SZIGMA

Matematikai közgazdasági folyóirat

A Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai-Közgazdasági Szakosztályának lapja

*

E szám szerzői:

Bod Péter, a közgazdaságtudományok doktora, az MTA Matematikai Kutató Intézete tudományos főmunkatársa, dr. Fényes Tamás, kandidátus, az MTA Matematikai Kutató Intézete tudományos főmunkatársa, dr. Hosszú Miklós, a matematikai tudományok doktora, egyetemi tanár, Gödöllői Agrártudományi Egyetem, Karlik Erzsébet, Gödöllői Agrártudományi Egyetem, Kornai János, a közgazdaságtudományok doktora, az MTA Közgazdaságtudományi Intézet tudományos tanácsadója, Kovács Álmos, az INFELOR csoportvezetője, Marton Ádám, kandidátus, a Központi Statisztikai Hivatal osztályvezetője, Nyáry Zsigmond, a Központi Statisztikai Hivatal főelőadója, Popova Tinka, az Országos Tervhivatal munkatársa, dr. Sári József, a Magyar Nemzeti Bank osztályigazgatója, Sivák József, az Országos Tervhivatal Tervgazdasági Intézete előadója, Szelényi László, aspiráns, Gödöllői Agrártudományi Egyetem, Szilágyi György, kandidátus, a Központi Statisztikai Hivatal osztályvezetője, dr. Tóth József, kandidátus, tanszékvezető egyetemi tanár, Gödöllői Agrártudományi Egyetem, Vita László, a Központi Statisztikai Hivatal főelőadója, Zágon Csaba, a Központi Statisztikai Hivatal munkatársa

Szerkesztőség: Budapest XI. Budaörsi út 43–45.

Levélcím: 1361 Budapest. Pf. 11.

Terjeszti a Magyar Posta. Előfizethető bármely postahivatalnál, a kézbesítőknél, a Posta hírlapüzleteiben és a Posta Központi Hírlap Irodánál (KHI 1900 Budapest V., József nádor tér 1.) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215–96162 pénzforgalmi jelzőszámára. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest V., Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban

Előfizethető és példányonként megvásárolható: az AKADÉMIAI KIADÓ-nál, 1363 Budapest V. Alkotmány u. 21. Telefon: 111–010. Pénzforgalmi jelzőszámunk: 215–11488., és az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLT-ban, 1368 Budapest V., Váci u. 22. Telefon: 185–612. Előfizetési díj egy évre: 40,–Ft

VITA LÁSZLÓ

A főkomponens-elemzés alkalmazása az indexszámításban

1. Bevezetés

Mint ismeretes, az indexszámítás feladata a következő: adva van n termék (árucikk), és t számú időszakra nézve ismerjük e termékek egységárait és a belőlük termelt (eladott stb.) mennyiségeket. E mennyiségek ismeretében választ kell adnunk arra a kérdésre, hogy az n termék összességére nézve hogyan alakultak átlagosan az árak, illetve a termelt mennyiségek ([16]: 362. és 366. old.). Ez úgy is megfogalmazható, hogy az árszínvonal, illetve a termelési színvonal időbeli változásának mérése a cél.[1]

Jelölje a továbbiakban p_{ik} a k-adik termék i-edik időszakra vonatkozó egységárát, q_{ik} pedig a belőle az i-edik időszakban termelt mennyiséget. Alapadataink ekkor egy-egy $t \times n$ típusú ár- ($\mathbf{P}$), illetve volumenmatrixba ($\mathbf{Q}$) foglalhatók:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{t1} & p_{t2} & \cdots & p_{tn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{t1} & q_{t2} & \cdots & q_{tn} \end{bmatrix}. \tag{1.1}$$

A jelen cikkben a főkomponens-elemzést használjuk fel a vázolt indexszámítási probléma megoldására. Erre kétféle lehetőség is kínálkozik:

1. vagy az egyes termékre, termékcsoportokra (szektorokra stb.) vonatkozó ár- és volumen indexeket,

2. vagy a különböző időszakok mennyiségeinek (árainak) felhasználásával képzett árindexsorokat (volumenindexsorokat), esetleg aggregátumokat tekintjük változóknak.

Itt mindjárt meg kell jegyeznünk, hogy a főkomponens-elemzés fenti két alkalmazási módja között alapvető különbség van.

Az első *alkalmazási mód* esetén ugyanis az alapulvett egységek (termékek, termékcsoportok, szektorok stb.) árváltozás (volumenváltozás) szempontjából való *homogenitásának*, tehát annak a kérdésnek a vizsgálatán van a hangsúly, hogy az adott egységekhez tartozó indexek (a továbbiakban: *részindexek)* kielégítően jellemezhetők-e egyetlen index, az ún. *főindex* segítségével. Ha

[1] Sok esetben nem az időbeli változás, hanem a térbeli különbözőség elemzésére van szükség. Az egyszerűség kedvéért azonban most is és a továbbiakban is időbeli összehasonlításról beszélünk. Megfontolásaink nagy része azonban — értelemszerű módosításokkal — térbeli összehasonlítás esetén is érvényes. Ez természetesen nem jelenti azt, hogy térbeli összehasonlítás esetén nem adódhatnak speciális problémák. Ezek vizsgálatára azonban csak egy későbbi tanulmányban szándékozunk kitérni.

ugyanis az alapulvett változók — azaz a részindexek — mind nagy (1-hez közeli) súllyal szerepelnek az első főkomponensben, biztosak lehetünk abban, hogy a főindex önmagában is jó jellemzője a vizsgált jelenségnek. Ha ezzel szemben azt találjuk, hogy a részindexek egyes csoportjai egy főkomponenshez nagy súllyal, az összes többihez pedig elhanyagolhatóan kis súllyal kapcsolódnak, akkor ezt úgy értelmezhetjük, hogy a főindex mellett feltétlenül szükség van a részindexek használatára is az elemzés során. A főkomponensekre vonatkozó súlyok minden más alakulási sémája esetén problematikussá válhat az eredmények interpretálása. Ha a főkomponens-elemzés eredményei azt jelzik, hogy a főindex, vagy a főindex és a részindexek együttesen jól jellemzik a vizsgált jelenséget, akkor — véleményünk szerint — a főindex a megfelelő részindexeknek (a részindex a megfelelő egyedi indexeknek) mindig valamilyen Σpq (pq) adatokkal, és semmiképpen sem a főkomponenselemzés során adódó súlyokkal súlyozott átlagaként állítandó elő, hiszen az utóbbiak kizárólag a részindexek különböző időszakokra vonatkozó értékei közötti korrelációktól függenek, ami önmagában semmiféle garanciát nem ad arra nézve, hogy az egységek közgazdasági fontossága kifejezésre jusson. ([16]: 360—363 és 373—376. old.) Az indexek számszerű értéke tehát ilyenkor nem közvetlenül a főkomponens-elemzés eredményeiből adódik, ami egyben a később ismertetendő *Tintner*-féle és *Rutherford*-féle módszerek előzetes kritikájának is tekinthető. Ezt még azzal egészíthetjük ki, hogy a főkomponens-elemzés ilyen alkalmazási módja során — különösen egyedi termékek alapulvétele esetén — problémát okozhat az is, hogy a változók száma meghaladhatja a megfigyelések számát.

A főkomponens-elemzés *második*nak említett *alkalmazási módja* esetén a fő cél az, hogy az alapulvett indexsorokat — a lehető legkisebb információveszteség mellett — egyetlen indexsorral helyettesítsük. Ebben az esetben tehát — az előbbi esettel ellentétben — az indexsor számszerű értékeinek meghatározásán van a hangsúly, s erre a főkomponens-elemzés eredményeit közvetlenül fel is használjuk.

G. Tintner, aki már egy 1946-ban publikált cikkében leírja a főkomponenselemzésnek egy indexszámítási alkalmazását, s az alkalmazás módját és az eredmények interpretálását két számszerű példával is illusztrálja ([24]: 482—485. old.), az elsőnek említett lehetőséget választja. A főkomponens-elemzést négy cikkcsoport standardizált (0 átlagú és 1 szórású) volumenindexeire, illetve három cikkcsoport standardizált árindexeire alkalmazva arra az eredményre jut, hogy az első főkomponens mindkét esetben gyakorlatilag kielégítő mértékben megmagyarázza a megfelelő csoportindexek varianciáját, azaz, hogy ,,a vizsgált időszakban az amerikai gazdaságban minden bizonnyal létezett egy «általános termelésnek» nevezhető tényező" (483. old.), illetve egy olyan ,,általános árindex, ami nagyon jól megmagyarázná a cikkcsoport árindexeinek ingadozását". (485. old.) Azt is meghatározza, hogy a standardizált csoportindexek mekkora súllyal szerepelnek az első főkomponensben. Tintner módszere lényegében az *E. C. Rhodes* által 1937-ben javasolt ,,gazdasági aktivitási indexíí [19] tökéletesített változata. Rhodes a gazdasági aktivitás általános indexét ugyanis a gazdasági élet különböző parciális mutatóiból számított indexek súlyozott átlagaként határozta meg, és a súlyokat lényegében faktoranalitikus módszerrel, de igen kezdetleges módon becsülte.

Az *R. S. G. Rutherford*-tól származó ,,főfaktor-megközelítés" [20] részben a Tintner által javasolt módszer gyakorlati alkalmazásának, részben pedig a Tintner-féle gondolatmenet továbbfejlesztésének tekinthető. Rutherford ugyanis a különböző gazdasági szektorokra vonatkozó indexeket egy általános index indikátorainak tekinti, s a faktoranalízis modelljéből indul ki. A faktorsúlyokat a főkomponens-elemzés eredményeivel közelíti. Nem zárja azonban ki annak lehetőségét sem, hogy az egyes szektorokra vonatkozó indexek csak egynél több faktorral írhatók le, ami — saját bevallása szerint is — problematikussá teheti az eredmények interpretálását. A módszer problémájaként említi meg azt is, hogy az csak az általános index standardizált értékeinek meghatározására alkalmas, melyeknek valamilyen „természetes" skálára való visszatranszformálása nem egyértelmű.

Az eddig vázolt módszerek ezen túlmenő kritikájára már a főkomponens-elemzés kétféle alkalmazási módjának ismertetése során kitértünk.

A *H. Theil* által javasolt BL-módszernek[2] [22] az az elsődleges célja, hogy egy olyan árindexeket tartalmazó **p** és egy olyan volumenindexeket tartalmazó **q** vektort határozzon meg, melyeknek **pq**′ diadikus szorzata a lehető legjobban megközelíti az aggregátumok

$$\mathbf{A} = \mathbf{PQ}' = \left[\sum_{k=1}^{n} p_{ik} q_{jk}\right] \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, t) \tag{1.2}$$

matrixát, pontosabban, amelyekre nézve az

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{pq}'\|^2 = \mathrm{tr}(\mathbf{AA}') - 2\mathbf{p}'\mathbf{Aq} + \mathbf{p}'\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}'\mathbf{q} \tag{1.3}$$

euklidészi normanégyzet minimális.[3] Ekkor a **p** vektor az **A** matrix oszlopainak megfelelő változók, a **q** vektor pedig az **A** matrix sorainak megfelelő változók első főkomponensének alkalmasan normált értékeiből áll.[4] Ebben a vonatkozásban a BL-módszer a főkomponens-elemzés második alkalmazási módjának egyik realizálása.

Kloek és *deWit* — a BL-módszer első numerikus alkalmazói — felismerték, hogy a BL-módszer alkalmazása egyirányú torzítást rejt magában [12], aminek kiküszöbölése céljából kidolgozták a BLAU-módszert.[5] A BLAU-módszer csak annyiban tér el a BL-módszertől, hogy az (1.3) kifejezést a

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A} - \mathbf{pq}') = \mathrm{tr}(\mathbf{A}) - \mathbf{p}'\mathbf{q} = 0 \tag{1.4}$$

feltétel mellett minimalizálja, ami nem jelent a BL-módszertől való lényeges eltérést.

Kloek és *vanRees* az aggregátumoktól való abszolút eltérések négyzetösszege helyett az azoktól való relatív eltérések négyzetösszegét minimalizálják, és az így módosított BL-módszert DBL-módszernek[6] nevezik [13]. E módosítást azzal indokolják, hogy az aggregátumoktól való abszolút eltérések figyelembe-

[2] A rövidítés a *B*est *L*inear Index Numbers (= Legjobb lineáris indexek) elnevezésre utal.

[3] A tr(·) szimbólum a zárójelbe tett matrix nyomát, azaz a matrix főátlójában álló elemek összegét jelöli.

[4] Ez úgy értendő, hogy az első esetben az **A** oszlopai, a második esetben pedig az **A** sorai jelentik a szóbanforgó változókra vonatkozó megfigyeléseket. Vö. ezt még a 6. lábjegyzetben mondottakkal is.

[5] A *B*est *L*inear *A*varage *U*nbiased Index Numbers (= Legjobb lineáris átlagosan torzítatlan indexek) elnevezés rövidítése.

[6] A *D*eflated *B*est *L*inear Index Numbers (= Deflált legjobb lineáris indexek) elnevezés rövidítése.

vétele implicit súlyozást rejt magában, ami nem kívánatos. Ezt küszöböli ki az abszolút eltérésekről a relatív eltérésekre való áttérés. Mint látható, ez a módosítás sem jelent a BL-módszertől való lényeges eltérést.

A BL-módszer és módosított változatai abból a – nézetünk szerint hibás, pontosabban: csak speciális esetekben helytálló – feltevésből indulnak ki, hogy az

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} q_{jk} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, t)$$

aggregátumok egy csak i-től függő p_i átlagár és egy csak j-től függő átlagos mennyiség szorzatára bonthatók fel, hiszen éppen az e felbontás útján adódó $a_{ij} - p_i q_j$ eltérések négyzetösszegének minimalizálását tűzik ki célul. Ennek azonban – bár ez az indexek számszerű értékére általában nem hat ki – közgazdaságilag csak akkor van értelme, ha *egy bizonyos fajta árucikk* különböző területi egységekre, vagy különböző fajta minőségi változataira vonatkozó ár- és mennyiségi adatokról van szó ([16]: 428–429. old. és [18]). Ilyen esetben alkalmazza egyébként *F. Divisia* is ([7]: 1008. old.), akire e felbontás felfedezőjeként szoktak utalni ([1]; [9]). Ha azonban különnemű, közvetlenül nem összesíthető termékekről van szó, – márpedig a gyakorlatban a legtöbbször ez a helyzet – a szóbanforgó felbontás értelmét veszti, formálissá válik, s ugyanez a helyzet a BL, BLAU és DBL módszerekkel is.

A most következő 2. pontban mi is a másodiknak említett módon használjuk fel a főkomponens-elemzést az indexszámítás feladatának megoldására. E felhasználás azonban, mint látni fogjuk, jóval direktebb, mint a Theil-től származó BL-módszer és módosított változatai.

2. Az egzakt főkomponens-indexek

Tekintsük az aggregátumok (1.2) matrixa alapján igen egyszerűen meghatározható t számú, csak az állandó súlyként használt mennyiségek, illetve egységárak eredetében különböző, állandó súlyú

$$_pI_i^{(j)} = \frac{\sum_{k=1}^{n} p_{ik} q_{jk}}{\sum_{k=1}^{n} p_{1k} q_{jk}} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, t) \tag{2.1}$$

bázis-árindexsort, illetve

$$_qI_i^{(j)} = \frac{\sum_{k=1}^{n} p_{jk} q_{ik}}{\sum_{k=1}^{n} p_{jk} q_{1k}} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, t) \tag{2.2}$$

bázis-volumenindexsort, és foglaljuk ezeket egy-egy t-edrendű

$$\mathbf{I}_p = [{}_pI_i^{(j)}], \tag{2.3}$$

árindex-, illetve

$$\mathbf{I}_q = [{}_qI_i^{(j)}] \tag{2.4}$$

volumenindex-matrixba. Az indexsorok képzésekor — az általánosság megszorítása nélkül — feltettük, hogy a legelső időszak a bázis.

Ekkor nyilvánvaló, hogy a (2.1) alatti t számú bázisárindexsor (a (2.2) alatti t számú bázis-volumenindexsor) mindegyike az árszínvonal (termelési színvonal) időbeli változását mutatja a bázisként választott első időszak árszínvonalához (termelési színvonalához) képest, és semmi okunk sincs arra, hogy a t számú indexsor közül bármelyiket is előnyben részesítsük a többivel szemben, ha az árszínvonal (termelési színvonal) időbeli változását kívánjuk mérni. Ez úgy is interpretálható, hogy az ${}_pI_i^{(j)}$ $(j = 1, 2, \ldots, t)$ $[{}_qI_i^{(j)}$ $(j = 1, 2, \ldots, t)]$ változók, — melyekre nézve a (2.3) alatti $\mathbf{I}_p$ matrix (a (2.4) alatti $\mathbf{I}_q$ matrix) egyes oszlopai t számú megfigyelést jelentenek, az „árszínvonal" („termelési színvonal") t számú indikátorának tekinthetők.[7] A csak az elméleti absztrakció síkján létező, közvetlenül nem mérhető „árszínvonal" („termelési színvonal") időbeli alakulásáról tehát a (2.1) bázis-árindexsorok ((2.2) bázis-volumenindexsorok) adnak képet.

Mivel a további tárgyalás szempontjából teljesen közömbös az, hogy ár-, vagy volumenindexsorokról van-e szó, a (2.1) és (2.2), illetve a (2.3) és (2.4) általánosításaként bevezetjük az

$$I_i^{(j)} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, t) \tag{2.5}$$

illetve az

$$\mathbf{I} = [I_i^{(j)}] \tag{2.6}$$

jelölést, ahol $I_i^{(j)}$ a j-edik időszak súlyaival képzett bázisindexsor i-edik időszakra vonatkozó értéke.

Az $I^{(j)}$ indikátorok mögött meghúzódó, közvetlenül nem mérhető változót I^*-gal jelölve, az $I^{(j)}$ indikátorok és az I^* közötti kapcsolat egyik legegyszerűbb leírása az

$$\begin{aligned} I^{(1)} &= a_1 I^* + u_1 \\ I^{(2)} &= a_2 I^* + u_2 \\ &\vdots \\ I^{(t)} &= a_t I^* + u_t \end{aligned} \tag{2.7}$$

statisztikai modell, amelyben az u_j $(j = 1, 2, \ldots, t)$ változók hibatagok.[8] Ez utóbbiakról feltesszük, hogy I^*-gal is és egymással is páronként korrelálatlanok. A (2.7) modell így nem más, mint egy olyan speciális faktornaalitikus modell, amelyben egyetlen közös faktor szerepel. A faktoranalízis becslési

[7] Megjegyezzük, hogy az aggregátumok (1.2) matrixának egyes oszlopai — a fentihez teljesen hasonló gondolatmenettel — olyan változókra vonatkozó t számú megfigyelésnek tekinthetők, mely változók az árváltozásoknak a termelési érték időbeli alakulására gyakorolt hatását mutatják. Itt is feltételezhető, hogy e változók egy közvetlenül nem mérhető, hipotetikus termelési érték indikátorai. Ezt a gondolatmenetet azonban túl erőltetettnek érezzük, s ezért úgy véljük, hogy a BL-indexeknek nem adható ilyen közvetlen és egyszerű interpretáció.

[8] Az elméleti változóknak indikátorok alapján történő vizsgálata az 1960-as évek szociológiai módszertanának egyik legfőbb eredménye. E módszer egyik legelső megfogalmazója *H. M. Blalock* [3]. Egzakt matematikai-statisztikai alapokra helyezése *R. M. Hauser* és *A. S. Goldberger* nevéhez fűződik [10].

módszereinek alkalmazásával[9] meghatározhatók e faktor egyes időszakokra vonatkozó értékei, amik azután — attól függően, hogy a (2.3) vagy a (2.4) adatmatrixból indultunk-e ki — ár- vagy volumenindexeknek tekinthetők. A probléma természete itt azt kívánja, hogy ne az indexek standardizált értékeiből, hanem az eredeti skálán mozgó (2.5) értékekből induljunk ki. Ez csak annyi eltérést jelent a szokásos faktoranalitikus módszerektől, hogy a változók korrelációs matrixa helyett azok nem-centrális második momentumainak matrixából indulunk ki.

A követendő becslési eljárást azonban nagymértékben leegyszerűsíthetjük azzal, ha a (2.7) faktoranalitikus modell helyett a főkomponens-elemzés

$$
\begin{aligned}
I^{(1)} &= a_{11}I_1 + a_{12}I_2 + \ldots + a_{1t}I_t \\
I^{(2)} &= a_{21}I_1 + a_{22}I_2 + \ldots + a_{2t}I_t \\
&\;\;\vdots \\
I^{(t)} &= a_{t1}I_1 + a_{t2}I_2 + \ldots + a_{tt}I_t
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

modelljéből indulunk ki, és az I_1 első főkomponensnek egyes időszakokra vonatkozó, alkalmasan normált értékeit tekintjük indexeknek. Az így adódó indexeket egzakt főkomponensindexeknek (vagy rövidebben FK-indexeknek) nevezzük, és attól függően, hogy ár- vagy volumenindexekről lesz-e szó, az $\mathrm{FKI_p}$ vagy $\mathrm{FKI_q}$ szimbólumokkal jelöljük.

A (2.7) modellnek a könnyebben kezelhető (2.8) modellel való helyettesítése azzal indokolható, hogy a (2.7) és (2.8) modellben közös $I^{(j)}$ változók speciális konstrukciója — különösen időbeli összehasonlítás esetén — biztosítja azt, hogy varianciájukat az első főkomponens gyakorlatilag teljes mértékben megmagyarázza, s így a

$$\sum_{p=2}^{t} a_{jp}\, I_p \qquad (j = 1, 2, \ldots, t)$$

mennyiségeket hibatagnak lehessen tekinteni.

Particionáljuk most a (2.6) alatti $\mathbf{I}$ matrixot az

$$
\mathbf{I} = \left[\begin{array}{c:cc}
1 & 1 & 1 \\
\hdashline
I_2^{(1)} & I_2^{(2)} & I_2^{(t)} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
I_t^{(1)} & I_t^{(2)} & I_t^{(t)}
\end{array}\right]
= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{1}' \\ \mathbf{i}_2, & \mathbf{I}_{22} \end{bmatrix}
\tag{2.9}
$$

módon. Ekkor, az első főkomponens meghatározása egy olyan t-elemű $\mathbf{p}_1$ és $\mathbf{a}_1$ vektor meghatározásával ekvivalens ([23]: 46—48. old.), melyekre nézve

$$\varphi(\mathbf{p}, \mathbf{a}) = \|\mathbf{I} - \mathbf{pa}'\|^2 = \mathrm{tr}(\mathbf{II}') - 2\mathbf{p}'\mathbf{Ia} + \mathbf{p}'\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}'\mathbf{a} \tag{2.10}$$

[9] E becslési módszerek leírása például [17]-ben találhatók meg.

euklidészi normanégyzet minimális.[10] A szokásos főkomponenselemzéstől[11] csak annyiban térünk el, hogy

a) az $I^{(j)}$ változóknak nem a standardizált, hanem az eredeti $I_i^{(j)}$ értékeit vesszük alapul

b) a szokásos $\mathbf{p}'\mathbf{p} = 1$ feltétel helyett a $\mathbf{p}$ vektort úgy normalizáljuk, hogy legelső eleme 1 legyen.

Mindkét eltérésre azért van szükség, hogy az FK-indexek, amelyek a $\mathbf{p}$ vektor elemei, közvetlenül összehasonlíthatók legyenek az $\mathbf{I}$ matrix azonos jelentésű elemeivel.

Könnyen belátható, hogy a (2.10)-et minimalizáló $\mathbf{p}_1$ vektor az $\mathbf{II}'$ matrix legnagyobb, λ_1 sajátértékéhez tartozó, céljainknak megfelelően normált sajátvektor, $\mathbf{a}_1$ pedig — $\mathbf{p}_1$ ismeretében — az

$$\mathbf{a}_1 = \frac{1}{\mathbf{p}_1'\mathbf{p}_1}\mathbf{I}'\mathbf{p}_1$$

módon határozható meg. Egyszerű számolással adódik az is, hogy

$$\lambda_1 = \frac{\mathbf{p}_1'\mathbf{II}'\mathbf{p}_1}{\mathbf{p}_1'\mathbf{p}_1} = (\mathbf{a}_1'\mathbf{a}_1)(\mathbf{p}_1'\mathbf{p}_1) \tag{2.11}$$

Az így adódó $\mathbf{p}_1$ vektor elemei, amelyek mind pozitívak ([25], 212. old.), az FK-indexek. A $\mathbf{p}_1$ vektor numerikus meghatározásának kérdéseivel, valamint

[10] A matrix nyomának definícióját felhasználva könnyen belátható, hogy $\mathrm{tr}(\mathbf{II}') = \mathrm{tr}(\mathbf{I}'\mathbf{I})$ az $\mathbf{I}$ matrix elemeinek négyzetösszegével egyenlő.

[11] Ismeretes [17], hogy a főkomponens-elemzés modellje

$$\mathbf{x} = \mathbf{Wk},$$

amelyben $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_p]'$ a p számú eredeti változó vektora,

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \ldots & w_{1p} \\ w_{21} & w_{22} & \ldots & w_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_{p1} & w_{p2} & \ldots & w_{pp} \end{bmatrix} = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_p]$$

az ún. súlyok matrixa, és

$$\mathbf{k} = [k_1, k_2, \ldots, k_p]'$$

az ún. főkomponensek vektora. A $\mathbf{W}$ súlymatrix oszlopait olymódon szokás megválasztani, hogy

$$\mathbf{w}_i'\mathbf{w}_j = \begin{cases} \lambda_i, & \text{ha} \quad i = j \\ 0, & \text{ha} \quad i \neq j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, p)$$

álljon fenn, ahol λ_i — a kiindulástól függően — az x_i változók második nem-centrális momentum-matrixának, variancia-kovariancia matrixának, vagy korrelációs matrixának i-edik legnagyobb sajátértéke. Legtöbbször a korrelációs matrixból indulnak ki. Belátható, hogy az általunk meghatározandó $\mathbf{a}_1$ vektor a $\mathbf{W}$ súlymatrix első oszlopától csak egy konstans szorzóban tér el, valamint azt is, hogy — egy normalizáló tényezőtől eltekintve —

$$\mathbf{p}_1 = \frac{1}{\lambda_1}\mathbf{X}\mathbf{w}_1,$$

ahol $\mathbf{X}$ az x_i változókra vonatkozó megfigyeléseket tartalmazó $n \times p$ típusú matrix.

az FK-indexek egy igen egyszerű közelítésével a következő két pontban foglalkozunk.

Ugyanott szükség lesz még a következő eredményekre is:

1. A (2.10) függvény φ_0-lal jelölt, minimális értéke

$$\varphi_0 = \varphi(\mathbf{p}_1, \mathbf{a}_1) = \mathrm{tr}(\mathbf{II}') - \lambda_1 \tag{2.12}$$

Ez a (2.10) és (2.11) felhasználásával igen könnyen igazolható.

2. Az

$$I_{kl} = \sum_{j=1}^{t} I_k^{(j)} I_l^{(j)} \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, t)$$

elemekből felépülő $\mathbf{II}'$ matrix (2.9)-nek megfelelő particionálása

$$\mathbf{II}' = \begin{bmatrix} 1 + \mathbf{l}'\mathbf{l}; & \mathbf{i}_2' + \mathbf{l}'\mathbf{I}_{22}' \\ \mathbf{i}_2 + \mathbf{I}_{22}\,\mathbf{l}; & \mathbf{i}_2\,\mathbf{i}_2' + \mathbf{I}_{22}\,\mathbf{I}_{22}' \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

ahol a szimbólumok jelentése ugyanaz, mint (2.9)-ben. Bizonyos esetekben célszerűbbnek fog mutatkozni az $\mathbf{II}'$ matrix

$$\mathbf{II}' = t \begin{bmatrix} 1 & \bar{\mathbf{i}}_2' \\ \bar{\mathbf{i}}_2 & \bar{\mathbf{I}}_{22} \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

particionálása, amelyben

$$\bar{\mathbf{i}}_2' = [\bar{I}_2, \bar{I}_3, \ldots, \bar{I}_t]; \quad \bar{I}_k = \frac{1}{t} \sum_{j=1}^{t} I_k^{(j)} \qquad (k = 2, \ldots, t)$$

$$\bar{\mathbf{I}}_{22} = [\bar{I}_{kl}]; \qquad \bar{I}_{kl} = \frac{1}{t} \sum_{j=1}^{t} I_k^{(j)}\, I_l^{(j)} \quad (k, l = 2, \ldots, t). \tag{2.15}$$

A kétféle particionálás közötti összefüggés a (2.13) és (2.14) blokkonkénti összehasonlításából közvetlenül adódik.

3. Egy gyakorlati alkalmazás

Az előző pontban vázolt eljárást most 39 cikk budapesti piacokra való, 1960–1970. évi felhozatalának adataira alkalmazzuk.[12]

A számítások kiindulópontját képező (2.3) és (2.4) indexmatrixokat az 1. és 2. tábla tartalmazza. (A bázisidőszak 1960.)

A megfelelő $\mathbf{II}'$ matrixokhoz tartozó legnagyobb sajátérték és egy ahhoz tartozó sajátvektor meghatározására az ún. Mises-féle iterációt használtuk,[13]

[12] Az alapadatok forrása [5]. Az itt közölt számítások alapjául szolgáló összes lehetséges állandó súlyú bázis ár- és volumenindexsort (1. és 2. tábla) *dr. Köves Pál* bocsátotta rendelkezésemre, amiért ezúton is köszönetet mondok.

[13] A módszer leírását lásd például a [21] 258–259. oldalán.

1. sz. tábla

Állandó sulyu bázis-árindexsorok (1960 = 100)

Év	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970
	évi mennyiségekkel számolva (%)										
	$_pI^{(1)}$	$_pI^{(2)}$	$_pI^{(3)}$	$_pI^{(4)}$	$_pI^{(5)}$	$_pI^{(6)}$	$_pI^{(7)}$	$_pI^{(8)}$	$_pI^{(9)}$	$_pI^{(10)}$	$_pI^{(11)}$
1960	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
1961	106,10	104,25	105,09	104,50	104,73	104,92	105,34	104,74	104,82	104,02	103,94
1962	113,14	111,72	108,81	109,91	109,85	111,39	111,75	111,18	110,83	109,59	109,28
1963	99,93	99,44	98,44	96,21	97,44	98,46	97,99	97,88	98,74	98,01	98,52
1964	109,81	107,92	105,93	105,01	104,82	106,41	106,61	105,59	105,54	104,37	103,99
1965	121,90	119,93	118,33	117,33	116,13	116,47	117,49	115,94	114,89	114,36	113,12
1966	115,88	113,99	112,97	111,61	110,65	110,60	110,80	109,89	109,29	108,67	108,37
1967	114,64	112,38	110,82	108,94	107,58	107,52	107,27	105,28	104,46	103,89	103,27
1968	126,66	123,74	121,10	120,99	117,83	118,61	118,51	116,83	113,51	114,13	111,80
1969	125,13	120,68	117,98	117,94	115,73	116,21	116,49	114,48	112,31	111,08	109,93
1970	138,02	133,27	129,25	129,18	125,27	125,61	127,63	125,49	120,77	121,45	116,58

2. sz. tábla

Állandó sulyu bázis-volumenindexsorok (1960 = 100)

Év	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970
	évi árakkal számolva (%)										
	$_qI^{(1)}$	$_qI^{(2)}$	$_qI^{(3)}$	$_qI^{(4)}$	$_qI^{(5)}$	$_qI^{(6)}$	$_qI^{(7)}$	$_qI^{(8)}$	$_qI^{(9)}$	$_qI^{(10)}$	$_qI^{(11)}$
1960	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
1961	89,29	87,73	88,16	88,85	87,75	87,85	87,84	87,53	87,23	86,11	86,22
1962	79,30	78,55	76,27	78,11	76,50	76,98	77,31	76,66	75,82	74,77	74,26
1963	94,48	93,05	91,79	90,97	90,36	90,94	91,00	89,78	90,25	89,06	88,43
1964	100,90	99,59	97,97	98,39	96,32	96,13	96,35	94,69	93,87	93,32	91,58
1965	99,02	97,92	97,49	97,57	95,95	94,61	94,52	92,88	92,73	91,96	90,12
1966	119,51	118,65	118,04	117,19	116,04	115,19	114,28	111,83	111,82	111,26	110,51
1967	132,24	130,54	129,95	129,52	127,15	125,78	125,41	121,45	121,98	120,98	120,23
1968	141,26	139,55	138,37	139,58	135,76	133,13	133,24	128,72	126,59	126,78	123,60
1969	147,08	144,19	142,46	144,25	139,79	137,98	137,93	133,29	132,52	130,56	129,42
1970	153,12	150,00	147,90	150,97	145,00	142,09	143,21	137,94	135,16	134,52	129,33

és mindkét esetben igen gyors konvergenciát tapasztaltunk. Ennek okára a következő pontban mutatunk majd rá. Az FK ár- és volumenindexeket, valamint a tényleges (I_v) és az

$$\mathrm{FK}\,\mathbf{I}_v = \mathrm{FK}\,\mathbf{I}_p \cdot \mathrm{FK}\,\mathbf{I}_q \tag{3.1}$$

módon definiált FK-értékindexeket a 3. tábla tartalmazza. Ugyancsak a 3. táblában tüntettük fel az

$$\bar{\mathbf{i}}'_p = \left[1; \frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t} pI_2^{(j)}; \ldots ; \frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t} pI_t^{(j)}\right] = \frac{1}{t}\mathbf{I}_p\mathbf{1} \tag{3.2}$$

átlag-árindexeket (AI_p) és

$$\bar{\mathbf{i}}'_q = \left[1; \frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t} qI_2^{(j)}; \ldots ; \frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t} qI_t^{(j)}\right] = \frac{1}{t}\mathbf{I}_q\mathbf{1} \tag{3.3}$$

átlag-volumenindexeket (AI_q), melyek a $\mathbf{I}_p$, illetve $\mathbf{I}_q$ index-matrixok egyes soraiban levő elemek súlyozatlan számtani átlagai.

3. tábla

Az eredmények összefoglalása

Év	$FK\mathbf{I}_p$	$A\mathbf{I}_p$	$FK\mathbf{I}_q$	$A\mathbf{I}_q$	$FK\mathbf{I}_v$	$A\mathbf{I}_v$	I_v
1960	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
1961	104,78	104,77	87,71	87,69	91,90	91,87	93,08
1962	110,69	110,68	76,82	76,78	85,03	84,97	86,29
1963	98,29	98,28	90,97	90,92	89,41	89,35	90,90
1964	106,03	106,00	96,37	96,28	102,18	102,06	105,76
1965	116,95	116,90	95,06	94,98	111,18	111,03	115,33
1966	111,20	111,16	115,03	114,94	127,92	127,76	132,42
1967	107,90	107,82	126,06	125,93	136,01	135,78	139,22
1968	118,61	118,52	133,51	133,33	158,35	158,02	160,34
1969	116,27	116,18	138,31	138,13	160,81	160,48	163,37
1970	126,71	126,59	142,89	142,66	181,06	180,60	178,50

A 3. tábla eredményeit még azzal egészíthetjük ki, hogy

$$\mathrm{tr}(\mathbf{I}_p\mathbf{I}'_p) = 148{,}975\,987, \qquad \lambda_1^{(p)} = 148{,}870\,906$$

$$\mathrm{tr}(\mathbf{I}_q\mathbf{I}'_q) = 150{,}244\,017, \qquad \lambda_1^{(q)} = 150{,}208\,052,$$

ahol $\lambda_1^{(p)}$ az $\mathbf{I}_p\mathbf{I}'_p$, $\lambda_1^{(q)}$ pedig az $\mathbf{I}_q\mathbf{I}'_q$ matrix legnagyobb sajátértéke.

A közölt eredmények alapján megállapíthatjuk, hogy

a) Az 1. illetve 2. tábla indexsorai gyakorlatilag információveszteség nélkül helyettesíthetők a megfelelő FK-indexekkel.

b) a (3.2), illetve (3.3) átlag-indexek igen jól közelítik az $\mathrm{FK}\mathbf{I}_p$ illetve $\mathrm{FK}\mathbf{I}_q$ indexeket.

c) Úgy tűnik, hogy az FK-indexek az ún. tényezőpróba szempontjából egyirányúan torzítottak, mivel az utolsó év kivételével

$$\mathbf{FKI}_v < \mathbf{I}_v \tag{3.4}$$

figyelhető meg.

Az *a)* megállapítás illusztrálása céljából mindkét esetben meghatározzuk az

$$I^2 = \frac{\lambda_1}{\mathrm{tr}(\mathbf{II}')} \tag{3.5}$$

módon definiálható illeszkedési együtthatókat[14] ([22], 474. old.), valamint az egyes $I^{(j)}$ indikátorok és a megfelelő első főkomponens közötti korrelációs együtthatókat.

A korrelációs együttható definícióját felhasználva, és figyelembevéve a 10. lábjegyzetben mondottakat, belátható, hogy azok az

$$r_{j1} = r_{I^{(j)}I_1} = \frac{\frac{1}{\sqrt{t}} w_{j1} - \bar{I}^{(j)}\alpha}{\sigma^{(j)}\sigma_1} \tag{3.6}$$

módon számíthatók. A (3.6) formulában w_{j1} a

$$\mathbf{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{p}_1'\mathbf{p}_1}} \mathbf{I}'\mathbf{p}_1$$

vektor j-edik eleme, $\bar{I}^{(j)}$ az $I^{(j)}$ indikátor

$$\bar{I}^{(j)} = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{t} I_i^{(j)} \quad (j = 1, 2, \ldots, t) \tag{3.7}$$

átlaga, $\sigma^{(j)}$ az $I^{(j)}$ indikátor

$$\sigma^{(j)} = \sqrt{\frac{1}{t} \sum_{i=1}^{t} (I_i^{(j)} - \bar{I}^{(j)})^2} \quad (j = 1, 2, \ldots, t) \tag{3.8}$$

szórása,

$$\alpha = \frac{\sqrt{t}\,[\bar{I}^{(1)}, \bar{I}^{(2)}, \ldots, \bar{I}^{(t)}]\,\mathbf{w}_1}{\lambda_1}$$

és

$$\sigma_1 = \sqrt{1 - \alpha^2}. \tag{3.9}$$

A (3.4) illeszkedési együttható értéke az árindexek esetében 0,9993, a volumenindexek esetében pedig 0,9998, ami igen jó illeszkedésre utal. A (3.6) korrelációs együtthatókat, azok négyzeteit, valamint az ${}_pI^{(j)}$ és ${}_qI^{(j)}$ indikátorok relatív szórásait a 4. tábla tartalmazza.

[14] A (3.5) módon definiált együttható az $1/t$ és 1 határok között mozog. A (2.12)-ből látható, hogy $I^2 = 1$ esetén a (2.10) függvény értéke 0, azaz a $\mathbf{p}_1\mathbf{a}_1'$ diád pontosan leírja az $\mathbf{I}$ mátrixot.

4. tábla

Az indikátorok és az FK-indexek közötti korreláció

Indikátor sorszáma (j)	Állandó súly éve	Árindexek			Volumenindexek		
		$r_{_pI^{(j)}I_1^{(p)}}$	$r_{j_1}^2$	Relatív szórás (%)	$r_{_qI^{(j)}I_1^{(p)}}$	$r_{j_1}^2$	Relatív szórás (%)
1	1960	0,9896	0,9793	9,7	0,9982	0,9964	21,3
2	1961	0,9927	0,9854	8,8	0,9990	0,9980	21,0
3	1962	0,9915	0,9832	8,0	0,9996	0,9992	21,0
4	1963	0,9964	0,9929	8,3	0,9987	0,9975	21,3
5	1964	0,9990	0,9980	7,2	0,9998	0,9997	20,5
6	1965	0,9988	0,9976	7,1	1,0000	0,9999	19,7
7	1966	0,9983	0,9966	7,5	0,9999	0,9997	19,8
8	1967	0,9947	0,9895	7,1	0,9994	0,9989	18,6
9	1968	0,9841	0,9684	5,8	0,9986	0,9973	18,3
10	1969	0,9886	0,9774	6,1	0,9983	0,9966	18,4
11	1970	0,9749	0,9504	5,0	0,9942	0,9884	17,8

A 4. tábla rendkívül magas korrelációs együtthatói is azt a megállapítást támasztják alá, hogy az első főkomponens értékeivel szinte minden információveszteség nélkül lehet helyettesíteni az 1., illetve a 2. tábla indexsorait.

Azzal a kérdéssel, hogy a *b)* megállapítás mennyiben tekinthető általánosnak, a következő pontban foglalkozunk. E kérdés elméleti és gyakorlati fontosságát úgy véljük, nem kell külön hangsúlyozni.

A tényezőpróba megsértésének kérdésével itt nem kívánunk foglalkozni, mert úgy véljük, hogy a (3.4) torzítás kiküszöbölése az eredményhez képest túl sok erőfeszítést igényelne.

4. Az átlagindexek mint közelítő FK-indexek

Ebben a pontban olyan kritériumokat adunk meg, melyek alapján kevés és egyszerű számolással eldönthető, hogy az előző pontban definiált átlagvektorok elég jól közelítik-e az egzakt főkomponens-indexeket.

Írjuk fel ennek érdekében a (2.9) matrixot az

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ \bar{I}_2(1+\eta_{21}) & \bar{I}_2(1+\eta_{22}) & \dots & \bar{I}_2(1+\eta_{2t}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{I}_t(1+\eta_{t1}) & \bar{I}_t(1+\eta_{t2}) & \dots & \bar{I}_t(1+\eta_{tt}) \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

módon az

$$\eta_{ij} = \frac{I_i^{(j)} - \bar{I}_i}{\bar{I}_i} \quad (i = 2, \dots, t; \quad j = 1, 2, \dots, t) \tag{4.2}$$

mennyiségek felhasználásával, és válasszuk meg az η_i mennyiségeket az

$$\eta_i = \max_{1 \leq j \leq t} |\eta_{ij}| \quad (i = 2, \dots, t) \tag{4.3}$$

előírásnak megfelelően.

Tekintsük most az

$$\tilde{I} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \bar{\mathbf{i}}_2 & \bar{\mathbf{i}}_2 & \dots & \bar{\mathbf{i}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{\mathbf{i}}_2 \end{bmatrix} [1, \mathbf{1}'] = \tilde{\mathbf{p}}_1 \tilde{\mathbf{a}}_1' \tag{4.4}$$

matrixot, amelynek saját transzponáltjával való szorzata

$$\tilde{\mathbf{I}}\,\tilde{\mathbf{I}}' = \mathrm{t}\begin{bmatrix} 1 & \bar{\mathbf{i}}_2' \\ \bar{\mathbf{i}}_2 & \bar{\mathbf{i}}_2\bar{\mathbf{i}}_2' \end{bmatrix}. \tag{4.5}$$

Az $\tilde{\mathbf{I}}\,\tilde{\mathbf{I}}'$ szorzat az alábbi, könnyen igazolható tulajdonságokkal rendelkezik:

a) $\varrho(\tilde{\mathbf{I}}\,\tilde{\mathbf{I}}') = 1$, azaz a (4.5) matrix rangja 1,

b) egyetlen 0-tól különböző — s így legnagyobb — sajátértéke

$$\tilde{\lambda}_1 = \mathrm{tr}(\tilde{\mathbf{I}}\,\tilde{\mathbf{I}}') = \mathrm{t}(1 + \bar{\mathbf{i}}_2'\bar{\mathbf{i}}_2) \tag{4.6}$$

c) a $\tilde{\lambda}_1$ sajátértékhez tartozó, céljainknak megfelelően normált sajátvektora

$$\bar{\mathbf{i}} = \frac{1}{t}\mathbf{I}\,\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{\mathbf{i}}_2 \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{p}}_1. \tag{4.7}$$

Definiáljuk végül az

$$\mathbf{y}_0 = \bar{\mathbf{i}}, \qquad \mathbf{y}_k = (\mathbf{II}')^k \mathbf{y}_0 \qquad (k = 1, 2, \dots,) \tag{4.8}$$

iterált vektor-sorozatot, valamint az

$$\varepsilon = \frac{t \sum_{i=2}^{t} \eta_i \bar{I}_i^2}{\tilde{\lambda}_1} \tag{4.9}$$

és

$$\delta = \frac{t \sum_{i=2}^{t} \eta_i^2 \bar{I}_i^2}{\tilde{\lambda}_1} \tag{4.10}$$

mennyiségeket.

Most bebizonyítjuk a következő három állítást, amelyek közül a harmadik tartalmazza azokat a kritériumokat, melyek alapján a pont elején jelzett kérdés igen egyszerűen vizsgálható.

1. Az eredeti $\mathbf{II}'$ matrix legnagyobb, λ_1 sajátértékére nézve mindig teljesül a

$$\tilde{\lambda}_1 \leq \lambda_1 \leq \mathrm{tr}(\mathbf{II}') \leq \tilde{\lambda}_1(1 + \delta) \tag{4.11}$$

egyenlőtlenség.

2. A (4.7) sajátvektor az $\mathbf{a} = \mathbf{1}$ választás mellett minimalizálja a (2.10) függvényt, és

$$\varphi(\bar{\mathbf{i}}, \mathbf{1}) - \varphi_0 \leq \tilde{\lambda}_1 \delta, \tag{4.12}$$

ahol φ_0 a (2.10) függvény (2.12) minimális értéke.

3. A (4.8) iterált vektorok (4.7)-hez hasonlóan normalizált $\mathbf{y}_k^*$ változataira nézve

$$|\mathbf{y}_1^* - \mathbf{y}_0^*| \leq \varepsilon \begin{bmatrix} 0 \\ \eta_2 \bar{I}_2 \\ \vdots \\ \eta_t \bar{I}_t \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

áll fenn.

Ha ε, és δ elég kicsi ahhoz, hogy jó közelítéssel $\frac{1}{1+\varepsilon^2} \approx 1 - \varepsilon^2$ álljon fenn, illetve, hogy $\varepsilon\delta$ elhanyagolható legyen, akkor még az is teljesül, hogy

$$|\mathbf{y}_2^* - \mathbf{y}_1^*| \approx \begin{bmatrix} 0 \\ |\bar{I}_2(\gamma_2 - \alpha\beta_2)| \\ \vdots \\ |\bar{I}_t(\gamma_t - \alpha\beta_t)| \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ \eta_2 \bar{I}_2 \\ \vdots \\ \eta_t \bar{I}_t \end{bmatrix} \varepsilon(\varepsilon + \delta) \approx \begin{bmatrix} 0 \\ \eta_2 \bar{I}_2 \\ \vdots \\ \eta_t \bar{I}_t \end{bmatrix} \varepsilon^2, \tag{4.14}$$

ahol

$$\alpha = \frac{t \sum_{k=2}^{t} \bar{I}_k^2 \sum_{i=2}^{t} \bar{I}_i^2 \sum_{j=1}^{t} \eta_{kj}\eta_{ij}}{\tilde{\lambda}_1^2}$$

$$\beta_r = \frac{\sum_{i=2}^{t} \bar{I}_i^2 \sum_{j=1}^{t} \eta_{rj}\eta_{ij}}{\tilde{\lambda}_1} \qquad (r = 2, \ldots, t)$$

és

$$\gamma_r = \frac{\sum_{k=2}^{t} \bar{I}_k^2 \sum_{j=1}^{t} \eta_{rj}\eta_{kj} \sum_{i=2}^{t} \bar{I}_i^2 \sum_{j=1}^{t} \eta_{kj}\eta_{ij}}{\tilde{\lambda}_1^2} \qquad (r = 2, \ldots, t).$$

Bizonyítás:

1. Tekintsük a (2.10) függvény

$$\tilde{\varphi} = \varphi(\tilde{\mathbf{p}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_1) = ||\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{I}}||^2 = \mathrm{tr}(\mathbf{I}\mathbf{I}') - 2\tilde{\mathbf{p}}_1'\mathbf{I}\tilde{\mathbf{a}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_1'\tilde{\mathbf{I}}\tilde{\mathbf{a}}_1$$

helyettesítési értékét, ami a (2.13), (2.15), valamint a közvetlenül belátható $\tilde{\mathbf{p}}_1'\tilde{\mathbf{I}}\tilde{\mathbf{a}}_1 = \tilde{\lambda}_1$ egyenlőség felhasználásával a (2.12)-höz igen hasonló

$$\tilde{\varphi} = \mathrm{tr}(\mathbf{I}\mathbf{I}') - \tilde{\lambda}_1$$

alakra hozható. Mivel azonban φ_0 a (2.10) függvény minimális értéke, nyilván

$$\tilde{\varphi} - \varphi_0 = \lambda_1 - \tilde{\lambda}_1 \geq 0$$

áll fenn, ami a (4.11) egyenlőtlenség bal oldalát igazolja. Mivel a $\tilde{\lambda}_1 \leq \mathrm{tr}(\mathbf{I}\mathbf{I}')$ egyenlőtlenség a sajátértékek összegére vonatkozó ismert tétel nyilvánvaló következménye, már csak a $\mathrm{tr}(\mathbf{I}\mathbf{I}') \leq \tilde{\lambda}_1(1 + \delta)$ egyenlőtlenség igazolása van hátra.

Mivel a (4.2) értékek összege minden i érték mellett 0, és így

$$\sum_{j=1}^{t}(1+\eta_{kj})(1+\eta_{lj})=\begin{cases} t+\sum\limits_{j=1}^{t}\eta_{kj}^2 & \text{ha} \quad k=l \\ t+\sum\limits_{j=1}^{t}\eta_{kj}\eta_{lj} & \text{ha} \quad k\neq l \end{cases}$$

az $\mathbf{II}'$ szorzat (4.1) felhasználásával a következő:

$$\mathbf{II}'=\begin{bmatrix} t & t\bar{I}_2 & \dots\dots\dots\dots & t\bar{I}_t \\ t\bar{I}_2 & \bar{I}_2^2\left(t+\sum\limits_{j=1}^{t}\eta_{2j}^2\right) & \dots\dots & \bar{I}_2\bar{I}_t\left((t+\sum\limits_{j=1}^{t}\eta_{2j}\eta_{tj}\right) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t\bar{I}_t & \bar{I}_t\bar{I}_2\left(t+\sum\limits_{j=1}^{t}\eta_{tj}\eta_{2j}\right) & \dots & \bar{I}_t^2\left(t+\sum\limits_{j=1}^{t}\eta_{tj}^2\right) \end{bmatrix}. \tag{4.15}$$

Így a $\mathrm{tr}(\mathbf{II}')$ definíciója alapján, figyelembevéve az η_i értékek (4.3) megválasztását

$$\mathrm{tr}(\mathbf{II}')=t\left(1+\sum_{i=2}^{t}\bar{I}_i^2\right)+\sum_{i=2}^{t}\sum_{j=1}^{t}\eta_{ij}^2\bar{I}_i^2\leq\tilde{\lambda}_1+t\sum_{i=2}^{t}\eta_i^2\bar{I}_i^2=\tilde{\lambda}_1(1+\delta),$$

ami bizonyítandó volt. Ezzel a (4.11) egyenlőtlenséget igazoltuk.

2. A szokásos módszerekkel egyszerűen megállapítható ,hogy a

$$\varphi(\mathbf{p},\mathbf{I})=||\mathbf{I}-\mathbf{pI}'||^2=\mathrm{tr}(\mathbf{II}')-2\mathbf{p}'\mathbf{II}+\mathbf{tp}'\mathbf{p}$$

függvény a $\mathbf{p}=\bar{\mathbf{i}}$ helyen veszi fel a minimumát. Ezt $\varphi(\mathbf{p},\mathbf{I})$-be helyettesítve, (2.12) és (4.11) felhasználásával adódik a (4.12) egyenlőtlenség.

3. A (4.7) és (4.15) alapján egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$\mathbf{y}_1^*=\frac{1}{\tilde{\lambda}_1}\mathbf{y}_1=\frac{1}{\tilde{\lambda}_1}\mathbf{II}'\bar{\mathbf{i}}=\bar{\mathbf{i}}+\begin{bmatrix}0\\ \beta_2\bar{I}_2\\ \vdots\\ \beta_t\bar{I}_t\end{bmatrix} \tag{4.16}$$

amelyben a korábban definiált β_r mennyiségek szerepelnek. Az $\mathbf{y}_1^*$ vektorból $\mathbf{y}_0^*=\mathbf{y}_0=\bar{\mathbf{i}}$-ot levonva és alkalmazva a β_r mennyiségek definíciója alapján nyilvánvaló

$$|\beta_r|\leq\frac{\eta_r\, t\sum\limits_{i=2}^{t}\eta_i\bar{I}_i^2}{\tilde{\lambda}}=\eta_r\varepsilon\quad(r=2,\dots,t)$$

egyenlőtlenséget, éppen a bizonyítandó (4.13) egyenlőtlenséget kapjuk.

A (4.15) és (4.16) felhasználásával közvetlenül adódik, hogy

$$\mathbf{y}_2=(\mathbf{II}')^2\bar{\mathbf{i}}=\tilde{\lambda}_1^2\bar{\mathbf{i}}+\tilde{\lambda}_1^2\begin{bmatrix}\alpha\\ \bar{I}_2(\alpha+\beta_2+\gamma_2)\\ \vdots\\ \bar{I}_t(\alpha+\beta_t+\gamma_t)\end{bmatrix}. \tag{4.17}$$

Az α-ra adott korábbi definíció alapján nyilvánvaló, hogy

$$|\alpha| \leq \varepsilon^2$$

s így — ε általában kicsi lévén — igen jó közelítéssel

$$\mathbf{y}_2^* = \frac{1}{\bar{\lambda}_1^2(1+\alpha)}\mathbf{y}_2 \approx \frac{1-\alpha}{\bar{\lambda}_1^2}\mathbf{y}_2$$

áll fenn. Elhanyagolva, az ε^4 és $\varepsilon^3\delta$ nagyságrendű α^2 és $\alpha\gamma_r$ tényezőket, (4.16) és (4.17) figyelembevételével

$$\mathbf{y}_2^* - \mathbf{y}_1^* \approx \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{I}_2(\gamma_2 - \alpha\beta_2) \\ \vdots \\ \bar{I}_t(\gamma_t - \alpha\beta_t) \end{bmatrix},$$

aminek r-edik komponensére alkalmazva az

$$\bar{I}_r|\gamma_r - \alpha\beta_r| \leq \bar{I}_r\,\eta_r\varepsilon(\delta+\varepsilon) \quad (r = 2,\ldots,t)$$

egyenlőtlenséget, éppen (4.14)-hez jutunk. Ezzel mindhárom állítás helyességét igazoltuk.

Mint már jeleztük, a (4.11)–(4.14) eredmények közül gyakorlati szempontból a (4.13) és (4.14) egyenlőtlenségek a legfontosabbak. A (4.13) szerint ugyanis ha az η_i mennyiségek elég kicsik ahhoz, hogy $\varepsilon\eta_i$ elhanyagolható legyen minden 2-nél nagyobb i-re nézve,[15] akkor jó közelítéssel

$$\mathbf{y}_0^* = \bar{\mathbf{i}} \approx \mathbf{y}_1^* \approx \mathbf{p}_1, \tag{4.18}$$

s így el sem érdemes kezdeni a λ_1 és $\mathbf{p}_1$ meghatározására szolgáló Mises-féle iterációs eljárást. A (4.14) szerint azonban az első iterációs lépés után még akkor is meg lehet állni, ha ε nem volt elég kicsi ahhoz, hogy (4.18)-at el lehessen fogadni, mert ε^2 és $\varepsilon\delta$ már az esetek többségében elég kicsi ahhoz,[16] hogy jó közelítéssel

$$\mathbf{y}_2^* \approx \mathbf{y}_1^* \approx \mathbf{p}_1$$

álljon fenn.

A fentieket a (4.11) alapján még annyival egészíthetjük ki, hogy nem túl nagy δ esetén a λ_1 domináns sajátérték, ami miatt a λ_1 és $\mathbf{p}_1$ meghatározására szolgáló Mises-féle iterációs eljárás igen gyorsan konvergál. Végül a (4.12) egyenlőtlenség azt fejezi ki, hogy bizonyos szempontból az átlagindexek is optimálisak, mert minimalizálják $\varphi(\mathbf{p}, \mathbf{1})$-et, s e minimum nincs túl messze az FK-indexek adta φ_0 minimális értéktől, ha δ nem túl nagy.

[15] Ez — megintcsak elsősorban időbeli összehasonlításokra gondolva — nem tűnik túl szigorú megkötésnek.

[16] A bázisidőszak alkalmas megválasztásával általában elérhető, hogy ε, $\delta < 1$ álljon fenn. (A 2. pont képletei továbbra is érvényesek maradnak, ha az I matrix első sorát akkor is a bázisidőszakra vonatkoztatjuk, ha az nem a legelső időszak.) Itt jegyezzük meg, hogy a 3. pontbeli gyakorlati alkalmazás esetén az árindexsorokra $\varepsilon = 0{,}054$ és $\delta = 0{,}004$, a volumenindexsorokra pedig $\varepsilon = 0{,}047$ és $\delta = 0{,}003$.

5. A t = 2 speciális eset

A $t = 2$ eset azért érdemel külön figyelmet, mert ebben a speciális esetben az FK-indexek és az átlagindexek közelségére nézve az előző pontbelinél precízebb megállapítások is tehetők. A jelen esetben a (2.6) matrix az

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ I_2^{(1)} & I_2^{(2)} \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

alakba megy át, amelyben $I_2^{(1)}$ egy Laspeyres-féle, $I_2^{(2)}$ pedig egy Paasche-fée index. Legyen

$$\varepsilon = | I_2^{(2)} - I_2^{(1)} | \tag{5.2}$$

a kétféle súlyozású index eltérését mutató mennyiség.

Most igazoljuk a következő tételt. Amennyiben ε elég kicsi, a

$$\bar{\lambda}_1 = 2 + \frac{1}{2}(I_2^{(1)} + I_2^{(2)})^2 \tag{5.3}$$

érték jó közelítése az $\mathbf{II}'$ matrix legnagyobb, λ_1 sajátértékének, az

$$\bar{\mathbf{i}} = \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

vektor pedig az $\mathbf{II}'$ egy λ_1-hez tartozó, (5.4)-hez hasonlóan normált sajátvektorának. Pontosabban:

$$\lambda_1 - \bar{\lambda}_1 < \frac{\varepsilon^2}{2} \tag{5.5}$$

és

$$\| \mathbf{p}_1 - \bar{\mathbf{i}} \| < \frac{\varepsilon^2}{4\bar{I}_2} \tag{5.6}$$

áll fenn, ahol $\bar{I}_2 = \frac{1}{2}(I_2^{(1)} + I_2^{(2)})$.

Bizonyítás: Egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$\mathbf{II}' = \begin{bmatrix} 2 & I_2^{(1)} + I_2^{(2)} \\ I_2^{(1)} + I_2^{(2)} & (I_2^{(1)})^2 + (I_2^{(2)})^2 \end{bmatrix}$$

Ismeretes, hogy az $\mathbf{II}'$ matrix legnagyobb sajátértéke a

$$\lambda^2 - \operatorname{tr}(\mathbf{II}')\,\lambda - |\mathbf{II}'| = 0$$

karakterisztikus egyenlet nagyobbik gyöke, ahol $|\mathbf{II}'|$ most az $\mathbf{II}'$ determinánsát jelöli. A fenti karakterisztikus egyenlet nagyobbik gyöke — $|\mathbf{II}'| = \varepsilon^2$ lévén —

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left[\operatorname{tr}(\mathbf{II}') + \sqrt{\operatorname{tr}^2(\mathbf{II}') - 4\varepsilon^2}\right]. \tag{5.7}$$

Figyelembevéve, hogy

$$\mathrm{tr}(\mathbf{\Pi}') = 2 + (I_2^{(1)})^2 + (I_2^{(2)})^2, \tag{5.8}$$

és (5.7)-et felhasználva egyszerű számolással kapjuk, hogy a λ_1-hez tartozó, céljainknak megfelelően normált sajátvektor

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{\lambda_1 - 2}{I_2^{(1)} + I_2^{(2)}} \end{bmatrix}. \tag{5.9}$$

(5.3) és (5.8) alapján

$$\mathrm{tr}(\mathbf{\Pi}') = \tilde{\lambda}_1 + \frac{\varepsilon^2}{2}$$

amiből (5.7) felhasználásával

$$\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1 = \frac{\varepsilon^2}{2}\left(1 - \frac{2}{\lambda_1}\right)$$

következik. Mivel elég kis ε-értékek esetén $\lambda_1 \geq 2$, és így

$$0 \leq 1 - \frac{2}{\lambda_1} < 1,$$

az (5.5) egyenlőtlenség valóban teljesül.

Az (5.9) és (5.4) felhasználásával közvetlenül adódik, hogy

$$||\mathbf{p}_1 - \bar{\mathbf{i}}|| = \frac{\lambda_1 - 2}{I_2^{(1)} + I_2^{(2)}} - \frac{1}{2}(I_2^{(1)} + I_2^{(2)}),$$

ami (5.3) miatt a

$$||\mathbf{p}_1 - \bar{\mathbf{i}}|| = \frac{\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1}{I_2^{(1)} + I_2^{(2)}}$$

módon is felírható. Ebből az imént bizonyított (5.5) egyenlőtlenség miatt már következik az (5.6) helyessége. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

A jelen speciális esettel kapcsolatban még annyit jegyzünk meg, hogy amennyiben

$$\eta = \frac{I_2^{(2)}}{I_2^{(1)}} - 1 \tag{5.10}$$

elég kicsi ahhoz, hogy η^2 elhanyagolható legyen, akkor az FK-indexeket közelítő átlagindexek közelítőleg eleget tesznek a tényezőpróbának. E feltétel teljesülése esetén ugyanis

$$\bar{I}_p \bar{I}_q = \frac{1}{4}(I_p^{(1)} + I_p^{(2)})(I_q^{(1)} + I_q^{(2)}) \approx \frac{1}{2}[I_v + (1 + \eta) I_q^{(1)} I_p^{(1)}] = I_v,$$

ahol I_p az árindex, I_q a volumenindex, I_v az értékindex az (1) felső index a Laspeyres-féle, a (2) felső index pedig a Paasche-féle súlyozásra utal, és kihasználtuk a nyilvánvaló

$$\frac{I_p^{(2)}}{I_p^{(1)}} = \frac{I_q^{(2)}}{I_q^{(1)}} = 1 + \eta \quad \text{és} \quad I_p^{(1)} I_q^{(2)} = I_p^{(2)} I_q^{(1)} = I_v$$

összefüggéseket.

6. Néhány megjegyzés és következtetés

Az index-elmélet szempontjából tanulmányunk legfőbb eredményét abban látjuk, hogy matematikailag támasztja alá a különböző súlyozású indexformulák átlagolását, amit az indexelméleti irodalom formulakeresztezésnek nevez [10].

A 4. pontban kimutattuk ugyanis, hogy a 2. pontbeli egzakt FK-indexek — legalábbis időbeli összehasonlitás esetén — általában igen jól közelíthetők az egyszerűen meghatározható átlag-indexekkel. Mivel ez utóbbiak a különböző súlyozású indexsorok azonos időszakra vonatkozó tagjainak egyszerű számtani átlagai, az FK-indexek — legalábbis közelítő értelemben — az indexformula-keresztezés egyik lehetséges, több időszakra történő általánosításának tekinthetők, s mint ilyenek közeli rokonságban állnak a ma már általánosan használt Fisher-féle „ideális" formulával, de a Marshall—Edgeworth-féle indexekkel is.[17]

Az tehát, hogy aggregátumok helyett a 2. pontban definiált $I^{(j)}$ változókra alkalmazzuk a főkomponens-elemzést, a különböző súlyozású indexformulák átlagolásához vezet, ami közgazdaságilag is megengedett és alátámasztható ([20], [21]), s egyszersmind egy olyan egyszerű interpretációját adja az FK-indexeknek, amilyennel a BL-indexek és módosított változataik nem rendelkeznek.

Ami az FK-indexek vagy az azokat közelítő átlag-indexek gyakorlati alkalmazhatóságát illeti, szükségesnek tartjuk a következő megjegyzést. Mindkét módszer esetén fennáll annak a lehetősége, hogy új időszakok adatainak bevonása az elemzésbe visszamenőleg is megváltoztatja az előző időszakokra vonatkozó index-értékeket. Ez a statisztika *tájékoztató funkciója* szempontjából nyilván nem engedhető meg, mert a nem szakembert még kellő magyarázat esetén is megzavarja. Annak viszont semmi akadályát sem látjuk, hogy a *közgazdasági elemző munka* során alkalmazni lehessen az itt javasolt indexeket.

Végül a főkomponens-elemzés jelen gyakorlati alkalmazásával kapcsolatban kívánunk két megjegyzést tenni. Az első az, hogy a jelen esetben a megfigyelések száma pontosan megegyezik az alapulvett $I^{(j)}$ változók számával, ami szokatlannak tűnhet. Ez azonban most nem az adatok hiányának, hanem a változók konstrukciójának a következménye, ami viszont a vizsgált probléma természetéhez igazodik. Ezért most *a vizsgált probléma természete* és nem a kevés számú megfigyelés az oka annak, hogy a változók szórásnégyzete már egy főkomponenssel is szinte tökéletesen megmagyarázható.[18] Másik meg jegyzésünkkel arra kívánunk utalni, hogy itt a főkomponens elemzésnek nem a szokásosabb, exploratívnak nevezhető, hanem az ún. konfirmatív alkalmazá-

[17] A Laspeyres-féle indexet $I^{(1)}$-gyel, a Paasche-félét pedig $I^{(2)}$-vel jelölve, a Fisher által „ideálisnak" nevezett index formulája

$$I^{(F)} = \sqrt{I^{(1)}\,I^{(2)}}$$

amitől az átlag-index csak annyiban különbözik, hogy a kétféle súlyozású indexnek nem mértani, hanem számtani átlaga. Amennyiben a kétféle súlyozású index közötti eltérés nem túl nagy, a kétféle átlag is közel esik egymáshoz. Az átlag-indexek, s így az FK-indexek is, kapcsolatba hozhatók még az ún. Marshall—Edgeworth-féle indexekkel is, amelyek a Laspeyres- és Paashe-féle formulák súlyozott számtani átlagai. Ez a kapcsolat azonban az előbbinél lazább, mert ugyanazon értékek súlyozatlan és súlyozott számtani átlaga általában jobban eltér egymástól, mint a súlyozatlan számtani és mértani átlag.

[18] Egyébként annak szükséges feltétele, hogy $\varrho(\mathbf{I}) = t$ legyen, már éppen teljesül.

sáról van szó, amikoris annak a határozott hipotézisnek a vizsgálata a cél, hogy a változók szórásnégyzete megmagyarázható-e egyetlen főkomponens segítségével. A főkomponens-elemzés és a faktoranalízis ilyen és hasonó konfirmatív jellegű alkalmazásainak részleteire azonban itt nem áll módunkban kitérni, azokat egy későbbi tanulmányban szándékozunk tárgyalni.

(Beérkezett: 1975. június 13.)

IRODALOMJEGYZÉK

1. Banerjee, K. S.: A Unified Statistical Approach to Index Number Problem, Econometrica, Vol. 29. (1961.) pp. 591–601.
2. Banerjee, K. S.: Best Linear Unbiased Index Numbers and Index Numbers Obtained Through a Factorial Approach, Econometrica, Vol. 31. (1963.): pp. 712–728.
3. Blalock, H. M.: Making Causal Inferences for Unmeasured Variables from Correlations Among Indicators. American Journal of Sociology, Vol. 69. (1963.): 53–62.
4. Bodewig, E.: Matrix Calculus, North-Holland Publishing Co, Amsterdam 1959.
5. Budapest Statisztikai Évkönyve, 1964, 1966., 1971.
6. Costner, H. L.: Theory, Deduction and Rules of Correspondence, American Journal of Sociology, Vol. 75. (1969.): 245–263.
7. Divisia, F.: L/indice monétaire et la théorie de la monnaie, Revue d'Économie Politique, (1925.): 842–861; 980–1008; 1121–1151 és (1926.): 49–81.
8. Fisher, I.: The Making of Index Numbers, (Third, Revised Edition) Houghton Mifflin Co, 1927.
9. Frisch, R.: Az indexszámok problémája. Kvantitatív és dinamikus közgazdaságtan. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1974., 137–180. old.
10. Hauser, R. M.–A. S. Goldberger: The Treatment of Unobservable Variables in Path Analysis, H. L. Costner (ed.): Sociological Methodology 1971. Jossey-Bass, San Francisco 1971. Chapter 4, pp. 81–117.
11. Jazairi, N. T.: An Empirical Study of the Conventional and;Statistical Theories of Index Numbers, Bulletin, Oxford University Institute of Economics and Statistics, Vol. 33., No. 3. (1971.): 181–195.
12. Kloek, T.–G. M. deWit: Best Linear Unbiased Index Numbers, Econometrica, Vol. 29. (1961.) No. 4. pp. 602–616.
13. Kloek, T.–Rees, G. J. Van: On the Method of „Deflated" Best Linear Index Numbers, Bulletin of the International Statistical Institute, Vo. 39. (1962.), Part. 4., pp. 451–462.
14. Köves P.: Statisztikai indexek. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Bp. 1956.
15. Köves P.: Az életszínvonal vizsgálatánál alkalmazott indexszámítás módszertani problémái. Az indexformulák közgazdasági tartalmáról, Az életszínvonal elemzésének és nemzetközi összehasonlításának kérdései, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1959. 42–53. old.
16. Köves P.–Párniczky G.: Általános statisztika. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1973.
17. Lawley, D. N.–A. E. Maxwell: Factor Analyis as a Statistical Method (Second Edition) American Elsevier Publishing Co., New York, 1971.
18. Marton Á.: Az átlagárak statisztikai vizsgálata, Statisztikai Szemle, 1966. évi 2. szám: 176–187. old.
19. Rhodes, E. C.: The Construction of An Index of Business Activity, Journal of the Royal Statistical Society, Vol. 100. (1937.): pp. 18–39.
20. Rutherford, R. S. G.: The „Principal Factors" Approach to Index Number Theory, Economic Record, Melbourne, Vol. 30. (1954.) pp. 200–208.
21. Szidarovszky F.: Bevezetés a numerikus módszerekbe. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 1974.
22. Theil, H.: Best Linear Index Numbers of Prices and Quantities, Econometrica, Vol. 28. (1960.) No. 4. pp. 464–480.
23. Theil, H.: Principles of Econometrics, John Wiley & Sons, New York 1971.
24. Tintner, G.: Some Applications of Multivariate Analysis to Economic Data, Journal of the American Statistical Association, Volt 41. (1946.): pp. 472–500.
25. Zurmühl, R.: Matrizen (Zweite Aufl.), Springer, Berlin, 1958.

A PRINCIPAL COMPONENT APPROACH TO INDEX NUMBERS

After a short critical review of the previous applications of principal component analysis and factor analysis to index numbers, a new ~~principal component~~ approach is suggested ~~in the article~~.

The main point of the new approach is that the variables $I^{(j)}$ taking on the values $I_i^{(j)}$ — with $I_i^{(j)}$ being the i^{th} member of the series of base price (quantity) index numbers with fixed weights of the j^{th} period — are considered as multiple indicators of the unobservable variable "price level" ("volume" of production, sales, etc.) which calls for the use of a one-factor factor-analytical model. This is why the suitably normalized values of the first principal component of the above indicators — as reasonable substitutes for those of the single factor of the factor-analytic model — have been taken for price (quantity) index numbers.

A numerical application is given is section 3, which, among others, shows that the mean index numbers (3.2) and (3.3) respectively, are extremely good approximations to the respective principal component index numbers. The conditions of the goodness of this approximation are dealt with in Section 4. In Section 5 the special case of two periods is investigated in some more details, while in Section 6 it is pointed out that the present approach can be regarded as a new mathematical validation for the cross-breeding of differently weighted index number formulas.

ПРИМЕНЕНИЕ АНАЛИЗА ГЛАВНЫХ КОМПОНЕНТОВ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ИНДЕКСОВ

После краткого критического обзора применения анализов главных компонентов и факторного анализа при вычислении индексов эта статья предлагает применение нового способа вычисления индексов при помощи анализа главных компонентов.

Сущность нового подхода заключается в том, что переменные $I^{(j)}$, принимающие величину $I_i^{(j)}$ (где $I_i^{(j)}$ является i-тым членом базисного ряда индексов цен или объемов, рассчитанного при помощи j-той периодической постоянной величины), принимаются за индикаторы не поддающегося непосредственному измерению »уровня цен« (»объем« производства, реализации, и т. д.), что требует применения одной однофакторной модели факторного анализа. Вместо содержащихся в ней величин единственного фактора определяются нормированные величины первых главных компонентов вышеуказанных индикаторов, в качестве их удовлетворительного приближения. Полученные таким образом величины являются индексами главных компонентов.

На третьем этапе описан один числовой подход, который показывает, что средние индексы (3.2) и (3.3) являются хорошими приближениями к соответствующих индексов главных компонентов. 4-ый занимается условиями правильности этого приближения. 5-ый этап занимается подробным исследованием специального случая, который содержит только два периода, в то время, как 6-ой этап указывает на то, что данный подход дает новое математическое обоснование перекрещиванию формул индексов с различными величинами.

BOD PÉTER

Nemlineáris ágazatközi kapcsolatok matematikai vizsgálata

Ebben a dolgozatban a Leontief-féle nyílt, statikus input-output modell egy általánosított nemlineáris változatával foglalkozunk. A modell feltételezései fővonásaiban azonosak az A. Nataf által 1960-ban vizsgált modellével [1], azzal a különbséggel, hogy nem tételezünk fel eleve növekvő hozadékot, mint ahogy ezt Nataf tette. Megmutatjuk, hogy a modellben minden ún. elérhető végső kibocsátáshoz tartozik egy olyan teljes termelés, amely azt minimális társadalmi költséggel realizálja.

A modell elemzéséhez felhasználunk bizonyos eredményeket az ún. indifferens programozási feladatok elméletéből [2], [3], valamint fogalmakat és eredményeket a minimális elemmel rendelkező halmazok területéről [4]. Ezzel két külön célt is kívánunk szolgálni. Egyfelől megmutatjuk az említett eredmények felhasználhatóságát a matematikai közgazdasági modellek egy fontos családjának általánosításában. Másrészt felhívjuk a figyelmet arra hogy egyes e témával összefüggő, újabban publikált eredmények [5] hogyan kapcsolódnak korábbi és úgy látszik elfelejtett eredményekhez.

Tekintsünk egy sokszektorú (n szektorból álló) Leontief típusú gazdaságot, melyben minden egyes ágazat egyetlen technológia segítségével egyetlen — az ágazatra jellemző — használati értéket bocsát ki. Eltekintünk az esetleges külkereskedelmi kapcsolatoktól és egy ún. nyílt modell segítségével vizsgáljuk a társadalmi újratermelés mennyiségi összefüggéseit. A ráfordítási fajlagosok állandóságának feltételezése helyett abból indulunk ki, hogy minden ágazat saját bruttó tevékenységi szintjétől függően használ fel az összes ágazat kibocsátásából. A j-edik kibocsátási ágazat ráfordításait így n különböző függvény jellemzi. Jelölje az i-ik ágazat kibocsátására irányuló ráfordítások függvényét:

$$f_{ij}(\xi_j); \qquad (i = 1, 2, \ldots, n; \; j = 1, 2, \ldots, n).$$

Összesen n^2 ráfordítási függvényünk van. Valamennyivel kapcsolatban a következő feltételezésekkel élünk:

i. Minden $f_{ij}(\xi_j)$; $(i = 1, 2, \ldots, n; \; j = 1, 2, \ldots, n)$ függvény folytonosan deriválható.

ii. $f_{ij}(0) = 0$; $(i = 1, 2, \ldots, n; \; j = 1, 2, \ldots, n)$

iii. Ha $0 \leq \xi_j^1 \leq \xi_j^2$, akkor $f_{ij}(\xi_j^1) \leq f_{ij}(\xi_j^2)$.

Valamennyi ágazat kibocsátása a következő szerkezetű mérleg szerint kerül felhasználásra:

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(\xi_i) + \eta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

ahol η_i az i-ik ágazat kibocsátásából végső felhasználásra kerülő rész.

Vezessük be a következő jelölést:

$$f_j(\xi_j) = \begin{bmatrix} f_{1j}(\xi_j) \\ f_{2j}(\xi_j) \\ \vdots \\ f_{nj}(\xi_j) \end{bmatrix}; \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Akkor írhatjuk, hogy

$$x = \sum_{j=1}^{n} f_j(\xi_j) + y.$$

Legyen:

$$F(x) = x - \sum_{j=1}^{n} f_j(\xi_j) = \begin{bmatrix} f^1(x) \\ f^2(x) \\ \vdots \\ f^n(x) \end{bmatrix}.$$

A modell alapvető összefüggéseit kifejező egyenletrendszert így a következő alakban nyerjük:

$$F(x) = y.$$

Nyilvánvaló, hogy ha minden fajlagos ráfordítási együttható állandó, vagyis

$$f_{ij}(\xi_j) = a_{ij}\, \xi_j,$$

akkor

$$F(x) = (E - A)x$$

és ezzel az ismert lineáris Leontief modellnél vagyunk.

Az $F(x)$ függvény közgazdasági értelmezése kézenfekvő. Kifejezi azt a transzformációt, amely az adott gazdaságban az újratermelés során végbemegy azáltal, hogy a különböző ágazatok a saját tevékenységeik megvalósításához termelő módon felhasználják a más ágazatok és egyben saját kibocsátásuk egy részét. Valamely x vektorral jellemzett teljes tevékenység mellett éppen az $F(x)$ vektor írja le a végső felhasználásra rendelkezésre álló termékhalmazt.

Hogy világosan lássék, milyen tulajdonságú általánosításról is van itt szó: hivatkozunk néhány definícióra:

1. *Definíció: W. C. Reinboldt* [6] nyomán egy $g(x): R^n_+ \to R^n$ leképezést, amely a $g_i(x)$; $(i = 1, 2, \ldots, n)$ komponensekből áll: *diagonálison kívül antitón*-nak nevezünk, ha $\forall x \in R^n_+$ és $i \neq j: (i, j = 1, 2, \ldots, n)$ esetén a

$$G_{ij}(\tau) = g_i(x + \tau e_j)$$

leképezések R^1_+-ból R^1-be a τ változónak nem növekvő függvényei.

2. *Definíció:* A g leképezés *diagonálisan izoton*, ha $\forall x \in R^n_+$-ra a

$$G_{ii}(\tau) = g_i(x + \tau e_i)$$

függvények a τ változó nem csökkenő függvényei.

3. *Definíció: A. Tamir* [5] nyomán mindazokat a $g: R^n_+ \to R^n$ leképezéseket, amelyek R^n_+-on diagonálison kívül antitónok: Z-függvényeknek nevezzük.

Egy Z-függvény ún. M-függvény, ha R^n_+-on inverz-izotón is. Ez annyit jelent, hogy

$$x;\, y \in R^n_+;\; g(x) \leq g(y) \Rightarrow x \leq y.$$

A fenti definíciónak megfelelően következik:

1. *Lemma:* A modell alapegyenletében szereplő

$$F(x) = \begin{bmatrix} f^1(x) \\ f^2(x) \\ \vdots \\ f^n(x) \end{bmatrix}$$

függvény Z-függvény.

Bizonyítás: Mivel:

$$f^i(x) = \xi_i - \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(\xi_j),$$

ezért

$$f^i(x + \tau e_n) = \xi_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} f_{ij}(\xi_j) - f_{ik}(\xi_k + \tau) \leq \xi_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} f_{ij}(\xi_i) - f_{ik}(\xi_k) = f^i(x).$$

Látható, hogy a Z-függvények az olyan A mátrix-szal jellemezhető lineáris leképezések általánosításai, amelyekben minden

$$a_{ij} \leq 0, \quad \text{ha} \quad i \neq j.$$

A Z-függvények számos érdekes tulajdonsággal rendelkeznek, amelyekre A. Tamir mutatott rá a már idézett cikkében. Tamir a Z-függvényekhez tartozó ún. komplementaritási feladatot vizsgálta és algoritmust adott ennek a megoldására. Megmutatta, hogy ha a feladatnak van megengedett megoldása, akkor van ún. legkisebb megoldása is, amely egyben kielégíti a komplementaritási feltételt is. Tamirnak ezek az eredményei általánosítják *Cottle* és *Veinott Jr.* korábbi eredményeit, amelyek a lineáris komplementaritási feladatra vonatkoztak [7].

A következőkben megmutatjuk, hogy a Z-függvényeknek ezek az említett sajátosságai egyenesen következnek *G. Wintgen* egy 1964-ben publikált és a nemzetközi irodalomban sajnos nem eléggé figyelembe vett tételéből [2].

Wintgen tétele az általa bevezetett ún. indifferencia fogalomra vonatkozik. Tekintsük az optimum feladatok egy családját, amelyben adott egy megengedett megoldáshalmaz és a célfüggvények egy osztálya:

$$\mathfrak{Z} = \{z(x) \mid R^n \rightarrow R\}.$$

A következő maximum (minimum) feladat a szóbanlevő feladatcsalád egy képviselője:

keresendő $\hat{x} \in R^n$ úgy, hogy

$$P: z(\hat{x}) = \max\,(\min)\, z(x);\; x \in L$$

ahol $z(x) \in \mathfrak{Z}$.

4. *Definíció:* A P feladat indifferens a célfüggvények $\mathfrak{Z}$ osztályára nézve, ha $\exists x_0 \in L$ úgy, hogy

$$z(x_0) \geq (\leq)\, z(x)$$

$$\forall x \in L \quad \text{és} \quad \forall z(x) \in \mathfrak{Z} \text{ mellett.}$$

Konkretizáljuk $\mathfrak{Z}$-t a következő formában: legyen adva véges sok, folytonos függvény: $z_1(x)$; $z_2(x)$; . . . ; $z_k(x)$ amelyek az L halmazon véges maximumot (minimumot) vesznek fel. Legyen

$$\mathfrak{Z}' = \left\{ z(x) \mid z(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, z_i(x);\ \lambda_i \geq 0 \right\}.$$

Vagyis a $\mathfrak{Z}'$ függvényosztályba az adott függvények nem-negatív lineáris kombinációi tartoznak.

Az $z_1(x)$; $z_2(x)$; . . . ; $z_k(x)$ függvények egy folytonos leképezést valósítanak meg R^n-ből R^k-be. Jelöljük az L halmaznak az e leképezéssel nyert képét R^k-ban $Z(L)$-lel.

Tekintsük a következő feladatot:
keresendő $\hat{x} \in R^n$ úgy, hogy

$$P' : z(\hat{x}) = \max\,(\min)\, z(x); \quad x \in L$$

ahol $z(x) \in \mathfrak{Z}'$.

5. *Definíció:* $x = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$ és $y = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix}$ két n-elemű vektor.

Azt mondjuk, hogy

$$a = x \cup y, \quad \text{ha} \quad \alpha_i = \max\,(\xi_i;\ \eta_i) : \forall_i\text{-re}$$

és

$$b = x \cap y, \quad \text{ha} \quad \beta_i = \min\,(\xi_i;\ \eta_i) : \forall_i\text{-re.}$$

Érvényes Wintgen alábbi tétele, amelyet bizonyítással együtt reprodukálunk, mert az eredeti publikáció nehezen hozzáférhető és mert éppen ennek az eredménynek az úttörő jellegét és fontosságát kívánjuk cikkünkben hangsúlyozni.

1. *Tétel:* (Az indifferencia elégséges feltétele) P' indifferens a célfüggvények $\mathfrak{Z}'$ osztályára nézve, ha

$$x;\, y \in L \Rightarrow Z(x) \cup Z(y) \in Z(L),$$

illetve

$$Z(x) \cap Z(y) \in Z(L)$$

Bizonyítás: Legyen $\quad z_i(\hat{x}_i) = \max\,[z_i(x)]$

$$x \in L;\ (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Ezek az optimális megoldások léteznek, vagyis $\hat{x}_i \in L$ $\forall_i$-re.
Képezzük az

$$\bigcup_{i=1}^{k} Z(\hat{x}_i)$$

vektort.

$$\bigcup_{i=1}^{k} Z(\hat{x}_i) = \begin{bmatrix} z_1(\hat{x}_1) \\ z_2(\hat{x}_2) \\ \vdots \\ z_k(\hat{x}_k) \end{bmatrix} \in Z(L).$$

Tehát $\exists x_0 \in L$, hogy

$$Z(x_0) = \begin{bmatrix} \max z_1(x) \\ \max z_2(x) \\ \vdots \\ \max z_k(x) \end{bmatrix}; \; x \in L.$$

Nyilvánvalóan:

$$Z(x_0) \geq Z(x) : \forall x \in L.$$

Legyen $z(x)$ a $\mathfrak{Z}'$ függvényosztály tetszőleges eleme, akkor

$$z(x_0) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \, z_i(x_0) \geq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \, z_i(x) = z(x) : \forall x \in L.$$

Vagyis létezik olyan $x_0 \in L$, amely optimális megoldása a feladatnak tekintet nélkül arra, hogy $\mathfrak{Z}'$ melyik eleme szerepel célfüggvényként.

A tétel állítása minimalizálásra analóg módon bizonyítható, csak $\cup$ helyett a $\cap$ művelet alkalmazandó.

6. *Definíció:* Azt mondjuk, hogy $\hat{x}$ a $H \subset R^n$ halmaz legnagyobb (legkisebb) eleme, ha $\hat{x} \in H$ és $\hat{x} \geq x : \forall x \in H$, illetve $\hat{x} \leq x : \forall x \in H$.

Vegyük észre, hogy ha P' indifferens a 4. Definíció szerint, akkor $Z(x_0)$ a $Z(L)$ halmaz legnagyobb (legkisebb) eleme.

7. *Definíció:* Legyen adva egy $f : R^n_+ \to R^n$ leképezés és egy $b \in R^n$ vektor. A következő feladatot komplementaritási problémának nevezzük: keresendő olyan x vektor, hogy

i. $f(x) + b \geq 0; \; x \geq 0,$

ii. $x^T[f(x) + b] = 0.$

x megengedett megoldás, ha kielégíti i.-t. Valamely megengedett megoldást komplementer, vagy kiegészítő megoldásnak mondunk, ha ii.-t is kielégíti.

2. *Lemma:* Legyen: $L = \{x \mid f(x) + b \geq 0; \; x \geq 0\}$, ahol $f : R^n_+ \to R^n$ és $b \in R^n$.

Tegyük fel, hogy $L \neq \emptyset$ és $|L| > 1$. (Az L halmaznak legalább két különböző eleme van.)

Ha f ún. Z-függvény, akkor az L halmaz zárt a $\cap$ műveletére, más szóval:

$$x;\, y \in L \Rightarrow x \cap y \in L.$$

Bizonyítás:

$$x;\, y \in L \Rightarrow f_i(x) + \beta_i \geq 0$$

és

$$f_i(y) + \beta_i \geq 0. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Legyen $z = x \cap y$; mivel $x \geq 0$; $y \geq 0 \Rightarrow z \geq 0$.
Megmutatjuk, hogy $f_i(z) + \beta_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$
Feltehetjük, hogy történetesen: $(z)_i = (x)_i$

Definiáljuk a következő pontsorozatot:

$$z = v_0;\, v_1;\, v_2;\, \ldots;\, v_n = x,$$

ahol

$$v_k = v_{k-1} + \tau_k e_k.$$

Legyen

$$\tau_k = 0, \qquad \text{ha} \quad (z)_k = (x)_k;$$

$$\tau_k = (x)_k - (y)_k, \quad \text{ha} \quad (z)_k = (y)_k.$$

Az 1. és 3. Definícióknak megfelelően az $F_{ik}(\tau)$ függvények nem növekvőek, ezért:

$$f_i(v_k) = f_i(v_{k-1} + \tau_k e_k) \leq f_i(v_{k-1}).$$

Tehát

$$f_i(x) \leq f_i(z).$$

Így

$$f_i(x) + \beta_i \geq 0 \Rightarrow f_i(z) + \beta_i \geq 0.$$

Mivel a fentiek minden i-re igazak:

$$f(z) + b \geq 0, \quad \text{vagyis} \quad z \in L.$$

3. *Lemma:* Ha f folytonos Z-függvény és $L \neq \emptyset$, akkor L-ben van legkisebb elem.

Bizonyítás: Tekintsük a következő nemlineáris programozási feladatcsaládot: keresendő $x \in R^n$ úgy, hogy

$$z(\bar{x}) = \min z(x)$$

$$x \in L = \{x \mid f(x) + b \geq 0;\; x \geq 0\}$$

$$P'' \qquad z(x) \in \mathfrak{Z}'' = \{z(x) \mid z(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i(x);\; \lambda_i \geq 0\},$$

ahol

$$z_i(x) = (x)_i.$$

Látható, hogy $\mathfrak{Z}''$ a nem-negatív lineáris függvények osztálya. A $z_i(x)$ függvények most a

$$Z(x) = Ex$$

azonos leképezést valósítják meg. A 2. Lemma alapján

$$x;\, y \in L \Rightarrow Z(x) \cap Z(y) = x \cap y \in Z(L) = L.$$

f folytonossága miatt L zárt halmaz. Amennyiben L korlátos is, akkor minden $z_i(x)$ függvény felveszi véges minimumát L-en. Tehát Wintgen tételének feltételei teljesülnek. Van olyan $x_0 \in L$, amelyben az összes nem-negatív lineáris függvény minimumot vesz fel. Ezért x_0 az L halmaz legkisebb eleme. Ez következik egyrészt az 1. Tételhez fűzött megjegyzésből, miszerint $Z(x_0)$ az $Z(L)$ halmaz legkisebb eleme és most $Z(L) = L$ és $Z(x_0) = x_0$. Másrészt abból az ismert tényből is, hogy $x \leq y \Leftrightarrow x^T x \leq c^T y$ tetszőleges $c^T \geq 0^T$ mellett, az következik, hogy egy halmaznak az a pontja, ahol bármely tetszőleges nem-negatív lineáris függvény minimumot vesz fel: a halmaz legkisebb eleme és fordítva.

Ha történetesen L nem korlátos: tekintjük egy tetszőleges elemét: $\bar{x} \in L$. Mivel $L \neq \emptyset$ ilyen elem létezik és alkalmazzuk a fenti meggondolásokat az

$$L' = \{x \mid x \in L;\ x \leq \bar{x}\} \subset L$$

halmazra. Nyilvánvaló, hogy $L' \neq \emptyset$, ugyancsak zárt a $\cap$ műveletére és egyben biztosan korlátos. L' minimális eleme egyben az L halmaznak is legkisebb eleme.

4. *Lemma:* Ha x_0 az L halmaz legkisebb eleme és f folytonos Z-függvény, akkor x^0 kiegészítő megoldás.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy a komplementaritás nem teljesül. Akkor $\exists_i$, hogy $(x_0)_i\,[f_i(x_0) + \beta_i] > 0$.
Vagyis: $(x_0)_i > 0$ és $f_i(x_0) + \beta_i > 0$
Ha $\delta > 0$-t elég kicsinek vesszük, akkor

$$\bar{x} = x_0 - \delta\, e_i \geq 0.$$

Tekintsük az $F_{ji}(\tau)$ függvényt az $\bar{x} \in R^n_+$ pontból kiindulva:

$$F_{ji}(\tau) = f_j[(x_0 - \delta e_i) + \tau e_i] \leq f_j(x_0 - \delta e_i).$$

Legyen

$$\tau = \delta,$$

$$F_{ji}(\delta) = f_j(x_0) \leq f_j(x_0 - \delta e_i) = f_j(\bar{x}).$$

Mivel:

$$f_j(x_0) + \beta_j \geq 0 \Rightarrow f_j(\bar{x}) + \beta_j \geq 0$$

$\forall j$-re, amelynél $j \neq i$. Tekintve a továbbiakban, hogy $f_i(x_0) + \beta_i > 0$ és $fi(x)$ folytonos: δ-t lehet még tovább csökkenteni, ha szükséges és

$$f_i(\bar{x}) + \beta_i = f_i(x_0 - \delta\, e_i) + \beta_i \geq 0$$

lesz. Így $\bar{x} \in L$, de ugyanakkor $(\bar{x})_i < (x_0)_i$, ami ellentmond annak a feltevésnek, hogy x_0 az L halmaz legkisebb eleme.

A Z-függvények sajátosságainak bemutatása után tárjünk vissza a korábban tárgyalt modellhez.

8. *Definíció:* A modellel jellemzett gazdaságot működőképesnek mondjuk, ha $\exists \bar{x} \geq 0$, hogy $F(\bar{x}) > 0$. Egy működőképes gazdaságban elérhető végső kibocsátásnak nevezünk egy $y_0 > 0$ vektort, ha

$$L_{y_0} = \{x \mid F(x) \geq y_0\} \neq 0.$$

9. *Definíció:* Társadalmi termelési költségfüggvénynek nevezünk egy R^n_+-en értelmezett $\varphi(x)$ függvényt, ha eleget tesz az alábbi követelményeknek:

i. $\varphi(x) = 0$

ii. $\varphi(x) > 0$, ha $|x| > 0$

iii. $\varphi(x)$ izotón, vagyis: $x^1 \geqq x^2 \Rightarrow \varphi(x^1) \geqq \varphi(x^2)$.

Bebizonyítjuk a következő állítást:

2. *Tétel:* Minden elérhető y_0 végső kibocsátáshoz tartozik egy olyan teljes termelés: x_0, amelyre

$$F(x_0) = y_0$$

és amely egyben optimális abban az értelemben, hogy minimális társadalmi termelési költséggel realizálja a végső kibocsátást.

Bizonyítás: Ha y_0 elérhető végső kibocsátás, akkor az

$$L_{y_0} = \{x \mid F(x) - y_0 \geqq 0;\ x \geqq 0\} \neq \emptyset.$$

Minthogy $F(x)$ folytonos Z-függvény, a 3. Lemma értelmében az L_{y_0} halmaznak van legkisebb eleme. Legyen ez x_0. A 4. Lemma miatt x_0 egyben kiegészítő megoldás, vagyis:

$$x_0^T[F(x_0) - y_0] = 0$$

Lássuk be, hogy x_0-nak nem lehet zérus komponense. Tegyük fel, hogy $(x_0)_i = 0$. Ebben az esetben az L_{y_0} halmazt meghatározó i-ik feltétel a következőképpen alakulna:

$$(x_0)_i - \sum_{j=1}^{n} f_{ij}[(x_0)_j] - (x_0)_i < 0$$

és így x_0 nem lehetne megengedett.

Ha viszont $x_0 > 0$, akkor a komplementaritás miatt

$$F(x_0) - y_0 = 0,$$

illetve

$$F(x_0) = y_0$$

kell, hogy fennálljon. Minthogy x_0 az L_{y_0} halmaz legkisebb eleme: bármely megengedett $\bar{x} \in L_{y_0}$ termelésre

$$x_0 \leqq \bar{x},$$

és így a társadalmi termelési költség izotonitása miatt x_0 realizálja a legkisebb társadalmi költséggel az y_0 végső kibocsátást.

3. *Tétel:* Ha x_0 az L_{y_0} halmaz legkisebb eleme és x_0-ban teljesül valamelyik regularitási feltétel, akkor az $F(x)$ függvénynek x_0-ban nem szinguláris Jacobi mátrixa van, amelynek az inverze nem-negatív.

Bizonyítás: Mivel x_0 minimális elem L_{y_0}-ban, ezért x_0 minimális megoldása a következő nemlineáris programozási feladatoknak:

$$\min x_i \to !$$

$$x \in \{x \mid y_0 - F(x_0) \leq 0\}$$
$$x \in R_+^n$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

A 2. Tételben láttuk, hogy $x_0 > 0$, vagyis a nem-negatív ortáns belső pontja. Másrészt a regularitás fennáll és így teljesülnek az optimalitás szükséges feltételei [8] és ezért $\exists$ olyan $u_i \geq 0$ vektor, hogy x_0 és u_i kielégítik a Kuhn—Tucker feltételeket. Köztük azt a feltételt, hogy x_0-ban a célfüggvény gradiense egyenlő az aktív feltételek gradienseinek megfelelő negatív lineáris kombinációjával. Mivel x_0-ban valamennyi feltétel aktív:

$$e_i = -\nabla [y_0 - F(x_0)] \cdot u_i = \nabla F(x_0) \cdot u_i$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Legyen

$$U = [u_1; u_2; \ldots; u_n] \geq 0.$$

Írható tehát: $E = \nabla F(x_0) \cdot U$ és innen:

$$U = [\nabla F(x_0)]^{-1} \geq 0.$$

Korollárium: Ha a rendszerben valamennyi ráfordítás nem romló kihozatalú, akkor minden elérhető végső kibocsátáshoz egyetlen azt realizáló teljes termelés tartozik, az $F(x) = y_0$ egyenletrendszer megoldása egyértelmű; vagyis $F(x)$ mindenütt egyértékű.

Bizonyítás: A pótlólagos feltételezés azt jelenti, hogy az

$$\frac{f_{ij}(\xi_j)}{\xi_j}$$

függvények nem növekvőek, vagyis valamennyi ráfordítási függvény konkáv. Ekkor a $\sum_{j=1}^{n} f_{ij}(\xi_j)$ összegek is konkávok; míg az

$$f^i(x) = \xi_i - \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(\xi_j)$$

függvények konvexek, vagyis $F(x)$ minden komponense konvex.

Tegyük fel az állításunkkal szemben, hogy az $F(x) = y_0$ egyenletrendszernek x^0-on kívül van még egy x^1 megoldása. Minthogy x_0 az L halmaz minimális eleme, ezért: $x_0 \leq x_1$. Mivel mind a két pont kielégíti az egyenletet:

$$F(x_0) = y_0,$$
$$F(x_1) = y_0.$$

Így

$$F(x_1) - F(x_0) = 0$$

Azonban $F(x)$ konvexitása miatt ebből

$$\nabla F(x_0)(x_1 - x_0) \leq F(x_1) - F(x_0) = 0$$

következik. Mivel $[\nabla F(x_0)]^{-1} \geq 0$, ezért $x_1 \leq x_0$, ami ellentmond annak, hogy $x_0 \leq x_1$.

Megjegyzés: A megoldás egyértelműségére való következtetéshez nem szükséges az $F(x)$ leképezés konvexitása. Elegendő, ha $F(x)$ az x_0 pontban a nemnegatív ortánsra nézve lokálisan kvázikonvex.

A fenti eredmények azt mutatják, hogy a Leontif-modell számos előnyös tulajdonsága érvényben marad a nem-lineáris általánosítás mellett is. Valószínűnek látszik, hogy ilyen modellek megoldása nem okozna különösebb algoritmikus, vagy számítástechnikai nehézséget sem. Mivel pedig a népgazdasági tervezéshez használt modellekben rendszerint előjön a társadalmi termelés Leontief-típusú elszámolása: lehetőség nyílnék kilépni a linearitás feltételezéséből származó korlátok közül ezen a téren is. Ehhez azonban mindenek előtt arra volna szükség, hogy az ágazatok közötti nem-lineáris kapcsolatok statisztikai megfigyelése terén jelentősen előrelépjünk.

(Beérkezett: 1975. július 20.)

IRODALOMJEGYZÉK

1. NATAF, A.: Systémes économiques de production á rendement croissant, Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris. Vol. XI. Fasc. 2. (1960.) 161–170.
2. WINTGEN, G.: Indifferente Optimierungsprobleme. Mathematik und Kybernetik in der Ökonomie. Konferenzprotokoll. II. 3–6. 1964. Berlin.
3. BOD P.: Az indifferens programozási feladatokról. Szigma. 5. (1972.) 137–146.
4. BOD P.: Minimális elemmel rendelkező zárt konvex halmazokról. Szigma. 7. (1975.) 61–68.
5. TAMIR, A.: Minimality and complementarity properties associated with Z-functions and M-functions. Mathematical Programming. 1974. 7–31.
6. REINBOLDT, W. C.: On M-functions and their applications to nonlinear Gauss-Seidel iterations and to network flows. Journal of Math. Anal. and Appl. 1970. 247–307.
7. COTTLE, R. W.–VEINOTT, A. F. JR.: Polyhedral sets having a least element. Mathematical Programming. 1971. 238–249.
8. MARTOS, B.: Nonlinear Programming. Akadémiai Kiadó. 1975. 128 old.

MATHEMATICAL ANALYSIS OF NON-LINEAR INTER-SECTORAL RELATIONS

~~In this paper~~ a generalized non-linear variant of the open, static input-output model of *Leontief* ~~is dealt with~~.

The assumptions of the model are basically identical with those of the model examined by *A. Nataf* in 1960 with the difference that increasing returns are not *a priori* assumed. The core of the model is a mapping $F(x)$ from $R^n_+ \ldots$ into R^n which belongs to the class of Z functions.

Relying on a theorem of *G. Wintgen* published in 1964, simple proofs are provided for the minimality and complementarity characteristics of the so called Z-functions first observed by *A. Tamir*.

It is proved that to each reachable final output belongs a total production realizing it with minimum social cost. At this point – if certain regularity conditions hold – the Jacobian matrix of the function $F(x)$ is non-singular and has a non-negative inverse. Finally, if all inputs of the system are of non-decreasing returns, a unique total production belongs to each reachable final output.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ МЕЖОТРАСЛЕВЫХ СВЯЗЕЙ

В этой работе мы занимаемся обобщенным нелинейным вариантом открытой статической инпут-аутпут модели Леонтьева.

Предпосылки модели в основном совпадают с предпосылками модели А. Натаф, рассмотренной в 1960 году, с той разницей, что мы не предполагаем заблаговременно увеличивающегося прироста.

Ядром модели является отображение F(x) из R_+^n, в R^n, который относится к классу функций Z.

Опираясь на опубликованный в 1964 году тезис Г. Винтгена, мы приводим простое доказательство минимальности и комплементарности функции Z, которые впервые были замечены А. Тамиром.

Мы доказываем, что в модели к каждому так наз. достижимому конечному выпуску относится такое производство, которое требует минимальных общественных затрат. В этой точке — в случае выполнения определенных условий — регулярности — функция F(x) имеет не сингулярную матрицу Якоби, обратная матрица которой не отрицательна. Наконец, если в системе все затраты не ухудшают выпуск, то к каждому достижимому конечному выпуску относится единственное, реализующее выпуск, полное производство.

Fényes Tamás – Sári József:

Pénzfolyamatokra épülő vállalati készletmodell

A cikk célja annak bemutatása, hogyan lehet következtetni az árumozgásra, végső soron a forgóeszközök (készletek) értékbeni változására a bankszámlákon lebonyolított pénzforgalom adatainak felhasználásával. A módszert – amelyet a következőkben részletesen ismertetünk – vállalati szintre dolgoztuk ki és a számítások céljára felhasznált összefüggések is csak vállalati szinten érvényesek.

Az áruk mozgása az áruforgalomban jut kifejezésre. A szocialista központi bank funkcióiból következően a vállalatok ezen tevékenysége teljes egészében megjelenik a bankszámlaforgalomban. Ez a feltétele annak, hogy a bank rendszeresen megfigyelhesse az árumozgásokat; mind az áru- és anyagbeszerzést, mind az értékesítést. E kétirányú forgalmi folyamatból kíséreljük meg levezetni a készleteknek egy adott időszak alatti változását ill. valamely meghatározott időpontra vonatkozó állományát.

A tényleges árumozgás és a pénzforgalomban megjelenő számok között tartalmi és időbeli eltérések vannak, ezért a készletek alakulására csak tendenciaszerű változások és közelítő értéknagyságok állapíthatók meg. Úgy véljük, bizonyos pontatlanság ellenére is hasznos támpontul szolgálhatnak ezek az adatok két mérlegkészítés időpontja között. Következik ebből, hogy a bankszámlakivonatok adatait gyakorlatilag valamely negyedév első napjától kezdődően addig a napig célszerű a vizsgálatoknál felhasználni, amíg a következő mérlegbeszámoló adatai rendelkezésre nem állnak. Ez az időtartam általában 110–120 nap.

A vállalati és a banki információs rendszerben egy negyedéves időtartam az, amelyen belül célszerű a pénzforgalomból folyamatosan nyomon követni az értékesítés és a beszerzés ütemét, nagyságát. A negyedéves vállalati mérleg számadatai induló alapot nyújtanak a megfigyeléshez, majd a következő mérlegbeszámoló elkészülte után lezáródik és egyben megkezdődik egy új negyedéves periódus, amely alatt a bankszámlaforgalom képezheti a megfigyelés és az elemzés tárgyát.

Évekkel ezelőtt már folytak kísérletek a forgóeszközök (készletek) állományának becslésére a bankszámlák adatainak felhasználásával. Az akkori eljárások lényegében indirekt módon, a bankszámlák egyenlegéből, s azok változásából [1], illetve a forrás oldal változásának a bankszámlák forgalmából való levezetése útján [2] közelítették a vállalati forgóeszközök értékét. A készletek szűkített önköltségen történő értékelése miatt azonban e módszerek csak további kombinációk figyelembe vételével vezetnek helyes eredményre. Indokolt tehát új módon közelíteni a régi célt. Ennek lehetőségét tárgyaljuk a következő pontokban, ahol egy direkt módszert mutatunk be a készletek értékének meghatározására.

A bankszámla-forgalomból nyerhető adatok

A Magyar Nemzeti Bank naponként könyveli a fizetési forgalmat a vállalatok megbízásai alapján a bankszámlákon. Számunkra ezúttal az áruszállításokkal és szolgáltatásokkal kapcsolatos forgalom kap kitüntetett szerepet. A számla terhelési és jóváírási oldala jelzi, hogy a forgalomból mely adatokat kell anyag- és árubeszerzésnek és melyeket értékesítésnek tekinteni. Az elemzés céljára a tíznaponként és havonként készített ún. összevont jelentések adatait használjuk, mivel a napi forgalom tételes és az eszközgazdálkodás megfigyelésére túlságosan gyakori.

A tényleges árumozgás és a bankszámlaforgalom között időbeli különbség mutatkozik, ezért a következőkben megvizsgáljuk, hogyan lehet az ún. „eredményszemléletű realizálás" és a „pénzügyi realizálás" közötti időkülönbségből származó forgalmi eltéréseket kiküszöbölni. Erre a célra szolgál a futamidő. Futamidőn azt az időtartamot értjük, amely a raktárból kiszállítás, ill. az oda beérkezés és a tényleges pénzügyi rendezés között eltelik. Ez az időtartam minden egyes tételnél más lehet, a vállalat jellege azonban meghatározza az átlagos futamidőt, amely az egyes ügyletek miatti raktári árumozgás és a pénzügyi kiegyenlítés között jelentkező időtartamoknak a forgalommal súlyozott átlaga napokban kifejezve. A futamidő átlagos hossza nagymértékben differenciálódhat a beszerzés irányaitól, az értékesítési viszonylatoktól, továbbá attól függően, hogy a termék termelő fogyasztási, végső fogyasztási vagy felhalmozási célokat szolgál-e.

Az egyes viszonylatokban a pénzügyi kiegyenlítés feltételeit rendeletek vagy szállítási szerződések szabályozzák, ezért jellemzőnek lehet elfogadni az alábbi fizetési határidőket:

- belföldi áruforgalom 10–20 nap (lakossággal kapcsolatos készpénzforgalom 0–2 nap)
- építési beruházások elszámolása 45–50 nap
- rubel-elszámolású export-import viszonylat 10–15 nap
- dollár-elszámolású viszonylat 60–90 nap.

A futamidő általában pozitív, amin azt értjük, hogy az árumozgást a fentiekben jelzett időtartam elteltével követi a pénzügyi kiegyenlítés. Kivételt képez a dollár viszonylatban lebonyolított importforgalom, ahol negatív futamidővel számolhatunk, mert a pénzügyi letét miatt előbb kell teljesíteni a fizetést (letétképzést), mint ahogyan az áru a raktárba beérkezik. Csak megjegyezzük, hogy az általunk értelmezett futamidő nem azonos a forgási sebességgel, ill. a forgási idővel. Ez utóbbi mutatószám a forgalom és az átlagos állomány közötti összefüggést fejezi ki egy vizsgált időtartam alatt.

A bankszámlákon nyilvántartott beszerzési és értékesítési forgalomból a valóságos árumozgás meghatározása az alábbi módon lehetséges a futamidő felhasználásával:

Anyag- és árubeszerzés (értékesítés) a bankszámlaforgalom szerint a negyedév első napjától a vizsgált időpontig összesen

le: – az egy futamidő tartama alatt lebonyolított forgalom a negyedév első napjától számítva összesen, ha a futamidő pozitív, vagyis az árumozgás megelőzi a pénzügyi teljesítést

hozzá: + a vizsgált időponttól számított egy futamidő-hossznak megfelelő utolsó időtartamra becsült forgalom – pozitív futamidő esetén *hozzá:* + az időszak kezdő időpontjától visszaszámított negatív futamidő hosszra eső beszerzési forgalom összesen, amikor az árumozgás később következik be, mint a fizetés (tőkés importnál előzetes letétképzés esetén)

le: — a vizsgált időszak utolsó napjától visszaszámított egy negatív futamidőnek megfelelő forgalmi összeg a pénzforgalomban rendelkezésre álló empirikus adatok szerint.

A fentiek összevonásával kapott összeg: *az anyag- és árubeszerzés (vagy értékesítés) becsült értéke* a vizsgált időszak alatt.

A kezdő időponttól számított egy pozitív futamidőnek megfelelő beszerzési és értékesítési bankszámlaforgalom empirikus adat. Ily módon ez a helyesbítés, amely a futamidőnek megfelelő forgalom balra transzformálását jelenti, a vizsgált időben egyszerű aritmetikai művelettel elvégezhető. Hasonlóképpen járhatunk el az importbeszerzéseknél, ha a futamidő negatív, de itt az időpontok jobbra tolásával korrigálunk. Feladat tehát a vizsgált időponttól számított további egy pozitív futamidőhossznak megfelelő forgalom becslése.

Az előrebecslés időtartama — a tőkés export kivételével — nem hosszabb 30 napnál; a gyakorlatban rendszerint 10—20 nap. Ily módon a legegyszerűbb eljárás az, ha a kialakult átlagos 10 napos forgalom figyelembevételével pl. e forgalom egyszeres, másfélszeres, kétszeres összegét tekintjük a várható értéknek attól függően, hogy 10, 15 vagy 20 nap felel meg egy futamidő hossznak. Számításainknál ennél pontosabb eredményre törekedtünk, ezért a dekádok törtrészeire eső forgalmat az adott becslési időszak munkanapjainak számával vettük figyelembe. A valóságot jobban közelítő eredményre juthatunk, ha az átlagos (várható) értéket valamilyen megbízhatósági intervallumban elhelyezzük. Ez lehet az ún. átlagos négyzetes eltérés vagy pedig a standardhiba. Az ezeknek megfelelő $\pm$ összegnagyságot számításba vesszük a becslésnél [3].

Tovább javítható a számítások eredménye, ha a várható értéket az adott becslési futamidő szezonjellege szerint prognosztizáljuk. Ebben az esetben szezonindexek segítségével fel-vagy leértékeljük a mérési időszakra jellemző átlagos forgalmi összeget. A szezonindex kiszámításának előfeltétele viszont az, hogy több évre visszamenően rendelkezzünk a pénzforgalmi adatokkal. Ilyen hosszú idősor adatok hiányában ma még nem képezhető. Ezért nem találtunk a pénzforgalmi adatok valószínűségi eloszlását jól jellemző függvényeket sem.

A becslési módszer kidolgozásánál abból a követelményből indultunk ki, hogy ha legalább egy évre vonatkozó idősorral rendelkezünk, az elégséges alap legyen a számítások elvégzésére. Ebben az esetben viszont csak akkor lehet elfogadható becsléseket végezni, ha feltárjuk a folyamat összetevői közötti összefüggéseket, s azok elfogadható eredményre vezetnek.

Vizsgálva a pénzforgalmi adatok tíznaponkénti alakulását, arra a következtetésre jutottunk, hogy eredeti nagyságukban teljesen véletlenszerű értéket vesznek fel, szóródásuk pedig túlhaladja azt a mértéket, amely megnyugtató alapul szolgálhat a becslésre. (L. a mellékelt grafikonokat.) Ezért eljárásunk újszerű megoldást követel, amely a következő.

Az eredeti — egy éves — 36 tagból álló idősorból 2—3—4-tagú mozgóátlagolású trendet képeztünk [3], keresve, hogy mely trendértékek adják a legkisebb hibahatárt az eredeti idősorhoz képest. A mozgóátlagok számításánál az idősor elején és végén bizonyos számú elem elvész. A jelen elemzés keretében természetesen rendelkezésünkre álltak a vizsgált időszak utáni néhány dekádra vonatkozó adatok is, és így a teljes időtartamra kiszámítottuk a trend értékeit. A gyakorlatban azonban éppen ezeknek a hiányzó, ismeretlen adatoknak a meghatározása a feladat.

Az általunk vizsgált vállalat pénzforgalmi adataiból számított mozgó-átlagolású trend értékei egyrészt viszonylag elfogadhatóan jelzik az eredeti idősor adatainak folyamatos mozgását, másrészt lényegesen kisebb szóródási intervallumba esnek az egy éves adatsor összegéből számított átlagértékhez képest, mint az eredeti idősor adatai. Ily módon reális feltételeket teremtettünk a további elemzésekre, amelyek során az alkalmazott módszerek megbízhatósága kielégítő volt, azaz az egyes 10 napos előrejelzési időtartamokra kapott értékek jól közelítették a valóságos forgalmi összegeket. (E módszereket a cikk matematikai fejezetében ismertetjük.)

A vizsgálatoknál olyan időpontokkal záródó időszakokra végeztük el a számításokat, amelyek lehetővé teszik a vállalati mérlegbeszámolók adataival történő ellenőrzést, mert csak ezek ismeretében mondhatunk véleményt a becslési eljárás gyakorlati alkalmazhatóságáról. Az összehasonlítások egyben lehetővé teszik az eltérések vizsgálatát, a hibahatárok megállapítását.

A forgóeszközök (készletek) értékének meghatározása a bankszámlaforgalomból

(Egy pénzforgalmi készletmodell)

A forgóeszközök három nagy csoportjára végezhetünk becsléseket a bankszámlákon lebonyolított pénzforgalomból és a számlaegyenlegekből. Ezek a következők:

- *pénzügyi eszközök*, amelyek állománya — a házipénztári készlet kivételével — egyenlő a bankszámla-követelésekkel (betétek);
- *készletek értéke*, amelyet az alábbiakban részletesen ismertetett módon becsülhetünk és
- *vevőállomány*, amely egyenlőnek tekinthető az egy futamidő alatt lebonyolított értékesítési forgalommal.

Hasonlóan a vevőállományhoz, az egy futamidőre jutó anyag- és árubeszerzés összege megközelítően egyenlő a vizsgált időpontban fennálló szállító állománnyal (a forrás oldalon).

A készletek értékének negyedéven belüli becslésekor a vizsgált időszak kezdő készletértékéből indulunk ki. Ezt az értéket a vállalat gazdasági tevékenysége során a mérési időszakban bizonyos költségtételek növelik, más tételek csökkentik. A növekedést elsősorban az áru- és anyagbeszerzés okozza, amelyre vonatkozóan rendelkezünk az időbelileg korrigált pénzforgalmi adatokkal. A termelő vállalatoknál azonban a készletek értéke nemcsak a beszerzések miatt növekszik, hanem a termelő tevékenység révén létrehozott új értékkel, valamint az állóeszközök elhasználódása miatt az új termékekbe átvitt értékkel is. A magyar gyakorlatban a saját termelésű készleteket szűkített önköltségen, a vásárolt készleteket pedig bekerülési áron kell értékelni. Ezért a növelő tételek között csak a közvetlen béreket és közterheit, valamint a szűkített önköltségbe tartozó értékcsökkenési leírást lehet figyelembe venni. A gyártási és értékesítési külön költségeket, amelyek összegszerűen általában nem jelentősek, elhanyagoltuk a számításoknál. A készleteknek a vizsgált időpontbeli értékét megkapjuk, ha az értékesítést, mint csökkenő tételt, — szintén szűkített önköltségen — levonjuk a kezdő készletállományból.

Az elmondottakból következően az alábbi módon írható fel a készleteknek a pénzforgalomból levezethető sémája:

Induló készlet a negyedév első napján (mérleg adat)

\+ anyag- és árubeszerzés
\+ közvetlen bérek és közterheik
\+ értékcsökkenési leírás (üzemi általános költségből)
— *értékesítés szűkített önköltségen*
= *zárókészlet becsült értéke a vizsgált napon*

A séma szerint bármely időpontban (dekádnapon) becslés végezhető a készletek értékére. A készletváltozást előidéző egyes tételeket, mint a becslésnél figyelembe veendő változókat, az alábbi tartalommal értelmezzük:

a) *Az anyag- és árubeszerzés* általában azt az értéket tartalmazza a pénzforgalmi adatokban is, mint amelyet a vállalatok az anyagbeszerzés költségeként elszámolnak. Ily módon ezeket az összegeket, ha előzőleg már időbelileg korrigáltuk, közvetlenül felhasználhatjuk a készletek becslésére.

b) *A bérek és közterheik* számbavétele több korrekciós feladat elvégzését teszi szükségessé. Ezek sorrendben a következők:

A pénzforgalmi adatokból rendelkezésre állnak a bérek és személyi jellegű kifizetések a pénztári elszámolások tényleges időszakára nettó módon. Ebből következik, hogy egyrészt időben rendeznünk kell a tételeket, mivel a béreket a termelési (forgalmi) időszak ráfordításaiként számolják el költségként a vállalatok, másrészt a bankpénztárak által készpénzben kifizetett nettó béreket bruttósítanunk kell, mert a termelést (forgalmat) a teljes bruttó béralappal terhelik. Ezen túlmenően redukálnunk kell arra a szintre, amely a szűkített önköltség fogalmába tartozik.

Az időbeli rendezés azt a feladatot adja, hogy a vizsgált időszak kezdő- és végpontjában megállapítsuk, melyik termelési időtartamra vonatkozik az első és utolsó bérfizetés összege, és arra az időszakra vigyük hátrább ezeket a fizetéseket, amelyikre a bérfizetést költségként elszámolták. Arra az időtartamra járó bérösszeget viszont, amely az utolsó bérelszámolás termelési időszakától a vizsgált időpontig terjed, kalkulálni kell a számítások jobb eredménye érdekében.

A bruttósítás a bérlevonások arányszámával történik, amely a nettó és a bruttó bér közötti különbözetnek felel meg. Ez az arány egy-egy vállalatra és meghatározott szezonra nagyjából állandó szám, és ezért a becslésnél jól felhasználható.

A bérek után fizetendő közterhek (SZTK járulék és illetményadó) kulcsa több éven át konstans szám, ezért állandó tényező az ismertetett rövidtávú becsléseknél.

c) *Az értékcsökkenési leírás* összege nem áll közvetlenül rendelkezésre a bankszámlákon, mert elszámolásilag két részre oszlik. Egyik részét be kell fizetni a központi pénzalapba, másik része visszatartható a pótlások finanszírozására. Ezért a számításoknál az a megoldás látszik célszerűnek, hogy összegét a negyedévi kezdő állóeszköz állomány bruttó értékéből állapítjuk meg, a negyedévre érvényes átlagos leírási kulcs segítségével úgy, hogy a kapott értéket a negyedéven belüli időarányos tényezővel megszorozzuk. (Pl. ha március 20-ára vonatkozó számításokat végzünk, akkor az arányszám a 9 dekádból eltelt 8 dekádra vonatkozóan 8/9.)

d) *Az értékesítési* forgalom időbelileg már rendezett akkor, amikor a készletek értékének becslésénél felhasználjuk. A feladat tehát az, hogy az ún. bruttó árbevételnek megfelelő forgalomból eljussunk a szűkített önköltség fogalmába tartozó értékhez. Ezt a műveletet két lépésben végezhetjük el. Először kiszámítjuk a bruttó árbevételből az ún. nettó árbevétel összegét. E két kategória között a forgalmiadó és az árbevételbe számító árkiegészítés a különbség. A forgalmi adó és az árkiegészítés átlagos kulcsa ismert és rövid távon alig változik.

A bruttó árbevétel a készletérték meghatározásánál két részre osztandó azoknál a vállalatoknál, amelyek nagyobb arányú forgalmat bonyolítanak le a nem saját termelésű készletekben. Az előbbit ti. szűkített önköltségen, míg az utóbbit beszerzési áron (önköltségen) vesszük számításba.

A fentiekben igyekeztünk lehetőleg pontosan, modellszerűen felvázolni azt a folyamatot, amely szerint a készletek értéke változik. Ha tehát a paramétereket jól választottuk meg, s az előre becsléseknél sem követtünk el nagyobb hibát, közgazdaságilag elfogadható eredményt kapunk. A számításaink eredményei legalábbis ezt jelzik. Abban az esetben, ha a tapasztalati adatok több évre visszamenően állnak rendelkezésre, élhetünk azzal a feltételezéssel is, hogy a beszerzés, valamint a szűkített önköltség részét képező bérköltség és értékcsökkenési leírás kifejezhető az értékesítési forgalom függvényében. Az induló mérlegadatból tehát az egyetlen és független változóként elfogadott értékesítési forgalom segítségével juthatunk el a vizsgált időszak végére várható záró készletállományhoz.

A modell matematikai megfogalmazása

A pénzforgalmi adatokból levezethető árumozgásokat egyszerűen felírható egyenlőségek formájában fogalmaztuk meg. A számítási feladatok elvégzése nem igényli a felsőbb matematikai ismereteket, csupán a becslési eljárásnál alkalmaztunk bonyolultabb összefüggéseket és differencia-egyenleteket. Ebben az esetben is utalunk azonban könnyebb, bár kevésbé pontos megoldásra, hogy minél szélesebb körben hasznosíthassák e módszert a gyakorlati szakemberek.

A változók és a paraméterek betűjelei:

A = árbevétel (értékesítés) a pénzforgalmi adatok alapján
V = anyag- és áruvásárlás (beszerzés) a pénzforgalmi adatok alapján
a = az értékesítésre jellemző átlagos futamidő (az árumozgás és a pénzügyi kiegyenlítés közötti időtartam napokban)
v = a beszerzésre jellemző átlagos futamidő
B = bérfizetések a bankszámlákról
C = értékcsökkenési leírás
E = állóeszközök bruttó értéke
K = készletek értéke
α = a forgalmi adó átlagos kulcsa
β = a bérlevonások aránya a bruttó béralapban kifejezve
γ = bérhányad (a bérköltség a nettó árbevételhez viszonyítva az aktuális időszakra)
π = a bérek közterheinek kulcsa (illetményadó és SzTK-járulék)

ε = bérből a szűkített önköltségbe tartozó részarány
ζ = az értékcsökkenési leírás átlagos kulcsa
μ = értékcsökkenési leírásból a szűkített önköltségbe tartozó hányad
η = szűkített önköltségi hányad a nettó árbevételre vonatkoztatva
ϑ = nem értékesített, de felhasznált anyagok részaránya az összes anyagfelhasználásból (beszerzésből)
χ = a kereskedelmi áruk eladási forgalmának aránya a nettó árbevételben
λ = a kereskedelmi áruk önköltségi (beszerzési áron vett) hányada
ϱ = az árbevételbe számító árkiegészítés
t = az idő jele általában ($t = 1, 2,\ldots, T$)

1. *A változók értelmezése, a számítások menete*

Az értékesítési forgalom a *futamidő hossza* szempontjából az alábbi szerint írható fel:

$$A = A_f + A_b + A_k + A_s + A_e \tag{1.1}$$

ahol az indexek közül

f = a belföldi értékesítés szocialista szektornak
b = a beruházások teljesítményértéke (építési beruházás)
k = az export \$ viszonylatban
s = az export Rbl viszonylatban
e = az értékesítés a lakosság részére (készpénzforgalom)

Az (1.1)-ből és a futamidő definíciójából felírható a különböző egyedi *futamidők súlyozott átlaga*

$$a = \frac{\sum_i a_{fi}A_{fi} + \sum_i a_{bi}A_{bi} + \sum_i a_{ki}A_{ki} + \sum_i a_{si}A_{si} + \sum_i a_{ei}A_{ei}}{A} \tag{1.2}$$

ahol

a_i az egyes tételek futamidejének hossza napokban ($i = 0, 1, 2,\ldots, p$)

Az (1.1) szerint kapjuk az *anyag- és árubeszerzés* forgalmát is. (Azzal az eltéréssel, hogy itt a beruházási forgalom nem szerepel.)

$$V = V_f + V_k + V_s + V_e \tag{1.3}$$

A v átlagos futamidő képletét az (1.2) szerint értelmezzük.

b) Az *anyag- és árubeszerzésnél* először meghatározzuk a vizsgált időszak egészére vonatkozó „valóságos" áruforgalmat a pénzforgalmi adatokból (V_T) kiindulva. Ezért az egy futamidőnek megfelelő negyedév elejei forgalmat levonjuk, ugyanakkor az utolsó futamidőhossznak megfelelő becsült ′ jellel ellátott forgalmat[1] hozzáadjuk a bankszámlaforgalomból rendelkezésre álló összeghez. Azaz:

$$V'_T = V_T - \sum_{t=1}^{v} V_t + \sum_{t=T-v}^{T} V'_t \tag{1.4}$$

[1] A becslési eljárást a 2. pontban ismertetjük.

Ezt követően, – ha összegszerűen vagy arányaiban jelentős – levonjuk a V'_T-ből azokat a készletállományt csökkentő tételeket, amelyekből pénzbevétel nem keletkezett (pl. garanciális javításokhoz felhasznált anyagok). A készletnövekedés szempontjából figyelembe vehető beszerzési érték tehát:

(1.5) $$V''_T = (1 - \vartheta_T)\, V'_T$$

c) Időbelileg rendezzük a bankszámlaforgalomban rendelkezésre álló *bérkifizetések* összegét is. Ebből a célból a B_T pénzforgalmi adatból levonjuk azokat az időszak elején kifizetett bérösszegeket, amelyek az előző időszak (negyedév) termelését (forgalmát) terhelik és hozzáadjuk azt a becsült (B') bérösszeget, amely az utolsó bérelszámolás termelési időszaka és a vizsgált időszak záró időpontja között esedékes.

(1.6) $$B'_T = B_T - \sum_{t=1}^{p} B_t + \sum_{t=T-m}^{T} B'_t \quad \text{és}$$

(1.7) $$\sum_{t=T-m}^{T} B'_t = \frac{m}{T}\, \gamma\, A'_T$$

ahol

p = azon időegységek száma, amelyekben a vizsgált időszak előtti időszakra vonatkozóan béreket fizettek ki ($p = 1, 2, \ldots$)

m = a vizsgált időszak záró időpontjától visszaszámolt azon időegységek (napok) száma, amelyekre az esedékes bért még nem vették fel a banktól ($m = 1, 2, \ldots$)

A'_T = az értékesítés egy futamidővel transzformált becsült adata. (L. 1.11)

Az időbelileg rendezett (nettó) bér meghatározása után

– bruttósítjuk a nettó béreket
– meghatározzuk a bruttó bérnek a szűkített önköltség fogalmába tartozó részét és
– e bérek közterheivel növeljük a ráfordítások nagyságát.

Azaz:

(1.8) $$B''_T = \frac{1}{1 - \beta} \cdot \varepsilon_T (1 + \pi)\, B'_T$$

d) Az *értékcsökkenési leírásnál* is két lépésben állapítjuk meg a készletváltozásra gyakorolt hatást; először kiszámítjuk a leírás teljes összegét, majd annak a szűkített önköltségbe tartozó részét. Az értékcsökkenési leírás az állóeszközök értékének függvényében:

(1.9) $$C_T = \frac{T}{90} \cdot \frac{1}{4}\, \zeta\, E_0$$

ahol a negyedév napjainak számát 90-nek vettük. A készletnövekedésbe kalkulálható összeg pedig:

(1.10) $$C'_T = \mu\, C_T$$

e) Az *értékesítési forgalom* vizsgálatunk egyik komplex mutatója. Először időbelileg rendezzük a forgalmat, elvégezzük a vizsgált időszak záró időpontjától visszaszámított egy futamidőre vonatkozó ismeretlen forgalom becslését, majd a bruttó árbevételt nettó értékre, utána pedig szűkített önköltségre redukáljuk.

Az időbeli rendezésnél ugyanúgy járunk el, mint az anyag- és árubeszerzés esetében; azaz

$$A'_T = A_T - \sum_{t=1}^{a} A_t + \sum_{t=T-a}^{T} A'_t \tag{1.11}$$

Ezt követően A'_T összeget felosztjuk a készletváltozás szempontjából figyelembe veendő saját termelésű készletek és az ún. kereskedelmi áruk összegére.

$$A'_T = \chi_T A'_T + (1 - \chi_T) A'_T \tag{1.12}$$

A nettó árbevétel meghatározása két tényezővel történik; az egyik a forgalmi adó kulcsa (α, ill. α_1 a saját termelésű készletek átlagos kulcsa, α_2 pedig a kereskedelmi áruké), amely csökkentő; a másik az árbevételnek minősülő árkiegészítés (ϱ, illetve ebben az esetben is ϱ_1 és ϱ_2), amely növelő tényező. Az értékesített saját termelésű készletek szűkített önköltségen, a kereskedelmi áruk bekerülési áron számított forgalma tehát:

$$A''_T = \left[\eta_T \frac{1 + \varrho_1}{1 + \alpha_1} (1 - \chi_T) + \lambda \frac{1 + \varrho_2}{1 + \alpha_2} \chi_T \right] A'_T \tag{1.13}$$

f) *A készletek becsült értéke* a felírt egyenlőségekből a következőképpen számítható ki a vizsgált időszak záró időpontjára:

$$\boxed{K'_T = K_0 + V''_T + B''_T + C'_T - A''_T} \tag{1.14}$$

Vagyis a negyedévi induló készletállományhoz (mérleg adat) hozzáadjuk az anyag- és árubeszerzés, a bérek és közterhei, valamint az értékcsökkenési leírás vizsgált időszakra vonatkozó pénzforgalomból levezetett korrigált adatait, majd levonjuk ebből az ugyancsak rendezett értékesítési forgalmat.

A készletek értékének becslésére kínálkozik egy, a fentieknél egyszerűbb módszer a korrigált értékesítési forgalom függvényében. A gyakorlati alkalmazás előfeltétele a viszonylag kiegyensúlyozott, nem idényszerűen változó vállalati gazdaság, és hosszabb időszak empirikus adatainak az ismerete.

Tegyük fel, hogy

$$V''_T = xA''_T;\ B''_T = yA''_T;\ C'_T = zA''_T$$

Ekkor a vizsgált időszak záró készletére felírható:

$$K'_T = K_0 - [1 - (x + y + z)]\, A''_T \tag{1.15}$$

g) Végezetül megfogalmazzuk a *vevő- és szállítóállománynak* az időszak végére várható nagyságát, amelyik összegszerűen megegyezik a vizsgált időszak záró időpontjától visszaszámított, egy átlagos futamidő hossznak megfelelő értékesítési illetve anyag- és árubeszerzési forgalommal.

Azaz: a vevőállomány

$$\sum_{t=T-a}^{T} A'_t \sim \frac{a}{T} A'_T \tag{1.16}$$

a szállítóállomány

$$\sum_{t=T-v}^{T} V'_t \sim \frac{v}{T} V'_T$$

2. *Az értékesítési és a beszerzési forgalom előrejelzése*

Ebben a pontban egy matematikai-statisztikai módszert ismertetünk, amellyel megkísérelhető az értékesítés, illetve az anyag- és árubeszerzés rövidtávú előrejelzése. Az eljárás az értékesítés és a beszerzés esetében ugyanaz, így a részleteket csupán az értékesítésre vonatkozóan közöljük, a beszerzésnél megelégszünk az eredmények közlésével.

Az értékesítés pénzforgalmi adataiból rendelkezésre álló idősoron (három tagból álló) mozgó átlagolást végrehajtva kapjuk a mellékelt diagrammal ábrázolt közepes hosszúságú idősort, amely az $1 \leq t \leq T$ időintervallum egész helyein van definiálva.

Matematikai-statisztikai előrejelzést csak akkor tudunk alkalmazni, ha az A_t értékesítés idősora nem tisztán véletlen folyamatot reprezentál. Ezért első lépésben megvizsgáljuk, hogy az A_t folyamat teljesen véletlen-e, vagy pedig létezik-e az A_t egyes összetevői között autokorreláció. Ennek eldöntésére számos eljárás létezik, itt az ún. Neumann-arányra vonatkozó próbával fogjuk ellenőrizni (lásd Malinvaud [4] 495. o.).

Képezzük az alábbi mennyiségeket

$$\delta^2 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T-1}(A_{t+1} - A_t)^2 \tag{2.1}$$
$$s^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(A_t - \bar{A})^2$$

ahol $\bar{A}$ az idősor adatainak átlaga, azaz $\bar{A} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} A_t$

A (2.1)-ben megadott δ^2 és s^2 hányadosa a Neumann-arány

$$N = \frac{\delta^2}{s^2} \tag{2.2}$$

Ha a Neumann-arány 2 körüli értéket vesz fel, akkor az A_t folyamatot tisztán véletlennek tekinthetjük, ha értéke 2-nél kisebb, akkor az A_t-k között létezik autokorreláció. A (2.2) értékét meghatározva $N = 1{,}017$ kaptunk eredményül.

Elfogadva azt, hogy az értékesítés nem tisztán véletlen folyamat, felállítjuk azt a matematikai modellt, amelynek alapján a rövidtávú statisztikai előrejelzés elvégezhető. Ebből a célból először megszerkesztjük a folyamat tapasztalati korrelogramját ([4] 482. o.). Ez az ún. autokorrelációs együtthatók sorozatát adja meg. Az autokorrelációs együtthatók definíciója

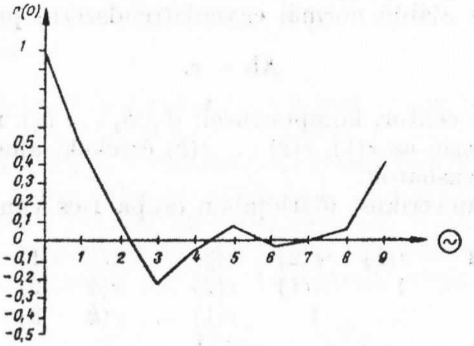
$$r(\theta) = \frac{T}{T-\theta} \cdot \frac{\sum_{t=1}^{T-\theta}(A_t - \bar{A})(A_{t+\theta} - \bar{A})}{\sum_{t=1}^{T}(A_t - \bar{A})^2} \qquad \theta = 1, 2, \ldots \tag{2.3}$$

(ahol θ is az időt jelöli, akárcsak a „t”).

Az $r(\theta)$ értékeket $\theta = 1, 2, \ldots$ 9-ig kiszámítva a következő eredményeket kaptuk:

$r(1) = 0{,}494$	$r(4) = -0{,}067$	$r(7) = -0{,}005$
$r(2) = 0{,}125$	$r(5) = 0{,}063$	$r(8) = 0{,}035$
$r(3) = -0{,}226$	$r(6) = -0{,}014$	$r(9) = 0{,}404$

Ezután felrajzolható az autokorrelációs együtthatók korrelogramja, amelyet az alábbi ábrán mutatunk be.



1. *ábra.* Az értékesítés korrelációs együtthatóinak korrelogramja

A korrelogramból leolvasható, hogy milyen időszakokhoz tartozó (egymást az idősorban hányadik helyen követő) adatok között van aránylag szoros összefüggés. Esetünkben az $r(1)$ viszonylag magas értéke következik a mozgó átlag számítás technikájából, az $r(3)$ és az $r(9)$ értékek nagy valószínűséggel a havi és a negyedéves szezonális összefüggésekre utalnak.

A modell megalkotásánál azzal a feltételezéssel élünk, hogy az értékesítés idősora egy olyan stacionárius stochasztikus folyamatot reprezentál, amelynek létezik az ún. autoregresszív reprezentációja, vagyis fennáll az

$$A_t - \bar{A} = b_1(A_{t-1} - \bar{A}) + b_2(A_{t-2} - \bar{A}) + \ldots + b_k(A_{t-k} - \bar{A}) + \omega_t \tag{2.4}$$

összefüggés úgy, hogy a (2.4)-hez tartozó

$$X_t - b_1X_{t-1} - b_2X_{t-2} - \ldots - b_kX_{t-k} = 0, \quad \text{ahol } X_t = A_t - \bar{A}$$

homogén differenciaegyenlet

$$u^k - b_1u^{k-1} - b_2u^{k-2} - \ldots - b_k = 0$$

karakterisztikus egyenletének valamennyi gyöke egynél kisebb abszolút értékű. $\bar{A}$ az A_t várható értéke, amelyet a félreértés veszélye nélkül szintén $\bar{A}$-val jelölünk (és az átlaggal becsülünk); ω_t véletlen stacioner folyamat, amelynek változói függetlenek, egyenlő eloszlásúak, 0 várható értékkel. A korrelogramból leolvashatjuk, hogy mely időszakokhoz tartozó b_i együtthatókat kívánunk tekintetbe venni; azokat, amelyek olyan időeltolódásokhoz tartoznak, ahol elég szoros az autokorreláció. (A k értékét nem célszerű túl nagyra választani, nehogy a számítások hosszadalmasak legyenek.) A b_i együtthatókat a legkisebb négyzetek módszerével lehet statisztikailag legegyszerűbben becsülni (lásd [4] 590. o.). Tekintsük az

$$U = \sum_{t=k+1}^{T} [(A_t - \bar{A}) - b_1(A_{t-1} - \bar{A}) - b_2(A_{t-2} - \bar{A}) - \dots - b_k(A_{t-k} - \bar{A})]^2 \tag{2.5}$$

kifejezést.

Úgy választjuk meg a b_i együtthatókat, hogy U minimális legyen. Szélsőérték számítással az alábbi normál egyenletrendszerre jutunk

$$\mathbf{Ab} = \mathbf{r}, \tag{2.6}$$

ahol **b** az ismeretlen vektor, komponensei: $(b_1, b_2 \dots b_k)$, **r** az autokorrelációvektor, és komponensei az $r(1), r(2) \dots r(k)$ értékek, amelyek a tapasztalati korrelogramból kiolvashatók.

Az A matrix szimmetrikus, főátlójában csupa 1-es van; sémája az alábbi:

$$\begin{matrix} 1 & r(1) & r(2) & r(3) & \dots & r(k-1) \\ & 1 & r(1) & r(2) & \dots & r(k-2) \\ & & 1 & r(1) & \dots & r(k-3) \\ & & & 1 & \dots & \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & 1 \end{matrix}$$

A (2.6) egyenletrendszert megoldva, megkapjuk a $b_1, b_2 \dots b_k$ becsléseket (melyekre a félreértés veszélye nélkül nem vezetünk be új jelöléseket). Megjegyezzük, hogy a b_i együtthatók becslésével kapcsolatos statisztikai problémákkal ebben a dolgozatban nem foglalkozunk, Malinvaud már idézett művében [4] egyrészt rámutat arra, hogy az autoregresszív modellek alapján történő előrejelzés még akkor is megbízható lehet, ha a $b_i - k$ becslési hibái nem hanyagolhatók el; ugyanakkor a $b_i - k$ becslési hibáinak figyelembe vétele az előrejelzés hibájának megállapításánál nagy matematikai nehézségekbe ütközik. Azokat a b_i értékeket, amelyekhez tartozó r_i-k közel esnek zérushoz, nem veszszük figyelembe a számításoknál.

A viszonylag magas értéket képviselő $r_1, r_2, \dots$ autokorrelációs együtthatóknál előforduló legnagyobb index határozza meg, hogy hányadrendű differenciaegyenletet kell az X_t-re vonatkozólag felírni. Ha a sorszám túl nagy — ami arra utal, hogy az egymástól viszonylag távollevő elemekre is szoros autokorrelációs összefüggés áll fenn —, akkor közgazdasági megfontolással kell eldönteni, meddig célszerű elmenni a kívánt pontosság érdekében. Esetünkben a $k = 3$ választással élünk. A (2.6) normál egyenletrendszer megoldásából adódik, hogy

$$b_1 = 0{,}525; \qquad b_2 = 0{,}014; \qquad b_3 = -0{,}299.$$

Ha a megoldott egyenlet gyökeinek abszolút értéke 1-nél kisebb, az előrejelzés elvégezhető, mert minden X_t megoldás zérushoz tart, ha $t \to \infty$.

A kapott eredményekből $b_2 \to 0$, ezért b_2-t nem vesszük tekintetbe. Így az értékesítés autoregresszív reprezentációja az ω_t véletlen folyamat elhagyásával a (2.4) szerint

$$X_t = 0{,}525\, X_{t-1} - 0{,}299\, X_{t-3}. \tag{2.7}$$

Az empirikus adatokból nyert r_i értékek alapján X_t-re vonatkozólag a fenti harmadrendű differenciaegyenletet írtunk fel, amelynek karakterisztikus egyenlete az alábbi:

$$u^3 - 0{,}525\, u^2 + 0{,}299 = 0.$$

A (2.7) egyenlet gyökeire adódik, hogy

$$u_1 = -0{,}531; \qquad u_{2,3} = 0{,}528 \pm 0{,}531\, i \qquad i = \sqrt{-1}$$

A gyökök abszolút értéke 1-nél kisebb. A (2.7) általános megoldására a részletes kifejtést mellőzve:

$$(2.8) \qquad X_t = c_1(-0{,}531)^t + c_2(0{,}748)^t \cos 0{,}788t + c_3(0{,}748)^t \sin 0{,}788t.$$

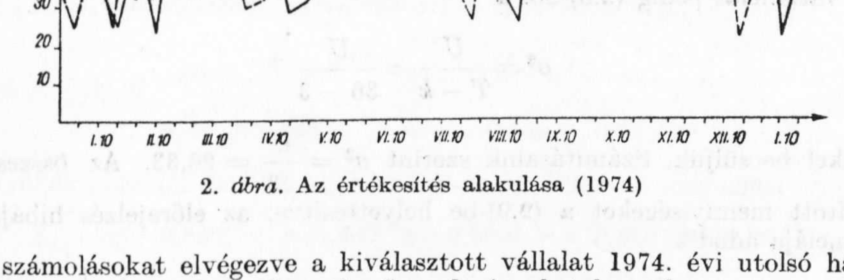
Amennyiben az X_t-t a $t > T$ időszakra az értékesítés előrejelzésére kívánjuk felhasználni, akkor a megoldásban szereplő konstansokat meg kell határozni az X_t függvény előírt kezdeti feltételei alapján. Gyakorlatilag egyszerűbb közvetlenül a (2.7) összefüggésből kiindulva lépésről-lépésre kiszámítani az előrejelzéseket. Ha (2.7)-ben $t = T + 1$-et írunk, megkapjuk, hogy

$$X_{T+1} = b_1 X_T + b_3 X_{T-2}$$

Ha pedig $t = T + 2$-t írunk, akkor

$$X_{T+2} = b_1 X_{T+1} + b_3 X_{T-1}$$

és így tovább.



2. *ábra.* Az értékesítés alakulása (1974)

A számolásokat elvégezve a kiválasztott vállalat 1974. évi utolsó három dekádjának forgalmára a következő eredményeket kaptuk:

$$A_{T+1} = 47{,}9; \qquad A_{T+2} = 47{,}1; \qquad A_{T+3} = 46{,}4$$

ahol $T = 33$ és $\bar{A} = \dfrac{1}{33} \sum_{t=1}^{33} A_t = 44{,}0$ MFt.

A következőkben foglalkozunk az előrejelzés hibájának meghatározásával. Az előrejelzés hibájának varianciája Malinvaud ([4] 470. és 476. o.) alapján

$$\sigma_m^2 = \sigma^2 \sum_{\tau=4}^{m} a_{\tau-1}^2, \qquad m = 1, 2, \ldots \tag{2.9}$$

ahol σ_m az m-edik előrejelzés hibájának varianciája,
σ^2 az ω_t véletlen folyamat varianciája.

Az a_τ számok az

$$f(z) = \frac{1}{1 - \sum_{\tau=1}^{k} b_\tau z^\tau} = \sum_{\tau=0}^{\infty} a_\tau z^\tau \tag{2.10}$$

Taylor-sorfejtés együtthatói. A (2.10) kifejezés a „z" komplex változó analitikus függvénye az egységsugarú kör belsejében. Ugyanis mivel a

$$b_0 u^k - b_1 u^{k-1} - b_2 u^{k-2} - \ldots - b_k = 0 \qquad b_0 = 1$$

karakterisztikus egyenlet valamennyi gyöke egynél kisebb abszolút értékű, $u = \dfrac{1}{z}$-vel kapjuk, hogy az

$$1 - \sum_{\tau=1}^{k} b_\tau z^\tau = 0$$

egyenletnek az egységsugarú kör belsejében nincsenek gyökei. Felhasználva az

$$a_\tau = \frac{1}{\tau!} \cdot \left.\frac{d^\tau f(z)}{dz^\tau}\right|_{z=0} \qquad \tau = 0, 1, \ldots \tag{2.11}$$

összefüggést, figyelembe véve a b_τ kiszámított becsléseket, az a_τ együtthatók meghatározhatók. Az általunk kiválasztott vállalat esetében az alábbi eredményeket kaptuk:

$$a_0 = b_0 = 1{,}0 \qquad a_1 = b_1 = 0{,}525 \qquad a_2 = b_1^2 + b_2 = 0{,}290$$

A σ^2 varianciát pedig (2.5)-ből a

$$\sigma^2 = \frac{U}{T-k} = \frac{U}{36-3}$$

értékkel becsüljük. Számításaink szerint $\sigma^2 = \dfrac{U}{33} = 26{,}33$. Az összes kiszámított mennyiségeket a (2.9)-be helyettesítve, az előrejelzés hibájának varianciája adódik.

Azaz:

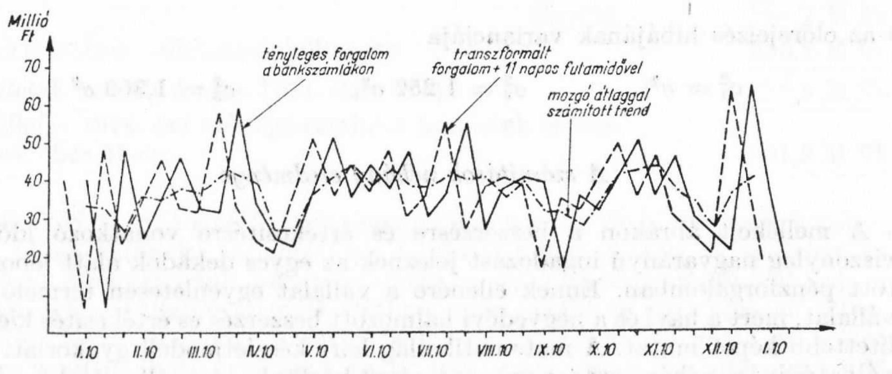
$$\sigma_1^2 = \sigma^2$$

$$\sigma_2^2 = (1 + b_1^2)\,\sigma^2 = 1{,}2756\,\sigma^2$$

$$\sigma_3^2 = (1 + b_1^2 + b_2^2 + 2b_1^2 b_2 + b_1^4)\,\sigma^2 = 1{,}3595\,\sigma^2$$

$$\vdots$$

A fentiekben ismertetett módszerrel számoltunk *az anyag- és árubeszerzés* esetében is. A háromtagú mozgó átlagolással nyert idősor ábráját a mellékelt grafikon tartalmazza. Az ily módon kialakított idősor adataiból számított



3. *ábra.* Az anyag- és árubeszerzés alakulása (1974)

Neumann arány értéke 1,034. A tapasztalati autokorrelációs együtthatók pedig a következők:

$$r(1) = 0{,}482 \qquad r(4) = -0{,}356 \qquad r(7) = 0{,}201$$
$$r(2) = 0{,}025 \qquad r(5) = -0{,}262 \qquad r(8) = 0{,}205$$
$$r(3) = -0{,}388 \qquad r(6) = -0{,}105 \qquad r(9) = 0{,}162$$

Ezúttal az $r(1)$ és az $r(3)$ értékeken kívül az $r(4)$ és az $r(5)$ is jelentős. Ily módon egy ötödrendű egyenlet megoldása adna pontosabb eredményt. Tekintettel azonban az egyenletek viszonylag egyszerűbb, kézi számológépen való megoldhatóságára, ebben az esetben is harmadrendű differencia-egyenlettel dolgoztunk. A (2.7) egyenlet együtthatóira a következő értékeket kaptuk:

$$b_1 = 0{,}509; \qquad b_2 = -0{,}035; \qquad b_3 = -0{,}384$$

A fenti differenciaegyenlet karakterisztikus egyenlete tehát

$$u^3 - 0{,}509u + 0{,}384 = 0$$

amelynek gyökei

$$u_1 = -0{,}590; \qquad u_{2,3} = 0{,}549 \pm 0{,}589\, i$$

A gyökök abszolút értékei 1-nél kisebbek. Az általános megoldás:

$$X_t = c_1(-0{,}590)^t + c_2(0{,}806)^t \cos 0{,}820t + c_3(0{,}806)^t \sin 0{,}820\, t$$

A beszerzés előrejelzett értékei a vállalat 1974. évi utolsó három dekádjára vonatkozóan a következők:

$$V_{T+1} = 32{,}8 \qquad V_{T+2} = 34{,}6 \qquad V_{T+3} = 36{,}7$$

ahol $V = \dfrac{1}{33}\sum_{t=1}^{33} V_t = 36{,}8.$

A véletlen folyamat varianciája a (2.9) alapján

$$\sigma^2 = \frac{U}{33} = 14{,}93$$

s az előrejelzés hibájának varianciája

$$\sigma_1^2 = \sigma^2; \qquad \sigma_2^2 = 1{,}259\ \sigma^2; \qquad \sigma_3^2 = 1{,}309\ \sigma^2$$

A számítások néhány eredménye

A mellékelt ábrákon a beszerzésre és értékesítésre vonatkozó idősorok viszonylag nagyarányú ingadozást jeleznek az egyes dekádok alatt lebonyolított pénzforgalomban. Ennek ellenére a vállalat egyenletesen termelő iparvállalat, mert a havi és a negyedévi halmozott beszerzés és értékesítés kiegyenlítettebb képet mutat. A matematikailag leírt készletmodell gyakorlati használhatóságára néhány számszerű eredményt közlünk, s megállapítjuk a várható készletállományt is, összehasonlítva a vállalat 1974. december 31-i mérlegadatával.

Az értékesítésre jellemző átlagos futamidő 23 nap volt, az anyag- és árubeszerzésé 11 nap. A pénzforgalmi adatokból a mozgó átlagolással számított és az ismertetett becslési eljárással kapott forgalmi értékek 1974 decemberében a következők:

Értékesítés *Millió Ft-ban*

Időszak	Mozgó átl. trend érték	Becsült adat
dec. 1–10-ig	46,8	47,9
dec. 11–20-ig	54,2	47,1
dec. 21–31-ig	46,4	46,4

A (2.9) összefüggésből a becsült adat hibájának varianciájára σ_3 esetében $\pm 6{,}0$ M Ft-ot kaptunk. Az egyes előrejelzett dekádadatok e hibahatáron belül helyezkednek el.

Anyag- és árubeszerzés *Millió Ft-ban*

Időszak	Mozgó átl. trend érték	Becsült adat
dec. 1–10-ig	25,4	32,8
dec. 11–20-ig	36,8	34,6
dec. 21–31-ig	40,7	36,7

Az előrejelzés hibájának varianciája $\pm 8{,}4$ M Ft. A december havi trend értékekből jól látható a forgalom nagy ingadozása, ami a beszerzés ütemtelenségére utal.

A becslési módszer kialakításával végső célunk a készletek értékének meghatározása. A cikk matematikai megfogalmazásának 1. pontjában megadott egyenlőségek alapján a következő eredményt kaptuk:

Készletek értéke 1974 szeptember 30-án (mérleg sz.)	606,5 M Ft
Anyag- és árubeszerzés a IV. n.évben	347,8 N Ft
Bérek és közterheik szűkített önköltségen	27,4 M Ft
Értékcsökkenési leírás szűkített önköltségen	7,0 M Ft
Együtt	988,7 M Ft
Le: értékesítés szűkített önköltségen	380,2 M Ft
Készletek becsült értéke 1974. dec. 31-én	608,5 M Ft
A vállalat 1974. évi mérlege szerint a készletek értéke december 31-én	601,2 M Ft

A 7,3 M Ft (1,2%) eltérés, figyelemmel a beszerzés és az értékesítés előrejelzési hibahatárának varianciájára ($\pm 8,4 \pm 6,0 = \pm 14,4$), viszonylag jó eredmény. Megjegyezzük azonban, hogy a gyakorlatban rendkívül sok a véletlenszerű a vállalati gazdálkodásban, még inkább a pénzforgalmi folyamatokban. Ezért a módszer alkalmazásával csak akkor kaphatunk a gyakorlat számára is elfogadható értékeket, ha jól választjuk meg a modellben szereplő paramétereket. Különösen áll ez a követelmény a futamidőkre, valamint a szűkített önköltség mutatószámaira.

Szeretnénk hangsúlyozni, hogy a pénzfolyamatokból csak következtetni lehet az árumozgásra, s ezáltal a készletek alakulására. Nem várható azonban a mérlegadatokkal számszerűen is megegyező érték. A cél csak az lehet, hogy két mérlegkészítési időpont között gyors információkat kapjunk a készletek mozgásáról, ütemességéről és tendenciaszerű változásáról. Érdemes tehát foglalkozni vele mind a vállalati, mind a banki szakembereknek, mert ezek az információk minden külön munkabefektetés nélkül állnak rendelkezésre a bankszámlákon, ill. a könyvelés melléktermékeként kapott összevont számlakivonatokon.

(Beérkezett: 1975. szeptember 2.)

IRODALOMJEGYZÉK

1. Dr. HARGITAI RAJMUND: A forgóeszközváltozások megfigyelése iparvállalatok bankszámlaegyenleg-változásai alapján, MNB 25. sz. Tanulmány, 1967. május.
2. KŐRÖSSY JÓZSEF–SÁRI JÓZSEF: A forgóeszközök állományának meghatározása a forrás oldalból kiindulva, Bankszemle, 1968/6. sz.
3. KÖVES PÁL–PÁRNICZKY GÁBOR: Általános statisztika, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 1973.
4. E. MALINVAUD: Ökonometria statisztikai módszerei, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 1974.

MODEL OF ENTERPRISE STOCKS BASED ON MONETARY PROCESSES

~~The authors examine and model~~ the connections between the data of enterprise trade (purchase and sale of materials and goods) and those of money circulation through the banking accounts which are centralized in the national bank of the socialist state. There are some deviations between the data of real trade and those of the money flow appearing on the banking accounts both in contents and in time. Therefore, all those items are formulated within the model that can be regarded as trade (movement of goods) and the authors determine the factors enabling the time-shift (transformation) of data on money circulation. When determining the value of stocks, wages and income taxes, amortiz-

ation and receipts (resulting from the sale of self-produced stocks) are taken into account at ,,reduced costs", corresponding to the present Hungarian practice. The time-shift takes place by means of so called ,,heat times" expressing the delay between money movement and real trade.

The importance of the application of the model lies in the fact that the value of stocks can be estimated rapidly and with an accuracy acceptable for the practice for any day (actually every ten days) in the interval between the two dates of the preparation of the firm's balance sheets (usually the last day of a quarter). This is verified by the relatively good numerical results.

МОДЕЛЬ АПАСОВ ПРЕДПРИЯТИЯ, СТРОЯЩАЯСЯ НА ДЕНЕЖНЫХ ПРОЦЕССАХ

Авторы рассматривают и дают модельное изображение связей между движением товаров на предприятиях (заготовка и реализация материалов и товаров) и данными денежного обращения, происходящего на текущих счетах, централизованных в эмиссионных банках социалистических государств. Между фактическим движением товаров и данными денежного обращения, выполняющегося на банковских счетах, существуют отклонения по содержанию и времени. Поэтому в модели формулируются все те позиции, которые можно считать движением товаров, и определяются те факторы, которые поют лезвлягулировать (трансформировать) данные денежного ображения во времени. При опредерении величины запасов — в соответствии с существующей в ВНР практикой — заработную плату и нагрузки на неё учитывают по суженной себестоимости, а также и амортизацию по износу, и поступления от цен по реализации запасов собственного производства. Регулирование во времени происходит при помощи так называемого сменного времени, ко торое выражает разницу во времени между денежным обращением и фактиреским движением товаров.

Значение применения модели заключается в том, что в интервалле между двумя сроками составления баланса предприятия обычно это последние дни квартала) в любое время (на практике через каждые десять дней) можно быстро и с достаточной точностью для практики определить величину запасов. Ито подтверждается относительно хорошими результатами, полученными при помощи числовых расчетов.

Kornai János—Simonovits András

Rendelés-jelzésen alapuló szabályozás egy Neumann-gazdaságban

Cikkünk a ,,Szigma'' előző számában közölt [3] modell átalakításával foglalkozik. Feltételezzük az előző cikk ismeretét, s a rövidség kedvéért kizárólag a módosításokat és azok következményeit írjuk le. Az előző cikkben ismertetett modellt röviden KS—I modellnek, a most kifejtésre kerülőt pedig KS—II modellnek nevezzük. Felső indexként is (I), illetve (II) megkülönböztető jelzéssel látjuk el az eltérő feltevéseket és megállapításokat.

1. Készletre vagy rendelésre termelés

A gazdasági életben megkülönböztethetjük a termelés megszervezésének két tiszta típusát. Az egyik: a vállalat *készletre termel.* Az eladónak csupán prognózisa van arra, hogy a vevő mit és mennyit vásárol majd. A termék az outputkészlet-raktárban vár, amíg a vevő ,,lehívja'' onnét. A másik tiszta típus: a vállalat *rendelésre termel.* Addig el sem kezdi a termelést, amíg előre pontosan meg nem ismeri a vevő igényét. Itt a vevő vár, amíg rendelésének teljesítése sorra nem kerül a termelésben.

Ha egyetlen vállalatra tekintünk, akkor háromféle eset lehetséges: 1. kizárólag készletre termel, 2. kizárólag rendelésre termel vagy 3. egyes termékeit készletre, más termékeit rendelésre állítja elő. Ha azonban nagy aggregátumokat, széles szektorokat, vagy egész népgazdaságot vizsgálunk, általában azt tapasztaljuk: ugyanabban a rendszerben megtaláljuk — különböző arányokban — mindkét típust, mind a készletre, mind a rendelésre termelést.

A kétféle forma arányait részben műszaki-technológiai tényezők határozzák meg. Tengerjáró hajókat nem szokás készletre termelni. Egy szupermarket viszont nem a vevő egyedi megrendelései alapján szerzi be áruit, hanem vevőkörét készleteiből látja el. Minél inkább ,,egyedi'' jellegű, ,,testreszabott'' az áru, annál inkább előtérbe kerül a rendeléses forma. Minél ,,tömegszerűbb'', szabványosított jellegű, nagy sorozatban termelt áruról van szó, annál inkább érvényesül a készletre termelés formája.

Az arányokat befolyásolja a piac általános helyzete is. Amennyiben a ,,vevők piaca'' áll fenn, úgy ez a készletre-termelés növelésére készteti az eladókat. Az ,,eladók piaca'' viszont a rendeléses forma felé tereli a gazdaságot. A vevők csak sorbanállás, várakozás után jutnak a kívánt áruhoz.[1]

[1] A kétféle formáról lásd az egyik szerző, *Kornai János* [2] tanulmányát. A tőkés gazdaságban szerzett tapasztalatokat ismerteti, ökonometriai modellek alapján, *Belsley* [1] könyve. Ugyanitt részletes bibliográfia található a készletre-termelés és rendelésre termelés irodalmáról.

A kétféle típust táblázatos formában is összehasonlítjuk.

	Termelés készletre	Termelés rendelésre
Melyik fél van a teljes vétel-eladási információ birtokában?	a vevő látja a kínálatot	az eladó látja a keresletet
Melyik fél vár?	az eladó vár, míg a készletben levő árut megveszik	a vevő vár, míg megrendelését teljesítik
Az áru tulajdonságai által kedvezményezett forma	„tömegszerű", szabványosított termék	egyedi termék
A piaci helyzet által előtérbe tolt forma	„Vevők piaca"	„Eladók piaca"

Mind a készletek, mind a rendelések megfigyelése *jelzőrendszerként* szolgálhat. A KS–I modell olyan rendszert írt le, amelyben mind a termékek beszerzése, mind pedig termelésük kizárólag készlet-jelzés alapján szabályozódik; előbbi a slackinputkészletek, utóbbi az output készletek megfigyelésére épül. A KS–II modell az előbbihez képest lényegében nem változtat a beszerzés szabályozásán, csak formailag; azaz inputkészlet-jelzéseken alapul. Viszont a termelés szabályozásában az outputkészlet jelzőrendszer szerepét a rendelésjelzés váltja fel.

A lényeges különbség az I. és II. rendszer között: utóbbiban megjelenik a résztvevők közötti *kommunikáció*. A rendelés: közlésáramlás a megrendelő és a szállító között. A kommunikáció azonban ebben a modellben *nem ár-jellegű, hanem tisztán mennyiségi jellegű*. Ez tehát fontos közös vonása az I. és II. modellnek: mindkettő árjelzés nélkül működő rendszer.

Cikkünk részletesen foglalkozik azzal a tiszta esettel, amelyben valamennyi szektor termelése *egyöntetűen* a rendelés-jelzés alapján szabályozódik. (Mint ahogy KS–I olyan rendszert modellezett, amelyben valamennyi szektor termelése egyöntetűen az output-készlet jelzéséhez igazodott.) Könnyen elemezhető lenne a *kombinált* eset, amelyben egyes szektorok termelésének szabályozása készlet-jelzésen, másoké rendelés-jelzésen alapul. Kimutatható, hogy az I. és II. modellre érvényes megállapítások (működőképesség, stabilitás, növekedési ütem stb.) megfelelő módosításokkal kiterjeszthetők a kombinált esetre is. Elemzésétől azonban, a rövidség kedvéért eltekintünk.

2. A modell

Az I. modellt két variánsban dolgoztuk ki. Az egyikben egy állandó struktúrájú Neumann-gazdaságot vizsgáltunk, a másikban egy „aszimptotikus" gazdaságot, amely – kissé leegyszerűsítve a jellemzést – nagyon közel kerül egy állandó struktúrájú Neumann-gazdasághoz. A II. modellt a jelen cikkben csupán az első variánsra, azaz a Neumann-gazdaság esetére dolgozzuk ki. Megállapításaink lényege azonban, megfelelő korrekciókkal, kiterjeszthető lenne az aszimptotikus esetre is.

A rendelés-jelzés szerinti visszacsatolás alapgondolatai

Mindenekelőtt ismertetjük a rendelés-jelzéses szabályozás alapgondolatait. A j-edik *vevő* szektor – input-készleteinek jelzésére – a t-edik periódusban *rendelést* küld az i-edik *eladó* szektornak. Jelöljük ezt $z_{ij}(t)$-vel. A rendelés nem megy semilyen közvetítő közegen, központon át, hanem *közvetlenül* jut el a vevőtől az eladóhoz. Mivel a rendelések mindig csak egy-egy vevő–eladó pár közti közlésáramlást jelentenek, ebben az értelemben az információ-áramlás itt decentralizált.

Az i-edik szektor memóriájában tárolja a rendeléseket. Nyilvántartja a *rendelésállományt*. A j-edik szektortól érkezett és még teljesítetlen rendelések állományát a t-edik periódusban $k_{ij}(t)$-vel jelöljük:

$$k_{ij}(t+1) = k_{ij}(t) + z_{ij}(t) - y_{ij}(t), \tag{2.1}$$

ahol $y_{ij}(t)$ az i-edik szektor *eladása* a j-edik szektornak.

Feltesszük, hogy – ha már a j-edik szektor elküldte rendelését az i-ediknek – azt nem vonhatja vissza. Érvényben marad, amíg csak nem teljesítik. A teljesítés időpontjába a megrendelőnek nincs beleszólása. Ezt kizárólag az eladó i-edik szektor határozza meg. Amikor az i-edik szektor szállít, a j-edik szektor okvetlenül átveszi a szállítmányt.

A rendelés teljesítését a következő visszacsatolási szabály határozza meg:

$$y_{ij}(t) = \bar{y}_{ij}(t) - p_{ij}[\bar{k}_{ij}(t) - k_{ij}(t)]. \tag{2.2}$$

A szabályozás értelmezése a következő:

Az y_{ij} eladás először is $\bar{y}_{ij}$-hez, a normatív eladáshoz igazodik. Ha a gazdaság a normatív Neumann-pályán haladna, akkor ennyit kellene az i-edik szektorból a j-edik szektornak átadni.

A jobboldalon szereplő második tag korrigálja az elsőt, a visszacsatolás elve alapján. Összeveti egymással a *normatív rendelésállományt*, $\bar{k}_{ij}$-t a *tényleges* rendelésállománnyal, k_{ij}-vel. Ha az i-edik szektor a normálisnál nagyobb mennyiséggel tartozik a j-edik szektornak akkor többet szállít, fordított esetben kevesebbet.

A rendelés-teljesítési szabály nem kezeli uniformizáltan a szállítási kötelezettségek teljesítését. Kétféle módon is részesíthető előnyben vagy hátrányban az áramlás valamely iránya:

1. A $\bar{k}_{ij}(t)$ normatív rendelésállomány a következőképpen határozódik meg:

$$\bar{k}_{ij}(t) = l_{ij}\bar{r}_i(t), \tag{2.3}$$

ahol $r_i(t)$, akárcsak az I. modellben, az i-edik szektor termelése a t-edik periódusban, az l_{ij} együttható pedig a *rendelésállomány per termelés normatíva*. Ezt tekintik a felhalmozódott, teljesítetlen rendelésállomány normális arányának, a termeléshez viszonyítva. Ez (i, j) eladó–vevő páronként eltérő lehet.

2. A (2.2) formulában szereplő p_{ij} *alkalmazkodási sebesség* is (i, j) eladó–vevő páronként eltérhet. Ha pl. $p_{i1} > p_{i2}$, akkor a normatív rendelésállomány túllépése esetén nagyobb arányú eltolódás megy végbe a szállítmányban az 1., mint a 2. szektor javára.

A termelő i-edik szektorban nincs és nem is lehet output-készlet. Minden termelést azonnal a felhalmozott rendelések teljesítésére fordítanak:

$$r_i(t) = \sum_{j=1}^{n} y_{ij}(t). \tag{2.4}$$

Az elmondottak a rendelés-jelzéses gazdaság egy lehetséges *speciális* formáját mutatják be. E konkrét forma nézetünk szerint realisztikus; tükrözi a valóság fontos vonásait, de nem lép fel az általánosság igényével. Más, nem kevésbé realisztikus formák ugyancsak elképzelhetőek lennének. Így például a mi modellünkben nincs igazi „sorbanállás", azaz nem érvényesül az az elv, hogy aki hamarabb rendelt, azt korábban szolgálják ki. A sorolást nem a megrendelés beérkezésének sorrendje dönti el, hanem az tulajdonképpen az l_{ij} rendelésállomány per termelés normatívákból, valamint a p_{ij} alkalmazkodási sebességekből vezetődik le. E paraméterek a modell világában állandóak, s exogén módon meghatározottak. Ennyiben tehát inkább olyan „kiutalásos" rendszerhez hasonlít, amelyben nem az igénylés beadásának sorrendje dönti el a szállítmány nagyságát, hanem meghatározott kiutalási preferenciák.

Az alapgondolat ismertetése után először — korábbi cikkünkhöz hasonlóan — összefoglaljuk a modell feltevéseit, majd leírjuk az egyenletrendszert.

Feltevések

A reálszférára vonatkozó, az I. modell ismertetésében szereplő R.1.—R.4. és R.5.N. feltevések változatlanul érvényben vannak. (Egyetlen, formai változás van: a folyó ráfordítások A mátrixa magában foglalja az egységnyi termelésre jutó selejtezést is.) A szabályozás rendelésjelzéses formája tehát *ugyanazt a reálszférát* irányítja, mint korábban a készletjelzéses forma.

A szabályozásra vonatkozó feltevések közül változatlan C.1., C.2.N. és C.7. A módosított feltevések a következők:

C.3.$^{(\mathrm{II})}$ *A döntés decentralizálása.* Adott normák mellett a döntés tökéletesen decentralizált. Az i-edik szektor határoz az r_i termelésről, az y_{ij} eladásról és a z_{ji} rendelésről.

C.4.—5.—6.$^{(\mathrm{II})}$ ***Rendelés-jelzéses szabályozás.***[2]

a) *Kommunikáció.* Kommunikáció van: a vevő legalább egy periódussal az adás-vétel előtt közli megrendelését az eladóval. A kommunikáció decentralizált és közvetlen. Nincs közvetítő a közlés feladója és címzettje között.

b) *Memória.* A rendszernek van memóriája: a termelő tárolja a rendelésállományt. A rendelés nem vonható vissza.

c) *Az információ decentralizálása.* Adott normák mellett az információ decentralizált, de nem izolált.[3] Az információ decentralizált, mert az i-edik szektor kizárólag saját állapotváltozóit figyeli meg a döntéshez.

A C.3.$^{(\mathrm{II})}$ és a C.4.—5.—6.$^{(\mathrm{II})}$ *c)* feltevések együttesen biztosítják, hogy *a szabályozás vegetatív jellegű.*[4]

[2] Arra törekszünk, hogy az I. és II. modell könnyebb összehasonlítása kedvéért mindenütt megtartsuk a két modellben közös elemek szimbólumait; azonosan jelöljük az azonos változókat; azonos sorszámot kapjanak az azonos feltevések és megállapítások. A C.4.—C.6. feltevések esetében azonban — a két modell egymástól eltérő logikája miatt — most nem haladhatunk azonos sorrendben. Ezért inkább összevontuk a II. modellhez a C.4.—5.—6. feltevéseket és az összevont feltevésen belül betűjelekkel utalunk az új rész-feltevésekre.

[3] A tisztán készletjelzéses I. modellben decentralizált *és izolált* volt az információ; nem volt kommunikáció.

[4] A szabályozást akkor nevezzük vegetatív jellegűnek, ha mind a döntés, mind az információ decentralizált. A kommunikáció bevezetése nem szünteti meg a szabályozás vegetatív jellegét, ha az decentralizált és közvetlen.

d). *A rendelés-jelzés és a készlet-jelzés szerepe.* A *c)* feltevés úgy realizálódik, hogy az i-edik szektor kizárólag saját rendelésállományát figyeli meg az eladás és ezzel együtt a termelés, valamint saját inputkészletét a rendelés szabályozásához.

e) *Nincs outputkészlet.* Minden termelést azonnal a rendelések teljesítésére használnak fel. A megrendelő köteles átvenni a rendelt terméket.

A modell összefoglalása

Az I. modell (2.1)–(2.4) egyenletei helyébe az alábbi egyenletrendszer lép:

T e r m e l é s   é s   e l a d á s   a z o n o s s á g a

$$r(t) = Y(t) \cdot 1. \tag{2.5}$$

R e n d e l é s á l l o m á n y

$$K(t+1) = K(t) + Z(t) - Y(t). \tag{2.6}$$

I n p u t k é s z l e t - m é r l e g

$$V(t+1) = V(t) - A \langle Y(t+1) \cdot 1 \rangle + Y(t). \tag{2.7}$$

A z   e l a d á s   s z a b á l y o z á s a

$$Y(t) = \overline{Y}(t) - P \otimes [\overline{K}(t) - K(t)], \tag{2.8}$$

A   r e n d e l é s   s z a b á l y o z á s a

$$Z(t) = \overline{Z}(t) - Q \otimes [V(t) - \overline{V}(t)]. \tag{2.9}$$

3. Megállapitások

Megállapitásaink lényegében az I. modellel nyert megállapitások átfogalmazásai.

1.[II] *MEGÁLLAPITÁS. Normatív pálya létezése.* Neumann-pálya létezik és egyértelműen meghatározott. A

$$\lambda_0(B+F)r_0 = (I - A + B + F)r_0, \; \lambda_0 > 1, \; r_0 > 0, \; 1'r_0 = 1 \tag{3.1}$$

feladat egyértelműen megoldható. Ennek ismeretében egyszerű számolással adódik a többi változó Neumann-pálya szerinti értéke is.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a termelés itt csak F-től, a slack inputkészlet normatívák mátrixától függ és *nem* függ L-től, a rendelésállomány per termelés normatívák matrixától. (Ezzel szemben az I. modellnél az 1.[I] megállapítás szerint a termelés függött $\langle g \rangle$-től, az outputkészletek normatíváinak mátrixától is.)

2.$N.^{(II)}$ *MEGÁLLAPITÁS. Ütköző készlet és növekedési ütem.*

a) Hasonlítsuk össze az 1. és 2. gazdaságot, amely tökéletesen azonos, kivéve ütköző készleteik normáit: $F^{(1)} \geq F^{(2)}$. Ebben az esetben az 1. gazdaság növekedési együtthatója kisebb, mint a 2.-é: $\lambda_0^{(1)} < \lambda_0^{(2)}$.

b) Hasonlítsuk össze az I. és a II. gazdaságot. Mindkettő azonos, beleértve azt is, hogy azonos az ütköző készlet per termelési normatíva mátrixuk is. Az I. gazdaság a KS – I modell szerint outputkészlet-jelzés alapján szabályozza termelését, míg a II. gazdaság a KS – II modell szerint rendelés-jelzés alapján szabályozza. Ez esetben az I. gazdaság növekedési tényezője kisebb, mint a II. gazdaságé.

A *b)* megállapítás jelentőségét külön is ki akarjuk emelni. Determinisztikus világunkban a növekedési ütem szempontjából előnyös zéró outputkészlettel, kizárólag rendelés-jelzés alapján, a vevőt várakoztatva működni. Persze, amint azt előző cikkünkben is megállapítottuk: a valóságos életben az ütköző-készletek növelésének, s ezen belül outputkészletek kialakításának is vannak előnyei: elősegíthetik a váratlan zavarok leküzdését, megkönnyíthetik a vevő rögtönzését, simábbá tehetik az alkalmazkodást stb. Ezeket az előnyöket azonban a jelen dolgozatban nem tudjuk bemutatni.

3.$N.^{(II)}$ *MEGÁLLAPITÁS. Stabilitás.* Az (2.5)-(2.9) egyenletekkel leírt szabályozás mellett a rendszer stabil, azaz az eltérésvektorok az időben nullához tartanak; feltéve, hogy az alkalmazkodási sebességek kielégítik az alábbi feltételeket:

$$\frac{2q_{ij}}{1-q_{ij}} \leq p_{ij} \leq 2 \quad \text{és} \quad 0 < q_{ij} \leq \frac{1}{2} \quad 1 \leq i, j \leq n. \tag{3.2}$$

Figyelemreméltó, hogy, ha az összes lehetséges struktúrát figyelembe veszszük és homogén alkalmazkodási sebességeket tételezünk fel ($q_{ij} = q$ és $p_{ij} = p$ $1 \leq i, j \leq n$), akkor a (3.2) feltétel szükséges is a stabilitáshoz. A bizonyítás nehézségét éppen az okozza, hogy a két korlát nem „független" egymástól. Az alkalmazkodási sebességeknek nemcsak elegendően kicsinynek kell lenniük, hanem p-nek q-hoz képest elegendő nagynak is kell lennie.

$4^{(II)}$ *MEGÁLLAPITÁS. Működőképesség.* Minden stabil rendszerben van működőképes indulási környezet, ahonnét elindítva a rendszert, a rendszer változói mindvégig pozitívak, köztük a slack input készletek is.

Míg KS – I 4.N. Megállapításnál ténylegesen meghatározható a működőképes kiindulási környezet valamilyen résztartománya, most ez nem sikerült.

A megállapítások végére érve, az I. és II. modellel nyert tételek összefoglalásaként a következőket mondhatjuk:

A készlet-jelzéses és a rendelés-jelzéses mechanizmus nem ekvivalens. A rendelés-jelzéses szabályozással működő rendszer (determinisztikus világban) gyorsabban nő, de egyéb hátránya van. Mégis, korlátozott értelemben, fennáll közöttük valamilyen „majdnem-egyenértékűség": mindkettő stabil és működőképes.

4. A megállapítások matematikai bizonyítása

Az 1.$^{(II)}$, 2.N$^{(II)}$ és a 4.N$^{(II)}$ megállapítások bizonyításától, a rövidség kedvéért, eltekintünk. Ezek ugyanis matematikai szempontból alig térnek el a KS—I cikk megfelelő részeitől. (Megjegyezzük, hogy a 4.N$^{(II)}$ megállapítás bizonyítása az előző cikk 4.A$^{(I)}$ megállapításának bizonyításával azonos.) Kizárólag a stabilitásra vonatkozó 3.N$^{(II)}$ megállapítás igényel bizonyítást.

A KS—I megfelelő részéhez hasonlóan az eltérés-rendszer domináns megoldására a következő $2n^2$-dimenziós lineáris sajátérték-sajátvektor feladatot kapjuk:

$$(\hat{\lambda} - 1 + p_{ij})\,\hat{k}_{ij} = -q_{ij}\,\hat{v}_{ij} \tag{4.1}$$

és

$$(\hat{\lambda} - 1)\,\hat{v}_{ij} = -a_{ij}\,p_{ij} \sum_{n=1}^{n} \hat{k}_{jh} + p_{ij}\,\hat{k}_{ij}\,. \tag{4.2}$$

Célunk olyan P és Q alkalmazkodási sebesség mátrixok találása, amelyeknél az eltérés-rendszer stabil, azaz $|\hat{\lambda}| < 1$.

Egyszerű számolással, $\hat{k}_i = \sum_{j=1}^{n} \hat{k}_{ij}$ jelöléssel

$$\hat{k}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{p_{ij}q_{ij}}{\hat{\lambda}^2 - (2 - p_{ij})\,\hat{\lambda} + 1 - p_{ij}(1 - q_{ij})}\,a_{ij}\,k_j \tag{4.3}$$

n-dimenziós, nem-lineáris fix-pont feladatot kapjuk, amelynek sajátértékei azonosak (4.1—2.) sajátértékeivel.

Szükségünk lesz a következő

Lemmára (Morishima [4]).

Legyen U_1 $n \times n$-es nem-negatív elemű irreducibilis mátrix, U_2 pedig $n \times n$-es komplex elemű mátrix, ahol $u_{ij}^{(1)} > |u_{ij}^{(2)}|$, $1 \leq i, j \leq n$. Ekkor $\sigma(U_1) < \sigma(U_2)$.

A Lemmából közvetlenül adódik az abszolút stabilitás alábbi elégséges feltétele:

$$\frac{p_{ij}q_{ij}}{|f_{ij}(\lambda)|} < \frac{1}{\sigma} \quad \text{ha} \quad |\lambda| \geq 1 \tag{4.4}$$

ahol $f_{ij}(\lambda) = \lambda^2 - (2 - p_{ij})\,\lambda + 1 - p_{ij}\,(1 - q_{ij})$ és $\sigma = \sigma(A)$.

Ekkor ugyanis $U_2(\lambda)$ a (4.3)-ban szereplő mátrix, és $U_1 = A/\sigma$ (ami nem más, mint $U_2(1)$) szereposztásban $|\lambda| \geq 1$ esetén teljesül a Lemma feltétele, tehát $\sigma(U_2(\lambda)) < 1$, és így a fixpont feladatnak nincs instabil megoldása.

Egyelőre szorítkozzunk (4.4) elemzésénél a $|\lambda| = 1$ körvonalra. Ez viszont $\lambda = 1$ esetén $1 < 1/\sigma$ egyenlőtlenséget adja, amely éppen R.4. feltevés miatt teljesül, és amely annál élesebb, mennél közelebb van σ az 1-hez. Ezért a megszorított (4.4) teljesüléséhez nemcsak elégséges, de „majdnem" szükséges is

$$\frac{pq}{|f(\lambda)|} \leq 1, \quad \text{ha} \quad |\lambda| = 1 \tag{4.5}$$

teljesülése. (Mostantól kezdve az i, j indexpárt elhagyjuk, ahol ez nem okoz félreértést.)

$\lambda = \mu + i\nu$ (itt i kivételesen a komplex egységgyök) és $\mu^2 + \nu^2 = 1$ helyettesítéssel, megfelelő átalakítások után a

$$(4.6) \qquad h(\mu) = 2\,[1 - p(1-q)]\,\mu^2 - (2-p)\,[2 - p(1-q)]\,\mu + h(p,q) \geq 0$$

$$-1 \leq \mu \leq 1$$

egyenlőtlenséget kapjuk, amely ekvivalens (4.5)-tel. Mivel $h(1) = 0$, $h(p,q)$ is meghatározott, továbbá (4.6) teljesülésének szükséges és elégséges feltételei

$$(4.7) \qquad h'(1) \leq 0 \quad \text{azaz} \quad p \geq \frac{2q}{1-q}, \quad (q < 1)$$

és

$$(4.8) \qquad h(-1) \geq 0 \quad \text{azaz} \quad p \leq 2 \quad \text{vagy} \quad p \geq \frac{2}{1-q}.$$

Visszatérünk (4.4)-hez, amely teljesüléséhez nyilvánvalóan szükséges, hogy $f(\lambda)$ gyökei az egységkör belsejében legyenek.

Ha a két gyök valós, akkor a $(-1,1)$ intervallumba kell esniük, ami éppen

$$(4.9) \qquad f(1) = 1 - (2-p) + 1 + pq - p > 0 \quad \text{azaz} \quad pq > 0$$

és

$$(4.10) \qquad f(-1) = 1 + 2 - p + 1 + pq - p > 0 \quad \text{azaz} \quad p < \frac{4}{(2-q)}, \quad (q < 2)$$

feltételek teljesülésével ekvivalens.

Ha a két gyök komplex, akkor egymás konjugáltjai, abszolút értékük tehát egyenlő. Mivel a gyökök szorzata $f(\lambda)$ konstans tagja — hiszen $f(\lambda)$ főegyütthatója 1 — a gyökök abszolút értéke $\sqrt{|1-p+pq|}$, tehát teljesülnie kell a

$$(4.11) \qquad |1 - q + pq| < 1 \quad \text{azaz} \quad 0 < p(1-q) < 2$$

egyenlőtlenségnek.

Szükségünk lesz a (4.7)–(4.11) egyenlőtlenségeket egyszerre kielégítő (p,q) pontok $\mathcal{H}$ halmazára. $p, q > 0$ biztosítja (4.9) teljesülését. (4.10) felső korlát kisebb mint (4.8)-beli második alternatíva alsó korlátja, tehát (4.8) első alternatívája érvényes, amely viszont (4.7)-tel együtt maga után vonja (4.10) teljesülését. Hasonlóan, (4.7)-ből következik (4.11). Két független és nem kizáró feltétel marad: (4.7) és (4.8). Mind a kettő teljesül, ha a (4.7)-beli alsó korlát kisebb a (4.8)-beli felső korlátnál, ha $0 \leq q < 1/2$. Vagyis éppen a megállapításban szereplő halmazt kaptuk.

A bizonyítás befejezéséhez szükségünk lesz

Rouche tételére (Szőkefalvi–Nagy, [5]).

Legyen $f(\lambda)$ és $g(\lambda)$ két komplex változás polinom (általánosabban: reguláris függvény). Tegyük föl, hogy

$$(4.12) \qquad |f(\lambda)| > |g(\lambda)| \quad \text{ha} \quad |\lambda| = 1.$$

Ekkor az $f(\lambda) + g(\lambda)$ és az $f(\lambda)$ polinomnak azonos számú gyöke esik a $|\lambda| < 1$ tartományba.

Tegyük föl, hogy teljesül a (3.2) feltétel. Legyen $f(\lambda)$ az előzőleg definiált másodfokú polinom és legyen $g(\lambda)$ tetszőleges komplex szám, ϑpq-nál kisebb-egyenlő abszolút értékkel, $0 < \vartheta < \sigma$. Ekkor (4.5) ill. (3.2) miatt teljesül a Rouche-tétel feltétele, tehát $f(\lambda) + e^{i\varphi}\vartheta pq$ polinom mindkét gyöke a nyílt egységkörbe esik, hiszen (4.9) és (4.10) miatt $f(\lambda)$ mindkét gyöke ide esik. Ekkor viszont igazoltuk a (4.4) feltételt, azaz a stabilitást.

(Beérkezett: 1975. szeptember 5.)

IRODALOMJEGYZÉK

1. Belsley, D. A.: Industry Production Behavior: the Order-Stock Distinction, Amsterdam: North-Holland, 1969.
2. Kornai J.: „A vevő reakciói áruhiány esetén", Kereskedelmi Szemle, 16. (1975) 4–11. o.
3. Kornai J.–Simonovits A.: „Szabályozási problémák Neumann-gazdaságokban/", Szigma, 8. (1975.) 81–99. o.
4. Morishima, M.: Equilibrium, Stability and Growth, Oxford, 1964. Oxford University Press.
5. Szőkefalvi-Nagy B.: Komplex függvénytan (egyetemi jegyzet).

CONTROL BASED ON ORDER SIGNALS IN A NEUMANN-ECONOMY

The present paper deals with the transformation of the model described in [3], previously published in this Journal. The framework of the model is unvaried: a closed, time-invariant dynamic Leontief–Neumann model, in which the variables are stabilized by a decentralized feedback rule. In our new model we dropped our previous assumption on the coincidence of orders and transfers: the orders became communication variables. The operation of the real sphere is described by equations (2.6)–(2.7), and the control rules are specified by equations (2.8), (2.9) and (2.5): the deliveries depend on the backlogged orders, the orders depend on the input-stocks.

Our propositions are the variants of the corresponding propositions of [3]:

1. There exists a normative path and it is uniquely determined.
2. Compared with our previous model the present model assures higher growth rate, but it is payed for by the customers' waiting time.
3. If the adjustment rates satisfy equation (3.2), then the system is stable.
4. In every stable economy there exists a viable neighbourhood of initial states.

УПРАВЛЕНИЕ ЗАКАЗАМИ В НЕЙМАНОВСКИХ ЭКОНОМИКАХ

Данная статья занимается с одним вариантом модели в [3]. Рамки нашей модели не изменяются. Динамическая, закрытая модель Леонтьева—Неймана, структурные матрицы которой постоянны и ее переменные стабилизируются децентрализованной обратнойсвязью. В этой модели мы отклонились от раннего предположения о совпадении заказов с трансферами; заказы стали коммуникационными переменными.

Функционирование реальной сферы описывается при помощи уравнений (2.6)—(2.7), а управление — при помощи уравнений (2.8), (2.3) и (2.5): транспорты зависят от сумм невыполненных заказов и заказы зависит от потребительских запасов.

Наши предложения являются вариантами предложений в [3]:

1. Нормативная траектория существует и однозначно определена.
2. Виртуальное перемещение предыдущей модели с новой моделью повышает темп роста, но это оплачивается ожиданием конечных потребителей.
3. Если коэффициенты обратной связи удовлетворяют (3.2), тогда система стабильна.
4. В каждом стабильном хозяйстве есть окрестность начальных векторов положений, способная к функционированию.

KARLIK ERZSÉBET–TÓTH JÓZSEF

Optimális termékszerkezet, technológia és átlaghozam

A mezőgazdasági vállalatok fejlesztési tervének otpimalizálásáról az utóbbi néhány év alatt számos publikáció jelent meg. E tanulmányokat olvasva szembetűnik, hogy a szerzők általában igényt tartanak arra, hogy az általuk kidolgozott és alkalmazásra javasolt modellek „komplex modell", vagy „komplex tervezési modell" elnevezést birtokoljanak.

A komplexitásra irányuló törekvések valóban mind komplexebb modellek kidolgozásához vezettek, a mezőgazdasági vállalatok gazdálkodását mind sokrétűbben, a valóságot egyre teljesebben kifejező modellekhez. Azonban az eddig publikált modellek igen különbözőek és távolról sem komplexek. Olyan modellt gyakorlatilag nem is lehet szerkeszteni, amely a szó igazi értelmében komplex, s a mezőgazdasági vállalatok gazdálkodásának minden részletére kiterjed. Mindig lehet tehát egy modellel szembeállítani egy még komplexebb modellt.

Kérdéses az is, hogy milyen komplexitásra célszerű törekedni. A komplexitás ugyanis általában együtt jár a matematikai modell méretének növekedésével, ami viszont hatványozott mértékben növeli a munka- és költségráfordítást, s ez nem mindig áll arányban az elérhető információ-többlettel. A munka- és a költségtöbbletet, valamint az elérhető információ-többletet mindenképpen mérlegelni kell, s e tekintetben is célszerű optimumra törekedni. *A komplexitásra irányuló kutatásoknak tehát azt kell célul kitűzni, hogy lényeges kérdéseket ragadjunk meg, s lényegtelen, tényleges információval nem bíró kérdéseket figyelmen kívül hagyhatjuk.* Az azonban, hogy mi jelent lényeges információt, mindig függ a vizsgálat céljától, azaz a gyakorlati tervezés során a vállalat konkrét feltételeitől, sajátosságaitól.

A mezőgazdasági vállalatok fejlesztési tervezését szolgáló programozási modellek komplexitását – véleményem szerint – kétféle aspektusból lehet vizsgálni:

1. Vertikálisan, vagyis hogy milyen részletesen és széleskörűen fogja át a modell a vállalat gazdálkodási körét;
2. horizontálisan, azaz hogy milyen alapvető döntések egyidejű optimalizálását teszi a modell lehetővé.

Valójában ez a szétválasztás is viszonylagos, s nem kezelhető mereven.

Vertikális szempontból pl. felvetődik, hogy a modellben foglalkozzunk-e valamennyi termelési tevékenységgel, vagy csak a fontosabbakkal; esetleg a kisebb jelentőségű tevékenységeket aggregáltan vegyük-e figyelembe. Az állattenyésztési ágazatokat pl. fajonként, esetleg ezen belül termelési irányok szerint megbontva építhetjük be a modellbe, vagy pedig takarmányozási állatcsoportok szerint részletezve. A takarmánytermelést az állatállomány nyal összhangban az éves mérleg szintjén (természetesen megfelelő belső ará nyokat biztosítva), vagy takarmányadag mélységig tervezhetjük. A munkaerő- és a gépi munka mérlegeket havi vagy dekádonkénti részletezéssel vizsgálhatjuk. Ha egyidejűleg a gépparkot is optimalizáljuk, valamennyi gépet (a kisértékű gépeket is) változóként építhetjük a modellbe, vagy csak a nagyértékű gépek darabszámát határozzuk meg optimalizálással, esetleg a kisértékű munkagépeket az erőgépekkel aggregálva vesszük figyelembe. Kiterjed-e a modell (és milyen mélységben) szolgáltatási, pénzügyi és egyéb tevékenységekre?

Módszertani szempontból sokkal izgalmasabb a modell horizontális vizsgálata, azaz annak meghatározása, hogy milyen alapvető döntések egyidejű optimalizálását tesszük a modellben lehetővé. A továbbiakban ezzel a kérdéssel foglalkozunk, amelynek során *eljutunk egy olyan modell ismertetéséhez, amely az eddigieknél komplexebb formában teszi lehetővé a termelési szerkezet, a fajlagos hozamok, a termelési technológiák és az erőforrások egyidejű, egymással összefüggő optimalizálását.*

A mezőgazdasági vállalatok fejlesztési tervének elkészítése során 4 alapvető döntési feladat fogalmazható meg:

1. Milyen legyen a termelés (és szolgáltatás) szerkezete?
2. Milyen fajlagos hozamokkal tervezzünk (termésátlag, átlagos tejhozam stb.)?
3. Milyen termelési technológiát, vagy technológiákat célszerű alkalmazni?
4. Milyen és mennyi termelési erőforrás kell a terv megvalósításához?

Az alapvető döntési feladatok mindegyike több elemből áll. Mind az egyes döntési feladatokon belül, elemeik között, mind az alapvető döntési feladatok között szoros és kölcsönös összefüggés áll fenn. Ezek közül most csak a fajlagos hozamokkal kapcsolatos összefüggésekre térünk ki röviden.[1] Az elérhető átlaghozamok függnek a termőtalajtól, az időjárástól, az alkalmazott termelési technológiától, a felhasznált termelési eszközöktől (műtrágya, vegyszer, gép stb.), valamint a termelés méretétől. Az is nyilvánvaló, hogy ha valamely termékből magas termésátlagot kívánunk elérni, akkor azt az adott növény igényének legmegfelelőbb talajon termesztjük, és ennek megfelelő a műtrágyafelhasználás, öntözés stb. is. Lehetséges azonban, hogy az adott talajtípus csak korlátozottan áll rendelkezésre, s az adott fajlagos hozam csak az ennek megfelelő területen érhető el. A terület kiterjesztése tehát alacsonyabb fajlagos hozamot eredményez. Ugyanígy hat az egyéb tényezők (pl. műtrágya, öntözővíz stb.) szűkössége is. Az adott termelési szint más termékek fajlagos hozamaira is hatással van, mert pl. egy másik termék számára már gyöngébb talajt, vagy kevesebb műtrágyát tudunk csak biztosítani. Kérdéses az is, hogy célszerű-e mindig a maximálisan elérhető fajlagos hozamra törekedni.

A probléma gyakorlatilag úgy vetődik fel, hogy a rendelkezésre álló terület (és ennek adott talajtípusok szerinti megoszlása) és a korlátozott termelési erőforrások mellett *a különböző termelési tevékenységeket milyen színvonalon, milyen fajlagos hozamokkal célszerű folytatni, melyik termék termelése során célszerű magasabb vagy alacsonyabb fajlagos hozamokat elérni. Ez viszont szoros és kölcsönös kapcsolatban van a termelési szerkezettel, a termelési technológiával és a termelési erőforrásokkal.*

[1] Az egyéb vonatkozásokról részletesebb fejtegetéseket találunk [14]-ben a 82–86. oldalakon.

A mezőgazdasági vállalatok fejlesztési tervezésére kidolgozott modellek módszertani fejlődését követve — véleményünk szerint — a következő szakaszokat lehet megkülönböztetni:[2]

1. Az első szakaszban olyan modelleket alkalmaztak, amelyek kizárólag a termelési szerkezet optimalizálását tették lehetővé (Lásd a [4], [5], [6], [8], [10], [11], [12] sorszám alatti irodalmakat) és az erőforrásokat adottnak tekintették.[3] Ezzel a modellel kapcsolatban megjegyezzük, hogy alkalmazását általában rövidtávú (éves) tervezésre célszerű felhasználni, fejlesztési terv készítésére korlátozottan használható. Ez a modell az alapvető döntési feladatok közül kizárólag az elsőt oldja meg, de mivel ezt a többi döntési feladattól elszakítva kezeli, helytelenül orientálhatja a vállalatot.[4]

A modell továbbfejlesztésében bizonyos mértékig előrelépést jelentett, amikor a különböző termékekre több technológiai változatot dolgoztak ki, s ezáltal a harmadik alapvető döntési problémát, ha nem is oldjuk meg, megteremtjük a lehetőségét annak, hogy néhány technológiai változat közül választhassunk.

2. A második szakaszban olyan modelleket dolgoztak ki, amelyek a termelési szerkezet és a termelési források egyidejű, egymással összefüggő optimalizálását biztosítják, vagyis az első és a negyedik döntési feladatot egyidejűleg, összefüggésükben oldják meg. (Lásd a [7], [8], [9], [13], [14] sorszám alatt felsorolt irodalmakat.)

A harmadik döntési feladatot az előző modellhez hasonlóan tudjuk kezelni.[5] Ez a modell fejlesztési tervek elkészítésére az előbbinél alkalmasabb, nemcsak azért, mert a termelési szerkezet és a termelési források egyidejű, egymással összefüggő optimalizálását biztosítja, hanem azért is, mert lehetővé teszi a célfüggvény reálisabb kialakítását.

3. A fejlődés harmadik szakaszában olyan modellek kidolgozására került sor, amely az első, a harmadik és a negyedik alapvető döntési feladatot egyidejűleg, egymással összefüggésben optimalizálja, azaz a termelési szerkezet, a termelési technológiák és a termelési erőforrások optimumát összefüggésükben határozza meg. (Lásd az [1], [2] sorszámok alatt felsorolt irodalmat.)[6]

Mindhárom modellben jelentkezik azonban az a probléma, hogy a fajlagos hozamokat a modell megszerkesztése, sőt a technológiai adatok kidolgozása, illetve a technológiai tervek elkészítése előtt eleve rögzíteni kell. Márpedig — mint erről szó volt — a fajlagos hozamszintek, amelyeket célszerű elérni, nem függetlenek a termelési szerkezettől, a termelési technológiáktól és a termelési forrásoktól, hanem közöttük kölcsönös összefüggés áll fenn. Nem célszerű tehát előre meghatározott fajlagos hozamokkal számolni, hanem a fajlagos hozamokat is a termelési szerkezettel, a termelési technológiákkal és a termelési forrásokkal összefüggésben kell optimalizálni. Ez az igény indított bennünket olyan modell kidolgozására, amely a négy alapvető döntési feladat egyidejű, egymással összefüggő optimalizálását oldja meg.

[2] E helyütt csak a mezőgazdasági vállalatok fejlesztési tervezésének lineáris programozási modelljeit vizsgáljuk. Nem foglalkozunk ágazati modellekkel, dinamikus problémákkal stb.

[3] A modell részletes leírását megtaláljuk [4]-ben.

[4] Bővebben lásd Tóth József korábban idézett könyvében [14].

[5] Részletesebb kifejtése megtalálható [14]-ben.

[6] Hasonló elvek alapján építi fel Acsay, Csáki és Varga a géppark és géphasználat tervezésére kidolgozott modellt [3].

Természetesen a fajlagos hozamok optimalizálása az előbbiekben vázolt mindhárom modellel kapcsolatban felmerül. Célszerűnek látjuk a továbbiakban ennek lehetőségére is rámutatni.

E rövid tanulmány természetesen nem teszi lehetővé, hogy a modelleket teljes vertikumukban áttekintsük és így fogalmazzuk meg a fajlagos hozamok optimalizálásával kapcsolatos eljárásokat. Csupán vázlatos ismertetésére szorítkozhatunk annak a problémának, hogy hogyan alakíthatjuk át a modelleket az átlaghozamok egyidejű optimalizálásának céljára.

Induljunk ki az első időszakban alkalmazott modellekből, amikor adott termelési források mellett optimalizáljuk a termelési szerkezetet. A szokásos formulákat felhasználva, ez röviden az

$$x_j \geqq 0$$

$$\sum_j a_{ij} x_j \leqq b_i \qquad (=, \geqq) \tag{1}$$

$$\sum_j p_j x_j \to \max.$$

formában írható fel,

ahol: x_j — a j-edik termelési (szolgáltatási) tevékenység mérete,
a_{ij} — technológiai koefficiens
b_i — az i-edik erőforrás kapacitásának korlátja,
p_j — a j-edik termék fajlagos hatékonysága.

A modell adatait előre meghatározott fajlagos hozamokra (pl. átlagtermésekre) dolgozzuk ki. Ez a modell egyszerűen átalakítható úgy, hogy egyidejűleg a fajlagos hozamszintek optimumát is meghatározzuk a következő módon:

$$x_j, x'_j \geqq 0$$

$$\sum_j a_{ij} x_j + \sum_j a'_{ij} x'_j \leqq b_i \qquad (=, \geqq) \tag{2}$$

$$\sum_j p_j x_j + \sum_j p'_j x'_j \to \max,$$

ahol a termelési tevékenységeket két változóval fejezzük ki:

x_j — a j-edik termék termőterületének nagyságát, illetve az állatok létszámát
x'_j — a fajlagos hozamokat fejezi ki.

Ennek megfelelően kell természetesen kidolgozni az egységnyi termőterületre (vagy állatra) és egységnyi fajlagos hozamokra vonatkozó technológiai és hatékonysági koefficienseket is, amit a_{ij} illetve a'_{ij}, vagy p_j illetve p'_j-vel jelölünk.

Természetesen a fajlagos hozamokat egy maximálisan elérhető szinten korlátozni kell a növény biológiai sajátosságainak, a talaj- és az időjárási adottságoknak megfelelően. E korlátokat célszerű talajtípusonként — esetleg más tényezők szerint is — eltérő mértékben megadni.

Valójában a hozamok korlátozását a termelés kiterjedéséhez kell kapcsolni, így x'_j nem a fajlagos hozamokat, hanem az össztermést adja meg, amelyet x_j termelési kiterjedés mellett célszerű elérni. Ez viszont adott terület esetén a fajlagos hozamoktól függ, így a célszerű fajlagos hozamok egyszerűen meghatározhatók. A (2) formulát tehát a

$$x'_j \leq q_j x_j \tag{3}$$

feltételekkel kell kibővíteni, ahol

q_j — a j-edik termelési tevékenységnél maximálisan elérhető fajlagos hozam.

Itt említjük meg, — és ez a továbbiakban is érvényes — hogy a hatékonyság és a fajlagos hozamok között nemlineáris összefüggés van. Ezzel a későbbiekben fogunk foglalkozni. Másrészt a p_j hatékonysági koefficiens általában negatív előjelű, míg a p'_j koefficiens pozitív előjelű, ha például a vállalati jövedelmet maximalizáljuk a célfüggvényben. Abból ugyanis nem származik jövedelem, hogy a területet pl. búza alá megszántjuk, az csak költséget jelent. Jövedelem csak abból származik, ha az adott területen termelünk is búzát, mégpedig a jövedelem nagysága függ a fajlagos hozamoktól. A p_j tehát a területtel arányos munkák költségét, a p'_j pedig a fajlagos hozamtól függő termelési érték és termelési költség különbségét tartalmazza. A kérdés részletesebb kifejtésére — úgy véljük — nincs szükség.

A termelési szerkezet és a termelési források egyidejű optimalizálására szolgáló modell röviden a

$$\begin{gathered} x_j, y_h \geq 0 \\ \sum_j a_{ij} x_j - g_{ih} y_h \leq 0 \\ \sum_j p_j x_j + \sum_h c_h^{\text{fix}} y_h \to \max. \end{gathered} \tag{4}$$

formában fogalmazható meg,[7] ahol

g_{ih} — a h-adik gép fajlagos kapacitása az i-edik időszakban
c_h^{fix} — a h-adik gép éves állandó (fix) költsége
y_h — a h-adik gépből szükséges darabszám

Most sincs akadálya annak, hogy a termelési tevékenységeket x_j és x'_j-re bontsuk, illetve a technológiai koefficienseket a_{ij} és a'_{ij}, a fajlagos hatékonysági koefficienseket pedig p_j és p'_j-re bontsuk meg és a modellben a fajlagos hozamokat is optimalizáljuk. Ekkor modellünk röviden a következőképpen fogalmazható meg:

$$\begin{gathered} x_j, x'_j, y_h \geq 0 \\ \sum_j a_{ij} x_j + \sum_j a'_{ij} x'_j - g_{ih} y_h \leq 0 \\ x'_j \leq q_j x_j \\ \sum_j p_j x_j + \sum_j p'_j x'_j + \sum_h c_h^{\text{fix}} y_h \to \max. \end{gathered} \tag{5}$$

Most is megjegyezzük, hogy az (5) formulában p_j, valamint a (4)—(5) formulában c_h^{fix} általában negatív előjelű és $p'_j x'_j$ valójában nem-lineáris.

[7] Részletesebb leírását lásd [14]-ben.

Végül a harmadik modell röviden a következő formulában fogalmazható meg:[8]

$$
(6)\qquad
\begin{aligned}
& x_j,\, m_{ij}^{hr},\, y_h,\, y_r \geq 0 \\
& \sum_j x_j - \sum_j \sum_{hr} m_{ij}^{hr} = 0 \\
& \sum_j \sum_{hr} a_{ij}^{hr} m_{ij}^{hr} - g_{ih} y_h \leq 0 \\
& \sum_i \sum_r a_{ij}^{hr} m_{ij}^{hr} - g_{ir} y_r \leq 0 \\
& \sum_k p_k x_j + \sum_j \sum_{hr} \sum_i c_j^{hr\,\text{vált.}} m_{ij}^{hr} + c_h^{fix} y_h + c_r^{fix} y_r \to \max.
\end{aligned}
$$

ahol:

m_{ij}^{hr} — a j-edik termék termelése során elvégzendő munkaművelet, az i-edik időszakban, a h-adik erőgéppel, az r-edik munkagéppel,
a_{ij}^{hr} — a technológiai koefficiens (fajlagos munkaigény),
g_{ih}, — illetve g_{ir} — a h-adik erőgép, illetve r-edik munkagép fajlagos kapacitása az i-edik időszakban,
y_h — a h-adik erőgép mennyisége,
y_r — az r-edik munkagép mennyisége,
$c_j^{hr\,\text{vált.}}$ — az m_{ij}^{hr}-hez tartozó változó költség,
c_h^{fix}, ill. c_r^{fix} — az erő-, illetve munkagép éves fix költsége.

A modell most is átalakítható úgy, hogy egyidejűleg a fajlagos hozamokat is optimalizáljuk, a következőképpen:

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
& x_j,\, x_j',\, m_{ij}^{hr},\, m_{ij}^{hr'},\, y_h,\, y_r \geq 0 \\
& \sum_j x_j - \sum_j \sum_{hr} m_{ij}^{hr} = 0 \\
& \sum_j x_j' - \sum_j \sum_{hr} m_{ij}^{hr'} = 0 \\
& x_j' \leq q_j x_j \\
& \sum_j \sum_h a_{ij}^{hr} m_{ij}^{hr} + \sum_j \sum_h a_{ij}^{hr'} m_{ij}^{hr'} - g_{ih} y_h \leq 0 \\
& \sum_j \sum_r a_{ij}^{hr} m_{ij}^{hr} + \sum_j \sum_r a_{ij}^{hr'} m_{ij}^{hr'} - g_{ir} y_r \leq 0 \\
& \sum_j p_j x_j + \sum_j p_j' x_j' + \sum_j \sum_{hr} \sum_i c_j^{hr\,\text{vált.}} m_{ij}^{hr} + \\
& + \sum_j \sum_{hr} \sum_i c_j^{hr\,\text{vált.}'} m_{ij}^{hr'} + c_h^{fix} y_h + c_r^{fix} y_r \to \max.
\end{aligned}
$$

ahol: a szimbólumok az előbbi formulákkal megegyeznek, illetve — mint eddig — ′-vel jelöltük a fajlagos hozamokkal kapcsolatos koefficienseket.

Nem tértünk ki a területmérlegekre, termelési korlátokra, takarmánymérlegekre stb., mivel azok módszertanilag nem jelentenek problémát és a hivatkozott irodalomban részletesen megtalálhatók.

[8] Részletesebben lásd Acsai F.—Balla S.—Tóth J. [2].

Az eddigiekben a célfüggvényt lineáris formában fogalmaztuk meg. Ez az egyszerűsítés különösen a $p'_j x'_j$ kapcsolatokban jelent problémát, mivel a fajlagos hozamok emelkedésével, még ha a termelési érték változását lineáris függvényként is tételezhetjük fel, a költségek nem-lineárisan változnak. Többek között a fajlagos hozamok növekedésével a műtrágya és vegyszerfelhasználási költségek progresszíven emelkednek. Próbálkozzunk tehát most a probléma ilyen megfogalmazásával.

Számítástechnikailag olyan $P(\mathbf{x}')$ függvénnyel kell helyettesíteni a $\sum_j p'_j x'_j$-t, amely felbontható $\sum_j \varphi_j(\mathbf{x}')$ alakra és maximum feladat esetén valamennyi φ_j felülről, minimum feladat esetén alulról nézve konvex. Amennyiben φ_j rendelkezik az előbbi feltételekkel, a konvex programozás valamelyik algoritmusával meghatározható a feladat optimális megoldása.

Próbálkozzunk tehát az előző lineáris modellek helyett a tényleges gazdasági kapcsolatokat jobb megközelítésben leíró modellel. Ideális az lenne, ha a költségfüggvények növényenként rendelkezésre állnának. Ez sajnos pillanatnyilag még nehézséget jelent, így kénytelenek vagyunk a termelési függvényekből kiindulni.

Legyen tehát:

x_j — a j-edik növény vetésterülete

(8) $$u_j = f_j(\mathbf{v}_j) \text{ termelési függvény,}$$

ahol: u_j — a j-edik növény termésátlaga,
$\mathbf{v}_j$ — a termésátlagot befolyásoló ráfordítás, azaz a ráfordítás mennyiségvektora.

Feltesszük, hogy az f_j függvénynek van lokális maximumpontja, ellenkező esetben a $p'_j x'_j$-vel számolunk a célfüggvényben.

Jelölje továbbá:

a_j — a j-edik növény egységárát, $\mathbf{a}_j$ a ráfordítás árvektorát,
k_j — a j-edik növénynél fellépő, a $\mathbf{v}_j$ ráfordítástól független, a termőterülettel nem arányos költséget.

Legyen:

$u_{j,l}$ — általunk előre megadott termésátlag-szint

$$(1 \leq l \leq m_{j-2})$$

és feltesszük, hogy

$$u_{j,l-1} \leq u_{j,l} \leq u_{j,m_j-1} \leq u_{j,m_j}$$

Legyen:

$u_{j,0}$ — az $f_j(\mathbf{v}_j)$ értéke a $\mathbf{v}_j = \mathbf{0}$ helyen,
u_{jm_j} — az $u_j = f_j(\mathbf{v}_j)$ függvény értéke a $\mathbf{v}_{j,m_j}$ lokális maximumpontban.
$u_{j,m_{j-1}}$ az

(9) $$u_j = f_j(\mathbf{v}_j), \quad u_j \geq 0, \quad \mathbf{v}_j \geq \mathbf{0}$$

$$a_j u_j - \mathbf{a}_j^* \mathbf{v}_j \to \max.$$

feltételes szélsőérték feladat megoldásaként adódó u_j érték a $\mathbf{v}_{j,m_j-1}$ pontban.

$\mathbf{v}_{j,l}$ az

$$u_{j,l} = f_j(\mathbf{v}_j)$$

(10) $$\mathbf{v}_j \geq 0$$

$$\mathbf{a}_j^* \mathbf{v}_j \to \min.$$

feltételes szélsőérték feladat megoldásaként adódó $\mathbf{v}_j$ érték.

$x_{j,l}$ az x_j területről

$u_{j,l} - u_{j,l-1}$ termésátlaggal elérhető összes termés,

ahol:

$$1 \leq l \leq m_j,$$

Az eredeti feltételekben x'_j helyébe az

(11) $$x_{j,1} + x_{j,2} + \ldots + x_{j,m_j}$$

kerül. A feltételekhez hozzá kell írni az

(12) $$u_{j,0} x_j - x_{j,1} \leq 0$$

$$x_{j,l} - (u_{j,l} - u_{j,l-1})\, x_j \leq 0$$

$$x_{j,l} \geq 0$$

$$x_{j,1} \geq 0$$

$$j = 1, 2, \ldots, n$$

$$l = 2, 3, \ldots, m_j$$

feltételrendszert és a célfüggvényben a

$$\sum_j p'_j x'_j \text{ helyett}$$

(13) $$\sum_{j=1}^{n} \left\{ (a_j - k_j) \sum_{l=1}^{m_j} x_{j,l} - \sum_{l=2}^{m_j} \frac{\mathbf{a}_j^*(\mathbf{v}_{j,l} - \mathbf{v}_{j,l-1})}{u_{j,l} - u_{j,l-1}} x_{j,l} - \frac{\mathbf{a}_j^* \mathbf{v}_{j,1}}{u_{j,1} - u_{j,0}} x_{j,1} \right\}$$

írható. Az így kapott lineáris programozási feladat $\sum_{l=1}^{m_j} x_{j,l}$ megoldását az x_j területtel elosztva, megkapjuk az aktuális termésátlag értékeket.

Amennyiben újabb számítógépes megoldási lehetőségünk van, a jobb közelítés érdekében érdemes a feladatot úgy átalakítani, hogy osztópontként a

$$\frac{\sum_{l=1}^{m_j} x_{j,l}}{x_j}$$

termésátlag közelébe eső értékeket választjuk és ezen adatokkal elölről kezdjük a számítást. Így a tényleges értékeket nagyon jól megközelíthetjük.

A fentiekben kifejtett konvex programozási eljárást és az [5] formulában megadott modellt egy termelőszövetkezetben kipróbáltuk és az alkalmasnak mutatkozott gyakorlati tervezésre. A legnagyobb problémát egyelőre a termelési függvények meghatározása jelenti. Az ezzel, valamint a (7) formulával megadott modellel kapcsolatos kísérletek folyamatban vannak. A gyakorlati alkalmazáshoz még széleskörű adatgyűjtés és feldolgozás lenne szükséges.

(Beérkezett: 1975. július 29.)

IRODALOMJEGYZÉK

1. Acsay F.—Balla S.—Tóth J.: A termelési szerkezet, a termelési tényezők és a termelési források egyidejű, egymással összefüggő optimalizálása. Vezetés a mezőgazdaságban, az élelmiszeriparban, az erdészet-faiparban. 1973. 2. sz.
2. Acsay F.—Balla S.—Tóth J.: A termelési szerkezet, a termelési technológia és a termelési források egyidejű optimalizá ása egy gazdaságban. Vezetés a mezőgazdaságban, az élelmiszeriparban, az erdészet-faiparban. 1973. 10. sz.
3. Acsay F.—Csáki Cs.—Varga Gy.: A vállalati géppark és géphasználat matematikai tervezése. Akadémiai Kiadó. Budapest, 1973.
4. Csáki Cs.: Mezőgazdasági vállalatok távlati tervezése matematikai programozással. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1969.
5. Csáki Cs.: Egy állami gazdaság fejlesztési terve. SZIGMA, 1969. 4. sz.
6. Csáki Cs.—Varga Gy.: Foglalkoztatás és optimális struktúra egy termelőszövetkezet példáján. Tudomány és Mezőgazdaság, 1971. 6. sz.
7. Csáki Cs.—Varga Gy.—Vendégh F.: Árhatásvizsgálatok matematikai programozással egy mezőgazdasági vállalatról. Közgazdasági Szemle, 1971. 7—8. sz.
8. Csete L.—Megyeri F.: A termelőszövetkezetek és állami gazdaságok középtávú tervezési eljárása és módszerei. Gazdálkodás. 1974. 6. sz.
9. Mészáros S.—Módos Gy.-né: A hegyvidéki termelőszövetkezetek középtávú tervezésének modellje és a számítások eredményei. Gazdálkodás, 1975. 1. sz.
10. Sebestyén I.: Matematikai módszerek alkalmazása a mezőgazdasági termelés vizsgálatában. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1962.
11. Pillis P.: Távlati üzemi terv optimalizálása. Kertészeti Egyetem Közleményei. 1974.
12. Tóth J.: Optimális munkaerősűrűség és termelési szerkezet. Statisztikai Szemle, 1966. 11. sz.
13. Tóth J.: A termelési szerkezet és források optimumának meghatározása. Statisztikai Szemle, 1969. 5. sz.
14. Tóth J.: A termelési tényezők felhasználásának optimalizálása a mezőgazdaságban. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1973.

OPTIMUM PRODUCT-MIX, TECHNOLOGY AND AVERAGE YIELDS

In the preparation of the development plan of a farm there is a many-sided, close connection and interrelation between the product-mix, yields, production technologies and the resources and it is expedient to optimize them simultaneously.

Starting from the simplest model (1) (aimed exclusively at the optimalization of the product-mix) the authors approach gradually the solution of the whole problem. At first, models applicable for the simultaneous and connected optimalization of the product-mix and yields (2.3) are presented, then those suitable for that of the product-mix and resources of production (4), product-mix, resources and yields (5), product-mix, technology and resources (6), and finally, of the product-mix, yields, technology and resources. Finally, a non-linear model (8—13) is obtained enabling a more complex and realistic planning of agricultural enterprises.

The wide-spread practical use of the model would require the development of an adequate data basis, which at present is a major bottleneck.

ОПТИМАЛЬНАЯ СТРУКТУРА ПРОИЗВОДСТВА, ТЕХНОЛОГИЯ И СРЕДНИЙ УРОЖАЙ

Составление планов развития сельскохозяйственных предприятий является чрезвычайно сложной и разнообразной задачей. Между структурой производства, удельным урожаем, технологиями производства и источниками производства существует многосторонняя тесная связь и взаимодействие, которые целесообразно подвергать одновременной и взаимосвязанной оптимизации.

Данное исследование, исходя из самой простой модели (1), (целью которой является исключительно только оптимизация структуры производства), постепенно подходит к решению проблемы. В работе показаны модели, пригодные вначале для одновременной и взаимосвязанной оптимизации структуры производства и среднего урожая (2,3), потом структуры производства и источников производства (4), структуры производства, источников производства и среднего урожая (5), сруктуры производства, технологий производства и источников производства (6), и наконец, структуры производства среднего урожая, технологий производства и источников производства (7). Наконец, исследование подходит к нелинейной модели (8—13), которая позволяет более комплексно и достовернее решить планирование на сельскохозяйственном предприятии.

Широкое практическое применение модели требует формирования соответствующей информационной базы. В настоящее время самой сложной проблемой является планирование исходных данных.

KÖNYVEKRŐL

BÉLA MARTOS: *Nonlinear programming, theory and methods.* Budapest, 1975. Akadémiai Kiadó. 279 p.

A könyv a gazdasági és műszaki döntési problémákban felmerülő nemlineáris programozási (NLP) feladatok legfontosabb elméleti és gyakorlati számítási módszereit foglalja össze. Bemutatja a NLP feladatok szokásos megoldási eljárásait, különös figyelmet szentelve arra, hogy miként lehet a hatékonyságukat biztosító analitikus feltételeket gyengíteni. A gyakorlatban ugyanis ritkán fordul elő olyan nemlineáris feladat, ahol kellemes folytonossági, konvexitási mellékfeltételek is teljesülnek. A tárgyalásmód és felépítés matematikailag magas színvonalú és igényes, mindamellett az olvasást megkönnyíti azáltal, hogy számos jól válogatott számpéldát is bemutat, továbbá a bevezető fejezetekben összefoglalja a matematikai segédeszközöket. Minthogy bőséges irodalmi utalást is tartalmaz és a szerző sok önálló, másutt nem publikált eredményét, azért a könyv igen hasznos mind a kutatók, mind az áttekintésüket bővíteni kívánó speciális alkalmazók számára. Kézikönyvként és tankönyvként egyaránt kiváló.

Két fő részre tagozódik, az első az elmélet, a másik a módszer szempontjai alapján foglalkozik a NLP egyes fejezeteivel. A 15 bemutatott fejezet közül az első bevezető jellegű, a lineáris programozási kézikönyvekhez hasonló módon tárgyalja a halmazokat, függvényeket és topologikus tulajdonságaikat, a lineáris algebrát és mátrix számítást, leginkább Berge—Ghouila-Houri társszerzők ismert könyvében található-hoz hasonló felfogásban. A második fejezetben a szerző a NLP feladatát úgy értelmezi, mint egy $\varphi(x)$ skalár értékű függvény minimumának meghatározását az n-dimenziós euklidesi tér olyan összefüggő részén, amelyet véges m-számú komponensű g vektorfüggvénnyel képezett $g(x) \leq 0$ egyenlőtlenségrendszer jelöl ki. Ez az értelmezés kizárja a diszkrét, integer programozási feladatokat, ahol a megengedett tartomány nem összefüggő. Formálisan ki van zárva annak lehetősége is, hogy végtelen sok feltételi egyenlőtlenség határolja le a megengedett tartományt, mert g-nek csak véges számú komponense lehet. Minthogy azonban g nem csak lineáris függvény lehet, hanem pl. végtelen sok szakaszból álló, szakaszonként (tartományonként) más-más módon megadott függvény, azért a szerző értelmezése gyakorlatilag nem zár ki olyan eseteket sem, midőn m nem véges, csak a végtelen sok komponensű g függvénnyel képezett $g(x) \leq 0$ egyenlőtlenség pótolható véges komponensű, szakaszonként más-más módon adott g-vel képezett egyenlőtlenséggel.

A szerző eredményeiben alapvető fontosságú a kvázikonvexitás fogalma. Ehhez a konvexitásból kiindulva jutunk. Egy φ függvényt konvexnek nevezünk az euklidesi tér valamely konvex tartománya fölött, ha a tartomány bármely két x, pontjának $0 \leq \lambda \leq 1$ súlyú $z = (1 - \lambda) x + \lambda y$ osztópontján a $\varphi(z)$ értéke nem haladja meg a $\varphi(x)$, $\varphi(y)$ függvényértékek λ súlyú $K(\lambda) = (1 - \lambda) \varphi(x) + \lambda\varphi(y)$ középértékét. Kvázikonvexitás esetén K helyett max $[\varphi(x), \varphi(y)]$ veendő. Megfelelően konkávitásról beszélünk, ha a $-\varphi$ függvény konvex, kifejezett kvázikonvexitás esetén pedig olyan kvázikonvex függvénnyel dolgozunk, amelyre az osztópontokon a függvényértékek határozottan alatta maradnak az x, y végpontokon felvett értékek közül a nagyobbiknak, feltéve, hogy ott $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. A kvázikonvexitás egyenértékű más értelmezéseit is megadja a szerző, különösen fontos a $\psi(\lambda) = \varphi[(1 - \lambda) x + \lambda y]$ függvénnyel való kapcsolat. Figyelemre méltó még a kvázimonoton függvények értelmezése, amelyek egyaránt kvázikonvexek és kvázikonkávok. A szerző részletesen tárgyalja a bevezetett tulajdonságok kapcsolatát, öröklődését összetett függvények és lineáris kombinációk és más egyéb elemi módon felépített függvények képzése esetén, felhasználásukat

NLP feladatokban. Magyar matematikusok: *Deák Ervin, Kéri Gerzson, Kovács L. Béla, Krekó Béla, Majthay Antal, Prékopa András* a szerzővel együtt úttörő munkát végeztek a NLP megalapozásában, különösen a fent említett fogalmak kialakítása és hasznosságuk igazolása terén. A fejezet végén érdekes megjegyzéseket találunk olyan irányban, midőn súlyozott közép helyett súlyozott hatványközepeket tekintünk.

A következő fejezet az előzőkhöz kapcsolódva mindenek előtt egy függvény kvázikonvexitásának egyenértékűségét mutatja ki a függvény nívóhalmazának konvexitásával. Ezután viszont a $g(x) \leq b$ feltétellel kijelölt megengedett megoldások halmazának tulajdonságát kizsgálja két irányban: midőn változó b esetén ezek zárt konvex halmazok, illetve síkokkal határoltak. A g függvény kvázikonvexitása ill. kvázimonotonitása ezzel szorosan összefügg. Itt kerül sorra néhány szétválasztási tétel és Farkas tétele is.

Az 5. fejezetben a lokális minimum és lokális csúcsponti minimum értelmezését találjuk olyan megkülönböztetés szerint, hogy az illető pontban a függvényértéket a pont környezetében, illetve egy sokszög szomszédos csúcsain felvett értékekkel hasonlítjuk össze. A vizsgálat fő problémája olyan feltételek keresése, melyek a lokális minimum, illetve csúcsponti minimum globális érvényét is biztosítják.

A klasszikus Lagrange-féle majd Kuhn—Tucker-féle nyeregpont problémákat a 6. és 8. fejezetben találjuk. Ezekhez jó eszköznek bizonyul a 7. fejezetben bevezetett lokális kvázikonvexitás és pszeudokonvexitás fogalma, amelyek azt fejezik ki, hogy az iránymenti derivált nem pozitív illetve negatív a nem növekvő, illetve fogyó függvényértékek irányában.

A 9. fejezet, mint önálló függelék foglalkozik a kvadratikus függvények konvexitási és a szerző által bevezetett szubdefinitási tulajdonságaival, amelyek a kvadratikus programozásban lényegesek.

Az ezt követő fejezetek a programozás különböző számítási módszereit, a lineáris programozás szimplex módszerét, a teljes leírás módszerét, a kvadratikus programozás különböző módszereit, a gradiens módszert, a metsző síkok módszerét tárgyalja és kiterjesztési lehetőségüket az első részben bevezetett és ismertetett feltételeknek eleget tevő NLP feladatokra. A módszerek alkalmazási lehetőségét az első részben felépített elmélet támasztja alá, a gyakorlati numerikus végrehajtást pedig sok számpélda illusztrálja.

Hosszú Miklós

Walter Jahn—Hans Vahle: *A faktoranalízis és alkalmazása.* Budapest, 1974. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 231 p.

A könyv bevezető jellegű, mint ezt a szerzők hangsúlyozzák az Előszóban, erre utal terjedelme is, és természetesen a magyar fordítás célja is az, hogy megismertessen az olvasóval egy rendkívül széles körben alkalmazható, a lehetőségekhez képest objektív és viszonylag könnyen értelmezhető eredményeket adó matematikai-statisztikai eljárást: a faktoranalízist. Ezt a feladatát a könyv tökéletesen ellátja, amiben nagy szerepet játszik, hogy a szerzők végig példákkal illusztrálják az elmondottakat.

A faktoranalízis lényege a jelenségek közötti bonyolult összefüggések minél egyszerűbb formában történő leírása; e módszer segítségével a bizonyos számú megfigyelt egységre (pl.: városokra, családokra, szarvasmarhákra) megadott mutatókban — a változókban — felhalmozott információ nagy részét visszanyerjük néhány — az eredeti változók számánál lényegesen kevesebb — hipotetikus változóban, a faktorokban, amelyek az eredeti változóknak valamely lineáris kombinációi. Ezáltal a vizsgálni kívánt komplex jelenség könnyebben értelmezhetővé válik. Ez adja meg a faktoranalízis közgazdasági alkalmazásának a jelentőségét — de a módszer érdeklődésre tarthat számot a legkülönbözőbb területek szakemberei részéről is.

A könyv 8 részre tagozódik. A Bevezetésben a szerzők két példán mutatják be a faktoranalízis feladatát, majd a 2. fejezetben a faktoranalízis kiindulópontját képező korrelációs mátrix elemeivel, a korrelációs együtthatókkal foglalkoznak.

A 3. fejezet a könyv leglényegesebb része, itt ismertetik magát a faktoranalízist, mint módszert. A fejezet első pontjában a modell matematikai megfogalmazását adják meg. Meghatározzák a standardizált értékeket, a korrelációs mátrixot, a faktorok különböző típusait (közös, specifikus és hibafaktor), a különböző faktorok hozzájárulását a változók teljes szórásnégyzetéhez (amelyek közül legfontosabb a közös faktorok hozzájárulását jelentő kommunalitás), továbbá a faktorsúlyok mátrixát. A második pont a kommunalitások problémájával foglalkozik, előzetes becslésükre több módszert is ad. A harmadik pont ismerteti a faktoranalízis sok módszere közül a két legfontosabbat, a centroid módszert és a főfaktor módszert. A két módszer közül az utóbbi ajánlható inkább, mivel szigorú matematikai törvényszerűségeken alapul, önkényes megfontolásokat nem tartalmaz, elektronikus számítógépekre jól programozható. A negyedik pont a kiszűrendő faktorok számával foglalkozik, ez a gyakorlatban a faktoranalitikus módszer pontossága és könnyen értelmezhetősége közötti kompromisszumot jelenti.

A faktoranalízis geometriai értelmezése szerint a faktorok egy *m* dimenziós teret feszítenek ki, ahol *m* a faktorok száma. A faktorok rotációja, amellyel a könyv 4. fejezete foglalkozik, ezen tér koordináta tengelyeinek elforgatásával egyenértékű. A megfelelő rotáció alkalmazásával kapott faktormegoldás bizonyos szempontból jobban értelmezhető, mint az eredeti. (Az értelmezés alapja minden esetben a faktorsúlyok mátrixa, amely a változóknak a faktorokkal való korrelációját tartalmazza.) Nagyon jól alkalmazható forgatási eljárás a varimax rotáció, de érdekes a speciális transzformáció is, amely az első faktort a változók egyikével, az úgynevezett célmennyiséggel azonosítja. Azonban a faktoranalízis feladatának olyan megfogalmazása, hogy a változók egyikét célmennyiséggé deklaráljuk — azaz ezt a változót tesszük meg a vizsgálat tárgyává —, a faktoranalízis lehetőségeinek a beszűkítésével jár, hiszen a tárgyalt módszer szépsége éppen abban rejlik, hogy olyan összetett jelenségeket tesz objektív úton értelmezhetővé, amelyek a gyakorlatban használt mutatók egyikével sem fejezhetők ki teljességükben. A záró megjegyzésekben a szerzők utalnak is erre, amikor kijelentik, hogy minden mennyiség — függetlenül a többitől — felfogható célmennyiségként.

Az 5. fejezet a faktoranalízis két speciális problémáját, a faktorbecsléseket és a két faktormegoldás összehasonlítását tárgyalja, ezután igen szerteágazó témákra vonatkozó, számítási eredményekkel illusztrált példák (munkatermelékenység, városépítési tervezés, mezőgazdaság, ágynemű-szükséglet, szarvasmarhák testméretei) következnek. A Függelék a sajátérték probléma matematikai megfogalmazásával és két iteratív megoldási módszere rövid ismertetésével foglalkozik.

A könyv olvasása során az egyetlen zavaró momentum a sok elírás, fordítási pontatlanság volt, ami részben a téma újdonságával magyarázható. Például: „A példákat úgy választottuk, hogy az áttekinthetőség ne menjen a teljesség rovására." (161. o.), „Az $(n+1)$ számú $z_0, z_1, \ldots, z_n$ vektorok egy n-dimenziós R_n-térben mindig lineárisan függetlenek." (215. o.). A téma érdekessége azonban gyorsan feledteti ezeket az apró bosszúságokat.

Reméljük, hogy ez a jól sikerült könyv el is éri célját, és hazánkban is feltámad az a széleskörű érdeklődés a faktoranalízis iránt, amelyet e módszer alkalmazási lehetőségei és jó eredményei indokolnak.

ZÁGON CSABA

ŠUJAN, I.—KŐLEK, J.—GERGELYI, K.: *Prognosticky model ekonomiky ČSSR.* (Csehszlovákia gazdaságának prognosztikus modellje.) Alfa Vydavatelstvo Technickej a Ekonomickej Literatury, Bratislava, 1974., 206 p.

Az ökonometriai modellezés Csehszlovákiában különösen az 1970-es évek elején vett nagy lendületet, az ENSZ égisze alatt Pozsonyban működő Számító Kutatóközpont (Vyskumné Vypoctové Stredisko) megalakulását követően, amely nemcsak a számítástechnika, hanem a rendszerelemzés és az ökonometria területén is igen sokoldalú tevékenységet fejt ki. A szerzők ennek a Kutatóközpontnak a munkatársai.

Könyvük elején felsorolják azokat az ösztönzőket, bel- és külföldi példákat, amelyek alapján úgy tűnt, hogy az ökonometriai modell mint vizsgálati eszköz a csehszlovák népgazdaságban érvényesülő tartós összefüggések elemzésére és előrejelzésére is sikeresen alkalmazható. Az ökonometriai modellező tevékenység a Számító Kutatóközpontban 1969-ben kezdődött meg, igen jól hasznosítva a világszerte felhalmozódott tapasztalatokat. A szocialista országokban működő, hasonló tevékenységet folytató intézetek közül a szerzők a magyar KSH Ökonometriai Laboratóriumával, a Goszplan Tervgazdasági Tudományos Intézetének Kiev-ben működő osztályával, valamint a katowicei Gazdasági Főiskolával ápolt tudományos szakmai kapcsolataikat emelik ki. Csehszlovákiában ezt megelőzőleg *C. Hudec* a pénzügyi kapcsolatok ökonometriai modelljet alkotta meg, míg *S. Mizera* a szlovák gazdaság modelljét készítette el.

Minden ökonometriai modell magán viseli annak a célnak a sajátos jegyeit, amelynek érdekében megalkották. A Számító Kutatóközpont modelljeire általában az előrejelzési és a tervezési cél nyomja rá a bélyegét. Az ott készülő modellek egyrészt a gazdasági tervezés érdekében hasznosítható hosszútávú elemzés célját, másrészt a gazdasági jelenségek és összefüggéseik rövid- és középtávú (1—5 év) előrejelzése célját szolgálják. A szerzők ezirányú korábbi tapasztalataikról és első kísérleti modelljükről egy évvel korábban megjelent könyvükben számoltak be.[1]

Középtávú előrejelzés céljára a szerzők középnagyságú, 27 összefüggést számszerűsítő, 70 változót tartalmazó modellt készítettek, amelynek paramétereit az 1955—1970. évi időszak statisztikai bázisán becsülték. A változatlan áron számított idősorok báziséve 1967.

A mű nyolc fejezetből áll, amelyek az előrejelzési modell fogalmát, a szóban forgó modell specifikációját és jellemzőit, a becslési eljárást és a szignifikancia-vizsgálatban alkalmazott teszteket, a kétfokozatú becslést és programját, valamint a modell redukált formájával — az exogén változók különböző hipotetikus értékei mellett — nyert előrejelzési eredményeket tárgyalják.

A célkitűzésnek megfelelően, amely az előrejelzéssel kapcsolatos mondanivalókra koncentrál, a modell specifikációjának, az ennek hátterében álló közgazdasági elgondolásoknak viszonylag rövidebb szakaszt szentelnek a szerzők. A modell mindenekelőtt termelési egyenleteket tartalmaz (éspedig hármat: az iparban, az építőiparban és a mezőgazdaságban keletkező nemzeti jövedelem magyarázatára), a nemzeti jövedelmet főleg a foglalkoztatottság és az állóeszközállomány, valamint egyéb tényezők függvényének tekintve. Tartalmaz továbbá két külkereskedelmi egyenletet az export és az import alakulásának a magyarázatára; az export-egyenletben a tárgyévet megelőző időszakok ipari termelését is figyelembevették késleltetett magyarázó változóként, a Koyck-féle transzformációs eljárás alkalmazásával. Három további egyenlet szolgál a béreknek és a lakosság fogyasztásának az elemzésére. Ez utóbbinak a reálbérek és egyéb jövedelmek a magyarázó változói, míg a reálbért magát az átlagbér, foglalkoztatottak száma és a trend függvényének tekintik.

A szerzők helyesen állapítják meg (31. old.), hogy a „beruházási függvények specifikációja és kvantifikálása az ökonometriai modellezés legbonyolultabb problémái közé tartozik a szocialista országokban”, ahol a beruházások alakulását a vizsgálati időszakban főként hosszútávú döntések határozták meg. Ennek ellenére kísérletet tesznek néhány alapvető összefüggés megfogalmazására. Így az állóeszközök felhalmozására, a termelő állóalapok növekedésére, valamint a gépi beruházások részarányának alakulására írtak fel egyenleteket (ez utóbbira három összefüggést, külön az iparra, építőiparra és a mezőgazdaságra). A beruházási függvények specifikációja vitatható ugyan, a probléma ilyen felvetése és kezelése azonban gondolatébresztő kísérletnek minősül. A népgazdasági foglalkoztatottságra vonatkozólag négy egyenletet specifikáltak; ezek magyarázó változói a főágazatban keletkező nemzeti jövedelem és a korábbi foglalkoztatottság. A 17 sztochasztikus egyenlet mellett a modell 10 identitást is tartalmaz.

A harmadik fejezet mindenekelőtt az egyenletenként végzett becslést követő, a szignifikancia-vizsgálat során alkalmazott standard teszteket ismerteti, majd bemutatja a legkisebb négyzetek kétfokozatú módszerét. A paraméterek becslését az utóbbi módszerrel végezték, amikor is a becslés első fokozatában nem valamennyi predeterminált változót, hanem az ezekből képzett főkomponenseket használták fel. Ezzel kapcsolatban a főkomponensek számításának módszerét és az erre szolgáló ún. PRINCOMP-programot is részletesen bemutatják. Ugyancsak ebben a fejezetben ismertetik a szerzők a redukált forma multiplikátorainak kiszámítási módját, a multiplikátorok szignifikancia-vizsgálatában alkalmazott mutatókat, valamint a DYNPROG-programot is. Ez ismét igen tanulságos gondolati konstrukció, amely helyenként még tüzetesebb megfontolást érdemel. A fejezet mondanivalójának — és az egész könyvnek — különös súlyt ad a paraméterbecslés iteratív többfokozatú módszerének a bemutatása és az exogén változók extrapolációjában követett eljárás programja. Mindezt színvonalas, rendkívül érdekes módszertani kísérletként kell értékelni.

Az iteratív paraméterbecslés alkalmazását az az elgondolás motiválja, hogy a kétfokozatú módszer alkalmazása, a teljes információn alapuló módszerekkel ellentétben, bizonyos szükségszerű információveszteséggel jár. A kétfokozatú módszerek az egyes regresszióegyenletek reziduumait minimalizálják ugyan, de tulajdonképpen a redukált forma reziduumainak a minimalizálására volna szükség. Ezért az alkalmazott megoldás során a becslés további fokozatában a magyarázó endogén változók tényleges értékeit olyan módosított értékekkel helyettesítik az egyes egyenletekben, amelyeket a redukált forma paramétereinek segítségével kaptak. Ez ismét új strukturális paramétereket eredményez, aminek alapján ismét változnak a redukált forma paraméterei is. Az eljárást mindaddig ismétlik, amíg a paraméterek értéke meghatározott értékhatáron belül nem stabilizálódik.

[1] Gergelyi, K.—Kolek, J.—Sujan, I.: Komplexné prognózy v socialistickom hospodárstve. Alfa, Bratislava, 1973., 204 p.

Az exogén változók *ex ante* extrapolációjában alkalmazott újítás lényege, hogy ezeknek extrapolációja mellett egyes paraméterek értékét is módosítják. A paramétert csak akkor tekintik stabilnak, ha annak a két változónak, amelynek kapcsolati mérőszáma a paraméter, a növekedési üteme azonos. Ha nem, akkor a paramétert módosítják, éspedig úgy, hogy értékét megszorozzák a függő és a magyarázó változó növekedési ütem-különbségét kifejező együtthatóval. A növekedési ütemet exponenciális trend alapján számították. Az előrebecslésben már ezek a módosított paraméter-értékek szerepelnek. Az endogén változók előrejelzését — az exogén változókra tett alternatív feltételezéseknek megfelelően — az 1971—1975. évi időszakra végezték, az EXPONEX program segítségével. Az előrejelzések az exogén változóknak maximális, közepes és minimális értéknövekedését feltételezve készültek, amikor is a közepes értéket tekintették alapváltozatnak.

A konkrét előrejelzési eredményekről a mű negyedik fejezete számol be igen részletesen (75—100. old.), táblázatos alakban is közölve az eredményeket. Ugyancsak ez a fejezet tartalmazza a modell szimultán becslését megelőző specifikációs vizsgálat részletes eredményeit, míg a kétfokozatú becslés és a tesztek eredményei a könyv ötödik fejezetében találhatók. A hatodik és hetedik fejezet mutatja be a paraméterek módosításának és az exogén változók extrapolációjának számszerű eredményeit, táblázatok formájában is. Ugyancsak itt kerül sor a modell segítségével nyerhető háromféle prognózis közgazdasági elemzésére és a programok összehasonlítására. Úgy tűnik, hogy az ötéves terv előirányzataihoz az előrejelzés közepes (mérsékelt növekedést feltételező) változata áll a legközelebb.

A mű nyolcadik fejezete grafikonok segítségével is bemutatja az exogén változók extrapolációjának és az endogén változók előrejelzésének az eredményeit. A könyv végén — rövid összefoglalást követően — közlik a becslés alapjául szolgáló idősorokat és az irodalomjegyzéket.

A könyv a csehszlovák gazdasági fejlődés előrejelzésének aktuális érdekességén kívül jelentős és igen hasznos kézikönyv is az ökonometriai modellezéssel foglalkozók számára, s mint ilyen, az ökonometriai irodalom egyik számottevő alkotása Csehszlovákiában.

NYÁRY ZSIGMOND

TUDOMÁNYOS ÉLET

Az Ökonometriai Társaság 3. Világkongresszusa

Az Ökonometriai Társaság (Econometric Society) 1975. augusztus 20 és 26 között tartotta harmadik Világkongresszusát Torontóban. A második kongresszus öt évvel ezelőtt az angliai Cambridge-ben volt,[1] a két kongresszus között pedig regionális konferenciákra került sor, ezek közül az európaiaknak 1971-ben Barcelona, 1972-ben Budapest, 1973-ban Oslo, 1974-ben Grenoble adott helyet.

Akárcsak az első kongresszusra, a harmadikra is mindenekelőtt a méretek nagysága és a tematika szerteágazó volta jellemző. A résztvevők száma mintegy 800, a benyújtott dolgozatok, illetve elhangzott előadások száma 500 volt. Összesen 120 szekcióülésre került sor, és minden napnak volt olyan időszaka, amikor a résztvevők 8–9 párhuzamosan folyó ülés között választhattak. Csupán négy olyan kiemelt ülés volt, az elnöki előadás és a Társaság hagyományos emlékülései, amellyel párhuzamosan nem volt más szekció. Ezek az előadások a következők voltak:

Elnöki előadás: *Z. Griliches* (Harvard egyetem): Az oktatás megtérülésének becslése.
Walras–Bowley emlékülés: *J. Dreze* (CORE Belgium): Elméleti megfontolások a munkás önigazgatásról és az irányításban való részvételről.
R. Frish emlékülés: *K. J. Arrow* (Harvard egyetem): Statisztikai információ az egyéni információval szemben a források allokációjánál.
Fisher–Schultz emlékülés: *D. W. Jorgenson* (Harvard egyetem): A gazdasági növekedés ökonometriai közelítése.

Nagyban emelte a Kongresszus jelentőségét, hogy azon először jelentek meg szovjet közgazdász-matematikusok. (Eddig csak a varsói és a budapesti regionális konferenciának voltak szovjet résztvevői, kongresszusnak még nem.) Részükre a rendezőség külön, az eredetileg meghirdetett programon túlmenően rendkívüli szekcióülést iktatott be, amelyen óriási volt az érdeklődés (noha párhuzamosan nyolc másik szekcióülés is folyt). Az ülés elnöke Koopmans professzor (Yale University) volt, a központi előadást Kantorovics akadémikus tartotta, így a hallgatóság egyszerre találkozhatott avval a két tudóssal, akik alig két hónapra rá a közgazdasági Nobel-díj tulajdonosai lettek. A szekció három előadása a szovjet gazdaság tervezésének matematikai módszereivel és matematikai apparátusával foglalkozott.

Az előadások többségét összehasonlítva az öt évvel ezelőtti kongresszus anyagával, bizonyos változási tendenciák figyelhetők meg. Cambridge-ben úgy tűnt, hogy a tematikát illetően igen szélesre tárult a kapu és ezen nemcsak a különböző matematikai modellek, formalizált megoldások stb. férnek be, hanem a verbális közelítések, az elsődlegesen nem matematikai jellegű témák is. Ennek Torontóban úgyszólván nyoma sem volt, annál inkább lehettünk tanúi a matematikai apparátus kiszélesedésének egyfelől, egyre kifinomultabbá válásának másfelől. Talán korai lenne egyfajta „ökonometriai befelé fordulásról" beszélni, a két kongresszus összehasonlítása mindenesetre ebbe az irányba mutat. Ez a körülmény másrészt erősebben világít meg egy másik tendenciát, ami viszont egyáltalán nem új: szűkös a módszerek gyakorlati alkalmazása. Nem arról van persze szó, hogy az előadások a valóságtól elvonatkoztatott, csupán a szerzők spekulatív világában létező tételekkel, összefüggésekkel foglalkoztak volna. (Bár ilyenekkel is lehetett

[1] Lásd az erről szóló beszámolókat: Szakolczai György–Hunyadi László: Szigma 1970. 4. sz. 313–318, Marton Á.–Szilágyi Gy.: Statisztikai Szemle 1970, 12. sz. 1310–1313.

találkozni, de nem ezek voltak a jellemzők.) Az sem állítható, hogy az ismertetett elméleti módszereket nem alkalmazták volna valóságos jelenségek vizsgálatánál, hiszen számos szerző illusztrálta mondanivalóját konkrét adatokon alapuló számításokkal. Igen ritka azonban a kutatások eredményeként tett megállapításnak a gazdaságirányításba, a fejlesztésbe vagy akár valamilyen részmegoldásba való átültetése. Azok az előadások, amelyek ilyenekről számoltak be, az átlagnál nagyobb érdeklődést keltettek. Ilyen pl. az ún. LINK: több ország (tőkés és szocialista országok is) modelljeinek összekapcsolása és összehasonlítása, mellyel többek közt *K. J. Johnson* és *L. Klein* (Pennsylvania egyetem) előadása foglalkozott, vagy a már említett szovjet tervezési modellek.

A kongresszus tematikai anyaga természetesen az említett tendenciák ellenére is igen változatos és szerteágazó volt. Ez a vizsgálatok tárgyának széles spektrumában éppen úgy megnyilvánul, mint a kutatás módszereiben és még inkább a témák megközelítésének jellegében. Ez a gazdagság azonban az eligazodást is megnehezíti, nemcsak a résztvevőknek, akiknek a sok párhuzamos szekcióülés között kellett naponta többször is választaniuk, hanem a szervezőknek is a benyújtott dolgozatok szekciók szerinti csoportosítása során, különösen pedig azoknak, akik valamilyen általános áttekintést próbálnak kapni és adni a kongresszusról. A szekciók témái — némi erőszak árán — a következő fő témacsoportok szerint tagolhatók: 1. Statisztikai módszerek az ökonometriában; 2. Allokáció és egyensúly; 3. Mikroökonómiai modellek; 4. Makroökonómia; Egyéb.

Az *ökonometria statisztikai módszerei közül* a következők emelhetők ki: becslési technikák, statisztikai tesztek, a szimultán egyenletek módszerei, az identifikációs és specifikációs problémák és az idősorelemzés. Az egyik tanulmány például a valószínűségi sűrűségfüggvények becslésére szolgáló módszereket hasonlította össze Monte Carlo eljárással. Több parametrikus és nem parametrikus eljárás egybevetése után arra az eredményre jutott, hogy a Pearson féle *maximum likelihood* módszeren alapuló eljárás adja a legjobb becslést.

Az allokációs és egyensúlyi témák csoportjába többek közt a következők sorolhatók: szervezetek és teamek, általános egyensúlyelmélet, monetáris egyensúly, várakozás-információ-bizonytalanság, játékelmélet, optimális irányítás, aggregáció, jóléti gazdaság és szociálpolitika, közösségi források allokációja. A legnagyobb hangsúlyt ezek közül talán a jóléti (welfare economics) kérdések kapták, amelyek napjainkban más nemzetközi gazdasági fórumokon is az érdeklődés előterében vannak. Néhány a jellegzetes kérdésfeltevések közül: Kifejezi-e a bruttó nemzeti termék a jólétet általában, illetve konstans jövedelemeloszlás mellett? Érvényesül-e a Pareto optimum a modern gazdaság körülményei között? Hogyan maximálható a szociális jólét az ízlések változása mellett?

A *mikroökonómia* családjában több hagyományos témát találunk: fogyasztás-elmélet, keresleti modellek, pénzpiac, beruházások, a vállalatok elmélete, emberi tőke, demográfiai modellek, munkaerő, jövedelemelosztás. Számos kísérlettel találkoztunk a fogyasztói döntések becslésére, a hagyományos keresleti elméletek újrafogalmazására, vagy a nem kevésbé hagyományos hasznossági függvények új elemekkel való gazdagítására, különösen bizonyos megkötések (pl. a helyettesítési elaszticitás nagyságára vonatkozó megkötés) feloldására. A beruházások és tőkekereslet vizsgálatánál a technikai változások figyelembevétele képezi a fő problémát. Mivel a modellek egy része a kvantifikálás nehézségei miatt szívesen hagyja figyelmen kívül ezt a tényezőt, felmerül a kérdés, hogy ez milyen feltételek mellett tehető meg a torzítás veszélye nélkül (pl. munka növelő technikai fejlődés esetén).

A *makroökonómia* témái között találjuk a nagyszámú makromodell mellett a termelési függvényeket, a nemzetközi gazdasági kérdéseket, az energia problémát, a növekedési elméleteket és modelleket, valamint az infláció témáját. A jelenlegi világgazdasági helyzetben különös érdeklődésre tarthattak számot a nemzetközi gazdasági kapcsolatokkal foglalkozó tanulmányok, és méginkább az infláció problémái.

Hasonlóan a Társaság több kongresszusához külön szekcióban számos tanulmány foglalkozott a nemzetközi gazdasági problémákkal, így többek között (főként az Egyesült Államok szemszögéből) a külföldi beruházások, tőkemozgások hatékonyságának problémáival bizonytalanságokat feltételezve. Vizsgálták az Egyesült Államokban a beruházott külföldi tőkék problémáit is, valamint tőkemozgások problémáit egy kis ország, Hollandia esetében. Egy tanulmány az egész nemzetközi kereskedelem összetételét és irányait vizsgálta egy átfogó áramlási modell keretében. A szerző a szokásos kereslete és áralakuláson alapuló áramlási modelleken megkísérelt túllépni, bevezetve a kereskedelmi ellenállások, akadályok tényezőit is. Így pl.: korlátozó tényezőként szerepeltek a modellekben az exportáló ország termelési kapacitásai, az egymással kapcsolatban levő országok közötti szállítási költségek és egyéb, a távolsággal kapcsolatos akadályozó tényezők, valamint az országokon belüli szállítási, elosztási költségek. A modell két változatát ismertették, az egyikben csak az export és import egésze szerepelt, a másodikban árufőcsoportok is. Az első lépésként végrehajtott elemzés az USA 1970. évi export adataiból indult ki.

Egy, az előbbihez hasonló témájú tanulmány a nemzetközi kereskedelem áramlásának olyan modelljét dolgozta ki, amelyben egyidejűleg nyolc iparilag fejlett tőkés ország összes exportja szerepel a kereslet és kínálat függvényében, az 1955—70-es időszakra vonatkozóan. Ebben a modellben az volt az új, hogy a keresleti függvények mellett a kínálati tényezőket figyelembe vette. Foglalkozott néhány tanulmány a nemzetközi gazdasági egyensúly pénzügyi problémáival, továbbfejlesztve a csupán az áruforgalom pénzügyi egyensúlyát feltételező modelleket.

Az árfolyamok rögzítésének, illetve rugalmasabb változtatásának problémái is több előadás témáját alkották. Mindegyik figyelembe vette a nemzetközi és a hazai infláció ütemét, illetve annak különbségét. Szerepelt a nemzetközi kereskedelemmel kapcsolatban néhány elméleti jellegű modell is, felhasználva a matematikai módszereket mint pl.: a játékelmélet, valamint az általános növekedési elméletek eszköztárát. Végül külön szekció ülés foglalkozott az egyes országok külkereskedelmi kapcsolatainak bizonyos aspektusait leíró ökonometriai modellekkel, elemzésekkel.

Feltűnt, hogy a nemzetközi kereskedelemmel foglalkozó előadások a korábbi konferenciákhoz hasonlóan a múltra vonatkozó statisztikákat, feltételeket használták. Az utóbbi két-három évben kibontakozott világméretű infláció és gazdasági válság problémája, és a megváltozott feltételek hatása a megszokott modellekre szinte egyáltalán nem szerepelt, sőt az inflációnak az árfolyamokkal kapcsolatos problémáit is a korábbi évek kisebb ütemű inflációjának keretei között vizsgálták. Bár az energiaválság közgazdasági problémájával külön szekció foglalkozott, mégis az volt az érzésünk, hogy a jelenlegi, már bizonyos ideje meglevő világgazdasági problémák nem tükröződtek kellően ezekben az előadásokban.

Más témákkal, pl.: a kereslet elemzéssel, fogyasztási elméletekkel kapcsolatban, és egy önálló szekcióban már több visszhangot vert a jelenlegi inflációval terhes gazdasági helyzet. A korábbi kongresszushoz viszonyítva nagyobb teret kaptak az árindexek módszertani kérdései és az inflációval kapcsolatos áralakulás és bérpolitika stb. vizsgálatai. Egy fél napos szekció foglalkozott az áremelkedés és a növekvő bérek problémáival, összefüggéseivel, megoldásokat keresve a béremelkedés infláció-gyorsító hatásának elkerülésére. Az elméleti modellek szerkesztői is érezték, hogy ez a probléma a kapitalista gazdaság keretei között szinte megoldhatatlan és olyan látszatmegoldásokat is javasoltak, amelyek végeredményben egyszerűen a bérnövekedések lelassulását célozták. Kötelező megtakarítások, későbbi visszatérítendő adóemelések stb., amelyek közül nem egy a II. világháború során és után egyes országokban alkalmazott módszerekhez volt hasonló, szerepeltek e javaslatok között.

Az infláció mértékét jelző árindexek módszertani kérdései is az érdeklődés középpontjában voltak. Három-négy előadás is foglalkozott olyan témákkal, amelyek az átlagos árindexek szektoronkénti, illetve fogyasztónkénti dezagregálásának segítségével igyekezett nagyon részletes képet adni elemzési célra. A hasznosság fogalmának alkalmazása az árindex súlyrendszerébe is témája volt egy előadásnak. Az élelmiszerek áralakulásának vizsgálatára javasolták az állandó fogyasztói kosár helyett egy optimálisnak tekintett hasznossági értékelés rendszerének alkalmazását súlyrendszerként. Az elvi kiindulópontot helyesnek feltételezve sem könnyen megoldható probléma ez, de a nagy teljesítményű számológépek ilyen bonyolult számításokat is lehetővé tesznek.

Végül az *egyéb* kérdések vegyes csoportja a történeti vizsgálatok ökonometriai módszereit, az oktatási és egészségügyi kérdéseket, a regionális gazdaság és az ágazati gazdaságok témáit öleli fel.

A Világkongresszus magyar résztvevői a következő előadásokkal szerepeltek:

Forgó Ferenc: Egész számú (programozási) problémák árnyékárai és dekompozíciós eljárásai.

Halabuk László és *H. T. Shapiro* (Michigan University): Makroökonómiai modellek a szocialista és nem szocialista gazdaságokban — összehasonlító tanulmány.

Martos Béla és *Wuu-Long Lin* (FAO): Hosszútávú társadalmi-gazdasági szimuláció.

Szép Jenő: Egyensúlyi rendszerek.

Szilágyi György: Nemzetközi átlagárak és árrendszerek nemzetközi összehasonlításban.

Bod Péter elnöke volt a „Programozási kérdések és módszerek" című szekciónak és felkért korreferens a gazdasági termeléssel foglalkozó szekcióban.

MARTON ÁDÁM—SZILÁGYI GYÖRGY

Tervezési modellrendszer Bulgáriában

A Bolgár Népköztársaságban a népgazdasági tervezés elméletében és gyakorlatában néhány esztendeje egyre nagyobb figyelem irányul a matematikai-közgazdasági modellek és módszerek alkalmazására.

A makrogazdasági modellezéssel foglalkozó intézmények közül jelentőségében kiemelkedik az Országos Tervhivatal Tudományos Központja, mely a társadalmi-gazdasági fejlődés tervezésével, matematikai-közgazdasági modellezésével és prognosztizálásával foglalkozik. A Központban kidolgozott — ma már egységes tervezési modellrendszert alkotó — matematikai-közgazdasági modellek különösen eredményesen szolgálják a népgazdasági tervezési feladatok megoldását.

E modellek felhasználásának egyik legfontosabb új vonása, hogy egyetlen globális tervezési modell helyett a gazdasági fejlődést sokoldalúan tükröző olyan modellrendszer kialakítása áll előtérben, amely összhangban van a tervezés-módszertani előírásokkal és a gazdaságirányítási rendszerrel. Így a modellrendszer biztosítja a különböző tervezési szinteken kidolgozott mutatószámok összhangját. A rendszer a prognózis-készítés, valamint a hosszú és a középtávú tervezés céljait szolgálja.

Az 1976—90 időszakra szóló prognózisok és tervek kidolgozását megalapozó modellrendszer a következő három részből áll:

1. Egyszektoros makrogazdasági modell
2. Többszektoros mérlegmodellek
3. Többszektoros optimalizálási modell.

A modellrendszer két dinamikus és néhány statikus modellből áll. Mivel a modellek dinamizálása információs, programozási és műszaki nehézségekbe ütközik, a modellek többsége statikus. A modellrendszer egy másik sajátossága az, hogy a mérlegmodelleken kívül egy optimalizálási modellt is tartalmaz. Miközben a mérlegmodellek segítségével biztosítható a források és a szükségletek egyensúlya, az optimalizálási modell arra szolgál, hogy a lehetséges mérlegek közül azt a változatot válassza ki, amely a legjobban megfelel a megadott célfüggvénynek.

A rendszerre jellemző továbbá az is, hogy a tervek számítási fázisai meghatározott sorrendben követik egymást. Ez a követelmény annak a kifejezője, hogy egyfelől az egyszektoros modellből kapott információ egy része szükséges input-információnak bizonyul a többszektoros mérlegmodellek számára, másfelől a többszektoros modellekből kapott adatok az optimalizálási modell bemenő adataivá válnak.

Első egyszektoros modell

Az egyszektoros makrogazdasági modell egyik célja az, hogy legáltalánosabb formában jellemezze a népgazdaság fejlődését, az ún. „terv előtti tanulmányozás" fázisában, a másik pedig az, hogy biztosítsa a többszektoros modellekhez szükséges információt.

A Tudományos Központban két egyszektoros modellt alakítottak ki. Mindkettő diszkrét-dinamikus és a tervidőszak minden évében leírja az újratermelési folyamatot. A modellezés folyamata összekapcsolja az újratermelés állapotát két egymást követő évben. A mutatószámok évenkénti dinamikája kifejezésre jut az egzogén paraméterek változásában, valamint a késleltetett endogén változókban (pl. álló- és forgóalapok, befejezetlen építés stb.).

A két modell között az a lényeges különbség, hogy amíg az első adottnak tekinti a nemzeti jövedelem évenkénti ütemét, a másodikban a nemzeti jövedelem üteme a modell outputja, a megadott paraméter pedig a „növekedési állóeszköz-igényesség".[1]

Az első aggregált makrogazdasági modell két modellcsoportból épül fel: az egyik nyolc alapvető modellből, a másik négy kiegészítő modellből áll.[2] Az alapvető modellek meg-

[1] Növekedési állóeszköz-igényesség = a termelő állóeszközök növekedésének és a nemzeti jövedelem növekedésének az aránya.

[2] Lásd: Kürcsiev, I. „A népgazdasági fejlődés prognosztizálásának matematikai-közgazdasági makromodellje". A Tudományos Központ közleményei, 2. kötet. 1974. Szófia.

oldása kötelező és az eredményként kapott adatok a kiegészítő modellek inputjául szolgálnak. A négy kiegészítő modellel — a módszertani előírások szerint — nem kötelező számolni és a segítségükkel kapott adatok nem szerepelnek a többi modellhez szükséges információk között.

Az aggregált modell alapját a következő kétirányú összefüggés képezi: megtermelt nemzeti jövedelem — erőforrások — megtermelt nemzeti jövedelem. A nyolc alapvető modell ennek az összefüggésnek az első részét formalizálja.

Az alapvető modellek a következők:

1. A nemzeti jövedelem dinamikája. A nemzeti jövedelem megadott növekedési üteme alapján a modell kiszámítja a tervidőszak egyes éveire a nemzeti jövedelem, valamint a bruttó nemzeti termelés volumenét.

2. A külgazdasági viszonyok modellje. Segítségével számítható az export és import évenkénti volumene, a valutaegyenleg, a külkereskedelem bruttó termelése és anyagi ráfordításai.

3. A nemzeti jövedelem elosztása. A modell outputja: a nemzeti jövedelem tartaléka és vesztesége, a felhalmozási alap, a lakosság fogyasztási alapja és a lakosság elsődleges jövedelmei.

4. A beruházások forrásainak tervezési modellje. Kiszámítja az amortizáció és a felújítások volumenét, a selejtezésből származó pénzforrásokat.

5. A beruházások és a befejezetlen építés modellje. Az építés, a gépek és berendezések stb. bontásában részletezi a beruházásokat és a befejezetlen építés változását.

6. A működésbe lépő állóalapok modellje. Bemutatja a beruházások anyagi-műszaki összetétele és a működésbe lépő állóalapok struktúrája közötti összefüggést.

7. A meglevő forgóalapok és alakulásuk. E modell részletes bontásban kiszámítja a termelő és a nem-termelő szférában levő forgóalapokat, a forgóalapok változását és veszteségét.

8. Az állóalapok állományának és állományváltozásának modellje. Formalizálja az állóalapok kiselejtezésből és veszteségből származó változását, valamint az állóalapok tartalékra fordított részét.

A kiegészítő alrendszer a következő négy modellből áll:

1. Más országokkal való hitelviszonyok alakulását vizsgáló modell.
2. A beruházáshoz szükséges importgépek és berendezések modellje.
3. Az anyagi tartalékok modellje.
4. A lakóterület és lakásépítés modellje.

Az aggregált modellben szereplő változók összefüggéseit strukturális egyenletek, azonosságok és strukturális mátrixok ábrázolják. A strukturális egyenletek formalizálják a változók közötti „ok—okozati" kapcsolatokat. A mátrixok azoknak a paramétereknek az összefüggéseit mutatják be, amelyek változásának valószínűsége jellegüket és gazdasági tartalmukat tekintve a legkisebb.

Második egyszektoros modell

A második egyszektoros modellhez szükséges információ két részre osztható. Az egyik rész jellemzi az újratermelési folyamat állapotát a bázis év végén, pl. a megtermelt nemzeti jövedelmet, a termelő állóalapokat, a termelő forgóalapokat, a befejezetlen építést stb.

A bázisévi információ mellett a modellhez szükséges információk másik része azokat az adatokat tartalmazza, amelyek az újratermelési folyamat jövőbeli állapotát jellemzik. Ezen adatok egy részét a volumenadatok teszik ki. Ide tartozik a demográfiai prognózisok segítségével kapott népesség száma, valamint a termelő és a nem-termelő szférában foglalkoztatott munkaerő létszáma. A jövőbeli fejlődésre vonatkozó többi paraméter viszonyszám. Ilyenek például: a felhalmozási ráta és a felhalmozási struktúra, az amortizációs kulcsok, az ún. növekedési álló- és forgóeszköz-igényesség,[3] a beruházások anyagi-műszaki összetétele, a befejezetlen építés változása, a kiselejtezési paraméterek, a külkereskedelem pénzügyi eredményeinek mutatószámai stb.

[3] Ua. mint a növekedési állóalap-igényesség, de a forgóalapokra vonatkozóan.

Az említett paraméterek alapján a modellel meghatározható a nemzeti jövedelem növekedése egy adott évben. A számítás kiinduló pontja a nemzeti jövedelem növekedésének összefüggése a termelő állóalapokkal és a növekedési állóeszköz-igényességgel.[4] Ezután levezethetők a népgazdaság fejlődését jellemző egyéb mutatók is, pl. a nemzeti jövedelem elosztása és felhasználása, a beruházások volumene és forrásai, a munkatermelékenység színvonala, az alapok képzése stb. Az induló év alapján levezetett származékos mutatók fontos információt nyújtanak a nemzeti jövedelem növekedésének meghatározásához a következő évben. Így a számítási folyamat megy tovább a bemutatott sorrendben.

A két egyszektoros modell közül az első közelebb áll a jelenlegi bolgár tervezési gyakorlathoz. Alkalmazhatóságát azonban nagyon megnehezíti, hogy a modell a célhoz képest túl bonyolult, outputjában olyan mutatószámok is szerepelnek, melyek kiszámítása ebben a tervezési fázisban nem lenne szükséges. A mutatók nagy száma, valamint az alapok gépekre és berendezésekre való bontása csak növeli a modell méretét, programozási és kiszámítási nehézségeit.

Ami a második modellt illeti, szerzője igyekszik továbbfejleszteni az első egyszektoros modellt, kiindulva abból, hogy egyrészt helyesebb, ha a nemzeti jövedelem évenkénti üteme a modell outputja, másrészt ebben a fázisban célszerű magasabb aggregáltsági fokú modellel dolgozni (bár itt is vitatható az alapok gépekre és berendezésekre való bontásának a szükségessége).

Többszektoros mérlegmodellek

A többszektoros mérlegmodellek az egyszektoros modellből eredményként kapott szintetikus népgazdasági mutatószámokat ágazatonként dezaggregálják és ilymódon jellemzik a termelő és a nem-termelő szféra fejlődését.

A mérlegmodellek horizontális és vertikális értelemben (ágazaton belül és ágazatok között) egyensúlyt hoznak létre, miközben megteremtik az egyszektoros modellből kapott mutatókkal való egyensúlyt is.

A mérlegmodellek természetesen olyan mutatókat is meghatároznak, amelyek nem vezethetők le az egyszektoros modellből, pl. a bruttó termelés volumenét, a szakmunkások és a szakemberek létszámát (szakma szerinti bontásban) stb.

A modellrendszerben a következő három többszektoros mérlegmodell szerepel:

A) *Az ágazati kapcsolatok statikus mérlege*

A modell az egyszektoros modellből kapott eredményeket dezaggregálja. A bruttó termelés volumenéhez előzetesen kell meghatározni a végső felhasználást és a közvetlen ráfordítások koefficienseit. A végső felhasználást ágazati bontásban az egyszektoros makrogazdasági modell és az ágazati struktúrát jellemző változási tendenciák alapján kaphatjuk meg, míg a közvetlen ráfordítások mátrixát speciális prognózisok segítségével dolgozzák ki.

B) *A beruházások, az álló- és a forgóalapok többszektoros modellje*

A modell dinamikus, a beruházások volumene egy adott évben függ az előző évi befejezetlen építés és az állóalapok volumenétől.

Induló információként a modellben a következő három mutatócsoport szerepel:

a) koefficiensek, amelyek jellemzik ágazati bontásban az állóeszköz-igényesség jövőbeli változását, az állóalapok felújítását, a befejezetlen építés színvonalát és a beruházások anyagi-műszaki összetételét.

b) statisztikai adatok vagy becslések a bázisévben elért bruttó termelés, az állóalapok és a befejezetlen építés jellemzésére, ágazati bontásban;

c) a statikus ágazati kapcsolati mérlegből kapott adatok a bruttó termelés volumenéről a tervidőszak egyes éveiben.

[4] Najdenov, N.: „Modellrendszer a gazdasági növekedés jellemzésére." A Tudományos Központ közleményei, 1. kötet, 1973. Szófia.

A modell egyenletei és a fent említett információk alapján kiszámítható az állóalapok növekedése, az egyes ágazatokban a belépő és kiselejtezett állóalapok, a beruházások volumene, a befejezetlen építés állománya, az amortizáció, a felújítások és a forgóalapok.

A dezaggregált modellben és az egyszektoros modellben alkalmazott számítási módszer sok hasonlóságot mutat. Két jelentős különbség azonban fellelhető. Először, az egyszektoros modellben a növekedési álló- és forgóeszköz-igényességi koefficienseket a nemzeti jövedelemhez viszonyítva határozzuk meg, míg a többszektoros dezaggregált modellben — az adott ágazat bruttó termeléséhez viszonyítva. Másodszor, az egyszektoros modellben a nemzeti jövedelem növekedése a modell outputja,[5] míg a többszektoros modellben a bruttó termelés növekedése a statikus ÁKM-ből kapott inputadat.

A modellel kapott eredményeknek az egyszektoros és az ÁKM-modellekből kapott eredményekkel való azonosságát iteratív számításokkal biztosítják.

C) *Többszektoros modell a foglalkoztatott munkaerő meghatározására*

A modell mérlegtípusú és a népgazdaságban foglalkoztatott munkaerő struktúráját ágazati bontásban határozza meg. E cél eléréséhez a modell felhasználja az ágazati kapcsolatok mérlegéből származó, bruttó termelésre vonatkozó adatokat és a munkatermelékenységet ágazati bontásban kifejező előzetes információt. A modell lehetőséget nyújt a lakosság elsődleges jövedelmeinek meghatározására is.

E modellel és a fent bemutatott többszektoros modellekkel az anyagi termelés más elosztási folyamatai is jellemezhetők. Az ÁKM, valamint a beruházások és az álló- és forgóalapok modellje bázist adnak az anyagi ráfordítások színvonalának meghatározásához. A lakosság elsődleges jövedelmeinek meghatározása pedig alapul szolgál az önköltségnek és a vállalatok elsődleges jövedelmeinek meghatározásához.

A fent említett mutatókon kívül a modell információt ad az ágazatonként foglalkoztatott munkaerő szakma és képzettség szerinti megoszlásáról is.

Többszektoros optimalizálási modell

A modell célja az, hogy a fenti mérlegmodellek segítségével kidolgozott prognózisokat és terveket optimalizálja. Ehhez azonban a terveken változtatásokat kell végrehajtani azzal a céllal, hogy a mutatórendszer szabadságfokát megnöveljük és így a variánsok közötti választás lehetővé váljon. Mivel a modellekben magas a mutatók aggregáltsági foka, fontos, hogy megjelenjenek a végső felhasználás elemeiben lehetséges strukturális változások. Ezért a modell feladata az, hogy átfogja a lakossági és a közületi fogyasztásban, az exportban és az importban lezajló változásokat.

Így a modell alapvető célfüggvénye a lakossági és a közületi fogyasztás maximalizálása. Számítások végezhetők az alábbi kiegészítő célfüggvények szerint is:

a) a bruttó termelés maximalizálása,
b) a nemzeti jövedelem maximalizálása;
c) az önköltség minimalizálása;
d) az exportból származó bevétel maximalizálása;
e) a devizaegyenleg maximalizálása stb.

A modell főbb korlátozó feltételei a következők:

a) a források és a termelés ágazatok közti elosztása;
b) az igénybevehető álló- és forgóalapok (befejezetlen építés nélküli) állománya;
c) a termelő szférában foglalkoztatott munkaerő létszáma;
d) export- és importkorlátok;
e) a lakossági és a közületi fogyasztás minimális szintje (csak abban az esetben, ha számításokat végzünk a kiegészítő célfüggvények szerint is).

A bolgár közgazdászok és matematikusok tovább dolgoznak a tervezési modellek fejlesztésén, gyakorlati alkalmazásukon. A munkálatok három fő iránya a következő:

— A makrogazdasági modellek továbbfejlesztése. Az egyszektoros makromodell mellett kísérletek folynak, hogy a két- és háromszektoros modellek is éretté váljanak az alkalmazásra. A kétszektoros modell két csoportba sorolja a népgazdaság ágazatait:

[5] Ez csak a második egyszektoros modellre vonatkozik.

a gépipar képezi az egyik csoportot, a többi ágazat pedig a másikat. A háromszektoros modell más csoportosítást alkalmaz: a termékeket munkatárgyakra, munkaeszközökre és fogyasztási cikkekre bontja.

— Az ágazati modellek továbbfejlesztése. Ennek során az ágazati modellek korlátozó feltételeiként fel kívánják használni az egyszektoros modellből kapott eredményeket és az egyszektoros, valamint a többszektoros modellek kölcsönhatásait is vizsgálni kívánják. Mind ez ideig a dezaggregálás a népgazdaság ágazatai és az ipar ágazatai szerint valósult meg. A további fejlesztés új iránya, hogy e dezaggregálást az ún. „komplexumok" szerint is el kívánják végezni. (A „komplexum" viszonylag új fogalom a bolgár gazdaságban, illetve a tervezési gyakorlatban: azt jelenti, hogy a tervezés egy tágabb értelmű bontásban megy végbe a kitűzött célok komplexumként való kezelése alapján. Ilyenek például az energiai, a közlekedési, az agrár-ipari, a kohó- és gépipari komplexumok stb.)

— Az optimalizálási modellek továbbfejlesztése. Ennek során különböző típusú optimalizálási modelleket dolgoznak ki. Ilyenek például a dinamikus mérlegmodell, az ÁKM-re épülő optimalizáló modell, valamint a termelési-szállítási allokációs modellek.

Popova Tinka

Az IFIP VII. konferenciája

1975. szeptember 8—13 között Nizzában (Franciaország) rendezték meg az IFIP VII. konferenciáját.[1] A konferencia központi témáját az optimálási technikák és modellek képezték.

A konferencia a következő *szekciókban* folytatta munkáját:

Orvostudomány — Biológia
Emberi környezet (Energia, városi rendszerek, vízszennyeződés, világmodellek)
Operációkutatás
Játékmodellek
Számítástechnikai módszerek
Matematikai programozás
Optimális kontroll (Determinisztikus és sztochasztikus)
Software problémák.

A mintegy 220 résztvevő összesen 125 előadást hallgatott meg a fenti témakörökben. A felsorolásból is kitűnik, hogy az előadások számos, sokszor egymástól lényegesen eltérő tudományterületet érintettek. Közös vonásuk az optimálási modellek alkalmazása volt. Az optimálási modellek terén is hasonló heterogenitás tükröződött a konferencia programján (optimális kontroll, dinamikus programozás, nem lineáris programozás, játékelmélet), így azt mondhatjuk, hogy a konferencia elsősorban a látókör bővítésére, a rokon területek problémáinak megismerésére volt alkalmas és kevéssé az egyes szűkebb területeken elért újabb tudományos eredmények megismerésére. A konferencia szervezése is elsősorban a látókör bővítését tartotta szem előtt, a 15 perces előadási idő és az azt követő 3—5 perces vita alkalmas volt a rokonterületek problémáinak, a kutatás irányainak megismerésére, de rövidnek bizonyult a részletkérdések sokoldalú megvitatásához.

Általánosságban megállapítható, hogy a matematikai modellek építése, az optimalizáló eljárások alkalmazása egyre gyorsuló ütemben hódít teret mind a természet-, mind pedig a társadalomtudományokban. Különösen figyelemre méltó az ilyen modellek alkalmazása a gyors gazdasági fejlődés által felvetett és viszonylag rövid történeti múltra visszatekintő problémák kezelése során (szennyeződés, energia-szükséglet, víz-szükséglet, fejlődő országok problémái).

Általánosságban az is elmondható, hogy a konferenciának nem volt „uralkodó" témája, kiemelkedő új irányzatok sem mutatkoztak. Ebből kiindulva a továbbiakban

[1] Az IFIP tevékenységéről lásd Kádár I.: Az IFIP tevékenysége, Szigma, 1975. No. 1. 77—79. p.

részletesebben néhány előadás fő gondolatait foglaljuk össze. Az érintett előadásokat a hazai kutatásokat és érdeklődést figyelembevéve válogattuk ki.[2]

G. Fronza—A. Karlin—S. Rinaldi (Olaszország): „Számítógépi algoritmus egy tározó szabályozási feladat megoldására egymásnak ellentmondó célfüggvények mellett" c. előadása egy olyan víztározó szabályozási feladattal foglalkozik, amelyben a szabályozás során egyaránt figyelembe kell venni a tározó által táplált csatorna mentén elhelyezkedő felhasználók és a tározó mentén élő lakosság igényeit. A tározót naponként szabályozzák és a működési szabályoknak egy adott osztálya jöhet szóba. A szerzők a feladatot egy kétszemélyes játék formájában fogalmazták meg és megmutatták, hogy a felhasználók célfüggvényeire és a korlátozó feltételekre vonatkozó meglehetősen általános feltételek mellett a játéknak egyetlen egyensúly pontja van. Bemutattak egy hatékony keresési eljárást is, amely lehetővé teszi az egyensúly pont adott pontosságú meghatározását.

F. X. Litt és H. de Smet (Belgium): „Egy tó szennyeződésének optimális szabályozása" c. előadása egy olyan modellt ismertet, amely a tisztítás optimális mértékét a tisztítás költségeinek és a szennyeződés okozta környezeti ártalmak mérőszámának összegezésével kapott — rögzített időszakra jutó — költség minimalizálásával határozza meg, a megfelelő optimális kontroll feladat megoldása révén. Két érdekesebb eredmény: 1. ha a környezeti károsodás határköltsége állandó, az optimális politika nem függ a szennyeződés kezdeti szintjétől; 2. a véges időszakra vonatkozó optimális politika mindig legalább olyan mértékű szennyeződést enged meg, mint a végtelen időszakot figyelembe vevő modell.

F. J. Gould (USA): „Egy világrendszer modell" c. előadása olyan modellt ismertet, amely az élelmiszer, energia, műtrágya és népesség változók rövid- és hosszútávú növekedését és egyensúlyát elemzi és így különböző fejlesztési politikák vizsgálatára alkalmas. A modell a világot részletes területi bontásban írja le. Minden egyes területi egységen minden időszakban két egzogén változó (a beruházás és a népesség) határozza meg a műtrágya, az energia, és a művelhető föld kínálatát, valamint a rendelkezésre álló munkaerőt. Az egyes régiók élelmiszer, műtrágya-, energia- és munkaerő szükségletei az árak, a népesség és a jövedelem függvényei. Egy területi egyensúlyi modell határozza meg az egyes régiók export és import igényét és az árakat, ezeken keresztül pedig a jövedelmet és a mezőgazdaság termelő fogyasztását, ami az időjárással együtt megadja az élelmiszer termelést. Az előadás csak a modell szerkezetét ismertette, a kritikus kérdésnek tekinthető paraméter becslésére nem tért ki.

R. C. W. Strijbos (Hollandia): „Népesség tervezés, egy optimális szabályozási feladat" c. előadása egy szokatlan, bár egyszerű lineáris programozási alkalmazást ismertet. A népesség korösszetételének időbeli alakulása egy elsőfokú parciális differenciált egyenlettel írható le. A vizsgált feladat: hogyan lehet a népesség életkor összetételét a lehető leggyorsabban egy kívánt életkor összetételre módosítani. A szabályozási változó az időegységre jutó születések száma, míg a feltételeknek azt kell biztosítaniok, hogy az átmeneti időszakban ne alakuljon gazdasági vagy egyéb szempontból elfogadhatatlan korösszetétel. A folytonos esetben optimális kontroll feladat egy lineáris programozási feladatként fogalmazható meg az életkor és az időfüggvények egész értékű függvényekkel való helyettesítésével, amelynek optimális megoldása megegyezik a folytonos változat optimális megoldásával.

D. G. Luenberger (USA): „Implicit dinamikus egyenletek" c. előadásában azzal a kérdéssel foglalkozott, mikor lehet az implicit formában megadott dinamikus egyenleteket — olyan egyenleteket, amelyek különböző időszakokra vonatkozó változókat tartalmaznak — állapot egyenleteket tartalmazó rendszerré transzformálni.

J. Denel (Franciaország): „Feltétel nélküli optimalizálás" c. előadásában egy olyan algoritmust vizsgált egy folytonosan differenciálható függvény optimalizálására, amelyben az egyes lépésekben választott irány egy lineáris programozási feladat optimális megoldása, amelynek korlátozó feltételei a függvény linearizálásával kaphatóak. Az egyes lépések során adódó LP feladatok csak egy újabb feltétellel (a függvény egy újabb linearizálása révén) bővülnek, így ezek megoldására a duális szimplex módszer rendkívül kedvezően használható. Az eljárás a függvény valamely stacionárius pontjához konvergál, a konvergencia a szokásos feltételek esetén másodrendű.

A. Drud (Dánia): „Optimalizálás nagyméretű, részben nemlineáris rendszerekben" c. előadása nagyméretű ökonometriai modellek optimalizálására alkalmas módszert ismertetett, amely Abadie általánosított redukált gradiens módszerének kiterjesztése. A módszer kihasználja, hogy az ökonometriai modellekben az egyes feltételek általában csak

[2] A konferencia teljes anyaga a Springer Verlag kiadásában könyvalakban megjelenik várhatóan 1976-ban.

kevés változót érintenek és így a feltételek Jacobi matrixa sok zérót tartalmaz, hogy sok feltétel lineáris, valamint hogy egyenlőséget és egyenlőtlenséget előíró feltételek egyaránt előfordulnak.

H. Mukai és E. Polak (USA): „Redukált gradiens módszerek vezérléséről" c. előadása egy olyan algoritmust ismertetett, amely olyan eljárásokat is tartalmaz, amelyek biztosítják a belső iterációk automatikus befejezését. A korábbiakban ilyen esetekben empirikus módon kellett eljárni és szükség volt az iterációk emberi nyomonkövetésére.

B. Nicoletti—F. Pezzell—G. Raiconi (Olaszország): „A beruházások optimális allokációja egy kétkörzetes gazdaságban". Az előadás az olasz gazdaság konkrét problémájából indult ki: hogyan lehet a rendelkezésre álló beruházási kereteket úgy elosztani, hogy a fejlettebb észak és az elmaradottabb dél közötti különbség csökkenjen mindkét rész egyidejű növekedése mellett. A probléma alkalmas hipotézisek mellett egy bilineáris folytonos dinamikus rendszerként kezelhető, amelyre az optimálás elmélete alkalmazható. Az előadás a modell *n* számú régióra való kiterjesztéséhez és a megoldás stabilitásának elemzéséhez is adott további ötleteket.

A konferencia nemzetközi programbizottságában Magyarországot *Nyiri Géza* (INFELOR) képviselte. A konferencia munkájában részt vettek: *Bakó András* (MTA SZTAKI), *Hámori Miklós* (Egyetemi Számítóközpont), *Kovács Álmos* (INFELOR), *Ligeti István* (OT Tervgazdasági Intézet), *Pongrácz Tibor* (OSZI), *Sivák József* (OT Tervgazdasági Intézet) és *Stahl János* (INFELOR).

A magyar résztvevők két előadást tartottak. *Kovács Álmos* és *Stahl János* a matematikai programozási szekcióban tartott előadást. Előadásukban olyan nagyméretű modellt ismertettek, amelyben a célfüggvény a nyereség és a bér + eszköz hányadosának maximalizálása. A modell dekompozíciós algoritmus segítségével megoldható, az eljárásnak szemléletes közgazdasági értelmezés adható. *Ligeti István* és *Sivák József* az operációkutatási szekcióban tartott előadást. Az előadás a Kornai—Martos-féle vegetatív szabályozási modell működőképességének olyan bizonyítását mutatta be, ahol a működőképességet az energia-függvény értékének alkalmas választása biztosítja, másfelől az előadók e modell kapcsán értelmezték a fizikai rezonanciával analóg közgazdasági jelenségeket.

Kovács Álmos—Sivák József

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója — Műszaki szerkesztő: Agócs András
A kézirat nyomdába érkezett: 1976. I. 7. — Terjedelem: 7,7 (A/5) ív
76.2654 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

CONTENTS

BOOK REVIEWS

SCIENTIFIC LIFE

СОДЕРЖАНИЕ

О КНИГАХ

НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ

Ára: 12,– Ft
Előfizetés egy évre: 40,– Ft

INDEX: 26793

TARTALOM

KÖNYVEKRŐL

TUDOMÁNYOS ÉLET

1828

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST