SZIGMA

Matematikai közgazdasági folyóirat

A Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai-Közgazdasági Szakosztályának lapja

*

E szám szerzői:

Benedikt Vera, az INFELOR Rendszertechnikai Vállalat munkatársa, Dr. Bod Péter, kandidátus, az MTA Matematikai Kutató Intézete tudományos főmunkatársa, Dr. Fényes Tamás, kandidátus, az MTA Matematikai Kutató Intézete tudományos főmunkatársa, Filep György, a SZÁMGÉP főosztályvezetője, Dr. Forgó Ferenc, kandidátus, a Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem Matematikai Tanszékének adjunktusa, Dr. Kádár Iván, kandidátus, a Magyar Nemzeti Bank főosztályvezetője, Dr. Móczár József, a Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem Népgazdaság Tervezése Tanszékének adjunktusa, Paizs János, a Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem Népgazdaság Tervezése Tanszékének adjunktusa, Rimler Judit, kandidátus, az MTA Közgazdaságtudományi Intézetének tudományos munkatársa, Dr. Sári József, a Magyar Nemzeti Bank osztályvezetője, Stahl János, kandidátus, az INFELOR Rendszertechnikai Vállalat munkatársa.

Szerkesztőség: 1051 Budapest V., Münnich F. u. 7.

Terjeszti a Magyar Posta. Előfizethető bármely postahivatalnál, a kézbesítőknél, a Posta hírlapüzleteiben és a Posta Központi Hírlap Irodánál (KHI. 1900 Budapest V., József nádor tér 1.) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI. 215–96162 pénzforgalmi jelzőszámára. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest V., Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban

Előfizethető és példányonként megvásárolható: az AKADÉMIAI KIADÓ-nál, 1363 Budapest V. Alkotmány u. 21. Telefon: 111–010. Pénzforgalmi jelzőszámunk: 215–11488., és az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLT-ban, 1368 Budapest V., Váci u. 22. Telefon: 185–612. Előfizetési díj egy évre: 40,–Ft

Fényes Tamás – Sári József

Az országos hitelmérleg egy pénzegyensúlyi modellje

A szocialista tervgazdálkodás feltételei között a pénz nélkülözhetetlen a termelési és fogyasztási javak forgalmának lebonyolításában, a személyes és a társadalmi tiszta jövedelem elosztásában és újraelosztásában. Ezeket a nagy, népgazdasági szinten is összegezhető folyamatokat kívánjuk sokoldalúan elemezni, hogy feltárhassuk a reálgazdasági és a pénzügyi folyamatok közötti kapcsolatokat, s felhasználjuk a kapott összefüggéseket a pénz-, a hitel- és a devizaállományok prognosztizálására. Sommásan azt a célt tűzzük magunk elé, hogy modellszerűen ábrázoljuk a hitelmérleget.

A jelen modellben — az időkésleltetéses pénzszabályozási modell koncepciójának továbbfejlesztéseként [1] — a pénzkereslet várható és indokolt nagyságából indulunk ki, s ahhoz viszonyítjuk a ténylegesen kialakult pénzállományokat; a külgazdasági kapcsolatokból következtetünk a devizaállományok változására, s ezek betudásával a belföldi hitelezés lehetőségeire, méreteire. A modell egyenlőség-rendszerének megoldását az országos hitelmérleg két oldalának (eszközök és források) szükségszerű egyezőségére alapítjuk. A modell szerepe egyrészt a prognózisok készítésénél domborodik ki, ahol a pénz szükséges mértékét hivatott a felállított egyenletrendszer alapján előirányozni, másrészt elemzések végezhetők segítségével az előirányzott (várt) és a tényleges pénzállományok összehasonlítása alapján.

A modell közgazdasági megfogalmazása

A modellel új felfogásban kívánjuk elemezni és prognosztizálni az országos hitelmérleg adatait. Számításainkban a források, ezen belül is a *szükséges pénz* mennyiségének meghatározása kap központi szerepet, amelyet a nemzeti termelés folyóáras bruttó értékében fejezünk ki egyrészt a pénz forgási sebességével, másrészt a természetes logaritmus alapszámához kapcsolódó exponenciális függvény segítségével. A *pénz forgási sebességét* a nemzeti termelés bruttó értékének és a teljes pénzállománynak a hányadosaként értelmezzük, valamilyen, a valóságot hűen leíró függvénykapcsolat felhasználásával. Ebből következően a függvény mozgásában, változásában írja le a pénz általunk értelmezett forgási sebességét, s ily módon dinamikus jelleget ad a modellnek. A speciális exponenciális függvény alkalmazásakor viszont feltételezzük, hogy az előző időszakokban valamilyen módon létrejött a pénzügyi egyensúly (a megtakarítások vagy az árak változásával), s a regresszió ki is fejezi azt a kapcsolatot, amely alapon a vizsgálat elvégezhető. E függvény kitevője (mint a kapcsolatot és a fejlődést jellemző paraméter) két tényezőből áll; az egyik a nemzeti termelés prognosztizált bruttó értéke egy adott — általában nem túl hosszú — időszakra értelmezve, a másik tényező pedig azt fejezi ki, hogy egy múltbeli időszakból előrevetítve várhatóan milyen nagyságrendű átlagos változással lehet számolni kizárólag a monetáris politika hatását illetően.

A modell segítségével megállapítjuk, hogy a kibocsátásra kerülő teljes ill. egy előző időszak végén rendelkezésre álló *látra szóló pénzmennyiségből* mennyi az az összeg, amely a folyó bevételek és kiadások teljesítéséhez szükséges és mekkora az, amely egy adott időszak alatt tartósodik és ily módon a felhalmozások finanszírozására fordítható. A tartósodás mértékének meghatározása a látra szóló pénz szektorok szerinti (vállalatok és szövetkezetek, állami és költségvetési szervek, lakosság) korlátainak kiszámításával történik oly módon, hogy ezen korlátokat összehasonlítjuk a tényleges állományokkal. A korlát mértékére a pénzkiadások egységnyi időszak alatti nagysága és a pénz feletti rendelkezés (diszponálás) biztonságos időszükséglete ad támpontot. Feltételezzük, hogy az egy év előtti kibocsátású pénz korláton felüli része felhalmozódik; azaz a *pénz tartósodását egy időszakkal* (egy évvel) *késleltetjük*.

A modellben külön fogalmazzuk meg az összefüggést a rövidlejáratú és külön a közép- és hosszúlejáratú devizatartozásokra. A *rövidlejáratú devizatartozások* nagyságát ill. állományváltozását az import alakulásától tesszük függővé, míg a belső megtakarítások (pénzfelhalmozások) és a bruttó felhalmozásokra szükséges pénzkiadásokban mutatkozó hiányokból a *közép- és hosszúlejáratú devizatartozásokét*. Csökkentő tételként vesszük figyelembe az esedékes törlesztőrészleteket.

A *devizakészletek és a látra szóló követelések* állomány-változását az export függvényében fejezzük ki, módosítva azt az aktív és passzív devizakamatokkal valamint a kölcsönök törlesztési összegével.

A tartós, tehát a *közép- és hosszúlejáratú devizakövetelések* egyenlegét autonomnak tekintjük a modell szempontjából. Ez azt jelenti, hogy független a nemzeti termelés bruttó értékétől. Tesszük ezt abból a megfontolásból, hogy nagyságát elsősorban nem a jegybank üzletpolitikai megítélései, hanem általános gazdaságpolitikai döntések határozzák meg.

A hitelnyújtás vagy helyesebben a *hitelkiterjesztés határait* két alapvető gazdasági feltétel szabja meg a modellben. Az első a társadalmi termelés értékbeni növekedése, a második pedig a pénz likviditási összetételében végbemenő változás. Ezért külön foglalkozunk a rövidlejáratú hiteleket determináló tényezőkkel és külön a közép- és hosszúlejáratú hitelekével.;

A *rövidlejáratú hitel* mennyiségét döntően az újonnan kibocsátott pénzmennyiség határozza meg, amely a bővített újratermelés feltételei között az áruforgalom lebonyolítására, a pénzbeni jövedelem elosztására és újraelosztására szükséges. A második tényező a látra szóló devizapozíció, vagyis a devizakészletek és követelések egyenlegváltozásából adódó érték. Harmadik tételként jelentkezik az az ellentétes mozgás, hogy a látra szóló pénz egy része rendszeresen tartóssá válik és ezzel egyidejűleg közép- és hosszúlejáratú hitelek forrásául szolgál.

A *közép- és hosszúlejáratú belföldi hitelkihelyezések* nagysága a hitelmérlegre felállíttt egyenletek megoldásával határozható meg a modellben, ami egyben megadja a hitelkiterjesztés határát is. Végső fokon két tényező hat: a belföldi pénzmegtakarítások nagysága és a tartós devizakövetelések- és tartozások állományának egyenleg-változása.

A modell minden időpontra biztosítja az országos hitelmérleg főösszegeinek egyenlőségét. A likviditás szerinti részegyensúlyok azonban csak az állományok változására, tehát bizonyos korlátok között érvényesíthetők. Nem állítható fel — és a gyakorlatban egyébként sem teljesül sohasem — az a szigorú követelmény, hogy mind a rövidlejáratú, mind pedig a közép- és hosszúlejáratú eszköz- és forrástételek teljesen megegyeznek egymással. A parciális, de a modellből következően *automatikusan korlátozott egyensúlytalanságnak* három — egymástól elválaszthatatlan — oka van, mégpedig:

— a múltbeli tényleges adatok több-kevesebb eltérést mutatnak az itt megfogalmazott egyensúlyi feltételtől;

— egy adott időszakban kibocsátott látra szóló pénz csak a következő időszakban, tehát késleltetéssel tartósodik a modell feltételrendszerében;

— a közép- és hosszúlejáratú hitelek nyújtásakor technikailag létrejött, de lényegét tekintve valóságos látra szóló pénzmennyiség visszaszívásához bizonyos időre van szükség.

Az egyensúlyra nézve végső soron a *pénzkínálat és a pénzkereslet egyenlősége* ad választ. [2] Amennyiben fennáll a hitelmérleg főösszegeinek kötelező egyezőségén túlmenően az a modellben megfogalmazott parciális egyensúlyi követelmény-sorozat, amely a pénzkibocsátás helyes mértékére, a tartósodás kellő ütemére, a devizapozíció egyensúlyára adja meg a feltételeket, akkor nemcsak a pénzügyi egyensúly fennállásáról beszélhetünk, hanem a hitelkiterjesztés lehetséges határainak az adott gazdasági feltételekhez szabott betartásáról is.

A modell jelentősége tehát az, hogy reálgazdasági folyamatokat képes összekapcsolni a pénz-, a hitel- és a devizaállományok változásaival. E lehetőségek adják végső fokon a prognosztizált adatok mozgását a modellben megfogalmazott korlátok között, míg a tényleges adatok utólagos elemzése során az eltérések mértékéből és irányából az egyensúlyi állapotra lehet következtetni.

A modell matematikai kifejtése

A jelen modell egyenlőségrendszere az országos hitelmérleg 8 fő tételének meghatározására (látra szóló és tartós pénz; látra szóló és közép- és hosszúlejáratú devizatartozások; rövidlejáratú és közép- és hosszúlejáratú hitelek; devizakészletek és közép- és hosszúlejáratú devizakövetelések állománya) az alábbi függvényeket tartalmazza:

$$P, P_r, P_h, H_r, H_h, D_r, D_h, T_r, T_h$$

ahol P = a forgalomban levő teljes belföldi pénzmennyiség ($P = P_r + P_h$,)
P_r = a látra szóló pénz állománya,
P_h = a tartós (lekötött) pénz állománya,
H_r = a rövidlejáratú forgóeszköz hitelek állománya,
H_h = a közép- és hosszúlejáratú hitelek állománya,
D_r = a látra szóló (rövidlejáratú) devizakövetelések és készletek,
D_h = a tartós (közép- és hosszúlejáratú) devizakövetelések,
T_r = a rövidlejáratú devizatartozások állománya,
T_h = a közép- és hosszúlejáratú devizatartozások állománya,

t = az általános időtényező (a modellben év),
T_0 = a kezdő időpont (időszak),
Δ = a differenciaképzés jele [pl. $\Delta P_r(t) = P_r(t) - P_r(t-1)$].

Az előzőekből ismertnek tételezzük fel a következőkeg D_h (mert autonom), P, T_r (mert kifejezhetők a nemzeti termelés bruttó értékével, X-szel).

1. *Az országos hitelmérleg fő tételei és a paraméterek*

Az országos hitelmérleg általános egyenlősége:

$$(1.1) \quad H_r(t) + H_h(t) + D_r(t) + D_h(t) = P_r(t) + P_h(t) + T_r(t) + T_h(t).$$

Az (1.1) összefüggés értelmezhető:
— a ténymérlegekre, amikor empirikus és
— a tervmérlegekre, amikor prognosztizált adatokkal dolgozunk.

A továbbiakban a „kereslet" meghatározására használjuk a fenti jeleket, míg a ′ jelzésű fogalmakkal a „kínálatot" definiáljuk. A hitelmérlegben megfogalmazott egyenlőségek között kitüntetett szerepet kap a *pénzkereslet és a pénzkínálat totális egyensúlya*, amelyet a következőképpen írhatunk fel:
(1.2) $\Delta P(t) = \Delta P'(t)$.

Egyben feltételezzük, hogy a $P(t)$ a társadalmi össztermék (bruttó nemzeti termék) függvénye. Ezt az összefüggést a következő egyenlőséggel fejezzük ki:

$$(1.3) \quad P(t) = \frac{1}{g} X(t),$$

ahol g = az összes pénz forgási sebessége X-re vonatkoztatva (ex ante),
X = a várható folyóáras bruttó nemzeti termék.

A g'-re vagyis az empirikus adatokból számított pénz forgási sebességére fennáll az alábbi értelmezés:

$$(1.4) \quad g'(t) = \frac{dX(t)}{dt} : \frac{dP(t)}{dt}.$$

A nemzeti termelés bruttó értéke a volumen- és árszínvonal változás együttes hatásaként fogható fel. Azaz X exponenciálisan prognosztizált, mivel a fejlődés átlagos ütemét határozzák meg a középtávú népgazdasági tervekben.

$$(1.5) \quad X(t) = [(1+v) \cdot (1+p)]^{t-T_0} X(t_0),$$

ahol v = a volumenváltozás,
p = az árszínvonal változás indexe.

Lehetséges továbbá a prognózis-modellnek egy (általunk definiált) *ex ante-ex post változata* is, amelyet az alábbiak szerint írunk fel az (1.3) összefüggés felhasználásával:

$$(1.6) \quad P_{ap}(t) = \frac{1}{g} X'(t),$$

ahol g = a pénz forgási sebességének prognosztizált értéke, míg
$X'(t)$ = a tényleges folyóáras bruttó nemzeti termék a t-edik időszakban.

A továbbiakban a keresletre vonatkozó egyenlőségrendszerrel foglalkozunk és csak a végén térünk vissza az (1.6) egyenlőségre, amikor az ex ante ex post prognózisból származó értékeket összehasonlítjuk az adott t időszaki (időponti) tényszámokkal.

Az (1.3) egyenlőségben megfogalmazott összefüggés, amely a pénzállománynak a nemzeti termelés bruttó értékében való kapcsolatát fejezi ki, felírható exponenciális függvény formájában is az alábbiak szerint:[1]

$$P(X) = ae^{cX} \tag{1.7}$$

illetve az időtényező figyelembevételével:

$$P[X(t)] = a(t, T_0)e^{c(t,T_0)X(t)},$$

ahol az a és c paramétereket a logaritmikusan linearizált regressziós függvényillesztéssel lehet meghatározni az elmúlt időszakok adataiból.

A fenti (1.7) összefüggésben az a paraméter a 0 termelési értékhez tartozó szükséges kezdő pénzkészlet, a c paraméter pedig kifejezi a pénzügyi műveletekből adódó X-hez kapcsolódó pénzmennyiségi kvócienst, amely időbeli változásaiban jellemzi a „tiszta pénzügyi" hatásokat (inflációs vagy deflációs impulzusokat) valamely előző időszakhoz képest.

A paraméterek tartalmi sajátosságaiból következik, hogy a nemzeti termelés bruttó értéke és a pénzállományok között lényegében ugyanazt az összefüggést hozzák létre, mint a P-nek az X-ben k ifejezett forgási sebessége. Azaz

$$P[X(t)] = \frac{1}{g(t, T_0)} X(t) = a(t, T_0)e^{c(t,T_0)X},$$

amiből a forgási sebességre felírható:

$$g = g(t, T_0) = \frac{X(t)}{a(t, T_0)} e^{-c(t,T_0)X(t)}.$$

A látra szóló pénz korlátja

$$K_r(t) = K_{rV}(t) + K_{rK}(t) + K_{rL}(t) \tag{1.8}$$

összeggel definiálható. Az egyes tagok jelentése:

K_{rV} = a vállalatok és szövetkezetek folyó gazdálkodásához szükséges pénzmennyiség,

K_{rK} = a költségvetési (és társadalmi)szervek folyó kiadásaira szükséges pénzállomány,

K_{rL} = a laoosság fogyasztási szükségleteire szolgáló pénzkészlet.

Az egyes fő szektorok pénzkorlátainak definiálása. Vállalati gazdálkodást folytató szervek:

$$K_{rV}(t) = k_V \frac{1}{n} \alpha(t) X(t), \tag{1.9}$$

[1] Az (1.7) összefüggést és a pénz forgási sebességével való kapcsolatot ifj. Fehér Kálmán, az ELTE III. éves hallgatója dolgozta ki.

ahol k_V = a kiadások fedezetére szükséges pénzmennyiség napokban,
n = a t egységnyi időszak munkanapjainak száma,
α = a folyó gazdálkodással kapcsolatos pénzkiadások (ráfordítások) aránya X-re vonatkoztatva.

Költségvetési (és társadalmi) szervek:

$$K_{rK}(t) = k_K \frac{1}{n} \beta(t) X(t)\,, \tag{1.10}$$

ahol k_K = a bevételek befolyásának napokban kifejezett átlagos periódushossza,
β = a költségvetés folyó kiadásainak részaránya X-re vonatkoztatva.

Lakosság fogyasztására szükséges pénzmennyiség:

$$K_{rL}(t) = k_L \frac{1}{n} \gamma(t) X(t) [1 - s(t)]\,, \tag{1.11}$$

ahol k_L = a lakosság készpénztartás szükséges ideje napokban
γ = a személyes pénzjövedelem aránya X-ben kifejezve
s = a megtakarítási hajlam bankjegyben és takarékbetétben.

A tartós pénz a bruttó felhalmozások finanszírozási eszköze. Ezért választ kell adnunk a modellben arra, hogy mennyi szolgál a forgóeszközök és mennyi az *állóeszközök τberuházások)* beszerzésére.

A forgóeszközök finanszírozására szükséges pénz mennyisége:

$$P_{hF}(t) = \Delta F(t). \tag{1.12}$$

A forgóeszköz felhalmozás a társadalmi termelés értékének függvényében kifejezve

$$\Delta F(t) = \delta(t)\ X(t),$$

ahol δ = a forgóeszközök felhalmozási aránya X-ben kifejezve.

Az (1.12) figyelembe vételével:

$$P_{hB}(t) = P_h(t) - P_{hF}(t). \tag{1.13}$$

Vajon elegendő-e az (1.13) összefüggésben meghatározott pénzmennyiség a beruházási javak realizálására vagy sem? Erre a tartós pénz beruházásokban kifejezett korlátjával keresünk választ, azaz

$$K_{hB}(t) = \frac{1}{f(t-1)} B(t) = \frac{1}{f(t-1)} \varphi(t) X(t)\,, \tag{1.14}$$

ahol f = a beruházásokra rendelkezésre álló tartós pénz forgási sebessége a beruházások (B) értékével kapcsolatban, ($0 < f < 1$),
φ = a beruházások részaránya X-ben kifejezve.

A *rövidlejáratú (látra szóló) devizatartozásek* t időszak alatti változását az import alakulásától tesszük függővé, amelyet viszont a nemzeti termelés bruttó értékének változásában fejezünk ki. Ily módon:

$$\Delta T_r(t) = \frac{1}{b(t)} \zeta(t) \Delta X(t)\,, \tag{1.15}$$

ahol b = a rövidlejáratú (látra szóló) devizatartozások forgási sebessége a behozatal értékében kifejezve,

ζ = a behozatali hányad X-re vonatkoztatva.

A *közép- és hosszúlejáratú devizatartozások* indokolt változását egyrészt a belső pénzmegtakarításoknak a beruházásokhoz szükséges hiánya (növelő tétel), másrészt az előre ismert törlesztési kötelezettségek (csökkentő tétel) határozzák meg. Ily módon kapjuk:

$$(1.16) \qquad \Delta T_h(t) = K_{hB}(t) - P_{hB}(t-1) - \eta(t)\, T_h(t-1) =$$

$$= \left[\frac{1}{f(t-1)}\varphi(t) + \delta(t)\right] X(t) - [P_h(t) + \eta(t) T_h(t-1)]\,,$$

ahol

η = a tartós devizatartozások esedékes részaránya,

ha

$$K_{hB}(t) - P_{hB}(t-1) > 0.$$

A rövidlejáratú látra szóló devizakövetelések és készletek) értékét az export függvényében írjuk fel és figyelembevesszük az esedékes törlesztési és kamatfizetési kötelezettségeket is. Ennek megfelelően:

$$(1.17) \qquad \Delta D_r(t) = \frac{1}{e(t)}\,\varepsilon(t)\,\Delta X(t) + [i_D\,\Delta D_h(t) + \varrho\,\Delta D_h(t-1)] -$$

$$- \{i_T[\Delta T_r(t) + \Delta T_h(t)] + \eta \Delta T_h(t-1)\},$$

ahol e = a rövidlejáratú devizakövetelés forgási sebessége a kivitel értékében

ε = a kiviteli hányad X-re vonatkoztatva,

i = a devizakövetelések — illetve tartozások átlagos kamatlába,

ϱ = a devizakövetelések esedékes törlesztő részletének aránya a kihelyezésekre vonatkozóan.

A rövidlejáratú devizakövetelések és készletek állománya egyben az ország külfölddel szembeni likviditásának jellemzője is. Ezért minimális nagyságára korlátot fogalmazunk meg, amely az egynapi leggyakrabban esedékes folyó fizetési kötelezettségek és a gyakorlatban szükséges diszponálási időigény szorzata, hozzáadva a közép- és hosszúlejáratú devizatartozások azon napi esedékességét, amikor a törlesztés összege az adott t időszakban a legnagyobb. Azaz

$$(1.18) \qquad K_r^D = k_D\, \vartheta(t)\, T_r(t) + \eta j_{\max}(t)\, T_{hj}(t-1),$$

ahol k_D = a folyamatos diszponálási lehetőség normál időtartama napokban,

ϑ = a rövidlejáratú devizatartozások leggyakoribb egynapi esedékes összege a tartozások nagyságában kifejezve,

j = az egyes esedékes törlesztések jele.

Hangsúlyozni szeretnénk, hogy a hitelmérleg 8 fő tételének prognosztizálása a népgazdaság fejlődésének üteméhez kapcsolódó mennyiségi és a múltbeli adatok alakulásából levont törvényszerűségek minőségi kritériumainak konzisztenciája alapján történik, mindenkor szem előtt tarva a modellben megfogalmazott — az egyenlegek időbeli változására vonatkozó — egyensúlyi követelményeket. A jövőben várhatóan szükséges pénzmennyiség (pénzkereslet) és az utólagosan kialakuló tényleges állományok (kínálat) többé-kevésbé eltérnek egymástól. A különbség jelzi az egyensúlytól való eltérés mértékét és előjelében az irányát (inflációs vagy deflációs hatások) is egy konkrét t időszakban.

2. *A hitelmérleg-modell differenciaegyenletrendszere és annak megoldása*

E pontban felírjuk a modell differenciaegyenletrendszerét és megoldjuk azt. A folyamatot a t időváltozó $0 \leq t < \infty$ tartományában vizsgáljuk. Az időtengely origójának a T_0 időpontot tekintjük. A modell diszkrét, t csak a 0, 1, 2, ... egész értékeket veheti fel, ahol az *időegység egy évet* jelöl. A modell differenciaegyenletrendszere az alábbi hat egyenlettel írható le a bennük szereplő P_r, P_h, H_r, H_h, D_r, T_h ismeretlen függvényekre nézve

$$\text{I.} \qquad P_r(t) = K_r(t-1) + \Delta P(t) + \chi \Delta H_h(t)$$

$$\text{II.} \qquad \Delta P_h(t) = P_r(t-1) - K_r(t-1)$$

$$\text{III.} \qquad \Delta D_r(t) = \frac{\varepsilon(t)}{e(t)} \Delta X(t) - \{i_T(t)[\Delta T_r(t) + \Delta T_h(t)] + $$

$$+ \eta(t) \Delta T_h(t-1)\} + i_D \Delta D_h(t) + \varrho \Delta D_h(t-1)$$

$$\text{IV.} \qquad \Delta T_h(t) = M(t) - [P_h(t) + \eta(t) T_h(t-1)]$$

$$\text{V.} \qquad \Delta H_r(t) + \Delta D_r(t) = \Delta P_r(t) + \Delta T_r(t)$$

$$\text{VI.} \qquad \Delta H_h(t) + \Delta D_h(t) = \Delta P_h(t) + \Delta T_h(t),$$

ahol

$$M(t) = \left[\frac{\varphi(t)}{f(t-1)} + \delta(t)\right] X(t) \, .$$

A fenti hat ismeretlenen kívül az egyenletrendszerben szereplő többi függvényt az előző pontban elmondottak alapján ismertnek tekintjük. A rendszer megoldását egyértelműen biztosítandó, meg kell adnunk mind az ismeretlen függvények $t = -1$-nél felvett kezdeti értékeit, mind a modell $t \geq 0$-ra ismert függvényeinek $t = -1$-nél felvett értékeit is.

Az I. egyenlet a látra szolgáló pénz képződését adja meg a $\varkappa$ visszacsatolási mutató segítségével (lásd alább).

A II. egyenlet a tartós pénznek a látra szólóból való időkésleltetéses képződését mutatja a látra szóló pénz korlátjának segítségével.

A III. és a IV. egyenletet már az előző pontban értelmeztük. Ezek D_r és T_h definíciói.

Az utolsó két egyenlet kifejezi a rövid- és hosszúlikviditási eszközök forrásaikkal szembeállított egyensúlyát. A valóságban szigorúan csak az országos hitelmérleg (1.1) összefüggésében megfogalmazott általános (totális) egyensúlya érvényes. A modellben feltételezzük, hogy az egyensúly a rövid- és hosszú oldalon külön-külön is fennáll, de csak az időbeli változásokra nézve.

Írjuk fel újból a hat ismeretlenes rendszer alábbi négy egyenletét

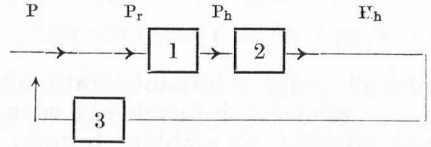
(2.1) $$P_r(t) = K_r(t-1) + \Delta P(t) + \varkappa \Delta H_h(t)$$

(2.2) $$\Delta P_h() = P_r(t-1) - K_r(t-1)$$

(2.3) $$\Delta T_h(t) = M(t) - P_h(t) - \eta T_h(t-1)$$

(2.4) $$\Delta H_h(t) + \Delta D_h(t) = \Delta P_h(t) + \Delta T_h(t).$$

Látható, hogy a négy egyenletből álló rendszer a D_r, H_r függvényeket nem tartalmazza, így azoktól függetlenül megoldható. Az (1), (2), (3), (4) rendszer egyszerűen szemléltethető az alábbi időkésleltetéses, visszacsatolásos sémával:



A sémában szereplő dobozok olyan ,,fizikai műszerek'', amelyek a doboz bemenő ,,jelét'' a szóbanforgó kimenő ,,jelévé'' alakítják át. Az

1. sz. doboz a látra szóló pénz tartósodását jelképezi. Ennek felel meg a (2.2) összefüggés. A
2. sz. doboz jelképezi a hosszúlejáratú hitelnek a tartós pénzből való képződését. Ennek felel meg a hosszú likviditású tételek (2.4) egyensúlyi egyenlete, kiegészítve a (2.3) összefüggéssel. A
3. sz. doboz jelképezi a visszacsatolási ,,jel'' és a közép- és hosszúlejáratú hitel közti összefüggést:

$$\text{visszacsatolás} = \varkappa \Delta H_h.$$

Végül a (2.1) összefüggés a látra szóló pénz képződését írja le az egész rendszer P bemenő ,,jele'' és a visszacsatolt ,,jel'' segítségével.

A visszacsatolás célja annak a valóságos pénzfolyamatnak a leírása a modellben, amely szerint a látra szóló pénz és így végső soron a rövidlejáratú hitel csökken a közép- és hosszúlejáratú hitel formájában kibocsátásra kerülő pénzösszeggel. A $\varkappa$ a rövidlejáratú hiteltörlesztés formájában vissza nem térülő arány jelzője és egyben a rendszer visszacsatolási együtthatója. Számszerű értéke gyakorlatilag kicsi, megközelítőleg 0,0025. A visszacsatolással közgazdaságilag zárt modellhez jutunk, matematikailag pedig a (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) differencia-egyenletekhez. Ily módon egy *diszkrét időkésleltetéses, visszacsatolt rendszert* írnak le.

Oldjuk meg az egyenletrendszert. Feltételezzük, hogy az egyenletrendszerben szereplő $\varkappa$, η, i_T mennyiségek az időtől független állandók. Ez jó közelítéssel teljesül is.

A (2.1) és (2.2)-ből adódik, hogy

$$\Delta P_h(t+1) = \Delta P(t) - \Delta K_r(t) + \varkappa \Delta H_h(t),$$

amely egyenlőség mindkét oldalának szummázásából adódik:

(2.5) $$P_h(t+1) - P_h(0) = P(t) - P(-1) - K_r(t) + K_r(-1) +$$
$$+ \varkappa H_h(t) - \varkappa H_h(-1),$$

ahol $$P_h(0) = P_h(-1) + P_r(-1) - K_r(-1).$$

Majd (2.4) mindkét oldalának szummázásából nyerjük, hogy

$$H_h(t) - H_h(-1) + D_h(t) - D_h(-1) = P_h(t) - P_h(-1) + \\ + T_h(t) - T_h(-1). \tag{2.6}$$

Ha most (2.3)-ból kifejezzük a tartós pénzt és behelyettesítjük (2.5)-be és (2.6)-ba, akkor következik, hogy

$$M(t+1) - \eta T_h(t) - \Delta T_h(t+1) - P_h(0) = P(t) - P(-1) - K_r(t) + \\ + K_r(-1) + \varkappa H_h(t) - \varkappa H_h(-1) \tag{2.7}$$

$$H_h(t) - H_h(-1) + D_h(t) - D_h(-1) = M(t) - \eta T_h(t-1) - \Delta T_h(t) + \\ + T_h(t) - P_h(-1) - T_h(-1). \tag{2.8}$$

Az utolsó két egyenletből pedig a hosszúlejáratú hitelt lehet egyszerűen kiküszöbölni. Ezt elvégezve, rendezve és figyelembe véve a $P_h(0)$-ra vonatkozó (2.5) összefüggésben levő kifejtést, az alábbira jutunk:

$$T_h(t+1) - (1-\eta) T_h(t) + \varkappa(1-\eta) T_h(t-1) = \Omega(t), \tag{2.9}$$

ahol

$$\Omega(t) = M(t+1) - \varkappa M(t) + K_r(t) - P(t) + \varkappa D_h(t) + P(-1) - \\ - P_r(-1) - (1-\varkappa) P_h(-1) + \varkappa T_h(-1) - \varkappa D_h(-1) \tag{2.10}$$

(2.9) már csak a $T_h(t)$ ismeretlent tartalmazza így a többi ismeretlen függvény kiküszöbölésével a feladatot egyismeretlenes másodrendű differenciaegyenlet megoldására vezettük vissza. Az eredeti (2.1); (2.2); (2.3); (2.4) rendszer T_h-ra vonatkozóan elsőrendű és a kezdeti érték $T_h(-1)$. Mivel (2.9) másodrendű, még egy eredeti értéket kell megadni a $T_h(0)$-t is. Ez azonban a többi ismeretlen $t = -1$-re vonatkozó kezdeti értékeiből már megahtározott. Mivel

$$P_h(0) = P_h(-1) + P_r(-1) - K_r(-1),$$

$K_r(-1)$ előírásával $P_h(0)$ meghatározott, másrészt (2.3)-ból:

$$T_h(0) = T_h(-1) + M(0) - P_h(0) - \eta T_h(-1) = (1-\eta)\, T_h(-1) + \\ + M(0) - P_h(-1) - P_r(-1) + K_r(-1). \tag{2.11}$$

A (2.9) típusú egyenletek megoldására jól ismert módszerek léteznek. Pl. a z-transzformáció vagy a diszkrét operátorszámítás [3], [4]. Ezen dolgozatban (2.11) megoldásának részleteit nem ismertetjük, hanem azonnal közöljük a megoldást.

$$T_h(t) = \frac{T_h(0)}{\lambda_1 - \lambda_2} [(1+\lambda_1)^{t+1} - (1+\lambda_2)^{t+1}] + \\ + \sum_{\xi=0}^{t} [\Omega(\xi) - (1-\eta)\,\varkappa T_h(-1)] \frac{(1+\lambda_1)^{t-\xi} - (1+\lambda_2)^{t-\xi}}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad \text{ha } t \geq 0, \tag{2.12}$$

$T_h = T_h(-1)$, ha $t = -1$.

$$\lambda_1 = \frac{-1 - \eta + \sqrt{(1-\eta)(1-\eta-4\chi)}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{-1 - \eta - \sqrt{(1-\eta)(1-\eta-4\chi)}}{2}.$$

Megjegyezzük, hogy λ_1 és λ_2 valósak, mert $0 < \eta < 1$ és $\chi \ll 1$.

$T_h(t)$-vel a többi ismeretlen függvény explicit kifejezhető. A (2.3)-ból közvetlenül adódik a tartós pénz:

$$(2.13) \quad P_h(t) = M(t) - \Delta T_h(t) - \eta T_h(t-1) = M(t) - T_h(t) + \\ + (1-\eta) T_h(t-1), \text{ ha } t \geq 0$$

$$P_h = P_h(-1), \text{ ha } t = -1.$$

(2.12)-ből a látra szóló pénz adódik (2.13) felhasználásával.

$$(2.14) \quad P_r(t) = \Delta M(t+1) - \Delta T_h(t+1) + (1-\eta)\Delta T_h(t) + K_r(t), \\ \text{ha } t \geq 0, \; P_r = P_r(-1), \text{ ha } t = -1.$$

Majd (2.6)-ból a közép- és hosszúlejáratú hitelt is megkapjuk. Ismét (2.13) felhasználásával adódik, hogy

$$(2.15) \quad H_h(t) = M(t) + (1-\eta) T_h(t-1) - D_h(t) + H_h(-1) + D_h(-1) - \\ - P_h(-1) - T_h(-1) \text{ ha } t \geq 0$$

$$H_h = H_h(-1), \text{ ha } t = -1.$$

(2.12) alapján (2.13)-at; (2.14)-et és (2.15)-öt felírhatjuk, mint a t idő függvényeit is. Gyakorlati számítások céljára némileg egyszerűbbek az ismeretlen függvények $T_h(t)$-vel kifejezett alakjai. Ezzel (2.1); (2.2); (2.3); (2.4) differenciaegyenletrendszert megoldottuk.

Az eddig még fel nem használt III. és V. összefüggésekből meghatározhatók a $D_r(t)$ és $H_r(t)$ függvények is. Vezessük be III-ban az alábbi jelölést:

$$N(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon(t)} \Delta X(t) - i_T \Delta T_r(t) + i_D \Delta D_h(t) + \varrho \Delta D_h(t-1).$$

Az $N(t)$ ismert függvény a $0 \leq t < \infty$ intervallumon, ha a $D_h(-2)$ értéket is megadjuk.

A III. mindkét oldalának összegezéséből adódik, hogy

$$(2.16) \quad D_r(t) = D_r(-1) + \sum_{\xi=0}^{t} N(\zeta) - i_T[T_h(t) - T_h(-1)] - \eta[T_h(t-1) - \\ - T_h(-2)], \text{ ha } t \geq 0,$$

$$D_r = D_r(-1), \text{ ha } t = -1.$$

Figyelemreméltó, hogy $D_r(t)$ egyértelmű meghatározásához T_h-ra vonatkozóan *két* kezdeti értéket kell előírnunk, a $T_h(-1)$-et és $T_h(-2)$-t.

Végül a rövidlejáratú hitelt a V. mindkét oldalának összegezéséből nyerjük:

$$(2.17)\quad H_r(t) - H_r(-1) + D_r(t) - D_r(-1) = P_r(t) - P_r(-1) + T_r(t) - T_r(-1).$$

A (2.14)-gyel és (2.16)-tal adódik, hogy

$$(2.18)\quad H_r(t) = \Delta M(t+1) - T_h(t+1) + (2 - \zeta + i_T)T_h(t) + (2\eta - 1)T_h(t-1) + K_r(t) - \sum_{\xi=0}^{t} N(\zeta) + T_r(t) - i_T T_h(-1) - \eta T_h(-2) + H_r(-1) - P_r(-1) - T_r(-1), \text{ ha } t \geq 0,$$

$$H_r = H_r(-1), \text{ ha } t = -1$$

Így D_r-t és H_r-t kifejeztük T_h-val.

A (2.12) alapján (2.16) és (2.18) is felírható a t idő függvényeként.

Ezzel az I. . . . .VI. differenciaegyenletrendszert megoldottuk.

A differenciaegyenletrendszerben szereplő adott függvényeket az X nemzeti termelés függvényében fejeztük ki, következésképp a megoldás is felírható, mint a termelés függvénye.

Elemzés és prognózis a modell alapján

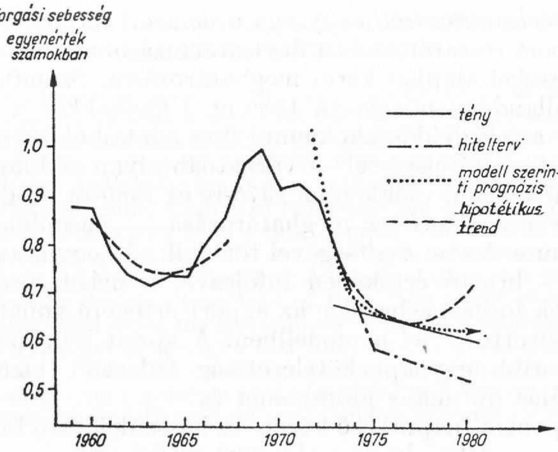
A következőkben tájékoztatást adunk a modell változóihoz kapcsolódó paraméterekről, majd elemezzük az 1973. évi pénzügyi helyzetet, s végül ismertetjük a hitelmérleg 1975-re és 1980-ra becsült adatait.

Számításaink igen nagy körültekintést igénylő mutatója a *pénz forgási sebessége* a társadalmi termék értékében kifejezve. A forgalomban levő teljes pénzmennyiség (készpénz és számlapénz együtt) forgási sebessége 1959-től először lassuló, majd stagnáló folyamatot írt le 1965-ig, ettől kezdődően viszonylag gyorsan növekedett. Csúcsértékét 1969-ben érte el. Ettől kezdődően ismét lassulása következett be 1973-ig.

Jövőbeni alakulására vonatkozó vizsgálódásaink a IV. ötéves terv hátralevő 2 évére valamint az V. ötéves terv teljes időszakára vonatkozik. Abból a feltételezésből indultunk ki, hogy a pénz forgási sebességének változási arányát egy hiperbolának megfelelő függvénnyel határozhatjuk meg a legjobban. Ennek megfelelően az 1974. és 1975. években gyors ütemben, míg ezt követően 1980-g mérsékeltebben lassuló forgási sebesség lesz a jellemző, amely viszonylag nagyobb pénzkibocsátást indukál, mint a nemzeti termelés bruttó értékének növekedése. (L. grafikont.) Ezt a tendenciát indokolja a beruházások ütemnövekedése, a fizetési mérleg javítására irányuló törekvés és a belföldi pénzeszközök részarányának megnövekedése a felhalmozások finanszírozásában.

A *látra szóló pénzt* a pénz első megjelenési formájának tekintjük a likviditás szempontjából. Szükséges mértékét a modellben felállított korlátok segítségével határozzuk meg.

A *vállalati gazdálkodáshoz* szükséges látra szóló pénz mennyiségi korlátjának kiszámítására egy időben változó és egy konstans paraméter szolgál. Az időtől függő paraméter a szervek pénzkiadásának arányát jellemzi a nemzeti termelés bruttó értékében. A mutató 1972-től 1980-ig folyamatosan süllyedő arányt jelez, s ez végső fokon a ráfordítások viszonylagos csökkenését eredményezi.



1. ábra

A konstans paraméter (kalkulációnk szerint 4 nap) azt fejezi ki, hány napi fedezetet kell biztosítani a gazdálkodó szervek részére, hogy rendszeresen teljesíthessék kötelezettségeiket.

Hasonló mutatókat alkalmazunk a *költségvetés* látra szóló pénzszükségletének korlátját illetően is. Számításaink szerint a költségvetési kiadások aránya emelkedő tendenciát mutat 1972-től 1980-ig a nemzeti termelés bruttó értékében, mert viszonylagosan növekszik a központosított társadalmi tiszta jövedelem részaránya. Az időben konstans mutató a kiadások fedezetéül szolgáló pénzösszeg időtartama (12 nap).

A *személyes jövedelmek* részaránya — a költségvetési kiadásokkal ellentétesen — csökkenő tendenciát mutat 1980-ig, mert egyrészt növekszik a társadalmi tiszta jövedelem aránya, másrészt az V. ötéves terv időszakában számítani lehet a felhalmozásoknak a fogyasztásnál nagyobbütemű értékbeli növekedésére. A lakosság pénzszükségletét a folyó kiadások egynapi átlagának 15-szörösében irányoztuk elő. E paraméter kiszámításánál új — tudomásunk szerint eddig sehol nem alkalmazott — módszert használtunk. A kiindulásnál figyelemmel voltunk a készpénzforgalom megfigyelési rendszerére és a tényszámok publikálásának gyakoriságára.[2] A lakosság látra szóló pénzszükségletének harmadik tényezője a megtakarítási hajlamot kifejező arányszám. A tapasztalatok azt igazolják, hogy ezen a téren is érvényesül valamilyen periodikus mozgás, ami 4—5 éves ingadozásban jut kifejezésre. Ebből a mozgásból úgy látjuk, hogy 1980-ig valamelyest csökkenni fog a megtakarítási hajlam.

A kibocsátásra kerülő összes pénzmennyiség és a látra szóló pénz korlátjának (időbeli változásának) ismeretében nyomon követhető a *pénz tartósodási folyamata*. Elfogadva a modell logikájából következő tartósodási ütemet, minden 1 Ft kibocsátott új pénzből mintegy 93—94 fillér válik tartós pénzzé egy év elteltével. Kiszámítottuk a beruházások finanszírozására szolgáló tartós pénz forgási sebességét is a beruházások értékéhez viszonyítva. Tendenciájában — hasonlóan az összes pénzmennyiséghez — csökkenő ütemű mutatót kaptunk, ami a pénzfelhalmozások relatív növekedésére utal.

[2] Jelenleg 5 naponként adja ki a MNB a készpénzforgalmi jelentéseket.

A *látra szóló devizatartozások* nagysága a nemzeti termelés bruttó értékéhez viszonyított import részaránya és a devizatartozásoknak az importban kifejezett forgási sebessége alapján kerül meghatározásra. Számításaink szerint az importhányad állandóan növekszik 1980-ig. Ugyanakkor a devizatartozások forgási sebessége az előző időszakok empirikus adataiból következtetve — erősen absztrahálható feltételezéssel — várhatóan olyan ciklikus mozgást végez, amelynek eredményeként csökken az 1975-re és 1980-ra prognosztizált értéke.

A *látra szóló devizakövetelések* meghatározása — hasonlóképpen a tartozásokhoz — két mutatószám segítségével történik. Az egyik az exporthányad a nemzeti termelés bruttó értékében kifejezve, a másik pedig a látra szóló devizakövetelések forgási sebessége az export értékére vonatkoztatva. Mértékére korlátot állítottunk fel a modellben. A korlát jellemzői:

— a leggyakoribb egynapi kötelezettség fedezetét biztosító szükséglet,
— a diszponálás optimális időtartama és
— az egy időpontra (napra) eső közép- és hosszúlejáratú hiteleknek az adott időszakban esedékes legnagyobb törlesztőrészlete.

Megállapítható, hogy az utolsó 6 évben a forgási sebességre vonatkoztatott adatok — mind a látra szóló devizatartozások, mind pedig a látra szóló devizakövetelések vonatkozásában — 2—3 éves periodicitású változást jeleznek. A periódus hossza szoros összefüggésben van a belső megtakarítások nagyságával, valamint a beruházások értéknövekedésének megközelítőleg 5—6 éves ütembeli ingadozásával. Mindebből arra a következtetésre jutottunk, hogy 1975-ben nagyobbarányú visszaesés következik be az 1973. évi kiugróan magas exporthányadhoz képest, de 1980-ig tendenciaszerűen fokozatosan nő.

A *közép- és hosszúlejáratú devizatartozások* törlesztési ütemére a lejárati idők átlagos meghosszabbodása a jellemző. Feltehető, hogy ez a tendencia egyben mint devizapolitikai törekvés is érvényesül az V. ötéves terv időszakában.

A jelen modellel 1975-re és 1980-ra készített prognózisok egybevetése az országos hitelterv számaival megerősíti azt az eredeti feltételezést, hogy e módszer lehetőséget nyújt makró szinten a pénzügyi helyzet elemzésére és bizonyos mértékű szabályozására, kontrollként szolgálhat a naturális oldalról jelentkező szándékok pénzkeresletben mutatkozó összegszerűsítésére. A pénzügyi források alakulását a népgazdaság fő kategóriáinak számszerű adataihoz köti és azok változását, mozgását függvényszerűen fejezi ki. Egyben jellemezni lehet az egyensúlytól való eltérések mértékét és irányát, ami további támpontot nyújthat a monetáris politika megalapozására és gyakorlati vitelére.

(Beérkezett: 1974. augusztus 1.)

IRODALOMJEGYZÉK

1. Fényes Tamás—Sári József: Pénzmennyiség-szabályozás időkésleltetéses modellel. Szigma, 1973. 1. sz.
2. de Jong, F. J. Developments of monetary theory in the Netherlands Rotterdam, 1973 University Press.
3. Butzer, P. L.—Schulte, H.: „Ein Operatorenkalkül zur Lösung gewöhnlicher und partieller Differenzengleichungsysteme von Funktionen diskreter Veränderlicher und seine Anwendungen" Köln und Opladen 1965. Westdeutscher Verlag.
4. Jury, E.: Theory and Application of the z-Transform Method New York, 1964. Wiley Ő Sons 1964.

A MONETARY EQUILIBRIUM MODEL OF THE NATIONAL BALANCE OF CREDITS

The purpose of the model is to reveal the connections between real economic and financial processes, and to forecast on this basis the money-, credit- and foreign exhange stocks. The functional relations can actually be traced back to the gross value of the national product, and they express the quantity of money needed, the stock of foreign exchange claims and outstanding foreign debts. Taking these into account the domestic credit demand and the admissible bounds of extending credits are determined with the help of time-dependent parameters. It is a new approach that by using the model one plans the expected credit demand from the source side, i.e. starting from the volume of money stocks and foreign exchange obligations. A dynamic character is lent to the model by the use of parameters that are functions of time. The equilibrium can be assured according to the composition of means and sources from the viewpoint of liquidity.

The model yields a method of analysis and forecast which the authors used in the calculations for 1975 and 1980. The results confirmed the original supposition that the model enables the analysis and regulation of the financial situation as with its application the direction and extent of deviations from the equilibrium can be determined.

ОДНА МОДЕЛЬ ФИНАНСОВОГО РАВНОВЕСИЯ ГОСУДАРСТВЕННОГО КРЕДИТНОГО БАЛАНСА

Целью модели является раскрытие связей, существующих между реальной экономикой и финансовыми процессами, и прогнозирование денежных, кредитных и валютных фондов на основании полученных зависимостей. Функциональные зависимости могут быть сведены в конце концов к валовому значению национального дохода, а с помощью параметров, изменяющихся во времени, выражаются требуемые денежные суммы, состав зарубежных требований валюты и задолженностей и внутренние кредитные потребности девизы и задолженностей и с их учетом — внутренние кредитные потребности или возможные пределы кредитований.

Новым является то, что при применении данной модели ожидаемые кредитные потребности планируются исходя из ресурсов, то есть из размеров денежных фондов и девизных обязятельств. Динамический характер модели придает то, что используемые в ней параметры являются функциями времени. Равновесие может быть обеспечено в соответствии с ликвидным составом средств и ресурсов. Модель представляет собой метод анализа и прогнозирования, с помощью которых авторы производили вычисления на 1975—1980 года. Результаты их подкрепляют первоначальное предположение о том, что модель предоставляет возможность исследования, анализа и регулирования финансового положения, поскольку с ее помощью могут быть определены размеры и пропорции отклонения от равновесия.

Filep György

A gépipari termelőberendezés állományának és struktúrájának hosszútávú tervezése*

Bevezetés

A KGM Távlati Fejlesztési Főosztálya és a Gépipari Technológiai Intézet[1] megbízásából kidolgoztunk egy lineáris programozási modellt a KGM technológiai ágazataihoz tartozó termelőberendezések optimális állománya és struktúrája hosszútávú számítógépes tervezéséhez. A modell kialakításakor figyelembe vettük, hogy a termelőberendezés tervévi állományának kialakítása, az optimalizálás célfüggvényének (célfüggvényeinek) meghatározásán túlmenően, három irányból közelíthető:

1. A gépipar különböző technológiai ágazataira készítünk önálló modelleket és egymástól független számításokkal viszonylag szűk választási lehetőségek keretein belül maradunk.

2. A gépipar alágazataira készítünk egymástól függetlenül kezelhető modelleket és valamennyi technológiai ágazat fejlesztését vizsgálat tárgyává tesszük. Lényegében itt is egymástól független számítások elvégzéséről van szó.

3. A KGM — gépipar összességére — figyelembe véve a hét technológiai ágazatot — készítünk egy modellt.

A javasolt közelítési módok közül az első változat szűk választási lehetőségei mellett, még olyan hátrányban is van, hogy csak előre rögzített termelési volumenekre — amelyek már előzőleg eldöntött technológiai struktúrákkal meghatározottak — vonatkozhat. Így tehát csak az lehet a modell döntési problémája, hogy a technológián belül alkalmazott és egymást helyettesítő termelőberendezések optimális összetételét határozza meg.

A második változat kizárólagosan az egyes gépipari alágazatok belső — a technológiai ágazatok által meghatározott — összefüggéseit vizsgálja és ezek eredményeit alkalmazza a termelőberendezés állomány tervezésére, így nem tárhatók fel a gépipari alágazatok bonyolult kapcsolatai.

Az 1. és 2. változat közös hátránya, hogy az alkalmazásuknál, az említetteken kívül számos egyéb előzetes döntést kell meghozni. Így például a már említett termelési — kibocsátási volumen és a technológiai struktúra rögzítése mellett szükség van az erőforráskeretek (létszám, beruházás, deviza stb.) előzetes elosztására is; ezek a 3. változatban javasolt modell alkalmazásakor a számítások során határozhatók meg.

Úgy véltük, hogy az 1. és 2. modell kidolgozásakor az előzetes döntések annyira leszűkítik a modellek választási lehetőségeit, hogy a viszonylag nagy

* A Magyar Közgazdasági Társaság 1973. évi pályázatán díjazott pályamunka alapján.

[1] A modellezett terület szakmai kérdéseiben Nemes Ferenc a KGM osztályvezetője adott hasznos tanácsokat, a modell számszerűsítését Pásztor Ferenc a GTI munkatársa végezte, aki ezen kívül gépipari ismereteivel is hozzájárult a modell kialakításához.

munkabefektetések kevés hasznot hajtanak, ezért a 3. modellváltozatot dolgoztuk ki az alábbiak figyelembevételével:

— meghatároztuk a termelőberendezés tervévi állományának összetételét, és volumenét befolyásoló főbb tényezők összefüggő rendszerét, ezen belül figyelembe vettük, hogy a termelőberendezések tervévi állománya függ a tervidőszakban alkalmazandó technológiai struktúrától, amelyet közvetlenül a gyártási alágazatok kibocsátási feladatai, belső termelési kapcsolatai és a tevékenységek objektív korlátai határoznak meg,

— arra törekedtünk, hogy modellünkben együttesen meghatározható legyen többféle változatban, valamilyen szempontból optimális gépipari termelőberendezés állomány,

— tapasztalatok szerzése céljából egy technológiai ágazat (a kovácsolás) gépállományát határoztuk meg. Ezáltal azokat az adatelőkészítési-, gépi programozási és üzemeltetési ismereteket — kisebb bár nem teljes modellel — szerezhettük meg, amelyek elengedhetetlenül szükségesek a teljes gépipari termelőberendezés állomány tervévi volumenének és összetételének kiszámításához.

A gépipari termelőberendezés állomány tervezésénél felmerülő alapvető kérdések

A távlati tervezés során néhány alapvető kérdés merül fel:

— adott kibocsátási feladat teljesítése esetén mekkora legyen a gépállomány nagysága és milyen összetételű,

— hogyan befolyásolja a külkererkedelmi tevékenység a termelést,

— milyen ütemben kell a különböző gépcsoportokban selejtezni, meghatározott átlagos gépéletkor biztosítása érdekében,

— a beruházásra fordítható anyagi lehetőségeket hogyan legcélszerűbb felhasználni, azaz hol kell fejleszteni.

A fenti alapkérdések vizsgálatát ágazati szempontból kell elvégezni, ezért részben vállalati, részben ágazati érdekeket is figyelembe kell venni, azokat össze kell hangolni. Példa erre, hogy a termelőberendezés állomány „elöregedése", az új berendezésekkel elérhető terméktöbblet nagysága stb. — melyek vállalati kategóriák — ágazati szinten is problémaként jelentkeznek és ugyanakkor itt figyelembe kell venni a makroökonómiai összefüggéseket is, tehát a két szemlélet egyesítésére kell törekedni.

A gépiparban az ágazati szintű távlati elképzelések kialakítása még az átlagosnál is nehezebb, mert a makroökonómiai problémák különös súllyal vetődnek fel. A gépipari termelés a beruházásokkal van szoros kapcsolatban és így közvetlenül összefügg a népgazdaság főbb arányaira és a gazdasági növekedés ütemére vonatkozó döntésekkel és elképzelésekkel.

A gépipari termékek kereslete emellett jórészt áttételezett jellegű. Az összes többi ágazat termékei iránti kereslet módosulása kihat a gépipari termékek iránti kereslet alakulására.

A műszaki fejlődés is különösképpen gyors a gépiparban, ezen belül áttételezett formában az összes többi ágazatban, vagy külföldön bekövetkezett műszaki-gazdasági változások is hatnak, ami a termelőberendezés állomány távlati tervezését tovább nehezíti.

A feladatot tovább bonyolítja az időbeliség. A vállalatok szempontjából az optimális termelőberendezés állomány az időnek, illetve az időbeli változásoknak a függvénye. A termelőberendezések cseréjének üteme döntő részben a gépekben megtestesült műszaki fejlődés ütemétől függ. Ha a műszaki fejlődés fokozódik, a gépek cseréjének optimális üteme is tovább nő. Ugyancsak meggyorsul a csere optimális üteme, a gazdaság strukturális átalakulása és a szociológiai struktúra változása következtében.

Az időbeliség népgazdasági szempontból is módosítja az összefüggéseket. Az egyes korlátozó feltételek súlya ugyancsak változhat, más főbb arányok válhatnak optimálissá és ennek folytán szükségképpen módosítani kell a beruházási politikát.

Ezek után megállapíthatjuk, hogy a fentiekben részletezett feladat ágazati végrehajtása, a KGM termelőberendezés állománya alakulásának a termeléssel és a külkereskedelemmel, valamint a népgazdasági elvárásokkal és a műszaki fejlődéssel összhangban történő vizsgálata szükségszerűen igényli a korszerű gazdaságmatematikai módszereket. A hatékony beruházás számos feltételének mérlegelése, sorolása, variánsok készítése a ,,klasszikus'' módszerekkel már nem végezhető el.

A programozási modell

A feladat részletességét meghatározó fogalmak

A vizsgálat területe: a KGM hat gyártási alágazata és hét (öntés, kovácsolás, forgácsmentes hidegalakítás, hegesztés, forgácsolás, szerelés és egyéb technológiai műveletek) technológiai ágazata.
A gyártási alágazatok jelölései, indexben: i

$i = 1$ Gépek és gépi verendezések gyártása,
$i = 2$ Közlekedési eszközök gyártása,
$i = 3$ Villamosipari gépek és készülékek gyártása,
$i = 4$ Híradás és vákuumtechnikai ipar,
$i = 5$ Műszeripar,
$i = 6$ Fémtömegcikkipar.

A gyártási alágazatok termékeit a technológiai eljárások különböző volümenű összetételével lehet előállítani, melyeket megfelelő számú változóval veszünk figyelembe. A termelés technológiai változatait tehát eltérő technológiai struktúrák adják. j index-szel jelöljük az egymástól eltérő technológiai struktúrákat.

Az adott gyártási alágazatban (i) a meghatározott technológiai struktúrát (j) a termelőberendezés főcsoportok valósítják meg. A termelőberendezés főcsoportokat jelölje a g index.

A tervidőszakok indexe: t. A $t = 0$ a bázisévet (1970), a további három index a következő ötéves időperiódusok utolsó éveit (1975, 1980, 1985) jelöli. Így a modellel egy meghatározott, hosszabb időt átfogó, több ötéves tervet értelmezünk és folyamatosan, időszakról-időszakra meghatározzuk a tevékenységek és a fejlesztések irányát és nagyságát.

A modell változói

A modellbe a következő változókat építettük be:
— termelési-,
— külkereskedelmi-,

— fejlesztési-,
— selejtezési-,
— többletkibocsátási-,
— speciális változókat.

Termelési változók

A termelési változókat az ötéves időszakok utolsó évére értelmeztük, tehát egy évi termelést reprezentálnak. A termelési változók jelölése: X_{ijt}, jelenti az i-edik gépipari gyártási alágazat termelését a j-edik technológiai struktúrával a t-edik időszakban.

Külkereskedelmi változók

Z_{irt} az i-edik gépipari alágazat importja az r-edik relációból a t-edik időben.
U_{irt} az i-edik gépipari alágazat exportja az r-edik relációba a t-edik időben.
$r = 1$ rubel, $r = 2$ dollár relációt jelent. Az r-indexet felhasználjuk a fejlesztési változónál is, azzal a bővítéssel, hogy $r = 3$ hazai beszerzésre utal.

Fejlesztési változók

A fejlesztési változó az ötéves tervidőszakok egésze alatt folyó fejlesztési tevékenységet (beruházás) jelenti.

y_{grt} a gyártási alágazatok g-edik termelőberendezés főcsoport bővítésének mértéke a t-edik időszak alatt az r-edik relációból.

Selejtezési változók

y_{gt} a g-edik termelőberendezés főcsoport t-edik időszakban végrehajtott selejtezését jelenti. Kezelhető selejtezési hányadosként (első tervperiódusban), de tényleges gépdarabszámot is kifejezhet.

Többletkibocsátási változó

S_t többletkibocsátási struktúra változója a t-edik időszakban. E változó megmutatja, hogy a rendelkezésre álló erőforrások teljes felhasználása mellett, a gépipar milyen mértékben képes az előírtnál többet kibocsátani.

Speciális változók

X_{gt} a t-edik tervidőszak utolsó évében a g-edik termelőberendezés fajta bázisévi és az időszak alatti bővítési-selejtezési mennyiségének összege, illetve különbsége. $X_{go} = b_{go}$ a gépállomány kiinduló adata.

A modell együtthatói

A gyártási alágazatok egymásközti termékfelhasználási kapcsolatait és ráfordítás igényeit függvénykapcsolatok fejezik ki. A változók — különböző feltételekben értelmezett — együtthatói a következők:

a_{ikt} a k-adik alágazat egységnyi termeléséhez az i-edik alágazatból szükséges termék mennyisége, a t-edik időszak utolsó évében, ha $i \neq k$.

a_{ijgt} az i-edik alágazatban, a j-edik technológiai struktúrával az egységnyi termelés előállításához szükséges g-edik termelőberendezés főcsoport mennyisége a t-edik időszak utolsó évében.

a_{ijpt} az erőforrások (indexük: p) ráfordítási együtthatói.

A következő erőforrásokat vettük figyelembe:

$p = 1$ az összes foglalkoztatottak száma,
$p = 2$ gépi beruházási erőforrások,
$p = 3$ a villamosenergia mennyisége.

a_{gprt} az r-edik relációból beszerzett g-edik termelőberendezés főcsoport egységnyi mennyiségének a p-edik erőforrásból jelentkező többletigénye, vagy megtakarítása a t-edik időszak utolsó évében.

a_{grt} az r-edik relációból beszerzett g-edik termelőberendezés főcsoport egységára a t-edik időszak utolsó évében.

a_{ijrt} az i-edik gyártási alágazat j-edik technológiai struktúrájával végrehajtott termelés nem kompentitív import-ráfordítása az r-edik relációból a t-edik időszak utolsó évében.

a_{irt} az i-edik gyártási alágazat termékegységéhez az r-edik relációból történő import beszerzések egységára a t-edik időszak utolsó évében.

e_{irt} jelenti, az i-edik gyártási alágazat termékegységéből az r-edik relációba történő export egységárát a t-edik időszak utolsó évében.

e_{grt} az r-edik relációból a t-edik időszakban beruházott g-edik gépfőcsoport egységének teljesítménynövekedése a bázisévhez viszonyítva.

A korlátvektor elemei

A korlátvektorban szereplő elemek definíciója a következő:

b_{it} az i-edik alágazat kibocsátása a t-edik időszak utolsó évében. Tartalmazza a lakossági és közületi fogyasztást, a termelő felhasználását a gépipari alágazatok felhasználása nélkül, valamint a beruházási igényeket. (A készletváltozást nem vesszük figyelembe.)

b_{pt} a p-edik erőforrás-fajta korlátja a t-edik időszak utolsó évében, $p = 2$ kivételével.

b_{uirt} a termékexport felső korlátja, az i-edik alágazatból, az r-edik relációba, a t-edik időszak utolsó évében.

b_{uirt} az előbbi alsó korlátja.

b_{zirt} a termékimport felső korlátja, az i-edik alágazatba r-edik relációból, a t-edik időszak utolsó évében.

b_{zirt} az előbbi alsó korlátja.

b_{rt} a termelés devizamérleg egyenlegének korlátja az r-edik relációban a t-edik időszak utolsó évében.

b_{2rt} az r-edik relációból beszerezhető gép-beruházási erőforrások korlátja a t-edik időszakban.

E_{gt} Teljesítménynövekedési tényező. Minden évre kiszámítható az új berendezésekkel nem bővített g-edik berendezés főcsoportnak a teljesítménynövekedése az általános műszaki fejlődés következtében. Tehát a teljesítménynövekedési tényező halmozott érték, mivel a termelőberendezés főcsoport termelőkapacitásának korrekciói az ötéves tervidőszakban évről-évre módosulhatnak. A számítási eljárást később tárgyaljuk.

A_{go} A g-edik termelőberendezés csoport átlagos életkora.

A modell feltételi rendszere

Az előbbiekből ismert, hogy számításainkat — az 1970-es bázisévből kiindulva — ötéves tervidőszakokra bontva végezzük. Ezért a modell felépítésében az egyes ötéves időszakokat külön blokkban kezeltük és az időszakok közötti kapcsolatokat önálló blokkban írtuk fel.

Ez a szerkezet a szakirodalomból ismert kétszintű modellhez hasonló. Eltérés csupán az, hogy a különböző szektorokat az ötéves tervidőszakok, a központi feltételeket pedig az intertemporális feltételek helyettesítik. Az intertemporális feltételek kapcsolják össze az önállóan is kezelhető tervidőszakokra felírt összefüggéseket (részmodelleket). Tehát az intertemporális feltételek töltik be az egymás után következő ötéves tervek központi szabályozásának, összehangolásának szerepét.

A termékkibocsátási feltételek

Valamennyi gyártási alágazatra és minden ötéves tervidőszak utolsó évére előírtuk, hogy az alágazati termelés és a helyettesítő import fedezze a kibocsátást, az export igényeket, valamint az alágazatok belső — termelési célú — felhasználásait.

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ijt} + \sum_{r=1}^{2} Z_{irt} - \sum_{r=1}^{2} U_{irt} \sum_{\substack{i \neq k \\ k=1}}^{6} \sum_{j=1}^{n} a_{ikt} X_{ijt} = b_{it} \qquad (i = 1 \ldots 6;\ t = 1,2,3)$$

Ha a b_{it}-re (a kibocsátásra) a hosszú távú tervezési bizottságok által kidolgozott értékek közül a minimálisat előírjuk, ebben az esetben bevezetve az S_t többletkibocsátási struktúra változót az előbbi mérleg:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ijt} + \sum_{r=1}^{2} Z_{irt} - \sum_{r=1}^{2} U_{irt} - \sum_{\substack{i \neq k \\ k=1}}^{6} \sum_{j=1}^{n} a_{ikt} X_{ijt} - S_t = b_{it} \quad (i = 1 \ldots 6;\ t = 1,2,3)$$

alakban felírva vizsgálható az adott összetételű többletkibocsátás.

A külkereskedelmi korlátozó feltételek

Abból a meggondolásból kiindulva, hogy a számítások során az import és export nagysága ne lépje túl a külkereskedelmi megállapodásokban lefektetett felső határokat, lehetőségeket, a külkereskedelmi változókat külön-külön korlátoztuk:

$$\check{b}_{zirt} \leq Z_{irt} \leq \hat{b}_{zirt}$$

$$(i = 1, \ldots 6;\ r = 1,2;\ t = 1, 2, 3).$$

$$\check{b}_{uirt} \leq U_{irt} \leq \hat{b}_{uirt}$$

A gépipar deviza egyenlegére kötelezően előírjuk az alábbiakat:

$$\sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{n} a_{ijrt} X_{ijt} + \sum_{i=1}^{6} a_{irt} Z_{irt} - \sum_{i=1}^{6} e_{irt} U_{irt} = b_{rt} \qquad (r = 1, 2;\quad t = 1, 2, 3).$$

Az erőforrások feltételi egyenletei

Az alágazatok termelésünkhöz csak annyi erőforrást vehetnek igénybe, amennyit a népgazdasági tervek maximálisan engedélyeznek.

$$\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{n} a_{ijpt}\cdot X_{ijt}+\sum_{g=1}^{19}\sum_{r=1}^{3} a_{gprt}\cdot Y_{grt}\leq b_{pt} \qquad (p=1,3;\quad t=1,2,3).$$

A gépi beruházások relációnkénti felhasználásainak korlátozó egyenlete:

$$\sum_{g=1}^{21} a_{grt}\cdot Y_{grt}\leq b_{2rt} \qquad (r=1,2,3;\quad t=1,2,3).$$

A termelőberendezések bővítési feltételei

Az alágazatokhoz tartozó termékek — így az előgyártmányok is — értelmezésünk szerint különböző eljárásstruktúrákkal, különböző gépcsoportokon állíthatók elő. E struktúrákhoz tartozó technológiai eljárások kapacitásait, a termelőberendezés felhasználási mennyiségeit gépipari szinten korlátoztuk. Ebből következik, hogy az alágazatokban az egyes eljárások termelőberendezés felhasználása olyan mértékű lehet, amilyen az optimális megoldás szempontjából szükséges. A termelőberendezések felhasználásának korlátját együttesen meghatározza a rendelkezésre álló bázisévi kapacitás és a kapacitásbővítési lehetőségek.

Kiindulunk tehát a tervidőszak kezdetén ($t=0$; 1970) meglevő gépállományból, a $b_{g(t-1)}=b_{go}$-ból. Feltétel, hogy a t-edik periódus utolsó évében a g-edik termelőberendezési főcsoportban az összes felhasználás ne haladja meg az iúduló és a tervidőszak alatt fejlesztett gépállomány összegét. Mivel a g-edik termelőberendezés kapacitása a t-edik periódusban a y_{grt} változó értelmezése szerint

$$X_{gt}=b_{g(t-1)}+\sum_{r=1}^{3} e_{grt}\cdot y_{grt} \qquad (t=1,2,3;\quad g=1,\ldots 19).$$

Ennek felhasználásával a feltétel a tervperiódus végén

$$\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{n} a_{ijgt}\cdot X_{ijt}=b_{gt-1}+\sum_{r=1}^{3} e_{grt}\cdot y_{grt} \qquad (t=1,2,3;\quad g=1,\ldots 19)$$

alakban írható fel abban az esetben, ha a tervidőszak folyamán a termelőberendezések közül egyet sem selejteznénk és egyéb befolyósoló tényezők hatását sem vennénk figyelembe.

Az e_{grt} számításánál a bázisévi ($t=0$) átlagos életkorú gépeket tekintettük egységnyi műszaki teljesítőképességűeknek, és statisztikai módszerekkel olyan műszaki teljesítmény indexeket határoztunk meg, amelyek a tervidőszak új beszerzésű berendezéseinek műszaki teljesítőképesség-változását (növekedését) fejezik ki a bázisévi átlagos életkorú gépek műszaki teljesítőképességéhez viszonyítva. Tehát

$$e_{grt}\geq 1\text{-nél, mivel } e_{gro}=1.$$

A fizikai elhasználódás és az erkölcsi avulás miatt selejtezni is kell. Ezenkívül biztosítani kívántuk, hogy a tervidőszakok alatt a termelőberendezés főcsoportok átlagos életkora ne növekedjék a bázisévi átlagos életkorokhoz viszonyítva. Az átlagos életkort két tényező határozza meg: a selejtezés mértéke és az új beszerzésű gépek száma. Mint korábbiakban láttuk, a selejtezés mértéke modellünk egyik változója. Az új beszerzésű gépek számát részben a termelési volumen kielégítése, a legkedvezőbb technológiai struktúra, továbbá a selejtezés mértéke határozza meg. Ezenkívül befolyásolja az a követelményünk is, hogy a termelőberendezések átlagos életkora ne növekedjék.

A termelőberendezés selejtezés meghatározása

Induljunk ki az első tervidőszak kezdeti termelőberendezés állományból $X_{go} = b_{go}$-ból. Kiszámítható az az állomány, amely akkor jön létre, ha a különböző tényezők hatásait is figyelembe vesszük. Ezek E_{gt}-vel adottak, ezért az induló hasznosítható gépállomány kapacitása: $b_{go} + E_{gt}$ lesz.

A teljesítménynövekedési változó bevezetésével tehát lényegében áttértünk egy „fiktív" gépállományra. Ez azért szükséges, mert a technológiai koefficienseket az egyes tervidőszakokban csak az E_{gt} hatásoktól függetlenül tudjuk kezelni, tehát a korlátvektorban az E_{gt} korrekcióval (fiktív gépállománnyal) biztosítjuk, hogy a ráfordításoknak a műszaki-szervezési intézkedések következtében bekövetkező változása figyelembe legyen véve. Továbbiakban ezen fiktív gépállománnyal számolunk, feltételezve, hogy a fiktív gépállomány átlagos életkora megegyezik a tényleges gépállomány életkorával.

Ismert a meglevő g-edik termelőberendezés főcsoport átlagos életkora minden tervperiódusban:

időpont	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
átlagos életkor	A_{go}	$A_{g1} = A_{go} + 5$	$A_{g2} = A_{go} + 10$	$A_{g3} = A_{go} + 15$

Az első tervidőszakban fejlesztett gépdarabszám: y_{gr1}, ennek átlagos életkora az első tervidőszak végén 2,5 év. Így felírható a g-edik termelőberendezés induló állományának átlagos életkora az első tervidőszak végén, illetve a második tervidőszak elején, ha nincs selejtezés:

$$A_{go} = A_{g1} = \frac{(b_{go} + E_{g1})(A_{go} + 5) + y_{gr1} . 2{,}5}{b_{go} + E_{g1} + y_{gr1}}$$

Írjuk elő az átlagos életkor változatlanságát: $A_{go} = A_{g1}$. Ekkor tehát

$$A_{go}(b_{go} + E_{g1} + y_{gr1}) = (b_{go} + E_{g1})(A_{go} + 5) + y_{gr1} . 2{,}5 \text{ és}$$

$$y_{gr1} = \frac{5}{A_{go} - 2{,}5}(b_{go} + E_{g1}).$$

Az átlagos életkor adott szinten tartását természetesen a selejtezés mértéke is befolyásolja, ugyanis a selejtezéssel a meglevő gépállomány darabszáma csökken, tehát a változatlan életkor biztosításához kisebb bővítés is elegendő.

Ezért meg kell határozni a λ_{g1} selejtezési hányadot, mely az előbbi egyenlőség teljesülését az időszakra megadott b_{21} gépi beruházási keretek mellett lehetővé teszi.

Ha λ_{g1} az első tervidőszak selejtezési hányada, akkor $(1 - \lambda_{g1})$ lesz a megmaradó berendezések mennyisége, ezért az első tervidőszak termelőberendezés bővítésére vonatkozó előírásunk:

$$y_{gr1} = \frac{5}{A_{go} - 2{,}5}(1 - \lambda_{g1})(b_{go} + E_{g1}).$$

Ezzel a feltétellel a termelőberendezés átlagos életkora az első tervidőszak végén változatlan.[2]

Az előbbi gondolatmenet alapján a második tervidőszakban a selejtezést is figyelembe véve felírható:

$$y_{gr2} = (1 - \lambda_{g2}) \frac{5[(1 - \lambda_1)(b_{go} + E_{g1}) + y_{gr1} + E_{g2}]}{A_{go} - 2{,}5}$$

Ezzel kvadratikus függvényt kapunk és a modell kezelése nehézkessé válik. Ezért célszerű a második tervidőszakban nem λ_{g2} selejtezési hányadot, hanem azt a gépdarabszámot meghatározni, amellyel az első tervidőszakban meglevő gépállományt csökkenteni kell annak érdekében, hogy az átlagos gépéletkor változatlan maradjon.

Tehát a λ_{g2} jelentse a második tervidőszak folyamán kiselejtezett gépek számát, akkor felírható:

$$y_{gr2} = \frac{5[(1 - \lambda_{g1})(b_{go} + E_{g1}) + y_{gr1} + E_{g2}]}{A_{go} - 2{,}5} - \lambda_{g2}$$

Ez alapján a harmadik tervperiódus végén az induló gépállomány:

$$X_{g2} = \frac{5[(1 - \lambda_{g1})(b_{go} + E_{g1}) + Y_{g2}]}{A_{go} - 2{,}5} - \lambda_{g2} + Y_{gr2} + E_{g3}$$

Az életkor változatlanságát a harmadik tervperiódusban is feltételezzük. A selejtezést is figyelembe véve és a λ_{g3}-at ugyanúgy értelmezve, mint a λ_{g2}-t, felírható:

$$Y_{gr3} = \frac{5 \cdot X_{g2}}{A_{go} - 2{,}5} - \lambda_{g3}$$

azaz

$$Y_{gr3} = \frac{25(1 - \lambda_{g1})(b_{go} + E_{g1}) + Y_{gr1} + E_{g2} + 5(Y_{gr2} + E_{g3} - \lambda_{g2})(A_{go} - 2{,}5)}{(A_{go} - 2{,}5)^2} - \lambda_{g3}.$$

E sajátosság figyelembevétele egyben kapcsolatokat létesít a tervperiódusok között. Ugyanis a megelőző tervperiódus végén a selejtezésekkel csökkentett és a tervperiódus alatt fejlesztett kapacitások állnak rendelkezésre a következő tervperiódus kezdetén.

[2] Természetesen A_{go} és A_{g1} átlagos életkorok között nemcsak egyenlőség, hanem más reláció is előírható. Pl. bevezetve egy arányossági faktort, mely 0,1—1,0 között veheti fel értékeit így a selejtezés üteme időszakonként változtatható. Másik megoldás, hogy az egyenlőség helyett nagyobb egyenlőség relációt írunk elő, azaz megengedjük, hogy az átlagos életkor csökkenjen.

Az előbbiekben a λ_{gt}-t az első tervperiódusban, mint hányadost, a másodikban és a harmadik tervperiódusban, mint darabszámot értelmeztük. Kiszámíthatjuk, illetve levezethetjük a λ_{gt}-t abban az esetben is, ha az valamennyi tervperiódusban azt a gépdarabszámot jelenti, amellyel a tervidőszakban a meglevő gépállományt csökkenteni kell annak érdekében, hogy az átlagos gépéletkor változatlan maradjon.

A változók nem negativitási feltételei

A változókra értelemszerűen elő kell írni az alábbiakat:

$$X_{ijt},\ U_{irt},\ Z_{irt},\ Y_{grt},\ S_t,\ X_{gt},\ \lambda_{gt} \geq 0$$

minden i, j, r, g és t-re, amelyikre e változókat értelmeztük.

A teljesítmény növekedés (E_{gt}) számítása

Mint korábban említettük E_{gt}-ben összesített hatásokat veszünk figyelembe. Kiindulunk a tervévek változatlan üzemórájából, melyet a bázis évi üezmórák és a becsült termelésváltozási index segítségével minden gépcsoportra kiszámítunk. A tervévi változatlan üzemóra azt az üzemóra mennyiséget jelenti, ami szükséges lenne a tervévi termeléshez bázisévi termelékenységi szinten. A tervévi változatlan üzemórát több tényezővel korrigáltuk. Ezek:

- a kézi munka gépesítésének hatása, amely növeli a tervévi változatlan üzemórát. A gépesített kézi munkaórák gépi megfelelője szakirodalmi adatok alapján jól meghatározható;
- a veszteségidő csökkentésének hatására megváltozó tervévi üzemóra, amely csökkenti a termékek gépigényét. Itt lényegében a műszaki, szervezési és adminisztratív intézkedések várható hatásait vettük figyelembe statisztikai adatok alapján;
- üzemszervezési intézkedések hatása a tervévi üzemórára. A gyártásszervezési (szakosítási és koncentrálási) intézkedések szintén csökkentik a termelés gépigényét, amelyeket a vállalatok beszámolóinak átlagos trendértékéből számszerűsítünk;
- termelőberendezések pótlólagos korszerűsítésének hatása a tervévi üzemórára, amely ismét csökkenti a termelés gépigényét.

A fenti tényezők figyelembevételével lényegében egy megnövekedett „fiktív" gépdarabszámhoz jutottunk el, amit összesítve E_{gt} teljesítmény növekedési korrekcióként modellünkbe építettünk.

A modell célfüggvényei

A célfüggvényeket úgy értelmezzük, hogy azok átfogják a teljes tervezési időszakot.

A KGM termelőberendezés állományát a hosszú távú tervezés időszakában úgy kell fejleszteni, hogy:

- a gépállomány termelékenysége maximális legyen, vagy
- a fejlesztés minimális beruházással végrehajtható legyen.

A két célkitűzés önálló célfüggvényekben leírható. Az első cél megfogalmazásánál figyelembe vettük, hogy a gépipar távlati fejlesztési koncepciója szerint a termelés növekedésének csak egy kisebbik része — legfeljebb 10%-a oldható meg létszámnöveléssel és a nagyobbik részt — legalább 90%-ot termelékenység növelésből kell fedezni. E koncepció a modellben úgy fogalmazható meg, mint a munkaerőráfordítás minimalizálása.

A két célfüggvény az alábbi formában írható fel:

$$\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{3} a_{ij1t} X_{ijt} + \sum_{g=1}^{19}\sum_{r=1}^{3}\sum_{t=1}^{3} a_{g1rt} Y_{grt} \to \min!$$

$$\sum_{g=1}^{19}\sum_{r=1}^{3}\sum_{t=1}^{3} a_{grt} \cdot Y_{grt} \to \min!$$

A két célfüggvény együttes vizsgálatát is célszerű végrehajtani. Ugyanis a két célfüggvény alkalmas arra, hogy parametrikus programozással meghatározzuk azokat a karakterisztikus pontokat, ahol az együttes célfüggvény struktúrában változások állnak be. Így mód nyílik arra, hogy az egyes struktúra intervallumokban meghatározzuk a beruházási ráfordítás csökkenéséhez tartozó létszámváltozást. Ezzel lényegében a modell keretei között efficiens programok esetében vizsgáljuk a fenti két tényező határhatékonyságát.

Vezessük be a μ paramétert, mely $0 \leq \mu \leq 1$ értékeket vehet fel. A paraméteres célfüggvény alakja a következő:

$$\mu \left\{ \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{3} a_{ij1t} X_{ijt} + \sum_{g=1}^{19}\sum_{r=1}^{3}\sum_{t=1}^{3} a_{g1rt} Y_{grt} \right\} +$$

$$+ (1-\mu) \left\{ \sum_{g=1}^{19}\sum_{r=1}^{3}\sum_{t=1}^{3} a_{grt} Y_{grt} \right\} \to \min \qquad (0 \geq \mu \leq 1).$$

(Beérkezett: 1974. szeptember 5.)

IRODALOMJEGYZÉK

1. Bod Péter: A népgazdaság hosszú távú (15—20 éves) tervezése egy lehetséges matematikai modelljéről. (Szigma, 1969. II. évf. 1. szám).
2. Dániel Zs.—Jónás A.—Kornai J.—Martos B.: Tervszondázás. Tizenötéves pályák szimulációja. (Első jelentés: 1972. április. OT. Tervgazdasági Intézet).
3. Augustinovics Mária: Matematikai-közgazdasági modellek alkalmazása a népgazdasági tervezésben Magyarországon. (A Tervezés hatékonyságának kérdései c. tudományos ülésszak főreferátuma).
4. Kornai János: A gazdasági szerkezet matematikai tervezése. Bp. 1967. Közgazdasági és Jogi Kiadó.
5. Kornai János: Gondolatok a többszintű tervezési rendszerekről. Közgazdasági Szemle. 1971/9. sz.
6. Újlaki Zsuzsa: Hosszú távú többperiódusos összevont (B_2) programozási modell, Szigma, 1969. 4. szám.
7. Gépipari Technológiai Intézet: A KGM gépipari termelőberendezés állomány és struktúra tervezése. Metodika. (Munkaszám: M-00—612)
8. Gépipari Technológiai Intézet: Optimális technológiai struktúra a gépiparban. (Munkaszám: M-00—576).
9. Gépipari Technológiai Intézet: Számítások a gépipari hosszú távú tervezéshez. (Munkaszám: M-00—292).
10. OT. Ipari Főcsoport: A gépipar hosszú távú fejlesztésének főbb elgondolásai az 1971—1985. évekre.
11. OMFB. A hazai gépipar technológiája fejlesztésének főbb irányai. (Munkaközi anyag: 4—605 sz.).

12. FILEP GYÖRGY: A gépipari tárcamodell leírása és a számítások elemzése. Népgazdasági programozás (1966—70) 25. Tájékoztató. Budapest, 1967. Országos Tervhivatal és MTA. Számítástechnikai Központ.
13. FILEP GYÖRGY—PÁSZTOR FERENC: A KGM gépipari termelőberendezés állomány és struktúra tervezése. Kutatási jelentés. Gépipari Technológiai Intézet 1972.

LONG-TERM PLANNING OF STOCKS AND THE COMPOSITION OF EQUIPMENT FOR MACHINE PRODUCTION

The paper explains a multiperiod linear programming model, which has been used in the planning practice. The model gives an appropriate method for preventing uneconomic use of old equipment and for the required scrapping and installation, so as to keep the average age of the machinery below a predetermined minimum level. This enables the complex long-run study of the effects of technological progress.

Although the model was designed originally for long-term planning in the engineering industry, the methodology can be extended to the study of similar problems in other industries.

ДОЛГОСРОЧНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ПАРКА И СТРУКТУРЫ ПРОМЫШЛЕННОГО ОБОРУДОВАНИЯ МАШИНОСТРОИТЕЛЬНОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

В работе освещается применяемая на практике модель линейного программирования, расчитанная на несколько периодов. Модель дает подходящий метод для предупреждения нежелательного устаревания производственного оборудования и осуществления желательной выбраковки и развития его с обеспечением заранее определенного минимального срока жизни машин. Тем самым модель обеспечивает комплексное долгосрочное исследование влияния технического развития.

Хотя модель первоначально строилась для нужд обоснования долгорочного планирования в машиностроении, применяемая в ней методика пригодна для исследования сходных проблем и в других отраслях.

Benedikt Vera

Egy egészértékű feladat heurisztikus megoldása

(Öntöde termelésének programmozása)

1. Bevezetés

Dolgozatomban egy nagyméretű egészértékű feladat heurisztikus megoldását ismertetem: az egészértékű feladat egy öntöde termelési programjának matematikai modellje. A feladat így elég speciális és a megoldásban kihasználom az öntödei adottságokat. A feladat megfogalmazása előtt tehát először azokat az öntödében végbemenő folyamatokat kell megismerni, amelyeket a modell figyelembe vesz.

2. Öntödei technológiák

Feladatunk egy öntöde vasfelhasználásának optimalizálása volt. A vaskihasználást csak két technológia befolyásolta: a formázás és az öntés.

2.1. *Formázás*

A formázás formázógépeken történik. A formázóállványra mintát szerelnek. Erre ráraknak egy „szekrény"-t (ez egy mindkét oldalán nyitott láda), a szekrénybe homokot öntenek és gép segítségével a homokot jól ledöngölik; majd leemelik a szekrényt az állványról. Így a homokban megmarad a termék helye. Egy terméket két szekrény összerakásával lehet majd kiönteni. Az így összerakott formázószekrénypáron hagynak egy nyílást és itt öntik be a vasat.

2.2. *Formázás fajtái*

A formázást három fajta technológiával végzik: kisgépes, nagygépes vagy kézi technológiával. Azt, hogy egy termék melyik fajta technológiához tartozik, a szekrényméret és a formázás munkaigényessége határozza meg. A technológiák ezen kívül vasigényben, formázó időigényben és átállási (mintacsere) időben különböznek egymástól. Az egyes formázó technológiákat a következőkben jellemezhetjük:

a) *Kisgépes* formázógépeken kis vasigényű termékeket formáznak. A formázóidő itt nagyon kicsi. A mintacsereidő általában 0,55 óra. Négy pár formázógép van, amelyek egy konveyort szolgálnak ki. A konveyor egyik végén vannak a formázógépek, a másikon öntik a vasat. Amint megformáznak egy terméket, azonnal konveyorra rakják. Itt nincs raktározási lehetőség. Tehát összesen annyi szekrényt tudnak formázni, amennyi a konveyorra ráfér. A konveyort lehetőleg teljesen le kell terhelni. A konveyor kapacitása szekrény-darab/óra dimenzióban adott szám. A nagy mintacsere idő miatt egy sorozatot lehetőleg folyamatosan kell formázni, legfeljebb két óránként szabad mintát cserélni.

b) *Nagygépes* formázás: Ide a nagyobb vasigényű és formázóidejű termékek tartoznak. Mintacsereidejük kb. 0,85 óra. Itt van raktározási lehetőség, amelyre jelenleg a modellben nem vettünk figyelembe korlátot. Két pár formázógép van. Egy sorozatot lehetőleg folyamatosan kell formázni, itt azonban nincs korlát a folyamatosságra.

c) *Kézi* formázás: Itt részben olyan termékeket formáznak, amelyekből csak egy-két darabot kell gyártani, tehát nem érdemes géppel formázni, vagy olyan vasigényes termékeket, amelyek méreteik miatt nem férnek el egy formázógépen sem; vagy olyan munkaigényes termékeket, amelyek csak kézzel formázhatók. Itt is van raktározási lehetőség és itt sem vettünk figyelembe erre korlátot. Három munkacsoport tartozik ide, amelyeket a továbbiakban mint különböző gépeket kezelünk és formailag is gépnek nevezünk.

A formázó technológiáknál teljesülnie kell annak a feltételnek, hogy egy időben (azaz párhuzamosan), egy fajta terméket csak egy formázógép-páron lehet formázni, mivel minden termékhez egy minta tartozik és minden mintából csak egy van. Tehát, mint az előzőekben említettem, egy mintához tartozó sorozatot folyamatosan érdemes formázni, kivéve a kézi technológiát, mivel ott nincs mintacsere idő.

Előre rögzített, hogy melyik termék mely formázó technológiához tartozik. A kézi formázással formázandó termékeknél a munkacsoport is előre adott; a kis-, illetve nagygépeknél a négy-, illetve két formázógép-pár egymás között konvertálható.

2.3. *Öntés*

Az öntéshez a vasat egy kúpolóban olvasztják. Általában tekinthetjük úgy hogy a kúpolóból óránként 3 tonna vasat lehet lecsapolni. Pontosabban ez az adott mennyiség ε eltéréssel lehet több vagy kevesebb. Ha egy órában $\pm\varepsilon$-nál több, illetve kevesebb vasat használunk fel, az csak a következő órában vehető figyelembe. Ezt a $3 \pm \varepsilon$ tonna vasat kell a három technológiára, illetve azokon belül formákra elosztani úgy, hogy a vaskihasználás a lehető legjobb legyen. Az olvasztott vasat tégelyekben viszik a kis-, nagy-, illetve kézi formázáshoz és ott öntik be a kész szekrényekbe. Az öntés gyakorlatilag nem használ el időt.

3. A feladat megfogalmazása

Feladatunkat ezekután a következőképpen fogalmazhatjuk meg:

Egy hónap (negyedév) minden órájára olyan ütemtervet kell készíteni, hogy a kúpolóból óránként nyerhető vasat anyagveszteség nélkül fel lehessen használni az alábbi szempontok figyelembevételével:

a) A kisgépes formázáshoz tartozó konveyort teljesen leterheljük.

b) Egy terméksorozatot nem formázhatunk párhuzamosan több formázógéppáron.

c) Figyelembevesszük a formázógépek sajátosságait, valamint a formázógép-párok leterhelését. A kis-, illetve nagy formázógép-párok homogén gépcsoportnak tekintendők, a kézi formázás egyedi gépeken történik.

d) A kis- és nagygépeknél mintacsereidőt (átállási időt) veszünk figyelembe.

e) A nagy- és kézi formázógépeknél korlátlan raktározási lehetőséggel számolunk; a kisgépeknél nincs raktározási lehetőség.

f) Egy terméksorozatot a kis- és nagygépeken lehetőség szerint folyamatosan öntünk. Minimálisan két óránként lehet mintacsere.

4. A feladat matematikai modellje

Az ütemtervet egy egészértékű, (0,1)-es feladat megengedett megoldása adja.
Jelölések:

I indexhalmaz; a kisgéppel formázandó öntvények indexeinek halmaza
J indexhalmaz; a nagygépes termékek indexhalmaza
K indexhalmaz; a kézi formázáshoz tartozó termékek indexhalmaza
x_i^k egy (0,1) komponensű vektor eleme, mely 0, ha az i-edik öntényt a k-adik órában nem öntjük és 1, ha igen
s_i^k, S_i^k az i-edik termékből a k-adik órában elkészített termékek darabszáma (s_i^k kisgépes, S_i^k nagygépes és kézi formázásra vonatkozik)
a_i az i-edik termék 1 darabjának vasigénye
f_i az i-edik termék 1 darabjának formázóideje
p_i az i-edik termékhez tartozó mintacsereidő
P_i^m az i-edik termékből az m-edik hónapban készítendő darabszám
T_i^k az aktuális darabszám (P_i^m-ből kivonva az i-edik termékből már eddig elkészült formák darabszámát)
D_0 egy óra alatt a konveyor leterheléséhez szükséges szekrény darabszám
L_0 egy óra alatt a kúpolóból nyerhető vas

Ezen jelölések alapján valamelyik nap k-adik órájára a következőknek kell teljesülniök:

$$kL_0 - \varepsilon \le \sum_{l=1}^{k-1} L_l + \sum_I a_i x_i^k S_i^k + \tag{1}$$
$$+ \sum_J a_i x_i^k S_i^k + \sum_K a_i x_i^k S_i^k \le kL_0 + \varepsilon$$

$$L_l = \sum_I a_i x_i^l S_i^l + \sum_J a_i x_i^l S_i^l + \sum_K a_i x_i^l S_i^l \qquad l = 1,2,\dots, k\text{-}1$$

$$D_0 - \delta \le \sum_I s_i^k \le D_0 + \delta \tag{2}$$

$$s_i^k \le \begin{cases} \min\left\{T_i^k; \max\left[\dfrac{\lambda_\nu^{k-l} + 1 - p_i}{f_i}\right]\right\} & \text{ha } x_i^{k-1} = 0,\ x_i^k = 1\ (i \in I) \\ & \nu = 1, 2, 3, 4 \\ \min\left\{T_i^k; \left[\dfrac{1}{f_i}\right]\right\} & \text{ha } x_i^{k-1} = x_i^k = 1, \quad (i \in I) \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \tag{3}$$

ahol $0 \le \lambda_\nu^{k-1} \le 0{,}55$

$$(4)\quad S_i^k \le \begin{cases} \min\left\{T_i^k; \left[\dfrac{1+\omega_\nu^{k-1}}{f_i}\right]\right\} & \text{ha } x_i^{k-1} = x_i^k = 1\,, \quad (i \in J) \quad \nu = 1, 2 \\ \min\left\{T_i^k; \left[\dfrac{1-p_i+\max\{\omega_\nu^{k-1}\}}{f_i}\right]\right\} & \text{ha } x_i^{k-1} = 0\,, x_i^k = 1\,, \quad (i \in 1) \quad \nu = 1, 2 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

$$\text{ahol } \omega_\nu^k = \omega_\nu^{k-1} + 1 - \sum_J f_i^k S_i^k - \sum_{k-1} p_i \qquad \nu = 1{,}2$$

$$\text{ha } x_i^{k-1} = 0, x_i^k = 1, (i \in J); k = 1,\ldots,8$$

Az (1) feltétel a vas folyamatos leterhelését biztosítja. Mivel optimalizálásra nem törekedtünk, $\pm\varepsilon$-nyi óránkénti eltérést veszünk figyelembe.

A (2) feltétel a konveyor leterhelésére vonatkozik. A tapasztalat alapján itt sem lehetséges a szigorú egyenlőség (kezdetben azzal számoltunk). Így itt is $\pm\delta$ eltérést veszünk figyelembe.

A (3) összefüggéssel a kisgépes termékből a k-adik órában öntendő darabszámot számoljuk ki, amely vagy annyi, amennyit (a) a sorozatból még gyártani kell, vagy amennyit (b) maximálisan formázni tudunk egy óra alatt. Ha már az előző, $(k - 1)$ órában elkezdtük a formázást, akkor az (a), (b) minimuma az a maximális termékmennyiség, amennyit a k-adik órában önteni tudunk. Ha az előző órában az i-edik terméket még nem kezdtük el formázni, akkor a formázásra fordítható időt úgy kapjuk meg, ha az egy órához hozzávesszük az előző órából a tekintett formázógép-páron fennmaradt időt, λ_ν^{k-1}-t, ha az a mintacsere időnél nem nagyobb. A formázásra fordítható időből azonban le kell vonni az átállási időt (p_i-t). Tehát új termék esetén a ν-edik kisgépes formázógéppáron maximum

$$\min\left\{T_{k'}^i; \frac{1 - p_i + \lambda_\nu^{k-1}}{f_i}\right\}$$

darabot formázhatunk. A (4) feltétel ugyanilyen meggondolás alapján a nagy-, ill. kézi formázással formázandó termékek darabszámát adja, de mivel a nagy-, ill. a kézi formázógép-pároknál van raktározási lehetőség, tehát annyit tudunk formázni az i-edik termékből a ν-edik gépen, amennyi a ν-edik gép szabad kapacitása. A szabad kapacitást az (5) feltétellel számoljuk ki. Nagygépeknél új termékválasztás esetén, így érdemes azon formázógép-páron formázni, ahol a k-adik óráig a legtöbb szabad kapacitás van.

5. Az algoritmus ismertetése

Feladatunk megoldását az előző fejezetben leírt egészértékű feladat óráról-órára történő megoldása adja. Az I, J, K halmazok 300—300 eleműek, így egy 900 változós feladatot kellett megoldanunk. A feladat nagy mérete miatt egy heurisztikus módszert dolgoztunk ki.

A heurisztikus módszer kidolgozásánál két fő szempontot vettünk figyelembe: elsősorban a változók számát akartuk csökkenteni, másodsorban az iterációk számát. Mindkét szemponthoz célszerűnek látszott a változókat úgy csoportosítani (osztályba sorolni), hogy a feladat megoldása során ezeket az osztályokat vagy az osztályok egy elemét tudjuk változóként kezelni. Az alapfeladatból egy kézenfekvő csoportosítás adódott: olyan termékosztályokat készítsünk, hogy az egyes osztályokhoz tartozó termékek óránkénti vasigényére adott valamilyen becslést. Így a megoldás során ha már van rögzített termék,, elegendő csak azokat az osztályokat nézni, aminek a vasigénye a maradék vasnál nem több.

Az iterációk számának csökkentésére is adódik az alapfeladatból egy kézenfekvő lehetőség. Ha minden nap első órájára egy olyan megoldást keresünk a kisgépes termékekre és, ha lehet, a nagygépes termékekre is, amelyek előreláthatólag egész napra (osztálytól eltekintve) — azaz kb. 8 iterációra — jók. A többi 7 iterációnál így már csak egy 300 változóból álló feladatot, ill., az osztálybasorolástól függően, még kevesebb változóból álló feladatot kell megoldani.

Végül felmerül az a kérdés, hogyan biztosítható, hogy az eljárás végén is kapjunk megoldást. Mivel a kisgépes termékeket állandóan kell formázni, és a vasigényük nem számottevő: csak a nagygépes és a kézi termékek ütemezését kell meghatározni. A kézi- és a nagygépes termékek maradék (még be nem ütemezett) összformázóideje adott egy jó előrebecslést arra, hogy mely gépre még mennyit kell ütemezni, azaz melyik gépet kell először leterhelni. Az eddigiek alapján az algoritmus két részből áll:

1. A változók osztálybasorolásából.
2. Leszámolási algoritmusból.

Első fázis: A termékeket óránkénti vasigényük alapján osztályokba soroltuk. Az osztályokat gyakoriságszámítás alapján határoztuk meg. Meghatároztunk „-tól-ig" határokat és egy osztályba soroltuk azokat a termékeket, amelyek óránkénti vasigénye a meghatározott határok közé esett. Ilymódon egy osztályba kerültek azok a termékek, amelyek öntéséhez (ha az öntésük egy órán keresztül folyamatosan történik) kb. ugyanannyi vas szükséges. Az így elkészített osztályokat kezeltük változóként. Az egyes csoportok óránkénti vasigényét az osztályba tartozó termékek átlag vasigénye adta.

Második fázis: A leszámolási algoritmus csak egy napi megoldást ad. A megoldás során feltételeztük a 8 órás munkanapot. A továbbiakba a „választás" azt jelenti, hogy a különböző osztályokat tekintjük egy-egy változónak és így a leszámolási algoritmussal keresünk új megoldást. A megoldás tulajdonképpen a kiválasztott osztály első olyan elemét jelenti, amit még nem ütemeztünk. Ezt megtehetjük, mert így az eltérések $\pm\varepsilon$-nál nem lesznek nagyobbak (az osztályhatárok meghatározásánál ezt figyelembevettük).

A „cserélés" azonos osztályból való termékek cseréjét jelenti.

A leszámolási algoritmus lépései:

1. Olyan megoldást választunk kisgépekre, amely teljesíti (2)-t és amely legalább két órán keresztül folyamatos gyártást biztosít. Minden olyan terméket, amivel a rögzített termékek a (2) feltételt nem teljesítik, letiltunk.

2. A vasmennyiséget csökkentjük az (1)-ben választott termékek vasigényével. Megnézzük, hogy a nagygépes vagy a kézi termékek igényelnek-e több formázóidőt. Ha a nagygépesek igényelnek többet, GO TO 3. Ha a kéziek, GO TO 4.

3. Az első olyan legnagyobb osztálytól, amelynek vasátlaga nem kisebb, mint a maradék vas, választunk termékeket a nagygépre.

3/a. Megnézzük, folytathatók-e az előző órában rögzített nagygépes termékek.
Ha igen, GO TO 3/b.
Ha nem, cserélünk és GO TO 3/b.
Ha nem tudunk cserélni, GO TO 3.

3/b. Kiszámítjuk a maradék vasat. Ha nincs több vas: GO TO 5.
Ha van még vas, megnézzük: kézi terméket már választottunk-e.
Ha választottunk, GO TO 8.
Ha nem választottunk, GO TO 4.

4. Választunk kézi termékeket abból az első legnagyobb osztályból, aminek a vasátlaga nem kisebb a maradék vasnál.
Kiszámítjuk a maradék vasat
Ha nincs több vas, GO TO 5.
Megnézzük, kézitermékeket választottunk-e.
Ha igen, GO TO 5.
Ha nem, és ha $k \neq 1$, BO TO 3/b.
Különben GO TO 3

5. Kiszámítjuk az S_i^k-ket, s_i^k-ket, ω-kat, λ-kat, T_i^k-ket. Legyen $k = k+1$. GO TO 6.

6. Megvizsgáljuk, van-e még termék. Ha minden terméket beütemeztünk, akkor vége. Ha még nem ütemeztünk be minden terméket, és $k = 8$, akkor a letiltott termékeket felszabadítjuk és $k = 0$. GO TO 1.
Ha $k \neq 8$, GO TO 7.

7. Megvizsgáljuk, folytathatók-e a kisgépes termékek.
Ha igen, GO TO 2.
Ha nem folytathatók, akkor cserélünk és GO TO 3.
Ha nem tudunk cserélni, GO TO 1.

6. Számítási tapasztalatok

Az előző fejezetben leírt algoritmusra IBM 360/40 gépre program készült· A program kb. 20—30 perces CPU (belső idővel ütemezett be egy hónapot· (Kb. 180 iteráció).

Az algoritmust eléggé gyorsította az, hogy a csoportosítással elértük hogy 3—400 változó helyett elég volt 40—50-nel számolni. Általában csak az utolsó napokra nem kaptunk megengedett megoldást termékhiány miatt. Az algoritmus során mindig csak egy megengedett megoldásra törekedtünk és így az optimumról, vagy annak közelségéről semmit sem tudunk mondani.

A program úgy készült, hogy valamilyen hiba esetén bárhonnan újra lehet kezdeni.

(Beérkezett: 1974. január 9.)

HEURISTIC SOLUTION TO AN INTEGER PROBLEM (PRODUCTION SCHEDULE FOR A FOUNDRY)

The paper outlines the heuristic solution of a large-scale (900 variable) integer programming problem. This problem is the mathematical model of the production scheduling of a foundry. The solution makes use of special features of the problem, and hence before formulating it the foundry problem itself is described.

In the first part of the paper the industrial problem and its mathematical model are outlined. The mathematical model itself is a large-scale integer programming problem. The heuristic solution of this integer problem consists of two stages, these are: the reduction of the number of variables and an enumeration algorithm.

The paper sums up the computational experience.

ЭВРИСТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

(Программирование литейного производства)

Настоящая работа излагает эвристическое решение целочисленной задачи большого размера (900 переменных). Целочисленная задача является математической моделью производственной программы литейного цеха. Решение основано на особенностях задачи, поэтому перед описанием задачи излагаем задачу литейного цеха.

В первой части данной работы излагается решаемая промышленная проблема, затем ее математическая модель. Математическая модель является целочисленной задачей большого размера. Эвристическое решение целочисленной задачи производится в двух этапах: сокращение числа переменных, затем алгоритм отсчета.

В заключении в работе подводится итог опытов расчетов.

Stahl János

Egy LP-dekompozíciós eljárásról

1. A korlátos eset összefoglalása

Ebben a részben azon lineáris programozási dekompozíciós eljárásra vonatkozó eredményeket foglaljuk össze és egészítjük ki némileg, mellyel [5]-ben foglalkoztunk. A külön összefoglalást az említett kiegészítésen túl az indokolja, hogy egyrészt a jelöléseket egyszerűsítendő [5]-höz képest — különösebb magyarázatot nem igénylő — más jelöléseket használunk, másrészt a megértést szeretnénk megkönnyíteni, mivel az [5]-beliekre, mint eredeti eljárásra több alkalommal is hivatkozunk majd.

[5]-ben az

$$\begin{gathered} A_{01}x_1 \le b_0 \\ A_{10}x_0 + A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \le b_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 \le b_2 \\ x_0,\ x_1,\ x_2 \ge 0 \\ \max\,(c_0x_0 + c_1x_1 + c_2x_2) \end{gathered} \tag{1.1}$$

és

$$\begin{gathered} p_1A_{10} \ge c_0 \\ p_0A_{01} + p_1A_{11} + p_2A_{21} \ge c_1 \\ p_1A_{12} + p_2A_{22} \ge c_2 \\ p_0,\ p_1,\ p_2 \ge 0 \\ \min\,(p_0b_0 + p_1b_1 + p_2b_2) \end{gathered} \tag{1.2}$$

primál-duál lineáris programozási feladatpárt vizsgáltuk és feltettük, hogy az

$$\mathscr{X}_1 = \{x_1 : A_{01}x_1 \le b_0,\ x_1 \ge 0\}$$

és

$$\mathscr{P}_1 = \{p_1 : p_1A_{10} \le c_0,\ p_1 \ge 0\}$$

halmazok nem üresek és korlátosak. (Kisbetűvel, az indexektől eltekintve, sor vagy oszlopvektort jelölünk, nagybetű mátrixot, írott nagybetű poliédert, görög kisbetű skalárt jelöl.)

p_1-re vonatkozó feladatnak neveztünk egy

$$\begin{gathered}
A_{10} x_0 + \sum_i \lambda_i (A_{11} \tilde{x}_{1i} + A_{12} \tilde{x}_{2i}) + \sum_j \mu_j (A_{11} \tilde{\tilde{x}}_{lj} + A_{12} \tilde{\tilde{x}}_{2j}) \leq b_1 \\
\sum_i \lambda_i = 1 \\
x_0,\ \lambda_i,\ \mu_j \geq 0 \\
\max\, [c_0 x_0 + \sum_i \lambda_i (c_1 \tilde{x}_{1i} + c_2 \tilde{x}_{2i}) + \sum_j \mu_j (c_1 \tilde{\tilde{x}}_{1j} + c_2 \tilde{\tilde{x}}_{2j})]
\end{gathered} \tag{1.3}$$

alakú programozási feladatot, ahol az $(\tilde{x}_{1i}, \tilde{x}_{2i})$-k illetve az $(\tilde{\tilde{x}}_{1j}, \tilde{\tilde{x}}_{2j})$-k az

$$\mathscr{X} = \{(x_1, x_2) : A_{01} x_1 \leq b_0,\ A_{21} x_1 + A_{22} x_2 \leq b_2,\ x_1, x_2 \geq 0\}$$

poliéder elemei illetve irányai, és hasonlóan, x_1-re vonatkozó feladat egy

$$\begin{gathered}
p_0 A_{01} + \sum_i \sigma_i (\tilde{p}_{1i} A_{11} + \tilde{p}_{2i} A_{21}) + \sum_j \tau_j (\tilde{\tilde{p}}_{1j} A_{11} + \tilde{\tilde{p}}_{2j} A_{21}) \geq c_1 \\
\sum_i \sigma_i = 1 \\
p_0,\ \sigma_i,\ \tau_j \geq 0 \\
\min\, [p_0 b_0 + \sum_i \sigma_i (\tilde{p}_{1i} b_1 + \tilde{p}_{2i} b_2) + \sum_j \tau_j (\tilde{\tilde{p}}_{1j} A_{11} + \tilde{\tilde{p}}_{2j} A_{21})]
\end{gathered}$$

alakú lineáris programozási feladat volt, ahol a $(\tilde{p}_{1i}, \tilde{p}_{2i})$-k illetve a $(\tilde{\tilde{p}}_{1j}, \tilde{\tilde{p}}_{2j})$-k

$$\mathscr{P} = \{(p_1, p_2) : p_1 A_{10} \geq c_0,\ p_1 A_{12} + p_2 A_{22} \geq c_2,\ p_1, p_2 \geq 0\}$$

poliéder elemei illetve irányai.

$\mathscr{X}_1$ illetve $\mathscr{P}_1$ korlátosságából (1.3)-ban illetve (1.4)-ben $\tilde{\tilde{x}}_{1j} = 0$ illetve $\tilde{\tilde{p}}_{1j} = 0$ és ugyanezen feltevésekből egy (1.3) illetve (1.4) feladatnak mindig van lehetséges megoldása. Az is egyszerűen belátható, hogy amennyiben egy (1.3) illetve (1.4) alakú feladat nem korlátos, akkor az (1.2) duális feladatnak illetve (1.1)-nak nincs lehetséges megoldása. Sőt ekkor már $\mathscr{P} = \emptyset$ illetve $\mathscr{X} = \emptyset$ és ezen állítások érvényességéhez nem szükséges $\mathscr{X}_1$ illetve $\mathscr{P}_1$ korlátossága.

A javasolt dekompozíciós eljárás egy iterációs lépésében először megoldunk egy (1.3) és egy (1.4) alakú feladatot.

A lépés második felében az előbbi feladatok $(\tilde{p}_1, \tilde{\pi}_0)$ illetve $(\tilde{x}_1, \tilde{\zeta}_0)$ megoldása alapján adódik az

$$\begin{gathered}
A_{22} x_2 \leq b_2 - A_{21} \tilde{x}_1 \\
x_2 \geq 0 \\
\max\, (c_2 - \tilde{p}_1 A_{12})\, x_2
\end{gathered} \tag{1.5}$$

lineáris programozási feladat. Legfeljebb végesszámú alkalommal fordulhat elő, hogy (1.5)-nek nincs lehetséges megoldása, vagy a feladat nem korlátos, mikoris az (1.4) feladatba egy alkalmas τ illetve az (1.3) feladatba egy alkalmas μ változót bevezetve a megfelelő feladat megoldása után új $\tilde{x}_1$ illetve $\tilde{p}_1$ adódik.

Ellenkező esetben, ha $\tilde{x}_2$ (1.5), $\tilde{p}_2$ pedig (1.5) duálisának optimális extremális megoldása, $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in \mathcal{X}$ illetve $(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) \in \mathcal{S}$ és ezen elemeknek megfelelő λ illetve σ változókkal bővítjük az (1.3) illetve (1.4) feladatokat, melyek megoldása után adódik az új $\tilde{p}_1$ és $\tilde{x}_1$.

Ha az (1.1) feladatnak nincs optimális megoldása, az eljárás lépéseinek végesszámú végrehajtása után befejeződik. Ellenkező esetben vagy az eljárás végesszámú lépésben megoldja a feladatot, vagy az adódó p_1-re és x_1-re vonatkozó feladatok optimumértékeinek monoton nem csökkenő illetve monoton nem növekvő sorozata konvergál az (1.1) feladat optimumértékéhez. Ha egy p_1-re (x_1-re) vonatkozó feladat tartalmaz λ (σ) változót és a feladatnak van lehetséges megoldása, ennek alapján nyilvánvaló módon adódik az (1.1) [a duális (1.2)] feladat egy lehetséges megoldása.

[5]-ben megmutattuk továbbá, hogy ha az eljárás végtelen, végtelen sokszor változik $\tilde{x}_1$ is és $\tilde{p}_1$ is, valamint azt, hogy az eljárásra vonatkozó előbbi állítások akkor is érvényesek, ha a p_1-re (az x_1-re) vonatkozó feladatba csak akkor vezetjük be az $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ [a $(\tilde{p}_1\, \tilde{p}_2)$] meghatározta λ (σ) változót, ha

$$\left[\text{ha} \quad \begin{aligned} c_1\tilde{x}_1 + c_2\tilde{x}_2 &> \tilde{p}_1(A_{11}\tilde{x}_1 + A_{12}\tilde{x}_2) + \tilde{\pi}_0 \\ \tilde{p}_1 b_1 + \tilde{p}_2 b_2 &< (\tilde{p}_1 A_{11} + \tilde{p}_2 A_{21})\tilde{x}_1 + \tilde{\xi}_0 \end{aligned}\right]$$

azaz a bevezetendő új változó a meglevő feladat duálisának egy optimális megoldása alapján a célfüggvény javulását igéri.

Az $\mathcal{X}_1$-re és $\mathcal{S}_1$-re tett feltevés alapján az eddig elmondottakat korlátos esetnek nevezhetjük.

A továbbiakban először egyrészt az eljárás azon esetre történő kiterjesztésével foglalkozunk, mikor az $\mathcal{X}_1$-re és $\mathcal{S}_1$-re vonatkozó ezen feltevéseket elhagyjuk (általános eset), másrészt pedig azzal, ha csak az egyiket tartjuk meg (félig korlátos eset). Utóbbi külön vizsgálatát az indokolja, hogy gyakorlati alkalmazás szempontjából több-kevesebb joggal a szóbajövő legáltalánosabb esetnek tekinthető.

A befejező részben a szóbanforgó eljárások alkalmazásaként egy olyan dekompozíciós eljárást származtatunk, mikor egy lineáris programozási feladatot olyan részfeladatok megoldásain keresztül oldunk meg, mely feladatok mátrixai az eredeti feladatok mátrixának tetszőleges részei. Ezt a lehetőséget nevezzük teljes dekompozíciónak.

2. Az általános és félig korlátos eset

Tekintsük az eredeti (1.1)—(1.2) primál-duál lineáris programozási feladatpár helyett az

$$\begin{aligned} e x_1 &\le \beta \\ A_{01}x_1 &\le b_0 \\ -e\zeta + A_{10}x_0 + A_{11}x_1 + A_{12}x_2 &\le b_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 &\le b_2 \\ \zeta, x_0, x_1, x_2 &\ge 0 \\ \max(-\gamma\zeta + c_0x_0 + c_1x_1 + x_2c_2)& \end{aligned} \tag{2.1}$$

és

$$
\begin{gathered}
-p_1 e \geq -\gamma \\
p_1 A_{10} \geq c_0 \\
\pi e + p_0 A_{01} + p_1 A_{11} + p_2 A_{21} \geq c_1 \\
p_1 A_{12} + p_2 A_{22} \geq c_2 \\
\pi, p_0, p_1, p_2 \geq 0 \\
\min\, (\pi\beta + p_0 b_0 + p_1 b_1 + p_2 b_2)
\end{gathered} \tag{2.2}
$$

primál-duál lineáris programozási feladatpárt, ahol β és γ rögzített nem-negatív számok, az e-k pedig olyan alkalmas méretű vektorok, melyeknek minden komponense 1.

Az eredeti (1.1)—(1.2) és amost bevezetett (2.1)—(2.2) feladatpár kapcsolatát foglalják össze a következő egyszerű lemmák.

2.1. *lemma*: Ha az

$$
\begin{gathered}
A_{21} x_1 + A_{22} x_2 \geq b_2 \\
x_1, x_2 \geq 0
\end{gathered}
$$

és a

$$
\begin{gathered}
p_1 A_{12} + p_2 A_{22} \geq c_2 \\
p_1, p_2 \geq 0
\end{gathered}
$$

feltételrendszereknek van lehetséges megoldása, akkor (2.1)-nek van olyan bázisa, mely optimális minden alkalmasan nagy (β, γ)-ra.

Bizonyítás:

Tekintve (2.1) egy tetszőleges bázisát és megvizsgálva a szóbanforgó bázis primál lehetséges voltának feltételeit, ezen feltételek teljesülnek, ha β egy zárt (esetleg üres) intervallumba esik. Ugyanígy adódik minden bázishoz γ-értékek egy olyan zárt (és esetleg ugyancsak üres) intervalluma, melybe eső γ-k esetén a bázis duál lehetséges.

Ha a szóbanforgó feltételrendszereknek van lehetséges megoldásuk, akkor (2.1) és (2.2) minden elég nagy (β, γ)-ra megoldható, tehát van olyan bázis, mely egy ilyen (β, γ) esetén egyszerre primál és duál lehetséges. Minthogy a szóbajövő bázisok száma véges, van olyan bázis, mely optimális minden alkalmasan nagy (β, γ)-ra.

(1.1) megoldásához nem szükséges egy rögzített (β, γ) esetén (2.1) optimális megoldását meghatározni.

Rögzítsünk a továbbiakhoz egy olyan bázist, melynek létezését a 2.1. lemma állítása biztosítja. A változók (2.1)-beli sorrendjét megtartva jelöljük az ehhez tartozó mátrixot B-vel és legyenek (ζ^*, x_1^*, x_2^*) és (π^*, p_1^*, p_2^*) a bázishoz tartozó — optimális — primál és duál bázismegoldások.

2.2. *lemma*. A 2.1. lemma feltételei mellett ζ^* és π^* mindegyike konstans, azaz nagyságuk független (β, γ)-tól

Bizonyítás:

Ha ζ bázis változó, akkor

$$(\zeta^*, \underline{x}_1^*, \underline{x}_2^*) = B^{-1}\, (\beta, b_1, b_2)$$

ahol az aláhúzások azt jelölik, hogy csak bázisváltozókra szorítkozunk. Innen

$$\zeta^* = \alpha\beta + (c_1, c_2)b'$$

adódii, ahol (α, b') a B^{-1}-nek első sorát jelöli. Abból, hogy minden elég nagy β-ra $\zeta^* \geq 0$ teljesül, $\alpha \geq 0$ következik.

Hasonlóan,

$$(\pi^*, \underline{p}_1^*, \underline{p}_2^*) = (-\gamma, \underline{c}_1, \underline{c}_2)\, B^{-1}$$

amiből

$$\pi^* = -\gamma\alpha + (\underline{c}_1, \underline{c}_2)\, b''$$

és $\alpha \leq 0$ következik. Így $\alpha = 0$, amivel az erre az esetre vonatkozó állítást igazoltuk.

Ha ζ nem bázisváltozó, akkor $\zeta^* = 0$ és $\pi^* = (c_1, c_2)\ (\alpha, b'')$, amivel a másik esetet is elintéztük.

2.3. *lemma.* Tegyük fel, hogy teljesülnek a (2.1) lemma feltételei. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen rögzített és (β, γ) olyan, hogy (2.1)-nek van optimális megoldása. Legyen $(\tilde{\zeta}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ (2.1) egy olyan lehetséges megoldása, melyhez tartozó célfüggvényérték (2.1) optimumértékénél legfeljebb ε-nal kisebb. Akkor $\lim\limits_{(\beta,\gamma)\to\infty} \tilde{\zeta} = \zeta^*$. (A határértékképzés nyilván úgy értendő, hogy ∞-hez tartozó β-k és γ-k egy sorozatára, illetve az ezekhez tartozó (2.1) feladatok fenti tulajdonságú lehetséges megoldásaira szorítkozunk.)

Bizonyítás:

Induljunk ki az alábbi egyenlőségből

$$-\gamma\tilde{\zeta} + c_1\tilde{x}_1 + c_2\tilde{x}_2 = -\gamma\zeta^* + c_1 x_1^* + c_2 x_2^* + \Sigma\pi_j^*\zeta_j$$

ahol az összegzés a bázisba nem tartozó j indexekre vonatkozik, π_j^*-a j-edik változóhoz tartozó, ezen bázisra vonatkozó relatív költség, $\tilde{\zeta}_j$ pedig $(\tilde{\zeta}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ megfelelő komponense. Minthogy $\pi_j^* \leq 0$ és $\tilde{\zeta}_j \geq 0$ minden j-re és feltételünk szerint $-\Sigma\pi_j^*\tilde{\zeta}_j \leq \varepsilon$, azért $-\pi_j^*\tilde{\zeta}_j \leq \varepsilon$ is fennáll minden nem bázisváltozóhoz tartozó j indexre.

Különböztessünk meg két esetet aszerint, hogy ζ bázisváltozó-e vagy sem. Az első esetben valamennyi π_j^* a γ-nak lineáris függvénye, azaz $\pi_j^* = \alpha_j\gamma + \alpha_j^*$ és $\pi_j^* \leq 0$-ból $\alpha_j \leq 0$ következik. $-\pi_j^*\tilde{\zeta}_j \leq \varepsilon$ alapján viszont adódik, hogy olyan esetben, mikor $\alpha_j < 0$ teljesül, $\tilde{\zeta}_j$ tetszőlegesen kicsiny lesz. Másrészt fennáll most a $\tilde{\zeta} = \zeta^* + \Sigma\alpha_j\tilde{\zeta}_j$ egyenlőség is. Minthogy $\tilde{\zeta}$ értékében csak olyan $\tilde{\zeta}_j$-knek van szerepük, melyekre $\alpha_j \neq 0$ és ezekre $\tilde{\zeta}_j$ tetszőlegesen kicsiny lesz, ezért ugyanez igaz $\tilde{\zeta}$ és ζ^* eltérésére is.

Ha ζ nem bázisváltozozó, akkor a változóhoz tartozó relatív költség $-\gamma-\alpha^*$ alakú és a $(\gamma + \alpha^*)\tilde{\zeta}' < \varepsilon$ egyenlőtlenségből adódik az állítás.

A $(\gamma + \alpha^*)\tilde{\zeta} < \varepsilon$ egyenlőtlenségből egyébként az is következik, hogy $\gamma\tilde{\zeta}'$ tetszőlegesen kevéssel nagyobb ε-nál. Egy megfelelő állítás az első esetben is érvényes akkor, ha $\zeta^* = 0$, azaz az (1.1) feladat megoldható. Ugyanis $\gamma\tilde{\zeta} = \Sigma\alpha_j\gamma\tilde{\zeta}_j$, az összeg egyes tagjai ε-nál legfeljebb $\alpha^*\tilde{\zeta}_j$-mal, azaz tetszőlegesen kevéssel nagyobbak és meghatározott számú tagot kell összegeznünk.

Hasonló állítás és megjegyzés érvényes a (1.2) és (2.2) duális feladatokkal kapcsolatban is.

Legyen most $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen rögzített szám. Legyen továbbá $0 < \beta_1 < < \beta_2 < \ldots$, $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots$, $\beta_n \to \infty$, $\gamma_n \to \infty$. Rögzített β_h és γ_h mellett alkalmazzuk a korlátos esetre vonatkozó eljárást a (2.1) feladat megoldására. Az 1.-beliek szerint az eljárás lépéseinek végesszámú alkalmazása után az alábbi három eset valamelyike adódik:

2.a (2.1) egy $(\zeta, x^*_{0h}, x^*_{1h}, x^*_{2h})$ megoldását és (2.2) egy $(\pi^*, p^*_{0h}, p^*_{1h}, p^*_{2h})$ megoldását kapjuk, melyekre $-\pi^*_h\beta_h + p^*_{0h}b_0 + p^*_{1h}b_1 + p^*_{2h}b_2 + \gamma_h\zeta^*_h - c_2x^*_{0h} - - c_1x^*_{1h} - c_2x^*_{2h} < \varepsilon$.

2.b (2.1)-nek nincs lehetséges megoldása;

2.c (2.2)-nek nincs lehetséges megoldása.

Feltehető, hogy valahonnan kezdve mindig a 2.a eset áll fenn. Ugyanis, ha pl. (2.1)-nek valamilyen β_h-ra van lehetséges megoldása, akkor van lehetséges megoldása minden ennél nagyobb β_h esetén is, illetve ha pl. a 2.b eset végtelen sokszor fordulna elő, akkor az

$$A_{21}x_1 + A_{22}x_2 \leq b_2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

feltételrendszer nem oldható meg, mert ellenkező esetben alkalmas β_h-ra az

$$x_1 \leq \gamma_h$$
$$A_{21}x_2 + A_{22}x_2 \leq b_2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

feltételrendszernek is lenne megoldása. (Az 1. részben ezerint az eljárás tulajdonképpen a most felírt feltételrendszernek nem megoldható voltát jelzi 2. b esetén.)

1. *tétel*. (1.1)-nek akkor és csak akkor van lehetséges megoldása, ha $\lim\limits_{h\to\infty} \zeta^*_h = 0$,

(1.2)-nek akkor és csak akkor van lehetséges megoldása, ha $\lim\limits_{h\to\infty} \pi^*_h = 0$.

Bizonyítás:

Ha (1.1)-nek van lehetséges megoldása, akkor a 2.1 lemma alapján $\zeta^* = 0$. $\zeta^* = 0$ esetén nyilván van (1.1)-nek lehetséges megoldása. A 2.3 lemma szerint azonban $\lim\limits_{h\to\infty} \zeta^*_h = \zeta^*$. Ugyanígy adódik az (1.2)-re vonatkozó állítás is.

A továbbiakhoz szükségünk van még a következő tételre:

2. *tétel* [13]: Ha egy h-ra $\zeta^*_h = 0$ és $\pi^*_h = 0$ és az aktuális p_1-re és x_1-re vonatkozó feladatból a ζ illetve π változót elhagyva a megmaradó (1.3) és (1.4) feladatoknak van nem degenerált bázismegoldásuk, akkor a továbbiakban az eredeti eljárás szerint eljárva az adódó $\tilde{p}_1$-k és $\tilde{x}_1$-k egy-egy korlátos halmaz elemei.

Ebből következik, hogy amennyiben bárhonnan kezdve $\zeta^*_h = 0$ és $\pi^*_h = 0$, lényegében a korlátos feladatnál tárgyalt azon esetnél vagyunk, mikor a p_1-re és x_1-re vonatkozó feladatok optimumértékei konvergálnak (2.1) optimumértékéhez. Azért lényegében, mert még be kell vezetnünk a nemdegenerált bázismegoldások létezésére vonatkozó feltevést, amit nem tekintünk különösebb megszorításnak.

Tulajdonképpen az sem problematikus, hogy egy adott feladat vagy számológép esetén milyen határtól tekinthető ζ_h^* és π_h^* zérusnak. Ha ζ_h^* és π_h^* elég kicsiny, ami mindig bekövetkezik, ha (1.1)-nek van optimális megoldása, a ζ és π változókat elhagyjuk és az (1.3) és (1.4) feladatokat megoldhatónak tekintjük. Esetleg megváltoztatjuk b_1-t és c_1-t a kis ζ_h^* és π_h^*-nak és annak megfelelően, hogy nemdegenerált bázismegoldásokat kapjunk és az eredeti eljárásnak megfelelően folytatjuk tovább. Tulajdonképpen az eljárás folytatása is esetleges, hiszen a (2.3) lemma utáni megjegyzés szerint $\gamma_h\zeta_h^*$ és $\pi_h^*\beta_h$ mindegyike egyike kis ε esetén maga is kicsiny elég nagy h-ra. Azaz $(x_{0h}^*, x_{1h}^*, x_{2h}^*)$ és $(p_{0h}^*, p_{1h}^*, p_{2h}^*)$ egy majdnem lehetséges és majdnem optimális megoldása az (1.1)—(1.2) primál-duál lineáris programozási feladatpárnak.

Problematikus azonban a β_h és γ_h értékek hatékony megválasztása és változtatása. Azaz, hogy milyen β_h és γ_h értékek mellett oldjuk meg (1.2)-t és egy-egy rögzített β_h és γ_h mellett meddig optimalizáljuk (ε megválasztása).

Most tűnik elő a korlátossági feltevések lényege. Ez nem az, hogy az eljárás konvergenciájának bizonyításakor $\mathcal{P}_1$ és $\mathcal{X}_1$ korlátossága folytán könnyen tudtunk az eljárás folyamán adódó $\hat{p}_1$-kből és $\tilde{x}_1$-kből konvergens részsorozatot kiválasztani, hanem az, hogy az (1.3) és (1.4) feladatok megoldhatók.

Részben az eddigieket közvetlenül felhasználva, részben pedig már alkalmazott gondolatmenetek átültetésével tárgyalható azon még hiányzó eset is, amikor az eljárás során elhagyjuk a ζ és π változók közül azt, amelyik először lesz zérus.

Legyen például valamilyen $\zeta_h^* = 0$. A most következők alkalmazhatók természetesen akkor is, ha $|\zeta_h^*|$ elég kicsiny, vagy a $(\zeta_h^*, x_{1h}^*, x_{2h}^*)$-t szolgáltató (2.1) feladat egy — közbülső — megoldásában a ζ változó abszolút értéke kicsi és a ζ változót a korábban tárgyalt módon elhagyjuk.

ζ elhagyása után egy

$$
\text{(2.1')}\qquad
\begin{gathered}
e\,x_1 \leq \beta \\
A_{01}x_1 \leq b_0 \\
A_{10}x_0 + A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \leq b_1 \\
A_{21}x_1 + A_{22}x_2 \leq b_2 \\
x_0, x_1, x_2 \geq 0 \\
\max\,(c_0x_0 + c_1x_1 + c_2x_2)
\end{gathered}
$$

alakú lineáris programozási feladat adódik, ahol is az (1.1) feladatnak van egy ismert lehetséges megoldása. A duális

$$
\text{(2.2')}\qquad
\begin{gathered}
p_1A_{10} \geq c_0 \\
\pi e + p_0A_{01} + p_1A_{11} + p_2A_{21} \geq c_1 \\
p_1A_{21} + p_2A_{22} \geq c_2 \\
\pi, p_0, p_1, p_2 \geq 0 \\
\min\,(\pi\beta + p_1b_1 + p_2b_2)
\end{gathered}
$$

lineáris programozási feladatnak mindig van lehetséges megoldása.

Az 1.-beliek következményeként a korlátos esetre vonatkozó eljárást elég nagy β esetén úgy alkalmazva, hogy felhasználjuk a p_1-re vonatkozó feladat rendelkezésre álló lehetséges megoldását, véges-számú lépés után (2.1') és (2.2') olyan (x^*_{1h}, x^*_{2h}) illetve $(\pi^*_h, p^*_{1h}, p^*_{2h})$ lehetséges megoldásai adódnak, melyekhez tartozó célfüggvényértékek abszolút eltérése legfeljebb ε. $\lim\limits_{h\to\infty} \pi^*$ most is létezik és megegyezik (2.1') azon bázisához tartozó duális bázismegoldás π komponensének értékével, mely (2.1') optimális bázisa minden elég nagy β esetén. (1.2)-nek akkor és csak akkor van lehetséges megoldása, ha $\lim\limits_{h\to\infty} \pi^*_h = 0$.

Ha tehát (1.1)-nek van optimális megoldása, a ζ változó elhagyása után adódó π^*_h-k tetszőlegesen kis pozitív számok lesznek — egyébként könnyen belátható, hogy monoton nemnövekvőek — és így (2.2')-ből a π-változó a korábbiakhoz hasonlóan elhagyható. Mindenesetre, ha elfogadjuk azon [4]-beli megjegyzés érvényességét, mely szerint minden nagyméretű probléma elég egyedi ahhoz, hogy a modell alkotói meg tudjanak adni pl. egy $x_1 \leq \beta_1$ alakú feltételt, az általunk félig korlátosnak nevezett esethez jutunk. Ezen fejezet további részében tehát azzal az esettel foglalkozunk röviden, mikor az (1.1)—(1.2) feladatpárral kapcsolatban csak $\mathcal{X}_1$ korlátosságát tesszük fel.

Nem lesz szükség a ζ változó és γ bevezetésére és ennek megfelelően γ változtatására, az eredeti eljárás némi módosításával ez az eset is kezelhető. A kiterjesztés — a korábbi esettel szemben — különösebb számítástechnikai problémát sem jelent az eredeti eljáráshoz képest.

Kissé pontatlanul fogalmazva, most az előbbi $\gamma = \infty$ -nek megfelelően a $\mathcal{S}$ poliéder olyan irányait is figyelembe vesszük az x_1-re vonatkozó feladatban, melyekre $p_1 \neq 0$.

Minthogy az x_1-re vonatkozó feladat feltevésünk folytán megoldható és ha a p_1-re vonatkozó feladat is az, akkor a 2. tétel alapján már elintézhető azon esethez jutunk, mikor (1.1)-nek és (1.2)-nek ismerjük egy-egy lehetséges megoldását, elegendő tehát azzal az esettel foglalkoznunk, ha az p_1-re vonatkozó feladatnak végig nincs lehetséges megoldása.

Most (1.5) helyett az

$$A_{22}x_2 \leq b_2 - A_{21}\tilde{x}_1$$

$$x_2 \geq 0 \tag{2.3}$$

$$\max\,(-\tilde{\tilde{p}}_1 A_{12} x_2)$$

lineáris programozási feladatot vizsgáljuk, ahol $\tilde{\tilde{p}}_1$-re teljesülnek a

$$\tilde{\tilde{p}}_1 A_{10} \geq 0$$

$$\tilde{\tilde{p}}_1(A_{11}\tilde{\tilde{x}}_{1i} + A_{12}\tilde{\tilde{x}}_{2i}) + \tilde{\tilde{\pi}} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

$$\tilde{\tilde{p}}_1 A_{12}\tilde{\tilde{x}}_{2j} \geq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots)$$

és

$$\tilde{\tilde{p}}_1 b_1 + \tilde{\tilde{\pi}} < 0$$

feltételek.

A korlátos esethez képest csak annyi az eltérés, hogy az x_1-re vonatkozó feladatot azon τ változóval bővítjük, melyet $\mathcal{S}(\tilde{\tilde{p}}_1, \tilde{\tilde{p}}_2)$ eleme határoz meg, ha (2.3)-nak van optimális megoldása és $\tilde{\tilde{p}}_2$ ekkor (2.3) duálisának egy extremális optimális megoldása.

Az adódó $\tilde{\tilde{p}}_1$-ket úgy normálva, hogy legnagyobb komponensük 1 legyen, belátható, hogy ha (1.1)-nek van lehetséges megoldása, az adódó p_1-re vonatkozó feladatok optimumértékei monoton nemnövekedve zérushoz tartanak. (A p_1-re bevezetett normálás azt jelenti, hogy a p_1-re vonatkozó feladathoz a

$$\sum_i \lambda_i (A_{11} \tilde{x}_{1i} + A_{12} \tilde{x}_{2i}) + \sum_j \mu_j A_{12} \tilde{\tilde{x}}_{2j} - I x_0 \leq b_1$$

$$\sum_i \lambda_i = 1$$

$$\lambda_i, \mu_j, x_0 \geq 0$$

$$\max\ (-e x_0)$$

lineáris programozási feladat megoldásának segítségével, ahol I alkalmas méretű egységmátrix, keresünk megoldást.)

Ilymódon elég nagy h-ra a p_1-re vonatkozó feladatot megoldhatónak tekinthetjük és ettől kezdve már alkalmazható a korlátos esetre vonatkozó eljárás

3. Teljes dekompozíció

Az előzőek alkalmas felhasználásával egy olyan dekompozíciós eljárást nyerhetünk, melynek során egy lineáris programozási feladat megoldását olyan lineáris programozási feladatok megoldásán keresztül kapjuk meg, mely feladatok mátrixai a kiindulásul szolgáló feladat mátrixának tetszőleges (például tetszőlegesen kicsi) részei.

Legyen az

(3.1)
$$A x \leq b$$
$$x \geq 0$$
$$\max\ e x$$

lineáris programozási feladatban

(3.2)
$$A = \begin{bmatrix} A_{11} A_{12} \dots A_{1n} \\ A_{21} A_{22} \dots A_{2n} \\ \dots \\ A_{m1} A_{m2} \dots A_{mn} \end{bmatrix}$$

$$b = (b_1, b_2 \ldots b_m)$$

$$c = (c_1, c_2 \ldots c_n)$$

és

$$x = (x_1, x_2 \ldots x_n).$$

(3.1) megoldásához

$$A_{ij} x \leq \tilde{y}$$

$$x_{ij} \geq 0$$

$$\max \tilde{q}_{ij} x_{ij}$$

alakú feladatok ($i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots n$) megoldásain keresztül jutunk el, ahol az $\tilde{y}_{ij}$-k és $\tilde{q}_{ij}$-k mindig alkalmasan megválasztott vektorok.

Az eljárás alapja az, hogy paramétereinek és változóinak előbbi partíciója mellett (3.1) nyilván ekvivalens az x_j, y_{ij} és x_{ij} változókra vonatkozó

$$\sum_j y_{ij} \leq b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$x_j - x_{ij} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$-y_{ij} + A_{ij} x_{ij} \leq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.3}$$

$$x_j, x_{ij} \geq 0$$

$$\max \sum_j c_j x_j$$

lineáris programozási feladattal.

p_i, q_{ij} és p_{ij}-vel jelölve (3.3) első, második és harmadik feltételcsoportjának megfelelő duálváltozókat, (3.3) duálisa a

$$\sum_i q_{ij} \geq c_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$p_i - p_{ij} = \quad (j = 1, 2, \ldots, n;\ i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$-q_{ij} + p_{ij} A_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.4}$$

$$p_i, p_{ij} \geq 0$$

$$\min \sum_i p_i b_i$$

lineáris programozási feladat. [(3.4) is olyan kapcsolatban van (3.1)

$$pA \geq c$$

$$p \geq 0$$

$$\min pb$$

duálisával, mint (3.3), a (3.1)-gyel.]

A (3.3)—(3.4) feladatpárt a következő séma szemlélteti.

$$\begin{array}{l|c|c|c|l}
 & c_1\; c_2 \ldots c_n & & & \\ \hline
\begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \end{matrix} & & \begin{matrix} I\; I \cdots I & \\ & I\; I \cdots I \end{matrix} & & \begin{matrix} h_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix} \\ \hline
\begin{matrix} q_{11} \\ q_{12} \\ \vdots \\ q_{1n} \\ q_{21} \\ q_{22} \\ \vdots \\ q_{2n} \end{matrix} & \begin{matrix} I & & \\ & I & \\ & & \ddots & \\ & & & I \\ I & & & \\ & I & & \\ & & \ddots & \\ & & & I \end{matrix} & & \begin{matrix} -I & & & & & & \\ & -I & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & -I & & & \\ & & & & -I & & \\ & & & & & -I & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & -I \end{matrix} & \\ \hline
\begin{matrix} p_{11} \\ p_{12} \\ \vdots \\ p_{1n} \\ p_{21} \\ p_{22} \\ \vdots \\ p_{2n} \end{matrix} & & \begin{matrix} -I & & & & & & \\ & -I & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & -I & & & \\ & & & & -I & & \\ & & & & & -I & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & -I \end{matrix} & \begin{matrix} A_{11} & & & & & & \\ & A_{12} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & A_{1n} & & & \\ & & & & A_{21} & & \\ & & & & & A_{22} & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & A_{2n} \end{matrix} & \\ \hline
 & x_1\; x_2 \ldots x_n & y_{11}\; y_{12} \ldots y_{1n}\; y_{21}\; y_{22} \ldots y_{2n} & x_{11}\; x_{12} \ldots x_{1n}\; x_{21}\; x_{11} \ldots x_{2n} &
\end{array}$$

(3.3) illetve a (3.3)—(3.4) feladatpár megoldására többféleképpen is alkalmazhatjuk a korábbi eljárások valamelyikét. Az ottani A_{22}-knek mindenképpen az előző séma jobb alsó részén szereplő A_{ij}-kből álló rész felel meg és ez már biztosítja, hogy a bevezetőben említett alakú részfeladatokhoz jussunk. A $\sum\limits_j y_{ij} \leq b_i$, illetve $\sum\limits_j q_{ij} \geq c_j$ feltételek egyszerű szerkezete is indokolttá teszi hogy az ezekben fellépő együtthatók egy 1. fejezetbeli A_{01}, illetve A_{10} mátrixnak feleljenek meg. Az 1. fejezetbeli korlátos esettel szemben a szóban-forgó feltételek nem határoznak meg korlátos poliédert. Ezért a 2. fejezet általános esetének megfelelően vagy bevezetünk β és γ paramétereket, vagy feltesszük, hogy az y_{ij}-kre vagy a q_{ij}-kre megadhatók olyan feltételek, melyek a (3.3) vagy (3.4) feladatnak az eredeti feladatok valamelyikével való ekvivalenciáját nem befolyásolják és az y_{ij}-k vagy q_{ij}-k egy korlátos poliéder elemei lesznek. (Ezen utóbbi esetekben így a korlátos vagy félig korlátos esetnek megfelelő esethez jutunk.)

Egy olyan lineáris programozási feladat esetén, ami egy szokásos erőforrás allokáló probléma matematikai modellje, általában bevezethetők az y_{ij}-kre és a q_{ij}-kre olyan (egyedi) alsó és felős korlátok, melyek a szóbanforgó ekvivalenciát megtartják. Ezért és az ennek következményeképpen adódó néhány egyszerűsödésért mi ezt a feltételezést vezetjük be a továbbiakhoz. De még-egyszer hangsúlyozni szeretnénk, hogy e feltevéstől függetlenül (3.3) felírása és valamelyik előző eljárás alkalmazása módot nyújt arra, hogy (3.1) megoldását olyan lineáris programozási feladatok megoldásán keresztül végezzük el, melyeknek együtthatómátrixai az A_{ij} mátrixok.

(A $\mathcal{S}_1$ és $\mathcal{X}_1$ halmazok korlátosságára vonatkozó feltevés közgazdasági alkalmazások szempontjából sem jelent általában különösebb megszorítást.)

Legyen pl. (1.1) egy olyan probléma matematikai modellje, amelyben x_1 központilag irányított tevékenységeket, x_2 egymással közvetlenül össze nem függő részegységekbeli tevékenységeket reprezentál — aminek kifejezéseképpen A_{22} blokkdiagonális szerkezetű — a valamennyi változót tartalmazó $A_{01}x_0 + A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \leq b_1$ feltételek valamilyen közös erőforrás kihasználásának vagy közös kibocsátási kötelezettségnek felelnek meg.

Ilyen esetben az $\mathcal{X}_1$ halmaz, azaz a központilag irányított tevékenységek nem üres és korlátos volta kézenfekvő. Az x_0 változókat a közös erőforrások bővítési lehetőségét kifejező változóknak gondolva, $\mathcal{S}_1$ korlátos és nemüres volta volta annak felel meg, hogy a központi erőforrások mindig bővíthetők a kívánt mértékben, illetve nincs olyan bővítés, amely ne járna ráfordítással.)

A továbbiakban a

$$By \leq b_0$$

egyenlőtlenségek, ahol $y = (y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{mn})$, szolgálnak a $\sum\limits_j y_{ij} \leq b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ feltételek és az y_{ij}-kre vonatkozó alsó és felső korlátok összefoglalására; a

$$qC \geq c_0$$

egyenlőtlenségek pedig, ahol $q = (q_{11}, q_{12}, \ldots, q_{mn})$, a $\Sigma_i q_{ij} \geq c_j$ $(j = 1, 2, \ldots n)$ feltételek és a q_{ij}-kre vonatkozó alsó és felső korlátok összefoglalására. Feltesszük végül, hogy e feltételrendszerek mindegyikének van megoldása.

A korlátos esethez képest eltérünk abban, hogy az ottani p_1-re és x_1-re vonatkozó feladatok helyett esetünkben duálisukkal foglalkozunk, azaz az $\tilde{y}_{ij}$-k és $\tilde{q}_{ij}$-k közvetlenül adódnak majd egy-egy lineáris programozási feadat megoldásából. Ennek oka, hogy a most bevezetett $By \leq b_0$ illetve $qC \geq c_0$ egyenlőtlenségek explicite megjelennek majd e lineáris programozási feladatokban és így e feladatok megoldására alkalmazható az általánosított felsőkorlátos technika [2] vagy annak duálisa [3]. Ezen megjegpzés nélkül eljárásunkat, mint számítástechnikai eszközt, esetleg figyelmen kívül is lehetne hagyni. (Valamivel pontosabban, ez attól függ, hogy b és c mely részeit kell „felbontanunk", ami egy későbbi megjegyzésünk szerint tetszőleges lehet, de egy adott feladat esetén minden esetre annak szerkezetétől függ. Továbbá az is szerepet játszhat, hogy milyen becslésünk van egy induló felbontáshoz tartozó célfüggvényértékekre.) Az általánosított felsőkorlátos technika alkalmazhatóságát számítástechnikai szempontból az eljárás nagyon lényeges tulajdonságának tartjuk.

Az eljárás a következő:

3.1. Az y-ra vonatkozó, a ψ változó maximalizálását előíró feladat a

$$By \leq b_0$$

lineáris programozási feladat, $\tilde{y}$ legyen ennek tetszőleges lehetséges megoldása, a $\tilde{q}$-ra vonatkozó, a φ változó minimalizálását előíró feladat pedig a

$$qC \geq c_0$$

lineáris programozási feladat és legyen $\tilde{q}$ ennek tetszőleges megoldása. Legyen végül $\tilde{\psi} = \infty$ és $\tilde{\varphi} = -\infty$.

3.2. Oldjuk meg az

$$\begin{aligned} & A_{ij} x_{ij} \leq \tilde{y}_{ij} \\ (3.5) \qquad & x_{ij} \geq 0 \\ & \max \tilde{q}_{ij} x_{ij} \end{aligned}$$

lineáris programozási feladatokat ($i = 1, 2, \ldots m; j = 1, 2, \ldots n$). Ha ezen feladatok mindegyikének van optimális megoldása, folytassuk 3.3-tól.

Minden olyan (i, j)-re, melyre (3.5) nem korlátos, bővítsük a q-ra vonatkozó feladatot a

$$-q_{ij} \bar{\bar{x}}_{ij} \geq 0$$

feltétellel, ahol $\bar{\bar{x}}_{ij}$ olyan extremális eleme $\{x_{ij} : A_{ij} x_{ij} \leq 0,\ x_{ij} \geq 0\}$-nak, melyre $\tilde{q}_{ij} \bar{\bar{x}}_i < 0$.

Minden olyan (i, j)-re, melyre (3.5)-nek nincs lehetséges megoldása, bővítsük az y-ra vonatkozó feladatot

$$-\bar{\bar{p}}_{ij} y_{ij} \leq 0$$

feltétellel, ahol $\bar{\bar{p}}_{ij}$ olyan extremális eleme $\{p_{ij} |: p_{ij} A_{ij} \geq 0,\ p_{ij} \geq 0\}$-nak, melyre $\bar{\bar{p}}_{ij} \tilde{y}_{ij} < 0$.

Folytassuk 3.4-től.

3.3. Legyen $\tilde{x}_{ij}$ (3.5), $\tilde{p}_{ij}$ pedig (3.5) duálisának egy optimális megoldása ($i = 1, 2, \ldots m;\ j = 1, 2, \ldots n$).

Bővítsük a q-ra vonatkozó feladatot a

$$-\sum_{i,j} q_{ij} \tilde{x}_{ij} + \varphi \geq 0$$

feltétellel, az y-ra vonatkozó feladatot pedig a

$$-\sum_{i,j} \tilde{p}_{ij} y_{ij} + \psi \leq 0$$

feltétellel.

3.4. Oldjuk meg a q-ra és az y-ra vonatkozó feladatot.

Ha a q-ra vonatkozó feladatnak nincs lehetséges megoldása, az eljárás végetér; a duális (3.4) feladatnak és így (3.1) duálisának nincs lehetséges megoldása.

Ha az y-ra vonatkozó feladatnak nincs lehetséges megoldása, az eljárás végetér; a (3.3) feladatnak és így (3.1)-nak nincs lehetséges megoldása.

Egyébként legyen $(\tilde{q}, \tilde{\varphi})$ a q-ra vonatkozó feladat optimális megoldása vagy q egy tetszőleges lehetséges megoldása és $\tilde{\varphi} = -\infty$, ha a feladat még nem tartalmazza explicite a φ változót és legyen $(\tilde{y}, \tilde{\psi})$ az y-ra vonatkozó feladat optimális megoldása vagy $\tilde{y}$ egy tetszőleges lehetséges megoldása és $\tilde{\psi} = \infty$, ha a feladat még nem tartalmazza explicite a ψ változót.

Ha $\tilde{\psi} \geq \tilde{\varphi}$, az eljárás végetér. $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots x_n^*)$ optimális megoldása (3.2)-nek, ahol x_j^* az utoljára megoldott q-ra vonatkozó feladat $\sum_i q_{ij} \geq c_j$ feltételeinek megfelelő duális változók értékei a duális egy (tetszőlegesen rögzített) optimális megoldásában $(j = 1, 2, \ldots n)$.

Ha $\tilde{\varphi} < \tilde{\psi}$, folytassuk 3.2-től.

A következő tétel bizonyítását elhagyjuk, mivel az korábbi állítások ([5]) esetünkre vonatkozó specializálásai.

3. *tétel.* A 3.1—3.4 eljárás vagy végetér az egyes lépések végesszámú alkalmazása után, mikor is a 3.4-beli konklúziók helyesek, vagy az adódó $\tilde{\varphi}$-k monoton növekedően, a $\tilde{\psi}$-k pedig monoton csökkenően konvergálnak (3.1) optimumértékéhez.

Ha (3.1)-nek nincs optimális megoldása, a 3.1—3.4 eljárás végesszámú lépés után végetér.

Véges $\tilde{\varphi}$ $[\tilde{\psi}]$ érték esetén a megfelelő q-ra [y-ra] vonatkozó feladat duálisa egy optimális megoldásában a $\sum_i q_{ij} \geq c_j$ [$\sum_j y_{ij} \leq b_i$] feltételeknek megfelelő változók értéke (3.1) [(3.1) duálisa] olyan lehetséges megoldását adják, melyhez tartozó célfüggvényérték $\tilde{\varphi}$ $[\tilde{\psi}]$.

Ha az eljárás végtelen, valahonnan kezdve $\tilde{\varphi}$ és $\tilde{\psi}$ mindegyike véges és mind $\tilde{q}$, mind $\tilde{y}$ végtelen sokszor változik.

Valamennyi eddigi állítás igaz akkor is, ha 3.3-ban a q-ra vonatkozó feladatba csak $\sum_{i,j} q_{ij}\tilde{x}_{ij} > \tilde{\varphi}$ esetén, az y-ra vonatkozó feladatba pedig csak $\sum_{i,j} \tilde{p}_{ij} y_{ij} < \tilde{\psi}$ esetén vezetjük be a 3.3-beli megfelelő feltételt.

Csak a jelöléseket egyszerűsítendő foglalkoztunk az A mátrix előbbi (és a korábbi paraméterek és változók ennek megfelelő) partíciójával. Lévén például az

$$
\begin{gathered}
A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 \leq b_1 \\
A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 \leq b_2 \\
A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3 \leq b_3 \\
x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\
\max\,(c_1x_1 + c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3)
\end{gathered}
$$

lineáris programozási feladat egyenértékű az

$$
\begin{gathered}
y_{21} + y_{22} \leq b_2 \\
y_{31} + y_{32} \leq b_3 \\
x_1 = x_{11} = x_{21} \\
x_2 = x_{12} = x_{22}
\end{gathered}
$$

$$x_3 = x_{13} = x_{23} = x_{23}$$

$$A_{11}x_{11} + A_{12}x_{12} + A_{13}x_{13} \leq b_1$$

$$-y_{31} + A_{31}x_{11} \leq 0$$

$$-y_{21} + A_{21}x_{21} + A_{22}x_{22} \leq 0$$

$$-y_{32} + A_{32}x_{22} + A_{33}x_{33} \leq 0$$

$$-y_{32} + A_{23}x_{23} \leq 0$$

$$x_1, x_2, x_3, x_{11}, x_{21}, \ldots \geq 0$$

$$\max\,(c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3)$$

lineáris programozási feladattal, a korábbiakhoz hasonlóan fogalmazható meg egy olyan dekompozíciós eljárás, melynek részfeladatai az

$$A_{11}x_{11} + A_{12}x_{12} + A_{13}x_{13} \leq b_1$$

$$A_{31}x_{11} \leq \tilde{y}_{31}$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{13} \geq 0$$

$$\max\,(\tilde{q}_{11}x_{11} + \tilde{q}_{12}x_{12} + \tilde{q}_{13}x_{13}),$$

az

$$A_{21}x_{21} + A_{22}x_{22} \leq \tilde{y}_{21}$$

$$A_{32}x_{22} + A_{33}x_{33} \leq \tilde{y}_{32}$$

$$x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0$$

$$\max\,(\tilde{q}_{21}x_{21} + \tilde{q}_{22}x_{22} + \tilde{q}_{33}x_{33})$$

és az

$$A_{23}x_{23} \leq \tilde{y}_{22}$$

$$x_{23} \geq 0$$

$$\max\,\tilde{q}_{23}x_{23}$$

lineáris programozási feladatok.

Legyen most (3.2)-ben $n = 1$, azaz tekintsük az

$$\begin{aligned} A_1x &\leq b_1 \\ A_2x &\leq b_2 \\ &\ldots \\ A_mx &\leq b_m \\ x &\geq 0 \\ \max\,&cx \end{aligned} \tag{3.6}$$

lineáris programozási feladatot. Ekkor alkalmazható a félig korlátos esetnek megfelelő eljárás, mivel most az $\mathcal{X} = \{x_1 : A_{01}x_1 \leq b_1,\ x_1 \geq 0\}$ halmaz szerepét egyetlen pont, $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ játssza. Sőt, belátható, hogy ebben az esetben az eljárás minden további feltétel bevezetése nélkül is véges.

IRODALOMJEGYZÉK

1. DANTZIG, G. B.: „Linear Programming and Extensions", Princeton, 1963. University Press.
2. DANTZIG, G. B. and R. M. VAN SLYKE: „Generalized upper bounded techniques for linear programming". Journal of Computer and System Sciencees, 1967. no. 1. pp. 213—226.
3. GRIGORIADIS, M. D.: „Dual generalized upper bounding techniques". Management Science 1971. no. 17. pp. 269—285.
4. ORCHARD-HAYS, W.: „Practical problems in LP-decomposition", Interdisciplinary Conference held in Cambridge, England, 1972. (sokszorosítva).
5. STAHL J.: „A kétszeresen összekapcsolt lineáris programozási feladatról", Szigma, 1974. 7. köt. 1—2. szám.

AN LP-DECOMPOSITION METHOD

In a former paper [5] we have elaborated a decomposition procedure for the solution of the (1.1)—(1.2) primal-dual pair of LP problems. Then we assumed that the sets

$$\mathscr{X}_1 = \{ x_1 : A_{01} x_1 \leq b_0,\ x_1 \geq 0 \} \text{ and } \mathscr{P}_1 = \{ p_1 : p_1 A_{10} \geq c_0,\ p_1 \geq 0 \}$$

are bounded.

In the first part of the present paper we summarize and extend the results concerning this procedure. In the second part first the case is considered that is obtained by omitting the assumption of boundedness of stets $\mathscr{X}_1$ and $\mathscr{P}_1$. We show that applying the original procedure to appropriately chosen problems of type (2.1)—(2.2) the solution to the pair of problems (1.1)—(1.2) is obtained. Further in the second part the variant is investigated, that can be considered as the most general one from the viewpoint of practical applications, i.e. the case when at least one of $\mathscr{X}_1$ and $\mathscr{P}_1$ is bounded. In this case a slight modification on by of the original procedure is needed for the solution of the pair of problems (1.1)—(1.2). In the third part, as an application of the procedures in question, a decomposition method is presented in which the LP-problem is solved by means of subproblems, whose matrices are arbitary parts of the matrix of the original problem.

ОБ ОДНОЙ ДЕКОМПОЗИЦИОННОЙ ПРОЦЕДУРЕ LP

В одной из предшествующих наших работ ([5]) мы разработали декомпозиционную процедуру для решения примально-дуальной пары задач LP (1.1.)—(1.2). При этом мы предполагали, что множества

$$\mathscr{X}_1 = \{ x_1 \colon \mathrm{A}_{01} x_1 \leq b_0, x_1 \geq 0 \}$$

и

$$\mathscr{P}_1 = \{ p_1 \colon p_1 A_{10} \geq C_0, p_1 \geq 0 \}$$

ограничены.

В первой части данной статьи мы обобщаем и дополняем результаты, относящиеся к этой процедуре. Во второй части мы рассматриваем случай, который возникает, когда мы опускаем условие ограниченности множеств $\mathscr{X}$ и $\mathscr{P}_1$. Мы показываем, что применяя первоначальную процедуру для решения соответствующим образом выбранных задач вида (2.1.)—(2.2.), мы и в этом случае получим решение пары задач (1.1.)—(1.2). Во второй части рассматривается также и та с точки зрения практических применений, пожалуй, наиболее общая возможность, когда по меньшей мере одно из x_1 и P_1 ограничено. В этом случае даже малейшее изменение первоначальной процедуры может быть использовано для решения пары задач (1.1)—(1.2) В третьей части в качестве применений вышеупомянутых процедур мы производим такую декомпозиционную процедуру, в которой задача LP решается с помощью исследования частных задач, матрицы которых являются произвольными частями матриц исходных задач.

Forgó Ferenc

Egy speciális kvadratikus feladat megoldása

Bevezetés

Lineáris feltételek által korlátozott kvadratikus programozási feladatnak a következő feltételes szélsőértékfeladatot nevezik:

$$Ax \leq b$$

$$Q(x) = p^*x + x^*Cx \rightarrow \max, \tag{1}$$

ahol A egy m$\times$n-es mátrix, x, b, p vektorok és C egy szimmetrikus mátrix.[1] (1) megoldása általában nehéz feladat, mivel lokális de nem globális maximumpontok létezhetnek. (1) megoldására, — többek között, — metszősík módszerek különböző variánsait [1], [2], a korlátozás és szétválasztás módszerét [3], vegyes egészértékű programozásra való visszavezetést [4] és különböző közelítő és heurisztikus módszereket javasoltak. Ezen módszerek elméleti tulajdonságainak és számítástechnikai viselkedésének felderítése még korántsem befejezett. Ezért érdeklődésre tarthat számot minden olyan módszer, mely (1) valamely speciális esetét megoldja és jóval egyszerűbb, mint a fentebb említett módszerek.

Anand és Swarup [5], [6] azt a speciális esetet vizsgálják, amikor Q(x) két lineáris függvény szorzata. A feladat megoldására ebben az esetben metszősík módszert javasolnak. Ugyanezen típusú feladat célfüggvényének parametrizálásával foglalkozik Aggarwal és Arora [7]. Ebben a cikkben szintén ezzel a speciális esettel foglalkozunk. Általános és egyszerű (szimplex módszer bonyolultságú) módszert adunk (1) feladat megoldására abban az esetben, amikor C rangja 1. Néhány olyan általánosításra is felhívjuk a figyelmet, melyek egyszerű következményei a javasolt módszernek.

1. A módszer leírása

Tekintsük a következő kvadratikus programozási feladatot

$$Ax \leq b$$

$$\mathrm{R}(x) = (s^*x + \alpha)\ (r^*x + \beta) \rightarrow \max \tag{2}$$

Feltesszük, hogy $\mathrm{L} = \{x \mid Ax \leq b\}$ nem üres és korlátos s így (2) mindig megoldható. Ha minden $x \in \mathrm{L}$ esetén $s^*x + \alpha \leq 0$ és $r^*x + \beta \geq 0$, továbbá van olyan $\bar{x}$, hogy vagy $s^*\bar{x} + \alpha = 0$ vagy pedig $r^*\bar{x} + \beta = 0$, akkor (2) megoldása

[1] *-al jelöljük egy vektor vagy mátrix transzponáltját.

triviális; bármely fenti tulajdonságú $\bar{x}$ optimális és $R(\bar{x}) = 0$. Ezért csak a következő két eset tarthat érdeklődésre számot:

$$\text{(I)} \qquad s^*x + \alpha > 0 \text{ és } r^*x + \beta < 0 \qquad \forall x \in L,$$

$$\text{(II)} \qquad s^*x + \alpha > 0 \text{ és } r^*x + \beta > 0 \qquad \forall x \in L.$$

Minden egyéb eset vagy triviális vagy a fenti kettőre visszavezethető. Ha a (II) eset áll fenn, akkor SWARUP [5] bebizonyította, hogy $R(x)$ pszeudokonkáv L-en s így minden lokális maximumpont egyúttal globális is. Az (I) esetben lokális és nem globális maximumpontok létezhetnek.

Tekintsük a következő t-ben parametrikus lineáris programozási feladatot:

$$\begin{gathered} Ax \leq b \\ s^*x + \alpha = t \\ z(x) = r^*x + \beta \to \max. \end{gathered} \tag{3}$$

Legyen u(t) a (3) optimális célfüggvényértéke. A lineáris programozás elméletéből ismeretesek az alábbiak:

1. Van olyan T_0 és T_1 érték, hogy u(t) értelmezve van minden t-re a $[T_0, T_1]$ intervallumban és minden ezen kívül eső t-re (3)-nak nincs megoldása. (Mivel L korlátos, T_0 és T_1 véges számok).
2. u(t) t-nek szakaszonként lineáris konkáv függvénye. Az u(t) töréspontjait, melyek száma véges, karakterisztikus pontoknak fogjuk nevezni.

Tekintsük a $w(t) = tu(t)$ függvényt és legyen $\bar{t}$ olyan, hogy

$$w(\bar{t}) \geq w(t) \qquad \forall t \in [T_0, T_1].$$

1. *Tétel.* $w(\bar{t})$ a (2) optimális célfüggvényértéke és a (3) feladatnak $t = \bar{t}$ paraméterérték melletti minden optimális megoldása (2)-nek is optimális megoldása.

Bizonyítás. Legyen $\bar{x}$ a (3)-nak egy optimális megoldása $t = \bar{t}$ mellett. Tegyük fel, indirekt bizonyítást alkalmazva, hogy van olyan $y \in L$, hogy $R(y) > R(\bar{x})$, Legyen $t' = s^*y + \alpha > 0$. Nyilván $t' \in [T_0, T_1]$ Így $R(y) = t'(r^*y + \beta) \leq t'u(t') = w(t') = R(\bar{x})$, ami ellentmondás.

Minthogy w(t) egy egyváltozós, szakaszonként kvadratikus függvény, ezért maximalizálása egyszerű feladat. Tegyük fel, hogy a karakterisztikus pontok a következők

$$T_0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_q = T_1$$

u(t) szakaszonként lineáris, vagyis

$$u(t) = \lambda_k t + \mu_k, \text{ ha } t_{k-1} \leq t \leq t_k \qquad (k = 1, \ldots q).$$

Így w(t) monoton növekvő ebben az intervallumban, ha u(t) monoton nem csökken. A (II) esetben w(t) maximuma vagy karakterisztikus pontban van, vagy olyan $[t_{k-1}, t_k]$ szakasz belsejében, ahol u(t) monoton csökken (ehhez szükséges, hogy $\lambda_k < 0$ legyen), s így elegendő csak ezeket a szakaszokat és a karakterisztikus pontokat vizsgálni. A kvadratikus függvények maximalizálása elemi feladat. Ezzel egyúttal egy algoritmust is adtunk (2) megoldására a (II) esetben.

A fentieknek egyszerű következménye az, hogy (II) esetben (2)-nek feltétlenül van olyan optimális megoldása, mely vagy L egy csúcspontja, vagy L valamelyik élén fekszik, hiszen valamennyi karakterisztikus ponthoz tartozik L-nek egy olyan csúcspontja, mely (3)-at maximalizálja és a (3)-nak $\bar{t}$-hez tartozó bármely optimális bázismegoldása kifejezhető a $\bar{t}$-hez legközelebbi két karakterisztikus ponthoz tartozó bázismegoldások konvex lineáris kombinációjaként.

(I) esetben $u(t) < 0$, $\forall t \in [T_0, T_1]$. Ha $u(t)$ monoton nemnövekvő egy $[t_{k-1}, t_k]$ intervallumban, akkor $w(t)$ monoton csökken ugyanitt. Ha $u(t)$ monoton növekszik, akkor $\lambda_k > 0$ és $w(t)$ egy konvex kvadratikus függvény, mely maximumát a t_{k-1} és t_k pontok egyikében felveszi. Ennek következménye, hogy $w(t)$ maximumát egy olyan karakterisztikus pontban felveszi, ahol $u(t)$ nem csökkenő. (2) megoldása tehát úgy történik, hogy meghatározzuk (3) karakterisztikus pontjait T_0-ból kiindulva midaddig, amíg a célfüggvényérték nem kezd el csökkenni, s kiválasztjuk ezek közül azt, amelyikhez a maximális $w(t)$ tartozik. Ez biztosan L egy csúcspontja, ami teljesen összhangban van azzal a ténnyel, hogy egy pszeudokonvex függvény L legalább egy csúcspontjában felveszi a maximumát.

Példaként tekintsük az alábbi feladatot [(2) feladat (I) eset]:

$$\begin{gathered} x_1, x_2 \geq 0 \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 40 \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 40 \\ -(9 - x_1)(10 - x_2) \to \max. \end{gathered}$$

Láthatjuk most, hogy a (2) feladat (I) esete áll fenn. A feltételekhez az $x_1 = 9$-t feltételt csatolva:

$$u(t) = \begin{cases} \frac{5}{3}t - \frac{25}{3}, & \text{ha } 1 \leq t \leq 4 \\ \frac{3}{5}t - \frac{37}{5}, & \text{ha } 4 \leq t \leq 9 \end{cases}$$

$$w(t) = \begin{cases} \frac{5}{3}t^2 - \frac{25}{3}t, & \text{ha } 1 \leq t \leq 4 \\ \frac{3}{5}t^2 - \frac{37}{5}t, & \text{ha } 4 \leq t \leq 9. \end{cases}$$

Az 1, 4 és 9 karakterisztikus pontok közül a $t = 1$-hez tartozik $w(t)$ maximuma és ehhez az $x = 8$, $x_2 = 0$ optimális megoldás tartozik.

Tekintsük most az (1) feladatot és tegyük fel, hogy C rangja 1. Ekkor C felírható két vektor diadikus szorzataként, $C = rs^*$, és $Q(x)$ a következő formát ölti:

$$Q(x) = p^*x + (r^*x)(s^*x).$$

Tegyük fel, hogy az (1) feltételei a következőképpen particionálhatók:

$$\begin{gathered} A_1 x \leq b_1, \\ A_2 x = b_2, \end{gathered}$$

valamint, hogy p kifejezhető A_2 sorainak és r, s vektoroknak lineáris kombinációjaként:

$$p^* = u^*A_2 + \alpha r^* + \beta s^* \tag{4}$$

Egyszerű behelyettesítéssel meggyőződhetünk ekkor arról, hogy

$$Q(x) = (\alpha + s^*x)\,(\beta + r^*x) + K$$

ahol K konstans és $K = u^*b - \alpha\beta$. Ebben az esetben (1) ugyanolyan alakú, mint (2) és a fentiekben leírt módszer alkalmazható megoldására.

Valamivel bonyolultabb a helyzet, ha p nem tesz eleget (4)-nek. Ekkor (3) helyett a következő t-ben paraméteres lineáris programozási feladatot tekintjük:

$$\begin{aligned} Ax &\le b \\ s^*x &= t \\ z(x, t) &= p^*x + t\, r^*x \to \max. \end{aligned} \tag{5}$$

A parametrikus lineáris programozás elméletéből ismeretes, hogy most is van olyan $[T_0, T_1]$ intervallum, ahol minden $t \in [T_0, T_1]$-re (5) megoldható és $t \notin [T_0, T_1]$-re nem, továbbá létezik karakterisztikus pontok véges sorozata:

$$T_0 = t_1 < t_2 < \ldots t_q = T_1$$

melyekre az jellemző, hogy (5) optimális célfüggvényértéke, u(t), minden $[t_{k-1}, t_k]$ $(k = 1, \ldots q)$ szakaszon t-nek kvadratikus függvénye.

A karakterisztikus pontok meghatározása hasonlóan történik, mint a csak célfüggvényben vagy csak a jobboldalban parametrikus feladat esetében. Az (1) feladat megoldását tehát úgy kapjuk meg, hogy meghatározzuk u(t) maximumát a $[T_0, T_1]$ intervallumon és vesszük az (5) feladat ezen maximumot szolgáltató t paraméterérték melletti optimális megoldásait.

Nyilván ez az eljárás alkalmazható a (2) feladat megoldására is.

2. Néhány egyszerű általánosítás

Az (1) és (2) feladat megoldásának visszavezetése egy parametrikus programozási feladat megoldására lehetővé teszi ennek a gondolatnak néhány rokon probléma megoldására való kiterjesztését. Az alábbiakban ezek közül néhányat megemlítünk.

1. A (2) feladat egyik természetes általánosítása a következő:

$$\begin{aligned} Ax &\le b \\ R_k(x) &= (s_1^*x + \alpha_1)\,(s_2^*x + \alpha_2) \ldots (s_k^*x + \alpha_k) \to \max. \end{aligned} \tag{6}$$

Ennek megoldását vissza lehet vezetni a következő k—1 paraméteres feladat megoldására:

$$\begin{aligned} Ax &\le b \\ s_1^*x + \alpha_1 &= t_1 \\ &\vdots \\ s_{k-1}^*x + \alpha_{k-1} &= t_{k-1} \\ z(x, t_1, \ldots, t_{k-1}) &= t_1 t_2 \ldots t_{k-1}(s_k^*x + \alpha_k) \to \max. \end{aligned} \tag{7}$$

Természetesen nagy k esetén a módszer nem praktikus, egyrészt a karakterisztikus tartományok (általában k — 1 dimenziósak) nagy száma, és az optimális célfüggvényérték függvény, $u(t_1, t_2 \ldots, t_{k-1})$ bonyolult alakja miatt.

2. Ha az (I) feladatban a C mátrix rangja k, akkor C felírható k darab diadikus mátrix összegeként s így (1) a következő alakú lesz:

$$Ax \leq b \tag{8}$$
$$Q(x) = p^*x + (r_1^*x)\ (s_1^*x) + (r_2^*x)\ (s_2^*x) + \ldots + (r_k^*x)\ (s_k^*x) \to \max.$$

Hasonlóan, mint az (5) feladat esetén (8)-nak a megoldása is visszavezethető az alábbi k paraméteres feladat megoldására:

$$\begin{aligned} Ax &\leq b \\ r_1^*x &= t_1 \\ &\vdots \\ r_k^*x &= t_k \end{aligned} \tag{9}$$
$$z(x, t_1, \ldots, t_k) = p^*x + t_1 s_1^* x + \ldots + t_k s_k^* x \to \max.$$

A helyzet annyiban kedvezőbb, mint a (6) feladatnál, hogy a karakterisztikus tartományok poliéderek és az $u(t_1, \ldots, t_k)$ optimális célfüggvényérték függvény kvadratikus. Ily módon (8)-nak a megoldását vissza lehet vezetni annyi k változós kvadratikus programozási feladat megoldására, ahány karakterisztikus poliédere van (9)-nek. Ha k kicsi, akkor ez (8) megoldásának gyakorlatilag is lehetséges módja.

3. A (2) feladat egy másik irányú általánosítása a következő:

$$Ax \leq b$$
$$R(x) = (s^*x + \alpha)\ f(x) \to \max. \tag{10}$$

ahol $f(x)$ egy konkáv függvény L-en. A feladatot ugyanúgy parametrizálhatjuk, mint (3)-at. A különbség az lesz, hogy (3) célfüggvénye most nemlineáris. Ha $f(x)$-re további megszorításokat is alkalmazunk (differenciálhatóság), úgy a nemlineáris parametrikus programozás módszereivel meg tudjuk (3)-at oldani, s ezen keresztül (10)-et is.

4. Bizonyos egészszámú nemlineáris programozási feladatok megoldására is lehet a parametrizálás módszerét alkalmazni. Tekintsük először a következő nulla—egy kvadratikus programozási feladatot:

$$0 \leq x \leq 1, \qquad x = \text{egész} \tag{11}$$
$$(s^*x + \alpha)\ (r^*x + \beta) \to \min.,$$

ahol $s^*x + \alpha > 0$ és $r^*x + \beta > 0$ minden $0 \leq x \leq 1$ esetén. Ha az egészértékűségi kikötést elhagyjuk, akkor (11) a (2) feladat (I) esete. Ekkor az optimális megoldások között szerepel (3)-nak legalább egy karakterisztikus pontja, ami egyúttal (11) csúcspontját adja. Így ez egészértékű megoldása (11)-nek és a 2. pontban leírt módszer alkalmazható (11) megoldására.

Tekintsük most a következő nemlineáris egészértékű feladatot:

$$0 \leq x \leq d, \; x = \text{egész} \tag{12}$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \mathrm{f}_j(x_j) + \alpha\right)\left(\sum_{j=1}^{n} g_j(x_j) + \beta\right) \to \max,$$

ahol $\mathrm{f}_j(x_j)$ egész minden egész x esetén és α, β egészek. (12) megoldása ekkor visszavezethető az alábbi parametrikus feladat megoldására:

$$0 \leq x \leq d, \; x = \text{egész}$$

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) + \alpha = \mathrm{t} \tag{13}$$

$$\mathrm{h}(x) = \sum_{j=1}^{n} g_j(x_j) + \beta \to \max.$$

(13) megoldására a dinamikus programozás módszerét használva ([8]) egyúttal t minden szóbajöhető értékére megkapjuk (13)-nak a megoldását s ebből (12) megoldása egyszerűen nyerhető.

(Beérkezett: 1974. január 28.)

IRODALOMJEGYZÉK

1. Ritter, K.: A method for solving maximum problems with nonconcave quadratic function. Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete. 1966. no. 4. pp. 340—351.
2. Forgó F.: Metszősík módszerek és néhány közgazdasági alkalmazásuk (kandidátusi értekezés). Budapest, 1973.
3. Falk, E. J., Soland, R. M.: An algorithm for separable noncovex programming problems. Management Science, Vol. 15, No. 9 (1969) pp. 550—569.
4. Krekó B.: Optimumszámítás. Budapest, 1972. Közgazdasági és Jogi Kiadó.
5. Swarup, K.: Programming with indefinite quadratic function with linear constraints. Cahiers de Centre d'Etudes de Rech. op. 1966. Vol. 8. No. 4.
6. Swarup, K.—Anand, P.: Minimization of an indefinite quadratic quadratic function with linear constraints. Ekonomicko-matematicky Obzor, 1970. Vol. 6, No. 4. pp. 380—388.
7. Aggarwal, S. P.—Arora, S.: Parametrization of an indefinite programming problem. (kézirat).
8. Hadley, G.: Nonlinear and dynamic programming. London, 1964. Addison Wesley.

THE SOLUTION OF A SPECIAL QUADRATIC PROBLEM

Making use of parametric programming we present a method on the level of complexity of the simplex method for the solution of the quadratic programming problem:

$$Ax \leq b$$
$$\mathrm{Q}(x) = p^*x + x^*Cx \to \max$$

for the case when the rank of C is 1. This problem is a special case of the one containing the product of two linear functions as the objective function. The solution of this latter problem with the proposed method is much easier than the approaches suggested in the literature so far. If the rank of C is greater than 1 but it is not too large, then multiparametric linear programming can be applied for the solution of the problem. The article also considers some further simple generalizations.

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ

С помощью параметрического программирования мы задаем метод сложности симплексного метода для решения задачи квадратического программирования:

$$Ax \leq b$$
$$Q(x) = p^*x + x^*Cx \rightarrow \max$$

если ранг C равен 1. Специальным случаем данной проблемы является задача, содержащая в качестве целовой функции произведение двух линейных функций, решение которой таким способом намного проще, чем методами, применяемыми в литературе до настоящего момента. Если ранг C больше 1, но не слишком велик, то линейное программирование с многими параметрами применимо для решения задачи. В статье имеется также несколько других простых обобщений.

Bod Péter

Minimális elemmel rendelkező zárt konvex halmazokról

Ebben a cikkben általánosítjuk Cottle és Veinott Jr. egy tételét, amelyben szükséges és elégséges feltételt adtak arra, hogy valamely konvex poliedrikus halmaznak legyen minimális eleme.

A $H \in R^n$ halmaz minimális elemén — ha létezik — olyan $x_0 \in H$ pontot értünk, amelyre $x_0 \leq x$, $\forall x \in H$-ra.

A minimális elem fogalmából következik, hogy — amennyiben létezik — egyértelmű. Tegyük fel ugyanis, hogy a H halmaznak két, egymástól különböző minimális eleme volna x^1 és x^2 .Akkor x^1 minimális elem voltából következnék: $x^1 \leq x^2$ és hasonlóan: $x^2 \leq x^1 \Rightarrow x^1 = x^2$, ami ellentmond annak a feltevésnek, hogy $x^1 \neq x^2$.

A minimális elemmel rendelkező halmazok jellemzésének a matematikai programozás szempontjából gyakorlati jelentősége van. Tekintsük ugyanis a következő általános matematikai programozási feladatot:

$$f(x_0) = \min_{x \in H} f(x),$$

ahol $f(x)$ tetszőleges monoton függvény.

Az $f(x)$ függvényt monotonnak nevezzük egy $H \in R^n$ halmazon, ha azon értelmezve van és bármely $x^1 \leq x^2$-re: $(x^1; x^2 \in H)$

$$f(x^1) \leq f(x^2).$$

Amennyiben H minimális elemmel rendelkező halmaz és minimális eleme x_0, akkor a fenti matematikai programozási feladatnak x_0 minimális megoldása bármilyen monoton függvény is szerepel benne. G. Wintgen nyomán azt mondjuk, hogy egy ilyen feladat indifferens a monoton függvények osztályára nézve.

A monoton függvények fontos alosztályát alkotják a nem negatív együtthatójú lineáris függvények:

Az 1. Lemma alapján nyilvánvaló, hogy a nem negatív lineáris függvények osztályára vonatkozó indifferencia egyenértékű azzal a körülménnyel, hogy a H halmaznak van minimális eleme. Ennek az ekvivalenciának az alapján mindazon tételek, amelyek a nem negatív függvények osztályára vonatkozóan bizonyítanak indifferenciát, egyben feltételeket adnak arra, hogy a megengedett megoldások halmazában minimális elem létezzék.

1. *Lemma*: $x^1 \leq x^2 \Leftrightarrow c^*x_1 \leq c^*x_2$ tetszőleges $c^* \geq 0^*$-ra. Ha $x^1 \leq x^2$ és $c^* \geq o^*$, akkor: $c^*x^1 \leq c^*x^2$. Ha $c^*x^1 \leq c^*x^2$ minden $c^* \geq o^*$-re: legyen $c^* = e_i^*$ $(i = 1\ 2, \ldots, n)$. Ekkor: $e_i^*x^1 = (x^1)_i \leq e_i^*x^2 = (x^2)_i$ $\forall_i$-re és $x^1 \leq x^2$.

G. Wingtgen 1964-ben megmutatta, hogy amennyiben a B mátrix minden sorában egy nem-negatív elemet tartalmaz és az összes többi elem nem-pozitív, akkor a

$$\mathrm{H} = \{x \mid \mathrm{B}x \geq b;\ x \geq 0\}$$

halmaznak van minimális eleme [1].

1966-ban [2] alatti cikkemben szükséges és elégséges jellemzést adtam arra, hogy egy olyan konvex poliéder, amely véges sok hipersík és a nem-negatív ortáns közös részeként állítható elő, rendelkezzék minimális elemmel.

1971-ben R. W. Cottle és A. F. Veinott Jr. kimerítően jellemezték [3] alatti cikkükben a minimális elemmel rendelkező konvex poliedrikus halmazok osztályát, vagyis az olyan minimális elemmel rendelkező halmazokat, amelyek véges sok zárt féltér közös részeként állíthatók elő.

A továbbiakban olyan halmazokat vizsgálunk, amelyek véges sok folytonosan differenciálható konvex függvény meghatározott alsó nívóhalmazainak közös részeként állíthatók elő.

Legyen adva tehát R^n-ben egy $\mathrm{H} \in \mathrm{R}^n$ zárt, konvex halmaz és ezen definiálunk $g_i(x) \in \mathrm{C}^1$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ véges sok konvex függvényt. Az általánosság megszorítása nélkül mondhatjuk, hogy legyen:

$$\mathrm{K}_i = \{x \mid x \in \mathrm{H};\ g_i(x) \leq 0\}$$

és

$$\mathrm{P:}\quad \mathrm{K} = \bigcap_{i=1}^{m} \mathrm{K}_i\,.$$

Minthogy konvex függvények alsó nívóhalmazai konvexek és konvex halmazok közös része konvex, ezért K konvex halmaz. Tegyük fel, hogy nem üres.

$$\mathrm{K} \neq \emptyset$$

Legyen $x_0 \in \mathrm{K}$. Definiáljuk az $\mathrm{J} = \{1, 2, \ldots, \mathrm{m}\}$ indexhalmaz következő két diszjunkt részhalmazát:

$$\mathrm{J}_1 = \{\mathrm{i} \mid \mathrm{g}_i(x_0) = 0\}$$

$$\mathrm{J}_2 = \{\mathrm{i} \mid \mathrm{g}_i(x_0) < 0\}$$

Bebizonyítjuk a következő lemmát:

2. *Lemma*: x_0 nem lehet minimális elem, ha $\mathrm{k} = |\mathrm{J}_1| < n$ Tegyük fel a lemma állításával ellentétben, hogy x_0 minimális elem K-ban. Legyen $\mathrm{J}_1 = \{1, 2, \ldots, \mathrm{k}\}$ vagyis teljesüljön egyenlőségre az első k feltétel. Tekintsük a

$$\mathrm{g}_i(x) = 0,\ i \in \mathrm{J}_1$$

k egyenletből álló n ismeretlenü nem-lineáris egyenletrendszert. Legyen

$$\nabla g_{J1}(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial g_1(x)}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial g_k(x)}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial g_k(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Tegyük fel, hogy a rendszer Jacobi-mátrixának x_0-ban teljes sorrangja van és az első k oszlop lineárisan független (ha rang $\forall g_{j_1}(x_0) < k$ akkor a következtetés még inkább helytálló.)
Minthogy

$$g_i(x_0) = 0, \ i \in J_1$$

ezért az ún. ,,implicit függvények'' tétele értelmében [4] létezik k egyértékü függvény:

$$\varphi_1(x_{k+1};\ x_{k+2};\ \dots x_n)$$
$$\varphi_2(x_{k+1};\ x_{k+2};\ \dots x_n)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\varphi_k(x_{k+1};\ x_{k+2};\ \dots x_n),$$

amelyek az $\hat{x}_0 = \begin{bmatrix} x^0_{k+1} \\ x^0_{k+2} \\ \dots \\ x^0_n \end{bmatrix} \in R^{n-k}$ pont egy környezetében is folytonosak

úgy, hogy

a) $x^0_i = \varphi_i(x^0_{k+1}, x^0_{k+2}, \dots, x^0_n) \quad i \in J_1$

b) minden $\hat{x}_0$ környezetében levő $\hat{x}$ vektorral meghatározott

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \varphi_1(\hat{x}) \\ \varphi_2(\hat{x}) \\ \vdots \\ \varphi_k(\hat{x}) \\ \hat{x} \end{bmatrix}$$

kielégíti a $g_i(x) = 0$; $i \in J_1$ egyenletrendszert. Legyen $\hat{x} = \hat{x}_0 - \lambda 1_{n-k}$, ahol 1_{n-k} az $(n-k)$ elemű összegező (csupa egyesből álló) vektor. Válasszuk először λ^9-t olyan kicsire, hogy $\hat{x}$ a megfelelő környezetbe essék. Utána vizsgáljuk meg milyen értéket vesznek fel a $g_i(x)$; $i \in J_2$ függvények az $\hat{x}$ segítségével képezett $\bar{x}$ helyen. Minthogy $g_i(x_0) < 0$ volt $\forall i \in J_2$-re és mivel a $\varphi_i(\hat{x})$ függvények folytonosak, λ pótlólag csökkenthető úgy, ha szükséges, hogy

$$g_i(\bar{x}) \leq 0;\ \forall_i \in J_2\text{-re}$$

érvényes maradjon. Mivel $g_i(\bar{x}) = 0 \ \ \forall_i \in J_1$-re, ezért:

$$g_i(\bar{x}) \leq 0 \ \ \forall_i \in J\text{-re.}$$

Tehát $\bar{x} \in K$. Azonban $\bar{x}$ utolsó $(n-k)$ komponense határozottan kisebb $\bar{x}_0$ megfelelő komponenseinél. Vagyis x_0 nem lehet minimális eleme a K halmaznak.

Bebizonyítjuk a minimális elem létezésének alábbi elégséges feltételét.

1. *Tétel*: A P. alatt megfogalmazott K halmaznak van minimális eleme, ha létezik olyan $x_0 \in K$, amely legalább n feltételben egyenlőséget eredményez és az egyenlőségre teljesülő feltételekből képezett Jacobi mátrixnak x_0-ban van n-ed rendű, nem-pozitív inverzű, bázisa.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy x_0-nál az első k feltétel teljesül egyenlőségre. Tehát a megfelelő Jacobi mátrix:

$$\nabla g_{J1}(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} \dots \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial g_k(x)}{\partial x_1} \dots \frac{\partial g_k(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} : (k \times n) \text{ méretű.}$$

A feltételnek megfelelően rang $[\nabla g_{J1}(x_0)] = n$. Tegyük fel, hogy az első n sor lineárisan független. Legyen:

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(x_0)}{\partial x_1} \dots \frac{\partial g_1(x_0)}{\partial xg} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial g_n(x_0)}{\partial x_1} \dots \frac{\partial g_n(x_0)}{\partial x_n} \end{bmatrix}^{-1} \leq \mathbf{0}$$

Definiáljuk a következő vektorokat:

$$u_0^* = [u_1^*; u_2^*]; \; u_1^* = (-c^*)\mathrm{B}; \; u_2^* = 0^* \in \mathrm{R}^{m-n},$$

ahol c tetszőleges nem negatív vektor R^n-ben. Megmutatjuk, hogy $[x_0; u_0]$ kielégíti az

(P') $$f(x_0) = \min_{x \in \mathrm{K}} c^* x$$

nem lineáris programozási feladat elégséges optimumfeltételeit, akármilyen nem-negatív vektor is legyen c. Kuhn és Tucker nyomán ugyanis x_0 minimális megoldása a P' feladatnak, ha létezik olyan u_0 vektor, hogy

$$\nabla f(x_0) + u_0^* \nabla g(x_0) = 0^*$$
$$g(x_0) \leq 0.$$
$$u_0^* g(x_0) = 0$$
$$u_0^* \geq 0^*.$$

Minthogy

$$x_0 \in \mathrm{K} \Rightarrow g(x_0) \leq 0,$$

$$u_0^* g(x_0) = [(-c^*)\mathrm{B}; 0^*] \begin{bmatrix} g_1(x_0) \\ \dots \\ g_n(x_0) \\ \dots \\ g_k(x_0) \\ \\ g_n(x_0) \end{bmatrix} = 0\,,$$

mert

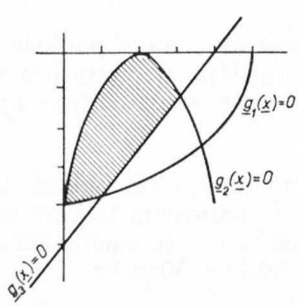
$$g_i(x_0) = 0; \; 0 < i \leq k,$$

$$u_0^* = [(-c^*)\mathrm{B}; 0^*] \geq 0^*, \text{ minden } c \geq 0 \text{ mellett.}$$

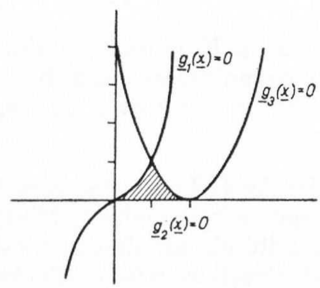
Végül:

$$\nabla \mathrm{f}(x_0) + u_0 \nabla g \mathrm{f}(x_0) = c^* + [(-x)\mathrm{B};\ 0^*] \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1(x_0)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial g_1(x_0)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial g_n(x_0)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial g_n(x_0)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial g_m(x_0)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial g_m(x_0)}{\partial x_n} \end{bmatrix} = 0^*.$$

Tehát x_0 tetszőleges nem-negatív lineáris célfüggvény mellett minimális megoldás, és így x_0 a K halmaz minimális eleme.



1. ábra



2. ábra

Tekintsük az alábbi példát (l. 1. ábra):

Legyen $\mathrm{K} = \{x \mid x \in \mathrm{R}^2;\ g_i(x) \leqq 0;\ (i = 1, 2, 3)\}$

$$g_1(x) = 16x_1^2 + 25x_2^2 - 400$$
$$g_2(x) = x_1^2 - 4x_1 + x_2 + 4$$
$$g_3(x) = 5x_1 - 4x_2 - 20.$$

Legyen $x_0 = [0, -4]$

$$g_1(x_0) = 0;\ g_2(x_0) = 0;\ g_3(x_0) < 0$$

$$\nabla g(x) = \begin{bmatrix} 32x_1 & 50x_2 \\ 2x_1 - 4 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}; \qquad \nabla g_{J1}(x_0) = \begin{bmatrix} 0 & -200 \\ -4 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathrm{B} = \nabla g_{J1}(x_0)^{-1} = -\frac{1}{800}\begin{bmatrix} 1 & 200 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \leqq 0.$$

Tehát x_0 a K halmaz minimális eleme.

Mint ez a nem-lineáris programozás elméletében általános jelenség — a szükséges feltételek az itt vizsgált problémánál sem esnek egybe az elégséges feltételekkel. A fenti 2. ábra minimális elemű halmazt mutat, anélkül hogy akár a konvexitási akár a Jacobi mátrixra vonatkozó követelmények teljesülnének.

$$g_1(x) = -x_1^3 + x_2 < 0$$

$$g_2(x) = -x_2 < 0$$

$$g_3(x) = -x_1^2 + 4x_1 + x_2 - 4 \leq 0.$$

Ahhoz, hogy az 1. Tétel feltételei a konvex esetre szükségesek is legyenek, bizonyos regularitási feltételek teljesülését is ki kell kötni. Ilyen például az ún. Slater-féle regularitási feltétel. A K halmaz eleget tesz a Slater-féle regularitási feltételnek, ha relatív belseje nem üres, vagyis:

$$\mathrm{K}^0 = \{x \mid g(x) < 0\} \neq \emptyset.$$

2. *Tétel*: Ha x_0 a K halmaz minimális eleme úgy, hogy pontosan n feltétel teljesül egyenlőségre és a K halmaz reguláris a Slater-féle regularitási feltétel szerint, akkor: a $\nabla g_{J1}(x_0)$ mátrix nem szinguláris és inverze nempozitív.

Bizonyítás: Az 1. Lemma értelmében x_0 minimális megoldása a P' feladatnak tetszőleges $c \geq 0$ mellett. Minthogy a K halmazon teljesül a Slater-féle regularitási feltétel, minden $c \geq 0$-hez létezik olyan $u_0(c)$ vektor, hogy $[x_0;\ u_0(c)]$ kielégíti a Kuhn—Tucker feltételeket. Vagyis:

$$c^* + u_0^*(c)\, \nabla g(x_0) = 0^*$$

$$g(x_0) \leq 0$$

$$u_0^*(x) g(x_0) = 0$$

$$u_0^*(c) \geq 0^*$$

Tegyük fel, hogy az első n feltétel teljesül egyenlőségre. Akkor $g_i(x_0) < 0$, $(i = (n+1); (n+2); \ldots; m)$ és $g(x_0)$ és $u_0(c)$ ortogonalitása miatt $u_0^*(c) =$ $= [u_1^*(c); u_2^*(c)]$-ban: $u_2^*(c) = 0^*$. Minthogy $u_0^*(c) \geq 0^*$, a

$$c^* + u_0^*(c)\, \nabla\, g(x_0) = 0^*$$

egyenletrendszernek minden $c \geq 0$-ra van nem-negatív megoldása és így létezik nem negatív bázismegoldása is. $u_2^*(c) = 0^*$ miatt ez csak $[u_1^*(c); 0^*]$ alakú lehet. Így a $\nabla g(x^*)$ mátrix első n sorának lineárisan függetlennek kell lennie. Ezért írható:

$$u_1^*(c) = (-c^*)\, \nabla\, g_{J1}(x_0)^{-1}.$$

$u_1^*(c)$ nem-negativitása tetszőleges nem-negatív c mellett csak akkor áll fenn, ha

$$\mathrm{B} = \nabla\, g_{J1}(x_0)^{-1} \leq 0.$$

Alkalmazzuk tételeinket arra az esetre, amikor K poliedrikus. Legyen:

$$\mathrm{L} = \{x \mid x \in \mathrm{R}^n;\ b - Ax \leq 0\},$$

ahol $A : (m \times n)$ méretű mátrix és $b \in \mathrm{R}^m$. Bizonyítjuk a következő állítást:

Korollárium: x_0 akkor és degenerációmentes esetben csak akkor minimális eleme az L halmaznak, ha $x_0 \in$ L és x_0-t egy nem-negatív inverzű bázis határoz meg.

[Azt mondjuk, hogy egy $\hat{x}$ vektort, amelyre $A\hat{x} \geq b$ egy A_B bázis határoz meg, ha a sorok megfelelő átrendezése után a feladat particionálható

$$\begin{bmatrix} A_B \\ A_N \end{bmatrix} x \geq \begin{bmatrix} b_B \\ b_N \end{bmatrix}$$

alakban és

$$A_B\hat{x} = b_B, \quad (\hat{x} = A_B^{-1} b_B)$$

$$A_N\hat{x} \geq b_N.]$$

A feltétel elégséges. Ha $x_0 \in$ L, és egy A_B nem-negatív inverzű bázis határozza meg, akkor

$$x_0 = A_B^{-1} b_B$$

vagyis az L konvex halmazt meghatározó feltételek közül legalább n egyenlőségre teljesül. A

$$g(x) = b - Ax$$

rendszer Jacobi mátrixa: [—A]. Minthogy A-nak van nem-negatív inverzű bázisa, ezért az 1. Tétel feltételei teljesültek és így x_0 minimális elem L-ben.

A feltétel szükséges. Ha x_0 az L halmaz minimális eleme és pontosan n feltétel teljesül egyenlőségre (degenerációmentesség), akkor teljesültek a 2. Tétel feltételei. A regularitási követelmény teljesülésére ugyanis most nincs szükség, mert az L halmazt meghatározó függvények lineárisak. Így a $\nabla g_{J1}(x_0)$ mátrix, amely jelen esetben $(-A_B)$ nem szinguláris és inverze nem-pozitív. Vagyis: $A_B^{-1} \geq 0$, és x_0-t nem-negatív inverzű bázis határoz meg.

A Korollárium a Cottle—Veinott-féle tétel 1. és 3. állítása közötti ekvivalenciát bizonyítja közvetlenül. A hivatkozott tétel 2., 3. és 5. állításai következnek a Korolláriumból.

Kiegészítő megjegyzések: A tett feltételezések több pontban gyengíthetők anélkül, hogy állításaink érvényüket vesztenék. A K halmaz P alatt adott definíciójában elegendő a $g_i(x)$ $(i = 1, 2,3, \ldots)$ függvények alulról félig folytonos voltát és kvázikonvexitásukat feltételezni.

Az 1. Tétel érvényességéhez nem szükséges valamennyi $g_i(x)$ függvény kvázikonvexitása. Elegendő, ha az x_0 pontban aktív feltételekben szereplő $g_i(x)$; $i \in J_1$ függvények kvázikonvexek és folytonosan differenciálhatók x_0-ban. A 2. Tétel érvényességéhez elégséges a differenciálhatóságot az x_0 pontban feltételezni. A regularitási feltétel enyhíthető ún. gyenge regularitási feltételre, amely csak a $g_i(x)$; $i \in J_1$ függvények meghatározta halmazra kívánja meg belső pont létezését. Végül nem szükséges valamennyi $g_i(x)$ konvexitását megkövetelni. Elegendő, ha a $g_i(x)$; $i \in J_1$ függvények pszeudokonvexek x_0-ban.

(Beérkezett: 1974. október 10.)

IRODALOMJEGYZÉK

1. WINTGEN, G.: Indifferente Optimierungsprobleme. Mathematik und Kybernetik in der Ökonomie. Konferenzprotokoll. II. II. 3—6. 1964.
2. BOD P.: Megjegyzés Wintgen G. egy tételéhez. MTA III. Osztályának Közleményei. 1966. 16. 275—279. o.
3. COTTLE, R. W.—VEINOTT, A. F. JR.: Polyhedral sets having a least element. Mathematical Programming. Vol. 3. No. 2. 238—249.
4. HADLEY, G.: Nonlinear and dynamic programming. 1964. Chapter 2. 11.

ON CLOSED CONVEX SETS HAVING A LEAST ELEMENT

We generalize a theorem due to R. W. Cottle and A. F. Veinott Jr. on polyhedral sets having a least element to the class of the closed, convex sets defined by a finite number of non-linear inequalities.

We consider sets of the form:

$$K = \bigcap_{i=1}^{m} K_i$$

$$K_i = \{x \mid x \in H \subset R^n;\ g_i(x) \leq 0\}$$

where the functions $g_i(x) \in C^1$ are convex.

We prove the following statements:

Theorem 1. (sufficient criteria) The set K has a least element if there exists $x_0 \in K$ yielding in at least n constraints equality and the Jacobian matrix formed by the active constraints at x_0 has a non-positively invertible basis of order n.

Theorem 2. (necessary criteria) If x_0 is the least element in K yielding equality in exactly n constraints and Karlin's constraint qualification holds on K, then the Jacobian matrix formed by the active constraints at x_0 is non-singular and has a non-positive inverse.

By applying the theorems on the polyhedral case one obtains as a corollary the equivalence (1) $\Leftrightarrow$ (4) in theorem of Cottle and Veinott.

О ЗАМКНУТЫХ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВАХ С МИНИМАЛЬНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ

Мы обобщаем теорему Р. У. Котла и А. Ф. Вейнотта младшего, о полиэдрических множествах с минимальным элементом на класс замкнутых выпуклых множеств, определенных конечным числом нелинейных неравенств.

Мы рассматриваем множества вида:

$$K = \bigcap_{i=1}^{m} K_i$$

$$K_i = \{x \mid x \in H \supset R^n;\ g_i(x) \leq 0\}$$

где выведение выпуклых функций gi(x) é C^1 может быть беспрерывным. Докажем следующее:

Теорема 1. (достаточные условия). Множество К имеет минимальный элемент, если существует такое значение $x_0 \in K$, для которого по крайней мере имеется n ограничительных условий и которое дает равенство, образуемое из условий матрицы Якоби и базу X_0порядка n с неположительным обращением.

Теорема 2 (необходимые условия). Если x_0 минимальный, и множество К является регулярным согласно условию элемент множества К, так что относительно равенства точно осуществляется n условий регулярности Карлина, тогда образования из активных условий матрица Якоби не сингулярна в x_0, и ее обращенное значение не положительно.

Если мы применим наши теоремы относительно полиэдрического случая, мы получим в качестве короллария фигурирующую в теореме Котла и Вейнотта эквивалентность согласно следующему: (1) ($\Leftrightarrow$) (4).

KÖNYVEKRŐL

KORNAI JÁNOS: *Erőltetett vagy harmonikus növekedés* — Budapest, 1972. Akadémiai Kiadó. 86 p.

Kornai János „Erőltetett vagy harmonikus növekedés" című könyve magasan kiemelkedik a növekedéssel foglalkozó hazai és külföldi művek sorából. A szerző érdeme, hogy el tudott szakadni azoktól a merev gondolati sémáktól, amelyeket a különböző növekedési iskolákhoz tartozók szinte kötelességszerűen fogadnak el, tanulmánya ennek következtében új problémákat felvető és régieket újszerűen kezelő mű.

A gazdasági fejlődés problémáját a szerző a tervezés során felmerülő igényekből kiindulva és azokat állandóan szem előtt tartva közelíti meg. Nemcsak összegyűjti agyakorlat tanulmányozása közben felszínre kerülő azon kérdések sorát, melyekre az elmélet még nem adott megfelelő választ, de kísérletet is tesz arra, hogy tovább lépjen felvázolva a megoldás főbb irányait.

A legjelentősebb kérdések, amelyekkel foglalkozik a következők: milyen követelmények teljesülését kell figyelembe venni egy-egy ország gazdasági fejlődésének megítélésekor — mik az ún. „harmónia-követelmények"; hogyan határozhatómeg hogy egy ország harmonikus pályán halad avagy sem; mik a harmonikus pályára való átmenet feltételei és követelményei; mi a tervezés és a piac szerepe a harmónia megteremtésében és fenntartásában.

A harmónia-követelmények felsorolását megelőzően a szerző a harmónia fogalmának általánosabb megközelítésére vállalkozik. Itt a harmónia-követelményeket kialakító tényezőkből indul ki. E tényezők az emberi szükségletekkel és a technikai feltételekkel, mint objektív, és a racionalitásra való törekvésekkel, valamint az általános politikai és morális megfontolásokkal mint szubjektív oldalakkal kapcsolatosak. A tényezők bizonyos „harmonikus-arányokat" határoznak meg. A harmonikus arányok fő jellemzői, hogy azok nem érvényesek egyszer s mindenkorra, s minden országra. „A harmónia tehát dinamikus követelmény, — hangsúlyozza a szerző, majd hozzáteszi: összeférhetetlen a különböző szektorok, különböző gazdasági tevékenységek közötti megmerevedett arányokkal, s ehelyett az időben meghatározott szabályosságok szerint eltolódó arányokat követel meg". (Lásd 9. oldalon).

Kornai a dinamikus arányokra vonatkozó kijelentésével azokkal a közgazdászokkal is vitába száll, akik az ún. Neumann-pályán való haladást, ahol a szektorok azonos ütemben nőnek, tekintik a leggyorsabbnak. Véleménye szerint: „A növekedés, a fejlődés lényege sikkad el abban az elméletben, amely „optimálisnak" kívánja feltüntetni a struktúrák állandóságát". (33. oldal).

Kornainak igaza van abban, hogy az általa felsorolt harmónia-követelmények teljesülésének foka országok és fejlődési periódusok szerint is változik. A dinamikus arányok hangsúlyozása igen fontos és a tervezésben okvetlen szem előtt tartandó követelmény.

A kifejtést talán az tette volna még teljesebbé, ha a szerző kitér arra a kérdésre is, hogy a harmonikus arányok eltolódása hogyan, milyen csatornákon keresztül hat a bírált elméletre. Az összefüggés első pillantásra nem kézenfekvő, mert a konstans növekedési ütemek, a Neumann-pálya híveinél, elsősorban a termelési szektorokra vonatkoznak, míg Kornainál az eltolódó arányok elsősorban *nem* arra. A könyvben felsorolt tizenkét harmónia követelményt egyáltalán nem termelési oldalról, a termelést előtérbe helyező nézőpontból határozza meg, így a hagyományos (és a Neumann pályánál is feltételezett) szektorbontás itt nem is értelmezhető. Ezenkívül a termelés nagy részére, a kompetitív termelésre, egyáltalán nem is szerepel követelmény.

Kornainak egyik érdeme éppen az, hogy elveti azt a szokásos kiindulópontot, hogy a fejlődés akkor a leggyorsabb, ha a termelés a legnagyobb ütemben nő. A termelésnek, mint a fejlődés reprezentánsának helyét nála olyan tényezők veszik át, mint a fogyasztás arányossága, az ösztönző és igazságos jövedelemelosztás, a biztonság, az oktatás fejlesztése, a strukturális arányok a nem kompetitív termelésben, a minőség javítása, a környezetvédelem, azaz a könyvben részletesen tárgyalt harmónia követelmények.

A termelés maximális növelésére való törekvés háttérbe szorítása, és a harmonikus fejlődés fontosságának hangsúlyozása az egész tanulmányon végighúzódik. A szerző eleve abból a konfliktusból indul ki, amely szerinte a tervezőkben dúl a „harmónia-lélek" és az „ütemlélek" között. A „harmónia-lélek" az arányos, a kiegyensúlyozott fejlődés megvalósítására, az „ütem-lélek" a növekedés minél gyorsabb ütemének elérésére törekszik. A két lélek egymással ellentétben van, mert a két követelmény, amit képviselnek ellentmondó: vagy gyorsan fejlődik a gazdaság vagy harmonikusan.

A szerzőnek az ütem és a harmónia közötti ellentmondásra vonatkozó tétele akkor igaz, ha a fejlődést szűken értelmezzük és egy-egy olyan mutatóval fejezzük ki, mint a bruttó hazai termelés vagy a nemzeti jövedelem alakulása. Ezek a mutatók ugyanis a gazdaság fejlődésének csak egyes vonásait fejezik ki, másoktól elvonatkoztatnak. Ha tehát a tervezők a fejlődési lehetőségeket reálisan kifejező alternatívák közül azokat részsítik előnyben, amelyeknél mondjuk a nemzeti jövedelem növekedési üteme a legmagasabb, akkor ezzel azokat a tevékenységeket helyezi előtérbe, amelyek eredménye e mutatóban megjelenik, méghozzá olyan fokban, amilyen mértékben az egyes tevékenységek pozitív irányban befolyásolják a mutatók alakulását, és egyidejűleg háttérbe szorítják a mutatóban nem, vagy csak kis súllyal szereplő tevékenységeket. Ha Ha azonban a fejlődést nem egy mutató alapján, hanem sok, a gazdaság fejlődésének összes fontos oldalát figyelembe vevő módszerrel fejezzük ki, jelentősen csökken, ha ugyan nem szűnik meg teljesen az ellentmondás a harmónia és az ütem követelmények között. Kornai erőteljesen hangsúlyozza az egy mutatóval operálás hibáit, amikor azt írja, hogy az egyetlen mutatóval való mérés tudományos, módszertani és gazdaságpolitikai vétke alól nemadhat felmentést semmiféle egyszerűsítési törekvés. Nem emeli ki azonban a fentiekben vázolt összefüggést az ütem és a harmónia követelmények ellentmondása, valamint az egy mutató és a sok mutató alkalmazása között.

A fejlődésnek a sokirányú és széleskörű harmónia-követelmények teljesülése alapján való megítélése természetesen sokkal nehezebb, mint például az ha csupán a nemzeti jövedelem növekedési ütemével számol valaki. Kornai kétféleképpen is megkísérli megoldani ezt az igen bonyolult feladatot. A kérdéssel először általánosság ban a 2.2 és 2.3 részekben foglalkozik, ahol a harmónia-követelmények teljesülésének belső és külső „támpontjait" sorolja fel. A harmónia-követelmények megsértéséről a belső információs rendszer, amelynek fő elemei az áralakulás, a készlethelyzet és a közvetlen tiltakozás, csak utólagosan értesíthet. Ezek a negatív, már a disszharmóniát észlelő, jelzéseket lehetőség szerint ki kell egészíteni olyan információkkal, amelyek pozitívak és előzetesek, amelyek segítségével előre megtudhatjuk, hogy milyen esetben fog a gazdaság letérni a harmonikus útról. Ilyen jelzőrendszer lehet az, amely a nemzetközi főáramlatok tanulmányozásán alapul. A nemzetközi főáramlatok — írja a szerző — a világméretű fejlődés történelmi főáramlatait feltáró azon összefüggések, amelyek sok ország azonos fejlődési szakaszában nagyjából azonos módon nyilvánultak meg és ezért szolgálhatnak kiindulópontként a jövőre vonatkozó döntéseknél.

A harmónia-követelmények teljesülésének általános támpontjain túl a tanulmány konkrétan is foglalkozik a mérés problémájával. A szerző a 4.4 pontban igen szellemes módszert javasol a harmónia-követelmények teljesülésének mérésére, ábrázolására. A módszer mögött az az elgondolás húzódik meg, hogy a fejlődés akkor harmonikus, ha a harmónia-követelmények teljesülése időben arányos, abban az értelemben, hogy nincsenek olyan követelmények, amelyek fejlődése hosszú idő átlagában tartósan nagyobb vagy kisebb, mint harmonikus értékük. A harmonikus fejlődés tehát ún. mozgó arcvonal mentén történik, az egymást követő időszakokban az arcvonal változik, azok a követelmények, amelyek harmonikus normájuktól időlegesen elmaradtak ismét előtérbe kerülnek, míg az indokolatlanul előrefutók fejlődése később lelassul. A diszharmónikus fejlődésre, ezzel szemben tartós be- és kitüremkedések jellemzők: egyes területek tartósan túllépik a harmonikus normájuk által megszabott növekedési ütemüket, míg mások tartósan alatta maradnak.

A javasolt vizsgálati módszer egyszerű és plasztikus, s így a tervezésben jól alkalmazható lenne, kár, hogy a szerző nem foglalkozott egy kicsit részletesebben az alkalmazhaóság feltételének, a harmonikus norma megállapításának módjával is. A módszernek a javasolásakor Kornai csupán azt jegyzi meg: „Nem baj, ha a normális bizonytalan, s nem tudjuk egész pontosan mi a 100%." Az valószínűleg igaz, hogy nem baj, ha a normális egy kicsit bizonytalan. De valóban csupán erről van szó? Csak az a probléma, hogy a becslés nem *elég* pontos? Az olvasó nem kap választ arra a kérdésre, hogy egyáltalán megállapítható-e a norma értéke, és ha igen milyen módszerrel, és természetesen arra sem, hogy milyen pontossággal. A harmonikus normák értékét — a szerző gondolatkörében maradva — talán a nemzetközi főáramlatok segítségével lehetne meghatározni. A főáramlatok felhasználásánál azonban igen körültekintően kell eljárni, — int a szerző már a könyv elején. Az egyes országok speciális adottságai és különleges fejlődési útjai miatt az esetek többségében valószínűleg igen széles lesz az a sáv, amelyben az adatok elhelyezkednek. Ennek következtében, ha mondjuk a sáv középértékét vennénk 100%-nak, előfordulhat, hogy még a 200%-ot se lehetne diszharmonikusnak tekinteni. A normától való százalékos eltéréseket kifejező arcvonal tehát a viszonyítási alap — a harmonikus norma — nagyfokú bizonytalansága miatt nehezen lenne értelmezhető.

A fejlődéssel kapcsolatos elméleti jellegű megállapításokat jól egészíti ki a tanulmány második része, amelyben a magyar gazdaságra vonatkozó elemzések találhatók. A tizenkét harmónia-követelmény teljesülése, az áldozatok, a halasztások és mulasztások az egyes területeken markánsan jellemzik az erőltetett növekedést az 1949—1953-as periódusban, illetve a harmonikus pályára való áttérést a hatvanas években. Az elemzés summáját a 67—68. oldalakon olvashatjuk. „Magyarország másfél évtizede átmeneti állapotban van az erőltetett és a harmonikus növekedési pályák között. Ez az áttérés azonban lassú, sok részletében következetlen, vissza-visszaeső: sokféle régi halasztás és mulasztás folytatódik. Az áttérés nem igazán tervszerű: sok benne a rögtönzés, a körmünkre égett bajok nyomán hozott intézkedés." Az áttérés lassúságát és következetlenségeit a továbbiakban Kornai a növekedési ütem fétissel hozza összefüggésbe. A növekedési ütem a harmonikus pályán lassabb, mint az erőltetetten, mert általában a lassúbb megtérülésű területek maradnak el a diszharmónikus fejlődés esetén. Az áttérés időszakában pedig különösen alacsony lesz a növekedési ütem akkor, ha sok halasztást kell behozni. Kornai szerint a fő probléma az, hogy a tervezők nem merik vállalni ezt a lassúbb növekedési ütemet a harmónia érdekében.

„Az erőltetett növekedés hibáira való ismételt visszaesés legfeltűnőbb formája: a beruházások »elszalasztása«." (Lásd 73. oldal). Vagyis az a jelenség, hogy több beruházást terveznek, illetve kezdenek el, mint amennyinek optimális idő alatt történő végrehajtásához rendelkezésre állnak az anyagi eszközök. A beruházási javak területén jelentkező hiányokat a szerző összefüggésbe hozza a gazdaság többi területén mutatkozó hiánnyal, a kereslet túlsúlyával a piacon, amit egy másik munkájában szívásnak nevezett. A szívást összekapcsolja az erőltetett növekedéssel és megállapítja, hogy a piaci helyzet jó fokmérője lehet annak, milyen mértékben sikerült már áttérni a harmonikus pályára.

Az előző gondolatsort a kiegyensúlyozatlan növekedés híveivel folytatott polémia zárja le. A vita magja akörül van, hogy egy gazdaság fejlődését mi mozdítja jobban elő: az általános hiányhelyzet — a szívás; vagy éppen ennek ellentéte: árubőség — a nyomás. Az *unbalanced growth* hívei szerint a szívás, Kornai szerint pedig a nyomás. A kérdés eldöntése persze nem független attól, hogy melyik ország, milyen fejlődési periódusát vizsgáljuk, — írja a szerző. Lehet, hogy a szívásnak igen jelentős szerepe van a fejlődés megindításában, de ma már Magyarországon ez a hatása nem érvényesülhet, s így csak negatív követelményei figyelhetők meg.

A hiánygazdaság hátrányait ismervén érthető ellentétére, a feleslеggazdaságra való áhítozás. A fokozott tartalékképzés és a jóval nagyobb kapacitás-felesleg kialakításának javaslásakor azonban, a teljesség kedvéért, kívánatos lett volna — véleményem szerint — azzal a kérdéssel is foglalkozni, hogy nemcsak a szívásnak, de a nyomás-helyzetnek is lehetnek igen káros, a fejlődést hátráltató és diszharmonikus irányba toló hatásai. Az áruk minősége például nemcsak azért lehet rossz, mert a vásárlók mindent megvesznek az áruhiány miatt, hanem azért is, mert olyan nagy a túltermelés, hogy a termelők csak akkor tudják értékesíteni árujukat, ha a fogyasztóknál levő áruk normális élettartamuknál hamarabb mondják fel a szolgálatot. Előfordulhat tehát az az eset, hogy a szívás helyzetben a termelők nincsenek kényszerítve arra, hogy jó minőségű terméket gyártsanak, a nyomás helyzetében pedig előnyük származhat abból hogy rontják minőségét.

A tanulmány utolsó részében a szerző a terv és a piac szerepét elemzi a harmonikus növekedés viszonylatában. Megállapításait a következőkben lehetne összefoglalni: *a)* a harmónia nem valósul meg a piaci automatizmusok hatására; *b)* az okos tervezés nem gátolja, hanem elősegíti a harmónia kialakulását; *c)* a tervezés egymagában, a piac „segítsége" nélkül nem képes a harmonikus útra terelni, vagy azon tartani a gazdaságot.

A magyar gazdaságban az utóbbi időben végbement változások éppen ebbe az irányba, a harmonikusabb fejlődés érdekében az okos tervezés és a piac eszközeinek együttes felhasználására mutatnak. A szerző munkájával amint ezt a befejezésben ki is emeli, e kérdéskomplexum megoldásához kívánt hozzájárulni. Törekvése, véleményem szerint azért tekinthető sikeresnek, mert előrevivő módon foglalkozott azokkal a legfontosabb problémákkal, amelyek egyaránt jelentősek a növekedés elmélete és a tervezés, valamint a gazdaságpolitika gyakorlata szempontjából. Kornai könyve ezért igen elgondolkoztató, izgalmas és tanulságos — szabatos stílusa következtébenpedig élvezhető olvasmány is — nemcsak elméleti, de gyakorlati közgazdászoknak, sőt olyan nem közgazdász olvasóknak is, akik érdeklődéssel kísérik korunk egyik legalapvetőbb — a gazdasági fejlődéssel kapcsolatos kérdését.

RIMLER JUDIT

EDMOND MALINVAUD: *Az ökonometria statisztikai módszerei.* Budapest, 1974. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. 804 p.

Az ökonometria irodalma ma már könyvtárnyi, de tekintélyes kézikönyvtárat lehetne összeállítani azokból az összefoglaló rendszer alkotó ökonometria-elméleti munkákból is, amelyek az ötvenes-hatvanas évek fordulójától kezdve a kézikönyv vagy a tankönyv igényével a nagy nyugati könyvkiadóknál egymás után megjelentek. És bár közgazdasági gondolkodásunkban és gyakorlatunkban is megnőtt a kvantitatív vizsgálatok igénye az utolsó évtizedben, ebből az irodalomból — magyar nyelven — nem jutott el a magyar szakemberekhez semmi. Vagy jóformán semmi, hiszen *J. Tinbergen* Ökonometriája magyarországi megjelenésekor (1957) már nem tükrözte ennek a dinamikusan fejlődő tudománynak a tényleges állapotát, a lengyel *Z. Pawlowski* — egyébként egy kitűnő ökonometriaelméleti könyv szerzője — magyarul kiadott Ökonometriája (1970) pedig szándékában is inkább népszerűsítő írás, mint szakkönyv. Ha tekintetbe vesszük azt is, hogy könyvtárainkban az eredeti kiadások is csak minimális példányszámban lelhetők fel, nem nehéz megfogalmaznunk (legalábbis egyik) okát annak, hogy az ökonometriai módszerek — létjogosultságuk ellenére — miért kevésbé elterjedtek hazai gyakorlatunkban, mint a matematika más módszerei. Súlyos hiányt pótol tehát és, reméljük, súlyos mulasztást tesz jóvá a Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó vállalkozása E. Malinvaud könyvének lefordíttatásával és kiadásával.

E. Malinvaud könyve *sikeres könyv.* Ezt az egykorú — egybehangzóan elismerő — kritikáknál meggyőzőbben bizonyítja, hogy első, francia nyelvű megjelenése után nem sokkal angolra fordították és angolul két kiadást ért meg (1964 és 1969), olyan, az angol nyelvű irodalomban standarddé vált kézikönyvek mellett, mint *J. Johnston* Econometric Methods c. munkája és *A. S. Goldberger* Econometric Theory c. műve. Az olvasó már néhány fejezet elolvasása után rájön ennek a titkára: E. Malinvaud nemcsak jelentős tudós, hanem gyakorlott pedagógus is, aki a tudományos ismeretközlés minden buktatóját és fortélyát ismeri. Igen, E. Malinvaud könyve *tankönyv*, a szó legnemesebb értelmében, míg a Johnstoné és a Goldbergeré „csak" kézikönyv.

Mit akar E. Malinvaud könyve olvasójának tanítani? Elsősorban szemléletet: olyan látásmódot, amely képessé teszi a konkrét probléma modelljének megfogalmazására, a megfogalmazott modellben alkalmazható módszerek kiválasztására és az eredmények helyes értékelésére, és csak másodsorban egyes modelleket és módszereket. Jól látja, hogy a tudomány fejlődésével maguk a modellek és a módszerek változnak, körük bővülhet, egyesek „elavulttá válhatnak", nem változnak vagy lassabban változnak viszont alkalmazásuk elvi alapjai. Éppen ezért úgy gondoljuk, hosszú ideig marad korszerű E. Malinvaud könyve, mint ahogy ebben az értelemben ma is modern *J. Tinbergen* már említett Ökonometriája vagy *L. R. Klein* A Textbook of Econometrics c. tankönyve is.

Ma még természetesen nemcsak ez biztosítja korszerűségét. E. Malinvaud könyve *rendkívül gazdag tartalmú könyv:* különböző súllyal, de tárgyalja az ökonometriaelmélet csaknem minden lényeges problémáját és eredményét.

Szerkezetileg a könyv öt részből, ezeken belül összesen húsz fejezetből áll.

Az első rész *(„Bevezetés")* a gazdasági adatok matematikai-statisztikai kezelésével kapcsolatos fogalmakat és elveket tárgyalja. Az I. fejezet („Ökonometria sztochasztikus modell nélkül") a különböző típusú regressziókat és azok kapcsolatait mutatja be — modell (azaz a vizsgálatban szereplő mennyiségek kapcsolataira vonatkozó a priori hipotézisek) nélkül, és elvezeti az olvasót annak felismeréséig, hogy a vizsgálat eredményeinek értelmezése és felhasználása modell nélkül nem lehetséges. Természetesen következik ezek után a II. fejezetben („Gazdasági modellek és a statisztikai következtetés") a modell és a struktúra fogalmának és a modellen belül a struktúra meghatározására irányuló statisztikai következtetés alapelveinek bevezetése. A III. fejezet a legegyszerűbb modellben végezhető statisztikai következtetés módszereit elemzi („Az egyszerű regresszió lineáris modellje"). A IV. fejezet, amely a fogyasztói magatartás ökonometriai modelljének néhány — közgazdasági-elméleti és matematikai szempontból is különböző — változatát ismerteti, kettős tanulsággal szolgál: egyrészt felhívja a figyelmet azokra a konzekvenciákra, amelyekkel a modell ilyen vagy olyan specifikációja az alkalmazható módszerekre és a levonható következtetésekre nézve jár, másrészt megmutatja, hogy a gyakorlat igényei az egyszerű lineáris regressziós modell milyen általánosításait teszik szükségessé. A könyv hátralevő részei ezekkel az általánosításokkal foglalkoznak.

A második rész *(„Lineáris becslés")* fő témája egyetlen általánosítás, a többszörös lineáris regressziós modell (VI. fejezet: „Többszörös regresszió"), amelyet a „A lineáris becslés általános elmélete" (V. fejezet) vezet be. Ez az utóbbi lesz matematikai szempontból a legtöbb olvasó számára, legnehezebb fejezete, amelyet azonban ki is hagyhat, hiszen az itt adott geometriai bizonyítás után a következő függelékben a Gauss—Markov-tétel analitikus bizonyítását is megtalálhatja. Ugyanakkor annak, aki a becslések elméleti alapjainak és tulajdonságainak mélyebb megértésére törekszik, nélkülözhetetlen e fejezet anyaga, melyet egyetlen másik ökonometriaelméleti könyvben sem talál meg. A rész két további fejezete közül a VII. a „Variancia és kovariancia analízis" alapelveit és néhány alkalmazását mutatja be, a VIII. pedig („Kiegészítő megjegyzések") a többszörös lineáris regressziós modellel kapcsolatos speciális problémákat tárgyal.

Két további általánosítás kerül sorra a harmadik részben *(„Két fontos sztochasztikus modell")*: a IX. fejezetben a „Nem lineáris modell additív hibával", a X. fejezetben a „Lineáris modell hibát tartalmazó változókkal". Gyakorlati szempontból valóban fontos két modelltípusról van itt szó, amelyeknek ilyen mélységű tárgyalása még az E. Malinvaudéhoz hasonló terjedelmű munkákból is hiányzik.

A negyedik részben *(„Idősorok illesztése")* tulajdonképpen egyetlen általánosításról van szó, hiszen a „Megosztott késésű modellek" (XV. fejezet) lényegében az „Autoregresszív modellek" (XIV. fejezet) egy típusát képviselik. Célszerűen vezeti be ezeket a modelltípusokat a hibák autokorrelációjának jelenségével foglalkozó XIII. fejezet, hiszen közös jellemzőjük, hogy bennük az autokorreláció figyelembevétele vagy kiszűrése igényel speciális statisztikai következtetési módszereket. Ugyanakkor szerkezeti szempontból problematikus a rész két további „bevezető" fejezete. Ezek („Bevezetés a szochasztikus folyamatokba" és „Idősorok statisztikai elemzése") az idősorok hagyományos és spektrális elemzését tárgyalják — ebben a könyvben előzmények és folytatás nélkül. Talán nem tévedünk, ha úgy érezzük hogy a teljesség igényéből kerültek ide, az viszont bizonyos, hogy a spektrális elemzésből adott ízelítővel nehéz perceket szereznek az olvasónak, ez egyszer anélkül, hogy későbbi fejezetek fáradságáért a megérkezés örömével kárpótolnák.

Az ötödik, utolsó rész *(„Szimultán egyenletekből álló modellek")* az egyszerű lineáris regressziós modell utolsó általánosításának, a szimultán modellnek a problematikáját tárgyalja. Ha arra gondolunk, hogy hosszú időn keresztül ez a téma állt az ökonometriaelméleti kutatások középpontjában, feltűnik, hogy E. Malinvaud viszonylag szűk helyet, több mint 800 oldalból csupán kb. 130 oldalt szentelneki., A rész áttanulmányozása azonban az arányok helyességéről győz meg: ekkora terjedelem a szerzőnek elég arra, hogy sokoldalúan és szinte teljeskörűen tárgyalja a szimultán modellben végzett statisztikai következtetés problémáit; talán azért is, mert ezen problémák többségének az ökonometriaelmélet már megnyugtató megoldását adta. Két bevezető fejezet (XVI. „Szimultán egyenletekből álló modellek az ökonometriában" és XVII. „Példákkal illusztrált becslési problémák") elsősorban arra hivatott, hogy gyakorlati példák egész sorának bemutatásával felvesse azokat a problémákat, amelyek a szimultán modellben végzett statisztikai következtetéseknél jelentkeznek. Ezek közül eggyel, az identifikálhatósággal foglalkozik a XVIII. fejezet; annak feltételeit fogalmazza meg, hogy a statisztikai következtetés elvégezhető, éspedig egyértelműen. Az utolsó két fejezet mutatja be a szimultán modellek becslési módszereit, éspedig érdekes módon eltérve minden más ökonometriaelmélet könyv gyakorlatától, előbb az ún. teljes információn alapulómódszereket(XIX.fejezet)és csak azután az egyszerűbb, ún. korlátozott információn alapuló módszereket. A szimultán modellel foglalkozó rész valamennyi fejezetében a szerző kitér az ehhez képest speciális ún. egyszerű modell és rekurzív modell képzelésének sajátosságaira is, ezzel megkönnyítve az olvasó számára a bemutatott módszerek helyes felhasználását.

Dicséret illeti a fordítók, *Kotász Gyuláné* és *Szegedi Miklós* munkáját, amelynek alapja a könyv második angol kiadása volt Fordításuk élvezetes, a nyilvánvalóan nagyszámú terminológiai problémát szinte kivétel nélkül jól oldották meg.

E. Malinvaud könyvét tankönyvként méltattuk, de kézikönyvként is jól használható. Megkönnyíti ezt gondosan összeállított tárgymutatója, bőséges bibliográfiája és szövegközti irodalmi hivatkozásai is. Meggyőződésünk, hogy ez a könyv tankönyvként is jelentősen előmozdítja az ökonometriai módszerek szélesebbkörű megismerését és gyakorlati hasznosítását hahánkban.

PAIZS JÁNOS

RUSSELL L. ACKOFF: *Operációkutatás és vállalati tervezés* Budapest, 1974. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó 203 p.

Mindazok számára, akik vállalati tervezéssel és vezetéssel foglalkoznak, s meg akarnak ismerkedni a polgári vállalati tervezés filozófiájával, valamint a vezetési-szervezési tevékenység funkcióival, igen érdekes olvasmány a neves szerző, R. L. Ackoff „Operációkutatás és vállalati tervezés" című könyve. A mű eredeti címe „A Concept of Corporate Planning".

Főleg az operációkutatás gyakorlatában kialakult eljárásokat és módszereket tárgyalja, egyszerű, könnyen érthető stílusban. A magyar kiadás címe ne tévessze meg az olvasót: nem az operációkutatás matematikai módszertanát, a szimulációhoz szükséges számítástechnikai ismereteket mutatja be a szerző, hanem a vezetési-szervezési tevékenység területén jelentkező döntési problémákat, a döntés céljának pontos megfogalmazását, a gazdasági cselekvés lehetséges alternatíváinak vagy azok halmazának megtervezését, a felhasználható alternatívák kiválasztását, az ehhez szükséges releváns információk beszerzését az operációkutatás keretein belül. *Az operációkutatás szó használata itt csak akkor helyénvaló, ha azon „a meglevő komponensekből álló konkrét rendszerek elemzését" értjük.*

A szerző elsősorban olyan kérdésekre keresi a választ, hogy mi is a tervezés, mit kell tartalmaznia a tervnek, hogyan kell a tervezést lebonyolítani és megszervezni, milyen előnyök származnak a tervezésből. Mindezt számos, a gyakorlati életből vett példával illusztrálja. A könyv hét fejezetre tagolódik.

Az *első fejezet a tervezés természetét és tartalmát tárgyalja.* Részletesen elemzi a döntéshalmazok sajátosságait, összefüggő rendszerét; majd kitér az időhorizont szempontjából megkülönböztetett rövid és hosszútávú tervek taktikai és stratégiai jellegére. A „taktikai tervezés" eszközöket választ ki, amelyekkel meghatározott célok érhetők el; míg a „stratégiai tervezés" egyrészt megfogalmazza a célokat, másrészt kiválasztja a megvalósításukhoz szükséges eszközöket. Itt ismerteti a szerző a *három tervezési filozófiát* is: a kielégítő, az optimalizáló és az adaptív (vagy másképpen innovatív) tervezést. Meglevő ismereteink mellett a három tervezési szemlélet közül általában és teljes mértékben csak a kielégítő tervezést tudjuk érvényesíteni. Az optimalizáló és főleg az adaptív tervezés alaposabb ismereteket kíván a szervezet viselkedéséről.

A *második fejezetben a célok és a tervcélok kifejtése található.* A tervezésnek abban a szakaszában, amelyben a célokat és a tervcélokat megfogalmazzák a következő követelményekre kell ügyelni:

— a vállalati célok meghatározására és tervcélokká alakítása folyamán a tervcélok megvalósítási menetét is meg kell határozni;
— meg kell állapítani az egyes tervcélok operatív meghatározásához és az előrehaladás értékeléséhez szükséges mércéket;
— az egyes tervcélok közötti ellentmondásokat meg kell szüntetni.

A *harmadik fejezetben a szerző a döntési szabályokat és a cselekvési folyamatokat tárgyalja.* A tervezés folyamán nemcsak az egyes célok megvalósításának különböző változatait értékelhetjük, hanem új és jobb változatokat is kialakíthatunk. Ezek hatékony tervezésének és értékelésének alapvető feltétele az, hogy megértsük a tervezett rendszert. Ezt legjobban *az adott rendszer értelmező modelljével* érhetjük el. Az egyes modellek fontosságát a szerző abban látja, hogy segítségükkel bővülnek ismereteink a vállalatokról, a vállalat bővülnek ismereteink a vállalatokról, a vállalat ellátási,, forgalmi és marketing rendszeréről, fogyasztóiról, versenytársakról és környezetéről.

A negyedik fejezet a vállalat működéséhez szükséges erőforrásokat elemzi, mégpedig a következő három szempont alapján: *a)* a forrásigény megállapítása, *b)* beszerzésük vagy képzésük megtervezése és *c)* elosztásuk. Az egyes erőforrásokat négy csoportba sorolja; ezek 1. pénz, 2. létesítmények és berendezések, 3. anyagok, készletek és szolgáltatások, 4. személyzet (munkaerő). A legtöbb figyelmet a munkaerő tervezése kapja. A hatékony munkaerő-tervezéshez olyan „munkaerő-válaszfüggvényekre" van szükség, amelyek megmutatják, hogy milyen okozati összefüggések vannak egy feladatra kijelölt munkaerőtípusa, létszáma és kimenete között.

Az *ötödik fejezet a szervezet tervezésével foglalkozik*. A szervezeti tervezés célját a következőkben fogalmazza meg a szerző:

— az elvégzendő fizikai és szellemi természetű munkák azonosítása;
— a munkák hozzárendelése megfelelő munkakörökhöz, majd a funkciók és a felelős egyének kijelölése;
— a dolgozók ellátása *a)* a munkakörük legjobb betöltéséhez szükséges információval; *b)* a szervezeti célokkal és tervcélokkal összhangban levő teljesítményi mércével; *c)* olyan motivációval, amely képességeik maximális kihasználására ösztönzi őket.

Ezekhez a szervezeti célokhoz igazodó tervezés főbb lépéseit (döntésáram, modellépítés, információigények, munkakörök és döntések, mérték és motíváció) ismerhetjük meg a fejezet további részében.

A *hatodik fejezetben a szabályzásról olvashatunk*. A szabályozás a döntések értékelése, amely néhy lépésből áll. Ezek:

— a döntések eredményeinek előbecslése teljesítménymértékek formájában
— információk gyűjtése a tényleges és a „megjósolt" teljesítmény összehasonlítása
— nem megfelelő döntés esetén a döntési eljárás és a következmények korrekciója.

Tekintettel arra, hogy a szabályozás hatékonyságát a vezetési információ-rendszer határozza meg, a szerző figyelme elsősorban a rendszer kommunikációjára, információ-rendszerére terjed ki. Felhívja az olvasó figyelmét arra, hogy az információs követelményeknek szoros kapcsolatban kell állniuk a rendszer komponenseivel, szervezeti struktúrájával, vezetési funkcióival.

Az utolsó, *hetedik fejezetben a tervezőmunka szervezésével* kapcsolatos kérdésekre kapunk választ.

A könyv végén két, viszonylag egyszerű modellt mutat be a szerző azzal a céllal, hogy megismertesse a modellkészítés folyamatával az olvasót. Az olvasottak további tanulmányozásához igen értékes segítséget nyújt az érdeklődő számára a szerző megjegyzéseivel összeállított gazdag bibliográfia.

Összegezésképpen megállapíthatjuk, hogy e könyv és a további, hasonló témakört feldolgozó könyvek megjelentetése hasznosnak ígérkezik vállalati tervezésünk számára, még akkor is, ha nem mindig nyújtanak kész recepteket.

MÓCZÁR JÓZSEF

TUDOMÁNYOS ÉLET

Az IFIP (Nemzetközi Információfeldolgozási Szövetség) tevékenysége

Az IFIP (International Federation for Information Processing) 1959-ben alakult. Jelenleg a Szövetségben 35 ország foglal helyet. Minden országot csak egy szakmai szervezet képviselhet teljes jogú tagként. Az IFIP magyarországi tagszervezete a Neumann János Számítógéptudományi Társaság.

Az IFIP *célkitűzései* a következők:

— a számítógép-tudományok és technológia fejlesztése,
— az információfeldolgozás területén létrejött nemzetközi együttműködés elősegítése,
— az információfeldolgozással kapcsolatos kutatás, fejlesztés és alkalmazás ösztönzése,
— a számítástechnikával kapcsolatos ismeretanyag terjesztése,
— a számítástechnikai oktatás segítése.

Szervezeti felépítés

Az IFIP legfőbb szerve a közgyűlés, amely évente egyszer ül össze. Ebben minden tagszervezetet egy személy képvisel. A közgyűlés dönt valamennyi fontosabb kérdésben. Ilyenek például az általános irányvonal, a tevékenységek programja, a tagfelvétel, a választás és a költségvetés. Az IFIP operatív irányítását a Tanács gyakorolja; napi tevékenységét pedig a Titkárság végzi, melynek székhelye Genfben van.

Az IFIP nemzetközi kapcsolatai

Az IFIP az UNESCO égisze alatt létesült és azóta is hivatalos kapcsolatban van az UNESCO-val. Hivatalos összeköttetésben áll az Egészségügyi Világszervezettel és az ENSZ más szervezeteivel is. Az IFIP négy testvér-szövetséggel, az AICA-val, az IFAC-al az IFORS-al és az IMEKO-val együtt megalapította a FIACC-ot, az „Öt Nemzetközi Szövetség Együttműködési Bizottság”-át, amely tapasztalatcsere fórum, és koordinációs lehetőséget nyújt. Ezen kívül az IFIP állandó kapcsolatot tart tanácsadói minőségben a CCITT-vel (Nemzetközi Távirati és Távbeszélő Konzultatív Bizottság), valamint az ICSU-val (Tudományos Egyesületek Nemzetközi Tanácsa).

Az IFIP szakmai bizottságai

Az IFIP tevékenységének vitelére szakmai bizottságokat (TC) és munkacsoportokat (WG) működtet. Ezek a következők:

— *TC 1* Terminológiai bizottság

WG 1.1 A munkacsoport feladata az IFIP—ICC információfeldolgozási szótár második kiadásának előkészítése, figyelembevéve az ebben a témakörben bekövetkezett változásokat.

— *TC 2* Programozási problémákkal foglalkozó bizottság. Munkájában egyrészt a programozási alapelvek és technikák koncepciója, osztályozása és leírása, másrészt a magasszintű programnyelvek tanulmányozása, harmadrészt a kiegészítő programtechnikák meghatározása, tanulmányozása és specifikálása áll előtérben.

WG 2.1 A munkacsoport szakterülete az ALGOL programozási nyelv, éspedig az ALGOL 60 folyamatos bevezetése és az ALGOL 68 kifejlesztése.

WG 2.2 A munkacsoport a programozási koncepciók kifejlesztésével, formális modellekkel, problémák meghatározásával foglalkozik és oktatási segítséget ad.

WG 2.3 A munkacsoport a programozási metodikával foglalkozik abból a szempontból, hogy milyen formában segíthető elő a programozók készségének növelése annak érdekében, hogy képesek legyenek a programokat egészében összeállítani. Vizsgálják a programok megbízhatóságának, adaptálhatóságának, helyességük kipróbálásának, struktúrájának, a programok összeállításának kérdéseit.

WG 2.4 A munkacsoport feladata a gépre orientált magasszintű programnyelvek területén az információcsere biztosítása.

—*TC 3*

A számítástechnikai oktatás problémáival foglalkozó bizottság. E bizottság különös figyelemmel van az „oktatók oktatására", valamint a fejlődő országok igényeire. Olyan anyagok létrehozárára törekszik, amelyek a számítástechnikai kultúra elterjesztését segítik elő.

WG 3.1 A munkacsoport a középfokú oktatás problematikájával foglalkozik, különös tekintettel a fejlődő országokra. Elősegíti a nemzetközi oktató-cserét és oktatási anyagok biztosítását a középiskolák számára. Előmozdítja a CAI (computer-assisted instruction) területén folyó tevékenységeket.

WG 3.2 A munkacsoport feladata oktatási szemináriumok szervezése. Biztosítja a kísérleti szemináriumok megtartását és ezek anyagának kellő dokumentálását.

WG 3.3 A munkacsoport feladata a számítógépek oktató jellegű használatának elősegítése, az itt felhalmozott tapasztalatok kicserélésének ösztönzése.

WG 3.4 A munkacsoport feladata az információfeldolgozással kapcsolatos felsőfokú szakmai oktatás elősegítése. Véleményt alkot és javaslatokat tesz az alkalmazott tantervekről, újabb tanfolyamokra vonatkozó elképzeléseket dolgoz ki stb.

—*TC 4* Az orvosinformatikai oktatás, kutatás és gyakorlat ösztönzésével és fejlesztésével foglalkozó bizottság.

Figyelme az orvostudományi adatfeldolgozás problémáira, a számítógép által támogatott diagnosztikai módszerekre, az orvostudományban alkalmazott matematikai módszerekre stb. terjed ki.

WG 4.1 A munkacsoport az orvosok és kisegítő személyzet számítástechnikai oktatásával foglalkozik, szorosan együttműködve a TC 3 bizottsággal.

WG 4.2 A munkacsoport az orvostudományi információk felhasználásában alkalmazott input-output eljárási követelmények megállapítását és alkalmazását tekinti feladatának.

WG 4.3 A munkacsoport feladata az EKG elemző programok kipróbálásának és alkalmazásának elterjesztése, valamint az ezzel kapcsolatos elemző módszerek kidolgozása.

—*TC 5* A számítógépeknek technológiában való felhasználásával foglalkozó bizottság.

A bizottság feladata a számítógépek technológiai felhasználásáról szóló információ cseréjének előmozdítása és összehangolása. A bizottság foglalkozik a számítógép felhasználásával a gyártásirányítás, tervezés, közlekedés irányítása stb. területén.

WG 5.1 A munkacsoport a szállítási rendszerek működtetésének problémáival foglalkozik.

WG 5.2 A munkacsoport feladata a számítógépre alapozott tervezés elősegítése, az ezzel kapcsolatos adatbázis, software program-nyelvek problematikája.

WG 5.3 A munkacsoport célja a számítógép felhasználásának elterjesztése oly területeken, amelyeken a részekre bontott gyártásmód a jellemző (pl. repülőgép-gyártás).

WG 5.4 A munkacsoport tevékenysége a számítástechnikai berendezések, a perifériák és a software maximális egységesítésének és standardizá ásának elősegítésére, a standard software és hardware technikák kifejlesztésére irányul.

—*TC 6* Az adattovábbítással foglalkozó bizottság.

Feladata az adattovábbítással kapcsolatos információcsere elősegítése és a hivatalos kapcsolatok kialakítása az ilyen jellegű feladatokkal foglalkozó egyéb nemzetközi szervekkel (CCITT, CEPT, IEEE, ISO, ECMA). A bizottság foglalkozik a nemzeti és nemzetközi adatkomunikációs hálózatokkal, tervekkel, berendezésekkel és nagyhálózatos rendszerek kérdéseivel.

WG 6.1 A munkacsoport a különböző országokban tervezés alatt álló programcsomagcsere rendszerű számítógép-hálózatok működésével kapcsolatos problémákat tanulmányozza. A végső cél a lehetőségek technikai jellemzőinek és a működési eljárásoknak a meghatározása, amelyek lehetővé teszik az ilyen számítógép-hálózatok összekapcsolását.

—*TC 7* Az optimalizálási problémákkal foglalkozó bizottság.

A bizottság a különböző területeken jelentkező optimalizálási problémák számítástechnikai vetületeinek tisztázását, az ezzel kapcsolatos információcserét kívánja elősegíteni. Támogatja az interdiszciplináris tevékenységet az olyan optimalizálási problémák megoldásával kapcsolatban, amelyek a közgazdaságtan, a környezetvédelem, a meteorológia stb. területén merülnek fel. A bizottság kapcsolatot tart fenn a Nemzetközi Matematikai Egyesülettel is az érintett területeken.

WG 7.1 A munkacsoport modellezési és szimulációs problémákkal foglalkozik, az ezekkel kapcsolatos metodikát, szimulációs nyelveket stb. tanulmányozza.

WG 7.2 A munkacsoport szakterülete a számítástechnika alkalmazása a mechanika, a közgazdaságtan, a geofizika stb. disztributív rendszereiben.

WG 7.3 A munkacsoport feladatként tűzte ki a számítógépek teljesítményének és költségeinek analizálása és optimalizálása terén folyó tevékenységnek különböző elemzések elvégzésével való javítását.

Az *IAG* az IFIP legtöbb tevékenységet felölelő szervezete, speciális bizottsága. Feladatköre az adatfeldolgozás területére terjed ki. Annyiban van különleges helyzete az IFIP-en belül, hogy külön tagsága van: a különböző vállalatok jogi tagként az IAG-ba beléphetnek.

Magyarország részvétele az IFIP-ben

Magyarország hivatalosan 1966 óta tagja az IFIP-nek (az előző években csupán megfigyelőként vett részt). A Neumann János Társaságon keresztül a magyar képviselők több bizottságban és munkacsoportban tevékeny részt vállaltak, illetve vállalnak. Az IFIP-nek több rendezvénye volt Magyarországon, így egy 6 hónapos nemzetközi információfeldolgozási szeminárium a fejlődő országok szakemberei számára 1968-ban, kelet-európai számítógép oktatási konferencia 1970-ben, PROLAMAT konferencia 1973-ban.

A Neumann János Számítógéptudományi Társaság 1975 őszére tervezi — az IFIP közgyűlésének jóváhagyása alapján — a „Kisszámítógépes software problémák" c. konferencia megszervezését.

KÁDÁR IVÁN

CONTENTS

BOOK REVIEWS

SCIENTIFIC LIFE

СОДЕРЖАНИЕ

О КНИГАХ

НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója
Műszaki szerkesztő: Helle Mária
A kézirat nyomdába érkezett: 1974. X. 1. Terjedelem: 7 (A/5) ív
75.1375 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

Ára: 12,— Ft
Előfizetés egy évre: 40,— Ft

INDEX: 26793

TARTALOM

KÖNYVEKRŐL

TUDOMÁNYOS ÉLET

1828

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST