SZIGMA

Matematikai közgazdasági folyóirat

A Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai-Közgazdasági Szakosztályának lapja

*

E szám szerzői:

BRÓDY ANDRÁS, a közgazdaságtudományok doktora, az MTA Közgazdaságtudományi Intézet tudományos tanácsadója, DOBÓ ANDOR, a KGM Műszaki Tudományos Tájékoztató Intézet műszaki-gazdasági tanácsadója, ÉLTETŐ ÖDÖN, a KSH osztályvezető-helyettese, GRÓSZ MIKLÓS, a SZÁMGÉP osztályvezetője, KORNAI JÁNOS, az MTA levelező tagja, az MTA Közgazdaságtudományi Intézet tudományos tanácsadója, MEDVEGYEV PÉTER, az OT Számítóközpont munkatársa, MÓCZÁR JÓZSEF, a Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem adjunktusa, RIMLER JUDIT, kandidátus, az MTA Közgazdaságtudományi Intézete tudományos főmunkatársa, SIMONOVITS ANDRÁS, az MTA Közgazdaságtudományi Intézet tudományos munkatársa, SZIDAROVSZKY FERENC, a matematikai tudományok kandidátusa, az ELTE Természettudományi Kar adjunktusa, JÖRGEN W. WEIBULL, a stockholmi Műszaki Egyetem adjunktusa

Szerkesztőség: Budapest XI., Budaörsi út 43–45.

Levélcím: 1361 Budapest, Pf. 11.

Terjeszti a Magyar Posta. Előfizethető bármely postahivatalnál, a kézbesítőknél, a Posta hírlapüzleteiben és a Posta Központi Hírlap Irodánál (PKHI 1900 Budapest V., József nádor tér 1.) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a PKH 215–96 162 pénzforgalmi jelzőszámára. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest V., Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban

Előfizethető és példányonként megvásárolható: az AKADÉMIAI KIADÓ-nál, 1363 Budapest V., Alkotmány u. 21. Telefon: 111–010. Pénzforgalmi jelzőszámunk: 215–11488., és az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLT-ban, 1368 Budapest V., Váci u. 22. Telefon: 185–612. Előfizetési díj egy évre: 40,–Ft

Külföldön terjeszti a KULTURA Külkereskedelmi Vállalat, H-1389 Budapest, Pf. 149

KORNAI JÁNOS—JÖRGEN W. WEIBULL

A piac normál állapota hiánygazdaságban: egy sorbanállási modell

1. Bevezetés

Tanulmányunk tárgya egy olyan gazdaság, amelyre krónikus hiány és sorbanállás (az eladók piaca) jellemző. Ez a kelet-európai szocialista országok gazdaságának számos területéről elmondható, de más gazdasági rendszerekben is megjelenhet a hiány, például a lakáspiacokon szabályozott lakbérek esetén, vagy néhány fejlett tőkés ország egészségügyi szolgáltatásainál, vagy a fogyasztói javak piacán a fejlődő országokban.

Növekvő az érdeklődés az olyan gazdaságok elmélete iránt, amelyek nincsenek egyensúlyban a walrasi értelemben, sőt állapotuk messze esik attól. (Lásd például a következő munkákat: *Clower* (1965), *Barro—Grossman* (1971, 1974), *Benassy* (1975), *Malinvaud* (1977). Cikkünkkel ehhez a kutatási irányzathoz szeretnénk hozzájárulni. A téma nagyon tág és sok oldalról közelíthető meg.[1] Munkánk csak néhány kérdést érint, s jórészt mikroökonómiai szempontokat emel ki. Célunk az, hogy leírjuk egy piacot, amely nincs walrasi egyensúlyban, és mégis stacionárius állapotú, alapvető jellemzőit folytonosan helyreállítja. Bár eljutottunk matematikailag igazolható tételekhez, nem is annyira ezeket tekintjük kutatásunk fő eredményének, mint inkább a probléma *elemzési módját*, vagyis azokat a speciális szempontokat, amelyek segítségével a krónikus hiány közepette működő piacot leírjuk és elemezzük.

A cikk egy nagyon egyszerű modellt dolgoz ki, hogy elemzési módjába az olvasót bevezesse. A későbbiekben fogunk olyan cikkeket publikálni, amelyek feloldják a legszorosabb feltevések némelyikét és jobban tükrözik a feladat összetettségét. (Egy készülő második cikkben tárgyalni fogjuk az árut kereső vevő esetét, ún. „keresési modell" segítségével.) Itt csak egy dologról kell említést tennünk, mégpedig a sorbanállási rendszerek determinisztikus, illetve sztochasztikus modellezéséről. Más modellekkel szemben, amelyek sztochasz-

[1] A szerzők egyike, *Kornai* János hosszabb ideje foglalkozik a hiány tanulmányozásával. A jelenlegi munka előzményei a Kornai (1971, 1974, 1977) művek. Kornai János 1977-ben előadássorozatot tartott a stockholmi egyetemen, „A hiány gazdaságtana" címmel. Az előadások anyagának alapján könyv készül, amely a hiány elméletét több különböző oldalról fejti ki majd. A J. *Weibull*al közösen végzett kutatás, amelyet itt és egy következő második cikkben adunk közre, így része a hiánygazdaságtan szélesebb tanulmányozásának.

Kornai János felhasználja az alkalmat, hogy kutatásai támogatásáért háláját fejezze ki a Stockholmi Egyetem Nemzetközi Gazdasági Tanulmányok Intézetének (Institute for International Economic Studies) és a svéd kollégáknak a tőlük kapott ösztönzésért. Jörgen Weibull köszönettel tartozik a Swedish Council for Building Research támogatásáért, és a stockholmi Royal Institute of Technology matematikai osztályán dolgozó kollégáinak az alkotó bírálatokért.

Mindkét szerző hálás Lars-Göran *Mattson*nak, Ingemar *Nåsell*nek, és Johan *Philip*nek értékes javaslataikért és megjegyzéseikért. A cikket magyarra fordította *Szabó Judit*.

tikusak, ez a modell determinisztikus. Ez a megközelítés azt a meggyőződésünket tükrözi, hogy a krónikus hiánnyal jellemezhető helyzetekben a sztochasztikus elem másodlagos a rendszert szabályozó kölcsönös összefüggésekhez és visszacsatolási mechanizmusokhoz képest. Bár egy általános modellnek tartalmaznia kell a sztochasztikus jelleget is, egyes alapvető összefüggések determinisztikus keretben is megmagyarázhatók.[2]

Még egy előzetes megjegyzésünk van. *Leíró* elméletet adunk meg itt, és nem foglalkozunk normatív kérdésekkel. A hiány és a sorbanállás az élet tényei. Nem helyeseljük és nem is rosszalljuk őket — megértésükre törekszünk.

2. A modell: Általános leírás

A modell determinisztikus stock-flow modell, és közönséges differenciálegyenlet-rendszerként írjuk föl, két részletben. A 2. részben a modellt meglehetősen általános módon tárgyaljuk, inkább kvalitatív jellegű és mikroszintű fogalmakkal, a bemutatás és az értelmezés kedvéért. A 3. részben térünk ki a technikai részletekre és megadjuk a teljes leírást.

2.1. A piac szerkezete

Egyetlen *G áru* piacát tanulmányozzuk. Ez lehet egy bizonyos áru vagy lehet különböző aruk aggregátuma. Az árut oszthatatlan egységekben viszik piacra, egy vásárló egy vétel alkalmából csak egy egységet vesz. (Például egy autót vagy egy hűtőszekrényt . . .)

Egyetlen *eladó* van. (Egy monopolista, vagy az egyedi eladók aggregátuma.)

A vásárlók száma n. A vásárlók összességét részekre osztjuk, ezeket a vásárlók *csoportjainak* nevezzük. Valamennyi csoportnak megvan a maga jellemző viselkedési módja a piacon. Az i sorszámú csoport reprezentatív tagját *i típusú vásárlónak* mondjuk. A csoportok száma k, az i sorszámú csoportnak n_i tagja van;

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n.$$

A résztvevők száma (egy eladó; $n_1, n_2, \ldots, n_k$ vásárló) az időben állandó.

Bár a modell, ahogy azt a 3. részben formális módon definiáljuk, determinisztikus, „hibrid" modellnek is tekinthető, amely sztochasztikus komponensek középértékei között állapít meg determinisztikus összefüggéseket. Figyelni fogjuk például a vevők döntéseinek sorozatát, amikor vásárolnak. Minden ilyen döntési pontban a vásárlók csoportjainak aggregált viselkedését modellezzük *flow* egységekkel: a vásárlók beáramlását a döntési pontba és kiáramlásuk részarányát a döntési pontból, amely a döntési lehetőségeknek felel meg (az egyes döntési pontokban mindig csak két lehetőség van). Ezek a determinisztikus áramlási arányok azonban tekinthetők úgy, mint a sztochasztikus jellegű egyéni döntési viselkedési átlagai, a részarányok döntési valószínűségekként azonosíthatók. A modell más helyein determinisztikus sebességekről fogunk beszélni. Úgy, mint az áramlási részarányok, ezek is értelmezhetők a

[2] Köszönettel tartozunk Lars-Göran *Mattsonnak*, ő javasolta ezt a megközelítést először.

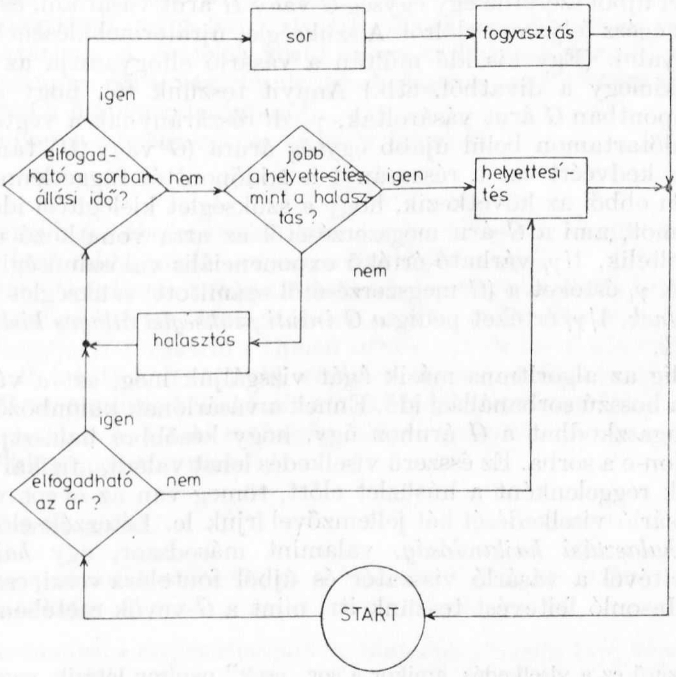
sztochasztikus egyéni viselkedés átlagaiként. A determinisztikus modell feltevéseinek szemléltetésére gyakran fogunk ilyen mikroszintű, sztochasztikus értelmezéseket adni. A sztochasztikus sorbanállási modellek irodalmában erre a megközelítésre időnként „hidrodinamikai megközelítés” elnevezéssel hivatkoznak, lásd pl. *Kleinrock* (1976) könyvét.

2.2. *A vásárlási algoritmus*

A vásárlás dinamikus folyamat, döntések sorozata. Mivel a vásárlás néhány viselkedési szabály szerint alakul, e folyamat egy *algoritmussal* írható le. Az ilyen algoritmus szerkezete természetesen a különböző vásárlási helyzetekben különböző lehet. Az itt következő elemzésben egyetlen speciális algoritmussal dolgozunk, amely szerintünk tükrözi a valóságos helyzetek néhány elemét és analitikusan is követhető. Az 1. ábrán blokkdiagrammal szemléltetjük a vásárlási folyamatot.

Csatlakozunk az i típusú egyéni fogyasztóhoz vásárlási körútján. A fogyasztó a starthelyről indul.

Az első eldöntendő kérdés a következő lesz. Megvegye-e a G árut, amelyet modellünk piacán kínálnak, vagy inkább az azt helyettestő H jószágot vegye meg egy másik piacon (amely már kívül esik modellünkön)? A H jószág lehet egy bizonyos közeli helyettesítő, de lehet a G áru közeli és nem-közeli helyettesítőinek aggregátuma is. Föltesszük, hogy a jövedelem és a vásárlást befolyásoló egyéb tényezők adottak és az időben nem változnak. Ezen a döntési helyen az ár az egyetlen jelzés, pontosabban a $\pi = p_G/p_H$ *árarány*.



1. ábra: A vásárlási algoritmus

A vásárló kiinduló *vásárlási hajlandóságát* $a_i(\pi)$-vel jelöljük. Ez a π-nek nem-növekvő (rendszerint csökkenő) függvénye. Adott π árarány mellett $a_i(\pi)$ lesz az i típusú vásárlók azon része, amely a G áru irányába indul el és nem keresi H-t. Mikroszintű fogalmakkal $a_i(\pi)$ annak valószínűségeként értelmezhető, hogy a vásárló kiinduláskor a G árut preferálja a H áruval szemben. Egy hagyományos választási pontot körvonalaztunk itt. Az $a_i(\pi)$ függvény egy szokásos, a viszonylagos áraktól függő keresleti függvény, csak alakja különbözik a megszokottól, mivel a további elemzéshez erre a speciális formára van szükségünk.

Felhívjuk a figyelmet a „kiinduló" jelzőre. Ez arra a tényre utal, hogy $a_i(\pi)$, amely az eredeti vásárlási szándékokat tükrözi, tehát a vásárlási körút kezdetére jellemző, később, a hiány láttán, felülvizsgálásra kerülhet. Vagyis egy *hipotetikus*, a hiánnyal nem számoló keresletet fejez ki. Az i csoport vásárló tagjainak $a_i(\pi)$ hányada kívánja pénzét G-re költeni, *feltéve, hogy* az áru a kínálati oldalon késedelem nélkül rendelkezésre áll.

Vásárlónk eljut az eladás helyére, ahol sorbanállás van. Habozni fog, beálljon-e a sorba? Föltesszük, hogy döntését egyetlen tényező befolyásolja, mégpedig a várható *sorbanállási idő*, w. Minél nagyobb w, annál jobban vonakodik a vásárló beállni a sorba. Az $f_i(w)$ szám fejezi ki a *sorbanállási hajlandóságot*. Ez azt mutatja, hogy azon i típusú vásárlók közül, akik G árut szeretnének vásárolni, $f_i(w)$ részarány fog beállni a sorba, és a maradék $\left(1-f_i(w)\right)$ részarány pedig nem kíván sorbanállni.

Tegyük föl egy pillanatra, hogy vásárlónk az első részcsoporthoz tartozik és sorbanáll. Várakozik türelmesen vagy türelmetlenül, míg ki nem szolgálják és azután hazamegy az újonnan megszerzett áruval. Feltételezzük, hogy némi idő elteltével újból szeretne egy egység G vagy H árut vásárolni, és ismét megkezdődik az egész folyamat elölről. A szükséglet újratermelődésének okait nem fogjuk tárgyalni. (Egy kis idő múltán a vásárló elfogyasztja az árut, vagy az elavul, kimegy a divatból, stb.) Annyit teszünk föl, hogy azok közül, akik a t időpontban G árut vásároltak, $\gamma_i \cdot dt$ részaránynak a végtelen kicsiny $(t, t+dt)$ időtartamon belül újabb egység árura (G vagy H) támad igénye. A kényelem kedvéért ezt a részarányt a t időponttól függetlennek vesszük. Mikroszinten ebből az következik, hogy a szükséglet kielégítési időt, azaz azt az időtartamot, ami a G áru megszerzésétől az arra vonatkozó újabb igény fellépéséig eltelik, $1/\gamma_i$ várható értékű exponenciális valószínűségi változónak tekintjük. A γ_i értéket a (G megszerzésétől számított) szükséglet *újratermelődési sebességnek*, $1/\gamma_i$ értéket pedig *a G iránti szükséglet átlagos kielégítési idejének nevezzük.*

Most pedig az algoritmus másik ágát vizsgáljuk meg, azt a vásárlót, akit elriasztott a hosszú sorbanállási idő. Ennek a vásárlónak különböző lehetőségei vannak. Ragaszkodhat a G áruhoz úgy, hogy későbbre halasztja a döntést arról, beálljon-e a sorba. Ez ésszerű viselkedés lehet valódi, „fizikai" sor esetén: sorok állnak reggelenként a húsüzlet előtt, tömeg van az orvos várószobájában.[3] A vásárló viselkedését két jellemzővel írjuk le. Létezzék először egy b_i-vel jelölt *halasztási hajlandóság*, valamint másodszor, egy *halasztási idő*. Ez idő elteltével a vásárló visszatér és újból fontolóra veszi, csatlakozzék-e a sorhoz. Hasonló feltevést teszünk itt, mint a G-vevők esetében, feltesszük,

[3] Nem ésszerű ez a viselkedés, amikor a sor „csak" papíron létezik, vagyis ha sorszámokat osztanak, a vásárló hazamehet, és sorrakerüléskor értesítést kap.

hogy a végtelen kicsiny $(t, t + dt)$ időtartamon belül az i csoport halasztóinak $\varrho_i \cdot dt$ része visszatér, hogy újra fontolóra vegye csatlakozását a sorhoz. Mikroszinten: a halasztási idő $1/\varrho_i$ várható értékű valószínűségi változó. A ϱ_i értéket *visszatérési sebességnek* nevezzük, és $1/\varrho_i$ az *átlagos halasztási idő.*

Azok számára, akik nem állnak be a sorba, de nem is halasztják el ezt a döntést, fennáll a lehetőség, hogy a G árut H-val helyettesítsék. Ezt *kényszerhelyettesítésnek*, az elfogadhatatlanul hosszú sorokban megmutatkozó hiány által kikényszerített helyettesítésnek nevezzük. Voltak *önkéntes* helyettesítők: G és H viszonylagos árának mérlegelése után az i típusú fogyasztók $(1 - a_i(\pi))$ része. Most azonban újabb helyettesítők követik őket, már nem önkéntes alapon. A viszonylagos ár alapján ők G-t részesítenék előnyben H-val szemben, de a hosszú sorbanállási idő miatt felülvizsgálják eredeti keresletüket és a H mellett döntenek. A kényszerhelyettesítés az a kulcsjelenség, aminek segítségével megérthetjük, mi történik krónikus hiány esetén. A *kényszerhelyettesítési hajlandóságot* $c_i(\pi)$-vel jelöljük. (Ugyanúgy, mint a kiinduló vásárlási szándék, a kényszerhelyettesítési hajlandóság is csak a viszonylagos áraktól függ.)

A harmadik lehetőség feladni mind G mind H vásárlását, egyszerűen a rájuk szánt pénz megtartásával. Ezt *kényszermegtakarításnak* nevezhetjük.[4]

Ezen alternatívák tudatában néhány erős egyszerűsítést vezetünk be a fenti leíró modellbe. Kizárjuk a kényszermegtakarítás lehetőségét, és feltesszük a következőt. Ha a vásárló nem akar rögtön csatlakozni a G sorához, de ezt a döntést nem is halasztja el, akkor el kell fogadnia a kényszerhelyettesítést és H árut kell vásárolnia. A H áru mindig azonnal rendelkezésre áll. Feltevésünk egy lehetséges értelmezése a következő: A H áru „a G-től különböző áruk" összességét képviseli, mint összetett áru. A legnagyobb hiány esetén is van *valami* a raktárban. A vásárlók közül sokan hajlamosak bármi áron elkölteni pénzüket valamire. Ez a vásárlói döntések nagyon nagy részére egészen valósághű feltevés a hiánygazdaságban.[5]

Feltevésünket a következő összefüggés fejezi ki:

$$b_i + c_i = 1.$$

Az egyszerűbb jelölés kedvéért csak a $c_i(\pi)$ kifejezést fogjuk használni, és a halasztási hajlandóságot $(1 - c_i(\pi))$-vel jelöljük majd.

A H áru megvásárlásakor (legyen az önkéntes vagy nem önkéntes) a vásárló számára ugyanúgy lesz egy kielégítési idő, mint a G áru esetében. Nevezetesen, feltesszük, hogy a H-t vásárló i típusú vevők $\varkappa_i \cdot dt$ része újabb igénnyel lép fel (G vagy H iránt) a $(t, t + dt)$ végtelen kicsiny időintervallumban. A $\varkappa_i$ értéket a (H megszerzésétől számított) *szükséglet újratermelődési sebesség*nek, $1/\varkappa_i$ értéket pedig a H *iránti szükséglet átlagos kielégítési idejének* nevezzük.

Ezzel a ciklus végére értünk.

2.3. *A vásárlói attitűd*

Összegezve a *vásárlói attitűdöt*, az a következő függvényekkel és paraméterekkel jellemezhető:

[4] Az első alternatíva, a döntés elhalasztása átmenetileg szintén kényszermegtakarítást jelent.

[5] A kényszermegtakarítást a kutatásainkból származó más publikációkban fogjuk részletesen tárgyalni.

$a_i(\pi)$ = kiinduló vásárlási hajlandóság π relatív ár mellett.
$f_i(w)$ = sorbanállási hajlandóság w hosszúságú sorbanállási idő mellett.
$c_i(\pi)$ = kényszerhelyettesítési hajlandóság π viszonylagos ár mellett.
$(1 - c_i(\pi))$ = halasztási hajlandóság π viszonylagos ár mellett.
γ_i, $\varkappa_i$ = a G, illetve H megszerzésétől számított szükséglet újratermelődési sebességek.
ϱ_i = visszatérési sebesség.

A fenti függvények és paraméterek az i sorszámú csoport attitűdjét fejezik ki. Megjegyezhető, hogy az attitűd, mint vektor, csak két „jelzés" függvénye: a π viszonylagos áré és a w sorbanállási időé. Emellett a vásárló meggondolásai e két jelzéssel kapcsolatban egymást követő, különálló pontok a vásárlási algoritmusban. Így a vásárló, ha már egyszer elfogadta az árat, a sorbanállási időt az ártól függetlenül nézi. (Technikai nehézségek nélkül elemezhető az ár és a sorbanállási idő együttes mérlegelése.)

Helyénvaló itt egy rövid összehasonlítást tenni a szokásos piaci modellekkel. Mint már említettük, az algoritmus első lépésében a hagyományos leírást követjük: a keresleti függvény a viszonylagos ártól függ. A szokásos modell itt véget is ér azzal a hallgatólagos feltevéssel; ez elegendő ahhoz, hogy ismerjük a vásárló szándékait. Ha az az eladó által megadott ár mellett egy bizonyos árumennyiséget szeretne megvásárolni, minden bizonnyal megkapja. Elismerjük, hogy ez a hallgatólagos feltevés többé-kevésbé jogosult ott, ahol a túlkereslet csak kivételes és időleges jelenség. Ez a feltevés alkalmazható az olyan piac leírására, ahol automatikus mechanizmusok azonnal megszüntetik a túlkeresletet. A *krónikus* hiány körülményei között azonban ugyanez a hallgatólagos feltevés jogosulatlanná válik, a vásárlói attitűd leírása nem állhat meg ennél a pontnál. Fel kell vetni a kérdést: mi történik az első lépés, azaz a kiinduló kereslet meghatározása után? Az olyan gazdaságban, ahol a túlkereslet kivételes, a vásárlás egy ütemben végbemehet: a döntés a vásárlási szándékról és a tényleges vásárlás kevéssé különül el az időben. A másik oldalon, egy hiánygazdaságban, a vásárlás csakis időbeli folyamatként írható le, meg kell nézni az eredeti döntést, aztán annak többszöri felülvizsgálatát a további lehetőségek közötti választást stb. Ennek megfelelően vezettük be a modellbe a következő lehetőségeket: sorbanállás, halasztás, kényszerhelyettesítés. (Következő cikkünkben még egy alternatíva megjelenik majd: a hiányzó áru *keresése*.)

2.4. *A vásárlók állapotváltozói*

Bármely rögzített t időpontban minden egyes vásárló négy különböző állapot közül pontosan egyben van. Az egyes állapotokban levő vásárlók számát a modellben a következő négy *állapotváltozó*val adjuk meg:

$x_{1i}(t)$ = azon i típusú vásárlók száma, akik sorbanállnak a t időpontban, röviden: a *sorbanálló vásárlók*;
$x_{2i}(t)$ = azon i típusú vásárlók száma, akik korábban egy egység G-hez jutottak és a t időpontban még nem kezdik újra a vásárlási folyamatot megint, röviden: a *G-vel kielégített vásárlók*;

$x_{3i}(t)$ = azon i típusú vásárlók száma, akik korábban egy egység H-hoz jutottak és a t időpontban még nem kezdik el újra a vásárlási folyamatokat, röviden: *a H-val kielégített vásárlók*;

$x_{4i}(t)$ = azon i típusú vásárlók száma, akik korábban elhalasztották a döntést arról, hogy beálljanak-e a sorba, és a t időpontban még nem veszik újból fontolóra a kérdést, röviden: *a halasztó vásárlók*.

$$x_{1i}(t) + x_{2i}(t) + x_{3i}(t) + x_{4i}(t) = n_i, \qquad i = 1, \ldots, k$$

$$x_j(t) = \sum_{i=1}^{k} x_{ji}(t). \qquad j = 1, 2, 3, 4.$$

A modell elemzésében a fenti változókat valós, de nem feltétlenül egész számoknak tekintjük. Bármely $t \geq 0$ időpontban az

$$(x_{11}(t), x_{12}(t), \ldots, x_{1k}(t), x_{21}(t), \ldots, x_{2k}(t), x_{31}(t), \ldots, x_{3k}(t), x_{41}(t), \ldots, x_{4k}(t))$$

vektort a vásárlói rendszer t melletti állapotának mondjuk. Megfordítva, bármely nem negatív valós $(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{4k})$ vektort, amely minden i sorszámra kielégíti az $x_{1i} + x_{2i} + x_{3i} + x_{4i} = n_i$ egyenlőséget, *a rendszer teljesíthető állapotának* nevezzük.

2.5. *A kiszolgálási kapacitás és kiszolgálási sebesség*

A 2.2—2.4. pontokban a vásárlókról beszéltünk. Most rátérünk az eladó jellemzésére.

Az eladó *kiszolgálási kapacitását* λ-val jelöljük. Ez az egységnyi idő alatt kiszolgálható vásárlók számának maximuma. Egy raktárt nézve λ a kiinduló készletektől és a raktárba érkező szállítmányoktól függ. Egy termelő vállalat esetében λ a kiinduló készletektől és a termelési kapacitástól függ. Figyelmen kívül hagyjuk a készleteket, és feltételezzük, hogy λ az időtől független, exogén módon rögzített paraméter.

Mivel a sor hosszát, x_1-et itt folytonos változónak vesszük, természetes lenne azt mondani, hogy *a kiszolgálási sebesség*, azaz az időegység alatt kiszolgált vásárlók tényleges száma legyen λ, ha $x_1 > 0$ és legyen nulla, ha $x_1 = 0$. Másképpen mondva: amíg sor van, a teljes kiszolgálási kapacitás működik és ha nincs sor, leáll a kiszolgálás (akit éppen kiszolgálnak, az is a sorhoz tartozik). Az s kiszolgálási sebességnek ez az „átkapcsolás" jellegű függése az x_1 sorhosszától azonban $x_1 = 0$-ban szakadásos, és a vásárlói rendszer dinamikájának elemzésekor technikailag zavaró lenne egy ilyen szakadás. Ezért a nem folytonos összefüggést folytonossal helyettesítjük, és ezt határérték elemzéssel egészítjük ki. Pontosabban: az s kiszolgálási sebesség legyen először az alábbi módon függvénye az x_1 sorhossznak:

$$s(x_1(t)) = \lambda \cdot h_\sigma(x_1(t)), \tag{2.1}$$

ahol h_σ egy folytonos függvény, amely a $[0, \sigma]$ intervallumban nullától egyig növekszik, a $[\sigma, +\infty]$ intervallumban pedig azonosan egyenlő eggyel. A σ paramétert „kisimító együtthatónak" nevezzük, és feltételezzük róla, hogy egy kicsiny, pozitív állandó. Később megengedjük majd, hogy a σ nullához, és így a folytonos (2.1) összefüggés az eredeti, szakadásos „átkapcsolási szabályhoz" tartson.

2.6. A sor

Az eladó és a vevők cselekvései – egy hely kivételével – kölcsönösen függetlenek egymástól. Az egymásrahatás egyetlen helye a sor. Itt találkoznak: a sor az összekötő kapocs, amely a rendszer szereplőit egymástól kölcsönösen függővé teszi. A sor lehet „fizikai", azaz állhat várószobában vagy üzletben várakozó egyénekből, vagy „papíron létező", azaz kérések vagy megrendelések halmaza az eladó irodájában. A sorbanállási időről feltesszük, hogy azt a vásárlók pontosan ismerik, azaz, feltesszük, hogy az $f_i(w)$ sorbanállási hajlandóság w argumentuma a valóságos sorbanállási idő. Továbbmenve, feltételezzük, hogy a sorban nincsenek előjogok, tehát egy újonnan jövő pontosan annyit fog várakozni a kiszolgálásra, mint az összes előtte álló. Összefoglalva:

$$w(t) = x_1(t)/\lambda. \tag{2.2}$$

Meg kell jegyeznünk, hogy ez az egyenlőség megközelítésként néhány olyan esetre is alkalmazható, amikor a G áruért több sor áll. Nevezetesen, ha sok sor van, és a vásárló mindig azt választja, amelyben a legrövidebb a sorbanállási idő, akkor a különböző sorokhoz tartozó sorbanállási idők a kiegyenlítődés felé tartanak és a sorok aggregátumára alkalmazható a (2.2) egyenlőség.

A sorban különböző vásárlói csoportokba tartozó emberek állnak. Általában véve ezek a csoportok többé-kevésbé jól összekeverednek a sorban. Az analitikus követhetőség érdekében mindamellett feltesszük, hogy a sorok homogén módon kevertek. Jelölje $s_i(t)$ a kiszolgált, i típusú vásárlók kiáramlását a t időpontban:

$$s_i(t) = \begin{cases} \dfrac{x_{1i}(t)}{x_1(t)} \cdot s(x_1(t)), & \text{ha} \quad x_1(t) > 0 \\ 0, & \text{ha} \quad x_1(t) = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Másszóval feltesszük, hogy a kiszolgált i típusú vásárlók kiáramlása a sorból a sorbanálló összes vásárlón belüli részükkel arányos. A vásárlói rendszer egy kezdeti vagy átmeneti állapotára ez valóban durva megközelítés lehet (hisz a sor elejét alkothatják egyetlen csoport sorbanálló tagjai, megelőzve az összes többi csoport sorbanálló tagjait). Egy stacionárius állapotra azonban helyénvaló a homogenitási feltevés, mint amit a független egyéni viselkedés biztosít.[6] Az s_i értéket az *i típusú vásárlók kiszolgálási sebességé*nek nevezzük majd, $(i = 1, 2, \ldots k)$, $s = s_1 + s_2 + \cdots + s_k$.

3. A modell: formális összefoglalás

A modell intézményi valamint mikro-közgazdaságtani vonatkozásainak megvilágítása után a 2. részt némileg megismételve, a formális leírás összegzése következik.

[6] A (2.3) feltevés logikai szempontból zavaró. Nevezetesen, ha egynél több vásárlói csoport van, ellentétbe kerülhet (2.2) értelmezésével, ahol a sor szigorú sorrendet jelent. A (2.2) egy alternatív értelmezése, amely összhangban van (2.3)-al, az, hogy a sor tagjait véletlen módon szolgálják ki. Feltéve, hogy a kiválasztás egyenlő esélyű mindenki számára és egy vásárló kiszolgálási ideje $1/\lambda$, a (2.2) egyenlet megadja a várható sorbanállási időt, és (2.3) pedig a különböző csoportok kiszolgálási sebességét.

3.1. Exogén paraméterek és függvények

A következő *paraméterekről* feltételezzük, hogy exogén módon adott, rögzített valós számok: λ, π, γ_i, $\varkappa_i$, ϱ_i $(i = 1, 2, \ldots k)$. Legyen R_+ a nem-negatív valós számok halmaza és $[0, 1]$ a zárt egységintervallum. A következő *függvényekről* feltételezzük, hogy exogén módon adott, rögzített függvények az R_+ halmazon, és értékeiket a $[0, 1]$ intervallumon veszik fel:

$$f_i, a_i, c_i, h_\sigma \qquad (i = 1, 2, \ldots k).$$

3.2. Technikai feltevések az exogén paraméterekről és függvényekről

Fő feltevéseinket a modell kvalitatív tulajdonságai foglalják magukban. E tulajdonságokat a 2. részben tárgyaltuk. Itt a feltevéseknek egy részleges összefoglalását adjuk meg; csak azokat sorojuk fel közülük, amelyek az exogén paraméterek és függvények matematikai specifikációjához szükségesek. Egy részük csak ismétlése a korábbi verbális megfogalmazásoknak, másokat ezen a helyen vezetünk be. (Vegyük észre, hogy a függvényekről feltett tulajdonságok azok egész R_+ értelmezési tartományában érvényesek.)

A1: A λ, γ_i $\varkappa_i$ és ϱ_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ paraméterek valamennyien pozitívak. $\varrho_i > \varkappa_i$ minden i esetén. A π paraméter nem-negatív.

A2: Az f_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ függvények mind nem-növekvők és differenciálhatók, $f_i(0) = 1$. Továbbmenve f_i', az f_i első deriváltja folytonos $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

A3: Az a_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ függvények valamennyien nem-növekvők és folytonosak, $\lim\limits_{\pi \to \infty} a_i(\pi) = 0$.

A4: A c_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ függvények valamennyien nem-csökkenők és folytonosak. Ha valamely i esetén $a_i(\pi) = 0$, akkor $c_i(\pi) > 0$.

A5: A h_σ függvény (ahol $\sigma > 0$ rögzített szám) a $[0, \sigma]$ intervallumban növekvő. Továbbmenve, h_σ'', a h_σ második deriváltja folytonos, valamint $h_\sigma(0) = 0$, és $h_\sigma(x) = 1$ minden $x \geq \sigma$ esetében.

Ezek a feltevések néhány megjegyzést igényelnek.[7] Először, A1-ben kimondjuk, hogy az átlagos H-kielégítési idő $(1/\varkappa_i)$ meghaladja az átlagos halasztási időt $(1/\varrho_i)$. Más szóval a fogyasztási időhöz képest „rövid távú" halasztásokban gondolkodunk.

Másodszor, A4-ben feltesszük, ha a viszonylagos ár olyan magas, hogy az i típusú vásárlók kiinduló vásárlási hajlandósága nulla, akkor a kényszerhelyettesítésre való hajlandóságuk pozitív lesz.

Harmadszor, a h_σ kisímító függvényhez kell megjegyzést tennünk. A következőkben először egy tetszőleges h_σ kisímító függvényből fogunk kiindulni, rögzített $\sigma > 0$ értékkel. Azután megengedjük majd, hogy σ nullához tartson és határértékben vonjuk le eredményeinket, (ami nem azonos a $\sigma = 0$ esettel).

[7] Egy f függvényt növekvőnek (nem-csökkenőnek) mondunk, ha $x_1 < x_2$ esetén $f(x)_1 < f(x_2)$ [illetve $f(x_1) \leq f(x_2)$]. Csökkenőnek (nem-növekvőnek) mondjuk, ha $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) > f(x_2)$ [illetve $f(x_1) \geq f(x_2)$].

3.3. Dinamikus összefüggések

Mint feljebb már jeleztük, egy közönséges differenciálegyenlet-rendszerrel le fogjuk írni az $x_{1i}(t)$, $x_{2i}(t)$, $x_{3i}(t)$ $x_{4i}(t)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, állapotváltozók időbeli alakulását. A rendszer a következő ($i = 1, 2, \ldots, k$):

(3.1) $$\dot{x}_{1i} = a_i \cdot f_i(w) \cdot (\gamma_i \cdot x_{2i} + \varkappa_i \cdot x_{3i}) + f_i(w) \cdot \varrho_i \cdot x_{4i} - s_i;$$

(3.2) $$\dot{x}_{2i} = s_i - \gamma_i \cdot x_{2i};$$

(3.3) $$\dot{x}_{3i} = [1 - a_i + a_i \cdot c_i \cdot (1 - f_i(w))] \cdot (\gamma_i \cdot x_{2i} + \varkappa_i \cdot x_{3i}) + c_i \cdot (1 - f_i(w)) \cdot \varrho_i \cdot x_{4i} - \varkappa_i \cdot x_{3i};$$

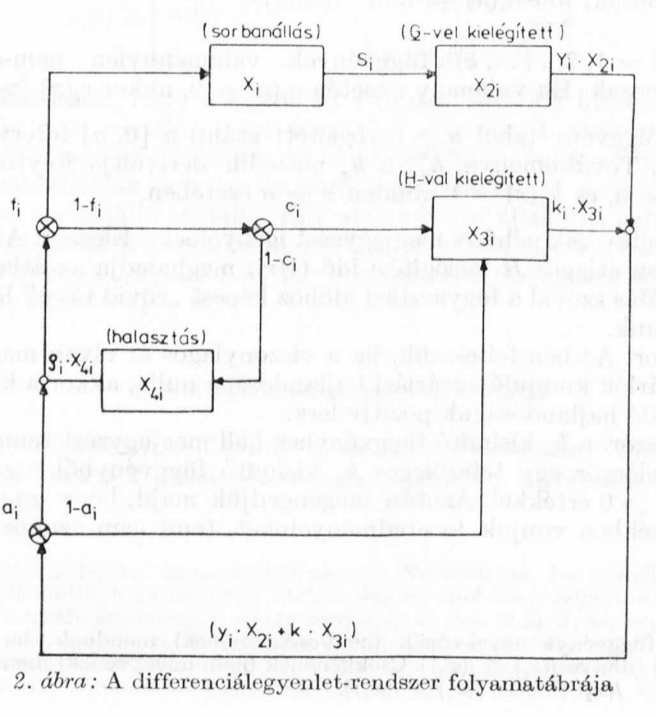
(3.4) $$\dot{x}_{4i} = a_i \cdot (1 - c_i) \cdot (1 - f_i(w)) \cdot (\gamma_i \cdot x_{2i} + \varkappa_i \cdot x_{3i}) + (1 - c_i) \cdot (1 - f_i(w)) \cdot \varrho_i \cdot x_{4i} - \varrho_i \cdot x_{4i}.$$

Ebben a rendszerben valamennyi állapotváltozó, kiszolgálási sebesség és sorbanállási idő az idő függvénye, $x_{1i} = x_{1i}(t)$ stb. Az s_i kiszolgálási sebességet a (2.1) és (2.3) egyenletek adják meg, a w sorbanállási időt a (2.2) egyenlet. Az „a_i” és „c_i” kifejezések az „$a_i(\pi)$” és „$c_i(\pi)$” rövidítései, mivel a π viszonylagos ár állandó. A felső pontok idő szerinti deriváltakat jelölnek, $\dot{x} = \dot{x}(t) = \mathrm{d}x(t)/\mathrm{d}t$.

Megjegyezzük, hogy az idő szerinti deriváltak összege nulla,

$$\dot{x}_{1i} + \dot{x}_{2i} + \dot{x}_{3i} + \dot{x}_{4i} = 0,$$

mivel a vásárlók száma az egyes csoportokban feltevésünk szerint állandó. Továbbmenve, egyetlen állapotváltozó sem vehet föl negatív értéket: bármely



2. ábra: A differenciálegyenlet-rendszer folyamatábrája

(x_{ji}) teljesíthető állapotra, amelyben $x_{ji} = 0$ valamely j és i mellett, a (3.1) és (3.4) egyenletekből $\dot{x}_{ji} \geq 0$ adódik. Ily módon a differenciálegyenlet-rendszer megoldása korlátos valamennyi $t \geq 0$ idő mellett. Az f_i' és h' első deriváltak folytonossága miatt, ez biztosítja a megoldás létezését és egyértelműségét valamennyi $t \geq 0$ mellett (lásd a 3.1 tételt Hale (1969) I. fejezetében).

A (3.1)—(3.4) differenciálegyenlet-rendszer a 2.2 pontban leírt egyéni vásárlói viselkedés összesített formája. A megfelelést a differenciálegyenlet-rendszer működését szemléltető 2. ábra és a vásárlási algoritmust bemutató 1. ábra összehasonlításával tanulmányozhatjuk.

4. A rendszer normál állapota

Az $x_{1i}, x_{2i}\ x_{3i}, x_{4i}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ állapotváltozókkal leírt vásárlói rendszerről akkor mondhatjuk, hogy *stacionárius állapotban* van, ha az időben nem változik, azaz ha valamennyi idő szerinti derivált nulla: $\dot{x}_{1i} = \dot{x}_{2i} = \dot{x}_{3i} = \dot{x}_{4i} = 0$ minden i esetén. Ebben a részben először mutatjuk meg, hogy rendszerünknek mindig van egyértelmű stacionárius állapota. Ezután bebizonyítjuk, hogy az egy vásárlói csoport speciális esetében, a sorbanállási hajlandóság függvényre tett elég enyhe feltételek mellett, ez a stacionárius állapot stabil.

4.1. A megoldás létezése és egyértelműsége

A kiszolgálási sebesség eredetileg szakadásos „átkapcsolási szabályának" megközelítéséhez a modell tulajdonságai elsősorban a kisimító együttható nagyon kicsiny értékeinél érdekelnek minket. A tárgyalás itt egy olyan állítással kezdjük, amely tetszőleges nagyságú kisimító együttható mellett áll (vö. a 2.5 ponttal).

1. Állítás: Az A1—A5 feltevéseket kielégítő bármely paraméter és függvényegyüttes mellett létezik egyértelmű stacionárius állapot.

(Az összes bizonyítást a cikk végén, a függelékben adjuk meg.) A következőkben kicsit részletesebben tanulmányozzuk, mi történik a stacionárius állapottal, ha a kisimító együttható nullához tart. Az 1. állítás alábbi két következménye kimondja, hogy, a paraméterek és a függvények adott együttesétől függően, ilyenkor a sor egy pozitív értékhez vagy nullához tart. Legyen

$$\varphi = \sum_{i=1}^{k} \frac{\gamma_i \cdot \varkappa_i \cdot a_i(\pi) \cdot n_i}{\varkappa_i \cdot a_i(\pi) + \gamma_i \cdot \big(1 - a_i(\pi)\big)} \tag{4.1}$$

és

$$\begin{aligned} A_i(w) = {} & \frac{1}{\varkappa_i} \cdot \big(1 - a_i(\pi)\big) + \frac{1}{\gamma_i} \cdot a_i(\pi) + \\ & + \left[\frac{c_i(\pi)}{\varkappa_i} + \frac{a_i(\pi)}{\varrho_i} \cdot \big(1 - c_i(\pi)\big)\right] \cdot \left(\frac{1}{f_i(w)} - 1\right) \quad (i = 1, 2, \ldots, k) \end{aligned} \tag{4.2}$$

$(0 < A_i(w) \leq +\infty)$. Továbbmenve, jelölje $x_{1i}^*(\sigma), x_{2i}^*(\sigma), x_{3i}^*(\sigma)$ és $x_{4i}^*(\sigma)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, azon stacionárius állapot értékeit, amely egy tetszőleges, rögzített $\sigma > 0$ kisimító együtthatónak felel meg.

1.1. *Következmény:* Ha $\lambda < \varphi$, akkor $\lim\limits_{\sigma \downarrow 0} x_1^*(\sigma) = x_1^*$, ahol $x_1^* > 0$.

Továbbá a

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i(\pi) \cdot n_i}{\lambda \cdot A_i(x_1/\lambda) + a_i(\pi) \cdot x_1} = 1 \tag{4.3}$$

egyenletnek x_1^* egyértelmű megoldása.

Legyen $f_i^* = f_i(x_1^*/\lambda)$. Az i vásárlói csoportnál, amelyre $a_i(\pi) > 0$ és $f_i^* > 0$:

$$x_{1i}^* = \lim_{\sigma \downarrow 0} x_{1i}^*(\sigma) = \frac{a_i(\pi) \cdot x_1^* \cdot n_i}{\lambda \cdot A_i(x_1^*/\lambda) + a_i(\pi) \cdot x_1^*}; \tag{4.4}$$

$$x_{2i}^* = \lim_{\sigma \downarrow 0} x_{2i}^*(\sigma) = \frac{\lambda}{\gamma_i} \cdot x_{1i}^*/x_1^*; \tag{4.5}$$

$$x_{3i}^* = \lim_{\sigma \downarrow 0} x_{3i}^*(\sigma) = \tag{4.6}$$

$$= \left[c_i(\pi) \cdot \left(\frac{1}{f_1^*} - 1\right) + 1 - a_i(\pi)\right] \cdot \frac{\lambda}{a_i(\pi)\,\varkappa_i} \cdot x_{1i}^*/x_1^*;$$

$$x_{4i}^* = \lim_{\sigma \downarrow 0} x_{4i}^*(\sigma) = \big(1 - c_i(\pi)\big) \cdot \left(\frac{1}{f_i^*} - 1\right) \cdot \frac{\lambda}{\varrho_i} \cdot x_{1i}^*/x_1^*. \tag{4.7}$$

A j vásárlói csoportnál, amelyre $a_j(\pi) = 0$ és/vagy $f_j^* = 0$ azt kapjuk, hogy $x_{1j}^* = x_{2j}^* = 0$, és x_{3j}^*, x_{4j}^* közvetlen módon kiszámolható a stacioneritás feltételeiből.

1.2. *Következmény:* Ha $\lambda \geq \varphi$, akkor $\lim\limits_{\sigma \downarrow 0} x_1^*(\sigma) = 0$ és $i = 1, \ldots, k$ mellett

$$x_{1i}^* = \lim_{\sigma \downarrow 0} x_{1i}^*(\sigma) = 0; \tag{4.8}$$

$$x_{2i}^* = \lim_{\sigma \downarrow 0} x_{2i}^*(\sigma) = \frac{\varkappa_i \cdot a_i(\pi) \cdot n_i}{\varkappa_i \cdot a_i(\pi) + \gamma_i \cdot \big(1 - a_i(\pi)\big)}; \tag{4.9}$$

$$x_{3i}^* = \lim_{\sigma \downarrow 0} x_{3i}^*(\sigma) = \frac{\gamma_i \cdot \big(1 - a_i(\pi)\big) \cdot n_i}{\varkappa_i \cdot a_i(\pi) + \gamma_i \cdot \big(1 - a_i(\pi)\big)}; \tag{4.10}$$

$$x_{4i}^* = \lim_{\sigma \downarrow 0} x_{4i}^*(\sigma) = 0. \tag{4.11}$$

Ily módon, amint a kisimító koefficiens nullához tart, határértékben két különböző típusú stacionárius állapotot különböztethetünk meg. Azokra a paraméter és függvényegyüttesekre, amelyek kielégítik a $\lambda < \varphi$ egyenlőtlenséget, a megfelelő stacionárius állapot egy hiánnyal jellemezhető állapothoz ($x_1^* > 0$) tart, míg azon paraméter és függvényegyütteseknél, amelyek az ellenkező irányú, a $\lambda \geq \varphi$ egyenlőtlenséget elégítik ki, a megfelelő stacionárius állapot határértéke nem tartalmaz hiányt. A határ-állapotoknak ezt a két típusát az 5. részben tárgyaljuk majd részletesebben. Ehhez azonban először igazolni kell a stacionárius állapot stabilitását a kisimító koefficiens kis pozitív értékeire.

4.2. *Stabilitás*

Ebben a pontban az egy vásárlói csoport speciális esetével foglalkozunk, ezért $k = 1$ és így az i sorszámot elhagyjuk. Ezenkívül, amikor stabilitásról beszélünk, ezen *aszimptotikus stabilitást* értünk. Intuitív módon kifejezve: egy stacionárius állapotot aszimptotikusan stabilnak mondunk, ha az állapotok terében attól egy kicsit eltérve a rendszer (az időben) aszimptotikus módon visszatér a stacionárius állapothoz. Az aszimptotikus stabilitás tehát lokális tulajdonság, mivel csak azt mondja meg, hogyan viselkedik a rendszer a stacionárius állapot kis környezetében. Pontosabban szólva, az aszimptotikus stabilitás standard definícióját alkalmazzuk, ahogy azt például *Hale* (1969) megadta.

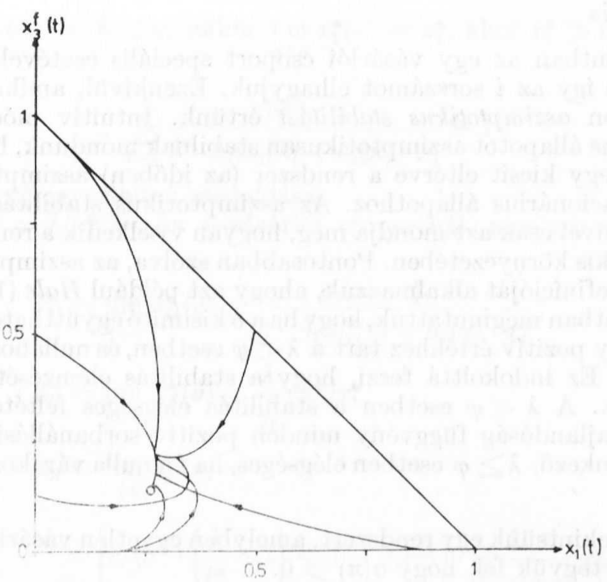
Az előző pontban megmutattuk, hogy ha a σ kisimító együttható nullához tart, akkor $x_1^*(\sigma)$ egy pozitív értékhez tart a $\lambda < \varphi$ esetben, és nullához tart a $\lambda \geq \varphi$ fennállásakor. Ez indokolttá teszi, hogy a stabilitás elemzését is erre a két esetre bontsuk. A $\lambda < \varphi$ esetben a stabilitás elégséges feltétele, hogy az f sorbanállási hajlandóság függvény minden pozitív sorbanállási időre „sima" legyen. Az ellenkező, $\lambda \geq \varphi$ esetben elégséges, ha f a nulla várakozási idő mellett „lapos".

2. *Állítás:* Tekintsünk egy rendszert, amelyben egyetlen vásárlói csoport van, $k = 1$, és tegyük fel, hogy $a(\pi) > 0$.
(a) A $\lambda > \varphi$ esetet véve tegyük fel, hogy az A1—A5 feltevések fennállnak és az f sorbanállási hajlandóság függvény f'' második deriváltja valamenynyi $w > 0$ érték mellett folytonos. Ekkor létezik egy olyan $\varepsilon > 0$, hogy bármely $\sigma \in (0, \varepsilon)$ kisimító együtthatót véve a stacionárius állapot aszimptotikusan stabil.
(b) A $\lambda \geq \varphi$ esetre tegyük fel, hogy az A1—A5 feltevések igazak, és f sorbanállási hajlandóság függvény azonosan eggyel egyenlő valamely $(0, \delta)$ intervallumon. Ekkor a stacionárius állapot valamennyi $\sigma \in (0, \lambda \cdot \delta)$ kisimító együttható mellett aszimptotikusan stabil.

Már említettük, hogy a fenti állítás nem mondja meg, hogyan viselkedik a rendszer, ha nagyon eltérítik stacionárius állapotától. A rendszer globális viselkedéséről eddig nincsenek általános eredményeink. Arra a speciális esetre azonban, amelyben a halasztás lehetősége kizárt, bebizonyítható, hogy a stacionárius állapot globálisan is stabil, azaz a rendszer tetszőlegesen nagy megzavarása után is visszatér stacionárius állapotához.

3. *Állítás:* Tekintsünk egy rendszert, amelyben egyetlen vásárlói csoport van, és a halasztás nem lehetséges. Ily módon $k = 1$, $a(\pi) > 0$, $c(\pi) = 1$ és $x_4(0) = 0$. Tegyük fel, hogy $\lambda < \varphi$. Ha az A1—A5 feltevések teljesülnek, akkor létezik olyan $\varepsilon > 0$, hogy minden $\sigma \in (0, \varepsilon)$ kisimító koefficiens esetén a rendszer bármely kiinduló állapotból aszimptotikusan konvergál stacionárius állapota felé.

A fenti analitikus stabilitásvizsgálatok az egy vásárlói csoport speciális esetére vonatkoznak ($k = 1$). Kiegészítésképp végeztünk néhány numerikus számítógépi szimulációt két vásárlói csoport esetére ($k = 2$). Ezek eddig a rendszer globális stabilitását támasztják alá, de meg kell jegyezni, hogy nem bocsátkozunk kiterjedt szimulációs vizsgálatokba. A szemléltetés kedvéért bemutatunk egy ábrát a szimulációkról. Szimulációink alapján az alábbi sejtés tehető.



3. ábra: Tipikus pályák az (x_1, x_3^f) hipersíkra vetítve. x_1 itt a sorbanálló vásárlók összlétszáma, x_3^f pedig a kényszerhelyettesítők összlétszáma. A kis kör jelöli a stacionárius állapotot, valamennyi pálya ehhez tart. A modell számszerű specifikációja a cikk végén, a 2. függelékben található meg.

Sejtés: Legalábbis a két vásárlói csoport esetére az A1–A5 feltevéseket kielégítő exogén paramétereknek és függvényeknek létezik egy eléggé széles osztálya, amelyhez globálisan stabil stacionárius állapotok tartoznak.

4.3. Hosszútávú egyensúly walrasi és nem-walrasi értelemben

Amikor $x_{1i} = x_{1i}^*, \ldots, x_{4i} = x_{4i}^*$, $i = 1, \ldots, k$, a rendszer *normál állapotában* van. A „normál" jelzőhöz némi magyarázatot és értelmezést fűzünk.

A modell empirikus-leíró értelmezése a következőt mondja: egy állapotváltozó normál értéke e változó *időbeli átlaga*. Következésképp modellünk csak egy stagnáló piac leírására alkalmas. Úgy sejtjük azonban, hogy az eredmények olyan rendszerekre is általánosíthatók, ahol a kínálat, a forgalom és a fogyasztás időben változó (pl. növekvő). (Vizsgálhatjuk például új potenciális vásárlók „beáramlását" a G áru piacára.) Ebben az esetben a normál állapot viszonylagos fogalommá válik, így azt újra definiálni kell ($x_{ji}(t)/n_i(t) = c$ minden t és i, j esetén). A következő megjegyzéseknél a „normál állapot" fogalmának általánosított értelmezésére gondolunk, amelyhez képest modellünk stacionárius állapota csak egy speciális eset.

Az egzisztencia és a stabilitás formálisan különböző kérdése az értelmezéskor szorosan összefonódik. Tautológikus átkeresztelés lenne mindenfajta időbeli átlagot „normál értéknek" nevezni. Valójában egy olyan *visszacsatolási mechanizmus* működése teszi az időbeli átlagot „normál értékké", amely „visszaviszi" a normál állapotba az attól eltérő rendszert. A mi egyszerű modellünkben a sorbanállási idő, w a visszacsatolási mechanizmust vezérlő jelzés. Ha a sorbanállás túl sok időt vesz igénybe, a vásárlók nem csatlakoznak a sorhoz. Ellenkező esetben, ha a sorbanállási idő kisebb a normál értéknél, több ember fog beállni a sorba.

Létezésén és a stabilitásán kívül a stacionárius állapot egyértelműségéről is van tételünk. Ez a normál állapot fogalmából nem feltétlenül következik. Az egyértelműségről szóló állításunk — több más feltevés mellett — modellünk determinisztikus szerkezetéből adódik. Sztochasztikus leírásnál a jelenlegi determinisztikus modell (egyértelmű) stacionárius állapota helyébe a rendszer állapotának egy (egyértelmű) stacionárius valószínűségeloszlása kell, hogy kerüljön.

A normál állapotot a rendszer *hosszútávú egyensúlyának* is nevezhetjük.[8] A közgazdasági irodalomban némi terminológiai zavar és homályosság van, mert az ,,egyensúly'' fogalmához tradicionális jelentések fonódnak. Sok közgazdász hajlamos arra, hogy ezt az elnevezést kizárólag a *walrasi* értelemben egyensúlyban levő rendszer megjelölésére használja. Megpróbáljuk az itt kifejtett modellel szemléltetni a problémát. A piac egyfajta hosszútávú walrasi egyensúlyban van, ha $x_1 = 0$ és $\dot{x}_1 = 0$ valamennyi időpontra. Bizonyos, a későbbiekben tárgyalásokra kerülő, feltételek mellett fennállhat ez az eset. Ugyanakkor léteznek más, nem-walrasi egyensúlyok is. Ezekhez tartoznak a pozitív hosszúságú sorok melletti normál állapotok is. *A walrasi egyensúlyok halmaza itt csak egy részét alkotja a normál állapotok halmazának.*

Az ilyen állandósult állapotokat sok közgazdász *nem-egyensúlyinak* (disequilibriumban levőnek) mondaná. A kutatásoknak a bevezetésben említett új irányzatát rendszerint ,,disequilibrium elméletnek''[9] nevezik. Nem pusztán szemantikai kérdésről van szó; gondolatainkban (vagy ezek mögött) a legtöbbször értékítéleteket kapcsolunk az elnevezésekhez. Leegyszerűsítve a dolgot: 100 közgazdász közül 90 valami ,,jónak'' tekinti az egyensúlyt, olyannak, amit jó fenntartani, és ha felborul, helyre kell állítani. Így aztán a ,,*nem-egyensúlyi*'' állapot valami ,,rossz'', amit ezért el kell kerülni. Ha a ,,nem-egyensúlyi'' állapot hosszantartó és krónikus, az a degeneráció jele, a rendszer egy nem normális állapotát jelenti; valami perverz, abnormális dolog.

Mi jobbnak látjuk ,,normál értékről'' beszélni szinonimaként a ,,hosszútávú egyensúly'' vagy az ,,állandósult érték'' helyett, mert ez leíró, értékítéletmentes kijelentések felé mutat. Egy normál állapot *jellemzői rendszerspecifikusak*.

Amikor azt mondjuk, vannak rendszerek, amelyek normál állapota sorbanállással jár, ez azt jelenti: nincsenek a rendszerben visszacsatolási mechanizmusok, nincsenek társadalmi erők, amelyek a rendszert a walrasi állapotba visszavinnék. Ellenkezőleg, egy ilyen gazdaságnak van néhány, mélyen a rendszer természetében gyökerező alaptulajdonsága, amelyek például a sorok normál hosszát folytonosan helyreállítják.

Bármely normál állapot, beleértve a nem-walrasi értelmű egyensúlyokat, csak azért tudja állandóan helyreállítani, fenntartani magát, mert a rendszer résztvevői elismerik normál állapotnak. A sorbanállás, várakozás, a vásárlás pénzügyi lehetőségeinknek ellentmondó elhalasztása, a kényszerhelyettesítés — ezek mind a vásárlóra háruló társadalmi költségek, a szokásos, pénzben fizetett áron felül. A sorbanállási hajlandóság, a kényszerhelyettesítés alkalmazása, a vásárlás elhalasztása, vagyis az f_i, c_i; illetve $(1 - c_i)$ függvényeink,

[8] *Malinvaud* az egyensúly fogalomnak ugyanezt a megközelítését javasolja 1977-es cikkében.

[9] Lásd: *Barro—Grossman* (1971), *Benassy* 1974, 1975), és mások.

azt fejezik ki, milyen mértékben hajlandók a vásárlók megfizetni ezeket a nempénzbeli társadalmi költségeket az áruért. Ezek jelzik a piac fennálló állapotának társadalmilag intézményesített elfogadását.

5. A függvények és paraméterek változtatása

5.1. Bevezető megjegyzések

A normál állapotot most határértékben, $\sigma \downarrow 0$ mellett tanulmányozzuk, így az állapotváltozók az 1.1 és 1.2 következmény szerint alakulnak. A következőkben összehasonlítjuk egymással a normál állapot mutatóit, állomány (stock) és áramlás (flow) jellegűeket, különböző paraméterérték és függvényegyüttesek mellett. Bár egy dinamikus modellel dolgozunk, a rendszer különböző normál állapotainak összehasonlítása a szokásos *komparatív statikai* elemzésekhez hasonló eredményekhez vezet.

Legelőször is a (4.1) egyenletben definiált, kulcsfontosságú φ parametrikus mennyiséget kell közelebbről megvizsgálnunk. Az 1.1 és 1.2 következmények szerint ez az érték a *minimális sor-megszüntető kiszolgálási kapacitás*, azaz, ha a λ kiszolgálási kapacitás kisebb ennél a számnál, akkor lesz sor a normál állapotban, míg nincs sor a normál állapotban, ha λ nagyobb vagy egyenlő φ-vel. Vegyük észre, hogy φ csak a π viszonylagos ártól, a kiinduló a_i vásárlási hajlandóság függvényektől, a γ_i és $\varkappa_i$ szükséglet újratermelődési sebességektől és a vásárlói csoportok n_i nagyságától függ, míg független az f_i sorbanállási hajlandóságoktól, a c_i kényszerhelyettesítési hajlandóságoktól, a ϱ_i mérlegelési sebességektől és persze a λ kiszolgálási kapacitástól. A φ érték ily módon a vásárlóknak az árhoz, valamint fogyasztási sebességeikhez való viszonyát fejezik ki. E szerepe miatt természetes, hogy megpróbáljuk φ-t a kereslet fogalmához hasonlítani, és valóban φ értelmezhető a hosszútávú, potenciális kereslet kategóriájával. Ugyanis bármely sorbanállás nélküli normál állapotban a vásárlók (időegységenkénti) beáramlása az üzletbe, vagy más kiszolgálási helyre pontosan φ ütemű, mint ezt a 2. ábra és az 1.2 következmény segítségével beláthatjuk. Így a vásárlók attitűdjét és viselkedését leíró bármely adott paraméter és függvényegyüttes esetén a φ érték mutatja azt az időegység alatti G iránti keresletet, amelyet ezek a vásárlók a rendszer sorbanállás nélküli normál állapotában támasztanának. (A φ érték általában különbözik a sorbanállás melletti normál állapotokban fellépő potenciális igényektől. Ez utóbbi áramlás az 1.1 következmény egyenleteiből számolható ki, és azokat a vásárlókat foglalja magába, akik igényelnének G-t, ha nem kellene sorbanállni érte.)

Miután a φ mennyiség jelentését áttekintettük, visszatérünk annak tanulmányozásához, hogyan függ a normál állapot a kiszolgálási kapacitástól, a viszonylagos ártól és a vásárlói attitűd néhány elemétől. Ehhez a normál állapotot sokféle szempontból kell megvizsgálni. A normál állapot egy kézenfekvő leírása egyszerűen a vásárlók megoszlása a négy lehetséges állapotban, — „sorbanálló", „G-vel kielégített", „H-val kielégített" és „halasztó" —, ahogy azt maguknak az állapotváltozóknak a normál értéke meghatározza. Ezen mennyiségek kiegészítéseként megnézhetjük még a potenciális fogyasztók áramát, azaz azokat a vásárlókat, akik megvennék G-t, ha az sorbanállás nélkül kapható lenne (a sor előtti utolsó döntési ponthoz áramlásra gondolunk itt, lásd az 1. és 2. ábrát). Ez az áram általában három részre oszlik: a sorbanállók, a kényszerhelyettesítők, valamint a halasztók részáramlására.

Egy normál állapotban ezeket az i típusú potenciális fogyasztók következő részarányai képviselik. $i = 1, \ldots, k$:

(5.1) $(fq)_i^* = f_i(w^*)$ (a sorbanállás felé áramlók),

(5.2) $(fs)_i^* = \big(1 - f_i(w^*)\big) \cdot c_i(\pi)$ (a kényszerhelyettesítés felé áramlók),

(5.3) $(fp)_i^* = \big(1 - f_i(w^*)\big) \cdot \big(1 - c_i(\pi)\big)$ (a halasztás felé áramlók).

E felosztást úgy lehet tekinteni, mint a vásárlók választását, milyen társadalmi költségekkel küzdenek meg a hiánnyal: időt fordítanak a sorbanállásra, vásárolnak egy kedvezőtlenebb terméket vagy nem vásárolnak. A $\lambda \geq \varphi$,,hiánymentes'' esetben $w^* = 0$ és így $(fq)_i^* = 1$, $(fs)_i^* = (fp)_i^* = 0$ valamennyi i mellett. A $\lambda < \varphi$ esetben hiány van, $w^* > 0$ és valamennyi részarány pozitív lehet. A kényszerhelyettesítést tekintve nemcsak az $(fs)_i^*$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ részáramlások tarthatnak érdeklődésre számot, hanem az állomány részarányok is, vagyis a kényszerhelyettesítőknek az összes helyettesítőkhöz viszonyított száma. Tetszőleges normálállapotot nézve, az i vásárlási csoportban jelöljük ezt a részarányt r_i^*-gal $(i = 1, \ldots, k)$. Az 1.1 és 1.2 következmények egyenleteiből a következő kifejezést kapjuk:

$$r_i^* = \frac{a_i(\pi) \cdot c_i(\pi) \cdot \big(1 - f_i(w^*)\big)}{c_i(\pi) \cdot \big(1 - f_i(w^*)\big) + \big(1 - a_i(\pi)\big) \cdot f_i(w^*)} \qquad (i=1, 2, \ldots, k), \tag{5.4}$$

ahol r_i^* nulla lesz, ha a számláló nulla. Például a $\lambda \geq \varphi$,,hiánymentes'' esetben $w^* = 0$ és így $r_i^* = 0$ valamennyi i-re.

A normál állapotot az összes megemlített szempontból elemezni nagyon hosszas lenne, hogy csak a legkisebbet mondjuk a nehézségek közül. Mégis, mivel az állapotváltozók és mutatók normál értékei többé-kevésbé közvetlenül kapcsolódnak a w^* normál sorbanállási időhöz, ezért a teljesség túlzott megsértése nélkül megtehetjük, hogy következő elemzésben erre az alapvető jellemzőre összpontosítunk.

A w^* normál sorbanállási időt az 1.1 és 1.2 következmény a $w^* = x_i^*/\lambda$ azonosságon keresztül meghatározza. Az egyszerűség kedvéért eredményünket itt újra megfogalmazzuk. Legyen a $G: R_+ \to R_+$ függvény definíciója a következő:

$$G(w) = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i(\pi) \cdot n_i}{A_i(w) + a_i(\pi) \cdot w}. \tag{5.5}$$

1.3. *Következmény*

a) Ha $\lambda < \varphi$, akkor $w^* > 0$. Ezenkívül w^* a $G(w) = \lambda$ egyenlet egyértelmű megoldása.

b) Ha $\lambda \geq \varphi$, akkor $w^* = 0$

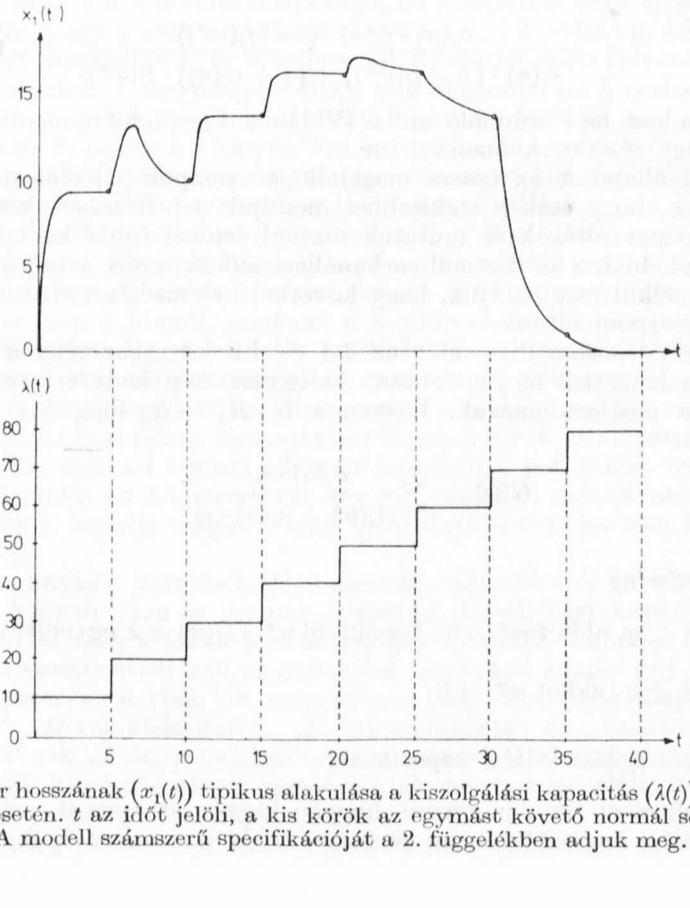
5.2. *Függés a kiszolgálási kapacitástól*

Azt fogjuk most tanulmányozni, hogyan függ a w^* normál sorbaállási idő a λ kiszolgálási kapacitástól, ha az összes többi paraméter és függvény (így a φ is) állandó. Hasonlítsuk össze a normál sorbanállási időt egy alacsonyabb és egy magasabb kiszolgálási kapacitás esetén!

Intuitív meggondolással azt várjuk, hogy a nagyobb kiszolgálási kapacitásnál a sorbanállási idő kisebb lesz. A G függvény monotonitásából közvetlenül következik is, hogy valóban ez a helyzet:

1. Észrevétel: A w^* normál sorbanállási idő a λ kiszolgálási kapacitás folytonos függvénye. $\lambda \in (0, \varphi)$ esetén e függvény pozitív és csökkenő, míg $\lambda \geq \varphi$ esetén azonosan nulla.

Egy megjegyzést kell itt tenni a sor x_1^* normál hosszáról. Elsőre azt gondolnánk, hogy a fenti eredmény a normál sorhosszra is fennáll, azaz a nagyobb kiszolgálási kapacitás rövidebb sorral jár együtt. Ebben a modellben azonban azt feltételeztük, hogy a sorbanállási idő és nem a sorbanálló személyek száma az, ami befolyásolja a potenciális fogyasztó sorbanállási hajlandóságát. Ezért a sorbanállási hajlandóság függvények tulajdonságaira vonatkozó józan feltevések mellett is lehetséges, hogy a normál sorhossz nem-monoton módon kapcsolódik a kiszolgálási kapacitáshoz. Ez a helyzet például, ha az elfogadható sorbanállási időnek véges felső korlátja van, vagy pontosabban, ha létezik egy olyan véges w_0, hogy $f_i(w_0) = 0$ $i = 1, 2, \ldots, k$ esetén.



4. ábra: A sor hosszának $(x_1(t))$ tipikus alakulása a kiszolgálási kapacitás $(\lambda(t))$ lépcsőzetes növekedése esetén. t az időt jelöli, a kis körök az egymást követő normál sorhosszakat. A modell számszerű specifikációját a 2. függelékben adjuk meg.

2. Észrevétel: Az x_*^1 normál sorhossz a λ kiszolgálási kapacitás folytonos függvénye, ami $\lambda \in (0, \varphi)$ esetén pozitív és $\lambda \geq \varphi$ esetén azonosan nulla. Ha az elfogadható sorbanállási időnek véges felső korlátja van, akkor $\lim_{\lambda \downarrow 0} x_1^* = 0$.

Tehát mivel x_1^* a λ-nak pozitív értékű és folytonos függvénye a $\lambda \in (0, \varphi)$ esetén, nem lehet monoton csökkenő az egész $(0, \varphi)$ intervallumban. A 4. ábra szemlélteti a sor hosszának függését a kiszolgálási kapacitástól egy tipikus esetben.

Összefoglalva: Magasabb kiszolgálási kapacitás rövidebb sorbanállási időt jelent, de maga a sor nem lesz feltétlenül rövidebb.

5.3. Függés az ártól

Tanulmányozzuk, hogyan függ a normál állapot a π viszonylagos ártól, ha az összes paraméter és függvény (köztük λ is) állandó. Mielőtt a normál állapotváltozókat tanulmányoznánk, néhány észrevételt kell tennünk a φ „hosszútávú potenciális keresletről". A (4.1) definícióból könnyen igazolható, hogy $\pi > 0$ esetén φ a π-nek folytonos és nem-növekvő függvénye. Továbbá $\varphi \to 0$, ha $\pi \to +\infty$. Ily módon, ha $\varphi(\pi = 0) > \lambda$, akkor $\varphi(\pi) = \lambda$ lesz valamely véges, pozitív π értékre. Jelölje π_0 a minimális árat, azok közül, melyek kielégítik ezt az egyenlőséget (e minimális ár létezését φ folytonossága biztosítja). Az 1.1 és 1.2 következmények folytán ez a következő eredményhez vezet arról, hogy van-e sor, vagy nincs a normál állapotban:

3. Észrevétel: A kiszolgálási kapacitás és a vásárlók attitűdjét jellemző paraméter és függvény-együttes bármely rögzített értékéhez létezik *minimális sor-megszüntető ár*, vagyis létezik egy véges π_0 viszonylagos ár, amely kielégíti a következőket:

$$\pi < \pi_0 \Rightarrow x_1^* > 0,$$
$$\pi \geq \pi_0 \Rightarrow x_1^* = 0.$$

Másképpen mondva: mindig van olyan viszonylagos ár, amely elég magas ahhoz, hogy megszüntesse a hozzátartozó normál állapotban a sorbanállást. Bármilyen vonzónak tűnik is egy ilyen normál állapot, vegyük észre, hogy bár a π_0 feletti áraknál nincs sorbanállás, a kiszolgált személyek számát nézve a helyzet nem javul. Az 1.1 és 1.2 következményből ugyanis könnyen igazolható, hogy az s^* normál kiszolgálási sebesség kielégíti az $s^* = \min(\lambda, \varphi)$ egyenletet. Így, mint a π viszonylagos ár függvénye, a normál kiszolgálási sebesség a (O, π_0) árintervallumban azonosan egyenlő λ-val, míg a $(\pi_0, +\infty)$ árintervallumban φ-vel együtt csökken.

Mivel a π_0 minimális sor-megszüntető ár a hosszútávú potenciális keresletet egyenlővé teszi a λ kiszolgálási kapacitással, azért a *walrasi piac-megtisztító árnak* tekinthető. Ez az ár a kifejtett determinisztikus modellben egyértelmű. Ezen ár alatt — ceteris paribus — mindig van sor, felette pedig soha nincs sor.

Nézzük meg most, mi történik a normál sorbanállási idővel, ha egy alacsony viszonylagos árat megemelünk. Intuitív alapon azt várjuk, hogy a magasabb árhoz tartozó normál sorbanállási idő ne legyen hosszabb, mint az alacsonyabb árhoz tartozó normál sorbanállási idő. Ez az összefüggés valóban fennáll modellünkben.

4. *Észrevétel:* A w^* normál sorbanállási idő a π viszonylagos ár folytonos függvénye. A $(0, \pi_0)$ intervallum áraira ez a függvény pozitív értékű és nem-növekvő, míg a $\pi \geq \pi_0$ árakra azonosan nulla.

Összefoglalva: Mindig van olyan viszonylagos ár, amely elég magas ahhoz, hogy megszüntesse a hozzátartozó normál állapotban a sorbanállást. E minimális sor-megszüntető ár alatti árakra a normál sorbanállási idő az ár növekedésével nem-növekvő.

5.4. *Függés a sorbanállási és a kényszerhelyettesítési hajlandóságtól*

Az előző két pontban tanulmányoztuk, hogyan függ a normál állapot az olyan „piaci szabályozó változóktól", mint a viszonylagos ár és a kiszolgálási kapacitás. Most azt fogjuk megnézni, hogyan függ a normál állapot a vásárlói attitűd egyes elemeitől.

Tekintsük először a normál sorbanállási idő függését a vásárlók sorbanállási hajlandóságaitól, minden más paramétert és függvényt változatlanul hagyva. Legyen $f_1, f_2, \ldots, f_k$ és $g_1, g_2, \ldots, g_k$ a sorbanállási hajlandóság függvények két alternatív együttese. Ha minden i esetén $f_i(w) \geq g_i(w)$ minden $w > 0$-ra, és valamelyik i esetén $f_i(w) > g_i(w)$ minden $w > 0$-ra, akkor azt mondjuk, hogy az $[f_i]$ függvényegyüttes *dominálja* a $[g_i]$ függvényegyüttest.

5. *Észrevétel:* Tegyük fel, hogy $\lambda < \varphi$ és, hogy a sorbanállási hajlandóság függvények egy $[f_i]$ együttese dominálja a sorbanállási hajlandóság függvények egy másik, $[g_i]$ együttesét. Ekkor az első együtteshez tartozó normál sorbanállási idő meghaladja a másodikhoz tartozó normál sorbanállási időt.

Más szóval: magasabb sorbanállási hajlandóságok mellett hosszabb lesz a sorbanállási idő a normál állapotban.[10]

A következőkben nézzük a normál sorbanállási idő függését a vásárlók kényszerhelyettesítési hajlandóságától, minden más paramétert és függvényt (köztük a viszonylagos árat is) változatlanul hagyva. Legyen $[c_i]$ és $[d_i]$ a kényszerhelyettesítési hajlandóság függvények két alternatív együttese, és tegyük fel, hogy $[c_i]$ dominálja $[d_i]$-t, azaz minden i-re $c_i(\pi) \geq d_i(\pi)$ valamennyi $\pi \geq 0$ esetén, és valamelyik i-re $c_i(\pi) > d_i(\pi)$ valamennyi $\pi \geq 0$ esetén.

6. *Észrevétel:* Tegyük fel, hogy a kényszerhelyettesítési függvények egy $[c_i]$ együttese dominálja egy másik $[d_i]$ együttesüket. Bármely rögzített viszonylagos ár mellett a $[c_i]$-hez tartozó normál sorbanállási idő kisebb vagy egyenlő a $[d_i]$-hez tartozó normál sorbanállási időnél.

[10] Ez talán magától értetődőnek tűnik. Szeretnénk azonban felhívni az olvasó figyelmét az okozati összefüggés irányára. A sorbanállási hajlandóság lehet a fogyasztó egy döntési változója, de a sorbanállási idő az egyéni döntések együttes következménye lesz, és mint ilyen, az egyes egyén számára adott. A tényleges hiányhelyzet függ a vásárlók tűrésétől.

Más szóval: a magasabb kényszerhelyettesítési hajlandóságok sohasem vezetnek hosszabb normál sorbanállási időhöz.

Az 5. és 6. észrevétel megerősíti a 4.3 pont végén tett megjegyzésünket. Az állapotváltozók alakulása függ a különböző vásárlói csoportok attitűdjétől. Az is igaz, hogy *fennáll bizonyos „átváltási lehetőség" (trade-off) a hiány különféle nem-pénzbeli társadalmi költségei között.* A 6. észrevétel egy ilyen átváltási lehetőséget szemléltet. A vásárlók elérhetnek rövidebb sorbanállási időt, ha nagyobb mértékű kényszerhelyettesítés vállalására hajlandók. Egy ilyen költség csökkentése a többi növelése nélkül, általában csak azon tényezők megváltoztatásával biztosítható, amelyek itt a végső meghatározók: a fogyasztás és az önkéntes helyettesítés módjai az egyik oldalon és/vagy a kiszolgálási kapacitás és az ár a másik oldalon.

Végül megjegyezzük, hogy a λ és π „piaci szabályozó változók" megváltozásai — ugyanúgy, mint a vásárlói attitűd megváltozásai, általában elosztási hatásokkal járnak a vásárlói csoportokra nézve. Például a relatív ár növekedése helyettesítésre bírhatja az árérzékeny vásárlói csoportokat, mialatt a kevésbé árérzékeny csoportok változatlan fogyasztási mód mellett juthatnak rövidebb sorbanállási időhöz. Ugyanígy az egyik csoport magasabb kényszerhelyettesítési hajlandóságából — a rövidebb sorbanállási idő által — más csoportok húznak hasznot.

Tehát a pénzzel való jövedelemelosztás kérdéséhez, amit az irodalom kimerítően tárgyal, egy új, fontos szempont járul: a fogyasztás nem-pénzbeli társadalmi költségeinek eloszlása a népesség különböző csoportjai között.

6. A kiterjesztés irányai

Ez a cikkünk csak első lépés a problémák egy széles körében. Az elemzés nagyon szűk határok között mozog, drasztikus leegyszerűsítéseket alkalmazunk, bevezető célokra. Szükség van a téma kiterjesztésére és változatainak feltárására. Az alábbiakban felsorolunk néhányat a kutatás lehetséges irányai közül:

- A piac időben növekvő forgalom mellett;
- A kínálat, ezen belül a raktárkészletek endogén meghatározása;
- A résztvevők sztochasztikus egymásrahatása;
- A piac tagoltabb szervezete, pl. sok eladó egy helyett;
- Alternatív tevékenységek beépítése, például a vevők különböző eladási helyeken vagy különböző időpontokban keresik az árut;
- A vásárlók ismerete a kínálatról és az eladók ismerete a keresletről vagy exogén módon adott, vagy endogén módon határozódik meg;
- Prioritások a sorban az egyes vásárlói csoportok között;
- A megvásárolt mennyiség függ az ártól és/vagy a sorbanállási vagy a keresési időtől;

A következő cikkünk a keresés esetét fogja tárgyalni, részben felölelve a felsorolt kiterjesztések némelyikét.

I. FÜGGELÉK: A MATEMATIKAI ÁLLÍTÁSOK BIZONYÍTÁSA

1. Állítás:

Az alábbiakban sorraveszünk néhány speciális esetet.

I.: $a_i(\pi) = 0$ *valamennyi i-re*. Az $\dot{x}_{4i} = 0$ stacioneritási feltétel maga után vonja, hogy $x_{4i} = 0$ (A4-ből $c_i > 0$). $\dot{x}_{1i} = 0$-ból azt kapjuk, hogy $x_{1i} = 0$, lásd a (2.3) egyenletet. Továbbmenve, $\dot{x}_{2i} = 0$ magában foglalja, hogy $x_{2i} = 0$, és ily módon a teljesíthetőségből $x_{3i} = n_i$ következik. Összefoglalva: ebben az esetben pontosan egy teljesíthető stacionárius állapot van, nevezetesen az $x_{1i} = x_{2i} = x_{4i} = 0$ és $x_{3i} = n_i$ valamennyi i esetén.

II. $a_i(\pi) > 0$ *valamely i-re*. Tegyük fel, hogy $x_1 = 0$. Ekkor A2 szerint $f_i(w) = f_i(x_1/\lambda) = f_i(0) = 1$ minden i-re, és (2.3) szerint $s_i = 0$ minden i-re. Egy olyan i csoportot tekintve, amelyre $a_i(\pi) > 0$, azt kapjuk, hogy $\dot{x}_{1i} > 0$, ami kizárja a stacioneritást. Ezért ebben az esetben $x_1 > 0$ a stacioneritás egy szükséges feltétele.

II.A: Tekintsük először a stacioneritási feltételeket egy olyan i csoportra, ahol $a_i > 0$ és $f_i(w) > 0$.

$$\dot{x}_{1i} = \dot{x}_{4i} = 0 \Rightarrow \varrho_i f_i \cdot x_{4i} = (1 - c_i) \cdot (1 - f_i) \cdot s_i,$$
$$\dot{x}_{2i} = 0 \Rightarrow \gamma_i \cdot x_{2i} = s_i$$

Az $\dot{x}_{1i} = 0$ egyenletbe $x_{3i} = n_i - x_{1i} - x_{2i} - x_{4i}$-t helyettesítve a következőt kapjuk:

$$\left[(1 - a_i) \cdot f_i + \frac{\varkappa_i}{\gamma_i} \cdot a_i f_i + c_i(1 - f_i) + \frac{\varkappa_i}{\varrho_i} \cdot a_i \cdot (1 - c_i) \cdot (1 - f_i)\right] \cdot s_i = $$
$$= a_i \varkappa_i \cdot f_i \cdot (n_i - x_{1i}),$$

$\varkappa_i$-vel és $f_i > 0$-val való osztás után

$$A_i(w) \cdot s_i = a_i \cdot (n_i - x_{1i}),$$

$A_i(w)$-t a (4.2) egyenlőséggel definiáltuk. A (2.1) és a (2.3) ($x_1 > 0$) egyenlőségek szerint $s_i = \lambda \cdot h_\sigma(x_1) \cdot x_{1i}/x_1$. A fenti egyenlőséget átrendezve azt kapjuk, hogy

$$x_{1i} = \frac{a_i \cdot n_i \cdot x_1}{A_i(w) \cdot \lambda \cdot h_\sigma(x_1) + a_i \cdot x_1} > 0. \qquad (*)$$

II.B: Másodszor tekintsük a stacioneritási feltételeket egy olyan i csoportra, ahol $a_i = 0$. Az I-ben már kifejtett indoklással $x_{1i} = 0$-hoz jutunk. Nézzük meg (*)-ot ismét. Ha ebben $a_i = 0$, akkor az egyenlőség $x_{1i} = 0$-át ad ($x_1 > 0$). Így (*) az $a_i = 0$ mellett is érvényes az i csoportra.

II.C: Harmadszor nézzük meg a stacioneritási feltételeket egy olyan i csoportra, amelyre $a_i > 0$ és $f_i(w) = 0$. Az $\dot{x}_{1i} = 0$ egyenletből azonnal adódik $x_{1i} = 0$. Tekintsük (*)-ot. Ha $f_i(w) = 0$, akkor $A_i(w) = +\infty$ és így a (*) egyenlőség $x_{1i} = 0$ ($x_1 > 0$)-ra redukálódik.

Összegezve: a (*) egyenlőség minden i-re érvényes, tekintet nélkül arra, hogy a_i és f_i pozitívak vagy nem, és ezért (*)-ot összegezhetjük i szerint. A (2.2) felhasználásával az $F_\sigma(x_1) = 1$ egyenlőséghez jutunk, ahol az F_σ: $(0, n] \to R_+$ függvény definíciója:

$$F_\sigma(x_1) = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i \cdot n_i}{A_i\left(\frac{x_1}{\lambda}\right) \cdot \lambda \cdot h_\sigma(x_1) + a_i \cdot x_1}.$$

Az A1—A4 feltevésekből világos, hogy $A_i(x_1/\lambda) > 0$ és $\frac{\partial}{\partial x_1} A_1(x_1/\lambda) \geqq 0$ minden $x_1 > 0$ esetén. A5-öt hozzávéve ez maga után vonja, hogy F_σ folytonos és csökkenő,[11] valamint, hogy $\lim_{x_1 \downarrow 0} F_\sigma(x_1) = +\infty$ és $F_\sigma(n) < \sum_i n_i/n = 1$. Következésképp az $F_\sigma(x_1) = 1$ egyenletnek a $(0, n)$ intervallumban egy és csak egy gyöke van. Mivel ez az egyenlet a stacioneritás szükséges feltétele, már csak azt kell igazolni, hogy a gyök valóban a rendszer egy egyértelmű teljesíthető állapotát határozza meg.

Tekintsünk először egy i csoportot, amely a II. A speciális esetben van. A fenti egyenletek egyértelmű, nem-negatív értékeket adnak x_{1i}, x_{2i} és x_{4i}-nek. Az $x_{3i} = n_i - x_{1i} - x_{2i} - x_{4i}$ egyenlőség egyértelmű értéket ad x_{3i}-nek, amely $(*)$ érvényessége miatt nem-negatív:

$$x_{3i} = n_i - \left[1 + \left(\frac{a_i}{\gamma_i} + \frac{a_i}{\varrho_i} \cdot (1 - c_i) \cdot \left(\frac{1}{f_i} - 1\right)\right) \cdot \frac{\lambda}{a_i \cdot x_1} \cdot h_\sigma(x_1)\right] \cdot x_{1i} \geq$$

$$\geq n_i - \left[1 + A_i(w) \cdot \frac{\lambda}{a_i \cdot x_1} \cdot h_\sigma(x_1)\right] \cdot x_{1i} =$$

$$= n_i - \frac{a_i \cdot x_1 + A_i(w) \cdot \lambda \cdot h_\sigma(x_1)}{a_i \cdot x_1} \cdot x_{1i} = n_i - \frac{n_i}{x_{1i}} \cdot x_{1i} = 0.$$

Mivel az x_{3i} szerkesztése miatt $x_{1i} + x_{2i} + x_{3i} + x_{4i} = n_i$, kimondhatjuk, hogy a fenti x_1 gyök egy ilyen i csoport számára egyértelműen meghatározza az állapotváltozók egy teljesíthető stacionárius értékét.

Tekintsünk másodszor egy II.B speciális helyzetben levő i csoportot. Itt $x_{1i} = x_{2i} = 0$. Mivel $a_i = 0$, azért $c_i > 0$ A4 szerint. Az $\dot{x}_{3i} = \dot{x}_{4i} = 0$ egyenletek miatt $x_{4i} = 0$, és így $x_{1i} = x_{2i} = x_{4i} = 0$, $x_{3i} = n_i$ lesznek az egyértelmű teljesíthető stacionárius állapotváltozó értékek egy ilyen csoportra.

Harmadszor, a II.C speciális eset azonnal $x_{1i} = x_{2i} = 0$ értékeket ad, és az $\dot{x}_{3i} = \dot{x}_{4i} = 0$ egyenletek egyértelműen meghatározzák az x_{3i} és x_{4i} teljesíthető értékeit.

Összegezve: az $F_\sigma(x_1) = 1$ egyetlen gyöke egyértelműen meghatároz egy teljesíthető stacionárius állapotot.

1.1. Következmény:

Az $a_1(\pi) = \ldots = a_k(\pi) = 0$ triviális esetet a $0 < \lambda < \varphi$ hipotézis miatt egyből kizárhatjuk. Legyen most bármely rögzített $\sigma > 0$ esetén az F_σ függvény olyan, mint az 1. állítás bizonyításában. Ott megmutattuk, hogy $x_1^*(\sigma)$

[11] Emlékeztetünk rá, hogy a „csökkenő" és „növekvő" fogalmakat szigorú értelmükben használjuk, lásd erről a lábjegyzetet a 3.2 pontban.

az $F_\sigma(x) = 1$ egyenlet egyértelmű megoldása. Definiálja az F: $[0, n] \to R_+$ függvényt a következő kifejezés:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i \cdot n_i}{\lambda \cdot A_i\left(\dfrac{x}{\lambda}\right) + a_i x}.$$

A h_σ kisimító függvény definíciója szerint $x \geq \sigma$ esetén F egybeesik F_σ-val, $x < \sigma$ esetén pedig F_σ majorizálja F-et. Tekintsük most az $F(x) = 1$ egyenletet. A2 következtében $F(0) = \varphi/\lambda$. Továbbmenve, $\varphi/\lambda > 1$ feltevés szerint, és $F(n) = \sum_i n_i/n = 1$. Mivel F folytonos és csökkenő függvény, azért az $F(x) = 1$ egyenletnek létezik egy egyértelmű $x_0 \in (0, n)$ megoldása. Tehát valamennyi $\sigma < x_0$ esetén fenn kell, hogy álljon $x_1^*(\sigma) = x_0$.

Legyen most $\{h_{\sigma_m}\}_{m=1}^{\infty}$ a kisimító függvények tetszőleges olyan sorozata, hogy $\sigma_m \downarrow 0$. Ekkor létezik egy N véges egész szám, olyan, hogy $x_1^*(\sigma_m) = x_0$ minden $m > N$ esetén. Ily módon, ha $\sigma \downarrow 0$, akkor $x_1^*(\sigma) \to x_0$, a választott sorozattól függetlenül. Ezzel bebizonyosodott, hogy $x_1^* = x_0 > 0$, x_1^* tehát a (4.3) egyenlet egyértelmű megoldása. Az 1. állítás bizonyításából következik, hogy $x_{1i}^*(\sigma)$ határértéke az, ami a (4.4) egyenlőségben. (4.5) és (4.7) is közvetlenül következik ebből a bizonyításból. $x_{3i}^*(\sigma)$ analitikus kifejezése az $x_{3i}^*(\sigma) = n_i - x_{1i}^*(\sigma) - x_{2i}^*(\sigma) - x_{4i}^*(\sigma)$ összefüggésből következik, és ez megadja (4.6)-ot.

1.2. Következmény:

Az $a_1(\pi) = \ldots = a_k(\pi) = 0$ triviális esetben az 1. állítás bizonyításából azt kapjuk, hogy $x_{1i}^*(\sigma) = x_{2i}^*(\sigma) = x_{4i}^*(\sigma) = 0$ és $x_{3i}^*(\sigma) = n_i$. Ez az eredmény megfelel a következmény kijelentéseinek. Ezután, feltételezve, hogy valamely i-re $a_i(\pi) > 0$ és F_σ-t olyannak választva, mint az 1.1 következmény bizonyításában, megvizsgáljuk az $F_\sigma(x) = 1$ egyenletet, amelynek megoldása $x = x_1^*(\sigma)$. Legyen F olyan alakú, mint az 1.1 következmény bizonyításában. Tudjuk, hogy $F(0) = \varphi/\lambda \leq 1$ feltevés szerint. Mivel F csökkenő függvény, $F(\sigma) < 1$. Továbbmenve, $F_\sigma(\sigma) = F(\sigma)$ és így $F_\sigma(\sigma) < 1$. Ezért $x_1^*(\sigma) < \sigma$, az F_σ monotonitása folytán. Mivel ez utóbbi egyenlőtlenség bármely $\sigma > 0$ esetén fennáll, kimondhatjuk, hogy a kisimító függvények bármely $\{h_{\sigma_m}\}_{m=1}^{\infty}$ $\sigma_m \downarrow 0$ sorozatára $x_1^*(\sigma_m) \to 0$. Eszerint $\lim_{\sigma \downarrow 0} x_1^*(\sigma) = 0$.

Ami az állapotváltozók határértékét illeti, a (4.8) egyenlőségből azonnal következik, hogy $0 \leq x_{1i}^*(\sigma) \leq x_1^*(\sigma) \to 0$. Továbbmenve, f_i folytonossága miatt $w^*(\sigma) \to 0$ maga után vonja, hogy $f_i(w^*(\sigma)) \to f_i(0) = 1$. Tehát, az 1. állítás bizonyítását megnézve, $x_{4i}^*(\sigma) \to 0$. Tetszőleges $\sigma > 0$ esetén fennáll, hogy

$$x_{2i}^*(\sigma) = \frac{1}{\gamma_i} \cdot \bigl(\lambda \cdot h_\sigma(x_1^*(\sigma)) \cdot x_{1i}^*(\sigma)/x_1^*(\sigma)\bigr) = \frac{a_i}{\gamma_i} \cdot \frac{n_i - x_{1i}^*(\sigma)}{A_i(w^*)}.$$

Így $\sigma \downarrow 0$ esetén $x_{2i}^*(\sigma) \to \dfrac{a_i}{\gamma_i} \cdot \dfrac{n_i}{A_i(0)}$, ami a (4.9) egyenlőséget adja. Végül $x_{3i}^*(\sigma) = n_i - x_{1i}^*(\sigma) - x_{2i}^*(\sigma) - x_{4i}^*(\sigma)$, ami a (4.10) egyenlőséghez vezet.

2. Állítás:

A differenciálegyenlet-rendszerek linearizálásának szokásos módszerét alkalmazzuk a stacionárius állapotban [vö. Hale (1969)-ben a III. fejezet 6.1 következményével].

(*a*) $\lambda < \varphi$:

Legyen $\varepsilon = x_0$, ahol x_0 az $F(x) = 1$ egyenlet egyértelmű megoldása az 1.1 következmény bizonyításában. Ekkor bármely $\sigma \in (0, \varepsilon)$ esetén $x_1^* = x_0 > 0$, lásd az 1.1 következmény bizonyítását. Az x_1^*, x_2^*, x_3^* és x_4^* értékek az 1.1 következmény egyenletei által adottak. Tudjuk azt is, hogy $h_\sigma(x_1) = 1$ valamennyi $\sigma \in (0, \varepsilon)$ esetén.

Az alábbi elemzésben feltesszük, hogy $\sigma < \varepsilon$ és u_i bevezetésével x_i-t a következőképpen helyettesítjük (x_i^* $x_i^*(\sigma)$-t jelent):

$$\begin{cases} x_1 = x_1^* + u_1 \\ x_2 = x_2^* + u_2 \\ x_3 = x_3^* + u_3 \\ x_4 = x_4^* + u_4, \end{cases}$$

ahol $u_4 = -u_1 - u_2 - u_3$ a teljesíthetőség végett. Továbbmenve, $w = x_1/\lambda = w^* + u_1/\lambda$ és $f(w) = f(w^*) + f'(w^*) \cdot u_1/\lambda + o(u_1)$ Taylor tétele szerint. (f'' folytonossága teszi a Taylor-kifejtés maradéktagját folytonossá, ami a stabilitási tétel fennállásának egy elégséges feltétele.) Azt is tudjuk, hogy $h_\sigma(x_1) = 1$, mert $|u_1| < \varepsilon - \sigma$. Az eredeti differenciálegyenlet-rendszer a következő:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a \cdot f(w) \cdot \gamma \cdot x_2 + a \cdot f(w) \cdot \varkappa \cdot x_3 + f(w) \cdot \varrho \cdot x_4 - \lambda \cdot h_\sigma(x_1) \\ \dot{x}_2 = \lambda \cdot h_\sigma(x_1) - \gamma \cdot x_2 \\ \dot{x}_3 = \big(1 - a \cdot (1 - c)\big) \cdot \gamma \cdot x_2 - a \cdot c \cdot f(w) \cdot \gamma \cdot x_2 - a \cdot (1 - c) \cdot \varkappa \cdot x_3 - \\ \qquad - a \cdot c \cdot f(w) \cdot \varkappa \cdot x_3 + c \cdot \varrho \cdot x_4 - c \cdot f(w) \cdot \sigma \cdot x_4 \\ x_4 = n - x_1 - x_2 - x_3. \end{cases}$$

Jelölje f^* $f(w^*)$-ot és $f^{*\prime}$ a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w} f(w)|_{w=w^*}$ deriváltat, és tegyük fel, hogy $|u_1| < \varepsilon - \sigma$. A behelyettesítés után:

$$\dot{u}_1 = a \cdot \left(f^* + \frac{u_1}{\lambda} \cdot f^{*\prime}\right) \cdot \gamma \cdot (x_2^* + u_2) + a \cdot \left(f^* + \frac{u_1}{\lambda} \cdot f^{*\prime}\right) \cdot \varkappa \cdot (x_3^* + u_3) +$$

$$+ \left(f^* + \frac{u_1}{\lambda} \cdot f^{*\prime}\right) \cdot \varrho \cdot (x_4^* + u_4) - \lambda + o(u_1),$$

$$\dot{u}_2 = \lambda - \gamma \cdot (x_2^* + u_2),$$

$$\dot{u}_3 = \big(1 - a(1 - c)\big) \cdot \gamma \cdot (x_2^* + u_2) - a \cdot c \cdot \left(f^* + \frac{u_1}{\lambda} \cdot f^{*\prime}\right) \cdot \gamma \cdot (x_2^* + u_2) -$$

$$- a \cdot (1 - c) \cdot \varkappa \cdot (x_3^* + u_3) - a \cdot c \cdot \left(f^* + \frac{u_1}{\lambda} f^{*\prime}\right) \cdot \varkappa \cdot (x_3^* + u_3) +$$

$$+c\cdot\varrho\cdot(x_4^*+u_4)-c\cdot\left(f^*+\frac{u_1}{\lambda}\cdot f^{*\prime}\right)\cdot\varrho\cdot(x_4^*+u_4),$$

$$u_4=-u_1-u_2-u_3.$$

A tagok átrendezése és az x_1^*, x_2^*, x_3^* és x_4^*-re definíció szerint teljesülő $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dot{x}_3 = \dot{x}_4 = 0$ stacioneritási egyenletek érvényesítése után a következőt kapjuk:

$$\begin{cases} \dot{u}_1=\left(a\cdot\frac{\gamma}{\lambda}\cdot x_2^*+a\cdot\frac{\varkappa}{\lambda}\cdot x_3^*+\frac{\varrho}{\lambda}\cdot x_4^*\right)\cdot f^{*\prime}\cdot u_1-\varrho\cdot f^*\cdot u_1+ \\ \quad +(a\cdot\gamma-\varrho)\cdot f^*\cdot u_2+(a\cdot\varkappa-\varrho)\cdot f^*\cdot u_3+o(|u|) \\ \dot{u}_2=-\gamma\cdot u_2 \\ \dot{u}_3=-c\cdot\left(a\cdot\frac{\gamma}{\lambda}\cdot x_2^*+a\cdot\frac{\varkappa}{\lambda}\cdot x_3^*+\frac{\varrho}{\lambda}\cdot x_4^*\right)\cdot f^{*\prime}\cdot u_1-c\cdot(1-f^*)\cdot\varrho\cdot u_1+ \\ \quad +[(1-a(1-c))\cdot\gamma-a\cdot c\cdot\gamma\cdot f^*-c\cdot\varrho\cdot(1-f^*)]\cdot u_2- \\ \quad -[a\cdot(1-c)\cdot\varkappa+a\cdot c\cdot f^*\cdot\varkappa+c\cdot\varrho\cdot(1-f^*)]\cdot u_3+o(|u|). \end{cases}$$

Az 1.1 következmény szerint:

$$a\cdot\frac{\gamma}{\lambda}\cdot x_2^*+a\cdot\frac{\varkappa}{\lambda}\cdot x_3^*+\frac{\varrho}{\lambda}\cdot x_4^*=1/f^*.$$

Ily módon:

$$\dot{u}_1=(f^{*\prime}/f^*-\varrho\cdot f^*)\cdot u_1+(a\cdot\gamma-\varrho)\cdot f^*\cdot u_2+(a\cdot\varkappa-\varrho)\cdot f^*\cdot u_3+o(|u|)$$

$$\dot{u}_2=-\gamma\cdot u_2$$

$$\dot{u}_3=-c\cdot(f^{*\prime}/f^*+\varrho\cdot(1-f^*))\cdot u_1+[(1-a\cdot(1-c))\cdot\gamma-a\cdot c\cdot\gamma\cdot f^*-c\cdot\varrho\cdot(1-f^*)]\cdot$$
$$\cdot u_2-[a\cdot(1-c)\cdot\varkappa+a\cdot c\cdot\varkappa\cdot f^*+c\cdot\varrho\cdot(1-f^*)]\cdot u_3+o(|u|).$$

Mátrix-megjelölésekkel: $\dot{u}=A\cdot u+o(|u|)$.

Hátra van még, hogy meghatározzuk A sajátértékeinek előjelét. Az általános sajátértéket z-vel jelölve, és kifejtve a $\det(A-z\cdot I)=0$ karakterisztikus egyenletet, azt kapjuk, hogy

$$(z+\gamma)\cdot[z^2+(\varrho\cdot f^*-f^{*\prime}/f^*+e)\cdot z+(\varrho\cdot f^*-f^{*\prime}/f^*)\cdot e+$$
$$+(a\cdot\varkappa-\varrho)\cdot c\cdot(f^{*\prime}/f^*+\varrho\cdot(1-f^*))f^*]=0,$$

ahol

$$e=a\cdot(1-c)\cdot\varkappa+c\cdot\varrho+c\cdot(a\cdot\varkappa-\varrho)\cdot f^*.$$

Mivel $\gamma>0$, nyilvánvalóan lesz egy sajátérték, amelynek negatív a valós része. A két másik sajátérték a $z^2+\alpha\cdot z+\beta=0$ másodfokú egyenlet gyöke, amely egyenletben

$$\alpha=\varrho\cdot f^*-f^{*\prime}/f^*+e>0,$$

$$\beta=(\varrho\cdot f^*-f^{*\prime}/f^*)\cdot e+(a\cdot\varkappa-\varrho)\cdot c\cdot(f^{*\prime}/f^*+\varrho(1-f^*))\cdot f^*=$$
$$=a\cdot\varkappa\cdot\varrho\cdot f^*-f^{*\prime}/f^*\cdot(a\cdot(1-c)\cdot\varkappa+c\cdot\varrho)>0$$

$(a > 0, f^* > 0, f^{*\prime} \leq 0)$. A valós és képzetes részek megállapítása azt mutatja, hogy mindkét gyöknek negatív a valós része.

Összegezve: mindhárom sajátértéknek negatív a valós része, és így a stacionárius állapot aszimptotikusan stabil.

(*b*) $\lambda \geq \varphi$:

Itt ugyanazon eljárást alkalmazzuk, mint a fenti (*a*) esetben. Először is megjegyezhető, hogy tetszőleges $\sigma > 0$ esetén $x_1^*(\sigma) < \sigma$, lásd az 1.2 következmény bizonyítását. Azzal a behelyettesítéssel, amit az (*a*)-nál is alkalmaztunk, feltesszük most, hogy $\sigma < \lambda \cdot \delta$ és $|u_1| < \sigma - x_1^*(\sigma)$, és így

$$w = x_1/\lambda = (x_1^* + u_1)/\lambda < \sigma/\lambda < \delta \Rightarrow f(w) = 1,$$
$$h_\sigma(x_1) = h_\sigma(x_1^*) + u_1 \cdot h'_\sigma(x_1^*) + o(u_1)$$

lesz, ahol a maradéktag h''_σ folytonossága következtében folytonos. A differenciálegyenlet-rendszer ekkor:

$$\begin{cases} \dot u_1 = a \cdot \gamma \cdot (x_2^* + u_2) + a \cdot \varkappa \cdot (x_3^* + u_3) + \varrho \cdot (x_4^* + u_4) - \lambda \cdot h_\sigma^* - \lambda \cdot h_\sigma^{*\prime} \cdot u_1 + o(|u|) \\ \dot u_2 = \lambda \cdot h_\sigma^* + \lambda \cdot h_\sigma^{*\prime} \cdot u_1 - \gamma \cdot (x_2^* + u_2) - o(|u|) \\ \dot u_3 = (1-a) \cdot \gamma \cdot (x_2^* + u_2) - a \cdot \varkappa \cdot (x_3^* + u_3) \\ u_4 = -u_1 - u_2 - u_3. \end{cases}$$

Végül a stacioneritási egyenletek érvényesítése az x_1^*, x_2^*, x_3^* és x_4^*-re a következőt adja:

$$\begin{cases} \dot u_1 = -(\varrho + \lambda \cdot h_\sigma^{*\prime}) \cdot u_1 - (\varrho - a \cdot \gamma) \cdot u_2 - (\varrho - a \cdot \varkappa) u_3 + o(|u|) \\ \dot u_2 = \lambda \cdot h_\sigma^{*\prime} \cdot u_1 - \gamma \cdot u_2 + c(|u|) \\ \dot u_3 = (1-a) \cdot \gamma \cdot u_2 - a \cdot \varkappa \cdot u_3. \end{cases}$$

Mátrix-jelölésekkel: $\dot u = B \cdot u + o(|u|)$. A $\det(A - z \cdot I) = 0$ karakterisztikus egyenlet:

$$(z + a \cdot \varkappa) \cdot [z^2 + (\gamma + \varrho + \lambda \cdot h_\sigma^{*\prime}) \cdot z + \varrho \cdot (\gamma + \lambda \cdot h_\sigma^*) + \gamma \cdot (1-a) \cdot \lambda \cdot h_\sigma^{*\prime}] +$$
$$+ (\varrho - a \cdot \varkappa) \cdot \gamma \cdot (1-a) \cdot \lambda \cdot h_\sigma^{*\prime} = 0.$$

Az A1 feltevés következtében $\varrho > \varkappa$ és így az utolsó tag nem-negatív. A z^3 kifejezés együtthatója is pozitív. Tegyük fel, hogy $\mathrm{Re}(z_1) \leq \mathrm{Re}(z_2) \leq \mathrm{Re}(z_3)$. Ekkor $\mathrm{Re}(z_3)$ nem haladja meg a

$$(z + a \cdot \varkappa) \cdot [z^2 + (\gamma + \varrho + \lambda \cdot h_\sigma^{*\prime}) \cdot z + \varrho \cdot (\gamma + \lambda \cdot h_\sigma^*) + \gamma \cdot (1-a) \cdot \lambda \cdot h_\sigma^{*\prime}] = 0$$

egyenlet gyökei valós részének maximumát. Mivel $0 < a \leq 1$ és $h_\sigma^{*\prime} \geq 0$, valamennyi sajátérték valós része negatív (a valós és a képzetes részeket oly módon azonosítva, mint az (*a*) bizonyításban). Így a stacionárius állapot aszimptotikusan stabil.

3. Állítás:

Mivel $x_4(0) = 0$ és $c = 1$, azért $x_4(t) = 0$ minden $t \geq 0$ esetén. A differenciálegyenlet-rendszer ekkor:

$$\dot{x}_1 = a \cdot f(w) \cdot \gamma \cdot x_2 + a \cdot f(w) \cdot \varkappa \cdot x_3 - \lambda \cdot h_\sigma(x_1),$$
$$\dot{x}_2 = \lambda \cdot h_\sigma(x_1) - \gamma \cdot x_2,$$
$$x_3 = n - x_1 - x_2.$$

A rendszer globális viselkedését fogjuk tanulmányozni az (x_1, x_2) hipersíkon:

$$\dot{x}_1 = a \cdot f(w) \cdot \varkappa \cdot (n - x_1) - a \cdot f(w) \cdot (\varkappa - \gamma) \cdot x_2 - \lambda \cdot h_\sigma(x_1),$$
$$\dot{x}_2 = \lambda \cdot h_\sigma(x_1) - \gamma \cdot x_2.$$

Az 1.1 következmény bizonyításából tudjuk, hogy $x_1(\sigma) = x_0$ minden $\sigma \in (0, x_0)$ esetén, ahol x_0 az $F(x) = 1$ egyenlet egyértelmű megoldása. Az ilyen σ értékekre $h_\sigma(x_1^*(\sigma)) = 1$. Az 1. állítás magában foglalja, hogy az $\dot{x}_1 = \Delta$ és $\dot{x}_2 = 0$ szintvonalak a teljesíthető $\{(x_1, x_2);\ x_1 + x_2 \leq n,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}$ halmaz egy pontjában metszik egymást.

Az $\dot{x}_1 = 0$ szintvonalat az

$$a \cdot f(w) \cdot (\varkappa - \gamma) \cdot x_2 = a \cdot f(w) \cdot \varkappa \cdot (n - x_1) - \lambda \cdot h_\sigma(x_1)$$

egyenlet határozza meg. (Vegyük észre, hogy $f(w) > 0$ rajta van ezen a szintvonalon, mivel $f(w) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow f(w) = f(x_1/\lambda) = f(0) = 1$ ellentmond A2-nek.)

Az $\dot{x}_1 = 0$ szintvonal három lehetséges alakját különböztetjük meg:

$$\underline{\gamma < \varkappa}: \ x_2 = G_1(x_1) = \frac{\varkappa}{\varkappa - \gamma} \cdot (n - x_1) - \frac{\lambda}{a \cdot (\varkappa - \gamma)} \cdot \frac{h_\sigma(x_1)}{f(x_1/\lambda)},$$
$$G_1(0) > 0, \quad G_1'(x_1) < 0, \quad G_1(n) < 0.$$

$$\underline{\gamma = \varkappa}: \ n - x_1 = \frac{\lambda}{a\varkappa} \cdot \frac{h_\sigma(x_1)}{f(x_1/\lambda)} \Rightarrow x_1 = x_1^*(\sigma),$$

$$\underline{\gamma > \varkappa}: \quad x_2 = G_1(x_1), \quad G_1(0) < 0, \quad G_1'(x_1) > 0, \quad G_1(n) > 0.$$

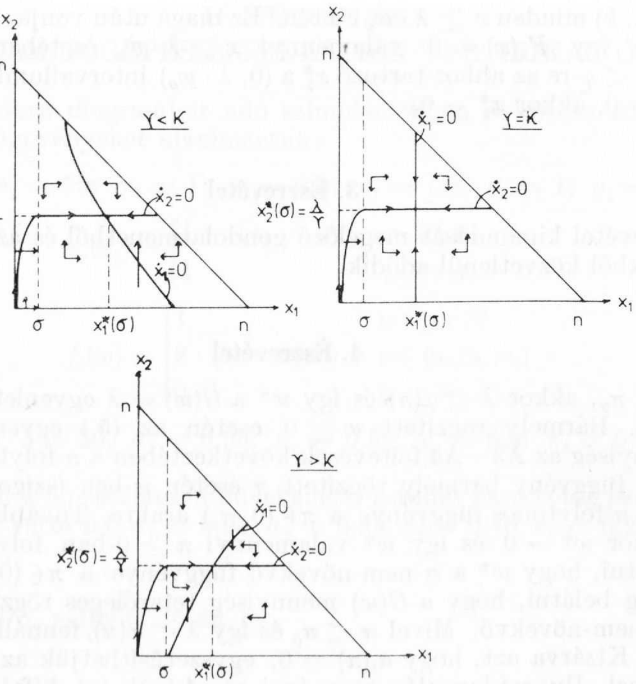
Ami az $\dot{x}_2 = 0$ szintvonalat illeti, egy analitikus alakja kielégíti:

$$x_2 = G_2(x_1) = \frac{\lambda}{\gamma} \cdot h_\sigma(x_1),$$

$$G_2(0) = 0, \quad G_2'(x_1) > 0, \quad x_1 \in [0, \sigma), \quad G_2(x_1) = \frac{\lambda}{\gamma}, \quad x_1 \geq \sigma.$$

Felhasználva ezen analitikus eredményeket a következő hipersík diagramokat rajzolhatjuk fel a három, $\gamma < \varkappa$, $\gamma = \varkappa$ és $\gamma > \varkappa$ esetre:

A nyilak a deriváltak előjelét mutatják. (A nyilak irányát a differenciálegyenletekben szereplő előjelekből állapítottuk meg.) Elemezzük a hipersíkdiagramot a $\gamma < \varkappa$ esetben. A szintvonalak a hipersíkot négy részre osztják, legyenek ezek: ÉK, ÉNy, DNy és DK. Ha a rendszer az ÉK-i részben indul, akkor vagy belép ÉNy-ba, vagy a stacionárius állapothoz konvergál. Ha az ÉNy-i részben indul, vagy belép DNy-ba; vagy a stacionárius állapothoz konvergál. Ha a rendszer DNy-ban van, vagy DK-be lép, vagy a stacionárius



5. ábra

állapothoz konvergál. Végül, ha a rendszer a DK-i részben indul, akkor nem léphet be egy másik részbe sem és a stacionárius állapothoz konvergál.

Hasonló meggondolásokat téve az $\gamma = \varkappa$ és $\gamma > \varkappa$ estekre bebizonyosodik, hogy a rendszer mindhárom esetben a stacionárius állapothoz konvergál.

1.3. Következmény:

A (4.3) egyenlőségbe helyettesítsük be $w = x_1/\lambda$-át.

1. Észrevétel

Ha $\lambda < \varphi$, akkor w^* a $G(w) = \lambda$ egyértelmű megoldása. Mivel G szigorúan monoton csökkenő függvény, w^* folytonos és csökkenő függvénye λ-nak $\lambda \in (0, \varphi)$ esetén. Ha $\lambda \to \varphi$, $w^* \to 0$ és így w^* λ-nak folytonos függvénye minden $\lambda > 0$ esetén.

2. Észrevétel

w^* folytonossága miatt x_1^* folytonos függvénye λ-nak. Továbbá, a $\lambda < \varphi$ esetben $x_1^* > 0$ egyértelmű megoldása a (4.3) egyenletnek. Jelöljük abban a bal oldalt $F_\lambda(x_1)$-gyel, ekkor az egyenlet az $F_\lambda(x) = 1$ alakban írható fel, ahol $F_\lambda(0) > 1$ $\lambda < \varphi$ esetén, és F_λ az x csökkenő függvénye minden rögzített $\lambda < \varphi$-re. A véges felső korlát hipotéziséből következik, hogy $f_i(x(\lambda)) = 0$

$(i = 1, \ldots, k)$ minden $x \geq \lambda \cdot w_o$ esetén. Ez maga után vonja, hogy $A_i(x(\lambda)) = +\infty$ és így $F_\lambda(x) = 0$ valamennyi $x \geq \lambda \cdot w_o$ esetében. Így bármely rögzített $\lambda < \varphi$-re az ahhoz tartozó x_1^* a $(0, \lambda \cdot w_o)$ intervallumban helyezkedik el. Ha $\lambda \to 0$, akkor $x_1^* \to 0$.

3. Észrevétel

Az észrevétel kimondását megelőző gondolatmenetből és az 1.1, 1.2 következményekből közvetlenül adódik.

4. Észrevétel

Ha $\pi < \pi_o$, akkor $\lambda < \varphi(\pi)$ és így w^* a $G(w) = \lambda$ egyenletnek egyértelmű megoldása. Bármely rögzített $w \geq 0$ esetén az (5.) egyenletben szereplő $G(w)$ mennyiség az A3 – A4 feltevések következtében a π folytonos függvénye. Mivel a G függvény bármely rögzített π esetén w-ben (szigorúan) csökkenő, azért w^* a π folytonos függvénye a $\pi \in (0, \pi_o)$ árakra. Továbbmenve, ha $\pi \to \pi_0$, akkor $w^* \to 0$ és így w^* valamennyi $\pi \geq 0$-ban folytonos. Meg kell még mutatni, hogy w^* a π nem-növekvő függvénye a $\pi \in (0, \pi_o)$ értékeknél. Ehhez elég belátni, hogy a $G(w)$ mennyiség tetszőleges rögzített $w > 0$-ban π szerint nem-növekvő. Mivel $\pi < \pi_o$ és így $\lambda < \varphi(\pi)$, fennáll $a_i(\pi) > 0$ valamely i-re. Kizárva azt, hogy $a_i(\pi) = 0$, egyszerűsíthetjük az (5.5) egyenlőséget $a_i(\pi)$-vel. Ily módon elég megnézni az $A_i(w)/a_i(\pi)$ kifejezés függését az ártól, rögzített w mellett. Tudjuk, hogy

$$A_i(w)/a_i(\pi) = \frac{1}{\varkappa_i} \cdot \left(\frac{1}{a_i(\pi)} - 1\right) + \frac{1}{\gamma_i} + \left[\frac{1}{\varkappa_i} \cdot \frac{c_i(\pi)}{a_i(\pi)} + \frac{1}{\varrho_i} \cdot (1 - c(\pi))\right] \cdot \left(\frac{1}{f_i(w)} - 1\right).$$

A3 szerint a_i nem-növekvő és így a fenti első tag nem-csökkenő lesz. A4 szerint c_i nem-csökkenő, és A1 következtében $1/\varkappa_i > 1/\varrho_i$. Így a második tag is nem-csökkenő függvénye π-nek. Összegezve, $A_i(w)/a_i(\pi)$ nem-csökkenő, amiből következik, hogy $G(w)$, rögzített w mellett, a π-ben nem-növekvő. Tehát w^* nem-növekvő π-ben.

5. Észrevétel

Mivel $\lambda < \varphi$, w^* a $G(w) = x$ egyenlet egyértelmű megoldása. Legyen G_1 az $[f_i]$ együtteshez tartozó függvény, és G_1 a $[g_i]$ együtteshez tartozó. Mivel $[f_i]$ dominálja a $[g_i]$-t, rögtön következik, hogy $G_1(w) > G_2(w)$ valamennyi $w > 0$ esetén, és így $w_1^* > w_2^*$ G monotonitása folytán.

6. Észrevétel

Ha $\lambda < \varphi$, akkor w^* a $G(w) = \lambda$ egyenlet egyértelmű megoldása. Legyen G_1 a $[c_i]$ együtteshez tartozó függvény, és G_2 a $[d_i]$ együtteshez tartozó. Mivel $1/\varkappa_i > 1/\varrho_i$ minden i-re, $[c_i]$ $[d_i]$ feletti dominanciájából következik, hogy $A_i^{(1)}(w) \geq A_i^{(2)}(w)$ minden $w \geq 0$-ra, természetes jelöléssel. Így $G_1(w) \leq G_2(w)$ minden $w \geq 0$-ra, és ezért $w_1^* \leq w_2^*$ G monotonitásából.

Ha $\lambda \geq \varphi$, akkor mindkét esetben $w^* = 0$.

II. FÜGGELÉK: A SZÁMÍTÓGÉPES SZIMULÁCIÓK SPECIFIKÁCIÓJA

A 3. és 4. ábra diagramjait adó szimulációkban a következő paraméterértékeket és függvényeket alkalmaztuk:

$k = 2;\ n_1 = n_2 = 50;\ \gamma_1 = 1;\ \gamma_2 = 0{,}5;\ \varkappa_1 = 1{,}5;\ \varkappa_2 = 1;\ \varrho_1 = 2;\ \varrho_2 = 3.$

$$h_\sigma(x_1) = \begin{cases} 1 - (x_1 - \sigma)^2 & x_1 < \sigma \\ 1 & x_1 \geq \sigma, \end{cases} \qquad (\sigma = 1)$$

$$f_i(w) = \begin{cases} 1 & w < w_i/2 \\ 2 \cdot (1 - w/w_i) & w \in (w_i/2,\, w_i) \\ 0 & w \geq w_i\,. \end{cases}$$

A 3. ábrában $\lambda = 30$, $a_1 = 0{,}95$, $a_2 = 0{,}90$, $c_1 = 0{,}5$, $c_2 = 0{,}25$, $w_1 = 1$, $w_2 = 2$ volt.

A 4. ábrában λ lépcsőzetesen növekedett, a többi paraméter pedig a következő értékeket vette fel: $a_1 = 0{,}95$, $a_2 = 0{,}82$, $c_1 = 0{,}40$, $c_2 = 0{,}22$, $w_1 = 0{,}5$, $w_2 = 1$.

(Beérkezett: 1978. március 16-án.)

IRODALOM

1. Barro, R. J. and H. I. Grossman (1971), "A General Disequilibrium Model of Income and Employment", *American Economic Review*, 61. évf., 82–93.
2. Barro, R. J. and H. I. Grossman (1974), "Supressed Inflation and the Supply Multiplier", *Review of Economic Studies*, 41. évf., 87–104.
3. Benassy, J. P. (1974), "Disequilibrium-elmélet", *Szigma*, 7. évf. 135–163, 241–270.
4. Benassy, J. P. (1975), "Neo-Keynesian Disequilibrium Theory in a Monetary Economy", *Review of Economic Studies*, 42. évf., 503–523.
5. Clower, R. W. (1965), "The Keynesian Counter-revolution: a Theoretical Appraisal", a következő kötetben, *The Theory of Interest Rates*, Szerkesztette F. H. Hahn és F. P. R. Brechling, Proceedings of an IEA Conference, Macmillan, London.
6. Hale, J. (1969), *Ordinary Differential Equations*, Wiley.
7. Kleinrock, L., (1976), *Queuing Systems*, II. kötet, John Wiley & Sons.
8. Kornai, J. (1971), *Anti-Equilibrium*, Közgazdasági és Jogi Kk. Budapest.
9. Kornai, J. (1974), *Az adaptáció csikorgó gépezete* Deák A., Farkas K., Lackó M. és Simonovits A. közreműködésével, sokszorosítva, MTA Közgazdaságtudományi Intézet.
10. Kornai, J. (1975), „A hiány méréséről", *Statisztikai Szemle*, 53. évf. 1208–1229.
11. Malinvaud, E. (1977), *The Theory of Unemployment Reconsidered*, Basil Blackwell, Oxford.

THE NORMAL STATE OF THE MARKET IN A SHORTAGE ECONOMY: A MODEL OF QUEUING

The subject of this study is an economy characterized by chronic shortage and queuing. The paper elaborates a very simple model for a single good, primarily intended as an illustration of an analytic framework for studies of shortage phenomena. Our main concern is to describe a market, which is away from Walrasian equilibrium, and nevertheless is in a stationary state, permanently restoring its basic properties. Central concepts in our analysis are such social costs of shortage as queuing time, postponement of purchase and forced substitution.

НОРМАЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ РЫНКА В ДЕФИЦИТНОМ ХОЗЯЙСТВЕ – МОДЕЛЬ ОЧЕРЕДЕЙ

Предметом нашего исследования является такая экономика, для которой характерны хронический дефицит и очереди. В статье предлагается весьма простая модель для одного товара, с помощью которой мы в пердую очередь хотели бы представить способ анализа, пригодный для изучения явлений дефицита. Наша основная цель состоит в описании такого рынка, который не находится в состоянии Вальрасова равновесия и тем не менее находится в стационарном состоянии и постоянно восстановливает свои основные характеристики. Как центральные понятия в нашем анализе выступают такие общественные затраты дефицита, как время, затрачиваемое на стояние в очередях, отказ от покупки и вынужденная замена.

Bródy András

A struktúraváltozás ábrázolásáról

A nyílt, statikus Leontief-modell tervezésre vagy előrejelzésre alkalmazva megbízhatatlan eredményeket ad. A számítások hibája átlagosan is meghaladhatja az 5 százalékot már az eredeti adatok összegyűjtésétől számított néhány éven belül [6].

Valamelyest javít ezen a modell lezárása és dinamizálása. Az egyensúlyi és a tényleges pálya eltérése mintegy 3–5 százalék között mozog, s a hiba lassabban növekszik [3, 11].

A Szigma 1977. évi 3. számában közölt ciklusmodellel elérhető pontosság remélhetőleg jobb, bár ellenőrző számítások nem állnak még rendelkezésre.

A pontosság további fokozása csak úgy lehetséges, ha a modell tükrözi a gazdaság strukturális változását is, tehát ha felöleli az A és B mátrix elemeinek a technikai fejlődés következtében beálló módosulását. Erre több kísérlet történt már [4, 10], s e dolgozatban megkísérlem a tanulmányok egy lehetséges általánosítását. Olyan egyszerű hipotézist dolgozok ki, amely alkalmasnak tűnik arra, hogy a strukturális változást (vagy annak legalábbis egy részét) a lehető legegyszerűbb matematikai transzformációval ábrázoljuk.

A transzformáció megválasztása

Az egyes országok – tehát az egyes igen különböző fejlettségi fokon álló gazdaságok – input-output adatgyűjtései egymáshoz meglepően közeli hasonlóságban álló mátrixokat eredményeztek. A „hasonlóság" itt minőségi *és* mennyiségi értelemben veendő: mind a nem-zérus elemek elhelyezkedése, mind nagyságrendjük meglehetősen egyöntetűnek bizonyult. Ugyanez áll még fokozottabb mértékben egyazon gazdaság különböző évekre vonatkozó matrixaira.

Kézenfekvő tehát valamilyen hasonlósági transzformációt keresni, még akkor is, ha ez matematikai értelemben elég erős megkötés. A technikai változás közelítésére ma széles körben használt RAS-módszer [1, 7] azonban már amúgyis közel áll e szigorú megkötéshez, hiszen matematikailag egy ekvivalencia-transzformációnak felel meg. Ha ezenfelül feltesszük, hogy az itt szereplő R és S mátrixok egymás inverzei, akkor csak egyetlen újabb megkötéssel szigorítottunk egy egyébként már használatos módszert.

Indokolható ez a választás más oldalról is. A koefficiensek változásának eddigi vizsgálata során már feltűntek ugyanis bizonyos sajátosságok:

(*a*) a zéruselemek említett tartóssága,
(*b*) az ár-együtthatók sokkalta lassabb változása, mint a természetes egységekben mért együtthatóké [9],

(c) a közvetlen és a teljes ráfordítási együtthatók arányainak az ár-együtthatóknál is nagyobb stabilitása [5, 8].

Ez utóbbi sajátosság, amely mind az alkalmazott természetes mértékegységektől, mind pedig az árrendszertől független mutatókat eredményez ezért a nemzetközi összehasonlítások egyik módszerének alapjává vált.

Csupán e gondolat logikus folytatása, ha feltesszük, hogy a közvetlen ráfordítás a_{ik} $(\{a_{ik}\} = A)$ és a teljes ráfordítás q_{ik} $\left(\{q_{ik}\} = Q = (1 - A)^{-1}\right)$ hányadosa változatlan. Feltevésünk szerint tehát

$$a_{ik}/q_{ik} = \text{konstans} = c_{ik}\,, \tag{1}$$

s figyelmünket az A mátrix azon lehetséges $T(A)$ transzformációira fordítjuk, amelyek e feltételnek eleget tesznek. Ha mármost az A mátrix a

$$T(A) = RAR^{-1} \tag{2}$$

alakban transzformálódik, akkor Leontief-inverze a

$$T(Q) = (1 - RAR^{-1})^{-1} = R(1 - A)^{-1}R^{-1} = RQR^{-1} \tag{3}$$

alakot ölti.

Ha a transzformáló R mátrixot úgy választjuk meg, hogy az egy pozitív diagonális mátrix legyen, azaz

$$R = \operatorname{diag} r_i = \langle r_1, \ldots, r_n \rangle \qquad r_i > 0, \tag{4}$$

akkor az (1) feltétel nyilván teljesül, mivel

$$[T(A)]_{ik}/[T(Q)]_{ik} = r_i q_{ik} r_k^{-1}/r_i q_{ik} r_k^{-1} = a_{ik}/q_{ik}.$$

Egyelőre nem tudom bizonyítani, de úgy vélem, hogy a fentiek megfordítottja is igaz, tehát nemcsak (4)-ből következik (1), hanem (1)-ből következik (4), azaz feltételünket csak a diagonális mátrixokkal képzett hasonlósági transzformációk elégítik ki.[1] A transzformáció pozitív volta azonban csak közgazdasági megfontolások eredménye, a matematikai forma negatív vagy aszimptotikusan zérussá váló értékeket is megengedne.

A transzformáció folytonos alakja

Kézenfekvő mármost azt kikötni, hogy ha a zérus időponttól az s időpontig vezető transzformáció $T_{os}(A)$ és az s időponttól a p időpontig vezető transzformáció $T_{sp}(A)$, akkor a zérustól p időpontig vezető transzformációt mint e két transzformáció „szorzatát”, azaz egymás után való elvégzését állíthatjuk elő, azaz

$$T_{op}(A) = T_{sp}(T_{os}(A)). \tag{6}$$

Kiírva a hasonlósági transzformációkat:

$$R_{op}AR_{op}^{-1} = R_{sp}R_{os}AR_{os}^{-1}R_{sp}^{-1}\,, \tag{7}$$

[1] Ez valószínűleg már az (a) sajátosságból is levezethető, mivel csak a diagonális matrixokkal végzett hasonlósági transzformáció „őrzi meg” a zérusokat.

azaz

(8) $$R_{op} = R_{sp} R_{os} .$$

Ha az *os* intervallumot a és az *sp* intervallumot b jelöli, akkor az *op* intervallum $a + b$ nagyságú, s így az alábbi függvényegyenlethez jutunk:

(9) $$R_{a+b} = R_b R_a .$$

Ha megengedjük a negatív időtartamra szóló (tehát időben visszafelé történő) transzformációt, akkor (9)-ből következik, hogy

(10) $$R_0 = 1 = R_{-t} R_t$$

minden t értékre, s így R_t nem lehet szinguláris, mivel van inverze, tudniillik $R_{-t} = R_t^{-1}$.

Ha most a (9) egyenletet először a, majd b szerint deriváljuk és a keletkező két jobb oldalt egymással egyenlővé tesszük, akkor

(11) $$R_b R'_a = R'_b R_a .$$

Jobbról R_{-a}-val, balról R_{-b}-vel szorozva

(12) $$R'_a R_a^{-1} = R_b^{-1} R'_b$$

bármely a-ra és b-re. Így fenn kell állnia teljes általánosságban a

(13) $$R'_t R_t^{-1} = \text{konstans mátrix} = \bar{R}$$

relációnak, s ezért

(14) $$dR_t / dt = \bar{R} R_t$$

(lásd például [2]).

A transzformáció deriváltjának, illetve logaritmikus deriváltjának az $\bar{R}$ konstans mátrixnak ismeretében tehát tetszőleges t időtartamra vonatkozó hasonlósági transzformációt végezhetünk a

(15) $$T_t(A) = e^{\bar{R}t} A e^{-\bar{R}t}$$

előírás segítségével.

Az egyensúlyi pálya transzformálódása

Tegyük fel most, aminek valószínűségéhez persze további statisztikai vizsgálatok szükségesek, hogy mind az A, mind a B mátrix azonosan transzformálódik az idő folyamán, s vizsgáljuk meg, hogyan változik meg a rendszer egyensúlyi pályája a transzformáció által jellemzett technikai-strukturális változások következtében.

Keressük tehát azt az x_t egyensúlyi pályát, amelyet a folytonosan változó, mert folytonosan transzformált

(16) $$T_t(1 - A)\, x_t = d[T_t(B)\, x_t]/dt = T'_t(B)\, x_t + T(B)\, \dot{x}_t$$

rendszer megenged.

Az előbbiekben meghatározott (15) hasonlósági transzformáció segítségével ez átírható a

$$(17)\qquad e^{\bar{R}t}(1-A)\,e^{-\bar{R}t}x_t = [e^{\bar{R}t}Be^{-\bar{R}t}x_t]'$$

alakba.

Keressük most a megoldást $x_t = e^{\bar{R}t}\bar{x}$ alakban, ahol $\bar{x}$ valamilyen konstans vektor.

Elvégezve (17) deriválását, behelyettesítve és balról $e^{-\bar{R}t}$-vel szorozva nyerjük, hogy

$$(18)\qquad (1-A)\bar{x} = \bar{R}B\bar{x}.$$

Így tehát $\bar{x}$ konstans voltának feltétele kifejezhető a

$$(19)\qquad \det(1-A-\bar{R}B) = 0$$

alakban. Ez — bár emlékeztet a dinamikus Leontief-rendszer megoldására — mégis azt a látszatot kelti, hogy nem minden struktúraváltozási $\bar{R}$ mátrix fér össze a gazdaság egy adott állapotával.

Igaz, a 18 egyenlet $\bar{R} = \lambda 1$ értéke esetén átalakul a

$$(20)\qquad (1-A-\lambda B)\bar{x} = 0$$

már jól ismert megoldássá. Ekkor — és csak ekkor — az egyensúlyi pálya $e^{\lambda t}\bar{x}$ alakú egyöntetű növekedési rátát eredményez.

Az általános esetben is értelmezhetünk azonban egy „közös", „általános" vagy „átlagos" μ növekedési rátát, ha feltesszük, hogy

$$(21)\qquad \bar{R} = \mu\tilde{R},$$

s azt vizsgáljuk, hogy a (18) alapján megalkotható

$$(22)\qquad (1-A-\mu\tilde{R}B)\,\bar{x} = 0$$

egyenlet milyen maximális μ ütemet enged meg. Ennek értéke egyértelmű, és ismeretében az egyensúlyi pályát

$$(23)\qquad x_t = e^{\mu\tilde{R}t}\bar{x}$$

alakban adhatjuk meg, s így látható, hogy a struktúraváltozás az egyes ágazatok eltérő, egyéni $\mu r_1, \ldots, \mu r_n$ értékű növekedésével jellemezhető.

A transzformációs mátrix értelmezése

Ebből adódik a transzformációs mátrixnak, illetve a mátrix logaritmikus deriváltjának $\mu\tilde{R}$-nak lehetséges közgazdasági értelmezése is.

Ha az $\tilde{R}$ diagonális mátrix elemei például az 1, 2, 3, . . . értékeket veszik fel, ez azt jelenti, hogy a megfelelő ágazatok a közös μ növekedési ütem 1-szeresével, 2-szeresével, 3-szorosával stb. növekednek. Hasonlóan az 1/2, 1/3 . . . értékek a növekedési ütem felezését, harmadolását stb. fejezik ki.

A transzformációs mátrix, ha egységül a munkaerő sorát választjuk ($\mu r_n = \mu$, tehát $r_n = 1$), akkor rendre a munkatermelékenységnek az egyes ágazatokban elért változását fogja megmutatni, s így összefogja a technikai változást a munka termelékenységének változásával, kifejezve ezek hatását a gazdaság szükséges struktúrájára illetve ennek megváltozására. Úgy tűnik tehát, hogy ezzel új eszközt ad kezünkbe az említett kategóriák vizsgálatára, mérésére és tervezésére.

Az árrendszer problémája

Felmerül az a kérdés, hogy az ilyen változó technikával dolgozó rendszer milyen árrendszert hoz magával, s elsődlegesen, hogy vajon változó vagy változatlan arányú árrendszer alkalmas-e a struktúraváltozás mérésére. E kérdés megválaszolásához kissé távolabbról kell nekiindulnunk.

P. Sraffa kidolgozta a ricardoi rendszernek megfelelő értékmérés módját: olyan árrendszert definiált, amely lehetővé teszi az újratermelés zavartalan lebonyolítását. Ezt az „egyensúlyi" árrendszert, amely eleget tesz a Ricardo által felállított szigorú követelményeknek „önfinanszírozó" árrendszernek is nevezhetjük, mert ezekkel (és csak ezekkel) az árakkal számolva a termelés ágenseinek kiadásai és bevételei kölcsönösen kiegyenlítik egymást.

A gondolatmenetet a marxi újratermelési elméletre alkalmazva kitűnik, hogy az úgynevezett értékarányos árak az egyszerű újratermelést teszik lehetővé, míg az egyöntetű profitrátát szolgáltató termelési árak az egyöntetű ütemben bővülő újratermelés arányainak megvalósítását segítik elő.

Sraffa alapgondolata azonban felhasználható bármely gazdaság ökonómiai mértékrendszerének felállítására.

A mértékrendszer berendezése a dualitás elvének kiaknázásán alapul. Ha ugyanis van egy

$$\dot{x} = Ax \tag{24}$$

differenciál-egyenletnek eleget tevő rendszerünk, s ennek egy

$$x_t = e^{\lambda t}x_0\,, \qquad Ax_0 = \lambda x_0 \tag{25}$$

alakú egyensúlyi pályája, akkor a

$$pA = \lambda p \tag{26}$$

előírással definiált árrendszer használható fel a rendszer „mérésére". Mivel ez a p, a sajátvektorok általános tulajdonságai alapján perpendikuláris az A mátrix összes x_0-tól eltérő (tehát nem λ-hoz tartozó) sajátvektorára, ezért a px skalárszorzat a „mérés", tetszőleges x esetén felfogható úgy, mint az általános x vektort a (kalibrált) x_0 vektorra vetítő eljárás.

Ez a következőképpen látható be. Legyen A-nak egy második sajátvektora

$$Ax_i = \varrho x_i \qquad i = 1, \ldots, n-1, \tag{27}$$

akkor balról p-vel szorozva $pAx_i = \lambda px_i = \varrho px_i$. Így, ha $\lambda \neq \varrho$, akkor $(\lambda - \varrho)\,px_i = 0$ fennállásából $px_i = 0$ következik, azaz p merőleges az összes nem λ-hoz tartozó sajátvektorra.

A mérés, illetőleg az árrendszer tehát minden az egyensúlyi x_0 pályától eltérő megmozdulást honorálatlanul hagy — így ezen az árrendszeren az tartósan nem is mehet végbe, mert az x_0 pályától való eltérés esetén azonnal hiányok, illetőleg feleslegek lépnek fel az egyes ágazatokban.

Ilyen értelemben állítható, hogy bármely „ökonómiai tér” kielégíthetően rendezhető és mérhetővé tehető, hacsak ismerjük az ebben a térben működő gazdasági rendszer mozgástörvényeit. A rendszer sajátos működése az, amely — a dualitás elvére támaszkodva — a mértékrendszer megalkotását lehetővé teszi.

Ezt az elvet próbáljuk a következőkben kiaknázni arra, hogy egy bővített újratermelést folytató rendszer értékarányait meghatározzuk akkor, amikor ez a rendszer strukturális változásoknak (tehát technikai, ízlésbeli stb. fejlődésnek) van alávetve.

Az önfinanszírozó árrendszer

A tárgyalt változó arányoknak és struktúrának megfelelő, nyilván szintén változó r_t baloldali árvektort a primális oldal „tükörképe” szerint keresve, megpróbáljuk azt a

$$r_t = e^{-\mu \tilde{R} t}\bar{p} \tag{28}$$

alakban előállítani, ahol $\bar{p}$ valamely konstans vektor. Ekkor a (18) ill. (22) egyenlet duálisaként kapjuk, hogy $\bar{p}$ a

$$\bar{p}(1 - A - \mu B\tilde{R}) = 0 \tag{29}$$

egyenletből nyerhető, s így $\bar{p}$ a $B\tilde{R}Q$ mátrix legnagyobb (pozitív) $\frac{1}{\eta}$ sajátértékéhez tartozó sajátvektor.

Mivel a (22) egyenlet $\bar{x}$ értékét a $Q\tilde{R}B$ mátrixból számítja, bizonyítanunk kell még, hogy e két mátrix legnagyobb sajátértéke azonos. Ez azonban belátható abból, hogy $(B\tilde{R}Q)^T = (Q^T\tilde{R}B^T)$, ahol a T betű transzpozíciót jelöl.

Közgazdaságilag ez úgy értelmezhető, hogy olyan árrendszer felel meg célunknak, ahol a befektetett termelési eszközök után számítva a $\mu r_1, \ldots, u r_n$ növekedési rátáknak megfelelő, tehát eltérő százalékos rátájú haszonkulcs térül meg az önköltségen kívül, s ezenkívül az árak a termelékenység növekedésének megfelelően és a (28) egyenlet által megadott módon tehát eltérő ütemekben állandóan csökkennek.

Infláció és termelékenység

Érdekesen interpretálható az a tény, hogy minden $e^{\varrho t}Ae^{-\varrho t}$ alakú matematikai transzformáció változatlanul hagyja az A mátrixot, tehát ϱ tetszőleges értéke mellett „egységtranszformáció” marad.

Ez az árrendszerre vonatkoztatva azt mondja ki, hogy a fent meghatározott árrendszer összefér egy ϱ ütemű inflációval — s így az áraknak nem kell szükségképpen csökkenniök. A volumenrendszerre vonatkoztatva pedig azt mondja ki, hogy a termelékenység általános, minden ágazatra (tehát a munkaerő szektorára is) kiterjedő növekedése észrevétlen marad, mert nem hoz magával változást, s ezért nem is beszélhetünk a termelékenység abszolút értékéről csupán relatív változásairól vagy viszonyáról.

(Beérkezett: 1978. január 26-án)

IRODALOM

1. BACHARACH, M.: Biproportional Matrices and Input-Output Change. Cambridge, 1969. Cambridge Univ. Press.
2. BELLMAN, R.: Introduction to Matrix Analysis. New York–Toronto–London, 1960. p. 173. McGraw-Hill.
3. BRÓDY, A.: Érték és újratermelés 3.3.2. pont. Budapest, 1969. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
4. CARTER, A.: Incremental Flow Coefficients for a Dynamic Input-Output Model with Changing Technology. Barna, T. (szerk.): Structural Interdependence and Economic Development. London, 1963. Macmillan & Co. Ltd.
5. CARTER, A.: Structural Change in the American Economy. Cambridge, 1970. Harvard Univ. Press.
6. CHRIST, C.: A Review of Input-Output Analysis. Input-Output Analysis: An Appraisal. Studies in Income and Wealth. Princeton, 1955. Princeton Univ. Press.
7. GLATTFELDER, P.–VÁCZI, P.: Egy algoritmus input-output sémák előrebecslésének korrekciójára Szigma, 1970. 3. sz.
8. OZAKI, I.: The Effects of the Technological Changes on the Economic Growth of Japan, 1955–1970. KEIO Univ. 1974.
9. SEVALDSON, P.: Changes in Input-Output Coefficients. Barna, T. (szerk.): Structural Interdependence, etc.
10. SZAKOLCZAI, GY.–VÁSÁRHELYI, P.: Az ágazati kapcsolatok mérlege technológiai koefficienseinek előrebecsült mátrixai Közgazdasági Szemle, 1967. dec.
11. Econometric Models for the National Economic Plan for the Second Half of the 1970's. Economic Planning Agency. Government of Japan. 1977.

MATHEMATICAL REPRESENTATION OF STRUCTURAL CHANGE

A simplified version of the RAS process is exploited to represent structural change. The dual, volume and price equilibrium vectors are characterized and the changes are connected with changes of productivity.

ОБ ИЗОБРАЖЕНИИ СТРУКТУРНОГО СДВИГА

Упрощенный вид метода РАС используется для изображения структурного сдвига. Определяются дуальные, равновесные векторы, обеспечивающие равновесие производственных отношений и цен, и вопрос перемена связывается с переменой производительности.

Dobó Andor

Megjegyzések a szabályozási rendszerek stabilitásának vizsgálatához

Oskar Lange „Bevezetés a közgazdasági kibernetikába" című [1] könyvének a szabályozási rendszerek stabilitási elméletével foglalkozó fejezetében bemutatja, hogy a szabályozáselméletben alkalmazott matematikai módszerekhez hasonló módszerekkel miként oldhatók meg olyan feladatok, amelyek arra vonatkoznak, hogyan reagálnak élő (emberi és állati) szervezetek külső ingerekre. *Lange* hozzáteszi, majd később több példával is illusztrálja, hogy az ilyen kérdéseknek nemcsak a lélektanban van gyakorlati jelentőségük, hanem a gazdasági számításokban is.

A tárgyalás alapjául választott példát *S. Goldberg* [2] könyvéből (103. oldal) meríti. Eszerint, ha p_{n+1} annak a valószínűsége, hogy az állat a kísérletező által kívánt módon reagál $n+1$ ismétlés után az ingerek adott együttesére, akkor – az állatok viselkedésének statisztikai vizsgálata azt mutatja, hogy – p_{n+1} és p_n ún. *reakció valószínűségek* között a kapcsolat jó közelítéssel lineárisnak tekinthető. (Lábjegyzetben hozzáteszi, hogy a bemutatott példa azon a felfogáson alapul, amelyet *R. R. Bush* és *F. Mosteller* képviselnek "A Mathematical Model for Simple Learning" című cikkükben. Psychological Review, 1951.) A közöltek alapján tehát felírható az alábbi állandó együtthatójú differenciaegyenlet:

(1) $$p_{n+1} = a + mp_n,$$

ahol $0 \leq p_n \leq 1$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, valamint $m \geq 0$. Az (1)-et gyakran *tanulási egyenletnek* is nevezik, s a benne szereplő a és m paramétereket kísérletek útján határozzák meg.

Ezt követően *Lange* a további vizsgálatok céljából az (1) alakkal szemben „előnyösebb"

(1′) $$p_{n+1} = a + (1 - a - b)\, p_n = p_n + a\,(1 - p_n) - bp_n,$$

illetve

(1″) $$p_{n+1} - p_n = a(1 - p_n) - bp_n$$

alakokat választja, ahol az $m = 1 - a - b \geq 0$ mellett feltételezi azt is, hogy $a \geq 0, b \geq 0$, amiből $0 \leq a + b \leq 1$ következik. Ennek az „átírásnak" elsősorban az a jelentősége, hogy az a és b paramétereknek, mint súlyoknak könnyebbé válik az értelmezése. Az [1]-ben leírtak szerint: „az a paraméter olyan körülmények együttesétől függ, amelyek a kísérleti eredmények maximális javulása felé hatnak, a b paraméter pedig olyan körülményektől, amelyek a kísérleti eredmények maximális romlása irányába hatnak. Az a paraméter tehát a pozitív ingerek intenzitásának mérőszáma, a b paraméter pedig a negatív ingerek, vagy ún. *elleningerek* intenzitásának mérőszáma. Pozitív ingerek lehetnek például a jutalmak, negatív ingerek pedig a büntetések, vagy az állat reakciójával összekötött egyéb kellemetlenségek." Miután [1]-ben bizonyítást nyer, hogy ha létezik p_n határértéke, úgy

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{a}{a+b} = \frac{r}{1+r} = z \qquad (b>0), \tag{2}$$

ahol $r = \dfrac{a}{b}$ az alkalmazott *oktatási módszer mérőszámának*, így a motiváció struktúrájának is felfogható. A szerző rámutat, hogy a kapott eredmény hogyan használható fel bizonyos gazdasági kérdések megoldására. Példaként vizsgálja a prémiumrendszert, pontosabban azt, hogy kifizetődik-e az ellenösztönzők ellen folytatott harc, ha azok hatása az ösztönzők megfelelő növelésével gyöngíthető?

Gazdasági szempontból levonja azt a következtetést, hogy a magas prémiumok alkalmazása helyett „olcsóbban" érhetjük el a kedvező eredményt az ellenösztönzők (veszteségek) csökkentésével, vagy teljes felszámolásával. Ha azt akarjuk, hogy $z \approx 1$ legyen, akkor azt általában könnyebben érhetjük el b értékének csökkentésével, mint a értékének növelésével, ami végsőfokon mindkét esetben r növelését célozza. Még másképpen: Ha $b \leq a$ és a értékét $\Delta > 0$ értékkel növeljük, akkor az így kapott $\dfrac{a+\Delta}{a+\Delta+b} = z_0$ érték mindig kisebb lesz a $z_1 = \dfrac{a}{a+b-\Delta}$ értékénél, ami tehát a növelése helyett b értékének ugyanazon $\Delta > 0$ értékkel való csökkentése mellett áll elő.

Különösen érdekes az a példa, amelyet Lengyelországban a parasztok ösztönzésére alkalmaztak azért, hogy olyan ipari növények termesztését fokozzák, amelyeknél számottevően gyakoriak a természeti csapások (fagyás, szárazság, jégverés stb.). *Lange* közli, hogy bizonyos növények felvásárlási árának jelentős felemelésével (tehát az ösztönzők növelésével) sem tudták elérni a vetésterületek lényeges növelését. Elérték viszont azt az ellenösztönzők megszüntetésével oly módon, hogy bevezették az ún. „szerződéses" növénytermesztés általános elemi kárbiztosítását, amely nem járt jelentős költséggel.

* * *

A jelen sorok írója nem tud arról, hogy hazánkban a gazdasági tevékenység bármely területén az itt közölt megfontolásokat konkrétabb formában alkalmazták volna.

Hogy az alkalmazás nemcsak lehetséges, hanem esetenként indokolt is, azt némileg érzékelteti pl. az üvegvisszaváltással foglalkozó 2/1978. (III. 31.) ÁH sz. rendelet, melynek lényege, az ún. *lépcsőzetes betétdíj bevezetés.*

Amennyiben az az optimális stratégia, hogy a forgalmazó az üvegszükségletét az összes meglevő üveg felhasználásával is próbálja kielégíteni, akkor az itt közöltek szerint az úgy érhető el könnyebben, ha az ellenösztönzőket csökkentjük. Ez azt jelenti, hogy igyekszünk csökkenteni azoknak a tényezőknek a hatását, amelyek az üvegvisszaváltás ellen hatnak.

Nyilván a visszaváltás ellen hat az alacsony betédíj és a kereskedelem érdektelensége. Ezek a hatások lényegesen befolyásolhatók a visszaváltási ár megválasztásával.

Úgy tűnik, hogy a rendelet a vásárlók magatartásával — ami függ a betétdíj alakulásától — kevésbé számol, hiszen egyes üvegeknél a betétdíj csökken. Feltehető viszont, hogy a betétdíj csökkenésével csökken a visszavitt üvegek száma is. E helyen nem bocsátkozunk a probléma részletesebb elemzésébe, csupán megjegyezzük, hogy bizonyos egyszerű feltételek mellett kimutatható, hogy a forgalmazó, a vásárló és áttételesen a kereskedelem is akkor jár jól, ha a betétdíjakat nem csökkentik, hanem emelik.

E példa kapcsán talán nem lenne érdektelen elgondolkodni azon, hogy esetenként mennyivel sikeresebbek, hatékonyabbak lehetnének a rendeletek, ha ahol csak lehet, jobban támaszkodnának a matematikai, gazdaságkibernetikai megfontolások, eredmények felhasználására, alkalmazására.

Miután napjainkban olyan fontossá és szükségessé vált az ipar termékszerkezetének az átalakítása, korszerűsítése, a vállalatok termékeinek tőkés piaci értékesítés irányába való elmozdítása, a kiemelt beruházások ösztönzése, ezért e területen is feltehetően hatékonyabbnak és gazdaságossabbnak bizonyulna olyan megoldások keresése, amelyek az ösztönzők felemelése helyett az ellenösztönzők megszüntetését céloznák.

Az ilyen irányú vizsgálatokhoz ezúttal a szerző úgy kíván hozzájárulni, hogy egyrészt felhívja a figyelmet a *Lange* által választott „tanulási egyenlet" a és b paraméterének egy újabb lehetséges értelmezésére, másrészt, hogy tisztáz bizonyos módszerbeli félreértéseket, s egyben a stabilitás „kihasználásának" mellőzésével adja meg az (1) egyenlet általános diszkrét megoldását,[1] amiből már (2) egyszerűen adódik. (Tehát nem tételezi fel előre az egyensúlyi állapot létezését, az bizonyos feltételek mellett adódik magától!)

Evégből jelölje A_n azt az eseményt, hogy a vizsgált állat a kísérletező által kívánt módon reagál n ismétlés után az ingerek adott együttesére. Az A_n esemény bekövetkezésének valószínűségét jelölje p_n; vagyis legyen $P(A_n) = p_n$. Azt az eseményt, amely abban áll, hogy az A_n esemény nem következik be, az A_n esemény ellentétének nevezzük és $\bar{A}_n$-sal jelöljük. Az A_{n+1} eseménynek az A_n eseményre mint feltételre vonatkozó feltételes valószínűséget jelölje a; vagyis legyen:

$$P(A_{n+1} | \bar{A}_n) = a, \tag{3}$$

$$P(\bar{A}_{n+1} | A_n) = b. \tag{4}$$

Mint ismeretes a teljes valószínűség tétele értelmében

$$P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} | A_n)\, P(A_n) + P(A_{n+1} | \bar{A}_n)\, P(\bar{A}_n). \tag{5}$$

Mivel $P(\bar{A}_n) = 1 - p_n$ és $P(A_{n+1} | A_n) = 1 - b$, ezért (5) az alábbi alakban írható:

$$p_{n+1} = (1 - b)\,p_n + a(1 - p_n) = a + (1 - a - b)\,p_n,$$

[1] Ez azért lényeges, mert elvileg létezhet a „stabilitás kihasználásától" független más, esetleg nem stabil megoldás is. Vagyis megoldások esetenként tágabb körben is lehetnek. Ilyen esetben viszont a formálisan alkalmazott technika, még ha megoldáshoz is vezet, olyan problémákat vet fel, amelyek mindenképpen magyarázatra szorulnak. A későbbiek során ezekről még részletesebben esik szó.

ami az $m = 1 - a - b$ jelölés mellett megfelel (1)-nek. Eszerint tehát *az a és b „paraméterek" mint súlyok feltételes valószínűséget jelentenek.* Az (1) megoldását az

$$f(x+1) - mf(x) = a \tag{6}$$

lineáris állandó együtthatójú differenciaegyenletnek az $f(0) = p_0$ kezdeti feltétel melletti megoldásaként kapjuk. Ha $m \neq 1$, akkor mint ismeretes (lásd [3] 554. o.) (6) általános diszkrét megoldása

$$f(x) = \frac{a}{1-m} + cm^x, \tag{7}$$

ahol most $c = p_0 - \dfrac{a}{1-m}$. Ebből kifolyólag

$$p_n = \frac{a}{a+b} + \left(p_0 - \frac{a}{a+b}\right)(1-a-b)^n. \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{8}$$

Innen pedig, ha $|1 - a - b| < 1$ kapjuk, hogy

$$\lim_{n \to \infty} p_n = \frac{a}{a+b}.$$

A lektorok hívták fel a figyelmem arra — s ezért ezúton is köszönetet mondok nekik — hogy az általam átfogalmazott modell a Markov-láncok egy speciális esetének is tekinthető, s mint ilyent viszont *Rényi Alfréd* az idézett irodalomnál jóval korábban kimerítően tárgyalt, illetve alkalmazott. (Vö.: [4] XIV. fejezet.)

Rényi tárgyalásában — az itteni jelöléseket megtartva — az interpretáció a következő:

Vizsgáljunk egy üzemben egy gépet, amelyet időnként bekapcsolnak, egy ideig használják, ezután kikapcsolják, egy idő múlva ismét bekapcsolják s.i.t. Bármely időpontban vizsgáljuk is a gépet, csak két lehetőség áll fenn; a gép működik (A_1 esemény), vagy nem működik (A_0 esemény).

Legyen P_{jk} annak a valószínűsége, hogy a gép $t + 1$ időpontban az A_k állapotban legyen, feltéve, hogy a t időpontban ($t \geq 0$ egész) az A_j állapotban volt ($j, k = 0, 1$). (Itt feltételezzük, hogy az átmenet-valószínűségek függetlenek attól, hogy a gép a t időpontot megelőző időpontokban mikor állt és mikor működött!). Ha $P_{01} = a, P_{10} = b$, akkor az átmenet-valószínűségek mátrixa:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1-a & b \\ b & 1-b \end{pmatrix},$$

s annak valószínűségét, hogy a gép a $t = n$ időpontban működik a (8) alatti kifejezés adja, melyben p_0 annak a valószínűsége, hogy a $t = 0$ időpontban a gép működik. Ez esetben a $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$ azt jelenti, hogy a Markov-lánc ergodikus; $\dfrac{1}{b}$, illetve $\dfrac{1}{a}$ pedig annak az időtartamnak az átlagos hossza, amely időn keresztül a gép egyfolytában működik, illetve nem működik. Az a és b-re nézve ez az értelmezés megkönnyíti a statisztikai adatok alapján való becslések elvégzését. Ekkor

$$(2') \qquad \lim_{n\to\infty} p_n = z = \frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{a}},$$

s míg (2) szerint az átmenet-valószínűséget — vagyis b értékét —, addig (2′) szerint a várható értéket — vagyis $1/a$ értékét — kell csökkenteni.

* * *

Nyilvánvaló, hogy a probléma általánosabb megközelítéséhez jutunk, ha a (3) és (4) alatti feltételes valószínűségek az n értékétől függően alakulnak, illetve ha azok csak határesetben függetlenek n-től. A közölteknek egyik jelentősége éppen abban van, hogy segítségünkre lehet a feladat pontosabb modelljének a megkonstruálásánál, a paraméterek értelmezésénél és kísérleti meghatározásánál. Anélkül, hogy további részletekbe bocsátkoznánk, idetartozóan megemlítjük még, hogy *Lange* könyvében a kereslet és a kínálat egyensúlyát kifejező (3.32) alatti $ap_t = bp_{t-1} + \beta - \alpha$ egyenlet (lásd [1] 121.o) általános diszkrét megoldását is (7) szolgáltatja. Ez esetben

$$(9) \qquad p_t = \frac{\beta-\alpha}{a-b} + \left(p_0 - \frac{\beta-\alpha}{a-b}\right)\left(\frac{b}{a}\right)^t \qquad (a \neq b;\ t \geq 0),$$

ahol p_t valamely termék árát jelenti a t időszakban. A (9)-ből azonnal látható, hogy a piaci áralakulási folyamat stabilitásának a feltétele, hogy $\left|\frac{b}{a}\right| < 1$ legyen. Ekkor a kereslet és a kínálat az egyensúly felé törekszik. A paraméterek alakulásától függő további diszkutálást mellőzzük, csupán arról teszünk említést, hogy mivel a gyakorlatban $a < 0$, $b > 0$, $0 < \beta < \alpha$, ezért p_t általában nem monoton, hanem ingadozásokat mutató függvény.

Végezetül rá kívánunk mutatni arra, hogy a *Lange* által választott megoldástechnika[2] szerint $|b| > |a|$ esetén is az $a\hat{p} = b\hat{p} + \beta - \alpha$ egyenletnek $\hat{p} = \frac{\beta-\alpha}{a-b}$ a megoldása, jól lehet ez esetben $\lim_{t\to\infty} p_t \neq \hat{p}$. Ebből kifolyólag előfordulhat, hogy a matematikában kevésbé jártas alkalmazó „ha $\lim_{t\to\infty} p_t$ létezik, akkor az $\hat{p}$-vel egyenlő" alapon akkor is számol ily módon, amikor valójában nem lehet, vagyis amikor $|b| > |a|$. Elegendő ehhez bizonyítás nélkül a határérték létezésének a feltételezésével élni, ami alkalmazásoknál gyakran megesik. Matematikai szempontból tehát a megoldással és a megoldás módjával kapcsolatos kérdések tisztázása, a megfontolások „finomításának", az egyes lépések „indoklásának" az igénye nem alaptalan. Induljunk

[2] Ennek lényege, hogy feltételezzük a differenciaegyenlet által jellemzett függvénynek létezik $\hat{p}$-al jelölt határértéke. Ezt az eredeti egyenletbe helyettesítjük, majd az így kapott összefüggésből $\hat{p}$ értékét meghatározzuk. Ezt követően az eredeti egyenletbe a $\overline{p}_n = p_n - \hat{p}$ kifejezést helyettesítjük, s ezáltal gyakran $\overline{p}_n$-re már olyan egyenletet kapunk, amelyet könnyebben meg tudunk oldani.

ki először is abból, hogy $m=1$ esetén (1)-nek a megoldásához a *Lange* által is használt úton nem juthatnánk el, mert akkor $\hat{p}-\hat{p}=a$ lenne, ami, ha $a\neq 0$, lehetetlen. Megoldás viszont ilyen esetben is van. Például $p_0=b$ esetén $p_n=an+b$. Mint látható, ez esetben $\lim\limits_{n\to\infty}(p_{n+1}-p_n)$ létezik, de véges $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$ nem. Ebből azonban még nem következik, hogy az [1]-ben több helyen is alkalmazott megoldás-technika csak $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$ létezése esetén vezethet célhoz. Tudniillik, ha határérték egyáltalán nem létezik, a formálisan felírt egyenletnek $\hat{p}$-re nézve még lehet olyan megoldása, hogy a *Lange* által is alkalmazott technikával a vizsgált differenciaegyenlet megoldásához juthatunk. Példa lehet erre az $m=-1$ eset, mikoris $\hat{p}=\frac{a}{2}$ és így $p_n=\frac{a}{2}+\left(p_0-\frac{a}{2}\right)(-1)^n$; itt tehát, ha $p_0\neq\frac{a}{2}$, határérték nem létezik. A közölteknek az a magyarázata, hogy igen gyakran, a határérték létezésétől függetlenül, a formális felírás révén $\hat{p}$-ra olyan kifejezést kapunk, amely az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását adja. Ilyen esetben pedig $p_n-\hat{p}=\bar{p}_n$ a homogén egyenlet megoldása. Mint ismeretes (lásd [3] 553. o.), a *homogén egyenlet általános diszkrét megoldásának* (ami a homogén egyenlet összes partikuláris megoldásának lineáris kombinációjaként áll elő) *és az inhomogén egyenlet egy partikuláris diszkrét megoldásának az összege adja az inhomogén egyenlet általános diszkrét megoldását.* (Esetünkben: $p_n=\bar{p}_n+\hat{p}$). Az elmodottakra jó példa a

$$p_{n+1}-mp_n=a^n \qquad (a\neq m\neq 1;\ |a|<1)$$

egyenlet megoldásának az előállítása. Most, ha $n\to\infty$ $\hat{p}=0$, s így $\bar{p}_n=p_n$; vagyis ezen az úton nem tudjuk a homogén egyenlet megoldását adni. Ha viszont észre vesszük, hogy $p_n^*=\frac{a^n}{a-m}$ az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása, akkor már $\bar{p}_n=p_n-p_n^*$ a *Lange* által választott úton könnyen előállítható, s végeredményként kapjuk, hogy az általános diszkrét megoldás $p_n=\frac{a^n}{a-m}+cm^n$ alakú. Az itt közöltek ugyan matematikai „finomkodásnak" „precízkedésnek" és így az alkalmazás szempontjából feleslegesnek tűnhet, jelentőségük azonban még sem lebecsülendő. Az elmondottakat főleg azok tudják hasznosítani, akik a közgazdasági problémák megoldására felírt differenciaegyenleteket a *Lange* által is használt technikával „rutinszerűen" akarják megoldani, s ilyenkor az egyik-másik lépésnél ellentmondással, érthetetlenséggel találkoznak, és így az eljárással szemben elbizonytalanodnak. A közöltek feltehetően nagyobb biztonságot adnak a megoldástechnika helyes és célravezető kezeléséhez.

(Beérkezett: 1978. február 28.)

IRODALOM

1. Lange, O.: Bevezetés a közgazdasági kibernetikába. Budapest, 1967. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
2. Goldberg, S.: Introduction to Difference Equations. New York—London, 1958.
3. Szép, J.: Analízis. Budapest, 1972. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
4. Rényi, A.: Valószínűségszámítás. Budapest, 1954. Tankönyvkiadó.

NOTES ON THE STABILITY ANALYSIS OF CONTROL SYSTEMS

The author presents another new interpretation of the parameters a and b of the so called "learning equation" of form $p_{n+1} = a + (1 - a - b)p_n$ playing a role in the theory of stability of control systems, pointing out that they can be conceived as conditional probabilities, too. He deals with clarifying and answering mathematical problems of one of the "routine methods" widely spread (especially in economic literature) for the general solution of difference equations.

ОБ ИЗУЧЕНИИ СТАБИЛЬНОСТИ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Автор излагает новое толкование параметров «a» и «b», т. н. «уравнения учебы» $p_{n+1} = a + (1-a-b)p_n$, играющего определенную роль в теории стабильности систем регулирования, указывая на то, что они могут восприниматься и в качестве предполагаемой вероятности. Он занимается также и пояснением математических проблем по одному из принятых и распространенных методов решения общих дифференциальных уравнений (особенно в экономической литературе).

Simonovits András

A decentralizált szabályozás maximális konvergenciasebessége

1. Bevezetés

Ebben a dolgozatban a következő kérdéssel foglalkozom: Elemi decentralizált szabályozásnál *milyen gyorsan* tart a dinamikus rendszer a normatív pályájához? Feltételezem, hogy az olvasó ismeri *Kornai–Simonovits* (1977) (röviden KS-1) és *Kornai–Simonovits* (1975) (röviden KS-2) dolgozatokat, legalábbis a 6. és a 7. fejezetét.

A közgazdasági szabályozási modellek többsége *folytonos* idővel dolgozik, eltekintve attól, hogy nagyon sok gazdasági tevékenység csak *szakaszosan* végezhető el. Ezekben a modellekben vizsgálatunk kérdése egyáltalán nem tehető fel, mert a *reakciósebességek* megfelelő növelésével a *konvergenciasebesség* tetszőleges naggyá tehető. Szorítkozzunk tehát a *diszkrét* idővel dolgozó modellekre (pl. *McFadden* (1969)). Általában ezekben a modellekben sem vizsgálják a konvergenciasebesség függését a reakciósebességektől. Például *McFadden* (1969) modellje csak olyan reakciósebesség-vektor létezését mutatja ki, amely csiga lassúsággal közelíti a rendszert a normatív pályájához. (Félreértést elkerülendő megjegyezzük, hogy általános modellben ennél több nem is mondható>)

Természetesen vannak kivételek: például *Th. Marschak* (1972), *Simonovits* (1976) és KS-1, hogy csak e dolgozatban szereplő tanulmányokra utaljak.

Ebben a dolgozatban a KS-1-ben *Kornai Jánossal* együtt megkezdett vizsgálatot folytatom. Mint ott, most is az *aszimptotikus konvergenciasebességgel* mérjük a stabilizálás gyorsaságát. Ez a mennyiség azt mutatja, hogy *hosszútávon* az *eltérés* időszakról időszakra hányad részére zsugorodik. Például, ha a konvergenciasebesség 2, akkor hosszútávon az eltérés időszakról időszakra a felére csökken. Megjegyezzük, hogy az (aszimptotikus) *stabilitás* épp azt jelenti, hogy a konvergenciasebesség nagyobb mint 1.

Mérőszámunkat a numerikus analízisből kölcsönöztük, ahol nagy sikerrel használják különböző eljárások gyorsaságának mérésére és összehasonlítására. Például lineáris egyenletrendszerek iterációs megoldásánál a Gauss-Siedel-módszert nagyobb konvergenciasebessége miatt részesítik előnyben a Jacobi-módszerrel szemben. (*Varga* (1962) Theorem 3.3; Corollary.)

Természetesen ez a mérőszám csak *hosszútávú* szabályozás esetén megbízható, pontosabban: ha a szabályozásra elég sokszor sor kerül egymás utáni időszakokban. Míg a numerikus analízis esetében ez a feltétel gyakran teljesül, a közgazdasági alkalmazásnál korántsem ez a helyzet. Gondoljunk csak arra, hogy az előbbinél több tizedesjegyű %-os pontosságra törekszenek, a közgazdaságtanban pedig legfeljebb 0,1%-os pontosságra.

Miért nem dolgozunk akkor olyan mutatóval, amely azt méri, hogy mennyi időszakra van szükség ahhoz, hogy a rendszert relatív eltérése mondjuk 0,1 %

alá süllyedjen? Válaszunk egyszerű, bár nem kielégítő: A most említett mutató függ a rendszer kezdőállapotától és a kíván pontosságtól (esetünkben 0,1%) — ellentétben a konvergenciasebességgel.

Mindenesetre alapmodellünk felvázolása (2. fejezet) után külön vizsgálatok egy mutatót, amely a rövidebb távú elemzésekben hasznosabb lehet mint a konvergenciasebesség (3. fejezet).

A szabályozás símaságával kapcsolatban vezette be *Bródy* (1973) a *jól orientáló szabályozás* fogalmát, amely azt követeli meg a rendszertől, hogy minden skalár változója minden időszakban *előjelváltás nélkül közeledjék* a normatív értékéhez. Bár Bródy követelményét jogosnak tartom, igazolom, hogy túl szigorú: ekvivalens ugyanis a rendszer *elemi szabályozhatóság*ával, ami azt jelenti, hogy a rendszer *egy* időszak alatt a normatív pályára állítható. Ez utóbbi követelmény elemi decentralizált rendszerekre csak a triviális és érdektelen „független alrendszerek"-nél teljesül.

Ennyi figyelmeztetés után rátérek a konvergenciasebesség alkalmazására. Az 5. fejezetben bebizonyítom, hogy *produktív* Metzler-gazdaságban csillapított reakciósebességek esetén az azonosan egységnyi reakciósebesség-vektor adja a maximális konvergenciasebességet, röviden: az optimumot. Ez a reakció optimális a független alrendszereknél is, amikor is elemi szabályozhatóságot is nyújt. Nem igaz viszont, hogy feltétel nélküli optimum volna általában.

Ezért érdekes, hogy a KS-1 speciális esetében ez az utóbbi állítás is igaz. Mellesleg a KS-1 4. Tételében a KS-1 gazdaságról állapítottuk meg azt, amit most az általánosabb produktív Metzler-gazdaságról.

A 7. fejezetben igazolom, hogy a KS-2 rendelésjelzéses gazdaság maximális konvergenciasebessége (majdnem) mindig nagyobb (kivételesen egyenlő) mint a KS-1 készletjelzéses gazdaságé.

Köszönetnyilvánítás. Dolgozatom szorosan kapcsolódik *Kornai János*sal közösen írt (1975a,) (1975b) és (1977) dolgozatainkhoz. Itt köszönöm meg Kornai Jánosnak a kutatás során nyújtott segítségét.

A dolgozat korábbi változatát többen elolvasták. Hasznos észrevételeikért köszönet illeti *Bródy Andrást*, *Kapitány Zsuzsát* és *Tarján Tamást*. Külön megköszönöm *Martos Béla* alapos bírálatát.

2. Elemi decentralizált szabályozás és konvergenciasebesség

Ebben a fejezetben egészen röviden megismételjük *Simonovits* (1978a) dolgozatban bevezetett elemi decentralizált szabályozás alapfogalmait.

$\hat{x}$ N-dimenziós állapoteltérés vektor; $\hat{x} = (\hat{x}_\nu)_{\nu=1}^N$,

$\hat{u}$ N-dimenziós szabályozás eltérési vektor; $\hat{u} = (\hat{u}_\nu)_{\nu=1}^N$,

R $N \times N$ dimenziós reálstruktúra matrix; $R = (r_{\varkappa\nu})_{\varkappa=1}^N{}_{\nu=1}^N$,

t diszkrét idő,

$(\hat{x}_\nu, \hat{u}_\nu)$ a ν-edik döntéshozó állapot, ill. szabályozási eltérés változója.

A rendszer *mozgásegyenlete*

(2.1) $$\hat{x}(t+1) = \hat{x}(t) + R\hat{u}(t), \qquad \hat{x}(0) \text{ adott.}$$

Az elemi decentralizált szabályozás N-dimenziós *reakciósebesség-vektora*: $f = [f_\nu]_{\nu=1}^N$. *A szabályozás egyenlete:*

(2.2) $$\hat{u}(t) = -\langle f \rangle \hat{x}(t).$$

(2.1)–(2.2) összevetéséből adódik az *állapot-átmenet egyenlet*:

(2.3) $$\hat{x}(t+1) = [I - R\langle f\rangle]\,\hat{x}(t), \quad \hat{x}(0) \text{ adott},$$

ahol I az N-dimenziós egységmátrix.

Ismert, hogy (2.3) megoldása N db *alapmegoldás* egyértelmű lineáris kombinációja, ahol az alapmegoldások

(2.4) $$x[\nu, t] = \lambda^t[\nu]\,x[\nu] \qquad \nu = 1, \ldots, N$$

alakúak, tehát $\{x[\nu], \lambda[\nu]\}$ a következő *sajátvektor-sajátérték* feladat megoldása:

(2.5) $$\lambda[\nu]\,x[\nu] = [I - R\langle f\rangle]\,x[\nu].$$

Legyen $\hat{\lambda}$ a(z egyik) maximális abszolútértékű sajátérték:

(2.6) $$|\hat{\lambda}| = \max\,\{|\lambda[\nu]|;\ 1 \leq \nu \leq N\}.$$

Most már definiálhatjuk az (R, f) rendszer (aszimptotikus) *konvergenciasebességét*:

(2.7) $$1/|\hat{\lambda}|.$$

Ugyanis az alapmegoldások lineáris kombinációja *aszimptotikusan* úgy viselkedik, mint a maximális abszolútértékű sajátérték(ek)hez tartozó tag(ok). A szemléletes jelentés egyetlen ilyentag esetében nyilvánvaló: ekkor az aszimptotikus kifejezés $\hat{c}\hat{\lambda}^t\hat{x}$, amelynek minden eleme tényleg $1/|\hat{\lambda}|$ részére zsugorodik minden lépésben.

A továbbiakban a 7. fejezet kivételével mindig föltesszük, hogy a saját hatás nem nulla: $r_{\gamma\nu} \neq 0$. Ekkor alkalmas mértékegységek bevezetésével föltehető, hogy

(2.8) $$r_{\nu\gamma} = 1 \qquad 1 \leq \gamma \leq N.$$

Érdekes megvizsgálni, hogy mi történik, ha a ν-edik egység figyelmen kívül hagyja a többi egység létezését. Ekkor a ν-edik alrendszer egyenlete a ν-edik döntéshozó fejében

(2.9) $$\hat{x}_\nu(t+1) = (1 - f_\nu)\hat{x}_\nu(t) \qquad \hat{x}_\nu(0) \text{ adott}.$$

Ekkor a *naiv* optimális reakciósebesség.

(2.10) $$f_\nu = 1\,,$$

amely az 1. időszaktól kezdve a normatív pályán tartaná a ν-edik alrendszert, ha az tényleg független volna.

Mivel a ν-edik döntéshozó állapota általában függ a többi döntéshozó állapotától, (2.10) általában nem optimális. Ezért érdekes a Bevezetésben említett eredménypár (2.10) optimalitásáról. Erre azonban csak az 5. és 6. fejezetben térünk vissza.

3. Az optimális reakciósebesség és a szabályozási időszak hossza

A bevezetésben már említettük, hogy a konvergenciasebesség csak hosszútávon mér megbízhatóan. A közgazdaságban pedig nagyon gyakran rövidtávra kell szabályozni. Hasznosnak tűnik egy olyan modell bemutatása, amely tükrözi az optimális reakciósebesség és a szabályozási időszak hosszának kapcsolatát. Ez a példa *Simonovits* (1976) dolgozataiból származik, amelyben *T. Marschak* (1972) tévedését javítottam ki. Ellentétben a KS-1 és KS-2 dolgozattal, a fenti két dolgozat ismeretét egyáltalán nem tételezem föl.

Mi az optimalizálandó célfüggvény? A Bevezetéssel összhangban arra törekszünk, hogy az optimális reakciósebesség független legyen a kezdeti állapoteltéréstől. Célszerűnek látszik tehát a kezdeti állapoteltérést *valószínűségi változónak* tekinti. Egyszerűség kedvéért elemeit nulla várható értékű, egységnyi szórású és páronként korrelálatlan valószínűségi változókkal írjuk le. Képletben:

$$\varepsilon\hat{x}(o) = 0 \quad \text{és} \quad \varepsilon\hat{x}(o)\,\hat{x}(o)' = I. \tag{3.1}$$

Legyen a vizsgált időszak hossza $T+1$, ekkor az $\hat{x}(T)$ végállapoteltérésvektor várható hosszúságát (pontosabban négyzetét)

$$\vartheta(f, T) = \varepsilon\hat{x}(T)'\,\hat{x}(T) \tag{3.2}$$

adja. Természetesnek tűnik ezt a mennyiséget venni *veszteségfüggvénynek*, amelyet az optimális reakciósebesség-vektor minimalizál.

Szükségünk lesz még a következő matematikai egyszerűsítésekre: az R mátrix *szimmetrikus* és *pozitív definit*:[1]

$$R' = R \quad \text{és} \quad v'Rv > 0 \quad (v \neq 0) \tag{3.3}$$

valamint az f reakciósebesség vektor elemei *egyöntetűek*:

$$f = \varphi 1. \tag{3.4}$$

Szükségünk lesz az R mátrix sajátértékeire is:

$$s_\nu > 0 \qquad 1 \leq v \leq N. \tag{3.5}$$

Ekkor (2.3) és (3.1—5), R és $\langle s\rangle$ hasonlóságából $\sum\limits_{\nu}(1 - r_\nu\varphi)^{2T} = \sum\limits_{\nu}(1 - s_\nu\varphi)^{2T}$ felhasználásával a

$$\vartheta(\varphi, T) = \textstyle\sum_{\nu=1}^{N}(1 - s_\nu\varphi)^{2T} \tag{3.6}$$

összefüggéshez jutunk, amelyből közvetlenül vizsgálhatjuk a veszteséget φ reakciósebesség és T időszakhossz függvényében.

(3.6) differenciálásával a φ^T *optimális reakciósebességre* (konvex függvényről lévén szó) a következő szükséges és elégséges feltételt kapjuk:

$$\textstyle\sum_{\nu=1}^{N}(1 - s_\nu\varphi_T)^{2T-1}s_\nu = 0\,. \tag{3.7}$$

(3.7) egyenletből általában nem lehet kifejezni φ_T-t. Szorítkozzunk tehát olyan R mátrixokra, amelyeknek két különböző sajátértékük van, $s^{(m)}$ és $s^{(M)}$, $k^{(m)}$, ill. $k^{(M)}$ multiplicitással:

$$s^{(m)} < s^{(M)} \quad \text{és} \quad k^{(m)} + k^{(M)} = N. \tag{3.8}$$

[1] Figyelmeztetjük az Olvasót, hogy itt nincs terünk a (3.3) feltevés közgazdasági értelmezésére, lásd *T. Marschak* (1972). Számunkra a feltevés csak a számolás megkönnyítésére szolgál.

Ekkor (3.7) szerint

$$(3.9)\qquad \varphi_T = \frac{\sqrt[2T-1]{k^{(m)} s^{(m)}} + \sqrt[2T-1]{k^{(M)} s^{(M)}}}{s^{(m)} \sqrt[2T-1]{k^{(m)} s^{(m)}} + s^{(M)} \sqrt[2T-1]{k^{(M)} s^{(M)}}}.$$

(3.9)-ből könnyű belátni, hogy

$$(3.10)\qquad \varphi_T \uparrow \varphi_\infty, \quad \text{ha} \quad k^{(m)} s^{(m)} < k^{(M)} s^{(M)},$$

$$(3.11)\qquad \varphi_T \downarrow \varphi_\infty, \quad \text{ha} \quad k^{(m)} s^{(m)} > k^{(M)} s^{(M)},$$

$$(3.12)\qquad \varphi_T = \varphi_\infty, \quad \text{ha} \quad k^{(m)} s^{(m)} = k^{(M)} s^{(M)},$$

ahol

$$(3.13)\qquad \varphi_\infty = \frac{2}{s^{(m)} + s^{(M)}}$$

és $\varphi_T \uparrow \varphi_\infty$ azt jelöli, hogy $\{\varphi_T\}$ sorozat nő és határértéke φ_∞.

Mivel

$$(3.14)\qquad |\hat{\lambda}| = \max\left(|1 - s^{(m)}\varphi|,\ |1 - s^{(M)}\varphi|\right)$$

a rendszer konvergenciasebessége, a (3.13)-ban bevezetett φ_∞ a maximális konvergenciasebességet megvalósító aszimptotikusan optimális reakciósebesség és

$$(3.15)\qquad \varphi^{(M)} = \frac{2}{s^{(M)}}$$

a stabilitást biztosító reakciósebességek felső határa.

Világosabb képet kapunk, ha az alábbi speciális R mátrixra szorítkozunk: (χ paraméter)

$$(3.16)\qquad r_{\varkappa\nu} = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad \varkappa = \nu \\ \chi, & \phantom{\text{ha}} \quad \varkappa \neq \nu \end{cases}.$$

Könnyen belátható, hogy e mátrixnak két sajátértéke van:

$$(3.17)\qquad s^{(m)} = 1 + (N-1)\chi,\ (k^{(m)} = 1) \text{ és } s^{(M)} = 1 - \chi,\ (k^{(M)} = N-1), \text{ ha } \chi < 0$$

és

$$(3.18)\qquad s^{(m)} = 1 - \varkappa,\ (k^{(m)} = N-1) \text{ és } s^{(M)} = 1 + (N-1)\varkappa,\ (k^{(M)} = 1), \text{ ha } \chi > 0.$$

Nyilvánvaló, hogy az R mátrix akkor és csak akkor pozitív definit (vagy ami ezzel ekvivalens, minden sajátértéke pozitív), ha

$$(3.19)\qquad -\frac{1}{N-1} < \chi < 1.$$

A (3.16) speciális mátrix esetén (3.10—12)-ben az esetek szétválasztása áttekinthetővé válik. Rendre

$$(3.20)\qquad \chi < \chi_N,\ \chi > \chi_N \text{ és } \chi = \chi_N, \text{ ahol } \chi_N = \frac{N-2}{2(N-1)}.$$

Végül (3.12) feltétele teljesül még, ha $\chi = 0$. Vagyis az N-től függő $\chi = \chi_N$ mellett csak a triviális $\chi = 0$ esetben, azaz N független alrendszer esetén, azonos az adott időszakra vett optimális reakciósebesség a „hosszútávú" optimummal. Külön kiemelném, hogy $\chi > \chi_N$ esetén kis T-re előfordulhat, hogy $\varphi_T > \varphi^{(M)}$, vagyis a rövidtávú optimum nem biztosít hosszútávon stabilitást.

Összegezve a fentieket:

1. Tétel: (3.1–4) *feltevés mellett a rövidtávú optimális reakciósebesség lehet kisebb mint a hosszútávú optimum (stabil) és lehet nagyobb is (instabil). A két mennyiség csak a triviális széteső rendszernél azonos.* ($\chi = \chi_N$-től eltekintve!)

Megjegyzés: Érdemes kiszámolni a hosszútávú optimális reakciósebességet speciális mátrixunkra. Helyettesítsük be (3.17)-et, ill. (3.18)-at (3.13)-ba — az eredmény mindkét esetben

$$\varphi_\infty(\chi) = \frac{2}{2 + (N-2)\chi}, \tag{3.20}$$

ami $N > 2$ és $\chi \neq 0$ esetén kisebb, ill. nagyobb 1-nél, aszerint hogy $\chi > 0$, ill. $\chi < 0$. Ezzel igazoltuk, hogy a (2.10)-beli naiv optimum általában nem optimális.

Röviden utalnék *Varga* (1962) alternatív megközelítésére (3.2 pont): Legyen $\|\hat{x}\|$ az $\hat{x}$ vektor valamilyen „normája", hosszúsága. Ekkor t időszak alatt a szabályozás gyorsaságát $\|\hat{x}(t)\|/\|\hat{x}(0)\|$ hányados maximális értékével jellemezhetjük, ill. e maximum t-edik gyökével.

$$\sqrt[t]{\max_{\hat{x}(0)\neq 0} \frac{\|\hat{x}(t)\|}{\|\hat{x}(0)\|}} = \hat{\lambda}_t. \tag{3.12}$$

Belátható (Varga, Theorem 3.2 és Corollary), hogy

$$\hat{\lambda}_t > \hat{\lambda} \quad \text{és} \quad \lim_{t\to\infty} \hat{\lambda}_t = \hat{\lambda}, \tag{3.22}$$

vagyis a véges távú konvergenciasebesség kisebb (esetleg egyenlő) mint a hosszútávú, amely az előbbinek a határértéke.

4. A szabályozás simasága és centralizáltsága

Az előző fejezetben példát hoztunk az elemi decentralizált szabályozás rövid- és hosszútávú minősítésének eltérésére. A két szemlélet különbségét *Bródy* (1973) dolgozatában nagyon szemléletesen tárgyalta és a kiutat a szabályozás simaságában, vagy ahogy ő nevezte, jól orientálóságában látta. Mivel a jól orientáló szabályozás ismérvét már a Bevezetésben ismertettük, most képletbe öntjük e tulajdonságot:

$$\operatorname{sgn} \hat{x}_\nu(t+1) = \operatorname{sgn} \hat{x}_\nu(t) \quad \text{és} \quad |\hat{x}_\nu(t+1)| \leq |\hat{x}_\nu(t)|, \tag{4.1}$$

ahol egyenlőség csak $\hat{x}_\nu(t) = 0$ esetén áll, $1 \leq \nu \leq N$. (Itt sgn a az a valós szám előjelét jelöli!)

Megjegyezzük, hogy Bródy nem korlátozta vizsgálatait elemi decentralizált szabályozásokra. Anélkül, hogy teljes mértékben követnénk Bródy feltevéseit, közelebb kerülünk hozzájuk, ha általánosítjuk a döntéshozók információi függvényét. Céljainkra elegendő, ha a ν-edik döntéshozó információja a rendszer állapotának időben állandó lineáris skalárértékű függvénye. Képletben:

$$\hat{y}_\nu(t) = c'_\nu \hat{x}(t) \qquad 1 \leq \nu \leq N$$

azaz a rendszer információ függvénye

$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t). \tag{4.2}$$

Nyilvánvaló, hogy elemi dencentralizált szabályozás esetén $C = I$, amikor a döntéshozók saját állapotukat ismerik és mást nem ismernek. Általában azonban a C mátrix főátlóján kívül is vannak nullától különböző elemek, amelyek az információ rendszer bizonyosfokú centralizáltságával kapcsolatosak. Mindenesetre föltesszük, hogy az információk együtteséből az állapot egyértelműen meghatározható (amely azonban teljes centralizációt is megenged.) Matematikailag ez a C mátrix regularitását jelenti, szabályozáselméleti kifejezéssel élve: a rendszer *megfigyelhető*. A döntési rendszer teljes decentralizáltságát továbbra is föltételezzük: a ν-edik egység döntése kizárólag saját információjától függ: (vö. (2.2)-vel)

$$u(t) = \langle f \rangle x(t). \tag{4.3}$$

A továbbiakban azt bizonyítom be, hogy a fenti (R, C) rendszer jól orientálhatósága szoros kapcsolatban van az információrendszer centralizáltságával. Mindenekelőtt feltesszük, hogy *irreducibilis* reálstruktúrájú rendszerekre szorítkozunk, hiszen a szabályozás szempontjából bármely reducibilis rendszer irreducibilis alrendszereire vezethető vissza.

Bevezetjük az (R, C) rendszer *elemi szabályozhatóságának* fogalmát is: az (R, C) rendszer *elemien szabályozható*, ha van olyan f reakciósebesség-vektor, amelyre a rendszer bármilyen $x(0)$ indulóállapotból az első időszakra a normatív pályára irányítható: $x(1) = x^*(1)$. (Ha a rendszer valamelyik időszakban a normatív pályára kerül, akkor ott is marad.)

Nyilvánvaló, hogy egy *elemien* szabályozható rendszer jól orientálható de megfordítva nem. Sőt, a jól orientáló szabályozások egy része semmilyen véges időszak alatt nem vezeti a rendszert normatív pályára, csak annak tetszőleges közelébe. Ezért érdekes a következő tétel.

2. Tétel. Az (R, C) rendszer akkor és csak akkor jól orientálható, ha *elemien* szabályozható, azaz ha az

$$RC \text{ mátrix reguláris és diagonális.} \tag{4.4}$$

Mielőtt bizonyítanánk a 2. tételt, külön kimondjuk e tétel speciális esetét az elemi decentralizált szabályozás esetére.

3. Tétel. Az elemi decentralizált szabályozás akkor és csak akkor jól orientáló, ha a rendszer reálstruktúrája N db független egységből áll, ami irreducibilis esetben $N = 1$-gyel ekvivalens.

Megjegyzések. A 2. tétel sokban hasonlít *Martos* (1976) bizonyos segédtételeihez.

A 3. tételből világos, hogy az elemi decentralizált szabályozás nem jól orientál, tehát indokolt a konvergenciasebesség durvább, de átfogóbb módszerének alkalmazása.

A jól orientálhatóság és az elemi szabályozhatóság ekvivalenciája arra utal, hogy Bródy ismerve meglehetősen szigorú, a valóságos rendszerekre aligha alkalmazható. Ugyanakkor előfordulhat, hogy egy elemien szabályozható rendszert több időszak alatt kell a normatív pályára vezetni, mert az egy időszak alatti célba juttatás megsérti a működőképességi feltételeket (amelyeket egyébként az egész dolgozatban figyelmen kívül hagyunk.)

Itt utalunk arra, hogy a 7. fejezetben szereplő egy-szektoros (két döntéshozóból álló) rendelésjelzéses gazdaság két időszak alatt a normatív pályára vezethető, de egy időszak alatt nem. Azaz a rendszer *szabályozható*, de *elemien nem szabályozható.*

Bizonyítás:

(i) Először a *(4.4) feltétel* és a jól orientálhatóság ekvivalenciáját igazoljuk: Helyettesítsük be (4.2) és (4.3) összefüggéseket (2.1)-be; az így kapott $\hat{x}(t+1) = (I - RC\langle f\rangle)\,\hat{x}(t)$ összefüggést a

$$K = I - RC\langle f\rangle \tag{4.5}$$

jelölés segítségével tömörebben fölírhatjuk:

$$\hat{x}(t+1) = K\hat{x}(t). \tag{4.6}$$

Belátjuk, a jól orientálás szükséges és elégséges feltétele az, hogy K *diagonális* mátrix és a diagonális elemek 0 és 1 között vannak:

$$K = \langle k_{\nu\nu}\rangle_{\nu=1}^{N}, \qquad 0 < k_{\nu\nu} < 1. \tag{4.7}$$

Rögzítsünk egy tetszőleges ν indexet és legyen $\hat{x}_\nu(0) \neq 0$ és $\hat{x}_\varkappa(0) = 0$ minden $\varkappa \neq \nu$-re. Ekkor (4.6)-ból

$$\hat{x}_\nu(1) = k_{\nu\nu}\hat{x}_\nu(0) \quad \text{és} \quad \hat{x}_\varkappa(1) = k_{\varkappa\nu}\hat{x}_\nu(0) \quad \text{minden} \quad \varkappa \neq \nu\text{-re}. \tag{4.8}$$

Mivel feltevésünk szerint $\hat{x}_\varkappa(0) = 0$, $(\varkappa \neq \nu)$, (4.1) és (4.8) szerint $k_{\varkappa\nu} = 0$ $(\varkappa \neq \nu)$. Továbbá $\hat{x}_\nu(0) \neq 0$, tehát ismét (4.1) és (4.8) szerint $0 < k_{\varkappa\nu} < 1$.

Mivel ν tetszőleges, (4.7) *szükségességét* bizonyítottuk.

(4.7) *elégségessége* viszont triviális.

Mivel minden reakciósebesség nullától különböző, (4.5)-ből RC kifejezhető:

$$RC = (I - K)\,\langle f\rangle^{-1}. \tag{4.9}$$

A jól orientáló szabályozás (4.7) feltétele szerint $0 < I - K \leq I$, tehát RC tényleg reguláris és diagonális.

(ii) Rátérünk a szabályozhatóság és (4.4) ekvivalenciájának bizonyítására. (4.6) szerint a szabályozhatóság $K = 0$-val ekvivalens, amit (4.9)-be behelyettesítve (4.4)-höz jutunk. Megfordítva: (4.4) esetén $\langle f\rangle = (RC)^{-1}$ diagonális és (4.5) szerint $K = 0$-hoz vezet.

5. A konvergenciasebesség és a reakciósebességek kapcsolata produktív gazdaságban, negatív idegen hatásoknál

Ebben a fejezetben rátérünk vizsgálatunk fő kérdésére. Hogyan függ a konvergenciasebesség a reakciósebesség vektortól? Először viszonylag általános feltevésekkel élünk a reálstruktúráról.

Föltesszük, hogy a pozitív saját hatásokkal (vö. (2.8)) ellentétes, *negatív előjelűek az idegen hatások:* [*Metzler* (1945)].

$$M = I - R \geq 0 \tag{5.1}$$

és

$$m_{\nu\nu} = 0, \qquad 1 \leq \nu \leq N. \tag{5.2}$$

A *Simonovits* (1978a) dolgozatban alkalmazott *uralkodó saját hatás* ($1'M \leq 1'$) feltevést most átfogalmazzuk.

A gazdaságot *produktív*nak nevezzük, ha minden állapotnövekedés megengedett (pozitív) döntéssel megvalósítható. Ismert összefüggés szerint ez a követelmény akkor és csak akkor valósul meg negatív idegen hatások esetén, ha az idegen hatások együttható mátrixának spektrálsugara kisebb mint 1. Képletben:

$$\varrho(M) < 1. \tag{5.3}$$

Megemlítjük, hogy a KS-1 készletszabályozásos modellben az idegen hatások negatívak és a gazdaság produktív. Viszont a KS-2 rendelés-szabályozásos modellben egyes saját hatások nullák és egyes idegen hatások pozitívak. *McFadden* (1969) számpéldájában szereplő gazdaság viszont megint eleget tesz (5.1—3) feltevéseknek.

(5.1) normáló feltevés mellett célszerű bevezetni a *csillapított* reakciósebesség vektor fogalmát:

$$0 < f_\nu \leq 1, \qquad (1 \leq \nu \leq N). \tag{5.4}$$

Emlékeztetjük még az olvasót az irreducibilis ciklikus nem-negatív mátrix definíciójára: (*Varga* (1962) (2.33) képlet).

Az M $N \times N$-es nem-negatív irreducibilis mátrix *ciklikus* (q indexszel), ha sorai és oszlopai együttes átindexelésével a következő alakra hozható:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & M_1 & & \dots & 0 \\ 0 & 0 & M_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & & \dots & M_{q-1} \\ M_q & 0 & & \dots & 0 \end{bmatrix}, \tag{5.5}$$

ahol az M_p oszlopszáma az M_{p+1} sorszámával azonos, $p = 1, \dots, q$, ($M_{q+1} = M_1$). (5.5) szemléletes jelentése nyilvánvaló: q db osztályra bontva a döntéshozókat a $p + 1$-edik osztály döntései csak a p-edik osztály állapotváltozásaira hatnak. (5.5) feltétellel ekvivalens meg a következő alak:

$$M^q = \langle M(p) \rangle_{p=1}^q, \tag{5.6}$$

ahol $M(p)$ kvadratikus mátrix, amelynek dimenziója: M_p sorainak száma. Most már kimondhatjuk:

4. Tétel Produktív gazdaságban, negatív idegen hatások esetén

(i) bármely csillapított reakciósebesség-vektor növelése növeli a konvergenciasebességet,

(ii) bármely csillapítatlan egyöntetű reakciósebesség növelése akkor és csak akkor csökkenti a konvergenciasebességet, ha az M mátrix *ciklikus*.

(iii) Mind (i), mind (ii) esetén (az utóbbinál föltéve, hogy M ciklikus) az optimális reakciósebesség vektor minden eleme 1 (akár a naiv optimumnál) és a maximális konvergenciasebesség

$$1/|\hat{\lambda}_{\max}| = 1/\varrho(M). \tag{5.7}$$

Megjegyzések:

A 4. Tétel KS-1 4. Tételének általánosítása, hiszen KS-1-nél az outputkészlet változására (saját termelésén kívül) csak a vételek hatnak, az inputkészlet változásra (saját vételén kívül) csak a termelés hat: tehát M ciklikus. (5.1—3) feltevések nyilvánvalóan teljesülnek. Az állítások azonosságát is könnyű ellenőrizni.

Valószínű, hogy (5.1—3; 5) feltevések általában nem biztosítják, hogy tetszőleges reakciósebesség vektorok között is az egyöntetű egységnyi az optimális.

Érdekes hasonlóság mutatkozik tételünk és a lineáris egyenletek iteratív megoldásánál fellépő *túl-relaxálási* elv között [Varga (1962) pl. Theorem 3.16.]

Bizonyítás:

(i) Hagyjuk el (2.5)-ből a ν indexet és helyettesítsük be az egyszerűsített kifejezésben az (5.1—2) párost:

$$\hat{\lambda}\hat{x} = [I - \langle f\rangle + M\langle f\rangle]\,\hat{x} \tag{5.8}$$

$0 < f \leq 1$ esetén (5.8) jobb oldalán álló mátrix nemnegatív, tehát Frobenius—Perron tétele szerint az (egyik) domináns gyök pozitív, jelöljük ezt $(\hat{x}, \hat{\lambda})$-val.

(5.8)-ban visszahelyettesítve (5.2)-t, némi átrendezés után

$$R\langle f\rangle\,\hat{x} = (1 - \hat{\lambda})\,\hat{x}, \qquad \hat{x} > 0 \quad \text{és} \quad \hat{\lambda} > 0 \tag{5.9}$$

összefüggést nyerjük. Jól ismert, hogy (5.1—3) értelmében létezik R inverze, melynek minden eleme pozitív: $R^{-1} > 0$.

Szorozzuk meg (5.9) mindkét oldalát $\langle f\rangle^{-1}R^{-1}(1 - \hat{\lambda})^{-1}$-gyel:

$$(1 - \hat{\lambda})^{-1}\hat{x} = \langle f\rangle^{-1}R^{-1}\hat{x}\,. \tag{5.10}$$

Ismét Frobenius—Perron tétele alapján $(1 - \hat{\lambda})^{-1} > 0$ az $\langle f\rangle^{-1}R^{-1}$ pozitív mátrix spektrálsugara, tehát növekvő függvénye $\langle f\rangle^{-1}$-nek. Vagyis $1/\hat{\lambda}$ növekvő függvénye f-nek.

(ii) Az egyöntetü reakciósebesség-vektort (3.4) definiálja. Ezt behelyettesítve (5.8)-ba, rendezéssel

$$(\lambda - 1 + \varphi)\,x = \varphi M x, \tag{5.11}$$

sajátvektor-sajátérték feladathoz jutunk. Most nem tudjuk, hogy $(\hat{x}, \hat{\lambda})$ milyen előjelű, viszont $(\lambda - 1 + \varphi)/\varphi$ valamilyen sajátértéke M-nek, pl, egyenlő μ-vel:

$$Mx = \mu x \tag{5.12}$$

és

$$\lambda(\mu) = 1 - \varphi + \mu\varphi. \tag{5.13}$$

$\varphi = 1$ esetén $\lambda(\mu) = \mu$. Mivel $M \geq 0$, föltehető, hogy $\hat{\lambda} = \varrho(M)$. Ha az M mátrix ciklikus, akkor (5.6) szerint (vö. Varga (1962) Def. 2.2) még $k - 1$ komplex (ezenbelül páros k-nál 1 negatív, páratlan k-nál O negatív) sajátérték domináns. Ekkor φ növelésével a $\varrho(M)$-hez tartozó pozitív sajátérték csökken, a többi abszolút értéke nő, tehát $1/|\hat{\lambda}|$ csökken.

Ha az M mátrix nem ciklikus, akkor M nemnegativitása és irreducibilitása folytán M többi sajátértéke kisebb abszolútértékű mint $\varrho(M)$, tehát φ megfelelően kicsiny növelése esetén a $\varrho(M)$-hez tartozó sajátérték dominanciája megmarad.

(iii) Triviálisan következik (i)-ből és (ii)-ből.

Megjegyzés: A mátrixelméleti irodalom (pl. *Varga* (1962)) az M mátrix ciklikusságát azzal definiálja, hogy több mint egy domináns sajátértéke létezik, és ebből vezeti le (5.5) alakot. Mi szándékosan fordított sorrendet választottunk, mivel közgazdaságilag (5.5) szemléletesebbnek tűnt, mint a szokásos definíció.

6. Maximális konvergenciasebesség a készletjelzéses gazdaságban

Az előző fejezet feltevései mellett jelenleg nem ismert a feltétel nélküli optimális reakciósebesség-vektora, ezért szorítkoztunk a *csillapított*, ill. *egyöntetű* reakció-sebességekre. Most speciálisabb R reálstruktúrákra szorítkozunk, a *készletjelzéses* gazdaságéra. Így képesek leszünk meghatározni a feltétel nélküli optimális reakciósebesség-vektort, amelyről kiderül, hogy megegyezik a 2. fejezet naiv optimumával, akárcsak az 5. fejezet feltételes optimumai.

5. Tétel A KS-1 készletjelzéses gazdaságban

(i) egyöntetű termelési- és egyöntetű vételi reakciósebességek esetén, vagyis ha

$$d_j = \delta, \quad (1 \leq j \leq n) \quad \text{és} \quad e_{ij} = \varepsilon \quad ((i, j) \in \bar{J}), \tag{6.1}$$

a konvergenciasebesség δ és ε reakciósebesség növelésekor nő, ha

$$\delta + \varepsilon < 2 \tag{6.2}$$

és csökken, ha

$$\delta + \varepsilon > 2. \tag{6.3}$$

A

$$\delta + \varepsilon = 2 \tag{6.4}$$

határesetben nő, ha $|\delta - \varepsilon|$ csökken.

(ii) Tetszőleges reakciósebesség vektor esetén az egyöntetű egységnyi az optimális, amikor is a maximális konvergenciasebesség

$$|1/\hat{\lambda}_{\text{opt}}| = 1/\sqrt{\varrho(A)}. \tag{6.5}$$

ahol $\varrho(A)$ az A mátrix spektrálsugara.

Bizonyítás:

A bizonyítás nehézségét az okozza, hogy a reakciósebességekre tett feltevések nélkül nehéz meghatározni a domináns sajátértéket és annak függését a reakciósebesség-vektortól.

Eleve még azt sem tudjuk, hogy negatív reakciósebesség-elemek nem segítenek-e a stabilizálásban. *Enthoven—Arrow* (1956) tétele uralkodó saját hatás és ellentétes idegen hatás esetére kimondja a negatív elemet tartalmazó reakciósebesség-vektorok *instabilitását*, tehát esetünkben föltehetjük, hogy a reakciósebesség-vektor pozitív.

Kiindulásul KS-1 (6.6) egyenlete szolgál, amelyet most a

$$\psi_{jk}(\lambda) = \frac{d_j e_{jk}}{(\lambda - 1 + d_j)(\lambda - 1 + e_{jk})} \tag{6.6}$$

jelölés segítségével tömörebben írunk föl:

$$w_j = \sum_{k=1}^{n} \psi_{jk}(\lambda)\, a_{jk} w_k \qquad 1 \le j \le n. \tag{6.7}$$

(A kalap elhagyásával ismét arra utaltunk, hogy nem csak a domináns gyököt tekintjük, bár csak az érdekes igazából.)

(i) ,,Félig-egyöntetű'' reakciósebesség vektor esetén még követhetjük az előző fejezet, ill. KS-1 gondolatmenetét. (6.7) átrendezésével $\psi(\lambda)^{-1}w = Aw$ nem-lineáris sajátérték-sajátvektor feladathoz jutunk. Legyen az A mátrix tetszőleges sajátértéke α,

$$Aw = \alpha w \tag{6.8}$$

akkor előző egyenletünk szerint

$$\psi(\lambda) = 1/\alpha. \qquad (\alpha \neq 0) \tag{6.9}$$

(Itt és az (i) pontban a továbbiakban ψ indexezése feleslegessé válik (6.1) folytán!)

(6.6)-ot behelyettesítve (6.9)-be másodfokú egyenletet kapunk λ-ra, amelyet megoldva

$$\lambda(\alpha) = \frac{2 - \delta - \varepsilon \mp \sqrt{(\delta - \varepsilon)^2 + 4\alpha\delta\varepsilon}}{2}.$$

Frobenius—Perron tétele szerint $|\alpha| \le \varrho$, tehát $\lambda(\alpha)$ akkor és csak akkor maximális abszolút értékben, ha $\alpha = \varrho$. Pontosabban:

$$\hat{\lambda} = \frac{2 - \delta - \varepsilon + \sqrt{(\delta - \varepsilon)^2 + 4\varrho\delta\varepsilon}}{2} > 0, \text{ ha (6.2) áll} \tag{6.10}$$

és

$$\hat{\lambda} = \frac{2 - \delta - \varepsilon - \sqrt{(\delta - \varepsilon)^2 + 4\varrho\delta\varepsilon}}{2} < 0, \text{ ha (6.3) áll.} \tag{6.11}$$

(6.10—11) δ és ε szerinti parciális differenciálásával (i) könnyen belátható. (6.4) esetén a következő kifejezést kell vizsgálni.

$$\hat{\lambda} = \sqrt{(1 - \delta)^2 + \varrho\delta(2 - \delta)}. \tag{6.12}$$

(ii) Az (i) speciális esetet részben szemléletessége és részben további alkalmazhatósága folytán mondtuk ki külön. Bár általános reakciósebességvektornál nincs explicit képletünk a maximális konvergenciasebességre, sőt, még a konvergenciát biztosító reakciósebesség-vektorok tartományát sem ismerjük, az (i) pontban nyert ismereteink jól hasznosíthatók az általános esetben is.

Először belátjuk, hogy (6.7)-nek van *valós* megoldása, amelyet hullámmal jelölünk: $(\tilde{\lambda}, \tilde{w})$.

(6.7) helyett a némileg általánosabb

$$\varkappa_\lambda w_j = \sum_{k=1}^{n} \psi_{jk}(\lambda)\, a_{jk} w_k \qquad 1 \leq j \leq n, \qquad \lambda \text{ valós}$$

paraméteres lineáris sajátérték-sajátvektor feladatot vizsgáljuk. Nyilvánvaló, hogy ez $\varkappa_\lambda = 1$ esetén azonos (6.7)-tel és megfordítva, csak $\varkappa_\lambda = 1$ esetén azonos (6.7)-tel.

Legyen $\mu^+ = \max\{1 - d_j,\ 1 - e_{jk} \mid 1 \leq j \leq n,\ (j,k) \in \bar{J}\}$. $(d, E) \overset{(\bar{J})}{>} 0$, miatt $\mu^+ < 1$. A KS-1 cikk érvelését megismételve $\varkappa_{\mu^+} = \infty$, $\varkappa_1 = \varrho < 1$, tehát van olyan λ^* szám, amelyre

$$\varkappa_{\lambda^*} = 1 \qquad (\mu^+ < \lambda^* < 1). \tag{6.13}$$

Legyen λ^+ a legnagyobb ilyen tulajdonságú szám. Ekkor belátjuk, hogy λ^+ *domináns sajátérték.*

Ellenkező esetben ugyanis Frobenius–Perron tétele szerint $\varrho[\psi_{jk}(\lambda^+) a_{jk}]_{j,k=1}^{n} >$ > 1, tehát az előző gondolatmenetben μ^+ helyett λ^+-t írva azt kapjuk, hogy a (6.13)-beli λ^* számok egyike nagyobb λ^+-nál. De λ^+ éppen e számok maximuma volt, tehát ellentmondáshoz jutottunk. λ^+ tényleg domináns, tehát ismét Frobenius–Perron tétele szerint

$$w_j^+ = \sum_{k=1}^{n} \psi_{jk}(\lambda^+)\, a_{jk} w_k^+ \qquad w_j^+ > 0, \qquad 1 \leq j \leq n. \tag{6.14}$$

Mivel az optimális megoldás stabil, $|\hat{\lambda}| < 1$, tehát az $[1, \infty]$ intervallumban nincs sajátérték.

Hasonló gondolatmenettel és $\mu^- = \min\{1 - d_j,\ 1 - e_{jk} \mid 1 \leq j \leq n,$ $(j, k) \in \bar{J}\}$ jelöléssel van a $(-1, \mu^-)$ intervallumban legalább egy valós megoldása (6.7)-nek és a legkisebb sajátértéket jelöljük λ^--szal.

Mivel $\mu^- \leq \mu^+$ [és egyenlőség csak $d_j = e_{jk} = 1$ $(1 \leq j \leq n,\ (j, k) \in \bar{J})$ esetén áll], $\lambda^- < \lambda^+$. Ha a reakciósebesség-vektor csillapított, akkor az előző fejezet értelmében a domináns sajátérték pozitív, tehát λ^+. Ha a reakciósebesség-vektor *nem* csillapított, azaz legalább egyik eleme nagyobb, mint 1, akkor $\mu^- < 0$, tehát van negatív sajátérték is, $\lambda^- < 0$.

Mivel a 4. Tételhez képest az 5. Tétel semmi újat nem tartalmaz csillapított reakciósebesség-vektor esetén, a továbbiakban kizárjuk ezt az esetet.

A vizsgálatot megnehezíti, hogy nem tudjuk, hogy lehet-e a domináns sajátérték komplex. Azt sejtjük, hogy nem, de ezt nem tudjuk bizonyítani. Végül is elegendő lesz λ^+ és λ^- „domináns-jelölteket" tanulmányozni a reakciósebesség-vektor függvényében. Belátjuk, hogy *λ^+ és λ^- egyaránt csökken a reakciósebesség-vektor növelésénél.*

Legyen ugyanis $0 < (d^{(1)}, E^{(1)}) \leq (d^{(2)}, E^{(2)})$. Könnyen belátható, hogy $\psi_{jk}(\lambda)$ csökkenő függvénye d_j-nek, ill. e_{jk}-nak, amennyiben $\mu^+ < \lambda < 1$. Ugyanis $\psi_{jk}(\lambda)$ mindkét tényezője pozitív és csökkenő függvénye d_j-nek, ill. e_{jk}-nak. Alkalmas jelöléssel

$$\psi_{jk}^{(1)}(\lambda) \leq \psi_{jk}^{(2)}(\lambda), \quad \text{ha} \quad u_1^+ < \lambda < 1 \qquad (j, k) \in \bar{J} \tag{6.15}$$

és legalább egy (j, k)-ra határozott egyenlőtlenség áll.

KS-1 I. Segédtétele és (6.14—15) szerint

$$\varrho[\psi_{jk}^{(1)}(\lambda_1^+)\, a_{jk}] > \varrho\,[\psi_{jk}^{(2)}(\lambda_1^+)\, a_{jk}] \tag{6.16}$$

(figyelembe véve, hogy az A mátrix irreducibilis).

Definíció szerint (6.16) bal oldalán álló kifejezés 1, ahonnét a fenti gondolatmenet újabb alkalmazásával adódik, hogy $\lambda_1^+ > \lambda_2^+$.

Nem-csillapított reakciósebesség-vektor esetén λ^--nál ugyanez a helyzet. Mivel $|\hat{\lambda}| \geq \max\,(|\lambda^+|, |\lambda^-|)$, az egyöntetű egységnyi reakciósebesség-vektor optimalitásához elegendő

$$\max\,(|\lambda^+|, |\lambda^-|) > |\hat{\lambda}^{(1)}| \quad \text{ha} \quad (d, E) \neq \mathbf{1} \tag{6.17}$$

összefüggés belátása, ahol az $\mathbf{1}$ az egyöntetű egységnyi reakciósebességvektora, amelyre

$$\hat{\lambda}^{(1)} = \sqrt{\varrho}\,. \tag{6.18}$$

Először belátjuk, hogy *van* olyan $(j, \mathrm{k}) \in \bar{J}$, amelyre

$$\psi_{jk}(\lambda^+) \leq \frac{1}{\varrho}. \tag{6.19}$$

Ellenkező esetben ugyanis $\psi_{jk}(\lambda^+) > 1$ *minden* $(j, k) \in \bar{J}$-re. (6.14)-re alkalmazva KS-1 I. Segédtételét ellentmondáshoz jutunk: $\varrho(A) > \varrho$.

Hasonlóan igazolható, hogy csillapítatlan reakciósebesség-vektor esetén *van* olyan $(j, k) \in \bar{J}$, amelyre

$$\psi_{jk}(\lambda^-) \leq \frac{1}{\varrho}. \tag{6.20}$$

Legyen $\alpha = 1/\psi_{jk}(\lambda^+)$, $\delta = d_j$ és $\varepsilon = e_{jk}$ a (6.19)-ben szereplő j-re és k-ra. Ekkor az (i) pont szerint [(6.10)]

$$\lambda^+ = \frac{2 - \delta - \varepsilon + \sqrt{(\delta - \varepsilon)^2 + 4\alpha\delta\varepsilon}}{2}$$

(Mivel $\lambda^+ > \mu^+ \geq (2 - \delta - \varepsilon)/2$, λ^+ a $+$ jelhöz tartozik!) Hasonlóan [(6.11)] $\alpha = 1/\psi_{jk}(\lambda^-)$ stb. esetén

$$\lambda^- = \frac{2 - \delta - \varepsilon - \sqrt{(\delta - \varepsilon)^2 + 4\alpha\delta\varepsilon}}{2}.$$

Az (i) pontban beláttuk, hogy mind $|\lambda^+|$ mind $|\lambda^-|$ nő α-val, tehát (6.19), ill. (6.20) szerint $\lambda^+ > \hat{\lambda} > 0$, ill. $\lambda^- < \hat{\lambda} < 0$ teljesül, kivéve ha (6.19)-ben, ill. (6.20)-ban minden (j, k)-ra egyenlőség áll a $<$ helyett. De ekkor $>$ helyett is egyenlőség kell hogy álljon, ami csak az (i) pontban tárgyalt esetben áll. Mivel $|\hat{\lambda}| > \hat{\lambda}^{(1)}$ az (i) feltétel mellett, (6.17)-et igazoltuk.

7. A rendelésjelzéses gazdaság esete

A készletjelzéses gazdasággal ellentétben, a maximális konvergenciasebességet nem tudjuk meghatározni a rendelésjelzéses gazdaságban, KS-2-ben. Mivel a rendelésjelzéses gazdaságban az input-készlet változása független saját szabályozási változójától, a rendeléstől, *uralkodó sajáthatás* helyett *nulla sajáthatás* esetével állunk szembe. Az is belátható, hogy az *idegen hatások* között vannak pozitívak is és negatívak is. Vagyis az 5. fejezet eredményei nem alkalmazhatók.

Mégis kimondhatunk olyan tételt, amelyből arra következtethetünk, hogy a KS-2 szabályozás gyorsabb mint a KS-1.

6. Tétel A rendelésjelzéses gazdaságban

(i) egyöntetű szállítási- és egyöntetű rendelési reakciósebességek esetén, azaz ha

$$p_{ij} = \pi \quad \text{és} \quad q_{ij} = \varkappa \quad \text{minden } (i, j) \in \bar{J}\text{-re}, \tag{7.1}$$

a készletjelzéses gazdaság maximális konvergenciasebessége

$$\pi = 2 \quad \text{és} \quad \varkappa = \frac{1}{2} \tag{7.2}$$

esetén megvalósul. Egyébként a (7.2) sebességpár a (7.1) feltételnél optimális, ha az A mátrix páros-ciklikus; nem optimális, ha az A aciklikus.

(ii) a feltétel nélküli maximális konvergenciasebesség általában nagyobb, (de legfeljebb egyenlő) mint a készletjelzéses gazdaságé.

Megjegyzések:

Az 5. fejezetben, amikor azt vizsgáltuk, hogy az egyöntetű reakciósebességek közül az egységnyi mikor optimális, az M mátrix *ciklikussága* fontos speciális eset volt, hiszen magába foglalta a készletjelzéses gazdaságot. Ezzel ellentétben, most az A mátrix ciklikussága kivételes eset, bár *Morishima* (1961) óta külön bíbelődnek vele az ágazati kapcsolatok elméletében.

Míg a készletjelzéses gazdaságban a maximális konvergenciasebességet az 5. Tételben általánosan megadtuk, a rendelésjelzéses gazdaságban ez nem sikerült. Ennek részben az az oka, hogy a készletjelzéses maximum csak $\varrho(A)$-tól függ, a rendelésjelzéses maximum pedig az A mátrix többi sajátértékétől is függ, mindenekelőtt a legkisebb negatív sajátértéktől. Szélsőséges esetben, amikor a gazdaság *egyetlen egy szektorból* áll, akkor az optimális reakciósebesség-pár

$$\varphi_{11} = 2 \quad \text{és} \quad q_{11} = \frac{1}{2(1-\varrho)} \tag{7.3}$$

és a konvergenciasebesség *végtelen*. Ugyanis a rendszer a második időszakban a normatív pályára kerül.

E fejezet fő érdekességét abban látom, hogy sikerült két *minőségileg* különböző szabályozási rendszer konvergenciasebességét összehasonlítani. (*Mennyiségileg* különböző rendszerek már KS-1-ben, ill. e dolgozat előző fejezeteiben is szerepeltek, amikor csak a reakciósebességeket változtattuk!) Ismét aláhúznám, hogy ez az összehasonlítás csak hosszútávú szabályozás esetén megbízható. További megszorítás, hogy optimális reakciósebességeket feltételezünk, holott ezek csak a készletjelzéses gazdaságra ismertek. Természetesen szükség volt valamilyen közös ismérve a két gazdaság összehasonlításánál, és erre csak az optimum kínálkozott. (T. Marschak 3. fejezetben idézett dolgozatának fő hibája éppen abban rejlett, hogy (3.9) optimális reakciósebesség helyett (3.15) maximális reakciósebességgel számolt elemzéseiben. Vö. *Simonovits* (1976).)

A. 6. tétel bizonyítása

A bizonyítás kezdete hasonlít az 5. Tételéhez. Most KS-2 (4.3) összefüggést írjuk föl röviden a

$$\psi(\lambda)=\frac{\pi\varkappa}{\lambda^2-(2-\pi)\lambda+1-\pi(1-\varkappa)} \tag{7.4}$$

jelöléssel:

$$\psi(\lambda)^{-1}k=Ak. \tag{7.5}$$

Látjuk, hogy $\psi(\lambda)^{-1}$ az A mátrix sajátértéke, mondjuk α:

$$\psi(\lambda)^{-1}=\alpha. \tag{7.6}$$

Egyszerű számolással adódik

$$\lambda_{1,2}^{(\pi,\varkappa)}(\alpha)=\frac{2-\pi+\sqrt{\pi^2-4(1-\alpha)\pi\varkappa}}{2}. \tag{7.7}$$

Vizsgáljuk meg először $\lambda_{1,2}^{(\pi,\varkappa)}(\varrho)$-t. Könnyen belátható, hogy (7.3) esetén $\lambda_{1,2}^{(\pi,\varkappa)}(\varrho)=0$. Vagyis egy-szektoros gazdaság esetén (amikor más sajátértéke nincs A-nak) a konvergenciasebesség végtelen, azaz 2 lépésen belül a rendszer a normális pályára kerül. (Ha egy $N\times N$-es mátrix összes sajátértéke nulla, akkor az N-edik hatványa nulla!) *Véges* idejű konvergencia (szabályozhatóság) általában nem remélhető!

Ellentétben a készletjelzéses gazdasággal, a rendelésjelzéses gazdaságban az A mátrix többi sajátértéke is szerepet kap. Belátjuk, hogy (7.2) esetén a készletjelzéses maximum valósul meg:

$$\hat{\lambda}^{(2,\frac{1}{2})}=\sqrt{\varrho}. \tag{7.8}$$

Ugyancsak (7.7)-be behelyettesítve (7.2)-t $\lambda_{1,2}^{(2,\frac{1}{2})}(\alpha)=\sqrt{\alpha}$ összefüggést kapjuk, amelyből — $|\alpha|\leq\varrho$ figyelembevételével — adódik (7.8).

Ha belátjuk, hogy

$$\max\{|\lambda_{1,2}^{(\pi,\varkappa)}(\varrho)|,|\lambda_{1,2}^{(\pi,\varkappa)}(-\varrho)|\}>\sqrt{\varrho},\quad \text{ha}\quad (\pi,\varkappa)\neq\left(2,\frac{1}{2}\right), \tag{7.9}$$

akkor (7.8) értelmében

$$|\hat{\lambda}^{(\pi,\varkappa)}|>\sqrt{\varrho},\quad \text{ha}\quad (\pi,\varkappa)\neq\left(2,\frac{1}{2}\right) \tag{7.10}$$

is bizonyított, amely nem más, mint (7.2) optimalitása párosan ciklikus A mátrix esetén.

Rátérünk (7.9) bizonyítására. Vegyük észre, hogy (7.7) diszkriminánsa $\alpha=$ $=\varrho$, ill. $(-\varrho)$ esetben egyaránt csökkenő függvénye $\varkappa$-nak. Ezért adott π mellett, ha mindkét diszkrimináns pozitív, akkor $\varkappa$-növelésével mindkét diszkrimináns, azaz minkét gyök abszolút értéke csökkenthető. Ha mindkét diszkrimináns negatív, akkor $\varkappa$ csökkentésével mindkét diszkrimináns *abszolút* értéke, azaz mindkét gyök abszolút értéke csökkenthető. Tehát minimumkeresésnél föltehetjük, hogy az egyik diszkrimináns pozitív, a másik pedig negatív. Természetesen esetünkben

$$\pi^2 - 4\pi\varkappa(1+\varrho) < 0 < \pi^2 - 4\pi\varkappa(1-\varrho). \tag{7.11}$$

Ekkor (7.7) szerint (némi átrendezés után)

$$|\lambda^{(\pi,\varkappa)}(-\varrho)| = \sqrt{|1-\pi[1-\varkappa(1+\varrho)]|} \tag{7.12}$$

és

$$|\hat\lambda^{(\pi,\varkappa)}(\varrho)| = \begin{cases} 1-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\sqrt{1-\dfrac{4\varkappa(1-\varrho)}{\pi}}, & \text{ha} \quad \pi \leq 2 \\ -1+\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\sqrt{1-\dfrac{4\varkappa(1-\varrho)}{\pi}}, & \text{ha} \quad \pi > 2, \end{cases} \tag{7.13}$$

ahol $|\hat\lambda(\alpha)| = \max\{|\lambda_1(\alpha)|, |\lambda_2(\alpha)|\}$.

Mivel stabil rendszerekre szorítkozhatunk, (7.12)-ben 1-nél kisebb szám áll, vagyis $1-\varkappa(1+\varrho) > 0$, tehát $|\hat\lambda(-\varrho)|$ csökkenő függvénye π-nek.

(7.13) szerint $|\hat\lambda(\varrho)|$ csökkenő függvénye π-nek, ha $\pi \leq 2$; és növekvő függvénye π-nek, ha $\pi > 2$.

Vagyis

$$|\hat\lambda^{(\pi,\varkappa)}(-\varrho)| \geq \sqrt{2\varkappa(1+\varrho)-1}, \quad \text{ha} \quad \pi \leq 2 \tag{7.14}$$

és

$$|\hat\lambda^{(\pi,\varkappa)}(\varrho)| \geq \sqrt{1-2\varkappa(1-\varrho)} \tag{7.15}$$

tetszőleges megengedett π-re. (7.14) és (7.15) összevetéséből következik, hogy

$$\max\{|\hat\lambda^{(\pi,\varkappa)}(-\varrho)|, |\hat\lambda^{(\pi,\varkappa)}(\varrho)|\} \geq \max\{\sqrt{2\varkappa(1+\varrho)-1}, \sqrt{1-2\varkappa(1-\varrho)}\}. \tag{7.16}$$

(7.16) jobb oldalán egy növekvő és egy csökkenő függvény áll, melyek $\varkappa = 1/2$-ben metszik egymást: ez tehát a minimumhely, a minimum értéke pedig $\sqrt{\varrho}$. Következésképpen (7.16) bal oldala nagyobb-egyenlő mint $\sqrt{\varrho}$, ami nem más mint (7.9).

Ezzel (i) bizonyítását befejeztük, ha az A mátrix páros-ciklikus.

Ha az A mátrix nem ciklikus, akkor az (i) pont állítása érvényét veszti. Mindenesetre ekkor (7.9) *nem* igaz: $\pi = 2$ mellett $\varkappa$-t némileg 1/2 fölé emelve $\hat\lambda(\varrho)$ $\sqrt{\varrho}$-alá csökken, másrészt $\alpha \neq \varrho$-nál $|\hat\lambda_{1,2}^{(2,\frac{1}{2})}| = |\sqrt{\alpha}| < \sqrt{\varrho}$, tehát $\hat\lambda(\varrho)$ domináns marad:

$$|\hat\lambda^{(2,\varkappa)}| < \sqrt{\varrho}, \quad \text{ha} \quad \varkappa \gtrsim 1/2. \tag{7.17}$$

(ii) triviális.

(Beérkezett: 1978. április 17-én.)

IRODALOM

1. BRÓDY, A. (1973) „Szabályozási modellekről", *Szigma 6* 93–103.
2. ENTHOVEN, A. C.–ARROW, K. J. (1956) "A theorem on expectations and the stability of equilibrium", *Econometrica 24* 288–293.
3. KORNAI, J.–SIMONOVITS, A. (1975a) „Neumann-gazdaságok szabályozási problémái", *Szigma 8* 81–99.
4. KORNAI, J.–SIMONOVITS, A. (1975b) „Rendelésjelzésen alapuló szabályozás egy Neumann-gazdaságban" *Szigma 8* 282–289.
5. KORNAI, J.–SIMONOVITS, A. (1977) "Decentralized Control Problems in Neumann-economies", *Journal of Economic Theory 14* 44–67.
6. METZLER, L. A. (1945) "Stability of multiple markets: the Hicks conditions", *Econometrica 13* 277–292.
7. MCFADDEN, D. (1969) "On the controllability of decentralized macroeconomic systems: the assignment problem", a *Mathematical Systems Theory and Economics* I. c. kötetben (szerk: H. W. Kuhn és G. Szegő) 221–234 Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York.
8. MARSCHAK, TH. (1972) "Computation in organizations; comparison of price mechanisms and other adjustment processes", a *Decision and Organization* c. kötetben (szerk: C. B. McGuire és R. Radner) XII. fejezete, North Holland P. C., Amsterdam.
9. SIMONOVITS, A. (1976) "Some properties of a decentralized adjustment process", *Management Science, 22* 883–891.
10. SIMONOVITS, A. (1978a) *Decentralizált rendszerek destabilizálása* (kézirat, Budapest, KTI).
11. SIMONOVITS, A. (1978b) *Normák, várakozások és a stabilitás egy lineáris gazdaságban* (kézirat, KTI).
12. VARGA, R. S. (1962) *Matrix Iterative Analysis* Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs, New Jersey.

MAXIMUM CONVERGENCE SPEED OF DECENTRALIZED CONTROL

In this paper I deal with the question how rapidly elementary decentralized control may lead a dynamic system towards its normative path. *Convergence speed* is measured by the reciprocal of the absolute value of the value included in the dominant solution of the deviation system. (Problems of this measurement are dealt with in Chapters 3 and 4).

Major results of the paper are the following:

— If any decision-maker disregards external effects, then in case of unit self-effect the optimum rate of reaction will be one (naive optimum!).

— In case of *productive economy and opposite external effect* convergence speed will increase if the vector of *damped* reaction speeds increases and the maximum convergence speed is the naive optimum.

— In a stock-signal economy the *unconditional* optimum will be also the naive optimum.

— In an order-signal economy in case of uniform delivery rate (2) and uniform order rate (1/2) of reaction vectors convergence speed is equal to the stock-signal maximum, although uniform vectors are not optimal in general.

МАКСИМАЛЬНАЯ СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

В данной работе рассматривается такой вопрос, что с какой скоростью ведет в сторону нормативного пути динамичную систему элементарное децентрализованное регулирование. Скорость измеряется посредством обратной величины абсолютного значения собственного значения доминантного решения системы отклонений. (Эта величина рассматривается в главах 3 и 4.)

Основными результатами данной работы являются следующие:

— Если кто-либо из принимающих решение не учитывает внешние влияния, то в случае наличия одной единицы собственного воздействия оптимальная скорость реакции также составляет одну единицу. (Наивный оптимум!)

— В случае продуктивного экономического и противоречивого внешнего воздействия скорость сходимости увеличивается если возрастает вектор скорости успокоенной реакции и наивный оптимум будет максимумом скорости сходимости.

— В экономике, сигнализирующей о наличии запасов, безусловный также является наивным оптимумом.

— В экономике, сигнализирующей о наличии заказов если векторные скорости однородных поставок (2) и однородных заказов (1/2), то скорость сходимости аналогична максимуму сигнала о запасах, хотя однородные векторы чаще всего не оптимальные.

SZIDAROVSZKY FERENC

A Nash-féle kooperatív megoldási koncepció általánosításáról

A $\Gamma = (n; S_1, \ldots, S_n; \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ szimbólumot n-személyes játéknak nevezzük, ha $S_1, \ldots, S_n$ tetszőleges halmazok, $S \subset \times_{k=1}^{n} S_k$, $D(\varphi_k) = S$ ($k = 1, 2, \ldots, n$), $R(\varphi_k) \subset R^1$. Ekkor az S_k halmazokat stratégiahalmazoknak nevezzük, az S halmazt szimultán stratégiahalmaznak, a φ_k függvényeket pedig kifizető függvényeknek. A játék (Nash-féle) egyensúlypontján olyan $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*) \in S$ stratégia n-est értünk, amelyre tetszőleges $(x_1^*, \ldots, x_k, \ldots, x_n^*) \in S$ mellett fennáll, hogy

$$\varphi_k(x_1^*, \ldots, x_k, \ldots, x_n^*) \leq \varphi_k(x_1^*, \ldots, x_k^*, \ldots, x_n^*).$$

Ez közgazdaságilag azt jelenti, hogy egyetlen játékos sem növelheti meg az egyensúlyponthoz tartozó kifizetését stratégiájának egyoldalú megváltoztatásával. Más szavakkal, az egyensúlyponthoz tartozó stratégia valamennyi játékos számára optimális, feltéve, hogy az összes többi játékos is az egyensúlypontnak megfelelő stratégiákat választja. A gyakorlati alkalmazások során a Nash-féle egyensúlypont gyakran nem a valódi helyzetet írja le, amikor nem az összes játékosnak érdeke az egyensúlypontra való törekvés. Ilyen esetek olyankor fordulnak elő, amikor egyes játékosok az egyensúlypontban irreálisan nagy kifizetéshez jutnak, mások viszont nagyon kis nyereséget kapnak, esetleg veszteség éri őket, hiszen ezeknek a játékosoknak az egyensúlystratégiák választása érdekeikkel ellentétben áll. Ilyenkor a játékosok ún. kooperatív megoldást választanak. Kooperatív játékok megoldására többféle elvileg különböző koncepció ismeretes. Ezekről jó összefoglalás található a [2], [7], [8] irodalomban. Az egyik megoldási felfogás Nash-től ered. Olyan kifizetést fogad el kooperatív megoldásnak, amely minden játékos számára „elég jó" és néhány természetesnek tűnő axiómának is eleget tesz. Nash csak bimátrix játékok esetére bizonyította a megoldás létezését és egyértelműségét.

Dolgozatomban ezt a megoldási koncepciót általánosítom n-személyes, nem feltétlenül lineáris kifizető függvényekkel rendelkező játékok esetére. A tanulmány eredményei speciális esetként természetesen tartalmazzák Nash megfelelő tételeit.

Legyen most $\Gamma = (n; S_1, \ldots, S_n; \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ valamilyen n-személyes játék. Jelölje S a játékosok szimultán stratégiahalmazát. Nem követeljük meg, hogy $S = S_1 \times \ldots \times S_n$ legyen. Jelölje továbbá a

$$\Phi = \{f \mid f = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)),\ x \in S\} \tag{1}$$

halmaz a lehetséges kifizetések halmazát, valamint L a Φ konvex burkolóját.

A továbbiakban megengedjük L tetszőleges elemét, mint kifizetést. Legyen $(\varphi_1(x^{(i)}), \ldots, \varphi_n(x^{(i)})) \in \Phi$ ($i = 1, 2, \ldots, m$ esetén), ekkor tetszőleges $0 \leq \lambda_i \leq 1$ ($1 \leq i \leq m$), $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ konstansok mellett a;

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_1(x^{(i)}), \ldots, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_n(x^{(i)}) \right) \in L$$

kifizetés például úgy jöhet létre, hogy a játék sokszori lejátszása esetén az $x^{(i)}$ stratégia n-est a játékok $100\,\lambda_i$ százalékában játszák a játékosok. Tegyük továbbá fel, hogy adott egy f^* kifizetés, az ún. *status quo* pont, amely azt jelenti, hogy amennyiben a játékosok nem tudnak megegyezésre jutni, akkor az f^* pontnak megfelelő stratégiákat játszanak. Ily módon bármely n-személyes játék az (L, f^*) párral jellemezhető. A játékosok törekvése, kooperációjuk esetén, egy f^*-nál alkalmasabb $f \in L$ kifizetés konstruálása és játszása. Nyilvánvalóan természetes feltétele a megegyezésnek, hogy f esetén egyetlen játékos se járjon rosszabbul, mint f^* esetén.

Ezek után rátérhetünk a kooperatív megoldás definíciójára.

Definíció. Egy ψ függvényt kooperatív megoldásfüggvénynek nevezünk, ha teljesülnek a következő axiómák:

1. $D(\psi) = \{(L, f^*) \mid L \subset R^n$ korlátos, zárt, konvex halmaz, $f^* \in R^n$ és létezik olyan $f \in L$, hogy $f \geq f^*\}$
$R(\psi) \subset R^n$, ahol D az értelmezési tartomány, R pedig az értékkészlet jele;

2. $\psi(L, f^*) \in L$ (lehetségesség);

3. $\psi(L, f^*) \geq f^*$ (racionalitás);

4. Ha $f \in L$, $f \geq \psi(L, f^*)$, akkor $f = \psi(L, f^*)$ (Pareto-optimalitás);

5. Legyen $L_1 \subset L$, valamint $\psi(L, f^*) \in L_1$, akkor

$$\psi(L, f^*) = \psi(L_1, f^*)$$

(kedvezőtlen alternatíváktól való függetlenség);

6. Legyenek $\alpha_k > 0$, $\beta_k (1 \leq k \leq n)$ tetszőleges konstansok, $f^* = (f_1^*, \ldots, f_n^*) \in R^n$, $L \subset R^n$ korlátos, zárt, konvex halmaz, $\psi(L, f^*) = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ továbbá $f^{*\prime} = (\alpha_1 f_1^* + \beta_1, \ldots, \alpha_n f_n^* + \beta_n)$,

$$L' = \{(\alpha_1 f_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n f_n + \beta_n) \mid (f_1, \ldots, f_n) \in L\}.$$

Ekkor $\psi(L', f^{*\prime}) = (\alpha_1 \psi_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n \psi_n + \beta_n)$ (növekvő transzformációtól való függetlenség);

7. Ha létezik olyan i, j index, hogy $f = (f_1, \ldots, f_n) \in L$ akkor és csak akkor, amikor $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in L$ ($\varphi_k = f_k$, $k \neq i$, $k \neq j$, $\varphi_i = f_j$, $\varphi_j = f_i$), valamint az $f^* = (f_1^*, \ldots, f_n^*)$ vektorra $f_i^* = f_j^*$, ekkor a $\psi(L, f^*) = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ vektorra is $\psi_i = \psi_j$ (szimmetria).

Az első axióma a ψ megoldásfüggvény értelmezési tartományát és értékkészletét adja meg, a második axióma szerint a kooperatív megoldás megengedhető megoldás kell legyen. A harmadik axióma azt állítja, hogy a kooperatív megoldás legalább annyi kifizetést biztosítson valamennyi játékos esetén, mit amennyit a „status quo" pontban kapnának. A negyedik axióma jelenti a Pareto-optimalitást, az ötödik pedig azt mondja, hogyha egy leszűkített lehetséges halmazra esik a kooperatív megoldás, akkor a leszűkített és az eredeti feladat megoldása egyezzen meg.

A hatodik axióma a kooperatív megoldás lineáris transzformációtól való függetlenségét adja meg, például más pénznemben számolva a kifizetéseket a kooperatív megoldás ne változzon meg. A hetedik, szimmetria axióma a játék azon tulajdonságát adja meg, hogy ha két játékos sem a lehetséges halmazban, se a „status quo" pontban nem különböztethető meg, akkor ugyan annyi kifizetést kapjanak a kooperatív megoldás esetén.

A dolgozat fő eredménye az alábbi tétel.

Tétel. Pontosan egy ψ megoldásfüggvény létezik.

Bizonyítás: A tétel bizonyítása több lépésből áll.

a) Legyen L, f^* az 1. axiómának megfelelő. Legyen $r \geq 0$ az a legnagyobb szám, amelyre $i_1, \ldots, i_r$ alkalmas indexek mellett létezik olyan $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in L$, hogy $\varphi \geq f^* = (f_1^*, \ldots, f_n^*)$, valamint $\varphi_{i_k} > f_{i_k}^* (1 \leq k \leq r)$. Bebizonyítjuk, hogy ekkor nem létezik olyan $\bar{\varphi} = (\bar{\varphi}_1, \ldots, \bar{\varphi}_n) \in L$, $\bar{\varphi} \geq f^*$, hogy valamilyen $i \neq i_k$ $(1 \leq k \leq r)$ mellett $\bar{\varphi}_i > f_i^*$ legyen. Ha lenne a feltételnek megfelelő $\bar{\varphi} \in L$, akkor L konvexitása miatt $\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_n) = \frac{1}{2}(\bar{\varphi} + \varphi) \in L$ és

$$\tilde{\varphi}_{i_k} = \frac{1}{2}\bar{\varphi}_{i_k} + \frac{1}{2}\varphi_{i_k} > \frac{1}{2}f_{i_k}^* + \frac{1}{2}f_{i_k}^* = f_{i_k}^*, \qquad (1 \leq k \leq r)$$

$$\tilde{\varphi}_i = \frac{1}{2}\bar{\varphi}_i + \frac{1}{2}\varphi_i > \frac{1}{2}f_i^* + \frac{1}{2}f_i^* = f_i^*,$$

amely ellentmond r választásának.

b) Legyen most $L, f^*, r, i_1, \ldots, i_r$ az előző állításnak megfelelő. Tekintsük ezután a következő nemlineáris programozási feladatot:

$$\begin{gathered} \tilde{\varphi} \in L \\ \tilde{\varphi} \geq f^* \\ \hline g(\tilde{\varphi}) = g(u_1, \ldots, u_r) = \prod_{k=1}^{r} (u_k - f_{i_k}^*) \to \max, \end{gathered} \qquad (2)$$

ahol most $\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_n)$, $\tilde{\varphi}_{i_k} = u_k (1 \leq k \leq r)$, $\tilde{\varphi}_j = f_j^* (j \neq i_k, 1 \leq k \leq r)$.

A feltételnek eleget tevő $u_1, \ldots, u_r$ vektorok halmaza korlátos, zárt, a célfüggvény folytonos, így létezik optimális megoldás. Bebizonyítjuk, hogy az optimális megoldás egyértelmű. Tegyük fel, hogy $(u_1, \ldots, u_r)$ és $(u_1', \ldots, u_r')$ is optimális megoldás. Nyilvánvaló, hogy $k = 1, 2, \ldots, r$ esetén $u_k > f_{i_k}^*$, $u_k' > f_{i_k}^*$, hiszen ellenkező esetben a célfüggvényérték zérus volna, viszont φ megfelelő komponenseit választva pozitív értékű és ez ellentmondana a megoldások optimalitásának. Legyen $k = 1, 2, \ldots, r$ esetén $a_k = u_k - f_{i_k}^*$, $b_k = u_k' - f_{i_k}^*$, ekkor az $u_k'' = \frac{1}{2}(u_k + u_k')$ $(1 \leq k \leq r)$ komponensű vektor az L konvexitása alapján megengedett megoldás és

$$g(u_1'', \ldots, u_r'') = \prod_{k=1}^{r} \frac{a_k + b_k}{2} \geq \prod_{k=1}^{r} \sqrt{a_k b_k} = \sqrt{\prod_{k=1}^{r} a_k \cdot \prod_{k=1}^{r} b_k} = g(u_1, \ldots, u_r).$$

Itt egyenlőség kell fennálljon az $(u_1, \ldots, u_r)$ optimalitása miatt, az pedig csak akkor lehet, ha $k = 1, 2, \ldots, r$ esetén $a_k = b_k$, vagyis $u_k = u'_k$.

c) Legyen ezután $u_1, \ldots, u_r$ a (2) feladat optimális megoldása, valamint $\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_n)$, $\tilde{\varphi}_{i_k} = u_k$ $(1 \leq k \leq r)$, $\tilde{\varphi}_j = f_j^*$ $(j \neq i_k,\ 1 \leq k \leq r)$. Legyen $\psi = \psi(L, f^*)$. Belátjuk, hogy a $\psi = \tilde{\varphi}$ választás megfelel a definíció axiómáinak. Az 1. nyilvánvalóan fennáll; a konstrukció alapján 2., 3. és 4. is teljesül. Az 5. fennállása abból adódik, hogyha a $\psi(L, f^*)$ optimális megoldás az L halmazon, akkor $L_1 \subset L$, $\psi(L, f^*) \in L_1$ következtében optimumot szolgáltat a szűkebb L_1 halmazon is. A 6. tulajdonság egyszerűen látható be a következőképpen. Legyenek $\alpha_k > 0$, β_k $(1 \leq k \leq n)$ alkalmas konstansok, $L, f^*, r, i_1, \ldots, i_r$ az a) állításnak megfelelő. Legyen L', $f^{*\prime}$ a 6. axiómának eleget tevő, akkor a transzformált játék esetén $r' = r$ és az $i_1, \ldots, i_r$ indexek itt is ugyanazzal a tulajdonságokkal bírnak, mint az L, f^* játék esetén. Az állítás közvetlenül leolvasható abból, hogy tetszőleges $f = (f_1, \ldots, f_n)$ esetén

$$g(f') = \alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_r} \prod_{k=1}^{r} (f_{i_k} - f_{i_k}^*) = \alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_r} g(f).$$

A 7. axióma belátására van már csak szükségünk. Tegyük fel, hogy az i, j indexek eleget tesznek a feltételeknek. Legyen $\varphi^* = (\varphi_1^* \ldots, \varphi_n^*)$ ahol $\varphi_k^* = f_k^*$ $(k \neq i,\ k \neq j)$, $\varphi_i^* = f_j^*$, $\varphi_j^* = f_i^*$. Ekkor a feltevésünk alapján $\varphi^* = f^*$. Legyen továbbá $\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_n)$ a (2) megoldása, valamint $\tilde{\psi} = (\tilde{\psi}_1, \ldots, \tilde{\psi}_n)$ $(\tilde{\psi}_k = \tilde{\varphi}_k,\ k \neq i,\ k \neq j,\ \tilde{\psi}_i = \tilde{\varphi}_j,\ \tilde{\psi}_j = \tilde{\varphi}_i)$. Ekkor $\tilde{\varphi} \in L$ akkor és csak akkor, ha $\tilde{\psi} \in L$, valamint $i \in \{i_1, \ldots, i_r\}$ akkor és csak akkor, ha $j \in \{i_1, \ldots, i_r\}$. Ha $i, j \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$, akkor $\tilde{\varphi}_i = \tilde{\psi}_i = f_i^*$, így nincs mit bizonyítanunk. Ha $i, j \in \{i_1, \ldots, i_r\}$, akkor a $\tilde{\varphi}_i = \tilde{\varphi}_j$ (vagyis $\tilde{\varphi} = \tilde{\psi}$) azonosság a φ^* és f^* egyenlőségéből és a (2) feladat optimumhelyének egyértelműségéből adódik.

d) Legyen ismét $L, r, i_1 \ldots, i_r$ f^* az a) pontnak megfelelő. Bebizonyítjuk, hogy a (2) megoldásából nyert $\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_n)$ vektor maximalizálja

$$h(\varphi) = \sum_{k=1}^{r} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{r} (\tilde{\varphi}_{i_j} - f_{i_j}^*) \right) \varphi_{i_k}$$

függvényt az L halmazon. Tegyük fel, az állítással ellentétben, hogy létezik olyan $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in L$, hogy $h(\varphi) > h(\tilde{\varphi})$. Legyen $0 < \varepsilon < 1$ esetén

$$\bar{\varphi} = \tilde{\varphi} + \varepsilon(\varphi - \tilde{\varphi}).$$

Ekkor egyszerű számolással látható, hogy

$$g(\bar{\varphi}) = \prod_{j=1}^{r} [\tilde{\varphi}_{i_j} - f_{i_j}^* + \varepsilon(\varphi_{i_j} - \tilde{\varphi}_{i_j})] = g(\tilde{\varphi}) + \varepsilon h(\varphi - \tilde{\varphi}) + (\varepsilon^2 a_2 + \ldots + \varepsilon^r a_r),$$

ahol az $a_2, \ldots, a_r$ alkalmas (ε-tól nem függő) konstansok, valamint h linearitása alapján $h(\varphi) - h(\tilde{\varphi}) = h(\varphi - \tilde{\varphi}) > 0$. Így olyan $0 < \varepsilon < 1$ esetén, amelyre $h(\varphi - \tilde{\varphi}) > - \varepsilon a_2 \ldots - \varepsilon^{r-1} a_r$, nyilvánvalóan $g(\bar{\varphi}) > g(\tilde{\varphi})$, amely ellentmond $\tilde{\varphi}$ megválasztásának.

e) Végül belátjuk, hogy a definíciónak eleget tevő függvény szükségképpen a (2) feladat megoldásával azonos. Legyen most is $L, f^*, r, i_1, \ldots, i_r$ az a) pontnak megfelelő, legyen továbbá $\tilde{\varphi}$ a (2) feladat optimális megoldása, valamint

$$H = \{\varphi \mid h(\varphi) \leq h(\tilde{\varphi}),\ \varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \geq f^*,\ \varphi_i = f_i^* \ (i \neq i_k,\ 1 \leq k \leq r)\}.$$

Ekkor nyilvánvalóan $H \supset L_1$, ahol

$$L_1 = L \cap \{\varphi \mid \varphi \geqq f^*\}.$$

Vezessük ezután be az

$$\varphi'_{i_k} = \frac{\varphi_{i_k} - f^*_{i_k}}{\tilde{\varphi}_{i_k} - f^*_{i_k}} \quad (1 \leqq k \leqq r), \quad \varphi'_j = \varphi_j \quad (j \neq i_k,\ 1 \leqq k \leqq r)$$

lineáris transzformációt. Ekkor f^* és $\tilde{\varphi}$ transzformáltja

$$f^{*\prime}_{i_k} = 0 \ (1 \leqq k \leqq r),\ f^{*\prime}_j = f^*_j \ (j \neq i_k,\ 1 \leqq k \leqq r),$$

$$\tilde{\varphi}'_{i_k} = 1 \ (1 \leqq k \leqq r),\ \tilde{\varphi}'_j = \varphi_j \ (j \neq i_k,\ 1 \leqq k \leqq r),$$

így a H halmaz képe:

$$H' = \left\{\varphi' \,\middle|\, \sum_{k=1}^{r} \varphi'_{i_k} \leqq r,\ \varphi'_{i_k} \geqq 0,\ \varphi'_i = f^*_i \quad (i \neq i_k,\ k = 1, 2, \ldots, r)\right\},$$

amely az i_k indexekben szimmetrikus. Tehát a 7. axióma alapján a $\psi' = (\psi'_1, \ldots, \psi'_n) = \psi(H', f^{*\prime})$ vektorra $\psi'_{i_k} = \psi'_{i_l}$ $(1 \leqq k,\ l \leqq r)$ és a Pareto-optimalitás miatt $\psi'_{i_k} = \psi'_{i_l} = 1$ $(1 \leqq k,\ l \leqq r)$, amelyet a 6. axióma alapján visszatranszformálva azonnal adódik, hogy $\psi(H, f^*) = \tilde{\varphi}$. Azonban a 3. axióma alapján $\psi(L, f^*) \in L_1$, így tehát az 5. axióma következtében $\psi(L, f^*) = \psi(L_1, f^*) = \tilde{\varphi}$, amit bizonyítanunk kellett. Ezzel a tételt teljes egészében beláttuk.

Shapley bimátrixjátékokra vonatkozó felfogásának esetünkben az

$$f^*_k = \max_{x_k} \ \min_{x_i (i \neq k)} \varphi_k(x_1, \ldots, x_n)$$

választás felel meg, azaz a játékosok maximin stratégiái által meghatározott ún. „biztonsági szint” legyen a status quo pont.

Status quo pontként valamely egyensúlypontot is választhatunk, azonban problémát jelent az, hogy több egyensúlypont esetén melyiket válasszuk, hiszen általában nem várható, hogy létezik egy minden játékos számára egyenletesen legjobb egyensúlypont.

A (2) programozási feladat megoldását nagymértékben megkönnyíti az a tény, hogy L elemei felírhatók, mint legfeljebb $n + 1$ Φ-beli elem konvex lineáris kombinációja. Így (2)-ben a $\tilde{\varphi} \in L$ feltétel a könnyebben kezelhető

$$\tilde{\varphi} - \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x^{(i)}) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1,$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_i \geqq 0 \\ x^{(i)} \in S \end{array}\right. \quad (1 \leqq i \leqq n + 1)$$

alakban is felírható, ahol $f(x^{(i)}) = \big(\varphi_1(x^{(i)}), \ldots, \varphi_n(x^{(i)})\big)$, és a döntési változók $x^{(i)}$, λ_i $(1 \leqq i \leqq n + 1)$.

A programozási feladat megoldása sok dimenziós feladatok esetén igen bonyolult is lehet, így egyszerűsítésére és gyakorlatban is jól alkalmazható algoritmus kidolgozására további kutatások szükségesek.

(Beérkezett: 1977. március 8-án.)

IRODALOM

1. Aumann, R. I.—Mashler, M.: Some Thoughts on the Minimax Principle. Man. Sci. Vol. 18. No-5, 1972. pp. 54—63.
2. Burger, E.: Einführung in die Theorie der Spiele, de Gruyter, Berlin, 1966.
3. Contributions to the Theory of Games. I, II, III, IV. Annales of Math. Studies Vol 24. 1950, Vol 28. 1953, Vol 39. 1957, Vol 40. 1959.
4. Karlin, S.: Mathematical Methods and Theory of Games. Programming and Economics. Vol I—II. Addison-Wesley, Reading, Mass. 1959.
5. Nash, J.: Two Person Cooperative Games. Econometrica, 21. 1953, pp. 128—140.
6. Owen, G.: Game Theory, Phil. Saunders, 1968.
7. Rapoport, A.: Two-person Game Theory. (The essential ideas). Ann Arbor. The Univ. of Michigan Press.
8. Szép, J.—Forgó, F.: Bevezetés a játékelméletbe. Budapest, 1974. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
9. Szidarovszky, F.: Bevezetés a numerikus módszerekbe. Budapest, 1974. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.

ON THE GENERALIZATION OF NASH'S COOPERATIVE SOLUTION CONCEPT

In the paper a general method is presented for the solution of cooperative games. Nash's solution concept for bimatrix games is generalized for the case of n-person games. In this we look for a Pareto-optimum satisfying an adequate axiom-system. It is shown in the paper that the axiom-system has precisely one solution and it is proved that this unique solution is equivalent to the solution of a nonlinear programming problem.

ОТНОСИТЕЛЬНО ОБОБЩЕНИЯ КОНЦЕПЦИИ КООПЕРАТИВНОГО РЕШЕНИЯ НЭША

В рассматриваемой работе дается общий метод решения кооперативных игр. Концепция Нэша по решению биматриксных игр обобщается относительно игр с числом участников «n». В данном случае ищется оптимум Парето, удовлетворяющий некоторой применимой системе аксиом. В работе указывается, что система аксиом имеет только одно решение и доказывается, что такое решение эквивалентно решению задачи нелинейного программирования.

Grósz Miklós

A hozzárendelési probléma egy általánosítása és annak megoldása

1. Bevezetés

Jelen dolgozatunkban az előregyártott elemekből megvalósított szerkezetoptimalizálási probléma matematikai modelljével és megoldásának módszerével foglalkozunk. A szerkezet-optimalizálási problémát úgy értelmezzük, hogy keressük az adott típuselem készletből előállítható, adott geometriájú szerkezet olyan tervét, melyben szereplő elemekre teljesülnek az egyensúlyi, kompatibilitási és lineáris korlátozó feltételek, továbbá valamilyen szempontból (súly, költség vagy ezek aránya) a szerkezet optimális.

Jelen dolgozatban nem foglalkozunk a szerkezet-optimalizálási probléma műszaki-gazdasági hátterével — ez egy másik dolgozat [17] tárgyát képezi — csak a probléma megoldását szolgáló algoritmus kidolgozásával.

A szerkezet-optimalizálási probléma matematikai megfogalmazásából kiindulva [17] a következő modellt kapjuk:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \min, \tag{1}$$

$$\sum_{i \in Q_i} x_i = 1 \quad (k = 1, 2, \ldots, k^*); \quad \bigcup_{k=1}^{k^*} Q_k = I; \quad I = \{1, \ldots, n\}, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (d_{ki} x_i + b_{kij} x_i x_j) \geq s_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots, k^*) \tag{3}$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ahol c_i — az i-edik elem súlya, költsége vagy ezek aránya
x_i = 1, ha az i-edik elemet alkalmaztuk és = 0 ellenkező esetben,
s_k, d_{ki}, b_{kij} — a probléma műszaki tartalmára jellemző paraméterek,
Q_k — a szerkezet k-adik helyén alkalmazható elem-típusok indexhalmaza.

Az (1)—(3) feladat abban különbözik az irodalomban ismertetettektől (klasszikus hozzárendelési probléma, általánosított hozzárendelési probléma [10], speciális szállítási feladat [4]), hogy a (3) feltétel bal oldalán egy kvadratikus függvény áll, míg a fent említett problémákban vagy lineáris egyenlőtlenség állt, vagy egyáltalán nem szerepelt feltétel.

Ross és *Soland* [10] megmutatták, hogy a klasszikus hozzárendelési probléma a (4)—(6) feladatnak egy speciális esete:

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} \to \min, \tag{4}$$

$$\sum_{j \in J} r_{ij} x_{ij} \leq a_i, \quad i \in I \tag{5}$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = 1, \quad j \in J \tag{6}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \in I, \quad j \in J.$$

Az (1)—(3) feladat esetén viszont belátható, hogy (4)—(6) ugyanakkor az (1)—(3) feladatnak egy speciális esete ($b_{kij} = 0$).

2. A feladat transzformálása egy speciális „0—1" lineáris programozási feladatra

Felhasználva azt, hogy $x_i = x_i^2$, a (3) feltételeket átírhatjuk a következőképpen [14]:

$$\sum_{i+1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{kij} x_i x_j \geq s_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, k^*),$$

ahol

$$a_{kij} = \begin{cases} b_{kij}, & \text{ha} \quad i \neq j \\ d_{ki} + b_{kii}, & \text{ha} \quad i = j. \end{cases}$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$A_k = \{a_{kij}\}$$

és

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{kij} x_i x_j = X' A_k X,$$

ahol $X = (x_1, \ldots, x_n)$ és A_k $(n \times n)$-es mátrix. A továbbiakban mindig feltételezzük, hogy A_k szimmetrikus mátrix ($a_{kij} = a_{kji}$), mivel

$$X' A_k X = \frac{1}{2} X' (A_k + A_k') X,$$

ahol $\frac{1}{2}(A_k + A_k')$ már szimmetrikus mátrix.

Most bizonyítsuk be a következő tételt:

1. tétel. Az (1)—(3) feladatot a következő feladattá lehet transzformálni:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \min, \tag{7}$$

$$\sum_{i \in Q_k} x_i = 1, \qquad (k = 1, 2, \ldots, k^*) \tag{8}$$

$$\sum_{\tau=1}^{k^*} \sum_{S=\tau+1}^{k^*} \sum_{i \in Q_\tau} \sum_{j \in Q_s} (a_{kii} x_i - 2a_{kij} z_{ij}) \geq s_k' \qquad (k = 1, 2, \ldots, k^*) \tag{9}$$

$$(P) \qquad \begin{aligned} & x_i + x_j + z_{ij} \leq 2 \\ & x_i + z_{ij} \geq 1 \\ & x_j + z_{ij} \geq 1 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} i \in Q_\tau \\ j \in Q_s \\ \tau < s \\ \tau, s \in K \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} &(10) \\ &(11) \\ &(12) \end{aligned}$$

$$x_i, z_{ij} \in \{0, 1\},$$

ahol

$$s'_k = s_k - \sum_{\tau=1}^{k^*} \sum_{s=\tau+1}^{k^*} \sum_{i \in Q_\tau} \sum_{j \in Q_s} 2a_{kij} \quad (k = 1, 2, \ldots, k^*)$$

$$K = \{1, 2, \ldots, k^*\}.$$

Bizonyítás:

Vezessük be $\frac{n(n-1)}{2}$ új „0–1" változót és $3n(n-1)$ feltételt [5]. Ezek után az (1)–(3) feladat ekvivalens a következő feladattal, figyelembe véve, hogy A szimmetrikus mátrix:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \min,$$

$$\sum_{i \in Q_k} x_i = 1, \qquad (k \in K)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1} (a_{kii} x_i + 2a_{kij} u_{ij}) \geq s_k \qquad (k \in K),$$

$$\begin{aligned} & x_i + x_j - u_{ij} \leq 1 \\ & x_i \geq u_{ij} \\ & x_j \geq u_{ij} \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} i, j = 1, 2, \ldots, n \\ i < j \end{pmatrix}$$

$$x_i, u_{ij} \in \{0, 1\} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Az u_{ij} változó akkor és csak akkor egyenlő 1-el, ha $x_i = x_j = 1$, a többi esetekben $u_{ij} = 0$. Figyelembe véve a (8) feltételt, minden $Q_k \, (k \in K)$ halmazon egyidejűleg csak egy x_i változó lehet egyenlő 1-el, tehát

$$u_{ij} \equiv 0, \quad \text{ha} \quad j, i \in Q_k \quad (k \in K).$$

Ennek következtében az u_{ij} változók és a feltételek számát jelentősen lehet csökkenteni.

A továbbiakban feltételezhetjük, hogyha $k_1 < k_2$, akkor a Q_{k_1} halmaz tetszőleges eleme kisebb a Q_{k_2} tetszőleges eleménél, ellenkező esetben az ismeretlenek egyszerű átszámozásával ez mindig elérhető.

Ha áttérünk a $z_{ij} = 1 - u_{ij}$ „0–1" változóra, akkor ezzel bebizonyítottuk., hogy (1)–(3) feladat ekvivalens a (P) feladattal.

3. A speciális „0—1" lineáris programozási feladat megoldásának módszere

Ebben a fejezetben a (P) feladat megoldására bemutatunk egy olyan leszámlálási algoritmust, mely a *Geoffrion* és *Marsten* [7] által közölt, az egészértékű feladatok megoldására alkalmas általános algoritmus (general algorithmic framework) elvein alapszik. Ez az algoritmus három fő eljárásból tevődik össze: szeparálás (separation), relaxáció (relaxation) és kizárási kritérium (fathoming criterion).

3.1. Relaxáció

A javasolt algoritmus hatékonyságát nagyméretű (P) feladat esetén növeli az, hogy a nehezen kezelhető lineáris programozási feladat többszöri megoldása helyett felhasználjuk e feladat sajátosságát és relaxáció segítségével visszavezetjük a feladatunkat egy ritka mátrixszal rendelkező halmaz-lefedési probléma megoldására, melyre több hatékony algoritmus is ismert [1, 3, 8] az irodalomból.

A továbbiakban a következő jelöléseket fogjuk használni: $y = (x, z)$, a (8)—(10) feltételek együttható mátrixát jelöljük A-val, a (11)—(12) feltételek együttható mátrixát B-vel, és a megfelelő jobb oldalakat b-vel.

Most tekintsük meg a következő halmazlefedési problémát, melynél az együttható mátrix minden sorában két egyes áll:

$$cx + \lambda(b - Ay) \to \min,$$

$$\begin{matrix} x_i + z_{ij} \geq 1 \\ x_j + z_{ij} \geq 1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} i \in Q_\tau & j \in Q_s \\ \tau < s & \tau, s \in K \end{pmatrix}$$

$$x_i, z_{ij} \in \{0, 1\} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

ahol λ — Lagrange-féle multiplikátor.

$(\bar{P})$-vel jelöljük a (P) feladatnak megfelelő lineáris programozási feladatot, melyben y_i folytonos változó és teljesül a $0 \leq y_i \leq 1$ feltétel. A megfelelő célfüggvényértékeket $c(P)$, $c(\bar{P})$ és $c(PR_\lambda)$-val fogjuk jelölni, $\bar{\lambda}$-val pedig az $Ay \geq b$ feltételnek és a $(\bar{P})$ feladatnak megfelelő optimális Lagrange-féle multiplikátort.

Az, hogy a (PR_λ) feladat megoldása mennyire közelíti meg az eredeti (P) feladat megoldását, függ a λ Lagrange-féle multiplikátor választásától. Az ilyen értelemben legjobb λ vektort a következő feladat megoldásaként választhatjuk ki:

$$(D) \qquad \max_{\lambda \geq 0} c(PR_\lambda).$$

Itt meg kell jegyezni, hogy a (8) feltételek egyenlőségek, ezért a megfelelő λ_i értékekre nincs előjelkorlátozás. *Ross* és *Soland* [10] megmutatták, hogy ha a (8) feltételnek megfelelő λ_i értékeket egyenlővé tesszük a Q_i halmazon a második legkisebb együtthatóval, akkor a (P) feladat megoldása megegyezik a következő feladat megoldásával:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i - \sum_{k=1}^{k^*} \beta_k \Big(1 - \sum_{i \in Q_k} x_i\Big) \to \min,$$

$$\sum_{\tau=1}^{k^*} \sum_{s=\tau+1} \sum_{i\in Q_\tau} \sum_{j\in Q_s} (a_{kii}x_i - 2a_{kij}z_{ij}) \geq S'_k \quad (k=1, 2, \ldots, k^*)$$

$$\begin{aligned} &x_i + x_j + z_{ij} \leq 2 \\ &x_i + z_{ij} \geq 1 \\ &x_j + z_{ij} \geq 1 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} i\in Q_\tau & j\in Q_s \\ \tau < s & \tau, s\in K \end{pmatrix}$$

$$x_i \text{ és } z_{ij} \in \{0, 1\} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

ahol β_k — a második legkisebb c_i érték a Q_k halmazon. Tehát az általánosság megszorítása nélkül feltételezhetjük, hogy a D feladatban az egyenlőségnek megfelelő λ_i értékek konstansok.

A $(\bar{P})$, (PR_λ) és (D) feladatok kapcsolatára vonatkozóan *Geoffrion* [6] bebizonyította a következő tételt:

2. tétel. Ha a $(\bar{P})$ feladatnak létezik megoldása és a tetszőleges $\lambda \geq 0$ vektorra nézve teljesül

$$c(PR_\lambda) = c(\overline{PR}_\lambda), \tag{13}$$

akkor

$$c(\bar{P}) = c(PR_{\bar{\lambda}}) = c(D). \tag{14}$$

A (PR_λ) feladat B együttható mátrixa egy teljesen unimoduláris mátrix a következő tétel [18] alapján:

3. tétel. B mátrix teljesen unimoduláris, ha teljesülnek a következő feltételek:

1. Minden egyes eleme 0 vagy ± 1.
2. Egy oszlopban sincs több, mint két nullától különböző elem.
3. A B mátrix sorait két diszjunkt halmazra (R_1 és R_2) lehet bontani:

a) Ha egy oszlopban két hasonló előjelű, nullától különböző elem van, akkor az egyik R_1, a másik pedig R_2-nek az eleme;

b) ha egy oszlopban két különböző előjelű és nullától is különböző elem van, akkor mindkettő vagy az R_1-nek vagy az R_2-nek az eleme.

Figyelembe véve azt, hogy B teljesen unimodulárism átrix és a (PR_λ) feladat feltételeinek jobb oldalán egészértékű számok vannak, a (PR_λ) feladatra tetszőleges $\lambda \geq 0$ esetén teljesül (13), tehát a 2. tétel állítása is teljesül.

Ha a $(\bar{P})$ lineáris programozási feladat a méretei miatt vagy nagyon nehezen vagy egyáltalán nem oldható meg, akkor célszerű megoldani a (D) feladatot, mivel az az *Agmon-Motzkin-Shoenberg*-féle módszer segítségével (lásd 3.3 fejezet) visszavezethető egy sorozat halmazlefedési probléma megoldására különböző λ vektorokkal. Ha viszont a $(\bar{P})$ feladat megoldható, akkor a $\bar{\lambda}$ értékét nem a (D) feladat megoldásaként kapjuk, hanem a $(\bar{P})$ feladat megoldásának megfelelően állítjuk elő. A továbbiakban csak az első esettel foglalkozunk, mivel a szerkezet-optimalizálási feladat méretei általában nem teszik lehetővé a $(\bar{P})$ feladat megoldását.

Ha a $(PR_{\bar{\lambda}})$ feladat optimális $\bar{y}$ megoldására nem teljesül az $Ay \geq b$ feltétel, akkor szeparálási változók bevezetésével a megfelelő Q_k $(k\in K)$ halmazon (P^k) részfeladatokat kapunk. A szeparálási változók segítségével a megfelelő

Q_k $(k \in K)$ halmazokat általában két diszjunkt részhalmazra bontjuk és egy speciális szeparálási feltételnek a (P) diszkrét programozási feladathoz való hozzáadásával kapjuk a (P^k) részfeladatokat.

3.2. *Szeparálás*

A szeparálási változó választásától nagymértékben függ az algoritmus hatékonysága, ezért ezeket mindig úgy szokták megválasztani, hogy minél jobban kihasználják a feladat sajátosságát.

Tegyük fel, hogy a Q_{k_1} halmazon a $(PR_{\bar{\lambda}})$ feladat optimális $\bar{y}$ megoldására nem teljesül az $Ay \geq b$ feltétel.

Valamilyen szempontból kiválasztjuk az x_s, $x_{s+1} \in Q_{k_1}$ szeparálási változókat, s akkor a (P^k) és a megfelelő (PR_λ^k) feladatokat így írhatjuk fel:

$$(P^k) \qquad \left\{\begin{matrix} c_1(P \mid x_\tau + x_{\tau+1} + \ldots + x_s = 0) \\ c_2(P \mid x_{s+1} + \ldots + x_t = 0) \end{matrix}\right\},$$

$$(PR_\lambda^k) \qquad \left\{\begin{matrix} c_1(PR_\lambda \mid x_\tau + \ldots + x_s = 0) \\ c_2(PR_\lambda \mid x_{s+1} + \ldots + x_t = 0) \end{matrix}\right\},$$

ahol

$$Q_{k_1} = \{\tau, \tau + 1, \ldots, s, s + 1, \ldots, t\}.$$

Ilyen szeparálási feltételeket először *Beale* és *Tomlin* [2] alkalmaztak olyan feladatok megoldásánál, ahol a (8) feltétel is szerepel.

Jelöljük K'-vel $(K' \subseteq K)$ a Q_k halmazok azon indexeit, melyekre nem teljesül az $A\bar{y} \geq b$ Ha a (10) feltétel nem teljesül és $x_i \in Q_{k_1}$, valamint $x_j \in Q_{k_2}$, akkor $k_1, k_2 \in K'$. A megfelelő (P^k) $(k \in K')$ feladatok képezik a részfeladatok listáját (candidate list).

Az általánosság megszorítása nélkül a továbbiakban feltételezhetjük, hogy

$$c_i < c_{i+1} \quad (\forall_i \in Q_k,\ k \in K),$$

ezek után térjünk vissza a szeparálási változók megválasztásával kapcsolatos szempontokra. Ezek a következők:

a) A $(PR_{\bar{\lambda}})$ feladat optimális $\bar{y}$ megoldására a Q_k halmazon nem teljesül a (8) feltétel, vagyis

$$\sum_{i \in Q_k} x_i^* > 1 \quad \text{vagy} \quad \sum_{i \in Q_k} x_i^* = 0.$$

Az első esetben a Q_k halmazt annyi páronként diszjunkt részhalmazra osztjuk szét, ahány 1-el egyenlő értékű ismeretlen van és azon belül a szeparálás úgy történjék, hogy minden részhalmazba csak egy ilyen ismeretlen kerüljön. A második esetben pedig, ha τ a legkisebb és t a legnagyobb index a Q_k halmazban, akkor a szeparálási változót a következőképpen választjuk:

$$s = \left[\frac{t - \tau}{2}\right].$$

b) A $(PR_{\bar{\lambda}})$ feladat optimális $\bar{y}$ megoldására a Q_k halmazon nem teljesül a (9) feltétel. Ha ugyanakkor a (8) feltétel sem teljesül, akkor a szeparálás az

a) pont szerint történik. Ellenkező esetben azt a változót, melynek értéke egyenlő 1-el, választjuk szeparálási változónak is.

c) A $(PR_{\bar{\lambda}})$ feladat optimális $\bar{y}$ megoldására a Q_{k_1} és Q_{k_2} halmazon nem teljesül a (10) feltétel. Ha ugyanakkor a (8) feltétel sem teljesül a Q_{k_1} vagy Q_{k_2} halmazon, akkor a szeparálás ezen a halmazon az a) pont szerint történik. Ha a (8) feltétel mindkét halmazon teljesül, de nem teljesül a Q_{k_1} vagy Q_{k_2} halmazon a (9) és (10) feltétel, vagy csak a (10) feltétel nem teljesül, akkor ezen a halmazon azt a változót választjuk szeparálási változónak is, melynek értéke egyenlő 1-el.

3.3 Kizárási kritérium

Az előző pontban leírtuk azt, hogy kapjuk meg a (P) feladatból kapott részfeladatok listáját. Ebben a pontban viszont leírjuk azt a kizárási kritériumot, amely szerint eldöntjük, hogy valamely részfeladatot figyelmen kívül hagyjunk-e a további vizsgálatokban vagy sem.

Ha a részfeladatok listája ismert, akkor megoldjuk a megfelelő (PR_λ^k) feladatokat. Jelöljük ezeket y^k-val. *Geoffrion* [6] megmutatta, hogy ha egy adott λ vektornak megfelelő y^k teljesíti a következő három feltételt:

1. y^k a (PR_λ^k) feladat optimális megoldása,
2. $Ay^k \geq b$,
3. $\lambda(b - Ay^k) = 0$,

akkor y^k a (P^k) feladat optimális megoldása.

Ha y^k a három feltételből csak az első két feltételt teljesíti, akkor y^k a (P) feladat ε-optimális megoldása, ahol

$$\varepsilon = \lambda(Ay^k - b).$$

Tehát a mi esetünkben, ha a (PR_λ^k) feladat optimális y^k megoldása nem teljesíti a 2. és 3. feltételt, vagyis y^k a (P^k) feladatnak nem megengedett megoldása, akkor módosítjuk a λ vektort. A 2. tétel alapján a λ vektor legjobb értékét a $(\bar{P}^k)$ vagy a (D^k) feladat optimális megoldásaként kapjuk. Nagyméretű (P) feladat esetén hatékonyabbnak látszik a (D^k) feladatok megoldása, mivel

a) a (PR_λ^k) feladat feltételeinek száma jelentősen kisebb, mint a megfelelő $(\bar{P}^k)$ lineáris programozási feladatnál;

b) a (PR_λ^k) feladat egy ritka mátrixszal rendelkező halmazlefedési probléma, melynek megoldására hatékony módszerek ismertek az irodalomból [1, 3, 8];

c) a (PR_λ^k) feladat struktúrája a (P) feladat megoldása folyamán változatlan marad (csak a szeparálási feltételek változnak), ami számítástechnikai szempontból nagyon előnyös.

Mint ahogy azt már említettük, a (D^k) feladat megoldására az *Agmon—Motzkin—Shoenberg*-féle módszert alkalmazzuk [15]. E módszer segítségével megoldunk egy sorozat (PR_λ^k) halmazlefedési feladatot, amelyben a $\lambda_k^{\nu+1}$ vektor új értékét a következő képlet alapján határozzuk meg:

$$\lambda_k^{\nu+1} = \max\{\lambda_k^\nu + \theta_k^\nu(b - Ay_k^\nu), 0\} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

ahol θ_k^ν — egy pozitív szám, mely bizonyos feltételeknek felel meg [16], λ_k^ν — a (P^k) feladat jelenlegi Lagrange-féle multiplikátora.

A λ_k^1 $(k \in K')$ kiinduló értéket egy heurisztikus eljárás segítségével kapjuk, a megfelelő (P^k) feladat y_k^1 megengedett megoldása segítségével. A szerkezet-optimalizálási feladat műszaki tartalmából kiindulva konstruálható egy olyan heurisztikus eljárás, mely vagy a (P^k) feladat optimumához közelálló megengedett megoldást szolgáltat, vagy az a következtetés vonható le, hogy a (P^k) feladatnak nincs megoldása. Az utóbbi esetben a (P^k) feladatot töröljük a részfeladatok listájáról. Itt azonban erre nem térünk ki.

Amennyiben a $(PR^k[\lambda_k^\nu])$ feladatot egy leszámlálási módszer segítségével oldjuk meg, akkor az iterációk során mindig az előző feladat y_k^ν optimális megoldását használjuk fel a következő $(PR^k[\lambda_k^{\nu+1}])$ feladat korlátjaként, mivel y_k^ν a $(PR^k[\lambda_k^{\nu+1}])$ feladatnak is egy megengedett megoldása.

Ha valamely λ_k^ν vektornak megfelelő y_k^ν vektor teljesíti a 2. feltételt, vagyis y_k^ν a (P^k) feladat megengedett megoldása és $c(P_\nu^k) < z^*$, akkor a z^* korlát értéket egyenlővé tesszük a megfelelő $c(P_\nu^k)$ értékével. Ha $c(P_\nu^k) \geq z^*$, a megfelelő (P^k) feladatot kizárjuk a részfeladatok listájáról. Ugyanúgy kizárjuk a részfeladatok listájától ezt a feladatot, ha valamely y_k^ν vektorra teljesül a három feltétel, a z^* korlát értékét viszont ugyancsak egyenlővé tesszük a $c(P_\nu^k)$ értékével. Abban az esetben, ha a (PR_λ^k) feladatnak nincs megengedett megoldása, akkor nincs a megfelelő (P^k) feladatnak sem, mivel

$$H(P^k) \subseteq H(PR_\lambda^k),$$

ahol $H(P^k)$ és $H(PR_\lambda^k)$ megfelelően a (P^k) és (PR_λ^k) feladat lehetséges megoldásainak halmaza.

Ilyenkor a Q_k halmazon más szeparálási változót választunk és újra vizsgáljuk a módosított (P^k) feladatot.

Ha a részfeladatok listáját kimerítettük, akkor az aktuális korlátnak megfelelő megengedett megoldás egyúttal a (P) feladat optimális megoldása is. Ha viszont a részfeladatok megoldása során a (P) feladatnak egyetlen megengedett megoldása sem volt, akkor a (P) feladatnak nincs megoldása.

4. Az algoritmus leírása

1. Heurisztikus eljárás segítségével előállítjuk a (P) feladatnak egy y_1 megengedett megoldását és a megfelelő λ_1 vektort. A z^* korlát értékét egyenlővé tesszük a megfelelő $c(P)$ értékével. Ha a (P) feladatnak nincs megengedett megoldása, akkor a 11. lépésnél folytatjuk.
2. Megoldjuk a (D) feladatot, vagyis kiszámítjuk a $\bar{\lambda}$ vektor értékét.
3. Megoldjuk a $(PR_{\bar{\lambda}})$ feladatot. Ha $\bar{y}$ a $(PR_{\bar{\lambda}})$ feladat optimális megoldása és egyben a (P) feladatnak is, akkor a 11. lépésnél, egyébként a 4. lépésnél folytatjuk.
4. Előállítjuk a részfeladatok listáját.
5. A részfeladatokból kiválasztjuk azt, amelyre nézve teljesül:

$$\max_{i \in K'} \{\sum_j a_{ij} y_j^k - b_i\} \quad (y_0 = \bar{y}) \quad (k \in K').$$

Ha a részfeladatok listája üres $(K' = \emptyset)$, akkor a 10. lépésnél, egyébként a 6. lépésnél folytatjuk.

6. Heurisztikus eljárás segítségével kiszámítjuk a megfelelő λ_k^1 vektor értékét. Ha a (P^k) részfeladatnak nincs megoldása, akkor $K' = K'/\{k\}$ és visszatérünk az 5. lépésre, egyébként a 7. lépésnél folytatjuk.

7. Megoldjuk a (D^k) feladatot. A (D^k) feladat optimális megoldását jelöljük $\bar{\lambda}_k$-val.

8. Ha a $c(PR_{\bar{\lambda}_k}) \geq z^*$, akkor $c(P^k) \geq z^*$, tehát ezt a részfeladatot kihagyjuk a részfeladatok listájáról:

$$K' = K' \setminus \{k\}.$$

Visszatérünk az 5. lépésre, egyébként folytatjuk a 9. lépésnél.

9. Ha a $(PR_{\bar{\lambda}_k})$ feladat $\bar{y}^k$ optimális megoldása a (P^k) feladatnak egy megengedett megoldása, akkor $z^* = : c(P^k)$. Mindkét esetben a (P^k) részfeladatot kihagyjuk a listáról ($K' = K' \setminus \{k\}$ és visszatérünk az 5. lépésre.

10. Ha a részfeladatok listája üres és a (P) feladatnak találtunk legalább egy megengedett megoldást, akkor a z^* korlátnak megfelelő megengedett megoldás egyúttal optimális is.

11. Vége.

Az egyszerűség kedvéért az algoritmus 2. és 7. lépésben nem tértünk ki arra az esetre, ha a (D) vagy a (D^k) feladat megoldása során a $(PR[\lambda^i])$ vagy megfelelően a $(PR[\lambda_k^i])$ feladat optimális megoldása ugyanakkor a (P) feladatnak is egy megengedett megoldása.

Ebben az esetben, ha $c(PP[\lambda^i]) < z^*$ vagy $c(PR[\lambda_k^i]) < z^*$, akkor a korlát értékét megváltoztatjuk:

$$z^* = : c(PR[\lambda^i]) \quad \text{vagy} \quad z^* = : c(PR[\lambda_k^i]).$$

(Beérkezett: 1977. november 1-én.)

IRODALOM

1. BALAS, E.: Set Covering with Cutting Planes from Conditional Bound. Report No. 399. Graduate School of Industrial Administration, Carnegie-Mellon University.
2. BEALE, E. M.—TOMLIN, J. A.: Special Facilities in a General Mathematical Programming System for Non-Convex Problems Using Ordered Sets. of the Fifth International Conference of Operations Research, Venice, Tavistock Publications, London, 1969.
3. CHRISTOFIDES, N.—KORMAN, S.: A Computational Survey of Methods for the Set Covering Problems. Management Science, Vol. 21. No. 5. 1975.
4. DE MAIO, A.—ROVEDA, C.: An All Zero-one Algorithm for a Certain Class of Transportation Problems. Oper. Res. 19(6) 1971. 1406—1408.
5. FORGÓ, F.: Egészszámú programozási feladatok néhány transzformációja. Szigma, VII. évf. 4. sz. 1974.
6. GEOFFRION, A. M.: Lagrangean Relaxation for Integer Programming. Mathematical Programming Study 2 (1974), 82—114.
7. GEOFFRION, A. M.—MARSTEN, R. E.: Integer Programming Algorithms: A Framework and State-of-the-art Survey. Management Science 18 (1972), 465—491.
8. GRÓSZ, M.: Egy leszámlálási algoritmus a halmazlefedési probléma megoldására. Szigma, IX. évf. 1—2. sz. 1976.
9. HAMMER, P. L.—RUDEANU, S.: Boolean Methods in Operations Research and Related Areas. Springer-Verlag, Berlin, 1968.
10. ROSS, G. T.—SOLAND, R. M.: A Branch and Bound Algorithm for the Generalized Assignment Problem. Mathematical Programming. Vol. 8. (1975) No. 1.

11. Tomlin, J. A.: Branch and Bound Methods for the Integer and Nonlinear Programming, North-Holland, Amsterdam, 1970.
12. Lawler, E. L.: The Quadratic Assignment Program: A Brief Review. In Roy B. (ed.): Combinatorial Programming: Methods and Applications. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland, 1975.
13. Hanan, M.—Kurtzberg, J. M.: A Review of the Placement and Quadratic Assignment Problems. SIAM Rev. 14 (1972).
14. Hammer, P.—Rubin, A.: Some Remarks on Quadratic Programming with 0—1 Variables. Revue Française d'Informatique et de Recherche Operationelle, 4., 1970.
15. Held, M.—Karp, R.: Travelling Salesman Problem and Minimum Spanning Trees. Mathematical Programming. 1. (1971) 6—26.
16. Held, M.—Wolfe, P.—Crowder, H.: Validation of Subgradient Optimization. Mathematical Programming, Vol. 6. (1974) No. 1.
17. Grósz, M.: Automatizált tervezés integer programozással. Műszaki Tudomány, 53. 1977. 207—216.
18. Garfinkel, R. S.—Nemhauser, G. L.: Integer Programming. New York, 1972. John Wiley and Sons.

THE GENERALIZATION OF THE ASSIGNMENT PROBLEM AND ITS SOLUTION

We deal with a generalization of the assignment problem obtained from the mathematical model of a structure optimization problem. Furthermore, a theorem will be proved whereby our problem is reduced to the solution of a "0—1" linear programming problem with variables of n^2 order of magnitude. Making use of the particularity of the problem an enumeration algorithm is presented consisting of the solution of a series of set covering problems.

ОДНО ИЗ ОБОБЩЕНИЙ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИИ И ЕЕ РЕШЕНИИ

В данной статье изучается одно из обобщений задачи о назначении, которая получается в результате записи математической модели задачи оптимизации конструкции здания. Доказывается, далее, теорема, посредством которой наша задача сводится к решению целочисленной задачи «0—1» программирования с числом переменных порядка n^2. Используя особенности данной задачи приводится такой алгоритм перебора, который основывается на многократном решении задачи о покрытии.

FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK

RIMLER JUDIT

A kapacitáskihasználás neoklasszikus modelljeinek áttekintése

E cikkben azoknak a kutatásoknak az eredményeit kíséreltem meg összefoglalni, amik a termelő tőke optimális kihasználását a neoklasszikus termeléselmélet keretein belül maradva vizsgálják.

Az ismertetést több száz oldalt kitevő, eddig csak részben publikált munkaanyag felhasználásával készítettem el. A válogatásnál előtérbe helyeztem a közgazdaságilag érdekes modelleket a matematikailag szépekkel szemben, és az ismertetésre kerülő modelleknél is inkább a korlátozó feltételekre, valamint a közgazdaságilag fontos következtetésekre helyeztem a súlyt és nem a modellek részletes bemutatására. Csak így nyílt lehetőségem arra, hogy ebben a viszonylag rövid cikkben az alapmodellen kívül elég sok érdekes továbbfejlesztésről is beszámoljak. A modellek részletei iránt érdeklődők pedig az irodalmi hivatkozások alapján kielégíthetik kíváncsiságukat.

Az áttekintést elsősorban azért írtam meg, hogy megmutassam, a tőkekihasználás kérdései ma már a közgazdasági elmélet szerves és egyre jobban kidolgozott részét képezik. Más — és ehelyütt megvitatásra nem szánt — kérdés az, hogy a neoklasszikus feltételek mellett mennyire lehet releváns közgazdasági következtetésekhez jutni, továbbá, hogy az itt ismertetendő modellek alkalmazhatók-e a mi viszonyaink között közgazdasági elemzésre. Különösebb előtanulmányok nélkül is nyilvánvaló, hogy változtatások nélkül nem használhatók fel. Vizsgálni lehetne azonban, hogy a már többé-kevésbé polgárjogot nyert termelési függvény alkalmazásokat a kihasználást figyelembe véve hogyan lehetne finomítani, sőt talán még azt a gondolatot sem kellene elvetni, hogy a tervezésben felhasznált növekedési makromodelleket a jövőben úgy formálják, hogy alkalmasabbak legyenek a kihasználás tervezésére, s ezáltal a kihasználás szintjének befolyásolására is.

A neoklasszikus tőkekihasználási elmélet általános jellemzése

Az időnek, mint a kihasználás mérőjének bevezetésével új szakasz kezdődött a forráskihasználás problémáit vizsgáló közgazdasági kutatásokban. Mindaddig, míg a kihasználtságot a potenciális és a tényleges output hányadosaként[1] határozták meg, az eredmények nagyjából a várakozásoknak feleltek

[1] Az Egyesült Államokban 5 ilyenfajta kapacitásbecslés készül viszonylag rendszeresen. Ezek a következők: kikérdezéses alapon (kb. a vállalatok 40%-át érinti) készül a *McGraw-Hill index*, ami a tényleges és a vállalatok által preferált tevékenységi szintnek

meg. Normális években a kihasználatlanság 5—10%-os, a rossz években 15% volt és csak kivételes esetekben fordult elő (legalábbis az USA-ban) a 20% körüli vagy azt meghaladó kihasználatlanság [10], [14]. A meglepetés akkor érte a kutatókat, amikor — az 1960-as évek elején — M. *Foss* [7] nyilvánosságra hozta az Egyesült Államokra vonatkozó hosszútávú kapacitáskihasználási becsléseit, amit a gépi állóeszközök villamos energia felhasználása alapján készített. E szerint az USA-ban 1929 és 1954 között még a viszonylag jó években sem haladta meg az ipari termelő állóeszközök időbeli kihasználása a 25%-ot, azaz a rendelkezésre álló idő több mint 75%-ában a termelő tőke *nem* működött. A vizsgálat másik érdekes eredménye: a kihasználás időben nőtt, ami azt mutatja, hogy alacsonyabb fejlettségi szintre alacsonyabb, magasabbra magasabb kihasználás volt jellemző. *Foss* eredményeit későbbi kutatások megerősítették. Más országokra és más időszakokra is hasonló időbeli kihasználási jellemzőket kaptak azok a kutatók, akik hasonló megfontolások alapján és hasonló módszerekkel dolgoztak.[2]

A produktív tőke időbeli kihasználása az empirikus eredmények szerint tehát igen alacsony. Mi lehet ennek a jelenségnek az oka? Ezt a kérdést tették fel maguknak azok a közgazdászok, akik a következőkben ismertetésre kerülő tőkekihasználási elméletet kifejlesztették. Az elmélet alapkövét az angol *Robin Marris* [11] tette le 1964-ben. Erre az alapkőre építette fel Gordon C. *Winston* amerikai professzor [15]—[20] tőkekihasználási elméletét,[6] amelyet több jelentős vonatkozásban fejlesztett tovább Roger R. *Betancourt* és Christopher K. *Clague* [3]—[6].

Előre tervezett kihasználatlanságok

Marris legfontosabb észrevétele az, hogy a magas kihasználatlanság elsősorban nem vállalati vagy nemzetgazdasági szintű tervezési hiba, ami az eljövendő események, szituációk rossz megítéléséből ered, nem is véletlen, előre nem látható események következménye. A kihasználatlanság javarészt annak tulajdonítható, hogy a vállalatok (vagy központi szervek) beruházási döntésük meghozatalakor *szándékosan előre tervezik* a kihasználatlan kapacitásokat. Feltételezve, hogy a napi (évi) termelés keresleti oldalról korlátozott, a beruházó két lehetőség között választhat: vagy kisebb üzemet létesít és azt több műszakban üzemelteti, így a lekötött tőkét jobban kihasználja; vagy nagyobb

megfelelő kapacitás hányadosa. A National Industrial Conference Board *(NICB)* és a *Fortune* magazin által készített becslések a tőke-output arány változásából következtetnek a kihasználatlanság változására, feltételezve, hogy a ciklus csúcsokon a tőke-output arány minimális, azaz a kihasználás 100%-os. A *Wharton indexnél* szintén feltételezik, hogy a ciklus csúcsokon 100%-os a kihasználás, de itt a kihasználtságot nem a tőke-output aránnyal, hanem a termelés változásával fejezik ki. A Federal Reserve Board *(FRB)* becslése a McGraw-Hill és a NICB kombinációja. Részletesen lásd [14].

[2] *Winston* szerint Pakisztánban az ipari tőke időbeli kihasználása átlagosan 12%-os [15], *Kim* és *Kwon* becslése Dél-Koreára 20% [9], *Bautistáé* a Fülöp-szigetekre 19% [2]. Ezek a becslések *Foss*éhoz hasonlóan villamos energia felhasználási bázison készültek. Később kimutatták [12], hogy ez a mutatószám különböző okok miatt erősen lefelé torzít és megkísérelték az időbeli kihasználást más módszerekkel mérni. Ekkor valóban magasabb értékekhez jutottak, de az eredmények még így is messze alatta maradtak az output alapján meghatározott kihasználási szinteknek. *Morawetz* például Izraelre 40% körüli [13], *Winston* Pakisztánra [15] 30—35%-os eredményt kapott. (Az összes idézett számok az 1960-as évek végére, illetve az 1970-es évek elejére vonatkoznak.)

üzemet létesít és azt kevésbé használja ki. Profit maximálási törekvéseik miatt a vállalkozók azt a megoldást választják, amelyik olcsóbb. Gazdasági megfontolásoktól vezérelve tehát előre döntenek a tőkekihasználás mértékéről. A technológiával összefüggő bizonyos költségek miatt és azért, mert az emberek általában nem szeretik a többműszakos, illetve a folyamatos (hétvégeken is folyó) munkát és ezt a diszpreferenciát többletbérrel kell honorálni, egyes esetekben olcsóbb lehet több tőkét lekötő nagyobb üzemet építeni, mint vállalni az éjszakai, ill. hétvégi munkáért járó többletköltségeket.

Marris a különböző technológiákkal összefüggő költségek elemzésén alapuló fejtegetéseire részletesen nem térek ki, mert a követők munkáiban kiforrottabban jelennek meg legfontosabb megállapításai. Hangsúlyozni szeretném azonban, hogy úgyszólván a kihasználást ex ante alakító minden jelentős tényezőt Marris már felfedezett. Kimutatta, hogy a kihasználás szintje egyaránt függ a bér rátától, az éjszakai és a hétvégi munkáért járó többletbér nagyságától, a tőke intenzitásától, a hasznosítás és a mechanizáció elaszticitásától[3] és a volumen hozadékától.

A kihasználatlanság különböző okai

A kapacitás kihasználását a potenciális és tényleges output hányadosaként értelmező mérések (lásd az 1. lábjegyzetet) a kihasználatlanságot jobbára a Keynes-féle keresletihiányra vezették vissza. Vagyis azt vizsgálták, hogy valamely, már meglevő üzem kapacitását miért nem használják ki a kívánt szinten. Marris, amint az előzőekből kitűnik, nem a kívánt szinttől való eltérést, hanem magát a kívánt szintet kialakító tényezőket vizsgálja, azokat a hatásokat amik előre szabályozzák a majdani üzem kihasználását. Winston 1974-ben megjelent tanulmányában[4] mindkét fenti közelítést elfogadja: a kihasználatlanságot az ex ante tervezett vagy elvárt, valamint az ex post nem tervezett vagy véletlen hatások eredőjeként határozza meg. A kihasználásra ható tényezők — egy további, a keresleti és kínálati jelleget is kifejező kategorizálást bevezetve — az 1. táblázatból láthatók.

1. táblázat

A kihasználásra ható tényezők

	KERESLETI	KÍNÁLATI
ELŐRE NEM VÁRT	Elégtelen kereslet	Input hiány
ELŐRE VÁRT	A kereslet struktúrája	Ritmikusan változó input árak

Az előre nem várt kihasználatlanság azt jelenti, hogy a vállalatok nem tudják elérni a kívánatosnak tartott termelési-eladási szintet, éspedig vagy kereslethiány miatt, amit végső soron arra vezetnek vissza, hogy a vállalatok nem érik

[3] A hasznosítás elaszticitása Marris definíciója szerint a kihasználás szintjének százalékos változását mutatja az átlagos órabér egy százalékos változására. A mechanizáció elaszticitása pedig a munka termelékenységének százalékos változása a tőke–munka arány egy százalékos változására.

[4] A tanulmány amellett, hogy a kihasználással foglalkozó irodalom jó áttekintését adja; kritikai és az elméletet továbbfejlesztő részeket is tartalmaz. Lásd [17].

el walrasi egyensúlyukat a tőke piac tökéletlenségei miatt; vagy azért, mert előzetes várakozásukkal ellentétben nem tudják biztosítani a termeléshez szükséges inputokat a kívánt mennyiségben és minőségben. Az előre nem várt hatásokra kialakult kihasználatlanság csak akkor tervezési hiba, ha a döntés pillanatában már felmérhető lett volna a keresletnek vagy az inputnak a hiánya, egyébként ki nem küszöbölhető véletlen.

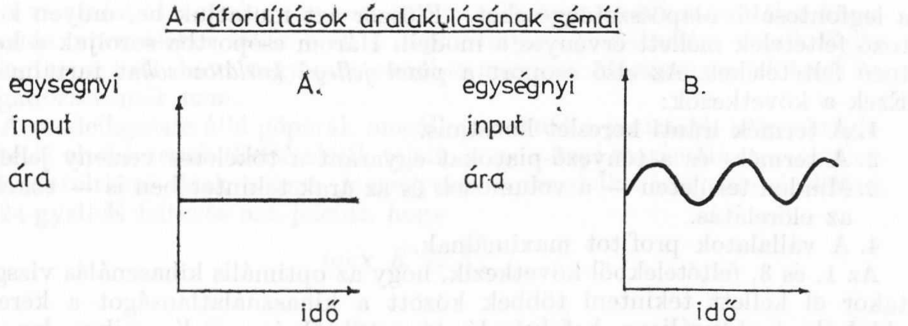
A vállalat létesítése idején, különböző keresleti és kínálati jellemzőkkel számolva előre megtervezik, hogy milyen lesz a tőke kihasználásnak szintje. A keresleti strukturális jellemzők, Winston szerint, részben a keresletnek a hosszútávú, dinamikus növekedésével, részben a véletlen és ritmikus változásával kapcsolatosak. Strukturális okokból érdemes tehát többletkapacitást beépíteni akkor, ha hosszú távon erőteljes keresletnövekedés várható, mert a mai többletköltség és az egy ideig tartó kapacitás kihasználatlanság még mindig olcsóbb, mint a későbbi, utólagos bővítés. Más típusú kihasználatlanság az, amit a vállalat rugalmassága érdekében véletlen, előre nem látható kereslet változásokra számítva építenek be. Többletkapacitás létesítését indokolja továbbá még az is, ha a nem tárolható termék vagy szolgáltatás iránti igény ritmikus. Ez a harmadik, a keresleti struktúrára jellemző olyan tényező, amit a kihasználás tervezésekor előre figyelembe vesznek.

Végül Marris nyomdokain járva Winston a ritmikusan növekvő input áraknak a kihasználatlanság alakításában játszott szerepét vizsgálja. Míg Marris a ritmikusan változó ráfordítási árak közül egyedül a bérekkel foglalkozik, Winston kiterjeszti a vizsgálandó inputok körét. Nemcsak a munka, de más inputok, például a villamos energia, bizonyos mezőgazdasági termékek és a szállítás ára is szabályos ritmus szerint változhat. Ez azt jelenti, hogy a napnak, a hétnek, vagy az évnek bizonyos előre meghatározható szakaszaiban ugyanazért a ráfordításért többet, más szakaszokban kevesebbet kell fizetni. A költségeiket minimalizálni kívánó vállalatok, az input ritmikus árváltozásait kapacitásuk tervezésénél figyelembe veszik.

Az új tőkekihasználási elmélet kifejlesztői úgy vélik, hogy a kihasználatlanságra ható tényezők közül elsősorban az utolsónak tárgyaltat kell elemezni, tehát azt, ami a ritmikus input árak változásának hatását fejezi ki. Fontos a ritmikus inputok változásából adódó kihasználási jellemzők vizsgálata először is azért, mert e témával eddig senki sem foglalkozott részletesen, míg a többivel igen; másodszor azért, mert a kihasználatlanság nagy részéért a ritmikus árváltozások a felelősek megítélésünk szerint; s végül, de nem utolsósorban azért, mert a ritmikus árváltozások, mint gazdasági változók gazdasági eszközökkel szabályozhatók, s így segítségükkel a tőke kihasználása a kívánt irányba befolyásolható.

A ráfordítások árának ritmikus változása

A termeléshez szükséges ráfordítások sok lényeges tulajdonságukat tekintve különböznek egymástól. E különbségek közül kettő meghatározó jelentőségű a kihasználási színvonal tervezésekor. Az első azon alapul, hogy milyen formában jutnak hozzá a termelők a ráfordításhoz. Az egyik forma, amikor magát az állományt, a stock-ot veszik meg, másik amikor csak a szolgáltatást, a flow-t. A második megkülönböztetés: az ár időbeli alakulásának formája. Itt nem a hosszú- vagy rövidtávú piaci áralakulásról van szó, hanem arról, hogy bizonyos ráfordítások ára adott időegységen belül ritmikusan változik, míg má-



1. ábra

soké nem. A kétféle áralakulás sémája az 1. ábrán látható. Megjegyzendő, hogy a B. sémán bemutatott lefutás az elképzelhető ritmusoknak csak egyik, tetszőlegesen választott formája.

A kérdés az, hogy a fenti két jellemző együttesen hogyan hat a kihasználás alakulására. Az állományként megvásárolt — tulajdonba vett — ráfordítások, ára az A séma szerinti az időben konstansnak vehető, hiszen a ráfordításokat egy adott időpontban egyszer s mindenkorra megvásárolták az éppen akkor érvényes áron. Ha egy adott időintervallumon belül a technikai jellemzőket figyelembe véve a tulajdonba vett ráfordítás hasznosítása hosszabb vagy rövidebb ideig tarthat, a tulajdonos dönt arról, hogy a ráfordítást milyen hosszú ideig veszi igénybe. Feltételezve, hogy az állomány élettartama független az igénybevételtől, a rövidebb ideig tartó hasznosítás az egységnyi működési időre jutó költséget emeli, míg a hosszabb csökkenti. *Költségminimalizálás esetén a tulajdonba vett ráfordításoknál a kihasználás növelése lesz a kívánatos.*

Más a helyzet akkor, ha csak a szolgáltatást vásárolják meg, bérelik csupán a ráfordítást, és az ár alakulására a B. séma jellemző. Feltételezve, hogy a bérelt ráfordításoknak a technológiai jellemzők által meghatározott használata, adott időegységen belül, egyaránt lehet hosszabb vagy rövidebb, a termelő dönt arról, hogy mikor és milyen hosszú ideig tart igényt a ráfordításra. Költségeit minimalizálandó igyekszik elkerülni a magas árfekvésű periódusokat és csak akkor veszi igénybe a ráfordítást, amikor az viszonylag olcsó. *A bérelt ráfordítás költségeinek minimalizálása érdekében tehát a vállalat a maximális időbeli kihasználásnál kevesebbet tervez.*

A két különböző költségtényező minimalizálása: a tulajdonba vett ráfordításoké és béreltekė, tehát ellentétes irányú hatást gyakorol a kihasználatlanságra. Az első szempontjából a kihasználás növelése, a másikéból a csökkentése a célszerű. Számos tényezőtől függ, hogy e két hatás milyen ponton jut egyensúlyba, vagyis hogy mekkora lesz a költségek szempontjából optimális kihasználási szint.

Az alapmodell

Az 1970-es évek elején Winston tesz kísérletet arra [18], hogy formális modellbe foglalja az optimális kihasználási szintre ható tényezőket. Első modelljét a továbbiakban alapmodellnek nevezzük, mert már tartalmazza a legfontosabb alapösszefüggéseket. Először azt mutatjuk be, milyen korlátozó feltételek mellett érvényes a modell. Három csoportba soroljuk a korlátozó feltételeket. Az első csoport a *piaci jellegű korlátozásokat* tartalmazza. Ezek a következők:

1. A termék iránti kereslet konstans.
2. A termék- és a tényező-piacokat egyaránt a tökéletes verseny jellemzi.
3. Minden területen — a volumenek és az árak tekintetében is — tökéletes az előrelátás.
4. A vállalatok profitot maximálnak.

Az 1. és 3. feltételekből következik, hogy az optimális kihasználás vizsgálatakor el kellett tekinteni többek között a kihasználatlanságot a keresleti oldalról strukturálisan befolyásoló tényezőktől is: a dinamikus keresletnövekedésnek, a bizonytalanságnak és a ritmikus kereslet-változásoknak a hatásától.

A feltételezések másik csoportja *termelési-technikai jellegű korlátokat* fejez ki. Ezek közül a fontosabbak:

5. Egy homogén output van és két homogén ráfordítás. Az egyik a tőke, a másik a munka.
6. Különböző technológiák állnak rendelkezésre, amik az igényelt tőke és munka arányában különböznek egymástól, azaz a tőke és a munka ex ante helyettesíthető egymással.
7. Meglevő üzemekben a tőke és a munka szolgáltatási aránya nem változtatható, azaz a tőke és a munka ex post nem helyettesíthető egymással. Ez azt jelenti, hogy a már beépített tőke üzemeltetéséhez mindig azonos nagyságú személyzet kell.
8. A tőkének az időegységre jutó birtoklási költsége független az igénybevétel mértékétől.
9. A volumen hozadéka nem növekvő, azaz a nagyobbra méretezett üzemben nem olcsóbb termelni, mint a kisebben.

A modell maga igen egyszerű: egy termelési- és egy költségösszefüggésből áll. A termelési összefüggés egy neo-klasszikus termelési függvény, aminek megkülönböztető jellegzetessége: minden változója folyamati (flow) típusú. Ezt a függvényt *tiszta folyamati* (pure flow) vagy *pillanatnyi* (instantaneous) *termelési függvénynek* nevezik. A tiszta jelző arra utal, hogy a ráfordítások az outputtal megegyező dimenzióban vannak értelmezve, a pillanatnyi jelző pedig a folyamati jelleget van hivatva kiemelni. Az elméletben és gyakorlatban alkalmazott termelési függvényeknél, ahol a folyamként értelmezett kibocsátáshoz rendszeresen tőke állományt rendelnek, sőt sok esetben a munkaráfordítást is inkább állományként, mint folyamként értelmezik, a változók idődimenziója nem azonos, hiszen az állományi adatok mindig időpontra vonatkoznak, míg a folyamatok időszakokra. A termelési és a növekedési elméletek megalkotói számára ez a heterogenitás azért nem volt különösképpen zavaró, mert feltételezték, hogy a kihasználás nem változik, s így az állományi adat jól kifejezi az állományból nyerhető folyamokat. A kihasználásnál azonban nem lehetett feltételezni, hogy a kihasználás konstans, hiszen a vizsgálat tárgya éppen maga a kihasználás változása. Ezért volt elkerülhetetlen a tiszta termelési függvény bevezetése.

A feladat leegyszerűsítése érdekében Winston további feltételeket vezet be. A most következő megkötésekre, mint *egyszerűsítő feltevésekre* hivatkozunk, megkülönböztetve őket a piaci és a termelési-technikai korlátozásoktól.

10. A vizsgálat időegysége egy nap, egy nap 24 órája. A kihasználatlan kapacitás tervezésekor tehát csak a napi ritmikus bérváltozást veszik figyelembe, a heti, havi vagy még ennél is nagyobb időegységre jellemző ingadozást már nem.

11. A rendelkezésre álló gépórák megállapításánál a javítások időszükségletétől eltekintenek. Feltételezik tehát, hogy a napi maximálisan szolgálatban tölthető órák száma megegyezik a rendelkezésre álló órákéval, 24-gyel. E feltevés azt jelenti, hogy

$$\max K = \bar{K}, \tag{1}$$

ahol

$\bar{K}$ = a tőke állomány gépórában,

K = a tőke szolgáltatás gépórában,

és

$$u = \frac{K}{\bar{K}}, \tag{2}$$

ahol

u = a tőke kihasználása.

12. Egy nap két műszakból állhat. Mindkét műszak 12 órás. Az első műszak a nappali, a második az éjszakai. A második műszakért többletbért kell fizetni. Érvényesek tehát a következő, a bérköltséget kifejező függvények:

$$w(u) = w, \text{ ha } 0 < u \leq 1/2 \tag{3}$$

$$w(u) = (1 + A)w, \text{ ha } 1/2 < u \leq 1 \tag{4}$$

ahol

w = a bérráta;

A = a második műszakért járó többletbér.

13. Egy egység tőkeállomány birtoklásának napi költsége egy standardizált gép beszerzési árától, a kamattól és az értékcsökkenéstől függ.

$$r = P_c(i + d), \tag{5}$$

ahol

r = egy egység napi tőkeállomány birtoklásának napi költsége;

P_c = egy gép beszerzési ára;

i = a kamatráta,

d = az értékcsökkenési ráta.

A $\bar{K}$ nagyságú tőkeállomány napi birtoklási költsége tehát $r\bar{K}$: A tőkeállomány egy órai üzemeltetésének költsége pedig:

$$r^{\text{üzemóra}} = \frac{\bar{K}r}{K} = \frac{r}{u}. \tag{6}$$

A kérdés, amire Winston modelljével választ kíván kapni, a fenti feltételek egyidejű fennállása esetén a következő: milyen tényezők befolyásolják az optimális tőkekihasználást, vagy leegyszerűsítve a kérdést, mikor lesz célszerű kisebb beruházással, de kétműszakos üzemeléssel, illetve nagyobb beruházással, de egy műszakos üzemeléssel számolni. A válasz attól függ, hogy a napi S mennyiségű output előállításának költsége mikor kisebb. A költségösszefüggés bevezetésére van tehát szükség.

Egyműszakos termelés esetén Q mennyiség előállítási költsége:

$$(7) \qquad (r/u_1)\, K_{d1} + w\, L_{d1},$$

és a két műszaknál

$$(8) \qquad (r/u_2)(K_{d2} + K_{n2}) + w[L_{d2} + (1 + A) L_{n2}]$$

A 7. és 8. összefüggésekben az alsó indexben a *számok* az üzemeltetés módjára, a *betűk* a napszakra utalnak. Értelemszerűen az 1 alsó index az egy, a 2 alsó index a két műszakos üzemelést, míg a d betű a nappali, az n betű az éjszakai műszakot jelenti.

Mivel Winston vizsgálatát, amit a 12. feltételben már említettük, arra az esetre korlátozza, amikor $u_1 = 1/2$ és $u_2 = 1$, figyelembe véve továbbá, hogy a 6. és 7. feltételek miatt $K_{d2} = K_{n2} = K_2$ és $L_{d2} = L_{n2} = L_2$, a gazdaságos két műszakos üzemelés feltételét, vagyis azt, hogy a 8. összefüggésben foglalt költségeknek nem szabad elérni a 7. összefüggés költségeit a következőképpen írhatjuk fel:

$$(9) \qquad 2r[K_1 - K_2] > w[2(1 + A/2)L_2 - L_1].$$

A 9. összefüggés tehát egyszerűen azt mondja ki, hogy akkor érdemes többműszakos üzemeltetést tervezni, ha a bal oldalon megjelenő tőkeköltség megtakarítás nagyobb, mint a jobb oldali tétel, ami a munkaköltség többletét fejezi ki.

A CES termelési függvény bevezetésével lehetőség nyílik arra, hogy a 9. egyenlőtlenséget más formában írjuk fel, méghozzá úgy, hogy az összefüggésbe belépő paraméterek és a kihasználási szint között közvetlen és jól értelmezhető kapcsolat legyen. A függvény:

$$(10) \qquad Q_i = \gamma\,[\delta\, K_i^{-\varrho} + (1 - \delta)\, L^{-\varrho}]^{-1/\varrho}, \quad i = 1, 2,$$

ahol

$\gamma =$ hatékonysági paraméter;

$\delta =$ megoszlási paraméter;

$1/(1 + \varrho) = \sigma$ a helyettesítési paraméter.

A feltevés szerint a 10. függvény mindkét műszakra ($i = 1, 2$), azonos. Felhasználva a CES termelési függvényt és azt a tételt, hogy bármelyik műszakban akkor lesz a profit maximális, ha a relatív tényezőárak megegyeznek a differenciális termékarányokkal, a 9. költség-egyenlőtlenség a megfelelő átalakítások és behelyettesítések után a következő alakot veszi fel:

$$(11) \qquad (1 + A/2)^{\sigma-1}\left[1 - (2^{\sigma-1} - 1)\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{\sigma}\left(\frac{w}{2r}\right)^{\sigma-1}\right]$$

$$> 1 \text{ ha } 0 \leq \sigma < 1$$

$$< 1 \text{ ha } 1 < \sigma < \infty$$

A 11. összefüggés fejezi tehát ki, hogyan hat a ritmikusan változó input költségtöbblete (A), a ráfordítások egymáshoz viszonyított ára ($w/2r$) és a helyettesítési elaszticitás (σ) az optimális tőke-kihasználási színvonalnak a kialakítására a beruházások tervezésekor.

„A" hatása az optimális szintre egyértelmű: minél nagyobb „A" annál jobban csökken a magas tőkekihasználású variáns profitábilitása. Ha A nulla, bármilyen tényezőár-arány és elaszticitás esetén a két műszakos üzemelés lesz a gazdaságosabb.

Bonyolultabb az összefüggés a tényezők áraránya és az optimális kihasználási szint között, mert ennek hatása nem függetleníthető a tényezők közötti helyettesítési elaszticitás nagyságától. Ha a helyettesítési elaszticitás kisebb mint egy, ami azt jelenti, hogy az árarány változását nem követi elég rugalmasan a volumenarányok változása, más szóval: a helyettesítés nehézkes, akkor az árarányok változásának hatása a várakozásoknak megfelelő: a munkához képest olcsóbbá váló tőke alacsonyabb tőkekihasználással jár. Ha azonban a helyettesítési elaszticitás nagyobb, mint egy, vagyis viszonylag könnyű a tényezőket egymással helyettesíteni, az olcsó tőke magasabb kihasználással párosul. Ennek az az oka, hogy a tényező-arányok, a jó helyettesíthetőség esetén, jobban függnek az árarányoktól. A viszonylag drága munka arra ösztönzi a vállalatokat, hogy tőkeintenzívebb technológiákat válasszanak, mert így csökkenthetik a drága munka részesedését az összes költségben. A tényezők volumenarányának eltolódása elérhet egy olyan szintet, amikor már érdemesebb lesz a költségek között nagy súllyal szereplő, habár relatívan olcsó tőkével takarékoskodni, mint a relatívan drága, de kisebb súlyú munkával: azaz kifizetődik többműszakos üzemeltetést tervezni.

Az alapmodell továbbfejlesztése

Az alapmodellt számosan — többek között maga Winston is későbbi munkáiban — továbbfejlesztették, finomították.[5] Az alapmodellre jellemző korlátozó feltevések közül megítélésem szerint *Betancourt* és *Clague* (ezentúl B—C) modelljei oldották fel a legfontosabbakat, ezért a következőkben ezekkel foglalkozom. A B—C modellek a következő lényeges jellemzőkben térnek el az alapmodelltől: másképp kezelik a tőkeintenzitást, feloldják a konstans volumenhozadék feltevését: a 9. feltételt; az output korlátozást; az 1. és 2. feltételt. Megvizsgálják továbbá hogyan változnak a többműszakos munka gazdaságossági feltételei, ha feloldják a leírási és fenntartási költségekre tett 8. feltételt; ha megengedik a tényezők közötti ex post helyettesíthetőséget, vagyis ha módosítják a 6. feltételt; és továbbá, ha a vállalatok nem profitot maximálnak, hanem az egy munkásra jutó bérjellegű jövedelmet az ún. munkások által irányított vállalatokban, vagyis ha elvetik a 4. feltételt.

[5] Lásd pl. [1]—[6], [19], [20].

A tőkeintenzitás és a volumen-hozadék eltérő kezelésének hatása az optimális kihasználásra

Az alapmodellben a tőkeintenzitást két paraméterrel lehet elemezni: a w/r arararánnyal és a CES függvény δ megoszlási paraméterével. A fenti közelítésnek számos hátránya van. Először is: δ nem számítható közvetlenül az adatokból csak becsülhető; másodszor: w/r és δ meghatározását nagymértékben befolyásolják a tőke mérésének nehézségei; harmadszor: a két tényezőnek, a helyettesítési elaszticitásnak és a tőkeintenzitásnak az optimális kihasználási szintre való hatása az árak és a volumenek kölcsönös összefüggése miatt nem különíthető el egymástól. E hátrányokat kiküszöbölendő vezetik be a most következő modellbe Betancourt és Claque [4], [5] a Θ-val jelölt tőkeintenzitást, ami a tőkeköltségnek az összköltségben való részesedését mutatja egyműszakos üzemelés esetén:

$$\Theta = r\bar{K}_1/(r\bar{K}_1 + w_d L_1). \tag{12}$$

A bérrátát itt az alapmodelltől eltérően jelölik. Megkülönböztetik a nappali (w_d) és az éjszakai (w_n) béreket; a bérdifferenciát százalékos formában fejezik ki:

$$\alpha = \frac{w_n}{w_d} - 1, \tag{13}$$

ahol α = a bértöbblet százalékos formában.

A többműszakos munka gazdaságosságának feltételét, a 9. költség-összefüggést, a fenti jelöléseket bevezetve és átrendezve a következő formában írják fel:

$$1 > \left[\frac{rK_2}{w_d L_{d2}} + (2+\alpha)\right]\frac{L_{d2}}{L_1}(1-\Theta). \tag{14}$$

Az összefüggés jobb oldala az ún. *költségarány*, röviden CR. Minél alacsonyabb a költségarány, annál drágább az egyműszakos üzemelés a kétműszakoshoz képest s ezért annál nagyobb a többműszakos üzemelésből adódó nyereség.

Az alapmodellnél ismertetett transzformációkat elvégezve és bevezetve egy olyan CES függvényt, ami általánosabb az alapmodellben alkalmazottnál, mert megenged egytől eltérő (β) volumen hozadékot is, a 14. költségösszefüggés a következő alakot veszi fel:

$$1 > 2^{-1/\beta}(2+\alpha)\,[\Theta(2+\alpha)^{\sigma-1} + (1-\Theta)]^{1/1-\sigma}. \tag{15}$$

A különböző paramétereknek a költségarányra gyakorolt hatását a paraméterenkénti parciális deriváltak mutatják. Az α és β szerinti parciális deriváltak pozitívak, míg a Θ szerinti negatív. A σ deriváljának előjele nem állapítható meg egyértelműen, de a szerzők által végzett numerikus kísérletek arra engednek következtetni, hogy az előjel itt is negatív.

Mivel a pozitív derivált azt jelenti, hogy a költségarány a paraméter változásával azonos irányban változik, illetve a negatív esetében ellenkezőleg, és mert a költségarány növekedése azt mutatja, hogy a többműszakos munka egyre kevésbé gazdaságos, az eredmények a várakozásoknak felelnek meg.

Minél magasabb α, annál kevésbé érdemes többműszakos üzemeltetést tervezni az éjszakai munka költséges volta miatt. Az egynél nagyobb volumenhozadék, $\beta > 1$ szintén nem kedvez a több műszakos munkának akkor, ha a napi output mennyisége korlátozott, mert a nagyobb méretekből származó előnyöktől elesnek a kisebb üzem építése esetén. Minél magasabb Θ, a tőkeköltség aránya az összköltségben egyműszakos üzemelés esetén, annál inkább érdemes a tőkével takarékoskodni, több műszakban üzemeltetni az üzemet. Végül a helyettesítési elaszticitás növekedése is a többműszakos üzemeltetés gazdaságosságát növeli, méghozzá közvetetten, a tőkeintenzívebb technológia megválasztása révén. Könnyű helyettesítési viszonyok között ugyanis a kétműszakos üzemeltetésnél tőkeintenzívebb technológiát lehet választani, mint egy műszaknál, és így egyszerre lehet takarékoskodni a drága éjszakai munkával és a viszonylag olcsó tőkével.

Az output korlát feloldásának hatása az optimális kihasználásra

Az eddig bemutatott modellekben feltételezték, hogy az output mennyisége és az eladási ára egyaránt külső adottság a vállalat számára. A kérdés, amit ezután feltettek, hogyan változik az optimális kihasználást befolyásoló költségarány, ha a fenti feltételt a következővel helyettesítik: a vállalat monopolhelyzetben van, bizonyos mértékig befolyásolni tudja az output mennyiségét is és az árakat is [4], [5].

A monopolhelyzetben levő vállalatnál a kétműszakos üzemelés akkor lesz gazdaságos az egyműszakoshoz képest, ha $\pi_2 > \pi_1$, ahol π_2 a kétműszakos, míg π_1 az egyműszakos üzemelés melletti profit, vagyis ha fennáll a következő ún. *értékfeltétel:*

$$(16) \qquad TR(Q_2) - TC_2(Q_2) > TR(Q_1) - TC_1(Q_1)$$

ahol Q_1 és Q_2 = az output optimális szintje az egy-, illetve kétműszakos üzemeltetés esetén;

TC_1 és TC_2 = az összes költség az egy-, illetve kétműszakos üzemelés esetén;

TR = az összes jövedelem.

Az alkalmazott termelési függvénytől, a keresleti függvénytől és a volumenhozadék változási jellemzőitől függ, hogy a 16. értékösszefüggés mi módon hozható olyan alakra, amelyben az optimális kihasználási szintet befolyásoló tényezők explicit szerepelnek. A volumen hozadékát, β-t és a keresleti elaszticitást e-t konstansnak tételezve, a költségarány a következő lesz:

$$(17) \qquad CR = \frac{2^{1/\beta}}{(2+\alpha)}[\Theta(2+\alpha)^{\sigma-1} + (1-\Theta)]^{1/(\sigma-1)}.$$

Az egy- és kétműszakos üzemelés profitarányai pedig:

$$(18) \qquad \pi_2/\pi_1 = CR^{\beta(e-1)/(e+\beta-e\beta)}.$$

Jóval bonyolultabbá válik ez az összefüggés abban az esetben, amikor β-t nem konstansként, hanem Q függvényeként írják fel. A volumenhozadékot kifejező β paramétert ekkor a Φ költségelaszticitással helyettesítik. Φ mutatja az átlagköltségek százalékos növekedését abban az esetben, amikor az egyműszakos üzemelésnél az output a felére csökken. A két paraméter közti összefüggés a következő:

(19) $$\Phi(Q) = 2^{1-1/\beta}-1.$$

Egy másik új paraméter λ, a Φ-nak az output-elaszticitása:

(20) $$\lambda(Q) = \Phi'(Q)\,[Q/\Phi(Q)].$$

A modellt a szerzők explicit formában nem írják fel. A költségarány, a profitarány és a paramérerek közötti összefüggésekre numerikus módszereket felhasználva következtetnek. Különböző értékeket vesznek fel $\Phi(Q_1)$-re, $\lambda(Q_1)$-re és e-re, és a költség és keresleti függvényt felhasználva határozzák meg a 16. értékösszefüggést.

Az elemzésből adódó főbb eredmények a következők: 1. Az output korlát feloldása nem módosítja azt a megállapítást, hogy a tőkeintenzitás és a helyettesítési elaszticitás növekedése a többműszakos munkának kedvez, míg a bérdifferencia emelkedése az egyműszakosnak. 2. A volumenhozadék és az optimális kihasználási szint között csak akkor áll az az összefüggés, hogy a nagyobb volumenhozadék az egyműszakos üzemelést helyezi előtérbe, míg a kisebb a kétműszakosat, ha a költségarány egy bizonyos szintet meghaladóan nagy. 3. Az optimális kihasználást meghatározó érték-összefüggésbe még további három paraméter lép be. A konstansnak feltételezett keresleti elaszticitás, ami a keresleti függvény jellemzője, pozitív hatással van a többműszakos munkára — minél nagyobb a kereslet rugalmassága annál inkább érdemes többműszakos munkát tervezni. A másik két paraméter a már definiált költség elaszticitás Φ és λ. Adott keresleti elaszticitás mellett minél nagyobb $\lambda(Q)$ — ami egyszerűen azt jelenti, hogy az outputtól függő költségek lassabban nőnek, mint maga az output — annál érdemesebb több műszakot tervezni. Végül, adott keresleti elaszticitás és $\lambda(Q)$ mellett, minél nagyobb a költségelaszticitás, vagyis minél nagyobb mértékű az output csökkenéssel járó költségemelkedés, annál indokoltabb a több műszak, azaz a magasabb tőkekihasználás bevezetése.

Az értékcsökkenés és a működési költségek hatása az optimális kihasználási szintre

Az eddig ismertetett modelleknél feltételezték, hogy r, az egységnyi tőke birtoklásának és működtetésének költsége, független a műszakok számától. Ezáltal feltételezték, hogy a leértékelődés egyáltalán nincs kapcsolatban az elhasználódással, hanem csak elavulásának tulajdonítható, továbbá eltekintettek a gépeknek a működés hosszától függő üzemelési költségeitől: a javítási és karbantartási költségektől és az üzemanyag fogyasztástól. A következőkben e feltevések feloldásának az optimális kihasználási szintre való hatását mutatjuk be, Clague [5] munkája alapján.

A szerző feltételezi, hogy a tőke egy órai üzemelési költsége az összes üzemben töltött gépórák függvénye. Ezért az egy- és kétműszakos üzemelés gazdaságosságának vizsgálatakor kétféle tőkeköltséget kell bevezetni: r_1-t, ami az egyműszakos, és r_2-t, ami a kétműszakos üzemelés tőkeköltségét fejezi ki.

A kétműszakos üzemelés akkor lesz gazdaságos, ha

$$(21) \qquad r_1 \bar{K}_1 + w_1 L_1 > r_2 \bar{K}_2 + w_1 L_{d2}(2+\alpha).$$

Az alapmodellnél ismertetett transzformációkat elvégezve és „A tőkeintenzitás és a volumenhozadék" c. alfejezetben bemutatott módon bevezetve β-t és α-t, a költségarányra a következő összefüggés adódik:

$$(22) \qquad 1 > 2^{-1/\beta}(2+\alpha)\,[\Theta(2+\alpha)^{\sigma-1}(r_2/r_1)^{1-\sigma} + (1-\Theta)]^{1/(1-\sigma)}.$$

Összehasonlítva a (22) összefüggést a (15)-össel, amiben azonos tőkeköltségek szerepelnek az egy- és kétműszakos rendszerekre, látható, hogy az összes már bemutatott paraméter az eddigivel megegyező módon viselkedik. Újdonság a tőkeköltség aránynak — r_2/r_1-nek — az egyenletbe való belépése, aminek a hatása egyértelmű: minél nagyobb az az arány, vagyis minél nagyobb a kétműszakos üzemelés többlet-tőkeköltsége, annál kevésbé lesz érdemes a profitmaximáló vállalatnak többműszakos üzemeltetést tervezni.

A tényezők közötti ex post helyettesíthetőség bevezetésének hatása az optimális kihasználási szintre

Az alapmodell továbbfejlesztésének egyik következő lépcsője [6], annak a feltételnek a feloldása volt, hogy a két tényező, a tőke és a munka, a tőke beépítése után már nem helyettesíthető egymással. Az új feltevés szerint az ex post helyettesítési elaszticitás nagyobb lehet mint nulla, de kisebb mint az ex ante elaszticitás. E feltétel azt fejezi ki, hogy a már beépített tőke üzemeltethető kisebb vagy nagyobb létszámmal bizonyos határok között. A félreértések elkerülése végett hangsúlyozni kell, hogy e feltétel nem a tőke részleges üzemeltetését jelenti, hanem azt, hogy a teljes tőkeállományt kisebb vagy nagyobb személyzettel is lehet működtetni.

Az új feltétel figyelembevételéhez a termelési függvényt kellett módosítani. Az eddig alkalmazott CES függvényt, amiről feltételezték, hogy ún. putty-clay típusú, amit azt jelenti, hogy ex ante megengedi a tényezők helyettesítését, de ex post nem, fel kellett váltani egy az ex post helyettesítést részlegesen megengedő putty-rubber függvénnyel. A putty-rubber termelési függvényeknél σ_2 ex post elaszticitás nagyobb nullánál, de kisebb mint az ex ante helyettesíthetőséget mutató σ_1. Az ex post termelési összefüggések leírására a változó helyettesítési elaszticitást megengedő VES függvényt használták:

$$(23) \qquad Q = \gamma\,[\delta \bar{K}^{-\varrho} + (1-\delta)\,\bar{K}/L^{-\varrho m} L^{-\varrho}]^{-1/\varrho},$$

ahol m = a bérek és a munka differenciális terméke közötti összefüggést fejezi ki. Ha $m = 0$, akkor a VES függvényből CES lesz. Ha m negatív a függvénnyel kifejezhető a munka és a tőke közötti korlátozott helyettesíthetőség.

A VES függvényt alkalmazva — mivel analitikus kezelésre nem volt mód — numerikus eszközökkel elemezték a korlátozott ex post helyettesíthetőség hatását a műszakszám megállapítására. Az eredmények szerint, az elvárásoknak megfelelően, az ex post helyettesíthetőség bevezetése a többműszakos üzemelésnek kedvez. Minél nagyobb σ_2, annál érdemesebb lesz többműszakos munkát tervezni.

A célfüggvény megváltoztatásának hatása az optimális kihasználási szintre

Az eddig bemutatott modellek mindegyikében azt tételezték fel, hogy a vállalatok profitot maximálnak. Betancourt és Claque [3] megvizsgálták hogyan változik az optimális kihasználás és a kihasználást alakító tényezők között a viszony, ha a profitmaximáló vállalat helyett a fejenkénti bérjellegű jövedelmet maximáló ún. munkás vezetésű vállalatról van szó. (E vállalati formát a cikk szerzői a jugoszláv vállalatokra tartják jellemzőnek.)

Az elemzésnél abból indulnak ki, hogy az éjszakai munkáért járó többletbért, α-t úgy állapítják meg, hogy legyen elegendő önként vállalkozó az éjszakai munkára, feltételezik tehát, hogy a „határ" munkásnak mindegy, hogy Y jövedelmet kap a nappali, vagy $Y(1+\alpha)$ jövedelmet az éjszakai munkáért. A nappali műszakban dolgozók egy főre jutó jövedelme alapján döntenek a vállalatok a tőke-kihasználás mértékéről.

A modell megfogalmazásakor feltételezik többek között azt is, hogy a tőke a munkával csak ex ante helyettesíthető, ex post nem; hogy a tőkeköltség a műszakszámtól független; és hogy a CES függvény jól leírja a termelési összefüggéseket. Egyaránt tárgyalják a tökéletes verseny feltételei között és a monopolhelyzetben működő vállalatokat.

A tökéletes verseny körülményei között az egyműszakos üzemelés egy főre jutó jövedelme, Y_1

$$Y_1 = \frac{PQ_1 - rK_1}{L_1}. \tag{24}$$

A kétműszakosé, Y_2 pedig

$$Y_2 = \frac{PQ_2 - rK_2}{L_2}, \tag{25}$$

ahol $P =$ az output ára.

Mivel a feltételek szerint ex post nem lehet a tényezőket egymással helyettesíteni, a kétműszakos üzemelésnél a létszám a két műszak között egyenlően oszlik meg, és mivel α az éjszakai bértöbblet, Y_2 a következőképpen is felírható:

$$Y_2 = \frac{Y_{d2} + Y_{n2}}{2} = \frac{Y_{d2}(2+\alpha)}{2}. \tag{26}$$

A 24—26-os összefüggésekből a nappali műszak jövedelemarányaira a következő adódik:

$$\frac{Y_{d2}}{Y_1} = \frac{2}{2+\alpha} \cdot \frac{Y_2}{Y_1}. \tag{27}$$

A CES függvényt bevezetve és feltételezve, hogy az egyműszakos üzemelés esetében a jövedelem maximálásnak az a feltétele, hogy a tőke határtermékének értéke egyenlő legyen a tőke árával, és hogy az egy főre eső jövedelem a munka határtermékének értékével egyezzen meg, a jövedelemarányokra a következő összefüggés adódik:

$$\frac{Y_{d2}}{Y_1} = \frac{2}{2+\alpha}\left[\frac{1-2^{\sigma-1}\psi}{1-\psi}\right]^{1/(1-\sigma)}, \tag{28}$$

ahol

$$\psi = r\bar{K}_1/PQ_1,$$

vagyis ψ az egyműszakos üzemelés tőkeintenzitásának egy másik mérőszáma. A 28. összefüggés parciális deriváltjaiból leolvasható, hogy a munkás vezette vállalatoknál akkor lesz gazdaságos a többműszakos üzemelés, ha az éjszakai bértöbblet alacsony, a tőkeintenzitás és a helyettesítési elaszticitás pedig magas.

Monopolhelyezet esetén a jövedelemarány a következő:

$$(29) \qquad \frac{Y_{d2}}{Y_1} = \frac{2}{2+\alpha} H \left[\frac{1-(2H)^{\sigma-1}\psi}{1-\psi} \right]^{1/1-\sigma}.$$

A 27-es összefüggésbe belép egy új tényező H. H a feltevések szerint a volumenhozadék és a keresleti tényező hatását együttesen fejezi ki. A jövedelemarány és H között az összefüggés pozitív, ami azt mutatja, hogy egyébként változatlan feltételek mellett a keresleti elaszticitás növekedése, illetve a volumenhozadék csökkenése a többműszakos üzemeltetés gazdaságosságát növeli.

A tőkés- és a munkásvezetésű vállalatok összehasonlító elemzése

A neoklasszikus tőkekihasználási modellek ismertetésének befejezéseként bemutatjuk milyen hasonlóságokat és eltéréseket talált Betancourt és Clague [3] a tőkés- és a munkásvezetésű vállalatok optimális műszakszámot kialakító viselkedésében.

A tökéletes verseny körülményei között működő tőkés- és munkásvezetésű vállalatokról feltételezték, hogy azonos a termelési függvényük, továbbá a tőkéjük ára és az éjszakai munkáért járó bértöbblet. A tőkés vállalatok bérrátája, W_1 ugyanakkor eltérhet a munkásvezetésű vállalat bérjövedelmétől, Y_1-től. Ha $W_1 = Y_1$, az egyműszakos üzemelésnél a tőkés vállalatnál nincs profit és ekkor $\Theta = \psi$. (Lásd a 12. és 28. összefüggéseket.) Ha $W_1 < Y_1$, akkor $\Theta \neq \psi$.

A tőkekihasználást befolyásoló legfontosabb paramétereket tekintve a tőkés- és munkásvezetésű vállalatok viselkedése a tökéletes verseny feltételei mellett megegyezik: a többműszakos üzemelést mindkét esetben akkor választják, ha a helyettesítési elaszticitás és a tőkeintenzitás magas, és ha az éjszakai bérdifferencia alacsony.

A legjelentősebb különbség α eltérő szerepéből adódik. A tőkés vállalatoknál a bérdifferencia növekedése csökkenti a profitot és így a tőke-munka arány megváltoztatása irányába hat. Mivel a tőke-munka arány megválasztása a helyettesítési viszonyoktól is függ és végeredményében befolyásolja a tőkeintenzitást is, a tőkés vállalatoknál α-nak a kihasználás szintjét meghatározó költség-arányokra való hatása nem független a többi paramétertől: a helyettesítési elaszticitástól, a megoszlási paramétertől és a tőkeintenzitástól.

A munkásvezetésű vállalatoknál ezzel szemben α-nak a célfüggvényben szereplő jövedelem arányokra való hatása a többi paramétertől, a tőkeintenzitástól és a helyettesítési elaszticitástól függetlenül érvényesül. A bérdifferencia változása csupán megváltoztatja a nappali és éjszakai munkások közötti jövedelem-megoszlást, de nem ösztönöz a tőke-munka arány és a tőkeintenzitás megváltoztatására abban az esetben, ha α változása nem olyan nagy, hogy az egyműszakos üzemelést tenné gazdaságosabbá a kétműszakossal szemben.

Egy másik érdekes különbség arra az esetre jellemző, amikor a tőkés vállalat az első műszakban profitot termel, azaz amikor $W_1 < Y_1$, s ezért a két különböző tőkeintenzitási mérőszám ψ és Θ nem egyenlő. Megmutatható, hogy ebben az esetben, vagyis ha a munkásvezetésű vállalatnál az egy főre jutó bérjövedelem nagyobb, mint a tőkésnél, akkor a tőkés vállalat fogja a tőkeintenzívebb technológiát választani.

A különböző célfüggvényű vállalatok monopolhelyzetben is hasonlóképpen reagálnak a kihasználást alakító tényezők változására. A többműszakos üzemelést akkor választják, ha alacsony a bérdifferencia, magas a tőkeintenzitás és a helyettesítési elaszticitás, továbbá, ha a monopolhelyzetre jellemző két paraméter a kívánt nagyságú, a keresleti elaszticitás magas és a volumen hozadéka alacsony.

Végül egy figyelemreméltó különbség, ami az elemzésekből adódik: a munkásvezetésű vállalatok érzékenyebben reagálnak a piaci helyzet változását kifejező keresleti elaszticitás változására, mint tőkés társaik. Már viszonylag kis keresleti elaszticitás növekedés is a magasabb tőkekihasználásra, a többműszakos üzemeltetésre ösztönöz akkor, ha nem a profit, hanem az egy főre jutó jövedelem maximálása a cél.

(Beérkezett: 1977. augusztus 25.)

IRODALOMJEGYZÉK

1. Baily, M. A.: *The effect of differenctial shift costs on capital utilization.* Mimeo. Yale University. March, 1976.
2. Bautista, R.: *Industrial capital utilization in the Philippines.* Mimeo. Washington, D. C.: IBRD, 1975.
3. Betancourt, R. R.—Clague, C. K.: *The determinants of capital utilization in labor-managed enterprises.* Mimeo. June, 1975. University of Maryland.
4. Betancourt, R. R.—Clague, C. K.: *An economic analysis of capital utilization.* Southern Economic Journal. July, 1975, pp. 69—78.
5. Clague, C. K.: *The theory of capital utilization; Some extensions.* Mimeo. Boston University and University of Maryland. April, 1975.
6. Clague, C. K.: *The theory of capital utilization and the putty-rubber production function.* Mimeo. Boston University and University of Maryland. May, 1975.
7. Foss, M. F.: *The utilization of capital equipment: Postwar compared prewar.* Survey of Current Business. June, 1963, pp. 8—16.
8. Kim, Y. C.: *Sectoral output ratios and levels of economic development: a cross-sectional comparison of manufacturing industry.* Review of Economics and Statistics. November, 1969, pp. 453—458.
9. Kim, Y. C.—Kwon, J. K.: *The utilization of capital and the growth of output in a developing economy: case of South Korean manufacturing 1962—1971.* Mimeo. Northern Illionois University. May, 1975.
10. Klein, L. R.—Preston, R. S.: *Some new results in the measurement of capacity utilization.* American Economic Review. March, 1976, pp. 34—58.
11. Marris, R.: *The economics of capital utilization: A report on multiple shift work.* Cambridge: Cambridge University Press, 1964.
12. Morawetz, D.: *The electricity measure of capital utilization.* Mimeo. Maurice Falk Institute in Israel. June, 1975.
13. Morawetz, D.: *Capital utilization in Israeli Industry.* Mimeo. Maurice Falk Institute in Israel. June, 1975.

14. PHILLIPS, A.: *An Appraisal of measures' of capacity.* American Economic Review. Papers and Proceedings. May, 1963, pp. 275–299.
15. WINSTON, G. C.: *Capital utilization in economic development.* Economic Journal. March, 1971, pp. 36–60.
16. WINSTON, G. C.: *The reasons for idle capital.* Mimeo. Williams Colledge, May, 1971.
17. WINSTON, G. C.: *The theory of capital utilization and idleness.* Journal of Economic Literature, 1974, pp. 1301–1320.
18. WINSTON, G. C.: *Capital utilization and optimal shift work.* Bangladesh Economic Review. April, 1974, pp. 515–558.
19. WINSTON, G. C.: *Factor substitution, ex ante and ex post.* Journal of Development Economics. 1974, pp. 145–163.
20. WINSTON, G. C.–MCCOY, T. O.: *Investment and the optimal idleness of capital.* Review of Economic Studies. July, 1974, pp. 419–428.

NEO-CLASSICAL MODELS OF CAPITAL UTILIZATION: A SURVEY

This survey deals with the presentation of mathematical models examining the optimum utilization of fixed capital.

A common fundamental assumption of these models is that the reason for the great idleness of capital is neither some planning mistake at enterprise or national economic level, nor the consequence of incidence or unforeseeable events. Idleness can be mostly attributed to the circumstance that when making investment decisions the enterprises or central organs plan *ex ante* this idleness deliberately, for economic efficiency reasons.

Supposed that production is limited from the demand side, there are two alternatives to be chosen, namely, either to establish smaller plants and run them in more shifts or to set up bigger plants working in less shifts. In the first case utilization of the fixed capital will be high, while in the second one — low. Assuming other factors to be unchanged contractors decide for the variant being cheaper and promising more profits. These models are aimed at answering precisely the question which variant is cheaper, or formulated in another way, when and upon the effect of which factors a great idleness of capital will be decided for.

There is a double kind of deviations in the models presented in this survey: models use different constraints and examine the effects of various factors. The simplest model, the so called basic model examines idleness as the function of surplus wage for nightwork, the relative prices of the two main inputs, capital and labour, and the elasticity of substitution between them. In later models also the effects of capital intensity, returns to scale and elasticity of demand are additionally examined.

According to the results obtained capital utilization is inversely proportional to wage-surplus paid for night-work and directly to the additional capital costs concomitant with the growing number of shifts. Differential capital costs are determined by the capital intensity of production, the possibility of easy replacement of labour by capital and vice-versa expressed by the elasticity of substitution, the scale effect and the elasticity of demand for the given product.

ОБЗОР НЕОКЛАССИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МОЩНОСТЕЙ

В данном обзоре рассматриваются математические модели изучения оптимального использования производственного капитала.

В основу этих моделей положено то, что причина значительного недоиспользования капутала кроется не в ошибках планирования на уровне предпринятий или же в масштабах национального хозяйства и не является даже следствием случайных и не предвиденных событий. Недоиспользование в большей части связано с тем, что предприятия или центральные органы при принятии решений, касающихся капитальных вложений уже заведомо, в силу определенных экономических соображений считаются с недоиспользованием.

Если предположить, что выбирать можно из двух альтернатив производства, ограниченных со стороны спроса, то развертывается меньшее по размерам предприятие, которое работает в несколько смен или же строится большее предприятие, эксплуатируемое на протяжении меньшего числа смен. В первом случае степень использования основного капитала будет высокой, а во втором случае низкой. Если предположить неизменность прочих факторов, то предприниматели принимают решение в пользу более дешевого варианта, обещающего большую прибыль. Вопрос, на который намечается дать ответ посредством

этих моделей заключается именно в том, что какой вариант является более дешевым или по иному: когда и под влиянием каких факторов принимается решение в пользу значительного недоиспользования капитала.

Различие между моделями, приводимыми в данном обзоре является двойственным: различные модели функционируют при наличии различных ограничений и, отчасти, с их помощью изучается влияние иных факторов. Самая простая, т. н. базовая модель изучает недоиспользование в зависимости от дополнительной заработной платы за работу в ночное время, двух основных видов затрат, т. е. соотношения труда и капитала и эластичность их взаимозаменяемости. В последующих моделях, помимо вышеизложенного, рассматривается также и воздействие интенсивности капитала, объема прибыли и эластичности спроса.

В соответствии с получаемыми результатами степень использования капитала обратно пропорциональна дополнительной заработной плате за работу в ночное время и прямо пропорциональна повышению затрат на капитал, связанных с увеличением числа смен. Дополнительные затраты по капиталу определяются капиталоемкостью производства, легкостью взаимозаменяемости труда и капитала, что находит свое выражение в гибкости такой замены, формированием объема прибыли и эластичностью спроса на данное изделие.

KÖNYVEKRŐL

BÁCSKAI T.—HUSZTI E.—MESZÉNA GY. — MIKÓ GY.—SZÉP J.: *A gazdasági kockázat és mérésének módszerei.* Budapest, 1976. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. 208 p.

A *Korszerű matematikai ismeretek gazdasági szakemberek számára* sorozat e legújabb kötete nem a matematika valamelyik ágát, illetve annak gazdasági alkalmazási lehetőségeit kívánja bemutatni a gazdasági szakemberek számára. Itt fordított a kiindulás: adva van egy nagyon valós, nagyon aktuális probléma, a gazdasági döntésekkel járó bizonytalanság és kockázat, és a szerzők azokat a matematikai módszereket kívánják az olvasóval megismertetni, amelyek adott esetben alkalmasaknak bizonyulhatnak a felvetett problémák kezelésére, megoldására.

A könyvnek a sorozat eddigi köteteitől eltérő jellegét a felépítése is jelzi. A kötet közel egyharmadát kitevő első négy fejezet ugyanis matematikától teljesen mentesen tárgyalja a kockázat fogalmát a gazdasági életben, a gazdasági döntések kapcsolatát a kockázattal. A matematikai érdeklődésű, beállítottságú olvasó számára talán e fejezetek kevésbé tűnnek érdekeseknek. Ugyanakkor vajmi keveset használnak önmagukban a legjobb matematikai módszerek is, ha a gazdasági vezetőkben nem tudatosul, hogy a gazdálkodás és a vele kapcsolatos döntések akarva-akaratlan kockázattal járnak, és az ebben rejlő lehetőségeket nem kihasználni a fejlődést gátló magatartás. Különösen érdekesnek és hasznosnak tartom a könyv ezen első részéből azokat a pontokat, amelyek vállalati szakemberek véleményeit foglalják össze a kockázatvállalásról, vagy a kockázat és a gazdasági szabályozók kapcsolatáról.

A kötet második részében az 5. fejezet a kockázat mérésének módszereivel foglalkozik, bevezetve többek között olyan fogalmakat, mint a kockázati együttható, a kockázati skála és kockázati index. Végül a terjedelemben a könyv felét kitevő 6. fejezet egyrészt a kockázat számításánál alkalmazható különböző matematikai elméleteket, modelleket tárgyalja röviden (döntésfüggvény, programozási modellek, játékelmélet, hasznossági függvények, statisztikai döntéselmélet), másrészt néhány konkrét példán mutatja be az elmélet alkalmazását, a kockázat számításának menetét.

A könyvet két rövid függelék, bőséges — több mint 420 munkát felsoroló — irodalomjegyzék, gondos név- és tárgymutató, valamint rövid orosz, angol és német nyelvű ismertető zárja.

A könyv megjelentetése feltétlenül időszerű és indokolt volt. Hasznos szerepet tölthet be elsősorban azáltal, hogy felhívja a figyelmet arra, hogy a gazdasági döntések — ne feledjük, sok esetben a döntés elodázása is egyfajta döntést jelent — a szocialista gazdálkodás körülményei között is bizonyos mérvű bizonytalansággal s így kockázattal járnak, s ezek természetének felismerésében és hasznosításában jelentős segítséget nyújthatnak a könyvben ismertetett különböző matematikai módszerek. A könyv végigolvasása után mégis az a benyomása támad az olvasónak, hogy a kiadó talán túlságosan is sürgethette a szerzőket, egyes részek ugyanis elnagyoltaknak, kissé felszíneseknek tűnnek, nem segítik igazán elő a kötet alapvető céljának elérését. Ilyennek tartom pl. a 6. fejezet 5. és 6. — a játékelmélettel, illetve a hasznossági függvényekkel foglalkozó — pontját. Véleményem szerint, aki nem otthonos a játékelméletben — s a gazdasági vezetők többségénél bizonyára ez a helyzet —, az feltehetően elég nehezen érthetőnek és a gyakorlati problémák megoldására kevéssé hasznosíthatónak találja a 6.5. pontot.

De talán az is a megjelenés siettetésének számlájára írható, hogy a könyvben elég szép számmal találhatók matematikai pontatlanságok, zavaró sajtóhibák, stiláris fogyatékosságok (pl. befejezetlen mondatok), jelölésbeli következetlenségek. Így pl. a 107. oldalon levő levezetés hibás, a 108. oldalon is rossz x_1x_2 együtthatója, vagy a 183. oldalon $E(x) = m$ és $E[x|x \leq z] = m_z$

esetén $E[x|x > z] = m - m_z$ csak abban a speciális esetben igaz, ha z épp a medián, egyébként ugyanis m a z-nél kisebb, illetve nagyobb x-ek várható értékének súlyozott átlaga $F(z)$, ill. $1 - F(z)$ súlyokkal. Ezek a pontatlanságok azonban általában nem érintik alapvetően a könyv mondanivalóját.

Lényegesebbnek tartom, hogy az egyébként igen érdekes és inspiráló példák közül egyiknél-másiknál nem elég átgondolt a javasolt módszerek alkalmazása. Így pl. véleményem szerint félrevezető a 66–68. oldalakon szereplő példa megoldása. Egy adott fejlesztés D mutatójának eloszlására nem lehet más jellegű beruházások D mutatóinak eloszlásából következtetni. Az adott probléma sokkal inkább szimulációs technikával oldható meg a D mutatóra ható tényezők eloszlásának ismeretében, vagy az ezekre vonatkozó feltevések alapján.

A 6.8.4. pontban szereplő példában nem reális az a feltételezés, hogy egy adott évben a területi kárhányadok függetlenek egymástól, és az sem megalapozott, hogy az egyes megyékre vonatkozó eloszlások azonosak; különösen nem áll ez a mezőgazdaságra. Matematikai módszerek gyakorlati alkalmazását bemutató példáknál mindig nagyon fontos, hogy a példa adatai, feltevései ne tűnjenek irreálisaknak.

A fenti néhány kritikai észrevétel ellenére a kötet megjelenését igen hasznosnak tartom. Jó lenne, ha a gazdasági döntéshozók közül közvetlenül vagy közvetve minél többen megismerkednének a könyvben bevezetett fogalmakkal, az ismertetett módszerekkel és mind gyakrabban előznék meg a gazdasági döntéseket kockázati számítások.

ÉLTETŐ ÖDÖN

LEONTIEF, W.: *Terv és gazdaság* (Válogatott tanulmányok) Budapest, 1977. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. 240 p.

A tanulmánykötet a Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó dícséretes vállalkozásának a Nobel-díjas Közgazdászok tudományos munkásságát bemutató sorozatnak egy újabb terméke. Különös izgalommal és várakozással veszi kézbe e könyvet a magyar közgazdász olvasó, hiszen W. Leontief tudományos munkássága révén az egyik legismertebb nyugati közgazdász hazánkban. Ez a tény, valamint az előzőleg megjelentetett két Nobel-díjas közgazdász rendkívül színvonalas könyve is kötelezte a válogatást végző fordítót és a kiadót.

Ez a kötet is – hasonlóan az előzőkhöz – a szerző tudományos munkásságának keresztmetszetét adja. Az egyes tanulmányokban elméleti és gyakorlati közgazdasági problémákról egyaránt olvashatunk.

Az első rész az input-output elemzés elméletét tárgyalja a szerzőre jellemző egyszerű és világos gondolatmenetben. A statikus input-output elemzés legalapvetőbb fogalmairól (input-output táblázatok, ráfordítási együtthatók, az export és az import kezelése, árképzés a statikus rendszerben) olvashatunk az első pontban. Bevezeti a dinamikus input-output rendszerek elméletét, mind az időben folytonos változójú n számú differenciálegyenletből álló rendszert, mind a diszkrét időszakaszok elemzéseként adódó differenciaegyenletrendszert. Érdekes megfigyelni, hogy miként vélekedik a dinamikus folyamatok leírásának fogyatékosságáról: „. . . nem képes olyan helyzetek kezelésére, amelyekben egy vagy több iparág számottevően hosszú időtartamra kapacitástöbblettel működik. Az egyik ágazatban lekötött tőkét általában nem lehet leszerelni és átvinni egy másikba. Felesleges kapacitás, azaz tőketöbblet tehát szükségképpen felbukkan, mihelyt valamely iparág kibocsátása csökken ahelyett, hogy azonos maradna, vagy az egyik évről a másikra növekedne. Hogy a fölös tőkével elszámolhassunk a dinamikus input-output rendszer keretében, a kapacitástárolás vagy tőketárolás mesterséges fogalmát kell bevezetnünk. Ha például az iparág kibocsátása az egyik évről a másikra csökken, mondjuk 100 egységgel, akkor fel kell tenni, hogy ugyanakkor a „fölös ipari kapacitás tárolásának" áltevékenysége ugyanennyivel növekszik. Mivel ennek az új tevékenységnek a tőkeráfordítási együtthatói – definíció szerint – azonosak magának az iparágnak az együtthatóival, az iparág által tárolt teljes tőke változatlan marad annak ellenére, hogy évi kibocsátása csökkent." Mindezt az 1961-ben publikált cikkében olvashatjuk.

A „*Területi input-output elemzés*" c. tanulmány szintén közismert tanulmánya a szerzőnek. A bemutatott input-output modell-séma nem kívánt rendszerezett elméleti leírása lenni mindama tényezőknek és kapcsolatoknak, amelyek végső soron meghatározzák a gazdasági rendszer multiregionális kialakulását.

A nyílt dinamikus input-output témakörben végzett kutatási eredményeiről 1968-ban számolt be a IV. genfi input-output konferencián „*A dinamikus inverz*" c. előadásában. A modell kidolgozásával kapcsolatban W. Leontief célja az volt, hogy bevezesse a dinamikus inverz fogalmát, amely hasonló elemzési lehetőséget nyújt a gazdasági változások empirikus tanulmányozásában, mint amit a nyílt statikus input-output modellben megjelenő inverz mátrix nyújtott. Azt, hogy a nyílt dinamikus input-output modell segítségével milyen empirikus elemzések végezhetők, Leontief igen pregnánsan a következőképpen tárja elénk: „. . . a dinamikus input-output rendszer — ugyanúgy, mint a statikus input-output rendszer — kevéssé lehet segítségünkre a gazdasági növekedés aranyszabályának kifejtésében, vagy bármilyen más, tisztán elméleti általánosítás megformulázásában. Túlságosan lazán összekapcsolt, túlságosan hajlékony ahhoz, hogy ilyen magas célkitűzést szolgálhasson. A dinamikus inverz elsősorban a rendszerbe szervezett valóságos információk tárháza. Ezt az információt olyan formába önti, amely különösen alkalmassá teszi időbeli összefüggések elemző leírására."

A teljesség igénye nélkül nézzünk meg néhány elemzési lehetőséget. A dinamikus inverz önmagában is alkalmas tervezésben való felhasználásra, minthogy egyes elemei a megfelelően keltezett egységnyi végső kibocsátáshoz szükséges, különböző időpontokban felmerülő, közvetlen és közvetett ráfordításokat tartalmazzák. Ezeket az idősorokat koordináta-rendszerben ábrázolva, a kapott görbe diszkussziója választ ad olyan kérdésekre, mint pl. milyen a szükséges ráfordítások időbeli eloszlása; vajon melyik évben jelentkezik azon ráfordítások maximuma, amelyeket a megfelelő végső kibocsátás kelt a megelőző években. Amennyiben vizsgálatainkat különböző konstans (a vizsgált időszak folyamán változatlan) strukturális mátrixokkal végezzük, s így állítjuk elő a megfelelő dinamikus inverz-mátrixokat, úgy az ezek alapján kapott idősorok alternatívái segítségével feltárhatjuk a meghatározott technikai változás hatását egy adott gazdasági rendszer dinamikus tulajdonságaira.

A dinamikus inverz segítségével követhetjük nyomon azt is, hogy a késleltetés időtartamának megváltozása milyen hatást vált ki a végső kereslet keltette ráfordítás-láncolatban.

A dinamikus input-output modell alapján elemzéseket végezhetünk az árszínvonalra vonatkozóan is: nyomon követhetjük az egyes évek hozzáadott értékvektoraiban, valamint kamattényezőiben bekövetkezett változás hatását az adott év áraira.

Tulajdonképpen ez a tanulmány ihlette hazai kutatóink legújabb AKM kutatási eredményeit is. Így pl. a KSH Iparstatisztikai Főosztályán a Leontief féle nyílt input-output modell segítségével a magyar gazdaságra vonatkozó kísérleti számításokat végeztek. A dinamikus elemzésekhez az 1959—1965 időszak egyes éveire összehasonlítható árakon kidolgozott 16 szektoros statikus mérlegek szolgáltatták a dinamizáláshoz szükséges strukturális mátrixokat. Ugyancsak a Leontief-modell ihlette *Bródy András* „Átlagos késleltetés a gazdaságban" (Szigma, 1970. III. 2.) c. tanulmányát is, amelyben megmutatja, hogy a ráfordításhányadok ismeretében hogyan határozható meg a termékáramlás átlagos ideje, a ráfordítás és a kibocsátás közti átlagos késleltetési idő.

Az első rész utolsó, „*A világgazdaság szerkezete*" c. tanulmánya a Nobel-díj átadása alkalmából tartott előadása a szerzőnek. Az előadás tárgya a világgazdaság sajátos input-output szemléletének megvilágítása.

A második részben három elmélettörténeti tanulmányt olvashatunk. „*A munkanélküliség keynesi pénzügyi elméletének alapvető feltevése*" c. tanulmányban Leontief megmutatja, hogy az általános egyensúly elemzésben a homogenitás követelményének feladása önmagában is elegendő ahhoz, hogy a pénzügyi hatások befolyásolják a gazdasági rendszer kvantitatív összefüggéseit. Egy olyan rendszerben, amelynek egy vagy több inhomogén eleme van, bármely háztartás vagy üzleti egység által termelt vagy vásárolt összes áru vagy szolgáltatás egyensúlyi mennyisége szükségképpen a pénzmennyiség függvényének tekintendő. A munka kínálatának és a pénz keresletének természete az a két pont, amelynek megítélésében az Általános elmélet és a klasszikus tantételek különbözőképpen vélekednek. E két ponton tér el Keynes az ortodox elemzéstől, amikor kifejti sajátságos elméletét a hatékony keresletről és a szándékolatlan munkanélküliségről. E két terület megvilágításával foglalkozik Leontief a „*Posztulátumok: Keynes Általános elmélete és a klasszicisták*" c. tanulmányában.

„*A marxista közgazdaságtan jelentősége a mai közgazdasági elmélet számára*" c. tanulmányában három problémakörről olvashatunk: a marxista közgazdaságtan mit adott a modern értékelméletnek; a gazdasági ciklusok és általában a haladó gazdaság problémái; végül a marxi közgazdaságtan főbb módszertani szempontjai.

A harmadik részben a legkevésbé ismert elméleti és módszertani írásait olvashatjuk: „*Matematika a közgazdaságtanban*", „*A minőség és a mennyiség problémája a közgazdaságtanban*", „*Az összetett áruk és az indexszámok kérdése*". Ezek matematikus közgazdászok körében nap mint nap felmerülő kérdések, amelyeknek egy sajátos kifejtésével ismerkedhetünk meg eme tanulmányokban.

Az utolsó rész két tanulmánya („*A gépek és emberek*" és „*Az állami kutatási* *szerződések találmányi jogáról")* közül az első az, amely nagyobb érdeklődést válthat ki. Ebben az Amerikai Egyesült Államok gazdasági rendszerének és társadalmának egy sajátos empirikus elemzését teszi közzé. Azt vizsgálja, hogy az ún. automatikus technológia vajon milyen hatást gyakorol a foglalkoztatottságra, a termelésre, a nemzet életszínvonalára.

MÓCZÁR JÓZSEF

ARROW, K. J.—HAHN, F. H.: *General Competitive Analysis.* San Francisco—Edinburgh, 1971. Holden-Day, Inc. — Oliver E. Boyd; 452 p.

Az általános egyensúlyelmélet fontos helyet foglal el a mai közgazdasági gondolkodásban. Fogalomalkotása, tételei és az alkalmazott matematikai apparátus ismerete nélkül nehezen érthetjük meg a jelenkori közgazdasági irodalmat. Az általános egyensúlyelmélet, minden hibája ellenére, az egyik legjelentősebb, legnagyobb múltra visszatekintő közgazdasági iskola. A két szerző — különösen *Arrow* — a terület világszerte elismert kutatója. A könyv megírásakor az volt a céljuk, hogy a szerteágazó irodalmat egységesen, jól összefogottan és alaposan tárgyalják. Annak ellenére, hogy a könyvre igen gyakran hivatkoznak, és az általános egyensúlyelmélet egyik bibliájaként tartják számon, véleményem szerint ez csak részben sikerült.

A könyv az előszón kívül 14 fejezetet és három függeléket tartalmaz. A könyv 3—8 fejezetei — melyeket az előszó szerint Arrow írt — igen egységesek és elegánsak; megfelelnek a könyv céljainak. Azonban a 9—14. fejezetek, melyek Hahn művei, sokkal szétszórtabbak, kevésbé átgondoltnak tűnnek.

A könyv tárgyát a szerzők egy olyan gazdaság vizsgálatában jelölik meg, amely teljesen decentralizált és ahol tökéletes verseny uralkodik és a gazdasági személyek döntései bizonyos racionalitási elvekből levezethetők.

Az első fejezet az elmélet kialakulásának történetét tartalmazza. Az általános egyensúlyelméleti gondolat első megfogalmazójának a szerzők Adam *Smith*-t tekintik. Méltatják *Walras, Clark, Wicksteed, Edgeworth, Pareto, Cournot, Hicks, Leontief, Samuelson* stb. érdemeit. Érdemes megjegyezni, hogy külön hangsúlyozzák *Marx* jelentőségét, mondván, hogy sokkal közelebb jutott kortársainál az általános egyensúly megértéséhez.

A könyv második fejezete szintén bevezető jellegű. A szerzők igen leegyszerűsített feltételi rendszer mellett mutatják be az egyensúlyelmélet gondolatrendszerét, alapvető kérdéseit, problémáit, módszereit. Főleg a matematikai modell leegyszerűsített. A piacot a kereslet és a kínálat különbségével az ún. túlkereslettel írják le. A túlkeresleti függvény a nemnegatív árak halmazán értelmezett homogén folytonos függvény. A *Brouwer*-féle fixponttétel segítségével bebizonyítják, hogy létezik egyensúly. Számos kérdést vetnek fel és oldanak meg, melyeket később egy sokkal általánosabb modell keretei között fognak tárgyalni.

A modell lényegi kifejtése a harmadik fejezettel kezdődik. Ebben a fejezetben a termelők viselkedését tárgyalják, szabadverseny feltételezése esetén. A termelők viselkedését a profitmaximalizálási elv segítségével írják le. Adott árrendszer mellett a termelők a lehetséges döntések közül azokat választják, melyek maximalizálják az elérhető profit mennyiségét. A termelők minden adott árrendszerhez hozzá tudják rendelni optimális döntéseiket. Részletesen vizsgálják az így kapott leképezés tulajdonságait.

A negyedik fejezetben a fogyasztók viselkedését vizsgálják szabadverseny feltételezése mellett. A fogyasztók viselkedését egy preferenciarendezéssel ábrázolják. Megmutatják, hogy a preferenciarendezés ábrázolható hasznossági indexfüggvénnyel. A fogyasztó a lehetséges fogyasztói kosarak közül azt választja, mely maximalizálja a hasznosságot a költségfedezeti feltétel mellett.

A fogyasztó jövedelme készletek eladásából, ill. a termelők profitjából való részesedésből származik. Részletesen elemzik a fogyasztó viselkedési függvényét.

Az ötödik fejezetben az egyensúly létezését bizonyítják be rendkívül elegáns úton. Véleményem szerint ez a fejezet a könyv legjobban megírt része. Első lépésben két egyensúly fogalmat definiálnak: egy „versenyzői" (competitiv) és egy „kiegyenlített" (compensated) egyensúly fogalmat. A két egyensúly-fogalomban a fogyasztók viselkedési szabályai eltérőek. Megmutatják, hogy minden „versenyzői" egyensúly egyúttal „kiegyenlített" is. (De nem fordítva). Egy igen újszerű bizonyítással megmutatják, hogy létezik „kiegyenlített" egyensúly. Ezt követően az ún. „készletkapcsoltság" feltételei mellett — mely hasonló jellegű, mint az indekompozábilitás a Leontief modellben — belátják, hogy létezik „versenyzői" egyensúly. A fejezet végén figyelembe veszik azt, hogy esetleg tönkremenés, csőd is bekövetkezhet, majd röviden foglalkoznak a bizonytalanság kérdésével is.

A következő — hatodik — fejezet az egyensúly létezését tárgyalja az előző fejezettől eltérő alternatív feltevések mellett. Tárgyalják azt, mikor a fogyasztók preferenciái nem előre adottak, hanem pl. függnek az áraktól, vagy egymás döntéseitől. Részletesen foglalkoznak a monopóliumos verseny esetével.

Az általános egyensúlyelmélet alapfeltevései közül a legtöbbet bírált a termelési halmazok és a preferenciák konvexitásának feltételezése. A konvexitás feloldásán igen sok kutató munkálkodott és munkálkodik jelenleg is. A konvexitást elsősorban az alkalmazott matematikai apparátus teszi szükségessé. A hetedik fejezetben ezen feltevések feloldására tesznek kísérletet. Először egy példán megmutatják, hogy ha elhagyjuk a konvexitási feltevéseket, akkor nem garantálható az egyensúly létezése. Ezt követően megkísérlik valahogyan „mérni" azt, hogy mennyire „nem konvex" egy halmaz. A fejezet fő állítása az, hogy létezik a nem konvex esetben egy „közelítő" egyensúly. A „közelítő" egyensúly a tényleges egyensúlyhoz annál „közelebb" van, minél több a gazdasági személyek száma, és minél kisebb a „nem-konvexitás" mértéke. (Nyilvánvaló a tétel értelme. Egy valós gazdaságban olyan nagyszámú gazdasági személy van, hogy „lényegileg" megvalósulhat az egyensúly).

A következő terjedelmes rész a gazdaság „magjával" (core) foglalkozik. A „magot" a modern irodalomban igen gyakran mértékelméleti módszerekkel szokták tárgyalni. A szerzők nem alkalmaznak mértékelméletet, hanem e nélkül kísérlik meg az elért eredmények bemutatását. Bebizonyítják, hogy minden „versenyzői" egyensúly a magban van, és ha a gazdasági személyek száma tart a végtelenhez, a „mag" „ráhúzódik" az egyensúlyi megoldások halmazára.

A kilencedik fejezetben az egyensúly egyértelműségét boncolgatják a szerzők. Az egyensúly egyértelműsége igen gyengén feltárt területe az egyensúly elméletnek. A vizsgálat során felteszik, hogy a túlkínálat-függvény $s(p)$ differenciálható. Az $s(p)$ leképezés *Jacobi* mátrixát vizsgálják és ennek struktúrájából következtetnek az egyensúly egyértelműségére.

A tizedik fejezet a komparatív statika kérdésével foglalkozik. Ez a fejezet jobban sikerült mind az előző, bár szintén nem éri el a könyv első nyolc fejezetének színvonalát. A probléma az, hogy hogyan változnak az egyensúlyi árak a gazdasági paraméterek függvényében.

11—13. fejezetek a stabilitás kérdésével foglalkoznak. Létezik-e olyan mechanizmus, mely az árakat az egyensúlyi állapotba tereli. Ha létezik, milyen a mechanizmus természete. Ha nem létezik, mi ennek az oka.

A 11. fejezet alapos bevezetőt tartalmaz a differenciál-egyenletek stabilitásának Ljapunov-féle elméletébe. A következő 12. fejezet az ún. tatonnement folyamattal foglalkozik. Példát adnak olyan tatonnement folyamatra, mely nem stabil.

A 13. fejezet az ún. non-tatonnement folyamatokkal foglalkozik. Ebben a pontban feltételezik, hogy nincs termelés a modellben. A tatonnement és a non-tatonnement folyamatok között az a különbség, hogy míg a tatonnement folyamatban csak az árak változnak, a non-tatonnement folyamatban a gazdaság különböző részletei is.

Az utolsó fejezetben a keynesi elemzés és az általános egyensúlyelmélet kapcsolatáról olvashatunk.

A három függelék rendre a nemnegatív elemű mátrixokkal, a konvex halmazok tulajdonságaival, és a fixponttételekkel foglalkozik. Megjegyzendő, hogy a fixponttételeket a Scarf-féle algoritmus alapján ismertetik.

Arrow és Hahn könyve — hibái ellenére — az egyik legjobb egyensúlyelméleti munka. Tartalmaz mindent, amit tartalmaznia kell egy egyensúlyelméleti munkának. Ennek legjobb jele, hogy a North-Holland kiadó is kiadta 1977-ben, az "Advanced Textbooks in Economics" sorozat 12. köteteként.

MEDVEGYEV PÉTER

A „KOMBINATORIKUS OPTIMÁLÁS — CO 79" KONFERENCIA

A "CO 79 — A conference on Combinatorial Optimization" című konferencia 1979. július 9 és 12 között lesz az University of East Anglia (Norwich) egyetemen. Az előadások teljes szövegét (legfeljebb 3000 szó terjedelemben) április 2-ig lehet benyújtani, az elfogadott előadásokat a konferencia-kötetben publikálják. A konferencia szervezője:

Dr. V. J. Rayward-Smith
School of Computing Sciences
University of East Anglia,
NORWICH, NR4 7TJ
England

Mindent megtudhat korunk tudományáról

a
KORUNK TUDOMÁNYÁBÓL!

Kiváló tudósok írják — mindenkinek

- *páratlanul érdekes témákról*
- *könnyen érthető stílusban*

A sorozat néhány sikeres kötete

Rényi Alfréd: Dialógusok a matematikáról

Szabó Imre: Az emberi jogok

Sztyepanov, J. Sz.: Szemiotika

Selye János: Stressz distressz nélkül

Beck Mihály: Tudomány – áltudomány

Csányi Vilmos: Magatartásgenetika

Ungvári Tamás: Brecht színházi forradalma

Láng István: Biológiai forradalom – hazai realitások

Az egyes kötetek kb. 100–200 oldalon jelennek meg, méretük 13 × 19 cm. Áruk 10,– és 25,– Ft között van

1828

Akadémiai Kiadó, Budapest

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója
Műszaki szerkesztő: Sándor István
A kézirat nyomdába érkezett: 1978. VII. 24 – Terjedelem: 9,8 (A/5) ív
79.6126 Akadémiai Nyomda, Budapest – Felelős vezető: Bernát György

CONTENTS

CONCEPTS AND METHODS

BOOK REVIEWS

СОДЕРЖАНИЕ

ПОНЯТИЯ И МЕТОДЫ

О КНИГАХ

Ára: 24,— Ft
Előfizetés egy évre: 40,— Ft

INDEX: 26 793
ISSN 0039—8128

TARTALOM

FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK

KÖNYVEKRŐL

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST