SZIGMA

Matematikai közgazdasági folyóirat

A Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai-Közgazdasági Szakosztályának lapja

*

E szám szerzői:

Farkas Katalin, az MTA Közgazdaságtudományi Intézete tudományos segédmunkatársa, dr. Fényes Tamás, kandidátus, az MTA Matematikai Kutató Intézete tudományos főmunkatársa, Józsa Sándor, a Keszthelyi Agrártudományi Egyetem Matematika-Fizika Tanszékének adjunktusa, Kornai János, a közgazdasági tudományok doktora, az MTA Közgazdaságtudományi Intézete tudományos tanácsadója, Martos Béla, kandidátus, az MTA Közgazdaságtudományi Intézete tudományos csoportvezetője, dr. Nyáry Zsigmond, a Központi Statisztikai Hivatal főelőadója, Pap András, a Központi Statisztikai Hivatal előadója, dr. Pongrácz Tibor, a DATORG osztályvezetője, dr. Sári József, a Magyar Nemzeti Bank osztályvezetője, dr. Treer Mór Ferenc, a műszaki tudományok kandidátusa, Virág Ildikó, az MTA Közgazdaságtudományi Intézete tudományos munkatársa.

Szerkesztőség: 1361 Budapest V., Münnich F. u. 7.

Terjeszti a Magyar Posta. Előfizethető bármely postahivatalnál, a kézbesítőknél, a Posta hírlapüzleteiben és a Posta Központi Hírlap Irodánál (KHI. 1900 Budapest V., József nádor tér 1.) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI. 215—96162 pénzforgalmi jelzőszámára. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest V., Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban.

Előfizethető és példányonként megvásárolható: az AKADÉMIAI KIADÓ-nál, 1363 Budapest V., Alkotmány u. 21. Telefon 111—010. Pénzforgalmi jelzőszámunk: 215—11488., és az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLT-ban, 1368 Budapest V., Váci u. 22. Telefon: 185—612. Előfizetési díj egy évre: 40,— Ft.

Fényes Tamás – Sári József

Pénzmennyiségszabályozás időkésleltetéses modellel

A pénz mennyiségét és likviditási összetételét az országos hitelmérlegben irányozzák elő. E mérleg prognózisszerű változatának összeállításánál figyelembe veszik a népgazdaság általános és parciális fejlődési mutatóit, a pénzügyi mérlegrendszernek azokat az elemeit, amelyek befolyásolják a pénz- és hitelállományok, valamint a devizakészletek és tartozások időbeli alakulását, a gazdasági fejlődésből adódó pénzigényeket. Az országos hitelmérleget jelenleg a hagyományos módszerű tervezés keretében készítik. A prognózis eszköztárából hiányzik olyan pénzügyi modell, amely fejlődési mutatók, függvények segítségével teremt összefüggést a gazdaság általános helyzete és a pénzmennyiség között. A jelen cikkben kísérletet teszünk egy dinamikus modell felállítására, amely alkalmas lehet a pénzmennyiség várható alakulásának meghatározására, a szándékolt és a ténylegesen kialakult pénzügyi helyzet összefüggéseinek bírálatára és a menetközbeni beavatkozásokra.

A modell elsősorban mennyiségi szabályozásra alkalmas, mivel népgazdasági szinten elvileg csak ez lehetséges. Az a modell, amely az általános egyensúlyi feltételeket kívánja vizsgálni és módszerbelileg megalapozni, szükségszerűen makroszintű. Ennek megfelelően a változók és a korlátozó feltételek a népgazdaság általános fejlődését jellemzik és attól függenek. A modell feltételrendszerében a legátfogóbb makroökonomiai fogalmat tekintjük a független változónak, szabályozónak és meghatározónak; ez pedig *a népgazdaság bruttó nemzeti termelésének* (társadalmi össztermék) az *értéke*. A pénzmennyiségnek a társadalmi bruttó termelés értékéhez való viszonyítása azon a meggondoláson alapszik, hogy a pénzszükségletet a lehető legteljesebb közgazdasági tartalmat magában foglaló kategóriához mérjük, s ehhez a népgazdasági tervből átvehető számokkal rendelkezzünk. A tapasztalati adatok alapján végzett számítások azt igazolják, hogy az egyes időszakok egymásután következő termelési és pénzmennyiségi változásainak korrelációs kapcsolata elég szoros. Ezt a számszerű megállapítást a közgazdasági megfontolás is alátámasztja.

A modell közgazdasági megfogalmazása

A feladat annak meghatározása, hogy a nemzeti termelés adott nagysága (folyó áron) és időbeli változása milyen pénzmennyiséget indukál; azaz, hogy az állami központi bank csak annyi pénzt hozzon forgalomba, amennyi egy adott időszakban a gazdaság általános helyzete alapján szükséges. Ily módon az új pénz kibocsátása, illetve a fölös pénznek a forgalomból való kivonása a társadalmi termelés alakulásától függ. Hasonló elgondolásokkal találkozhatunk a nemzetközi szakirodalomban is [1].

A modell egyenlőségrendszerének megfogalmazásánál a hitelmérleg hat fő tételéből indulunk ki. Ezek közül kettőt — a rövidlejáratú valamint a közép- és hosszúlejáratú devizakészletek és tartozások egyenlegét — autonómnak tekintjük a társadalmi termelés szempontjából. Ezeket az adatokat a népgazdasági tervből, ill. a nemzetközi fizetési (elszámolási) mérlegből vesszük át változatlanul. A hitelmérleg további négy tételét a modell alapegyenlőségeivel fejezzük ki oly módon, hogy elsődlegesen a látra szóló és a tartós pénzmennyiségeket határozzuk meg a gazdaság szükségletei szerint, majd a pénzmennyiségek és a devizaállományok ismeretében megállapítjuk a rövidlejáratú hitelkibocsátási igényt, valamint a közép- és hosszúlejáratú hitelnyújtási lehetőségeket. Az elmondottakból következik, hogy a jelen modellben a *források határozzák meg a hitelnyújtási képességet*, vagyis *a hitelkiterjesztés határát*.

A pénzszükségletre vonatkozó egyenlőségek a modellbe beépített *korlátozó feltételek* figyelembevételével oldhatók meg. Ezek a következők:

— a bruttó társadalmi termék értékéhez kapcsolódó pénzszükségleti mutató segítségével meghatározott teljes pénzmennyiség;

— a termelő és a végső fogyasztás pénzszükségletét meghatározó mennyiségi korlát ill. az ahhoz kapcsolódó forgási sebességmutató;

— a bruttó felhalmozások realizálásához szükséges pénz mennyiségi korlátja, s az ahhoz tartozó forgási sebesség-mutató.

A pénz a modellben egyrészt forgalmi és fizetési eszközként funkcionál, másrészt a megtakarítások eszköze. A funkciók szorosan kapcsolódnak a nemzeti termelés bruttó értékének *használati érték* szerinti összetevőihez. Ezért a forgalomban levő, illetve felhalmozott pénzmennyiséget két nagy csoportra osztjuk, mégpedig:

— a termelő és a végső fogyasztási javak közvetítésével kapcsolatos forgalmi-fizetési funkciókat betöltő látra szóló pénzre és

— a bruttó felhalmozás (beruházás és készletváltozás) kategóriájába tartozó javak elosztását és az azzal kapcsolatos pénzügyi funkciókat ellátó tartós pénzre.

A nemzeti termelés bruttó értékének harmadik összetevője a *külföldi felhasználás*, a behozatal és a kivitel egyenlege. E kategória pénzmennyiségre gyakorolt hatása a nemzetközi elszámolási mérleg révén jut kifejezésre a modellben.

A modell feltételrendszeréhez tartozik továbbá két *paraméter*, amelyek nagysága tapasztalati adatok alapján számítható ki. Ezek az alábbiak:

— a pénz forgási sebességének indokolt átlagos növekedését jellemző mutatószám;

— a pénzfeleslegek visszaszívásának vagy a hiányok pótlásának rendezési időtartamát jelző szám.

A társadalom termelő tevékenysége *időben*, mégpedig meghatározott, egymásután következő időszakokban megy végbe. Elvileg az idő folyamatos és a gazdaság változása is állandó. Az empirikus adatok megfigyelése azonban csak diszkrét időszakokra, egységnyi időtartamokra vonatkozhat, hiszen a múltbeli számok ilyen tagoltságban állnak rendelkezésre, s a jövőre vonatkoztatott várakozások, tervadatok is a naptári időtartamokhoz kapcsolódnak. Általában éves és ezen belül negyedéves adatok alapján lehet a modellt számszerű adatokkal kitölteni és az időbeli alakulásra, a szezonszerű változásokra véleményt mondani.

A modellben keressük azt az összefüggést, amely a társadalmi termelés és a pénzügyi kiadások, illetve a pénzállományok között fennáll. A termelés olyan állandó jellegű folyamat, amely percről-percre, óráról-órára végbemenő értékképző és értéknövelő tevékenység. Ezt a tevékenységet értelmezhetjük abban a fázisban is — és a pénzzel kapcsolatban általában csak így foghatjuk fel a folyamatot —, hogy a létrejövő használati értékek egy bizonyos ütemben és a mindenkori érvényes árakon kibocsátásra, értékesítésre (beszerzésre) kerülnek. Ezért azzal a feltételezéssel élünk, hogy a társadalmi össztermék időről-időre realizálódik és a benne megtestesült jövedelmet is elosztják a pénz közvetítésével. Más szóval ez a feltételezés azt jelenti, hogy a pénz a termék- és jövedelemmozgásoknál mindig valamilyen formában funkcionál.

A cserefolyamat azonban nem egyszerűen olyan mértékben igényli a pénzt, mint ahogyan a társadalmi össztermék, illetve a nemzeti termelés bruttó értékét a népgazdasági mérlegekben kiszámítják. A termékek többszörösen cserélnek gazdát a mindenkori gazdasági szerkezet szerint, azaz a cserefolyamatok láncolódása megy végbe. Ezen túlmenően nemcsak a termékek és szolgáltatások közvetlen realizálását kell közvetítenie a pénznek, hanem elegendőnek kell lennie a jövedelmek elosztására és újraelosztására is. Azaz a pénznek a teljes forgalmi, fizetési és felhalmozási funkciókban kell működnie. A gazdálkodó szerveknek és a lakosságnak (általában a pénz tulajdonosának) tehát nem elegendő a termékek csereértékével egyenlő nagyságú pénzmennyiség, hanem ennél többre, kiadásaik rendszeres teljesítéséhez elegendő pénzmennyiségre van szükség. Következésképpen *a pénzmennyiségnek a kiadások alakulásához kellene rugalmasan igazodnia*. Ily módon a társadalmi termék kibocsátása és a pénzügyi kiadások alakulása között napról-napra, minden időpontra vonatkozóan létrehozható vagy létrehozandó valamilyen arányszám segítségével az egyenlőség. Ezt az arányszámot *pénzszükségleti mutatónak* nevezzük, amely tartalmában kifejezi a gazdasági reálfolyamatok és a pénzfolyamatok közötti — a pénz forgását és az időbeli eltéréseket is magában foglaló — összefüggéseket.

A modellel az a szándékunk, hogy a forgalomban, azaz a pénztulajdonosok birtokában levő pénzmennyiség nagyságára mondhassunk véleményt. Tekintettel arra, hogy a pénzügyi kiadások is végső fokon a nemzeti termelés nagyságától függnek, ezért a pénzmennyiség és a társadalmi termelés között hozunk létre közvetlen kapcsolatot. Tesszük ezt azért, mert a ténylegesen megjelenő fizetőképes kereslet nem a kiadások összvolumenétől, hanem egy-egy időpontban rendelkezésre álló pénzmennyiség nagyságától függ. Emellett a múltra nézve általában nem is határozható meg egyértelműen a kiadások összege, mivel a pénzügyi lebonyolítás technikája sok zavaró tényezőt rejt magában.

Az összekötő kapocs a *forgási sebesség* mutató, amelynek segítségével kifejezhető a társadalmi bruttó termelés értéke és a teljes pénzmennyiség közötti egyenlőség. Ugyancsak hasonló feltételezéssel élünk a modellben a társadalmi termék termelő és végső fogyasztási része és a látra szóló pénz, továbbá a bruttó felhalmozás értéke és a tartós pénzállomány közötti egyezőséget illetően. Az általunk meghatározott összefüggések lényegüket tekintve hasonlóak a pénzegyensúlyi modellekhez. Ezekben a modellekben (pl. Irving Fishernél és több más közgazdásznál, Magyarországon Riesz Miklósnál is [2],) a pénz mennyisége és a pénz forgási sebességének szorzata egyenlő a megtermelt, illetve értékesített áruk mennyisége és az árszínvonal szorzatával. Az egyenlőségek azonossága arra vezethető vissza, hogy a társadalmi termék értéke a volumenek és az árak szorzata. Azzal azonban, hogy mi felbontjuk a társadalmi terméket két alapvető kategóriára, pontosabban jellemezzük a pénzmennyiség és a nemzeti termelés közötti kapcsolatot. Emellett a *forgási sebesség* nálunk nem egyszerűen statikus adat, hanem *az idő függvényében kifejezett mutatószám*. A prognosztizálást éppen az a feltétel teszi lehetővé, hogy a forgási sebességmutatók is szakaszokra és azon belül szezonokra jellemző függvényértékek.

A modell működési elve

Az egyensúlyi vizsgálatnál abból az alaptételből indulunk ki, hogy a teljes hitelvolumen minden időpontban egyenlő a pénz- és devizaállományok algebrai összegével. Ennek az általános érvényű tételnek a figyelembevételével a modell működése a következőképpen értelmezhető:

Feltételezzük, hogy a forgalomnak annyi pénzre van szüksége, amennyi lehetővé teszi a társadalmi termelés teljes realizálását és a létrehozott jövedelmek elosztását, újraelosztását. Amennyiben egy múltban kialakult és egyensúlyi szempontból elfogadható arányt tekintünk a bővített újratermeléshez szükségesnek, akkor a forgalomba hozandó új pénz mennyisége egyenlő lesz a társadalmi termelés növekedési üteme által meghatározott összeggel, figyelembe véve a szezonszerűen érvényes forgási sebesség-mutatókat is. Amennyiben a pénzügyekben szigorúbb feltételeket kívánnak érvényesíteni, az összefüggésbe beépíthető valamilyen degresszivitást biztosító paraméter, arányszám is.

A pénztömeg növekedését jellemző, fentebb meghatározott többletpénzt teljes egészében látra szóló pénznek tekintjük a forgalombahozás időpontjában (pillanatában). Ezt a pénzmennyiséget részben rövidlejáratú hitel nyújtásával, részben látra szóló arany- és devizakészletek vétele (növekedése) által hozza forgalomba a jegybank illetve a bankrendszer.

Feltételezzük, hogy a forgalom számára felesleges (korláton felüli) látra szóló pénzből $^1/_4$ év elteltével lesz megtakarítás. Ezért a tényszámok és korlátaik közötti különbözetet csak a következő időszakban tekintjük a közép- és hosszúlejáratú hitelek forrásának.

A vizsgált időszakban annyi közép- és hosszúlejáratú hitel folyósítható, mint amennyi a tartós pénzállományok és devizakötelezettségek nettó állományváltozásának algebrai összege.

A modell szerint számított kétféle likviditású pénzre felállított korlátot a következőképpen értelmezzük:

- a *látra szóló pénz* állománya az egyensúlyi feltételek követelménye szerint nem lehet nagyobb, mint a termelő és a végső fogyasztás, valamint a hozzákapcsolódó pénz forgási sebessége által meghatározott összeg. Ez adódik abból a követelményből, hogy a látra szóló pénznek a termelés és a fogyasztás szférájában kell működnie illetve az ehhez kapcsolódó fizetési forgalmat kell közvetítenie;
- a *tartós pénzállománynak* legalább annyinak kell lennie, mint amennyi – a tapasztalatilag kialakult forgási sebesség mutató szerint – a felhalmozási javak realizálásához szükséges. Ezt a korlátot indokolja, hogy a belföldön létre kell jönnie akkora pénzmennyiségnek, amely reálisan lehetővé teszi a felhalmozási javak megszerzését.

A fentiekben definiált korlátok lényegében a gazdaság adott színvonalán indokolt *pénzkeresletet* jellemzik, míg a tényleges állományok a *fizetőképes keresletet*, a *pénzkínálatot*. A korlátozó feltételek egyben jelzik azt a *különbözetet*, amely többletként vagy hiányként mutatkozik a pénzállományokban, illetve a kereslet és a kínálat között. Viszonylagos *pénzhiányról* vagy *pénzfeleslegről* beszélhetünk akkor, ha a látra szóló pénz vagy a tartós pénz külön-külön kevesebb illetve több, mint a korlát szerinti állomány. Ebből a definícióból következik az abszolút pénzhiány, illetve pénztöbblet fogalma. A modell szerint akkor adódik abszolút pénzhiány, ha a termelő és a végső fogyasztás, illetve a felhalmozás szerinti pénzszükséglet együttesen nagyobb, mint a tényleges pénzállomány. Ha viszont a látra szóló és a tartós pénz összege nagyobb a korlátok szerint megállapított keresletnél, akkor abszolút pénztöbbletről beszélünk.

Ha a vizsgálat során az állapítható meg, hogy abszolút értelemben véve *sok a forgalom lebonyolításához rendelkezésre álló pénzállomány*, akkor a teendő attól függ, melyik szférában mutatkozik a felesleg. Amennyiben a látra szóló pénznél szükséges a jegybank beavatkozása, akkor ezt a rövidlejáratú hitelkibocsátás korlátozásával érheti el, míg ha a tartós pénzeknél mutatkozik a többlet, akkor választhat aközött, hogy kevesebb új pénzt bocsát ki a következő időszakban és ezáltal a forgalom szükségleteihez képest a tartós pénz egy része visszaalakul látra szóló pénzzé, vagy pedig korlátozza a közép- és hosszúlejáratú hitelek folyósítását a fölösleges pénzösszeg erejéig. Pénzhiány esetén a gazdasági helyzet várható alakulásától függően, az egyensúlyi feltételek alapos elemzése után lehet dönteni a szükséges pénzmennyiség forgalomba hozataláról. A látra szóló pénz indokolt pótlása rövidlejáratú hitel folyósításával, a tartós pénzé pedig rövid-, vagy közép- és hosszúlejáratú hitel nyújtásával történhet.

Az ismertetett beavatkozások különböző változatai képzelhetők tehát el és a mindenkori pénzügyi helyzet, illetve a várható szükségletek és lehetőségek figyelembevételével kell tudatosan megszabni az intézkedések formáját és mértékét. Megjegyezzük, hogy a valóságban sohasem jöhet létre szigorúan vett egyensúly a likviditási és a hiteleszközök között. A modell szerepe éppen az, hogy az egyensúlytól való eltérések számszerű értékét rendszeresen meghatározza, s jelezze a hitelpolitikai irányelvekben megfogalmazandó feladatokat.

A modellből kapott eredmények — a szükségszerűen alkalmazott absztrakciók és tudatos egyszerűsítések miatt — kellő orientálást adnak ugyan a cselekvés irányát illetően, a döntések meghozatalánál mégis nagy körültekintéssel kell eljárni. Az egyszerűsítésekből adódó főbb közgazdasági korlátok:

— a nemzeti termelés bruttó értékét (társadalmi összterméket) két minőségi kategóriára (fogyasztás, felhalmozás) osztottuk, holott a gyakorlatban legalább öt csoport képzése (termelő-, közösségi-, személyes fogyasztás, állóeszközberuházás és forgóeszközfelhalmozás) volna indokolt;

— a nemzeti termelés teljeskörű számbavétele évenként egyszer történik, s így a negyedéves adatok csak becslések útján állapíthatók meg.

A pénzszabályozás időkésleltetéses modellje

E pontban a pénzszabályozási folyamat egy időkésleltetéses matematikai modelljét és annak megoldását ismertetjük. A folyamatot a t időváltozó $0 \leq t \leq \infty$ tartományában vizsgáljuk. A modellben szereplő közgazdasági kategóriákat az alábbiak szerint jelöljük:

$P_r(t)$ = a látra szóló, rövidlejáratú pénz állománya,
$P_h(t)$ = a tartós, hosszúlejáratú pénz állománya,
$D_r(t)$ = a rövidlejáratú devizakövetelések és tartozások egyenlege
$D_h(t)$ = a közép- és hosszúlejáratú devizakövetelések és tartozások egyenlege
} autonóm tételek
$\varphi(t)$ = a szükséges teljes pénzállomány értéke. $\varphi(t)$ a modellben ismertnek feltételezett függvény, ahol

$$\varphi(t) = A(t)X(t)$$

$X(t)$ = nemzeti termelés bruttó értéke
$A(t)$ = pénzszükségleti együttható
$H_r(t)$ = a rövidlejáratú hitelek állománya
$H_h(t)$ = a közép- és hosszúlejáratú hitelek állománya
$K_r(t)$ = a rövidlejáratú pénzállomány korlátja, a modellben elvileg ismertnek tekintett függvény.

Ezek után a modell alapegyenleteit az alábbiakban definiáljuk:

$$\varphi(t) = P_r(t) + P_h(t) \tag{1.1}$$

Vagyis a teljes pénzmennyiség megegyezik a látra szóló pénz és a tartós pénz összegével.

$$\frac{dP_h(t)}{dt} = \alpha[P_r(t-T) - K_r(t-T)], \quad \text{ahol } \alpha > 0, \quad T > 0 \text{ adott.} \tag{1.2}$$

Ez az összefüggés a tartós pénz változását, illetőleg annak a látra szóló pénzből történő növekedését vagy csökkenését írja le a látra szóló pénz korlátjának figyelembevételével.

T az időkésleltetésre jellemző paraméter, az
α együttható pedig reciprok idő-dimenziójú mennyiség. Értékét az egységgel tekinthetjük egyenlőnek.

$$\frac{dH_r(t)}{dt} = \frac{dP_r(t)}{dt} - \frac{dD_r(t)}{dt} \tag{1.3}$$

Az (1.3) a rövidlejáratú hitel, a látra szóló pénz és a rövidlejáratú devizaállományok változása közti kapcsolatot adja meg és közgazdaságilag teljesen plauzibilis.

Végül érvényes a hitelmérleg eszköz- és forrásoldalának egyenlősége az alábbiak szerint:

$$H_r(t) + H_h(t) + D_r(t) = P_r(t) + P_h(t) + D_h(t) \tag{1.4}$$

A modell négy alapegyenlete egy funkcionál-differenciálegyenletrendszert képez a bennük szereplő változókra nézve.

Oldjuk meg az egyenletrendszert. (1.1) és (1.2) alapján a rövidlejáratú pénzre nézve azonnal adódik az alábbi összefüggés.

$$\frac{dP_r(t)}{dt} + \alpha P_r(t-T) = \frac{d\varphi(t)}{dt} + \alpha K_r(t-T)\,. \tag{1.5}$$

Az (1.5) kifejezés egy elsőrendű, lineáris inhomogén differencia-differenciálegyenletet ad a látra szóló pénzre nézve és közvetlen összefüggést szolgáltat a $P_r(t)$, a $K_r(t)$ korlát és a bruttó nemzeti termelésre jellemző $\varphi(t)$ között.

Az (1.5) megoldásához meg kell adnunk $P_r(t)$ és $K_r(t)$ függvényeket a $-T \leq t \leq 0$ intervallumon. Legyen

$$P_{r0}(t) = P_r(t),\ \text{ha}\ -T \leq t \leq 0$$
$$\text{és}\ P_{r0}(t) = 0,\ \text{különben}$$

ahol $P_{r0}(t)$ ismert függvény. Az (1.5)-öt a Mikusiński-féle operátorszámítás segítségével oldjuk meg. (L. [3], [4].) Az egyszerűbb írásmód kedvéért az (1.5) jobboldalát $G(t)$-vel jelölve, a szóbanforgó egyenlet az alábbi operátoros alakra írható át.

$$sP_r - P_r(0) + \alpha e^{-Ts} P_r + \alpha \{P_{r0}(t-T)\} = \{G(t)\}, \tag{1.6}$$

ahol $P_r(0) = P_{r0}(0)$, mert $P_r(t)$-nek nem lehet ugrása a $t = 0$ időpontban.

Az (1.6)-ból közvetlenül kapjuk, hogy

$$P_r = \frac{\{G(t)\} + P_r(0) - \alpha \{P_{r0}(t-T)\}}{s + \alpha e^{-Ts}} \tag{1.7}$$

ahol s a differenciál-operátort, e^{-Ts} pedig az eltolási operátort jelöli.

Az operátorszámítás egy ismert sorfejtési tétele alapján (3)

$$\frac{1}{s+\alpha e^{-Ts}} = \frac{1}{s\left(1 + \dfrac{\alpha e^{-Ts}}{s}\right)} = \frac{1}{s} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\alpha}{s}\right)^k e^{-kTs}$$

és ezt az (1.7)-be helyettesítve a látra szóló pénz operátorára az alábbi végső kifejezés adódik.

$$\{P_r(t)\} = [\{G(t)\} + P_r(0) - \alpha \{P_{r0}(t-T)\}]\frac{1}{s} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\alpha}{s}\right)^k e^{-kTs}. \tag{1.8}$$

Az operátorszimbólika elemi szabályainak figyelembevételével (1.8) könnyen felírható, mint a t időváltozó függvénye. Meg kívánjuk jegyezni, hogy bármilyen véges időintervallumon a kapott végtelen sor az e^{-Ts} eltolási operátor sajátsága folytán véges sorrá redukálódik, ami lényeges egyszerűsödést jelent.* Ugyanis

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha^k}{s^{k+1}} e^{-kTs} = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k(t)$$

* Az operátorszámításnak viszonylag ismertebb módszere a Laplace-transzformáció. Ennek előnye, hogy komplex függvénytani módszerek alkalmazásából a kapott eredmények gyakorlatilag jobban kezelhető alakra hozhatók, mint amilyet a Mikusiński-féle operátorszámítás felhasználásával például a látra szóló pénz operátorára kaptunk (1.8). Alkalmazott módszerünk viszont elméletileg általánosabb és egyszerűbb is, mint a Laplace-transzformációs eljárás.

ahol $Q_k(t) = 0$, ha $t \leq kT$

$$Q_k(t) = (-1)^k \frac{\alpha^k}{k!}(t - kT)^k, \text{ hs a } t > kT$$

és P_r-re kapjuk, hogy

$$P_r(t) = P_r(0) \sum_{k=0}^{\infty} Q_k(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t G(u) Q_k(t-u)\,\mathrm{d}u - \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t P_{r0}(u-T) Q_k(t-u)\mathrm{d}u$$

$P_r(t)$ ismeretében a többi ismeretlen függvény viszonylag egyszerűen határozható meg.

Az (1.1)-ből kapjuk, hogy

$$P_h(t) = \varphi(t) - P_r(t) \tag{1.9}$$

Az (1.3) mindkét oldalát integrálva pedig adódik

$$H_r(t) = H_r(0) + P_r(t) - P_r(0) - [D_r(t) - D_r(0)] \tag{1.10}$$

ahol $H_r(0)$ a rövidlejáratú hitelállomány kezdeti értéke.

Végül a közép- és hosszúlejáratú hitelállomány az (1.4) hitelmérlegből közvetlenül adódik.

Az időkésleltetéses modell egy másik egyszerűbb variánsát úgy kaphatjuk, ha a modell többi egyenleteinek megváltoztatása nélkül (1.2) helyett a

$$\frac{\mathrm{d}P_h(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[P_r(t-T) - K_r(t-T)] \tag{1.11}$$

összefüggést alkalmazzuk, melynek közgazdsági tartalma nyilvánvaló. Ekkor (1.11) mindkét oldalát 0-tól t-ig integrálva adódik, hogy

$$P_r(t-T) - K_r(t-T) - [P_r(-T) - K_r(-T)] = P_h(0) - P_h(t)$$

Amennyiben a kapott összefüggésből $P_h(t)$ hosszúlejárató pénzt kifejezzük, majd (1.1)-be helyettesítjük, úgy $P_h(0) = \varphi(0) - P_r(0)$-t is tekintetbe véve a rövidlejáratú pénzre az (1.5)-tel analóg alábbi differencia-egyenletet kapjuk.

$$\begin{aligned} P_r(t) - P_r(t-T) = \varphi(t) - \varphi(0) - [K_r(t-T) - K_r(-T)] + \\ + P_r(0) - P_r(-T) \end{aligned} \tag{1.12}$$

Ennek operátoros alakja

$$\begin{aligned} P_r - e^{-Ts} P_r - \{P_{r0}(t-T)\} = \{\varphi(t) - \varphi(0) - [K_r(t-T) - K_r(-T)] + \\ + P_r(0) - P_r(-T)\} \end{aligned}$$

amelyből P_r operátorára nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} \{P_r(t)\} = \{P_{r0}(t-T) + \varphi(t) - \varphi(0) - K_r(t-T) + K_r(-T) + \\ + P_r(0) - P_r(-T)\} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kTs} \end{aligned} \tag{1.13}$$

ahol tekintetbe vettük, hogy

$$\frac{1}{1-e^{-Ts}}=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-kTs}$$

az operátoros konvergencia értelmében. (1.13) operátor könnyen felírható, mint az idő függvénye.

$$P_r=\sum_{k=0}^{\infty}Q_k(t) \tag{1.14}$$

ahol

$$Q_k(t)=0, \qquad \text{ha } t\leq kT \tag{1.15}$$

$$Q_k(t)=P_{r0}[t-(k+1)T]+\varphi(t-kT)-\varphi(0)-K_r[t-(k+1)T]+$$
$$+K_r(-T)+P_r(0)-P_r(-T)$$
$$\text{ha } t>kT$$

Így minden rögzített t-re (1.14) csak véges számú tagot tartalmaz.

Előző vizsgálatainkban a modellben szereplő közgazdasági kategóriákat a valósággal egyezően úgy tekintettük, hogy azok a *folyamatosan változó idő függvényei.* A folyamatosság kikötésével azonban a nyert eredmények gyakorlati felhasználása nehézségekbe ütközik.

A gyakorlatban sajnos — mint ahogy arra már utaltunk — a modell közgazdasági kategóriáinak időben való folyamatos követése, észlelése nem lehetséges. Lehetetlen például a termeléssel kapcsolatos $\varphi(t)$ függvényt minden időpontban megadni, hiszen arra vonatkozóan csak egyes konkrét időszakok (negyedévek, évek) adatait közlik. Hasonló megállapítást tehetünk a modell többi függvényére nézve is. Végül a látra szóló és a tartós pénz kapcsolatára jellemző T időkésleltetés sem ismeretes számszerűen, hiszen az nyilvánvalóan nem akkora, mint az az időköz, amelyben a pénzállományok változása gyakorlatilag egyáltalán érzékelhető, vagy amit a tartósodás időtartamára konvencionálisan elfogadnak. Ezért a gyakorlati számítások céljára kidolgoztuk a modell ún. diszkrét analógiáját, amelyben a t időváltozó csupán diszkrét értékeket vehet fel ($t=0, 1, 2, \ldots$) és ahol az időegység a negyedév. Ez ugyan matematikailag kevésbé hűen írja le a közgazdasági folyamatokat, azonban a gyakorlati számításokra igen alkalmas és lehetővé teszi a modell kategóriáinak a megfigyelt tényszámokkal való összehasonlítását.

A diszkrét modell

Az előző pontban már definiáltuk a

$$\varphi(t)=A(t)X(t)$$

összefüggést. $A(t)$ közgazdasági értelmezése szerint egyenlő a teljes pénzmennyiség forgási sebessége reciprok értékével. Azaz

$$A(t)=\frac{1}{g(t)}$$

$$\text{és} \quad g(t)=\frac{X(t)}{P_r(t)+P_k(t)}.$$

Prognózis készítése esetén érvényes az

$$A'(t) = \frac{1}{g'(t)}$$

egyenlőség, amelynek meghatározása a látra szóló pénz és a tartós pénz mennyiségi korlátainak ismeretében lehetséges.

A látra szóló pénz korlátja

$$K_r(t) = \frac{C(t)}{v(t)} \tag{2.1}$$

ahol

$C(t)$ = a teljes (termelő és végső) fogyasztás értéke,

$v(t)$ = a látra szóló pénz forgási sebesség-mutatója $C(t)$-re vonatkoztatva.

Prognózis készítésekor $v(t)$ valamilyen becsült értéke alkalmazandó, a következő feltételezéssel:

$$v'(t) = \gamma^{\tau} \cdot v(t - 4\tau) \qquad \gamma \geq 1$$

ahol

γ = a forgási sebesség éves növekedését jellemző szám,

τ = a terv- (becslési-) év és a bázis év közötti különbözetet (évek számát) jelölő index.

A tartós pénz éves korlátja:

$$K_h(n) = \frac{I(n)}{f(n)} \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{2.2}$$

ahol

$I(n)$ = a bruttó felhalmozás (beruházások + készletváltozás) értéke az n-edik évben,

$f(n)$ = a tartós pénz forgási sebesség-mutatója $I(n)$-re vonatkoztatva,

n = az éveket jelölő index.

Becsléseknél $f'(n)$ trend segítségével határozható meg. Ennek egyik formája lehet

$$f'(n) = f(n - \tau) + b\tau \qquad f'(n) \leq 1$$

ahol

$f(n - \tau)$ = paraméter a bázisként elfogadott év forgási sebességmutatója,

b = paraméter a lineáris trend alapján kapott tapasztalati szám.

Az n-edik év bármely t időszakára vonatkozó korlát pl. azzal a feltétellel állapítható meg, hogy a IV. negyedév korlátja az éves korláttal egyenlő. Azaz ekkor

$$K_h(n) = K_h(t)$$

Az I–III. negyedévek korlátértékeit oly módon számíthatjuk ki, hogy az n-edik év korlátja és az $(n-1)$-edik év tényleges záró tartós pénzállománya közötti különbséget felosztjuk az n-edik év egyes t időszakaira eső felhalmozások arányában és az így kapott értékeket az előző időszak adatához hozzáadjuk. Ennek megfelelően:

$$K_h(t) = P_h(n-1) + \frac{\sum_{k=1}^{4} I(k)}{I(n)} [K_h(h) - P_h(n-1)] \tag{2.3}$$

ahol

$k =$ az n-edik éven belüli I—IV. negyedévet jelöli,

$P_h(n-1) =$ a tartós pénz tényleges állománya az $(n-1)$-edik időszak végén.

A fenti (2.1) és (2.3) kifejezésekből következik, hogy a társadalmi termelés t-edik időszakra várható $X'(t)$ értékéhez kapcsolódó pénzszükségleti mutató:

$$A'(t) = \frac{1}{g'(t)} = \frac{\frac{C'(t)}{s'(t)} + \frac{I'(t)}{f'(t)}}{X'(t)}.$$

Ezek után felírhatjuk a diszkrét pénzszabályozási modell egyenleteit

$$P_r(t) + P_h(t) = \varphi(t) \tag{2.4}$$

$$\Delta P_h(t) = P_r(t-1) - K_r(t-1)$$

$$\Delta H_r(t) = \Delta P_r(t) - \Delta D_r(t)$$

$$H_r(t) + H_h(t) + D_r(t) = P_r(t) + P_h(t) + D_h(t)$$

ahol Δ a differenciaoperátort jelöli az alábbi definíció szerint:

$$\Delta X(t) = X(t) - X(t-1)$$

ahol $X(t)$ tetszőleges függvény.

A (2.4) első két egyenletéből a pénzállományokra kapjuk, hogy

$$P_r(t) = \Delta\varphi(t) + K_r(t-1) \tag{2.5}$$

$$P_h(t) = \varphi(t-1) - K_r(t-1) \tag{2.6}$$

A pénzállományok megoldásához meg kell adnunk a $\varphi(-1)$ és $K_r(-1)$ értékeket is.

A folyamatos modellben szereplő T időkésleltetési paraméternek jelen esetben *1* időegység (negyedév) felel meg.

A (2.4) harmadik egyenletéből a rövidlejáratú hitelre nézve

$$H_r(t) = H_r(0) + P_r(t) - P_r(0) - [D_r(t) - D_r(0)] \tag{2.7}$$

Végül a hosszúlejáratú hitel közvetlenül adódik a (2.4) utolsó egyenletéből.

A pénz mennyiségi szabályozása, a többletek és a hiányok rendezése

A felesleges pénzmennyiség értelmezésünk szerint a tényleges teljes pénzállomány és a korlátok közötti különbözet, ha a tényleges állomány nagyobb. Azaz

$$P_F(t) = P_r(t) + P_h(t) - [K_r(t) + K_k(t)]$$

A pénzmennyiség akkor áll a szükséges mértékben rendelkezésre, ha a nemzeti termelés bruttó értékéhez (társadalmi össztermék) viszonyítva olyan forgási sebességet ér el, ami éppen a korlátok szerinti pénzmennyiséget indukálja. A tényleges és az elvárandó forgási sebességmutatók alapján a fentebb megfogalmazott pénzfelesleg tehát így is felírható

$$P_F(t) = \left[\frac{1}{g(t)} - \frac{1}{g'(t)}\right] X(t), \quad g'(t) > g(t) \tag{3.1}$$

Amennyiben a pénzkibocsátás ütemét oly módon irányítja a bank, hogy a pénz forgási sebessége elérje a korlátok által meghatározott mértéket, a $(t + 1)$-edik időszakban rendezhető az eltérés (azaz teljes egészében visszaszívható a felesleges pénzmennyiség, illetve pótolható a hiányzó pénzszükséglet). Ezt a követelményt azonban nem lehet minden esetben egy időegység alatt megvalósítani, ezért a következő megoldás látszik célszerűnek.

Tételezzük fel, hogy a tényleges és a korlátok szerint indokolt pénz forgási sebesség-mutatók közötti összefüggés

$$g(t)^{1+a\varepsilon} = g'(t) \tag{3.2}$$

ahol az

ε = tapasztalati szám, amely a tényleges $g(t)$ mutatókból határozható meg és a pénzállományokhoz kapcsolódó regressziós függvény b paraméterrel definiálható ($b = 1 + \varepsilon$).

E mutatószám jellemzi a pénzképződés rugalmasságát a nemzeti termelés bruttó értékével összefüggésben.

Mivel pénzfelesleg esetén $g'(t) > g(t)$, ezért $\varepsilon > 0$, amelynek egy növekedő gazdaságban – helyes pénzgazdálkodás esetén – szükségszerűen érvényesülnie kell. Amennyiben a hiányzó pénzmennyiség pótlására újabb pénzt kell kibocsátani, $g(t)$ és $g'(t)$ szerepet cserél a beavatkozás szerint.

A (3.2)-ből kiszámítható, hogy adott t-nél

$$a = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\log g'(t) - \log g(t)}{\log g(t)} \tag{3.3}$$

ahol

a = a rendezési időtartam negyedévekben.

Az első $1/4$ év alatt rendezendő pénzfelesleg összege (R_1):

$$R_1 = \left[\frac{1}{g(t)} - \frac{1}{g(t)^{1+\varepsilon}}\right] X(t); \tag{3.4}$$

a második $1/4$ év alatt:

$$R_2 = \left[\frac{1}{g(t)^{1+\varepsilon}} - \frac{1}{g(t)^{1+2\varepsilon}}\right] X(t)$$

és így folytatva egészen az a-ig. Ennek megfelelően

$$R_1 + R_2 + \ldots + R_a = P_F(t) = X(t) \sum_{k=1}^{a} \left[\frac{1}{g(t)^{1+(k-1)\varepsilon}} - \frac{1}{g(t)^{1+k\varepsilon}}\right]$$

vagyis a felesleges pénz mennyisége. Pénzhiány esetén hasonló meggondolásokkal lehet ütemezni a pótlólagos kibocsátást.

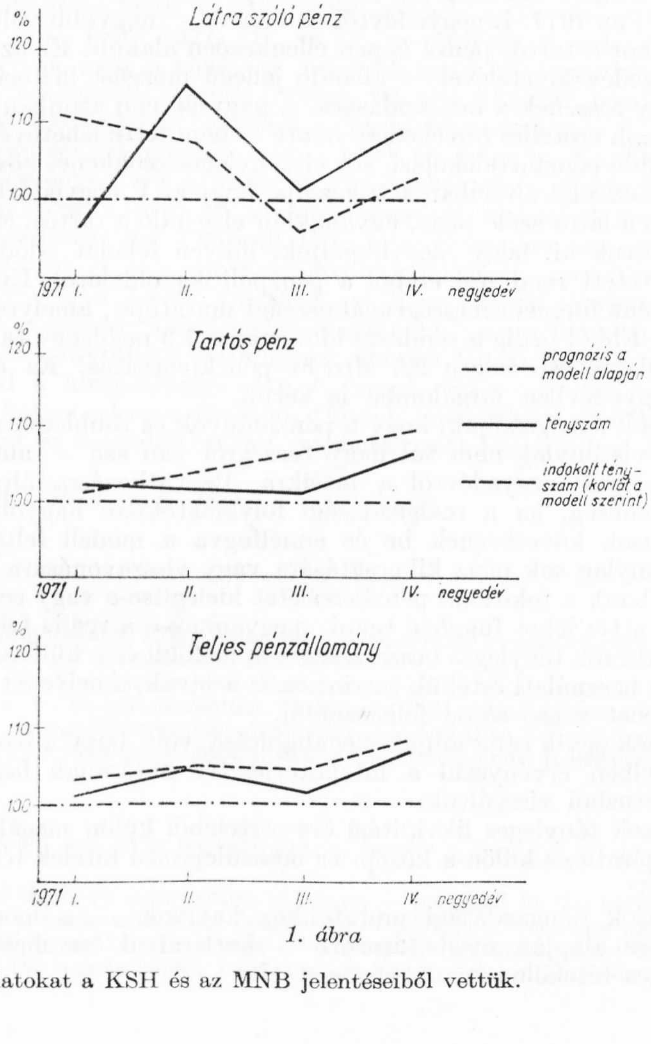
A számítások eredményei*

A modell felhasználásával kettős feladatot kívántunk megoldani:
— a pénzkorlátok és a hitelkiterjesztés határainak megállapítását;
— a hitelmérleg főbb tételeinek prognózisszerű meghatározását.

A számítások eredményei szerint a teljes pénzmennyiség eléggé szoros pozitív korrelációt ($r = 0{,}829$) jelez a társadalmi termelés bruttó értékével. Ezért megítélésünk szerint a modell alkalmas arra, hogy segítségével a pénz mennyiségére és a bank hitelnyújtási képességére becsléseket lehessen végezni.

A számítások során kitűnt, hogy az egyenletek megoldásával lényegében rendszeresen megtörténik a pénzmennyiség szabályozása is, mert ezek a követelmények beépítést nyertek a feltételrendszerbe.

A látra szóló pénz forgási sebessége szezonszerűen jellegzetes nagyságot vesz fel és időben gyorsuló tendenciát mutat. Számításainknál az 1968—70 évek forgási sebesség-mutatói közül a legjobb eredményt tekintettük kiinduló



1. ábra

* Az alapadatokat a KSH és az MNB jelentéseiből vettük.

alapnak, ezért bázisul az 1969. évet választottuk. Ekkor az egyes negyedévek mutatói sorban a következők: 6,243; 6,291; 5,644; 5,786. A gyorsulási tendencia figyelembevételével megállapítottuk, hogy a forgási sebesség egy évre eső növekedési üteme 0,035. A látra szóló pénz forgási sebessége az első félévben rendszeresen nagyobb, mint a második félévben, az 1968–70. évek átlagában pedig a II. negyedévben volt a legnagyobb és a IV. negyedévben a legkisebb, aminek oka döntően a pénzállomány szezonszerű ingadozásában keresendő.

Tekintettel arra, hogy a tartós pénz nem alkalmazkodik rugalmasan a bruttó felhalmozások egyes negyedévi üteméhez, ezért az éves forgási sebességből indultunk ki. A forgási sebességmutatót az 1968–70. évek adataiból számított lineáris trend segítségével extrapoláltuk 1971-re. A *b* paraméter átlagosan évenkénti 0,025 gyorsulást jelzett, s így a számításainknál 0,892-vel dolgoztunk. A valóságban 0,955 volt a forgási sebesség, amely erősen közelíti a gyakorlatilag még elfogadható határértéket, az 1-et.

A becsült forgási sebesség-mutatók alapján számított látra szóló pénz mennyisége – az 1971. I. negyedévtől eltekintve – nagyobb volt a korlátjánál, ugyanakkor a tartós pénzé éppen ellenkezően alakult. Ez az összefüggés – az I. negyedév kivételével – állandó jellegű mozgást biztosított a látra szóló pénz egy részének a tartósodására. A nagyságrend azonban – a bruttó felhalmozódások erőteljes növekedése miatt – nem tette lehetővé a szükséges mértékű további pénztartalékolást, sőt viszonylagos csökkenés következett be.

Mivel a tapasztalat általában azt igazolja, hogy az I. negyedévben viszonylagosan kevés a látra szóló pénz, ugyanakkor elegendő a tartós, ezt a negyedévet választottuk ki, hogy megvizsgáljuk, milyen feladat adódik a modell szerint ismertetett rendezési elvből a pénzpolitika oldaláról. Evégből kiszámítottuk a pénz forgási sebességrugalmassági mutatóját, amelyre 1,106 értéket kaptunk. Ebből pedig a rendezés időtartama 1,3 negyedév és az első rendezési negyedévre eső összeg 2,5 Mrd Ft pénzkibocsátás. Ez az összeg az 1971. II. negyedévben forgalomba is került.

A számítások azt igazolják, hogy a pénzhiányok és többletek rendezése – amennyiben viszonylag nem túl nagy összegről van szó – automatikusan megtörténik egyik negyedévről a másikra. Beavatkozásra általában csak akkor van szükség, ha a reálgazdasági folyamatokban nagyobb eltérések, arányeltolódások következnek be és ennélfogva a modell feltételrendszere alapján viszonylag sok pénz kibocsátására vagy visszavonására kerülne sor. Azt, hogy a bank a fokozódó pénzkeresletet kielégítse-e vagy sem, megítélésünk szerint attól lehet függővé tenni, megvannak-e a reális feltételei a felhalmozási eszközök tényleges beszerzésének a belföldi és a külföldi piacon, ill. létre jöttek-e használati értékük szerint azok a javak, amelyeket csak felhalmozásokra lehet végső soron felhasználni.

A számítások egyik célja annak megállapítása volt, hogy a bank hitelezése során mennyiben érvényesül a hitelkiterjesztés határának betartása. Ezt kétféle aspektusból vizsgáltuk:

- a források tényleges likviditási összetételéből külön megállapítottuk a rövidlejáratú és külön a közép- és hosszúlejáratú hitelek tényadatainak eltérését;
- a források népgazdasági mutatókhoz kapcsolt – a modell feltételrendszere alapján meghatározott – korlátaival összehasonlítottuk a tényleges hitelállományok végösszegeit.

A likviditás szerinti hitelkitrejesztési határokra nézve megállapítható, hogy a II. és a III. negyedévben viszonylagos egyensúly volt a források és a hiteleszközök között. Ezzel szemben az első negyedévben a rövidlejáratú hitelek állománya nagyobb volt, mint a forrása, a IV. negyedévben viszont éppen ellenkezőleg, a források haladták meg a hitelállományokat. Ily módon ebben a negyedévben a közép- és hosszúlejáratú hitelek egy részét rövidlejáratú forrásokból nyújtották. Szigorú egyensúlyi feltétel figyelembevételével ebből arra lehet következtetni, hogy a IV. negyedévben bizonyos túlhitelezéseket végzett a bank. Számításunk szerint a túlhitelezés azonban csak átmeneti és a mértékét tekintve is csekély. A fejlődés 1972. évi tendenciájából, továbbá a jegybank aktív pénz- és hitelpolitikájából (pl. a forgóeszközhitelek magasabb és a lejárat hosszától függő kamattétele, a beruházási hitelek mennyiségi kontigentálása, az elérendő nyereséghányad minimális mértékének felemelése) következtetve rövid időn belül ismét helyreáll az egyensúly. A modell alapján mutatkozó egyensúlyi eltérés oka, hogy a megnövekedett beruházási kereslet kielégítése csak fokozottabb pénzfelhasználással volt lehetséges.

A hitelállományoknak a saját korlátaikhoz való viszonyításából is az állapítható meg, hogy 1971. III. és IV. negyedévében valamelyes túlfinanszírozás történt, azaz a közép- és hosszúlejáratú hitel egy kis részének nem volt meg a rendeltetés szerinti forrása. Mivel a likviditási helyzetnek éppen az eltérések viszonylagos nagysága a fokmérője, a számok — megítélésünk szerint — egyben azt is jelzik, hogy a bank 1971-ben is eléggé következetesen igyekezett érvényesíteni a hitelezés elvi szabályait a gyakorlatban.

A vizsgált időszak (négy év) rövidsége nem tette lehetővé, hogy valamennyi felvethető kérdésre választ adjunk. Figyelemmel azonban arra, hogy az 1968-at megelőző időszakok sem pénzügyi struktúrájukban, sem pedig statisztikai rendszerükben nem tették lehetővé az ilyen jellegű elemzések elvégzését, kénytelenek vagyunk megelégedni szerényebb eredményekkel. Úgy véljük, hogy így is néhány olyan összefüggést sikerült feltárni a modell segítségével, amely mind a közgazdasági elemző, mind pedig a prognosztizáló-tervező munkában hasznos lesz a jövőben. (Ennek jellemzésére mellékeljük a pénzállományokat és a modell szerint meghatározott korlátjaikat ábrázoló grafikonokat.)

(Beérkezett: 1972. aug. 15.)

IRODALOM

1. Deutsche Bundesbank 1971. július havi jelentésében megjelent cikk: Längerfristige Entwicklung des Geldvolumens. 11—28. o.
2. RIESZ M.: Pénzforgalom és hitel. Budapest, 1970. Tankönyvkiadó.
3. MIKUSINSKI, I.: Operátorszámítás. Budapest, 1961. Műszaki Könyvkiadó.
4. WLOKA, I.: Az operátorszámítás alkalmazása lineáris állandó együtthatójú differencia-differenciálegyenletek megoldására. MTA III. Osztályának Közleményei. 1962. XII. 265—291. o.

MONEY SUPPLY REGULATION WITH A TIME LAG MODEL

Supply and liquidity composition of money is provided in the national balance of credits, which is made within the framework of traditional planning presently. In this article the authors make an attempt to construct a dynamic model being applicable first of all for the money supply regulation. In the system of constraints of the model

the value of gross national product is considered to be an independent variable. The problem is to determine how big a supply is induced by the given amount and temporal change of the national product. A link between national product and money supply is the index of velocity of circulation of money.

In compiling the system of equations of the model the authors start from the 6 main issues of the balance of credits: balance of short-, medium-, and long-term foreign currency reserves and liabilities (autonomous issues), amount of demand and time deposits, and short-, medium-, and long-term credit. These latter issues can be calculated from the four basic equations of the model. The interdependences applied are essentially similar to the quantitative money equilibrium models (as e. g. that of Irving Fisher's).

The constraints of the model are the requirement of demand deposit, being in connection to the productive and final consumption, as well as the supply of time deposits, necessary for the gross accumulation. The bounds characterize the money demand, justified on a given level of the national economy, and the amounts available characterize the effective demand and the supply of money. Two further parameters belong to the system of constraints: an index characterizing the justified average growth of velocity of circulation of money and a number indicating the time span for the absorbtion of money and for the replacement of money stringency.

In principle time is continuous and the change of the economy is continual, too. In general practice yearly and within this quarterly data are available and in this sense the model is discrete as well. The mathematical composition of the continuous model relies on the operator calculus of Mikusinski. This is indeed *a time lag model of money supply regulation*. The practical calculations can be made, at the same time, only decomposing the continuous time into periods (quarters of a year). The authors set forth this in the *discrete model*. The duration of putting an end to money surplus or money stringency is determined by utilizing the elasticity of velocity of circulation of money relative to the amounts of money.

A double problem can be solved with the model: the determination of money limits and limits of credit expansion, as well as the forecasting of the main items of the balance of credits. The authors have made calculations on the basis of the data of 16 quarters of the years 1968–71, as a result they have stated the necessary amount of demand and time deposits belonging to the given national product, and from the actual composition of liquidity of bank resources they have stated the disequilibria in short-, medium-, and long-term credits. Though the short series prevented from fully answering all the questions, the authors still deem that they have succeeded in exploring some interdependences by the aid of the model which will be useful both in economic analysis and in the forecasting-planning work.

РЕГУЛИРОВАНИЕ КОЛИЧЕСТВА ДЕНЕГ ЗАМЕДЛЕННОЙ ВО ВРЕМЕНИ МОДЕЛЬЮ

Количество и ликвидный состав денег предусмотрены в государственном балансе кредитов, который разрабатывается в наши дни в рамках планирования традиционными методами. В этой статье авторы пытаются составить динамичную модель, которая угодна в первую очередь к количественному регулированию денег. В системе условий модели стоимость национального продукта (валовой общественный продукт) считается независимым переменным. Проблема определять, какое количество денег индуктирует данная величина и изменение во времени национального производства. Общественное производство связывается к количеству денег показателем скорости оборачиваемости денег.

В составлении системы равновесия модели они исходят из 6 главных пунктов баланса кредитов, а именно: сальдо краткосрочных, среднесрочных и долгосрочных запасов девиз и задолжностей (автономные пункты), количества бессрочных и устойчивых денег, и краткосрочных, среднесрочных и долгосрочных кредитов. Эти последние пункты можно исчислять из четырех основных уравнений модели. Применяемые взаимозависимости, касательно их сути, прихожи к моделям количественного равновесия денег (как напр. модель Ирвинга Фишера).

Ограничающие условия модели — бессрочная потребность в деньгах, связывающаяся к производственному и конечному потреблению, а также количество устойчивых денег, нужна к валовому накоплению. Ограничения характеризуют спрос на деньги, мотивированный на данный уровень народного хозяйства, а действительные наличности — платежеспособный спрос, предложение денег. К системе условий принадлежат также два параметра: а именно: показатель, характеризующий мотивированный средний рост скорости оборачиваемости денег, и показатель, отмечающий время изъятия денег из оборота и возмещения недостатка денег.

В модели время является в принципе беспрерывным и изменения хозяйства — постоянными. На практике вообще стоят к распоряжению годовые и внутри этого квартальные данные и в этом смысле модель является и дискретной.

Математически составляется модель при помощи оператор-калькуляции Микулински. Это на самом деле является *замедленной во времени моделью регулирование количества денег*. Одновременно практические калькуляции можно сделать только разложением беспрерывного времени на периоды (кварталы). Это излагают авторы *в дискретной модели*. Определение времени изъятия денег из оборота, возмещения недостатка денег делается использованием показателя эластичности скорости оборачиваемости денег, связывающегося к наличностям денег.

Моделью можно решить двойственную проблему: а именно: определение лимитов денег и лимитов выпуска кредита, а также определение главных пунктов баланса кредита в форме прогноза. Авторы проводили калькуляции на основе данных 16 кварталов 1968—71 годов, в результате которых они установили нужное количество бессрочных и устойчивых денег, принадлежащих данному общественному производству в народном хозяйстве, а с наличного ликвидного состава банковских ресурсов — расхождения равновесия краткосрочного, среднесрочного и долгосрочного кредитования. Хотя краткость исследованного периода не сделала возможным дать полный ответ на задаваемые вопросы, они всетаки считают, что успели изложить некоторые взаимозависимости с помощью модели, которые являются в будущем полезными и при экономической аналитической работе, и при прогностической плановой работе.

Treer Mór Ferenc

A tárolás optimalizálása felfutó és kifutó felhasználásnál

Tárolásra sokkal gyakrabban van szükség, mint ahogy gondolnánk. A növények, az állatok szervezete, az emberalkotta létesítmények lépten-nyomon tárolókat igényelnek. Mindenütt kell tárolás, ahol két összefüggő folyamat közt időkülönbség van. Ez a két folyamat a felhasználás, amely a tárolt készlet csökkenésével és a pótlás, amely ennek növekedésével jár. Amikor folyamatokat létesítünk, úgy kell az adottnak tekintendő felhasználáshoz a pótlást illesztenünk, hogy a termelés folytonosságának biztosítása mellett a tárolás költsége a legkisebb legyen, vagyis a tárolást költség-optimalizálnunk kell.

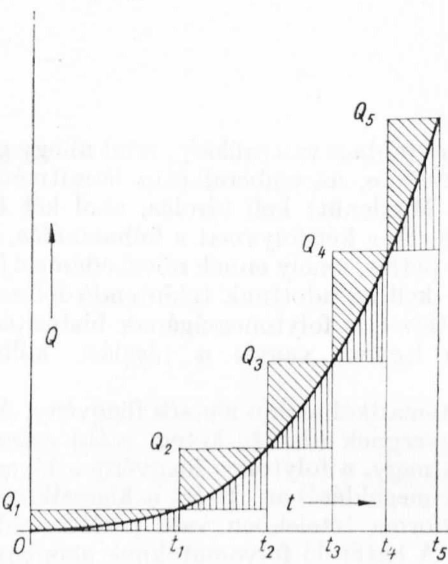
A két folyamat matematikai alakja lépcsős függvény. A tárolt készlet rendszerint valamilyen egységnek (darab, köteg, zsák) egészszámú többszöröse. De ha ez a számérték nagy, a folytonos függvény a lépcsősnek jó megközelítését adja feladatunk megoldásában. Ezért a klasszikus irodalom egyenletes felhasználásra és egyforma tételekben való pótlásra ad megoldásokat ([1] 204., 207., 210. oldal). A határoló folyamatoknak azonban többnyire várható értékük körüli szórásuk van. A megoldást aránylag nem nagyon nehezíti meg, ha csak a felhasználást vesszük stohasztikus folyamatnak ([1] 218., 223., 225., 227. oldal). A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének munkatársai azonban a tárolással kapcsolatos minden lépcsős függvénynél figyelembe vették a stohasztikus jelleget ([3] 187., és [4] 203. oldal).

Nem stacioner viszonyokra variációszámítással általában csak elvi megoldást tudunk kapni ([1] 236., 245., 248., 254. oldal) a felhasználást tetszőleges alakú stochasztikus függvénynek, a pótlást pedig adott szerkezetű, de paraméterében változtatható függvénynek véve. A műszaki irodalom légüstelméletei ([5] 4/46., 47. oldal). periodikus folytonos függvényt alkotó pótlásra, és stacioner, vagy ehhez közeledő felhasználásra adnak megoldást. Lange, Lesourne nyomán ([1] 212. és [2] 356. oldal) tetszőleges alakú folytonos függvénynek veszi a felhasználást, a pótlást megválasztandó lépcsős függvénynek, de körülményes és próbálgatást igénylő grafikus megoldásra jut.

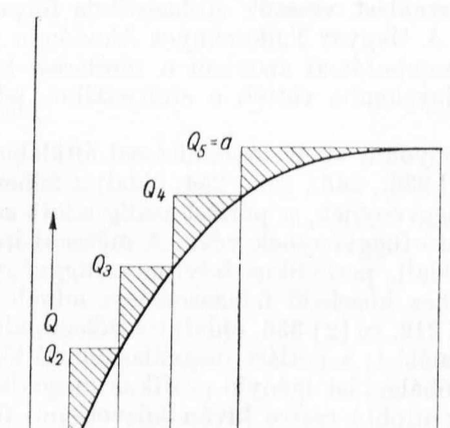
Jelen tanulmány ez utóbbi esetre kíván közvetlenül felhasználható megoldást adni, vagyis arra, hogy mely t_i időpontokban és milyen Q_i mennyiségekben optimális a pótlás, ha a felhasználás halmozott értéke az időnek (t) valamilyen $Q = at^m$ alaku függvénye. A kidolgozott változatok a következők:

A felhasználás felfutó jellegű ($m > 1$). A (4) képlet alapján számíthatjuk a beszerzések időpontjait, és az (5) alapján a tárolás összköltségét (S), az 1. ábra szerinti lefutással.

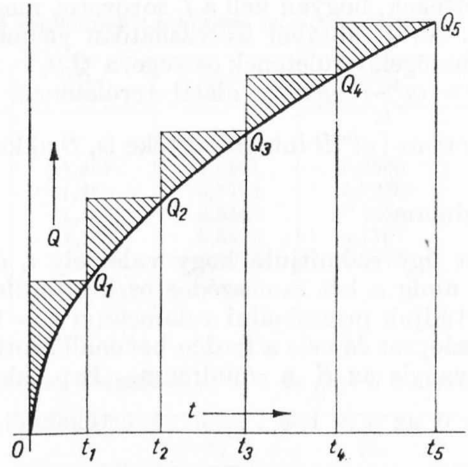
Az előző feladatnak inverze, ha a pótlás (= termelés) folytonos függvény, és a felhasználás (= elszállítás) történik részletekben. Az időpontot a (7), a tárolás összköltségét a (9) képlet adja, a lefutás ugyancsak az 1. ábra szerint. — Teljesen kifutó felhasználásnál a (13) képlet adja meg a beszerzés időpontjait és a (17) a tárolás összes költségét a 2. ábra szerinti lefutással. — Ha a kifutó jellegű felhasználás $\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\right)$ hiperbolikusan csökken $(1 > m > 0)$, a (7)



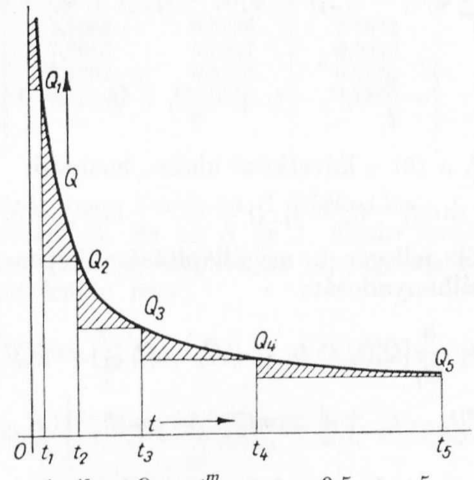
1. ábra. $Q = a\,[1-(1-t)^m]$, $m = 3$, $n = 5$



2. ábra. $Q = at^m$, $m = 3$, $n = 5$



3. ábra. $Q = at^m$, $m = 0{,}5$, $n = 5$



4. ábra. $Q = at^m$, $m = -0{,}5$, $n = 5$

képletből a megfelelő számértékekkel keletkező lefutását a 3. ábra mutatja. — Végül a 4. ábrában mutatjuk be azt az esetet, amikor a felhasználás hiperbolikusan csökken ($m < o$) igen nagy értéktől a nulla felé tartva, amikor például egy hiánycikkből, vagy újdonságból dobunk a közben fokozatosan telítődő piacra.

1.

A kérdés tehát az, hogy ha az összefüggés

$$\int_0^{t_n} Q\,dt + S = \sum_1^n Q_i(t_i - t_{i-1}), \tag{1}$$

ahol $Q = at^m$, tehát $Q' = amt^{m-1} = \frac{m}{t}Q$, és így $\int_0^t Qdt = \frac{t}{m+1}Q$, továbbá

a, m, t_n és n adott értékek, hogyan kell a t_i sorozatot megválasztanunk, hogy S minimum legyen. Az 1. ábrából leolvashatóan geometriailag S a ferdén bevonalkázott háromszögek területének összege, a $Q_i(t_i - t_{i-1})$ oszlopsor összterületének és a $Q = at^m$ függvény alatti területének különbsége. Miután a, m, t_n adottak, adott az $\int_0^{t_n} at^m dt$ integrál értéke is, S akkor lesz minimum, ha $\sum_1^n at_i^m(t_i - t_{i-1})$ minimum.

Ezt a minimumot úgy számítjuk, hogy valamely t_i értéket egymagában addig változtatjuk, amíg a két szomszédos oszlop területe a legkisebb lesz. Ha ezt egyidejűleg tudjuk megcsinálni valamennyi $i = 1, 2, \ldots, n-1$ értéknél, akkor lesz az oszlopsor és vele a ferdén bevonalkázott háromszögek területének összege, vagyis az S a minimum. Ezt akkor érjük el, ha $\frac{\partial}{\partial t_i} \sum_1^n Q_i(t_i - t_{i-1}) = 0$ az $i = 1, 2, \ldots, n-1$ értékeknél, tehát ha:

$$\frac{\partial}{\partial t_i} \sum_1^n Q_i(t_i - t_{i-1}) = Q_i'(t_i - t_{i-1}) + Q_i - Q_{i+1} =$$

(2)

$$= \frac{m}{t_i} Q_i(t_i - t_{i-1}) + Q_i - Q_{i+1} = 0$$

Miután $Q_i = at_i^m$, a (2) a következő alakra hozható:

(3) $$amt_i^{m-1}(t_i - t_{i-1}) + at_i^m - at_{i+1}^m = 0.$$

Ezen szélső érték jellegének megállapítására képezzük az összegezésnek második differenciálhányadosát:

$$\frac{\partial^2}{\partial t_i^2} \sum_1^n Q_i(t_i - t_{i-1}) = \frac{\partial}{\partial t_i} [Q_i'(t_i - t_{i-1}) + Q_i - Q_{i+1}] = Q_i''(t_i - t_{i-1}) + Q_i' + Q_i' =$$

$$= am(m-1)\, t_i^{m-2}(t_i - t_{i-1}) + 2amt_i^{m-1} = amt_i^{m-1}\left[(m-1)\left(1 - \frac{t_{i-1}}{t_i}\right) + 2\right].$$

A kapott szorzatban mindegyik tényező pozitív, ha $m > 1$, az összegezésnek szélső értéke minimum. Az $m < 1$ esetre később térünk ki.

További számításaink megkönnyítésére bevezetjük a $t_i^m = \varphi_{i-1} t_{i-1}^m$ jelölést. Rendezve a (3) egyenletet:

(4) $$(1 + m - m\sqrt[-m]{\varphi_{i-1}})\, t_i^m = t_{i+1}^m \quad \text{honnan:} \quad 1 + m - m\sqrt[-m]{\varphi_{i-1}} = \varphi_i .$$

Rekurziós formulához jutottunk tehát. Ha φ_{i-1} ismeretes, φ_i számítható. A számítást $i = 1$-nél kezdjük el. Miután $t_0 = 0$, $t_1 \neq 0$ csak akkor lehet, ha $\varphi_0 = \infty$, igy akkor $\varphi_1 = 1 + m$. Innen fokozatosan eljutunk φ_{n-1} értékére, melyből t_{n-1}-et számítani tudjuk, miután t_n adott. Evvel megkaptuk t_i keresett értékeit.

φ_i kiszámítását $m = 3$-nál az 1a táblázat mutatja be, az 1b táblázat pedig megadja $m = 3$ és $n = 5$ értékekre a t_i értékek számítását, ha $t_n = 1$. Megfigyelhetjük, hogy a t_i értékek eloszlása nem egyenletes, hanem i növekedésével sűrűsödnek.

1/a táblázat

φ_i értékeinek számítása $m = 3$ esetében

i	φ_{i-1}	$\sqrt[3]{\varphi_{i-1}}$	$\sqrt[-3]{\varphi_{i-1}}$	$1-\sqrt[-3]{\varphi_{i-1}}$	$[1+m(1-\sqrt[-3]{\varphi_{i-1}})]=\varphi_i$
1.					4,0000
2.	4,0000	1,587	0,6301	0,3699	2,1097
3.	2,1097	1,283	0,7794	0,2206	1,6618
4.	1,6618	1,184	0,8446	0,1554	1,4662
5.	1,4662	1,136	0,8803	0,1197	1,3591
6.	1,3591	1,108	0,9025	0,0975	1,2925
7.	1,2925	....	....		

1/b táblázat

t_i értékeinek számítása $m = 3$ és $n = 5$ esetében

i	t_{i+1}	φ_i	φ_i^{-1}	$\sqrt[-3]{\varphi_i}$	$t_{i+1}\sqrt[-3]{\varphi_i}=t_i$
5					1,0000
4	1,0000	1,4662	0,6825	0,8804	0,8804
3	0,8804	1,6618	0,6017	0,8442	0,7465
2	0,7465	2,1097	0,4762	0,7810	0,5830
1	0,5830	4,0000	0,2500	0,6300	0,3678
0	0,3678	∞	0	0	0,0000

A következő kérdésünk, hogy mekkora S értéke, ha a t_i értékeket a fent számítottak szerint választjuk. Ez az S az 1. ábrán ferdén bevonalkázott háromszögek területének összege, értékét az (1) egyenletből számítjuk. Az összegezés utolsó tagját külön írva:

$$S + \int_0^{t_n} Q\mathrm{d}t = \sum_1^{n-1} Q_i(t_i - t_{i-1}) + Q_n(t_n - t_{n-1})$$

A (2) egyenletből $Q_i(t_i - t_{i-1}) = \frac{t_i}{m}(Q_{i+1} - Q_i)$, továbbá $\int_0^{t_n} Q\,\mathrm{d}t = \frac{t_n Q_n}{m+1}$,

ezeket behelyettesítve:

$$m\left(S + \frac{t_n Q_n}{m+1}\right) = \sum_1^{n-1} t_i(Q_{i+1} - Q_i) + mQ_n(t_n - t_{n-1}).$$

Az összegezés első tagját írhatjuk a következően:

$$\sum_1^{n-1} t_i Q_{i+1} = t_{n-1}Q_i + \sum_1^{n-1} t_{i-1}Q_i\,,$$

mert az összegezés utolsó tagját külön írtuk, első tagként pedig $t_0 Q_1 = 0$ értéket hozzáírtuk, és az összegezést átszámoztuk. Behelyettesítve az előző egyenletbe:

$$m\left(S + \frac{t_n Q_n}{m+1}\right) = t_{n-1}Q_n + \sum_1^{n-1} t_{i-1}Q_i - \sum_1^{n-1} t_i Q_i + mQ_n(t_n - t_{n-1}).$$

Összevonva, az összegezéshez az n-edik tagot hozzáírva és az utolsó taghoz adva:

$$m\left(S+\frac{t_nQ_n}{m+1}\right)=-\sum_1^n Q_i(t_i-t_{i-1})+(m+1)Q_nt_n-mQ_nt_{n-1}.$$

A jobboldali összegezést az (1) egyenletből helyettesítve:

$$(m+1)\left(S+\frac{t_nQ_n}{m+1}\right)=(m+1)Q_nt_n-mQ_nt_{n-1}.$$

A keresett S érték tehát:

$$S=\frac{m}{m+1}Q_n(t_n-t_{n-1})=\frac{m}{m+1}Q_nt_n\left(1-\frac{t_{n-1}}{t_n}\right) \tag{5}$$

vagyis a $\sum\limits_1^n Q_i(t_i-t_{i-1})$ sor utolsó tagjának, az 1. ábrán az oszlopsor utolsó oszlopának $\frac{m}{m+1}$-ed része.

2.

Kiegészíti az előzőket, ha azt vizsgáljuk, hogy mennyi egy oszlopsornak a $Q=at^m$ függvénytől való eltérése ($\bar{S}$), ha az oszlopok sarkai alulról érintik a függvényt. Az 1. ábrán függélyesen bevonalkázott háromszögek mutatják az eltérést ebben az esetben. A függvény, a differenciálhányadosa és az integrálja, valamint az állandók ugyanazok, mint az (1) egyenletnél voltak, az oszlopsor és a függvény alatti terület közötti összefüggés azonban:

$$\int_0^{t_n}Qdt-\bar{S}=\sum_0^{n-1}Q_i(t_{i+1}-t_i)=\sum_1^{n-1}Q_i(t_{i+1}-t_i). \tag{6}$$

Az összegezésből az első tagot elhagyhatjuk, mert $Q_0=0$. Az előző esettel ellentétesen most a Q függvény alatti területből kivonni kell az $\bar{S}$-t, hogy a (6) összegezésének megfelelő oszlopsor területét kapjuk.

t_i legjobb értékeinek számítására a gondolatmenetünk az előző esettel megegyező. Képezzük az összegezés szélső értékét:

$$\frac{\partial}{\partial t_i}\sum_1^{n-1}Q_i(t_{i+1}-t_i)=Q_i'(t_{i+1}-t_i)+Q_{i-1}-Q_i=0.$$

Innen $\frac{m}{t_i}Q_i(t_{i+1}-t_i)=Q_i-Q_{i-1}$, azaz viszonyszámokban

$$m\left(\frac{t_{i+1}}{t_i}-1\right)=1-\frac{Q_{i-1}}{Q_i}=1-\left(\frac{t_{i-1}}{t_i}\right)^m. \tag{7}$$

Bevezetve a $\Psi_{i+1} = \frac{t_{i+1}}{t_i}$ jelölést

(8) $$\Psi_{i+1} = 1 + \frac{1}{m}(1 - \Psi_i^{-m}).$$

Ismét rekurziós képlet, úgy a Ψ, mint a t_i értékei az előző esethez hasonlóan számíthatók.

A (7) ismeretében meg tudjuk állapítani a fent képezett szélső érték jellegét:

$$\frac{\partial^2}{\partial t_i^2}\sum_1^{n-1} Q_i(t_{i+1} - t_i) = \frac{\partial}{\partial t_i}[amt_i^{m-1}(t_{i+1} - t_i) + at_{i-1}^m - at_i^m] =$$

$$= am(m-1)\,t_i^{m-2}(t_{i+1} - t_i) - 2amt_i^{m-1} = amt_i^{m-1}\left[(m-1)\left(\frac{t_{i+1}}{t_i} - 1\right) - 2\right].$$

Helyettesítve a (7)-ből:

$$\frac{\partial^2}{\partial t_i}\sum_1^{n-1} Q_i(t_{i+1} - t_i) = amt_i^{m-1}\left[(m-1)\frac{1}{m}\left(1 - \frac{Q_{i-1}}{Q_i}\right) - 2\right] =$$

$$= amt_i^{m-1}\left[\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{Q_{i-1}}{Q_i}\right) - 2\right].$$

A szegletes zárójel első tagja kisebb egynél, ha m pozitív, a másodfokú differenciálhányados tehát negatív, a képezett szélső érték maximum, így $\bar{S}$ lentebb számítandó értéke minimum lesz.

$\bar{S}$ nagyságának számítására a (6) egyenletből a (7) figyelembevételével:

$$m\left(\int_0^{t_n} Q\,\mathrm{d}t - \bar{S}\right) = m\sum_1^{n-1} Q_i(t_{i+1} - t_i) = \sum_1^{n-1} t_i(Q_i - Q_{i-1}).$$

Tekintettel arra, hogy $Q_0 = 0$, $\sum_1^{n-1} t_i Q_{i-1} = \sum_2^{n-1} t_i Q_{i-1}$, átszámozással

$$\sum_2^{n-1} t_i Q_{i-1} = \sum_1^{n-2} t_{i+1} Q_i = \sum_1^{n-1} t_{i+1} Q_i - t_n Q_{n-1},$$

miután az összegezéshez írtuk és külön levonjuk az $(n-1)$-edik tagot. Innen

$$m\left(\frac{Q_n t_n}{m+1} - \bar{S}\right) = \sum_1^{n-1} t_i Q_i - \sum_1^{n-1} t_{i+1} Q_i + t_n Q_{n-1} = -\sum_1^{n-1} Q_i(t_{i+1} - t_i) + t_n Q_{n-1}.$$

Az összegezést a (6)-ból behelyettesítve:

$$(m+1)\left(\frac{Q_n t_n}{m+1} - \bar{S}\right) = t_n Q_{n-1}.$$

Az integrál oszlopsortól való eltérése tehát:

(9) $$\bar{S} = \frac{1}{m+1} t_n(Q_n - Q_{n-1}),$$

vagyis az 1. ábra felső, $Q_n - Q_{n-1}$ magas sávja területének $\frac{1}{m+1}$-ed része.

3.

Megoldást tudunk találni egy integrál értékének véges számsorral való legjobb megközelítésének kérdésére akkor is, ha $\frac{dQ}{dt}$ értéke csökkenő. Csak amíg növekedésnél ez nulláról indul $t_n = 1$ időpontig a legnagyobb értékre, addig a csökkenésnél ez fordítva van. A csökkenést $am(1-t)^m$ lefolyásúnak véve:

$$Q = a[1 - (1 - t)^m]. \tag{10}$$

Differenciálhányadosa

$$\frac{dQ}{dt} = am(1 - t)^{m-1} = \frac{m}{1-t}(a - Q), \tag{11}$$

második deriváltja pedig

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = -am(m-1)(1-t)^{m-2}.$$

A rekurziós formula felállítására levezetésünk gondolatmenete most is ugyanaz, mint volt a növekvő $\frac{dQ}{dt}$-nél, a parciális differenciálhányados alakja is ugyanaz, mint a (2) egyenletben,

$$\frac{\partial}{\partial t_i}\sum_1^n Q_i(t_i - t_{i-1}) = Q_i'(t_i - t_{i-1}) + Q_i - Q_{i+1} = 0 \tag{12}$$

csak most a csökkenő $\frac{dQ}{dt}$-nek megfelelő értéket kell behelyettesítenünk:

$$Q_i'(t_i - t_{i-1}) = \frac{m}{1-t_i}(a - Q_i)\,[(1 - t_{i-1}) - (1 - t_i)] =$$

$$= Q_{i+1} - Q_i = (a - Q_i) - (a - Q_{i+1}).$$

Viszonyszámokban: $m\left(\frac{1-t_{i-1}}{1-t_i} - 1\right) = 1 - \frac{a - Q_{i+1}}{a - Q_i} = 1 - \left(\frac{1-t_{i+1}}{1-t_i}\right)^m$.

A $\varphi_i = \frac{1-t_i}{1-t_{i-1}}$ jelöléssel $m\left(\frac{1}{\varphi_i} - 1\right) = 1 - \varphi_{i+1}^m$, vagyis

$$\frac{1}{\varphi_i} = 1 - \frac{1}{m}(1 - \varphi_{i+1}^m). \tag{13}$$

Ezúttal is rekurziós formulára jutottunk, most azonban $i = n-1$ értéknél kell kezdenünk φ_i kiszámítását: Miután $t_n = 1$, $\varphi_n = 0$. Ebből kiindulva sorban megkapjuk a φ_i értékeket, végül is a $\varphi_1 = \frac{1-t_1}{1-t_0}$-et. Miután $t_0 = 0$, $t_1 = 1 - \varphi_1$, ezután i növekedő értékei szerint haladva meghatározhatjuk valamennyi t_i értéket.

A (13) összefüggés segélyével könnyen megállapítható a (12) egyenlet alapján képezett szélső érték jellege. (12)-ből a másodrendű differenciálhányados

$$\frac{\partial^2}{\partial t_i^2}\sum_1^n Q_i(t_i-t_{i-1}) = a\,[-m(m-1)(1-t_{i-1})(1-t_i)^{m-2}] + (m+1)m(1-t_i)^{m-1} =$$

$$= am(1-t_i)^{m-1}\left[-(m-1)\frac{1-t_{i-1}}{1-t_i}+m+1\right],$$

amely a φ_i jelöléssel

$$am(1-t_i)^{m-1}\left[-(m-1)\frac{1}{\varphi_i}+m+1\right]$$

alakú lesz.

Behelyettesítve $\frac{1}{\varphi_i}$ (13) alatti kifejezését kapjuk, hogy

$$\frac{\partial^2}{\partial t_i^2}\sum_1^n Q_i(t_i-t_{i-1}) = am(1-t_i)^{m-1}\left[2-\frac{m-1}{m}(1-\varphi_{i+1}^m)\right].$$

A másodrendű differenciálhányados tehát pozitív, mert a második tag kisebb egynél, ha $m \geq 1$. A $\sum_1^n Q_i(t_i-t_{i-1})$ összegezésnek, az oszlopsor területének tehát maximuma van.

Ezen $\sum_1^n Q_i(t_i-t_{i-1})$ összegnek az $\int_0^{t_n} Q\,dt$-től való eltérésének S nagyságát számítandó lényegében az előző esetekhez hasonlóan járunk el, egyes részleteiben azonban eltérően. Az S értékét a 2. ábrán is a bevonalkázott háromszögek területének összege adja meg. Miután a t_i-ik változtatásánál a parabola vonala nem változik, az oszlopsor területét a háromszögterületek hozzáadásával kapjuk a parabola alatti területből, és az oszlopsor területének minimuma fogja adni a háromszögek területének minimumát. Ezek szerint az oszlopsor területe:

$$\int_0^{t_n} Q\,dt + S = \sum_1^n Q_i(t_i-t_{i-1}) = \sum_1^n a[1-(1-t_i)^m](t_i-t_{i-1}) =$$

(14)

$$= a(t_n-t_0) - a\sum_1^{n-1}(1-t_i)^m(t_i-t_{i-1}).$$

Az összegezésben az utolsó tagot elhagytuk, mert $t_n = 1$. A szélső érték számítására:

$$\frac{\partial}{\partial t_i}\sum_1^{n-1}(1-t_i)^m(t_i-t_{i-1}) = -m(1-t_i)^{m-1}(t_i-t_{i-1}) + (1-t_i)^m - (1-t_{i+1})^m.$$

Ez a szélső érték minimum, amint azt az előző oldalon kimutattuk. A minimum helyén tehát $m(1-t_i)^{m-1}(t_i-t_{i-1})=(1-t_i)^m-(1-t_{i+1})^m$. A (14)-be helyettesítve

$$\int_0^{t_n} Q\,\mathrm{d}t+S=a(t_n-t_0)-\frac{a}{m}\sum_1^{n-1}(1-t_i)[(1-t_i)^m-(1-t_{i+1})^m]. \tag{15}$$

A (15) jobb oldalán különbségek összegezése végzendő. A különbség két tagját külön összegezzük, de a másodikat előbb átcsoportosítjuk:

$$\sum_1^{n-1}(1-t_{i+1})^m(1-t_i)=\sum_1^{n-2}(1-t_i)(1-t_{i+1})^m.$$

Az összegezés utolsó tagját elhagytuk, mert $i=n-1$ esetén $t_n=1$, így az utolsó tag nulla. Az összegezéshez hozzáírjuk és külön kivonjuk az $i=0$ tagot, figyelembe véve, hogy $t_0=0$, ekkor

$$\sum_1^{n-2}(1-t_i)(1-t_{i+1})^m=\sum_0^{n-2}(1-t_i)(1-t_{i+1})^m-(1-t_i)^m$$

átszámozást hajtva végre $=\sum\limits_1^{n-1}(1-t_{i-1})(1-t_i)^m-(1-t_i)^m$.

Az átcsoportosított összegrészt a (15)-be helyettesítve és összevonva

$$\int_0^{t_n} Q\,\mathrm{d}t+S=a(t_n-t_0)-\frac{a}{m}\left\{\sum_1^{n-1}(1-t_i)^m[(1-t_i)-(1-t_{i-1})]+(1-t_1)^m\right\}=$$

$$=a(t_n-t_0)-\frac{a}{m}\left[\sum_1^{n-1}(1-t_i)^m(t_{i-1}-t_i)+(1-t_1)^m\right]=$$

$$=a\frac{m+1}{m}(t_n-t_0)-\frac{a}{m}\left\{\sum_1^{n}[1-(1-t_i)^m](t_i-t_{i-1})+(1-t_1)^m\right\}.$$

A Σ-tag értékét a (14) egyenletből véve

$$\frac{m+1}{m}\left[\int_0^{t_n} Q\,\mathrm{d}t+S\right]=a\frac{m+1}{m}(t_n-t_0)-(1-t_1)^m\frac{a}{m}. \tag{16}$$

Kiszámítjuk az intergáltagot:

$$\int_0^{t_n}[1-(1-t)^m]\,\mathrm{d}t=a\left[t+\frac{(1-t)^{m+1}}{m+1}\right]_0^{t_n}=$$

$$=a\left[t_n+\frac{(1-t_n)^{m+1}}{m+1}-\frac{1}{m+1}\right]=\frac{am}{m+1}.$$

Helyettesítve a (16) egyenletbe

$$(m+1)\left[\frac{am}{m+1}+S\right]=a(m+1)-a(1-t_1)^m.$$

S keresett értéke tehát:

$$S=\frac{a}{m+1}[1-(1-t_1)^m]=\frac{Q_1}{m+1}, \tag{17}$$

vagyis a Q_1 magasságú sáv területének $\frac{1}{m+1}$-ed része.

Megjegyzés: Hasonlóképpen vizsgálhatjuk meg azt is, hogy milyen egy oszlopsornak beosztása és területének a (10) hatványtól való eltérése, ha az oszlopok sarkai alulról érintik a hatványfüggvényt.

4.

Nehézségek nélkül alkalmazhatók a levezetett képletek m nem egészszámú értékeire is, csak ha $m<1$, akkor a Q parabola tengelye nem az ordináta, hanem az abszcissza. Például a 3. ábra $m=0{,}5$ és $n=5$ értékekre lett kidolgozva. Megfigyelhetjük, hogy t_i értékei az 1. ábrával ellentétesen itt a kis értékeknél a sűrűbbek.

Alkalmazhatjuk a fenti gondolatmenetet akkor is, ha $m<0$. A Q képletben ilyenkor negatív a kitevő, így a függvény lefutása hiperbolikus (4. ábra). Nehézségek keletkezhetnek azonban azért, mert a $t_0=0$-nál Q értéke végtelen. A (4) rekurziós képlet ugyanaz, de az (1) egyenletben az S-et ellenkező jellel kell venni, mert Q a t_i növekedéssel csökken, így a háromszögek területét le kell vonni az integrál értékéből, hogy az oszlopsorét megkapjuk:

$$\int_0^{t_n} Q\,\mathrm{d}t-S=\sum_1^n Q_i(t_i-t_{i-1})=\sum_1^{n-1} Q_i(t_i-t_{i-1})+Q_n(t_n-t_{n-1}).$$

A továbbiak az előző fejezetekhez hasonló gondolatmenettel haladhatnának, előbb vizsgáljuk azonban, hogy lehet-e nulla az értéke a t_1 szerinti parciális differenciálhányadosnak, mely az ordinátatengely melletti első két oszlop legjobb arányát kívánja megállapítani. Deriválva és Q értékét behelyettesítve

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\sum_1^n Q_i(t_i-t_{i-1})=Q_1'(t_1-t_0)+Q_1-Q_2=$$

$$=amt_1^{m-1}\cdot t_1+at_1^m-at_2^m=at_2^m\left[(m+1)\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^m-1\right].$$

Leolvashatjuk a képlet szegletes zárójeléből, hogy ha $m>-1$, akkor a fenti parciális differenciálhányadosnak mindig van nulla helye ott, ahol $\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^m=\frac{1}{m+1}$, ahogy azonban m közeledik -1-hez, $\frac{1}{m+1}$ mindig nagyobb lesz, így $\frac{t_1}{t_2}$-nek (negatív hatványra emelve) mindig kisebbnek kell lennie, vagyis t_1 a t_2-től távolodva lassanként egészen a t_0 mellé tolódik. Nulla helye azonban a parciális differenciálhányadosnak és evvel szélső értéke az összegezésnek mégis csak létezik.

Ha azonban $m \leq -1$, akkor az $i = 1$ szerinti parciális differenciálhányadosnak egyáltalán nincs nulla helye, mert a fenti képlet szegletes zárójelében mind a két tag mindenkor negatív. Ennek megfelelően az ordinátatengely melletti két oszlop területének összege t_1-gyel a nulla felé haladva folyton nagyobbodik. Miután pedig azt követeljük, hogy $\frac{\partial}{\partial t_i}\sum_1^n Q_i(t_i - t_{i-1}) = 0$ legyen minden $i = 1, 2, \ldots, n-1$ értéknél, ezt pedig a jelen esetben a t_1-nél teljesíteni nem tudjuk, feladatunk $m \leq -1$-nél megoldhatatlan.

(Beérkezett: 1972. május 2.)

IRODALOM

1. LANGE, O.: Optimális döntések. Budapest, 1964. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
2. LESOURNE, J.: Téchnique économique et gestion industrielle. Paris, 1958.
3. PALÁSTI, I.—RÉNYI A.—SZENTMÁRTONY T.—TAKÁCS L.: A raktárkészlet pótlásáról I. MTA Alkalmazott Matematikai Intézet Közleményei. Budapest, 1953.
4. ZIERMANN M.: A raktárkészlet pótlásáról II. MTA Alkalmazott Matematikai Intézet Közleményei. Budapest, 1953.
5. PATTANTYUS Á. G.: Gépész és villamos mérnökök kézikönyve.
6. NADDOR, E.: Inventory Systems. London, 1966. J. Wiley & Sons, Inc.

OPTIMIZATION OF STORAGE AT INCREASING AND DECREASING UTILIZATION

The paper gives a solution to storage procedures in cases if from among the two variables of storage — replacement and utilization — one is continuous and changes parabolically, and the other consists of impulses of a given number. Their size and time should be determined so that the difference between the two variables, the stored quantity were minimum. Mathematically a step function $Q = at^m$ to the given period $0 \leq t \leq t_n$ of the given function $Q_i = at_i^m$ should be determined so that the difference between them should be minimal by appropriate choice of the values of t_i.

To the solution of the problem the basic equation (1) is given, in which the variables are t_i where $i = 1, 2, \ldots n-1$. The extreme value of the function is where all the partial derivatives according to the variables t_i vanishes (2). Function $Q = at^m$ is formed so, however, that equation (2) can be transformed to (3) and the result will be the recursion (4). Hereby the minimum value of the difference between the two functions, — the stored quantity — can be given in the equation (4a) explicitely.

The way of solution is the same with the other problem variants. In case of the first version utilization increases smoothly ($m > 1$), and replacement is made in jumps. The difference between them is given by equation (8). Evaluations can be found in tables 1a and 1b and on the fig. 1.

In case of the next variant utilization decreases to 0 according to the equation (9). Optimal terms of replacement are given by the equation (12) and minimum storage is given by the equation (17). The course of the functions and evaluations can be found on the fig. 2. The converse of this variant can be solved in a similar way.

If utilization decreases but its rate decreases hiperbolically, the course and evaluation of the functions is shown by fig. 3. ($1 > m > 0$) and in fig. 4. ($0 > m > -1$), respectively.

ОПТИМИЗАЦИЯ ХРАНЕНИЯ В СЛУЧАЕ ВОЗРАСТАЮЩЕГО И УМЕНЬШАЮЩЕГОСЯ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ

Статья дает решение на методы хранения в случаях, если из двух переменных хранения — дополнением и использованием — первый является беспрерывным и изменяется параболически, а второй состоит из импульсов данного количества. Величина и срок этих переменных должны быть установлены так, чтобы разница между двумя переменными, храненное количество товаров было минимум. Математически к периоду данной функции $Q = at^m$ должно установить ступенчатую функцию $Q_i = at_i^m$ так, чтобы разница между двумя функциями путем угодного избрания стоимостей t_i была минимальная.

Для решения задачи нужно написать основное уравнение (1), в котором переменные t_i, $i = 1, 2, \ldots n-1$. Крайняя стоимость этой функции там, где все парциальные производные согласно переменному исчезли (2). Однако функция такая, что уравнение (2) можно трансформировать в (3) и решение будет формула (4). С помощью этого разницу между двумя уравнениями — храненное количество — можно дать экцплицически в уравнении (4а). Ход решения тот же самый в других вариантах задач.

В первом варианте использование имеет возрастающий характер ($m > 1$) и дополнение делается в частях. Противоположность этого, если дополнение (производство) имеет возрастающий характер и использование делается в частях. Их разница дает уравнение (8). Оценки находятся в таблице 1a и 1b и на рисунке 1.

В следующем варианте использование имеет уменьшающийся характер, согласно уравнению (9). Оптимальные времена дополнения даны уравнением (12), а минимум хранения дан уравнением (17). Конец и оценка функций находятся на рисунке 2. Противоположность этого варианта можно решить аналогически.

Если использование имеет уменьшающийся характер, но его доля уменьшается гиперболически ($1 > m > 0$), то конец и оценку функций показывает рисунок 3.

Уменьшающееся использование гиперболического характера показывает рисунок 4, но в этом случае решение наступает только если ($0 > m > 1$).

Martos Béla–Kornai János

Tervszondázás: a modellek szerkezete

1. Bevezetés

A „tervszondázásnak" elkeresztelt kutatás első számítási eredményeiről Dániel Zsuzsa, Jónás Anna és e cikk szerzői már beszámoltak a Közgazdasági Szemlében megjelent cikkükben [1]. Az a cikk elsősorban a nem-matematikus közgazdásznak szólt és fókuszában egyrészt a közgazdasági-gazdaságpolitikai elemzés, másrészt a modellek számszerűsítése és az eredmények interpretálása állottak. Ezt kívánjuk most kiegészíteni a számítások alapjául szolgáló modell ismertetésével és emellett bemutatni az eredeti modell továbbfejlesztett változatait. Ez az utalás elárulja a sorok között is olvasni tudónak, hogy eredeti modellünkkel nem voltunk elégedettek (az újabbakkal sem teljesen) és modellszámításaink eredményeiből többek között metodikai tanulságokat is levontunk.

Tárgyalásunk homlokterében így most a modellek matematikai szerkezete, a részösszefüggések ilyen vagy olyan ábrázolásának közgazdasági és modellszerkesztési indítékai és a modellek megoldási módszerei állnak. Cikkünkből a modellek szerkezetét az is megértheti, aki az előzőt nem olvasta. Az egész kutatás célját, gondolatmenetét, eredményeink használhatóságát azonban pusztán a modellek leírása alapján aligha lehet megítélni, ehhez az előző cikk ismerete is szükséges. (Hadd mondjuk meg azt is, hogy a kutatás jelenlegi szakaszában még nem jelölhetjük ki e modelleknek a hosszú távú tervezés egészében betöltendő szerepét és így kapcsolatukat sem a tervezésben alkalmazott, vagy alkalmazásra javasolt többi modellekkel.)

Dióhéjban összefoglalva: a tervszondázás keretében a magyar népgazdaság hosszú távú (15 éves) tervezésének néhány aktuális problémáját kívántuk megközelíteni, éspedig elsősorban a fogyasztás és felhalmozás-aránya, a beruházások ágazatközi allokációja (különös tekintettel az infrastrukturális fejlesztésre), az állóeszközök hatékonysága szempontjából. A vizsgálat céljára igen kicsiny (12 szektoros) modellt használtunk, amelynek egyszerű szerkezete és kezelési módja, viszonylag kicsiny adatigénye lehetővé teszi, hogy nagyon sok, egymástól lényegesen különböző növekedési pályát számítsunk ki, a gazdasági fejlődésünk előtt álló lehetőségeket eléggé széles sávban tapogathassuk, „szondázhassuk" ki.

Modelljeink leírásánál egy általános modellből indulunk ki, amelyből a konkrét modelleket bizonyos specifikációval nyerjük. Ez a leírás nem felel meg teljesen a „történelmi" sorrendnek, a kutatás megindulásakor valamifajta metamodell csak gondolataink hátterében motoszkált, jelenlegi formájában utólagos absztrakció eredménye. Ebben az absztrakciós folyamatban nem mentünk el még addig a határig sem, amennyire jelenleg képesek lennénk, csak addig, amennyit az eddigi modellváltozatok általánosítása megkövetel.

További általánosítási lehetőségekre alkalmanként utalunk. A specifikált modellek sorrendje viszont követi kidolgozásunk, illetve használatbavételük időrendjét, és ez a sorrend történetesen a logikai egymásra-épülés követelményének is eleget tesz.

2. Az általános modell

2.1. *Fogalmak és jelölések*

a) *Indexek*

Modellünk n termelő szektorból álló gazdaságot ábrázol, az egyes szektorokra, ha nem különböztetjük meg őket, a j alsó index utal. A szektorokat két csoportba osztjuk. Az első m szektort „beruházási javakat termelő" szektorként (röviden: *beruházási szektorként)* értelmezzük, és feltételezzük róluk, hogy kizárólag beruházási célokra használható javakat állítanak elő. (A fordított feltételezéssel nem élünk, más szektorok is állíthatnak elő beruházási javakat.) A beruházási szektorokra az i alsó index utal. A fennmaradó $n-m$ szektort (a fentiek értelmében pontatlanul) *nem-beruházási szektornak* nevezzük és h indexszel jelöljük. Formálisan:

$$j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

$$i \in \{1, 2, \ldots, m\}$$

$$h \in \{m+1, m+2, \ldots, n\}$$

A modell T számú időperiódusra (évre) terjed ki, az év sorszámát a t felső index jelöli. Folyam (flow) jellegű változó esetén t az egy esztendő alatt végbemenő folyamatra utal, állapot (stock) jellegű változó esetén pedig az év *elején* fennálló állapotra (készletre).

$$t \in \{1, 2, \ldots, T\}$$

Első számításainkban, $n = 12$, $m = 2$, $T = 18$ (néhányban $T = 15$) volt.

b) *Változók*

X = bruttó termék
Y = hozzáadott érték (GDP)
K = állóeszköz-állomány
I = bruttó beruházás (beruházás + pótlás)
S = forgóeszköz-készlet
C = fogyasztás
Q = termékfelesleg (+) vagy hiány (–)
U = állóeszköz-felesleg
V = forgóeszköz-felesleg.

Egyes speciális modellekben további változók is szerepelnek az egyszerűbb leírás kedvéért.

Az összes változók, a Q változót kivéve, értelmezésükből kifolyólag csak nemnegatív értéket vehetnek fel.

Ha a fenti változók alsó index nélkül szerepelnek, akkor az egész népgazdaságra összesített értéket képviselnek, j, i vagy h alsó indexszel ellátva pedig egy-egy szektort (bármelyiket, illetőleg egy beruházási vagy egy nem beruházási szektort). Tehát például I = a népgazdaság összes bruttó beruházása, I_h egy nem beruházási szektorba beruházott összeg. Természetesen nem minden változó jelenik meg mindkét (index nélküli és indexes) alakban. Például C és Y kizárólag „népgazdság összesen", tehát index nélküli alakban szerepel, K, X, U és Q kizárólag szektorváltozóként, azaz indexes alakban.

c) *Konstansok*

Itt csak az általános modellben szereplő konstansokat tüntetjük fel, a speciális modellek további konstansokat és paramétereket is tartalmaznak.

a_j = hozzáadott érték/termelés hányados, $\in (0,1)$
q_j = az állóeszközök ki nem selejtezett hányadosa, $\in (1,1)$
k_j = állóeszköz/termelés hányados
s_j = forgóeszköz/termelés hányados
d_j, $(\tilde{d}_h)$ = beruházás allokációs koefficiensek; a j szektor (h nem beruházási szektor) részesedési hányada az összes (a nem beruházási szektoroknak jutó összes) beruházásból. $\sum_j d_j = 1$, $\sum_h \tilde{d}_h = 1$.
b_{ij} = beruházási input koefficiens, a j szektornak jutó egységnyi beruházás igénye az i beruházási szektor termékéből, $\sum_i b_{ij} \leq 1$.

Ezek a konstansok az időben nem változatlanok, ezért mindannyian t felső indexet is viselnek. Értelemszerűen mindannyian nemnegatívak.

d) *Induló értékek*

K_j^1 = az induló állóalap-állomány (szektoronként)
S_j^1 = az induló forgóalap-állomány (szektoronként)
C^0 = a bázisév fogyasztása.

2.2. *A modell formális leírása*

Az általános modell leírásában eltekintünk a nem-negativitási feltételek vizsgálatától.

(1) $$Y^t = \sum_j a_j^t X_j^t.$$

Az egyenlet a hozzáadott érték előállítását írja le az egyes szektorok hozzájárulásának összegeként.

(2) $$K_j^{t+1} = q_j^t K_j^t + I_j^t.$$

Az egyes szektorok évvégi állóalapjának képződése az év eleji állóalap ki nem selejtezett részéből és az év folyamán végrehajtott beruházásból.

(3) $$Y^t = C^t + I^t + S^{t+1} - S^t$$

A GDP felosztás fogyasztásra, beruházásra és a forgóeszközök (készletek) változására.

(4) $$K_j^t = k_j^t X_j^t + U_j^t$$

(5) $$S_j^t = s_j^t X_j^t + V_j^t.$$

Az állóalapoknak, illetve a forgóeszközöknek a termelés volumenétől függően kihasznált, illetve felesleges része.

(6) $$C^t = C^t(C^0, C^1, \dots C^{t-1}, Y^t).$$

Szimbólikus kifejezés arra, hogy a fogyasztás az előző évek fogyasztásától és a folyó év nemzeti jövedelméltől függhet. A függvény alakja a különböző speciális modellekben más és más.

(7a) $$I_j^t = d_j^t I^t, \text{ vagy}$$

(7b) $$I_h^t = \tilde{d}_h^t \sum_h I_h^t.$$

Az összes beruházás, illetve a nem beruházási szektoroknak jutó beruházás allokációja a szektorok között. A kettősségre még visszatérünk.

(8) $$X_i^t = \sum_j b_{ij}^t I_j^t + Q_i^t.$$

Az egyes beruházási szektorok termékeinek felosztása a beruházók igényei szerint plusz a felesleg vagy hiány.

(9) $$S^t = \sum_j S_j^t$$

(10) $$I^t = \sum_j I_j^t \text{ (7b-vel kapcsolatban).}$$

Definíciós egyenletek. A definíciós egyenletek közül csak azokat tüntettük itt fel, amelyek az (1)–(8) egyenletekben szereplő változók között létesítenek kapcsolatot. A (10) típusú egyenletre csak a (7b) változat esetén van szüség, hiszen a (7a) változatban $I^t = \sum_j I_j^t$ következik abból, hogy $\sum_j d_j^t = 1$.

Az (1)–(10) rendszer változóinak és egyenleteinek száma a következő: Változók száma periódusonként:

X_j	n
Y	1
K_j	n
I, I_j	$n + 1$
S, S_j	$n + 1$
C	1
Q_i	m
U_j	n
V_j	n
Összesen	$6n + m + 4$

A változók összes száma tehát:

$$(6n + m + 4)\,T.$$

Jóllehet az induló K_j^1, S_j^1 értékek adottak, és a változók száma így 2 n-nel csökkentendő lenne, valójában ezeket helyettesítik az utolsó év záróállományaira vonatkozó K_j^{T+1}, S_j^{T+1} változók, így a fenti szám korrekt.

A független egyenletek száma évenként

(1)	1	
(2)	n	
(3)	1	
(4)	n	
(5)	n	
(6)	1	
(7a)	n	(7b) $n - m - 1$ ($\sum_h \widetilde{d}_h^t = 1$ miatt egy egyenlet redundáns)
(8)	m	
(9)	1	
(10)	—	1
Összesen	$4n + m + 4$	$4n + 4$

Összesen tehát, aszerint, hogy a (7a) vagy a (7b) változatot tekintjük-e,

$$(4n + m + 4)\,T,$$

illetőleg

$$(4n + 4)\,T$$

egyenletünk van.

Így tehát a rendszer szabadságfoka

$$2\,n\,T,$$

illetőleg

$$(2n + m)\,T.$$

A specifikált modellekben ezt a szabadságfokot ilyen vagy olyan módon csökkenteni fogjuk.

2.3. *A modell interpretálása és lehetséges általánosításai*

Az általános modell fent ismertetett formájának sajátosságai, amelyek más hasonló célt szolgáló modellektől megkülönböztetik, a következők:

a) *Ágazati kapcsolatok.* A modell nem tartalmazza a folyó ráfordítások ágazatközi kapcsolatait, folyó input-output egyenleteket. Az ágazatoknak a fogyasztást, készletváltozást és beruházást szolgáló outputjai (amelyek között itt nem teszünk különbséget) egyszerűen befolynak a népgazdaság egészére összesített „hozzáadott érték" kasszájába (1), és innen naturális összetételükre való tekintet nélkül osztatnak fel (3). A termelés folyó ráfordításait képviselő $\sum_j (1 - a_j) X_j$ összeg be sem lép az (1) és (3) egyenletek által alkotott GDP mérlegbe és csak a felhasználó szerint bontható fel, a kibocsátó szerint nem. Ezzel szemben a beruházási javak egy nagy részének (a beruházási szektorok által kibocsátott részének) ágazatközi áramlását a modell részletesen ábrázolja a (8) egyenletben. Az itt szereplő Q változók bármelyikének nem 0 értéke a beruházási piac parciális egyensúlytalanságát jelzi. Ezek az egyensúlytalanságok kiegyenlíthetik egymást a GDP mérlegben, akkor az egyensúlytalanság a beruházási szektorokra korlátozódik és (például) a beruházások anyagi összetételének módosításával megszüntethető. Ellenkező esetben azonban, ha a beruházási szektorok együttese globális hiányt vagy felesleget mutat, akkor, mivel a GDP mérleg egyensúlyát előírtuk, az egyensúlytalanság ellenkező előjellel a fogyasztási javak piacán is megjelenik vagy készletváltozásban csapódik le.

A modellnek fent leírt sajátossága azzal függ össze, hogy – a hosszútávú tervezés szolgálatában – a figyelmet a beruházások allokációjára koncentrálja.

b) *Beruházási politika.* Modellünk legsajátságosabb jellemzője az, ahogyan a beruházási politikát kezeljük a (7a) illetve (7b) egyenletekben, fix allokációs koefficiensek segítségével. Bár a koefficiensek periódusról periódusra változnak, de egy számításban adottak és meghatározzák azt az arányt, amelyben a (változóként kezelt) összes beruházás (7a), illetőleg a nem beruházási szektoroknak jutó beruházás (7b) megoszlik a kérdéses szektorok között. A beruházás allokációs koefficiensek egy együttesét úgy tekintjük, mint egy beruházási politika reprezentánsát és modellünk különböző lehetséges politikák hatását vizsgálja a gazdaság növekedési pályájára. Specifikált modelljeink részben abban különböznek egymástól, hogy az összes allokációs arányokat tekintjük-e fixnek (7a), vagy pedig csak a nem beruházási szektorok közötti allokáció arányait (7b). Az utóbbi esetben a beruházási szektorok beruházásai bizonyos fokig endogén módon határoztatnak meg nemcsak abszolút nagyságukban, hanem egymáshoz és a nem beruházási szektorok összes beruházásához mért arányukban is. Modellünk tehát, egy-egy számítás során, elfogad és vizsgál, de nem alakít ki beruházási politikát, legalábbis a nem beruházási szektorok közötti allokációt illetően. Egy sok számításból álló sorozat azonban, amelyekben különböző allokációs koefficiens-együttesek szerepelnek, lehetővé tesz bizonyos szelekciót az ezek által képviselt gazdaságpolitikák között.

Modellünknek fenti aspektusa az, ami a Feldman–Mahalanobis típusú modellekkel [2, 3] rokonítja, mégis azzal a szerintünk lényeges különbséggel, hogy az allokációs koefficiensek időbeli változatlanságát mi nem posztuláljuk.

c) *Fogyasztás.* A fogyasztási függvény (6) specifikálatlansága miatt itt még erről a kérdésről nem sokat tudunk mondani. Mégis kissé előreszaladva annyit elmondhatunk, hogy kezelésük a beruházási allokációk kezeléséhez igazodik. Olyan modellben, ahol az összes beruházásokat fix koefficiensekkel osztjuk szét, hasonló módon hasítjuk ki a fogyasztást is a GDP-ből, más modellben a fogyasztási pálya a maga egészében rögzített vagy pedig a modell választ a megengedett pályák egy seregéből. Végül is e tekintetben nem köteleztük el magunkat valamilyen jellegzetes elvhez és esetleges további modellváltozatok kidolgozása esetén szabadon választhatunk akár az alább szereplő változatok között, akár újabbakat kreálhatunk.

d) *A ráfordítások linearitása.* Egyenleteink a specifikálatlan (6) egyenlet kivételével valamennyien lineárisak és az alábbi specifikus modellekben ez a kivétel is eltűnik. A linearitásnak ez a feltételezése itt sokkal inkább kényelmességből és kevésbé kényszerből származik, mint más modelltípusoknál. Látni fogjuk, hogy a specifikált modellek közül kettőnek az algoritmusa nem követeli meg egyenletrendszerek szimultán megoldását, pusztán korábban kiszámított változó-értékeknek a szukcesszív helyettesítését. Ilyen esetekben elvileg semmiféle és számítástechnikailag is csak jelentéktelen hatása lenne annak, ha egyes összefüggéseket nemlineáris függvényekkel reprezentálnánk.

Ezt a lehetőséget elsősorban az (1), (4) és (5) egyenletek esetében lehetne kihasználni, tehát lényegében a ráfordításoknak a termelésssel való arányosságától szabadulhatnánk meg, akár a csökkenő, akár a növekvő hozamok irányában. Ez lenne az egyik út az itt szereplő általános modell további általánosítása felé. Mindez a könnyedség, amivel itt a kérdésről szóltunk, eltűnik, ha arra gondolunk, hogy milyen nehézségekkel jár a megfelelő típusú nemlineáris függvény kiválasztása és paramétereinek becslése, prognosztizálása. Elsősorban ennek tulajdonítható, hogy első, kísérleti számításaink során nemlineáris függvények beiktatására komolyan gondolni sem mertünk.

e) *Munkaerő.* A modellben a munkaerő nem szerepel. Ez a hiány semmiféle közgazdasági megfontolással nem támasztható alá, a munkaerőt mi is a hosszútávú tervezésben még erősen aggregált elemzés esetén is számításba veendő alapvető tényezőnek tekintjük; hiánya a modellnek gyermekbetegsége. Úgy véljük, hogy ha a modelltípus életképessége és használhatósága bebizonyosodik, akkor elsőrendű feladattá válik a hiány pótlása.

A munkaerőproblémának az általános modellbe való beépítésére több alternatív lehetőség kínálkozik, amelyekkel különböző típusú modelleket kapnánk:

A) A modell szerkezetét változatlanul hagyjuk csak kiegészítjük egy vagy több

$$L^t = \sum_j l_j^t X_j^t + H^t$$

alakú munkaerőmérleggel, ahol L^t a rendelkezésre álló munkaerő, l_j^t a j szektor fajlagos munkaerőigénye, H^t pedig a munkaerőfelesleg vagy hiány. Több mérleg esetén az egyes mérlegek a munkaerő különböző kategóriáira vonatkozhatnak. Ezzel, ha mást nem, regisztrálni és ellenőrizni tudjuk a beruházási politikának a munkaerőhelyzetre kifejtett hatását, de olyan specifikált modell is készíthető, amelyikben a munkaerőpiac egyensúlyát is kikötjük. Ez különösen az *LP* modellbe látszik könnyen beilleszthetőnek.

B) A gazdaságpolitikát nem a beruházásoknak, hanem a mindenkor rendelkezésre álló munkaerőnek az allokációs hányadai útján fejezzük ki. Ez esetben az egyes ágazatok állóeszköz (tehát beruházási) szükséglete a munkaerő elosztásának következménye. Egy ilyen modell inkább párja, semmint helyettesítője lehetne az itt leírt modellnek.

C) Míg az *A)* és *B)* esetekben az állóeszköz és a munka komplementer termelési tényezőként szerepelnek (mivel hogy a tőkekoefficiens fix értékei nem engednek meg technológiák közötti választást), egy más modelltípusban számításba vehető a közöttük fennálló technológiai helyettesítési viszony. Kutatócsoportunknak vannak bizonyos fenntartásai ezzel a felfogással, a neoklasszikus termelési függvények alkalmazásával szemben, de azért véglegesen még ezt a változatot sem vetettük el.

Végső soron az az igazság, hogy a munkaerő kezelésének mikéntjét az egyes speciális modellekben sem oldottuk még meg és így egyelőre nem ábrázolható a probléma az általános modell keretei között sem. (Az a körülmény, hogy az LP modell minden nehézség nélkül befogadná a munkaerőmérlegeket, a mi szemünkben nem oldja meg a problémát, hiszen mint majd kifejtjük, e modellnek csak kiegészítő, alárendelt szerepet szánunk.)

f) *Külkereskedelem.* Véleményünk szerint a külkereskedelem hosszútávú tervezésének problémái olyan mértékben elütnek az itt vizsgált kérdéskörtől, hogy azok csak speciálisan külkereskedelmi célra szerkesztett modell vagy modellek segítségével vizsgálhatók. Ezzel szemben igaz az, hogy Magyarországra külkereskedelmet figyelmen kívül hagyó és mégis reális eredményt adó modellt nehéz elképzelni. Ezért a későbbiek során meg kell majd vizsgálni, hogyan lehet a speciális külkereskedelmi modellekből nyert eredményeket a tervszondázás keretében felhasználni, a külkereskedelemnek a beruházási politikára való hatását számításba venni.

g) *Állóeszközök selejtezése.* A (2) egyenlet az állóeszközök selejtezését igen leegyszerűsítetten kezeli, feltételezve, hogy minden évben a meglevő állóeszközök egy meghatározott hányadát (bár évenként és szektoronként különböző hányadát) selejtezik ki. Még a linearitás fenntartása mellett is lehetőség volna a selejtezés finomabb kezelésére, figyelembe véve, például, az eszközök évjáratát és így összefüggést teremtve a selejtezés mértéke és a tőkekoefficiensek értéke között. Ilyen összefüggés kétségtelenül fennáll, de alig áll rendelkezésre statisztikai adat, amelyből számszerűsíthető lenne. Még az itt alkalmazott egyszerűsített kezelési mód mellett is csak közvetett és bizonytalan módon tudtuk becsülni a selejtezés tényadatait és semmiféle támpontunk nem volt a hosszútávú terv lehetséges „selejtezési politikáit" illetően, hogy azokat modellünkkel megvizsgálhattuk volna.

2.4. *Az általános modell specifikálása*

Az általános modell különböző specifikációinak két egymással ellentétes tendenciájuk van:

Először: a modellek különböznek egymástól abban, hogy miféle és milyen mértékű egyensúlytalanságot engednek meg. A modellek egymásutámja e tekintetben javuló tendenciát tükröz, egyre kisebb és ésszerűbb területre szorul a megengedett egyensúlytalanság. (Például beruházási javak hiánya is megengedett az elsőben, míg csupán termelési kapacitás feleslegek megengedettek az utolsóban.) Azt persze nem lehet garantálni, hogy egy a priori rögzített gazdaságpolitikához biztosan lehessen egyensúlyi pályát illeszteni.

Másodszor: az előbbivel párhuzamosan növekszik a modellek megoldásának munkaigényessége. Míg az első modell szukcesszív behelyettesítésekkel oldható meg és így nagyon könnyen nagyon sok pályát lehet kiszámítani, az utolsó már egy közepes méretű lineáris programozás elvégzését követeli. Mivel fő célunk pályák tömeges számítása, a terv lehetőségeinek szondázása volt, az utóbbi megoldás hátrányai nem lebecsülendők, még akkor sem, ha egyébként egy ilyen modell megoldása ma már számítástechnikai szempontból nem túl igényes feladat.

A továbbiakban három specifikált modellt mutatunk be:

A szekvenciális (SQ) modell. (3. fejezet)

A negatív visszacsatolásos (NV) modell. (5. fejezet)

A lineáris programozási (LP) modell. (6. fejezet)

Minden modell esetében először megmutatjuk kapcsolatát az általános modellel, majd taglaljuk megoldási módját és azt, hogy mit tud és mit nem. E modellek egy-egy megoldási elvet is reprezentálnak és az alábbi elvek szerint megoldható modellcsaládok egy-egy tagjának is tekinthetők:

1. Szukcesszív helyettesítések módszere. Itt az egyenletekből álló rendszer változóit meghatározott sorrend szerinti helyettesítésekkel egymásból számítjuk ki, egy számítás keretében a korábban kiszámított értékeket nem módosítjuk. Ezt az elvet képviseli az SQ modell.

2. Visszacsatolásos módszerek. Ezek hasonlítanak az előzőhöz abban, hogy a változók értékeit egymás után számítjuk ki, de különbözik abban, hogy az egyszer kiszámított értékeket más változók utóbb kiszámított értékeinek felhasználásával módosítjuk (az utóbbi értékek visszahatnak, visszacsatolódnak az előbbiekre). Így a megfelelő eljárások rekurziós lépéseket is tartalmaznak. Ilyen módszert alkalmazunk az NV modell megoldásánál.

3. Egyenletrendszerek szimultán megoldása. Ez esetben a változóknak egy – adott egyenleteket és más (pl. nem-negativitási) feltételeket kielégítő – értékrendszerét egyidejűleg kapjuk meg. A feladat megoldásának csak egyik – de lineáris rendszer esetén jól járható – útja a matematikai programozási (optimálási) feladat formájában való felírás. Ezt tesszük az LP modell esetében.

3. A szekvenciális (SQ) modell

3.1. *Specifikációk*

A szekvenciális (SQ) modell a pályaelemeket, azaz a változók évről-évre felvett értékeit az időben előre haladva egymásután számítja ki. Hogy ez az eljárás alkalmazható legyen, a rendszer szabadságfokát lényegesen csökkentenünk kell. Ezenkívül specifikálnunk kell a C^t fogyasztási függvényt (6) és döntenünk kell arról, hogy a (7a) vagy a (7b) allokációs formulát alkalmazzuk-e.

Specifikációink a következők:

a) $U_j^t = V_j^t = 0$ minden j-re és $t \neq 1$-re.

Azaz a második évtől kezdődően nem engedünk meg egyik szektorban sem felesleges állóeszközt, vagy forgóeszközt, ezek állományát az első év végére összhangba hozzuk, lényegében úgy, hogy a forgóeszközök állományát az egyensúlyi szintre emeljük vagy csökkentjük.

b) $U_j^1 \cdot V_j^1 = 0$ minden j-re.

Az első évben minden ágazatban megengedünk vagy kihasználatlan állóeszközöket, vagy forgóeszközöket, de csak az egyiket. Az első év termelése a szektor vonatkozásában szűkebb keresztmetszethez igazodik. Mivel az induló álló- és forgóeszközöket adottságkként örököltük, nem tételezhetjük fel, hogy ezek összhangban vannak, csak azt, hogy nincsenek túlságosan távol és egy év alatt összhangba hozhatók.

c) $C^t = c^t Y^t$

ahol $c^t \in (0,1)$ adott, a gazdaságpolitikai koncepciót kifejező arányossági tényező, a GDP fogyasztási célra szolgáló hányada. A fogyasztási függvénynek az az alakja bizonyos uniformizálási törekvésből származott. ,,Ha a beruházási politikát allokációs *hányadokkal* fejeztük ki, jellemezzük hányad alakjában a GDP allokációját is fogyasztásra és felhalmozásra". Ezt a felfogást ma már nem valljuk és helyesebbnek tartjuk például azt is, ha a fogyasztási politikát a fogyasztás növekedési rátájának előírásával reprezentáljuk, mondjuk

$$C^t = g^t C^{t-1}$$

alakban. Ez azt jelenti, hogy eleve rögzített fogyasztási pályával dolgozunk. A modell megoldási módját ez a módosítás lényegében nem érintené.

d) A (7a) beruházás-allokációs formulát alkalmazzuk.

e) A beruházási piac egyensúlytalanságát ($Q_j \neq 0$) csak regisztráljuk, de konzekvenciáit nem érvényesítjük.

3.2. *Az SQ modell leírása*

A modell leírásában a teljesség kedvéért megismételjük az általános modellből változatlanul átvett egyenleteket és ezekhez nem fűzünk megjegyzést.

(1) $$Y^t = \sum_j a_j^t X_j^t$$

(2) $$K_j^{t+1} = q_j^t K_j^t + I_j^t$$

(3) $$Y^t = C^t + I^t + S^{t+1} - S^t$$

(4) $$K_j^t = k_j^t X_j^t \quad t \neq 1$$

(5) $$S_j^t = s_j^t X_j^t \quad t \neq 1$$

(4) és (5) megfelelnek az (a) specifikációnak.

($4^1 - 5^1$) $$X_j^1 = \min\left\{\frac{K_j^1}{k_j^1}, \frac{S_j^1}{s_j^1}\right\}.$$

Megfelel a (b) specifikációnak.

(6) $$C^t = c^t Y^t.$$

A (c) specifikáció szerint.

(7) $$I_j^t = d_j^t I^t.$$

Lásd (d).

(8) $$Q_i^t = X_i^t - \sum_j b_{ij}^t I_j^t.$$

Lásd (e).

(9) $$S^t = \sum_j S_j^t.$$

A nem-negativitási feltételekkel majd a 3.4. pontban foglalkozunk.

3.3. *A modell megoldása*

Az SQ modell megoldása nem áll egyébből, mint az (1)–(9) egyenletek megfelelő sorrendben való elhelyezéséből és a (3) és (5) egyenleteknek némi, helyettesítések útján végrehajtott átalakításából. Az azonosítás könnyebbsége érdekében az egyenletek számozását megőriztük.

A t-edik periódusra vonatkozó számítás kezdetén rendelkezésre állnak a nyitó állóeszköz- és forgóeszköz-állományok, K_j^t és S_j^t szektoronként.

$$(4^1-5^1) \qquad X_j^1 = \min\left\{\frac{K_j^1}{k_j^1}, \frac{S_j^1}{s_j^1}\right\}$$

$$(4) \qquad X_j^t = \frac{K_j^t}{k_j^t} \qquad t \neq 1$$

$$(1) \qquad Y^t = \sum_j a_j^t X_j^t$$

$$(6) \qquad C^t = c^t Y^t$$

$$(9) \qquad S^t = \sum_j S_j^t$$

$$(3^*) \qquad I^t = \frac{Y^t - C^t + S^t - \sum\limits_j \frac{q_j^t s_j^{t+1}}{k_j^{t+1}} K_j^t}{1 + \sum\limits_j \frac{d_j^t s_j^{t+1}}{k_j^{t+1}}}$$

$$(7) \qquad I_j^t = d_j^t I^t$$

$$(8) \qquad Q_i^t = X_i^t - \sum_j b_{ij}^t I_j^t$$

$$(2) \qquad K_j^{t+1} = q_j^t K_j^t + I_j^t$$

$$(5^*) \qquad S_j^{t+1} = \frac{s_j^{t+1}}{k_j^{t+1}} K_j^{t+1}$$

Ezután kezdődik a $t+1$ periódus számítása.

Ezekután könnyen belátható az alábbi állítások igazsága:

I. A fenti számítási eljárás minden lépése végrehajtható és megadja a a rendszer minden változójának értékét $t = 1$-től T-ig.

II. Az így kiszámított értékek kielégítik az eredeti (1)—(9) egyenletrendszert minden t-re.

III. Az (1)—(9) egyenletrendszernek van megoldása.

Bizonyítás.

I. A k_j (és az s_j^1) koefficiensek értelemszerűen pozitív és a d_j hányadok hasonlóképpen nemnegatív értékei mellett 0-val való osztást sehol sem írtunk elő. Így a számítás végrehajtható és az összes változók értékeit rendre megkapjuk.

II. A számításban használt egyenletek a (3) és az (5) kivételével megegyeznek a modell egyenleteivel. Így csak ezek kielégítettségét kell bizonyítanunk. Először (5)-ét: (4)-ből $K_j^{t+1} = k_j^{t+1} X_j^{t+1}$ minden t-re, tehát (5*)-ból $S_j^{t+1} =$ $= s_j^{t+1} X_j^{t+1}$, azaz (5) áll minden $t \neq 1$-re.

Lássuk most (3)-at:
(3*)-ból

$$I^t + \sum_j \frac{d_j^t I^t s_j^{t+1}}{k_j^{t+1}} = Y^t - C^t + S^t - \sum_j \frac{q_j^t s_j^{t+1}}{k_j^{t+1}} K_j^t$$

(7) szerint helyettesítve és átrendezve:

$$I^t = Y^t - C^t + S^t - \sum \frac{s_j^{t+1}}{k_j^{t+1}} (q_j^t K_j^t + I_j^t).$$

Tehát (2) és (5*) figyelembevételével

$$I^t = Y^t - C^t + S^t - \sum_j S_j^{t+1}$$

ami (9) alapján és átrendezve (3)-at adja.

III. Következik az I. és a II. állításból.

A fentiekből az is látható (anélkül, hogy meg kellene számolnunk a változókat és egyenleteket), hogy rendszerünk szabadságfoka 0.

3.4. *A nemnegativitási feltételek*

A modell megoldásának menetéből látható, hogy ha a (3*) alapján kiszámított I^t nemnegatív minden t-re, akkor ez a kiinduló K_j^1, S_j^1 értékek és a koefficiensek értelemszerű nemnegativitásával együtt garantálja, hogy az összes többi változók is (eltekintve az előjelben nem korlátozott Q_i változóktól) nemnegatív értékeket vegyenek fel. Megmutatjuk, hogy I^t nem negativitása a koefficiensekre vonatkozó nagyon plauzibilis feltevések mellett teljesül. Ugyanis (3*) szerint I^t nem negatív, ha

$$Y^t - C^t + S^t - \sum_j \frac{q_j^t s_j^{t+1}}{k_j^{t+1}} K_j^t \geq 0$$

C^t értékét (6) szerint, majd Y^t-ét (1) szerint, továbbá S^t-ét (9) és (5) szerint, K_j^t-ét (4) szerint helyettesítve

$$\sum_j (1 - c_j^t) a_j^t X_j^t + \sum_j s_j^t X_j^t - \sum_j \frac{q_j^t s_j^{t+1} k_j^t}{k_j^{t+1}} X_j^t \geq 0, \quad (t \neq 1).$$

Ha minden j-re áll

$$(+) \qquad (1 - c_j^t) a_j^t + s_j^t - \frac{q_j^t s_j^{t+1} k_j^t}{k_j^{t+1}} \geq 0 \quad (t \neq 1)$$

akkor a fortiori áll a fenti egyenlőtlenség.

Feltételezve, hogy

$$\frac{s_j^t}{k_j^t} \approx \frac{s_j^{t+1}}{k_j^{t+1}} \quad (t \neq 1)$$

azaz az álló- és a forgóeszköz-hányadosok aránya egyik évről a másikra nem változik túl drasztikusan (és az egy nagyon plauzibilis feltevés), akkor

$$s_j^t - \frac{q_j^t s_j^{t+1} k_j^t}{k_j^{t+1}} \approx (1 - q_j^t) s_j^t > 0, \quad (t \neq 1)$$

és a (+)-szal jelzett egyenlet baloldala két pozitív szám összegére bomlott, hiszen $c^t < 1, q_j^t < 1$. Ezzel beláttuk, hogy I^t minden bizonnyal nem negatív, minden $t \geq 2$-re. $t = 1$-re hasonlóképpen kézenfekvően teljesülő feltevés adható meg, de ennek részletezését mellőzzük.

Ezzel tulajdonképpen megindokoltuk, hogy a nemnegativitási feltételeket miért hagyhattuk mindvégig figyelmen kívül.

4. Korrekciós eljárás az SQ modellhez

Az [1] cikkben ismertetett és elemzett valamennyi pályát az SQ modellel számítottuk. A pályák nagy részénél a beruházási piacon meglehetősen nagy egyensúlytalanság uralkodott — azaz a Q_i változók értéke jelentősen különbözött 0-tól —, az eltérés azonban az egyes beruházási szektorokban ellenkező előjelű volt; az egyik szektorban majdnem minden évben termékhiány, a másikban termékfelesleg lépett fel. Nyilvánvaló, hogy ilyen esetekben a beruházási eszközöknek az átcsoportosítása a termékfelesleggel rendelkező ágazatból a termékhiánnyal küszködőbe, javíthatja mindkettő egyensúlyát. Ez vezetett az alábbi korrekciós eljárás kidolgozásához, amelynél igyekeztünk az SQ eljárás egyszerűségét megtartani és ezért a kérdést heurisztikus úton közelítettük meg.

A korrekció a beruházási szektorok d_i^t allokációs hányadainak módosítására irányul. A nem beruházási szektorok d_h^t allokációs hányadainak egymás közötti arányait érintetlenül hagyjuk, ezzel elérjük, hogy a módosított pálya lényegében ugyanazt a beruházási politikát reprezentálja, mint az eredeti, legalábbis a nem beruházási szektorok irányában. A nem beruházási szektorok és a beruházási szektorok együttese közötti allokációs arány is változhat eközben a beruházási szektorok allokációs hányadainak módosulása következtében.

Tegyük fel, hogy a beruházási szektorok d_i^t allokációs hányadait

$$d_i^{t*} = d_i^t + \delta_i^t$$

-re változtattuk, ahol feltesszük, hogy $\delta_i^t \in (-d_i^t, 1 - d_i^t)$. Ekkor a nem beruházási szektorok d_h^t allokációs hányadait

$$d_h^{t*} = d_h^t \frac{1 - \sum\limits_i d_i^{t*}}{\sum\limits_h d_h^t}$$

re kell változtatnuk. Így ugyanis

$$d_h^{t*} : d_{h'}^{t*} = d_h^t : d_{h'}^t$$

és

$$\sum_j d_j^{t*} = \sum_i d_i^{t*} + \frac{1 - \sum\limits_i d_i^{t*}}{\sum\limits_h d_h^t} \sum_h d_h^t = 1.$$

Ily módon — ha a δ_i^t korrekciós tagokat helyesen állapítottuk meg — újra alkalmazhatjuk az SQ módszert mostmár a d_j^{t*} korrigált allokációs hányadokkal számolva. Így a korrigált pálya közelebb kerülhet az egyensúlyi állapothoz a beruházási javak piacán anélkül, hogy az eredeti koncepciót lényegesen módosítottuk volna. A kérdés tehát az, hogyan határozzuk meg a δ_i^t korrekciókat. Ehhez a következő pontatlanul közelítő gondolatmenettel juthatunk el.

Tegyük fel, hogy az i-edik beruházási szektorban a $t+1$-edik évben P_i^{t+1} mennyiséggel akarjuk a termékfelesleget csökkenteni. Ehhez $k_i^{t+1}\,P_i^{t+1}$-gyel kell csökkenteni a szektor éveleji állóeszköz állományát, azaz durván ugyanennyivel az előző t-edik évben a kérdéses szektorba beruházott összeget. A δ_i^t korrekció a t-edik évben $\delta_i^t\,I^t$-vel módosítja a szektor beruházását. E kettőt egyenlővé téve és figyelembe véve, hogy δ_i^t-nak termékfelesleg esetén negatívnak, termékhiány esetén pozitívnak kell lennie, azt kapjuk, hogy

$$\delta_i^t I^t = -k_i^{t+1} P_i^{t+1},$$

azaz

$$\delta_i^t = \frac{-k_i^{t+1}\,P_i^{t+1}}{I^t}.$$

A P_i^t-k meghatározásához két szempontot kell figyelembe vennünk. Először is, ha egy évben a szektornak jutó beruházást csökkentettük, akkor – minden egyebet változtatlanul hagyva – ez az akció nem csak a közvetlenül utána következő év, hanem valamennyi későbbi év termelőkapacitását is csökkenti, módosítja a következő évek termékhiányait és feleslegeit is. Tehát ha az $1, 2, \ldots, t$ években $P_i^1, P_i^2, \ldots, P_i^t$ korrekciókat vettünk számításba, akkor a $t+1$-edik évben már csak (újból durván közelítve) $Q_i^{t+1} - \sum_{\tau=1}^{t} P_i^\tau$ termékfeleslegünk (hiányunk) lesz az i szektorban. Másodszor: mindezek a számítások csak durván közelítik a valóságos hatásokat, hiszen nem vettük tekintetbe, hogy a beruházási szektorok közötti allokáció megváltoztatása nemcsak a kibocsátásokat, hanem a beruházási javak keresletét is módosítja, hogy megváltozik a kiselejtezett állóeszközök mennyisége stb. Ezért helytelen lenne a $Q_i^{t+1} - \sum_{\tau=1}^{t} P_i^\tau$ mennyiséget teljes egészében korrigálandónak tekinteni, hiszen így az elhanyagolások miatt a feleslegből hiányba, a hiányból feleslegbe ugrándozhatunk. A hatás csillapítása végett mindig csak az így közelített mennyiség felét vesszük számításba, azaz

$$P_i^{t+1} = \frac{1}{2}\,(Q_i^{t+1} - \sum_{\tau=1}^{t} P_i^\tau).$$

Végül pedig az első év hiányait, illetve feleslegeit ezen az úton nem lehet korrigálni, hiszen múltbeli beruházásokat nem tudunk reallokálni.

A fenti gondolatmenet tehát a következő számítássorozathoz vezet:

$$P_i^1 = 0$$

$$P_i^{t+1} = \frac{1}{2}\,(Q_i^{t+1} - \sum_{\tau=1}^{t} P_i^\tau)$$

$$\delta_i^t = -\frac{k_i^{t+1}\,P_i^{t+1}}{I^t}$$

$$d_i^{t*} = d_i^t + \delta_i^t$$

$$d_h^t{}^* = d_h^t\,\frac{1 - \sum_i d_i^{t*}}{\sum_h d_h^t}.$$

Bármily primitív is ez a korrekciós eljárás, a kísérleti számítás során meglepően hatékonynak bizonyult. Egyszeri alkalmazása egy meglehetősen egyensúlytalan pálya feleslegeit és hiányait töredékükre csökkentette.

A korrekciós eljárás hátránya, hogy utólag, a pálya kiszámítása után külön munkamenetben kell végrehajtani, nem pedig a pályaszámítás keretében, automatikusan. Ez a felismerés egy új modellváltozat kidolgozásához vezetett.

5. A negatív visszacsatolásos (NV) modell

5.1. *Specifikációk*

Az NV modell nagyon hasonlít az SQ modellhez, néhány specifikációjában mégis különbözik tőle. Magában a modellben a lényeges eltérés az, hogy amíg az SQ modellben az egyensúlyhiány a beruházási szektorok termékfeleslegeként vagy hiányaként csapódott le, itt biztosítjuk a beruházási termékmérlegek egyensúlyát, ezzel szemben megengedjük, hogy a beruházási szektorokban bizonyos korlátozott mértékű kihasználatlan kapacitások legyenek állóeszközökben. Ezt általában nem lehet egy csapásra elérni, ha valamelyik évben valamelyik beruházási szektorban állóeszközhiány vagy a megengedettnél nagyobb mértékű felesleg mutatkozik, akkor vissza kell térni az előző évhez és ott a beruházásokat újra allokálni. Ez az időbeni visszatérés az, amit a szabályozáselmélet nyelvéből kölcsönözve negatív visszacsatolásnak nevezhetünk. Hiszen itt a t-edik év outputját (információs értelemben) felhasználjuk arra, hogy segítségével a $t-1$-edik év információs inputját módosítsuk; a reálfolyamat szabályozása végett a lemért értékeket transzformáljuk és visszacsatoljuk. A visszacsatolás negatív, hiszen kapacitástöbblet $(+)$ esetén a múltbeli beruházást csökkentjük $(-)$, hiány $(-)$ esetén növeljük $(+)$.

Egy szabályosan működő visszacsatolásos rendszer kiépítése végett valójában nem csak az előző évhez, hanem az előző évekhez is vissza kellene térni, hiszen ha a t-edik év egyensúlyzavarának kiküszöbölésére a $t-1$ évben a beruházásokat reallokáljuk, akkor ezzel elronthatjuk a $t-1$ évnek korábban létrehozott egyensúlyát, ennek korrigálására vissza kell térnünk a $t-2$-edik évhez és így tovább. Ez így igen hosszadalmas eljárás lenne, amelyik végülis nem biztos, hogy sikerhez vezetne, hiszen az időben nem haladhatunk korlátlanul visszafelé. Ezért a sok lépcsős visszacsatolás helyett csak egy lépcsős visszacsatolást alkalmazunk, abban a reményben, hogy az egyszer létrehozott egyensúlyt a további évek korrekciói csak olyan kismértékben zavarják, hogy a kapacitásfeleslegek még mindig a megengedett tűrési határok között maradnak (és a kapott pálya ebben az értelemben egyensúlyi) vagy a határokat csak kis mértékben lépik túl. Ebből a szempontból elsősorban az alsó határ átlépésének, azaz kapacitáshiány fellépésének van jelentősége, elméletileg ilyen visszahatás is előfordulhat. Ennek valószínűségét úgy csökkentjük, hogy az egylépéses visszacsatolás során némi fölös kapacitást hozunk létre, hogy a későbbi korrekciók ennek terhére végrehajthatók legyenek.

Az így megfogalmazott modellre és megoldási módszerére csak nagyon gyenge (matematikailag pontos) állításokat lehetne bizonyítani. Ezért helyesebb, ha ezt az eljárást is heurisztikusnak tekintjük.

Specifikációink (az általános modellhez képest) a következők:

a) $U_h^t = V_h^t = 0$, ha $t \neq 1$, $U_h^1 \cdot V_h^1 = 0$, azaz nem engedünk meg sem felesleges állóeszköz-, sem forgóeszköz-készleteket a nem-beruházási szektorokban, kivéve az első évet, amikor legfeljebb egyikük pozitív lehet.

b) $Q_i = 0$

azaz a beruházási szektorokban sem termékfelesleg, sem hiány nem lehet.

c) A beruházási szektorokban a forgóeszközöket nem a termeléshez, hanem az állóeszközökhöz igazítjuk. Tehát, ha állóeszközökben bizonyos felesleg van egy beruházási szektorban, ott ugyanilyen arányú felesleg lesz forgóeszközökben is. Így a nem beruházási szektorokban *a)* miatt amúgyis érvényes:

$$S_i^{t+1} = \frac{s_i^{t+1}}{k_i^{t+1}} K_i^{t+1}$$

egyenletet alkalmazzuk a beruházási szektorokra is.

d) $C^t = \bar{C}^t$ adott

Lásd a 3.1. szakasz *c)* bekezdésében foglaltakat.

e) Váltogatva alkalmazzuk a (7a) és (7b) allokációs formulákat, úgy hogy

$$\tilde{d}_h^t = \frac{d_h^t}{\sum\limits_h d_h^t}$$

Ez annyit jelent, hogy a modell megoldása során a d_h^t eredeti allokációs hányadokból indulunk ki, majd a beruházási szektoroknak jutó beruházást ehhez képest, ha szükséges, módosítjuk és a nem-beruházási szektorok részére megmaradó beruházási összeget a $\tilde{d}_h^t$ koefficiensekkel, tehát az eredetivel azonos arányban osztjuk szét.

5.2. *Az NV modell*

Bevezetjük a következőképpen definiált új J változót

$$J = \sum_h I_h$$

azaz J a nem beruházási szektoroknak jutó beruházások összege.

Bevezetjük továbbá az α paramétert (tűrési határt), amely egy önkényesen megállapított szám, $\alpha \in (0,1)$, közel 1-hez. Ennek feladata a beruházási szektorok eszközfeleslegeinek korlátozása. Pl. ha $\alpha = 0,9$, akkor 10% kapacitásfelesleget tekintünk megengedettnek.

Végül bevezetjük az $\bar{U}_i$ változókat az

$$\bar{U}_i^t = k_i^t X_i^t - \alpha K_i^t$$

definicióval. Azaz $\bar{U}_i^t$ azt mutatja meg, hogy az állóeszközök tényleges kihasználtsága mennyivel haladja meg a megengedett minimális kihasználtságot. E változó nem-negativitása jelzi, hogy nem léptük át a kihasználatlanságra előírt határt.

A modell egyenletei ezúttal is az általános modell 2.2. szakaszbeli számozását viselik.

(1) $$Y^t = \sum_j a_j^t X_j^t$$

(2) $$K_j^{t+1} = q_j^t K_j^t + I_j^t$$

(3) $$Y^t = C^t + I^t + S^{t+1} - S^t$$

(4_i) $$K_i^t = k_i^t X_i^t + U_i^t$$

(4_h) $$K_h^t = k_h^t X_h^t \quad t \neq 1$$

(4_h^1—5_h^1) $$X_h^1 = \min\left\{\frac{K_h^1}{k_h^1}, \frac{S_h^1}{s_h^1}\right\}.$$

A (4_i), (4_h), (4_h^1—5_h^1) egyenleteket illetően lásd az *a)* specifikációt.

(5) $$S_j^t = \frac{s_j^t}{k_j^t} K_j^t \quad t \neq 1 .$$

Lásd a *c)* specifikációt.

(6) $$C^t = \bar{C}^t .$$

Lásd a *d)* specifikációt.

(7) $$I_h^t = \tilde{d}_h^t J^t$$

Lásd *a)*.

(8) $$X_i^t = \sum_j b_{ij}^t I^t$$

Lásd *b)*.

(9) $$S^t = \sum_j S_j^t$$

(10) $$I^t = \sum_i I_i^t + J^t$$

(11) $$\bar{U}_i^t = k_i^t X_i^t - \alpha K_i^t$$

Pótlólagos egyenlet az $\bar{U}_i^t$ definíciója értelmében.

Nem negativitási feltételek:

(12) $$I_i^t \geq 0,\ J^t \geq 0,\ U_i^t \geq 0,\ \bar{U}_i^t \geq 0.$$

E feltételek kielégítettsége esetén a többi változók nem-negativitása természetszerűleg adódik. K_j-é (2)-ből, X_i-é (7) és (8)-ból, X_h-é (4_h)-ból stb.

A rendszer szabadságfoka mT.

5.3. *A modell megoldása*

Az NV modell megoldásának gondolatmenete a következő. Először az SQ modell megoldásának mintájára, tehát szukcesszív behelyettesítésekkel és az eredeti d_j^t allokációs koefficiensek alkalmazásával kiszámítjuk a pályaelemeket (a változók értékeit) két egymást követő évre, a másodikra csak addig, amíg kiderül, hogy U_i^t illetve $\bar{U}_i^t$ nem negatív-e valamilyen i-re. Ha nem, akkor haladunk tovább, ha igen, akkor visszatérünk az utolsó előtti évre, célszerűen módosítjuk a beruházási szektoroknak jutó beruházást, a maradékot a $\tilde{d}_h^t$ arányokban szétosztjuk a nem beruházási szektorok között és újból ellenőrizzük, hogy U_i^t, $\bar{U}_i^t$ nem negatívok-e. A két egymást követő év ezen egyeztetését addig folytatjuk, míg minden U_i^t, $\bar{U}_i^t$ nemnegatívvá (valójában pozitívvá) válik és akkor tovább megyünk.

A t-edik szakasz számításának kezdetén rendelkezésünkre áll K_j^t, S_j^t minden t-re.

1. lépés. Végezzük el a következő számításokat:

$$X_h^1 = \min\left\{\frac{K_h^1}{k_h^1}, \frac{S_h^1}{s_h^1}\right\} \tag{$4_h^1-5_h^1$}$$

$$X_h^t = \frac{K_h^t}{k_h^t} \qquad t \neq 1 \tag{4_h}$$

$$S^t = \sum_j S_j^t \tag{9}$$

$$I^t = \frac{\sum_h a_h^t X_h^t + S^t - \bar{C}^t - \sum_j \frac{s_j^{t+1} q_j^t}{k_j^{t+1}} K_j^t}{1 + \sum_j \frac{s_j^{t+1} d_j^t}{k_j^{t+1}} - \sum_i a_i^t \sum_j b_{ij}^t d_j^t} \tag{3*}$$

$$I_j^t = d_j^t I^t \tag{7a}$$

Menj a 2. lépésre.

2. lépés

$$X_i^t = \sum_j b_{ij}^t I_j^t \tag{8}$$

$$Y^t = \sum_j a_j^t X_j^t. \tag{1}$$

Menj a 3. lépésre, vagy ha 3-ról tértél vissza, a 4. lépésre.

3. lépés

$$K_j^{t+1} = q_j^t K_j^t + I_j^t \tag{2}$$

$$S_j^{t+1} = \frac{s_j^{t+1}}{k_j^{t+1}} K_j^{t+1} \tag{5}$$

Ha $t = T$, állj. Egyébként tegyél t helyett $t+1$-et és menj az 1. lépésre. A 2. lépés befejeztével menj a 4. lépésre.

4. lépés

$$U_i^{t+1} = K_i^{t+1} - k_i^{t+1} X_i^{t+1} \tag{4_i}$$

$$\bar{U}_i^{t+1} = k_i^{t+1} X_i^{t+1} - \alpha K_i^{t+1} \tag{11}$$

(A) Ha $U_i^{t+1} \geq 0$ és $\overline{U}_i^{t+1} \geq 0$ minden i-re, akkor rögzítsd a t évre kiszámított változó-értékeket és folytasd a $(t+1)$-edik év számítását a **3.** lépéssel.
(B) Ellenkező esetben térj át az 5. lépésre.

5. lépés

$$(*) \qquad I_i^{t*} = \max\left\{I_i^t + \frac{1}{2}(\overline{U}_i^{t+1} - U_i^{t+1}),\ 0\right\}$$

$$(3^{**}) \qquad J^t = \frac{\sum_h a_h^t X_h^t + S^t - \overline{C}^t - \sum_j \frac{s_j^{t+1} q_j^t}{k_j^{t+1}} K_j^t - \sum_i \left(1 + \frac{s_i^{t+1}}{k_i^{t+1}} - \sum_{\nu=1}^{m} a_\nu b_{\nu i}\right) I_i^{t*}}{1 + \sum_h \frac{s_h^{t+1} \widetilde{d}_h^t}{k_h^{t+1}} - \sum_i a_i^t \sum_h b_{ih}^t \widetilde{d}^t}$$

$$(7b) \qquad I_h^{t*} = \widetilde{d}_h^t J^t$$

$$(10) \qquad I^{t*} = \sum_i I_i^{t*} + J^t.$$

Menj a 2. lépésre I_j^{t*}-ot téve I_j^t helyébe.
A számítás blokkdiagrammja a következő: (lásd 1. ábra)

5.4. *Az eljárás heurisztikus vizsgálata*

Ahhoz, hogy az eljárás helyességét teljesen bebizonyítsuk, a következőket kellene bizonyítanunk:

I. Az eljárás minden lépése végrehajtható.
II. Mind az

1 — 2 — 3 — 1 — 2 — (4) — 3,

Mind az

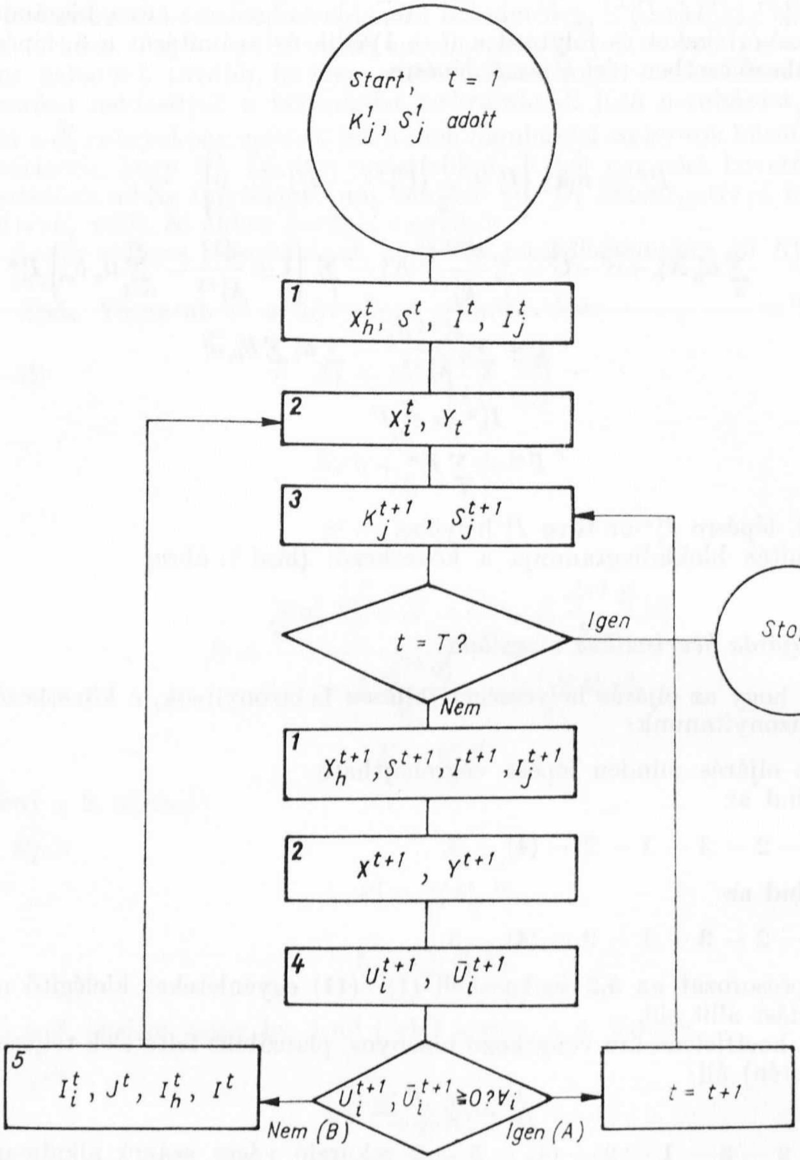
1 — 2 — 3 — 1 — 2 — (4) — 5

lépéssorozat az 5.2 szakaszbeli (1)—(11) egyenleteket kielégítő megoldást állít elő.
III. (A koefficiensekre vonatkozó bizonyos, plauzibilis feltételek teljesülése esetén) áll:

$$I_i^t \geq 0, \quad J^t \geq 0.$$

IV. A 2 — 3 — 1 — 2 — (4) — 5 — 2 rekurzió véges számú alkalmazása után $U_i^t \geq 0$, $\overline{U}_i^t \geq 0$ minden i-re. Tehát az egész eljárás véges.
V. Az egy lépéses visszacsatolás alkalmazása, tehát az, hogy az 5—2 lépés-sorozat után csak az U_i^{t+1}, $\overline{U}_i^{t+1}$ nem negativitását ellenőrizzük, de az ugyancsak megváltozott U_i^t, $\overline{U}_i^t$-ket már nem, csak kis mértékben torzíthatja el az egyszer már létrehozott egyensúlyt.

Plauzibilisan belátható, hogy adott koefficiens együttes és tetszőleges fogyasztási pálya mellett a fenti I—V. állítások nem lehetnek mind igazak, hiszen ez azt jelentené, hogy bármilyen beruházási politika mellett tetszőlegesen sokat fogyaszthatunk.



1. ábra

Vizsgáljuk meg ezért, hogy az I–V. állítások közül melyek azok, amelyeknek érvényessége legalább heurisztikusan belátható és melyek azok, amelyeknek nem teljesülése az eljárás kudarcára utal. (Az eljárás kudarca alatt itt azt értjük, hogy nem találunk az (1)–(12) feltételeket kielégítő pályát, és nem tudjuk eldönteni, hogy azért nem találtunk-e, mert nincs, azaz a vizsgált gazdaságpolitika inkonzisztens, vagy pedig azért, mert ez az eljárás nem képes az egyébként létező megengedett pályát felderíteni.)

I. Az eljárás csak akkor akad el, ha a (3*) vagy a (3**) formulák alkalmazásakor a jobboldali tört nevezője 0-vá válik. Ez az értelmezhető tartományból véletlenszerűen választott koefficiensek esetén 0 valószínűségű esemény, amely éppen ezért gyakorlatilag nem fordul elő.

II. Ez az állítás igaz és ugyanolyan módon bizonyítható (behelyettesítésekkel és elemi átalakításokkal) mint ahogyan a 3.3. szakaszban bizonyítottuk az ottani II. állítást. A hosszadalmas helyettesítgetést itt nem végezzük el.

III. Ez az állítás általában nem igaz. Előfordulhat, hogy a (3*) formula alkalmazásakor $I^t < 0$ vagy a (3**) alkalmazásakor $J^t < 0$ értéket kapunk. Ezt arra vonatkozó jelzésnek tekinthetjük, hogy *esetleg* nincs is az (1)—(12) feltételeket kielégítő pálya. A kérdés eldöntésére más módszert (lásd az 5. fejezetet) kell alkalmaznunk.

IV. Heurisztikusan belátható, hogy a rekurzív lépést valószínűleg csak egyszer kell végrehajtani. Ugyanis, ha első közelítésben eltekintünk attól, hogy a rekurzió következtében a beruházási szektorok termelése X_i^t megváltozik (X_h^t a lépések során változatlan marad), akkor ha $I_i^{t*} \neq 0$:

$$K_i^{t+1*} = q_i^t K_i^t + I_i^{t*} = q_i^t K_i^t + I_i^t + \frac{1}{2}[\overline{U}_i^{t+1} - U_i^{t+1}] =$$

$$= K_i^{t+1} + \frac{1}{2}[\overline{U}_i^{t+1} - U_i^{t+1}] = k_i^{t+1} X_i^{t+1} + \frac{1-\alpha}{2} K_i^{t+1}.$$

Tehát

$$U_i^{t+1,*} \approx K_i^{t+1,*} - k_i^{t+1} X_i^{t+1} = \frac{1-\alpha}{2} K_i^{t+1} > 0$$

és

$$\overline{U}_i^{t+1,*} \approx k_i^{t+1} X_i^{t+1} - \alpha K_i^{t+1,*} = (1-\alpha)\left[k_i^{t+1} X_i^{t+1} - \frac{\alpha}{2} K_i^{t+1}\right].$$

Feltevéseink mellett $\overline{U}_i^{t+1,*}$ csak abban az esetben maradna negatív, ha a rekurzió végrehajtása előtt a kapacitás kihasználtsága 50%-nál is alacsonyabb lett volna. Egyrészt ez olyan eset, amelynek bekövetkeztétől gyakorlatilag nem kell félnünk, másrészt ha be is következik, a rekurzió ismételt alkalmazása rendbehozza. Ugyanis, ha

$$k_i^{t+1} X_i^{t+1} - \frac{\alpha}{2} K_i^{t+1} < 0$$

akkor

$$\overline{U}_i^{t+1} - \overline{U}_i^{t+1,*} = \alpha\left(k_i^{t+1} X_i^{t+1} - \frac{\alpha}{2} K_i^{t+1} - \frac{1}{2} K_i^{t+1}\right) < 0$$

azaz $\overline{U}_i^{t+1} < \overline{U}_i^{t+1,*}$, $\overline{U}_i^{t+1}$ a rekurzió során abszolút értékben csökken.

Ha $I_i^{t*} = 0$ és a rekurzió többszörös ismétlés után sem vezet eredményre, ez annak a jele, hogy valamelyik beruházási szektorral szemben az igények egyik évről a másikra olyan hirtelen csökkentek (gyakorlatilag aligha előforduló eset), hogy egy év alatt a hatalmas kapacitásfelesleget nem lehet megszüntetni. Ugyan ezt az esetet algoritmikusan is meg lehetne oldani (mindaddig 0 szinten tartani a szektor beruházását, amíg a selejtezés révén, vagy az igények növekedése révén a kapacitásfelesleg kellően nem csökken), célszerűbbnek látszik erre az esetre egy stop! utasítást beállítani és kézi úton beavatkozni, éppen az esemény bekövetkeztének kicsinyke valószínűsége miatt.

V. Ez az állítás, a maga pontatlan fogalmazásában, heurisztikusan igaznak tűnik. Hogy mit takar a valóságban a „kis méretű" torzítás, az csak gyakorlatilag végrehajtott számítások során lesz vizsgálható. (Ezzek a modellel még nem számoltunk.)

Összefoglalva: az NV modell és megoldási módszere alkalmasnak látszik arra, hogy ha a feltételezett beruházás allokációs politika és a fogyasztási pálya konzisztens, akkor sok esetben megtaláljunk egy olyan pályát, amelyen csak csekély (vagy szerencsés esetben semilyen) beruházási kapacitáshiány és csak a megengedett mértékű kapacitásfelesleg lép fel egyes években.

6. A lineáris programozási (LP) modell

6.1. *Bevezetés és specifikáció*

Az SQ és NV modellekkel kísérletet tettünk arra, hogy viszonylag primitív módszerekkel évről-évre előrehaladva, vagy csak egy-egy évet visszacsatolva olyan pályákat állítsunk elő, amelyeknél az egyensúlyhiány bizonyos területekre koncentrálódik és lehetőség szerint legyen minél kisebb. Egyik esetben sem tudtuk garantálni, hogy egyensúlyi pályát találunk legalább akkor, ha ilyen az adott adategyüttes mellett létezik. Nyilvánvaló, hogy ilyent csak úgy lehet konstruálni, ha az egész időhorizontot egyidejűleg tekintjük át, tehát ha egy nagy, minden évet magában foglaló egyenlet- illetőleg egyenlőtlenségrendszerrel dolgozunk, vagy pedig ha a visszacsatolást terjesztjük ki az egész időszakra. (Talán valaki talál majd más elméleti lehetőséget is, mi nem találtunk.) Az utóbbi megoldást mint túlságosan munkaigényest és lassút elvetettük, marad tehát a rendszer szimultán megoldásának lehetősége. Erre kézenfekvő és hatékony módszer a lineáris programozás technikája. Ezért — az előbbi modellek kiegészítéseképpen — dolgozunk az általános modellnek egy lineáris programozási változatával is. (LP modell.)

Láthatjuk majd, hogy az LP modell segítségével mindazokat a nehézségeket, csak üggyel-bajjal megoldott vagy éppen megoldatlan problémákat, amelyek az SQ és NV modellek alkalmazásakor felvetődtek, egy csapásra megoldjuk. Ebbe a modellbe ezenkívül könnyűszerrel beépíthetők a munkaerőkorlátok, sőt ha akarnók, kiegészíthetnénk ezt a modellt a folyó ráfordítások input-output kapcsolataival, külkereskedelemmel, a fogyasztás szerkezetére vonatkozó feltételekkel stb. Sőt egy optimálási modell más szempontból is „többet tud", mint az előbbi modellek: ha kitűnik, hogy egy bizonyos beruházási allokációs politika egyáltalában konzisztens, ki lehet az egyensúlyi pályák közül választani valamilyen szempontból optimálisakat is.

Felvetődik tehát a kérdés, ha ilyen eszköz áll rendelkezésünkre, miért bajlódunk egyáltalán olyan modellekkel, amelyek egyensúlytalan pályákat produkálnak azokban az esetekben is, amikor lehetne találni egyensúlyi pályákat: olyan módszerekkel, amelyeket nem tudunk matematikai értelemben korrektül elemezni. Miért nem végezzük e terv-szondázást az LP modellel, vagy ennek valamilyen még részletezettebb, több összefüggést figyelembe vevő változatával?

Önmagában az az érv, hogy egy SQ és egy LP számítás gépi időigénye között kb. egy nagyságrendi különbség van, nem tűnik elég meggyőzőnek, ha figyelembe vesszük, hogy a gépi idő az összes időráfordításoknak amúgy is csak egy töredéke és egy közepes nagyságú LP feladatnak akár sok változatban való megoldása sem kíván ma már olyan sok időt, hogy ezt tiltó akadályként foghatnók fel.

Mi indokolta tehát, — a fenti érven kívül — azt, hogy a terv-szondázást ne alapozzuk az LP modellre, hanem ezt csak másodlagos segédeszköznek tekintsük?

— A terv-szondázás során nem egy vagy néhány, hanem nagyon sok pályát akarunk kidolgozni, éspedig olyanokat, amelyek nagyon széles sávban fogják át a hosszútávú tervezés gazdaságpolitikai lehetőségeit, egymástól jelentősen eltérő gazdasági struktúrákat állítanak elő. A számításoknak ez a megsokszorozódása egyrészt növeli a gépidőben mutatkozó különbség jelentőségét, másrészt, és ez még fontosabb, hasonló arányban növekszik az előkészítő és befejező (íróasztali) munkák időigénye. Ugyanis az SQ és NV modellek esetén az adatbevitel és kiírás módját magunk határozzuk meg és így kihasználhatjuk e modellek sajátos (egyszerű) szerkezetét, míg könyvtári LP programnál alkalmazkodni kell annak adatbeviteli és kiírási rendszeréhez.

— Az LP modell gazdagítása, bővítése növeli az adatigényt és egyre nehezebbé válik egymástól jelentősen eltérő és mégis ésszerűen összefüggő adategyüttesek nagy számban való összeállítása.

— Az LP technika, mint ismeretes, csúcsponti optimumot állít elő, tehát valamilyen szempontból szélsőséges és az évek egymásutánját tekintve szeszélyes lefutású pályákat. A pályáknak ez a tulajdonsága nem a feladat természetéből, hanem az alkalmazott módszerből fakad és így gazdaságilag nem interpretálható értelmesen.

Ezeknek az érveknek az együttese inspirálja azt, hogy az LP modellszerepét a terv-szondázás egész munkájában a következőképp korlátozzuk:

1. LP modellt használunk arra, hogy az SQ és NV modellek által kiszámított nem egyensúlyi pályák közül néhány legfigyelemreméltóbbnál megvizsgáljuk: vannak-e egyensúlyban levő változatai. Mit képes az ezeknek megfelelő beruházási allokációs politika maximálisan nyújtani, különböző kritériumok (célfüggvények) szerint.

2. Nem tulajdonítunk különösebb jelentőséget az LP modellel nyert pályák optimalitásának; az alapvetően eldöntendő kérdés: van-e egyensúlyi pálya? Az optimális pályákat csak „ha már úgyis programozunk, miért ne nézzünk meg néhány értelmesnek tűnő célfüggvényt" jelszóval vizsgáljuk.

Ezek miatt a meggondolások miatt megtartjuk az LP modellben is az SQ és NV modellek egyszerű szerkezetét, nem használjuk ki azokat a lehetőségeket, amelyeket az LP modell a gazdasági tartalom bővítésére nyújt. Fontosabb az, hogy megőrizzük az LP modellel nyert eredményeknek az SQ és NV eredményekkel való direkt összehasonlíthatóságát.

Így az LP modell az általános modellhez képest a következő specifikációkat alkalmazza:

(a) $Q_i = 0$

tehát a beruházási szektorokban nem engedünk meg sem termékfelesleget, sem hiányt.

(b) A beruházások allokációjára a (7b) formulát alkalmazzuk. (Így továbbra is szerepelni fog az NV modellnél bevezetett $J^t = \sum_h I_h^t$ változó.)

(c) A fogyasztási függvényt a következő differencia egyenlet megoldásaként specifikáljuk:

$$C^{t+1} - C^t = \gamma(C^t - C^{t-1}),$$

ahol C^0 adott és $\gamma > 1$, rögzített paraméter, a fogyasztási pálya aszimptotikus növekedési rátája.

Bevezetve a

$$Z = C^1 - C^0$$

egyenlettel értelmezett változót és a

$$\Theta^t = \frac{(\gamma)^t - 1}{\gamma - 1} \quad [(\gamma)^t \text{ hatványozást jelöl}]$$

konstansokat, a fenti differenciaegyenlet megoldását a következő alakban kapjuk meg:

$$C^t = C^0 + \Theta^t Z.$$

Behelyettesítéssel könnyen belátható, hogy ez valóban megoldása a fenti differenciaegyenletnek, ugyanis

$$C^{t+1} - C^t = (\Theta^{t+1} - \Theta^t) Z = \frac{(\gamma)^{t+1} - (\gamma)^t}{\gamma - 1} = (\gamma)^t Z =$$

$$= \gamma(\gamma)^{t-1} Z = \gamma(C^t - C^{t-1}).$$

Továbbá belátjuk, hogy γ valóban az aszimptotikus növekedési ráta. Ugyanis

$$C^{t+1} - \gamma C^t + (\gamma - 1) C^0 = (\Theta^{t+1} - \gamma\Theta^t) Z =$$

$$= \frac{(\gamma)^{t+1} - 1 - \gamma[(\gamma)^t - 1]}{\gamma - 1} Z = Z$$

$$\frac{C^{t+1}}{C^t} = \gamma + \frac{Z - (\gamma - 1) C^0}{C^t} \to \gamma$$

ha $t \to \infty$, mivel $C^t \to \infty$, ha $\gamma > 1$, $Z > 0$.
(Ha $Z = 0$, $C^t = C^0$ minden t-re és így a növekedési ráta 1.)

Tekintsük most Z-t változónak és γ-t rögzítsük, ekkor $C^t = C^0 + \Theta^t Z$ egy görbesereget állít elő, melynek paramétere Z. Ha

$$Z = Z_{\text{exp}} = (\gamma - 1) C^0$$

akkor $C^t = C^0(\gamma)^t$. Tehát egy exponenciális görbét kapunk. A görbesereghez tartozó többi görbék az exponenciális görbét csak a $t = 0$ helyet metszik, mivel a

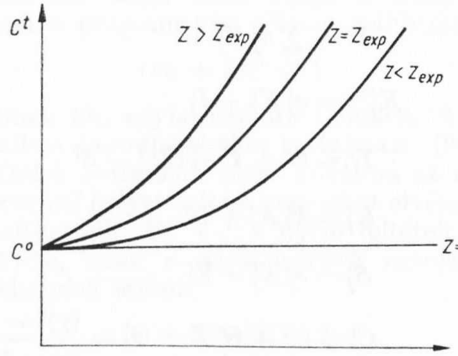
$$C^0 + \Theta^t Z = C^0(\gamma)^t$$

azaz a

$$[(\gamma)^t - 1][Z - (\gamma - 1)C^0] = 0$$

egyenlet egyetlen megoldása $t = 0$, ha $Z \neq Z_{\text{exp}}$. Tehát $Z < Z_{\text{exp}}$ esetben a görbe teljes egészében az exponenciális alatt fekszik és a növekedési ráta növekvően tart γ-hoz, $Z > Z_{\text{exp}}$ esetben fordítva.

A görbesereget a következő ábra mutatja:



2. *ábra*

A fogyasztási függvénynek fent leírt, lineáris modellekben előnyösen alkalmazható alakját Allan S. Mannetől vettük át. (Lásd: [4, 5].)

(d) A véges időhorizontú optimálási modelleknél, így a miénknél is számításba kell vennünk a *horizont-effektust*. Ez abban áll, hogy az utolsó periódusban beruházott javaknak az időhorizonton belül 0 a hozamuk, a modell sajátos szempontjából nézve értelmetlenek. Ennek a hatásnak a kiküszöbölésére, vagy legalábbis csökkentésére rá kell kényszeríteni a modellt arra, hogy a tervezési periódus végére is eszközöljön beruházásokat éspedig kb. folytatódjék az állóalapoknak az előző periódusokban megfigyelt növekedése. Ugyanez a megfontolás áll a forgóeszközökre is.

Tekintve hogy a fogyasztás növekedését az utolsó utáni, $T + 1$-ik évre célszerű a (c) alatt bevezetett

$$C^{T+1} - C^T = \gamma(C^T - C^{T-1})$$

formulának megfeleltetni, ésszerűen adódnék, hogy az álló- és forgóeszközök záróállományát is

$$K_j^{T+1} - K_j^T = \gamma(K_j^T - K_j^{T-1})$$

$$S_j^{T+1} - S_j^T = \gamma(S_j^T - S_j^{T-1})$$

formulákkal írjuk elő. Ezeken a formulákon két módosítást hajtunk végre. Először is nem egyenlőség, hanem $\geq$ egyenlőtlenség alakban írjuk elő őket, hiszen a záróállományoknál csak az őket csökkentő horizonthatást kívánjuk ellensúlyozni. Másrészt a jobboldalon nem a tényleges, hanem csak a kihasznált kapacitások utolsó előtti évi növekményét vesszük számításba, hiszen a modellt nem kívánjuk a kihasználatlan kapacitások növelésére kényszeríteni. Ennek megfelelően zárófeltételeink a következő alakot öltik:

$$K_j^{T+1} - K_j^T \geq \gamma(k_j^T X_j^T - k_j^{T-1} X_j^{T-1})$$

$$S_j^{T+1} - S_j^T \geq \gamma(s_j^T X_j^T - s_j^{T-1} X_j^{T-1})$$

(e) Specifikálnunk kell az LP feladat célfüggvényét. Ezzel a kérdéssel a 6.3. szakaszban foglalkozunk.
(f) Az LP modellben a változók nemnegativitását explicite elő kell írni.

6.2. *Az LP modell feltételi rendszere*

(1) $$Y^t = \sum_j a_j^t X_j^t$$

(2) $$K_j^{t+1} = q_j^t K_j^t + I_j^t$$

(3) $$Y^t = C^t + I^t + S^{t+1} - S^t$$

(4) $$K_j^t = k_j^t X_j^t + U_j^t$$

(5) $$S_j^t = s_j^t X_j^t + V_j^t$$

(6) $$C^t = C^0 + \Theta^t Z, \quad \Theta^t = \frac{(\gamma)^t - 1}{\gamma - 1}$$

(7) $$I_h^t = \widetilde{d}_h^t J^t$$

(8) $$X_i^t = \sum_j b_{ij} I_j^t$$

(9) $$S^t = \sum_j S_j^t$$

(10) $$I^t = \sum_i I_i^t + J^t.$$

Zárófeltételek:

(4^T) $$K_j^{T+1} - K_j^T \geq \gamma(k_j^T X_j^T - k_j^{T-1} X_j^{T-1})$$

(5^T) $$S_j^{T+1} - S_j^T \geq \gamma(s_j^T X_j^T - s_j^{T-1} X_j^{T-1})$$

Nem negativitási feltételek

(11) $$Y^t,\ I^t,\ J^t,\ C^t,\ S^t,\ X_j^t,\ K_j^t,\ S_j^t,\ I_j^t,\ U_j^t,\ V_j^t,\ Z \geq 0$$

A modell tehát, mint könnyen összeszámolható,

$(6n + 5)T + 1$	változót
$(4n + 5)T$	egyenlőség alakú és
$2n$	egyenlőtlenség alakú

feltételt tartalmaz, a nem-negativitási feltételeket leszámítva.

Annak érdekében, hogy a változók és feltételek számát csökkentsük az (1), (4), (5), (6), (7), (8), (9) és (10) feltételek felhasználásával az

$$Y^t,\ K^t,\ S_j^t,\ C^t,\ I_h^t,\ X_i^t,\ S^t \text{ és } I^t$$

változókat ki lehet a rendszerből küszöbölni, sőt a

$$V^t = \sum_j V_j^t$$

változó bevezetésével a V_j^t változókat is. Mint az idézett és az utóbbi összefüggésekből kitűnik, a megmaradt

$$J^t,\ X_h^t,\ I_i^t,\ U_j^t,\ V^t,\ Z$$

változók nem-negativitása maga után vonja a kihagyott változók nem-negativitását is. Ezzel a programozási feladat változóinak száma

$$(2n+2)T+1$$

-re, tehát az eredetinek kb. egyharmadára csökken. A korlátozó feltételek közül csak a dinamikus összefüggéseket tartalmazó (2) és (3) egyenletek, valamint a zárófeltételek maradnak meg. Továbbá az első évben K_j^1 és S_j^1 adottak lévén a (4) szerinti helyettesítést nem lehet elvégezni, (5) szerint pedig csak (9)-be helyettesíthetünk. Ez $n+1$ nyitó feltételt ad. Az (5^T) szerint helyettesíthetünk (9)-be, ezzel a zárófeltételek száma $n+1$-re csökken. Így a megmaradó feltételek száma

$$(n+1)\cdot(T+2)\,.$$

A feltételek száma ezzel kb. 1/4-ére csökkent, ami a számítási időt hozzávetőleg 60-ad részére csökkenti. (Az időmegtakarítással szemben többletet igényel az új koefficiensek kiszámítása az optimálás megkezdése előtt és a kiküszöbölt változók értékének kiszámítása az optimálás befejezte után.)

Megjegyezzük még, hogy az LP modellel végzett kísérleti számítás során a (8) szerinti helyettesítést nem alkalmaztuk.

A módosított feltételi rendszer elvileg semmi újat nem ad és a sok helyettesítés miatt meglehetősen áttekinthetetlen. Ezért leírását mellőzzük.

6.3. *A célfüggvény*

Mint már elöljáróban említettük, nem tulajdonítunk nagy jelentőséget az LP modellel nyert megoldás „optimális" voltának és így természetesen az optimalitási kritériumnak, a célfüggvénynek sem.

Az alábbiakban négy célfüggvényt javasolunk. (A kísérleti számításban mind a néggyel számolunk külön-külön.)

(A) A fogyasztási pálya maximálása:

$$Z \to \max!$$

Ezzel a célfüggvénnyel a Z-től függő görbeseregből a legmagasabban futót, illetőleg az ehhez a pályához tartozó termelési szinteket keressük ki.

(B) A tőkefeleslegek minimálása:

$$\sum_t \sum_j U_j^t + \sum_t V^t \to \min!$$

A szektoronként és évenként jelentkező kihasználatlan álló és forgóeszközök állományának egyszerű összegét minimáljuk. Ezzel az LP modellt az SQ modellel nyert pályához hasonlóra kényszerítjük (hiszen ott $U_j^t = 0$, $V^t = 0$ volt minden $t \neq 1$-re), azzal az eltéréssel, hogy itt a beruházási piac egyensúlyát is előírtuk.

(C) A záróévi GDP maximálása:

$$Y^T \to \max!$$

Modellünkben a záróévi GDP maximálása további korlátozás hiján a $Z = 0$, $C^t = C^0$ minimális fogyasztási pályára kényszerítené a modellt. Így ahhoz, hogy értelmes eredményt kapjunk. Z-t egy pozitív számmal alulról korlátoznunk kell. Ennek érdekében pótlólagos feltételként előírjuk, hogy az első évben a fogyasztás relatív növekménye legalább érje el az aszimptotikus növekedési rátának (γ) megfelelő értéknek, mondjuk $\beta = 0{,}8$-szorosát:

$$Z \geq \beta(\gamma - 1)C^0.$$

(D) A záróévi beruházott nemzeti vagyon maximálása:

$$\sum_j K_j^{T+1} \to \max!.$$

Azt, hogy egy hosszútávú terv során a gazdaság milyen szintre fejlődött, nemcsak a nemzeti jövedelem vagy a fogyasztás színvonala méri, hanem a felhalmozódott nemzeti vagyon is. Ugyanazon okból mint (C) alatt, itt is alulról korlátoznunk kell Z-t.

*

Mint helyenként már utaltunk rá, a modell megszerkesztésére és matematikai kezelésére irányuló kutatómunkát még nem tekintjük befejezettnek. Az ebben a cikkben közzétett modelleket és algoritmusokat így még csak kísérletezésre és nem a tervezési munkába való bevezetésre javasoltuk. De reméljük, hogy e modellek és módszerek a kísérletek befejezésével párhuzamosan és azt követően továbbfejleszthetők úgy, hogy a hosszútávú tervezésben alkalmazott matematikai modellek egyik fajaként hasznos szolgálatot tegyenek.

(Beérkezett: 1972. október 16.)

IRODALOM

1. Dániel Zs.–Jónás A.–Kornai J.–Martos B.: Terv-szondázás. Közgazdasági Szemle. 1972. 1031–1050. o.
2. Фелдман, Г. А.: К теории темпов народного дохода. Пановое хозяйство 1928 № 11 146–170 и № 12 151–178.
3. Mahalanobis, P. C.: Some observations on the process of growth of national income. Sankhyja. 12 (1953) 307–321. o.
4. Manne, A. S.: Sufficient conditions for optimality in an infinite horizont development plan. Econometrica 38 (1970) 18–38. o.
5. Manne, A. S.: DINAMICO, a dynamic multi-sector, multiskill model. In: Goreux, L. M.–Manne, A. S. (szerk.): Multi-level planning: case studies in Mexico. Amsterdam, North-Holland (sajtó alatt).

PLAN SOUNDING: THE STRUCTURE OF THE MODELS

Within the framework of the research called plan sounding we have tried to approach some up-to-date problems of the long-term (15-year) planning of the Hungarian national economy, first of all from the viewpoint of the proportion of consumption and accumulation, the allocation of the investments among branches (with special regard to the development of the infrastructure) and the efficiency of fixed assets. We use models of simple structure with a low demand for data in order to enable ourselves to calculate a large number of signifactly different growth paths and to observe, to sound into the possibilities of economic development in a sufficiently wide range.

Three variants of a general model are introduced in the article, they are the results of compromises with different proportions between two points of view: restriction of disequilibrium along the paths, and economy in the solution time. This article contains the mathematical structure and solution methods of the models only, the purposes and the train of thought of the whole research, the results of the first calculations and their economic analysis are published in another paper [1] by the participants of the research team.

ПЛАНОВОЕ ЗОНДИРОВАНИЕ: СТРУКТУРА МОДЕЛЕЙ

В рамках исследования имени «плановое зондирование» мы желаем приблизиться к некоторым актуальным проблемам долгосрочного (15-летнего) планирования венгерского народного хозяйства, в первую очередь с точки зрения доли потребления и накопления, аллокации капиталовложений среди отраслей (принимая во внимание развитие инфраструктуры) и эффективности основных фондов. В исследовании авторы пользуются моделями простой структуры и мелкого требования данных для того, чтобы исчислять очень много, существенно различающихся друг от друга путей роста, за возможности нашего экономического развития следить в довольно широкой полосе, и могли зондировать их.

В статье представляются три варианта общей модели, они являются результатами компромиссов разной доли между двумя точками зрения: ограничение возмущения равновесия путей, и экономии требованием времени решения. Эта статья распространяется только на математическую структуру и методы решения, цель, ход мышления целого исследования, результаты первых исчислений и их экономический анализ представили участники исследования в другой статье [1].

Józsa Sándor

A diád-módszer statisztikai expozíciója

Igen hasznosnak bizonyult Székely Béla [8] dolgozatában kifejtett diád-módszere a gazdasági fejlődés közös trendjeinek vizsgálata céljára (l. Rimler Judit—Székely Béla [7] dolgozatát). A módszer alapgondolata algebrai, amit jelen dolgozatomban a feladat enyhe módosításával statisztikai alapgondolattal helyettesítek. Az így módosított feladat megoldása a legkisebb négyzetek módszere helyett a legnagyobb valószínűség (Maximum Likelihood) elvén alapul. Az eljárás gyakorlati alkalmazására példát mutatok.

1. Bevezetés

A diád-módszer azon $u_i^{(l)}$, $v_j^{(l)}$ (valós) mennyiségek meghatározására ad eljárást, melyekre valamely x_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, n; \; j = 1, 2, \ldots, m)$ adott (valós) mennyiségekre az alábbi rekurzív feltétel teljesül:

$$\begin{aligned} x_{ij} &= \hat{u}_i^{(1)} \hat{v}_j^{(1)} + r_{ij}^{(1)}, \quad \sum_{i,j} (r_{ij}^{(1)})^2 = \text{minimális}, \\ r_{ij}^{(1)} &= \hat{u}_i^{(2)} \hat{v}_j^{(2)} + r_{ij}^{(2)}, \quad \sum_{i,j} (r_{ij}^{(2)})^2 = \text{minimális}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_{ij}^{(k-1)} &= \hat{u}_i^{(k)} \hat{v}_j^{(k)} + r_{ij}^{(k)}, \quad \sum_{i,j} (r_{ij}^{(k)})^2 = \text{minimális}, \\ & (i = 1, 2, \ldots, n; \; j = 1, 2, \ldots, m). \end{aligned} \tag{1}$$

Az x_{ij} mennyiségek ilyen értelmű felbontásának megkísérlését bizonyos közgazdasági meggondolások vetik fel. k, a rekurzió lépésszáma úgy választandó, hogy a $\sum_{i,j} (r_{ij}^{(k)})^2$ összeg megfelelően kicsiny legyen. (Itt a $\wedge$ jel használatát a későbbiek indokolják.)

Természetszerűen vetődik fel a kérdés, hogy az (1) feladat megoldásai nem elégítik-e ki egyben az

$$x_{ij} = \hat{u}_i^{(1)} \hat{v}_j^{(1)} + \hat{u}_i^{(2)} \hat{v}_j^{(2)} + \ldots + \hat{u}_i^{(k)} \hat{v}_j^{(k)} + r_{ij}, \quad \sum_{i,j} r_{ij}^2 = \text{minimális}, \tag{1a}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n; \; j = 1, 2, \ldots, m)$$

feltételt is. Később látni fogjuk, hogy a válasz igenlő. Dolgozatom célja az (1a) feladat statisztikai szemléletű módosítása és megoldása egy speciális esetre.

Az (1a) algebrai feladatot statisztikaivá alakíthatjuk a következő módon. Tekintsük x_{ij}-t bizonyos ξ_{ij} valószínűségi változó realizációjának (azaz statisztikai értelemben mintának), továbbá tegyük fel, hogy ξ_{ij} várhatóértéke $(\mathcal{E}\xi_{ij})$ az alábbi alakban írható:

$$\mathcal{E}\xi_{ij} = u_i^{(1)} v_j^{(1)} + u_i^{(2)} v_j^{(2)} + \ldots + u_i^{(k)} v_j^{(k)} \tag{2}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n; \; j = 1, 2, \ldots, m).$$

Az x_{ij} realizációkból a ξ_{ij} valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye típusának ismeretében a Maximum Likelihood elv alapján [1] szándékozunk becsülni az $u_i^{(l)}$, $v_j^{(l)}$ paramétereket, pontosabban a (2) jobboldalán álló összeget — hiszen bármely mátrix többféleképpen bontható diádok összegére [4]. A legkisebb négyzetek elvének alkalmazása itt (általában) nem indokolt, gondoljunk pl. arra az esetre, amikor a ξ_{ij} változók különböző szórásúak, vagy arra, amikor nem függetlenek.

A feladatot alább arra az esetre fogalmazzuk meg, amikoris a ξ_{ij} *valószínűségi változók együttes eloszlása (több dimenziós) normális eloszlás*. A 3. pontban egy további speciális eloszlás mellett elő is állítjuk a (2) jobboldalának becslését.

2. A feladat megfogalmazása normális együttes eloszlás esetén

A ξ_{ij} valószínűségi változók sűrűségfüggvényének felírásához képezzük a $\Xi = (\xi_{ij})$ $n \cdot m$-es valószínűségi mátrixot. Ξ oszlopvektorainak kiterítésével nyerjük az $n \cdot m$ komponensű ξ valószínűségi vektorváltozót. Tegyük fel, hogy ξ kovariancia-mátrixa S (tehát $S = \mathcal{E}(\xi - \mathcal{E}\xi)(\xi - \mathcal{E}\xi)'$), ismert $nm \cdot nm$-es nem szinguláris mátrix. Jelölje Q az S mátrix inverzét. ξ sűrűségfüggvényében a változókat (megkülönböztetésül az x_{ij} realizációktól) félkövér $\mathbf{x}_{ij}$-vel jelöljük, az ezekből összeállított nm komponensű vektorváltozót $\mathbf{x}$-szel.

Feltesszük, hogy ξ normális eloszlást követ, azaz sűrűségfüggvénye a bevezetett jelölésekkel:

$$f(\mathbf{x}) = c \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathcal{E}\xi)'Q(\mathbf{x} - \mathcal{E}\xi)\right\},$$

(a $'$ jel transzponálást jelöl e dolgozatban), ahol c ismert konstans

$$(c = 1/\sqrt{(2\pi)^{nm} \det S}).$$

(2)-re tekintettel $f(\mathbf{x})$ tartalmazza az ismeretlen u, v, paramétereket. Ha most $\mathbf{x}$ helyébe az x_{ij} realizációkból képzett x vektort helyettesítjük, $f(x)$ már csak a keresett, u, v paraméterektől függ. A Maximum Likelihood elv alkalmazása abban áll, hogy (2) jobboldalának becsléséhez olyan $\hat{u}$, $\hat{v}$ értékeket keresünk, melyek mellett $f(x)$ maximális.

$f(x)$ maximumát ott veszi fel, ahol exponense maximális, azaz

$$\mathfrak{L}(u, v) = (x - \mathcal{E}\xi)'\,Q(x - \mathcal{E}\xi)$$

minimális. E kifejezés kezelhetőbb alakba való átírása céljából jelöljük az $X = (x_{ij})$ mátrix j-ik oszlopvektorát x_j-vel ($j = 1, 2, \ldots, m$), továbbá legyenek

$$\begin{aligned} u_l &= (u_1^{(l)}, u_2^{(l)}, \ldots, u_n^{(l)})' \\ v_l &= (v_1^{(l)}, v_2^{(l)}, \ldots, v_m^{(l)})' \qquad (l = 1, 2, \ldots, k) \\ w_j &= (v_j^{(1)}, v_j^{(2)}, \ldots, v_j^{(k)})' \qquad (j = 1, 2, \ldots, m) \end{aligned}$$

paraméter-vektorok, és

$$\begin{aligned} U &= (u_1, u_2, \ldots, u_k) \\ V &= (v_1, v_2, \ldots, v_k) = (w_1, w_2, \ldots, w_m)' \end{aligned}$$

a paraméterekből összeállítot $n \times k$, ill. $m \times k$ típusú mátrixok. Ezekkel, tekintettel (2)-re

$$\mathscr{E}\Xi = UV' = U(w_1, w_2, \ldots, w_m) = (Uw_1, Uw_2, \ldots, Uw_m),$$

$\mathscr{E}\xi$ pedig az utóbbi mátrix oszlopaiból kiterített vektor. Végül particionáljuk a Q mátrixot $n \times n$-es blokkokra:

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \ldots, & Q_{1m} \\ Q_{21} & Q_{22} & \ldots, & Q_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Q_{m1} & Q_{m2} & \ldots, & Q_{mm} \end{pmatrix}$$

Ezekután a fenti $\mathfrak{L}$ kifejezés az alábbi alakot ölti:

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{j^*=1}^{m} (x_j - Uw_j)' Q_{jj^*} (x_{j^*} - Uw_{j^*}). \tag{3}$$

Tekintsük most e kifejezést az UV' mátrix elemei függvényének, azaz ebben a szemléletben UV' *nem a* Ξ *valószínűségi mátrix tényleges várható-értéke, hanem tetszőleges valós elemű* U, V' *mátrixok szorzata.*

A feladat tehát UV' olyan becslésének megkeresése, mely(ek)nél (3) minimális. Ebben a még mindig eléggé általános esetben (3)-ból olyan egyenletrendszer adódott az $\hat{U}$, $\hat{V}$ becslésekre, melynek explicit megoldását nem sikerült találnom. A kapott egyenletrendszer megoldását illetően iterációs eljárás látszik célravezetőnek.

Megjegyzés: Ha ξ degenerált eloszlású, akkor S szinguláris, nem invertálható. Ilyenkor (3)-ban a Q mátrix szerepét S-nek a Moore–Penrose-féle általánosított inverze [3] tölti be. Legyen ugyanis S rangja $p < n \cdot m$. Ekkor ξ sűrűségfüggvénye egy az $\mathbf{x} = \mathscr{E}\xi$ ponton átmenő p-dimenziós H_p hipersíkon kívül eltűnik, magán H_p-n pedig egy nem degenerált eloszlású p-dimenziós ξ^* valószínűségi vektorváltozó sűrűségfüggvényével adható meg. $\varrho(S) = p$ ugyanis azt jelenti [1], hogy létezik ξ^*, p-dimenziós nem degenerált normális eloszlású valószínűségi vektorváltozó és A, $nm \times p$-es mátrix úgy, hogy $\xi = A\xi^*$, $A'A = E$ ($p \times p$-es egység mátrix). Ebből $\xi^* = A'\xi$, $\mathscr{E}\xi^* = A'\mathscr{E}\xi$ és ξ^* kovariancia-mátrixa $S^* = A'SA$, nem szinguláris, inverze legyen Q^*. A ξ^* sűrűségfüggvénye legyen $f^*(\mathbf{x}^*)$ ahol $\mathbf{x}^* = A'\mathbf{x}$ ($\mathbf{x} \in H_p$). $\mathbf{x} \in H_p$-re ezekből következően fennáll:

$$f(\mathbf{x}) = f^*(\mathbf{x}^*) = c^* \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}^* - \mathscr{E}\xi^*)' Q^*(\mathbf{x}^* - \mathscr{E}\xi^*)\right\} =$$

$$= c^* \exp\left\{-\frac{1}{2}(A'\mathbf{x} - A'\mathscr{E}\xi)'(A'SA)^{-1}(A'\mathbf{x} - A'\mathscr{E}\xi)\right\} =$$

$$= c^* \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathscr{E}\xi)' A(A'SA)^{-1}A'(\mathbf{x} - \mathscr{E}\xi)\right\}.$$

Az exponensben Q szerepét tehát az $A(A'SA)^{-1}A'$ mátrix tölti be, ami valóban az S mátrix Moore—Penrose-féle általánosított inverze [3].

3. UV′ becslése egy speciális kovariancia-mátrix esetén

A. 4. pont példájánál, ami konkrét gyakorlati igény kapcsán adódott, a Ξ mátrix oszlopvektorai egymástól független azonos eloszlásúak. Ebben az esetben az S kovariancia-mátrix és annak Q inverze is diagonál-hipermátrix, nevezetesen:

$$Q_{jj^*} = \begin{cases} Q_0, & \text{ha } j = j^* \\ 0, & \text{ha } j \neq j^*. \end{cases}$$

Q_0, mint kovariancia-mátrix, pozitív definit vagy pozitív szemidefinit [1]. A (3) kifejezés ekkor az alábbi módon egyszerűsödik:

$$\sum_{j=1}^{m} (x_j - Uw_j)' Q_0 (x_j - Uw_j). \tag{3a}$$

A feladat tehát olyan $\hat{U}\hat{V}'$ mátrix(ok) keresése, mely(ek)re (3a) minimális vagy — (3a)-t ,,nyom'' formában írva:

$$\mathrm{Sp}(X - UV')' Q_0 (X - UV') = \text{minimális}. \tag{4}$$

E speciális feladat megoldását adja a következő

1\. *TÉTEL. Legyen X $n \times m$-es valós mátrix, Q_0 $n \times n$-es valós, szimmetrikus, pozitív (szemi) definit s rangú mátrix. Jelöljön $Y_k (k = 1, 2, \ldots, s)$ tetszőleges (valós), legfeljebb k-ad rangú $n \times m$-es mátrixot és tekintsük az alábbi függvényt:*

$$d(Y_k) = \mathrm{Sp}\,(X - Y_k)' Q_0 (X - Y_k).$$

Áll: d minimumát adó (bármely) Y_k^* mátrixra

$$Y_k^* = M_k = \sqrt{\lambda_1} f_1 g_1' + \sqrt{\lambda_2} f_2 g_2' + \ldots + \sqrt{\lambda_k} f_k g_k', \quad (k = 1, 2, \ldots, s),$$

ahol $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_s$ az $X'Q_0X$ mátrix pozitív sajátértékei, $g_1, g_2, \ldots, g_s$ (valamely) megfelelő ortonormált sajátvektor rendszere és $f_l = Xg_l / \sqrt{\lambda_l}$ $(l = 1, 2, \ldots, s)$. A minimumra továbbá:

$$\min d(Y_k) = d(M_k) = \mathrm{Sp}\, X' Q_0 X - \sum_{l=1}^{k} \lambda_l \quad (= \lambda_{k+1} + \ldots + \lambda_s),$$

$$(k = 1, 2, \ldots, s)$$

*

A tétel szövegében álló ,,valamely'' szó arra utal, hogy ha a λ_l sajátértékek között többszörös multiplicitású is szerepel, akkor a sajátvektor rendszer többféleképpen is választható. Ilyenkor M_k függhet a választott sajátvektor rendszertől. Erre vonatkozóan a $Q_0 = E$ esetre [5]-ben igazoltam, hogy azokra a k-kra, melyekre $\lambda_k > \lambda_{k+1}$, továbbá $\lambda_n > 0$ esetén $k = n$-re, M_k független a választott sajátvektor rendszertől. Ennek bizonyítása itt hasonlóan végezhető. A tétel szerint viszont már $d(M_k)$ a $\{g_l\}$ rendszer bármely választása mellett $d(Y_k)$ minimumával egyenlő.

A tétel megadja UV' (összes) becslését, nevezetesen (tetszőleges $\{g_l\}$ rendszer mellett)

$$\hat{U}\hat{V}' = M_k$$

UV' (egy) becslése, (és mindegyik becslése ilyen alakban írható). Ebből nyerhetők U, ill. V speciális becslései:

$$\hat{U} = (\sqrt{\lambda_1} f_1, \sqrt{\lambda_2} f_2, \ldots, \sqrt{\lambda_k} f_k) = (f_1, f_2, \ldots, f_k) \langle \sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_k} \rangle = F_k \Lambda_k^{1/2},$$

(ahol $\langle \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \rangle = \Lambda_k$ a feltüntetett elemekből álló diagonális mátrix), és

$$\hat{V} = (g_1, g_2, \ldots, g_k) = G_k$$

Érdemes $\hat{U}\hat{V}'$ ennek megfelelő faktorizációját felírni:

$$\hat{U}\hat{V}' = F_k \Lambda_k^{1/2} G_k'$$

Megjegyzések:

1. Q_0 pozitív (szemi) definit voltából következik, hogy az $X'Q_0X$ mátrix is pozitív (szemi) definit, tehát a tételben, nem említett sajátértékei eltűnnek. Mint ismeretes [4], ekkor $\operatorname{Sp} X'Q_0X = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_s$, ami egyben a tétel utolsó (zárójelben álló) egyenlőségét is igazolja. Speciálisan, $d(M_s) = 0$, úgyhogy a $k > s$ esetek érdektelenek.

2. Az f_l vektorokra fennáll:

$$Q_0 X X' Q_0 f_l = \lambda_l Q_0 f_l \text{ és } f_l' Q_0 f_{l^*} = \begin{cases} 1, & \text{ha } l = l^* \\ 0, & \text{ha } l \neq l^*. \end{cases} \quad (5)$$

Innen, ha Q_0 invertálható, akkor λ_l az $XX'Q_0$ mátrixnak is sajátértéke, f_l a (egy) hozzátartozó sajátvektor. *Speciálisan, ha $Q_0 = E$, akkor λ_l az $X'X$ és egyben az XX' mátrix sajátértéke, g_l, ill. f_l sajátvektorral.* Ezekkel viszont M_k diádjai éppen a Székely Béla által leírt rekurziós eljárással nyerhetőkkel azonosak, azaz *(1) megoldásai kielégítik (1a)-t is.*

(5) első ill. második részének belátásához elég az $X' Q_0 X g_l = \lambda_l g_l$ (g_l definíciója!) egyenlőséget balról $Q_0 X / \sqrt{\lambda_l}$-lel, ill. $g_{l^*}' / \sqrt{\lambda_{l^*}}$-gal szoroznunk.

3. Abból, hogy $Q_0^{-1} = S_0$ a Ξ mátrix oszlop-vektorainak közös kovarianciamátrixa, belátható, hogy a $d(M_s) = 0$ egyenlőségen túl $M_s = X$ is áll. A tétel állítását emiatt és 1. miatt a következőképpen interpretálhatjuk:

M_s az X mátrix olyan diád-előállítása, melyben az első diád maximális (százalékban kifejezve $100\lambda_1/\operatorname{Sp} X'Q_0X$ %) információt nyújt X-ről, a megmaradt információ maximális hányadát ($100\,\lambda_2/\operatorname{Sp} X'Q_0X$ %-ot) foglalja magába a második diád, és így tovább.

Az M_s diádösszeget éppen az a tény teszi kitüntetetté, hogy *egyes szeletei UV' becslését tetszőleges k mellett szolgáltatják.*

A tétel bizonyítása:

A tételt fogalmazhattuk volna úgy is, hogy csak a pontosan k-ad rangú Y_k mátrixokra szorítkozunk. Az így módosított állításból ugyanis következik a ténylegesen megadott állítás, hiszen akkor

$$\min_{\varrho(Y_k)=k^*<k} d(Y_k) = d(M_{k^*}) > d(M_k) = \min_{\varrho(Y_k)=k} d(Y_k).$$

Feltehetjük tehát, hogy $\varrho(Y_k) = k$. Ekkor Y_k felbontható k diád összegére [4]: $Y_k = UV'$, ahol U $n\times k$, V $m\times k$ típusú mátrix, (nem azonosak a Ξ várhatóértékében azonosan jelölt U, V mátrixokkal), mindkettő rangja k. Minthogy emiatt $V'V$ nem szinguláris, feltehetjük, hogy $V'V = E$. Ellenkező esetben ugyanis az $\widetilde{U} = U(V'V)^{\frac{1}{2}}$, $\widetilde{V} = V(V'V)^{-\frac{1}{2}}$ transzformációkkal olyan $\widetilde{U}$, $\widetilde{V}$ mátrixokat nyerünk, melyekkel egyrészt $\widetilde{U}\widetilde{V}' = UV'$, másrészt $\widetilde{V}'\widetilde{V} = E$ már teljesül. Utóbbi következik abból, hogy $V'V = (V'V)^{\frac{1}{2}}(V'V)^{\frac{1}{2}}$.

Egyszerű módon adódik, hogy

$$d(Y_k) = X'Q_0X - (2\,\mathrm{Sp}\,VU'Q_0X - \mathrm{Sp}\,VU'Q_0UV') \tag{6}$$

$d(Y_k)$ minimális, ha a zárójelben álló kifejezés (mondjuk b) maximális. Felhasználva a $\mathrm{Sp}\,AB = \mathrm{Sp}\,AB$ azonosságot [4] és a $V'V = E$ feltételt, írhatjuk:

$$b = 2\,\mathrm{Sp}\,U'Q_0XV - \mathrm{Sp}\,U'Q_0U.$$

Rögzített V mellett deriváljuk b-t rendre U' sorvektorai szerint, a deriváltakat tegyük egyenlővé 0-val. A nyom definíciójából [4] adódik, hogy

$$\frac{\partial b}{\partial u_l'} = \frac{\partial}{\partial u_l'}(2\,u_l'Q_0Xv_l - u_l'Q_0u_l) = 2\,Q_0Xv_l - 2\,Q_0u_l\,.$$

Ily módon, ugyanahhoz az egyenletrendszerhez jutunk, mint ha formálisan U' szerint deriváljuk b-t. Deriválás után a maximumot adó $\hat{U}_V$ mátrixokra az alábbi egyenletet kapjuk:

$$Q_0XV = Q_0\hat{U}_V \tag{7}$$

Ebből következik, hogy $\hat{U}_V'Q_0XV = \hat{U}_V'Q_0\hat{U}_V$, azaz b rögzített V melletti b_V maximális értékénél

$$b_V = \mathrm{Sp}\,\hat{U}_V'Q_0XV,$$

amiből (7) szerinti helyettesítéssel nyerjük:

$$b_V = \mathrm{Sp}\,V'X'Q_0XV = \sum_{l=1}^{k} v_l'X'Q_0Xv_l. \tag{8}$$

A b_V és egyben b maximumát szolgáltató $\hat{v}_l$ vektorokat kell még megkeresnünk. Ehhez, tekintettel a $v_l'v_l = 1$ feltételre, a $b_V + \sum_{l=1}^{k}\mu_l(1 - v_l'v_l)$ kifejezés v_l' szerinti deriváltját kell 0-val egyenlővé tenni ($l = 1, 2, \ldots, k$), ahol a μ_l konstansok a Lagrange-féle multiplikátorok. Deriválással nyerjük:

$$X'Q_0X\,\hat{v}_l = \mu_l\hat{v}_l \quad (l = 1, 2, \ldots, k) \tag{9}$$

azaz μ_l az $X'Q_0X$ mátrix sajátértéke, $\hat{v}_l$ (egy) hozzátartozó sajátvektor. (9)-et balról v_l'-lel szorozva és (8)-ba helyettesítve, b maximális értékére a

$$b_{\max} = \sum_{l=1}^{k} \mu_l \tag{10}$$

összeget kapjuk. Tekintettel arra, hogy a $\hat{v}_l$ sajátvektoroknak ortogonálisaknak kell lenniök egymásra, (10) maximumát akkor veszi fel, ha $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ az $X'Q_0X$ mátrix k legnagyobb sajátértéke, azaz $\mu_l = \lambda_l$, amikoris $v_l = g_l$ írható ($l = 1, 2, \ldots, k$); tömören: $\hat{V} = G_k$.

$\hat{V}$ ismeretében a keresett $\hat{U}$ mátrixot úgy kell megválasztani, hogy (7) teljesüljön. (7) viszont teljesül, ha $\hat{U} = X\hat{V}$, azaz $\hat{U} = XG_k$. Ezekkel a $d(Y_k)$ függvényre minimumot adó $\hat{U}\hat{V}'$ mátrix(ok)ra:

$$\hat{U}\hat{V}' = XG_k G_k' = \sum_{l=1}^{k} Xg_l g_l' = \sum_{l=1}^{k} \sqrt{\lambda_l} f_l g_l' = M_k .$$

Végül, ha (6) zárójelbe tett kifejezése helyébe (10)-et tesszük, $\mu_l = \lambda_l$ helyettesítés után a tétel állítása bizonyítást nyert.

*

Tekintettel arra, hogy a legnagyobb sajátérték és az ahhoz tartozó sajátvektor megkeresésére jól használható iterációs eljárások ismeretesek, szerencsés volna, ha M_k egyes diádjait az (1) alattihoz hasonló rekurziós eljárással számíthatnánk. Erre vonatkozóan igaz a következő:

2. *TÉTEL. Legyen $M_0 = 0$, M_{l-1} ($l = 1, 2, \ldots, s$) az 1. tételben említett diádösszeg valamely g_1, g_2, g_{l-1} sajátvektor rendszer mellett. Ekkor az $(X - M_{l-1})'$ $Q_0(X - M_{l-1})$ mátrix legnagyobb sajátértéke az 1. tételben definiált λ_l, tetszőleges hozzátartozó g_l^* normált sajátvektora pedig választható g_l-ként, azaz a $g_1, g_2, \ldots, g_{l-1}, g_l^*$ sorozat az $X'Q_0X$ mátrix $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$ sajátvektoraihoz tartozó ortonormált sajátvektorai ($l = 1, 2, \ldots, s$).*

A tétel rekurziós eljárást ad M_k diádjainak számítására, a rekurzió (1) analógja a módosított esetre.

Bizonyítás: $l = 1$-re az állítás azonos λ_1 és g_1 definíciójával. Belátjuk, hogy ha valamely l-re áll a tétel, akkor áll $l + 1$-re is. Valóban, az 1. tétel szerint $\mathrm{Sp}\,(X - M_{l-1} - Y_1)'\, Q_0(X - M_{l-1} - Y_1)$ minimumát az $Y_1 = \sqrt{\lambda_l^*} f_l^* g_l^{*\prime}$ diádánál veszi fel, melyben λ_l^* az $(X - M_{l-1})'Q_0(X - M_{l-1})$ mátrix legnagyobb sajátértéke, g_l^* (egy) hozzátartozó normált sajátvektor és $f_l^* = (X - M_{l-1})g_l^*/\sqrt{\lambda_l^*}$. Ekkor viszont valamely, az 1. tételnek megfelelő g_l vektorral:

$$M_{l-1} + \sqrt{\lambda_l^*} f_l^* g_l^{*\prime} = M_l \tag{11}$$

hiszen a fenti nyom ugyancsak az 1. tétel szerint $M_{l-1} + Y_1 = M_l$-nél minimális. (11)-ből kapjuk

$$\sqrt{\lambda_l^*} f_l^* g_l^{*\prime} = \sqrt{\lambda_l} f_l g_l' . \tag{12}$$

Balról $f_l'Q_0$-lal szorozva és figyelembe véve, hogy (5) szerint $f_l'Q_0 f_l = 1$, kapjuk: $g_l^* = \text{const} \cdot g_l$. Mivel g_l^* és g_l normáltak, ebből $g_l^* = g_l$ következik.

Mármost felhasználva, hogy $M_{l-1}g_l = 0$ (ami M_{l-1} kifejtéséből könnyen belátható), nyerjük:

$$\lambda_l^* = g_l^{*\prime}(X - M_{l-1})' Q_0 (X - M_{l-1}) g_l^* =$$
$$= g_l' X' Q_0 X g_l - 2 g_l' X' Q_0 M_{l-1} g_l + g_l' M_{l-1}' Q_0 M_{l-1} g_l =$$
$$= g_l' X' Q_0 X g_l = \lambda_l$$

amivel a 2. tétel bizonyítását befejeztük.

4. Példa a módszer alkalmazására

Vetésforgó kísérletek elemzésénél problémát okoz, hogy a forgóban szereplő különböző növények hozamai és ezek megbízhatóságai eltérő nagyságrendűek. E nehézség leküzdését célozza az alábbi eljárás.

Legyen a vetésforgóban vizsgált kezelések száma $n + 1$, a kísérlet tartama m év. A kezelés ill. év indexe legyen i ill. j, a kontrollra legyen $i = 0$. Éven belül a különböző kezelésekben azonos növény szerepel. A tapasztalat szerint az η_{ij} hozam (mint valószínűségi változó) szórása arányos e hozam várhatóértékével. Erre tekintettel az η_{ij}/η_{0j} relatív hozamok gyakorlatilag azonos szórásúak. E hányadosok egy éven belül — az azonos nevező miatt — nem függetlenek, korrelációjuk egyöntetűen 0,5, az egyes évek között azonban korrelálatlanok. Ha továbbá az η_{ij} hozamok egy növénynél eleget tesznek a szokásos varianciaanalízis modellnek, akkor a kölcsönhatásokra tett bizonyos gyenge megszorítás mellett [6] a

$$\xi_{ij} = \frac{\eta_{ij} - \eta_{0j}}{\eta_{0j}}$$

ún. relatív többlethozamokból álló $n \times m$-es Ξ mátrix várható értéke két diád összegére bomlik:

$$\mathcal{E}\Xi = u_1 v_1' + u_2 v_2' \tag{13}$$

Ξ oszlopvektorai közelítőleg normális, azonos eloszlású vektorváltozók, és egymástól függetlenek, közös kovariancia-mátrixuk:

$$S_0 = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & ^1/_2 & ^1/_2 & \dots & ^1/_2 \\ ^1/_2 & 1 & ^1/_2 & \dots & ^1/_2 \\ . & . & . & . & . \\ ^1/_2 & ^1/_2 & ^1/_2 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

ahol σ^2, a ξ_{ij} változók közös szórása, a kísérlet ismétléseiből becsülhető.

(13) két diádját ezekután az 1. és 2. tétel alapján becsülhetjük a Ξ mátrixnak a kísérleti eredményekből számítható X realizációja ismeretében. Az $\hat{u}$ és $\hat{v}$ vektorok fontos szakmai következtetésekre alkalmasak, komponenseik között az eltérések szignifikanciája megvizsgálható. Az $\hat{u}_1$ ill. $\hat{v}_1$ vektorok komponensei az *elsődleges* kezelési ill. évi + kumulatív hatásokat becsülik. Az $\hat{u}_2$, $\hat{v}_2$ vektorok az ugyanilyen értelemben vett *másodlagos* hatásokat becsülnek. A két diád informáló erejéről a λ_1 ill. λ_2 sajátérték tájékoztat.

A diádok becslése előtt tesztelhető a (13) modell illeszkedése. S_0 inverze:

$$Q_0 = \frac{2}{n+1}\,\frac{1}{\sigma^2}\begin{pmatrix} n & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n & -1 & \dots & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & -1 & -1 & \dots & n \end{pmatrix} = c_n T_n\,,$$

ahol a c_n és T_n jelölések nyilvánvalóak.

Legyenek λ_1 és λ_2 az $X'Q_0X$ mátrix két legnagyobb sajátértéke. Belátható, hogy (13) fennállása esetén az $[\mathrm{Sp}\,\Xi' Q_0 \Xi - \lambda_1 - \lambda_2]$ valószínűségi változó közelítőleg χ^2 eloszlást követ, várhatóértéke — azaz szabadságfoka:

$$f_1 = nm - 2(n+m-1) = (n-2)(m-2) - 2$$

Innen egyszerűen következik, hogy az $X'T_nX$ mátrix ν_1, ν_2 ($= \lambda_1/c_n$ ill. λ_2/c_n) két legnagyobb sajátértékével képzett

$$\zeta = \mathrm{Sp}\,\Xi' T_n\,\Xi - \nu_1 - \nu_2 \tag{14}$$

valószínűségi változó (közelítőleg) $\frac{1}{c_n}\chi^2$ eloszlású, f_1 szabadságfokkal. Ebből, ha a (13) hipotézis helyes, akkor

$$s_1^2 = \frac{2}{n+1}\cdot\frac{z}{f_1}$$

σ^2 egy becslése, ahol z-t (14) szerint kapjuk, ha Ξ helyébe X-et teszünk. σ^2-nek az ismétlésekből számított becslését jelöljük s_2^2-tel, ennek szabadságfoka $f_2 = nm\,(r-1)$, ahol r az ismétlések száma. Jó illeszkedés esetén az

$$\hat{F} = s_1^2/s_2^2$$

hányados nagyságrendje 1, az illeszkedés az f_1 és f_2 szabadságfokú F-eloszlás táblázatának segítségével tesztelhető.

(13) két diádjának becslése az $X'T_nX$ mátrix g_1 és g_2 normált sajátvektorainak (ezek egyben $X'Q_0X$ saját vektorai is) meghatározását kívánja. Figyelemre méltó, hogy a becsléshez nincs szükség σ^2 numerikus értékének ismeretére. Az $\tilde{f}_1 = Xg_1$, $\tilde{f}_2 = Xg_2$ vektorokkal

$$\hat{u}_1\hat{v}_1 = \tilde{f}_1 g_1', \quad \hat{u}_2\hat{v}_2' = \tilde{f}_2 g_2'.$$

Az $\hat{u}$, $\hat{v}$ vektorokat praktikus úgy választani, hogy a $\hat{v}_1$ ill. $\hat{v}_2$ vektor komponenseinek átlaga 1 legyen. Ekkor ugyanis $\hat{u}_1$ ill. $\hat{u}_2$ komponensei közvetlenül az egyes kezelések elsődleges, ill. másodlagos relatív többlethozamait becsülik a teljes vetésforgóra vonatkozóan.

A leírt módon elemeztük a Keszthelyi Agrártudományi Egyetem egy 10 éves tartamú, 13 kezeléses vetésforgó kísérletét. Érdemes néhány szót ejteni a kapott eredményekről, a részletes elemzést a *Növénytermelés* egy későbbi számában közöljük. Az $\hat{u}_1$ vektor komponensei meglepően jól egyeztek a gabonaegységekre átszámított hozamokkal képzett (évekre átlagolt) ,,nyers'' relatív többlethozamokkal, ami alátámasztja az elemzés eddigi gyakorlatának jogosultságát. Az $\hat{u}_2$ vektor komponensei a kezelések bizonyos jellemzőivel mutattak szoros korrelációt. A két diád informáló erejére 82,5%, ill. 10,5% adódott, a maradék 7% hibahatáron belüli érték, ugyanis az F-próba jó illeszkedést mutatott.

A diádfelbontást elvégeztük arra az esetre is, amikor viszonyítási alapként a kezelések hozamainak átlagát választottuk. Ekkor Ξ oszlopain belül az elemek kevésbé korreláltak, Q_0 nem-diagonális elemei relatíve kisebbek, ugyanakkor az egyes diádok „informáló erejé"-nek így objektívebb jelentés tulajdonítható. Az eredmények kielégítően egyeztek az előbb leírt feldolgozásnál kapottakkal.

(Beérkezett: 1972. aug. 28.)

IRODALOM

1. Anderson, T. W.: An introduction to multivariate statistical analysis. New York, 1958. John Wiley and Sons.
2. Bodewig, E.: Matrix calculus. New York, 1959. Interscience Publ.
3. Egerváry J.: Az inverz mátrix általánosítása. A Matematikai Kutató Intézet Közleményei, 1956/3. 315–324. o.
4. Egerváry J.: Mátrixszámítás. Budapest, 1966. Tankönyvkiadó.
5. Józsa S.: Iteráció mátrixok diadikus közelítésére. A Keszthelyi Agrártudományi Egyetem Kiadványai, 1971. XIII. évf. 1. sz.
6. Józsa S.: Kéttényezős kísérletek kontrollhoz mért értékelése. A Keszthelyi Agrártudományi Egyetem Kiadványai, 1971. XIII. évf. 5. sz.
7. Rimler J.—Székely B.: A gazdasági fejlődésre jellemző közös trendek vizsgálata diád-módszerrel. Szigma, 1971. 1–2. sz. 13–33. o.
8. Székely B.: Mátrixok egy speciális diadikus felbontása és ennek néhány alkalmazása az összehasonlító elemzésben. Szigma, 1970. 4. sz. 241–253. o.

STATISTICAL EXPOSITION OF THE METHOD OF DIADS

Maximum Likelihood estimation of the vectors u, v, for the diad-approximation of some real matrix X

$$X = u_1 v_1' + u_2 v_2' + \dots + u_k v_k'$$

is investigated. The elements x_{ij} of X are here random variables with normal joint distribution, the covariance matrix S being known. In section 3 the author produces the diads for the special case when the columns of X are independent. For the general case the possibility of an iterative procedure emerges. For the illustration of the method a possible way to analyse crop rotation is presented in section 4.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ЭКСПОЗИЦИЯ МЕТОДА ДИАДОВ

В этой статье автор исследует оценку по максимальному правоподобию векторов u, v, для диадического приближения действительной матрицы X

$$X = u_1 v_1' + u_2 v_2' + \dots + u_k v_k'.$$

Элементы x_{ij} матрицы X являются здесь случайные величины нормального совокупного разделения, с известной матрицей ковариянции S. В пункте 3 он составляет матрицы на специальный случай, если колонные векторы X являются независимыми друг от друга. На общий случай он намечает возможность метода итерации. В пункте 4 он показывает возможный способ анализа севооборотов, в иллюстрации применения метода.

FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK

ANONIMUS

Egy új optimálási algoritmus*

Eljárást mutatunk be egy speciális problémafajta megoldására.

1. Bevezetés

Az eddig ismert módszerek, amelyek megoldják azt az optimálási problémát, hogy egy f függvény maximumát egy S tartományban megtaláljuk, a következő hiányosságokat mutatják:

(1) Gyakran különleges követelményeket (pl. differenciálhatóság vagy konkávitás) támasztanak a függvénnyel szemben.

(2) A tartománytól rendszerint megkövetelik, hogy összefüggő, vagy éppenséggel konvex legyen.

(3) Az eljárások gyakran komplikáltak, ezért nehéz megérteni és számítógépre programozni őket.

Ezért én és alább említendő munkatársaim olyan eljárás kifejlesztésére törekedtünk, amelyik nincsen ezeknek a kötöttségeknek alávetve.

2. Matematikai alapok

Legyen S az U szeparábilis metrikus térnek egy részhalmaza. Mint ismeretes, van az U pontjaiból álló olyan $\{P_0, P_1, \ldots\}$ sorozat, amelyik U-ban sűrű.

Ha S rendelkezik a következő tulajdonsággal:

(A) S belsejének zárt burka tartalmazza S-et,

akkor $\{P_0, P_1, \ldots\}$ sűrű S-ben is. Továbbá ha még f folytonos akkor

$$\operatorname{Sup}\{f(x) : x \in S\} = \operatorname{Sup}\{f(x) : x \in S \cap \{P_0, P_1, \ldots\}\} = \\ = \operatorname{Sup}_k \{f(P_k) : P_k \in S\}.$$

* A tanulmány eredetileg angol nyelven jelent meg a *Mathematical Programming* 1972. évi 3. kötetében, 124—128. oldalakon, a szerkesztő következő megjegyzésével:
A kéziratot, szakadozottan és szamárfülekkel, Philipp Wolfe küldte el a *Mathematical Programming*-nak, az ő kísérőleveléből idézünk: „Sok olyan cikket lektoráltam már, amelyek optimálási eljárásokat javasoltak, anélkül, hogy hatékonyságukat megvizsgálták volna. Időm kímélésére egy mondatot idézek: »Ez az algoritmus minden olyan problémát megold, amelynek megoldására az ön módszere képes, éspedig, mint a rendelkezésre álló bizonyítékok mutatják, ugyanolyan jól.« Ezért javasolom a cikk megjelentetését . . . és remélem, hogy a szerző felfedi majd kilétét, hogy megkapja . . . , amit bőven megérdemel."
A SZIGMA szerkesztője köszönetet mond a *Mathematical Programming Society*-nak a közlési engedélyért és *Martos Bélának*, aki a cikkre figyelmét felhívta.

Ezáltal f-nek a megszámlálhatatlan számosságú S tartományban való maximálását egy olyan maximálási feladatra vezettük vissza, amelynél a tartomány sokkal kisebb lett.

3. Az algoritmus

Legyen f, S és a $\{P_k\}$ sorozat a 2. szakaszban mondottak szerint definiálva. Kezdetben legyen $j = 0$, $k = 0$, $x_0 = P_0$.

A k-adik lépés kezdetén adva van $j \leq k$, x_j és P_k.

(i) Ha P_k nem eleme S-nek, tégy k helyébe $k+1$-et és menj (i)-re. Egyébként menj (ii)-re.

(ii) $[P_k \in S]$. Ha $f(P_k) > f(x_j)$, legyen $x_{j+1} = P_k$, tégy k helyébe $k+1$-et és menj (i)-re. Egyébként tégy k helyébe $k+1$-et és ment (i)-re.

(Ebben az alakjában az eljárást az irodalom [1] „Wolfe Univerzális Algoritmusa" néven ismeri.)

4. Az algoritmus konvergenciája

Tétel. A 2. fejezet feltételei mellett az $\{f(x_j)\}$ sorozat az f-nek S-beli supremumához konvergál éspedig monoton növekvően.

Bizonyítás. A tétel egyenesen következik egy klasszikus eredményből [2]. Újabban egy fejlettebb módszereket alkalmazó bizonyítást is találtak [3].

5. Az algoritmus gépi programja

Hogy az algoritmust az automatikus számolás szempontjából kényelmesebbé tegyük, úgy döntöttünk, hogy az U teret tovább specifikáljuk a valós számok négyzetesen összegezhető sorozatainak Hilbert terévé. Az így előálló „Szeparábilis Hilbert Iterációs Módszer" lehetővé teszi, hogy a $\{P_k\}$ sorozatot belülről generáljuk ahelyett, hogy egy külső forrásból olvasnók be. A tagokat blokkokban generáljuk, a blokkok indexe $N = 1, 2, \ldots$ és az N-edik blokk M-edik eleme az $[a_1, a_2, \ldots, a_N, 0, 0, 0, \ldots]$ vektor, ahol $[a_1, a_2, \ldots, a_N]$ a lexikográfikus sorrend szerinti M-edik csúcspont az origó köré írt N élhosszúságú N-dimenziós kocka $1/N$ élhosszúságú kockákra való felosztásában. (Ily módon P_k csak véges számú nemzéró elemet tartalmaz, ami számítástechnikailag előnyös.) Persze, ha a probléma véges D dimenziójú, akkor P_k-nak minden a D-edik után következő komponense elhagyható. A program ALP/360-ban írva a következő:

```
      ∇ SZEPARÁBHILBERTITERÁCIÓ
[1] N ← 0
[2] X ← (N ← N + 2 + M ← ¯1)ρ0
[3] S : →(S − M ≥ ¯1 + (1 + N * 2) * N), X ← (X × ~ V) + P × V ←
        ← (G P) ∧ (F X) < F P ←
        ← (¯0.5 × N) + ((Nρ1 + N * 2) ⊤ M ← M + 1) : N
```

A felhasználónak csak két függvényt, F-et és G-t, kell specifikálnia. Az F függvénynek meg kell adnia az f célfüggvény értékét, a G függvénynek pedig 1 vagy 0 értéket kell felvennie, aszerint, hogy argumentuma S-hez tartozik-e vagy sem.

Fenti programunk biztosítja ugyan az új algoritmus működését, de hatékonyságát tovább fokozhatjuk, ha kihasználjuk párhuzamos számításokra való alkalmasságát. Ennek megfelelően az eljárást újraprogramoztuk, úgy hogy futtatható legyen T számú párhuzamos aritmetikai regiszterrel rendelkező számítógépen. (Ez a kód sajnos túl hosszú semhogy itt reprodukálni lehessen.) Megmutatható, hogy T megfelelő választásával a futási időt számottevő arányban csökkenteni lehet.

6. A módszer további finomítása és kiterjesztése

Kutatás folyik arra, hogy az algoritmust még hatékonyabbá tegyük optimálási feladatok megoldásában. Bebizonyítottuk, hogy ha S megszámlálható halmaz, akkor elegendő $\{P_k\} \supseteq S$-et választani ahhoz, hogy a 4. fejezetbeli konvergencia tétel érvényes maradjon, és így az algoritmust kiterjeszthetjük olyan esetekre is, amelyben a tétel feltételei nincsenek kielégítve, például arra az esetre, amikor S az E^D tér azon vektoraiból áll, amelynek komponensei egész értékűek. (Ezt ,,integer programozási problémának'' nevezik (lásd [4].) Meg kell jegyezni, hogy az 5. fejezetben programozott módon éppen ezt tettük. Ilyesféle kiterjesztéseket további cikkekben fogunk tárgyalni.

Lekötelezettje vagyok annak a munkatársamnak, aki rámutatott az algoritmus egy lehetséges meggyorsítására. Legtöbb feladatnál az a helyzet, hogy a $\{P_0, P_2, P_4, \ldots\}$ sorozat sűrű a $\{P_0, P_1, P_2, \ldots\}$ sorozatban, amelyből következik, hogy az előbbi sűrű U-ban is. Tehát, ha a 2. fejezetbeli algoritmusban a $\{P_k\}$ sorozatot a $\{P_{2k}\}$ sorozattal helyettesítjük, a konvergencia-tétel még mindig áll, de az eljárásban a lépések száma az eredetihez képest 50%-kal csökken. Ez az ötlet további gyorsítási módszereket sugallt és ezek lényeges plusz megtakarítással kecsegtetnek. Kellő időben beszámolunk majd róluk az irodalomban.

7. Az algoritmus hatékonyságának vizsgálata

Mivel az optimálási és egyéb feladatok megoldására sok eljárást ismerünk, gondosan összehasonlítottuk az új algoritmust a korábbiakkal. Mivel T regiszteres parallel számoló berendezés nem állt rendelkezésünkre, felkértük fentebb már említett munkatársunkat, hogy végezze el egy ilyen komputeren való számolás kézi szimulálását. Ő igen megnyugtató előrehaladásról számolt be [4] az optimálási algoritmusok hatékonysági vizsgálatára szolgáló probléma megoldása során.

Egy ettől független hatékonysági vizsgálatként összehasonlítottuk a mi algoritmusunkat 43 más publikált optimálási algoritmussal minden jelentősebb képességük szempontjából:

	Publikált algoritmusok „Igen" %-a	A mi algoritmusunk
Nemdifferenciálható függvények	13%	igen
Nemkonkáv függvények	33%	igen
Egészértékű változók	28%	igen
Nemkonvex tartomány	35%	igen
Egyszerűség	8%	igen
Számítógépre programozva	39%	igen
Feladaton kipróbálva	38%	igen
„Nagyon kielégítő"-nek mondott	92%	igen
Bizonyított konvergencia	22%	igen
Konvergencia sebességét megállapították	—	—

(Az utolsó rovatból az adat azért hiányzik, mert az algoritmusok konvergenciájának sebességéről semmit sem tudunk. Lásd [1]. Ez egy következő cikk témája lesz.)

Világos, hogy az új algoritmus felülmúlja a többieket, ha a publikálásukhoz szükséges kritériumok szerint mérjük le őket; valóban 9 pontot ér el a lehetséges 10-ből, az átlagos 3,5-del és a maximális 8-cal szemben, amit az ellenőrző csoportnál mértünk.

8. Következtetések

A dolgozat témájához tartozó eredményeket mutattuk be.

Köszönetnyilvánítás. A szerző köszönetet mond azért a mértékért, amellyel munkájában támogatták.

HIVATKOZÁSOK

1. Anon.: Wolfe univerzális algoritmusa. Disszertáció. (Megjelenés alatt).
2. Gauss, K. F.: Gesammelte Werke. Berlin, 1933. Springer Verlag. (és más művek ugyanettől a szerzőtől).
3. Bourbaki, N.: „Eléments de mathématique". Paris. Hermann et Cie. p. 1 és köv.
4. Személyes közlés.

KÖNYVEKRŐL

LASDON, L. S.: *Optimization theory for large systems.* London, 1970. The Macmillan Company. 523 p.

Dantzig-Wolfe dekompozíciós módszerének 1960-as publikálása óta a nagyméretű problémák tanulmányozása az érdeklődés középpontjába került. Azóta egy sereg módszer született, de az irodalom összegyűjtése és az egyes módszerek közötti kapcsolatok kimutatása, a módszerek rendszerezése ez idáig még nem történt meg. Ezt a hiányt pótolja Lasdon műve, amely lényegileg egyetemi tankönyv.

A könyv először általában a lineáris és nem lineáris programozással foglalkozik. Röviden tárgyalja a függvény korlátozó feltétel nélküli minimalizálásának kérdését, módszereit (megemlítve a gradiens módszereket, a konjugált irányok módszerét, Fletcher és Powell technikáját, Fibonacci algoritmusát.). Ezután a lineáris programozási feladatok megoldási módszereivel foglalkozik. Ismerteti a szimplex módszer különböző változatait (a primál-, duál-, primál-duál-, és módosított szimplex módszereket.) Majd röviden vázolja a nem lineáris feladatok megoldási problémáit és a főbb megoldási módszereket. Ehhez a didaktikai egységhez tartozik a könyv egy későbbi (VIII.) fejezete, amely a dualitás és a dekompozíció általános kérdéseivel, elméletével foglalkozik. Behatóan tárgyalja a bázisinverz szorzatformában való tárolását. A matematikai háttér szempontjából igen fontos még a függelék két fejezete, mely R. T. Rockafellar alapján a konvex függvényekkel és azok konjugáltjaival, illetve a konvex függvények szubgradienseivel és iránymenti deriváltjaival foglalkozik. Bemutatásra kerül még a rácslinearizáció elmélete, amelynek egy alkalmazása a Dantzig-Wolfe nem lineáris algoritmus.

A második fő részben a gyakorlati élet különböző területein fellépő, speciális struktúrájú feladatokhoz vezető problémák matematikai megfogalmazásával foglalkozik. Szó esik a tevékenységanalízisről, Leontief dinamikus modelljéről, Markov-folyamatokról, sok oszloppal, illetve sorral rendelkező programozási feladatokról, valamint kapcsoló változókkal rendelkező és vegyes programozási feladatok fellépéséről.

A könyv harmadik és egyben legterjedelmesebb része az egyes módszerekkel foglalkozik, megmutatva azok egy-egy gyakorlati alkalmazását, megemlítve a számítástechnikai szempontokat és a konkrét számítási tapasztalatokat is.

Ezen fejezet két részre oszlik: *a)* dekompozíciós módszerek, *b)* központosított módszerek. Az *a)* további két különálló részből áll, amelyek a duális, illetőleg a primális megközelítést tárgyalják.

A duális- és primális-megközelítés abban különbözik egymástól, hogy az előbbiben a központ árnyékárakat ad meg a piacnak a szektorokra hagyva az erőforrások felosztását, az utóbbiban pedig a központ közvetlenül felosztja az erőforrásokat és ezeket küldi meg a szektoroknak.

Először a történetileg elsőnek keletkezett Dantzig-Wolfe dekompozíciós módszert mutatja be, melynek központi programjára alkalmazza a primál-, a duál- és a primál-duál szimplex módszereket. Majd összehasonlítja e módszerek előnyeit és hátrányait. A Dantzig-Wolfe módszer optimum feladatot old meg az első szinten, de csak egyetlen bázistranszformációt végez a másodikon (az új oszlopot bevonja a bázisba). Bemutat a szerző egy megoldási alternatívát, amely dekomponálja a primális feladatot. Előnye, hogy az egyes iterációs lépéseknél nagyobb célfüggvény csökkenés lesz, viszont hátránya, hogy megnő a bázis mérete. A Dantzig-Wolfe módszer előnyös tulajdonsága, hogy a minimális célfüggvény érték határok közé szorítható, így leállhatunk az iterációval egy ε pontosságú megoldásnál. Lasdon megadja a módszer egy közgazdasági interpretációját is és leírja az algoritmus nem lineáris feladatok megoldására szolgáló változatát.

Tárgyalja a szállítási feladat dekompozícióját is. Ezután a relaxációs technikát írja le, megmutatja, hogy Lemke duál-szimplex módszere a relaxáció speciális esete. Majd konkrét relaxációs módszereket ismertet: Ritter algoritmusát a kapcsoló változókat és kapcsoló feltételeket tartalmazó feladatokra vonatkozóan, majd pedig Rosenét — mint a Ritter-féle algoritmus speciális esetét — blokk-diagonális problémákra és duálisukra. Bemutatja a relaxációs technika duálisát, a korlátozás módszerét, amelynek alkalmazását Rosen nem lineáris feladatok megoldására kidolgozott módszere illusztrálja. A vegyes programozási módszereket Benders algoritmusa képviseli. Működését egy raktártelepítési példán mutatja be. Előnyös tulajdonsága, hogy a minimális célfüggvényértékre alsó és felső korlátok adhatók.

A primális megközelítésű vagy jobb oldal felosztású módszerek kisebb súllyal szerepelnek a könyvben. A központi feladat megoldására a következő módszereket ismerteti: a lehetséges irányok módszere (itt került felhasználásra a függelék), Silverman algoritmusa, tangens approximáció. Itt foglalkozik a külső és belső linearizáció problémájával.

A dekompozíciós módszereken kívül létezik a problémáknak egy másfajta megközelítési módja is, ahol szintén a feladatok speciális szerkezetét használják ki. Ezek az úgynevezett központosított módszerek, amelyek lényegileg mind a módosított szimplex módszer különböző változatai. Ezek lényege, hogy redukált munkabázissal dolgoznak. Itt egy felsőkorlátos technikát, majd egy Dantzig-VanSlyke-től származó általánosított felsőkorlátos módszert mutat be. Ezen utóbbi módszer alkalmazható az általánosított szállítási feladat megoldására éppúgy, mint a Dantzig-Wolfe dekompozíciós algoritmus központi feladatának hatékony megoldására. Majd ezen Dantzig-VanSlyke algoritmus egy további általánosítását is megadja.

Pap András

Brown, T. M.: *Specification and uses of econometric models.* London, 1970. Macmillan and Co. 487 p.

A könyv az utóbbi évek ökonometriai irodalmának egyik figyelemre méltó alkotása. A szerzőnek az a véleménye, hogy ha a kanadai gazdaság működésének elemzését kívánja nyújtani, nem mellőzheti a makroökonómiai szféra bemutatásán kívül a mikroökonómiai alkotóelemek és ezek sokféle kölcsönhatásának a leírását sem. A könyv így sok szempontból többet nyújt mint az ökonometriai modelleket tárgyaló kézikönyvek többsége (ami a közgazdasági háttér, jelen esetben a kanadai nemzetgazdaság, valamint a mikro- és makroökonómiai szféra összefüggése és egyéb vonatkozások ismertetését illeti); bizonyos tekintetben azonban — és itt elsősorban speciális ökonometriai kérdésekre, a becslési eljárásra és a tesztekre gondolok — kevesebbet mond, mint amennyit az olvasó a könyv címe alapján elvárhatna.

A könyv négy részből, összesen huszonkét fejezetből áll. Az I. rész („a specifikáció megalapozása") lényegében a mikroökonómiai egységeket és az aggregációt tárgyalja; a II. részben rátér a gazdaság makroökonómiai modelljének a részletes specifikációjára. Öt szektort (háztartások, vállalatok, külkereskedelem, pénzügyi és kormányzati szektor), valamint négyféle piacot különböztet meg (a jószágok, a pénz, a munkaerő és a külföldi valuta piacai). A III. rész néhány kanadai ökonometriai modellt mutat be, míg a IV. rész a modell gyakorlati alkalmazásának lehetőségeit tárgyalja. Célja a gazdaságpolitikai intézkedések várható hatásának a kikísérletezése. Ennek első feltétele pedig a gazdasági szerkezet alapos ismerete, illetve a változások előrejelzése a modell segítségével.

Az első rész (1—8. fejezet) a gazdasági rendszert összeszövődöttségében tekinti át. A könyv ebben a részben elemi gazdasági fogalmak (javak, munkaerő, pénz), valamint elemi ökonometriai fogalmak magyarázatát is nyújtja. Táblázatos formában mutatja be a gazdaság öt szektora között fennálló keresleti és kínálati kapcsolatokat, áramlásokat. Mindezt annak érdekében teszi, hogy felvázolja a modell hátterét, amely ennek megfelelően a gazdasági rendszer interdependenciáját, a kereslet és a kínálat kiegyenlítődése folytán beálló egyensúlyt hivatott megfogalmazni úgy, hogy a véletlen zavarok lehetőleg minimálisak legyenek. Ezek mellett a feltételek mellett kívánja a gazdaságnak mind az öt szektorában a javak, a munkaerő, az értékpapírok és a pénz keresleti és kínálati viszonyait ábrázolni, specifikálni.

Ezt megelőzően azonban Brown szükségesnek tartja a makroszinten megnyilvánuló keresleti és kínálati viszonyok alapját képező mikro-tényezők áttekintését, hogy modellje minél hívebben tükrözze a tökéletlen verseny mellett működő piaci viszonyokat. Az I. rész fejezeteinek tartalmát a mikro-gazdaságban létrejövő okozati kapcsolatok, a gazdasági szerkezet, a haszonfüggvény, a háztartások jövedelmét alakító különféle tényezők, a megtakarítások és a dinamikus keresleti függvények tárgyalása alkotják.

Itt különösen ki kell emelni az 5. fejezet anyagát, amely a vállalati termelés kérdésével („the firm and production") foglalkozik. Hatalmas élő szervezetnek fogva fel a gazdaságot, a vállalat az az alapsejt, amely a javak termelését végzi, s egyben prototípusa azoknak a tevékenységeknek, amelyek a makroökonómiában is megtalálhatók. A termelési tényezők áttekintése után értékelési kérdésekkel, a haszon és a hozzáadott érték fogalmával foglalkozik. Az „emberi beruházásokat" és a felhalmozott ismereteket „tőké"-nek tekinti, ezek hozadékát pedig profitnak. A gazdasági növekedés, főleg a technológiai fejlődés vizsgálatára a mikroökonómiában is a termelési függvényt tartja a legmegfelelőbb eszköznek.

A vizsgálat homlokterében a termelési tényezők kereslete áll; az állótőke-tényező keresletével kapcsolatban azonban más kérdésekre is kellő részletességgel tér ki: a bruttó beruházások hozamának, a beruházási döntéseknek, az értékcsökkenésnek a kérdésére is. Fejtegetéseit a termelési tényezők javasolt függvényrendszerének a specifikációjával zárja: ez lényegében 27 egyenletből álló (statisztikailag nem verifikált) modell. A modellel előrejelzést és szimulációs kísérleteket lehetne végezni, ez az „optimális" vállalati politika kikísérletezését segítené elő. A 7. fejezet a piacot és annak feltételeit tárgyalja; piaci egyenleteinek verifikálása azonban — a szükségelt adatbázis hiányosságai folytán — nehezebb problémát jelentene. Az I. részt az aggregációról szóló 8. fejezet zárja le, ahol többek között az „aggregációs veszteséget" és a szerző által „anti-aggregacionistának" nevezett G. Orcutt módszerét (mikro-analitikai modellek) mutatja be. Véleménye szerint az aggregált rendszer nem egyenlő egyszerűen a mikro-egységek summájával; annál kevésbé, mert a mikro-szinten érvényesülő kapcsolatok makro-szinten irányt is változtathatnak. Erre példákat is idéz.

A mű II. része a makroökonómiai modell részletes specifikációját adja, éspedig úgy, hogy a fejezetek mindegyike (9—15. fejezetek) egy-egy szektor vagy piac részletes tárgyalásával foglalkozik. Ezek: a háztartások, a vállalatok, illetve az aggregált kínálat szektora, a munkaerő-piac, a külkereskedelem, a kormányzati szektor, a pénzügyi rendszer, az árupiac és az árszint összefüggései.

A háztartási szektoron belül tárgyalt főbb kérdések: a fogyasztói javak kereslete, a lakások iránt megnyilvánuló kereslet jellegzetességei és a megtakarítások kérdése. Az aggregált kínálat szektorának tárgyalásakor Brown lényegében makro-szinten végzi el ugyanazokat a vizsgálatokat, amelyeket mikro-szinten a vállalat vonatkozásában (a termelési tényezők iránti kereslet, nyersanyag, készletek, likviditás, technikai fejlődés, költségtényezők, adók) már elvégzett.

A munkaerőpiacot itt keresleti oldalról vizsgálja; ennek mind rövid-, mind hosszú távon, illetve középtávon belül érvényesülő összefüggéseit és a strukturális munkanélküliség szerepét. Áttekinti a munkásság érdekvédelmi szervezeteinek a kialakulását és ezek tevékenységének hatását a bér- és munkaerőpolitikára. A külkereskedelem és a nemzetközi szektor elemzését a komparatív előnyök kérdésével kezdi. Fejtegetéseiben a Heckscher—Ohlin-elmélethez áll közel és konklúziója az, hogy az országnak azokat a termékeit kell exportálnia, amelyek előállítása során legintenzívebben képes kihasználni a bőségben rendelkezésre álló termelési tényezőket. A nemzetközi pénzáramlások, a valutaárfolyamok nemzetközi kereskedelemre való hatásának tárgyalása jut még szerephez az itt tárgyalt problémák között, majd a nemzetközi szektorra specifikált egyenletek bemutatására, egyszersmind különböző alternatív valutapolitikai intézkedések következményeinek értékelésére is sor kerül.

Az adott keretek között lehetetlen minden részletében bemutatni a következő fejezetek tartalmát. A kormányzati szektoron belül ki kell emelnünk a monopóliumok, a közmunkák, valamint a jövedelemeloszlás-politika terén adódó állami feladatok tárgyalását. A kormányzati szektor legfontosabb összefüggéseit is egyenletek formájában specifikálja. A pénzügyi kapcsolatok megfogalmazását viszont a pénz fogalmának és funkcióinak, valamint a különböző pénzelméleteknek és pénzérték-elméleteknek, a bankrendszer és a pénzáramlások, a pénzkereslet és kínálat fontosabb összefüggéseinek a megfogalmazása vezeti be. Brown könyve ezekben a vonatkozásokban nem annyira ökonometriai, mint inkább általános közgazdasági kézikönyv szerepét tölti be. Felfogásának lényege, hogy a modern gazdaságban a pénzkínálat igen erős befolyást gyakorol a gazdasági jelenségek egész sorára (beruházás, foglalkoztatottság, stb.), éppen ezért ez a legjelentősebb gazdaságpolitikai eszköz is, ami azt jelenti, hogy egy ökonometriai modellnek a pénzügyi és a reálszféra kölcsönhatásait is fokozottan figyelembe kell vennie.

Az előbbiekkel kapcsolatban Brown véleménye szerint a modellnek a piac- és az árszint összefüggéseit is explicite meg kell fogalmaznia. Ezt a modell szempontjából azért tartja fontosnak, mert a modellnek az aggregált kereslet és kínálat kiegyenlítődését, a gazdasági egyensúly feltételeit, valamint az árszintet is figyelembe kell vennie. A 15. fejezetben tárgyalt kérdések közül főleg az infláció, a piaci egyensúly és piaci műveletek tárgyalása érdemel figyelmet.

A modell 16. fejezetében kerül sor a Brown által specifikált nagy ökonometriai modell bemutatására. Bizonyos értelemben mindaz, amit eddig elmondott, a modell-specifikáció célját szolgálta. A modell összesen 204 összefüggést tartalmaz és hét szektorból áll. Az összefüggések közül 182 sztochasztikus egyenlet, a többi identitás. A modell statisztikai adatbázisát még össze kell állítani és paramétereit becsülni.

A szerző véleménye az, hogy a vizsgálatot kisebb, aggregált modellekkel célszerű kezdeni, módszerbeli tapasztalatok elsajátítása kedvéért, valamint az előrejelzés és a gazdaságpolitikai eszközök hatékonyságát felmérő szimulációs kísérletek könnyebbsége érdekében. A kanadai gazdaságra kidolgozott kisebb méretű modellek után a 204 egyenletes modell a fokozott dezaggregálás és a részletesebb vizsgálatok irányában való továbbhaladás irányát jelzi, s méreteiben már a közismert Brookings-modellt közelíti.

A szerző a III. részben néhány korábban kidolgozott kanadai ökonometriai modellt — a nagy modell előzményeit — mutatja be.

A IV. rész az ökonometriai modellek gyakorlati felhasználásáról szól: az előrejelzésről és a gazdaságpolitikai célok (mind hosszú, mint rövid távú célok) megvalósítása érdekében végzett szimulációs kísérletekről, (19—22. fejezetek). Ezeket a kísérleteket szükségképpen a modell dinamikus tulajdonságainak, illetve a rendszer stabilitásának vizsgálata előzi meg: egyrészt a modell endogén változóinak „ex-post" előrejelzése, másrészt az ún. végső forma multiplikátorainak elemzése. E kérdéscsoport részletes tárgyalása, a vizsgálat matematikai alapjainak a bemutatása a könyv egyik erőssége. A szerző véleménye szerint ezek a vizsgálatok a hosszútávú gazdasági tervezésnek is igen fontos előfeltételei.

A következő fejezetekben a szerző azt a kérdést tárgyalja, hogy a modellel végzett ilyen vizsgálatok mennyiben segítik elő a gazdaságpolitika olyan aktuális céljainak a megvalósulását mint a teljes foglalkoztatottság, egyenletesebb jövedelemeloszlás, maximális gazdasági növekedés és minimális áremelkedés, kiegyensúlyozott fizetési mérleg, stb. Mindezek a célok szerinte egy aggregált „welfare function" segítségével közelíthetők meg. A legnagyobb nehézség abban van, hogy a felsorolt és fel nem sorolt különféle gazdaságpolitikai célok részben elősegítik, részben azonban akadályozzák egymás érvényesülését. Az ökonometriai modell ebben a vonatkozásban annyit tehet, hogy az egyes célok teljesülési feltételeit megfogalmazza és felméri, hogy a gazdaságpolitikai célok megvalósulását kifejezésre juttató célváltozók teljesülését az „instrumentumok", az eszközváltozók mennyiben segítik elő.

A modell gyakorlati alkalmazására Brown több példát mutat be. Így pl. a gazdaság optimális növekedésének tervezési stratégiáját az állótőke és az élőmunka alternatív beruházási programjainak a kikísérletezésével, ill. bizonyos exogén változók (pl. kamatláb) endogén változókra (beruházás, fogyasztás) gyakorolt hatásának a felmérésén keresztül közelítette meg. A szerző által előnyben részesített elsődleges gazdaságpolitikai cél a teljes foglalkoztatottság. Tekintve a gazdasági életben állandóan érvényesülő hullámzásokat és véletlen változásokat, a rövidtávú előrejelzések szükségessége már csak abból a célból is nyilvánvaló, hogy megállapítsuk: hol vagyunk jelenleg; hová tart a gazdaság; a hosszú távon belül kitűzött célhoz közeledik-e vagy attól éppen távolodik. A könyv feltétlenül érdekes és értékes olvasmány, de mivel a bemutatott 204 egyenletes modell egyelőre csak tervezet, amelynek statisztikai verifikálása még késik, az olvasóban jogosan kelti a befejezetlen kísérlet benyomását.

Nyáry Zsigmond

Green, P. E.—Tull, D. S.: *Döntéselőkészítés a marketingben.* Budapest, 1971. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. 607 p.

Az új gazdasági mechanizmus bevezetése jelentősen megnövelte a marketing tevékenység súlyát vállalataink irányításában. A marketingvezetés legfőbb jellemvonása a vezetés más területeihez hasonlóan a döntéshozatal. Ezek a döntések azonban sok szempontból bonyolultabbak a funkcionális vezetés más területein hozott döntéseknél, elsősorban a figyelembe veendő faktorok nagy száma, sok tényező kívülről ható volta, állandóságuk hiánya, nem lineáris jellegük, számszerűsítésük és mérésük nehézsége miatt. Tovább nehezíti a marketingvezetés döntéseit az információ hiány, a kockázat nagysága és az a tény, hogy a marketing döntésen alapul sok további döntés a többi funkcionális területen. Green és Tull nálunk nemrégiben megjelent könyve (eredeti címe: Research For Marketing Decisions, Prentice-Hall, Inc. New Jersey 1966.) ennek a bonyolult döntési feladatnak az elvégzésében nyújt segítséget a marketing kutatás megszervezése, az információk helyes elveken alapuló összegyűjtése, részben pedig az így megszerzett információs anyag egzakt módszerekkel történő kiértékelése területén.

Magát a marketing-tevékenységet a szerzők természetesen nem matematikai problémaként dolgozzák fel. Részletesen foglalkoznak a marketing különböző területeivel, a marketinghez tartozó kutatásszervezéssel, a pszichológiai és szociológiai jellegű témákkal és a döntéselőkészítésben alkalmazható matematikai módszerekkel. Matematikai vonatkozásokban a könyv elsősorban a statisztikai döntéselméletre és a döntéselmélet szempontjából alapvető jelentőségű Bayes tételre támaszkodik, az ennek alapján kidolgozott módszereket taglalja.

A Bayes-módszerek azért kaptak ebben ilyen kiemelkedő szerepet, mert a marketingkutatást, mint információszerző tevékenységet részleges ismerethiány jellemzi, azaz a döntések különböző eredményeinél a relatív gyakoriság értelmében vett valószínűséget nem ismerjük, de a döntést hozó különböző erősségű véleményeket fejthet ki az alternatív eredmények bekövetkeztéről és sok esetben képes további információt szerezni a helyzet tényleges állapotáról. Az ilyen információ értéke azzal mérhető, hogy milyen mértékben csökkenti azokat a költségeket, amelyek a korábbi hiányosabb informáltság alapján hozott döntésből származnak.

A Bayes féle eljárás a marketing problémákra alkalmazva felhasználja a döntést hozónak a lehetséges események bekövetkezésének valószínűségéről, és egyes cselekvések nyomán várható üzleti eredményről alkotott véleményét, amit a vezető természetesen építhet a múltra, vagy a vizsgált problémával analóg probléma relatív gyakoriságaira. Az utólagos adatgyűjtés, újabb minta alapján a korábban meghatározott valószínűségi értékeket finomítja a ráfordításokat és a várható üzleti eredményeket pontosabban jelzi.

A marketingkutató feladata, hogy az adott cél eléréséhez vezető alternatív cselekvéssorozatokat kidolgozza, ezeket ellássa a szükséges információkkal, az így kidolgozott döntési fát elemezze és az elemzés eredményeként megalapozza a döntést hozó számára a választást. A döntéselmélet előnye, hogy az optimális döntés kialakításához szükséges legmegfelelőbb mintavétel költségei, a döntés következtében várható eredmények és veszteségek explicit alakban meghatározhatók, értékük számszerűen konkretizálható. A döntéselméletnek ezeket az előnyeit azáltal is kiemelik a szerzők, hogy részletes összehasonlítást tesznek a „hagyományos" mintavételi eljárásokkal, a Neymann—Pearson-féle hipotézis vizsgálatokkal. A könyv tartalmát 4 főbb részre oszthatjuk fel. Az 1—6 fejezetek — amelynek a marketing problematikájával, az információ értékével, a döntéshozatal Bayes szemléletű stratégiájával és az információgyűjtés taktikájával, módszereivel foglalkoznak — verbális jellegűek. A 7—12 fejezetek a magatartások osztályzását, a célszerű mintavételi eljárásokat, az adatok elemzésének és a döntési célokból való értékelésének módszereit tartalmazzák matematikai—statisztikai ismeretanyagra támaszkodva. A méréssel és csoportosítással foglalkozó 7. fejezet többé-kevésbé az alkalmazott lélektan eljárásainak marketingre történő adaptálásával foglalkozik, a mérés fogalmát abban az értelemben fejti ki, ahogy az az emberi motivációkra, érzékelésekre, magatartásokra és hajlandóságokra vonatkozik. A 8. fejezet a mintavétel „hagyományos" módszereivel, a különféle mintavételi eljárásokkal, a standard hiba, a hipotézisellenőrzés és becslés problémáival foglalkozik. A fejezet (matematikai szempontból) népszerűsítő színvonalon mozog. A 9. fejezet a mintavétel Bayes-féle módszerét ismerteti. E fejezetben a szerzők elsősorban a „hagyományos" eljárással való összehasonlításra törekszenek és eléggé meggyőzően emelik ki a Bayes-módszer előnyeit. A 10—11. fejezet a statisztikai adatok csoportosításával, a változók közötti kapcsolatok elemzésével foglalkozik. Itt rendkívül sok érdekes kérdést érintenek a szerzők, így a lineáris diszkrimináns elemzést, a faktoranalízist, a kanonikus elemzést, stb., de ezeket csak egyszerű példákon keresztül mutatják be és csak az érdeklődés felkeltését szolgálják. Hasonló módon foglalkozik a 12. fejezet a kísérleti úton nyert információk kérdésével, értékelésével, a kísérletek megtervezésével.

A következő — az előzőektől bizonyos fokú eltérő — 13—14 fejezetek a szimulációs eljárással nyerhető információkkal és az előrejelzéssel foglalkoznak. Példákat mutatnak be a Monte Carlo eljárásokra, taktikai és a stratégiai szimulációra, az üzleti és a kísérleti játékokra, valamint a heurisztikus programozásra. Ehhez hasonlóan példákon alapszik az előrejelzéssel foglalkozó fejezet is. A 13—14. fejezet véleményem szerint különösen gyengének tekinthető.

A könyv 4. részében három részletesen kidolgozott esettanulmányt találunk a Bayes féle a priori, posteriori és preposteriori elemzések gyakorlati alkalmazására. A függelék eloszlási táblázatokat közöl.

Green és Tull könyve eredetileg „magasszínvonalú elméleti képzés céljaira íródott, olyan tanfolyamok anyagaként használható, amelyeken gyakorlati piackutatási és értékesítéselemzési szakemberek vesznek részt különböző vállalatoktól”. Véleményünk szerint a könyv az oktatásban valóban jó segédkönyvként használható, a gyakorlati marketing szakemberek számára olvasása a problémák újszerű megközelítését segíti elő.

A könyv általában alkalmazási példákon keresztül mutatja be, hogy egy-egy eljárás mire használható. A felvetett problémák, eljárások száma rendkívül nagy, matematikailag igénytelen és csak minimális tájékozottságot kíván olvasóitól. Sokszor olyan benyomásunk támad, mintha egy nagyobb szabású brain-storming értekezlet anyagát rendszerezték volna a szerzők, a felmerült ötletek részletes kifejtése már könnyebben megoldható a gyakorlati marketingkutató számára. Alapgondolata a Bayes-i módszerek alkalmazása, a marketing problémákra is használhatónak és újnak mondható.

Természetesen az amerikai társadalmi—gazdasági környezet erősen érezteti hatását az egész könyvben. Kiindulási alapjai: az éles verseny, az abszolút árubőség, a gazdaság és a vállalatok óriási dimenziói és a könyvben felhozott példák (mint pl.: a kutyaeledel elhelyezési problémáinak vizsgálata egy szupermarket eladó terében, vagy a hordozható bárhűtőszekrények iránti kereslet stb.), a márka állandóságnak feltételezése stb. mind egy kicsit szokatlan a mi kisebb dimenziójú népgazdaságunkban dolgozó eladási szakemberek számára. Ennek ellenére a felsorolt módszerek megfelelően adaptálva jól segítenék vállalatainkat a piaci feltételekhez való alkalmazkodáshoz.

Pongrácz Tibor

TUDOMÁNYOS ÉLET

Az MTA Közgazdaságtudományi Intézetében folyó matematikai közgazdasági kutatásokról

Az MTA Közgazdaságtudományi Intézetében mintegy 15 éve folynak matematikai közgazdasági kutatások. Magyarországon az Intézet volt talán az egyik első olyan intézmény, ahol erre már akkor lehetőség nyílt. Ma 4—5 kutatócsoportban 15—20 olyan kutató dolgozik, akinek munkája részben vagy teljes egészében matematikai közgazdasági kutatás.

Ezek a munkák sem céljuk, sem témájuk, sem kutatási módszerük szerint nem egységesek. Vannak olyanok — alapkutatások —, amelyeknek elméleti eredménye van, mások pedig konkrét gyakorlati feladatokat oldanak meg. Egyes kutatók új matematikai modelleket dolgoznak ki, s vannak akik először végeznek valamilyen ismert modellel gyakorlati méretű számításokat.

Az ilyen — gyakorlati jellegű — kutatásokat legtöbbször más intézmények felkérésére végzik. Különösen az Országos Tervhivatallal és az Országos Anyag- és Árhivatallal vannak az Intézet matematikai közgazdászainak ilyen kapcsolatai. Mindig az aktuális munkákban vesznek részt, ezért az utóbbi években a legtöbb gyakorlati matematikai közgazdasági kutatás a távlati tervezéssel kapcsolatos.

Legrégebbi hagyományai vannak talán az Intézetben azoknak a kutatásoknak, amelyek az *Ágazati Kapcsolatok Mérlegéből* kifejlődött modellekkel (zárt, nyílt, statikus és dinamikus Leontieff modellekkel) folynak, legfontosabb matematikai eszközük pedig a lineáris algebra, matrix számítás.

Ezek a vizsgálatok javarészt Bródy András nevéhez fűződnek az Intézetben. 1969-ben megjelent *Érték és újratermelés* című könyvében összegezi e területen folytatott kutatásainak eredményét.

Vizsgálatainak kettős, elméleti és gyakorlati célja van. A gyakorlati célja, hogy olyan matematikailag megoldható számítástechnikailag kezelhető modellt állítson fel, amely alkalmas a hosszú távú tervezés néhány fontos feladatának első megközelítésére, a felölelt összefüggésrendszeren belül ellentmondásmentes tervváltozatok kidolgozására. Elméleti célja a marxi érték és újratermelési elmélet gazdasági oldalait matematikailag úgy megfogalmazni, hogy a kapott modell közvetlenül alkalmazható legyen a gazdasági gyakorlat elemzési, tervezési és döntési problémáinak számszerű megalapozására és ezáltal szerves egészbe illessze össze a marxizmus közgazdasági alapeszméit és a modern közgazdaságtan és a számítástechnika nyújtotta lehetőségeket.

E kettős célnak és a lehetőségeknek legjobban egy lineáris modell felelt meg, amelyben szereplő $A + \lambda B$ alakú mátrix sajátértékeivel ábrázol olyan régóta jólismert közgazdasági fogalmakat, mint az érték, a termelési árak, volumenarányok stb. Megmutatja azt is, hogy modellje milyen viszonyban van a termelés sokszektoros lineáris modelljeivel, a játékelméleti modellel, a Neumann modellel, a Leontief-modellel és a lineáris programozási modellel.

Beszámol még kísérleti számításokról, amelyeket részben saját maga, részben mások végeztek a modell különféle zárt, illetve nyílt változataival.

Könyvének elkészülte után fejeződtek be a dinamikus AKM modellel végzett számításai. Ilyen számítást ő végzett először Magyarországra vonatkozóan. Jelenleg is az a probléma foglalkoztatja, amelyre a dinamikus AKM-modellel végzett számításai mutattak rá, hogy az egyes ágazatok tervének hagyományos mérlegszerű egyeztetése alkalmas ugyan arra, hogy ún. piaci egyensúly jöjjön létre, azaz biztosítja a tervek ellentmondásmentességét, azonban ez nem mindig segíti elő a hosszú távú egyensúly kialakítását, a ciklusmentes fejlődést, sőt alkalmas a ciklust előidéző összetevők erősítésére.

A másik olyan terület, amelyen szintén hosszabb ideje több kutató dolgozik, a *matematikai programozás*.

Simon György és újabban Gábor Győző nevéhez fűződnek azok a kutatások, amelyeknek célja egy olyan modell-család kidolgozása, amely egyaránt szolgáltat volumen- és ártervet egy programozási feladat primál és duál feladataként.

A kutatást megelőző elméleti feltáró munkát Simon György Kondor Györggyel közösen végezte. Eredményeiket *Gazdasági hatékonyság és árnyékárak* című könyvükben foglalták össze. Ezután Kondor György kutatásait továbbra is elméleti irányban folytatta és az értékelés és a piac kérdéseivel foglalkozott nem lineáris modellekben. Simon György pedig lineáris programozási modellekkel kísérleti jellegű ex-post számítást végzett, amely azt kívánta igazolni, hogy kialakítható olyan modell, amely egyaránt kielégíti az ár- és volumenelemzés igényeit.

A kísérleti számítás után az OAÁH-val együttműködésben kezdődött meg az árprogramozási modellek tervezési célú alkalmazása. A programozás többlépcsős, így a modellek átfogják a közép és hosszú távú tervezés időhorizontját. A számításokat több célfüggvény mellett végzik, ezek között azonban kitüntetett szerepe van a fogyasztás maximalizálásának.

A modell összeállításakor kidolgoztak egyrészt egy újszerű termelési függvény típust, másrészt egy olyan módszert, amely a kötött árak és a határráfordításokon alapuló árnyékárak ellentmondását jövedelempolitikai eszközökkel mérsékeli, miközben a reálfolyamatokat alapvetően nem változtatja.

Elméleti jellegű munka, a szintén Simon Györgytől származó *reflektorprogramozás*, amely egy dekompozíciós eljárás nagyméretű lineáris programozási feladatok közelítő megoldására. Az eljárás lényege, hogy az eredeti nagy feladat helyett olyan kisméretű feladatokat kell megoldani, amelyek a nagy feladat speciális módon transzformált változatai. A szerző a reflektorprogramozást olyan lineáris programozási feladatok esetére ajánlja elsősorban, ahol a korlátozó feltételek nem oszthatók központi és szektorfeltételekre. A kutatás jelenleg is folyik és az OT Tervgazdasági Intézetének egyes munkatársai is közreműködnek benne.

A matematikai programozás matematikai elméletének továbbfejlesztéséhez járultak hozzá Martos Béla kutatásai. Hosszabb ideje a nemlineáris programozás elméletével foglalkozik.

Eredményeit, amelyek a különböző nemlineáris programozási algoritmusok hatókörét terjesztik ki kvázikonvex (kvázikonkáv), majd pszeudokonvex (pszeudokonkáv) célfüggvény esetére, a *Nem-lineáris programozási módszerek hatóköre* című munkájában foglalta össze, de különböző folyóiratokban az egyes eredmények külön-külön is megjelentek. Most van megjelenés alatt angol nyelvű könyve, amely a nem-lineáris programozás legfontosabb elméleti alapjait és megoldási módszereit dolgozza fel kézikönyvszerűen.

Folyik néhány kutatás az *általános egyensúlyelmélet* és *növekedéselmélet* területén.

Itt elsősorban Kornai János *Antiequilibrium* című könyvét kell megemlíteni. A könyv fő mondanivalója a Walras nyomán kialakult általános egyensúlyelmélet bírálata. A bírálathoz az indítékot az a tapasztalat adta, amelyet egész matematikai közgazdaságtani munkássága során, de különösen az 1968-as mechanizmus reform előkészítésével kapcsolatban szerzett. A reform előkészítésekor át kellett gondolni a gazdaság egész rendszerét, a rendszer minden fontosabb összetevőjét, megváltoztatásuk együttes hatását. Mindazok, akik e munkában résztvettek, azonban alig támaszkodhattak a szó szigorúbb értelmében vett tudományos elméletekre, így az egyetlen matematikai közgazdaságtani elméletre, a gazdaságot a gazdasági rendszerelmélet szempontjából formalizált modellel leíró egyensúlyelméletre sem. Ezért időszerűnek érezte felülvizsgálni a matematikai közgazdaságtan tudományos módszerét, alapvető feltételezéseit, tételeinek igazi jelentőségét a gazdasági valóság megismerésében.

A kritikán túlmenően azonban pozitív gondolatokat is kifejt. A gazdasági rendszerelmélet kidolgozásához új fogalmi rendszert vezet be, s néhány megállapítást tesz a jelenkori gazdaságok jellegzetességeiről. Ezzel kapcsolatban a következő témákat tárgyalja: az információs struktúrák, gazdasági szabályozás többszintűsége, motiváció, konfliktus és kompromisszum a szervezetekben, döntési folyamatok, a hasznossági függvények és a preferenciarendezés elmélete, a gazdasági rendszerek vegetatív és magasabbrendű működése.

Részletesen foglalkozik a piac problémáival. Vizsgálja a piaci egyensúly és az egyensúlytól való eltérés típusait, beszél a vevő és az eladó erőviszonyairól, a versenyről, a „vevők piacáról", az „eladók piacáról".

Az *Antiquilibrium*ban kifejtett gondolatok alapján több kutatás is folyik az Intézetben. A könyv autonóm szabályozásról szóló fejezetében kifejtett közgazdasági és modellépítési elvekre támaszkodott az a munka, amelyet Kornai János és Martos Béla közösen végeztek és *Gazdasági rendszerek vegetatív működése* címmel publikálták.

A tanulmány egyik része a szabályozási mechanizmus fogalmával, típusaival, többszintűségével, a másik része pedig az autonom szabályozás legfontosabb al-mechanizmusával, a készletjelzéseken alapuló szabályozással foglalkozik egy általános és egy speciális modell segítségével. A vizsgálat fő mondanivalója, hogy az autonóm szabályozás képes egymagában is működtetni a reálszférát, sőt annak puszta stagnálásán „vegetálásán" túlmenően még növekedését is biztosíthatja.

A modellnek egy sztochasztikus változatát VIRÁG ILDIKÓ készítette el, de ezenkívül más irányban is folyik a kutatás továbbfejlesztése.

Az Antiequilibrium a piacról, ezen belül a versenyről és a piaci adaptációról, a „vevők piacáról" és az eladók piacáról szóló fejezetekben kifejtett közgazdasági gondolatok alapján folynak SIMONOVITS ANDRÁS kutatásai, aki a sorbanállás-elméletben, az ún. prioritásos sorbanállással kapcsolatban ért el főként matematikai szempontból új eredményt, de e gondolatkör szempontjából ismertette a *Team elméletet* is.

Korábbi kutatás ugyan, de témája szerint leginkább ide sorolható TÉNYI GYÖRGY *Egyéni érdek és kollektív döntés* címmel publikált tanulmánya, amely azzal foglalkozik, hogy hogyan lehet az egyes indivíduumok preferencia skáláit aggregálni.

A növekedéselmélet területén HORVÁTH JÓZSEF végzett elemzést a Kalecki féle növekedési modellel. Az 1960—1966-os időszakra vonatkozó magyar adatokat elemezve arra a következtetésre jutott, hogy hasonlóan a szomszédos országokhoz, a „beruházástól független növekedés" (amely a gazdasági mechanizmustól, szervezéstől, begyakorlásból ered) mutatója nem pozitív. Rámutatott arra is, hogy a magyar gazdaságban mutatkozó munkaerőhiány miatt egyáltalán nem biztos, hogy a magasabb beruházási hányad magasabb növekedési ütemre is vezet.

A Harrod-Domar modell különböző determinisztikus és sztochasztikus változataiban vizsgálja az optimális felhalmozási politika tervezésének problémáit VIRÁG ILDIKÓ, nevezetesen azt, hogy a véges időhorizontú tervezési gyakorlatból eredő ingadozásokat ki lehet-e küszöbölni az ún. folyamatos tervezéssel.

Leginkább ide sorolhatók RIMLER JUDIT kutatásai is. Az a probléma foglalkoztatja, milyen mértékben eredményezik az egyes tényezők a gazdasági növekedést, fejlődést. Először a termelési függvények elméletéből jól ismert Cobb-Douglas termelési függvénnyel végzett számításokat a magyar iparra. Azonban a két tényező, az állóalapok értéke és a munkaerőráfordítás nem jellemzik elég árnyaltan a vizsgált időszak jellegzetességeit, ezért egy soktényezős számítással, a faktoranalízis módszerével próbálta feltárni a gazdaság minden területére jellemző változások közös vonását. A faktoranalízis módszerével az egymással kapcsolatban levő tényezők közös trendjének alakulását nem lehet nyomon követni. Erre azonban lehetőség nyílott a diád módszerrel.

Az alábbi kutatások elsősorban szintén a tervezéssel kapcsolatosak:

A munkaerő társadalmi újratermelésében szerepet játszó tényezők vizsgálatával és modellezésével foglalkozik KOVÁCS JÁNOS. Korábbi eredményeit — bérmodelljét és oktatástervezési modelljét — *Szakképzés és népgazdaság* című könyvében publikálta. Az utóbbi időben BONDÁR ÉVA, HORVÁTH JÓZSEF és TÉNYI GYÖRGY közreműködésével olyan modellrendszer kialakításával foglalkozik, amely átfogná a munkaerő újratermelés következő főbb folyamatait: munkaerőstruktúra, oktatás, bér és jövedelempolitika, fogyasztás, termelés.

A hosszú távú tervezés céljaira HOCH RÓBERTtal közösen kidolgoztak egy konzisztencia ellenőrzési modellt, amellyel az életszínvonal tényezők alapvető mennyiségi összefüggései gyorsan kiszámíthatók és ellenőrizhető vele, hogy a különböző életszínvonal előirányzatok nincsenek-e ellentmondásban más tervtényezőkkel.

Hoch Róbert és a vele együttműködő ANTAL KÁLMÁNNÉ, CSATÓ KATALIN, KOVÁCS ILONA, ÖRDÖG MIKLÓS kutatásaikhoz szintén használnak matematikai eszközöket, elsősorban matematikai statisztikai eszközöket. Hoch Róbert az ár és kereslet, az ár és kínálat, az árrendszer és hatékonyság, valamint az egyensúly összefüggéseit vizsgálja, munkatársai kutatják a személyes fogyasztás és gazdasági növekedés összefüggését, foglalkoznak a lakossági fogyasztás előrejelzésével, ezen belül a kereslet-jövedelem- és árrugalmassági becslésekkel, a dinamikus keresleti függvények, valamint a kereslet és kínálat egyensúlyának problémáival. Vizsgálatukat a közép és hosszú távú tervezés igényeihez alakítják. Az OT-vel és az OAÁH-val működnek együtt.

Tartalmi szempontból nagyon hasonlóak KONDOR GYÖRGY kutatásai. Ő is az egyensúlyi árak és a megfelelő termelési szintek meghatározásával foglalkozik, de kutatásának fő célja egy új módszer kipróbálása. Ez a módszer matematikai szempontból egy leképzés fix pontjának approximációja, amelyet Herbert Scarf a versenyzői egyensúlyi helyzetek megközelítésére dolgozott ki. Kondor György először a tárgykör vonatkozó irodalmát is áttekintve ismertette Scarf eredményét, majd az OAÁH felkérésére GÁBOR GYŐZŐVEL és

SIMON GYÖRGGYEL együttműködve összeállított egy, a magyar gazdaság 1968 évi tényadatait felhasználó 19 szektoros modellt. A számításokkal a módszer tervezésben való felhasználhatóságát vizsgálták.

Hosszabb ideje árproblémákkal foglalkozik RADNÓTI ÉVA. Vizsgálta az árindex számítás problémáit, konstruált egy, a fogyasztó árszínvonalról alkotott felfogását jól tükröző árindexet, foglalkozott a termelői árak, képzésének kérdésével, jelenleg pedig a kúszó infláció témaköréből könyvet ír.

Végül egy megjegyzés.

Az Intézet anyagi helyzete nem teszi lehetővé, hogy könnyen hozzáférhető számítógép kapacitást biztosítson a matematikai közgazdasági kutatások számítási munkáihoz. Ez a helyzet nagymértékben befolyásolja a kutatók témaválasztását. Sokan, akik gyakorlati feladatokhoz vonzódnak, lemondanak az ilyen témáról, mert nem éreznek magukban annyi energiát és szervező erőt, amennyit a jelenlegi feltételek mellett egy ilyen munka kivitelezése igényel.

VIRÁG ILDIKÓ

Ágazati terv-modell kísérletek (IV. ötéves terv)

A különböző matematikai modellek egyre nagyobb szerepet játszanak az előrejelzésben, a prognóziskészítésben és nem utolsósorban a tervezésben is. Az egyik legrégebben alkalmazott módszer a lineáris programozás. Emellett szimulációs modelleket, termelési függvényeket, stb. is felhasználnak a gazdaság múltbeli és várható fejlődésének elemzésére, tehát közvetve vagy közvetlenül tervezési célokra is.

A felhasználás egyik lehetséges módja az, amikor nem az egész népgazdaságra állítanak fel aggregált, nagy összefüggéseket kifejező modelleket, hanem a népgazdaság egy nagyobb funkcionális egységét, közelítőleg egy ágazatot modelleznek.

A „hagyományos"-nak tekinthető lineáris programozási modelleket nálunk viszonylag hamar megpróbálták gyakorlatilag is alkalmazni. Ezeknek az első kísérleteknek az eredményeiként születtek a hatvanas évek elején az első, még elszórt ágazati programozási modellek — a papíriparra, a textíliparra és az alumíniumiparra.

Néhány évvel később a kétszintű tervezés keretében ez a modell-alkotási tevékenység lényegesen kiszélesedett, mélyebbé váltak az ágazati modellek, de még ebben a fázisban sem érte el a teljeskörűséget. Bár az egész munka folyamán 45 szektormodell készült, ez nem fogta át a népgazdaság egészét, egyes ágazatok teljesen kimaradtak.

Mostani vizsgálatom célja az volt, hogy felmérjem, mi történt egyes ágazatokban a modellek tervezési célra való alkalmazásának területén; hogyan fejlődött, fejlődött-e egyáltalán e tevékenység.

Előljáróban annyit szükséges csupán megjegyezni, hogy a gazdaságirányítás reformjának bevezetésekor, a reform irányelveinek megfelelően az OT megszűnt az ágazati modellek szervezője, összefogója lenni, az ágazatok közül — önkéntesen — csak egyesek folytatták tovább a terv-modellek készítését.

Az itt feldolgozott információk forrása elsősorban *kikérdezés* volt, ennek bizonytalanságait azonban igyekeztem bizonyos *kontrollok*kal csökkenteni. Ilyen kontrollt jelentett az, hogy minden intézményben két interjút folytattam — az egyiket a modell készítőjével, a másikat a megrendelővel. (Itt szeretném megköszönni mindazok készségességét, akik munkámban segítségemre voltak.) Másodsorban kontrollnak tekinthető, hogy a modellezés munkájáról készült zárójelentést, illetve a minisztérium felső szerveinek szánt előterjesztést elolvastam. Ez nem jelenti természetesen azt, hogy az így nyert információk most már egészen pontosak, megbízhatóak, de feltehető, hogy az érintett ágazatokra vonatkozóan közel járnak a valósághoz. A kikérdezés *nem* volt teljes körű, eredményeit is ennek megfelelően kell értékelni. Az ágazati gazdasági minisztériumok közül nem jártam a Közlekedés- és Postaügyi, sem a Mezőgazdasági- és Élelmezésügyi Minisztériumban.

Az előre elkészített interjúvázlat alapján folytatott beszélgetésekből elég sok információt nyerhettem. Ezeket olyan formában dolgoztam fel, hogy lehetőleg minél kevesebb vesszen el belőlük. Ennek érdekében információimat két *táblázatba* foglaltam. Az egyikben magukra a modellekre vonatkozó adatokat, a másikba a felhasználást jellemző információkat foglaltam össze. Az egyes táblázatokon belül jól látható, hogy az egyes intézményeken belül hogyan folyt a matematikai tervezés, illetve könnyen összehasonlíthatók az egyes modellek. A táblázatba mindazokat az objektív információkat beépítettem, amikre szert tettem. Egy táblázat azonban, akár egy modell, nem képes a tartalmát jelentő adatokat, közléseket súlyozni.

E munka folyamán nem a tervkészítés folyamatának egészét tanulmányoztam, ennek csak egy töredékével találkoztam a matematikai tervezés helyzetének kutatásakor. Ahhoz, hogy reálisan értékelhessem azt a folyamatot is, amelynek eredményeként a mai helyzet kialakult, feltétlenül szükséges lenne a hagyományos tervezéssel való kölcsönös összefüggések tanulmányozása. Ezt még nem végeztem el.

A matematikai tervezés elsősorban ágazati kutatóintézeteken, szervezési intézetekben folyik. Legfontosabb jellemzői:

— *még ma is a kísérleti jelleg* — ez mind a modell összeállítására, mind az adatok minél pontosabb megszerzésére, mind pedig a felhasználás lehetőségeire vonatkozik;

— mivel a teljes népgazdaságot, egységes elvek szerint átfogó modellrendszer kidolgozását semmilyen szerv nem irányítja, — az újfajta tervezés csak *elszórtan folyik,* és — az egyes modellek *koncepciójukban erősen eltérnek* egymástól.

*

A *koncepcionális eltéréseket* jellemzi, hogy a három valóban lefolytatott, illetve folyó programozás alapvetően eltér egymástól. Találunk vállalati programozási modellekre épülő egyszintű ágazati modelleket, hangsúlyozottan termékszemléletű egyszintű teljes ágazati modellt, és végül egy elvetélt kísérletben az ágazat kétszintű tervezésére törekedtek.

Bár a táblázat értékelésre nem képes, bizonyos fokig értékelő szempontot juttattam kifejezésre az oszlopok sorrendjében.

Első helyen áll a Kohó- és Gépipari Minisztérium. Itt folyt a legkomolyabb munka, s talán itt haladtak legmesszebb a felhasználás tekintetében is. A KGM az egyetlen olyan ágazat, ahol lineáris programozáson kívül két vállalatra kidolgoztak célfüggvényében kvadratikus terv-modellt is.

A munka komolyságát jellemzi, hogy a résztvevőknek előkészítésképpen tanfolyamot indítottak. A modellezési munka tapasztalatait felhasználva módszertani útmutatót adtak ki, s ezt az ágazat minden vállalatának megküldték. Az ágazat vállalatai önkéntesen vehettek részt a vállalatokra kidolgozandó matematikai programozásban — így az ágazat 126 vállalatából végülis 51-re készült el a középtávú terv matematikai modellje. Ez az 51 vállalat az ágazat termelésének 68 százalékát képviseli.

A vállalati modellek felhasználásával ágazati illetve alágazati modelleket dolgoztak ki a kohászatra, a járműiparra és a gépek-, és gépi berendezések gyártására. Ezek az *ágazati modellek nem kapcsolódtak logikailag (szervesen) a vállalatiakhoz,* bizonyos központi feltételek beépítésével egyszintűvé „tolták össze" a modellt.

A kohászati modellt értékelték úgy, hogy nagyon jól sikerült. Ennek két alapvető oka volt: egyrészt viszonylag kevés vállalattól kellett beszerezni az adatokat, s ez lényegesen megbízhatóbban sikerült, mint a többi modelleknél, másrészt — és valószínűleg a nagyobb felhasználás is ennek következménye — nagyon jól illeszkedett a hagyományos tervhez, a kohászati integráció kérdésében a modell által kihozott eredmény egyezett a minisztérium koncepciójával.

Az Építésügyi és Városfejlesztési Minisztérium modellje csak azért került a könnyűipari modell elé, mert ezzel több számítást végeztek. Tökéletesítve fel kívánják használni az ötödik ötéves terv munkáiban, akkor más kézzelfoghatóbb eredményeket várva tőle.

Az építőipar sajátosságait juttatja kifejezésre az, hogy a modell *termékszemléletű.* Az egész építőipar és az építőanyagipar, (mint ipari háttér) tevékenységét programozza, úgy tekintve ezeket, mint egyetlen országos szerv tevékenységeit. A modell érdekessége és egyben termékszemléletének magyarázata is, hogy koefficienseit konkrét építőipari normatívák felhasználásával számították ki. A már elkészült épületek adatai alapján előállított naturális és költségvetési normatívákat (68-as áron) egyaránt felhasználták. (Azt, hogy egy épületfajtának egy bizonyos technológiával mennyi és milyen az anyagigénye, két mátrix összeszorzásával számították ki. Az egyikben az egyes épületekre vonatkozó szerkezeti anyagok, a másikban az egyes szerkezeti anyagok alapanyagigénye volt feltüntetve.)

A modellt jellemzi, hogy nyereség célfüggvénnyel nem számoltak, s az új gazdasági mechanizmusból fakadó pénzügyi konzekvenciákat sem építették be. Ennek az az oka, hogy a nyereség vállalati kategória, viszont a modell termékszerkezetű, s e kettő egy modellen belül nem egyeztethető össze. A normatívák alapján alkotott modell viszont lehetővé teszi részletes technológiai változatok kidolgozását.

1. táblázat

A modellekre vonatkozó információk

Kérdések / Intézmény	KGM	ÉVM	KIP. MIN.	NIM
A program szerkezete	– főképp vállalati (51) – 1 ágazati, (kohászat) – 2 alágazati (járműipar, gépek és gépi berend.) az egész tárcára nem készült modell – csak a vállalatiak összegzése	– az egész ágazatra (+építőanyagiparra, mint ipari háttérre) egyszintű – mint egyetlen országos szerv tevékenységére – termék szerkezetű	*1. fázis:* 1971-ig – 10 alágazati modell kétszintű összekapcsolásával, teljes körűen *2. fázis:* 1971-től – 1 modell (alágazati) – egyszintű	*éves* tervezés modellje tevékenységre
linearitás	lineáris de két vállalatra készült célfv-ében kvadratikus modell is	lineáris	lineáris	lineáris
méretei	vaskohászat: 560 × 670 járműip.: 800-as gépek és gépi ber.: 1200-as	147 × 237	1. 10 modell kb. 200–500-as matrix 2. még nem tudják	160–170×70–75
célfüggvények	– fedezeti nyereség max. (egész beruh. keretet ágazati szinten elosztva) – fedezeti nyereség max. (beruh. keretek egy részét váll szinten elosztva) – dollár egyenleg max. – beruh. ktsg. min.	– beruházás min. – létszám min. – többletkibocs. max.	1. – vállalati nyer. – devizaegyenleg max 2. fejlesztés-központú modell célfv.: adott termékmennyiség min. fejlesztési ktsggel	– nyereség max – exportkihozatal max. – létszám min. – költségvetési kapcsolatok egyenlegének max.
időszerkezet	csak az utolsó tervévre (ber. készültségi fok szerint, mint ráfordítást veszi figyelembe)	csak az utolsó tervévre (ber.: csak azt ami 74-ig belép a termelésbe)	csak az utolsó tervévre (beruházást is)	éves, de becsülhető vele 1975-re is

tartalmaz-e pénzügyi jellegű változókat is?	+ beruh. forrás-feltétel (saját alap, középlejáratú hitel, ktsgvetési juttatás)	+ csak hitelváltozó	+ újfajta pü-i változók (UGM – teljes nyereségvizsgálat)	+ nyereségmegosztás
teljeskörű v. kiemel?	kohászati teljeskörű alágazataikban minimális az elhanyagolás, 126 vállalatból 51 vett részt. (68%)	teljeskörű	1. teljeskörű (tanácsi és szöv. reprezentált) 2. kiemeli a ruh. ipart	teljeskörű
az adatok forrása	– stat. (váll-i mérlegadatok) – tervdokumentumok („0" terv, hagyományos váll. terv 75-re) – KGM terv, más tárca-adatok – becslés (kapacitás terhelés termékekre, beruházás, ált. „adatzsürizés" gyakori korrigálás.)	– konkrét építőipari normatívák (valós épületek „keverésével") ráf. koefficiensek, technológiai változások – ágazati tervszámok – becslés: gépek besz. értéke, normaóraszükséglet technológiák súlyozás	– állami ip. teljes körű adatfelvétel; tanácsi, szöv. reprezentatív – KIP. Min. KKM, OT terv-jellegű adatok (kibocsátás, fejlesztés) – becslés: (kker. árak, tervek bontása kapacitások között)	– vállalati tényadatok – tervdokumentumból korlátok – szakértői becslés, a tényszámok dinamizálása: technológiai vált. előrebecslése
„felső szintű korlátok"	KGM-től (OT-tól *nem*)	ÉM, OT (beruh. keret)	KIP. Min. tervkoncepció ill. bázisidőszaki létszám, mint maximum	OT
institucionális háttér	KGM Távlati Fejl. Főoszt. rendelte KGM ISZSZI-től	ÉM Közg. Főoszt. rendelte ÉM SZÁMGÉP-től	KIP. MIN. Iparfejlesztési Főoszt. rendelte a Könnyűipari Szervezési Int-től	

2. táblázat

A modellek felhasználása

Kérdések / Intézmény	KGM	ÉVM	KIP. MIN.	NIM
egyáltalán számoltak vele?	igen	kétszer futtatták a modellt	egyszer számoltak vele	nem
hány variáns?	4 célf. szerint + egyszeri korlátmódosítás, érzékenységi vizsg. főleg a váll. modelleken	3 célf. szerint, érzékenységi vizsg. *nincs*	2–3 célf. szerint, variánsok nincsenek, mert az első futtatás adatai nem értelmezhetőek	—
a modell-munka és a terv-munka időbeni eltérése	kb. egyidőben (ágazatiaknál 70. szept.-ben értékelés) a váll-i modelleknél a mat. pr. bizonyos értelemben megelőzte a hagyományos tervezést (először hagyományos „0" terv, programozás, azután készült a váll.-i ötéves terv)	a hagyományos terv nagy vonalakban a modell számszerűsítésekor kész (tervelőirányzatok átvétele) 69. végén elvi modell vitája, 71. aug. első futtatás, 71. dec. második futtatás (korrekciókkal)	hagyományos terv 68. óta ellenterv jellegű (OT-vel szemben), nem teljes körű számítások; a modell első számítása 1/2–3/4 évet csúszott (aztán megszűnt)	—
készült-e zárójelentés, volt-e vita	igen	zárójelentés készült, de nem vitatták meg	a zárójelentést szűk körben megvitatták	—
állásfoglalás a vitán	folytatni kell	annak ellenére, hogy nem vitatták, tovább finanszírozzák	folytatni kell	—

tényleges felhasználás	nem bizonyítható, de beszéltek róla, hivatkoztak rá	a gyak. tervezésnek nem is adhatott még segítséget (elsősorban konzisztencia vizsg.) de a létrehozott adattár komoly segítség a hagyományos tervezésnek	az adatok bizonytalansága miatt nem adott értelmezhető eredményt	–
OT modellel való kapcsolat	adataikat beépítették az OT modellbe, de nem tudják mennyire	–	–	–
Többszintűvé tétel gondolata	– eredetileg úgy indult, de a vállalatok önkéntes részvétele miatt nem sikerült – nem tudják érdemes-e, amíg ekkora a bizonytalanság a szabályozókban (szabályozó módosítás – alapadat módosítás)	– nem merült fel és ebben a modellben nem is lehet (szervezet – termék eltérés miatt)	– többszintűként indult, nem sikerült. Újnál nincs.	–

A modellel végzett számítások elsősorban kísérleti és konzisztencia-vizsgálat jellegűek voltak. A második számolásban az alapadatokat részben korrigálták, de még így sem kaptak a hagyományos tervezés számára értelmezhető eredményeket. A minisztérium és a modellezők kapcsolata elég laza, a számolás után sem tárgyalta a modellt minisztériumi fórum. Ezzel szemben a modell-munka nagy eredményének tartják, és a hagyományos tervezésben is felhasználják a normatívákból létrehozott adattárat.

A *Könnyűipari Minisztérium* első nekifutásra sikertelen, ezért abba is hagyott tervmodelljét egyrészt a kétszintűség gondolata jellemzi, másrészt ez az a modell, amely az új irányítási rendszer megváltozott körülményeit leginkább figyelembe veszi. Mind a változók, mind a feltételek közé beépítették a szabályozókat és azok hatásait. A teljes könnyűipari ágazatot szándékozta átfogni, 10 szakágazati modell segítségével.

Bizonyos fokig minden modell sajátja, hogy az első számítás sikertelen. Ez történt ebben az esetben is. A modell kidolgozói javaslatot tettek a minisztériumnak a munka folytatására — elsősorban az adatbázis megbízhatóságának növelésével —, a minisztérium azonban nem finanszírozta tovább ezt a teljes körű munkát.

Ehelyett rendelt egy újabb, immár lényegesen kisebb eredményekkel kecsegtető modellt. Ez csak a ruházati iparokat fogná át, egyszintű lenne. A vizsgálat időpontjában még nem döntötték el, hogy melyik tervidőszakra és milyen aggregáltsággal dolgozzák majd ki. Tehát ez a modell még teljesen az előkészítés fázisában van. Felhasználás szempontjából — mint az eddigiekből is látható — ez a modell áll legrosszabbul.

Mivel a vizsgálat elsősorban a középtávú tervezéssel foglalkozott, számunkra periférikus jelentőségű a Nehézipari Minisztériumban kidolgozott éves tervezési modell. Ennek oka elsősorban az, hogy az éves tervezés inkább sorolható az operatív irányítás fogalomkörébe, azaz messze áll a strukturális döntések megalapozásától. Ugyanakkor ez az a modell, amely legmesszebb áll a megvalósulástól, a valóságos számítástól. A NIM-ben meg sem próbálkoztak az egész ágazatra vonatkozó középtávú modell-tervezéssel, sőt még azt is megkockáztatom, hogy fel sem merült az igény. A minisztérium apparátusában ezt a tárca heterogenitásával magyarázták.

*

A folyamatos matematikai tervezés számos feltétel fennállását kívánja meg. Első és legfontosabb ezek közül a *szakértelem*. Tapasztalataim azt mutatják, hogy a hagyományos tervezés apparátusa nem került közelebb a megfelelő „passzív" szakmai tudáshoz, mint a harmadik ötéves terv készítése idején (eltekintve néhány kivételesen ambiciózus tervezőtől).

Igen fontos feltétele lenne az egységes, azonos koncepción alapuló, modell-épületekké szervezhető modellek kialakításának az azonosan szervezett, erre a munkára specializált *apparátus*. Ilyet nem hoztak létre, és így nincs is a modellrendszer gondolatának bármiféle intézményes „hordozója", csupán a módszert alaposan ismerő egyének vannak. Ezek szinte egymástól függetlenül, a létező apparátus különböző posztjain dolgoznak. Részben ebből adódik az egész tevékenység szétszórtsága.

A harmadik, de nem kevésbé fontos feltétel a megfelelő *adatszolgáltatási rendszer*. Ezt még az egyes ágazatokon belül sem sikerült megteremteni. A modell számára szükséges bontásban az adatokat egyszer, sok személyes utánajárással sikerült összeszedni a vállalatoktól. A vállalati nyilvántartási rendszer azonban változatlan, tehát egy esetleges újabb modellezési munkánál ugyanígy számolni kell az adatszerzés nehézségeivel. A vállalati adatgyűjtés rendszerét ugyanis részben az ellenőrzés, részben a hagyományos tervezés adatigényeinek megfelelően alakították ki.

Az általános, „klimatikus" feltételek igen nagy mértékben befolyásolják bármely tudományos eredmény átkerülését a gyakorlatba. Úgy tűnik fokozottan igaz ez a társadalomtudományokra. Ha tehát egy újfajta tervezési eljárás olyan szakmai „klímá"-ba kerül, amelynek jellemzője a konzervatívizmus, a változatlanság és a változtathatatlanság, akkor kérdéses, hogy bevezethető-e egyáltalán.

Ennek az általános kultúrának igen fontos és a mai állapotot jellemző része a számítástechnika átvétele és beépülése a gazdaságirányításba, a társadalom egész életébe. Tény az, hogy a számítógép egyes termelő üzemeinkben és gazdaságirányítási szerveinkben is bizonyos fokig presztízs-szükségletté vált. Ezzel magyarázható, hogy a modellmunka számítástechnikai feltételei az elmúlt években valamelyest javultak, a feladatok megoldásának számítástechnikai lehetőségei pedig egyenesen rohamosan fejlődtek. A javuló feltételek azt a reményt keltik, hogy a matematikai modellek felhasználása az ágazati tervezésben a mainál szélesebb körben terjedni fog, s egyre inkább egyenrangú társává válik a hagyományos tervezésnek.

FARKAS KATALIN

CONTENTS

CONCEPTS AND METHODS

BOOK REVIEWS

SCIENTIFIC LIFE

СОДЕРЖАНИЕ

ПОНЯТИЯ И МЕТОДЫ

О КНИГАХ

НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója
Műszaki szerkesztő: Helle Mária
A kézirat nyomdába érkezett: 1972. XI. 30. Terjedelem: 8·05 (A/5) ív
73.74398 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

Ára: 12,– Ft
Előfizetés egy évre: 40,– Ft

INDEX: 26793

TARTALOM

FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK

KÖNYVEKRŐL

TUDOMÁNYOS ÉLET

1828

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST