mutatóhoz fűzi a rendszer. Az elsőnek említett célfüggvényhez hasonlóan ebben az esetben is a részegység nyereségének maximalizálása a cél. A hozamot ebben az esetben is az erőforrás felhasználás arányos adókkal és az újonnan lekötött termelési tényezőkért fizetendő járulékkal kell csökkenteni, e járulék meghatározása ebben az esetben azonban több lépésben történik. A rendszer a részegységek termelési tényező felhasználását is értékeli: a tényleges felhasználást módosítani kell az egyes erőforrások termelési tényező igényességét kifejező adók és járadékok összegével, amelyet a tényleges erőforrás felhasználás után központilag megállapított kulcsok szerint kell meghatározni ($A_j x_j$), majd az így módosított termelési tényező felhasználás még csökkenthető a részegységenként egyedileg megállapított módosító tényezővel (ϱ_j). Az így korrigált termelési tényező összeg után fizetendő járulék kulcsa megegyezik a termelési tényező átlagos hozadékával (Γ/Δ). Ez a megoldás lényegesen nehézkesebbnek tűnik az előzőnél, ugyanakkor látható, hogy a megfelelő szabályozási rendszer a korábbiaknál több szempont figyelembe vételére alkalmas. Az erőforrás felhasználás kettős értékelése bizonyos esetekben indokolt lehet. (Gondoljunk például arra az esetre, amikor valamely erőforrás korlát növelése esetén lehetőség van egy nyereséges, de új termelési tényező lekötést nem igénylő tevékenység alkalmazására. Emellett várható, hogy egy ilyen rendszerben kisebb megrázkódtatásokkal jár a szabályozók módosítása. Hasonlóan értékelhetjük esetenként a rendszernek azt a vonását is, hogy a ϱ_j módosító tényezők révén lehetőséget ad a részegységek termelési tényező igényességének differenciált figyelembe vételére.

Egészen általános szinten nem volna célszerű bármiféle sorrendet felállítani az előzőekben ismertetett rendszerek között, esetleges alkalmazási kísérletek esetén a tényleges körülmények figyelembe vételével választható ki a legmegfelelőbb változat. Már utaltunk rá, hogy az ilyen szabályozási rendszerek alkalmazása inkább csak nagyvállalati szinten tekinthető reális lehetőségnek, bár egyes elvek ennél magasabb szintek irányítási rendszerében is figyelembe vehetők. De még viszonylag egyszerűbb rendszerek, tehát egy nagyvállalat esetén is csak úgy képzelhető el az eljárásra épülő decentralizált irányítási rendszer alkalmazása, hogy egy előkészítő számítássorozat alapján a központ meghatározza a szabályozók értékeit (adó, járadék és járulék kulcsok, esetenként egyedi adók), és ezek az értékek a tervezési időszakban már érvényben maradnak. A részegységek ezeknek a szabályozási eszközöknek a figyelembe vételével készítik el gazdálkodási terveiket és az iteráció következő szakaszára, a központi feladat következő megoldására és ennek megfelelően a szabályozók esetleges módosítására csak a következő periódusban kerül sor. Így tulajdonképpen egyetlen szakaszban sincs szó az optimális szabályozási paraméterek alkalmazásáról — az optimális terv megvalósítása még ebben az esetben is megkövetelné a szektorprogramok központi „keverését", tehát a szektorok optimális tevékenységeihez tartozó „súlyok" előírását — hanem egy olyan irányítási rendszerről beszélhetünk, amelyben a szabályozási elemek mértékeinek módosítása a megelőző időszakok tapasztalatainak figyelembe vételével és a rendszer pillanatnyi helyzetének átfogó értékelése alapján történik és így várható, hogy ez a szabályozás olyan befolyást gyakorol a részegységekre, hogy tevékenységük tendenciájában megfelel a teljes rendszer (népgazdaság, nagyvállalat) érdekeinek. Az optimum merev előírása helyett azért is jogosnak látszik egy ilyen eljárás alkalmazása, mert a modell egyrészt csak megközelítőleg tükrözi a gazdasági valóságot, másrészt pedig a feltételek állandó változása miatt az optimális terv a realizálás idején valószínűleg már nem tekinthető optimálisnak.

(Beérkezett: 1972. december 21.)

IRODALOM

1. BEALE, E. M. L.: Mathematical programming in practice. 1969. Pittman.
2. CHARNES, A.—COOPER, W. W.: Programming with linear fractional functionals. Naval Research Logistics Quarterly, 9/2 (1962).
3. DANTZIG, G. B.—WOLFE, Ph.: The decomposition algorithm for linear programs. Econometrica, 29/4 (1961).
4. GOLDMANN, A. I.: Resolution and separation theorems for polyhedral convex sets. In: KUHN, H. W.—TUCKER, A. W. (szerk.): Linear inequalities and related systems. Princeton, 1956. University Press.
5. KOVÁCS, Á.: Az $\frac{N}{sB + E}$ mutató szerinti optimalizálás egyes kérdései. Szigma, 1972/4.
6. MARTOS, B.: Hiperbolikus programozás. MTA Matematikai Kutató Intézet Közleményei, V/2 (1960).
7. WAGNER, H. M.—YUAN, J. S. C.: Algorithmic equivalence in linear fractional programming. Management Science, 14/5 (1968).
8. KÖRTH, H.: Ein Zerlegungsprinzip für die hyperbolische Optimierung. Wissenschaftliche Zeitschrift der Humboldt-Universität zu Berlin, XVIII/5 (1969).

DECOMPOSITION PROCEDURE IN CASE OF MAXIMIZING THE INDEX OF ENTERPRISE INTEREST

The paper deals with a decomposition procedure leading to the solution of the programming problem (1) with fractional objective function and the economic interpretation of the processes.

The system of constraints in (1) can be considered as a model of production possibilities of a large enterprise unifying several factories and the objective function prescribes the maximization of the quotient of the enterprise profit and different production factors the index number which is in the focus of enterprise's interest according to the income regulation system prescribing the obligatory sharing of profits.

Decomposition processes can be obtained for the problem (1) if the algorithms suggested for programs are applied to problem (2) (also with fractional objective function) obtained by the basic principle of the Dantzig—Wolfe procedure.

Then the authors deal with the economic interpretation of the sector problems of these — mathematically equivalent — decomposition procedures; in this connection the control mechanisms that can be built on these procedure are outlined. In the first procedure profit is maximized, in the second — profit per unit production factor, in the third — profit again, calculated in another way.

ПРОЦЕСС РАЗЛОЖЕНИЯ В СЛУЧАЕ МАКСИМИЗАЦИИ ПОКАЗАТЕЛЯ ИНТЕРЕСА НА ПРЕДПРИЯТИИ

Статья занимается решением задачи программирования (I) с целевой функцией частного при помощи процесса разложения и экономическим толкованием получающихся процессов.

Систему условий (I) напр. можно считать моделью производственных возможностей крупного преприятия, соединяющего некоторые заводы, а целевая функция предписывает максимизацию показателя, поставленного в центре интереса предприятия системой »онтроля запрлат, предписывающей обязательное распределение прибыли, т. е. максимизацию частного прибыли и разных производственных факторов на предприятиях.

Применяя в отношении задачи — также с целевой функцией частного — полученной с (I) основным принципом процесса Данцига-Волфе алгоритмы, предложенные на решение задачи программирования мы получаем процессы разложения на задачу (2).

Затем авторы занимаются экономическим толкованием секторных задач прежних — математически одинаковых — процессов разложения, в связи с этим они кратко останавливаются на механизме контроля, построенном на процессы. В течение решения задач, в первом процессе максимизируется прибыль, во втором — прибыль на единичный производственный фактор, а в третьем, начисленном другим образом — опять прибыль.

Simon György

A reflektorprogramozás elvei és algoritmusa

1. Bevezetés

Az első kérdés, amelyre válaszolnunk kell: *mi a reflektorprogramozás?* Tágabb értelemben így nevezhetjük mindazokat a lehetséges programozási eljárásokat, amelyek felhasználják az ún. reflektorelvet (lásd a cikk 2. részét). Szűkebb értelemben a reflektorprogramozás jelenleg heurisztikus alapokon nyugvó algoritmus nagyméretű lineáris programozási feladatok megoldására. Az utóbbi értelemben használjuk a kifejezést a cikk további részében, ahol kísérletet teszünk a reflektorprogramozási modellek és algoritmus ismertetésére. A konkrét eljárás használhatóságát kísérleti számítások verifikálják, a konvergencia matematikailag még nincs bizonyítva.

A reflektorprogramozással kapcsolatos kutatásokra a szerzőt azok a problémák ösztönözték, amelyek a dekompozíciós eljárásoknak (lásd elsősorban [1]-et és [2]-t) a népgazdaságtervezésben történő alkalmazása kapcsán merültek fel. A nehézségek (lassú vagy nem kielégítő konvergencia, a központi feladat összeállításának és megoldásának problémái stb.) elemzése arra a következtetésre vezetett, hogy nagyméretű feladatok megoldására szolgáló hatékony programozási eljárás nem ignorálhatja a ,,szektorok'' közötti, *horizontális* kapcsolatokat. Egy ilyen módosítás azonban a dekompozíciós szemlélet gyökeres felülvizsgálását, a dekompozíciós elvnek a reflektorelvvel való helyettesítését követelte meg. Utóbbival függ össze a reflektorprogramozás elnevezése, amelynek első ismertetését lásd [3]-ban, továbbá [4]-ben és [5]-ben.

Az utóbbi években kísérleti számításokat folytattunk. A számítások első szakaszának eredményeit a [7] tanulmány foglalta össze. Jelen előadás a reflektorprogramozásnak a kísérleti számítások tapasztalatai figyelembevételével továbbfejlesztett algoritmusát ismerteti.

A reflektorprogramozás alapján bizonyos következtetések vonhatók le az ésszerű gazdaságirányítási rendszer sajátosságaival kapcsolatban. Ezzel a kérdéssel az [5] és [6] munka foglalkozott részletesebben.

2. A reflektorprogramozás elvei

A reflektorprogramozás néhány, egymással kapcsolatban álló elvre épül. Három főbb elvet emelünk ki: 1. reflektorelv, 2. policentrikusság elve, 3. sztereoszkopikus látás elve.

A *reflektorelv*et analógia alapján érthetjük meg. A fényszórót bekapcsolva a megvilágítás erőssége szempontjából több terület keletkezik. A legerősebb megvilágítást a reflektor fókuszában kapjuk, de létrejönnek közepesen és gyengén megvilágított területek is, miközben a fényszóró kezelőjének (pl. autóvezetőnek) utóbbiak is fontos, gyakran nélkülözhetetlen információt nyújtanak. Tételezzük fel, hogy valamely bonyolult feladat elvégzéséhez nagy területet kell erősen megvilágítani. Ugyanakkor olyan reflektorokkal rendelkezünk, amelyek csak viszonylag kis területet képesek erősen (fókuszált fénnyel) megvilágítani. Ezért *úgy állítjuk be a reflektorokat, hogy együttesen biztosítsák a nagy terület erős megvilágítását*, miközben minden egyes reflektor csak viszonylag kis területre bocsát fókuszált fényt, bár gyengén az egész területet láthatóvá teszi.

Ezzel a feladatot meg is oldottuk volna, ha minden részvevő látná valamennyi reflektor fényét. Esetünkben azonban más a helyzet. A reflektorok különböző színű fényt bocsátanak ki, s a részvevők (a reflektorok és részvevők száma azonos) e színárnyalatok közül csak egyet, mindegyik másikat képes *közvetlenül* érzékelni, mivel speciális szemüveget viselnek, amely csak bizonyos színű fényt bocsát át.

Feltételezzük, hogy minden részvevő azon a területen tevékenykedik, amelyet saját reflektora világít meg erősen. Ahhoz azonban, hogy feladatát sikeresen elvégezze, lényegesen több információval kell rendelkezni a *többi* területről, mint amit saját reflektorának gyenge fénye biztosít. Ezért a részvevők információs kapcsolatba lépnek egymással: mindegyik közli a saját területére vonatkozó leglényegesebb, a *többiek számára is fontos* ismereteit az összes többi részvevővel.

Gyakorlatilag az információáramlás információs központ vagy központok közbeiktatásával egyszerűsíthető, ahol bármely részvevő csupán egy helyre ad át (ill. egy helyről kap) információt.

Tételezzük fel, hogy *minden részvevő a többiektől kapott információ alapján megváltoztatja tervezett tevékenységét, s erről informálja a többi részvevőt*, utóbbiak szintén módosítják magatartásukat stb. Ily módon egy hosszabb, soklépéses, iteratív folyamathoz jutunk. Ebben jelölhető meg a fentebb vázolt *reflektorelv dinamikus aspektusa*. Nem nehéz belátni, hogy a reflektorelv tulajdonképpen az *általános visszacsatolás elvét* is tartalmazza.

Mindez természetesen önmagában nem elegendő ahhoz, hogy a részvevők bizonyos számú iteráció után eljussanak a bonyolult feladat legjobb megoldásához, a globális optimumhoz, vagy legalábbis annak közelébe. Az eljárás konvergenciája azon múlik, hogy

a) miként használják az egyes részvevők saját reflektoraikat (hogyan állítják össze reflektorprogramozási feladataikat);

b) milyen információt adnak át a többieknek és hogyan építik be a többiektől kapott információt saját reflektorprogramozási modelljeikbe.

E kérdésekről később lesz szó, a lineáris programozás általános feladata vonatkozásában. Előbb a reflektorprogramozás két további elvét ismertetjük.

A *policentrikusság elve* azt fejezi ki, hogy a reflektorprogramozás nem tételez fel valamely, a szektoroktól elkülönült központot: *minden szektor a maga területén központ*ként funkcionál. A policentrikusság elve lényegében a reflektorelvből következik, hasonlóan ahhoz, ahogy a dekompozíciós elvből az egyközpontúság és hierarchikus többszintűség.

Úgy vélem, hogy a policentrikusság pontosabban megfelel a gazdasági valóságnak, mint például a DW eljárás által feltételezett egyközpontúság. Így például *a KGST-ben részvevő országok közötti tervkoordináció csak a policentrikusság figyelembevételével modellezhető*. De sok tekintetben hasonló a helyzet az egyes szocialista országokon belül is, különösen a gazdasági reformok kibontakozása óta.

Látni kell továbbá, hogy a policentrikus irányítás határesetként az egyközpontú irányítást is tartalmazza, továbbá a policentrikus rendszerben résztvehetnek, a reflektorprogramozással modellezhetők a szektoroknál (ágazatoknál vagy vállalatoknál) magasabb szintű gazdasági irányítószervek (minisztériumok, területi szervek, Tervhivatal stb.) is. Ebben az értelemben a reflektorprogramozás a *vertikális és horizontális kapcsolatok együttes figyelembevételével* történhet.

A reflektorprogramozás tervezési alkalmazásának egyik potenciális előnye, hogy egyetlen, *időben párhuzamosan* futó folyamattá integrálja a különböző szinteken (vállalatoknál, minisztériumokban, Tervhivatalban stb.) folyó tervezést, ahol minden szerv minden más szervvel állandó információs kapcsolatban, kölcsönhatásban áll, s ily módon kikapcsolja, minimálisra csökkenti a tervezés ,,holtidőit''.

A *sztereoszkopikus látás elvét* a reflektorelv kapcsán tárgyalt analógiából kiindulva értelmezhetjük. Tételezzük fel, hogy minden reflektor kettős fényt bocsát ki, s a részvevők speciális szemüvegei átbocsátják saját reflektoruk kettős fényét: egyiket a jobb, másikat a bal szemhez, ily módon sztereoszkopikus látást biztosítva.

A reflektor kettős fényének esetünkben a matematikai programozás primál és duál feladata felel meg. Másképp fogalmazva: a reflektorprogramozás egyidejűleg támaszkodik volumen- és árinformációkra a globális optimum közelítése során. Vagyis a sztereoszkopikus látás elve esetünkben megfelel a *primál és duál feladatok kombinálása elvének.*

A primál és duál feladatok eredményeit *bizonyos mértékben* a DW eljárás, valamint a ,,kétszintű tervezés'' is kombinálják. A központ itt árakat *vagy* korlátokat ír elő a szektoroknak, a szektorok volumeneket *vagy* árakat jelentenek a központnak. A reflektorprogramozásban azonban a vertikális információáramlás helyett (vagy mellett) megjelennek a horizontális (szektorok közötti) volumen- és árinformációk, *egyszerre* adják át és használják fel *mindkétféle* információt. Ebben az értelemben a sztereoszkopikus látás elve a reflektorprogramozás sajátossága.

Úgy gondolom, hogy a vázolt elvek érvényesülése módot nyújt a reflektorprogramozás felhasználására nemcsupán a hagyományos központi tervezés keretében, hanem *a szocialista tervpiac integrált szimulálására* is, mind egy-egy ország, mind pedig nagyobb gazdasági közösségek (pl. KGST) keretében. A reflektorprogramozás alkalmazásának egyidejűleg, egymással kombináltan adható tervezési, piaci és szimulációs aspektus. Mit jelent ez kissé közelebbről?

A reflektorprogramozás *tervezési aspektusa* kifejeződhet a központi tervező szervek, vertikális összefüggések bekapcsolásában, volumeninformációk szisztematikus felhasználásában, társadalmi célfüggvény figyelembevételében.

Az eljárás *piaci aspektusa* megnyilvánulhat a részvevők viszonylagos önállóságában (policentrikusság), a horizontális, piaci kapcsolatok figyelembevételében, az árak és hozzájuk kapcsolódó gazdasági ösztönzők bekapcsolásában.

A *szimulációs aspektus* a folyamat iteratív jellegében, valamint abban fejeződhet ki, hogy a részvevők a kapott eredmények függvényében módosíthatják saját területük kiinduló adatait, miután adott kiinduló adatokkal az eljárás már eljutott a globális optimumhoz, ill. annak közelébe.

E kérdések részletes kifejtése azonban túlmegy jelen munka tárgyán (lásd [5], [6]). A továbbiakban a szűkebb értelemben vett reflektorprogramozás algoritmusáról lesz szó.

3. A reflektorprogramozási modellek szerkezete összeállítási szabályai

A reflektorprogramozás alapfeladata azonos a lineáris programozás általános (felső korlátokat, egyenlőségeket és alsó korlátokat tartalmazó) feladatával. A feltételrendszer alakjára semmiféle megszorítást nem teszünk. Az eljárást a lineáris programozás ún. normálfeladatán mutatjuk be, tekintettel arra, hogy minden lineáris programozási feladat visszavezethető a normálfeladatra, két normálfeladat egymás utáni megoldása révén [8].

Az alapfeladatot tehát a lineáris programozás szokásos primál—duál feladatpárjával jellemezhetjük.

Primál feladat *Duál feladat*

$$(3.1)\quad \begin{cases} a)\ Ax \leq b \\ b)\ cx \to \max \\ c)\quad x \geq 0 \end{cases} \qquad (3.2)\quad \begin{cases} a)\ pA \geq c \\ b)\ pb \to \min \\ c)\ p \geq 0 \end{cases}$$

Az egyszerűbb tárgyalás kedvéért a (3.1) primál feladatot a volumentervezési feladattal (x vektor komponensei a tevékenységek volumenei), a (3.2) duál feladatot pedig az ártervezési feladattal (p vektor komponensei az árak) azonosítjuk. A latin nagybetűk matrixot, a latin kisbetűk vektort jelölnek. A sor- és oszlopvektort helye különbözteti meg egymástól. Az A matrix és c vektor tartalmazhat negatív elemeket is, a b vektor nem negatív.

A leírás egyszerűsítése érdekében a továbbiakban a primál feladattal foglalkozunk, mivel annak optimális megoldása szimplex módszerrel megadja nemcsak az optimális tevékenységvolumeneket (x^0), hanem az optimális árakat (p^0), más néven árnyékárakat is.

A reflektorprogramozás modellrendszerét a következő főbb szabályok szerint alakítjuk ki (jelölésük F1, F2 stb.):

F1. Minden primál és duál változó az alapfeladatnak megfelelő részletezettséggel (ún. saját változóként) kell hogy szerepeljen *legalább egy* reflektorprogramozási feladatban.

F2. Minden reflektorprogramozási modell fel kell hogy ölelje a megfelelő (primál vagy duál) alapfeladatot, de a *nem saját* változók tekintetében transzformált (sűrített) alakban.

F3. A *nem saját primál és duál változók* (külső tevékenységek és külső korlátozó feltételek) *összevonásá*hoz azokat az értékeket kell felhasználni, amelyek e változókra olyan reflektorprogramozási feladatok optimális megoldásaként adódtak, ahol a szóban forgó változók saját változóként szerepeltek. Ha valamely változó egynél több reflektorprogramozási modell saját változója, a számtani átlagérték alkalmazandó.

F4. Az *első iterációb*an az összevonáshoz a priori értékeket kell alkalmazni, amelyek lehetnek pl. bázisidőszaki volumen- és áradatok, prognosztizált adatok vagy — triviális esetben — nullvektorok. A további iterációkban mindig a megelőző iteráció eredményei használandók fel a nem saját változók összevonásához.

F5. Az alapfeladat transzformált alakján kívül a reflektorprogramozási feladatok ún. *árstabilizáló faktorokat*, valamint *volumenmódosító alsó korlátokat* is kell hogy tartalmazzanak, ha a primál feladatban vannak lokális korlátozó feltételek. *Lokális korlátozó feltételnek* nevezzük azokat a feltételeket, amelyek csak egy feladat saját primál változóit korlátozzák. A többi korlátozó feltétel *nem-lokális*.

F6. A *nem saját primál változók* (külső tevékenységek) minden reflektorprogramozási feladatban két változóvá vonandók össze:

1. Aggregált *versenyző tevékenységek* (az adott reflektorprogramozási modell saját erőforrásait kibocsátó nem saját tevékenységek);
2. *Egyéb nem saját tevékenységek.*

F7. A *nem saját duál változók* (külső korlátozó feltételek) az alábbi négy korlátozó feltétellé vonandók össze:

1. Aggregált *nemlokális termékfeltételek,* más szóval negatív elemet tartalmazó, vagyis olyan feltételek, amelyek a külső tevékenységek által kibocsátott erőforrásokra vonatkoznak;
2. Aggregált *nemlokális egyéb feltételek;*
3. Aggregált versenyző tevékenységek lokális feltételei (összevontan);
4. Aggregált egyéb nem saját tevékenységek lokális feltételei (összevontan).

A *reflektorprogramozási primál feladat általános alakját a* (3.3)—(3.7) *összefüggések tartalmazzák,* egyúttal formalizálva a reflektorprogramozás lineáris esetre kidolgozott algoritmusának néhány alapvető elemét.

Az alábbiakban megadjuk a (3.3)—(3.7) összefüggésekben szereplő jelölések magyarázatát.

Jobb alsó indexek:

t = iterációs lépés sorszáma (pl. $t = 1$ az első iterációt jelöli);
s = reflektorprogramozási modell sorszáma.

Matrixok esetében két s áll egymás mellett, az első a sorokra, a második az oszlopra vonatkozik. Aláhúzással jelöltük, ha a sorok vagy oszlopok a reflektorprogramozási modell *nem saját* változóihoz tartoznak: pl. A_{ss} matrixnak mind sorai, mind oszlopai az s feladat saját változóira vonatkoznak, ezzel szemben $A_{\underline{s}s}$ matrixnak csak az oszlopai. Analóg értelme van *vektorok s* indexének: pl. x_s vektor az s feladat saját primál változóit, $x_{\underline{s}}$ vektor nem saját primál változóit jelöli.

Bal felső indexek:

k = versenyző tevékenység sorszáma;
z = egyéb nem saját tevékenységek sorszáma;
q = nemlokális terméktípusú (nem saját) feltételek sorszáma;
r = nemlokális (nem saját) feltételek sorszáma.

Matrixok esetén a bal felső kettős indexekre is érvényes, hogy az első index a matrix soraira, a második oszlopaira vonatkozik. Egy bal felső matrixindex esetén az összefüggésből értelemszerűen adódik, hogy sorokról vagy oszlopokról van-e szó.

Reflektorprogramozási modell
(Primál feladat)

(3.3)

$$
\begin{cases}
\text{a)}\ A_{ss}\, x_{st} + {}^k\gamma_{st} \mid {}^kA_{ss}\, {}^kx_{\underline{s}(t-1)} \mid + {}^z\gamma_{st} \mid {}^zA_{s\underline{s}}\, {}^zx_{\underline{s}(t-1)} \mid & \le b_s \\
\text{b)}\ \mid {}^qp_{\underline{s}(t-1)}\, {}^qA_{s\underline{s}} \mid x_{st} + {}^k\gamma_{st} \mid {}^qp_{\underline{s}(t-1)}\, {}^{qk}A_{\underline{ss}}\, {}^kx_{\underline{s}(t-1)} \mid + {}^z\gamma_{st} \mid {}^qp_{s(t-1)}\, {}^{qz}A_{\underline{ss}}\, {}^zx_{\underline{s}(t-1)} & \le {}^qp_{\underline{s}(t-1)}\, {}^qb_{\underline{s}} \\
\text{c)}\ \mid {}^rp_{s(t-1)}\, {}^rA_{s\underline{s}} \mid x_{st} + {}^k\gamma_{st} \mid {}^rp_{\underline{s}(t-1)}\, {}^{rk}A_{\underline{ss}}\, {}^kx_{\underline{s}(t-1)} \mid + {}^z\gamma_{st} \mid {}^rp_{\underline{s}(t-1)}\, {}^{rz}A_{\underline{ss}}\, {}^zx_{\underline{s}(t-1)} \mid & \le {}^rp_{\underline{s}(t-1)}\, {}^rb_{\underline{s}} \\
\text{d)}\ \qquad {}^k\gamma_{st} \mid {}^kp_{\underline{s}(t-1)}\, {}^{kk}A_{\underline{ss}}\, {}^kx_{\underline{s}(t-1)} \mid \qquad + {}^ku_{st} & = {}^kp_{\underline{s}(t-1)}\, {}^kb_{\underline{s}} \\
\text{e)}\ \qquad {}^z\gamma_{st} \mid {}^zp_{\underline{s}(t-1)}\, {}^{zz}A_{\underline{ss}}\, {}^zx_{\underline{s}(t-1)} \mid \qquad + {}^zu_{st} & = {}^zp_{\underline{s}(t-1)}\, {}^zb_{\underline{s}} \\
\text{f)}\ \qquad {}^k\gamma_{st} \mid {}^kp_{\underline{s}(t-1)}\, {}^{kk}A_{\underline{ss}}\, {}^kx_{\underline{s}(t-1)} \mid \qquad - {}^kv_{st} & = \alpha_{st} \mid {}^kp_{\underline{s}(t-1)}\, {}^kb_{\underline{s}} \mid \\
\text{g)}\ \qquad {}^z\gamma_{st} \mid {}^zp_{\underline{s}(t-1)}\, {}^{zz}A_{\underline{ss}}\, {}^zx_{\underline{s}(t-1)} \mid \qquad - {}^zv_{st} & = \alpha_{st} \mid {}^zp_{\underline{s}(t-1)}\, {}^zb_{\underline{s}} \mid \\
\text{h)}\ c_s\, x_{st} + {}^k\gamma_{st} \mid {}^kc_{\underline{s}}\, {}^kx_{\underline{s}(t-1)} \mid + {}^z\gamma_{st} \mid {}^zc_{\underline{s}}\, {}^zx_{\underline{s}(t-1)} \mid + {}^k\beta_{st}\, {}^ku_{st} + {}^z\beta_{st}\, {}^zu_{st} \to \max & \\
\text{i)}\ x_{st},\ {}^k\gamma_{st},\ {}^z\gamma_{st},\ {}^ku_{st},\ {}^zu_{st},\ {}^kv_{st},\ {}^zv_{st} \ge 0 &
\end{cases}
$$

(3.4) $$\alpha_{st} = \gamma_{s(t-1)} \min + \varepsilon \mid 1 - \gamma_{s(t-1)} \min \mid$$

ha $t > t_1$ (t_1 = első programozási szakasz iterációinak száma)
ha $t \leq t_1$ akkor $\alpha_{st} = 0$

(3.5) $$\gamma_{s(t-1)} \min = \min \mid {}^k\gamma_{s(t-1)}, {}^z\gamma_{s(t-1)} \mid$$

Megjegyzés: α_{st} értéke mindaddig nem változtatandó, amíg adott α_{st}-vel két egymást követő iterációban számottevő (pl. 5%-nál nagyobb) változás megy végbe a saját változók értékében.

(3.6) $$0 < \varepsilon \ll 1$$

(3.7.1) $${}^k\beta_{st} = \sqrt{\frac{{}^k\beta_{s(t-1)} \mid {}^k p_{\underline{s}(t-1)} \, {}^k b_{\underline{s}} \mid}{{}^k p_{\underline{s}t} \, {}^k b_{\underline{s}}}} \, ;$$

(3.7.2) $${}^z\beta_{st} = \sqrt{\frac{{}^z\beta_{s(t-1)} \mid {}^z p_{\underline{s}(t-1)} \, {}^z b_{\underline{s}} \mid}{{}^z p_{\underline{s}t} \, {}^z b_{\underline{s}}}}$$

(3.7.1), (3.7.2) alkalmazandó, ha $t > 1$; $t = 1$ esetén $0 < {}^k\beta_{st}, {}^z\beta_{st} \leq 1$ (3.7.3)

A (3.3) összefüggésben ${}^k\gamma_{st}$ skalár az aggregált versenyző tevékenységek terjedelme, ${}^z\gamma_{st}$ skalár pedig az egyéb aggregált tevékenységé.

A (3.3d) és (3.3e) feltételek eredetileg felső korlátok. A maradékváltozók (${}^k u_{st}$, ${}^z u_{st}$ egyelemű vektorok) felhasználásával egyenlőségként írtuk fel őket, mivel maradékváltozóikhoz nem zéró célfüggvénykoefficiensek (${}^k\beta_{st}$, ${}^z\beta_{st}$) tartoznak.

A (3.3f), (3.3g) feltételek *volumenmódosító alsó korlátok,* a szokásos módon (lásd pl. [8]-at) egyenlőséggé átalakítva. A feleslegváltozókat ${}^k v_{st}$, ill. ${}^z v_{st}$ (mindkettő egyelemű vektor) jelöli. Az α_{st} skalárt, melynek képzési szabályait a (3.4)—(3.6) összefüggések adják meg, *volumenmódosító faktor*nak nevezzük.

A (3.4) összefüggés kapcsán szereplő *programozási szakasz* kifejezéshez további magyarázatként megjegyezzük: az *első programozási szakaszt* ($t < t_1$) az jellemzi, hogy a volumenmódosító faktor (α_{st}) zéró értékkel szerepel az összefüggésekben, vagyis e szakaszban a (3.3f), (3.3g) feltételek gyakorlatilag ki vannak iktatva a reflektorprogramozási feladatokból. Az első programozási szakasz addig tart, amíg a saját változók értékének változása két egymást követő iterációban *mindenütt* egy bizonyos előre megadott minimális érték (pl. 5%) alá csökken. Ez az ún. *leállási feltétel.*

A második szakasz elején α_{st} pozitívvá válik, a (3.4)—(3.6) képletnek megfelelően (pl. $\varepsilon = 0{,}20$), s ismét végrehajtandó annyi iteráció (változatlan α_{st}-vel), amennyi a leállási feltétel teljesítéséhez kell. Ezután módosítandó α_{st} értéke, s kezdődik a harmadik programozási szakasz stb. Adott (pl. 5%-os) leállási feltétellel a reflektorprogramozás néhány szakasz után automatikusan befejeződik.

Az *árstabilizáló faktorok*at összefüggéseinkben a ${}^k\beta_{st}$, illetve ${}^z\beta_{st}$ skalár jelöli. A (3.7.1)—(3.7.3) összefüggések megadják az árstabilizáló faktorok képzési szabályait. Kísérleti számításaink során az árstabilizáló faktorok kezdő értékét ($t = 1$) egységesen 0,3-nak választottuk.

A formális összefüggések bemutatása után az F1 szabály kiegészítéseként *pótlólagos szabályok*at (jelölésük P1, P2 stb.) ismertetünk a reflektorprogramozási feladatok saját változói (primál és duál) nómenklatúrájának meghatározását illetően.

P1 A saját változók kijelölését a *primál változók*kal kezdjük, utóbbiakat annyi, kb. *egyenlő nagyságú* csoportra osztva, hogy az adott számítókapacitással könnyen kezelhető méretű programozási feladatokhoz jussunk.

P2 Az ún. *indikátorváltozók*, illetve célfüggvényváltozók („kantorovicsi") típusú célfüggvény esetén) minden reflektorprogramozási modellben saját változóként kezelendők.

P3 Minden *lokális korlátozó feltétel* annak a modellnek a saját feltétele, amelynek saját primál változóit korlátozza.

P4 *Specializált nemlokális termékfeltételek* (olyan nemlokális termékfeltételek, amelyeknek egy feladat saját primál változói oszlopában van negatív elemük) ott emelendők ki, ahol negatív elemük van.

P5 *Despecializált nemlokális termékfeltételek* (több feladat saját primál változóinak oszlopában van negatív elemük) mindenütt saját feltételként kezelendők, ahol negatív elemük van.

P6 A *nemlokális egyéb feltételek* mindig egy olyan feladatban emelendők ki, ahol az A matrix megfelelő sorelemeinek összege (a feladat saját primál változóit figyelembevéve) nemzéró, s ugyanakkor az addig kijelölt saját nemlokális egyéb feltételek száma legkisebb. Több legkisebb érték esetén abban a feladatban, ahol az A matrix megfelelő sorelemeinek összege legnagyobb.

Ezzel áttekintettük a reflektorprogramozási modellek szerkezetét, összeállítási szabályait. A továbbiakban, folytatva a reflektorprogramozás algoritmusának leírását, az információs kapcsolatokkal, majd pedig a konvergencia-kritériumokkal foglalkozunk.

4. Információs kapcsolatok

A tárgyalás megkönnyítése érdekében mindenekelőtt néhány új jelölést ismertetünk.

$$A_{ss} = \begin{bmatrix} {}^{q}A_{ss} \\ \hdashline {}^{r}A_{ss} \\ \hdashline {}^{h}A_{ss} \end{bmatrix}, \text{ továbbá } {}^{\underline{h}}A_{ss} = \begin{bmatrix} {}^{q}A_{ss} \\ \hdashline {}^{r}A_{ss} \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

Itt ${}^{h}A_{ss}$ az A_{ss} matrix lokális saját erőforrásokhoz, ${}^{\underline{h}}A_{ss}$ pedig nemlokális saját erőforrásokhoz tartozó sorait tartalmazza. ${}^{q}A_{ss}$ az A_{ss} matrix terméktípusú, ${}^{r}A_{ss}$ egyéb nemlokális saját erőforrásaihoz tartozó sorokból áll. Továbbá bevezetjük az alábbi jelölést:

$${}^{\underline{h}}A_{\underline{s}s} = \begin{bmatrix} {}^{q}A_{\underline{s}s} \\ \hdashline {}^{r}A_{\underline{s}s} \end{bmatrix}. \tag{4.2}$$

Vagyis ${}^{\underline{h}}A_{ss}$ bármely eleme az s feladat saját primál változóinak fajlagos igénye nemlokális (terméktípusú és egyéb) külső erőforrásokból.

Analóg módon felbontjuk a p_{st}^{0} árvektort is (a ^{0} jel itt a reflektorprogramozási feladat szerinti optimumot jelöli), valamint a b_s vektort.

$$p_{st}^{0} = [{}^{q}p_{st}^{0} \,\vdots\, {}^{r}p_{st}^{0} \,\vdots\, {}^{h}p_{st}^{0}], \text{ továbbá } {}^{\underline{h}}p_{st}^{0} = [{}^{q}p_{st}^{0} \,\vdots\, {}^{r}p_{st}^{0}] \tag{4.3}$$

${}^{h}p^0_{st}$ a lokális saját erőforrások árvektora, ${}^{\underline{h}}p^0_{st}$ pedig a nemlokális saját erőforrásoké.

$$(4.4) \qquad b_s = \begin{bmatrix} {}^{q}b_s \\ \hdashline {}^{r}b_s \\ \hdashline {}^{h}b_s \end{bmatrix}, \text{ továbbá } {}^{\underline{h}}b_s = \begin{bmatrix} {}^{q}b_s \\ \hdashline {}^{r}b_s \end{bmatrix}.$$

Itt ${}^{h}b_s$ vektor elemei a lokális saját erőforrások, ${}^{\underline{h}}b_s$ vektoré pedig a nemlokális saját erőforrások rendelkezésére álló mennyiségeit tartalmazza.

Az s reflektorprogramozási feladat a többi feladat részére általában az alábbi információt kell hogy eljuttassa (a $t + 1$ iteráció előtt).

Vektorok:

(4.5) ${}^{\underline{h}}A_{ss}\, x^0_{st}$ = Külső erőforrások iránti igény (természetben)

(4.6) ${}^{\underline{h}}p^0_{st}$ = Nemlokális saját erőforrások árai

Skalárok:

(4.7) ${}^{q}p^0_{st}\, {}^{q}A_{ss}\, x^0_{st}$ = Terméktípusú nemlokális saját erőforrások kibocsátásának (—) és felhasználásának (+) értékegyenlege (despecializált erőforrások kiemelendők)

(4.8) ${}^{r}p^0_{st}\, {}^{r}A_{ss}\, x^0_{st}$ = Egyéb nemlokális saját erőforrások együttes felhasználása értékben

(4.9) ${}^{h}p^0_{st}\, {}^{h}A_{ss}\, x^0_{st}$ = Lokális saját erőforrások kibocsátásának (—) és felhasználásának (+) értékegyenlege

(4.10) ${}^{q}p^0_{st}\, {}^{q}b_s$ = Terméktípusú nemlokális saját erőforrások értékösszege (despecializált erőforrások kiemelendők)

(4.11) ${}^{r}p^0_{st}\, {}^{r}b_s$ = Egyéb nemlokális saját erőforrások értékösszege

(4.12) ${}^{h}p^0_{st}\, {}^{h}b_s$ = Lokális saját erőforrások értékösszege

(4.13) $c_s\, x^0_{st}$ = Célfüggvényérték a saját blokkban (saját primál változók oszlopaiban)

Ha a saját tevékenységek (primál változók) között versenyző tevékenységek is vannak, ezek adatait kiemelten meg kell adni a megfelelő reflektorprogramozási modellek részére.

Az olyan primál változók adatait, amelyek más modellekben is saját változóként szerepelnek (pl. indikátor-változók), szintén kiemelten, a (4.5)—(4.9), valamint (4.13) összefüggésekkel analóg módon kell közölni a megfelelő modellek összeállítóival.

Nem nehéz megmutatni, hogy ennyi információ elegendő a reflektorprogramozási modellek folyamatos, bármely t iteráció utáni átdolgozásához. Ennek részleteire nem térünk ki.

5. Konvergenciakritériumok és számítási tapasztalatok

A reflektorprogramozás sajátosságaival függ össze, hogy az eljárás konvergenciája *több, alternatív kritérium* alapján is ellenőrizhető. *Közvetlen* konvergenciakritériumoknak fogjuk nevezni a saját változók, *közvetett*nek a nem saját változók értékeire kapott programozási eredményeket felhasználó kritériumokat. A közvetlen és közvetett konvergenciakritériumok kölcsönösen helyettesítik egymást, vagyis elegendő vagy csak a közvetlen, vagy csak a közvetett kritériumok alakulását kísérni figyelemmel.

Melyek a *közvetlen konvergenciakritériumok?*

1. A *saját blokkok együttes célfüggvényértékének növekedése.*

Képletben:

$$\sum_s c_s x_{st}^0 \to \max . \tag{5.1}$$

Ha valamely primál változó több reflektorprogramozási feladat saját változója (pl. indikátorváltozó), átlagértéke veendő figyelembe.

2. A *feltételi rendszer inkonzisztenciájának megszűnése.*

Képletben:

$$(p_t^0 A x_t^0 - p_t^0 b) \to 0 \tag{5.2}$$

ahol p_t^0, ill. x_t^0 vektor komponensei a t iteráció árnyékárai, illetve tevékenységvolumenei a reflektorprogramozási modellek saját változóinak figyelembevételével (szükség esetén az F3 szabály szerint átlagolva).

A *közvetett konvergenciakritériumok*at alább adjuk meg.

1. *A versenyző és egyéb nem saját tevékenységek terjedelmének kölcsönös és egyre teljesebb elismerése.* Képletben:

$$\left.\begin{cases} \text{a)}\ {}^k\gamma_{st} \to 1 \\ \text{b)}\ {}^z\gamma_{st} \to 1 \end{cases}\right\} \text{(minden } s\text{-re)} \tag{5.3}$$

Nem nehéz belátni, hogy (5.3) teljesülése esetén a *volumenmódosító faktornak* is 1-hez kell konvergálni. Képletben:

$$\alpha_{st} \to 1 \ \text{(minden } s\text{-re)} \tag{5.4}$$

Továbbá zéróhoz kell konvergálni a (3.3) összefüggésben szereplő *maradék és felesleg változók*nak. Képletben:

$$\left.\begin{bmatrix} \text{a)}\ {}^k u_{st} \to 0 \\ \text{b)}\ {}^z u_{st} \to 0 \\ \text{c)}\ {}^k v_{st} \to 0 \\ \text{d)}\ {}^z v_{st} \to 0 \end{bmatrix}\right. \text{(minden } s\text{-re)} \tag{5.5}$$

2. Az *árstabilizáló faktorok 1-hez való konvergálása*, vagyis lényegében a lokális erőforrások árainak kölcsönös és egyre teljesebb elismerése. Képletben:

$$(5.6)\qquad \left.\begin{cases} \text{a) } {}^{k}\beta_{st} \to 1 \\ \text{b) } {}^{z}\beta_{st} \to 1 \end{cases}\right\} \text{(minden } s\text{-re)}$$

3. A *nemlokális erőforrások árainak kölcsönös és egyre teljesebb elismerése*. Képletben:

$$(5.7)\qquad \left.\begin{cases} \text{a) } {}^{k}\delta_{st} \to 1 \\ \text{b) } {}^{z}\delta_{st} \to 1 \end{cases}\right\} \text{(minden } s\text{-re)}$$

ahol ${}^{k}\delta_{st}$, ${}^{z}\delta_{st}$ az aggregált nemlokális termék, ill. egyéb erőforrások árnyékára az s feladat t iterációjában.

Összefoglalóan megjegyezzük, hogy (5.3) teljesülése elégséges feltétele a reflektorprogramozás konvergenciájának. A konvergenciakritériumok közül csupán (5.2) figyelemmel kísérése igényel számottevő pótlólagos munkát. Gyakorlatilag elegendő a szokásoshoz legközelebb álló (5.1), valamint a feladatok megoldásából további számítás nélkül adódó közvetett konvergenciakritériumok alakulását figyelni.

Mit mutatnak a *számítási tapasztalatok* a reflektorprogramozás konvergenciáját illetően? Elöljáróban megjegyezzük, hogy a számítások Gábor Győző és Mezei Mihály részvételével, a MAVEMI GIER típusú elektronikus számítógépének felhasználásával folytak. Az alapfeladat 92 változót és 57 feltételt tartalmazott, a magyar népgazdaság 1975. évi 15 szektoros bontású adatai alapján. Az eredeti feladatot 6 reflektorprogramozási feladattal helyettesítettük, amelyek mindegyike 2—3 ágazatot ölelt fel viszonylag részletesen. Valamennyi konvergenciakritérium alakulását figyelemmel kísértük, (5.2)-t is beleértve.

Az eredmények azt mutatták, hogy a reflektorprogramozás *konvergens*, mégpedig *az alábbi értelemben:*

1. Valamely programozási szakasz egymást követő iterációi monotonan konvergáltak.

2. A programozási szakaszok utolsó iterációi szintén monotonan konvergens sort alkottak.

3. Az eljárás nem véges, de viszonylag gyorsan (esetünkben 29 iterációval) a globális optimum igen jó (pár ezrelékes pontatlanságú) közelítését adta.

A reflektorprogramozás kedvező sajátossága az is, hogy már az első iterációtól kezdve közgazdaságilag jól értelmezhető eredményeket szolgáltat.

A reflektorprogramozás nagy előnye, hogy bármily nagyméretű feladatot képes szinte tetszőlegesen kis feladatok megoldásával helyettesíteni. Ez a körülmény valószínűleg hatékonyan felhasználható lesz mind a diszkrét, mind pedig a folytonos nemlineáris programozási feladatok, valamint más, például sztochasztikus programozási feladatok megoldása során.

(Beérkezett: 1972. szeptember 11.)

IRODALOM

1. Dantzig, G.—Wolfe, P.: Decomposition principle for linear programs. Operations Research, 1960. 8. 101—111. o.
2. Kornai J.—Lipták T.: Two-level planning. Econometrica, 1965. 33. 141—169. o.
3. Simon Gy.: Az árnyékárak viselkedésének tanulmányozása ex-post programozás alapján. MTA Közgazdaságtudományi Intézet, Budapest, 1967. 256—287. o.
4. Simon Gy.: Optimális tervezés reflektorprogramozással. A Gazdasági fejlődés és tervezés c. kötetben. Budapest, 1969. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. 27—58. o.
5. Simon Gy.: Az optimális tervezés gazdasági mechanizmusának kérdései. MTA Közgazdaságtudományi Intézet. Budapest, 1970. 8—69. o.
6. Simon Gy.: Об экономическом механизме оптимального планирования. Periodica Polytechnica, Vol. 14. No. 4. 1970. 441—449. o.
7. Gábor Gy.: Beszámoló a reflektorprogramozás kísérleti számításairól. Tanulmány az OT Tervgazdasági Intézet részére. Budapest, 1971. (Kézirat.)
8. Krekó B.: Lineáris programozás. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. Budapest, 1966.

THE PRINCIPLES AND ALGORITHM OF SEARCHLIGHT PROGRAMMING

Searchlight programming is a peculiar "decomposition" procedure for the approximative solution of large-scale linear programming problems. The essence of the procedure is that instead of the original large problem smaller ones are solved which are specially transformed from the large problem.

Searchlight programming can also be applied for linear programming problems where the constraints cannot be divided into central and sectoral groups. These is no need for a separate central model. The size of problems solvable with searchlight programming is in practice not limited.

The paper introduces the main principles of the procedure, first of all the "searchlight principle" playing a basic role, as well as the principle of combining primal and dual problems. It draws the scheme of searchlight programming models, the way of compiling them, the characteristics of information flow among the models. It deals with the convergence criteria of the iterative procedure, and refers to the experiences of test calculations made with searchlight programming.

ПРИНЦИПЫ И АЛГОРИТМ РЕФЛЕКТОР-ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Рефлектор-программирование является своеобразным методом «разложения», разработанным автором, для приближающего решения больших задач линейного программирования. Суть метода, что вместо оригинальной большей задачи решаются малые задачи, которые являются специально трансформированными вариантами большей задачи.

Рефлектор-программирование можно примнять к задачам линейного программирования, в которых ограничивающие условия нельзя разделить на центральные и секторные условия. В особой центральной модели нет надобности. Величина задач, решаемых рефлектор-программированием на практике не ограничена.

Статья показывает главные принципы метода, прежде всего динамичный «рефлектор-принцип», сыграющий основную роль, а также принцип комбинирования примальных и дуальных задач. Намечает схему моделей рефлектор-программирования, способ их составлений, специальности обмена информацией между моделями. Он занимается критериями схождения итеративного ферлектор-программирования. Разрабатывается дальнейшее развитие процесса, которое сделает возможным его распространение на решение некоторых задач неличейного и дискретного программирования.

FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK

LEE ANNA

Mátrixok általánosított inverzeiről*

I. Bevezetés

Ismeretes, hogy ha A kvadratikus nem szinguláris mátrix, akkor létezik olyan G mátrix, amelyre $AG = GA = I$. E mátrixot az A inverzének nevezzük és jelölésére az A^{-1} szimbólumot használjuk. Az inverz mátrixnak gyakorlati feladatok megoldásánál is fontos szerepe van. Így például az

$$Ax = b \tag{1.1}$$

lineáris, egyenletrendszer megoldása az A^{-1} inverz mátrix segítségével

$$x = A^{-1}b \tag{1.2}$$

alakban állítható elő.

A gyakorlati problémák azonban gyakran vezetnek olyan konzisztens — azaz egymásnak nem ellentmondó egyenletekből álló — egyenletrendszerhez, amelynek A együttható mátrixa általában nem is kvadratikus, inverze tehát a fenti értelemben nem létezik. Ilyen esetben az (1.1) egyenletrendszer megoldása nem egyértelmű. A megoldások, vagy egy partikuláris megoldás előállítása sokat vizsgált problémája a lineáris egyenletrendszerek elméletének. Régi keletű az a törekvés, hogy egy partikuláris megoldás

$$x_0 = Gb \tag{1.3}$$

alakban legyen előállítható alkalmas G mátrix segítségével. Ha megnézzük, milyen feltételek adódnak az ilyen G mátrixra, azt találjuk, hogy mindenekelőtt ki kell elégítenie az

$$AGA = A \tag{1.4}$$

egyenletet. Tehát az ilyen G mátrix megőrzi a közönséges inverz mátrix némely tulajdonságát, ennélfogva úgy tekinthető, mint ennek egyfajta általánosítása. Az (1.4) egyenletet kielégítő mátrix azonban általában nem egyértelmű, tehát a G mátrixra még további feltételeket is előírhatunk. Tartsuk most továbbra is szem előtt, hogy az (1.1) lineáris egyenletrendszer egy partikuláris megoldását kívánjuk (1.4) alakban előállítani egy G általánosított inverz segítségével. A konkrét gyakorlati feladat esetleg a keresett partikuláris megoldással szemben támaszthat követelményeket; például: a megoldás vektor a lehető legkevesebb zérustól különböző komponenst tartalmazzon; vagy a keresett megoldás a lehetséges megoldások között normában a lehető legkisebb legyen;

* Ez a cikk csak az általánosított inverzek elméletével foglalkozik. Kiszámításukkal és alkalmazásukkal a közeljövőben egy másik cikkben akarunk foglalkozni. *(Szerk.)*

vagy esetleg az (1.1) egyenletrendszer nem konzisztens s akkor olyan GB alakú vektort tekintünk megoldásnak (legkisebb négyzet megoldásnak), amely normában legkevésbé tér el az adott jobb oldali b vektortól; esetleg bizonyos meggondolásból a G általánosított inverz rangjára teszünk megkötést stb. E további korlátozások révén más-más tulajdonságú általánosított mátrix inverzekre jutunk.

Mint a gyakorlati példákból is látható, az inverz mátrix általánosításának problémája hosszú múltra tekint vissza. A vizsgálatokban mérföldkövet jelent az 1955-ös év. Ekkor jelent meg Penrose [16] dolgozata, mely olyan termékenyítő hatással volt a kutatásokra, hogy az általánosított inverzek jelenleg már közel négyszáz munkát felölelő irodalma — néhány cikk kivételével — e dolgozat megjelenése óta jött létre.

Penrose nevezetes [16] cikkében a következő tételt bizonyította be: *Az*

$$AGA = A \tag{1}$$

$$GAG = G \tag{2}$$

$$(AG)^* = AG \tag{3}$$

$$(GA)^* = GA \tag{4}$$

egyenleteknek bármely komplex elemű A mátrix esetén egyértelmű megoldása van. (Itt * a transzponált konjugált mátrix képzését indikálja.) Ezen egyértelmű megoldást — mely kvadratikus nemszinguláris A mátrix esetén megegyezik az A^{-1} inverz mátrixszal — Penrose *általánosított inverz*nek (generalized inverse) nevezte. Rado 1956-ban [18] megmutatta, hogy ez megegyezik a Moore által már 1920-ban [13] bevezetett *általános reciprok*kal (general reciprocal), amelynek további vizsgálatát 1935-ben megjelent [14] könyvében folytatta. Ugyanezt az egyértelmű általánosított inverzet definiálta 1951-ben Bjerhammar is [1], azonban csak maximális rangú mátrixokra. Az (1)—(4) egyenletekkel definiált — bármely A mátrixra egyértelműen létező — általánosított inverzre elterjedt a *pseudoinverz*, vagy *Moore—Penrose inverz*, vagy *Bjerhammar—Moore—Penrose inverz* elnevezés és az A^+ jelölés.

Felmerül a kérdés: ha ezt az egyértelmű általánosított inverzet már 1920-ban bevezette Moore, a nagy visszhangot és hatást miért csak a 35 évvel későbbi újrafelfedezés, Penrose dolgozata váltotta ki? A magyarázat talán Penrose tételének világos megfogalmazásában, a pseudoinverzet definiáló (1)—(4) egyenletek plasztikus egyszerűségében található. Penrose tétele szerint négy jól megválasztott feltételi egyenlettel — vagy más szavakkal a közönséges inverz alkalmasan megválasztott négy tulajdonságának megkövetelésével — bármely komplex mátrixhoz egyértelmű általánosított inverz rendelhető. Ez az észrevétel pedig egy sor kérdést támaszthat, mint például: A pseudoinverz a közönséges inverz milyen további tulajdonságát őrzi meg? Ha az (1)—(4) egyenletek közül egyet vagy néhányat elhagyunk, milyen tulajdonságú általánosított mátrix inverzekhez — pontosabban általánosított mátrix inverzek milyen osztályaihoz — jutunk? Ha az (1)—(4) egyenletekkel kifejezett tulajdonságok helyett a közönséges inverz más tulajdonságait követeljük meg, milyen általánosított inverzekhez jutunk; s rendelhető-e ilyen módon tetszőleges mátrixhoz általánosított inverz és az egyértelmű-e? Egyes konkrét feladatok megoldására milyen tulajdonságú általánosított mátrix inverzek a legalkalmasabbak? A kérdéseket hosszan lehetne folytatni. De talán e néhány is érzékelteti, hogy Penrose tétele milyen széles skálájú vizsgálatokat indíthatott el.

A jelen összefoglaló ismertetésnek nem lehet célja az általánosított mátrix inverzekkel kapcsolatos kutatások és eredmények sokrétűségének bemutatása. E tárgykörben ma már három könyv áll az érdeklődők rendelkezésére [3], [17], [19] s ezek mindegyike részletes bibliográfiát is tartalmaz. Ismertetésünkben elsősorban az (1)—(4) feltételi egyenletek bizonyos kombinációival meghatározott — a gyakorlati alkalmazások szempontjából legfontosabb — általánosított inverzekre szorítkozunk, minden esetben megmutatva, hogy a szóbanforgó inverzek milyen gyakorlati feladatok megoldásánál jutnak szerephez. A pseudoinverzzel kapcsolatban csak a legegyszerűbb és legfontosabb összefüggéseket ismertetjük. A pseudoinverz fontos mátrixelméleti szerepét két speciális mátrix osztály bemutatásával próbáljuk érzékeltetni.

A könnyebb érthetőség végett az alább következő 2—5. pontokban ismertetésünkben csak valós mátrixokra szorítkozunk, így e pontokban a * csak a transzponált képzését indikálja. Megjegyezzük azonban, hogy az eredmények komplex mátrixokra úgy vihetők át, hogy transzponált helyett mindig transzponált és konjugált, ortogonális helyett unitér, szimmetrikus helyett hermitikus értendő. A 6. pont rövid áttekintésében pedig meg is tartottuk az eredeti, komplex mátrixokra való, megfogalmazást. Az ismertetendő mátrixok tulajdonságai így jobban érzékelhetők.

2. g-inverzek és reflexív inverzek osztálya

Ha A kvadratikus szinguláris mátrix, vagy téglalap alakú mátrix, akkor az

$$(2.1)\qquad \text{(i) } AG = I \quad \text{(ii) } GA = I$$

egyenlőségek — ahol I az egységmátrixot jelöli — semmilyen G mátrixszal sem teljesíthetők egyidejűleg. Kvadratikus szinguláris A esetén a (2.1) összefüggések közül sem (i), sem (ii) nem elégíthető ki. Ha A téglalap alakú mátrix, akkor a (2.1) egyenlőségek valamelyike akkor és csak akkor elégíthető ki, ha A maximális rangú. Pontosabban, ha A $m \times n$ típusú $(m \neq n)$ és rangja $\varrho(A) = \min(m, n)$, akkor a (2.1) összefüggések közül vagy (i) vagy (ii) mindig kielégíthető. Ha (i) elégíthető ki valamilyen G mátrixszal, akkor ezt *az A jobb oldali inverzé*nek vagy jobb inverzének, az A mátrixot pedig jobbról *invertálható*nak nevezzük. Hasonlóan van definiálva a *balról invertálható A* mátrix és annak *bal oldali inverze* vagy bal inverze. Jobb oldali inverzre az A_R^{-1} bal oldali inverze az A_L^{-1} jelölés használatos. A mátrixelméletben az inverz mátrix legrégebben ismert és igen gyakran használt általánosításai a jobb, illetve bal oldali inverzek. Ezért először ezekkel foglalkozunk.

Legyen A $m \times n$ típusú mátrix, melynek rangja $\varrho(A) = m$. Ebben az esetben az AA^* m-edrendű és m-edrangú kvadratikus mátrix. Így az $(AA^*)^{-1}$ inverz létezik, tehát fennáll az

$$I_m = (AA^*)(AA^*)^{-1} = A[A^*(AA^*)^{-1}]$$

összefüggés, ahol I_m az m-edrendű egységmátrixot jelöli. Látható tehát, hogy maximális sorrangú A mátrixnak van A_R^{-1} jobb oldali inverze, hiszen az

$$A_R^{-1} = A^*(AA^*)^{-1}$$

mátrix valóban teljesíti a jobb inverz kritériumát.

Hasonlóan, ha $\varrho(A) = n$, akkor létezik A_L^{-1} bal inverz, amellyel az

$$A_L^{-1}A = I_n$$

egyenlőség teljesül, hiszen pl. az $(A^*A)^{-1}A^*$ mátrix alkalmas választása az A_L^{-1} bal inverznek. Nyilvánvaló, hogy A_L^{-1} és A_R^{-1} csupán azokban a speciális esetekben létezik, ha az $m\times n$ típusú mátrix rangja n vagy m. Ha $n \neq m$, az A_L^{-1} és A_R^{-1} közül csak egyik létezhet, de nem egyértelműen. Igaz ugyanis a következő tétel.

2.1. *Tétel.* Legyen A $m\times n$ típusú mátrix. Ha $\varrho(A) = m$, akkor az $AG = I$ egyenlet általános megoldása

$$G = VA^*(AVA^*)^{-1},$$

ahol V tetszőleges n-edrendű mátrix, amelyre $\varrho(AVA^*) = \varrho(A)$. Ha $\varrho(A) = n$, akkor a $GA = I$ egyenlet általános megoldása

$$G = (A^*VA)^{-1}A^*V,$$

ahol V tetszőleges m-edrendű mátrix, amelyre $\varrho(A^*VA) = \varrho(A)$.

Ha az A mátrix rangja $\varrho(A) = r < \min(m, n)$, akkor a (2.1) egyenlőségek egyike sem elégíthető ki semmilyen G mátrixszal sem. Azonban a (2.1) egyenlőségek következménye a gyengébb

$$AGA = A \tag{2.2}$$

összefüggés, amelyet kvadratikus nemszinguláris A esetén csak a $G = A^{-1}$ inverz elégít ki, így a (2.2) egyenlőséggel meghatározott G mátrix az inverz mátrix egy általánosításának tekinthető. Igaz a következő lemma.

2.1. *Lemma.* Tetszőleges A esetén a (2.2) egyenlőség kielégíthető valamely G mátrixszal.

Legyen ugyanis az A $m\times n$ típusú mátrix rangja $\varrho(A) = r$ és legyen az A egy rang faktorizációja (vagy másként bázis faktorizációja) $A = BC$, ahol tehát a B $m\times r$ típusú, a C $r\times n$ típusú mátrix, amelyeknek rangja $\varrho(B) = \varrho(C) = r$. B tehát teljes oszloprangú, így B_L^{-1} bal inverze létezik, C pedig teljes sorrangú, így C_R^{-1} jobb inverze létezik. Legyen $G = C_R^{-1}B_L^{-1}$, akkor

$$AGA = (BC)(C_R^{-1}B_L^{-1})(BC) = B(CC_R^{-1})(B_L^{-1}B)C = BC = A.$$

2.1. *Megjegyzés.* A 2.1. lemma állítása következik Penrose már idézett tételéből is hiszen (2.2) megegyezik az (1) Penrose egyenlettel, s így a tétel alapján ennek tetszőleges A mátrix esetén van megoldása.

2.1. *Definíció.* Legyen A $m\times n$ típusú mátrix. Az $n\times m$ típusú G mátrixot, amely kielégíti a (2.2) egyenlőséget az A *általánosított inverzé*nek, vagy *g-inverzé*nek nevezzük és jelölésére az A^- szimbólumot használjuk.

Az A^- tehát tetszőleges olyan mátrixot jelöl, amely az A mátrixszal kielégíti a (2.2) egyenlőséget. A (2.2) megoldása azonban általában nem egyértelmű, (2.2) megoldásainak összességét jelölje $\mathcal{G}_{(1)}$, ahol az alsó index az (1) Penrose egyenletre utal. Így A^- azt jelenti, hogy $A^- \in \mathcal{G}_{(1)}$. Vizsgáljuk meg most mi jellemzi a $\mathcal{G}_{(1)}$ osztályba tartozó g-inverzeket.

2.2. *Lemma.* Egy G mátrixra vonatkozóan az alábbi állítások egymással ekvivalensek

a) G az A mátrix g-inverze, azaz $G \in \mathcal{G}_{(1)}$;

b) az $F = AG$ mátrix idempotens és $\varrho(F) = trF = \varrho(A)$;

c) a $H = GA$ mátrix idempotens és $\varrho(H) = trH = \varrho(A)$.

Itt trP a $P = [p_{ij}]$ kvadratikus mátrix nyomát — vagy másként spurját — jelöli, azaz $trP = \sum_{i=1}^{n} p_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(P)$, ahol $\lambda_i(P)$ a P mátrix sajátértékeit jelöli. Mint a mátrixelméletből ismeretes egy $P^2 = P$ idempotens vagy projektor mátrix valamennyi zérustól különböző sajátértéke 1-gyel egyenlő, így rangjára valóban igaz a $\varrho(P) = trP$ egyenlőség.

2.3. *Lemma.* Ha A^- az A mátrix g-inverze, akkor

$$\varrho(A^-) \geq \varrho(A). \tag{2.3}$$

A $\mathcal{G}_{(1)}$ osztályba tartozó általánosított mátrix inverzek rangjára tehát a (2.3) egyenlőtlenség érvényes. De ennél többet is mondhatunk: Fisher [7] ugyanis a következő tételt bizonyította.

2.2. *Tétel.* Legyen az A $m \times n$ típusú mátrix rangja $\varrho(A) = r$. Akkor tetszőleges, az $r \leq q \leq \min(m, n)$ egyenlőtlenségnek eleget tevő q egészhez van az A mátrixnak olyan A^- inverze, amelyiknek rangja $\varrho(A^-) = q$.

Mint az a (2.3) egyenlőtlenségből látható, nem szükségképpen igaz, hogy A^- és A egymásnak kölcsönösen g-inverzei. Ahhoz, hogy A és A^- egymásnak kölcsönösen g-inverzei legyenek, az A^- mátrixnak ki kell elégítenie az

$$AGA = A, \; GAG = G \tag{2.4}$$

egyenlőségeket, tehát az (1) és (2) Penrose egyenletet. A Penrose tételből következik, hogy ilyen tulajdonságú g-inverz mindig létezik.

2.2. *Definíció.* Az $n \times m$ típusú G mátrixot az A $m \times n$ típusú mátrix *reflexív-inverzének* nevezzük, ha kielégíti a (2.4) egyenlőségeket.

A reflexív inverzekre az A_r^- jelölést, a reflexív inverzek osztályára pedig a $\mathcal{G}_{(12)}$ jelölést használjuk, az alsó indexszel utalva arra, hogy a $\mathcal{G}_{(12)}$ osztályba tartozó inverzek kielégítik az (1) és (2) Penrose egyenletet.

A g-inverzekre vonatkozó (2.3) egyenlőtlenségből az is következik, hogy ha $A^- \in \mathcal{G}_{(12)}$, akkor $\varrho(A^-) = \varrho(A)$. Igaz azonban ennek a megfordítása is, pontosabban a következő tétel.

2.3. *Tétel.* Az A mátrix A^- inverze akkor és csak akkor reflexív inverz, ha $\varrho(A^-) = \varrho(A)$.

2.2. *Megjegyzés:* A 2.2. és 2.3. tétel következménye, hogy ha A maximális rangú, azaz $\varrho(A) = \min(m, n)$, akkor A tetszőleges g-inverze szükségképpen reflexív.

Felmerül a kérdés, hogy egy A^- g-inverz ismeretében miként konstruálható egy reflexív inverz. Erre ad választ a következő lemma.

2.4. *Lemma.* Az A mátrix G inverze akkor és csak akkor reflexív inverz, ha

$$G = A^- A A^-$$

alakban írható valamely A^- g-inverz segítségével.

Mint azt már a bevezetőben is láttuk, a g-inverzek a konzisztens lineáris egyenletrendszerek megoldásánál jutnak szerephez. Erre vonatkozik a következő tétel.

2.4. *Tétel.* Legyen A $m \times n$ típusú mátrix és legyen A^- az A mátrix tetszőleges g-inverze, továbbá $H = A^-A$. Akkor

a) az $Ax = 0$ homogén egyenlet általános megoldása $x = (I - H)z$, ahol z tetszőleges vektor;

b) az $Ax = b$ konzisztens inhomogén egyenlet általános megoldása

$$x = A^-b + (I - H)z,$$

ahol z tetszőleges vektor;

c) annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az $Ax = b$ egyenlet konzisztens legyen, az

$$AA^-b = b$$

egyenlőség teljesülése.

Az $Ax = b$ konzisztens egyenlet egy partikuláris megoldását tehát A^-b alakban állíthatjuk elő valamely A^- g-inverz segítségével. Ha a megoldásokra további megkötéseket teszünk, ezzel leszűkítjük a keresett partikuláris megoldásokat A^-b alakban előállító g-inverzek osztályát. Megkötést tehetünk például a megoldás vektor nemzérus komponenseinek számára.

2.3. *Definíció.* Az $Ax = b$ konzisztens egyenlet x_b megoldását *bázismegoldás*nak nevezzük, ha

(i) $Ax_b = b$, tehát x_b megoldás és

(ii) az x_b vektornak legfeljebb r nemzérus komponense van, ahol $r = \varrho(A)$.

A bázismegoldást előállító inverz fogalmát Rosen [21] vezette be. Jelölésére az A_b^- szimbólum használatos. Az A_b^- inverzek jellemzését adja a következő lemma.

2.5. *Lemma* (lásd [18] 30. o.). Legyen az A $m \times n$ típusú mátrix rangja $\varrho(A) = r$. Az A^- g-inverz az $Ax = b$ konzisztens egyenletrendszer egy bázismegoldását állítja elő, ha van olyan P permutációs mátrix, amelyet

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

particionált alakban írva a P_1 $r \times n$ és a P_2 $(n - r) \times n$ típusú mátrix úgy, hogy $P_1A^- = (AP_1')_L^{-1}$, $P_2A^-A = 0$.

Végezetül megmutatjuk, hogyan konstruálható egy A_b^- inverz. Mivel $\varrho(A) = r$, az A oszlopai átrendezhetők úgy, hogy az első r oszlop lineárisan független legyen. Ez az átrendezés egy alkalmas P permutációs mátrixszal való jobb oldali szorzás útján áll elő. Jelölje az átrendezett mátrixot B, akkor

$$AP = B = [B_1B_2],$$

ahol B_1 $m \times r$ és B_2 $m \times (n - r)$ típusú. Legyen most

$$B_b^- = G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (B_1)_L^{-1} \\ G_2 \end{bmatrix},$$

ahol G_2 tetszőleges $(n-r)\times m$ típusú mátrix, amelyre $G_2B=0$, akkor

$$A_b^- = P'B_b^-.$$

Hasonlóan konstruálható olyan g-inverz is, amely az $Ax=b$ konzisztens egyenlet olyan partikuláris megoldását állítja elő, amelynek legfeljebb $s>r$ nemzérus komponense van.

3. A g-inverzek geometriai jellemzése

Bevezetésül a lineáris algebra néhány fogalmát és a szükséges jelöléseket ismertetjük.

Az A $m\times n$ típusú mátrix $\mathcal{R}(A)$ oszlopterén az A oszlopvektorai által felfeszített lineáris teret értjük. Jelölje a valós szám n-esek lineáris terét $\mathcal{E}^n$. Akkor az $\mathcal{R}(A)$ lineáris tér az $\mathcal{E}^m$ tér azon vektoraiból áll, amelyek Ax alakban állíthatók elő valamely x vektorral. Ha az A mátrixot mint az $\mathcal{E}^n$ teret az $\mathcal{E}^m$ térre leképező lineáris transzformációt tekintjük, akkor $\mathcal{R}(A)$ e transzformáció képtere. Az A mátrix $\mathcal{N}(A)$ zérustere az $\mathcal{E}^n$ tér azon vektorainak összessége, amelyeket a transzformáció az $\mathcal{E}^m$ tér zérusvektorába visz.

Legyen adva egy $\mathcal{V}$ lineáris tér és annak két altere $\mathcal{S}$ és $\mathcal{T}$. Ha $\mathcal{S}$ és $\mathcal{T}$ diszjunktak — tehát $\mathcal{S}\cap\mathcal{T}$ közös részük csak a zérus vektorból áll —, akkor összegüket *direkt összeg*nek nevezzük. Az $\mathcal{S}\oplus\mathcal{T}$ direkt összeg szintén altér, amelynek vektorai egyértelműen állíthatók elő $\sigma+\tau$ alakban, ahol $\sigma\in\mathcal{S}$, $\tau\in\mathcal{T}$. Speciálisan, ha $\mathcal{S}\oplus\mathcal{T}=\mathcal{V}$, akkor $\mathcal{T}$ az $\mathcal{S}$ *komplementuma* vagy *komplementer altere* a $\mathcal{V}$ térben. Az $\mathcal{S}\oplus\mathcal{T}$ direkt összegről ekkor azt mondjuk, hogy az a $\mathcal{V}$ *tér egy direkt felbontása*.

Legyen a $\mathcal{V}$ térben skaláris szorzat (belső szorzat) értelmezve. Ha most $\mathcal{S}$ ismét a $\mathcal{V}$ altere, akkor a $\mathcal{V}$ azon vektorainak összessége, amelyek ortogonálisak az $\mathcal{S}$ valamennyi vektorára, szintén alteret alkotnak, amelyet $\mathcal{S}^\perp$ jelöl s amelyet *az $\mathcal{S}$ ortogonális komplementumá*nak nevezünk. Nyilván $\mathcal{S}\oplus\mathcal{S}^\perp$ a $\mathcal{V}$ egy direkt felbontása: $\mathcal{S}\oplus\mathcal{S}^\perp=\mathcal{V}$.

Legyen P n-edrendű r-edrangú idempotens mátrix (vagy projektor mátrix), tehát $P^2=P$. Legyen P oszloptere $\mathcal{R}(P)$ és zérustere $\mathcal{N}(P)$. A P idempotens tulajdonságából következik, hogy $\mathcal{R}(P)\oplus\mathcal{N}(P)=\mathcal{E}^n$, így tetszőleges $x\in\mathcal{E}^n$ vektor egyértelműen írható $x=\varrho+\nu$ alakban, ahol $\varrho\in\mathcal{R}(P)$, $\nu\in\mathcal{N}(P)$. A P odempotens mátrix az $\mathcal{E}^n$ tér olyan vetítő transzformációja, amely a tér bármely $x=\varrho+\nu\big(\varrho\in\mathcal{R}(P),\ \nu\in\mathcal{N}(P)\big)$ vektorához a ϱ vektort rendeli, azaz az $\mathcal{E}^n$ teret az $\mathcal{R}(P)$ altérre vetíti (innen a projektor mátrix elnevezés) s a vetítés iránya az $\mathcal{N}(P)$ altér. Ha fel akarjuk tüntetni, hogy egy adott P projektor mátrix milyen $\mathcal{S}$ altérre vetít és milyen $\mathcal{T}$ irányú vetítéssel — ahol persze $\mathcal{S}\oplus\mathcal{T}=\mathcal{E}^n$ és $\mathcal{S}=\mathcal{R}(P)$, $\mathcal{T}=\mathcal{N}(P)$, akkor erre a $P=P_{\mathcal{S}\mathcal{T}}$ jelölést használjuk. Speciálisan, ha $\mathcal{T}=\mathcal{S}^\perp$, azaz a vetítés iránya ortogonális, az $\mathcal{S}$ altérre, akkor a mátrix szimmetrikus, tehát a $P=P_{\mathcal{S}\mathcal{S}^\perp}$ mátrixra $P^*=P$ igaz.

Ha a P n-edrendű és r-edrangú projektor mátrix egy rang faktorizációja $P=ST$ — ahol tehát S $n\times r$ típusú és T $r\times n$ típusú mátrix és $\mathcal{R}(P)=\mathcal{R}(S)$, $\mathcal{N}(P)=\mathcal{N}(T)$ —, akkor $TS=I_r$. Végül pedig ha $P=P_{\mathcal{S}\mathcal{T}}$ n-edrendű r-edrangú idempotens mátrix — amely tehát az $\mathcal{S}$ altérre $\mathcal{T}$ irányban vetít —, akkor az $I-P$ mátrix is idempotens, mégpedig $(n-r)$-edrangú, amely a $\mathcal{T}$ altérre $\mathcal{S}$ irányban vetít, azaz $I-P=P_{\mathcal{T}\mathcal{S}}$.

3.1. *Megjegyzés.* Röviden utalni szeretnénk arra, hogy a projektor mátrixok jutnak fontos szerephez a lineáris feltételű konkáv programozási feladatnak a gradiens vetítési módszerrel történő megoldásánál is [22]. Ez az eljárás egy módosulata az eredeti gradiens módszernek, amely szerint egy adott x_0 pontból kiindulva egy $f(x)$ nemlineáris függvény maximuma helyéhez konvergáló $x_0, x_1, x_2, \ldots$ pontsorozat megkonstruálásánál az x_i pontból az $f(x)$ függvény x_i pontbeli gradiense irányában (amely irányban az $f(x)$ függvény a leggyorsabban változik) választjuk az x_{i+1} pontot. Hogy a lineáris feltételekből adódó konvex tartományból ne jussunk ki, ezt az eljárást ekkor úgy módosítjuk, hogy a gradiens helyett ennek egy $\mathcal{S}$ altérre történő ortogonális vetületét használjuk, ahol az $\mathcal{S}$ alteret a konvex tartományt határoló, az x_i pontot tartalmazó hipersíkok valamely lineárisan független rendszerének közös része (metszete) határozza meg. A továbblépés irányát az $f(x)$ konkáv függvény x_i pontbeli gradienséből, tehát egy $P_{\mathcal{S}\mathcal{S}^\perp}$ alakú projektor mátrixszal való szorzással kapjuk.

Vizsgáljuk most az általánosított inverzek geometriai jelentését. Legyen A $m\times n$ típusú r-edrangú mátrix, melynek oszloptere $\mathcal{R} \subset \mathcal{E}^m$ és zérustere $\mathcal{N} \subset \mathcal{E}^n$. Ha az $n\times m$ típusú G mátrix az A mátrixnak egy g-inverze, akkor a 2.2. lemma szerint az $F = AG$, ill. a $H = GA$ m-edrendű, ill. n-edrendű s mindkettő r-edrangú idempotens mátrix. Ebből következik, hogy az F oszloptere megegyezik az A oszlopterével, zérustere pedig tartalmazza a G zérusterét; a H oszloptere benne van a G oszlopterében, zérustere pedig megegyezik az A zérusterével, azaz igazak a

$$\mathcal{R}(F) = \mathcal{R} \tag{3.1}$$

$$\mathcal{N}(H) = \mathcal{N}$$

és

$$\mathcal{N}(F) \supseteq \mathcal{N}(G) \tag{3.2}$$

$$\mathcal{R}(H) \subseteq \mathcal{R}(G)$$

relációk. Abban az esetben, ha G reflexív inverz, tehát ha $\varrho(G) = r$, akkor a (3.2) tartalmazási relációkban is az egyenlőség jele érvényes. A (3.1) és (3.2) alapján az F, ill. H projektor mátrix a következőképpen jellemezhető:

$$\begin{aligned} F &= AG = P_{\mathcal{R}\mathcal{N}(F)}, & \mathcal{N}(F) &\supseteq \mathcal{N}(G) \\ H &= GA = P_{\mathcal{R}(H)\mathcal{N}}, & \mathcal{R}(H) &\subseteq \mathcal{R}(G). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Az F projektor mátrix tehát az $\mathcal{E}^m$ teret az adott $\mathcal{R}$ altérre vetíti, a vetítési iránya azonban *függ a G általánosított inverz megválasztásától*, míg a H projektor mátrix esetében adott a vetítés $\mathcal{N}$ iránya s az altér, amelyre H az $\mathcal{E}^n$ teret vetíti, *függ a G általánosított inverz megválasztásától.*

Felmerül ezután a kérdés: ha adva van az A $m\times n$ típusú és r-edrangú mátrix, melynek oszloptere $\mathcal{R}$ és zérustere $\mathcal{N}$, akkor tetszőlegesen megválasztva a $\mathcal{Q}$ és $\mathcal{M}$ altereket úgy, hogy $\mathcal{R} \oplus \mathcal{Q} = \mathcal{E}^m$ és $\mathcal{M} \oplus \mathcal{N} = \mathcal{E}^n$ teljesüljön, van-e az A mátrixnak olyan G általánosított inverze, amelyekkel fennállnak a kívánt

$$\begin{aligned} F &= AG = P_{\mathcal{R}\mathcal{Q}}, & \mathcal{Q} &\supseteq \mathcal{N}(G) \\ H &= GA = P_{\mathcal{M}\mathcal{N}}, & \mathcal{M} &\subseteq \mathcal{R}(G) \end{aligned}$$

relációk. A kérdésre adható igenlő választ itt Egerváry [4] és Langenhope [11] megfogalmazásában közöljük. Eredményüket mindketten reflexív inverzekre bizonyították.

3.1. *Tétel.* (Egerváry): Ha az adott r-edrangú A $m\times n$ típusú mátrix bázisfaktorokra bontott alakja

$$A = RN$$

(ahol tehát R $m\times r$ típusú, N pedig $r\times n$ típusú mátrix és $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(R)$, $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(N)$, akkor az

$$(AG)^2 = AG$$

illetve

$$(GA)^2 = GA$$

összefüggéssel definiált r-edrangú G inverz mátrix

$$G = M(NM)^{-1}(QR)^{-1}Q$$

$$= M(QAM)^{-1}Q$$

alakban állítható elő, ahol M és Q tetszőleges, csupán a $|MN| \neq 0$, $|QR| \neq 0$ feltételeket kielégítő mátrix ($|X|$ az X kvadratikus mátrix determinánsát jelöli).

Geometriailag szemléletesebbek Langenhope alábbi tételei.

3.2. *Tétel.* (Langenhope): Legyen A $m\times n$ típusú r-edrangú mátrix, amelynek oszloptere $\mathcal{R}$ és zérustere $\mathcal{N}$. Legyen $\mathcal{Q}$ az $\mathcal{R}$ tetszőleges komplementer altere az $\mathcal{E}^m$ térben: $\mathcal{R} \oplus \mathcal{Q} = \mathcal{E}^m$ és $\mathcal{M}$ az $\mathcal{N}$ tetszőleges komplementer altere az $\mathcal{E}^n$ térben: $\mathcal{M} \oplus \mathcal{N} = \mathcal{E}^n$. Akkor van olyan G mátrix, amely kielégíti az

$$AH = P_{\mathcal{R}\mathcal{Q}} \tag{3.4}$$

és

$$GA = P_{\mathcal{M}\mathcal{N}} \tag{3.5}$$

egyenlőségeket. Ha $A = RN_0$ az A mátrix egy rang faktorizációja (tehát R $m\times r$ típusú, N_0 pedig $r\times n$ típusú mátrix) Q_0 pedig a $P_{\mathcal{R}\mathcal{Q}} = RQ_0$ felbontásából, M pedig a $P_{\mathcal{M}\mathcal{N}} = MN_0$ felbontásából van meghatározva, akkor

$$G = MQ_0 \tag{3.6}$$

kielégíti a (3.4) és (3.5) egyenlőséget.

3.3. *Tétel.* (Langenhope): A (3.6) alatti $G = MQ_0$ mátrix csupán a $\mathcal{Q}$ és $\mathcal{M}$ altér megválasztásától függ, s nem függ attól, hogy az A rang faktorizációjánál milyen R mátrixot választottunk.

Ha az R mátrixot már megválasztottuk úgy, hogy $\mathcal{R}(R) = \mathcal{R}(A) = \mathcal{R}$ teljesüljön, akkor az $A = RN_0$ felbontásból N_0 egyértelműen meghatározható. A $\mathcal{Q}$ és $\mathcal{M}$ tetszőleges választása mellett most már R és N_0 ismeretében a $P_{\mathcal{R}\mathcal{Q}} = RQ_0$ és $P_{\mathcal{M}\mathcal{N}} = MN_0$ összefüggésből a Q_0 és M mátrix is egyértelműen meghatározható. Vegyük figyelembe, hogy a $P_{\mathcal{R}\mathcal{Q}} = RQ_0$ alapján $Q_0 R = I_r$, ill. a $P_{\mathcal{M}\mathcal{N}} = MN_0$ alapján $N_0 M = I_r$, így egyszerű behelyettesítés után belátható, hogy a $G = MQ_0$ mátrix valóban kielégíti az (3.4) és (3.5) egyenlőségeket és kielégíti az

$$AGA = A, \quad GAG = G$$

összefüggéseket is, tehát G az A reflexív inverze. Az így konstruált reflexív inverz oszloptere $\mathcal{R}(G) = \mathcal{M}$ és zérustere $\mathcal{N}(G) = \mathcal{Q}$, amit az

$$A^-_{\mathcal{M}\mathcal{Q}} = G = MQ_0 \tag{3.7}$$

jelöléssel fejezzük ki. Mivel $A^-_{\mathcal{M}\mathcal{Q}}$ reflexív inverz, így $\varrho(A^-_{\mathcal{M}\mathcal{Q}}) = \varrho(A) = r$. Az $A^-_{\mathcal{M}\mathcal{Q}}$ inverze vonatkozik a következő nagyon fontos tétel:

3.4. *Tétel.* (Langenhope): A (3.7) alatti $A^-_{\mathcal{M}\mathcal{Q}}$ mátrix az

$$AG = P_{\mathcal{R}\mathcal{Q}}, \quad GA = P_{\mathcal{M}\mathcal{N}}, \quad \varrho(G) = \varrho(A)$$

egyenletek egyértelmű megoldása.

3.2. *Megjegyzés.* Vegyük észre, hogy az $A^-_{\mathcal{M}\mathcal{Q}}$ inverz a speciális $\mathcal{Q} = \mathcal{R}^\perp$, $\mathcal{M} = \mathcal{N}^\perp$ választás esetén megegyezik a pseudoinverzzel, azaz

$$A^-_{\mathcal{N}^\perp\mathcal{R}^\perp} = A^+.$$

Így a 3.4. tétel alapján az A^+ pseudoinverz egyértelmű megoldása a

$$AG = P_{\mathcal{R}\mathcal{R}^\perp}, \quad GA = P_{\mathcal{N}^\perp\mathcal{N}}, \quad \varrho(G) = \varrho(A)$$

egyenleteknek. Ezek tehát az (1)—(4) Penrose egyenletekkel ekvivalensek. Moore is lényegében így definiálta az általa „general reciprocal"-nak nevezett pseudoinverzet.

Langenhope eredményei arra szolgáltatnak példát, hogy tetszőleges A mátrixhoz egyértelműen létező általánosított inverzet többféleképpen lehet definiálni.

Ha a 3.2.—3.4. tételek feltételeiből elhagyjuk a $\varrho(G) = \varrho(A)$ megkötést, akkor a megoldás általában nem egyértelmű. Ekkor a következő tétel igaz.

3.5. *Tétel.* Legyen A $m \times n$ típusú r-edrangú mátrix, melynek oszloptere $\mathcal{R}$ és zérustere $\mathcal{N}$. Legyen $\mathcal{Q}$ az $\mathcal{R}$ tetszőleges komplementer altere az $\mathcal{E}^m$ térben: $\mathcal{R} \oplus \mathcal{Q} = \mathcal{E}^m$ és $\mathcal{M}$ az $\mathcal{N}$ tetszőleges komplementer altere az $\mathcal{E}^n$ térben: $\mathcal{M} \oplus \mathcal{N} = \mathcal{E}^n$. Az A mátrixnak mindig van olyan G általánosított inverze, amelyre

$$\mathcal{R}(G) \supseteq \mathcal{M}, \quad \mathcal{N}(G) \subseteq \mathcal{Q}, \quad \varrho(G) \geq \varrho(A).$$

4. További általánosított inverzek

A 2. pontban már vizsgáltuk a $\mathcal{G}_{(1)}$ és a $\mathcal{G}_{(12)}$ inverz osztályt. Most azt vizsgáljuk meg, hogy milyen tulajdonságú általánosított inverzekhez jutunk, ha az (1)—(4) Penrose egyenletek más kombinációinak kielégítését követeljük meg.

A $\mathcal{G}_{(14)}$ és a $\mathcal{G}_{(124)}$ inverz osztály

Jelölje $\mathcal{G}_{(14)}$, az A $m \times n$ típusú mátrix azon általánosított inverzeinek osztályát, amelyek kielégítik az

$$AGA = A, \quad (GA)^* = GA \tag{4.1}$$

feltételeket, azaz az (1) és (4) Penrose egyenletet.

A 3. pont alapján a (4.1) feltételek geometriai megfogalmazása:

$$H = GA = P_{\mathcal{N}^\perp\mathcal{N}}, \quad \mathcal{R}(G) \supseteq \mathcal{N}(A)^\perp = \mathcal{R}(A^*), \tag{4.2}$$

azaz olyan legyen a G általánosított inverz, hogy oszloptere tartalmazza az A zérusterének ortogonális komplementumát, tehát az A^* oszlopterét. Ebből már egyszerűen adódik a következő lemma állítása.

4.1. *Lemma.* Az A mátrix G általánosított inverze akkor és csak akkor tartozik a $\mathcal{G}_{(14)}$ osztályba, ha

$$GAA^* = A^*$$

teljesül.

Érdemes azt is megnézni, hogy az (1) Penrose egyenlet mellett a (4) egyenlet teljesülése milyen, a lineáris egyenletrendszerek megoldásánál felhasználható tulajdonságot kölcsönöz egy g-inverznek.

Már láttuk, hogy az $Ax = b$ konzisztens egyenletrendszer bármely megoldása $x = Gb$ alakban állítható elő, ahol $G \in \mathcal{G}_{(1)}$. Felmerülhet a kérdés, vajon megválasztható-e a G inverz a b vektortól függetlenül úgy, hogy bármely, konzisztens egyenletrendszert adó b vektor esetén, az $Ax = b$ megoldásai között az ezen G mátrixszal előállított Gb megoldás minimális normájú, azaz

$$\min_{Ax=b} \| x \| = \| Gb \|.$$

Itt $\| x \|$ az x vektor euklideszi normáját jelöli, tehát

$$\| x \| = \sqrt{x^* x}$$

ahol $x^* y$, az $x, y \in \mathcal{E}^n$ vektorok skaláris szorzata. A kérdésre a következő tétel ad választ.

4.1. *Tétel.* ([19] 45. o.): Legyen G az A mátrixnak olyan g-inverze, hogy Gb minimális normájú megoldása az $Ax = b$ egyenletnek bármely $b \in \mathcal{R}(A)$ esetén. Ehhez szükséges és elegendő, hogy G kielégítse az

$$AGA = A, \qquad (GA)^* = GA$$

feltételeket.

Az $Ax = b$ konzisztens egyenletrendszer általános megoldása a 2.4. tétel szerint ugyanis $Gb + (I - GA)z$, ahol $G \in \mathcal{G}_{(1)}$ és $z \in \mathcal{E}^n$ tetszőlegesek. Legyen most Gb minimális normájú bármely konzisztens egyenleteket adó b esetén, azaz

$$\| Gb \| \leq \| Gb + (I - GA)z \| \quad \forall b \in \mathcal{R}(A),\ z \in \mathcal{E}^n,$$

vagy a b helyére Ax-et írva

$$\| GAx \| \leq \| GAx + (I - GA)z \| \quad \forall x, z \in \mathcal{E}^n.$$

A norma definíciójat figyelembe véve ez akkor és csak akkor teljesül, ha

$$(GAx)^*(I - GA)z) = 0 \quad \forall x, z \in \mathcal{E}^n.$$

Ebből a

$$(GA)^*(I - GA) = 0$$

feltételt kapjuk, ami ekvivalens a $(GA)^* = GA$ feltétellel.

4.1. *Megjegyzés.* Vegyük észre, hogy bármely $G \in \mathcal{G}_{(14)}$ általánosított inverzzel szorozzuk balról az A mátrixot, a $H = GA = P_{\mathcal{R}^{\perp}\mathcal{R}}$, tehát mindig ugyanaz a hermitikus projektor mátrix. Ennek következménye az is, hogy bármely rögzített $b \in \mathcal{R}(A)$ esetén a $\| Gb \|$ norma minden $G \in \mathcal{G}_{(14)}$ inverzzel ugyanaz.

Ha egy $G \in \mathcal{G}_{\mathfrak{J}(14)}$ inverzre speciálisan $\varrho(G) = \varrho(A)$, akkor G kielégíti az (1) (2) és (4) Penrose egyenletet. Az ilyen $\mathcal{G}_{\mathfrak{J}(124)}$ osztálybeli inverzre szokásos a *balról gyengén általánosított inverz* elnevezés és az A_w^- jelölés. Az A mátrixnak egy A_w^- inverzét könnyen előállíthatjuk az AA^* mártix egy $(AA^*)^-$ inverzének ismeretében. Az

$$A_w^- = A^*(AA^*)^- \tag{4.3}$$

előállítás Urquharttól [24] származik.

4.2. *Megjegyzés*. Láttuk már, hogy ha az A $m \times n$ típusú mártix maximális rangú: $r = \min(m, n)$, akkor minden A^- inverz egyben A_r^- reflexív inverz. Nagyon könnyen konstruálható azonban A_w^- inverz is.

a) Ha $r = n$, azaz A maximális oszloprangú, akkor bármely A^- inverz bal inverz, hiszen $H = A^-A$ r-edrendű és r-edrangú idempotens mátrix, így szükségképpen az egységmátrix. Az egységmátrix azonban hermitikus, így minden A^- inverzre $A^-A = I_r = (A^-A)^*$, tehát az A bármelyik általánosított inverze balról gyengén általánosított: $A^- = A_w^-$.

b) Ha $r = m$, azaz A maximális sorrangú, akkor az AA^* mátrix nemszinguláris, tehát ebben az esetben a (4.3) előállítás alapján az A mátrixnak az

$$A_w^- = A^*(AA^*)^{-1}$$

az egyetlen balról gyengén általánosított inverze, így ez megegyezik az A^+ pseudoinverzzel.

A $\mathcal{G}_{\mathfrak{J}(13)}$ és $\mathcal{G}_{\mathfrak{J}(123)}$ inverz osztály.

A $\mathcal{G}_{\mathfrak{J}(13)}$ inverz osztály az A mátrix azon általánosított inverzeiből áll, amelyek kielégítik az

$$AGA = A, \quad (AG)^* = AG \tag{4.4}$$

feltételeket, azaz az (1) és (3) Penrose egyenletet.

A (4.4) feltételek geometriai megfogalmazása:

$$F = AG = P_{\mathcal{R}\mathcal{R}^\perp} \qquad \mathcal{N}(G) \subseteq \mathcal{R}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^*), \tag{4.5}$$

vagyis a G általánosított inverz olyan legyen, hogy zérusterét tartalmazza az A oszlopterének ortogonális komplementuma, azaz az A^* zérustere. Ebből már egyszerűen adódik a következő lemma.

4.2. *Lemma*. Az A mátrix G általánosított inverze akkor és csak akkor tartozik a $\mathcal{G}_{\mathfrak{J}(13)}$ osztályba ha

$$A^*AG = A^*$$

teljesül.

A $\mathcal{G}_{\mathfrak{J}(13)}$ és $\mathcal{G}_{\mathfrak{J}(13)}$ inverz osztály analóg viselkedése folytán várható, hogy a $\mathcal{G}_{\mathfrak{J}(13)}$ osztályba tartozó inverzeknek is van egy jellegzetes, a gyakorlati alkalmazások szempontjából fontos tulajdonsága. Ez valóban így van. A lineáris becsléselméletben, idősorok kiegyenlítésénél stb. fellépő $Ax = b$ egyenletek inkonzisztensek, azaz $b \notin \mathcal{R}(A)$. Az $Ax = b$ inkonzisztens egyenletrendszer *legkisebb négyzet megoldásán* olyan $\hat{x}$ vektort értünk, amelyre

$$\| A\hat{x} - b \| = \inf \| Ax - b \|,$$

tehát az $A\hat{x}$ eltérése a b vektorból normában a lehető legkisebb. Természetes az a törekvés, hogy a legkisebb négyzet megoldásokat is Gb alakban állítsuk elő alkalmas G mátrixok segítségével. Hogy milyen feltételeket kell kielégítenie egy ilyen mátrixnak — amelyről még nem tudjuk, vajon általános inverz-e —, ezt a következő tétel mondja meg.

4.2. *Tétel.* ([19] 48. o.): Legyen G olyan mátrix, hogy tetszőleges $b \in \mathcal{E}^n$ esetén Gb legkisebb négyzet megoldása az $Ax = b$ egyenletnek. Ehhez szükséges és elegendő, hogy G kielégítse az

$$AGA = A, \quad (AG)^* = AG$$

feltételeket.

A bizonyítás hasonló a 4.1. tétel bizonyításához.

4.3. *Megjegyzés.* A $G \in \mathcal{G}_{(13)}$ általánosított inverzekre az a figyelemre méltó, hogy itt az $F = AG = P_{\mathcal{R}\mathcal{R}^\perp}$ idempotens mátrix mindig ugyanaz. Ennek következménye a legkisebb négyzet megoldást előállító tulajdonság, ill. az, hogy a $\| AGb - b \|$ norma rögzített $b \in \mathcal{E}^m$ esetén minden $G \in \mathcal{G}_{(13)}$ mátrixszal ugyanaz.

A $\mathcal{G}_{(123)}$ inverz osztályt a $\mathcal{G}_{(13)}$ osztályba tartozó reflexív inverzek alkotják, tehát olyan mátrixok, amelyek kielégítik az (1), (2) és (3) Penrose egyenletet. Ezekre elterjedt a *jobbról gyengén általánosított inverz* elnevezés és az A_n^- jelölés. A (4.3) előállítás analogonja jobbról gyengén általánosított inverz előállítására a

$$A_n^- = (A^*A)^- A^* \tag{4.4}$$

kifejezés, amelyet Fisher [7] adott meg először.

4.4. *Megjegyzés.* Maximális rangú A $m \times n$ típusú mátrixok jobbról gyengén általánosított inverzeiről a következők mondhatók.

a) Ha $r = m$, azaz A maximális sorrangú, akkor bármely A^- inverz egyben jobbról gyengén általánosított is.

b) Ha $r = n$, azaz A maximális oszloprangú, akkor a (4.4) előállítással kapott

$$A_n^- = (A^*A)^{-1} A^*$$

mátrix az egyetlen jobbról gyengén általánosított inverz s így ez szükségképpen az A^+ pseudoinverz.

Végezetül csak megemlítjük, hogy $\mathcal{G}_{(2)}$ és $\mathcal{G}_{(234)}$ osztálybeli inverzek vizsgálatával Fisher [7] és Meyer [12] foglalkozott.

5. Az A^+ pseudoinverz

Most a pseudoinverzre vonatkozó legegyszerűbb és legfontosabb összefüggéseket tekintjük át röviden.

5.1. *Lemma.* Egy G mátrixra vonatkozóan az alábbi feltételek egymással ekvivalensek

$$AGA = A, \quad GAG = G, \quad (AG)^* = AG, \quad (GA)^* = GA; \tag{5.1}$$

$$A^*AG = A^*, \quad G^*GA = G^*. \tag{5.2}$$

E lemma alapján tehát az A^+ pseudoinverz az (5.2) egyenletek egyértelmű oldása. A következő lemma a pseudoinverz legegyszerűbb tulajdonságait foglalja össze. Az állítások egy részét már Penrose bizonyította, más részük későbbi eredmény.

5.2. *Lemma.* Az A mátrix A^+ pseudoinverzére az alábbi állítások igazak:

(i) $(A^+)^+ = A$,

(ii) $(A^*)^+ = (A^+)^*$,

(iii) $(AA^*)^+ = (A^+)^*A^+$,

(iv) $A^+A = AA^+$, ha A normális mátrix, azaz $AA^* = A^*A$,

(v) $(A^n)^+ = (A^+)^n$, ha A normális,

(vi) $(AA^*)^+AA^* = AA^+$,

(vii) $(UAV)^+ = V^*A^+U^*$, ha U és V ortogonális mátrixok, azaz $U^{-1} = U^*$, $V^{-1} = V^*$,

(viii) $(\lambda A)^+ = \lambda^{-1}A^+$, ha $\lambda \neq 0$,

(ix) $A^+ = (A^*A)^+A^*$,

(x) B $m\times r$ típusú r-edrangú és C $r\times n$ típusú r-edrangú, akkor $(BC)^+ = C^+B^+$,

(xi) Ha $A = \Sigma A_i$, ahol $A_iA_j^* = 0$ és $A_i^*A_j = 0$ $(i \neq j)$, akkor $A^+ = \Sigma A_i^+$,

(xii) $A^+ = (A^*A)^+A^* = A^*(AA^*)^+$.

Lényegesnek tartjuk megemlíteni a közönséges inverznek azt a két fontos tulajdonságát, amellyel a pseudoinverz általában nem rendelkezik.

1. Ha A és B nemszinguláris mátrixok, akkor $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, azaz szorzat inverze a fordított sorrend szabálya szerint tényezőnként számolható. Ez a szabály a pseudoinverzre nem érvényes, tehát általában $(AB)^+ \neq B^+A^+$.

2. Ismeretes a kvadratikus nemszinguláris mátrixok spektrális tulajdonsága: ha $Au = \lambda u$, akkor $A^{-1}u = \lambda^{-1}u$, azaz (i) az A és A^{-1} sajátértékei egymás reciprokai és (ii) az A és A^{-1} mátrixának ugyanaz a sajátvektor rendszere. A pseudoinverzre általában sem a (i) sem a (ii) tulajdonság nem igaz. Külön kutatási terület, hogy mi jellemzi azokat a mátrixokat, amelyeknek valamely típusú inverzére az (i) és (ii) valamelyike teljesül (lásd pl. [20]). A spektrális tulajdonság megkövetésével is definiálhatók azonban általánosított inverzek (lásd pl. [6], [8] és [2] 26. o.). E spektrális inverzek — legalább is egyelőre — csupán elméleti szempontból érdekesek; ismertetésüket itt mellőzzük.

Az előző pontban láttuk, hogy az $\mathcal{G}_{(14)}$ osztályba tartozó inverzek segítségével az $Ax = b$ konzisztens egyenletrendszerek legkisebb normájú megoldásai, míg a $\mathcal{G}_{(13)}$ osztályba tartozó inverzekkel az az $Ax = b$ inkonzisztens egyenletrendszerek legkisebb négyzet megoldásai állíthatók elő. Feltehetjük azt a kérdést is, vajon van-e olyan általánosított inverz, amelynek segítségével minimális normájú legkisebb négyzet megoldás állítható elő. A megoldás az A^+ pseudoinverztől várható, minthogy $A^+ \in \mathcal{G}_{(13)}$ és $A^+ \in \mathcal{G}_{(14)}$. Valóban igaz a következő tétel.

5.1. *Tétel.* Legyen a $G \in \mathcal{G}_{(13)}$ általánosított inverz olyan, hogy Gb minimális normájú legkisebb négyzet megoldása az $Ax = b$ inkonzisztens egyenletnek, azaz

$$\| Gb \|_n \leq \| x \|_n \quad Ax \in \{x\colon \| \forall x - b \|_m \leq \| Az - b \|_m \quad \forall z \in \mathcal{E}^n\},$$

ahol $\| \cdot \|_n$, ill. $\| \cdot \|_m$ jelölés arra utal, hogy a normák az $\mathcal{E}^n$, ill. $\mathcal{E}^m$ térben értendők. Ehhez szükséges és elegendő, hogy $G = A^+$ legyen, azaz teljesüljenek az

$$AGA = A, \quad GAG = G, \quad (AG)^* = AG, \quad (GA)^* = GA$$

feltételek.

6. EP$_r$ mátrixok, parciális izometriák

A mátrixelméletben a pseudoinverz fontos szerepet kapott egyes speciális mátrixok jellemzésénél is. Erre mutatunk be röviden két példát.

A) *Az EP_r mátrixok*

E mátrixokat Schwerdtfeger vezette be 1950-ben megjelent könyvében (lásd [23] 130. o.) eredetileg a szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrixok közös általánosításaiként. Az alább következő, ma elterjedt definícióban az EP_r mátrixok a hermitikus és ferdén hermitikus mátrixok közös általánosításainak tekinthetők.

6.1. *Definíció.* A kvadratikus r-edrangú A mátrixot EP_r mátrixnak mondjuk, ha $AX = 0$, akkor és csak akkor, ha $A^*X = 0$, azaz ha

$$\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A^*).$$

Tehát az EP_r mátrixok éppen azok a mátrixok, amelyeknek zérustere megegyezik transzponált konjugáltjuk zérusterével, ami valóban közös tulajdonsága a hermitikus és ferdén hermitikus mátrixoknak. Vegyük észre azt is, hogy a definíció magában foglalja a nemszinguláris mátrixokat és a normális mátrixokat is.

Az EP_r mátrixoknak igen nagy irodalma van; különösen Pearl, Katz és Hearon vizsgálatai (pl. [9], [10], [15]) jelentősek. Itt csupán Pearl 1966-ban bizonyított eredményét közöljük, amely az mátrixokat pseudoinverzükkel jellemzi.

6.1. *Tétel.* (Pearl [15]): Egy A kadratikus mátrix akkor és csak akkor EP_r mátrix, ha pseudoinverzével felcserélhető, azaz ha

$$AA^+ = A^+A.$$

Az eredménynek az az érdekessége, hogy az EP_r mátrixoknak ez a jellemzése sokkal természetesebb egyszerűbb formában fogalmazható, mint jóval korábbi eredeti definíciójuk.

B) *Parciális izometriák*

A parciális izometriákat az unitér mátrixok általánosításaként vezette be Erdelyi [5] s azóta igen nagy irodalmuk van.

Ismeretes az unitér mátrixok izometria tulajdonsága: Az n-edrendű U mátrixot unitérnek nevezzük, ha az

$$y = Ux \qquad \forall x \in \mathcal{E}^n$$

lineáris transzformáció távolságtartó, azaz

$$\| Ux_1 - Ux_2 \| = \| x_1 - x_2 \|, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathcal{E}^n.$$

A következő két feltétel bármelyike szükséges és elegendő ahhoz, hogy az U mátrix unitér legyen:

(i) $$\| Ux \| = \| x \|, \quad \forall x \in \mathcal{E}^n;$$

(ii) $$(Ux_1, Ux_2) = (x_1, x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in \mathcal{E}^n.$$

A parciális izometriák az unitér mátrixok izometria tulajdonságát megragadó általánosításai.

6.2. *Definíció.* Az $m \times n$ típusú V mátrixot *parciális izometriá*nak nevezzük, ha az

$$y = Vx \qquad \forall x \in \mathcal{N}(V)^\perp$$

lineáris transzformáció távolságtartó, azaz

$$\| Vx_1 - Vx_2 \|_m = \| x_1 - x_2 \|_n, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathcal{N}(V)^\perp,$$

ahol a norma m, ill. n indexe arra utal, hogy az az $\mathcal{E}^m$, ill. $\mathcal{E}^n$ térben értendő.

Könnyen belátható, hogy érvényes az unitér mátrixokra vonatkozó (i) és (ii) feltételek parciális izometriákra érvényes analogonjai. Nevezetesen a következő két feltétel bármelyike szükséges és elégséges ahhoz, hogy a V $m \times n$ típusú mátrix parciális izometria legyen:

(i) $$\| Vx \|_m = \| x \|_n, \quad \forall x \in \mathcal{N}(V)^\perp;$$

(ii) $$(Vx_1, Vx_2)_m = (x_1, x_2)_n, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathcal{N}(V)^\perp.$$

A parciális izometriák is jellemezhetők a pseudoinverz segítségével a következőképpen.

6. 2. *Tétel.* Az $m \times n$ típusú V mátrix akkor és csak akkor parciális izometria, ha

$$V^+ = V^*.$$

Ez a tétel is mutatja, milyen természetes általánosításai a parciális izometriák az unitér mátrixoknak.

A hermitikus és unitér mátrixokat összekapcsolja a mátrixok poláris előállítása, amely szerint minden kvadratikus mátrix előállítható egy pozitív szemidefinit hermitikus mátrix és egy unitér mátrix szorzataként. Hearon mutatta meg [9], hogy igaz egy olyan poláris előállítás is, amely minden kvadratikus mátrixot egy pozitív szemidefinit hermitikus mátrix és egy parciális izometria szorzataként állít elő.

E két példával is érzékeltetni kívántuk a pseudoinverz sokrétű szerepét a mátrixelméletben.

IRODALOM

1. Bjerhammar, A.: Rectangular reciprocal matrices with special reference to geodetic calculations. Bull. Géodésique 52 (1951) 188—220.
2. Boullion, T. L.—Odell, P. L. (Ed.): Proceedings of the Symposium on Theory and Application of Generalized Inverses of Matrices. Texas, 1968. Texas Techn. College, Math. Series No. 4.
3. Boullion, T. L.—Odell, P. L.: Generalized inverse matrices. 1971. Wiley.
4. Egerváry J.: Az inverz mátrix általánosítása, MTA Mat. Kut. Int. Közleménye 1 (1956) 315—324.
5. Erdélyi, I.: On partial isometries in finite-dimensional Euclidean spaces. Siam J. Appl. Math. 14 (1966) 453—467.
6. Erdélyi, I.: The quasi-commuting inverses for a square matrix, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 42 (1967) 626—633.
7. Fisher, A. G.: On construction and properties of the generalized inverse. Siam J. Appl. Math. 15 (1967) 269—272.
8. Greville, T. N. E.: Spectral generalized inverses of square matrices. MRC Tech. Summary, Rep. 823, Madison, 1967. Math. Res. Center, U. S. Army, Univ. of Wisconsin.
9. Hearon, J. Z.: Polar factorization of a matrix, J. Res. Nat. Bur. Standards 71B (1967) 65—67.
10. Katz, I. J.—Pearl, M. H.: On *EPr* and normal *EPr* matrices, J. Res. Nat. Bur. Standards 70B (1966) 47—77.
11. Langenhope, C. E.: On generalized inverses of matrices. Siam J. Appl. Math. 15 (1967) 1239—1246.
12. Meyer, C. D. Jr.: On ranks of pseudoinverses. Siam Rev. 11 (1969) 382—385.
13. Moore, E. H.: On the reciprocal of the general algebraic matrix, Abstract, Bull. Amer. Math. Soc., 26 (1920) 394—395.
14. Moore, E. H.: General analysis, Part I., Mem. Amer. Philos. Soc., 1 (1935) 197—209.
15. Pearl, M. H.: On generalized inverses of matrices, Proc. Camb. Phil. Soc. 62 (1966) 673—677.
16. Penrose, R.: A generalized inverse for matrices, Proc. Camb. Philos. Soc., 51 (1955) 406—413.
17. Pringle, R. M.—Rayner, A. A.: Generalized inverse matrices with applications to statistics (Griffins Statistical Monographs). London, 1971. Griffin.
18. Rado, R.: Note on generalized inverses of matrices, Proc. Camb. Philos. Soc. 52 (1966) 600—601.
19. Rao, C. R.—Mitra, S. K.: Generalized inverse of matrices and its applications, 1971. Wiley.
20. Rohde, C. A.: Some results on generalized inverses, Siam Rev. 8 (1966) 201—205.
21. Rosen, J. B.: Minimum and basic solutions to singular linear systems, Siam J. Appl. Math. 12 (1964) 156—162.
22. Rosen, J. B.: The gradient projection method for nonlinear programming, Part I., Linear constrains, J. Soc. Indust. Appl. Math. 8 (1960) 181—217.
23. Schwerdtfeger, H.: Introduction to linear algebra and the theory of matrices. Groningen, 1950. P. Noordhoff.
24. Urquhart, N. S.: Computation of generalized inverse matrices which satisfy specified conditions, Siam Rev. 10 (1968) 216—218.

KÖNYVEKRŐL

SIMON Gy.: *Gazdaságirányítás és népgazdasági optimum.* Budapest, 1970. Közgazd. és Jogi Kiadó.

Simon György a címben szereplő fogalmakat sajátos szemszögből közelíti meg. A népgazdasági optimumot könyvében egy népgazdasági szintű lineáris programozási feladat primál megoldása (volumen terv) képviseli. A gazdasági irányítás számára pedig ugyanezen feladat duális megoldásai megadják az erőforrások (termékek, kapacitások stb.) optimális értékeléseit (árnyékait), amelyek alapján kialakítható a népgazdasági optimum megvalósulását elősegítő árak, jövedelmek, adók, kamatok stb. rendszere.

Simon György könyvéből az olvasó áttekintést kaphat arról a kutatómunkáról, amelyet a szerző a 60-as években a matematikai módszerek közgazdasági elemzésben és tervezésben való felhasználása érdekében folytatott. Elsősorban a matematikai programozás és az árnyékárak állnak érdeklődésének homlokterében. A könyv magvát többszektoros, múltbeli adatok alapján számszerűsített — ex post — lineáris programozási modellel végzett vizsgálatok képezik. Ezt termelési függvény és más módszerek segítségével végzett tendencia elemzések, valamint elméleti jellegű (a modellek kapcsán felmerülő, illetve a továbbhaladás irányát jelző) problémák tárgyalása egészíti ki.

A 275 oldalnyi terjedelmű könyv 4 részre tagolódik. Az I. rész „A gazdasági fejlődés néhány törvényszerűsége" címet viseli. Ebben a részben a szerző és munkatársai (elsősorban Kupcsik József) által végzett termelési függvény számítások kerülnek ismertetésre. Cobb—Douglas típusú termelési függvényükben 4 tényezőt vesznek figyelembe:

— létszám (munkaidő hosszával korrigálva)

— termelőberendezések (átlagos műszakszámmal korrigálva)

— kutató-fejlesztő műszakiak aránya (a meg nem testesült műszaki fejlődést hivatott reprezentálni),

— technikai felszereltség (a megtestesült műszaki fejlődés hatásának számszerűsítése).

Először egy népgazdasági szintű (lényegében teljes termelésre vonatkozó) termelési függvényt határoznak meg; paramétereinek becsléséhez 26 ágazat 16 éves idősorait vették alapul. A szerző részletesen tárgyalja a statisztikai adatok kapcsán felmerülő fontosabb problémákat, de nem tér ki az adatok homogén voltának nyilvánvaló problémáira (pl. 21 ágazatban a teljes termelésre, 5-ben viszont a nettó termelésre vonatkoznak a számítások!), s ugyanakkor eltúlozza az illeszkedés pontosságának jelentőségét. Ugyancsak figyelmen kívül hagyja a termelési makrófüggvények és azok alapján levonható következtetések létjogosultságával kapcsolatos problémákat. Ezek a hiányosságok akkor válnak kritikussá, amikor a függvény alapján „törvényszerűségeket" próbál feltárni, illetve a növekedés forrásait, azok hozzájárulásának „mértékét" elemzi.

A népgazdasági szintű termelési függvény paramétereit a későbbiekben felhasználják a nemzeti jövedelem függvényének, illetve ágazati termelési függvényeknek a számszerűsítésére. Feltették (bár ezt elméletileg aligha lehet megindokolni), hogy a négy termelési tényező rugalmassági együtthatóinak arányai a különböző függvényekben megegyeznek. Ezen együtthatók (és az arányossági tényező) szintjét úgy módosították, hogy a kapott függvények legjobban illeszkedjenek a megfelelő idősorokhoz.

Számításaik szerint a mennyiségi tényezők (tőke és munkaerő) volumenhozadéka mind a teljes termelés esetében, mind a nemzeti jövedelem esetén csökkenő volt (0,8409, ill. 0,9891). Ez utóbbi 0,9891-es érték kapcsán a szerző két helyen is megjegyzi, hogy „az elméletileg indokolt érték (1) jó közelítése." Nem magyarázza meg azonban, hogy milyen elmélet indokolná ezt az értéket (a konstans volumenhozadékot).

A továbbiakban a parciális hozadékok (határtermelékenységek) alapján elemzik az egyes termelési tényezőknek a növekedésben betöltött súlyát. Hasonló elemzéseket végeztek egyes ágazatokra is. A becslések viszonylagos pontosságára támaszkodva a szerző alaptalanul jelenti ki, hogy „a kialakított függvényrendszer alkalmas a termelés és termelékenység alakulásának viszonylag pontos közép- és hosszú távú tervezésére, nemcsak az egész népgazdaság, hanem minden főbb ágazat, valamint az egyes iparcsoportok vonatkozásában is." Az első rész hátralevő fejezeteiben hasonló szemléletű elemzéseket találhatunk az átlag és határtermelékenység alakulásának jellemzőiről.

A II. részben (Népgazdasági optimum tényadatok alapján) bemutatott vizsgálat kimondott célja „kikísérletezni, hogy milyen felépítésű programozási modellel nyerhetünk közgazdaságilag megalapozott eredményeket a népgazdasági optimum számítások egyik fő célja, az optimális árrendszer alapvető arányai tekintetében". Részletesen foglalkozik a szerző a lineáris programozási modell néhány általános és az általa elfogadott változat speciális jellemzőivel. Modellje tényadatokra alapul (ex post programozás), közelebbről egy — az 1959—61-es időszakra vonatkozó — „végállapot optimáló" modell.

A modell főbb jellemzőit az alábbiakban lehet röviden felvázolni. 30 ágazatot (termékcsoportot) vesz figyelembe és modellje az ÁKM-re épül. Minden ágazat számára adott egyrészt egy „kötelezően teljesítendő" termelési tevékenység (termelés az 1959-es kapacitás és ráfordítási szerkezet mellett). Másrészt, az 1959- és 1961-re vonatkozó ÁKM adatok alapján ún. növekmény módszerrel meghatároz minden ágazat számára egy másik (a termelést bővítő) tevékenységet is. Ez utóbbi már nem kötelezően előírt, ugyanis az adott ágazati termékek rendelkezésre álló mennyiségének bővítése megvalósítható kompetitív import növeléssel is. A külkereskedelmi tevékenységek szerepeltetésének jellemző vonása, hogy nem-szocialista relációban termékcsoportokra specializált, míg szocialista viszonylatban aggregált (rögzített struktúrájú) tevékenységeket alkalmaz. A tevékenységek között szerepelnek még a pótlás és felhalmozás, valamint az 1961-es tényleges volumenű és összetételű fogyasztás (kötelezettségként), illetve a többlet fogyasztás struktúrája két változatban. A modell feltételei pedig termék-, munkaügyi és devizamérlegeket, valamint termelési kapacitás-, felhalmozási, természeti és exportkorlátokat tartalmaznak. (Méret: 104 feltétel, 119 változó.) A számításokat 3 különböző célfüggvény mellett végezték el:

— nemzeti jövedelem többlet és a fogyasztási többlet (növekmény-szerkezetbeni) maximálása

— mint az előbbi, de a többlet fogyasztás struktúrája az 1961-beli ténylegessel egyezik meg

— nem-szocialista devizaegyenleg maximálása.

Mindhárom célfüggvénnyel két-két változatban (az exportkorlátok két különböző szintje mellett) számították ki az optimumot. (Kisebb pontatlanságot találhatunk az egyenlőség formájában felírt feltételek jellegére (85. o.) és árnyékárára vonatkozóan (88. o.). Az egyenlőségek ugyanis nemcsak „kötelezettségeket" képviselhetnek és ennek megfelelően a hozzájuk tartozó árnyékárak pozitívak is lehetnek, nemcsak negatívak, ill. nullák.)

Felépítéséből adódóan lényegében csak a termelés növelése (kapacitás bővítés) és a külkereskedelmi tevékenységek versenyeznek egymással a modellben. Így azután „nem meglepő, hogy az exportáló, vagy importtal helyettesíthető hazai termelőágaknál vannak jelentős eltérések a tényleges termelés és az optimális programok között." A modell szerkezetéből, aggregáltságából és egyéb feltevéseiből következik, hogy a népgazdaság „optimális szerkezetére" és az árnyékárakra kapott értékek — mint arra a szerző is utal — fenntartással kezelendők. Nem valószínű, hogy az ilyen jellegű programozás a múltbeli fejlődés elemzésének hatékony eszközévé válhat. Ettől függetlenül, bizonyos modell-szerkesztési és adatgyűjtési elvek jól tanulmányozhatók a kísérlet alapján, azaz mindenképpen hasznos „esettanulmányként" értékelhetjük a számszerűsített modellt.

A szerző először a „primál" megoldásokból nyert gazdasági szerkezetek (6 változat) főbb jellemzőit ismerteti, majd rátér az őt jobban érdeklő árnyékárak elemzésére. A termékmérlegekhez tartozó árnyékárak — bizonyos feltevésekkel — „optimális" ágazati árszintekként értelmezhetők. A 6 változatban számított árnyékárakat az összehasonlíthatóság érdekében normalizálni kellett. Ezt úgy végezte el (az árszintek megfelelő változtatásával), hogy az 1961-es tényleges fogyasztási struktúra árnyékáron mért összege minden esetben megegyezett a tényleges árakon számított értékekkel.

Az elemzés főbb következtetéseit az alábbiakban foglalhatjuk össze: a különböző programokból nyert normalizált árnyékárak szóródása viszonylag csekély volt (vagyis az *adott* modellben meglehetősen stabilnak mutatkoztak); a tényleges és az árnyékárak átlagai alapján számított árszintek eltérése nagyobb volt, mint az utóbbiak és a világpiaci árak eltérése. Ez a tény önmagában azonban nem indokolja a szerző azon megállapítását, amely szerint „a tényleges 1961. évi belföldi árrendszer messze volt attól, hogy optimálisnak lehessen nevezni".

A következő fejezetben a többi „erőforrás" árnyékárai kerülnek ismertetésre. Ezek közül a két alapvető termelési tényezőre (munkaerő és tőke) kapott kalkulatív értékelések és a könyvben ismertetett elemzési lehetőségek tarthatnak elsősorban érdeklődésre számot. Ez a fejezet számos érdekes és újszerű megállapítást tartalmaz. Így például a szerző kísérletet tesz a gazdasági avulásnak a számszerűsítésére, a differenciális hozadékcsökkenésen keresztül. Hasonlóképpen figyelemre méltó az élőmunka „aláértékelésének" igazolása a gazdaságossági számításokban. Ugyanakkor azonban találhatunk vitatható megállapítást is, például a differenciális hozadéki arányok és bérarányok kérdésében. Ennél talán célszerű egy kicsit elidőzni.

A probléma abból adódik, hogy a modellekben (termelési függvény, programozási feladat vagy egyéb) szereplő összefüggések valóságtartalmát a szerző túlértékeli. A szerző számításai szerint például az egyetemet és középiskolát végzettek differenciális hozadéka kb. 7—9-szerese a szakképzetlen és 5—7-szerese a szakképzett dolgozókénak. Ugyanakkor a bérek arányai 2 alatt maradnak. A szerző egyértelmű következtetése, hogy a bérarányokat fokozatosan közelíteni kell a hozadéki arányokhoz. Nem kívánok itt vitába szállni a differenciális hozadékokra épülő ár, illetve bérarányok koncepciójával, amelyet én hibásnak tartok, de a szerző elfogadni látszik. Elég arra felhívni a figyelmet, hogy — jelen esetben — az a tendencia, amely szerint a technikai és az általános gazdasági fejlődés a közép- és felsőfokú végzettségűek létszám-arányának növekedésével jár, csak modellekben vehet fel egyértelmű ok-okozati összefüggést, a valóságban ez az összefüggés sokkal bonyolultabb. Ebből következően a ,,differenciális hozadékok'' sem értelmezhetők ,,egy az egyben'' a valóságban. Ugyanakkor, más oldalról nézve, még a ,,diplomás'' kategórián belül is viszonylag kevés azok száma, akik tényleg jelentősen hozzájárulnak a növekedéshez, míg a többiek ,,társadalmi hozadéka'' nem valószínű, hogy lényegesen eltér az egyéb foglalkoztatottakétól. Persze, ez az egész kérdés sokkal bonyolultabb annál, mintsem néhány sorban el lehetne intézni, inkább csak jelezni próbáltam a fenti szemlélet vitathatóságát.

A továbbiakban a szerző az árnyékárakat ár-(árképzés) elméleti szempontból vizsgálja. Figyelemre méltóak a szerző főbb megállapításai, mint pl. ,,néhány legáltalánosabb sajátosságon . . . kívül nincsenek minden programozási modellre egyaránt vonatkozó árnyékár-tulajdonságok'', ,,. . . a modell és kiinduló adatai vonatkozásában az árnyékárak nem nevezhetők objektíveknek'', vagy hogy az árnyékárak jellemzésénél feltételezzük, hogy a gazdasági valóságot nagyjából elfogadhatóan tükrözi a felhasznált programozási modell és annak kiinduló adatai. Csak ezen utóbbi feltevés teljesülése mellett lehetne a szerző korábbi következtetéseivel maradéktalanul egyetérteni. Részletesen elemzi a programozási feladat árnyékárai és az ÁKM alapján számított kalkulatív árak közötti eltéréseket. (Itt nem árt megjegyezni, hogy kétfajta kalkulatív értékelési rendszerre a szellemi rokonság legalább annyira jellemző, mint a vázolt eltérések.) A fenti elemzés kapcsán kitér az ártípusok főbb jellemzőire is és fontos árképzési követelményeket tárgyal. Majd megfogalmazza egyik tételét, amellyel ebben a formában nem értek egyet: ,,Következésképpen, *a centrumárnyékár nem más, mint Marx termelésiár- és járadékelméletének, e marxi elmélet szocialista viszonyok közötti általánosításának megfelelő árforgalom, a termelőerők és a társadalmi munkamegosztás modern feltételeinek figyelembevételével.*''

A III. részben (Az optimális tervezés egyes elvi és módszertani kérdései) először ,,*a* dinamikus modell'' néhány problémájával foglalkozik. Megfogalmazza, hogy mit ért statikus, kvázidinamikus és dinamikus modell elnevezésen, majd felírja az általa választott dinamikus modell-változat általános sémáját. Ez utóbbi egy több időszakot felölelő lineáris programozási feladat; árnyékárrendszerének értelmezése sok szempontból eltér a statikus modellbelitől. Felvázol egy koncepciót különböző távú „speciális népgazdasági programozási modellek" rendszerére és részletesen kitér a speciális modellek szerkezetének néhány sajátosságára. Ezt a részt az optimális volumentervek és árnyékárak közgazdasági realitásának feltételeiről szóló fejtegetésekkel zárja.

A IV. részben (Kiegészítő vizsgálatok és az ex post optimalizálás kiinduló adatai) először a ráfordítási fajlagosok „dinamikájával" foglalkozik 1959—64. évi ÁKM és egyéb statisztikai adatok alapján. A továbbiakban a fogyasztási, a felhalmozási és az export-import szerkezet, illetve a devizaárak változásait elemzi a fenti időszakban. Ebben a részben ismerteti a numerikus (programozási) modell főbb jellemzőit is. Az utolsó fejezetben (a szerző közreműködésével kidolgozott OMFB tanulmányok alapján) a hatékonyság gyártmányszintű elemzésének főbb (gépiparbeli) következtetéseit tárgyalja.

A szerző elsősorban a tárgyalt modellek alkalmazásában rejlő lehetőségek feltárására, az azokkal végezhető vizsgálatok széles körének bemutatására helyezte a hangsúlyt. Ebből a szempontból feltétlenül hasznos olvasmány lehet minden, e témakör iránt érdeklődő olvasó számára, hiszen komplex módon, számításokkal illusztrálja az elemzésben felhasznált módszereket.

Viszonylag kevesebb helyet szentelt a modellek hiányosságainak, korlátainak megvilágítására, az alternatív eljárások ismertetésére. Ezért az olvasóban olyan benyomás keletkezhet, hogy a szerző egyes vonatkozásokban többre értékeli a fenti módszerek adta lehetőségeket, mint amenynyi azoktól reálisan elvárható, illetve hogy egyes tételei indokolatlanul kategorikusak, nem eléggé megalapozottak. Fennáll annak a veszélye is, hogy a témában nem eléggé járatos olvasóban túlzott várakozásokat ébreszt a matematikai modellekkel szemben.

Simon György könyvét összességében — vitatható tézisei ellenére — hasznos hozzájárulásnak kell tekintenünk a matematikai módszerek gyakorlati alkalmazását propagáló és azok hatékony felhasználási lehetőségeit kutató hazai irodalomhoz.

Zalai Ernő

Krekó B.: *Optimumszámítás.* (Nemlineáris programozás) Budapest, 1972. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. 656 o.

A könyv folytatása és általánosítása a szerző *Lineáris programozás* című művének, amely ugyancsak a „Matematikai ismeretek gazdasági szakemberek számára" sorozatban jelent meg 1966-ban.

Ez a könyv is hasonló felfogásban íródott: az optimumszámítási feladatoknak elsősorban nem az elméletét, hanem a módszereit taglalja. Megértéséhez az olvasónak minimális analízis és matrixalgebrai ismereteken kívül jóformán semmiféle matematikai előképzettséggel nem kell rendelkeznie. A felhasznált fontosabb alapfogalmakat a szerző külön összefoglalja. A bemutatott eljárások leírása néhány esetben nem elég tömör: az egyszerűbb matematikai eszközökkel való megfogalmazás szükségszerűen hosszadalmasabb leírást igényel. Didaktikai szempontból viszont a részletes leírás a mű egyik legnagyobb érdeme: nem szorítkozik a kész algoritmusok bemutatására, hanem szinte végigvezet a módszerek kialakulásának logikai útján. A könyv bizonyításai világosak és áttekinthetőek, az egyes fejezetek végén található numerikus példák elősegítik az eljárások könnyebb elsajátítását. Ugyanakkor meg kell említeni, hogy az egyes módszerek előnyei és hátrányai nem kap-nak elég hangsúlyt, pedig a gyakorlati felhasználás céljára írt kézikönyvnél ez talán a legfontosabb szempont. A műben kevés útmutatást találunk arra is, ha egy feladatot — például a konkáv függvény maximumának meghatározását — több különböző módszer segítségével is meg lehet oldani, ezek közül melyik a leghatékonyabb.

A könyv az optimumszámítási feladatok népes családjából csupán a determinisztikus feladatokat emeli ki, és ezeket az ún. statikus módszerrel oldja meg. Ezek közül is a klasszikusnak tekinthető, leginkább időálló eljárásokat mutatja be, olyan képet akar nyújtani, amely alapján az olvasó — a szerző szavaival élve — „már könnyen eligazodhat a szakirodalom napról napra bővülő termésében is".

A könyv két részre tagozódik: a folytonos és a nem folytonos problémákat a megoldás alapvetően eltérő jellege miatt külön tárgyalja.

A szimplex módszer számítástechnikailag a legegyszerűbb és ezért a legáltalánosabban alkalmazott eljárás. A szerző az előző könyvéhez képest annyiban nyújt újat, hogy a módszert a már ismert lineáris programozási feladaton túl hiperbolikus és konkáv kvadratikus függvény maximumának meghatározására is felhasználja. Ez utóbbi esetben csupán a belépési kritérium vizsgálata okoz nehézséget.

A hatékony irányok módszere, másnéven gradiens módszer sokkal általánosabb feltételek mellett alkalmazható: a lehetséges megoldások halmazát folytonosan deriválható kvázikonkáv függvények által megadott egyenlőtlenség-rendszer alkotja, ezen keressük egy kvázikonkáv függvény maximumát. A szerző bemutatja, hogy az optimumot több irányból is meg lehet közelíteni, és a különböző módszereket hatékonyságuk szerint össze is hasonlítja. A hatékonyságot két egymással természetszerűleg ellentmondó követelménnyel: az algoritmus bonyolultságával, illetve a konvergencia gyorsaságával jellemzi.

A metsző síkok módszerével egy közgazdasági szempontból nagyon fontos probléma, a degresszíven változó költségek minimalizálása elemezhető. A szerző az eddig ismert vizsgálatokat több vonatkozásban is kiterjeszti, és így a poliedrikus tartományon kvázikonvex függvény minimalizálására elég hatékony eljárást szolgáltat. A módszer a metsző síkok elnevezést onnan kapta, hogy az értelmezési tartományt hipersíkok beiktatásával fokozatosan szűkítjük le úgy, hogy a viszonylag rossz megoldások kiessenek.

Amennyiben a feladatban szereplő függvények egyváltozós függvények összegére bonthatók szét, úgy a szimplex módszer segítségével — némi körültekintéssel — jó közelítő megoldást nyerhetünk. A szerző a szeparábilis függvények módszerének nevezett technikát úgy jellemzi, mint egy egyszerűen algoritmizálható, de sok gépidőt igénylő eljárást.

A szekvenciális módszer, ismertebb nevén Sumt-módszer a feladat megoldását — segédfüggvények bevezetésével — feltétel nélküli szélsőérték meghatározására vezeti vissza. A szerző igen részletesen mutatja be az eljárást, mivel jó tulajdonságai miatt — elég általános feltételek mellett jól konvergáló lokális optimumot szolgáltat — egyre szélesebb körben terjed el. Didaktikai szempontból külön kiemelendő, hogy a szerző a módszer lényegét — a szokástól eltérő logikája miatt — egyszerű példák levezetésén keresztül illusztrálja. A szekvenciális módszer tekinthető a vizsgált módszerek közül a leginkább problémaorientált eljárásnak, ezért a megoldási algoritmus kidolgozására és a segédfüggvények konstruálására minden konkrét esetben külön ügyelni kell.

Amennyiben a változók egy része kizárólag diszkrét értékeket vehet fel, úgy a megoldás sokkal bonyolultabbá válik. A könyvben ismertetett nem folytonos eljárások két csoportba oszthatók: a feladat vagy a szimplex módszerre visszavezetve, vagy a lehetséges megoldásokat sorbarendezve oldható meg.

Az első csoportba tartozó módszerek közül az elsőként publikált Gomory algoritmust mutatja be a szerző. Az eljárás a metsző síkok módszeréhez hasonló elvekre épül, itt is az értelmezési tartományt — pótlólagos feltételek beiktatásával — fokozatosan leszűkítve juthatunk el az optimumig. A szerző hangsúlyozza, hogy a módszernek — a számítógépi realizálás nehézségei miatt — inkább elméleti, mint gyakorlati jelentősége van. Az utóbbi időben ezért alakultak ki a sokkal hatékonyabbnak tekinthető kombinatorikus módszerek. Ezek két alapvető típusát mutatja be a könyv. A közvetlen leszámlálási technika az összes szóbajöhető megoldást végignézi. A szétválasztás és korlátozás módszere ennél sokkal hatékonyabb, mert a célfüggvényre tett előzetes becslés alapján a lehetséges megoldások nagy részét csak implicit módon vizsgálja meg. A szerző külön bemutatja néhány olyan klasszikusnak számító diszkrét feladatnak a megoldását is, mint a hátizsákprobléma és a körutazási probléma.

Az utolsóként ismertetett gráfelméleti módszerekkel egy hálózat optimális úthosszát vagy az optimális sorrendet lehet meghatározni oly módon, hogy a feladatot lineáris programozásra vezetjük vissza.

Külön ki kell emelni a könyvnek azt az értékét, hogy a dualitás fogalmával részletesen foglalkozik. A programozási feladatoknál talán ez a legkevésbé kidolgozott és ezért legizgalmasabb terület. Nagyon érdekes a szerzőnek az a törekvése, hogy a dualitási tételeket azok közgazdasági interpretálásán keresztül vezesse be. Azonban véleményem szerint a dualitás a programozási feladatok sajátossága, amit esetleg közgazdaságilag is lehet értelmezni, jóllehet az értelmezés sokszor erőltetett. E sajátosságból következően a dualitás ténye azon alapul, hogy a programozási feladat megoldásakor tulajdonképpen egy függvény nyeregpontját határozzuk meg. A duális feladatpárra a lineáris programozásnál megismert dualitási tételek a mellékfeltételek és a célfüggvény alakja szerint módosítva állnak fent. A dualitás jelentősége a matematikai közgazdaságtan számára abban rejlik, hogy ezen keresztül teremthető meg a kapcsolat az egyensúlyi és a programozási modellek között.

Sajnálatos, hogy a könyvben elég sok matematikai pontatlanság maradt bent, ami az alapos matematikai előképzettséggel nem rendelkező olvasók miatt veszélyes. Ennek ellenére a könyv fenti érdemei alapján nemcsak az egyetemi oktatás számára, hanem a matematikai programozás iránt érdeklődő gazdasági szakembereknek is ajánlható.

Hüttl Antónia

Kaufmann, H.—Desbazeille, G.: *A kritikus út módszerének matematikai alapjai.* Budapest, 1972. Műszaki Könyvkiadó. 206 o.

Mindazok számára, akik egy tervezetet vagy egy tervezetkomplexust akarnak megvalósítani (tehát közgazdászok, mérnökök, matematikusok) egyaránt hasznos ennek a könyvnek az elolvasása, amely egy gráfelméleten alapuló operációkutatási módszert, a PERT eljárást mutatja be. A módszer neve *P*rogram *E*valuation *R*esearch *T*ask vagy *P*rogram *E*valuation and *R*eview *T*echnique angol kifejezésének rövidítése.

A PERT technikát amerikai kutatók alkalmazták először a Polaris rakéták kutatási és építési programjának megvalósítására. Az utóbbi évtizedben a PERT rendszer iránt világszerte nagy érdeklődés mutatkozott. A módszer sikerének érdemi oka, hogy tényleges problémákat oldottak meg segítségével. Ugyanakkor leginkább intuitív fogalmakat használ, ezért nem igényel különösebb matematikai előképzettséget. Egyszerűsége mellett nagy előnye hatékonysága és továbbfejleszthetősége. Az Egyesült Államokban a módszer ma már annyira elismert, hogy a közigazgatási szervek a pályázati felhívásaikra érkezett ajánlatok közül csak azokkal foglalkoznak, melyek kivitelezésére a pályázó cég PERT programot nyújt be. Hazánkban is gyorsan terjed az eljárás. Hatékonyságát világosan bizonyítja az M7 műút második két forgalmi sávjának építése, ahol a módszer folyamatos alkalmazása az eredetileg tervezett építési idő jelentős csökkenését eredményezte.

A PERT módszert nem csak ismernünk, hanem alkalmaznunk is kell. Ez tükröződik Kaufmann és Desbazeille munkájában.

Az 1. fejezetben néhány nagyon egyszerű gráfelméleti alapfogalom ismertetése után rendezési relációt definiálnak a szerzők egy körpályamentes gráf csúcsai, valamint ívei között. A következő részben egy gráf csúcshalmazának vagy ívhalmazának szintekre bontására vonatkozó három eljárást olvashatunk: az oszlopvektoros, a mátrixhatványozási és a grafikus eljárást. Ezek segítségével adható meg az illető halmaz elemeinek — a gráf csúcsainak vagy íveinek — lineáris rendezése.

A 2. fejezet a PERT módszer alapvető fogalmainak — tevékenység, esemény, program — definiálásával kezdődik. A programot gráffal reprezentálhatjuk, melynek ívei a tevékenységek, csúcsai az események. Minden ívhez egy nem negatív értéket rendelünk, mely az illető tevékenység időtartamát jelzi. Ezt követi egy másik gráf-reprezentáció ismertetése, ahol a tevékenységeket feladatoknak nevezzük és egy gráf csúcsaival modellezzük. Az így kapott gráf íveit — amelyekhez időkülönbségeket rendelünk — feladatoknak nevezzük. Franciaországban ez utóbbi leírást használják, és a megfelelő módszert *potenciálok módszerének* nevezik. Ezek után a kritikus út fogalmát (a kezdő és befejező esemény közti leghosszabb pálya) vezetik be a szerzők, és három algoritmust ismertetnek a kritikus út meghatározására. Az alapfogalmak megértését két gyakorlati példa segíti elő.

Míg a fejezet elején a tevékenységek időtartamáról azt feltételezi Kaufmann és Desbazeille, hogy egyértelműen meghatározottak, addig a fejezet végén már valószínűségi változókként kezelik őket: átlagidőkkel és szórásnégyzetekkel dolgoznak. Ha a tevékenységek tartamának eloszlása nem ismert, akkor a számítások megkönnyítése érdekében a PERT módszerben feltesszük, hogy a tartamok ß eloszlásúak. A fejezet utolsó soraiban nagyon értékes és találó megállapítást olvashatunk: „Röviden: a PERT módszer olyan állandó segédeszköz, melyet alkalmazva minduntalan módosítunk, tökéletesítünk a terv szerinti programon, és amely lehetővé teszi az erőfeszítések rangsorolását a munkálatok operatív irányítása során."

A 3. fejezet sztochasztikus modell bevezetésével általánosítja a PERT módszert. A döntéses események fogalmának bevezetése révén olyan esetekben is használhatóvá válnak eddigi módszereink, amikor tapasztalataink még nem nyújtanak elegendő alapot ahhoz, hogy programunkat teljesen meghatározott gráffal modellezzük.

A 4. fejezet az időtartamok és a költségek együttes optimalizálásával foglalkozik — ez a könyv legrészletesebben kifejtett része. Itt találkozunk a paraméteres lineáris programozás általánosabb feladatával, majd a 28. pontban a Fulkerson-algoritmus tárgyalása kapcsán a dualítás univerzális fogalmával. Még ha ennek elméleti bemutatása kissé ijesztően hatna is, legyen az Olvasó erős és az első olvasás után ne térjen rá azonnal vissza, hanem kövesse előbb lépésről lépésre végig az algoritmus alkalmazását, a 30. pontban bemutatott példát. Ez a könyv egyik kulcsfontosságú eleme. Kétségtelen, hogy a 4. fejezet legnagyobb részében a tevékenységek időtartamát meghatározottnak tekintik és e feltétel mellett optimalizálják a programot. Csak a könyv legutolsó lapjai vázolják azt az esetet, amikor a véletlen is szerepet játszik. Itt az időtartamok átlaga és szórása a költségnek lineáris függvénye. Bármennyire bonyolult is a valóságban a helyzet, pillanatnyilag nem tudjuk ennél jobban megközelíteni. A kevésbé egyszerű esetek még kutatási stádiumban vannak; szinte minden operációkutatási kongresszuson és folyóiratban hallhatunk, ill. olvashatunk ilyen témájú közleményeket.

A függelékben a ß eloszlás ismertetésén túl a témával mélyebben foglalkozó három cikk kivonatát olvashatjuk. Ezek elősegítik a könyvben ismertetett módszer mélyebb megértését.

A könyv ismeretterjesztő jellegű, mindenekelőtt a gyakorlatiasságra törekszik. Alkalmas arra, hogy sokan elolvassák és anyagát elsajátítsák. A Műszaki Könyvkiadó Kaufmann és Desbazeille munkájának megjelentetésével jelentősen hozzájárult ahhoz, hogy hazánkban többen és alaposabban ismerjék meg a PERT módszert, melynek alkalmazásával beruházásainknál, kutatási programjainknál sokat nyerhetünk pénzben és időben egyaránt.

Futó Péter

Heesterman, A. R. G.: *Allocation models and their use in economic planning.* Dordrecht, 1971. D. Reidel Publishing Company.

A szerző a Birminghami Egyetemen tartott előadásait és kutatásai eredményét foglalja össze, szisztematikus áttekintést ad a lineáris allokációs modellek legfontosabb típusairól és azok viselkedéséről. Ismerteti azokat a tervezéssel és beruházással kapcsolatos legfontosabb eredményeket, amelyek az allokációs modellekkel nyerhetők.

Igen érdekesek fejtegetései az optimális tervezés elméletéről. Ismerteti az optimális tervezés kérdésének három lehetséges megközelítési módját. Az egyik megközelítési mód értelmében az optimális tervezést a kormány és gazdasági szakemberei szempontjából tekinti. Miután a szerző a piaci gazdaságot veszi alapul, ábrázolásában a kormány tevékenysége egyes kívánatos gazdasági tevékenységek ösztönzésében, mások fékezésében áll. Ennek érdekében azonban tudnia kell azt, hogy mi az ország erőforrásainak optimális eloszlása és ez már az általánosan ismert input-output típusú modellek készítéséhez vezet. A második megközelítési mód az optimális tervezés problémáját a magánvállalkozó és tanácsadói szempontjából vizsgálja. A központi probléma itt nem az erőforrások optimális eloszlása, hanem a költségek, jövedelmezőség, megtérülési ráta. A harmadik megközelítési mód a jóléti közgazdaságtan (welfare economics) oldaláról világítja meg a kérdést.

A három szemléletmód nem alkot egységes egészet. A tervezés olyan programozási modelleket alkalmaz, amelyek tényleges statisztikai adatokon alapulnak. A jóléti közgazdaságtan és a közgazdasági elemzés kalkulusokról, első deriváltokról, Lagrange szorzókról és hasonló matematikai fogalmakról beszél. A beruházásokról döntő gyakorlati szakemberek azonban nem alkalmaznak magasabb matematikai módszereket, hacsak a növekedési ütemszámítást, illetve kamatos kamatszámítást nem tekintjük annak. Heesterman könyve kísérletet tesz arra, hogy a három nézőpont közötti szakadékokat áthidalja, részben úgy, hogy mind a három „nyelven" beszél, vagy megpróbál olyan „nyelvet" használni, amelyet mind a három tábor képviselői megértenek.

A könyv három nagyobb részre tagolódik. Az I. rész kísérletet tesz a három szemléletmód, a tervezési, programozási és a gazdasági elemző szemléletmód kibékítésére. A II. rész az egyedi beruházási programok értékelésével foglalkozik. A III. rész olyan közvetlen gyakorlati problémákat tárgyal, amelyeket a tervezőknek kell megoldaniok.

Az első rész bevezető fejezetében a szerző a hatékonyság fogalmát elemzi egyrészt a preferencia-függvény, másrészt az idő és az árak vonatkozásában. Definiálja nemcsak a hatékonyság, hanem a dinamikus hatékonyság, valamint a hatékonysági és korlátozó árak (efficiency and limiting prices) fogalmát is. A kérdés vizsgálatára a szerző olyan „általánosított input-output modellt" készített, amelyben megpróbálja kibékíteni a tervezői és programozói szemléletet. A modellben az olyan korlátozó feltételek, mint a föld és a munkaerő korlátozott mennyisége, az exportvolumen felső határa, valamint a társadalmi mobilitás korlátai szintén termelési tényezőként jelennek meg. Minden változó tevékenység felfogható úgy, mint termelő folyamat. A mezőgazdasági termelés esetén ez a felfogás nyilvánvaló, de az export is felfogható úgy, mint olyan tevékenység, amely az áruk bizonyos mennyiségét devizává konvertálja. Így a külföldi piacok export-felvevőképessége, ugyanolyan termelési tényező korlátként jelenik meg, mint a föld- és a munkaerő. Ezt követően a szerző az optimális allokáció feltételeit tárgyalja. A zérus profit követelményt a matematikai értelemben vett optimalitási feltételekből vezeti le.

Az optimális allokáció kérdését a szerző elsőként statikus szemléletben, statikus modell segítségével ábrázolja. Ennek során egy üzemi példából indul ki, de felhívja a figyelmet arra, hogy ez az üzem akár az egész népgazdaság is lehet, ebben az esetben azonban teljesen centralizált tervezésről van szó. Az itt alkalmazott általánosított input-output modelleknek olyan a specifikációja, hogy lehetővé teszi komplementer termékek termelését, valamint alternatív technológiák alkalmazását. A zérus profit követelmény ismertetése után konkrét gazdasági példák segítségével vázolja fel az optimális allokáció lehetséges eseteit. Ekkor azonban már az Arrow-féle általánosított modellel dolgozik, amely nem teszi lehetővé komplementer termékek termelését, de egy adott termék termelésére több technológia is rendelkezésre áll. Ennek a megszorításnak az eredményeként az alkalmazott (Arrow-féle) modellben a korlátozó árak egyben hatékonysági árak is. A hatékonysági árakat a fentiekben vázolt programozási probléma duális megoldásaként származtatja, azaz a hatékonysági árak a preferenciafüggvény első deriváltjai. Számszerű meghatározásuk a Lagrange szorzók kiszámításával történik.

Igen érdekesek azok a részek, ahol a szerző az úgynevezett tervkiigazítás módszerét ismerteti. Ennek a lényege abban áll, hogy miután a társadalom preferenciafüggvényét nem ismerjük, a leghatékonyabb tervvariánst úgy kapjuk meg, hogy a végső kibocsátás vektorát lépésről, lépésre módosítjuk. Ez éppen fordítottja a tervkészítés során alkalmazott eljárásnak, amikor is azt próbáljuk meghatározni, hogy egy adott kibocsátás-összetételt, hogyan lehet megtermelni.

A harmadik fejezettől kezdve a szerző az inter-temporális allokáció problémájával, valamint a dinamikus modellekkel foglalkozik. Itt tulajdonképpen a statikus eset közvetlen általánosításáról van szó. Figyelemre méltóak a szerzőnek azon fejtegetései, ahol a standard Leontief típusú dinamikus input-output modellek nem kielégítő viselkedését elemzi, s ezzel kapcsolatban néhány megoldási módozatot is javasol.

A könyv második része az egyedi beruházási programok értékelésével foglalkozik. Ennek során áttekintést ad nemcsak a legismertebb beruházás értékelési módszerekről, hanem elemzi a beruházási döntések keletkezését, motivációit is. Az egyedi beruházási projektumok értékelése során azonban nem elégedhetünk meg a zérus profit követelmény teljesülésével, hiszen az csak statikus aspektusban fogadható el. A szerző kifejti, hogy dinamikus szemléletben a zérus profit követelményt a zérus beruházási objektum-érték követelménye váltja fel, ideális esetben ugyanis minden igénybe vett tevékenység és így a beruházási tevékenység is zérus profitot eredményez. A zérus beruházási objektum-érték mérésére a diszkontált készpénzhozadék (Discounted Cash Flow) módszerét alkalmazza. Kifejti, hogy a készpénzhozadéknak nem kell szükségszerűen tényleges formában megjelennie, hiszen a módszer alkalmazása azt tételezi fel, hogy az alkalmazott árak a hatékonysági árak (efficiency prices), a valóságban alkalmazott árak azonban ettől eltérhetnek.

Tervkészítés során gyakran felvetődik az a kérdés, hogy a felépítendő beruházási objektum a hazai kereslet milyen hányadát ,,célozza meg''. Különösen markánsan jelentkezik ez a probléma a jövőbeni kereslet alakulását illetően. Itt a kérdés az, hogy gazdaságos-e az olyan létesítmény létrehozása, amelynek kapacitása meghaladja a jelenlegi keresletet. Tény az, hogy így többletkapacitást teremtünk, de ez a méretnagyság növeléséből eredő megtakarítások (economies of scale) következtében viszonylag kisebb ráfordítást jelent, mint valamely későbbi időpontban megvalósítandó beruházás. Az ilyen döntést a kereslet jövőbeni alakulása igazolhatja. A probléma módszertani szempontból nem-lineáris összefüggések, illetve modellek alkalmazását követeli meg.

A III. részben a szerző egyes konkrét gazdaságpolitikai problémák elemzésével foglalkozik. Feltételezése szerint a tervező a gazdaság irányítása során a tényleges árakra (exchange prices) támaszkodik. Számos egyedi eset kapcsán bizonyítja, hogy a gazdaságvezetésben a kereskedelmi jellegű számítások eredményei nem minden esetben fogadhatók el, mivel az árstruktúra nincs összhangban az optimalitási követelményekkel. Ilyen esetekben az allokációs modellekből levonható következtetéseket kell felhasználni.

NAGY SÁNDOR

TUDOMÁNYOS ÉLET

Az Ökonometriai Társaság 1972. évi európai konferenciája

A Nemzetközi Ökonometriai Társaság — mint ismeretes — oly módon szolgálja a közgazdaságtudomány matematikai, illetve matematikai-statisztikai eszközök felhasználásával való fejlesztését, hogy működésének középpontjában egy nemzetközi tudományos folyóirat (Econometrica) kiadása és nemzetközi tudományos konferenciák szervezése áll. A kialakult gyakorlat szerint a Társaság évente három területi (amerikai, európai és távolkeleti) konferenciát és 5—6 évenként egy világkongresszust rendez.

E konferenciák soraiban 1972-ben hazánkat érte az a megtiszteltetés, hogy a Társaság elfogadta a Magyar Tudományos Akadémia meghívását és az európai konferenciát Budapesten tartotta. Így megvalósulhatott az a törekvés, hogy a magyar matematikai közgazdászok hozzájáruljanak e nemzetközi tudományos társaság egyetemesebbé válásához.

A konferenciát előkészítő Program Bizottság elnöke *J. Johnston* professzor (Manchester), társelnöke *dr. Augustinovics Mária* volt. A Társaság a Szervező Bizottság elnökévé *Bod Pétert* nevezte ki.

A Konferencián 551 fő vett részt. A részvevők közül 204 szocialista, 347 nem szocialista országból jött. A képviselt 31 országból 23 európai és 8 Európán kívüli volt. Az európai országok közül csak Albániából és Portugáliából nem voltak részvevők. Említésre érdemes, hogy a matematikai közgazdaságtan számos elsőrangú képviselője vett részt a Konferencián. Így Kantorovics, Roy Radner, E. Malinvaud, Leif Johansen, Guus Zoutendijk, Allan Manne, W. Krelle, H. Chenery, J. Waelbroeck és a nemzetközi tudományos élet más képviselői.

A konferencia programja

A 4 napos (szeptember 5—8.) konferenciára 270 előadást nyújtottak be. Ebből 132 előadás szerepelt a konferencia tudományos programjában. A Programbizottság azonban nem utasította vissza a többi előadást sem, hanem lehetővé tette, hogy a programba fel nem vett előadásokat a szerzők „contributed paper"-ként szétosszák a konferencia résztvevői között.

Az előadásokat *négy párhuzamos szekcióban* vitatták meg. A szekciók a következők voltak:

1. Gazdasági rendszerek (elmélet, modellek, előrejelzés és tervezés).
2. Ökonometriai módszerek és alkalmazásuk.
3. Speciális problémák (pénz, infláció, nemzetközi gazdasági kérdések stb.).
4. Programozás és idősorelemzés.

Az előadások nagy száma és a konferencia témakörének — a szekciók puszta felsorolásából is látható — gazdagsága eleve sikertelenségre kárhoztat minden olyan próbálkozást, amely teljes körűen kívánná megvonni a konferencia tudományos programjának mérlegét.

Ehelyett megelégszünk azzal, hogy három terület, az ökonometriai módszerek, a lineáris és nem lineáris nem dinamikus rendszerek, valamint a dinamikus és sztochasztikus rendszerek kérdéseivel foglalkozó előadások közül azokról adunk összefoglaló áttekintést, amelyeket tanulmányozni tudtunk.*

Az *ökonometriai módszerekkel és alkalmazásukkal* foglalkozó előadások többsége a klasszikus ökonometriai módszereket tárgyalta. Voltak azonban olyan tanulmányok is, amelyek nem sorolhatók szorosan ide. Ilyenek a következők:

— Matematikai megalapozású gazdaságelméleti tanulmányok. E tanulmányok tárgykörei a növekedési modellek elemzése, az életszínvonal emelésének elvi kérdései és statisztikai mutatói, a beruházások kérdéseinek elosztott késésű modellekkel való vizsgálalatai voltak.

— A statisztika hagyományos módszertani kérdéseivel (indexszámítással, egyszerű trendszámítással) foglalkozó előadások.

— Az input-output jellegű modellek kérdéseiről tartott előadások, amelyek az input-output modellekből nyerhető mutatók elemzésével, valamint a koefficiensek előrebecslésének problémájával foglalkoztak. Ökonometriai szempontból külön kiemelendő az a tanulmány, amely a hagyományos ökonometriai modellek és az input-output számítások összekapcsolására törekszik.

Az előadások többségének tárgya a klasszikus ökonometriai modellek módszertanának továbbfejlesztése és a statisztikailag megalapozott, gyakorlati gazdasági problémákra készített modellek ismertetése volt.

A módszertani tanulmányok több kérdés körül csoportosultak:

— Az ökonometria központi módszerét képező lineáris regressziós modellek területén az előadások speciális identifikációs problémákkal, időben változó paraméterek becslési módszereivel, az adatbázisban levő kiugró értékek felderítésével és kiküszöbölésével és a (0,1) változók alkalmazási lehetőségeivel foglalkoztak.

— Az idősorok elemzésének területén a sztochasztikus folyamatok elméleti kérdései álltak előtérben, jóllehet több előadás tárgya volt egyes nem lineáris függvények paraméterbecslése is.

— A módszertani tanulmányok egy további hányada olyan speciális ökonometriai módszertani kérdéseket taglalt, mint a jövedelemeloszlási modellek becslési eljárásai, a termelési függvények elmélete, a bayesi elmélet alkalmazása, valamint egyes dinamikus modellek (elvárási és osztott késésű modellek) módszertani kérdései.

Az egyes gazdasági szférák ökonometriai vizsgálatában korábban a két legfontosabb, leggyakrabban modellezett terület a termelés és a fogyasztás volt. Az előadások alapján megállapíthatjuk, hogy a konferencián ezek meglehetősen háttérbe szorultak más területre kidolgozott modellekkel szemben.

A piaci, termelési és fogyasztási modellek — az előadások alapján — elsősorban a termelőeszközök piacával foglalkoznak, s az üzleti ciklusok alakulását vizsgálják. A szocialista országok ezt a modell típust viszont elsősorban árelemzésekre kívánják felhasználni. A fogyasztást vizsgáló hagyományos ökonometriai modell csak egy volt a konferencián. Ez a modell az USA-beli mezőgazdasági kisterme-

* Az előadások egy részének áttanulmányozásával jelentős segítséget adott a cikk megírásához Hunyadi László, Ligeti István, Pató Károly, Sivák József és Tihanyi Ambrus.

lők jövedelmi stabilitásával és fogyasztásával foglalkozott.

A konferencia tükrében a pénzügyi szféra modellezése iránti érdeklődés figyelhető meg. Szerepelt az előadások között több ország átfogó pénzügyi terve ökonometriai modelljének, valamint olyan részletkérdésekkel foglalkozó modelleknek az ismertetése, amelyek a kamatláb alakulását, az értékpiac állami befolyásolását vizsgálják. Ami az alkalmazott módszereket illeti, meglehetősen változatos a kép: az egyszerű regressziós modellektől a dinamikus keynesi modellig többféle módszert találunk.

A külgazdasági kapcsolatok modellezésével is több előadás foglalkozott. Az idevágó előadások központi kérdése a nemzetközi tőkeáramlás vizsgálata volt, de bemutattak világkereskedelmi, valamint a nemzetközi pénzügyi kapcsolatok egyes elemeit leíró modelleket is. Figyelemre méltó, újszerű alkalmazási területe az ökonometriai modelleknek a vállalati gazdálkodás vizsgálata. Egy angol tanulmány a vállalatok növekedésével és méreteivel foglalkozik, a csehszlovák és az NDK-beli modellek pedig a vállalati gazdálkodást írják le. A konferencián néhány tanulmány a társadalmi tervezés ökonometriai megközelítésének lehetőségeit taglalta. Az egyik például a településtervezés egy modelljét ismertette, egy másik pedig egy olyan modellt mutatott be, amelyet a jövedelem, az intelligencia és a szociális helyzet összefüggéseinek vizsgálatára dolgoztak ki.

A népgazdasági szintű, az egész népgazdaság működését leíró, magyarázó, előrebecslő ökonometriai modellezés az ökonometriai modellek másik legfontosabb alkalmazási területét képezi. Az elhangzott előadások részben komplex modelleket, részben azok egy-egy sajátos problémáját ismertették:

a) Az Angliára kidolgozott negyedéves modell módszertani kísérleti célra készült. Az aggregált modellel a különféle becslési eljárások összehasonlításának feladatát kívánják megoldani.

b) Az NSZK nem lineáris ökonometriai modellje az 1953—1959. évek idősoraira épül. A 75 egyenletet tartalmazó modellt 1975-ig terjedő előrebecslésre kívánják használni.

c) Csehszlovákia hosszú távú ökonometriai modellje 40 egyenletet tartalmazó rekurzív, nem lineáris, dinamikus modell. A modell 4 szektoros bontásban készült; adatbázisát az 1948—1970. évek idősorai képezik.

d) A Mexikóra kidolgozott ökonometriai modell specialitása, hogy egy kiemelt körzet (tartomány) gazdasági tevékenységét írja le, s e minta alapján von le következtetéseket az egész ország gazdasági helyzetére. A modell aggregált, három egyenletcsoportból, termelési függvényből, fogyasztási függvényből és külkereskedelmi egyenletekből áll.

e) A magyar népgazdaság ökonometriai modelljei közül két modellt ismertettek a konferencián. A KSH Ökonometriai Laboratóriumának munkatársai az M—2, M—3 és M—4 modellcsalád alkalmazásának egyes problémáiról számoltak be. A másik előadott modell az INFELOR ökonometriai modellje volt.

A *lineáris és nem lineáris nem dinamikus rendszerekkel* foglalkozó előadások egy része konkrét gyakorlati alkalmazásokról és azokkal kapcsolatos tapasztalatokról szóltak. Ilyen például: a chilei tervhivatalban kidolgozott, az 1975—80-as fejlesztési elképzelések kialakítását segítő modell ismertetése; a mexikói gazdaság modellezése; a különböző országok GNP növekedési rátáinak vizsgálata a tervgazdálkodás és piacgazdálkodás keretei között. E gyakorlatban alkalmazott modellek a kérdéseket a közgazdasági irodalomban használatos módszereknek rendszerint komplex alkalmazásával közelítik meg (növekedési elmélet, nemzetközi összehasonlítások, optimalizációs technikák stb.).

Igen nagyszámú előadás foglalkozott másrészt olyan modellekkel is, amelyek elsősorban elméleti értékűek. Például érdekes előadás szerepelt statikus lineáris programozási modellnek szimulációs modellel való összekapcsolására. Figyelemre méltó módszert ismertettek 0—1 és folytonos értékű dekomponált modell megszerkesztésére és számítástechnikai megoldására. Az ismert Leontief-modellt jövedelmi tényezők bekapcsolásával kibővítve egy duális feladatpárhoz lehet jutni, amely az előforduló közgazdasági kategóriák hasznos elemzését teszi lehetővé. Néhány dolgozat a lineáris programozási primál—duál feladatpár közgazdasági matematikai interpretációját veti fel újszerű nézőpontból.

A *dinamikus és sztochasztikus modellek* körében a vizsgálódások egy része közvetlen gyakorlati célzatú, más része főként elméleti karakterű. Az elméleti szempontból érdekes dolgozatokkal kapcsolatban több modell foglalkozik az időben lejátszódó folyamatok problémájával. Ezek a modellek optimális pályákat keresnek különböző gazdasági szférákban. Így népgazdasági szinten keresik két struktúra közötti átmenethez az idő-minimális pályát (e modell érdekessége, hogy nem csak idő, hanem térdimenziót is magában foglal), vállalati szinten az optimális beruházási, kiselejtezési politikát határozzák meg. Találunk azonban egyedi gazdasági jelenségre (önreprodukáló természeti erőforrások kiaknázására, pl. halászatra, vadászatra, fakitermelésre) alkalmazott modellt is. A modellek matematikailag az optimális folyamatok elméletének eredményeire támaszkodnak. A vizsgált gazdasági problémák, ha valós tárgyalásban nézzük őket, nagyjelentőségűek, a jelen modellekben viszont erősen leegyszerűsítve jelentkeznek, igazodva a matematikai módszer adta lehetőségekhez. Jellemző a tanulmányokra, hogy nagy teret szentelnek a megoldások széleskörű analízisének. Ebben a tárgykörben, figyelembe véve az alkalmazott matematikai apparátus nehézségeit is, a modellek közvetlen alkalmazása még nem mondható annyira kiforrottnak, mint az előzőekben említett területeken. Említésre méltó, hogy az alkalmazott modellekben a közgazdasági kategóriák mellett a társadalmi kategóriák (például optimális családméret) vizsgálata is előtérben áll.

A konferencia értékelése

A konferencia véleményünk szerint megfelelően reprezentálja azt a szerteágazó kutatási tevékenységet, amely a matematikai módszereknek a közgazdasági elméletben és elemzésben történő felhasználása területén folyik. Külön kiemelendőnek tartjuk, hogy sikerrel járt a konferencia előkészítőinek az a törekvése, hogy a konferencia figyelme fokozottan irányuljon a tervezés elméleti és gyakorlati kérdéseire.

Eredményes volt az a magyar szervezők által kialakított elképzelés is, hogy a konferencia záróüléseként a külföldi résztvevők konzultációs lehetőséget kaptak a magyar gazdaságpolitika és az új gazdaságirányítási rendszer kérdéseinek megvitatására. Ezen az ülésen a kérdésekre Bácskai Tamás, Drecin József és Nagy Tamás elvtársak válaszoltak. A konzultáció sikerét bizonyítja, hogy azon mintegy 140—160 fő vett részt és három órán át tartott.

A konferencia az Ökonometriai Társaság európai konferenciáinak sorozatában kiemelkedő volt a részvevők, a képviselt országok számát, a szocialista országokból — és főleg a Szovjetunióból — való részvétel nagyságát tekintve is. Ilyen módon a konferencia lehetőséget adott a szóban forgó tudományterület művelőinek széleskörű párbeszédére és vitájára. A lezajlott viták illusztrálására említjük meg a von Weizsäcker (NSZK-beli professzor) előadása nyomán keletkezett vitát. Az előadás — amely a kizsákmányolás vizsgálatára egy matematikai modellt mutatott be — vitájában részt vett Kantorovics professzor is és megfelelő módon rámutatott az előadó modelljének gyenge és vitatható pontjaira. Az Ökonometriai Társaság konferenciái történetében először a budapesti konferencián fordult elő, hogy az angol és a francia mellett az orosz is hivatalos nyelv volt.

A konferencia sikeres volt az Ökonometriai Társaság tevékenységének további kibontakoztatása szempontjából is. A konferencia ideje alatt — a magyar szervezők kezdeményezésére — olyan speciális megbeszélésre is sor került, amely eredményesen szolgálta a szocialista országok szakembereinek fokozottabb bekapcsolódását a Társaság munkájába.

A konferencia értékelése kapcsán hangsúlyoznunk kell, hogy az előadások módszertani színvonala általában rendkívül magas volt és a felhasznált matematikai apparátusok igen szerteágazóak. Hasznos lenne a hazai elméleti közgazdász-képzés és részben kutatás szempontjából, ha az elhangzott előadásokat matematikai módszertani terület, egzaktsági fok stb. szempontjából is alaposabban szemügyre vennénk. Ez eligazítana egyrészt abban, hogy milyen matematikai területeknek milyen mélységű ismerete szükséges a korszerű matematikai közgazdasági kutatásokban és, hogy milyen oktatási következményekkel kell számolni mind az egyetemi, mind a tudományos képzés vonalán.

A magyar matematikai közgazdászok számára e pozitívum mellett szükségesnek tartjuk még megemlíteni a konferenciának azt a hasznát is, hogy a konferencia részvevői megismerkedhettek a hazai eredményekkel és az itt kialakult személyi kapcsolatok gyümölcsözően befolyásolhatják a további matematikai közgazdasági kutatásokat, a tudományos együttműködést.

BÁGER GUSZTÁV—DANCS ISTVÁN

A matematikai gazdaságtan oktatása Afrikában

1970—72-ben a zambiai egyetemen dolgoztam. Többször jártam a tanzániai egyetemen, meglátogattam nyugat-afrikai egyetemeket (Dakar, Lagos, Ife, Ibadan — ahol egyébként Kondor György tanít) és kapcsolatban álltam a szudáni, kenyai és ugandai egyetemek oktatóival. Tapasztalatom így nem össz-afrikai, csak a felszabadult részek haladóbb egyetemeire terjed.

Mindezen egyetemeken a közgazdasági oktatást kisebb, 6—20 főnyi oktatógárdájú tanszékek végzik. A hallgatók kiképzésében a szociológiai, matematikai, jogi és történelmi tanszékek segítségére támaszkodnak, néhol üzletvezetési, államvezetési és statisztikai tanszékek is kooperálnak.

Az oktatás zömét az „undergraduate", úgynevezett B. A. (bachelor of arts) kurzus teszi ki, ez körülbelül megfelel a mi másodéves hallgatóink színvonalának. M. A. (master of arts) kurzusok még kevés helyen és kis létszámmal indultak (ez felelne meg a mi végzős hallgatóinknak), a továbbképzés zöme külföldön (USA, Anglia, Kanada) történik. Ennek ellenére mindenütt szerepel a matematikai gazdaságtan oktatása egy vagy több előadássorozat keretében, 80—200 órás oktatási anyaggal, s a közgazdász hallgatók mindenütt megismerkednek a lineáris programozás, ágazati kapcsolati mérlegek és a korreláció és regressziószámítás alapjaival. Kisebb számszerű példák megoldása majdnem minden egyetemen szerepel a vizsgafeladatok közt.

Sajnos a hallgatók matematikai előképzettsége — a középiskolák szervezetlensége miatt — még a viszonylag kulturált nyugat-afrikai országokban is igen gyenge. Az egyetemi felvételhez általában csak a cambridge-i „O" szint elérését kötik ki, ez alig magasabb a mi általános iskolás tudásunknál. De még ott is, ahol az „A" szint (középiskolai tudás) a követelmény, ez csupán vizsgát, nem pedig kellő gyakorlatot takar. Így elég általános, hogy diákok, akik az absztrakt teóriát jól értik, világosan pertraktálják konvex poliéderek sajátosságait, ugyanakkor zavarba jönnek, ha egy áltörtet egy tizedestörttel kell megszorozniok vagy, mondjuk, több előjelet kell az eliminációs eljárások során szimultán figyelembe venniök.

Hogy mégis ilyen erősen szerepel egy nehezen oktatható technikai diszciplína a tanrendekben, annak véleményem szerint két oka van. Egyrészt a közgazdaságtan Európában oktatott tananyagának nagy része teljesen irrelevánssá válik az afrikai kontinensen. Még ha meg is értené a hallgató (akiknek többsége mégcsak nem is a kisárutermelő, de az önfenntartó parasztgazdaság légkörében nevelkedett) nem tudná alkalmazni saját gazdasági viszonyaira, teszem azt, a Keynes-i vagy Samuelson-féle elméleteket. A másik ok, hogy a tanszékek oktatóinak világnézeti álláspontja igen vegyes lévén (ez a marxista, maoista, trockista, anarchista álláspontoktól a liberális vagy konzervatív nézetekig, misszionáriusi vallásosságig, sőt fasiszta fajelméletig terjed), ezért az ilyen technikai jellegű oktatási anyag az, amelyet az állandóan parázsló vagy fellángoló ideológiai viták közös szűrője a leginkább átbocsát.

Szükség is van e tárgyakra. Mindezen államok erős központi szervei (bankok, tervhivatalok, minisztériumok, mammutvállalatok) igénylik e modern eszközöket, s elég jól fel vannak szerelve (egyelőre persze főként tétlen) számítógépekkel.

Összefoglalóan az a véleményem, hogy a matematikai gazdaságtan terén Afrikában széles terjedelmű és megfelelő alapképzés folyik. Komoly tudományos eredmények a következő évtizedekben még nem várhatók, várható ellenben a rutinszerű alkalmazás széleskörű elterjedése.

BRÓDY ANDRÁS

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója
Műszaki szerkesztő: Helle Mária
A kézirat nyomdába érkezett: 1973. III. 6. Terjedelem 6.30 (A/5) ív
73.74751 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

CONTENTS

CONCEPTS AND METHODS

BOOK REVIEWS

SCIENTIFIC LIFE

СОДЕРЖАНИЕ

ПОНЯТИЯ И МЕТОДЫ

О КНИГАХ

НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ

Ára: 12,—Ft

Előfizetés egy évre: 40,—Ft

INDEX: 26793

TARTALOM

FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK

KÖNYVEKRŐL

TUDOMÁNYOS ÉLET

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST