SZIGMA

Matematikai közgazdasági folyóirat

A Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai-Közgazdasági Szakosztályának lapja

*

E szám szerzői:

Dr. Acsay Ferenc, a gödöllői Mezőgazdasági Gépkísérleti Intézet tudományos osztályvezetője, Andorka Rudolf, a Központi Statisztikai Hivatal munkatársa, Dr. Csáki Csaba, kandidátus, a Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem docense, Filep György, a SZÁMGÉP főosztályvezetője, Forgó Ferenc, kandidátus, a Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem adjunktusa, Gábor Győző, az MTA Közgazdaságtudományi Intézet tudományos munkatársa, Grósz Miklós, a SZÁMGÉP programtervezője, Hunyadi László, az Országos Tervhivatal Tervgazdasági Intézetének munkatársa, Kádas Sándor, a Metró Beruházási Vállalat matematikus-közgazdásza, Meszéna György, a Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem adjunktusa, Mikó Gyula, a Marx Károly Közgazdaságtud. Egyet. adjunktusa, Nyáry Zsigmond, a Központi Statisztikai Hivatal főelőadója, Pongrácz Tibor, a KSH Országos Számítástechnikaalkalmazási Iroda megbízott igazgatóhelyettese, Somos Endre, a Számítógépalkalmazási Kutató Intézet munkatársa, Stahl János, kandidátus, a Számítógépalkalmazási Kutató Intézet munkatársa, Szelényi László, a gödöllői Agrártudományi Egyetem aspiránsa, Szűts Huba, a Várpalotai Szénbányák számítástechnikai csoportvezetője, Zalai Ernő, a Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem adjunktusa, Zeisler József, a KSH Számítástechnikai Főosztályának munkatársa

Szerkesztőség: Budapest XI. Budaörsi út 43—45.

Levélcím: 1361 Budapest. Pf. 11.

Terjeszti a Magyar Posta. Előfizethető bármely postahivatalnál, a kézbesítőknél, a Posta hírlapüzleteiben és a Posta Központi Hírlap Irodánál (KHI 1900 Budapest V., József nádor tér 1.) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI 215—96162 pénzforgalmi jelzőszámára. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest V., Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban

Előfizethető és példányonként megvásárolható: az AKADÉMIAI KIADÓ-nál, 1363 Budapest V. Alkotmány u. 21. Telefon: 111—010. Pénzforgalmi jelzőszámunk: 215—11488., és az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLT-ban, 1368 Budapest V., Váci u. 22. Telefon: 185—612. Előfizetési díj egy évre: 40,— Ft

Meszéna György – Mikó Gyula

Az átfutási idő eltolódásának hatása a beruházás-gazdaságossági mutatókra

A gazdaságossági számítások különböző gondolatmeneteit — a hagyományos eljárásoktól az operációkutatási modellekig — ismételten befolyásolja a jelentős számú tényezőből eredő bizonytalanság. E hatások komplex figyelembevétele mind az adatok, mind pedig a modellalkotás oldaláról számos problémát vet fel, s az elkészült vizsgálatok is még sok nyitott kérdést hagynak hátra. Munkánk e gondolatkörben, keresztmetszeti jelleggel készült, egy általában figyelmen kívül hagyott tényezőnek, az átfutási idő eltolódásának számbavételi lehetőségét vizsgálja, s teszi gyakorlati elemzés tárgyává. Az eljárás, értelemszerű módosításokkal más problémák tárgyalására is átvihető.

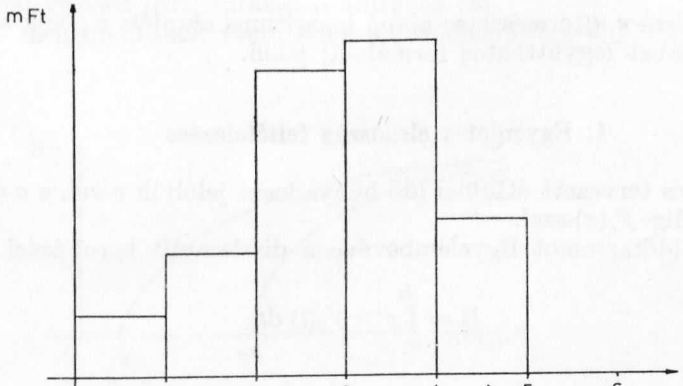
A különböző beruházásgazdaságossági mutatók általában csak a tényezők meglehetősen széles körére támaszkodva számszerűsíthetők. A meggondolásaink középpontjában álló átfutási idő eltolódása azonban, — bár lényegesen befolyásolhatja az eredő gazdaságosságot — explicit alakban nem kap helyet a mutatók kifejezésében. Általában elmondható, hogy az átfutási idő rövidülésével javul a gazdaságossági mutatók értéke, növekedésével pedig romlik. E változásokra vonatkozó kvantitatív eredmények az operatív irányítás számára feltétlenül értékes információkat nyújthatnak. Egy lépéssel tovább menve, az időeltolódás véletlen jellege miatt a gazdaságossági mutatók valószínűségi változókká alakulnak át, s érdekessé válik eloszlásuk és várható értékük meghatározása is.

A cikkben az egyszerűbb tárgyalhatóság kedvéért általában „függvények" segítségével fogalmazzuk meg a problémákat.

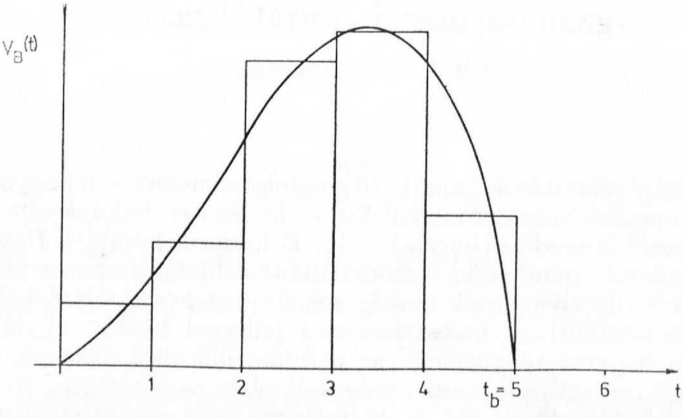
Mit jelent a *beruházási költség függvénye*, és mit tartalmaz a jövedelem függvénye?

(A t-vel az időt, t_b a tervezett átfutási időt, t_0-lal a termelés megkezdésének időpontját, N-nel a vizsgálat időhorizontját jelöljük.)

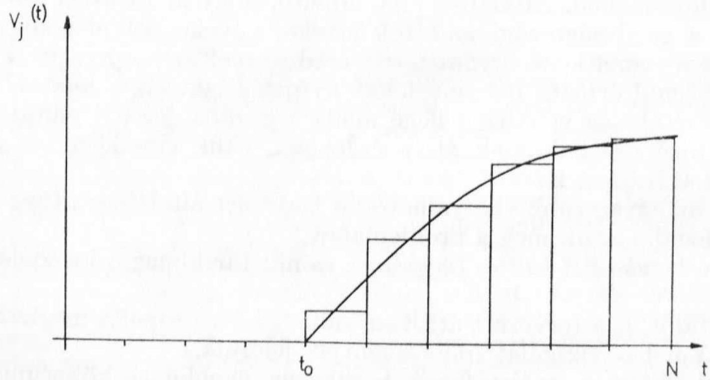
Tegyük fel, hogy a szóbanforgó beruházás évenkénti költségütemezése a következő:



A fenti költségütemezést egyszerűbben – s kielégítő pontossággal leírhatjuk $V_b(t)$ függvényével:



Hasonló értelmű a termelés jövedelmét az egyes időpontokban leíró $V_j(t)$ függvény is:



A továbbiakban e a természetes alapú logaritmus alapját, r pedig az alkalmazott kamatlábat (együtthatós formában) jelöli.

1. Egyenletes elcsúszás feltételezése

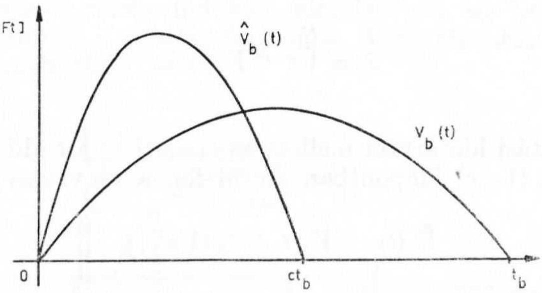
A tényleges és tervezett átfutási idő hányadosát jelöljük c-vel, s c eloszlásfüggvényét pedig $F_c(x)$-szel.

A tervezett időtartamot figyelembevéve a diszkontált beruházási költség

$$B = \int_0^{t_b} e^{-rt}\, V_b(t)\, dt$$

nagyságú lesz.

Először állítsuk elő az eredeti $V_b(t)$ beruházási költségfüggvényből a tényleges átfutási időre vonatkozó költségfüggvényt.



A $[0;\, t_b]$ intervallum a $[0;\, ct_b]$-be megy át, s az értelmezési tartomány minden rész-intervalluma is c szeresére változik, így a $V_b\left(\frac{t}{c}\right)$ függvényhez jutunk. Egyelőre tételezzük fel, hogy a beruházási költség névleges összege ugyanannyi lesz mindkét esetben, azaz:

$$\int_0^{t_b} V_b(t)\,\mathrm{d}t = a \int_0^{ct_b} V_b\left(\frac{t}{c}\right)\mathrm{d}t.$$

A fenti formulából egyszerű számolással az $a = \frac{1}{c}$ összefüggés adódik, s így az új beruházási költségfüggvény:

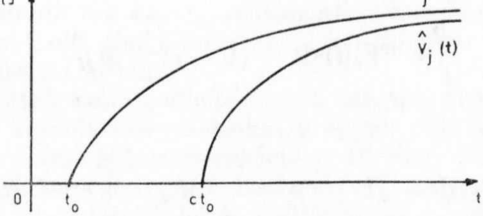
$$\hat{V}_b(t) = \frac{1}{c} V_b\left(\frac{t}{c}\right)$$

lesz.

A fentiek figyelembe vételével az új diszkontált beruházási költség:

$\hat{B} = \int_0^{t_b} e^{-rtc}\, V_b(t)\,\mathrm{d}t$, tehát az eredeti beruházási költségfüggvényből c-szeres kamatlábbal végzett diszkontálással állítható elő.

Hasonló meggondolások végezhetők a jövedelemfüggvény vonatkozásában is:



A részhatáridők egyenletes elcsúszása miatt a tervezett t_0 üzembehelyezési időpont $c \cdot t_0$-ba megy át, azaz a termelés megkezdése $t_0 - c\,t_0 = t_0(1-c)$ időegységgel változik.

A diszkontált jövedelem az eredeti átfutási idő esetén

$$J = \int_{t_0}^{N} e^{-rt}\, V_J(t)\, dt$$

nagyságú.

A tényleges átfutási időtartam mellett az eredetileg a t időponthoz tartozó jövedelem a $t + t_0\,(1-c)$ időpontban merül fel, a tényleges jövedelmek lefutását tehát a

$$\hat{V}_J(t) = V_J[t + t_0\,(1-c)]$$

függvény mutatja.

Diszkontálás után

$$\hat{J} = \int_{ct_0}^{N} e^{-rt} V_J[t + t_0\,(1-c)]\, dt = e^{-rt_0(c-1)} \int_{t_0}^{N-t_0(c-1)} e^{-rt} V_J(t)\, dt$$

adódik a tényleges diszkontált összjövedelemre.

Nézzük most meg, hogy az eszközök maradványértékében milyen változást hoz az átfutási időtartam megváltozása. Legyen p az „értékcsökkenés leírási kulcsa" (a beruházott állóeszköz minden évben értékének 100 p%-át veszti el), és legyen $s = 1 - p$. Mivel az eszközök $t_0(1-c)$ időegységgel tovább avulnak – ha $c > 1$ –, illetve ugyanennyivel kevesebb ideig vesznek részt a termelésben –, ha $c < 1$ –, az eredetileg tervezett M maradványérték helyett $s^{t_0(1-c)} \cdot M$ lesz az eszközök maradványértéke az N-ik időpontbaű. Figyelembevéve a diszkonttényezőt is, a tervezett átfutási időhöz tartozó: $(1 + r)^{-N} \cdot M_N$ diszkontált maradványérték helyett az

$$(1 + r)^{-N} s^{-t_0(c-1)} M_N$$

értékkel számolunk.

Tekintsük a következő dinamikus beruházásgazdaságossági mutatókat:

1. *Pénz-folyam:*

$$C_N = \int_{t_0}^{N} e^{-rt} V_J(t)\, dt + (1 + r)^{-N} M_N - \int_{0}^{t_b} e^{-rt} V_b(t)\, dt$$

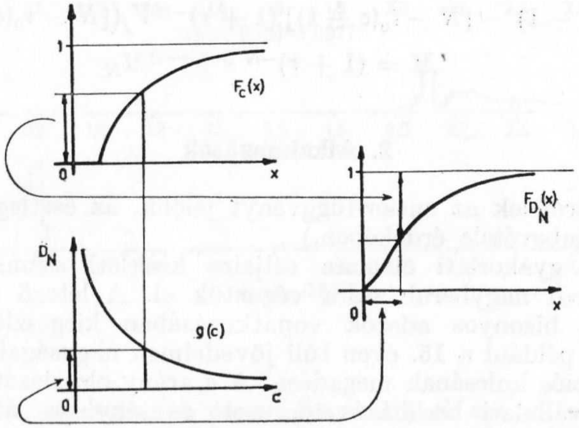
2. *D-mutató:*

$$D_N = \frac{\int_{t_0}^{N} e^{-rt} V_J(t)\, dt}{\int_{0}^{t_b} e^{-rt} V_b(t)\, dt - (1 + r)^{-N} M_N}$$

3. *Megtérülési idő:*

$$T\colon \int_{t_0}^{T} e^{-rt} V_J(t)\, dt + (1 + r)^{-T} s^{N-T} M_N = \int_{0}^{t_b} e^{-rt} V_b(t)\, dt$$

Ha e mutatók szerkezetében rendre a megfelelő *c-től* függő alkotóelemeket használjuk, a beruházásgazdaságossági mutatóink az időeltolódás paraméterének függvényében is vizsgálhatók lesznek. Tekintetbe véve a c értékek bekövetkezési valószínűségeit, eljuthatunk az éppen vizsgált dinamikus mutató ezen gondolatmenet révén indukált eloszlásához is. Legyen $D_N(c) = g(c)$ monoton függvény és c eloszlás folytonos. A következtetés gondolatmenetét grafikusan szemléltetjük:



Ugyanis:

$$F_c(x) = P(c < x)$$

$$D_N = g(c)$$

$$F_{D_N}(x) = P(D_N < x) = P[g(c) < x]$$

mivel most $g(c)$ monoton csökkenő, a $g(c) < x$ egyenlőtlenség ekvivalens a $c > g^{-1}(x)$ egyenlőtlenséggel, így

$$\underline{F_{D_N}(x)} = P[g(c) < x] = P[c > g^{-1}(x)] = 1 - P[c \leq g^{-1}(x)] = \underline{1 - F_c[g^{-1}(x)]}.$$

Az egyes beruházásgazdaságossági mutatók eloszlásai helyett sok esetben elegendő ismerni a várható értéküket, ami a mondottak kevés kiegészítésével szintén kiszámítható.

Ha a $g(c)$ függvényre nem teljesül az előzőekben tett monotonítási feltétel, akkor a következőképpen járhatunk el. A görbe monotonítási szakaszaira külön-külön számítunk egy-egy valószínűségeloszlást, melyekből egy keverékeloszlást állítunk elő, ahol a keverés súlyait az egyes monotonítási szakaszokba esés valószínűségei adják.

Az elmondottak számszerűsítéséhez a szereplő függvényeket rendre elő kell állítani, és a kijelölt integrálásokat s egyéb műveleteket el kell végezni. A praktikusabb számítógépes realizáció érdekében célszerű meggondolásainkat diszkrét felfogásban (pl. éves bontásban), számítógépre orientált alakban megfogalmazni. A részletesebb leírás mellőzésével a mutatók alapvető elemeinek ilyen értelmű előállítása a következő lesz:

$$\hat{B} = \sum_{i=1}^{t_b} (1+r)^{-ci} V_b(i)$$

$$\hat{J} \approx \sum_{i=1}^{[N-t_0(c-1)]} (1+r)^{-(i+t_0(c-1))} V_J(i) +$$

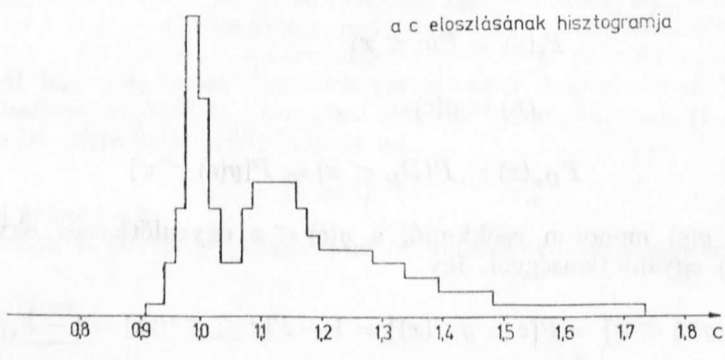
$$+ \big(N - t_0(c-1) - [N - t_0(c-1)]\,(1+r)^{-N} V_J\big([N - t_0(c-1)] + 1\big)$$

$$M = (1+r)^{-N} s^{-t_0(c-1)} M_N$$

2. Alkalmazások

(A szögletes zárójelek az entier-függvényt jelölik, az esetleges tört-éves elcsúszás figyelembevétele érdekében.)

Részletesebb gyakorlati elemzés céljaira kísérleti számításainkat négy nehézipari egyedi nagyberuházásra végeztük el. A létező és hozzáférhető dokumentációk bizonyos adatok vonatkozásában kiegészítésre szorultak. Ilyenek voltak például a 15. éven túli jövedelmek nagyságai, a maradványérték amortizációs kulcsának megadása. A c arány eloszlását 47 db. hitellel finanszírozott vállalati beruházás tervezett és tényleges átfutási idejének összevetése alapján határoztuk meg:

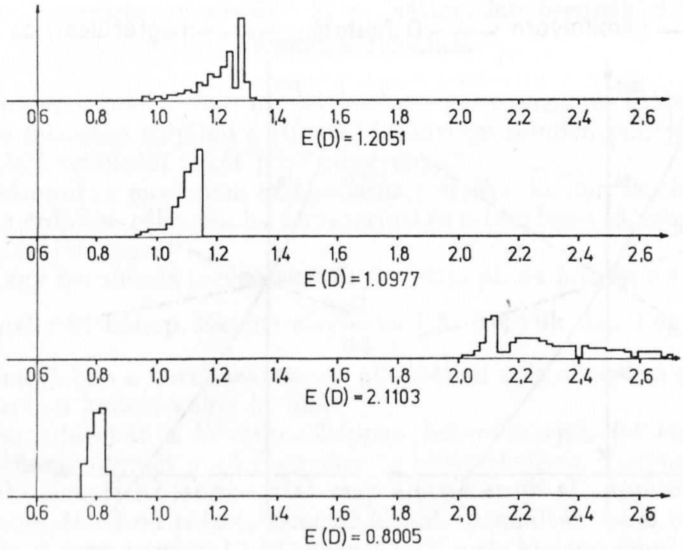


A részletes vizsgálat tárgyává tett négy egyedi nagyberuházásra a D mutató eloszlása az alábbi alakban adódott:

Nézzük meg ezután, hogyan alakulnak vizsgált beruházásgazdaságossági mutatóink a tervezett átfutási időtartam megváltozása esetén. Az összehasonlíthatóság megkönnyítése érdekében a tervezett átfutási időtartamhoz (a $c = 1$-hez) tartozó mutatóértékeket vegyük 100%-nak, s viszonyítsuk ehhez rendre az ugyanannak a mutatónak más c-hez tartozó értékeit. A következő négy ábra rendre az így adódó görbéket mutatja:

Az ábrákhoz a következő megjegyzéseket fűzzük:

1. A negyedik nagyberuházás esetében a megtérülési idő függvénye nem volt értelmezhető.



2. Ugyanebben az esetben a pénz-folyam értékek számolásánál is egy technikai problémát kellett megoldani, mivel a tervezett kivitelezési időre és a különböző c-értékekre a pénz-folyam értéke negatív. A negatív mennyiségek %-os egybevetésénél a hányados pozitív lesz, s így az az eset tűnne jobbnak, amikor nagyobb abszolút értékű — ebben az esetben negatív előjelű — pénzfolyamot érünk el. Ennek természetesen az ellenkezője igaz, ezért a kapott értékeket a 100%-hoz viszonyítva „ellenkező" irányban mértük fel.

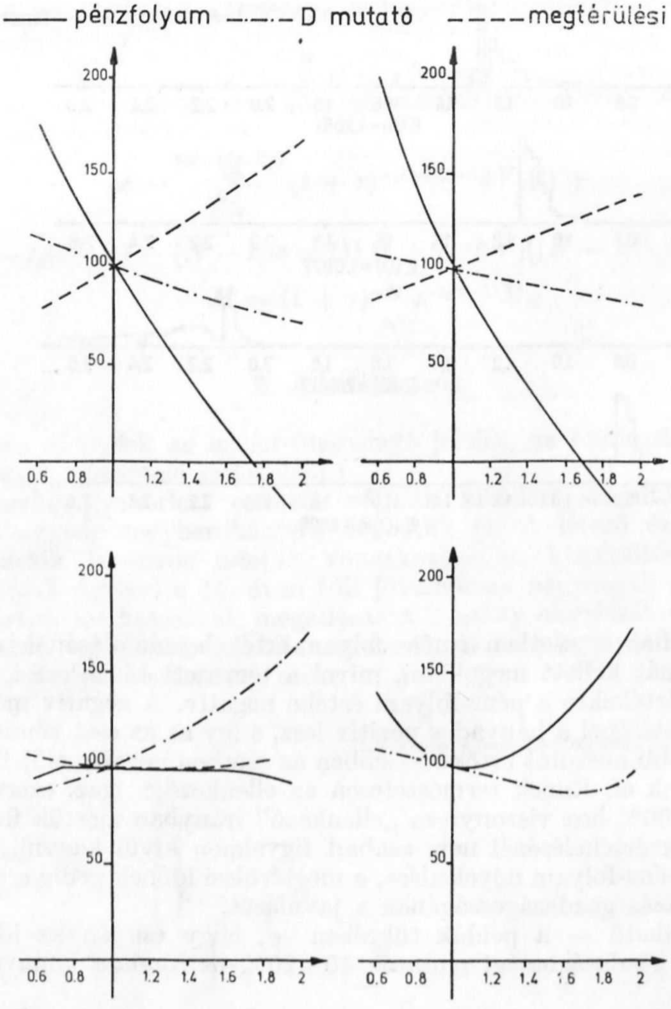
3. A görbék értékelésénél nem szabad figyelmen kívül hagyni, hogy a D mutató és a pénz-folyam növekedése, a megtérülési időnek pedig a csökkenése jelzi a beruházás gazdaságosságának a javulását.

4. Megfigyelhető — a példák tükrében —, hogy csupán az időeltolódás hatásaként a gazdaságossági mutatók 10–20%-os romlása könnyen feltételezhető.

5. Az első két nagyberuházás mutatói egyébként „szabályosan" változnak, vagyis az átfutási idő növekedéséhez a mutatók romlása tartozik. Az egyes mutatók érzékenysége azonban lényegesen különbözik. A pénz-folyam értéke változik a legnagyobb mértékben, míg a D mutató a legérzéketlenebb az időeltolódásra.

6. A harmadik és negyedik példa esetén már egészen más következtetésekre juthatunk. Kettős értelemben sem nevezhetők a mutatók változásai ezekben az esetekben a várakozásnak megfelelőnek. Egyrészt nem igaz feltétlenül, hogy az időtartam növekedésével romlanak a mutatók, másrészt a mutatók egymáshoz viszonyítva sem paralel mozognak. Az egyik mutató a gazdaságosság *romlását*, a másik a *javulását* jelzi ugyanabban az esetben.

Elméleti szempontból könnyű volna levonni bizonyos következtetéseket, a tényleges helyzet megítélése azonban ennél sokkal nehezebb. Szakmai körökben közismertek az egyes mutatók bizonyos hibái, a fentebb tapasztalt jelenségek azonban már nem annyira magától értetődőek. Ugyancsak nyilvánvalóak a mutatók javításának, vagy a beruházások gazdaságosságát komplex módon



mérő átfogó modellek alkalmazásának nehézségei is. A gyakorlatban eközben — ha használnak egyáltalán gazdaságossági megfontolásokat — ezeknek a „rossz" gazdaságossági mutatóknak a segítségével hoznak az egész népgazdaság fejlődését befolyásoló döntéseket. Ezek a tények is igazolják minden gazdaságossággal foglalkozó vizsgálat jelentőségét. Eredményeink egy-egy konkrét beruházás esetében — felhasználva a rávonatkozó egyedi információkat — igen tanulságosan diszkutálhatók, azonban ilyen elemzésekkel most nem foglalkozunk.

Vizsgálataink kiterjeszthetők további mutatók viselkedésének, illetve egyéb véletlen hatások elemzésének eseteire is.

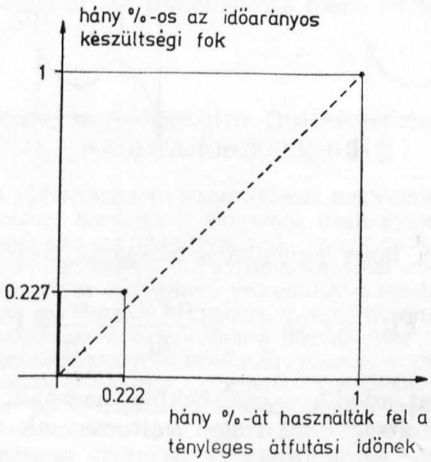
3. Az „egyenletes elcsúszás" és a „változatlan beruházási költség" feltételek feloldása

Felhasználva a már bevezetett jelöléseket, az „egyenletes időbeli elcsúszás" feltételezés feloldása céljából a $[0,\ c\,t_b]$ időtartam minden pontjához írjuk fel a beruházás készültségi fokát jelző függvényt.

Mivel számunkra most nem az elcsúszás mértéke, hanem az elcsúszás „ütemezése" az érdekes, célszerű, ha tervszerinti és a tényleges időarányos készültségi fokot vetjük össze.

Legyen egy beruházás tervezett átfutási ideje pl. 54 hónap, a tényleges időtartama pedig 81 hónap. Ekkor: $c = \frac{81}{54} = 1{,}5$. Tegyük fel, hogy az átfutási idő 18. hónapjában a beruházás olyan állapotban volt, melyben a terv szerint a 15. hónapban kellett volna lennie.

Mindezen adatokat a következőképpen használhatjuk fel az $F(x)$ — az időbeli elcsúszás ütemét jelző függvény — előállításához. Vegyük figyelembe, hogy beruházásunk $1{,}5 \times 54 = 81$ hónap alatt készült el. Így a tekintett 18. hónapig most 18:81-ed részét, azaz 22,2%-át használták fel a tényleges időtartamnak. A terv szerint 15:54, azaz 27,7%-nak kellene lenni az ezen időpontig elhasznált átfutási időnek.



Láthatóan, mivel $c = \frac{18}{15} = 1{,}2$, itt még kisebb elcsúszás volt várható, azaz relatíve, vagyis az egész beruházói folyamatot tekintve itt még gyorsabban ment a munka.

Ha minden készültségi fokhoz — vagyis $x \in [0{,}1]$ értékekre a fenti módon kiszámítjuk az x_i; $F(x_i)$ értékpárt, akkor az így kapott pontok egy függvényt írnak le.

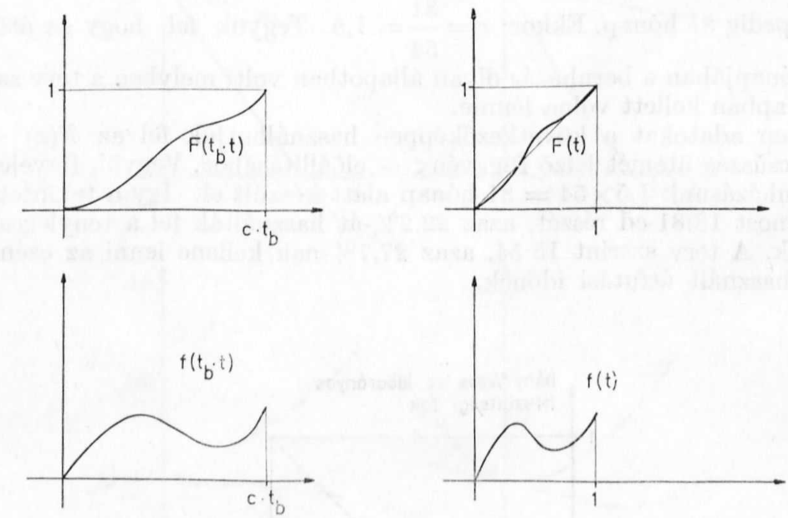
Jelöljük az így kapott függvényt $F(x)$-szel. Ezt a $F(x)$ függvényt az egyes időpontokban elvégzett beruházási tevékenység súlyfüggvényének foghatjuk fel.

Így a diszkontált beruházási költség

$$\int_0^{t_b} e^{-crt} V_b(t)\, \mathrm{d}F(t) = \int_0^{t_b} e^{-crt} V_b(t)\, f(t)\, \mathrm{d}t$$

lesz.

A megadandó $F(t)$, ill. $f(t)$ függvények úgy is interpretálhatók, mint egy olyan valószínűségi változó eloszlás-, ill. sűrűségfüggvénye, amely az átfutási időtartam alatt a befektetett munka „eloszlását" írja le.



Könnyen belátható, hogy egyenletes elcsúszás esetén:

$$F(t) = t \text{ és } f(t) = \frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = 1$$

ezért speciális esetként adódik az előzőekben használt integrál alak.

A beruházási összköltség c-től függő változásának figyelembevétele egyszerűbben megoldható, azonban a

$$V_b(t) = V_b(t, c)$$

függvénytranszformációhoz szükség van arra a regressziós függvénykapcsolatra, amely az időbeli elcsúszáshoz a „pénzbeli" elcsúszást (jelöljük ezt $\gamma(c)$-vel) rendeli. Tehát:

$$\gamma(c) = \frac{\text{a tényleges beruházási összköltség, } c\text{-szeres időbeli elcsúszás esetén}}{\text{tervezett beruházási összköltség.}}$$

A megfelelő adatokból statisztikai úton előállítható a $\gamma(c)$ függvény empirikus alakja.

Mivel a c-re és $\gamma(c)$-re történő mintavételnél eltekintünk a beruházási költség nagyságától, az új beruházási költségfüggvény a következő alakba írható:

$$V_b(t) \to \gamma(c) \cdot V_b(t).$$

Egyszerű gyakorlati esetben lehet például: $\gamma(c) = k + \alpha c$, s ekkor:

$$V_b(t) \to V_b(t) = (k + \alpha c) \cdot V_b(t).$$

(Beérkezett: 1976. február 13.)

THE EFFECTS OF LAG IN THE TRANSITION PERIOD ON THE INDICATORS OF INVESTMENT PROFITABILITY

The traditional calculations of investment profitability do not generally furnish us with any information about the possible delay of transition periods and about the effect of this process on profitability. On the one hand, our considerations make possible the direct quantification of this effect. On the other, taking the lag as a random variable with given distribution, we can generate — on the basis of the method outlined — the probability distribution of the indicator of investment profitability under discussion arising from the random character of lags. The problem at issue has been analysed with the assumption of even lags, of investment costs independent of lags as well as with the removal of these restraints. The dynamic indicators of investment profitability in the survey are: cash flow, D-indicator, period of refundment. Four individual major investments illustrate the results of our computations based on real data along with a full analysis.

ВЛИЯНИЕ ОТСРОЧКИ ВЫПОЛНЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ КАПИТАЛОВЛОЖЕНИЙ

Из обычных расчетов эффективности капитальных вложений в общем мы не получим никаких информаций насчет возможной отсрочки планируемого срока выполнения,ни насчет влияния этого процесса на эффективность. Наши соображения с одной стороны делают возможным непосредственное выражение числами этого влияния. А с другой стороны, считая меру отсрочки случайной величиной с известным распределением, на основе описанного метода мы сможем построить и вероятностное распределение коэффициента эффективности капитального вложения, вытекающее из случайного характера отсрочки. Мы рассматривали изучаемую проблему, предполагая равномерную отсрочку, в случае независимых от отсрочки затрат капитальных вложений, и отпуская эти ограничения. В исследовании расматриваются коэффициенты эффективности капитальных вложений: cash-flow, D-показатель, срок возмещения. В статье в качестве примера даем для четырех самостоятельных огромных капитальных вложений результаты расчетов, выполненных на основе действительных данных вместе с их анализом.

SZELÉNYI LÁSZLÓ

Beruházási keret elosztása paraméteres és dinamikus programozással

A lineáris programozás alkalmazása az utóbbi években egyre jobban terjed a mezőgazdasági tervezés különböző területein. Elég, ha utalunk ezzel kapcsolatban Sebestyén [7], Tóth [9], [10], Csáki [2], Acsay–Csáki–Varga [1], Csete–Megyeri–Mészáros [3], valamint Kubas [6] munkáira, természetesen a teljesség igénye nélkül.

A mezőgazdasági vállalatoknál végzett meliorációs munkák igen nagy beruházási igénye szükségessé teszi, hogy a meliorációs beruházások támogatására fordított állami keretek elosztását az operációkutatás módszereivel vizsgáljuk. Alapproblémánk tehát a következő: a korlátozottan rendelkezésre álló állami támogatási keretet hogyan oszthatjuk el optimális módon az igénylő gazdaságok között.

Tanulmányunk célja a felvetett probléma megoldására alkalmas programozási módszerek kidolgozása és vizsgálata, e módszerek bizonyos mértékű általánosítása.

A beruházási keret elosztásának modellje

Tegyük fel, hogy a meliorációra rendelkezésre álló beruházási keretet az arra illetékes szervnek n darab gazdaság között kell optimálisan szétosztania. Az optimalitás tartalma ebben az esetben az érintett gazdaságok összjövedelmének maximuma. Az optimalizálás végrehajtására alkalmas lineáris programozási modell a következőképpen írható fel:

$$x_1, y_1, x_2, y_2, \dots x_n, y_n, \geq 0$$

$$\begin{array}{llll}
A_1x_1 + M_1y_1 & & & \leq b_1 \\
 & A_2x_2 + M_2y_2 & & \leq b_2 \\
 & \vdots & & \vdots \\
 & \vdots & \dots A_nx_n + M_ny_n & \leq b_n \\
m_1^*y_1 & + m_2^*y_2 + \dots & + m_n^*y_n & = R \\
c_1^*x_1 + c_{m1}y_1 & + c_2^*x_2 + c_{m2}^*y_2 + \dots & c_n^*x_n + c_{mn}^*y_n & \to \max!
\end{array}$$

A_i = az i-edik gazdaság meliorálatlan területre vonatkozó technológiai mátrixa,

M_i = az i-edik gazdaság meliorált területre vonatkozó technológiai mátrixa,

x_i = meliorálatlan területre vonatkoztatott termelési változók vektora az i-edik gazdaságban,

y_i = meliorált területre vonatkoztatott termelési változók vektora az i-edik gazdaságban,

b_i = a termelési források (kapacitások) vektora az i-edik gazdaságban,

m_i^* = fajlagos meliorációs beruházási igény az i-edik gazdaságban,

R = a gazdaságok között felosztandó beruházási keret;

c_i^* = a meliorálatlan területekre vonatkoztatott fajlagos jövedelem az i-edik gazdaságban;

c_{mi}^* = a meliorált területekre vonatkoztatott fajlagos jövedelem az i-edik gazdaságban.

Könnyen felismerhető a modell speciális szerkezete, gazdaságonként önálló blokkokból épül fel, és az egészet a beruházási keretre vonatkozó egyetlen egyenlet fűzi össze. A modell ebben a formában is minden további nélkül megoldható, a megoldás nem csak a beruházási keret optimális felosztásáról tájékoztat, hanem egyúttal a gazdaságok optimális termelési szerkezetét is szolgáltatja.

Az egyes gazdaságoknak megfelelő blokkok részletességétől és a gazdaságok számától függően azonban a feladat méretei meghaladhatják a rendelkezésre álló számítógép lehetőségeit. Célszerű tehát megvizsgálni, hogy a feladat speciális szerkezetét kihasználva, hogyan lehet kisebb méretű feladatok egymás utáni megoldására redukálni a problémát.

Célunk tehát egy dekompozíciós eljárás konstruálása. A legismertebb ilyen eljárást Dantzig és Wolfe nyomán Krekó Béla [5] ismerteti. Ez általánosabb az általunk vázolt problémánál, amennyiben a ,,központ feltételi rendszere'' nem egyetlen egyenletből áll. A Kornai – Lipták-féle kétszintű tervezési eljárás [4] egyik jellemzője pedig ezen túlmenően az, hogy nem véges ([4] 292. o.). A Simon György által kidolgozott reflektorprogramozás [8] heurisztikus alapokon nyugvó algoritmus nagyméretű lineáris programozási feladatok megoldására.

Megoldás paraméteres és dinamikus programozás összekapcsolásával

Az előző fejezetben ismertetett modellt nevezzük *központi elosztási feladatnak.* Ez a gazdaságok feltételi rendszerének megfelelően *üzemi modellekre* bontható szét. Az i-edik üzemi modell az alábbi formában írható fel,

$$x_i, y_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

$$A_i x_i + M_i y_i \leq b_i$$

$$m_i^* y_i = R_i$$

$$C_i = c_i^* x_i + c_{mi}^* y_i \to \max!$$

ahol

R_i = az i-edik üzem számára juttatott beruházási keret;

C_i = az i-edik üzemi modell célfüggvényének értéke;

R_i értékét paraméternek tekintve ez egy duális paraméteres programozási feladat [4]. A számításokat elvégezve az optimális program általános formában a következő:

$$(x_i^\circ, y_i^\circ) = \begin{cases} x_{ai}^1 + (R_i - R_i^\circ)x_{bi}^1; \; y_{ai}^1 + (R_i - R_i^\circ)y_{bi}^1, & \text{ha } R_i^\circ \leq R_i \leq R_i^1 \\ x_{ai}^2 + (R_i - R_i^1)x_{bi}^2, \; y_{ai}^2 + (R_i - R_i^1)y_{bi}^2, & \text{ha } R_i^1 \leq R_i \leq R_i^2 \\ \vdots \\ x_{ai}^s + (R_i - R_i^{s-1})x_{bi}^s, \; y_{ai}^s + (R_i - R_i^{s-1})y_{bi}^s, & \text{ha } R_i^{s-1} \leq R_i \leq R_i^s, \end{cases}$$

ahol:

x_i°, y_i° = az optimális megoldás vektora az i-edik üzemi modellben;

x_{ai}^j, y_{ai}^j = az optimális programnak a paramétertől nem függő része a j-edik azonossági tartományban;

$x_{bi}^j\, y_j^{bi}$ = az optimális program paramétertől függő része a j-edik azonossági tartományban;

R_i^j = a paraméter karakterisztikus értékei.

Az optimális célfüggvényérték (C_i°) szintén felírható mint az R_i paraméter függvénye.

$$(1) \qquad C_i^\circ(R_i) = \begin{cases} C_{ai}^1 + (R_i - R_i^\circ)\, C_{bi}^1, & \text{ha } R_i^\circ \leq R_i \leq R_i^1 \\ C_{ai}^2 + (R_i - R_i^1)\, C_{bi}^2, & \text{ha } R_1^1 \leq R_i \leq R_i^2 \\ \vdots \\ C_{ai}^3 + (R_i - R_i^{s-1})\, C_{bi}^s, & \text{ha } R_i^{s-1} \leq R_i \leq R_i^s. \end{cases}$$

Itt

C_{ai}^j = az optimális célfüggvénynek a paramétertől nem függő része a j-edik azonossági tartományban;

C_{bi}^j = az optimális célfüggvénynek a paramétertől függő része a j-edik azonossági tartományban.

Megjegyezzük, hogy az optimális célfüggvény szakaszonként lineáris, folytonos és konkáv függvény. Az egyes szakaszok meredekségét a C_{bi}^j értékek mutatják, melyek egyúttal a beruházási keret egységnyi növelésére jutó jövedelemnövekedést is kifejezik, amit differenciális jövedelemnek, vagy a beruházási keret árnyékárának is nevezhetünk. Fennáll továbbá a $C_{bi}^1 > C_{bi}^2 > > C_{bi}^s$ reláció, ami a függvény konkávitását fejezi ki, vagyis a célfüggvény egyes szakaszainak iránytangensei szigorúan monoton csökkenő sorozatot alkotnak. Ez könnyen belátható, ha meggondoljuk, hogy a paraméteres programozás során először azok a tevékenységek részesülnek a beruházásból, amelyek azt legjobban hasznosítják, később a keret bővítésével olyanoknak is jut, amelyek kevésbé, és így tovább. Megállapítható továbbá, hogy a paraméter karakterisztikus értékei között található egy maximális — R_i^s — amely után a célfüggvény iránytangense 0 vagy negatívvá válik. Ezt úgy értelmezhetjük, hogy ennél nagyobb beruházást az üzem adottságainál fogva már nem képes gazdaságosan hasznosítani. Ennek alapján nyilvánvaló, hogy az elosztás során az $R_i \leq R_i^s$ feltételt biztosítani kell.

Minden egyes üzemi modellre külön-külön elvégezve a duális paraméteres programozást, megkapjuk az üzemek $C_i^\circ(R_i)$ optimális célfüggvényeit. Ezek alapján a következő készletelosztási feladat fogalmazható meg.

$$C_1^\circ(R_1) + C_2^\circ(R_2) + \ldots + C_n^\circ(R_n) \rightarrow \max!$$

$$R_1 + R_2 + \ldots + R_n = R$$

A problémát a dinamikus programozás alkalmazásával [11] oldjuk meg. A módszer alkalmazását egy egyszerű példán mutatjuk be.

Tegyük fel, hogy a rendelkezésre álló $R = 200$ egységnyi beruházási keretet négy gazdaság között kell elosztani, melyeknek a duális paraméteres programozás alapján nyert optimális célfüggvényei a következők:

$$C_1^\circ(R_1) = \begin{cases} 320 + 5R_1 & 0 \leq R_1 \leq 40 \\ 520 + 3(R_1 - 40) & 40 \leq R_1 \leq 60 \end{cases}$$

$$C_2^\circ(R_2) = \begin{cases} 200 + 5R_2 & 0 \leq R_2 \leq 40 \\ 400 + 2{,}5(R_2 - 40) & 40 \leq R_2 \leq 60 \end{cases}$$

$$C_3^\circ(R_3) = \begin{cases} 300 + 7{,}5R_3 & 0 \leq R_3 \leq 20 \\ 450 + 2(R_3 - 20) & 20 \leq R_3 \leq 50 \end{cases}$$

$$C_4^\circ(R_4) = \begin{cases} 250 + 3R_4 & 0 \leq R_4 \leq 50 \\ 400 + 2(R_4 - 50) & 50 \leq R_4 \leq 80 \end{cases}$$

A paraméterek felső határainak összege alapján megállapítható, hogy az üzemek összesen 250 egység beruházást tudnának gazdaságosan felhasználni a rendelkezésre álló 200-al szemben. A keretet ebben az esetben úgy kell elosztani, hogy az összjövedelem maximumát érhessük el, azaz

$$C_1^\circ(R_1) + C_2^\circ(R_2) + C_3^\circ(R_3) + C_4^\circ(R_4) \to \max!$$

legyen az $R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = 200$ feltétel teljesítése mellett.

A feladatot a dinamikus programozás általános elveinek megfelelően [11] szakaszokra bontjuk – négy szakasz – majd az utolsó szakasztól visszafelé haladva meghatározzuk a feltételes optimális irányítás $[R_i^*]$ és a célfüggvény $[C^*]$ feltételes optimális értékeit. Eljutva az első szakaszig, ott meghatározzuk az alkalmazandó optimális irányítást az összes többi szakaszok maximális összjövedelmének megfelelően, majd visszafelé haladva megállapítjuk a többi szakaszokon alkalmazandó optimális irányítást.

A feladat megoldásának menete tehát a következő.

4. lépés

A rendszernek a 3. lépés utáni állapotát jelöljük u_3-al s ez jelentse az előző lépés után még megmaradt beruházási keretet. Nyilvánvalóan fennáll az $u_3 = 200 - R_1 - R_2 - R_3$ összefüggés. Az u_3 értéke az alábbi intervallumban mozoghat.

$$30 \leq u_3 \leq 200$$

Most meghatározzuk az utolsó lépésen a feltételes optimális irányítást (R_4^*) és az ehhez az irányításhoz tartozó maximális célfüggvényértéket (C_4^*). Az opt. irányítás

$$C_4^* = \begin{cases} 250 + 3u_3 & 30 \leq u_3 \leq 50 & R_4^* = u_3 \\ 300 + 2u_3 & 50 \leq u_3 \leq 80 & R_4^* = u_3 \\ 460 & 80 \leq u_3 \leq 200 & R_4^* = 80 \end{cases}$$

3. *lépés*

Jelentse u_2 a 2. lépés után megmaradt beruházási keretet.

$$u_2 = 200 - R_1 - R_2 \quad \text{alapján} \quad 80 \leq u_2 \leq 200; \; u_3 = u_2 - R_3$$

$C^+_{3,4} = C^\circ_3 + C^*_4\,(u_3)$ az utolsó két lépés összjövedelme a 3. lépésen alkalmazott tetszőleges és az utolsó lépésen alkalmazott feltételes optimális irányítás mellett. $C^*_{3,4} = \max\limits_{R_3} \{C^\circ_3 + C^*_4\,(u_3)\}$ az utolsó két lépés feltételes maximális összjövedelme.

Feltételezve, hogy a beruházás legkisebb egysége 10, u_2 értékétől függően az alábbi esetek lehetségesek:

3.1.

$$u_2 = 80 \qquad\qquad 30 \leq u_3 \leq 80$$

$$C^+_{3,4} = \begin{cases} 300 + 7{,}5R_3 + 300 + 2(u_2 - R_3) & 0 \leq R_3 \leq 20 \\ 410 + 2R_3 \quad + 300 + 2(u_2 - R_3) & 20 \leq R_3 \leq 30 \\ 410 + 2R_3 \quad + 250 + 3(u_2 - R_3) & 30 \leq R_3 \leq 50 \end{cases}$$

$$C^*_{3,4} = 870 \qquad R^*_3 = 20,\, 30$$

3.2.

$$u_2 = 90 \qquad\qquad 40 \leq u_3 \leq 90$$

$$C^+_{3,4} = \begin{cases} 300 + 7{,}5R_3 + 460 & 0 \leq R_3 \leq 10 \\ 300 + 7{,}5R_3 + 300 + 2(u_2 - R_3) & 10 \leq R_3 \leq 20 \\ 410 + 2R_3 \quad + 300 + 2(u_2 - R_3) & 20 \leq R_3 \leq 40 \\ 410 + 2R_3 \quad + 250 + 3(u_2 - R_3) & 40 \leq R_3 \leq 50 \end{cases}$$

$$C^*_{3,4} = 890 \qquad R^*_3 = 20,\, 30,\, 40$$

3.3.

$$u_2 = 100 \qquad\qquad 50 \leq u_3 \leq 100$$

$$C^+_{3,4} = \begin{cases} 300 + 7{,}5R_3 + 460 & 0 \leq R_3 \leq 20 \\ 410 + 2R_3 \quad + 300 + 2(u_2 - R_3) & 20 \leq R_3 \leq 50 \end{cases}$$

$$C^*_{3,4} = 910 \qquad R^*_3 = 20,\, 30,\, 40,\, 50$$

3.4.

$$u_2 = 110 \qquad\qquad 60 \leq u_3 \leq 110$$

$$C^+_{3,4} = \begin{cases} 300 + 7{,}5R_3 + 460 & 0 \leq R_3 \leq 20 \\ 410 + 2R_3 \quad + 460 & 20 \leq R_3 \leq 30 \\ 410 + 2R_3 \quad + 300 + 2(u_2 - R_3) & 30 \leq R_3 \leq 50 \end{cases}$$

$$C^*_{3,4} = 930 \qquad R^*_3 = 30,\, 40,\, 50$$

3.5.

$$u_2 = 120 \qquad\qquad 70 \leq u_3 \leq 120$$

$$C^+_{3,4} = \begin{cases} 300 + 7{,}5R_3 + 460 & 0 \leq R_3 \leq 20 \\ 410 + 2R_3 + 460 & 20 \leq R_3 \leq 40 \\ 410 + 2R_3 + 300 + 2(u_2 - R_3) & 40 \leq R_3 \leq 50 \end{cases}$$

$$C^*_{3,4} = 950 \qquad R^*_3 = 40,\ 50$$

3.6.

$$u_2 \geq 130 \qquad\qquad 80 \leq u_3 \leq 200$$

$$C^+_{3,4} = \begin{cases} 300 + 7{,}5R_3 + 460 & 0 \leq R_3 \leq 20 \\ 410 + 2R_3 + 460 & 20 \leq R_3 \leq 50 \end{cases}$$

$$C^*_{3,4} = 970 \qquad R^*_3 = 50$$

2. *lépés*

$$u_1 = 200 - R_1 \text{ alapján} \qquad\qquad 140 \leq u_1 \leq 200$$

$$C^+_{2,3,4,} = C^\circ_2 + C^*_{3,4} \qquad\qquad u_2 = u_1 - R_2$$

$$C^*_{2,3,4,} = \max_{R_2} \{C^\circ_2 + C^*_{3,4}\}$$

2.1.

$$u_1 = 140 \qquad\qquad 80 \leq u_2 \leq 140$$

$$C^+_{2,3,4} = \begin{cases} 200 + 5R_2 + 970 & 0 \leq R_2 \leq 10 \\ 200 + 5R_2 + 950 & R_2 = 20 \\ 200 + 5R_2 + 930 & R_2 = 30 \\ 200 + 5R_2 + 910 & R_2 = 40 \\ 300 + 2{,}5R_2 + 890 & R_2 = 50 \\ 300 + 2{,}5R_2 + 870 & R_2 = 60 \end{cases}$$

$$C^*_{2,3,4} = 1320 \qquad R^*_2 = 60$$

2.2.

$$u_1 = 150 \qquad\qquad 90 \leq u_2 \leq 150$$

$$C^+_{2,3,4} = \begin{cases} 200 + 5R_2 + 970 & 0 \leq R_2 \leq 20 \\ 200 + 5R_2 + 950 & R_2 = 30 \\ 200 + 5R_2 + 930 & R_2 = 40 \\ 300 + 2{,}5R_2 + 910 & R_2 = 50 \\ 300 + 2{,}5R_2 + 890 & R_2 = 60 \end{cases}$$

$$C^*_{2,3,4} = 1340 \qquad R^*_2 = 60$$

2.3.

$$u_1 = 160 \qquad\qquad 100 \leq u_2 \leq 160$$

$$C^+_{2,3,4} = \begin{cases} 200 + 5R_2 + 970 & 0 \leq R_2 \leq 30 \\ 200 + 5R_2 + 950 & R_2 = 40 \\ 300 + 2{,}5R_2 + 930 & R_2 = 50 \\ 300 + 2{,}5R_2 + 910 & R_2 = 60 \end{cases}$$

$$C^*_{2,3,4} = 1360 \qquad R^*_2 = 60$$

2.4.

$$u_1 = 170 \qquad\qquad 110 \leq u_2 \leq 170$$

$$C^+_{2,3,4} = \begin{cases} 200 + 5R_2 + 970 & 0 \leq R_2 \leq 40 \\ 300 + 2{,}5R_2 + 950 & R_2 = 50 \\ 300 + 2{,}5R_2 + 930 & R_2 = 60 \end{cases}$$

$$C^*_{2,3,4} = 1380 \qquad R^*_2 = 60$$

2.5.

$$u_1 = 180 \qquad\qquad 120 \leq u_2 \leq 180$$

$$C^+_{2,3,4} = \begin{cases} 200 + 5R_2 + 970 & 0 \leq R_2 \leq 40 \\ 300 + 2{,}5R_2 + 950 & R_2 = 50 \\ 300 + 2{,}5R_2 + 930 & R_2 = 60 \end{cases}$$

$$C^*_{2,3,4} = 1280 \qquad R^*_2 = 60$$

2.6.

$$u_1 = 190 \qquad\qquad 130 \leq u_2 \leq 190$$

$$C^+_{2,3,4} = \begin{cases} 200 + 5R_2 + 970 & 0 \leq R_2 \leq 40 \\ 300 + 2{,}5R_2 + 970 & R_2 = 50 \\ 300 + 2{,}5R_2 + 970 & R_2 = 60 \end{cases}$$

$$C^*_{2,3,4} = 1420 \qquad R^*_2 = 60$$

1. lépés

$$u_0 = 200 \qquad\qquad u_1 = 200 - R_1$$

ha $0 \leq R_1 \leq 40$ akkor $160 \leq u_1 \leq 200$

ha $40 \leq R_1 \leq 60$ akkor $140 \leq u_1 \leq 160$

$$C^+_{1,2,3,4} = C^\circ_1 + C^*_{2,3,4}$$

$$C^*_{1,2,3,4} = \max_{R_1} \{C^\circ_1 + C^*_{2,3,4}\}$$

$$C^{+}_{1,2,3,4} = \begin{cases} 320 + 5R_1 + 1420 & R_1 = 0 \\ 320 + 5R_1 + 1420 & R_1 = 10 \\ 320 + 5R_1 + 1380 & R_1 = 20 \\ 320 + 5R_1 + 1380 & R_1 = 30 \\ 320 + 5R_1 + 1360 & R_1 = 40 \\ 400 + 3R_1 + 1340 & R_1 = 50 \\ 400 + 3R_1 + 1320 & R_1 = 60 \end{cases}$$

$$C^{*}_{1,2,3,4} = 1900, \qquad R^{*}_1 = 60$$

Azt kaptuk tehát, hogy $R^*_1 = 60$ irányítás esetén lesz az összjövedelem maximális. Mostmár visszafelé haladva meghatározhatjuk a többi lépésen is az optimális irányítást. Mivel $R^*_1 = 60$ így $u_1 = 140$, az ennek megfelelő (2.1) optimális irányítás a második lépésen $R^*_2 = 60$. Az $u_2 = u_1 - R_2$ alapján $u_2 = 80$, így 3.1-ből $R^*_3 = 20$ ill. $R^*_3 = 30$. Ha $R^*_3 = 20$, akkor $u_3 = 60$ és $R^*_4 = 60$. Ha $R^*_3 = 30$, akkor $u_3 = 50$ és $R^*_4 = 50$.

Az elosztási problémának tehát két alternatív megoldása van:

$$\begin{array}{lcl} R_1 = 60 & \text{vagy} & R_1 = 60 \\ R_2 = 60 & & R_2 = 60 \\ R_3 = 20 & & R_3 = 30 \\ R_4 = 60 & & R_4 = 50 \\ \sum_{i=1}^{4} C_i = 1900 & & \sum_{i=1}^{4} C_i = 1900 \end{array}$$

Láthattuk tehát, hogy a duális paraméteres programozás és a dinamikus programozás összekapcsolásával a beruházás elosztási probléma sikerrel oldható meg.

Megoldás paraméteres és konkáv programozás összekapcsolásával

A dolgozat első részében szó volt arról, hogy a duális paraméteres programozás eredményeként kapott célfüggvények szakaszonként lineáris, konkáv függvények. A konkávitás a feladatnak egy másik módszerrel, nevezetesen a konkáv programozás [5] segítségével történő megoldását is sugallja.

Tekintsük az (1) paraméteresen adott i-edik üzemi célfüggvényt és alakítsuk át a következőképpen:

$$C^0_i(R_i) = C^1_{ai} + (R_{i1} - R^{\circ}_i)C^1_{bi} + R_{i2}C^2_{bi} + \ldots + R_{is}C^s_{bi}.$$

Az R_i paramétert a karakterisztikus intervallumoknak megfelelően s darab részre ($R_{i1}, R_{i2}, \ldots R_{is}$) osztottuk úgy, hogy fennálljanak az alábbi összefüggések:

$$\begin{gathered} R_{i1} + R_{i2} + \ldots + R_{is} = R_i \\ R^{\circ}_i \leq R_{i1} \leq R^1_i \\ 0 \leq R_{i2} \leq R^2_i - R^1_i \\ \vdots \\ 0 \leq R_{is} \leq R^s_i - R^{s-1}_i \end{gathered}$$

A fentiek alapján felírhatjuk a konkáv programozási feladat általános alakját.

$$R_{ik} \geq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n; \qquad k = 1, 2, \ldots, s$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{s} R_{ik} = R$$

$$R_{i1} \geq R_i^{\circ} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$R_{i1} \leq R_i^{1} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$R_{ik} \leq R_i^k - R_i^{k-1} \qquad i = 2, 3, \ldots, n; \qquad k = 2, 3, \ldots, s$$

$$\sum_{i=1}^{n} C_{ai}^1 - \sum_{i=1}^{n} R_i^{\circ} C_{bi}^1 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{s} R_{ik} C_{bi}^k \to \text{max!}$$

A célfüggvényben az első két tag konstans, így ezek az optimalizálás során figyelmen kívül hagyhatók.

Az elmondottak alapján előbbi konkrét példánk a következő alakot ölti:

$$R_{11}, \; R_{12}, \; R_{21}, \; R_{22}, \; R_{31}, \; R_{32}, \; R_{41}, \; R_{42}, \geq 0$$

$$R_{11} + R_{12} + R_{21} + R_{22} + R_{31} + R_{32} + R_{41} + R_{42} = 200$$

$$R_{11} \leq 40$$

$$R_{12} \leq 20$$

$$R_{21} \leq 40$$

$$R_{22} \leq 20$$

$$R_{31} \leq 20$$

$$R_{32} \leq 30$$

$$R_{41} \leq 50$$

$$R_{42} \leq 30$$

$$z = 5R_{11} + 3R_{12} + 5R_{21} + 2{,}5R_{22} + 7{,}5R_{31} + 2R_{32} + 3R_{41} + 2R_{42} \to \text{max.}$$

A modell a szimplex módszer segítségével megoldható. A kapott célfüggvényértékhez hozzáadandó konstansok értéke 1070.

A megoldás során természetesen most is alternatív optimum adódik.

$$\left.\begin{array}{l} R_{11} = 40 \\ R_{12} = 20 \end{array}\right\} R_1 = 60 \qquad \text{vagy} \qquad \left.\begin{array}{l} R_{11} = 40 \\ R_{12} = 20 \end{array}\right\} R_1 = 60$$

$$\left.\begin{array}{l} R_{21} = 40 \\ R_{22} = 20 \end{array}\right\} R_2 = 60 \qquad \qquad \left.\begin{array}{l} R_{21} = 40 \\ R_{22} = 20 \end{array}\right\} R_2 = 60$$

$$\left.\begin{array}{l} R_{31} = 20 \\ R_{32} = 10 \end{array}\right\} R_3 = 30 \qquad \qquad \left.\begin{array}{l} R_{31} = 20 \\ R_{32} = 0 \end{array}\right\} R_3 = 20$$

$$\left.\begin{array}{l} R_{41} = 50 \\ R_{42} = 0 \end{array}\right\} R_4 = 50 \qquad \qquad \left.\begin{array}{l} R_{41} = 50 \\ R_{42} = 10 \end{array}\right\} R_4 = 60$$

$$z = 870 \qquad \qquad z = 870$$

Alapproblémánk, amelyből kiindultunk, a meliorációra fordítható állami támogatási keret szétosztásának optimalizálása volt. A modell és a megoldására bemutatott eljárások azonban alkalmazhatók minden olyan esetben, amikor a modell egyes különálló részei, blokkjai közötti kapcsolatot egyetlen egyenlet teremti meg.

(Beérkezett: 1975. július 5.)

IRODALOMJEGYZÉK

1. Acsay F.–Csáki Cs.–Varga Gy.: A vállalati géppark és géphasználat matematikai tervezése. Budapest, 1973. Akadémiai Kiadó.
2. Csáki Cs.: Mezőgazdasági vállalati távlati tervezés matematikai programozással. Budapest, 1969. Akadémiai Kiadó.
3. Csete L.–Megyei F.–Mészáros S.: A termelőszövetkezetek és állami gazdaságok középtávú tervezési eljárása és módszere. Gazdálkodás, 1974. 6. sz.
4. Kornai J.: A gazdasági szerkezet matematikai tervezése. Budapest, 1973. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
5. Krekó B.: Lineáris programozás. Budapest, 1966. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
6. Kubas, P. és munkatársai: Matematikai módszerek a mezőgazdasági vállalatok tervezésében és vezetésében. Budapest, 1971. Mezőgazdasági Kiadó.
7. Sebestyén J.: Matematikai módszerek alkalmazása a mezőgazdasági termelés szolgálatában. Budapest, 1962. Akadémiai Kiadó.
8. Simon Gy.: A reflektorprogramozás elvei és algoritmusa. Szigma. 1973. 2. sz.
9. Tóth J.: A takarmánygazdálkodás matematikai tervezése. Budapest, 1969. Akadémiai Kiadó.
10. Tóth J.: A termelési tényezők felhasználásának optimalizálása a mezőgazdaságban. Budapest, 1973. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
11. E. Sz. Ventcel: A dinamikus programozás elemei. Budapest, 1969. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.

ALLOCATION OF INVESTMENTS BY PARAMETRIC AND DYNAMIC PROGRAMMING

The different melioration works carried out in agriculture require large investments what makes it necessary to examine the allocation of state funds to melioration investments by methods of the operations research.

The linear programming model aimed at the solution of the above problem is composed of independent blocks by farm and the blocks are linked together by one single equation ensuring the allocation of the investment. Depending on the size of the blocks representing the individual farms and on the number of farms the size of the problem may exceed the capacity of the available computer. In this case a decomposition procedure can be developed making use of the special structure of the model.

The central allocation problem can be decomposed into plant models according to the constraints system of the farms. In the plant models the optimum value of the objective functions can be determined by dual parametric programming where the allocated investment is regarded as parameter. Summarizing these objective functions, a stock allocation problem can be formulated that can be solved by dynamic programing. Therefore, the essence of the presented decomposition procedure is the combination of dual parametric and of dynamic programming. The method can be applied in each case when the link between the otherwise independent blocks of the model is established by one single equation.

The second part of the paper deals also with the solution of the problem by the combination of dual parametric and concave programming.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИНВЕСТИЦИОННОГО ФОНДА ПРИ ПОМОЩИ ПАРАМЕТРОВОГО И ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Чрезвычайно высокая капиталоемкость различного рода мелиоративных работ, выполняющихся сельскохозяйственными предприятиями, приводит к необходимости оценки распределения государственных средств на дотацию капиталовложений по мелиорации при помощи методов оперативного исследования.

Модель линейного программирования для решения вышеуказанной проблемы состоит из самостоятельных блоков по каждому хозяйству, а блоки соединяются единственным уравнением, обеспечивающим распределение инвестиционного фонда. В зависимости от детальности блоков, соответствующих отдельным хозяйствам, и от числа хозяйств масштабы задания могут превосходить возможности имеющейся вычислительной машины. В этом случае, используя специальную конструкцию модели, можно применить декомпозиционный способ.

Задачу центрального распределения можно разделить на производственные модели в соответствии с системой условий в хозяйствах. Приняв лимит капиталовложения за параметр, в производственных моделях при помощи двойного параметрового программирования можно определить целевые функции производственных моделей, в которых выщеуказанный параметр является переменной.

Путем суммирования этих целевых функций можно сформулировать задание по распределению запасов, решение которого мы можем получить при помощи применения динамического программирования. Следовательно, сущность вышеуказанного декомпозиционного способа заключается в соединении дуального параметрового программирования с динамическим программированием. Этот метод можно применять во всех случаях, когда между самостоятельными блоками модели связь создается единственным уравнением.

Вторая часть исследования рассматривает и решение данной проблемы путем соединения двойного параметрового программирования с конкавным программированием.

Acsay Ferenc—Csáki Csaba

A mezőgazdasági vállalati gépesítés tömegesen alkalmazható matematikai tervezési eljárása

A gépek hasznosítási programjának, az optimális gépparknak a meghatározása a mezőgazdasági vállalatok egyik nagyfontosságú speciális döntési problémája. A mezőgazdasági termelés természeti-technológiai sajátosságaiból eredően a különböző termelési műveletek a növénytermesztésben idényszerűen jelentkeznek és ezek elvégzésére önjáró gépeket és gépkapcsolatokat alkalmaznak. A mezőgazdasági gépek rendszerint sokoldalúan hasznosíthatók, még a speciális betakarítógépek jó része is alkalmassá tehető több mint egy ágazat munkáinak elvégzésére. Nem véletlen tehát, hogy a mezőgazdasági gépfelhasználás és gépszükséglet tervezésére a matematikai modellek különböző típusait fejlesztették ki. Ezen modellek gyakorlati kipróbálása bebizonyította, hogy a matematikai módszerek jelentős előre lépést hozhatnak a mezőgazdasági gépesítés tervezésében, ugyanakkor meggyőztek bennünket arról is, hogy a munka nem tekinthető befejezettnek egy matematikai modell általános formában történő megkonstruálásával.

Az első tapasztalatok azt mutatták, hogy a gazdaságokban a modellekhez szükséges alapadatok összegyűjtése, megtervezése rendkívül nagy nehézségekkel jár. Világossá vált előttünk az is, hogy a hozzáértő szakemberek viszonylag kis száma miatt mindaddig nem várhatjuk e modellek és általában a matematikai módszerek széleskörű gyakorlati alkalmazását, amíg esetenként kívánjuk a matematikai modellt felépíteni. (Ne feledjük hazánkban mintegy 2000 mezőgazdasági vállalat működik!) Éppen ezért olyan metodikát alakítottunk ki, amely feleslegessé teszi a széleskörű adatgyűjtést és a modellépítés gazdaságonkénti végrehajtását, tehát valóban lehetőséget teremt a matematikai módszerek széleskörű gyakorlati alkalmazására a mezőgazdasági vállalati gépesítés tervezésében.

1. A módszer alapelvei

A különböző matematikai modellek széleskörű gyakorlati alkalmazása érdekében már többféle megoldást alakítottak ki. Esetünkben számolni kellett azzal, hogy

— a gazdaságokban a gépek használatára vonatkozó és általában a technológiai jellegű információk meglehetősen szűkösek és pontatlanok;

— a matematikai módszerekkel végzett számításoktól a vállalatok segítséget várnak az alkalmazandó technológiákra vonatkozóan is.

Így a számítógépes gépesítés-tervezés olyan megoldását választottuk, amely országos normatívákból, a gazdaságok számára választékul kínált technológiai megoldásokból kiindulva jut el a helyi adottságokat kifejező koefficiensekhez, feltételekhez és végül a feladat megoldásához.

Módszerünkben központi szerepet tölt be egy speciális lineáris programozási modell, amely úgy alkalmas a különböző gazdaságoknál végrehajtandó számításokra, hogy a modell szerkezetében egyáltalában nincs szükség semminemű változtatásra. Ezt a modellt a *mezőgazdasági gépesítés-tervezés bázismodelljé*nek neveztük el. A bázismodell elnevezéssel arra kívántunk utalni, hogy olyan matematikai modellről van szó, amely különböző körülmények között egyaránt alkalmazható. A bázismodell két részből épül fel:

— a *standard blokkból*, amely országos normatívák alapján valamennyi fontosabb géptípussal és technológiai megoldással számolva, az ágazatok egységnyi termelési méretét alapul véve fogalmazza meg a gépszükséglet és gépfelhasználás tervezéséhez szükséges összefüggéseket;

— a *konkrét blokkból*, amely a helyi adottságok (ágazatok mérete, teljesítmény eltérések, technológiákra vonatkozó kívánságok stb.) figyelembe vételét teszi lehetővé.

A bázismodell belső struktúrája a Mezőgazdasági Gépkísérleti Intézetben kifejlesztett vállalati gépesítés-tervezési célú lineáris programozási modell[1] matematikai koncepcióját követi. (A bázismodell felépítését az 1. ábra szemlélteti.) Módszertanilag új feladatot a standard adatok és modellrészek konkretizálása, vagyis a helyi sajátosságok figyelembevétele jelentett. Ezt egyrészt a bázismodell sajátos felépítésével (a konkrét blokk változói), másrészt a modell használatát szolgáló számítógépi programrendszer segítségével oldjuk meg. A bázismodell kialakításánál feltételeztük, hogy módszerünk a gazdaságok már kialakult vagy megtervezett termelési szerkezetét elfogadva kerül alkalmazásra. Ez azt jelenti, hogy a módszer jól kapcsolódhat a termelési szerkezet optimalizálását szolgáló matematikai modellekhez is. Ez esetben a gazdálkodási program optimalizálása után második lépésben kerülhet sor a bázismodell alkalmazására, tehát az ágazati technológiák és a gépesítés tervezésére. Meg kell azonban jegyezni, hogy a bázismodell kis átalakítással alkalmassá tehető a gépesítés és a szántóföldi növénytermelés szerkezetének együttes tervezésére is. A modell lehetőséget teremt a különböző ágazati termelési rendszerek technikai megoldásainak figyelembe vételére és versenyeztetésére.

Módszerünk igen lényeges eleme a bázismodell használatát biztosító számítógépi program. Bázismodellünk felépítése — mint látjuk — elvileg módot nyújt különböző gazdaságokban végrehajtandó tervező munkára. Ezen elvi lehetőség valóraváltásának feltétele volt olyan *számítógép-program* kialakítása is, *amely a bázismodellből kiindulva, a konkrét gazdasági adatok figyelembe vételével alkalmas az egyes gazdaságok terveit szolgáltató modellek generálására, majdan e modellek megoldására.*

A bázismodellel összefüggő számítástechnikai feladatokat a Magyar Vegyipari Egyesülés Mérnöki Irodájának munkatársai oldották meg. A középpontban annak a *generátor programnak* a kidolgozása állt, amely a bázismodell konkrét blokkjából, valamint a standard blokk koefficienseiből képes egy konkrét gazdaság gépesítés-fejlesztési programjának matematikai modelljét előállítani. Olyan program ez, amely a lemeztárolón vagy mágnesszalagon rögzített bázismodell közvetlen módosításával minden tervező gazdaság számára konkrét adatrendszerrel és aktuális korlátokkal rendelkező modellt állít elő.[2]

[1] Lásd ezzel kapcsolatban az [1] és [4] alatti tanulmányokat.

[2] A bázismodell matematikai leírását és a hozzá kapcsolódó számítógép-program fontosabb jellemzőit megtalálhatjuk Acsay F. és Csáki Cs. tanulmányában [2].

2. A mezőgazdasági vállalati gépesítés-tervezés bázismodellje

Az előző pontban vázolt feladatok megoldása mintegy egy évig tartó kutató munkát igényelt. Leghosszabb ideig tartott a bázismodell standard koefficienseinek meghatározásához szükséges alapadatok összegyűjtése volt. A modell a Mezőgazdasági Gépkísérleti Intézet bázisgazdaságaiban végzett adatgyűjtésre és az Intézetben kidolgozott ágazati technológiai rendszerekre épül. Az előkészítő munka során összesen 14 szántóföldi növénytermelési ágazatot vettünk számításba. E 14 ágazat mezőgazdaságunk szántóföldi munkáinak mintegy 90%-át adja. Ezek a bázismodell alapvető ágazatai. Mint később látni fogjuk a számításokba a szántóföldi növénytermelés egyéb ágazatai is bekapcsolhatók. Alapvető tervezési időszaknak a fél hónapot választottuk, kivéve a január-február és a november-december hónapokat, amelyeket összevontunk és így a technológiai előirányzatokat 18 időszakra bontva adtuk meg.

A bázismodell jellege szükségessé tette, hogy egy műveletcsoportnál több különböző lehetséges műveletet (pl. a szántás különböző mélységben történő végrehajtását) állítsuk be. Ez teremt arra lehetőséget, hogy e módszert használó gazdaság a viszonyainak leginkább megfelelő műveletet válassza ki.

A műveletek elvégzésére összesen 149 különböző géptípus felhasználását vettük figyelembe. Ezek közül 7 traktor, 1 teherautó és 15 önjáró célgép. A technológiai naptárakban előírt műveletek elvégzésére ezen géptípusok használata alapján technológiai variációkat dolgoztunk ki. A géptípusok és a technológiai variánsok megválasztásánál úgy igyekeztünk eljárni, hogy a hazánkban számításba vehető valamennyi géptípus és ezek összes lehetséges gazdaságos kombinációja, valamint alkalmazási lehetőségei szerepeljenek.

A bázismodell megkonstruálása során olyan megoldásra törekedtünk, amely:

— két-három évig nagyobb változtatás nélkül tesz lehetővé gépesítés-tervezési munkát különböző gazdaságokban;

— agronómiai és műszaki szempontból kielégíti még a magasabb szintű igényeket is, pontosabb a hagyományos tervezési eljárásoknál;

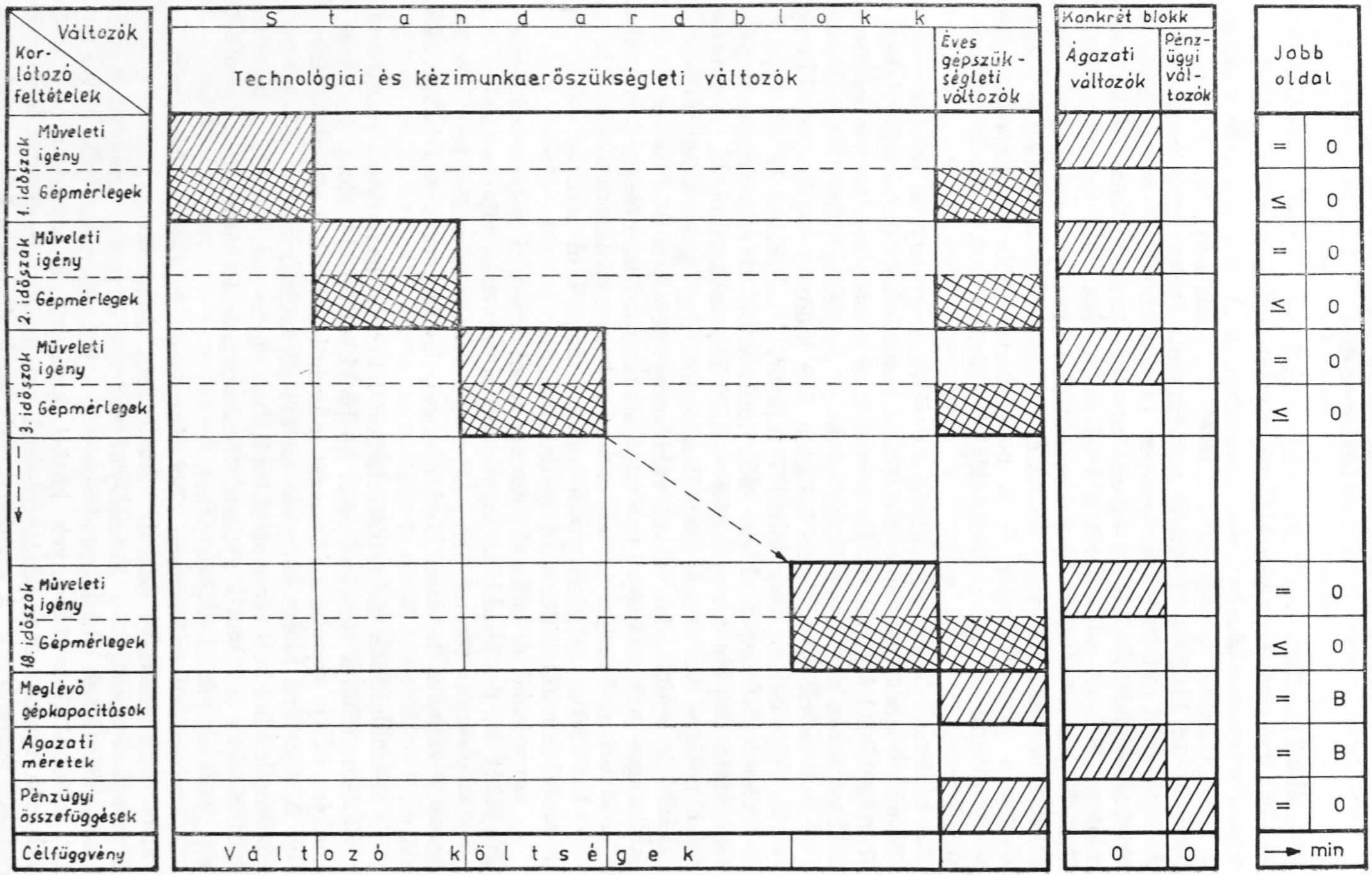
— lehetőséget teremt arra, hogy a korszerű termelési rendszereket több-ágazatú vállalati keretek közé illesszük be és tervezési feladatainkat megoldjuk;

— használatának számítástechnikai feltételei hazánkban megteremthetők.

Bázismodellünk *standard része* 19 blokkból áll. 18 blokk tervezési időszakonként állítja szembe a 14 ágazat műveleti igényeit a megoldási lehetőségekkel. A standard blokk 19. része az évi gépszükséglet tervezését szolgálja. A bázismodell konkrét része struktúrájában ugyancsak állandó, a benne szereplő koefficiensek azonban a gyakorlati alkalmazás folyamatában természetszerűleg gazdaságonként változhatnak.

A bázismodellben összesen *2799 változó van.* Az 1. sz. táblázat a bázismodell változóinak összesítő adatait tartalmazza. Mint láthatjuk, a változók legnépesebb csoportját a *technológiai változók* képezik, amelyek a különböző munkaműveletek lehetséges elvégzési módjait reprezentálják. Mivel modellünket különböző körülmények között kívánjuk hasznosítani, a technológiai változók rendszerének kialakításánál valamennyi fontosabb lehetséges megoldással számoltunk. A *munkaerőszükségleti változók* a kézimunkaerő szükséglet volumenét mutatják időszakonként. A modell standard blokkjában két változó (meglevő és új kapacitások) kapcsolódik valamennyi géptípushoz.

Vállalati gépesitési tervezés bázismodelljének felépitése



1. sz. táblázat

A bázismodell változóinak adatai

Megnevezés	Technológiai változó	Munkaerő szükségleti változó	Gépszükségleti változó	Ágazati változó	Pénzügyi változó	Szabad változó	Összesen
1. időszak	18	1	—	—	—	—	19
2. időszak	98	1	—	—	—	—	99
3. időszak	96	1	—	—	—	—	97
4. időszak	96	1	—	—	—	—	97
5. időszak	136	1	—	—	—	—	137
6. időszak	109	1	—	—	—	—	110
7. időszak	64	1	—	—	—	—	65
8. időszak	126	1	—	—	—	—	127
9. időszak	112	1	—	—	—	—	113
10. időszak	194	1	—	—	—	—	195
11. időszak	142	1	—	—	—	—	143
12. időszak	183	1	—	—	—	—	184
13. időszak	169	1	—	—	—	—	170
14. időszak	207	1	—	—	—	—	208
15. időszak	254	1	—	—	—	—	255
16. időszak	203	1	—	—	—	—	204
17. időszak	175	1	—	—	—	—	176
18. időszak	82	1	—	—	—	—	83
Éves szinten	—	—	284	14	3	16	317
Mindösszesen:	2464	18	284	14	3	16	2799

Ezen *gépszükségleti változók* értékei a szükséges gépkapacitásokat éves szinten adják meg. A figyelembe vett 14 ágazatot egy-egy változó képviseli a modellben. Ezek az *ágazati változók* fontosak a helyi adottságok figyelembe vételében, mivel koefficienseik 100 ha területre vetítve fejezik ki a különböző műveletek iránti igényeket. A *pénzügyi változók* összegező és egyben kiegészítő szerepet töltenek be. A *szabad változók* a bázismodellben közvetlenül nem szereplő termelési ágazatokat képviselik. Segítségükkel még további 16 ágazat kapcsolható be a számításba, azzal a feltétellel, hogy ezen ágazatok műveleteit is a 14 ágazatnál használt gépkombinációval kell megoldani. Ez azt jelenti, hogy a kertészeti ágazatokon kívül gyakorlatilag valamennyi növénytermesztési ág gépesítése modellezhető.

A *korlátozó feltételek rendszere* egyrészt tartalmazza a 18 időszakra vonatkozó összefüggéseket, másrészt a gépszükséglettel, illetve a beruházási igénnyel (pénzben kifejezve) kapcsolatos feltételeket foglalja magába. Modellünkben összesen 1999 korlátozó feltétel van. A 2. sz. táblázat áttekintést nyújt a bázismodell korlátozó feltételeiről.

1779 feltétel kapcsolatos a 18 termelési periódusban elvégzendő műveletek tervezésével. Az időszaki blokkokon belül kiemelkedő jelentősége van a műveleti igényeket (ágazati változók) és az ezek elvégzési lehetőségeit szembeállító feltételeknek. A konkrét gazdasági körülményeket kifejező ágazati változók e feltételeken keresztül kapcsolódnak a bázismodell standard blokkjához. A standard blokk speciális részét képezik az éves gépkapacitás mérlegek, amelyekben lehetőség van a gazdaságok *meglevő gépkapacitásának figyelembevételére.* 14 feltétel az *ágazati változók méretének* meghatározását szolgálja, *2. sz. táblázat*

A bázismodell korlátozó feltételei

Megnevezés	Műveleti igény és technológiai összefüggés	Gépigény meghatározás	Kézimunka-igény meghatározás	Meglevő gépkapacitás előírása	Ágazati méretek rögzítése	Pénzügyi összefüggések	Üres sorok	Összesen
1. időszak	7	12	1	—	—	—	—	20
2. időszak	21	43	1	—	—	—	—	65
3. időszak	22	46	1	—	—	—	—	69
4. időszak	24	48	1	—	—	—	—	73
5. időszak	36	64	1	—	—	—	—	101
6. időszak	32	52	1	—	—	—	—	85
7. időszak	24	45	1	—	—	—	—	70
8. időszak	37	58	1	—	—	—	—	96
9. időszak	32	61	1	—	—	—	—	94
10. időszak	47	81	1	—	—	—	—	129
11. időszak	31	70	1	—	—	—	—	102
12. időszak	41	73	1	—	—	—	—	115
13. időszak	40	82	1	—	—	—	—	123
14. időszak	53	95	1	—	—	—	—	149
15. időszak	65	101	1	—	—	—	—	167
16. időszak	50	92	1	—	—	—	—	143
17. időszak	44	76	1	—	—	—	—	121
18. időszak	17	39	1	—	—	—	—	57
Éves szinten	—	—	—	142	14	4	60	250
Mindösszesen	623	1138	18	142	14	4	60	1999

e feltételek jobboldalára kerül a gazdaságok szántóföldi növénytermelésének szerkezete. A *pénzügyi feltételek száma* 4. A modell üres sorai a közvetlenül figyelembe nem vett ágazatokkal kapcsolatosan szabadon hasznosíthatók.

A *bázismodell célfüggvényének gazdasági tartalma a gazdaság összes gépesítés költségének minimalizálása.* Ez tehát azt jelenti, hogy modellünk olyan gépfelhasználási és gépszükségleti program kiszámítására alkalmas, amely az összes munkák elvégzése szempontjából vállalati szinten optimális. A bázismodell úgy módot nyújt az ágazati alapon kidolgozott termelési rendszerek legkedvezőbb összekapcsolási variációinak meghatározására is.

3. A módszer gyakorlati alkalmazása

A bázismodellen alapuló gépesítés-tervezési metodikáról a tervező gazdaságok feladatait összefoglaló *részletes útmutató* készült.[3] Ez a kézikönyv csak vázlatosan ismerteti a módszer matematikai és számítástechnikai alapjait. A főhangsúly azokon a technológiai és mezőgazdaság-gépesítési problémákon van, amelyek alapvető fontosságúak a módszer alkalmazásában közreműködő vállalati szakemberek számára. Így részletesen bemutatja a bázismodellben

[3] Lásd a [3] tanulmányt.

figyelembe vett technológiákat, a módszer által kínált tervezési lehetőségeket, valamint a gazdasági előkészítő munka folyamatát.

Célkitűzésünknek megfelelően a bázismodell gyakorlati alkalmazása viszonylag egyszerű előkészítő munkát igényel. A standard megoldások a bázismodellben rendelkezésre állnak, ennek megfelelően az előkészítés során csupán a helyi adottságokra utaló információkat kell összegyűjteni. Így

a) rögzíteni kell a szántóföldi növénytermelésnek azt a szerkezetét, amellyel a modellben számolni kívánunk;

b) meg kell adni a gazdaság meglevő erő- és munkagépparkját, valamint az új gépbeszerzésre felhasználható pénzügyi keretet, fel kell sorolni azon eszköztípusokat, amelyekből új beszerzéssel a gazdaság nem kíván számolni;

c) meg kell határozni, hogy a gazdaság a szántóföldi növénytermelési ágainál milyen technológiai megoldásokkal kíván számolni és rögzíteni kell, hogy a gazdaság körülményei között a különböző gépek teljesítményei milyen mértékben térnek el az átlagtól;

d) meg kell határozni az egységnyi kézimunka díjait, amennyiben az a 14,30 Ft/óra standard költségtől jelentősen eltér.

A fenti információk meghatározására három adatfelvételezési lapot alakítottunk ki. Az útmutató természetesen bemutatja e lapok kitöltését is.

A bázismodell az előzőekben vázolt keretek között tehát lehetőséget nyújt egy mezőgazdasági vállalat *komplex gépfelhasználási és gépszükségleti tervének meghatározására*. A terv mutatói közvetlenül leolvashatók a számítógép outputjáról és ezeket a mezőgazdasági szakemberek is közvetlenül értelmezni tudják.

A módszert *1975-ben a Mezőgazdasági Gépkísérleti Intézet szervezésében már a gyakorlatban is hasznosították*. Bebizonyosodott, hogy alkalmas a konkrét igények széles skálájának kielégítésére és lehetőséget nyújt a különböző gazdaságok eltérő gépesítési és technológiai koncepciójának megragadására. A gépesítés ésszerűbb megszervezésében rejlő tartalékok gazdaságonként eltérőek. Tapasztalataink alapján az azonban leszögezhető, hogy a matematikai módszerekkel történő gépesítés tervezés a növénytermelési költségek 10—15%-os csökkentésére, és a vállalati jövedelem ennek megfelelő növelésére nyújthat lehetőséget.[4]

A gyakorlati felhasználás során lényegében *beigazolódtak a bázismodell tömegszerű alkalmazhatóságával kapcsolatos előzetes elképzeléseink*. A tervező gazdaságokban az előkészítő munka 2—3 hét alatt könnyen elvégezhető volt. A bázismodell ágazati és technológiai, valamint gépválasztéka a gazdaságok többségének igényeit kielégíti. Nehézséget csupán a kertészeti ágazatok és ezek speciális gépei okoztak, mivel modellünk e területet nem fogja át. Ahol a kertészeti termelés jelentősebb szerepet tölt be, a kertészeti gépigényeket kiegészítésként hagyományos módszerekkel határoztuk meg. E munka elkerülése végett a bázismodell ágazati választékát a közeljövőben a kertészeti ágazatokkal bővíteni kívánjuk.

A mezőgazdasági ágazatok technológiája gyorsan fejlődik és ennek megfelelően az alkalmazott gépek választéka sem tekinthető hosszú ideig változatlannak. A végbemenő fejlődés kifejezésre kell hogy jusson a bázismodellben, illetve annak standard részében is. Elképzelésünk az, hogy *évente egyszer*

[4] A Szekszárdi Állami Gazdaság hagyományos módszerekkel összeállított gépesítési tervében szereplő összes költség 18,5 millió Ft. A bázismodell alapján számított tervvariánsok költségvonzata ennél az összegnél 21, 28 és 22%-kal kedvezőbb.

végezzük el a modell módosítását, figyelembe véve nemcsak a technikai-technológiai, hanem a pénzügyi és gazdasági (árak, támogatási rendszer) változásokat is.

A bázismodell meglehetősen nagy méretű. Az egyes gazdaságok számára automatikusan előállított feladatok mérete azonban elfogadható nagyságrendű volt. Rendszerint 4–500 változóból és korlátozó feltételből álló, igen kismértékben kitöltött lineáris programozási modelleket kellett megoldani. Meg kell jegyezni, hogy a bázismodell lehetőségeit igénybevevő gazdaságok általában nem elégedtek meg egy terv-változat kiszámításával. Sor került a kiinduló feltételezések módosításával (gépválaszték szűkítése vagy bővítése, beruházási keretek módosítása stb.) további 3–4 tervváltozat meghatározására is.

További terveink között szerepel a gépesítés-tervezési bázismodell hasznosítása *népgazdasági tervezési célokra*. Úgy véljük, a magyar mezőgazdaságot reprezentáló 8–10 tipikus gazdaságban e módszerekkel elvégzett számítások alapján következtetések vonhatók le a mezőgazdaság távlati gépszükségletéről. Emellett reméljük, a tipikus gazdaságokat felölelő modellrendszer felhasználható lesz a mezőgazdasági gépesítéssel összefüggő makroszintű döntések (dotációs rendszer továbbfejlesztése, új gépek árainak meghatározása stb.) megalapozásában is.

(Beérkezett: 1976. január 10.)

IRODALOM

1. ACSAY, F.–CSÁKI, CS.–VARGA, GY.: *A vállalati géppark és géphasználat matematikai tervezete*. Budapest, 1973. Akadémiai Kiadó.
2. ACSAY, F.–CSÁKI, CS.: *A lineáris programozás alkalmazása a mezőgazdasági üzem tervezésében*. Mezőgazdasági Gépkísérleti Tanulmányok (Mezőgazdasági Gépkísérleti Intézet Közleménye) XXII. évf. (1975) No. 14.
3. ACSAY, F.–CSÁKI, CS.: *A szántóföldi növénytermelés gépesítéstervezésének tömegszerűen alkalmazható lineáris programozási módszere*. Mezőgazdasági Gépkísérleti Intézet, Időszaki Tájékoztató, 1976.
4. CSÁKI, CS.: *Az erőforrások kezelésének problémái a mezőgazdasági vállalati tervek lineáris programozási modelljeiben*. Szigma, 1971. 1–2. sz.
5. CSETE, L.–MEGYERI, F.–MÉSZÁROS, S.: *Termelőszövetkezetek és állami gazdaságok középtávú tervezési eljárása és módszere*. Gazdálkodás, 1974. 6. sz.
6. FINN, E. A.–SKURBA, V. V.–KOMZAKOVA, L. M.: *A mezőgazdasági üzemek gép- és traktorparkjának kiszámítása elektronikus számítógéppel*. A MÉM Információs Központjának fordítása. Kézirat. 1970.

THE MATHEMATICAL PLANNING METHOD APPLICABLE *EN MASSE* FOR MECHANIZING AGRICULTURAL FIRMS

In the paper the authors outline a method that may serve the basis for a wide practical application of mathematics in corporate mechanization and planning. The kernel of the method is a special linear programming model, the so called *basis model*, which consists of two parts: of a standard block comprising coefficients that relate to the wide scale of technological variants, and of a concrete block that takes local characteristics into consideration. The basis model contains 2799 variables and 1999 constraints. The economic contents of the objective function is the minimization of the total cost of mechanization. A very important element of the model is a special computer programme. Starting from this model the programme is suitable both for the generation of models

providing plans for single farms — while taking into consideration concrete economic data — and later for the solution of these models.

Furthermore, the authors give an account of the experiences they have gained in the practical application of the basis model of agricultural corporate mechanization and planning.

СПОСОБ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПЛАНИРОВАНИЯ ДЛЯ МЕХАНИЗАЦИИ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ

В данной статье авторы описывают способ математического планирования механизаци сельскохозяйственных предприятий, который можно широко применять на практике. Центральное место в этом методе занимает специальная модель линейного программирования, так называемая базисная модель, состоящая из двух частей: стандартного блока, содержащего коэффициенты, касающиеся широкой гаммы технологических решений, и конкретного блока, который обеспечивает учет местных условий. Базисная модель содержит 2799 переменных и 1999 ограничений. Экономическим содержанием целевой функции является минимизация всех расходов на механизацию. Одним из важнейших элементов метода является специальная вычислительная программа на ЭВМ. Исходя из базисной модели, эта программа, учитывая конкретные экономические показатели, пригодна для генерирования обсуживающих отдельные планы хозяйств моделей, и вслед за этим — для решения этих моделей.

Наряду с этим авторы рассказывают и об опыте, приобретенном в ходе практического применения базисной модели планирования механизации сесльскохозяйственных предприятий.

Szüts Huba

A létszámcsökkenés kihatásainak vizsgálata

Köztudott, hogy az utóbbi években bizonyos iparágakban (pl. a szénbányászatban) a létszám erőteljesen csökkendő tendenciát mutat. A dolgozatban azt vizsgáljuk, hogy milyen esetekben válik a létszám termeléskorlátozó feltétellé.

Könnyen belátható, hogy a létszám, állandó termelési volumennél, abban az esetben lesz termelési korlát, ha a létszámcsökkenés mértéke nagyobb, mint a termelékenységi színvonal növekedése, csökkenő termelési volumen esetén pedig akkor, ha a létszám és a termelékenység (teljesítmény) együttes változásának hatására bekövetkező termeléscsökkenés mértéke meghaladja a termeléscsökkenés tervezett értékét.

Az alábbi módon elvégzendő vizsgálatok csak egy bizonyos időtartamon belül tekinthetők érvényesnek. Úgy véljük, hogy öt éves intervallumot véve — azaz maximum öt évre előre vonva le következtetéseket — még elfogadható értékeket kapunk. Többféle vizsgálati módszer képzelhető el, itt most kettőt ismertetünk.

Konstans termelési volumen esete

a) Első módszer:

Legyen az összüzemi teljesítmény trendje:

$$q = a + bt + ct^2$$

alakú, ahol

t = a regressziós görbe számításának alapjául szolgáló első évtől (a jelen esetben pl. 1970-től) számított évek száma,

a, b, c = regressziós állandók;

és az összes szénüzemű műszakok trendje (a túlműszakok nélkül)

$$m = d + \frac{e}{t} - \frac{h}{t^2} \tag{1}$$

alakú, ahol d, e, h szintén regressziós állandók.

Az összes évi termelés:

$$T = mq = \left(d + \frac{e}{t} - \frac{h}{t^2}\right)(a + bt + ct^2).$$

Beszorzás és összevonása után:

$$T = cdt^2 + (db + ec)\,t - \frac{ah}{t^2} + \frac{ae - bh}{t} + da + be - ch$$

A létszámcsökkenés akkor nem lesz termelési korlát, ha a termelés idő szerinti deriváltja:

$$\frac{dT}{dt} \geq 0,$$

azaz

$$2\frac{ah}{t^3} + \frac{bh - ae}{t^2} + 2\,cdt + db + ec \geq 0,$$

vagy másképpen

$$2\,cdt^4 + (db + ec)t^3 + (bh - ae)t + 2\,ah \geq 0$$

t helyébe 1, 2, 3 . . . értékeket helyettesítve rögtön látható lesz, hogy a vállalatnak melyik évben kell esetleg intézkedéseket tennie a műszaki fejlesztés, avagy a létszámgazdálkodás terén, hogy az adott termelési szintet tartani tudja.

b) Második módszer:

Az összüzemi teljesítményt (q) az összes szénüzemi munkáslétszám (l_e) vagy akár a túlműszakok nélküli összüzemi műszakszám (m) függvényében felírva, az alábbi formulát kapjuk:

$$q = al_e^{\nu}, \tag{2}$$

ahol a, ν regressziós állandók, vagy $q = bm^{\nu'}$, és $\nu \approx \nu'$ az adott hibahatáron belül. (A függvény érvényességi intervalluma — a jelen esetben — 1970-től maximum 1980-ig terjed.)

A ν kitevő megmutatja, hogy 1%-os létszámcsökkenésnek megfelelő időintervallum alatt a teljesítmény várhatóan ν%-kal fog növekedni.

Ha tehát $|\nu| = 1$, $\nu < 0$, akkor a teljesítmény növekedése kompenzálja a létszámcsökkenésből adódó kiesést,

ha $|\nu| < 1$, $\nu < 0$, akkor a teljesítménynövekedés gyorsabb ütemű, mint a létszámcsökkenés,

ha $|\nu| < 1$, $\nu < 0$, akkor a létszám egy bizonyos idő múlva a termelés korlátja lesz.

Csökkenő termelési volumen esete

Ha a termelés volumene egyéb okok miatt (pl. a fogyasztói igények egyre kisebbek lesznek) amúgy is csökkenő tendenciájú, akkor a konstans termelési szint mellett már korlátként jelentkező létszám nem lesz termelési korlát, ha

$$\frac{T_b - T^{+}}{T_b} \geq \frac{T_b - T^{++}}{T_b},$$

ahol

T^{+} = az előre betervezett, de a létszámcsökkenéssel nem számoló alacsonyabb termelési szint,

T_b = az utolsó bázisév termelése,

T^{++} = a létszámcsökkenés és a teljesítménynövekedés együttes hatása eredményeként várható termelési szint.

Az összefüggés baloldala termelési prognózisok alapján közvetlenül meghatározható, a jobboldala viszont az alábbi módon:

$$T_b = m_b q_b,$$

ahol m_b az utolsó bázisidőszak összüzemi műszakszáma, q_b pedig az összüzemi teljesítménye.

Jelöljük ω_1-gyel az összüzemi műszakszám — T^{+} termelés éve által meghatározott — t_1 időpontig (pl. 1980-ig) várható %-os csökkenését az adott bázishoz viszonyítva:

$$\omega_1 = \frac{m_b - m_t}{m_b},$$

ahol $m_t = d + \frac{e}{t_1} - \frac{h}{t_1^2}$ összefüggéstel határozható meg.

Ugyanerre a t_1-re vonatkozóan az összüzemi teljesítmény %-os változása az adott bázishoz viszonyítva legyen ν_1, azaz

$$\nu_1 = \frac{q_b - q_t}{q_b},$$

ahol $q_t = a + bt_1 + ct_1^2$. Ekkor t_1 idő mulva a várható termelés:

$$T^{++} = m_t q_t = (1 - \omega_1) m_b (1 - \nu_1) q_b,$$

tehát

$$\frac{T_b - T^{++}}{T_b} = \frac{m_b q_b - m_b q_b (1 - \omega_1)(1 - \nu_1)}{m_b q_b} = \omega_1 + \nu_1(1 - \omega_1). \tag{3}$$

A második módszer szerinti hatványfüggvénnyel pedig az alábbi adódik:

Mivel $q_b = bm_b^{\nu}$ és $m_t = (1 - \omega_1) m_b$;

$$q_t = b(1 - \omega_1)^{\nu} m_b^{\nu} = bm_b^{\nu}(1 - \omega_1)^{\nu} = q_b(1 - \omega_1)^{\nu};$$

$$T^{++} = m_t q_t = (1 - \omega_1) m_b q_b (1 - \omega_1)^{\nu},$$

azaz megfelelő átalakítás után:

$$\frac{T_b - T^{++}}{T_b} = 1 - (1 - \omega_1)^{1+\nu}. \tag{4}$$

A (3) és (4) összefüggések a gyakorlat számára kielégítő pontosságúak.

Tehát, ha teljesül az a feltétel, hogy

$$\frac{T_b - T^+}{T_b} \geq \begin{cases} \omega_1 + \nu_1(1-\omega_1) \\ \text{vagy} \\ 1-(1-\omega_1)^{1+\nu} \end{cases}$$

és az évenkénti termeléscsökkenés viszonylag egyenletes (ha nem, akkor évenként kell a fenti ellenőrzést elvégezni), akkor a vállalat várhatóan eleget tud tenni a vele szemben támasztott mennyiségi elvárásoknak.

Hasonló vizsgálatok végezhetők növekvő volumenű termelés esetén is.

Egy gyakorlati példa

A Várpalotai Szénbányákkal szemben 1980-ban támasztott termelési elvárás azonos az 1976. évivel: 1450 · 10^3 t. Kérdés, ha a még jelenleg is tapasztalható létszámcsökkenés tovább folytatódik, eleget tud-e tenni ennek a vállalat.

A (2)-es számú összefüggés felhasználásával a teljesítmény-létszám függvény:

$$q = 3{,}982\ l_e^{-0{,}523}\,;$$

azaz

$$-1 < \nu = -0{,}523 < 0$$

Látható tehát, ha az 1975—75-ös kormányintézkedések hatására nem áll meg a létszámcsökkenés, vagy legalább is nem mérséklődik, a vállalat a termelési elvárásoknak nem tud eleget tenni. A tervezett 1450 · 10^3 t helyett, változatlan műszaki fejlesztési ütem mellett, legfeljebb 1240 · 10^3 t szenet lesz képes termelni.

(Beérkezett: 1975. november 30.)

IRODALOM

1. Szép, J.: Analízis. 1972. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
2. Szűts, H.: *Két döntési modell és azok adaptálása a Várpalotai Szénbányákra.* Bányászati Kutató Intézet, Bányászati Munka és Üzemszervezési Tanulmányok, 15. szám. 1971.

A SURVEY OF THE EFFECTS OF WORK FORCE REDUCTION

In the past years we have witnessed a vigorous reduction of the working force in some industrial sectors (e.g. coal mining). As long as this phenomenon can be counterbalanced with an increase in the efficiency of labour, working force does not have to be reckoned with as a restraint of production in planning and program -making.

The study furnishes us with an answer whether, with the volume of production remaining constant or decreasing, labour becomes a restraint of production in the given planning period, and if does, when it can be expected.

From among the possible methods of analysis we applied trend analysis and the exponent regression analysis.

In the former case the trend of labour efficiency (gross plant output) is of the form:

$$q = a + bt + ct^2 \quad (a,\ b,\ c \text{ constants})$$

The trend of the total plant shift is of the form:

$$m = d + \frac{e}{t} - \frac{h}{t^2} \quad (d,\, e,\, h \text{ constants}),$$

where t is the number of years after the first (basis) year.

In the second case the gross plant output expressed in terms of the total plant shift is of the form:

$$q = bm^{\nu} \ (b,\, \nu \text{ constants}).$$

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОСЛЕДСТВИЙ СОКРАЩЕНИЯ ЧИСЛЕННОСТИ РАБОТНИКОВ

В последние годы в некоторых отраслях промышленности (напр.: в угольной промышленности) произошло сильное сокращение состава. До тех пор, пока с помощью повышения эффективности живого труда можно компенсировать это явление, при разработке планов и программ мы не должны учитывать состав в качестве ограничения для производства.

Настоящая статья дает ответ на то, что при постоянном и снижающемся объеме производства, в данном периоде планирования станет ли состав ограничением производства, и если это так, то приблизительно когда.

Из возможных методов исследования мы использовали расчет треднов и показательный регрессионный расчет.

В первом случае вид тренда эффективности живого труда (всезаводная производительность):

$$q = a + bt + ct^2 \qquad (a,\, b,\, c \text{ — постоянные}).$$

Тренд всех заводских смен:

$$m = d + \frac{e}{t} - \frac{h}{t^2} \quad (d,\, e,\, h \text{ — постоянные}),$$

а t — является числом лет, считая с первого года, который служит базисом, для вычисления тренда.

Во втором случае всезаводская производительность в зависимости от всех заводских смен имеет вид:

$$q = bm^{\nu} \qquad (b,\, \nu \text{ — постоянные}).$$

Somos Endre—Stahl János

Dekompoziciós eljárások nemlineáris programokra*

Bevezetés

[4] több eljárást tartalmaz folytonos konvex-konkáv függvény nyeregpontjának meghatározására és egy konvex programozási feladat és egy neki megfelelő nyeregpont meghatározási feladat ismert ekvivalenciája alapján megmutatja, hogy bizonyos konvex programozási dekompozíciós eljárások miképpen származtathatók az előbbiekből. (Konvex programozási feladaton olyan programozási feladatot értünk, melynél a lehetséges programok halmaza és a minimalizálandó célfüggvény konvex.)

Cikkünk is a [4]-beli utat követi. Bizonyos feltételek mellett egy

$$f_1(x_1, x_2) \leq 0$$
$$f_2(x_1, x_2) \leq 0$$
$$x_1 \in X_1$$
$$\min F(x_1, x_2)$$

alakú konvex programozási feladat megoldása egyenértékű $\varphi(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ megfelelő halmazon vett nyeregpontértékének meghatározásával, ahol $\varphi(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ az

$$f_2(\bar{x}_1, x_2) \leq 0$$
$$\min F(\bar{x}_1, x_2) + \bar{y}_1 f_1(\bar{x}_1, x_2)$$

(ugyancsak konvex) részfeladat optimumértéke.

Egy függvény nyeregpontértékének, illetve nyeregpontjának meghatározására kidolgozott eljárásunkat a fenti, a [4]-belieknél tárgyaltaknál általánosabb esetre alkalmazva dekompozíciós eljárást nyerünk a kiinduló programozási feladat megoldására.

A tárgyalandó eljárás bevezetésének általunk választott módja nem szükségszerű, azaz a dekompozíciós eljárás származtatható közvetlenül is.

Választásunkat az indokolja, hogy egyrészt a nyeregponttal kapcsolatos eljárás valamelyest önmagában is érdekes, másrészt pedig úgy érezzük, hogy megkönnyíti annak megértését, hogy egy-egy dekompozíciós eljárás valójában mit is csinál és számos ismert dekompozíciós eljárás is ezen keretekbe ágyazható.

A cikk 1. részében az említett ekvivalenciát fogalmazzuk meg pontosan, a 2. rész azzal a nyeregpontérték meghatározási eljárással foglalkozik, amelyet a dekompozíciós eljárás származtatásánál használunk. A 3. részben két esetre

* A cikk az 1975-ös győri „Operációkutatás a gyakorlatban '75" konferencián elhangzott előadás alapján készült.

fogalmazzuk meg ezeket a dekompozíciós eljárásokat. A részfeladatra vonatkozó — elég erősnek tekinthető — feltételek teljesülése esetén, valamint lényegesen gyengébb feltételek esetére akkor, ha az eredeti programozási feladatban szereplő függvényekre bizonyos szeparábilitási feltételek teljesülnek.

A 3. részbeli egyetlen megjegyzés kivételével nem foglalkozunk eljárásunknak korábbi dekompozíciós eljárásokkal történő összehasonlításával. Cikkünk eredményei eredetiek, a Dantzig—Wolfe, illetve Benders dekompozíció konvex programozási feladatra történő kiterjesztéseit speciális esetként tartalmazzák és egy részletes összehasonlítás már különösebb újat nem ad, illetve könnyen el is végezhető.

A terjedelmet rövidítendő, a cikkben a bizonyításokat mellőzzük. Ezek [6]-ban megtalálhatók, melyet kívánságra szívesen megküldünk. Az eljárás lineáris esetre történő specializálásával kapcsolatban [5]-re utalunk.

1. Programozási és nyeregpont feladatok ekvivalenciájáról

Ismeretes, hogy amennyiben x^* az

$$\begin{gathered} f(x) \leq 0 \\ x \in X \\ \min F(x) \end{gathered}$$

konvex programozási feladat egy optimális megoldása és az f-függvény kielégít egy alkalmas regularitási feltételt, akkor van olyan $y^* \geq 0$, hogy minden $x \in X$-re és $y \geq 0$-ra

$$F(x^*) + yf(x^*) \leq F(x^*) \leq F(x) + y^*f(x)$$

azaz (x^*, y^*) a $\varphi(x, y) = F(x) + yf(x)$ függvény nyeregpontja $X \times Y$-n, ahol $Y = \{y : y \geq 0\}$.

Tekintsük most az

$$\begin{gathered} f_1(x_1, x_2) \leq 0 \\ f_2(x_1, x_2) \leq 0 \\ x_1 \in X_1 \\ \min F(x_1, x_2) \end{gathered} \tag{1}$$

programozási feladatot, ahol feltesszük, hogy

(1.1) az f_1, f_2 és F függvények konvexek,

(1.2) X_1 konvex és kompakt halmaz,

(1.3) (1)-nek van optimális megoldása, egy ilyet (x_1^*, x_2^*)-gal jelölünk, (1) optimumértékét pedig φ^*-gal,

(1.4) van olyan $x_1^0 \in X_1$, melyre valamilyen x_2^0-val

$$f_1(x_1^0, x_2^0) < 0, \; f_2(x_1^0, x_2^0) \leq 0.$$

A Kuhn Tucker nyeregpont tétel szerint ekkor mindenesetre van olyan $x_1^* \in X_1$, hogy minden $y_1 \in Y_1 = \{y_1 : y_1 \geq 0\}$-ra és az

$$\begin{gathered} f_2(x_1, x_2) \leq 0 \\ x_1 \in X_1 \end{gathered}$$

feltételek meghatározta X halmaz tetszőleges (x_1, x_2) elemére

$$\bar{\varphi}(x_1^*, x_2^*, y_1) \leq \bar{\varphi}^* \leq \bar{\varphi}(x_1, x_2, y_1^*), \tag{2}$$

ahol

$$\bar{\varphi}(x_1, x_2, y_1) = F(x_1, x_2) + y_1 f_1(x_1, x_2).$$

Tegyük fel még, hogy (1.5) az

$$f_2(\bar{x}_1, x_2) \leq 0$$
$$\min F(\bar{x}_1, x_2) + \bar{y}_1 f_1(\bar{x}_1, x_2) \tag{3}$$

feladatnak minden $(\bar{x}_1, \bar{y}_1) \in X_1 \times \overline{Y}_1$-re van optimális megoldása.

Akkor a (2) alatti egyenlőtlenségekből

$$\varphi^* = \max_{\overline{Y}_1} \min_{X} \bar{\varphi}(x_1, x_2, y_1) = \max_{\overline{Y}_1} \min_{X_1} \min_{X_2(x_1)} \bar{\varphi}(x_1, x_2, y_1) = \max_{\overline{Y}_1} \min_{X_1} \varphi(x_1, y_1),$$

ahol

$$X_2(x_1) = \{x_2 : f_2(x_1, x_2) \leq 0\},$$

azaz (3) lehetséges megoldásainak a halmaza, $\varphi(x_1, y_1)$ pedig (3) optimumértéke $\bar{x}_1 = x_1$, $\bar{y}_1 = y_1$ esetén. (2) második részéből az is adódik, hogy

$$\|y_1^*\| \leq c \frac{F(x_1^0, x_2^0) - F(x_1^*, x_2^*)}{\|f_1(x_1^0, x_2^0)\|}, \tag{4}$$

ahol c valamilyen konstans, azaz $\overline{Y}_1$ egy alkalmas konvex és kompakt Y_1 részhalmazára szorítkozva

$$\max_{\overline{Y}_1} \min_{X_1} \varphi(x_1, y_1) = \max_{Y_1} \min_{X_1} \varphi(x_1, y_1).$$

1. lemma. $\varphi(x_1, y_1)$ konvex-konkáv függvény. Legyen továbbá (1.6) minden $x_1 \in X_1$-re $X_2(x_1) \subseteq X_2$, ahol X_2 korlátos és az f_1, f_2 és F függvények legyenek folytonosak.

Akkor φ folytonos $X_1 x Y_1$-n.

Ha $X_2(x_1)$ nem részhalmaza minden $x_1 \in X_1$-re egy rögzített korlátos X_2 halmaznak, a lemma állítása már nem feltétlenül igaz.

Tekintsük pl. a következő kétváltozós függvényt a nem-negatív síknegyedben

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 - \sqrt{x_1 x_2} & \text{ha } x_1 x_2 \leq 1; \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A függvény a szóbanforgó tartományban konvex és rögzített $x_1 = x_1$ mellett az

$$x_2 \geq 0$$
$$\min f(\bar{x}_1, x_2)$$

programozási feladat $\varphi(\bar{x}_1)$ optimumértékére

$$\varphi(\bar{x}_1) = \begin{cases} 1 & \text{ha } \bar{x}_1 = 0, \\ 0 & \text{ha } \bar{x}_1 > 0. \end{cases}$$

2. Eljárások nyeregpont meghatározására

Legyen $\varphi(x, y)$ folytonos $X \times Y$-n, ahol X és Y kompakt halmazok. Tegyük fel, hogy

$$m^* = \max_Y \min_X \varphi(x, y) = \min_X \max_Y \varphi(x, y) = M^*$$

A következőkben egy iterációs eljárást definiálunk. Kiinduláskor legyenek $x^1 \in X$ és $y^1 \in X$ tetszőlegesek.

Az n-edik iterációs lépésben ismert $x^1, x^2, \ldots, x^n \in X$ és $y^1, y^2, \ldots, y^n \in Y$ birtokában tekintsük a következő két programozási feladatot

$$\begin{gathered} M \geq \varphi(x, y^i), \quad i = 1, 2, \ldots, n \\ x \in X \\ \min M \end{gathered} \tag{5}$$

és

$$\begin{gathered} m \leq \varphi(y^i, y), \quad i = 1, 2, \ldots, n \\ y \in Y \\ \max m. \end{gathered}$$

φ folytonossága és X, illetve Y kompakt volta folytán mindkét feladatnak van optimális megoldása. Legyenek (M^n, x^{n+1}), illetve (m^n, y^{n+1}) ilyenek, amelyek meghatározásával az iterációs lépés végetér.

2. lemma. $M^n \leq M^{n+1} \leq M^* = m^* \leq m^{n+1} \leq m^n$ és $\lim M^n = \lim m^n = M^* = m^*$.

Legyen most $\varphi(x, y)$ konvex-konkáv. Akkor a Kakutani tétel folytán teljesül $M^* = m^*$. Továbbá ebben az esetben (5) és (6) konvex programozási feladat, amelyekre nyilvánvalóan teljesül a Slater-féle regularitási feltétel. Jelöljük az (5) és (6)-beli első feltétel csoporthoz tartozó optimális, a Kuhn–Tucker nyeregpont feltételeket kielégítő multiplikátorokat $\mu^{1n}, \mu^{2n}, \ldots, \mu^{nn}$, $\lambda^{1n}, \lambda^{2n}, \ldots, \lambda^{nn}$-nel.

3. lemma. Az $\left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda^{in} x^i, \sum_{i=1}^{n} \mu^{in} y^i\right\}$ sorozat tetszőleges torlódási pontja nyeregpontja φ-nek.

A 3. részbeli alkalmazásnál, ahol $\varphi(x, y)$ egy programozási feladat optimumértéke lesz, nincs explicit formulánk a $\varphi(x, y^i)$ és $\varphi(x^i, y)$ függvényértékek felírására. Ezért az (5)–(6) feladatpár helyett – amint az a nem-lineáris programozásban egyébként is gyakran szokásos – tekintsük annak linearizált alakját. Ezen feladatpár felhasználásakor már nem jelentkezik az említett probléma.

Ennek az eljárásnak az n-edik iterációs lépésében ismert $x^1, x^2, \ldots, x^n \in X$ és $y^1, y^2, \ldots, y^n \in Y$ birtokában tekintsük a következő két programozási feladatot

$$\begin{gathered} M \geq \varphi(x^i, y^i) + \nabla_x \varphi(x^i, y^i)(x - x^i), \quad i = 1,2, \ldots, n \\ x \in X \\ \min M \end{gathered} \tag{7}$$

és

$$m \leq \varphi(x^i, y^i) + (y - y^i)\,\nabla_y \varphi(x^i, y^i) \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

$$y \in Y \tag{8}$$

$$\max m$$

Mivel mindkét feladat első feltételcsoportja lineáris korlátozó feltétel és az X és Y kompakt halmazok, ezen feladatoknak is létezik optimális megoldása, amelyeket jelöljön $(\bar{M}^n, x^{n+1})$, illetve $(\bar{\bar{m}}^n, y^{n+1})$.

4. lemma. $\bar{M}^n \leq \bar{M}^{n+1} \leq M^{n+1} \leq M^* = m^* \leq m^{n+1} \leq \bar{\bar{m}}^{n+1} \leq \bar{\bar{m}}^n$ és $\lim \bar{M}^n = \lim \bar{\bar{m}}^n = M^* = m^*$. A $\left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda^{in} x^i,\ \sum \mu^{in} y^i\right\}$ sorozat tetszőleges torlódási pontja nyeregpontja φ-nek, ahol a λ^{in}-nek és μ^{in}-nek (7), illetve (8) első feltételcsoportjához tartozó optimális multiplikátorok.

Mint könnyen látható, az $\{\bar{M}^n\}$ és $\{\bar{\bar{m}}^n\}$ sorozat konvergenciájához nincs szükség arra, hogy φ folytonosan differenciálható legyen. Elegendő, ha (7)-ben és (8)-ban korlátos szubgradiensek szerepeltethetők. A (7)—(8) feladatpár „gyöngébb", mint az (5)—(6) feladatpár, amint azt az $\bar{M}^n \leq M^n$ és $\bar{\bar{m}}^n \geq m^n$ egyenlőtlenségekkel ki is fejeztük. (Bár a jelölésekben csak az optimumértékeket különböztettük meg, ugyanazon $x^1, x^2, \ldots, x^n$ és $y^1, y^2, \ldots, y^n$ mellett a két feladatpárból adódó x^{n+1}-k és y^{n+1}-k különbözőek lesznek, illetve lehetnek.)

Az is igaz, hogy a szóbanforgó sorozatnak konvergenciájához elég, ha az (5)—(6) feladatpár helyett tetszőleges olyan

$$M \geq \bar{\varphi}^n(x, y^i), \quad i = 1,2,\ldots,n$$

$$x \in X \tag{9}$$

$$\min M$$

és

$$m \leq \bar{\bar{\varphi}}^n(x^i, y), \quad i = 1,2,\ldots,n$$

$$y \in Y \tag{10}$$

$$\max m$$

feladatpárt tekintünk, ahol $\bar{\varphi}^n(x, y) \leq \varphi(x, y) \leq \bar{\bar{\varphi}}^n(x, y)$ és konvergens $\{x^n\} \subseteq X$ és $\{y^n\} \subseteq Y$ sorozatokra $\lim \bar{\varphi}^n(x^n, y^n) = \lim \bar{\bar{\varphi}}^n(x^n, y^n) = \varphi(\lim x^n, \lim y^n)$.

Továbbá, ha ε_x és ε_y rögzített pozitív számok és $(\bar{M}^n, x^{n+1})$-t és $(\bar{\bar{m}}^n, y^{n+1})$-t úgy definiáljuk, mint (9), ill. (10) olyan lehetséges megoldásait, amelyekre egyrészt $\bar{M}^n$ (9) optimumértékénél legfeljebb ε_x-szel nagyobb, $\bar{\bar{m}}^n$ pedig (10) optimumértékénél legfeljebb ε_y-nal kisebb, akkor az eljárás lépéseinek véges számú végrehajtása után $\bar{\bar{m}}^n - \bar{M}^n \leq \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon$, ahold $\varepsilon > 0$ tetszőleges.

Minden eddig leírt eljárás párhuzamosan old meg két feladatot, bár egy konkrét megvalósításnál ezek időben eltolódva követik egymást. A módszerek eleve úgy is leírhatók, hogy egyszerre mindig csak egy feladatot oldunk meg, ez ad adatokat a másiknak és viszont. A (9)—(10) feladatpár jelöléseit használva az így adódó eljárás n-edik iterációs lépése:

Adott $x^0, x^1, \ldots, x^{n-1} \in X$ és $y^1, y^2, \ldots, y^{n-1} \in Y$ esetén megoldjuk az

$$m \leq \bar{\bar{\varphi}}^n(x^i, y), \quad i = 0, \ldots, n-1$$

$$y \in Y$$

$$\max m$$

feladatot, melynek megoldása (m^n, y^n), majd megoldjuk az

$$M \geq \bar{\varphi}^n(x, y^i), \quad i = 1, \ldots, n$$

$$x \in X$$

$$\min M$$

feladatot, melynek megoldása: (M^n, x^n).

Az így módosított eljárásra hasonló állítások igazak, mint azokra, amelyeket eddig tárgyaltunk. Még megemlíthető, hogy amennyiben az eredeti eljárások bármelyikében egyszer valamelyik x, illetve y érték két egymást követő lépésben megismétlődik, azaz $M^n \geq \varphi(x^{n+1}, y^{n+1})$ vagy $m^n \leq \varphi(x^{n+1}, y^{n+1})$, ezután mindig a két párhuzamos feladat közül váltakozva csak az egyik bővül, így automatikusan ehhez a módosított eljáráshoz jutunk.

Ha elejtjük az $m^* = M^*$ feltételt, úgy minden esetre $m^* \leq M^*$, és az első eljárást alkalmazva nyilván továbbra is igaz lesz, hogy $M^n \leq M^{n+1} \leq M^*$ és $m^n \geq m^{n+1} \geq m^*$. Az viszont általában nem teljesül, hogy $\lim M^n = M^*$ és $\lim m^n = m^*$.

Egy ilyen esetet mutat a következő példa:

Legyen $X = [0, a] \subset R^1$ és $Y = [0, a] \subset R^1$ és

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} b - \dfrac{b}{a}x - \dfrac{b-c}{a}y, & \text{ha } y \leq a - x \\[2ex] -(b-c) + \dfrac{b-c}{a}x + \dfrac{b}{a}y, & \text{ha } y > a - x, \end{cases}$$

ahol $a > 0$, $b > 0$, $0 < c < b$ (1. ábra).

Így a $\lambda = \dfrac{b}{2b-c}$ jelöléssel $m^* = c = \dfrac{2\lambda - 1}{\lambda} b$ és $M^* = \lambda b$, és valóban teljesül, hogy $m^* < M^*$.

Legyen $x^0 = a$ és haladjunk az utoljára leírt eljárás szerint. Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$y^n = \lambda(a - x^{n-1})$$

$$m^n = \lambda \frac{b(a - x^{n+1})}{a}$$

és

$$x^n = (1 - \lambda)(a - y^n)$$

$$M^n = c + \frac{(b-c)(1-\lambda)}{a}(a - y^n)$$

azaz az y^n-ek sorozata monoton csökken, az x^n-ek sorozata pedig x^1-től kezdve monoton nő. A limeszpontokat (x^∞, y^∞)-nel, illetve M^∞ és m^∞-nek jelölve

$$M^\infty = m^\infty = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda + 1}\, b = \varphi(x^\infty, y^\infty)$$

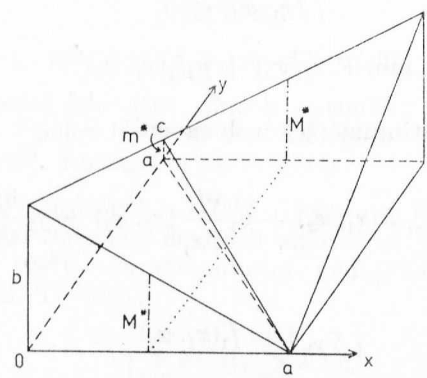
és

$$m^* < m^\infty = M^\infty < M_*$$

Az, hogy $m^\infty = M^\infty$ nem véletlen, ugyanis ez mindig teljesül, ha az eljárás ,,nem áll meg'', vagyis mindig keletkezik új x és y érték, és ezek sorozata konvergens. Tekintsük ugyanis az egyik feladatot:

$$m \leq \varphi(x^i, y), \qquad i = 1, \ldots, n-1$$
$$y \in Y$$
$$\max m$$

megoldása legyen (m^n, y^n). Így minden n-re teljesül, hogy $m^n \leq \varphi(x^{n-1}, y^n)$, amiből következik, hogy $m^\infty \leq \varphi(x^\infty, y^\infty)$.



1. ábra

Másrészt, ha a következő feladat által adott x^n érték segítségével definiált $m \leq \varphi(x^n, y)$ feltétellel kiegészítjük a feladatot, csak akkor kapunk az előzőtől különböző y^{n+1} értéket, ha $m^n > \varphi(x^n, y^n)$, amiből $m^\infty \geq \varphi(x^\infty, y^\infty)$ és így $m^\infty = \varphi(x^\infty, y^\infty)$. Hasonlóképp látható,hogy $M^\infty = \varphi(x^\infty, y^\infty)$.

3. Dekompozíciós eljárások

A korábbiak szerint az (1.1)—(1.6) feltételek teljesülése esetén (1) otpimumértéke egy folytonos konvex-konkáv függvény nyeregpontértékével egyezik meg. Mint már említettük, az (5) és (6) feladatokkal leírt 2.-beli eljárás alkalmazását lehetetlenné teszi, hogy, lévén a szóbanforgó függvény egy programozási feladat optimumértéke, általában nincs explicit formulánk az (5) és (6)-beli $\varphi(x, y^i)$ és $\varphi(x^i, y)$ függvényértékek felírására. A (10) és (11) feladatokkal leírt programozási feladatra történő áttérés értelme éppen abban van, hogy további feltételeket bevezetve az ott előforduló $\nabla_x \varphi(x^i, y^i)$ és $\nabla_y \varphi(x^i, y^i)$ kifejezésekre már megadhatók megfelelő formulák.

5. lemma. Az (1.1)–(1.6) feltételeket kiegészítendő, tegyük fel, hogy

(5.1) $F(x_1, x_2)$, $f_1(x_1, x_2)$ és $f_2(x_1, x_2)$ kétszer folytonosan differenciálhatók és x_2-ben szigorúan konvex függvények;
(5.2) minden $(x_1 y_1) \in X_1' \times Y_1'$ esetén, ahol $X_1 \times Y_1 \subset \text{int}\,(X_1' \times Y_1')$ esetén létezik a megfelelő (3) feladat optimális megoldása és ehhez a Kuhn–Tucker feltételeket kielégítő olyan y_2, amelyre szigorú komplementerítás igaz (azaz ha f_2 valamelyik komponensére az optimális megoldásnál egyenlőség teljesül, akkor y_2 ezen komponense pozitív);
(5.3) minden $(x_1, y_1) \in X_1' \times Y_1'$ esetén a megfelelő (3) feladat optimális megoldásánál a $\frac{\partial f_2}{\partial x_2}$ Jacobi-mátrix azon sorai, amelyek az egyenlőségre teljesülő feltételeknek felelnek meg lineárisan függetlenek.

Akkor $(x_1, y_1) \in X_1 \times Y_1$ esetén azon $\varphi(x_1, y_1)$ függvényre, melynek értéke az

$$f_2(x_1, x_2) \leq 0$$

$$\min F(x_1, x_2) + y_1 f_1(x_1, x_2)$$

programozási feladat optimumértékével egyenlő:

$$\nabla_{x_1} \varphi = \nabla_{x_1} F(x_1, x_2) + y_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) + y_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) \tag{11}$$

és

$$\nabla_{y_1} \varphi = f_1(x_1, x_2). \tag{12}$$

A (11) és (12) formulák jobboldalain álló kifejezések korábbi feltevéseink folytán folytonosak $X_1 \times Y_1$-n. Mielőtt a 2.-beli második eljárás alkalmazásaként adódó és (1)-t megoldó dekompozíciós eljárást megfogalmaznánk, egy egyszerű megjegyzést szeretnék tenni.

Nyilvánvaló, hogy a 2. részbeli eljárások érvényességén nem változtatunk, ha a (6) és (8) feladatokat egy $m \leq \varphi(x^0, y)$ feltétellel bővítjük, ahol x^0 az X tetszőleges eleme. Legyen az eljárás következő alkalmazásánál x^0 az (1.4)-beli x_1^0. Ismét nem romlik el semmi, ha ennél az alkalmazásnál az $m \leq \varphi(x^0, y)$ feltételt az $m \leq F(x_1^0, x_2^0) + y f_1(x_1^0, x_2^0)$ feltétellel helyettesítjük. Amit ezzel elérünk, hogy a (8)-nak most megfelelő feladatban az $y_1 \in Y_1$ feltétel helyettesíthető az $y_1 \geq 0$ feltétellel: az így adódó y_1-k egy korlátos halmaz elemei lesznek. (Lásd: [1]. Amit tettünk, tulajdonképpen formális: az [1]-beli tétel bizonyításánál ugyanarról van szó, mint [4]-ben, amelynek alapján a teljes nem-negatív ortáns egy kompakt konvex Y_1 részére szorítkozhattunk.)

Tekintsük az alábbi eljárást, amelynek n-edik iterációs lépése a következő: Ha $x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^n \in X_1$ és $y_1^1, y_1^2, \ldots, y_1^n \geq 0$ már ismertek, $x_2^1, x_2^2, \ldots, x_2^n$ és $y_2^1, y_2^2, \ldots, y_2^n$ pedig a megfelelő (3) feladatok optimális megoldásai és azokhoz tartozó multiplikátorok, oldjuk meg először az

$$M \geq F(x_1^i, x_2^i) + y_1^i f_1(x_1^i, x_2^i) + \left(\nabla_{x_1} F(x_1^i, x_2^i) + y_1^i \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1^i, x_2^i) + \right.$$

$$\left. + y_2^i \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1^i, x_2^i)\right)(x_1 - x_1^i) \qquad i = 1,2, \ldots, n$$

(13) $$x_1 \in X_1$$

$$\min M$$

(konvex) és az

$$m \geq F(x_1^i, x_2^i) + y_1 f_1(x_1^i, x_2^i), \qquad i = 0,1, \ldots, n$$

(14) $$y_1 \geq 0$$

$$\max m$$

(lineáris) programozási feladatokat. A feladatok optimális megoldásai legyenek (M^n, x_1^{n+1}), illetve (m^n, y_1^{n+1}), (14) duálisának optimális megoldása pedig $\lambda^{0n}, \lambda^{1n}, \ldots, \lambda^{nn}$.

Ezután x_1^{n+1} és y_1^{n+1} birtokában oldjuk meg az

(15) $$f_2(x_1^{n+1}, x_2) \leq 0$$

$$\min F(x_1^{n+1}, x_2) + y_1^{n+1} f_1(x_1^{n+1}, x_2)$$

(konvex) programozási feladatot. Ennek optimális megoldása x_2^{n+1}, a hozzá tartozó — Kuhn—Tucker feltételeket kielégítő — multiplikátor rendszer y_2^{n+1}, amivel az n-edik iterációs lépés végetér.

Tétel: Tegyük fel, teljesülnek az (1.1)—(1.6) és (5.1)—(5.3) feltételek. Akkor a (13), (14) és (15) feladatokkal definiált eljárásban az $\{M^n\}$ sorozat monoton nem-csökkenve, az $\{m^n\}$ sorozat monoton nem-növekedve (1) φ^* optimumértékéhez konvergál. Továbbá

$$\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda^{in} x_1^i, \sum_{i=0}^{n} \lambda^{in} x_2^i\right)$$

(1)-nek olyan lehetséges megoldása, amelyre

$$F\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda^{in} x_1^i, \sum_{i=0}^{n} \lambda^{in} x_2^i\right) \leq m^n,$$

tehát

$$\lim F\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda^{in} x_1^i, \sum_{i=0}^{n} \lambda^{in} x_2^i\right) = \varphi^*.$$

A (6.1)—(6.3) feltevések lényegesen gyengíthetők abban a továbbiakban vizsgált esetben, ha

$$F(x_1, x_2) = F_1(x_1) + F_2(x_2)$$

$$f_1(x_1, x_2) = f_{11}(x_1) + f_{12}(x_2)$$

és

$$f_2(x_1, x_2) = f_{21}(x_1) + f_{22}(x_2),$$

ahol az (5.1)—(5.3) feltevéseket a következőkkel helyettesítjük

(5.1') $F_1(x_1)$, $f_{11}(x_1)$ és $f_{21}(x_1)$ folytonosan differenciálható konvex függvények, $F_2(x_2)$, $f_{12}(x)$, $f_{22}(x_2)$ pedig folytonos konvex függvények

(5.2') minden $\bar{x}_1 \in X_1$ és $\bar{y}_1 \geq 0$ esetén az

$$f_{22}(x_2) \leq -f_{21}(\bar{x}_1)$$

$$\min F_2(x_2) + \bar{y}_1 f_{12}(x_2) \tag{16}$$

programozási feladatnak van optimális megoldása és teljesül a Slater-féle regularitási feltétel, azaz van olyan $x_2^0(\bar{x}_1)$, amelyre

$$f_{22}[x_2^0(\bar{x}_1)] < -f_{21}(\bar{x}_1)$$

(amiből következik, hogy léteznek a Kuhn—Tucker nyeregpont feltételeket kielégítő multiplikátorok).

6. lemma. Az (5.1') és (5.2') feltevések mellett

$$\varphi(x_1^i, y_1) \leq \varphi(x_1^i, y_1^i) + (y_1 - y_1^i) f_1(x_1^i, x_2^i) \tag{17}$$

és

$$\varphi(x_1, y_1^i) \geq \varphi(x_1^i, y_1^i) + \left[\nabla_{x_1} F_1(x_1^i) + y_1^i \frac{\partial f_{11}}{\partial x_1}(x_1^i) + y_2^i \frac{\partial f_{21}}{\partial x_1}(x_1^i)\right](x_1 - x_1^i), \tag{18}$$

ahol x_2^i és y_2^i az x_1^i és y_1^i-hez tartozó (16) feladat optimális megoldása és a hozzá tartozó multiplikátorok.

A 2.-beli második eljárás alkalmazásához elegendő, ha (17) és (18) jobboldalán megjelenő

$$f_1(x_1^i, x_2^i) = f_{11}(x_1^i) + f_{21}(x_2^i)$$

és

$$\nabla_{x_1} F_1(x_1^i) + y_1^i \frac{\partial f_{11}}{\partial x_1}(x_1^i) + y_2^i \frac{\partial f_{21}}{\partial x_1}(x_1^i)$$

kifejezések korlátosak. Eddigi feltevéseink ezt y_2^i kivételével nyilvánvalóan biztosítják valamennyi fellépő tagra. (5.2') alapján azonban — (4)-hez hasonlóan —

$$\|y_2^i\| \leq c \frac{F_2[x_2^0(x_1^i)] + y_1^i f_{21}[x_2^0(x_1^i)] - F_2(x_2^i) - y_1^i f_{21}(x_2^i)}{\|f_{22}[x_2^0(x_1^i)]\|}$$

és itt a jobboldal nyilván korlátos $(x_1^i, y_1^i) \in X_1 \times Y_1$ esetén.

Így a szeparábilis esetre is megfogalmazható a megfelelő dekompozíciós eljárás és az erre vonatkozó korábbinak megfelelő tétel.

Egyébként erre az esetre [3] is levezet egy dekompozíciós eljárást. Ez csak annyiban különbözik az általunk javasolttól, hogy abban az x_1^{n+1} meghatározására szolgáló feladatban

$$M \geq F_2(x_2^i) + y_1^i f_{12}(x_2^i) + y_2^i f_{22}(x_2^i) + F_1(x_1) + y_1^i f_{11}(x_1) + y_2^i f_{21}(x_1)$$

alakú feltételek szerepelnek. A jobboldalon álló kifejezés ugyancsak $\varphi(x_1, y_1^i)$ egy — az általunk használtnál egyébként erősebb — alsó becslése.

Ily módon $\varphi(x_1, y_1^i)$ ezen közelítésével dolgozva a [3]-beli eljárás is beilleszthető az általunk tárgyalt keretekbe, megfogalmazhatók azon feltételek, amelyek konvergenciáját biztosítják. Ez a megjegyzés azért nem teljesen érdektelen, mert [3]-ban az eljárás származtatásakor a mi tárgyalásmódunk megkívánta feltételeknél lényegesen erősebbek szerepelnek és [3] ezen feltételek mellett sem bizonyítja az eljárás konvergenciáját.

(Beérkezett: 1976. január 12.)

IRODALOM

1. Dantzig, G. B.: *Linear programming and extensions.* 476–477. o., Princeton University Press, 1963.
2. Fiacco, A. V.: *Sensitivity analysis for nonlinear programming using penalty methods.* Report paper, The George Washington University, 1974.
3. Kronsjö, T. O. M.: *Decomposition of nonlinear convex separable economic system in primal and dual direction.* R. Fletcher (ed.): Optimization, London, 1969. Academic Press. 85–97. o.
4. Oettli, W.: *Eine allgemeine Symmetrische Formulierung des Dekompositionsprinzips für duale Paare nichtlineare Minmax- und Maxmin Probleme.* Würzburg, 1974. Zeitschrift für Operations Research 18/1–18, Physica-Verlag.
5. Stahl, J.: *A kétszeresen összekapcsolt lineáris programozási feladatról.* Szigma, VII/25–40. o., 1974.
6. Somos, E.–Stahl, J.: *Dekompozíciós eljárások nemlineáris programozási feladatokról.* INFELOR, 1975. (Sokszorosítva)

DECOMPOSITION METHODS FOR NON-LINEAR PROGRAMMING PROBLEMS

The first part of the paper deals with methods producing the saddle point value as the limit of monotonically increasing and decreasing sequences derived from the iterated solution of problems (5) and (6). The method can be modified in such a way that the value of the function φ and of its gradients is to be calculated at one point only in each iteration.

Under certain conditions the optimum value of the programming problem:

$$f_1(x_1, x_1) \leq 0$$

$$f_2(x_1, x_2) \leq 0$$

$$x_1 \in X_1$$

$$\min F(x_1, x_2)$$

coincides with the saddle point value of function

$$\varphi(x_1, x_2) = \min_{x_2} \{F(x_1, x_2) + y_1 f_1(x_1, x_2): f_2(x_1, x_2) \leq 0\}$$

Though generally this function cannot be expressed explicitly, its values or its gradients with respect to x_1 and y_1 may be determined in certain cases. Thus, applying the modified procedure described in the first part we obtain a decomposition method, which is discussed at length in the second part of the article.

ДЕКОМПОЗИЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ В ОБЛАСТИ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Первая часть статьи занимается определением значения функции в седловой точке по максимальной и минимальной величине.

$$\max_{y \in Y} \min_{x \in X} \varphi(x, y)$$

В статье рассматривается такой способ, который позволяет определить значение в седловой точке в качестве предельной величины монотонно повышающейся и понижающейся серии путем многократного решения заданий (5) и (6). Этот метод может быть изменен таким образом, что в ходе каждой итерации функцию φ и значение её градиентов нужно определить только в одной точке.

При определенных условиях оптимальное значение задачи программирования

$$f_1(x_1, x_2) \leq 0$$

$$f_2(x_1, x_2) \leq 0$$

$$x_1 \in X_1$$

$$\min F(x_1, x_2)$$

совпадает со значением функции

$$\varphi(x_1, x_2) = \min_{x_2} \{F(x_1, x_2) + y_1 f_1(x_1, x_2) : f_2(x_1, x_2) \leq 0\}$$

в её седловой точке. Хотя эту функцию нельзя записать в явной форме, её значеня, то есть градиенты по x_1 и в определенных случаях могут быть определены. Таким образом применяя измененный метод, приведенный в первой части, мы получаем декомпозиционный метод, описанием которого занимается вторая часть данной статьи.

Forgó Ferenc

Dualitás és dekompozició egészértékű programozási feladatok esetében

Bevezetés

A lineáris programozás elmélete és a megoldó algoritmusok többsége valamilyen módon támaszkodik a feladat paramétereiből alkotott két programozási feladat, a primál és duál feladat közötti kapcsolatra. A duális változók árként („árnyékárként") való interpretációja és a közgazdasági elemzésekben való felhasználása már régóta vita tárgyát képezi. Anélkül, hogy ebben a vitában állást foglalnánk annyit feltétlenül megállapíthatunk, hogy a duális feladat, az árnyékárak hasznos információkat nyújtanak a probléma szerkezetéről és a közgazdasági elemzés hasznos eszközei.

A lineáris programozás dualitás elméletét többféle irányban is sikeresen általánosították [1] (konvex programozási feladatokra, végtelen dimenziós te rekre stb.). *Gomory* és *Baumol* [2] voltak az elsők, akik egészértékű lineáris programozási feladatok esetén is értelmeztek árnyékárakat és ki is számították őket. *Alcaly* és *Klevorick* [3] tökéletesítették a számítási módszert. Ezeknek a vizsgálatoknak a legfőbb korlátja, hogy a kapott árnyékárak függnek attól, hogy az eredeti egészértékű lineáris programozási feladatot milyen algoritmussal, sőt ezen belül is milyen lépéssorrenddel oldottuk meg. A legutóbbi időben *Bell* és *Shapiro* [13] egy konstruktív módszert ad meg, mely egy olyan duális feladatot generál, mely az eredeti egészértékű feladat optimális megoldása környezetében a lehetséges egész pontok konvex burkolóját közelíti meg. Algoritmusuk egyidejűleg oldja meg a primál és duál feladatot. *Balas* [4], [5] vegyes egészértékű feladatokkal foglalkozik. Az ő duális feladatai semmitmondóak a tiszta egészértékű esetben.

Ebben a cikkben egy, az eddigiektől különböző duális feladatot és árnyékárakat konstruálunk, melyek az alábbi legfontosabb tulajdonságokkal rendelkeznek:

1. Az árnyékárak közgazdaságilag interpretálhatók.
2. Megadható olyan algoritmus, mely a primál és duál feladatot egyidejűleg oldja meg.
3. A duális változók segítségével lehetővé válik speciális szerkezetű egészértékű programozási feladatok dekompozíciója. Két dekompozíciós módszert is adunk, melyek amellett, hogy számítási megtakarításokat tesznek lehetővé, az indirekt irányítás egy fajtájának modelljéül is szolgálhatnak.
4. Ez a dualítás igen egyszerűen terjeszthető ki bizonyos nem-lineáris egészértékű programozási feladatokra is.

A dolgozatban közölt algoritmusok semmiképpen sem tekinthetők kész, kiforrott és számítástechnikailag igazolt eljárásoknak. Az algoritmusok egy részének számítástechnikai kipróbálása jelenleg folyamatban van. A dolgozatban közölt eredmények inkább tekinthetők egy kutatási irány kiindulópontjának, mint kész, befejezett munkának.

1. Dualitás egészértékű programozási feladatok esetében

Az alábbi tiszta egészértékű lineáris programozási feladattal foglalkozunk:

$$\text{P:} \qquad \begin{aligned} z &= cx \to \max \\ Ax &= b \\ 0 \leq x \leq d, &\quad A, b, d, c \text{ egészek} \\ x &= \text{egész}, \end{aligned} \tag{1}$$

ahol A egy m · n típusú mátrix, x,c,b,d pedig megfelelő dimenziójú vektorok˙ Az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy $b \geq 0$. Feltesszük azt is' hogy (1) lehetséges megoldásainak halmaza

$$L = \{x \mid A\,x = b,\ 0 \leq x \leq d,\ x = \text{egész}\}$$

nem üres. (Ez a feltétel a későbbiekben sok helyen feloldható, az egyszerű tárgyalhatóság miatt alkalmaztuk.) Mivel L korlátos, ezért (1) optimális megoldásainak halmaza, L_0 nem üres. Jelöljük z_0-al (1) optimális célfüggvény-értékét. Definiáljuk az L_u halmazt a következőképpen

$$L_u = \{x \mid uAx = ub,\ 0 \leq x \leq d,\ x = \text{egész}\},$$

ahol u egy nem-negatív egész vektor. (1) feladat feltételeit az u vektorral súlyozva egy feltételbe „sűrítettük" ezáltal. Nyilvánvaló, hogy ezért $L \subset L_u$. Legyen

$$U = \{u \mid u \geq 0,\ \max_{x \in L_u} cx = z_0\}$$

és

$$\overline{U} = \{u \mid u \geq 0,\ cx_0 = \max\{cx \mid x \in L_u\} \text{ és } x_0 \in L_u \Rightarrow x_0 \in L_0\}.$$

U mindazokat az $u \geq 0$ súlyokat tartalmazza, melyekkel egy feltételbe sűrítve (1) egyenlőségeit a cx célfüggvény-érték maximuma változatlan marad. $\overline{U}$ pedig azokat a nem-negatív súlyokat tartalmazza, melyekkel (1) feltételeit sűrítve az optimális megoldások halmaza változatlan marad. Világos, hogy $\overline{U} \subset U$, és ha valamely $u \in U$ esetén a

$$\begin{aligned} cx &\to \max \\ x &\in L_u \end{aligned} \tag{2}$$

feladatnak csak egy optimális megoldása van, akkor $\overline{U} = U$.

Az alábbi egészértékű programozási feladatot (1) duálisának fogjuk nevezni

$$D: \qquad \begin{aligned} ub &\to \min \\ u &\in U \end{aligned} \tag{3}$$

a következő feladatot pedig (1) erős duálisának

$$\overline{D}: \qquad \begin{aligned} ub &\to \min \\ u &\in \overline{U} \end{aligned}$$

A következő tétel $\overline{U}$ és ezáltal U nem ürességét biztosítja.

1. tétel. (*Bradley* [6]). Van olyan $\bar{u} > 0$, hogy $L_{\bar{u}} = L$.

Következmény. $\bar{u} \in \bar{U}$, mivel $\max_{x \in L_{\bar{u}}} cx = z_0$ és $L_{\bar{u}} = L$.

Mivel D és $\bar{D}$ célfüggvénye alulról korlátos (egy alsó korlát a 0), mind D-nek mind pedig $\bar{D}$-nek van optimális megoldása.

Fel szeretnénk hívni a figyelmet arra, hogy mind D-nek, mind pedig $\bar{D}$-nek a definíciója független attól, hogy milyen módszerrel oldottuk meg a primál P feladatot.

Minden $u \in \bar{U}$ vektort interpretálhatunk árrendszerként. Tegyük fel, hogy P egy gazdasági egység tevékenységét modellezi. Az $Ax = b$ feltételek a tevékenység ,,naturális'' korlátozottságát fejezik ki. Az u árrendszer segítségével a tevékenységet a (2) feladatban csak az $uAx = ub$,,pénzügyi'' feltétel, valamint az alsó és felső korlátok korlátozzák. Az u árrendszer biztosítja azt, hogy ha a pénzügyi feltételt kielégítjük, akkor a naturális feltételek automatikusan teljesülnek, amennyiben az x tevékenységvektor az optimális értéket veszi fel. Ezáltal a gazdasági egységet optimális működésre lehet ösztönözni egy árrendszerrel és azáltal, hogy a pénzügyi egyensúly betartását megköveteljük.

Ha $u \in U$, akkor csak azt állíthatjuk, hogy az x tevékenységvektornak van olyan optimális értéke, mely mellett a pénzügyi feltételek kielégítéséből a naturális feltételek kielégítése következik.

A fenti feltételeket kielégítő árrendszerekből természetesnek tűnik olyan $u \in \bar{U}$ (vagy $u \in U$) árakat választani, melyek az erőforrások összértékét, ub-t minimalizálják. Ez pedig pontosan az, amit D és $\bar{D}$ feladatban csináltunk.

A fenti interpretáció különösen jól illik olyan feladatokra, ahol P egy, a beruházási alternatívák közül válogató program. A beruházások területén pedig különösen hasznos egy olyan árrendszer, mely a pénzügyi és naturális feltételeket koordinálja.

A most bevezetett dualítás egy fontos tulajdonsága, hogy nem közvetlen általánosítása a lineáris programozás dualításelméletének. Ennek oka az hogy az 1. *tétel* nem igaz lineáris programozási feladatok esetén. Ennek ellenére, a lineáris programozás dualítás tételei közül egy, amely a marginális közgazdaságtanban alapvető, továbbra is érvényes marad.

Tegyük fel, hogy (1) i-ik feltétele az alábbi alakú

$$a_i'x + x_j = b_i, \qquad (a_i \geq 0) \tag{4}$$

ahol x_j egy egész kiegészítő változó, $c_j = 0$ és $a_{ij} = 0$. Ez azt jelenti, hogy (4) tulajdonképpen egyenlőtlenség:

$$a_i'x \leq b_i$$

Az i-ik erőforrást, melynek a korlátozottságát ez a feltétel kifejezi, szabad jószágnak nevezzük, ha (1) célfüggvény-értéke nem növelhető b_i növelésével.

2. tétel. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az i-ik erőforrás szabad jószág legyen az, hogy létezik a D (vagy $\bar{D}$) feladatnak olyan $\bar{u}$ optimális megoldása, melynek az i-ik komponense $\bar{u}_i = 0$.

Bizonyítás. Tegyük először fel, hogy az i-ik jószág szabad, vagyis a

$$
\begin{gathered}
cx \to \max \\
A'x = b' \\
0 \leq x \leq d \qquad (5) \\
x = \text{egész}
\end{gathered}
$$

feladatnak ugyanaz az optimális célfüggvény-értéke, mint (1)-nek. Itt az $Ax = b$ feltételek közül az i-iket kihagytuk. Így ha $\bar{x}$ (1) optimális megoldása, akkor (5)-nek is optimális megoldása. (5) duálisának egy $\bar{u}$ megoldását az i-ik helyen egy 0-val kiegészítve D (vagy $\bar{D}$) egy olyan megoldását kapjuk, mely a kívánt tulajdonságú.

Ha viszont $\bar{u}$ a D-nek (vagy a $\bar{D}$-nek) egy megoldása és $\bar{u}_i = 0$, akkor (5)-nek ugyanaz az optimális célfüggvény-értéke, mint (1)-nek. Ez viszont éppen azt jelenti, hogy az i-ik jószág szabad.

Tegyük most fel, hogy $A \geq 0$. Legyen $\bar{u}$ D-nek (vagy a $\bar{D}$-nek) egy optimális megoldása. Egy tetszőleges $u \in U$ (vagy $u \in \bar{U}$) esetén a (2) feladat megoldása, mely tulajdonképpen egy hátizsák feladat:

$$
\begin{gathered}
cx \to \max \\
uAx = ub \qquad (6) \\
0 \leq x \leq d \\
x = \text{egész,}
\end{gathered}
$$

annál nehezebb, ha a leginkább használatos dinamikus programozást (lásd [7]) alkalmazzuk, minél nagyobb az ub jobboldal. Így a D és $\bar{D}$ feladatok megoldásaként kapott $\bar{u}$ a feltételek számítástechnikai szempontból vett legjobb súlyozása. *Bradley* [6] az (1) feladat megoldására a (6) hátizsák feladatra való visszavezetést javasolja olyan $\bar{u}$ szorzókkal, melyekre $L_{\bar{u}} = L$. Ezek a szorzók általában igen nagyok és jelenleg tisztázatlan még, hogy a feltételeknek ezekkel az $\bar{u}$ „*Bradley*-féle" szorzókkal egy feltételbe való sűrítése ad-e számítástechnikai előnyöket. Az optimális megoldás megkeresése szempontjából viszont felesleges, hogy $L_{\bar{u}} = L$ legyen. Ez az oka annak, hogy az általunk definiált duális változók nagyságrendekkel kisebbek lehetnek a *Bradley*-féle szorzóknál. Ezt látszik alátámasztani az a csekély számítástechnikai tapasztalat, ami eddig rendelkezésünkre áll. Természetesen az is lehet, hogy a duális változók még így is igen nagyok és a (6) hátizsák feladat megoldása nehezebb, mint az eredeti problémáé. Ezt a kérdést, úgy tűnik, hogy csak tapasztalati úton lehet tisztázni.

A következőkben felvázolunk egy algoritmust, mely egyidejűleg megoldja a P és a D (vagy $\bar{D}$) feladatot. Az algoritmus iterációkból áll. Minden egyes iterációban meghatározunk egy $u \geq 0$ vektort és megoldjuk a (6) hátizsák feladatot. Ha (6) optimális megoldása lehetséges megoldása (1)-nek, akkor egyúttal (1) optimális megoldása is.

Indulásképpen oldjuk meg az alábbi (triviális) feladatot:

$$
\begin{gathered}
ub \to \min \\
u \geq 0,\ u = \text{egész.} \qquad (7)
\end{gathered}
$$

Legyen u_0 egy optimális megoldás. (Általában $u_0 = 0$.) Oldjuk meg az alábbi hátizsák feladatot:

$$cx \to \max$$

$$u_0 Ax = u_0 b \tag{8}$$

$$0 \leq x \leq d$$

$$x = \text{egész}.$$

Legyen x_0 (8) egy optimális megoldása. Ha $Ax_0 = b$, akkor x_0 nyilvánvalóan (1) egy optimális megoldása, u_0 pedig D optimális megoldása. Ha $Ax_0 \neq b$, akkor csatoljuk a következő feltételt (7) feltételrendszeréhez:

$$uAx_0 \neq ub \tag{9}$$

Ezáltal u_0-t kizártuk (7) lehetséges tartományából és ezért a következő lépésben (7) optimális megoldása, u_1 különböző lesz u_0-tól.

Általában a k-ik lépésben először megoldjuk az alábbi programozási feladatot:

$$ub \to \min$$

$$u \geq 0,\ u = \text{egész} \tag{10}$$

$$uAx_r \neq ub, \quad (r = 0, 1, \ldots, k-1).$$

Legyen u_k a (10)-nek egy optimális megoldása és oldjuk meg az alábbi hátizsák feladatot:

$$cx \to \max$$

$$u_k Ax = u_k b \tag{11}$$

$$0 \leq x \leq d,\ x = \text{egész}.$$

Ha (11) egy x_k optimális megoldása (1) lehetséges megoldása, akkor x_k P-nek, u_k pedig D-nek optimális megoldása. Ez azért igaz, mivel (10) lehetséges tartományából csak olyan u-kat zártunk ki, melyekre $u \notin U$. Mivel (11) lehetséges megoldásainak száma véges és $x_k \neq x_r$, $(r = 0,1, \ldots, k-1)$, az algoritmus véges számú lépésben konvergál.

Az algoritmus leírásánál nem tértünk ki azokra a problémákra, melyek a (10) típusú feladatok megoldása során keletkeznek elsősorban a szokatlan

$$uAx_r \neq ub \tag{12}$$

feltételek miatt. Mivel minden változó és konstans egész, ezért (12) azt jelenti, hogy az alábbi két egyenlőtlenség közül pontosan az egyiknek kell teljesülni:

$$uAx_r \leq ub - 1 \tag{13}$$

$$uAx_r \geq ub + 1 \tag{14}$$

Természetesnek tűnik ezáltal, hogy (10) feladatot a korlátozás és szétválasztás módszerével oldjuk meg. Mindannyiszor, amikor (10) feladathoz egy (12) típusú feltételt csatolunk, egy szétválasztást hajtunk végre (13) és (14)-nek megfelelően, a korlátozást és szétválasztást reprezentáló fa azon csúcspontjából, melyhez a minimális ub érték tartozik. A fa minden egyes csúcspontjához hozzárendelünk egy (13) vagy (14) típusú feltételt, egy nem-negatív, egész u vektort, mely az ub célfüggvényt minimalizálja a kérdéses csúcsponthoz és elődjeihez tartozó feltételek mellett, és egy B korlátot, mely ennek a programnak az optimális célfüggvény-értéke. (Ez definíciószerűen ∞, ha ennek a programnak nincs lehetséges megoldása.) Ezen kívül bizonyos csúcspontokhoz — azokhoz, amelyekből a szétválasztás megtörténik — a (11) típusú hátizsák feladat optimális megoldását is hozzárendeljük.

Az előzőekből nyilvánvaló, hogy ez a korlátozás és szétválasztás módszerén alapuló algoritmus is véges, feltéve, hogy az előforduló, egészértékű programozási feladatokat véges számú lépésben konvergáló algoritmusokkal oldjuk meg.

A módszer számítástechnikai realizációjával kapcsolatban két megjegyzést szeretnénk tenni.

1. Ha csupán a P primál feladat megoldására vagyunk kiváncsiak és az $u \in U$ vektorra csak azért van szükségünk, hogy P megoldását megkönnyítsük, akkor természetesen a számításokat kezdhetjük tetszőleges nem-negatív egész $\tilde{u}$-val. ($\tilde{u}$ lehet például D vagy $\bar{D}$ optimális megoldásának valamilyen becslése.) Ezt a becslést például (1) folytonos duál optimális megoldásából nyerhetjük alkalmas kerekítéssel vagy egyéb heurisztikus módszerrel. Ekkor viszont a (10) feladat feltételeihez az

$$ub \geq \tilde{u}b$$

egyenlőtlenséget is csatolnunk kell. Nyilván ahhoz, hogy (11) jól kezelhető legyen, $\tilde{u}b$-nek nem szabad nagynak lenni.

2. Ha csak a primál feladat megoldása érdekel bennünket, akkor megelégedhetünk a (10) feladat egy jó lehetséges megoldásával, ami általában sokkal egyszerűbben határozható meg, mint az optimális. Itt is egy jó lehetséges megoldáshoz kiindulópontul szolgálhatnak a korlátozás és szétválasztáshoz tartozó fa csúcspontjaihoz rendelt egészértékű programozási feladatok folytonos változatainak megoldásai (ezek lineáris programozási feladatok).

A primál és duál feladat egyidejű megoldására szolgáló fenti algoritmus illusztrációjaként oldjuk meg az alábbi feladatot:

$$\begin{aligned} z = 2x_1 + x_2 \quad - x_4 \quad + 3x_6 &\to \max \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + 4x_6 &= 4 \\ 3x_1 \quad + 2x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &= 3 \\ x_j \in \{0, 1\}, \ (j = 1, \ldots, 6) & \end{aligned} \tag{15}$$

A megoldás menete legjobban a korlátozás és szétválasztáshoz tartozó fán követhető. Az u vektorokat meghatározó programok célfüggvénye mindig

$$4u_1 + 3u_2 \to \min.$$

A feltételeket, az optimális megoldásokat, a korlátokat, és ahol kiszámítottuk a (11) hátizsák feladat megoldásait mind feltüntettük a fa csúcspontjaiban.

Nincs feltétel
Optimális u megoldás: $\bar{u}_1 = 0$, $\bar{u}_2 = 0$. Korlát: $B = 0$
Optimális x megoldás: $\bar{x} = (1,1,0,0,0,1)$

$3u_1 + u_2 \leq -1$ Nincs lehetséges u, $B = \infty$	$3u_1 + u_2 \geq 1$ $\bar{u}_1 = 0$, $\bar{u}_2 = 1$, $B = 3$ $x = (0,1,1,0,0,1)$
$u_1 \leq -1$ Nincs lehetséges u, $B = \infty$	$u_1 \geq 1$ $\bar{u}_1 = 1$, $\bar{u}_2 = 0$, $B = 4$ $\bar{x} = (0,0,0,0,0,1)$
$u_2 \leq -1$ Nincs lehetséges u, $B = \infty$	$u_2 \geq 1$ $\bar{u}_1 = 1$, $\bar{u}_2 = 1$, $B = 7$ $\bar{x} = (0,1,0,0,0,1)$
$u_1 - u_2 \leq -1$ $\bar{u}_1 = 1$, $\bar{u}_2 = 2$, $B = 10$ $\bar{x} = (0,0,0,0,1,1)$	$u_1 - u_2 \geq 1$ $\bar{u}_1 = 2$, $\bar{u}_2 = 1$, $B = 11$ $\bar{x} = (0,1,1,1,0,0)$ *Optimális megoldás*
$-2u_1 + u_2 \geq 1$ $\bar{u}_1 = 1$, $\bar{u}_2 = 3$, $B = 13$	$2u_1 - u_2 \leq 1$ $\bar{u}_1 = 2$, $\bar{u}_2 = 3$, $B = 17$

Láthatjuk, hogy a primál optimális megoldás $x_0 = (0,1,1,1,0,0)$ az optimális célfüggvény-érték $z_0 = 0$, a duális feladat optimális megoldása $u_0 = (2,1)$ a hozzátartozó hátizsákprobléma pedig:

$$2x_1 + x_2 \qquad - x_4 \qquad + 3x_6 \to \max$$

$$5x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 5x_5 + 8x_6 = 11$$

$$x_j \in \{0,1\}, \quad (j = 1, \dots, 6)$$

Az előzőekben tárgyalt tételek és módszerek könnyen általánosíthatók bizonyos nem-lineáris egészértékű feladatokra. Legyen P_N a következő nem-lineáris programozási feladat:

$$P_N: \qquad f(x) \to \max$$

$$g(x) = b \tag{16}$$

$$0 \le x \le d, \ x = \text{egész},$$

ahol $f(x)$ és $g(x)$ egészértékű minden egész x-re. Ekkor az L, L_u, U, $\overline{U}$ halmazokat és a D, $\overline{D}$ duál feladatokat a lineáris esettel analóg módon lehet definiálni. Az 1. tétel továbbra is érvényben marad (lásd *Bradley* [6]). Ugyanígy a 2. tétel is. A primál és duál feladatot egyidejűleg megoldó algoritmust is ugyanúgy lehet a (16) feladatra is alkalmazni. Természetesen, míg a (10) feladat

$$ub \to \min$$

$$u \ge O, \ u = \text{egész} \tag{17}$$

$$ug(x_r) \ne ub, \quad (r = 0, \ldots, k-1)$$

továbbra is lineáris marad, addig a (11) hátizsák feladat

$$f(x) \to \max$$

$$u_k\, g(x) = u_k b$$

$$0 \le x \le d, \ x = \text{egész}$$

nem-lineáris és általában csak akkor oldható meg hatékonyan, ha az f és g függvények szeparábilisak, vagyis

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j)$$

$$g(x) = \sum_{j=1}^{n} g_j(x_j).$$

Ebben az esetben a dinamikus programozás módszere csaknem olyan hatékony, mint a lineáris esetben.

2. Egészértékű programozási feladatok dekompozíciója

Speciális struktúrájú lineáris programozási feladatok dekompozíciójával csaknem húsz éve foglalkoznak matematikusok, számítástechnikai szakemberek és közgazdászok. A dekompozíció megkönnyítheti a feladat megoldását, ugyanakkor modelljéül is szolgálhat egy központilag tervezett, de az alsóbb szinteken decentralizált gazdaságban végbemenő bizonyos döntési folyamatoknak is (lásd [8], [9], [11]). A problémát leggyakrabban az alábbi formában fogalmazzák meg:

$$L: \quad c_0 x_0 + c_1 x_1 + \ldots + c_r x_r \to \max$$

$$x_0, x_1, \ldots, x_r \geq 0$$

$$A_0 x_0 + A_1 x_1 + \ldots + A_r x_r = b_0 \tag{18}$$

$$\begin{aligned} B_1 x_1 \qquad &= b_1 \\ \ddots \qquad & \\ B_r x_r &= b_r. \end{aligned} \tag{19}$$

(18) az ún. „központi" feltételeket, (19) pedig a „szektor" feltételeket jelöli. A legtöbb dekompozíciós algoritmus egy „ár — termelés" mechanizmussal dolgozik. Minden egyes iterációban a szektorok elkészítenek egy termelési tervet és ennek, valamint korábbi információknak a segítségével a központ meghatározza a központi erőforrások egy árrendszerét. A szektorok ezeken az árakon kapják a számukra szükséges központi erőforrásokat és módosítják termelési tervüket. (Részletesen lásd [8], [10], [11]-ben.) Ezt a mechanizmust lehet nem-lineáris konvex programozási feladatokra általánosítani [11], de nem-konvex és egészértékű problémák esetében eredeti formájában nem működik.

Az első részben bevezetett duális változókra támaszkodva két dekompozíciós algoritmust adunk meg speciális struktúrájú egészértékű programozási feladatok megoldására. Ezek természetesen alapvetően különböznek a lineáris programozásnál használt dekompozíciós eljárásoktól, de közgazdaságilag ugyancsak interpretálhatók és az eredeti feladat könnyebb megoldását elősegíthetik.

Természetesen itt is csak lehetőségről van szó, az algoritmusokban felhasznált duális változók nagyságrendje itt is kritikus szerepet játszik. Túl nagy duális változók azt jelenthetik, hogy az ismertetendő algoritmusok a gyakorlatban nem működnek.

Mostantól kezdve tegyük fel, hogy L valamennyi változója egész és korlátos, vagyis az

$$x_s = \text{egész}$$

$$0 \leq x_s \leq d_s, \quad (s = 0,1, \ldots, r)$$

feltételeket csatoljuk (18) és (19)-hez. Azt is feltesszük, hogy L-nek van lehetséges megoldása.

I. Algoritmus

Indulásképpen minden szektor megoldja a saját programját és annak duálisát:

$$c_s x_s \to \max$$

$$B_s x_s = b_s, \quad (s = 1, \ldots, r)$$

$$0 \leq x_s \leq d_s, \; x_s = \text{egész}.$$

Erre a célra lehet használni az 1. részben leírt algoritmust. Legyen egy primál és duál optimális megoldás $\bar{x}_s^0$ és u_s^0, $(s = 1, \ldots, r)$.

A szektorok az u_s^0 súlyokkal nyert ,,pénzügyi'' feltételüket elküldik a központnak, amely most az alábbi központi programot oldja meg:

$$
\begin{aligned}
c_0 x_0 + c_1 x_1 + \ldots + c_r x_r &\to \max \\
A_0 x_0 + A_1 x_1 + \ldots + A_r x_r &= b_0 \\
u_1^0 B_1 x_1 \qquad\qquad &= u_1^0 b_1 \\
\ddots \qquad &\\
u_r^0 B_r x_r &= u_r^0 b_r \\
O \leq x_s \leq d_s,\ x_s = \text{egész}, \quad &(s = 1, \ldots, r).
\end{aligned}
\tag{20}
$$

A (20) feladatot bármilyen módszerrel megoldhatjuk, többek között az 1. rész módszerével is. Ha $x_0^0, x_1^0, \ldots, x_r^0$ a (20) optimális megoldása és mindegyik szektor-egyenletrendszert kielégíti, akkor L-nek is optimális megoldása. Ha x_s^0 nem lehetséges megoldása a s-ik szektorfeladatnak, akkor az

$$u_s B_s x_s^0 \neq u_s b_s \tag{21}$$

feltételt csatoljuk az s-ik szektor (10) típusú feladatához és új u_s^1 árnyékárakat határozunk meg. Ezek segítségével új pénzügyi feltételt küldünk a szektornak, amely új (20) típusú feladatot old meg stb.

Az általános lépés ugyanúgy megy. A szektorfeladatok duálisai (21) típusú feltételekkel bővülnek, és a központi program minden lépésben új megoldásokat szolgáltat. Ezért az algoritmus konvergens és véges számú lépésben meghatározza L egy optimális megoldását.

Érdemes megjegyezni, hogy ez az algoritmus bizonyos értelemben ,,fordítva'' működik mint a lineáris programozás legtöbb dekompozíciós algoritmusa. A szektorok árrendszert határoznak meg, pénzügyi feltételeiket a központnak küldik, amely termelési (beruházási) tervet határoz meg és ezt a megvalósíthatóság ellenőrzésére visszaküldi a szektornak. Ha a termelési (beruházási) terv valamelyik szektorban nem megvalósítható, akkor új pénzügyi feltételt határozunk meg és küldünk vissza a központnak, mindaddig, míg a központi program minden szektorban megvalósítható lesz.

Az algoritmust egy példával szemléltetjük. Oldjuk meg az alábbi programozási feladatot:

$$
\begin{array}{rcl|rcl}
3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 & & & -2x_5 \qquad + 5x_7 - x_8 & \to & \max \\
x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 & & & + x_5 + 2x_6 + 5x_7 + x_8 & = & 10 \\
x_1 \qquad\quad + x_4 & & & + x_7 + x_8 & = & 3 \\
\hline
2x_1 + x_2 + x_3 \qquad & & & & = & 3 \\
x_3 + 2x_4 & & & & = & 2 \\
\hline
 & & & x_5 + x_6 + 2x_7 + x_8 & = & 3 \\
 & & & x_6 + x_7 \qquad & = & 1
\end{array}
$$

$$x_j \in \{0,1\}, \quad (j = 1, \ldots, 8)$$

Először oldjuk meg a két szektorprogramot

1.
$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 &\to \max \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_3 + 2x_4 &= 2 \\ x_j \in \{0,1\}, \quad (j = 1, \ldots, 4). \end{aligned} \tag{23}$$

Ennek optimális megoldása $\overline{x}_1^0 = (1,1,0,1)$, a duálisnak optimális megoldása pedig $u_1^0 = (1,1)$.

2.
$$\begin{aligned} -2x_5 + 5x_7 - x_8 &\to \max \\ x_5 + x_6 + 2x_7 + x_8 &= 3 \\ x_6 + x_7 &= 1 \\ x_j \in \{0,1\}, \quad (j = 5, \ldots, 8) \end{aligned} \tag{24}$$

A primál optimális megoldás $\overline{x}_2^0 = (0,0,1,1)$, a duál pedig $u_2^0 = (1,1)$.
Ezek után a központi program a következőképpen néz ki

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 - 2x_5 + 5x_7 - x_8 &\to \max \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 + 2x_6 + 5x_7 + x_8 &= 10 \\ x_1 + x_4 + x_7 + x_8 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 5 \\ x_5 + 2x_6 + 3x_7 + x_8 &= 4 \\ x_j \in \{0,1\}, \quad (j = 1, \ldots, 8) \end{aligned} \tag{25}$$

Ennek optimális megoldása $x^0 = (1,1,1,0,0,0,1,1)$, ami az 1. szektor feltételeit nem elégíti ki. Ezért a

$$-u_1 + u_2 \neq 0$$

feltételt csatoljuk az 1. szektor duális feladatának feltétel rendszeréhez és új optimális megoldásként az $u_1^1 = (2,1)$ árnyékárakat kapjuk, melyek segítségével nyert

$$4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 8$$

feltétellel helyettesítjük (25) harmadik egyenlőségét. Az ezek után nyert $x^1 = (1,1,0,1,1,1,0,1)$ optimális megoldás mindkét szektorban lehetséges és így a (22) feladat optimális megoldása.

II. Algoritmus

Ez az eljárás más elven nyugszik, mint az előző. Most először a központ határozza meg a központi erőforrások árnyékárait és egy paramétertől függő pénzügyi feltételt ír elő a szektoroknak. A szektorok egy parametrikus feladatot oldanak meg, melynek optimális célfüggvény-értékét (a paraméter függvényében) elküldik a központnak. A központ ezek figyelembevételével újra felosztja a rendelkezésre álló „pénzt" (tulajdonképpen ez a paraméter) a szektorok között úgy, hogy az összhatékonyság növekedjék. Ha ez a program nem valósítható meg valamely központi naturális (eredeti) feltétel megsértése miatt, akkor a központi feladat duálisának egy új megoldását és ezáltal új pénzügyi feltételt határozunk meg és az egész eljárást megismételjük. Tesszük ezt mindaddig, amíg a szektorprogramok valamennyi központi feltételt is kielégítik.

Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy $A_s \geq O$ $(s = 0,1, \ldots, r)$ és $b_0 \geq O$. Legelőször oldjuk meg a központi programot és annak duálisát, a szektorfeltételek figyelmen kívül hagyásával. Legyen egy optimális duál megoldás u_0^0, az ezzel nyert pénzügyi feltétel pedig

$$u_0^0 A_0 x_0 + u_0^0 A_1 x_1 + \ldots + u_0^0 A_r x_r = u_0^0 b_0.$$

Jelöljük ezt az egyenlőséget egyszerűen a következőképpen

$$p_0^0 x_0 + p_1^0 x_1 + \ldots + p_r^0 x_r = t^0 \tag{26}$$

A következő lépésben megoldjuk az alábbi parametrikus szektorprogramokat

$$\begin{gathered} c_s x_s \to \max \\ B_s x_s = b_s \\ p_s^0 x_s = z_s, \qquad (s = 1, \ldots, r) \\ 0 \leq x_s \leq d_s,\ x_s = \text{egész}, \end{gathered} \tag{27}$$

és az alábbi feladatot

$$\begin{gathered} c_0 x_0 \to \max \\ p_0^0 x_0 = z_0 \\ 0 \leq x_0 \leq d_0,\ x_0 = \text{egész}, \end{gathered} \tag{28}$$

ahol $z_0, z_1, \ldots, z_r$ egész paraméterek. A (27) és (28) feladatok megoldására a dinamikus programozás módszerét lehet használni kombinálva a nemparametrikus feltételek duális változók segítségével való egy feltételbe sűrítésével. (27) és (28) megoldásaként az

$$\begin{gathered} f_s(z_s), \quad (s = 0,1, \ldots, r) \\ 0 \leq z_s \leq t^0,\ z_s = \text{egész} \end{gathered}$$

optimális célfüggvény-érték függvényeket kapjuk. (Definíciószerűen $f_s(z_s) = -\infty$, ha a szektorprogram nem megoldható valamely z_s-re).

Itt jegyezzük meg, hogy ha az $A_s \geq O$ feltételt elhagyjuk, akkor z_s alsó és felső korlátai változnak csak, egyebekben az egész eljárás változatlan marad.

Oldjuk meg most a következő központi erőforrás elosztó programot:

$$\begin{gathered} F(z) = f_0(z_0) + f_1(z_1) + \ldots + f_r(z_r) \to \max \\ z_0 + z_1 + \ldots + z_r = t^0 \\ z_0, z_1, \ldots z_r \geq 0,\ z_0, z_1, \ldots z_r = \text{egész} \end{gathered} \tag{29}$$

Ezt a feladatot a dinamikus programozás módszerével oldhatjuk meg. Legyen $z_0^0, z_1^0, \ldots z_r^0$ egy optimális megoldás és $x_0^0, x_1^0, \ldots x_r^0$ a hozzátartozó megoldásvektorok, melyek nyilván a szektorok lehetséges megoldásai, $F(z^0) = -\infty$ nem állhat fenn, hiszen L-nek van legalább egy lehetséges megoldása. Ha $x_0^0, x_1^0, \ldots, x_r^0$ kielégíti a központi feltételeket, akkor az L egy optimális megoldása. Ha nem, akkor egy

$$u_0 A_0 x_0^0 + u_0 A_1 x_0^1 + \ldots + u_0 A_r x_r^0 \neq u_0 b \tag{30}$$

feltételt csatolunk a központi feladat duálisának feltételrendszeréhez és új u_0^1 árnyékárakat határozunk meg, melyekkel egy új központi pénzügyi feltételt nyerhetünk és az egész eljárást megismételhetjük.

Mivel minden lépésben L legalább egy lehetséges megoldását kizárjuk, ezért ez az algoritmus is véges számú lépésben konvergál.

Oldjuk meg most a (22) feladatot ezzel a módszerrel is. Indulásképpen az $u_1^0 = 0$ és $u_2^0 = 0$ árnyékárakkal képezzük a pénzügyi feltételeket és utána megoldjuk a szektorprogramokat:

1.
$$\begin{aligned}
3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 &\to \max \\
0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 &= z_1 \\
2x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\
x_3 + 2x_4 &= 2 \\
x_j \in \{0,1\}, \quad (j = 1, \ldots, 4);&
\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}
-2x_5 + 5x_7 - x_8 &\to \max \\
0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 &= z_2 \\
x_5 + x_6 + 2x_7 + x_8 &= 3 \\
x_6 + x_7 &= 1 \\
x_j \in \{0,1\}, \quad (j = 5, \ldots, 8).&
\end{aligned}$$

Mivel z_1 és z_2 csak a 0 értéket veheti fel, $f_1(0) = 6$ és $f_2(0) = 4$, a megfelelő optimális megoldások pedig

$$x_1^0 = (1,1,0,1)$$
$$x_2^0 = (0,0,1,1),$$

amelyek nem elégítik ki a központi feltételeket és így egy új

$$2u_1 - u_2 \neq 0$$

kikötést teszünk a duál változókra. Az új duál változók $u_1^1 = 0$, $u_2^1 = 1$, a szektor programok pedig az alábbiak:

1.
$$\begin{aligned}
3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 &\to \max \\
x_2 + x_4 &= z_1 \\
2x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\
x_3 + 2x_4 &= 2 \\
x_j \in \{0,1\}, \quad (j = 1, \ldots, 4);&
\end{aligned}$$

2.
$$-2x_5 + 5x_7 - x_8 \to \max$$
$$x_7 + x_8 = z_2$$
$$x_5 + x_6 + 2x_7 + x_8 = 3$$
$$x_6 + x_7 = 1$$
$$x_j \in \{0,1\}, \quad (j = 5, \ldots, 8).$$

Az $f_1(z_1)$ és $f_2(z_2)$ függvények az alábbiak

z_1	$f_1(z_1)$
0	$-\infty$
1	$-\infty$
2	6
3	$-\infty$

z_2	$f_2(z_2)$
0	$-\infty$
1	3
2	4
3	$-\infty$

A központi erőforráselosztó program a következő

$$f_1(z_1) + f_2(z_2) \to \max$$
$$z_1 + z_2 = 3$$
$$z_1, z_2 \geq 0, \quad z_1, z_2 = \text{egész},$$

melynek az optimális megoldása $z_1 = 2$, $z_2 = 1$; a megfelelő megoldásvektorok pedig

$$x_1^1 = (1,1,0,1)$$
$$x_2^1 = (1,0,1,0),$$

melyek szintén nem elégítik ki a szektor feltételeket. Ezen megoldások segítségével egy

$$u_1 \neq 0$$

feltételt csatolhatunk a központi feladat duáljához s így az $u_1^2 = 1$, $u_2^2 = 0$ új árnyékárakhoz jutunk, melyek az alábbi szektorprogramokhoz vezetnek:

1.
$$3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 \to \max$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = z_1$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 3$$
$$x_3 + 2x_4 = 2$$
$$x_j \in \{0,1\}, \quad (j = 1, \ldots, 4);$$

2.
$$-2x_5 + 5x_7 - x_8 \to \max$$
$$x_5 + 2x_6 + 5x_7 + x_8 = z_2$$
$$x_5 + x_6 + 2x_7 + x_8 = 3$$
$$x_6 + x_7 = 1$$
$$x_j \in \{0,1\}, \quad (j = 5, \ldots, 8).$$

Az $f_1(z_1)$ és $f_2(z_2)$ függvények az alábbiak

z_1	$f_1(z_1)$
0	$-\infty$
1	$-\infty$
2	$-\infty$
3	$-\infty$
4	$-\infty$
5	$-\infty$
6	6
7	$-\infty$
8	∞
9	∞
10	∞

z_2	(z_2)
0	$-\infty$
1	$-\infty$
2	$-\infty$
3	$-\infty$
4	-3
5	$-\infty$
6	4
7	$-\infty$
8	$-\infty$
9	$-\infty$
10	$-\infty$

Az

$$f_1(z_1) + f_2(z_2)$$

$$z_1 + z_2 = 10$$

$$z_1, z_2 \geq 0, \quad z_1, z_2 = \text{egész}$$

erőforráselosztó program optimális megoldása $z_1 = 6$, $z_2 = 4$, melyekhez az

$$x_1^2 = (1,1,0,1)$$

$$x_2^2 = (1,1,0,1)$$

megoldásvektorok tartoznak. Ezek kielégítik a központi feltételeket és így L feladat optimális megoldását adják.

Végezetül meg kell említenünk, hogy mindkét dekompozíciós algoritmust könnyen ki lehet terjeszteni olyan nem-lineáris egészértékű feladatokra, melyekkel az 1. részben is foglalkoztunk.

(Beérkezett: 1976. február 6.)

IRODALOM

1. MANGASARIAN, O. L.: *Nonlinear programming*. New York, 1969. McGraw-Hill.
2. GOMORY, E. R.—BAUMOL, W. J.: *Integer programming and pricing*. Econometrica 28, 1960. pp. 521—550.
3. ALCALY, R. F.—KLEVORICK, A. K.: *A note on the dual prices of integer programs*. Econometrica 34, 1966. pp. 206—214.
4. BALAS, E.: *Duality in discrete programming*. Stanford University, Operations Research House, Technical Report, No. 67—5. 1967.
5. BALAS, E.: *A duality theorem and an algorithm for (mixed) integer nonlinear programming*. Linear Algebra and Application 4, 1971. pp. 341—352.
6. BRADLEY, G. H.: *Transformation of integer programs to knapsack problems*. Discrete Mathematics 1, 1971. No. 1. pp. 29—45.
7. GARFINKEL, R. S.—NEMHAUSER, G. L.: *Integer programming*. New York, 1972. John Wiley and Sons.
8. DANTZIG, G. B.—WOLFE, P.: *Decomposition principle for linear programs*. Operations Research 8, 1960. pp. 101—111.
9. KÜNZI, H. P.—TAN, S.: *Lineare Optimierung grosser Systeme*. Berlin—Heidelberg—New York, 1966. Springer Verlag.
10. DANTZIG, G. B.: *Linear programming and extensions*. Princeton, N. J. 1963. Princeton University Press.

11. Lasdon, L. S.: *Optimization theory for large systems.* New York, 1972. The Macmillan Company.
12. Schrage, L.: *Using decomposition in integer programming.* Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 20. No. 3. (1973) pp. 469–476.
13. Bell, E. D.–Shapiro, J. F.: *A finitely convergent duality theory for zero-one integer programming.* MIT Operations Research Center, OR 043–75, May 1975.
14. Forgó, F.: *Shadow prices and decomposition for integer programs.* Budapest, 1975. Dept. of Mathematics, Karl Marx University of Economics.

DUALITY AND DECOMPOSITION IN INTEGER PROGRAMMING

To tne integer linear programming (primal program) problem we define a dual program. The optimum solutions (shadow prices) of the dual program are economically interpreted, and an algorithm is given to solve the primal and dual programs simultaneously. The introduction of the dual variables enables the decomposition of some specially-structured integer programming problems. Two decomposition methods are presented which, in addition to potentially yielding computational advantages, may even serve as a model for a type of indirect control. This kind of duality can very simply be extended to certain types of non-linear integer programming problems.

The results offered in the study are to be considered (primarily from computational aspects) as a starting-point for a research line rather than as a finished work.

ДВОЙСТВЕННОСТЬ И ДЕКОМПОЗИЦИЯ В ЗАДАЧАХ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

К задаче целочисленного линейного программирования (прямая задача) определим двойственную задачу. Дадим экономическую интерпретацию оптимальных решений (теневых цен) двойственной задачи, далее определим алгоритм, который совместно решает и прямую и двойственную задачи. С помощью двойственных переменных станет возможным декомпозиция целочисленных задач программирования со специальной структурой. В статье мы показываем два декомпозиционных метода, которые, кроме того, что могут иметь некоторые потенциальные счетно-технические преимущества, могут служить и моделью определенного вида косвенного управления. Такой вид двойственности легко распространяется на некоторые задачи нелинейного целочисленного программирования.

Результаты, излагаемые в данной статье, скорее можно назвать (в первую очередь с точки зрения счетной техники) исходным пунктом направления некоторых исследований, чем готовой, завершенной работой.

Grósz Miklós

Egy leszámlálási algoritmus a halmaz lefedési probléma megoldására

Számos közgazdasági és műszaki probléma visszavezethető egy speciális ún. halmaz lefedési problémára (Set Covering Problem) [1]. Ezenkívül *Forgó Ferenc* [3] megmutatta, hogy egy tetszőleges nulla-egy kvadratikus programozási feladatot többek között egy halmaz lefedési feladattá lehet transzformálni. A transzformált feladat matrixában egy sorban sincs négynél több egyes. Hasonlóképpen igen ritka mátrixokkal találkozunk az éllefedési probléma [3] esetében, ahol a csúcs-él incidencia mátrix soraiban legfeljebb két egyes található.

Egy áttekintő cikkükben *Christofides* és *Korman* [5] vizsgálják az irodalomban ismertetett módszerek számítástechnikai eredményeit a halmaz lefedési probléma megoldására. Sűrű együttható mátrixok esetén az ismertetett módszerek hatékonynak bizonyultak. Ezek a módszerek azonban általában segédeljárásként egy lineáris programozási feladatot alkalmaznak, ami jelentősen növeli a gépi program memóriaigényét, és nem használják fel e speciális probléma sajátosságát ritka mátrixok esetén.

E dolgozatban bemutatunk egy olyan leszámlálási algoritmust, amely ritka mátrixok esetén annál hatékonyabb, minél ritkább az együttható mátrix, és semmiféle segédeljárást (pl. lineáris programozás) nem vesz igénybe. A halmaz lefedési probléma a következőképpen írható fel:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq 1 \qquad (1)$$

$$x_j \in \{0,1\},\ a_{ij} \in \{0,1\}, \qquad (i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n).$$

Bevezetjük a következő jelöléseket:

$$\alpha_i^0 = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \quad \text{és} \quad \beta_j^0 = \sum_{i=1}^{m} a_{ij},$$

valamint egy definíciót:

Az **A** mátrix oszlopainak rendszerét *lefedési rendszernek* nevezzük, ha ebben a rendszerben minden egyes sorban legalább egy 1-es van.

Ennek következtében a halmaz lefedési problémát (1) úgy is értelmezhetjük, hogy keresünk egy olyan *A'* lefedési rendszert, amelyre nézve a célfüggvény lértéke minimális. Ezt optimális lefedési rendszernek fogjuk hívni. Minden efedési rendszernek egyértelműen az (1) probléma következő lehetséges megoldása felel meg:

$$x_j = \begin{cases} 0, & \text{ha a } j\text{-edik oszlop } a_j \notin A' \\ 1, & \text{ha a } j\text{-edik oszlop } a_j \in A'. \end{cases}$$

Ezekután könnyen belátható, hogy $\alpha_i^0 \geq 1$ $(i = 1,2, \ldots, m)$ szükséges és elégséges feltétele az (1) probléma megoldhatóságának.

Ezért a továbbiakban feltételezzük, hogy $\alpha_i^0 \geq 1$, $(i = 1,2, \ldots, m)$. Az $\mathbf{A}$ mátrix méreteit a következőképpen lehet csökkenteni:

1. Ha $b_i = e_k$ (k-ik egységvektor), akkor $x_k = 1$ minden lehetséges megoldásban és az a_k oszlopot ki lehet hagyni. (b_i az $\mathbf{A}$ mátrix i-edik sora, a_k az $\mathbf{A}$ mátrix k-ik oszlopa.)

2. Ha $b_t \geq b_p$ valamely t-re és p-re, akkor a b_t sort ki lehet hagyni.

3. Ha valamilyen S oszlophalmazra és valamely k oszlopra igaz, hogy

$$\sum_{j \in S} a_j \geq a_k \quad \text{és} \quad \sum_{j \in S} c_j \leq c_k,$$

akkor a k-ik oszlopot ki lehet hagyni.

Tehát, az $\mathbf{A}$ mátrixból egy olyan $\mathbf{B}$ részmátrixot kapunk, amelyre nézve teljesül:

$$\alpha_i = \sum_{j \in J_0} a_{ij} \quad \text{és} \quad \alpha_i \geq 2, \; i \in I_0,$$

ahol

$$I_0 = \{1,2, \ldots, m'\}, \; J_0 = \{1,2, \ldots, n'\}, \; m' \leq m \text{ és } n' \leq n$$

Ezt az eljárást *1. tesztnek* nevezzük.

Lemke, Salkin és Spielberg [2] egy olyan heurisztikus módszert adtak, amely az optimumhoz közelálló lehetséges megoldást (lefedési rendszert) szolgáltat.

Tekintsük a

$$\gamma_j^k = \begin{cases} \dfrac{c_j}{\beta_j^k}, & \text{ha } \beta_j^k \neq 0 \\ d, & \text{ha } \beta_j^k = 0 \end{cases} \qquad (k = 0, 1, \ldots)$$

számokat, ahol d egy tetszőlegesen nagy száma és

$$\beta_j^{k+1} = \beta_j^k - \langle a_{j_k}, a_j \rangle$$

Most kiválasztjuk a γ_j^k-k közül azt a γ_{j_k}-t, amelyre teljesül:

$$\gamma_{j_k} = \min_{j \in J_0} \gamma_j^k.$$

A megfelelő x_{j_k} értékét egyenlővé tesszük 1-el. Azokat a sorokat, ahol az a_{j_k} oszlopban egyes volt, kihagyjuk. Így kapjuk a I_k halmazt:

$$I_k \subset I_{k+1}, \quad (k = 1,2, \ldots).$$

Ezt az eljárást addig folytatjuk, amíg van eleme a I_k halmaznak. Ily módon nyerünk egy $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n'}^0)$ lehetséges megoldást, amelynek Z_0 célfüggvény érték felel meg. Ezt az értéket kiinduló korlátként fogjuk használni a továbbiakban. Ez lesz a *2. teszt*.

A leszámlálási algoritmus azon az elgondoláson alapul, hogy lépésről lépésre beválasztunk oszlopokat a rendszerbe. Minden p-edik lépésnek megfelel egy I_p és J_p halmaz, valamint y_p célfüggvény érték. Az I_p halmaz tartalmazza azokat a sorindexeket, amelyek még lefedetlenül maradtak a p-edik lépésben. A J_p halmaz viszont tartalmazza azokat az oszlopindexeket, amelyek ebben a lépésben beválaszthatók a rendszerbe. A J_p halmazt úgy kapjuk, hogy az I_{p-1} halmazon kiválasztjuk azt a sort, amelyhez a minimális α_i^{p-1} sorösszeg tartozik:

$$\alpha_i^{p-1} = \min_{i \in J_{p-1}} \{\alpha_i\}, \qquad (p = 1,2, \ldots).$$

E sor nem nulla elemeinek az oszlopindexei a J_p halmazt alkotják.

Az algoritmus végrehajtása során a következő esetek egyike áll elő:

1. Az I_p halmaz nem üres és $y_p < z_0$, akkor a megfelelő J_p halmazból választunk egy j elemet (a kiválasztott elemet elhagyjuk a J_p halmazból) és folytatjuk a leszámlálást a $(p+1)$-edik lépésnél:

$$I_{p+1} := I_p \setminus T_j, \qquad (p = 0,1, \ldots),$$

$$J_p := J_p \setminus \{j\}, \qquad (p = 1,2, \ldots),$$

ahol Tj a j-edik oszlop nem nulla elemeinek megfelelő sorindexek halmaza.

2. Az I_p halmaz üres és $y_p < z_0$, vagyis egy olyan lefedési rendszert kapunk, amelyhez kisebb y_p célfüggvény érték tartozik, mint a z_0 korlát. Ekkor a továbbiakban ezt használjuk korlátként és a kapott lefedési rendszert megjegyezzük.

3. Ha a J_p halmaz üres vagy $y_p \geq z_0$, akkor visszatérünk a $(p-1)$-edik lépésre és visszaállítjuk az x_j^p és x_j^{p-1} értékét nullára.

Minden p-edik lépésben elég csak az i-edik sor (amelyhez minimális α_i^p tartozik), nem nulla elemeinek megfelelő oszlopokat megvizsgálni, mivel lefedési rendszereket keresünk és ezekből legalább egy oszlop eleme lesz minden lefedési rendszernek. A minimális α_i^p sorösszeg minden p-edik lépésben garantálja a minimális variációk számát. Ugyanakkor megkapjuk az összes lefedési rendszereket, amelyekhez kisebb célfüggvény érték tartozik, mint a kiinduló vagy a menet közben kapott korlát.

Az algoritmus leírása

1. Legyen $p = 0$ és $y_0 = 0$.

2. Alkalmazzuk az *1. tesztet* az **A** mátrixra. Kapunk egy **A**$'$ almátrixot, amelyhez a sorindexek I_0 halmaza és az oszlopindexek J_0 halmaza tartozik.

3. Alkalmazzuk a *2. tesztet*, melynek segítségével egy lehetséges megoldást nyerünk z_0 célfüggvény-értékkel.

4. A mátrix sorösszegeiből kiválasztjuk az I_p halmazon a minimálisat:

$$\alpha_i^p = \min_{i \in I_p} \{\alpha_i\}$$

Ha a választás nem egyértelmű, akkor tetszés szerint választunk (pl. kisebb indexűt). A kiválasztott sorban legalább két egyes van ($\alpha_i^p \geq 2$ $i \in I_p$ az 1. teszt alkalmazása után), ezeknek a megfelelő oszlopindexei egy J_{p+1} halmazt alkotnak.

5. A J_{p+1} halmazból tetszőlegesen kiválasztunk egy j elemet és rögzítjük a megfelelő x_j^{p+1} értékét

$$x_j^{p+1} := 1,$$

vagyis beválasztottuk a j-edik oszlopot a rendszerbe.

6. A J_{p+1} halmazból elhagyjuk az 5.-ben kiválasztott j elemet:

$$J_{p+1} := J_{p+1} \setminus \{j\}.$$

7. Kiszámítjuk a célfüggvény értékét a $(p+1)$-edik lépésre:

$$y_{p+1} := y_p + c_j x_j^{p+1}.$$

8. Ha $y_{p+1} < z_0$, akkor 9., egyébként 12.

9. Azokat a sorindexeket, ahol a kiválasztott j-edik oszlopban egyesek vannak, T_j-vel jelöljük. Ezeket a sorokat elhagyjuk az I_p halmazból és így nyerjük a $(p+1)$-edik lépésnek megfelelő I_{p+1} halmazát:

$$I_{p+1} := I_p \setminus T_j \qquad (p = 0,1, \ldots)$$

10. Ha I_{p+1} üres halmaz, akkor kaptunk egy jobb lehetséges megoldást és folytatjuk 11.-nél, egyébként 18.-ra térünk át.

11. A továbbiakban a kapott lehetséges megoldás célfüggvény értékét használjuk korlátként:

$$z_0 := y_{p+1}.$$

Ezt a lehetséges megoldást tároljuk és a 15.-re térünk át.

12. Ha J_{p+1} halmaz üres, akkor visszatérünk a $(p-2)$-edik lépésre, mivel ez azt jelenti, hogy a J_p halmaznak egy eleme volt, de azt már megvizsgáltuk és a 13.-nál folytatjuk. Ha J_{p+1} halmaz nzm üres, akkor 19.-re térünk át.

13. Visszaállítjuk a x_j^{p+1}, x_j^p, x_j^{p-1} és a p paraméter értékét a $(p-2)$-edik lépésnek megfelelően:

$$x_j^{p+1} := x_j^p := x_j^{p-1} := 0, \qquad p := p-2.$$

14. Ha $p \geq 0$, akkor 15., egyébként 20.

15. Ha J_{p+1} halmaz nem üres, akkor visszatérünk 5.-re, egyébként folytatjuk 16.-nál.

16. Mivel J_{p+1} halmaz üres, visszatérünk a $(p-1)$-edik lépésre:

$$x_j^{p+1} := x_j^p := 0 \quad \text{és} \quad p = p-1.$$

17. Visszatérünk a 14.-re

18. Növeljük a p paraméter értékét eggyel:

$$p := p + 1$$

és visszatérünk a 4.-re.

19. Mivel a 12.-ben a J_{p+1} halmaz nem volt üres, ezért visszaállítjuk az x_j^{p+1} értékét:

$$x_j^{p+1} := 0$$

és megvizsgáljuk a többi lehetőségeket. Visszatérünk az 5.-re.

20. A korlátként használt érték a célfüggvény optimális értéke és a megfelelő lehetséges megoldás egyúttal *optimális megoldás* is.

Az ismertetett algoritmust már a gyakorlatban is alkalmazzuk a kisfeszültségű villamos hálózat beruházási költségeinek optimalizálására. A gépi programot a SZÁMGÉP SIEMENS 4004/151 típusú elektronikus számítógépére dolgoztuk ki FORTRAN nyelven. A program kidolgozásánál döntő szempont volt a halmaz lefedési probléma megoldására használt algoritmus memóriaigénye és hatékonysága ritka mátrixok esetén. A rendelkezésünkre álló lineáris programozási feladatokat megoldó könyvtári program memóriaigénye több, mint 100 KB volt. Ez tette szükségessé az ismertetett algoritmus kidolgozását.

Példa: Oldjuk meg az alábbi feladatot:

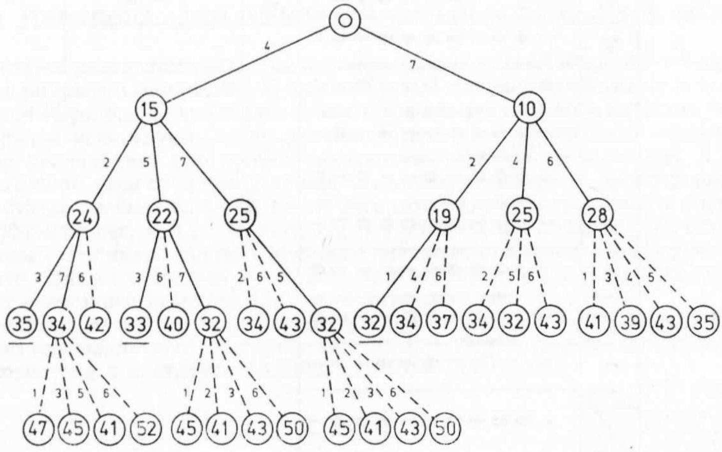
$$13x_1 + 9x_2 + 11x_3 + 15x_4 + 7x_5 + 18x_6 + 10x_7 \to \min$$

$$\begin{array}{rrrrrrrl}
 & x_2 + & & x_4 + & & x_6 & & \geq 1 \\
x_1 + & & x_3 + & x_4 + & x_5 & & & \geq 1 \\
x_1 + & & & x_4 + & & x_6 + & x_7 & \geq 1 \\
 & & & x_4 + & & & x_7 & \geq 1 \\
 & x_2 + & & + & x_5 + & & x_7 & \geq 1 \\
 & & x_3 + & & & & x_7 & \geq 1 \\
x_1 + & & x_3 + & & x_5 + & x_6 & & \geq 1 \\
 & x_2 + & & & x_5 + & x_6 & & \geq 1 \\
x_1 + & x_2 + & x_3 + & & & x_6 & & \geq 1 \\
 & x_2 + & & & x_5 + & & x_7 & \geq 1 \\
x_1 + & & & x_4 + & & x_6 & & \geq 1
\end{array}$$

$$x_j \in \{0,1\}, \qquad j = 1,2,\ldots,7.$$

A 2. teszt alapján az $x^0 = (1,1,0,0,1,0,1)$ lehetséges megoldást kapjuk, amelyhez $z_0 = 39$ célfüggvény érték tartozik.

A megoldás menete jól követhető az 1. táblázaton és az 1. ábrán. Az élek mentén feltüntettük azokat a j indexeket, amelyeknek megfelelő x_j változó



1. ábra

1. táblázat

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	α_i^0	α_i^1	α_i^2		α_i^2	α_i^3	α_i^2		α_i^1	α_i^2		α_i^2	α_i^3	α_i^1	α_i^2	α_i^3	α_i^1	α_i^2		α_i^1	α_i^2	α_i^1	α_i^2
1	0	1	0	1	0	1	0	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3	—	—	3	—	3	—
2	1	0	1	1	1	0	0	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	4	4	—	4	—	4	4
3	1	0	0	1	0	1	1	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4	0	0	0	1	0	0	1	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
5	0	1	0	0	1	0	1	3	3	—	—	—	—	—	—	3	—	—	—	—	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—
6	0	0	1	0	0	1	1	3	3	3	—	3	—	3	—	3	3	—	3	—	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7	1	0	1	0	1	1	0	4	4	4	—	4	4	4	—	4	—	—	—	—	4	4	—	4	4	—	4	4	4	—
8	0	1	0	0	1	1	0	3	3	—	—	—	—	—	—	3	—	—	—	—	3	3	—	3	—	—	3	3	3	—
9	1	1	1	0	0	1	0	4	4	—	—	—	—	—	—	4	4	—	4	4	4	4	4	4	—	—	4	4	4	—
10	0	1	0	0	1	0	1	3	3	—	—	—	—	—	—	3	—	—	—	—	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—
11	1	0	0	1	0	1	0	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3	3	—	3	—	3	—
								z	15	24	35	24	34	24	42	15	22	33	22	32	15	25	32	10	19	32	10	25	10	28
									$x_4 = 1$	$x_2 = 1$	$x_3 = 1$	$x_4 = 1$ $x_2 = 1$	$x_7 = 1$	$x_4 = 1$ $x_2 = 1$	$x_6 = 1$	$x_4 = 1$	$x_5 = 1$	$x_3 = 1$	$x_4 = 1$ $x_5 = 1$	$x_7 = 1$	$x_4 = 1$	$x_7 = 1$	$x_5 = 1$	$x_7 = 1$	$x_2 = 1$	$x_1 = 1$	$x_7 = 1$	$x_4 = 1$	$x_7 = 1$	$x_6 = 1$

értéke 1. A vízszintes vonal azt jelenti, hogy kaptunk egy lehetséges megoldást, amelyhez kisebb célfüggvény érték tartozik, mint a korlát. A körökbe írt szám a célfüggvény értéke, amelyet a megfelelő rendszer határoz meg.

Az optimális megoldás $x = (1,1,0,0,0,0,1)$, amelyhez $z = 32$ célfüggvény érték tartozik.

(Beérkezett: 1975. október 1.)

IRODALOM

1. Garfinkel, R. S.—Nemhauser, G. L.: *Integer Programming.* New York, 1972. John Wiley and Sons.
2. Lemke, C. E.—Salkin, H. M.—Spielberger, K.: *Set covering by single branch enumeration with linear programming subproblems.* Oper. Res. 19 (1971) 998—1022.
3. Forgó, F.: *Egészszámú programozási feladatok néhány transzformációja.* Szigma, VII. évf., 4. sz. 1974.
4. Kovács, L. B.: *A diszkrét programozás kombinatorikus módszerei.* Budapest, 1969.
5. Christofides, N.—Korman, S.: *A computation survey of methods for the set covering problem.* Management Science. Vol. 21, No. 5. 1975.

AN ENUMERATIVE ALGORITHM TO SOLVE THE SET-COVERING PROBLEM

In this paper a special set covering problem of a O—I linear program is dealt with. In the case of dense coefficient matrices the methods outlined in the literature proved efficient. The trouble with them is that these methods apply linear programs as subroutines, hence considerably increasing the memory requirements of the computer programme and do not make exploit the peculiarity of this special problem in care of sparse matrices.

The sparser the coefficient matrix, the more efficient the enumerative algorithm introduced in this study is, and it does not require any memory intensive auxiliary procedures (e.g. linear programming). To determine the initial solution a heuristic method is applied yielding near optimal feasible solution.

The introduced algorithm is already employed in practice to optimize the investment costs of low-voltage electric networks. The computer programme has been worked out n FORTRAN language for SIEMENS 4004/151 computer.

АЛГОРИТМ ПЕРЕБОРА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПОКРЫТИЯ МНОЖЕСТВА

В данной статье рассматривается специальная задача линейного «0—1» программирования — задача покрытия множества. В случае густых матриц методы известные из литературы являются эффективными. Однако в основном все эти методы в качестве вспомогательного алгоритма используют задачу линейного программирования, которая в значительной степени увеличивает для данной программы потребность в памяти, и не используют в достаточной мере специфику данной специальной задачи в случае редких матриц.

В данной статье рассматривается такой алгоритм перебора, который в случае редких матриц тем эффективнее, чем реже матрица, и в котором не используются вспомагательные алгоритмы (например, задача линейного программирования), требующие большого объема памяти. Для нахождения исходного решения используется эвристический метод, который дает возможное решение близкое к оптимальному.

Рассматриваемый алгоритм используется уже на практике при оптимизации капитальных вложений низковольтных электрических сетей. Программа для ЭВМ типа SIEMENS 4004/151 разработана в институте САМГЕП на языке FORTAN.

KÖNYVEKRŐL

JÁNDY, G.: *Rendszerelemzés és irányítás*, Budapest, 1975. Statisztikai Kiadó Vállalat. 180 p.

A Korszerű Informatika Könyvtára sorozatban megjelent kötet a vezetett szervezetekben a modellezhető döntések előkészítésével foglalkozik. Ebből a szempontból „a döntés egy több fázisú folyamat, amely a döntés szükségességének, a döntési problémának a felismerésével kezdődik, ezt követi a döntés céljának pontos megfogalmazása és a cselekmény lehetséges alternatíváinak vagy azok halmazának megtervezése, majd végül a harmadik fázisban a folyamat a felhasználható legjobb alternatíva kiválasztásával zárul. (81.o.) A döntés előkészítésében szerepet játszik az irányítási rendszer szerkezetének és működésének vizsgálata, majd a döntési alternatívák kidolgozásában az operációkutatási és rendszertechnikai módszerek alkalmazása. A könyv bemutatja a széles témakör tudománytörténeti alapjait, legfontosabb definícióit, megfogalmazza a vezetési információrendszerek szervezésének követelményeit és ezek kielégítésének módszereit.

Az egyes fejezetek logikai szerkezete hasonló. A történeti ismereteket követi az elméleti alapok tárgyalása, a fogalmak meghatározása, majd ezek átültetése a vezetett szervezet terminológiájába. Ebből logikai úton következik a módszertan részletes leírása.

A könyv négy részre osztható. Az első részben (az 1. fejezet) a szervezés és irányítás (a management) tudományos elméletének kialakulását, fejlődését és a kapcsolódó tudományos határterületekkel szemben kialakult igényeit tárgyalja. A szerző elemzi az irányítás társadalmi-gazdasági és szervezési-technikai szempontjait. Rámutat e két oldal összefonódására, az irányítás célja ugyanis, „hogy a társadalmat az igényelt termékekkel és szolgáltatásokkal ellátó vezetett szervezetek termelékenységét növelje, ugyanakkor tevékenységük káros, negatív társadalmi-gazdasági és környezeti hatásait a megengedett értéktartományon belül tartsa (14. o.).

A könyv következő része (2–4. fejezet) a rendszerelmélet, a kibernetika, a kommunikáció, a szemiotika és az információelmélet alapjaival ismertet meg. A rendszerelmélet alapfogalmainak bemutatása után megadja a rendszer-megközelítés módszerét, és ennek alkalmazását a vezetett szervezet irányítási rendszerében. A szerző szerint a rendszer-megközelítés olyan szemlélet, mely lehetővé teszi a rendszer összetevőinek és azok egymásrahatásának elemzésével az egész rendszer viselkedésének megfigyelését, a vezetői döntések modellezését és hatékonyságuk értékelését. A kibernetika alapjainak ismertetése a termodinamikai entropia bemutatásával kezdődik és az irányításelmélet alapjain keresztül a műszaki-gazdasági alkalmazásokkal fejeződik be. A következő fejezet a vezetési információ tartalmi, formai, hatékonysági problémáival foglalkozik. A jel, az adat és az információ fogalmának szétválasztása után a vezetés szempontjából vizsgálja ezek gyakorlati értelmét. Így az információ és az adat az irányítás szempontjából relatív fogalmak, az előbbiről csak döntéshozatali felhasználás esetén beszélhetünk, az utóbbi ebben az aspektusban egy „célirányos feldolgozási folyamat nyersanyaga" (79. o.).

A könyv harmadik részében (5. fejezet) a döntéshozatal fogalmait, összetevőit és ezek típusait ismerteti, majd ráter a folyamat modellezésére. Megadja a problémafeltárással szemben támasztott igényeket, majd bemutatja a különböző elvonatkoztatási szinteknek megfelelő modellalkotást, az egyes szintek egymásba való leképezésének módszerét és felsorolja az így nyerhető modellek típusait.

A kötet utolsó részében (6–10. fejezet) a döntéselőkészítés segédeszközeit, módszereit vizsgálja a szerző. Először nagyon részletesen tárgyalja a vezetési információ-rendszer funkcióit, összetevőit, majd rátér az informatika céljainak, területének bemutatására. Kijelöli a vállalati informatika szakterületét, megfogalmazva a követelményeket, a döntéshozatalt kiszolgáló információrendszerrel szemben és tárgylja e rendszerek különböző típusait. Ennek keretében ismerteti a vezetési információrendszerek jellemző típusait:

— az adatbázisú információrendszert,
— a szelektív következtetések információrendszerét,
— a döntéshozatal információrendszerét és
— az irányítás információrendszerét.

Az információrendszerek tervezésével kapcsolatban bemutatja az integrált adatfeldolgozás és a modulos rendszerszervezés jellegzetességeit, előnyeit. E témakör végén útmutatásokat ad az információrendszerek fejlesztésére, ismertetve a már működő rendszereknél felmerült problémákat, és az ezeket okozó hibás kiinduló feltevéseket.

A korszerű vezetési információrendszerek elméletének kialakulása, fejlődése új lehetőségeket nyitott az operációkutatás előtt. A hetedik fejezet az előzőek összefoglalásaként az operációkutatás módszereit, céljait, alapfogalmait ismerteti. Az operációkut-tás fejlődése, alkalmazási eredményei elvezettek tárgyának újbóli megfogalmazásához: „a vezetési döntések és irányítási rendszerek tudományos megalapozásának elméletével és gyakorlatával foglalkozik". (124. o.) A definíció értelmében az operációkutatás vezetési problémák feltérképezésére, modellezésére, illetve döntési kritériumok rendszerének kialakítására szolgálhat. Ezért játszik döntő szerepet a rendszerelemzés az összefüggések és normatívák feltárásában, ezt általában követi egy kvantitatív matematikai modell felállítása, ellenőrzése és végül ennek alapján információk előállítása a döntéshozatal számára. A szerző bemutatja e sokoldalú tevékenység fő összetevőit, eszközeit, alkalmazási területeit és a problémák megoldásának jellegzetes matematikai, hálótechnikai és algoritmikus modelljeit.

Az operációkutatás és a rendszertudományok mérnöki vetületeként alakult ki a rendszertechnika, melynek műszaki-gazdasági ága a termelés és szolgáltatás irányítását és a szervezet vezetésének fejlesztését segíti elő. A szerző részletezi a rendszertechnika munkafázisait és megadja a rendszerszervezés ellenőrzési pontjainak — mérföldkő eseményeinek — egy lehetséges jegyzékét.

Az operációkutatás optimalizálásra törekvő modelljei bizonyos döntési problémák vizsgálatára alkalmatlanok. Ez olyan esetekben fordul elő, amikor a véletlenszerűség nagyon erősen befolyásolja a folyamatok kimenetelét, vagy ha a döntési probléma vizsgálatához az irányított rendszer viselkedését úgy kívánjuk elemezni, hogy paramétereit változtatjuk. Ezekben az esetekben a szimulációs eljárásokkal oldható meg a feladat. Bonyolult rendszerek elemzésére, számítógépes szimuláció alkalmazására világszerte speciális szimulációs nyelvek keletkeztek.

Az ismertetttett módszerek egyik alkalmazási területe a termelésirányítás. Az operációkutatás módszereit használva a döntési folyamat egyre több eleme válik egzaktan leírhatóvá és programozhatóvá.

A könyv erénye a nagy ismeretanyag logikus felépítése, közérthető tárgyalása, egyes egyszerű példák bemutatása. Hasznos olvasmány mind operációkutató szakemberek, mind ilyen módszereket alkalmazó vállalati vezetők részére, mert — úgy vélem — szót értésüknek feltétele az azonos fogalmi körre épülő alapműveltség. Külön érdemes felhívni a figyelmet a kötet jól összeállított irodalomjegyzékére, mely hasznos segédeszköznek bizonyulhat az elméleti és gyakorlati operációkutatási munkában.

Zeisler József

Theil, H.: *Principles of Econometrics.* New York, 1971. John Wiley et Sons, Inc. 736 p.

Az elmúlt évtizedben főleg az amerikai és a nyugateurópai kiadók egy sor átfogó, kézikönyv, illetve tankönyv jellegű ökonometriai művet publikáltak. Úgy tűnik, hogy az ökonometriai kutatás a 60-as évek közepére jutott el arra a szintre, ahol már felmerült az eddigi eredmények összegezésének, a tárgyalásmód egyszerűsítésének, a jelölések egységesítésének igénye. Ennek eredményeképpen jöttek létre olyan jelentős összefoglaló könyvek mint *Johnston, Goldberger* vagy *Malinvaud* ismert alkotása,[1] melyek körvonalazták azt a tudományágat, amit mostanában klasszikus ökonometriának szoktak nevezni.

Henri Theil — az Egyesült Államokban élő ismert holland származású ökonométer — könyve is ezek közé az összefoglaló művek közé tartozik. A könyv legfőbb

[1] Johnston, J.: Econometric Methods. New York, 1963. Graw-Hill.
Goldberger, A. S.: Econometric Theory. New York, 1964. Wiley and Sons.
Malinvaud, E.: Méthodes statistiques de l'économetrie. Paris, 1969. Dunod.

erénye az igen világos, követhető tárgyalásmód, az egyszerű nyelvezet (amely még az angol nyelvben kevéssé járatos olvasók számára is hozzáférhetővé teszi a könyvet) és a kiváló didaktikai felépítés. Ez utóbbiról külön is kell szólni, hiszen lehetővé teszi, hogy tankönyvként is használják mind kezdő, mind pedig haladó fokon. A szerző ugyanis úgy építette fel könyvét, hogy az egyes fejezeteket azok nehézségi fokára utaló jelzésekkel látta el, amelyek kezdőknek, középhaladóknak és haladóknak egyértelmű eligazítást adnak arról, hogy a szerző — sokéves oktatási tapasztalata alapján — melyik fejezetet kinek ajánlja. Az egyes részek ilyen felosztását természetesen úgy oldotta meg, hogy az ökonometria nehezebben áttekinthető részeivel megismerkedni nem akarók is képet kapjanak az összes fő kérdésről.

Külön fel hívom a figyelmet arra, hogy a könyv bőségesen tartalmaz színvonalas feladatokat, melyek megoldását az olvasóra bízza. Az ilyen könyveknél ez meglehetősen szokatlan, hiszen a szerző egy sor fontos tétel bizonyításában, probléma megoldásában az olvasót legfeljebb a megoldás módjára vonatkozó ismertetéssel látja el, elősegítve ezáltal az aktív, gondolkozó olvasást. Külön érdekesség, hogy néhány helyen a szerző korábbi téves, illetve nem teljesen pontos megállapításainak bírálatát is az olvasóra bízza feladat formájában. Ezek a feladatok mindenképpen a könyv igen értékes részét képezik, úgy érzem azonban, hogy nagyon hiányzik a feladatok megoldása, mellyel az olvasó ellenőrizhetné gondolkodásának helyességét.

A könyv elsősorban ökonometria elméleti mű, de — és ez a tudományág jellegéből következik — nem nélkülözheti a gyakorlati vonatkozásokat sem. A szerző főként saját (holland textilipari számítások során szerzett) tapasztalataiból állította össze az elméleti megállapítások alátámasztására szolgáló numerikus anyagot. A számszerű példák tehát nem fiktívek, de elsősorban illusztratív jellegűek és nem gazdaságpolitikai megállapításokat szolgálnak.

A könyv 12 fő fejezetből áll, melyeket egy rövid Függelék és Táblázatok egészítenek ki.

Az első két fejezet a matematikai és a statisztikai eszközök bemutatásával foglalkozik. A szokásos mátrixalgebrai bevezetés után a gyakorlat oldaláról foglalkozik a vektorok és mátrixok differenciálási szabályaival. Itt tér ki a szerző a későbbiekben fontos szerepet játszó főkomponensek módszerének ismertetésére. Sajnos nem mutatja be a faktoranalízis fő problémáit, holott azok — a kérdés feltevést és a számítástechnikai lebonyolítást tekintve — közel állnak az itt vizsgált feladatokhoz. A statisztikai bevezető említésre méltó része a generátor függvényre vonatkozó példák nagy száma.

A harmadik fejezet az ökonometria legegyszerűbb és legalapvetőbb kérdésével, a legkisebb négyzetek klasszikus módszerével és a standard lineáris modellel foglalkozik. Az alaptételek ismertetése és bizonyítása után foglalkozik a változókra tett normalítási feltételekből adódó eredményekkel. Az előrejelzés és az intervallumbecslés problémáinak tárgyalása mellett itt mutatja be a multikollinearítást, annak mérésével és kiküszöbölésének módjaival azonban keveset foglalkozik. Ezt a fejezetet a standard lineáris modell korlátainak felsorolása zárja le, ami egyben kijelöli a későbbiekben tárgyalandó problémákat is, hiszen a standard modell egyes feltételezéseinek feloldása fokozatosan vezet el a legbonyolultabb modellekig.

A következő két fejezet a becslések megbízhatóságát tárgyalja. Először a bonyolultabb korrelációs mutatószámok értelmezését, meghatározását írja le a szerző és illusztrálja áttekinthető grafikonokkal, majd a nálunk kevéssé ismert és az ökonometria nehezebb területeihez tartozó BLUS (legjobb lineáris torzítatlan, skalár kovarianciájú) reziduumokra vonatkozó fontosabb tételeket és összefüggéseket írja le jobbára saját kutatásai alapján. Itt ismerteti — a részletekben való elveszés nélkül — az autokorreláció felderítésére szolgáló fontosabb próbákat: a Neumann és a Durbin—Watson-féle teszteket is.

A következő, hatodik fejezet az Aitken-féle általánosított legkisebb négyzetek módszerét és a vele megoldható feladatokat tekinti át. Így ebben a részben ír a standard modell specifikációjától eltérő zavar-kovariancia matrixokkal rendelkező feladatok (diagonális, nem-szinguláris, szinguláris kovariancia matrixok) megoldásáról is. Itt ismerteti a szerző a matrixok általánosított inverzére vonatkozó fontosabb tételeket is, bár ezek inkább a bevezető algebrai részbe kívánkoznának. Ennek a fejezetnek a keretében tárgyalja az autokorrelált zavarok okozta problémákat és megoldásuk lehetőségeit. Ugyancsak itt foglalkozik az elosztott késésű modellekkel (Distributed Lag Models); talán az kifogásolható itt, hogy inkább csak a főbb modellek ismertetésére, mintsem azok megoldására vállalkozik. Ez a fejezet tárgyalja a korlátozott legkisebb négyzetek módszerét is, általánosításaival együtt.

A hetedik fejezet a modellek további általánosítását, a lineáris összefüggések összekapcsolását, egyidejű kezelését mutatja be. Az egymással összefüggő lineáris egyenletek becslési problémái mellett a szerző nagy teret szentel a fogyasztói allokációs probléma — főként saját korábbi kutatásain alapuló — vizsgálatának. Ugyancsak itt tárgyalja a nem teljes külső információkat és a velük kapcsolatos becslési problémákat, valamint az egyenlőtlenség formájában megadott korlátozó feltételek esetét is.

Igen fontos a nyolcadik fejezet, mely az aszimptotikus eloszlások elméletével foglalkozik. Itt bizonyos elméleti bevezetés (valószínűségi határ, központi határeloszlási tétel stb.) után az ökonometria speciális problémáit (becslések aszimptotikus tulajdonságai) is részletezi.

Két bő fejezet is foglalkozik a szimultán egyenletek kérdésével. Az első részletes áttekintést ad ezeknek a modelleknek a felépítéséről, szerkezetéről, különböző forrásairól, valamint az identifikáció problémájáról. *H. Wold*dal vitatkozva a szerző kifejti álláspontját a rekurzív kontra szimultán egyenletek vitájában. Ez a fejezet ismerteti a szimultán egyenletek legfontosabb becslési eljárását: a kétfokozatú legkisebb négyzetek módszerét, valamint a már klasszikus számba menő alapmodellt: a szimultán egyenletekből álló Klein—Goldberger-modellt. A szimultán egyenleteket tárgyaló másik fejezet a bonyolultabb problémákat és a nehezebben követhető, összetettebb becslési eljárásokat mutatja be. Így foglalkozik a becslések aszimptotikus tulajdonságaival és az identifikáció különféle módjaival is. Ismerteti a bonyolultabb becslési eljárásokat (korlátozott információjú és teljes információjú maximum-likelihood becslések, k-osztályú becslések, háromfokozatú becslések stb.) és fontosabb tulajdonságaikat. A fejezet befejezéseképpen az egyes becslési eljárások közti választáshoz ad a szerző hasznos szempontokat.

A könyv tizenegyedik fejezete kifejezetten gyakorlati, modellépítési kérdéseket érint. Először a specifikációs elemzéssel foglalkozik: arra keres választ, hogy hogyan alakítható ki egy modell optimális, vagy ahhoz közel álló specifikációja. A másik fontos kérdés az, hogy a mikrorelációk aggregálása hogyan hajtható végre, milyen problémák merülnek fel az aggregálás kapcsán. Ezeket az eredményeket a fogyasztói allokációs problémán keresztül mutatja be.

A befejező rész az ökonometria határterületeit tárgyalja, jobbára felsorolásszerűen. Természetesen vitatható, hogy ki mit tekint az ökonometria szerves részének, és mit határterületnek. Így nyilván sokan nem fogadják el, hogy a hibát tartalmazó változókkal rendelkező modellek (Errors in the Variable Models) vagy a Bayesi következtetések kérdését határterületnek nevezzük. Ugyanakkor, más szempontból nem tekintik ide tartozónak például az információelmélet kérdéseit. Ezek valóban jogosan felmerülő kérdések, annyi azonban bizonyos, hogy a korábbi fejezetek logikus tárgyalásmódja, felépítése és zárt egysége kizárja egy sor fontos probléma tárgyalását, melyeknek legalábbis érintőleges ismertetését a szerző fontosnak látja.

Végezetül, úgy érzem, összehasonlítást kell tennem Malinvaud magyar fordításban is megjelent hasonló témájú könyve[2] és Theil most ismertetett könyve között, mivel ez talán indokolja, hogy egy angol nyelvű könyv ismertetésével ilyen részletesen foglalkozom. Malinvaud könyve lényegében ugyanezeket a kérdéseket vizsgálja, azzal a szemléleti különbséggel, hogy míg ő az ökonometriai problémákat elsősorban matematikai oldalról tárgyalja. Theil jobban ragaszkodik az ökonometria saját, kialakult fogalmi és jelölésrendszeréhez. Malinvaud könyve — mint azt Paizs János kitűnő ismertetésében[3] is olvashatjuk — nagy sikert aratott a nyugati könyvpiacokon. Ez a siker sajátos, az angolszász szakirodalomban megszokottól eltérő, matematikai orientációjú megközelítésének tudható be. Malinvaud könyve inkább matematikusok érdeklődésére tarthat számot, míg Theil itt ismertetett könyve — úgy vélem — közelebb áll matematikus közgazdászaink érdeklődéséhez és alapismereteihez. Ugyanakkor az ökonometria nemzetközi — főként angolszász — irodalma is jobban követhető ennek alapján. Befejezésül megemlítem, hogy az utóbbi években magyar nyelven megjelent ökonometriai művek (Pawlowski[4] és Halabuk—Hulyák—Kotász—Nyáry könyvei[5]) is inkább ezt az irányzatot követik, ezért merem ajánlani Theil könyvét az ökonometria iránt érdeklődőknek.

Hunyadi László

[2] Malinvaud, E.: Az ökonometria statisztikai módszerei. Budapest, 1974. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.

[3] Szigma VIII. (1975) 72—74. o.

[4] Pawlowski, Z.: Ökonometria. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. Budapest, 1970.

[5] Halabuk, L.—Hulyák, K.—Nyáry, Zs.—Kotász, Gy.: A magyar népgazdaság M-2. Ökonometriai Modellje. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1973.

ADELMAN, I.—MORRIS, C. T.: *Economic Growth and Social Equity in Developing Countries.* Stanford, 1973. Stanford University Press. 257 p.

E munka előzménye a két szerzőnek *Society, Politics and Economic Development* című könyve, amelyben a faktoranalízis módszerével vizsgálták 74 gyengén fejlődő ország gazdasági, társadalmi és politikai fejlődésének összefüggéseit. Ezekre az országokra 41 indikátort gyűjtöttek össze, amelyek gazdaságuk, népesedésük, társadalmuk, politikai rendszerük állapotát sokoldalúan jellemezték az ötvenes évek elejétől a hatvanas évek közepéig terjedő időszakban.

Ebben az új munkájukban ugyanebből az adatbázisból indultak ki. Kérdésfeltevésük azonban a korábbihoz képest leszűkült, mert két kérdésre kerestek választ: 1. Milyen gazdasági, társadalmi, politikai tényezők befolyásolják a demokratikus politikai rendszernek — az ő szóhasználatuk szerint : a politikai részvételnek — a kifejlődését? 2. Ezek a tényezők hogyan befolyásolják a jövedelmi egyenlőtlenségek alakulását? A kérdések kutatását indokolttá teszi, hogy a második világháború után a gazdaságfejlesztési tervek kidolgozásakor abból a feltevésből indultak ki, hogy a gazdasági növekedés többé-kevésbé automatikusan elő fogja segíteni a demokratikus politikai fejlődést és a gazdasági egyenlőtlenség mérsékelődését, vagy legalább javítani fogja a legszegényebb népességcsoportok helyzetét a gyengén fejlett országokban.

Hasonlóan korábbi könyvükhöz, amelyben a faktoranalízist elsőként alkalmazták ilyen komplex fejlődési problémák kutatására, most is úttörőek a felhasznált módszertan tekintetében. A politikai részvételre ható tényezőket a diszkriminancia analízis módszerével vizsgálták. Ez a módszer arra használható, hogy meghatározza: nagyszámú független változó közül melyik milyen mértékben differenciál egy sokaságot valamely függő változó szempontjából. A független változók ebben az esetben a már korábban használt gazdasági, társadalmi stb. indikátorok. A függő változót, amely a politikai részvétel fokát jellemzi, speciálisan szerkesztették meg. Az egyes országoknak három jellemzőjét vették figyelembe: 1. Hány párt működik és azok milyen milyen jellegűek (pl. törzsi, személyi vagy osztály alapon állnak)? 2. Vannak-e olyan önkéntes érdekcsoportok, amelyeken a közös társadalmi-gazdasági és kulturális-etnikai hátterű népességcsoportok érdekeiket képviseltethetik? 3. Milyen mértékben vesz részt a népesség ténylegesen a politikai döntésekben? Ezeknek figyelembe vételével 16 minőségi kategóriát alkottak, ezeket bizonyos ordinális skálába rendezték.

A diszkriminancia analízist elvégezték a 74 országból álló teljes mintával, majd külön-külön a legkevésbé fejlett országokra (az afrikai országok többsége és a legfejletlenebb ázsiai országok), a közepesen fejlettekre (az ázsiai országok többsége és a szegényebb latin-amerikai országok), valamint a gyengén fejlett országok között legfejlettebbeknek tekinthető országokra (Latin-Amerika nagyrésze, továbbá Libanon, Egyiptom, Törökország, Görögország stb.).

A teljes mintával végzett elemzés a társadalmi mobilitást mutatta ki a legerősebb befolyásoló tényezőként. Eszerint a politikai részvétel ott erősebb, ahol a néptömegek könnyebben jutnak a közép- és felsőszintű iskolákba és a szellemi jellegű foglalkozásokba. Igen gyenge viszont az egy főre jutó nemzeti jövedelem és a politikai részvétel összefüggése.

A legkevésbé fejlett országok elemzésénél a munkásmozgalom erőssége mutatta a leghatározottabb pozitív kapcsolatot a részvétellel. A közepes fejlettségűeknél egyrészt az ellenzéki pártok megléte, másrészt az új belföldi középosztály ereje (és ennek másik oldalaként a hagyományos hatalmi elit gyengesége) látszott a legkedvezőbbnek a politikai részvétel számára. A viszonylag legfejlettebb országokban pedig a munkásmozgalom ereje, az oktatási rendszer fejlettsége, a társadalmi mobilitás mutatta a legerősebb pozitív kapcsolatot.

A szerzők ebből azt a következtetést vonják le, hogy a politikai részvétel kifejlődése semmiképpen sem közvetlen következménye a gazdasági fejlődésnek, legfeljebb arról lehet szó, hogy a gazdasági növekedés létrehoz bizonyos társadalmi feltételeket, amelyek hozzájárulhatnak a politikai részvétel erősödéséhez.

A politikai részvétel mérése a gyengén fejlett országokban nagy nehézségekbe ütközött, még súlyosabbak voltak a problémák a gazdasági egyenlőtlenségek mérésénél. Csupán 43 országra vonatkozóan sikerült adatokat találni többféle forrásból: háztartási jövedelmi és kiadás felvételekből, népszámlálásokból és adóstatisztikai adatokból. Ezekből három egyenlőtlenségi mutatót szerkesztettek: 1. az alsó hat decilisnek (vagyis a népesség szegényebb 60 százalékának) részesedését az összes jövedelemből, 2. a középső két decilis részesedését és 3. a legmagasabb jövedelmű 5 százalék részesedését. Ezeknek kapcsolatát vizsgálták 35 gazdasági, társadalmi, politikai indikátorral.

Az alkalmazott statisztikai módszer ebben az esetben a variancia analízisen alapult. Ennek segítségével a független változók közül kiválasztották azt, amely a vizsgált országokat úgy választja két részre, hogy ezáltal a variancia e két csoporton belül a legnagyobb mértékben csökken az eredeti varianciához képest. Ezután az így kapott két csoportot hasonlóan két részre osztó változót keresték és így tovább.

Mind a három említett egyenlőtlenségi mutatóra vonatkozóan elvégezték az elemzést. A legszegényebb 60 százalék részesedését először a gazdaság dualizmusának mértéke osztotta két részre a leghatározottabban: azokban az országokban, ahol a modern és a hagyományos gazdasági szektor élesebben kettévált, tehát ahol erősebb volt a dualizmus, kisebb volt a szegények részesedése a jövedelemből. Az erősen duális gazdaságú országok közül a magasabb egy főre jutó jövedelműekben volt nagyobb a jövedelmi egyenlőtlenség. Azon országok között, ahol a modern és hagyományos szektor szétválása kevésbé volt éles, a jobb fejlődési adottságokkal rendelkezőkben volt nagyobb egyenlőtlenség.

Hasonlóképpen a felső 5 százalék részesedésének mutatójával végzett elemzés is azt mutatta, hogy jobb adottságokkal rendelkező, természeti kincsekben gazdagabb országokban nagyobb az egyenlőtlenség. A középső két decilis részesedését a dualizmus differenciálta legerősebben, az erősen duális gazdaságokban kisebb a részesedésük a jövedelemből.

Az eredményekből a szerzők meglehetősen borúlátó következtetéseket vonnak le. Megállapítják ugyanis — és ezt a gyengén fejlett országok időbeli fejlődésével is igazolva látják —, hogy az eddigi gazdasági növekedés általában növelte az egyenlőtlenséget. A szegények helyzete sok helyen nemcsak relatívan, hanem abszolútan is romlott.

Ezekben az egyenlőtlenség elemzésekben két változó mutatható ki, amelyek révén az egyenlőtlenség lényegesen csökkenthető. Egyrészt a kormány nagyobb szerepe a gazdasági életben (szemben a magántőke túlnyomó szerepével), amely többnyire szocialista jellegű ideológiával párosul, határozottan kisebb gazdasági egyenlőtlenséggel jár együtt. Másrészt az oktatás fejlesztése — a szerzők kifejezése szerint: az emberi erőforrások fejlesztésére helyezett hangsúly — szintén az egyenlőtlenség csökkentése irányában hat.

A szerzők maguk is hangsúlyozzák következtetéseik bizonytalan voltát, elsősorban az adatok kérdéses megbízhatósága és az indikátorok szerkesztésének problémái miatt. Mégis kétségtelen, hogy egészen új utat törtek a közgazdaságtanban, mert eddig kevéssé használt matematikai statisztikai elemzési módszerekkel a gazdasági-társadalmi-politikai fejlődésnek igen széles problémakörét sikerült megragadniuk és ezzel új (legalább is eddig ilyen módon nem bizonyított) összefüggéseket mutattak ki.

ANDORKA RUDOLF

PRESTON, R. S.: The Wharton Annual and Industry Forecasting Model. (Studies in Quantitative Economics, No. 7.) Philadelphia, 1972. Wharton School, University of Pennsylvania, 321 p.

Az Egyesült Államokban folyó ökonometriai modellezésben kiemelkedő szerepe van a Pennsylvaniai Egyetemen a Wharton School-ban szervezett gazdaságkutató egységnek (Economics Research Unit.). A Wharton School-ban 1968ban kidolgozott ökonometriai modell annak idején egyike volt a legkorszerűbbeknek. Több más makroökonometriai modellel együtt (így a Brookings, az OBE, a MIT-PENN, a Michigani, valamint a St. Louis modellekkel) negyedéves adatbázison épült, és ennek megfelelően rövidtávú (1—2 éves) előrejelzésre használták. (Az Egyesült Államok makroökonometriai modelljeinek specifikációs tulajdonságaival és becslési eredményeivel egyébként 1974-ben ott külön szimpozium foglalkozott.) A Pennsylvaniai Egyetem különösen két irányban igyekszik kiszélesíteni a modellezés területét. Az egyik a regionális elemzés (vö. ezzel kapcsolatban pl. F.G. Adams professzor és munkatársainak ún. Mississippi-modelljét); a másik az ökonometriai modellnek alkalmazása dezaggregált ágazati vizsgálatok céljára, a nemzetgazdasági és ágazati vizsgálatok szempontjainak összehangolása. Ez utóbbinak legmegfelelőbb eszköze a modellnek összekapcsolása az ágazati kapcsolatok mérlegével. A Wharton-modellek egyébként több módszertani kérdés kezelésében a sok tekintetben úttörő Brookings-modellre támaszkodnak, ennek kezdeményezéseit folytatják; így az ökonometriai egyenletrendszer és az ágazati kapcsolati mérleg összekapcsolásán kívül a keresleti és kínálati aspektusok szintetikus kezelésében, valamint a termelői és fogyasztói ár-blokkok összekapcsolásában is, ugyanakkor azonban a Wharton School profiljának megfelelően az előrejelzés feladatát szem előtt tartva.

A Wharton-modellnek ez a továbbfejlesztett változata azonban az 1968. évi —

lényegesen kisebb — Wharton-modelltől több tekintetben el is tér. Nem rövid-, hanem hosszútávú (gyakorlatilag az egész 1970-es évtizedre szóló) előrejelzések célját szolgálja; ennek megfelelően nem negyedéves, hanem éves adatbázison épül fel.

A könyv négy fejezetből áll. Az első fejezet a modell fő jellemvonásait ismerteti, és a modellben ábrázolt folyamatok blokkdiagramját tünteti fel. A második fejezet részletesen bemutatja a modell változóit és egyenletrendszerét, míg a harmadik fejezet a becslési módszerekkel, az eredmények összehasonlításával és multiplikátor-elemzéssel foglalkozik. Végül a negyedik fejezet a modell előrejelzési eredményeit mutatja be.

A modell nyolc egyenletcsoportra (blokkra) oszlik: a végső felhasználás, a ráfordítás-kibocsátások, a munkaerő, a bérek, a termelői árak, a fogyasztói árak, a jövedelmek, valamint a pénzügyi kapcsolatok blokkjára. A modellnek összesen 346 endogén változója és összefüggése van (ebből 155 sztochasztikus összefüggés és 191 identitás); az exogén változók száma 90. Egymás közötti kapcsolataikat tekintve az egyes blokkok igen nagymértékben interdependensek, eltérően a blokk-rekurzív Brookings-modelltől.

A végső felhasználás blokkja a lakossági fogyasztás, az állóalapok, a lakásépítés, a forgóeszközök, a külkereskedelem és a kormányzati kiadások összefüggéseit vizsgálja (összesen 36 sztochasztikus összefüggés keretében). A tényezők között, amelyek az említett jelenségeket magyarázzák, elsősorban a jövedelmek, a termelés, az árak, a kamatláb, a pénzkészletek, adózási rendszabályok, valamint a fogyasztói magatartás és a technikai fejlődés szerepel. A szerző hangsúlyozza, hogy a gyakorlatban igyekezett felhasználni mindazt, amivel pl. a fogyasztói magatartás újabb elemzései gazdagították a gazdaságelméletet. Így a lakosság fogyasztásában nagy szerepe van olyan változóknak is, mint a korábban szerzett jövedelmek, ill. az elért jövedelmi szint; szerepük van bizonyos demográfiai változásoknak és elvárt magatartásoknak, és így tovább. Különleges figyelemmel fordult — elsősorban *D. W. Jorgenson* vizsgálatai és megállapításai alapján — az állótőke képződés jelenségével kapcsolatban az időbeli késleltetés problémája felé. A modell dezaggregált szintjére jellemző, hogy a lakossági fogyasztást 11 kategóriára bontva vizsgálta. A beruházási függvényekben a termelésnek, az értékcsökkenésnek, az áraknak és a technikai fejlődésnek tulajdonít döntő szerepet a szerző. Viszonylag csekély súllyal szerepelnek a modellben külkereskedelmi összefüggések — ami általában is jellemző az amerikai modellekre: összesen öt import-egyenletet, de mindössze egy export-egyenletet tartalmaz.

A modellben nagyon fontos szerepet tölt be a ráfordítások és kibocsátások blokkja: az ágazati termelés és a végső felhasználás között ennek a blokknak az összefüggései biztosítják a kapcsolatot. A szerző hangsúlyozza: csak akkor tehetők érdeklődésre számot tartó megállapítások, ha a termelő tevékenységet erős bontásban vizsgálja a modell. Egyrészt annak érdekében, hogy a végső felhasználás tárgyát képező áruk és szolgáltatások ágazati eredete pontosan megállapítható legyen, másrészt abból a célból, hogy az egyes ágazatok egymástól eltérő szükségletei, összefüggései, sajátosságai az ágazati állóalapképződés, munkaerő-igény és termelői áralakulás specifikációjában is kellőképpen kifejezésre juttathatók legyenek. A modell a termelő tevékenységet 50 ágazatra bontva vizsgálta, s ebben a Brookings-modell továbbfejlesztett változatán is túltett. A végső felhasználás ágazati eredetének meghatározásában egyébként a Brookings-modellben alkalmazott eljárást (az ágazati mérleggel való összekapcsolást) követte.

A munkaerő-igény egyenleteiben az állóeszközök, a korábbi munkaerő-állomány és a technikai fejlettség a magyarázó változók. A munkaerő-egyenletek egyben a termelési függvényeket is helyettesítik, minthogy sem lineáris, sem Cobb—Douglas-típusú termelési függvények a modellben nem szerepelnek.

A termelői árak a modellben a munkaerőpiaci feltételek és a kapacitáshasználás függvényei. Az utóbbit nagyrészt kínálati feltételek és a termelékenység határozza meg. A termelői áraknak fogyasztói árakká való transzformációja tekintetében a szerző a Brookings-modellben alkalmazott megoldást követte. A fogyasztói árindexek lényegében olyan összefüggések segítségével határozhatók meg, amelyekben a bruttó nemzeti termék felhasználásának egyes költséghelyein mutatkozó fogyasztói kiadások és az egyes termelő ágazatok termékeinek végső felhasználása között számított regressziós együtthatók adják a fogyasztói árindex meghatározásához szükséges súlyrendszert.

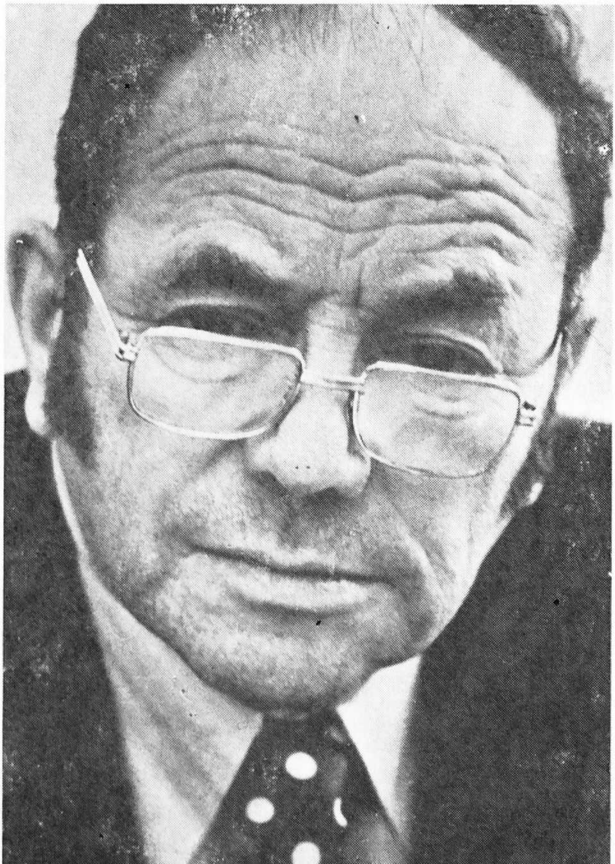
A béreket a foglalkoztatottsági viszonyok és az áralakulás határozzák meg. További egyenletek a nem-bérjellegű jövedelmek alakulását magyarázzák; ugyanakkor a pénzügyi összefüggések viszonylag csekély súllyal szerepelnek a modellben. Három egyenlet magyarázza a tartós bankbetétek, és hat egyenlet a kamatláb alakulását.

A harmadik fejezet az alkalmazott becslési módszerekkel és a becslési eredmények összehasonlításával foglalkozik. 346 endogén és 90 exogén, valamint nagyszámú késleltetett endogén változó mellett a modell szimultán becslése nem csekély feladat. A legkisebb négyzetek klasszikus módszerén túl ennek kétfokozatú módszerét is alkalmazták, amikor is a becslés első fokozatában a predeterminált változók főkomponenseit használták fel. Erre többféle változatot is kidolgoztak: az első 5, a második 7, a harmadik 9 főkomponenssel operált. Ezek közül az az eljárás adta a legkedvezőbb becslési eredményeket, amikor a főkomponensek száma 5 volt.

Az anyag tekintélyes részét a multiplikátor-elemzés eredményei teszik ki. Hét exogén változóra tettek kikötéseket, s ezek függvényeként vizsgálták meg a modell endogén változóira gyakorolt hatásokat. A hét változó az áruk és szolgáltatások közületi fogyasztása, az amortizáció, a leszámítolási kamatláb, a vállalati adó és a jövedelmi adó kulcsa, valamint a külkereskedelmi forgalom volt. A multiplikátor-elemzésből adódó egyik leglényegesebb megállapítás, hogy jóformán valamennyi exogén változóra tett kikötés erősen befolyásolja az árszínvonalat és a munkaerőfoglalkoztatottságot. A modell multiplikátor-értékei egyébként a korábbi Wharton-modell és a Brookings-modell megfelelő értékeit közelítették.

A mű utolsó fejezete foglalkozik az 1970-es dekádra vonatkozó ex ante előrejelzésekkel, amelyek az exogén változókra tett különböző alternatív hipotézisek mellett adódnak. Ezeknek eredményeit részletes táblázatok mutatják be, negyven endogén változóra vonatkozólag. Az előrejelzések 1975 és 1980 között a folyóáras bruttó nemzeti termék évi 7,4–7,9 százalékos emelkedésével számolnak.

Nyáry Zsigmond



Leonyid V. Kantorovics

TUDOMÁNYOS ÉLET

Az 1975. évi Nobel díjas közgazdászok

Leonyid V. Kantorovics

1912. január 19-én született Pétervárott, orvoscsaládban. 1926-ban beiratkozott a Leningrádi Egyetem matematikai fakultására. Tanulmányait 1930-ban fejezte be. 1935-ben megszerzi a fizikai-matematikai tudományok doktora fokozatot. 1958-ban lesz a Szovjetunió Tudományos Akadémiájának levelező tagja. 30 éven keresztül oktat és végez kutatómunkát szülővárosában. Személyével a második pétervári (leningrádi) tudós lépett be a közgazdasági Nobel-díjasok jelenleg csak néhány főnyi táborába. 1961-től tíz éven keresztül Novoszibirszkben a matematikai módszerek gazdasági alkalmazását vizsgálja. 1964-ben lesz a SZUTA rendes tagja. 1971-től Moszkvában a Népgazdaságtervezési és irányítási Intézetben dolgozik.

Kantorovics akadémikus a matematikában elért eredményeivel szerzett világhírnevet. Először a projektív halmazok elméletével foglalkozott. Számottevő eredményeket ért el a funkcionálanalízis területén is, ő vezette be és vizsgálta a lineárisan részben rendezett terek elméletét és az azon értelmezett műveleteket [1, 2].

Jelentős eredmények fűződnek nevéhez a közelítő módszerek terén [3]. Az elektronikus számítógépek programozása területén is eredeti elgondolásai voltak. Úttörő szerepet játszott a gépi technika alkalmazásában a matematikai számításokban és a bonyolult rendszerek vizsgálatában.

1938–39-ben, az optimális termelésszervezéssel kapcsolatban megoldási eljárást dolgozott ki a feltételes szélsőértékfeladatok azon osztályára, melyben a feltételek lineáris egyenlőtlenség alakúak [4]. Eljárása az ún. megoldó együtthatók módszerén alapul. Ezen együtthatók a Lagrange szorzók általánosításai. A negyvenes években bővítette módszere alkalmazási lehetőségeit [5, 6, 7]. Maga a feladattípus később, G. Dantzig eredményei alapján, lineáris programozás elnevezéssel vált közismertté. A lineáris programozás módszerét az elmúlt évtizedekben sokszor és eredményesen alkalmazták például a műszaki és haditechnikában, valamint a gazdasági életben.

1959-ben jelent meg Kantorovics híres könyve [8], melyben részletesen kifejti a népgazdaság optimális tervével összefüggő nézeteit. A könyv több megközelítésben vizsgálja az erőforrások szétosztásának különféle módjait. A mű alapvető kategóriája az ún. *objektíve meghatározott értékelések* rendszere (ez nem más mint a lineáris programozási feladat duális megoldása, vagy az ún. árnyékárak vektora vagy ismét Kantorovics elnevezésével a megoldó együtthatók). A szerző bírálja a tervezés hiányosságait (a lekötött holt munka és a közvetett ráfordítások figyelmen kívül hagyását stb.).

Művének alapgondolata az, hogy ha a gazdálkodás célja a maximális kibocsátás valamilyen adott szerkezetben, akkor ez egyben meghatározza a rendelkezésre álló erőforrások kívánatos elosztását is. Az erőforrások racionális felhasználásának biztosításában az objektíve meghatározott értékelések nagy segítséget nyújtanak.

Kantorovics bemutatja az objektíve meghatározott értékelések és az optimális terv kapcsolatát. Majd kibővíti a vizsgálatot a beruházások hatékonyságának kérdésével. Felvázolja egy dinamikus modell összeállításának általános sémáját és bevezeti a dinamikus értékelési rendszer fogalmát is. Az objektíve meghatározott értékelések rendszerét nemcsak a terv kialakításánál, hanem végrehajtásánál is fel kívánja használni. Ugyanis a gazdálkodó egységek jövedelmezősége objektíve meghatározott értékelések rendszerével mérve akkor a legmagasabb, ha gazdálkodásuk az optimális terv szerint alakul. Így egyidejűleg nyílik lehetőség a gazdaságirányítás decentralizációjára és az össztársadalmi érdekek figyelembevételére. E nézetek élénk vitát váltottak ki a Szovjetunióban. Kantorovics akadémikus – részben a vita hatására – más szempontok alapján is kifejtette az optimumszámítással összefüggő gondolatait [9, 10].

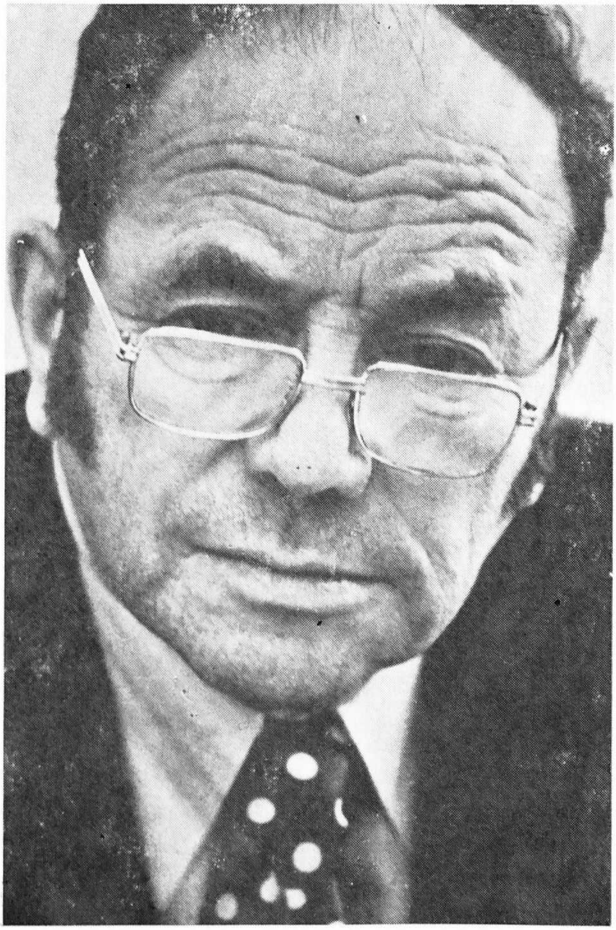
Munkássága jelentős mértékben szolgálta a szovjet közgazdaságtudomány javát, a matematikai módszerek és a számítástechnika gazdasági alkalmazásának elterjesztését.

Nagy szerepet játszott a tudósképzésben, a tudományszervezésben és a tudományos ismeretterjesztésben.

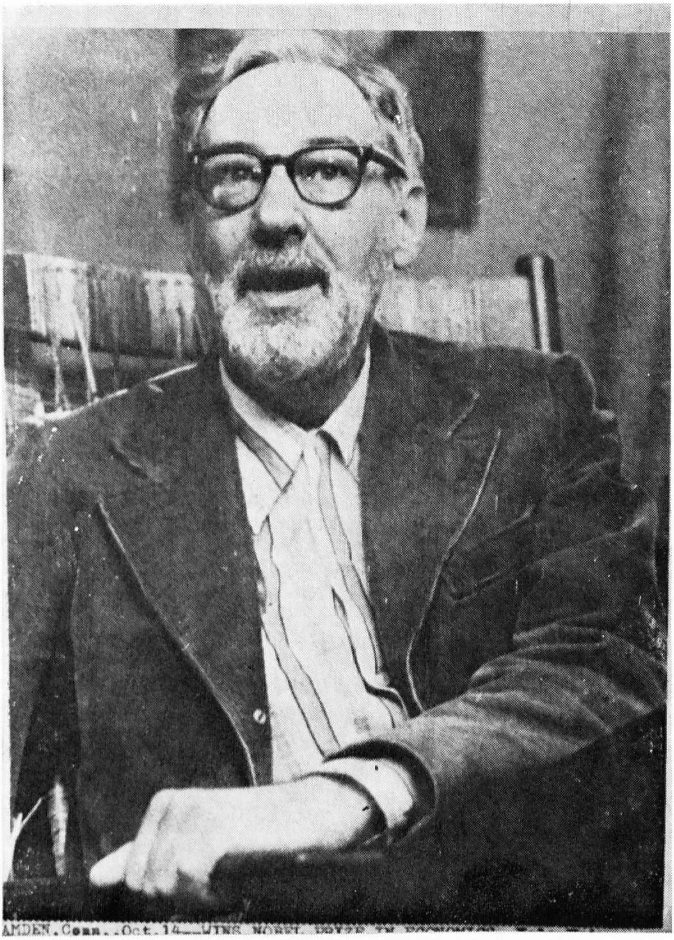
Munkásságát a Nobel-díj elnyerése előtt is elismerték. Különböző szovjet érdemrendek birtokosa. Ezen túl 1949-ben Állami díjat, 1965-ben (V. Sz. Nyemcsinovval és V. V. Novozsilovval közösen) Lenin-díjat kapott. A Magyar Tudományos Akadémiának és a bostoni Amerikai Művészetek és Tudományok Akadémiájának tiszteleti tagja.

KIVONATOS BIBLIOGRÁFIA

1. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах (Funkcionálanalízis részben rendezett terekben) (Гостехниздат, Москва—Ленинград, 1950. (Társszerzők: Vulich, B. Z. és Pinsker, A. G.)
2. Функциональный анализ в нормированных пространствах (Funkcionálanalízis normált terekben.) Физматгиз, Москва, 1959. (Társszerző: Akilov, G. P.)
3. Приближенные методы высшего анализа (A felsőbb analízis közelítő módszerei.) 5 изд., Физматгиз, Москва—Ленинград, 1962. (Társszerző: Krilov, V. J.)
4. Математические методы организации и планирования производства (A termelés szervezésének és tervezésének matematikai módszerei.) Издательство ЛГУ, 1939.
5. Об одном эффективном методе решения некоторых классов экстремальных задач (A szélsőértékfeladatok néhány osztályának hatékony megoldási módszeréről.) Доклады Академии наук СССР, том 28, № 3, стр. 212—215, 1940.
6. О перемещении масс (Az anyagmozgatásról.) Доклады Академии наук СССР, том 37, № 7—8, стр. 227—229, 1942.
7. Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков (Matematikai módszerek alkalmazása a teherszállítás elemzésében.) В сборнике «Проблемы повышения эффективности работы транспорта». Издательство Академии наук СССР, стр. 110—138, 1949. (Társszerző: Gavurin, M. K.)
8. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов (Az erőforrások legjobb felhasználásának gazdasági számítása.) Издательство Академии наук СССР, Москва, 1959.
9. Оптимальные модели перспективного планирования (A távlati tervezés optimális modelljei.) В сборнике «Применение математики в экономических исследованиях» том III, стр. 7—87, Издательство Мысль, Москва, 1965. (Társszerző: Makarov, V. L.)
10. Оптимальные решения в экономике. (Optimális döntések a közgazdaságtanban.) Издательство «Наука», Москва, 1972. (Társszerző: Gorsztko, A. B.)



Leonyid V. Kantorovics



Tjalling C. Koopmans

Tjalling C. Koopmans

1910. augusztus 2-án született S Gravelenadban, Hollandiában. Egyetemi diplomáját az Utrechti Egyetemen szerzi meg 1933-ban, majd tanulmányait a Leideni Egyetemen folytatja, ahol 1936-ban doktorál. Két évig tanít a Rotterdam-i Közgazdasági Egyetemen, utána a Népszövetségben dolgozik szakértőként. 1940-ben az Amerikai Egyesült Államokba költözik, ahol először statisztikusként, illetve közgazdászként különböző cégeknél tevékenykedik. 1944-től a Chicago-i Egyetemen oktat és kutat (a Cowless Commission keretében). 1955-től mind a mai napig a Yale Egyetem kutatóintézetének (Cowles Foundation for Research in Economics) munkatársa, 1961—67 időszakban igazgatója. Kutató munkája mellett oktat a Yale és a Harvard Egyetemeken. Tagja az Amerikai Művészetek és Tudományok Akadémiájának, egy sor amerikai és nemzetközi társaságnak. Tiszteletbeli doktora a „Holland Közgazdasági Iskolának" (1963) és „Louvain-i Katolikus Egyetemnek" (1967). 1975-ben közel egy évet Európában (Ausztriában) töltött, mint a IIASA (Nemzetközi Alkalmazott Rendszeranalízis Intézet) vezető munkatársa.

Koopmans professzor munkásságát javarészt a matematikai módszerek közgazdasági alkalmazása terén fejtette ki. Kezdetben a matematikai statisztikai módszerek továbbfejlesztésén munkálkodott és jelentős szerepe volt az ökonometriai elmélet és módszertan kifejlesztésében is. Különösen [1] cikke talált széleskörű visszhangra, amelyben állástfoglalt a statisztikai adatok önmagában vett elemzése ellen, s egyidejűleg hangsúlyozta az elméleti hipotézisek jelentőségét a statisztikai elemzésben. A Cowless Commission Monographs sorozat ökonometriai tárgyú kötetei közül egynek szerkesztője [2], egy másiknak társszerkesztője [3], s egyben több ezekben megjelenő tanulmánynak szerzője.

Érdeklődése fokozatosan a matematikai közgazdaságtan felé fordul. Úttörő érdemeket szerzett a lineáris tevékenységelemzés (activity analysis) elméletének kialakításában, amely szorosan kapcsolódik a lineáris programozási modellek erőforrás allokációs elméletre való alkalmazásához és lényegében azok általános modelljének tekinthető. A lineáris modellek közgazdaságelméleti alkalmazásában jelentős mérföldkő a Koopmans szerkesztésében megjelent tevékenységelemzés témájú tanulmánykötet [4]. Ebben található „A termelésnek, mint a tevékenységek hatékony kombinációjának elemzése" c. tanulmánya [5], amelyben elméletileg átfogó módon tisztázta a racionális erőforrás allokáció lineáris modelljeinek mind „primális", mind „duális" vetületeit. Megmutatta, hogy az erőforrások lehetséges hatékony (efficiens) felhasználásai és racionális döntések alapjául szolgáló kalkulatív értékelési rendszerek — egy lineáris modell keretei között — kölcsönösen feltételezik egymást. Speciális esetben : egy optimális erőforrás szétosztási struktúra (optimális terv) meghatározza az erőforrások és termékek racionális értékelési rendszerét, s ily módon a Koopmans által megfogalmazott tételek és Kantorovics tételei lényegüket tekintve megegyeznek.

Jelentős állomás Koopmans munkásságában a közgazdasági tudomány állapotáról írt 3 esszéje [6]. Az erőforrás allokáció kérdéseinek vizsgálata vezette el az általánosabb elméleti keret: az általános egyensúlyelmélet tanulmányozásához. Az első esszében számos szempontból érdekes egyszerű és világos módon foglalta össze a statikus és dinamikus egyensúlyelmélet eszköz- és fogalomrendszerét. („Allocation of Resources and the Price System".) Az egyensúlyi elméletek átfogó tanulmányozása és kritikája nyomán felvetődő, a közgazdasági elmélet általános metodológiáját és továbbfejlesztését illető észrevételeit fogalmazta meg a könyv második esszéjében („The Construction of Economic Science"). A 3. esszében pedig konkrét módszertani kérdésekkel foglalkozott, elsősorban a matematikai és számítástechnikai módszerek alkalmazásának addigi és várható eredményeivel („The Interaction of Tools and Problems in Economics"). A három esszé elsősorban közgazdászok számára íródott, s a mű szerves folyamányaként közreműködött egy matematikusoknak szánt, a matematikai közgazdaságtan főbb kérdéseit áttekintő tanulmány [7] megírásában is.

A 60-as években figyelme elsősorban a dinamikus modellek felé fordult, s számottevően járult hozzá az optimális növekedés kritériumai kapcsán jelentkező elméleti problémákhoz (pl. [8]), a leggyorsabb ütemű arányos növekedés kérdéseihez [9]. (1975-ben Magyarországon tartott előadása során például a diszkontálás létjogosultságának elméleti tisztázatlanságát illusztrálta két ellentétes konzekvenciájú modellel.) 1970-ben jelent meg tudományos munkásságának addigi eredményeit összefoglaló gyűjteményes kötete [10].

KIVONATOS BIBLIOGRÁFIA

1. Measurement without Theory „Review of Economics and Statistics". August 1947.
2. Statistical Inference in Dynamic Economic Models Cowless Commission Monograph 10. Wiley, N. Y. 1951.
3. Studies in Econometric Method (társszerkesztő: W. C. Hood) Cowless Commission Monograph 14. Wiley, N. Y. 1953.
4. Activity Analysis of Production and Allocation. Cowless Commission Monograph 13. Wiley, N. Y. 1951.
5. Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities (megjelent [4]-ben).
6. Three Essays on the State of Economic Science. McGraw-Hill, N. Y. 1957.
7. Selected Topics in Economics Involving Mathematical Reasoning (társszerző: Bausch, A. F.). SIAM Review 1. July, 1959.
8. Stationary Ordinal Utility and Impatience. Econometrica, 1960. No. 2.
9. Economic Growth at a Maximal Rate in „Activity Analysis in the Theory of Growth and Planning" (eds. Malinvaud, E.—Bacharach, M. O. L.). McMillan, N. Y. 1967.
10. Scientific Papers of T. C. Koopmans. Springer, Berlin, 1970.

Gábor Győző—Zalai Ernő

Operációkutatás a gyakorlatban '75 konferencia

1975. október 7—10. között a fenti címmel rendezett Győrben operációkutatási konferenciát a Neumann János Számítógéptudományi Társaság Operációkutatási Szakosztálya, a Bolyai János Matematikai Társulat Matematika Alkalmazási Szakosztálya és a Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai-Közgazdasági Szakosztálya — idén már negyedik alkalommal közösen.

A konferencia 230 résztvevője előtt 62 előadás hangzott el. A résztvevők száma valamivel kevesebb, az előadások száma valamivel több volt, mint a korábbi hasonló témájú konferenciák esetében. Az előbbi, egyéb pl. szervezési okokon kívül, az operációkutatási módszerek iránti érdeklődés némi visszaesését is tükrözi. Ezzel szemben biztató jel, hogy viszonylag sok olyan, többnyire fiatal, szakember volt a résztvevők között, aki első alkalommal jelent meg operációkutatási konferencián.

Ugyancsak az előző megállapításnak mond ellent, hogy a konferencián a gyakorlat lépett előtérbe. Az előadásoknak közel háromnegyede kapcsolódott közvetlenül alkalmazáshoz, de a módszertani előadások egy része is foglalkozott valamilyen formában alkalmazási lehetőségekkel. Az alkalmazásokkal foglalkozó előadások jól tükrözték, hogy napjainkban nyer valódi, de legalábbis a korábbiakhoz képest más tartalmat az az állítás, hogy az operációkutatási módszerek alkalmazásának előfeltétele egy megfelelő információs rendszer léte vagy egy ilyennek az operációkutatási modellel párhuzamos kidolgozása.

Az előadások egy részét felkért előadók tartották. Több ilyen előadás az operációkutatás helyzetét tekintette át egy-egy fontos népgazdasági ágazatban. Ilyen összefoglaló előadás foglalkozott a nehézipar, építésügy, a gépipar, a mezőgazdaság és a vegyipar területén elért eredményekkel és az operációkutatási módszerek alkalmazásának várható alakulásával. Ugyancsak referáló előadások hangzottak el a magyar matematikai-közgazdasági kutatás általános helyzetéről és a hosszútávú tervezési modellszámítások tapasztalatairól. A konferencia záróülésének előadása az SzKFP nyújtotta eszközháttérrel, ennek 1976—80 közötti várható alakulásával és az ESzR Program szerint létrehozott operációkutatási alkalmazási softwareről adott áttekintést. Az esettanulmányokkal foglalkozó, vagy ilyenek egy részét ismertető előadások között is már több olyan volt, melyeknek eszközbázisát ESzR gépek nyújtották.

A közlekedés és szállítás különböző problémái, a gépipari, a nehézipari és a vegyipari üzemek termelésének programozása és irányítása volt a témája néhány további előadásnak. Elsősorban ezek az előadások sugallták az információs rendszerek szerepére vonatkozó előbbi megjegyzésünket. Az előadások megoszlása alapján is változatlanul jelentős az operációkutatási alkalmazásokban a hálótechnikához kapcsolódó irányítási rendszerek szerepe. Lényegesnek tartjuk, hogy a konferencián több mezőgazdasági témájú előadás hangzott el. Viszonylag kevés előadás érintette viszont az operációkutatási software fejlesztését. A konferencián a népgazdasági problémákkal külön szekció foglalkozott. Elhangzott előadás orvosi alkalmazásról, két érdekes előadás témája pedig a több cél modellezésének problémája volt.

A módszertani előadások között nagy többségben nemlineáris programozási témák szerepeltek, ami ismét sokféleképpen értékelhető. Mindenesetre, éppen a győri konferencia alapján is megkérdőjelezhető egy olyan korábbi vélemény, hogy a problémák többségének operációkutatási megoldásánál a lineáris programozás közvetlen alkalmazásáról van szó. A módszertani előadások megoszlása ezt nem igazolta.

Nagyon kevés volt az olyan előadás, mely szorosabb értelemben vett műszaki alkalmazással foglalkozott. Hogy ez mennyiben volt szervezési hiba, vagy mennyiben tükrözi a tényeket, nem tudjuk. Nem is most kell fejtegetésbe kezdeni arról, hogy mi az operációkutatás és hol vannak határai, de fontos lenne ezt a területet jobban figyelemmel kísérni. Ide kívánkozik az is, hogy a konferencián elhangzott vízügyi témájú előadásokat — legalább is számunkra meglepően — kevesen hallgatták meg, holott erről a területről elismerésre nagyon méltó alkalmazásokat mutattak be az előadók.

STÁHL JÁNOS

III. Nemzetközi Rendszerelméleti és Kibernetikai Kongresszus

Bukarest, 1975. aug. 25–29.

Az általános rendszerelméleti és kibernetikai világszervezet (World Organisation of General Systems and Cybernetics) kongresszusa a román tudományos élet széleskörű érdeklődése és részvétele közepette zajlott le. A szervezőbizottság jó munkáját dícséri, hogy az elhangzott 320 előadást úgy tudták 7 szekcióba csoportosítani, hogy azokat a mintegy 1500 fő résztvevő közel egyenletes megoszlásban látogatta. Figyelemre méltó az is, hogy az összes előadásokból 125 referátum román szerzőktől származott.

A kongresszus egyik eseményének ígérkezett a Római Klub nyilt fóruma, ezen belül PECCEI-nek, a klub elnökének „A tudomány és a technológia jövője az elkövetkező 30 évben" címmel megtartott előadása. A hivatalosan felkért korreferensek hozzászólása után azonban elhalt az érdeklődés. Ehhez az ismert megállapításokra szorítkozó előadás is hozzájárult.

Ugyancsak nyílt fórum foglalkozott az elkövetkező 25 év információ fejlesztésének kérdéseivel. Itt főként a román szakemberek előtt álló feladatok megtárgyalására helyezték a hangsúlyt, a figyelem középpontjába állítva az irányítás különböző szintjeit kiszolgáló információs rendszerek fejlesztését.

A konferencia szekcióüléseit három plenáris szimpozium vezette be a következő témakörökben:

– Gazdasági kibernetika és vezetés
– Rendszerelmélet
– Orvosi és biológiai számítások

B. KORTE és M. GROTSCEL „Az input-output analízis és az operációkutatási technika" c. előadásában olyan optimalizálási feladatokkal foglalkozott, amelyek termelési függvényeket használnak célfüggvényként és a feltételi rendszer a Leontief modellt és egyéb korlátozó feltételeket tartalmazza.

Érdekes modellt javasolt S. KLACZKO RYNDZIUM (Svájc) a politikai személyek és az adott társadalom szerkezetének dinamikus egymásrahatásának vizsgálatára, amely lehetővé teszi a történeti folyamatok vizsgálatát szimulációs módszerrel.

R. W. REWANS előadásában azt fejtegette, hogy a modern gazdaság legjelentősebb jelenségeit kifejező rendszert (C) egy olyan tanuló eljárásnak (L) kell tekinteni, amelyben ha $L > C$ akkor a gazdaság valószínűleg túléli, míg ha $L < C$, akkor minden bizonnyal nem éli túl a nehézségeket.

A rendszerelméleti szimpozium két, nagyobb érdeklődéssel kísért előadását említeném meg. E. LÁSZLÓ (USA) „Az általános rendszerelmélet alapjai és kihatásai" c. előadásában abból indul ki, hogy a jellegéből adódóan interdiszciplináris tudománynak jelentős eredményei vannak, de ugyanakkor súlyos kritika is éri. Az elmélet jelentőségét abban látja, hogy alapvető princípiumokat és a munkák keretének koncepcióit egységes, összekapcsolódó rendszerszemléletben adja meg.

R. E. KALMAN (USA) a matematikai rendszerelmélet feladatait vizsgálva összehasonlította a Wiener-i koncepciót a matematikai rendszerelmélet fejlődésével és felhasználási területeivel. Arra a következtetésre jutott, hogy együttesen jóval nagyobb tudományos területet uralhatnak, mint ahogy ezt Wiener a Kibernetika c. könyvében meghatározta.

Nagy érdeklődést váltott ki az orvosi és biológiai számítások szimpoziuma is. A szimpozium első előadója J. ANDERSEN azt fejtegette, hogy rendkívül bonyolult rendszerek nagy terjedelmű számításait kell e területen elvégezni. Ezért igen nehéz egy olyan információs rendszer megtervezése, amely felöleli a gyártás és a vele kapcsolatos adminisztráció korszerűsítését. M. GREENFIELD (USA) előadásában arra a következtetésre jutott, hogy az emberi betegségek a szervezet egy helytelen vezérlési állapotának tekinthetők. Ebben a vezérlési folyamatban az előadó véleménye szerint a vér áramlásának nagy szerepe van. E. NICOLAU (Románia) a kibernetika fontosságát húzta alá, amely szükséges az élet jelenségeinek jobb megértéséhez. A szerző hangsúlyozta, hogy a neurokibernetika is jelentős fejlődésen ment keresztül. Szükségesnek tartja, hogy a jövőben a számítógéptudomány és az agytudomány művelői még szorosabb kapcsolatot építsenek ki.

A kongresszus további munkáját 7 szekcióban végezte. Ismertetőm korlátozott terjedelme, valamint az elhangzott előadások nagy száma miatt nincs lehetőség valamennyi előadás akár csak cím szerinti megemlítésére sem. Érdemes viszont egy-egy szekció néhány, akár szubjektíven kiválasztott előadásának kiemelése, az ülések képének felrajzolása érdekében.

Az első szekció a gazdasági rendszerek vezérlésével foglalkozott. Nagyszámú előadás szólt a szocialista országokban alkalmazott különféle népgazdaságtervezési modellekről. Több előadást hallottunk regionális tervezési modellekről. Ugyancsak több előadó számolt be a makroökonomiai rendszerekben a regionális tervezésben és a termelési folyamatokban alkalmazott szimulációs modellekről. Több nyugati előadó az inflációs jelenségek vizsgálatával foglalkozott. T. Henize (USA) hangsúlyozta, hogy az új inflációs jelenségek leírására az eddigi közgazdasági elméletek alkalmatlanokká váltak. Az általa javasolt modell 2%-os pontossággal írja le az Egyesült Államok utóbbi 18 éves gazdasági növekedésének, az inflációnak és a fizetések emelkedésének összefüggéseit.

A második szekció a „Rendszer és modell" címet viselte. A konferencia szervezői e szekcióba rendkívül sok területről szóló előadást csoportosítottak, így a szekció munkájának áttekintése és főleg megértése nagy nehézségekbe ütközött. Feltehetően ez volt az oka annak is, hogy e szekció volt a legkevésbé látogatott. Hallhatott itt az érdeklődő automata elméleti problémákról, katasztrófa modellről, gazdasági hatékonyságról, lineáris és nem lineáris modellekkel leírható rendszerek vezérelhetőségének kérdéseiről, általános rendszermodellek készítésének elméleti alapjairól, idegmodellekről, általánosan a stabilitás és evolúció kapcsolatáról, rendszerek szimulációjáról, nem lineáris nagy rendszerek topológiai és geometriai analíziséről, teleogenetikai rendszerek elméletéről, a Cluster analízisről mint a globális optimalizálás eszközéről stb.

Az ipari folyamatok vezérlésének problémakörével foglalkozott a harmadik szekció. Az előadások egy része a mikroszintű irányítás és vezérlés általános problémáival foglalkozott. A vegyipar területéről az etilén és polietiléngyártás, valamint a lepárló berendezések folyamatvezérlésének megoldott módszereit ismertették az előadók. Ezenkívül az egyes gépgyártási folyamatok, mezőgazdasági és könnyűipari termelés vezérlési kérdései kerültek szóba, egyes előadások foglalkoztak a beruházások, az oktatás és a piackutatás irányításának problémáival is.

Jól körülhatárolt területtel foglalkozott a „Környezet és kibernetika" nevet viselő negyedik szekció. A demográfiai fejlődésre kidolgozott dinamikus modellel új faktorok figyelembevételével 2000-ig végeztek előrebecsléseket Spanyolországban. A kontinensek vízgazdálkodási modelljei mellett francia előadók beszámoltak az óceánok biológiai egyensúlyi feltételeinek követelményrendszeréről és a kidolgozott modellről.

A kommunikáció, a nevelés és az informatika kérdéseivel foglalkozott az ötödik szekció. Az előadások egy csoportja a nevelés és képzés rendszerelméleti kezeléséből kiindulva foglalkozott a számítógéppel segített termelés negatív és pozitív visszacsatolásos modelljeivel. Egy másik csoport az információrendszerek kiépítésének, az adatbázis meghatározásának, az információ mérésének és megőrzésének problémakörét tárgyalta. A harmadik csoport az ember és a számítógép közötti kommunikáció tárgykörét taglalta. Ezek közül kiemelem C. Muses (USA) előadását, aki egy új univerzális programozási nyelvet ismertetett. Említésre méltó P. A. Sarkar (Anglia) beszámolója a természetes nyelvek felhasználási lehetőségeiről az interaktív kérdés-felelet rendszerben, amely nagyobb lehetőséget ad a számítógépes képzettséggel nem rendelkező szakemberek számítógépes munkájához.

A mesterséges intelligencia (6. szekció) munkáját nagy érdeklődés kísérte. Ebben a szekcióban feltűnően nagy volt a nyugati előadók aránya. M. A. Andrew (Anglia) bevezető előadásában hangsúlyozta, hogy a kibernetika és a mesterséges intelligencia területén elért eredmények olyan távlatokat nyitottak meg, hogy a területtel foglalkozó szakembereknek belső viták keretében kell kialakítaniuk közös cselekvésterveiket. Véleménye szerint az elért eredmények fontosságukat tekintve túlszárnyalják az atomfizika és a génsebészet eredményeit, ennélfogva veszélyei is nagyobbak. Ide kapcsolható E. R. Caianiello (Olaszország) előadása, aki a mesterséges intelligencia törvényeivel és szabályaival foglalkozott. Egy-egy előadó a kreativitás és az információs rendszerek matematikai elméleti kérdéseit taglalta. Több előadó foglalkozott az intelligens rendszerek és nyelvek követelményrendszerével, az intelligens felismerő rendszerekkel, a tanuló automatákkal és a robotok tanulósi folyamatával. R. L. Taylor (Kanada) előadásában arra a következtetésre jutott, hogy a robotok képesek a beszélő embertől is tanulni.

Ideg és biokibernetika címmel ülésezett a hetedik szekció. Munkájának áttekintése meglehetősen speciális ismereteket igényelne.

Összefoglalva megállapítható, hogy a kongresszus áttekintést kívánt adni a rendszerelmélet és kibernetika területéről. A rendkívül széles témakör miatt azonban hiányzott az áttekintést biztosító rendezettség. Az előadások szelekciójával, azok számának csökkentésével a támakörök specifikusabb körülhatárolásával minden bizonnyal „emészthetőbbé" vált volna a nagyon szétfolyó képet mutató világszervezet kongresszusa

Külön kiemelem a fejlett országokban rendelkezésre álló technikai lehetőségeket, amelyek nélkül különösen az 5—7 szekcióban bemutatott eredmények nem realizálódhattak volna. A kongresszuson résztvevő több hazai szakember véleménye megegyezett abban, hogy ezekkel a területekkel nálunk kevesen foglalkoznak és célszerű volna a kutatók figyelmét rájuk irányítani.

FILEP GYÖRGY

A Regionális Tudományi Társaság és a XV. Európai Kongresszusa

A Regionális Tudományi Társaság (Regional Science Association, rövidítve RSA) a területi (regionális) elemzés témakörébe tartozó tudományos vizsgálatokat támogató, a szakmai nézetek cseréjét elősegítő nemzetközi társaság. 1954 decemberében alakult meg Detroitban. Titkársága a Pennsylvania Egyetem (Philadelphia, USA) Regionális Tudományi Tanszékén működik. Jellege interdiszciplináris, egyaránt alkotó elemei közé tartoznak a közgazdasági elmélet, a gazdaságföldrajz, a kvantitatív modellező eszközök. Mint ahogy a Társaság 1956-ban megfogalmazott alapszabályában áll: „A Társaság fő célja: a régióra vonatkozó nézetek cseréje, s a régiószintű vizsgálatok elősegítése a különböző társadalomtudományok és más tudományok talaján regionális elemzési célra létrehozott eszközök, módszerek, valamint a kapcsolódó fogalmak, eljárások felhasználásával. A Társaság ezt a célkitűzést a tagjai közötti szakmai vita és a kapcsolódó tudományterületek művelőivel való kommunikáció elősegítésével igyekszik megvalósítani."

A Társaság évenként több konferenciát is rendez. Ezek közül a két legjelentősebb az augusztus végén tartott európai és a novemberben tartott északamerikai konferencia. Az ezen a két konferencián tartott, meghívott előadások anyaga a Társaság *Papers* című kiadványában, évenként 2 kötetben nyomtatásban megjelenik.

A Társaság munkájában számos ország kutatói vesznek részt, általában nemzeti szekciókat alkotva — kivétel ez alól pl. az ún. német nyelvű szekció, amely NSzK, Svájc és Ausztria kutatóit tömöríti —. Egyes szekciók helyi jelentőségű, kisebb külön konferenciákat, szemináriumokat is rendeznek. A Társaság vezetősége az elnökből, a következő évre megválasztott és az előző évi elnökből, a két elnökhelyettesből, a titkárból, a tiszteletbeli elnökből, a pénztárosból és a *Council* további 6 tagjából áll. A Társaság pénzügyi alapját a tagdíjak képezik, de bizonyos más pénzügyi alapok is rendelkezésére állnak. Folyóirata az évenként 3-szor megjelenő *Journal of Regional Science*, amely a szakterület egyik legtekintélyesebb nemzetközi irodalmi fóruma.

1967-ben alakult meg a Magyar Közgazdasági Társaság Népgazdaságtervezési Szakosztályának Területi Tervezési Szekciója, s ennek társszerveként az RSA magyarországi tagozata. Az RSA európai konferenciája eddig 2 alkalommal volt szocialista országban: 1965-ben Krakkóban és 1968-ban Budapesten. Az európai konferenciákon az 1960-as évek kezdete óta vesznek részt magyar kutatók.

A társaság Budapesten tartotta XV. európai kongresszusát is, 1975. augusztus 26—29. között. A kongresszus helyi rendezője az említett Területi Tervezési Szekció és az RSA magyar tagozata volt. A rendezvény sikeres volt, amit a résztvevők és a szereplő előadások szokásosnál nagyobb száma és a gördülékeny lebonyolítást méltató vélemények tükröznek.

21 ország 160 kutatója vett részt a kongresszuson, a külföldiek száma ebből 119 volt. 40 előadás hangzott el a meghívott előadások 7 és a közreadott előadások 5 szekciójában. A kongresszus centrális témaköre a településhálózat optimalizálása volt.

Az előadások megoszlását tekintve örvendetes *eltolódás* tapasztalható korábbi kongresszusokhoz képest *a gyakorlati alkalmazhatóság irányában*. Persze ez az eltolódás csak viszonylagos, s főleg a kifejezetten elméleti témák módszertani vizsgálatokkal való felváltását jelenti. Előremutató irányzat az is, hogy a módszertani előadások jelentős hányada egy-egy módszer kifejtésével együtt annak valamilyen konkrét alkalmazásáról, s az ebből származó tapasztalatokról is beszámolt.

Jelentős volt a magyar szakemberek szereplése a kongresszuson. A megnyitó beszédet KÁDAS KÁLMÁN bevezető szavai után HETÉNYI ISTVÁN tervhivatali államtitkár tartotta. Öt magyar előadás hangzott el: ANDORKA RUDOLF: A települések fejlettségi sznvonalának elemzése faktoranalízis segítségével; Az ipar területi szerkezete és a városhálózat fejlődése közötti kölcsönhatások Magyarországon; KÖRMENDI KLÁRA: A termelőerők területi elhelyezésének és a településhálózat fejlesztésének koordinálása; Lackó László—Franczia László—Répássy Helga: Összefüggések a településhálózat sajátos elemei és az életkörülmények területi különbségei között Magyarországon; Kádas Sándor: A közlekedési hálózat és az ipartelepítés közötti kölcsönhatás modellezéséről.

Az egyes ülésszakok témái a következők voltak:

— Településrendszerek elmélete és elemzése
— Városi település-rendszerek: folyamatok és modellek
— Városi- és regionális politikák elemzése
— Település-rendszerek optimalizálása
— A városi tevékenységek telepítésének modelljei
— A területfelhasználás szervezése és hatásai
— Regionális tevékenység-rendszerek
— Optimális regionális fejlődés környezeti korlátozó feltételek mellett
— Városi- és regionális modellek
— Ipartelepítés és regionális fejlesztés
— Közlekedési modellek
— A településhálózattal összefüggő népesedési modellek.

A számos előadás közül most csak néhány érdekesebb külföldi előadás vázlatos ismertetésére szorítkozunk.

„A városi tevékenységek telepítésének modelljei" c. szekcióban hangzott el a lengyel Piotr Korcelli „Városi, térbeli kölcsönhatáson alapuló modellek a tervgazdaságban: egy előzetes felmérés" c. előadása. Ebben a szerző kísérletet tett a nyugati országok kutatói között elterjedt, igen népszerű és a gyakorlatban viszonylag széles körben eredményesen alkalmazott Lowry-típusú városi szimulációs rendszermodelleknek a szocialista tervgazdaság viszonyaira való adaptálására, használhatóságának a felmérésére. Kiindulópontja az amerikai I. Lowry vezetésével 1962—63-ban az USA-beli Pittsburgh városára kidolgozott komplex modell volt, amelyet azóta sok irányban továbbfejlesztettek. Ehhez kapcsolódott 1970 körül az angol A. Wilson által megfogalmazott „térbeli kölcsönhatások elmélete", amelynek magja a fizika analógiájára bevezetett entrópia fogalom — entrópia maximalizálás — alkalmazása. Ez az elmélet részben konkrét modelltípusokat szült, részben egy „modellezési filozófiát". Ezeken az alapokon kb. 1970 óta számos operatív, komplex város-modellt dolgoztak ki — Angliában, Észak-Amerikában, az NSzK-ban, de néhány délamerikai nagyvárosra is —. A modelltípusnak a szocialista viszonyok közötti alkalmazására kevés kísérlet történt. Korcelli egyetlen ilyen, jól dokumentált kísérletről tud: a Ljubljana-i alkalmazásról. Az előadás sorra veszi a Lowry-típusú modellek rész-modelljeit, alkotó elemeit, így a munkahelyre történő utazások vizsgálatát, a vásárlási célú utazások modellezését, a termelési és a szervezeti kapcsolódások vizsgálatát, és elemzi az ezekkel kapcsolatos, szocialista országokban végzett kutatásokat.

Az „Ipartelepítés és regionális fejlesztés" c. szekcióban szerepelt a holland Jan Paelinck „Kvalitatív több kritériumos elemzés, környezetvédelem és multiregionális fejlesztés" c. előadása. A szerző célja döntési módszert adni sok-kritériumos regionális fejlesztési problémákra olyan esetekben, amikor a variánsok értékelésére kevés kiinduló adat áll rendelkezésre. A módszer vázát egy 3 lépcsős modell alkotja. Az első lépcsőben a kapacitás bővítése előtt álló gazdasági egység igyekszik felmérni lehetséges döntési variánsainak összes gazdasági következményeit. Mivel a döntés általában valamilyen tevékenység (termelőegység) telepítésére vonatkozik, a régiók versenyeznek a telepítendő új kapacitásért, a döntéshozó pedig különböző kritériumok szerint értékeli, pontozza az egyes régiókat. Így az értékelést kifejező vektorokat kap (a vektorok komponenseinek száma az alkalmazott kritériumok száma). A döntési kritériumokhoz relatív súlyokat rendelve az értékelést kifejező vektorok között már bizonyos rendezési relációkat definiálhatunk. A döntési variánsok értékelése alkotja a módszer második lépcsőjét. A harmadik lépcső már nem az egyes döntéshozó gazdasági egységek, hanem egy felsőbb, gazdasági tervező szerv nézőpontjára vonatkozik: az új üzemtelepítések, kapacitás átcsoportosulások legkülönfélébb — keresletet, ill. kínálatot növelő, környezetszennyeződést, foglalkoztatást befolyásoló — hatásait igyekszik megbecsülni, hogy ez a szerv (állam) szükség esetén helyesen tudjon beavatkozni. Az előadás részletesen csak a második lépcső modelljével foglalkozik, amire egy egyszerű megoldó algoritmust is ad. A modell alkalmazását néhány szemléltető empirikus példa mutatja be.

A „Közlekedési modellek" c. szekció egyik érdekes előadása volt az NSzK-beli Werner Rothengatter „A beruházások optimális kiválasztása és ütemezése városi tömegközlekedési rendszerekben" c. előadása. Bevezetőben kifejti a szerző, hogy az állami infrastrukturális beruházások tervezésében újabban elterjedt költség-haszon („costbenefit") elemzéseknek az állami költségvetési források beszűkülése az oka. Így merült fel az igény több NSzK-beli nagyváros esetében a tömegközlekedés-fejlesztési koncepciók optimális egyeztetésére a rendelkezésre álló költségvetési pénzforrásokkal. A feladat kettős: az anyagi lehetőségek keretein belül maradó optimális közlekedésfejlesztési variáns kiválasztása, s az elfogadott terv végrehajtási ütemének meghatározása. A variánsok közötti választásnál többféle célrendszer játszik szerepet: a társadalom (állam) céljai, a megvalósítandó rendszert üzemeltető szerv, továbbá a rendszert használó egyének szempontjai. Más szemszögből a célok a város egyes körzeteinek lakói, ill. szociális rétegeinek szempontjai szerint oszlanak meg. A különböző célok más-más súlyozása esetén más-más optimális megoldás adódik, és érzékenységi vizsgálat mutatja ki a súlyoknak az egyes optimumokra vonatkozó „indifferencia" intervallumait. A kiválasztott rendszer megvalósításának optimális ütemezéséhez a rendszer „hasznosságának" időbeli „felfutására" vonatkozó függvényt kell meghatározni (idővel a rendszer jobban kiépül, egyre többen használják, s így hasznossága nő). Ennek az alakja lehet pl.

$$F(t) = \overline{F} - a\,e^{-gt}$$

ahol $\overline{F}$ egy telítődési érték, a és g pedig paraméterek. Ha γ a társadalmi időpreferencia tényező, akkor egy adott (t_1, t_2) intervallumon a rendszer „haszna":

$$u(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} F(t)\,e^{-\gamma t} dt.$$

Ebből levonva a beruházások diszkontált költségét adódik a „tiszta" társadalmi haszon, melynek a maximalizálása az optimális ütemezést adja. Feltételként a részidőszakokra vonatkozó pénzügyi korlátok és a rendszer egyes részeinek meghatározott egységekben való megvalósítása szerepel (pl. az egyes gyorsvasúti vonalszakaszokat vagy megépítik, vagy nem, félig megépítés nem jön szóba). Az adódó matematikai feladat — Hamburg és Karlsruhe esete szerepel az előadásban — egy vegyes változós lineáris programozási feladat lesz.

KÁDAS SÁNDOR

Kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója
Műszaki szerkesztő: Agócs András
Kézirat nyomdába érkezett: 1976. VII. 14. Terjedelem: 8,4 (A/5 ív)
76/3357 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

CONTENTS

BOOK REVIEWS

SCIENTIFIC LIFE

СОДЕРЖАНИЕ

О КНИГАХ

НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ

Ára: 24,– Ft

Előfizetés egy évre: 40,– Ft

INDEX: 26793

TARTALOM

KÖNYVEKRŐL

TUDOMÁNYOS ÉLET

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST