SZIGMA

Matematikai-közgazdasági folyóirat

A Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai-Közgazdasági Szakosztályának lapja

*

E szám szerzői:

Dr. CSÉBFALVI GYÖRGY, a Pécsi Tudományegyetem Közgazdaságtudományi Karának adjunktusa, HEPPES ALADÁR kandidátus, a SZÁMKI főosztályvezetője, HUNYADI LÁSZLÓ, a SZÁMKI osztályvezetője, KUBA ATTILA, a JATE Kibernetikai Laboratórium tudományos segédmunkatársa, LELKES PÉTER, a Magyar Szénhidrogénipari Kutató-Fejlesztő Intézet számítástechnikai tanácsadója, LENGYEL IMRE, a Dél-alföldi Tégla- és Cserépipari Vállalat osztályvezetőhelyettese, NYÁRY ZSIGMOND, a Központi Statisztikai Hivatal főelőadója, RUZSÁNYI TIVADAR, a Magyar Szénhidrogénipari Kutató-Fejlesztő Intézet önálló osztályvezetője, Dr. SIVÁK JÓZSEF kandidátus, az Országos Tervhivatal Számítóközpontjának igazgatóhelyettese, STAHL JÁNOS, kandidátus, a SZÁMKI tudományos osztályvezetője, Dr. SZIDAROVSZKY FERENC kandidátus, a Kertészeti Egyetem docense, Dr. VÖRÖS JÓZSEF, a Pécsi Tudományegyetem Közgazdaságtudományi Karának tanársegéde, TÖRÖK TAMÁS, a NIM Továbbképző Központ főelőadója

Szerkesztőség: Budapest XI., Budaörsi út 43–45.

Levélcím: 1502 Budapest, Pf. 262.

Terjeszti a Magyar Posta. Előfizethető bármely postahivatalnál, a kézbesítőknél a Posta hírlapüzleteiben és a Posta Központi Hírlap Irodáknál (PKHI 1900 Budapest, József nádor tér 1.) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a PKHI 215—96 162 pénzforgalmi jelzőszámára. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76 sz. alatti hírlapboltban

Előfizethető és példányonként megvásárolható: az AKADÉMIAI KIADÓ-nál, 1363 Budapest, Alkotmány u. 21. Telefon 111—010. Pénzforgalmi jelzőszámunk: 215—11488, és az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLT-ban, 1368 Budapest, Váci u. 22. Telefon: 185–612. Előfizetés díj egy évre: 80,– Ft

Külföldön terjeszti a KULTURA Külkereskedelmi Vállalat, H-1389 Budapest. Pf. 149

HUNYADI LÁSZLÓ–NYÁRY ZSIGMOND

Népgazdasági ökonometriai modellek és módszertani tapasztalataik*

Bevezetés: Az ökonometriai modellezés főbb tendenciái a szocialista országokban

Az európai szocialista országok ökonometriai modellezői kétévenként tartják összejövetelüket, ahol beszámolnak az elmúlt időszak eredményeiről és megvitatják a modellezés során felmerült fontosabb problémákat. A legutóbbi ilyen konferenciára a Magyar Közgazdasági Társaság szervezésében 1980 őszén Esztergomban került sor. Mivel ezen a konferencián — mint a korábbiakon is — elsősorban a teljes népgazdaság komplex működését leíró modellek képviselték a legnagyobb súlyt, és mivel sok új vonással rendelkeztek, továbbá már bizonyos perspektívából lehet összegezni az eddigi modellezési tapasztalatokat, indokoltnak látszott az e témák köré csoportosítható előadások áttekintő ismertetése. Hangsúlyoznunk kell, hogy ez az összeállítás nem fedi le a konferencia teljes anyagát, hiszen egyes szférák, részterületek modelljei (pl. külkereskedelmi modellek, fogyasztási modellek stb.), valamint konkrét, egy-egy eljárás ismertetésével, elemzésével foglalkozó módszertani előadások bemutatását nem tekintettük feladatunknak.

A népgazdasági szintű modellek építésének fő irányait — a konferencia előadásainak alapján — az alábbi fontosabb tendenciákkal lehetne összefoglalóan jellemezni:

— A modellezők egyre inkább a gyakorlati gazdaságpolitikához igyekeznek közeledni; ez egyértelműen megmutatkozik a modellek méretének és részletezettségének növekedésében.

— Ugyancsak a közvetlen alkalmazhatóságra való törekvés eredménye, hogy a modellek növekvő mértékben veszik figyelembe a gazdasági szabályozás elemeit.

— Az elemző és előrejelző modellek közti különbségek egyre csökkennek és a modellek ezt a két fő feladatot egységesen kezelik.

— A világgazdasági környezetben bekövetkezett változások eredményeként szinte minden modell kiemelten foglalkozik a külkereskedelmi összefüggések, a külkereskedelem és a fizetési mérleg kapcsolata, valamint az egyensúly problémáinak vizsgálatával.

— A modellek némiképp megváltozott feladata és személete azok rugalmasabb szerkezetét, a változások figyelembevételének lehetőségét követelte meg, rugalmasabb becslési és kezelési módszereket tett szükségessé.

Részben ezek a problémák is felvetődtek HALABUK L.—HUNYADI L.—SZAKOLCZAI GY.: *A makroökonometriai modellezés problémái a szocialista orszá-*

* Az „Előrejelzési modellek a szocialista gazdaságban” c. nemzetközi konferencián elhangzott előadások összefoglaló ismertetése.

gokban: a magyar tapasztalatok c. előadásában, amely a magyar gyakorlatból kiindulva kísérelte meg összegezni a szocialista országok ökonometriai modellezésének közös vonásait és megoldandó feladatait.

Magyarországon az intenzív ökonometriai kutatás a 60-as években kezdődött, elsősorban a KSH Ökonometriai Laboratóriumában. Itt dolgozták ki a jórészt módszertani kísérletnek tekinthető M—1 modellt, a részletes, elemzések és előrejelzések készítésére egyaránt alkalmas M—2 modellt, a magyar és csehszlovák népgazdaság összehasonlító elemzését célzó kisméretű M—3 modellt, valamint az input-output elemzések és az ökonometriai technika együttes alkalmazását bemutató M—4 modellt. A Laboratóriumban az említett modellek mellett, illetőleg azokhoz kapcsolódóan ökonometriai módszertani kutatás is folyt, amelyek eredményei serkentették a más intézményeknél folyó ökonometriai tevékenység fejlődését is.

A másik kutatóbázis az OT Tervgazdasági Intézetében alakult ki, ahol elsősorban a középtávú (ötéves) népgazdasági terezést segítő, eleinte klasszikus ökonometriai modelleket, újabban pedig bonyolult matematikai-statisztikai eljárásokon nyugvó idősoros modelleket dolgoznak ki. A Konjunktúra- és Piackutató Intézetben elsősorban a magyar külkereskedelem szempontjából lényeges folyamatok ökonometriai vizsgálatát végzik. A Számítógépalkalmazási Kutató Intézetben a 70-es évek második felétől kezdődően folynak ökonometriai modellezési munkák, amelyek már megkísérlik figyelembe venni mindazokat a problémákat, amelyek a magyar népgazdaság jelenlegi fejlődési specifikumát kialakítják. Az előadás második része ezekkel a problémákkal foglalkozott, s ezzel együtt vázolta a magyar ökonometriai kutatások előtt álló további feladatokat is.

Ezek között első helyen említhető a szocialista gazdaságnak az a sajátossága, amely a központi döntések viszonylag nagy — bár országonként eltérő — súlyából adódik. A modellezés szempontjából ez azt jelenti, hogy az eddigieknél nagyobb mértékben kellene figyelembe venni a modellekben a népgazdasági terveket, azok mozgósító hatását, valamint a döntéshozó testületek magatartását. Ez utóbbi természetesen egy sor módszertani nehézség forrása lehet és a tiszta ökonometriai modellezés fellazítása felé vezethet; a lehetséges módszerek kialakítását és fejlesztését fontos módszertani feladatnak kell tekintenünk. Példaként említhető a fentiekre az áralakulások vizsgálata és modellezése, ahol jól megfigyelhető a központi elem (hatósági árképzés), a spontán elemek (külpiaci áralakulás, szabadpiaci termékek áralakulása, esetleg feketepiac), valamint az ezeket valójában együtt kezelő ártervek együttes létezése és interdependens kapcsolata.

A szocialista gazdaság fontos jellemzői közt említette meg a kínálati oldal elsődleges szerepét, amely elsősorban a mechanizmusra vezethető vissza, a modellezésben pedig két fontos vonzata van. Egyfelől a modellekben nagyobb szerepet kell biztosítani a kínálati egyenleteknek, másfelől pedig a tőkés országok modelljeihez képest nagyobb szerepet kellene biztosítani az egyensúlyhiányt figyelembe vevő módszereknek, hiszen a szocialista országok piacai, éppen a kínálat domináns volta miatt gyakori, sőt tartósan egyensúlyhiányos állapotban vannak.

Végül a szocialista országok modellezésekor figyelembe kell venni azt a tényt, hogy itt a pénzügyi, jövedelmi és árfolyamatok lazább kapcsolatban vannak a reálszféra mozgásával, mint a tőkés országokban; ez a sajátosság a szocialista modellek reálszféra-orientáltságában, a pénzügyi- és árfolyamatok másodlagos kezelésében, valamint az egyes fő folyamatok egymástól elszakított modellezésében nyilvánul meg. Az előadás, amely a sok tekintetben előremutató magyar mechanizmus tapasztalatain alapult, nagy súllyal vetette fel azt a problémát is, hogy az ökonometriai modellezést egyre inkább a rövidtávú gazdaságpolitikai döntések eszközévé kell kifejleszteni, ami megköveteli egyfelől a rövidtávú modellek szerepének növekedését, másfelől pedig a rugalmasságuk, naprakész alkalmazhatóságuk fokozását kell hogy maga után vonja.

A konkrét makroökonometriai modellezési munkákat tárgyaló előadások a megoldandó feladatok széles spektrumát fogták át a világgazdaság aktuális kérdéseitől kezdve az egyes országok népgazdaságainak speciális problémáiig. Az egyes előadások áttekintését a nemzetközi modellezési kísérletekkel kezdjük, majd az egyes országok hosszú-, illetve rövid- és középtávú modelljeit ismertetjük, végül röviden beszámolunk két, a makroökonometriai modellezés tapasztalatait leszűrő, módszertani jellegű előadásról.

1. Nemzetközi modellezési kísérletek

Elsőként olyan előadásról számolunk be, amelynek témája egy „világmodell", vagy „globális modell", s ez azért érdekes, mivel tudomásunk szerint ez az első ilyen jellegű modell, amelyet szocialista ország kutatói publikáltak. Fedorovszkij, a Szovjetunió Tudományos Akadémiája Rendszerkutató Intézetének (Moszkva) munkatársa, előadásában (PIROGOV, G. G.–FEDOROVSZKIJ, JU. P.: *Interregionális kölcsönhatások modellezése)* azt a kérdést vizsgálja, hogy milyen eltolódások várhatók a nemzetközi gazdasági kapcsolatok alakulásában az ezredfordulóig. Kiinduló pontja az, hogy a világgazdaság jelenlegi instabil helyzete, amely a politikai instabilitással kölcsönös kapcsolatban van, nem csekély mértékben az energiahordozókkal van összefüggésben. A jelenlegi energiahelyzetre az jellemző, hogy még az olaj a fő energiahordozó, de már intenzív kutatások folynak alternatív energiatermelési módok kidolgozására; ez a helyzet várhatóan a század végéig lényegesen nem változik. Pirogov és Fedorovszkij modelljükben az energiatermelés, annak világkereskedelme, az egyes régiók (ezekről a későbbiekben még szólunk) termelési értéke és a világpiaci árak alakulásának összefüggéseit keresik. Mivel a modell – mint említettük – a szocialista országokban újszerű, célszerűnek tartjuk viszonylag részletes ismertetését.

A modell ún. egytermékes modell, azaz ágazati bontásokat nem tartalmaz. Fő változói a régiók *nettó termelési értéke*, *energiahordozó-termelése*, *exportja*, *importja*, az alternatív energiahordozók kifejlesztésére fordított *beruházásai*, valamint a régiók közti áramlások *árindexei*. Alapgondolata az, hogy az energiahordozók elégtelensége a termelés növekedésének korlátozó tényezője s egyben a világméretű infláció egyik fő oka. A modell első egyenletei[1] a nettó termelési érték kialakulását írják le:

$$V^i = v^i \tilde{V}^{*i}, \tag{1}$$

[1] A modell teljes egyenletrendszerét itt helyhiány miatt nem tudjuk közölni; csak a fontosabb egyenleteket mutatjuk be.

azaz az i-edik régió tényleges termelése a potenciális termelési érték függvénye, ahol a v^i hányad az energiahordozó-*hiánytól* függ:

$$v^i = f^i\left(1 - \frac{\Delta e^i}{De}\right) \tag{2}$$

és az f^i függvény alakját ismertnek feltételezik, pl. $f^i(x) = \sqrt[n_i]{x}$, $n_i \geq 2$ formában. A (2) egyenletben Δe^i az energiapiac egyensúlyhiányát kifejező mutató, azaz

$$\Delta e^i = De^i - Se^i, \tag{3}$$

tehát a kereslet és kínálat különbsége, ahol

$$De^i = e^i \tilde{V}^{*i}, \tag{4}$$

azaz a kereslet (igény) a potenciális termelés függvénye, a kínálat pedig

$$Se^i = Rp^i + Me^i \tag{5}$$

a termelés és az import összege.

Fontos szerepet játszik a modellben a (4) egyenlet e^i koefficiense, amely a (nettó) termelés energiaigényességi együtthatója. Ez a modell feltételezése szerint függ:

— a régió tudományos-technikai színvonalától,
— az energiaracionalizáló beruházások volumenétől és
— a régió gazdaságnövekedési ütemétől. Így

$$e^i = \varphi^i(\tilde{U}^i, I^i_s, \Delta V^i/V^i), \tag{6}$$

ahol a φ^i függvény alakjára nézve a priori megkötések nincsenek.

A következő egyenletek a *beruházásokkal* kapcsolatosak:

$$I^i_{TE} = f(\Delta e_i), \tag{7}$$

azaz az alternatív energiaforrások kialakítására fordított beruházások az energiahiánytól függenek, és

$$Rp^i = \Phi^i(Ie^i), \tag{8}$$

azaz az energiahordozók kitermelése az energetikai beruházások függvénye. (Ezek egy része az I^i_{TE}-vel jelölt beruházás; a teljes modellben e két rész kapcsolata természetesen specifikálva van.)

A modell további, terjedelmes része a külkereskedelmi problémákat vizsgálja. Az i-edik régió energiaimportját a világexport függvényében írja le:

$$Me^i = \varepsilon^i Se^w, \tag{9}$$

ahol

$$\varepsilon^i = (\varepsilon^*)^i / \sum_i (\varepsilon^*)^i \tag{10}$$

az importból való részesedést adja meg és

$$(\varepsilon^*)^i = a^i_{0,1} + a_{1,1} V^i_{-1} + a^i_{2,1} Pe^w + a^i_{3,1} t + a^i_{4,1} \bar{Z}^i_1 \tag{11}$$

azaz az i-edik régió import-részaránya függ:

— a termelés egy évvel késleltetett értékétől,
— a világpiaci áraktól,
— az időtől,
— és egy politikai jellegű, mesterséges változótól.

A külkereskedelem leírását tovább folytatva, a világpiaci energiaárindex függvénye:

(12) $$Pe^w = a^i_{0,2} + a^i_{1,2} De^w + a^i_{2,2} t + a^i_{3,2} Z^w_2$$

ahol Z^w_2 egy újabb politikai változó, De^w (a világ összes energiakereslete) pedig

(13) $$De^w = \sum_{i=I} \Delta e^i,$$

ahol I az összes importáló régiók indexeit tartalmazza. Hasonlóképpen magyarázható a világ összes energiakínálatának egyenlete:

(14) $$Se^w = \sum_{i \in Y} S^i_{ee},$$

(15) $$S^i_{ee} = a^i_{0,3} + a^i_{1,3} [\gamma(Re^i)_{-1} - De^i] + a^i_{2,3} \bar{Z}^i_3,$$

azaz az i-edik régió exportja a potenciális export és egy politikai változó függvénye. (Az egyenletben Re^i a meglevő [becsült] energiahordozó-készleteket, $\gamma(Re^i)_{-1}$ pedig az előző évben feltárt készleteket jelenti. A zárójelben ily módon a feltárt, de a saját igényeken túlmenő készletek szerepelnek.) Ez az egyenletet egészíti ki az

(16) $$Re^i = (Re^i)_{-1} - (Rp^i)_{-1} + \Delta Re^i$$

egyenlet, amely a készletek mérlegét írja le, ahol ΔRe^i az új feltárásokat jelenti:

(17) $$\Delta Re^i = a^i_{0,3} + a_{1,3} Pe^w,$$

azaz az új feltárások az energiahordozók világpiaci árindexétől függnek.

A továbbiak során a szerzők feltételezik, hogy

— az energiahordozót termelő (legalább önellátó) országokra $\tilde{V}^* = V$ érvényes, azaz a potenciális termelés az energiahiány miatt nem marad el a ténylegestől, továbbá
— a közelkelet olajtermelő országainak régiójánál a nettó termelési érték exogén változó.

A modell hátralevő része az export-import árindexek alakulását, illetve ezek segítségével a folyóáras és a változatlan áras mutatók összefüggését adja meg. Ezek közül az egyenletek közül csupán kettőt említünk meg. Az egyik az i-edik exportáló régiónak a j-edik importáló régió importjából való részesedését leíró egyenlet:

(18) $$(m^*)^{ij} = a^{ij}_{0,n} + a^{ij}_{1,4} V^i_{-1} + a^{ij}_{2,4} \tilde{U}^i_{-1} + a^{ij}_{3,4} t + a^{ij}_{4,4} \bar{Z}^{ij}_4,$$

azaz a részarány függ:

— az előző évben elért termelési színvonaltól,
— az előző évben elért tudományos-technikai színvonaltól,
— az időtől
— és egy politikai jellegű változótól.

A másik nem triviális összefüggés szerint a kőolajtermelő országok teljes export-árindexe az energiahordozók világpiaci árindexétől függ:

$$PE^i = a^i_{0,5} + a^i_{1,5} Pe^w. \tag{19}$$

A modellt az átárazó egyenletek, az áru és nem-áru jellegű export- és importegyenletek, valamint a termelés és a modell egyéb kategóriáinak kapcsolatát kifejező mérlegazonosságok teszik komplettté.

A modell jelenleg a megvalósítás stádiumában van, a felírt összefüggések verifikálásához szükséges előkészítő munkák folynak. Igen sok nehézség adódik természetesen a modell adatbázisának kialakítása során. Problémát jelent az energiahordozók azonos mértékegységre való átszámítása (jelenleg millió tonna szén-egyenértéket használnak), s a régiónként csoportosított adatok beszerzése (stratégiai jelentőségük miatt gyakorta titkosak), valamint a megfelelő politikai változók kialakítása. További problémát jelent a többé-kevésbé homogén régiók kialakítása, hiszen ezeknél politikai, gazdasági, valamint történelmi szempontokat is figyelembe kell venni. Ebből kifolyólag több alternatív csoportosítás is elképzelhető. Az egyik lehetséges csoportosítás 4 fő és ezeken belül összesen 14 kisebb régióval számol. Ezek:

1. Szocialista országok
   a) Szovjetunió
   b) Európai szocialista országok
   c) Ázsiai szocialista országok
   d) Kína
2. Fejlett tőkés országok
   a) USA és Kanada
   b) Nyugat-Európa
   c) Japán
   d) Ausztrália, Új-Zéland és a Dél-Afrikai Köztársaság
3. Kőolajtermelő országok
   a) Közel- és középkelet
   b) Karib-medence országai
4. Fejlődő országok
   a) Afrika egyéb országai
   b) Egyéb latin-amerikai országok
   c) Közép-Ázsia (beleértve Indiát)
   d) Délkelet-Ázsia és Óceánia.

Megemlítendő még, hogy a szerzők utaltak arra, hogy kísérletképpen, esetleg átmeneti megoldásként egyes régiók egy-egy reprezentáns országgal helyettesíthetők, ami feltétlen egyszerűsítené a megoldást.

A konferencián két előadás foglalkozott a KGST országok kapcsolataival. J. B. GAJDA az *Európai KGST-országok minimodelljét*, míg J. SZTAUDYNGER (mindketten a Lódzi Egyetem Ökonometriai és Statisztikai Intézete munkatársai) a *Központi tervirányítású országok valutaárfolyam-modelljét* mutatta be.

Az európai KGST-országok minimodelljeinek a kidolgozása 1977 óta folyik a lódzi Ökonometriai és Statisztikai Intézetben. A fő cél az említett országok egyöntetűen (azonos formában) specifikált előrejelzési modelljeinek becslése azonos módszerrel, végül pedig országonként a megfelelő paraméterek összehasonlítása.

A minimodellek lényegében 10—12 egyenletből álló országmodellek, amelyeknek függő változóit a fontosabb népgazdasági aggregátumok alkotják. A tanulmányt a szerző alapvetésnek, módszertani kísérletnek szánta, amelyet dezaggregáltabb egyenletrendszerek specifikációja fog követni, az összehasonlító elemzés és előrejelzés céljával. A modellt jelenlegi formájában ex post előrejelzésre és szimulációs célra is felhasználták.

J. SZTAUDYNGER — mindenekelőtt a LINK-modellben szereplő 13 fejlett nyugati ország valutaárfolyam-modelljével szerzett tapasztalatok alapján — a „központi tervirányítású országok" (tehát lényegében az európai KGST-országok) nem-kereskedelmi valutaárfolyam-változásainak magyarázatára tett kísérletet. Tehát ennek az eddig általában exogén változónak tekintett jelenségnek a megmagyarázásáról, a változó „endogenizálásáról" van szó.

Mindeddig csak feltételezések voltak arra, hogy ennek a tényezőnek az alakulását milyen faktorok befolyásolják. Valójában a „fogyasztói kosár" választékát képező áruk árától és más, általánosabb jellegű tényezőktől függ-e, hasonlóan a LINK-projectben szereplő 13 ország valutaárfolyamát meghatározó magyarázó változókhoz (mint pl. valutatartalékok, a belföldi és a külföldi partner-országok inflációs rátája, a bruttó nemzeti termék, stb.) Sztaudynger a valutaárfolyamot 15 éves megfigyelés alapján a következő összefüggés variánsainak alapján kísérelte meg meghatározni (Lengyelország esetét véve példának).

$$\frac{\Delta ER}{ER_{-1}} = f\left(\frac{BT}{X+M}, \frac{BTP}{XP+MP}, p_h, p_f, g_h, g_f, p_p, g_p\right),$$

ahol $\Delta ER/ER_{-1}$ = a valutaárfolyam változása (helyi valuta/zloty),

BT = a szocialista országok egymással folytatott kereskedelmi mérlege,
BTP = Lengyelország szocialista országokkal folytatott kereskedelmének mérlege,
XP = lengyel export,
MP = lengyel import
p_h = belföldi inflációs ráta (GDP deflátor),
p_f = a partner-országok inflációs rátája 1976-ban (a kereskedelmi forgalomban való részvétel arányának megfelelően súlyozva),
g_h = a partner-országok bruttó nemzeti termékének növekedési rátája (az előző változónál megnevezett módon súlyozva),
g_f = a belföldi nettó anyagi termelés növekedési rátája,
p_p = a lengyel ár-deflátor,
g_p = a nettó anyagi termelés növekedési rátája Lengyelországban.

A függvénynek ebből az implicit alakjából több lehetséges alternatívát választott ki. Az alternatívák közül a következő mutatkozott a legsikeresebbnek:

$$\frac{\Delta ER}{ER_{-1}} = \underset{(5,4)}{1{,}03\, p_h} + \underset{(4,9)}{0{,}42\, g_f} + \underset{(5,6)}{0{,}02\,\text{USSR 6278}} - \underset{(8,2)}{0{,}064}$$

$$R^2 = 0{,}881.$$

Eszerint tehát Lengyelországban az elmúlt 15 esztendő folyamán a belföldi inflációs ráta, a kereskedelmi partner-országok nettó anyagi termelésének növekedési rátája, valamint egy karakterisztikus változó hatása mutatkozott szignifikánsnak a nem-kereskedelmi valutaárfolyam változásában. Az USSR 6278 jelű változó az egyik legfontosabb kereskedelmi partner (a Szovjetunió) és Lengyelország viszonylatában bekövetkezett valutaárfolyam-változások egyes években mutatkozó különleges hatását kívánta megragadni (1962 előtt, valamint 1975–1978 között a változó értéke = 1, egyébként 0).

A függvény fenti alakja arra utal, hogy a valutaárfolyam-változást Lengyelországban a megfigyelt időszakban elsősorban belföldi tényezők (inflációs ráta, a nettó anyagi termelés növekedése határozzák meg), míg a külföldi árak hatása szignifikánsan nem érvényesül. A kérdés behatóbb vizsgálatára azonban még szükség van, hiszen a modell csak kísérleti megközelítésnek számít, s mint ilyen, lényegében nem alkalmas arra, hogy gazdasági döntések megalapozott kiinduló pontjául szolgáljon. Mégis használható jelzőrendszerként fogható fel azoknak a nem-kereskedelmi valutaárfolyam-változási feszültségeknek a magyarázására, amelyek általában a belföldi árváltozások, valamint a belföldi gazdasági növekedési ráta oldaláról hatnak.

2. Hosszútávú népgazdasági modellek

Az ökonometriai modellek jellegüknél fogva nagy mértékben alkalmasak *hosszútávú elemzésekre*, az egyes gazdasági jelenségek tartós kapcsolatainak kimutatására. Ez a tulajdonságuk lehetővé teszi, hogy a hosszútávú tervezésnek is hatékony segédeszközeivé váljanak; másrészt a jelenségek komplex elemzése céljából egyéb típusú modellekkel (ágazati kapcsolati mérleggel, optimalizálási modellekkel) is összekapcsolhatók.

Az ökonometriai modell hosszútávú elemzésekre való alkalmazását egy példán NYÁRY ZS. (KSH) *A magyar gazdaság kapcsolatainak hosszútávú vizsgálata ökonometriai módszerekkel* című tanulmánya mutatta be. A tanulmány csupán része egy nagyobb kutatási anyagnak, amely adatbázistól függően számszerűsíti az 1875–1913 években a magyar gazdaságban érvényesülő fontosabb összefüggéseket. A „modell" jelenlegi formájában csupán egymástól független, a legkisebb négyzetek klasszikus módszerével becsült regresszióegyenletek halmaza. A kutató munka fő feladata a különböző egyenlet-alternatívák konzisztens modellé való integrálása, az összefüggéseknek folytatólagosan az 1921–1939 évi időszakra való becslése, és a különböző időszakokra becsült paraméterek összehasonlítása. A tanulmány a kutatási anyagból az 1893–1913 évi részidőszakra becsült egyenleteket választotta ki. A bemutatott variáns összefüggéseinek száma 67; a 67 endogén változón kívül a rendszerben 19 exogén (és predeterminált) változó foglal helyet.

Hogy mit sikerült visszatükrözni az 1893—1913 évek Magyarországra legjellemzőbb összefügéseiből, ez mindenekelőtt a rendelkezésre álló adatbázis függvénye volt.

Bár Magyarország a vizsgált időszakban a Monarchiának alkotmányjogilag független része volt, a főleg agrárius és agrár-exportra beállított Magyarország fejlettségi szintje elmaradt az Ausztriához tartozó fejlett iparú régiók mögött. A mezőgazdaság predomináns szerepe mindenekelőtt a mezőgazdasági összefüggések viszonylag nagy számában jutott kifejezésre. A bemutatott variánsban öt kiemelt termény: a búza, a rozs, a széna, a cukorrépa és a dohány naturális mutatókban kifejezett volumene szerepelt. Az iparon belül elsősorban néhány élelmiszeripari összefüggés megfogalmazására kerülhetett sor, míg a nehézipar köréből a bányászatra és kohászatra sikerült néhány egyenletet specifikálni. A feltételezéseknek megfelelően jóformán minden területen szignifikáns magyarázó tényezőnek bizonyult a vasúti hálózat építése, mind kínálati, mind keresleti összefüggésekben. A gazdaságnak Ausztriával és általában a vámkülfölddel fennálló kapcsolatairól külkereskedelmi egyenletcsoport tájékoztat, amikor is helyenként sikerült a világkereskedelem oldaláról ható néhány tényező befolyásának a számszerűsítése is.

Hosszútávú modellekben érthetően megvan a szerepe a népesség alakulását kifejező demográfiai változóknak. Ez a munkaerő-kínálat elsőrendű fontosságú tényezője. Hasonlóan szerepet játszik a technikai fejlődést kifejező változó is. Az iparban ezt az egy főre jutó nyersvastermelés változója fejezte ki. A pénzügyi adatok viszonylagos bősége magyarázza a pénzügyi egyenletek viszonylag magas hányadát az összefüggés-rendszerben.

A becsült paraméterek alapján a következő fontosabb következtetések vonhatók le:

a) A kiválasztott növények terméseredményét főképpen az időjárási viszonyok (mint kínálati tényezők), valamint a vetésterület határozta meg. Ez utóbbi a kereslet rövidtávú hatásait hivatott számszerűsíteni, hiszen a túlnyomórészt extenzív gazdálkodás időszakában a növekvő kereslet kielégítésének természetes útja az ugar feltörése vagy a rosszabb minőségű (legelőnek használt) földek termelés alá vonása volt. Ezeket az összefüggéseket a becsült paraméterek és előjelük igazolják is.

Köztudomású tény a vizsgált időszakban a földterhek (jelzálogkölcsönök) rendkívüli mértékű emelkedése, ami a magyar mezőgazdaság extenzív jellegének is egyik magyarázó tényezője. Az állatállomány növekedésében mind a takarmányellátás, mind a legelőterület, mind pedig a növekvő szénatermés pozitív szerepet játszott.

Az élelmiszeripari egyenletekben a termelési volumen alakulását egyrészt a nyersanyag-háttér kínálati változói, másrészt keresleti hatásokat kifejező változók (népesség, export) határozták meg.

A bányászat és kohászat termelési függvényében a munka és a szállítóberendezések a magyarázó változók; a termelés különösen a munkaerő-input változására reagált érzékenyen. A nyersvastermelés egyenletében a kapacitáskihasználás (az egy kohóra eső üzemi hetek száma) esik döntő súllyal latba, míg a széntermelés egyenletében a vasúti hálózat bővülésének változója mind keresleti, mind a szállítás oldaláról ható kínálati hatásokat testesíti meg.

Meglepően erős az ipar fejlődését, a részvénytársaságok számát („nagyipar"), valamint a kiadott iparengedélyek számát („kézműipar") befolyásoló tényezők között a pénzügyi magyarázó változók hatása (kamatláb, bankok részvénytömege, megtakarítások). A kamatláb-tényező viselkedése nem volt egyértelmű. A kézműipar fejlődése a becslések szerint kamatlábcsökkenés („olcsó pénz") mellett történt, a részvénytársaságok növekedését viszont a kamatláb növekvő irányzata kísérte. Az ipari szerkezet egyik mutatója a vas- és gépipari vállalatok részaránya az összes vállalatokon belül: ez pozitív irányban függött a nyersanyagbázis fejlettségétől, mint ahogy a megfelelő függvény igazolta is; ugyanakkor az import értékével fordított arányban állt.

A szállítási egyenletek középpontjában a vasúthálózat építési hossza áll; ez a személy- és teherszállítás, illetve a postaforgalom egyenletében egyaránt fontos tényező. Ugyanakkor a sertésvásárok forgalmának egyenletével nagyrészt sikerült az ún. pókháló-tételt (cobweb theorem) igazolni.

A munkaerő-egyenletek — a modelltervezet egyéb egyenleteihez hasonlóan — vegyes típusúak: a kínálati oldalt a 15—20 évvel korábbi születésszám, a keresleti tényezőt a megfelelő ágazatok termelése képviseli. A beruházásokban két tényezőé a döntő szerep: az egyik az „ipari fejlettség" proxyváltozója (egy főre jutó vasérctermelés); a másik az állami költségvetésben megszavazott beruházási összegek.

A külkereskedelmi egyenletek részben a búza- és lisztexport alakulását magyarázzák (mindkét esetben világpiaci tényezők bizonyulnak igen szignifikánsaknak); részben a külkereskedelmi szerkezet két jellemző vonását: a készáruk arányát az importban, valamint a nyersanyagok arányát az exportban. Az import készárutartalma magától értetődően negatív kapcsolatban áll az egy főre jutó vasérctermeléssel; de csak kis mértékben függ az osztrák importtól. Érdekes módon az export nyersanyagtartalma és az Ausztriába irányuló export negatív irányú kapcsolatban áll, ami azt jelenti, hogy ausztriai exportunk növekedése nem vont maga után fokozódó nyersanyagkivitelt. Az előbbi megállapítással együtt ez valószínűleg az országnak Ausztriától való némi gazdasági függetlenségére is utalhat.

Fogyasztási és áregyenlet specifikációjára az adatbázis alig adott lehetőséget. A gabonafélék fogyasztása természetesen a malomipar teljesítményének és az egy főre eső kenyérgabona-mennyiségének növekvése mellett, egyszersmind azonban a gabonafélék átlagárának emelkedése (és nem csökkenése) mellett ment végbe.

A „modell" kísérletképpen hat pénzügyi összefüggést is tartalmaz.

A hosszútávú modellek közé kell sorolnunk a bolgár modellt: MINASJAN, G.—KULEV, N.: *A bolgár népgazdaság előrejelző modellrendszere*. A modellrendszer, amelyet a Bolgár Tudományos Akadémia Közgazdasági Intézete a novoszibirszki szovjet társintézettel együttműködve dolgozott ki, valójában tágabb, mint egy hagyományos ökonometriai modell, de mivel egyes — elsősorban hosszútávú — elemei ökonometriai jellegűek, itteni tárgyalása indokolt. A modellrendszer három blokkból

— a hosszútávú előrejelzésekből,
— azok középtávú realizációjából, valamint
— a középtávú optimalizálási blokkból áll.

Az *első blokk* fő feladata a népgazdasági és az ágazati mutatók hosszútávú prognózisa. Mivel a gyakorlati tapasztalatok azt mutatják, hogy az ÁKM-ek hosszú távon nem használhatók sikerrel, a hosszú távú prognóziskészítés céljaira két, egymással összefüggő ökonometriai-szimulációs részmodellt készítettek. Ezek fő feladata az, hogy a fejlődésnek a nemzetközi (elsősorban természetesen a KGST) célokkal és folyamatokkal összhangban levő reális alternatíváit feltárják. *Az első részmodell* (MAK = makro) teljesen aggregáltan (népgazdasági szinten) vizsgálja az alábbi fő mutatók alakulását:

I. A társadalmi termelés hatékonyságát leíró mutatók:

I.1. A termelés anyagigényessége
I.2. A termelés munkaigényessége
I.3. A termelés eszközigényessége

II. A termelő alapok újratermelését leíró mutatók:

II.1. Amortizációs normák
II.2. Selejtezési normák
II.3. A beruházások és felújítások aránya
II.4. Befejezetlen beruházások aránya
II.5. Készletváltozások

III. A termelő és nem termelő szféra kapcsolatát kifejező mutatók:

III.1. Foglalkoztatottság szerkezete (termelő—nem termelő)
III.2. Beruházási struktúra (termelő—nem termelő)

IV. A külkereskedelmi tevékenységet jellemző mutatók

V. A fogyasztási stratégiát leíró mutatók

A MAK részmodell ezekre a mutatókra részben normatív, tervezett koefficienseket tartalmaz, jórészt viszont az 1960—1978-as időszak idősoraiból becslések segítségével ad előrejelzést. Az előrejelzés segítségével a MAK modell outputjaként az alábbi fontos népgazdasági mutatószámok kaphatók:

— társadalmi termék
— nemzeti jövedelem
— állóeszközök állománya
— beruházások
— anyagi ráfordítások
— fogyasztási alap
— felhalmozási alap
— amortizáció
— selejtezés stb.

Ezek meghatározásánál természetesen a jól ismert népgazdasági mérlegösszefüggésekre kell támaszkodni.

Az OTR részmodell (otraszlevaja = ágazati) a MAK által adott aggregált prognózisok ágazati szintű lebontását végzi el. Ennek során az eredményeket az anyagi termelés 25 ágazatára (ebből 15 ipari ágazat) transzformálja. Az OTR tehát bemenő adatokként egyfelől a MAK eredményeit, másfelől pedig egyes, a MAK-nál aggregáltságából következően figyelembe nem vett, az egyes ágazatok eltérő műszaki haladását kifejező információkat használja. Ez valójában azt jelenti, hogy az OTR nem egy automatizált, egységes algoritmuson alapuló számítássorozatot végez, hanem egyes eseteiben részletes egyedi elemzések segítségével (pl. külön vizsgálják az ágazati anyagigényességi, munkaigényességi stb. koefficiensek alakulását) javítja, esetleg felülbírálja a MAK prognózisait. Ez a munkafázis csak hatékony ember-gép kapcsolat segítségével valósítható meg; erre a szerzők külön is utaltak. A későbbiek során ehhez a blokkhoz kapcsolódik majd a *TOSZ részmodell* (TOSZ = territorialno-osztraszlevüh sztruktur = területi, ágazati szerkezet), amely az eredmények területi dezaggregációját lesz hivatva elvégezni.

A második blokk, azaz a középtávú realizáció az első blokk eredményeinek felhasználásával az optimalizációs megoldáshoz szükséges ÁKM-eket állítja elő középtávú konzisztens előrejelzések formájában. Erre a célra a modell három különféle algoritmust használ fel; lényegük az, hogy olyan mátrixot keresnek, amelynek eltérése az eredetileg függetlenül előrebecsült koefficiensektől minimális. A második blokk végeredménye a konzisztens középtávú előrejelzéseken kívül a prognózisidőszak első ötéves tervére érvényes, 25 szektoros aggregáltsági szintű ÁKM.

A harmadik blokk feladata a fő népgazdasági és ágazati mutatók optimalizálása az 5 éves terv időhorizontján. Maga ez a blokk egy ÁKM-bázisú dinamikus optimalizálási feladatot old meg, eleinte lineáris feltételek és célfüggvény feltételezésével. A feladatban a korlátok három fő csoportja különböztethető meg:

a) A termelés elosztására vonatkozó korlátok (lényegileg naturális mérlegek).

b) A termelő alapok elosztására vonatkozó korlátok. (Ezek, mivel a beruházások elosztását jelentik, fontos elemét képezik a modell dinamikus viselkedésének és tulajdonságainak.)

c) A munkaerő elosztására vonatkozó korlátok. (Munkaerőmérleg.)

Ezen feltételek mellett a harmadik blokk középtávú optimális programokat szolgáltat egyfelől a fontosabb arányszámokra (pl. energiaigényesség, ágazati fogyasztási struktúra stb.), másfelől a tervezés szempontjából fontos abszolút számokra (külkereskedelmi egyenleg, készletnövekedés stb.). Ez az optimális program a középtávú népgazdasági tervezés fontos támasza, kiinduló pontja lehet. Befejezésképp, *az 1. táblázatban* a modell szerkezetének bemutatására közöljük a modellen belüli információáramlás sémáját.

Kifejezetten a hosszútávú tervezés igényeinek megfelelően készül a Német Demokratikus Köztársaság Tudományos Akadémiája Közgazdaságtudományi Intézetének modellje. Ez volt a tárgya M. Wölfling *A hosszútávú tervezés makroökonómiai modellje* című előadásának. A modell korábbi változata 1977-ben látott napvilágot, ISI-modell (iteratív-szimulációs modell) néven. A modell jelenleg kidolgozás alatt álló bővített változata a *rendszerdinamikai modell* elnevezést viseli. Ezzel az elnevezéssel szerzője a modell egyes alkotóelemei (blokkjai) közötti kapcsolatok kötetlenebb jellegét, a blokkokon belül az egyes egyenletek és változók módosítására adott nagyobb szabadságot, bonyolult visszakapcsolási hatásokat, s az egész modellnek, ill. modellrendszernek a makroökonómiai szférán túlmenő szélesebb vizsgálati körét kívánja jelölni. Öt blokkot tartalmaz. A központi blokk — lényegében ökonometriai modell — hivatott kiegyensúlyozni a demográfiai hatások által befolyásolt keresleti blokk és a termelés kínálati oldala között mutatkozó eltéréseket. A modell ezt a kínálat felől, az állóeszközök, ill. beruházások szerkezetének módosításával végzi. A beruházási szerkezetet azonban természetesen nemcsak a termelés keresleti és kínálati oldala között mutatkozó feszültség határozza meg, hanem mindenekelőtt a külkereskedelem, a kvalifikált munkaerő-ellátottság, valamint a környezeti feltételek is. A modell fokozatosan épül ki. Első meg-

1. táblázat

A közép- és hosszútávú bolgár prognózismodell információáramlásai

	I. blokk	II. blokk	III. blokk	Kijövő információk
Exogén információk	Alapvető népgazdasági arányok és hatékonysági mutatók dinamikája	Közvetlen ráfordítási együtthatók dinamikája	Késleltetett együtthatók dinamikája	—
I. blokk (hosszútávú prognózis)	—	A teljes termelés és a végső fogyasztás volumene és struktúrája	Ágazati hatékonysági mutatók, fogyasztási struktúra stb.	A népgazdasági fejlődés volumenindexei 1995-ig
II. blokk (középtávú konkretizálás)	—	—	Közvetlen anyagi ráfordítások mátrixa	Közvetlen anyagi ráfordítások mátrixa (ÁKM) 1980–1985
III. blokk (középtávú optimalizálás)	A társadalmi termelés hatékonyságának középtávú változásai	A termelés volumenének változása célok és ágazatok szerinti bontásban	—	A népgazdaság optimális növekedésének részletes prognózisa a VII. ötéves tervidőszakra

közelítésben aggregáltabb szintű „próba-modell" becslésével, ennek elfogadható numerikus eredményeivel, a célváltozók és eszközváltozók megfelelő kiválasztásával, illetve szimulációs kísérletek lefuttatásával győződtek meg a modell alkalmazhatóságáról.

3. Rövid- és középtávú népgazdasági modellek

Mint az a korábbi konferenciák tapasztalatai alapján várható volt, a legtöbb előadás az éves szintű, közép-, illetve rövidtávú népgazdasági modelleket ismertette, úgy tűnik tehát, hogy az ökonometriai modellezés súlyponti témája nem változott az elmúlt évekhez képest. A fejlődés inkább a modellek növekvő méretén, a vizsgált problémák szélesebb skáláján és az egyes folyamatok árnyaltabb leírásán keresztül mérhető le.

A pozsonyi VVS számítóközpontban már évek óta folynak a VVS ökonometriai modellsorozat munkái, így nem volt meglepő, hogy KOLEK, J. *A szlovák népgazdaság VVS–6 elemző-prognosztizáló modellje* címen egy újabb modell kidolgozásáról számolt be. A VVS–6 modell közvetlen előzménye a VVS–4 szlovák modell volt, amely 52 egyenletet és 138 változót tartalmazott 4 blokkba csoportosítva. (A VVS–5 modell az egész csehszlovák népgazdaságot írta le, ezért közvetlenül nem hasonlíthatók össze.) Mivel az elmúlt időszakban a népgazdaság működésének újabb törvényszerűségeit tárták fel, a főbb folyamatokról újabb adatok álltak rendelkezésre, bővült a felhasználható programok köre, ennélfogva célszerűnek látszott a modell újabb változatának kidolgozása, ami a VVS–6 modell nevet kapta.

A VVS–6 modell célja a rövid- és középtávú előrejelzés. Mivel csak a szlovák népgazdaságot írja le, fontos jellemzője, hogy nem tartalmaz külkereskedelmi egyenleteket. A modellspecifikáció kialakításánál a marxi elméletet és a Csehszlovákiában kialakított konkrét irányítási mechanizmust tekintették kiinduló pontnak és természetesen felhasználták a korábbi hasonló célú modellezés során szerzett tapasztalatokat is. A modell méreteit és fő jellemzőit az előadás az alábbi táblázat segítségével világította meg:

Megfigyelési időszak: 1959–1978 évente
A modell típusa: rekurzív, nem-lineáris
Becslési módszer: klasszikus legkisebb négyzetek

Felhasznált programok: CORAL, TRENDOPT, LOWAIND, OLS, TABULKA, DYNPROG

A blokkok száma: 9 (állóeszközök, foglalkoztatottak létszáma, termelési egyenletek, termelékenységi összefüggések, lakossági jövedelmek képződése, kiskereskedelmi forgalom, nem-termelő szféra, nem-termelő fogyasztás, beruházások.)

Az egyenletek száma: 122.

Ebből:

a) Regressziós egyenlet	24
ebből: lineáris	20
nem lineáris	4
b) Azonosság	98
ebből: additív	52
multiplikatív	46

A változók száma: 260

Ebből endogén	122
késleltetett endogén	30
folyó exogén	72
késleltetett exogén	8
fiktív (mesterséges)	28

Szektorbontás:

a) Termelés és ahhoz kapcsolódó összefüggések:

- ipar
- építőipar
- mezőgazdaság
- egyéb

b) Egyéb – kiskereskedelmi forgalom: 8 árucsoport.

A VVS—6 modell általános ismertetésén túl az előadás viszonylag részletesen foglalkozott a modellben központi jelentőségű számszerűsített termelési függvényekkel. A termelési függvények specifikálásakor hagyományos Cobb-Douglas-függvényből indulnak ki, de feltételezik, hogy a termelést meghatározó tényezők hatásukat csak több időszakra elosztva, késleltetve fejtik ki, így egy osztott késleltetésű modellhez jutnak. Ez az ismert *Koyck*-transzformáció után a

$$H_i = (1 - c)a \bar{F}_i^\alpha Z_i^{1-\alpha} e^{rt} + H_{i_{t-1}}$$

vagy multiplikatív esetben a

$$H_i = (aF_i^\alpha Z^{1-\alpha} e^{rt})^{1-c} H_{i_{t-1}}^c$$

alakot ölti. Ezek a formák szerepelnek a modell termelési függvényei gyanánt, de meg kell említeni, hogy az állóeszközök közt csak a gépi állóeszközöket veszik figyelembe, a mezőgazdasági termelési függvénynél időjárási indexet és tápanyagigényt specifikálnak, és egyes kiugró értékek elsimítása érdekében vakváltozókat is használnak.

A numerikus eredmények elemzésekor összehasonlítják az egyes ágazatok paramétereit és ezekből következtetések vonhatók le a fejlődés lehetőségére nézve. A becslések statisztikai mutatói kielégítők voltak, az R^2 (többször korrelációs együttható) az esetek nagy részében 0,9 felett volt, a relatív hiba pedig 4% alatt maradt. Ennél fogva a kapott eredményeket jónak ítélik és így az előrejelzések, — amelyek részletes ismertetése egyébként nem volt tárgya az előadásnak — a gyakorlat számára hasznosítható eredményeket adtak.

A csehszlovák VVS-modellek a múltban is figyelmet szenteltek a külkereskedelem alakulásának. I. ŠUJAN (VVS, Pozsony) *A csehszlovák gazdaság külkereskedelmi befolyást tükröző modellje* c. tanulmánya olyan modellt (CEM = central econometric model) ismertet, amely kifejezetten a külkereskedelmi összefüggések szerepét tükrözi egy tervezett nagyobb modellrendszer keretei között, s így valójában az előbbi, VVS—6 modell kiegészítéseként is tekinthető.

A most bemutatott modell-variáns (CEM—1,2.) 111 egyenletből áll és 169 változót tartalmaz, amelyek 20 blokkot képeznek. Ebből 7 blokk a külkereskedelmi egyenleteket, 7 blokk belföldi gazdasági tevékenységeket ölel fel; 6 blokkban különböző mutatók foglalnak helyet. Így tehát az összefüggések nagy része azonosság vagy mérlegösszefüggés. Ilyenek pl. azok is, amelyek azoknak a makroökonómiai változóknak a várható értékét adják, amelyek feltételezés szerint az export és import alakulását megszabják (nemzeti jövedelem, beruházások, fogyasztás stb.). Ezeket a várható aggregátumokat igen egyszerűen úgy számítják, hogy a változó $(t - 1)$ időszaki értékét az illető változó átlagos növekedési rátájával megszorozzák (ez pedig az előző négy évi adat súlyozott átlaga).

A modell a tőkés-viszonylatra és a szocialista viszonylatra külön ír fel egyenleteket. A szocialista országokba irányuló export egyenletében a keresleti tényezőt a hat KGST-partnerország importja jelenti; a kínálati faktort a nemzeti jövedelem várható nagysága képviseli, a készletváltozásoknak és a tőkés országokba szállítandó áruk értékének a levonásával. A tőkés országokba irányuló export egyenletében hasonlóképpen a tőkésországok importja szerepel mint keresleti változó; szerepel benne a belföldi árindex és a külkereskedelmi árindex aránya a kiviteli hajlandóság kifejezésére, trend-változó a csehszlovák tőkésexport-lehetőségek romló tendenciájának a kifejezésére, sőt karakterisztikus változó is (a hullámzások figyelembevétele céljából).

Az import-egyenletek szerkezete az export-egyenletekétől eltérő. Az alapvető feltételezés az, hogy az importot lényegében a központi tervezés keresleti függvénye határozza meg. Ennek megfelelően tehát olyan keresleti tényezők jöhetnek számításba, mint a rendelkezésre álló valutatartalékok, ill. az exportból származó valutakövetelések, valamint az importárak. Mindezt az elvi elképzelést természetesen erősen befolyásolják az importhelyettesítés adottságai és a tényleges importfeltételek különféle — nem tisztán gazdasági jellegű — tényezői. Magát az importot a modell négyes bontásban kezeli: nyersanyagok és energia, gépi berendezések és felszerelések, élelmiszerek, fogyasztási cikkek; mind a négy csoport bontva szocialista és tőkés viszonylatú import szerint.

A nyersanyag behozatala szempontjából a bruttó nemzeti termék mennyisége határozza meg a keresletet; tőkés viszonylatban a tőkés export, szocialista viszonylatban a szocialista export, az importárak és a további nyersanyagbehozatal változói járulnak ehhez.

A beruházási javak mind tőkés, mind szocialista importja egyenletében a beruházások változója a döntő; mindkét esetben szerepet játszik a szocialista, illetve a tőkés viszonylatú külkereskedelmi egyenleg előző évi értéke, a tárgyidőszaki export, a gépek és felszerelések beruházási árindexe és a gépipari termelés (tőkés viszonylatban), valamint a készletváltozás korábbi értéke (szocialista viszonylatban).

Az élelmiszerimportot a modell szerint mind tőkés, mind szocialista viszonylatban nagyjából ugyanazok a tényezők magyarázzák: a belföldi élelmiszerfogyasztás, a mezőgazdasági termelés és az import-árindex mint a keresletet leginkább befolyásoló tényezők. Szocialista viszonylatban a korábbi időszaki élelmiszerbehozatal csatlakozik ehhez (feltehetően több évre szóló áruszállítási szerződések figyelembevétele céljából). Tőkés viszonylatban (negatív előjelű paraméterrel) viszont a szocialista élelmiszerbehozatal változója szerepel, nyilván azon reális meggondolás folytán, hogy tőkés viszonylattól a gazdaság csak olyan élelmiszer-cikkeket szerez be, amelyeket szocialista viszonylatból nem tud beszerezni. Emellett tőkés viszonylatban érthetően az előző évi külkereskedelmi egyenleg és a tárgyévi tőkés export játszik szerepet.

A fogyasztási cikkek importja területén mindkét viszonylatban döntő a kereslet nagyságára utaló belföldi forgalom és az import-árindex; mindkét viszonylatban szerepel a folyamat tartósságára utaló trend-tényező; tőkés viszonylatban ezenkívül a fogyasztási cikkek előző időszaki importja is szerepel még keresleti tényezőként, az előző időszakban tapasztalt készletváltozás, a tőkés viszonylatú előző időszaki külkereskedelmi egyenleg és a tárgyévi tőkés export mellett.

A fentiek szerint (nagyjából árufőcsoportok és viszonylatok szerint) bontott összefüggéseket megfelelő azonosságok aggregálják összes exporttá és importtá, illetve ezen az alapon származtathatók a megfelelő külkereskedelmi egyenlegek.

A modell külkereskedelmi egyenletcsoportjai a külkereskedelmi összefüggéseknek csak egyharmadrészét teszik ki. Az egész modellnek a külkereskedelem csak egy blokkja. A specifikáció alapján úgy tűnik azonban, hogy a modell lényegében külkereskedelmi modell, amelynek többi blokkja (mérlegösszefüggéseken, súlyozási sémákon és identitásokon kívül sztochasztikus egyenleteket csak igen gyér számban tartalmazó blokkok) inkább csak a népgazdaság egészével, illetve egyéb makroökonómiai modellekkel való konzisztens kapcsolatot, a szemlélet egységét hivatott biztosítani.

A sztochasztikus egyenletek az állótőkefelhalmozásra (ún. produktív és nem-produktív szektor), a termelésre, a fogyasztásra és a beruházásokra vonatkoznak. Az állóeszközfelhalmozás két egyenlete *Almon*-súlyozású elosztott késleltetésű függvény. Az exponenciális alakú *termelési függvény* specifikációjakor különbséget tettek a tényleges és a potenciális termelés között; magát a fogalmat a bruttó társadalmi termék fejezi ki. A potenciális társadalmi termék lényegében egységnyi helyettesítési elaszticitású Cobb—Douglas-függvény a hagyományos két termelési tényezővel, amikoris a kettő közül a termelés munkaintenzitása magasabb mint a tőkéé, ami a munkaerő erősebb korlátozó tényezői szerepére utal. A semleges technikai fejlődést exponenciális trend fejezi ki. A tényleges bruttó társadalmi termék hasonlóképpen exponenciális egyenletében egyébként a potenciális társadalmi termék magyarázó változóként szerepel, más változók mellett, amelyek az output korlátozó feltételeit hivatottak rögzíteni, éspedig a trendtől való eltérés alakjában. Ezek: a nyersanyag-import, villamosenergia-ellátás, az anyagráfordítások aránya, készletváltozások; továbbá két másik — igen lényeges — magyarázó változó. Egyikük a korábbi hatásokat közvetítő előző időszaki bruttó termelés változója (*Koyck*-féle transzformáció eredményeképpen); a másik a mezőgazdasági termelésben még ma is jelentős szerepet játszó időjárási változó. A bruttó termelés dezaggregálása fix részarányok segítségével történik. A termelési függvényhez hasonlóan a *fogyasztási függvény* is aggregált éspedig nagyjából *Houthakker—Taylor*-típusú. A személyes rendelkezésű korábbi reáljövedelem, a reáljövedelem-növekedés és a korábbi fogyasztás mellett két korlátozó tényezőt kifejező faktor is szerepel: a tartós fogyasztási cikkek gyártása és az élelmiszerimport.

Az aggregált *beruházási függvény* szerkezete némileg a termelési függvény szerkezetéhez hasonlít. Különbséget tesz jóváhagyott és tényleges beruházások között. A jóváhagyott beruházások pozitíve függnek a korábbi évek beruházásaitól; negatív összefüggés tapasztalható a jóváhagyott beruházások és a befejezetlen beruházások állománya között. A jóváhagyott beruházások éppen úgy szerepelnek magyarázó változóként az összes beruházások egyenletében, mint a potenciális output a tényleges bruttó termelés egyenletében; ezen kívül a beruházások még egy sor más — megint csak korlátokat kifejező — változótól függnek (gépipari termelés, gépimport, forgóeszközök, külkereskedelmi egyenleg).

A modell rekurzív jellegére való tekintettel a becslést a legkisebb négyzetek klasszikus módszerével végezték az 1960—1977 évek bázisán. A modell elsőrendű célja tehát a külkereskedelmi összefüggések eddiginél részletesebb vizsgálata, további célja pedig a szűk keresztmetszetek, egyensúlyhiányok feltárása volt.

J. Mencinger (Jogtudományi Egyetem Közgazdasági Intézete, Ljubljana) *A gazdaságpolitika értékelése negyedéves ökonometriai modellel* c. előadása egy középnagyságú, 112 összefüggésből álló, negyedéves adatokon alapuló ökonometriai modellről (EIPF—IV) szól.

A tanulmány első része leírja magát a modellt, bemutatja annak jellemzőit; a második rész a jugoszláv gazdaság 1970-es években történt fejlődését tekinti át; a harmadik rész a modellnek a tervezésben és a gazdaságpolitikai szimulációban való felhasználásáról szól.

A modell kilenc blokkban vizsgálja a gazdaság összefüggéseit, éspedig a következő bontásban:

— árak és bérek (20 egyenlet),
— foglalkoztatottság és termelő kapacitások (13 egyenlet),
— a lakosság jövedelmei és kiadásai (18 egyenlet),
— beruházások és állóeszközállomány (6 egyenlet),
— forgóeszközök (6 egyenlet),
— külkereskedelem (12 egyenlet),
— egyéb gazdasági tevékenységek (18 egyenlet),
— pénz- és bankügyek (9 egyenlet),
— adózás, költségvetés (10 egyenlet).

Az éves idősorok az 1970—1979. évi időszakot ölelik fel.

A modell ún. „élő modell": negyedévenként újabb adatokkal kiegészítve újrabecsülik, változatlanul hagyva az eredetileg specifikált alakot. Időnként azonban kisebb mértékű újraspecifikációra is sor kerül.

A modellt eddig is széleskörűen felhasználták, elsősorban a rövidtávú tervezés segédeszközeként. Ennek érdekében mindenekelőtt előrejelzéseket végeztek az 1980-as évre. A gyenge előrejelzési teljesítmény a világgazdasági környezetet számszerűsítő exogén tényezők pontatlan előrejelzésének volt a következménye. Hasonlóképpen sztochasztikus szimulációs kísérleteket végeztek az 1980 évi gazdaságpolitikai intézkedések hatékonyságának a vizsgálatára. A szimulációs kísérletek alapján sikerült a jugoszláv gazdaságban végbemenő változások természetéről is bizonyos következtetéseket levonni. A *Wicksell—Slutsky—Frisch*-elmélet érvényességének vizsgálata arra a következtetésre vezetett, hogy a gazdaságban mutatkozó rövid lejáratú ciklusokat a gazdasági mechanizmus szerkezete, és nem az institúcionális változások szabják meg.

A szerző a fejlődő gazdaság fontosabb teljesítményi mutatószámai alapján vizsgálta a jugoszláv gazdaság alakulását az 1970-es években. A gazdasági növekedés általában megfelelt a hasonló fejlettségű országok növekedési ütemének; a reálbérek és a termelékenység növekedése valamennyire el is maradt ezektől. A stabilitás viszonylag kielégítő volt még az 1973. évi olajválság után is. Az output növekedése a munkaerő-problémákat gyakorlatilag megoldotta a külföldi munkavállalási lehetőségek csökkenése ellenére is.

Kevésbé mondható sikeresnek az árstabilitás; 20%-os átlagos emelkedés volt tapasztalható a fogyasztói áraknál és 15%-os a termelői áraknál. Ez is csak a piaci mechanizmus hatását rontó szigorú adminisztratív intézkedésekkel volt tartható.

Állandóan nőtt a fizetési mérleg deficitje, egész 15 milliárd dollárig, aminek fő oka a nyersanyag-válság. 1973-ig a fizetési mérleg pozitív volt; ezt követően csökkent Jugoszlávia részesedése is a világimportban.

Az 1980. évi terv célja: az output viszonylagos dinamikus növekedése (ipar: 6%, mezőgazdaság: 3%); az áremelkedések kontrollja (19%-os a fogyasztói, és 13%-os a termelői áraknál); a fizetési mérleg deficitjének csökkentése 2 milliárd dollárra változatlan import és növekvő export mellett. A gazdaságpolitikai eszközöknek elsősorban a belső kereslet visszaszorítását (mind a fogyasztását, mind a beruházásokét) kell megvalósítaniuk. A deficit csökkentése a központi feladat.

A gazdaságpolitikai eszközök modellezésének fő problémája az, hogy a gazdaságpolitikai változók száma sokkal kisebb, mint ami elvben lehetséges lenne. Közöttük ugyanis sok olyan van, amely még közvetve sem számszerűsíthető. Így ezek a változók csupán a gazdaságban jelenleg érvényesülő (és nem a lehetséges) hatásokat ragadják meg. További nehézség, hogy a gazdaságpolitikai célok éves adatok formájában vannak megfogalmazva, az idősorok ugyanakkor negyedéves adatbázison épülnek. Harmadsorban: a gazdaságpolitikai mutatók egy része további exogén változók hatásától függ, értékük azonban az elemzés időpontjában még ismeretlen. Ismeretesek mindenesetre a következő célok és kilátások: a mezőgazdasági termelés növekedése, az OECD-országok ipari termelésének stagnálása, a világpiaci áraknak, valamint a jugoszláv export- és importáraknak korábban megfigyelt trendje, valamint a tervszámok körébe sorolható néhány mutató.

Megjegyzendő, hogy bár a modellben a nominálbér és a beruházások endogén változók, az előrejelzéskor és a gazdaságpolitikai elemzéskor exogénnek kellett tekinteni őket, minthogy 1980-ban adminisztratív módon közvetlenül határozták meg. A gazdaságpolitikai intézkedések folytán a modell fontosabb változóira gyakorolt hatásokat (a sztochasztikus szimuláció, illetve előrejelzés eredményei) 1979 utolsó negyedévétől 1980 utolsó negyedévéig táblázatos anyag mutatja be. Ennek lényege, hogy háromféle alternatív gazdaságpolitikai elképzelést futtattak le a modellel:

a) gazdaságpolitikai beavatkozás hiánya: a korábbi trend egyszerű extrapolációja;

b) ,,stabilizációs" gazdaságpolitika;

c) a dinár leértékelése 1980 júniusában.

Ennek a három változatnak a hatását figyelték meg a modell következő változóira: az ipari termelés növekedése, a termelői árak és a fogyasztói árak változása, a termelő szektor foglalkoztatottsága, fogyasztási kiadások, import és export. Az 1979 IV. negyedévétől egész 1980 II. negyedéve végéig rendelkezésre álló tényszámok alapján az állapítható meg, hogy az említett három gazdaságpolitikai feltételezés lejátszása nem adott olyan szimulációs eredményeket, amelyek valamennyi felsorolt változóra és az egész előrejelzési időszakra a tényszámokhoz általános érvénnyel a legközelebb állnának; egyik változó esetében a gazdaságpolitikai célú beavatkozások mellőzése, más esetben a ,,stabilizációs" politika, ismét más esetben a leértékelési politika adott a tényszámokhoz legközelebb eső eredményt. Éppen ezért, mert a főcél: a fizetési mérleg javulása nem volt kellő mértékű, évközi tervmódosítás vált szükségessé.

Azok között a modellek között, amelyek a gazdaság aktuális problémáira, a gazdaságirányítással és tervezéssel való összefüggések megoldására keresnek választ, magyar vonatkozású is szerepelt; szerzője amerikai közgazdász. Ezzel a témakörrel E. A. Hewett-nek, a texasi egyetem (Austin) professzorának *Magyarország ökonometriai modellje endogén gazdaságpolitikai változókkal* c. előadása foglalkozott.

A modell viszonylag kisméretű; 21 összefüggésből áll. Adatsorai az 1960—1978. évi időszakot fogják át. Újdonság mindenesetre az, ahogyan a gazdasági tervezés és a gazdaságirányítás figyelembevételét megkísérli. A modellben ugyanis azoké az egyenleteké a vezető szerep, amelyek a gazdasági teljesítmény változása folytán szükségessé váló tervmódosításokat (a tervezők reakciófüggvényei) fogalmazzák meg. A modell többi egyenlete viszont a tervek módosításának a jövőbeli gazdasági teljesítményekre gyakorolt hatását fejezi ki.

A modell változói három csoportba sorolhatók: endogén változók, exogén változók és tervezési változók. A 21 endogén változón kívül 7 exogén és 3 tervezési változót tartalmaz a modell. Az összefüggések közül:

- a tervezők reakciófüggvényeit fejezi ki 5 egyenlet,
- külkereskedelmi összefüggéseket fejez ki 6 egyenlet,
- fogyasztási összefüggést 1 egyenlet,
- termelést, felhalmozást 5 egyenlet,
- mérlegösszefüggéseket, trendet 4 egyenlet.

Mint a számadatok mutatják, a súlypontot a modell a tervezői magatartás változására és a külkereskedelmi összefüggésekre helyezi.

A tervezői reakciófüggvények függő változói, az ún. tervezési változók: a nemzeti jövedelem, a fogyasztás és a beruházások tervezett és tényleges alakulása közötti különbség: arra felelnek tehát, hogy ez a különbség milyen változók befolyása következtében jött létre. A reakciófüggvények segítségével meghatározott változók egyes egyenletekben azután magyarázó változóként szerepelnek.

A súlyt az egyenletrendszerben a külkereskedelmi összefüggések képviselik. Két-két egyenlet a dollár-, illetve rubelviszonylatú exportot és importot magyarázza, míg további két egyenlet a dollár-, illetve rubelviszonylatú külkereskedelmi egyenleget határozza meg.

A rubelviszonylatú export az alapvető feltételezés szerint a rubelviszonylatú import ellentétele: alakulását egyedül a tárgyévi, valamint az egy- és két évvel korábbi rubelviszonylatú import határozza meg. A dollárviszonylatú exportot részben keresleti, részben kínálati tényezők befolyásolják. Magyarország esetében a kínálati hajlandóságot a GDP növekedése és a két évvel korábbi dollárviszonylatú külkereskedelmi egyenleg (az utóbbi természetesen negatív előjellel), a keresleti hatást viszont az OECD-országok tényleges és tervezett GDP-je közötti eltérés fejezi ki. Az import vonatkozásában a két egyenlet azonos magyarázó változókkal dolgozik: a GDP nagysága mint keresleti tényező, az előző évi (dollár-, ill. rubelviszonylatú) egyenlet (a dollárviszonylat esetében ez feltétlenül a korlátozó feltételt jelenti), valamint a beruházások eltérése az előrejelzett beruházási értéktől, annak a felismerése alapján, hogy importunkat nagyrészt beruházási szükségleteink szabják meg.

A két egyenleget a modell nem tekinti egyszerűen az export és az import különbségének, hanem sztochasztikus összefüggés alakjában magyarázza; a dollár-, ill. rubelviszonylatban mutatis mutandis úgy, hogy az 1970 = 100 alapú export-értékindex és a hasonló alapú import-értékindex (a volumen és árindexek szorzata) segítségével sztochasztikus függvényként tekinti.

A fogyasztást (globálisan) a GDP alakulása (a tényadatnak a tervszámtól való eltérése), az export növekedése (mint korlátozó tényező, tekintettel arra a szerepre, amelyet az export mint az import ellentétele betölt), valamint a tervezett és tényleges fogyasztás közötti különbség határozza meg.

A nemzeti jövedelem a GDP-nek sztochasztikus függvénye. A két hagyományos termelési tényező közül a foglalkoztatottságot exogén változóként kezeli a modell, míg az állóeszközállomány növekedése az elmúlt két év beruházásainak a függvénye. A beruházások növekedését ugyanakkor a tényleges és tervezett beruházások közötti eltérés, az export és a GDP határozza meg. Az egy főre jutó bruttó hazai terméket — ami a termelékenységet juttatja kifejezésre — a nettó tőkeállomány és a trendtényező függvényének tekinti a modell.

A rendszer exogén tényezőktől való függését, érzékenységét szimulációs kísérletek vizsgálják.

A konferencián megkülönböztetett érdeklődés kísérte W. WELFE: *A lengyel gazdaság W—3 modelljének újabb változata: struktúra becslés, szimuláció* c. előadását, amely a Lódzi Egyetem Ökonometriai és Statisztikai Intézetében kidolgozás alatt álló, legújabb népgazdasági szintű ökonometriai modellt ismertette.

A W—3 modell annak a modellsorozatnak a tagja, amelyen a lengyel ökonometriai kutatások egyik igen jelentős, de távolról sem egyedüli műhelye, a Lódzi Ökonometriai és Statisztikai Intézet 1973 óta rendszeresen dolgozik. Ez a modell 1977 óta volt „működőképes" modell; a fokozatosan ismertté váló új adatokkal minden évben bővítették az adatbázist, amelynek kezdő éve 1960. Az utóbbi években egyre nyilvánvalóbbá vált, hogy ha a modellt előrejelzésre és a gazdaságpolitikai eszközök várható hatásának szimulációjára is fel akarják használni, akkor át kell alakítani úgy, hogy tükrözze a lengyel gazdaságban időközben bekövetkezett változásokat.

Jelenlegi formájában több mint 400 összefüggést tartalmaz, amelyeknek mintegy fele sztochasztikus egyenlet. A dezaggregáció 15 ágazatot különböztet meg; ebből kettő a nem-anyagi ágazatokat öleli fel.

A W-modellek kezdettől fogva igen éles megfogalmazásban vetették fel az ökonometriai modellspecifikáció egyik igen lényeges kérdését: keresleti vagy kínálati orientációjú legyen-e a modell? A hetvenes évek elejének megfelelő szemlélet szerint a W-modellek döntően keresleti szemléletűek voltak: a lakossági fogyasztást, a beruházásokat endogén változóként határozták meg. Az exportkereslettel együtt ezek a faktorok magyarázták az ipari és mezőgazdasági outpoutot. Ezek az outputok határozták azután meg a népgazdaság munkaerő szükségletét és természetesen az állóeszközök iránti igényt is. Az import és a készletalakulás a kiegyensúlyozó tényező szerepét játszották; az árak, a bérek változása és a beruházások elosztása ugyanakkor az eszközváltozók szerepét.

A lengyel gazdaságban fellépő egyensúlyhiányok, feszültségek viszont ismét a kínálati orientációjú modellek szükségességét vetették fel, vagy legalábbis olyan vegyes típusú modellek konstrukcióját sürgetik, amelyek mindkét oldalról feltárják az egyensúlyhiányokat, feszültségeket okozó tényezőket, így mindenekelőtt a nyersanyagellátás, az import nehézségeit. A W—3 modellt alkotói ilyen vegyes típusú modellnek szánják.

A modellnek 12 blokkja van; kevés kivétellel (kísérletképpen alkalmazott nem lineáris fogyasztási és termelési összefüggések) lineáris egyenletekből áll. A végső kereslet és a nettó output között a közlekedést az input-output blokk teremti meg.

A modell 12 blokkja a következő:

— nettó anyagi termelés és az elosztott nemzeti jövedelem,
— a lakosság fogyasztása,
— forgóeszköz-készletek alakulása
— export,

— import,
— bruttó output,
— nettó output,
— munkaerő és foglalkoztatottság,
— állóeszköz-felhalmozás,
— beruházási ráfordítások,
— bérek,
— árak.

A vegyes típusú modell fogalma azt a követelményt vonja magával, hogy a 12 blokk egyenleteit (kevés kivétellel, így pl. a külkereskedelem, bérek, árak egyenleteit) keresleti és kínálati variánsban is megfogalmazzák.

Példaképpen vegyük a *lakossági fogyasztás* specifikációját. A fogyasztási függvény alakja a *keresleti* verzióban:

$$CK = a_0 + a_1 CK_{-1} + a_2 Y + a_3 PCKR + e_c,$$

ahol

CK = a K-adik árucikk fogyasztása a lakosság részéről,
Y = a személyes rendelkezésű reáljövedelem,
$PCKR$ = az árucikk fogyasztói ára.

Ugyanez *kínálati* verzióban:

$$CK = b_0 + b_1 QH + b_2 MH + b_3 EH + e_c,$$

ahol

QH = a termelő ágazatok outputja,
MH = áruimport,
EH = áruexport.

Másik példa: a *bruttó output iránt megnyilvánuló kereslete:*

$$QH = a_0 + a_1 CK + a_2 JK + a_3 QD + a_4 EH + e_q,$$

ahol

QH = a termelő ágazatok outputja,
CK = árucikkek fogyasztása a lakosság részéről,
JK = állóeszköz-beruházások,
QD = az átvevő ágazatok termelő fogyasztása,
EH = áruexport.

A jobb oldali tényezők tehát a megnyilvánuló igényeket fejezik ki.

Ugyanez *a kínálati oldalról:*

$$QH = b_0 + b_1 XH + b_2 MH + b_3 QS + e_q',$$

ahol

XH = az ágazatok nettó anyagi termelése,
MH = áruimport,
QS = a kibocsátó ágazatok termelő fogyasztása.

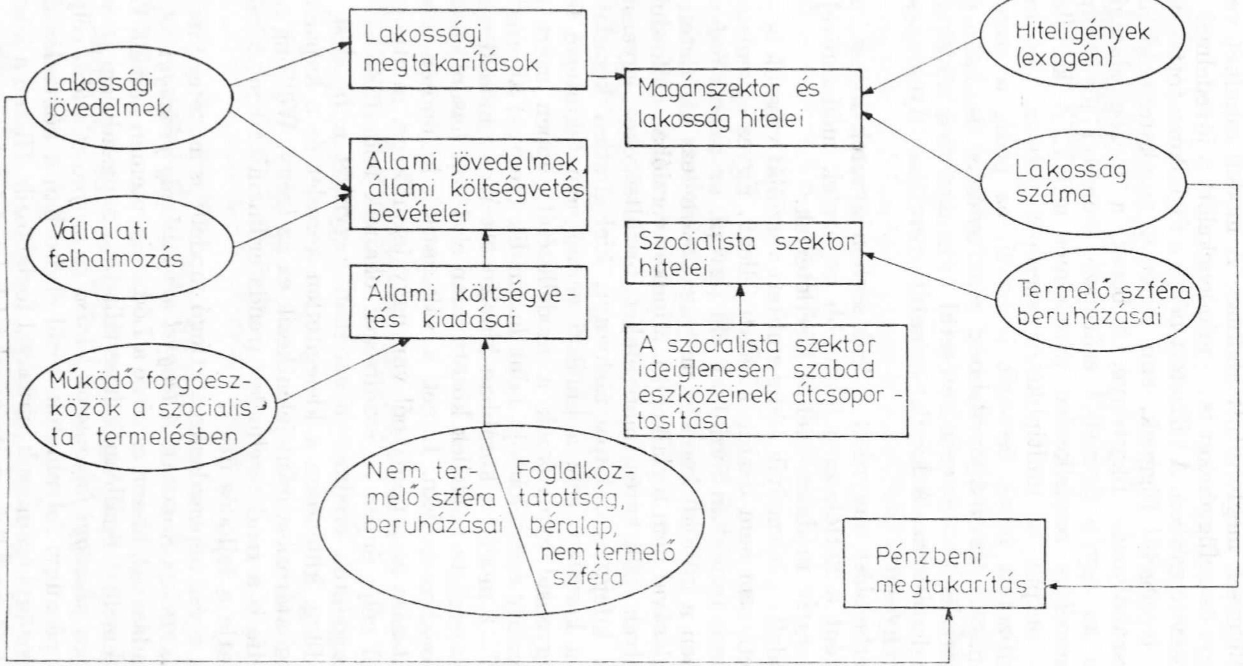
A modellnek mind a keresleti, mind a kínálati verziója önmagában interdependens rendszer, amely nagyjából ugyanazokat a változókat alkalmazza, csak az összefüggések megfordított alakúak. A modell mindkét verziója tartalmaz pénzügyi összefüggéseket is — mindenekelőtt a jövedelmek és az árak alakulásával összefüggésben. A kifizetett bérek a foglalkoztatottságtól és az átlagos havibér összegétől függnek, ami ismét a munkatermelékenység és a központi bérszabályozás függvénye. A bérek, a mezőgazdasági termelők jövedelmei és az egyéb forrásból származó személyi jövedelmek együtt a lakosság személyes rendelkezésű jövedelmét adják. A kereslet-orientált verzióban az output a multiplikátor szerepét játssza: az output növekedése a kifizetett bérek összegét is emeli, ez pedig a személyes rendelkezésű nominál- és reáljövedelmek emelkedésére is hat, ami ismét a fogyasztói keresletet — és ezen keresztül — az ágazatok növekvő termelésigényét is meghatározza. A kínálat-orientált verzióban ilyen visszacsatolási hatás nem érvényesül.

A paraméterbecslést nagyrészt a legkisebb négyzetek klasszikus módszerével, helyenként a kétfokozatú legkisebb négyzetek módszerével végezték. Helyenként iteratív módszerekkel is kísérleteztek.

A W—3 modell — bármelyik eddig említett verzióját vesszük is — sem nem tisztán keresleti, sem nem tisztán kínálati jellegű. Egyes egyenletek mindkét verzióban azonos formában fordulnak elő (így pl. az export-függvény, mely mindkét esetben a külföldi kereslet megragadására tesz kísérletet; a belföldi kínálat megoldásával nem foglalkozik). Mindkét verzióban előfordulnak olyan változók, amelyek szűk keresztmetszeteket, feszültségeket, egyensúlyhiányokat juttatnak kifejezésre: kapacitáshiányt, kielégítetlen keresletet, és így tovább. Sem a keresleti, sem a kínálati verzió nem tekintette feladatának ezeknek az egyensúlyhiányoknak a modellezését; éppen ezért merült fel a modell-egyensúly specifikációja mint harmadik (vegyes) alternatíva. Ezzel a lépéssel a W—3 modell a korábban kidolgozott W—1 modell nyomdokába lép, amely a szocialista modellek között talán első volt hasonló összefüggések kísérleti megfogalmazásában. Ennek a változatnak különösen a szimulációs kísérletek lejátszása szempontjából van nagy jelentősége, minthogy ez utóbbiak elsőrendű célja éppen a feszültségek okainak felderítése és vizsgálata. A további vizsgálatok eredménye azonban nagyrészt a becslési módszerek finomításától függ, különösen a kielégítetlen kereslet és a kapacitáshiányok pontosabb meghatározása iránt jelentkezik ez az igény. Wölfling modelljéhez hasonlóan Welfe is a rendszerelméleti (rendszerdinamikai) modellek felé való közelítésben látja a fejlődés útját.

Bár nem az egész népgazdaságot átfogó modellt ismertetett, itt kell foglalkoznunk N. Lapinska-Sobczak *A lengyel népgazdaság pénzügyi folyamatainak modellje* c. előadásával, hiszen ez része a Lódzi Egyetemen készülő W-modellek rendszerének, emellett önállóan is használható a népgazdasági tervezés szempontjából fontos *pénzügyi folyamatok leírása és prognosztizálása* céljára.

A modell a pénzügyi folyamatok közül elsősorban a közvetlen árumozgást nem követő pénzügyi áramlások leírásával foglalkozik. Hiszen a közvetlen árumozgást az ÁKM modellek segítségével jól le lehet írni, és ugyanez a technika alkalmazható a jövedelmi folyamatoknak erre a részére is. A modellben központi szerepet játszik a költségvetési bevételek és kiadások leírása és előrejelzése, amellett részletesen foglalkozik a banki jellegű műveletekkel (hitelezés, biztosítás stb.), különös súlyt helyezve a vállalatok álló- és forgóeszközellátását biztosító pénzügyi műveletekre. A modell 5 különböző típusú gazdálkodó egység feltételezéséből indul ki. Ezek:


Lakossági jövedelmek
Lakossági megtakarítások
Magánszektor és lakosság hitelei
Hiteligények (exogén)
Állami jövedelmek, állami költségvetés bevételei
Lakosság száma
Vállalati felhalmozás
Szocialista szektor hitelei
Állami költségvetés kiadásai
Termelő szféra beruházásai
Működő forgóeszközök a szocialista termelésben
A szocialista szektor ideiglenesen szabad eszközeinek átcsoportosítása
Nem termelő szféra beruházásai
Foglalkoztatottság, béralap, nem termelő szféra
Pénzbeni megtakarítás

1. ábra

— szocialista vállalatok,
— magántulajdonú vállalatok és a lakosság,
— bankok,
— állami költségvetés,
— biztosító intézetek.

A fenti szektorok közti pénzáramlások fontosabb, modellezett irányát az 1. ábrán látható blokkséma mutatja be.

Az előadás részletesen foglalkozott a becslési fázissal és annak fontosabb eredményeivel is. A tesztelés során a linearitást vizsgáló próbák megerősítették a kiinduló hipotézisek helyességét, mígnem a paraméterek stabilitásával kapcsolatos vizsgálatok — amelyek különböző hosszúságú minták alapján történő becslések eredményeire támaszkodnak — azt mutatták, hogy a vizsgált időszakban a specifikált kapcsolatok nem tekinthetők minden esetben stabilnak. A különböző hosszúságú mintákból ezek után azt fogadták el, amely a jelenlegi struktúrához a legközelebb áll, azaz az utóbbi évek elegendő hosszúságú mintájára épültek a becslések. Az előrejelzések horizontja az 1980—85-ös időszak; az exogén változók prognózisai trendekkel (többnyire lineáris trendekkel) készültek, a prognózisok során gyakorta szükséges volt konstans illesztés alkalmazása. Ennek ellenére az előrejelzések az esetek jó részében irreális eredményekre vezettek, aminek oka — az utóbbi évek ismert eseményein túlmenően — abban keresendő, hogy a mintaidőszak elején éppen a vizsgált pénzügyi folyamatok másként érvényesültek mint az utóbbi években. Így a modell reális felhasználása megköveteli annak újraspecifikálását, természetesen a legújabb tendenciák és adatok figyelembevételével.

4. Módszertani tapasztalatokat összegző előadások

A konferencia egyik meglepő vonása az volt, hogy viszonylag kis számú *módszertani* jellegű előadás hangzott el. Ezek közül azok, amelyek egy-egy konkrét ökonometriai módszertani problémát vizsgáltak, nem szerepelnek ebben az összeállításban, de elhangzott két olyan előadás, amelyek általános, a makromodellezéssel kapcsolatos tapasztalatokat összegeztek; befejezésül ezeket ismertetjük röviden.

JEMELJANOV, A. Sz. akadémikus: *Ökonometriai modellek: kidolgozásuk és megvalósításuk aktuális problémái* c. előadása az Ukrán SzSzK Tervhivatalában évek óta folyó ökonometriai modellezési munka tapasztalataira épült. Ezek közül a modellek közül az UKR—1 a fő népgazdasági mutatók aggregált vizsgálatára, az UKR—2 pedig ágazati szintű elemzésekre készült. Ez utóbbi modell hét összefüggő ágazati blokkból épült fel. Folyamatban van az UKR—3 modell készítése, erről azonban még alig esett szó.

Az előadás az ökonometriai modellezés módszertanából négy olyan problémát exponált, amelyek megoldása, vagy legalábbis részletes vizsgálata hozzásegíthet a modellek javításához. Az első vizsgált probléma a becsléshez szükséges mintanagyság, azaz az idősor(ok) hossza. Maga a probléma ismert: elvben a hosszabb idősor (nagyobb minta) jobb, de gyakorlatilag, az időközben bekövetkező szerkezeti változások miatt, a minta inhomogénné válik. Az előadás számszerű tapasztalatokat mutatott be arra, hogy:

— a gyakorlati példáknál az összefüggések időbeli stabilitása eléggé kétséges;

– az említett időbeli stabilitás erősen függ a választott specifikációtól, és végül
– különböző időhorizontú előrebecslések esetén eltérő lehet a becslés alapjául szolgáló idősor optimális hossza.

Abból, hogy a modellek specifikációja és becslése ilyen érzékeny a rendelkezésre álló idősor hosszára, azt a következtetést vonja le, hogy a modellezés során jobban kell támaszkodni olyan eljárásokra, amelyek a jelenhez közel álló összefüggéseket nagy súllyal veszik figyelembe (pl. a Hellwig-módszer).

A másik felvetett probléma *a modell ok-okozati felépítése* volt. Általánosságban utalt arra, hogy ennek kialakításakor nagy mértékben kell támaszkodni a tervezői gyakorlatra, kiváltképp azért, hogy a téves összefüggések hamis korrelációi elkerülhetők legyenek. Ugyanakkor természetesen egy-egy feladatnak több lehetséges megoldása van: erre példaként öt modell (az UKR–2, a lengyel modell (*Pawlowski*), az M1, az M2 és az M4 modellek) mezőgazdasági termelési egyenleteit hozta fel, amelyek mind más specifikációt követnek, ugyanakkor mind reális, ok-okozati hatásmechanizmust írnak le.

Harmadikként azzal a kérdéssel foglalkozott, hogy a modellezés során az *aggregált*, vagy a *dezaggregált megoldás* kapjon-e elsőbbséget. Ismeretes, hogy egy részletes modell kiépítése két irányú lehet: az aggregált modellből lehet lebontással származtatni a részleteset (ez az általánosabb gyakorlat), vagy lehet részletes dezaggregált modellt specifikálni, és ebből aggregálás útján juthatunk el a megfelelő népgazdasági szintű mutatókig.

Azt, hogy egy feladat kapcsán milyen megoldást kell választani, nyilvánvalóan a konkrét helyzet értékelése után lehet eldönteni, de – és erről érdekes módon az előadásban kevés szó esett – elképzelhető olyan iterációs megoldás (és egyebek közt éppen az UKR–2-nél kísérleteztek ilyennel), amely egyidejűleg és egymással összhangban határozza meg az aggregált és a bontott strukturális mutatószámok értékeit.

Az előadás befejező része azzal a kérdéssel foglalkozott, hogy milyen szerepet játszhatnak az ökonometriai modellek a népgazdasági tervezés és irányítás folyamatában. Az ökonometriai modellek egy *tervezési modellrendszeren belül* adhatják:

– a makromutatók kontroll-számításait és variánsait,
– más modellek (pl. ÁKM-ek, illetve ÁKM-bázisú optimalizációs modellek) számára bizonyos bemenő információkat, és
– egyes népgazdasági, illetve ágazati szintű szintetikus mutatók értékeit.

Az Ukrán SzSzK.-ban, mint más szocialista országokban is, nagy figyelmet fordítanak „automatizált tervezési és elemző rendszer(ek)" kidolgozására.

Ezen belül az ökonometriai modellek:

– hosszútávú prognózist készítenek;
– variánsszámításaik segítségével stratégiai döntéseket készítenek elő;
– hozzájárulnak a hosszabb perspektívájú tervek rövidebb távú megvalósításához.

Kifejezetten az előrejelzés kérdéseivel, ennek matematikai és ökonometriai módszereivel foglalkozott Kádas K., a Budapesti Műszaki Egyetem professzora: *Az egy- és többfokozatú gazdasági előrejelzés modellezése* című tanulmányában.

A gazdasági vezetésnek és a tervezésnek egyre inkább növekszik az információ-igénye. A gazdaságirányításnak tájékozottnak kell lennie a jövőben várható eseményekről, az egyes gazdasági jelenségek közötti számszerű kapcsolatokról, ha azok irányításába tevékenyen bele akar nyúlni. Mindenekelőtt ex post tájékozottságra van szüksége abban a tekintetben: hogy alakult a gazdaság állapota a korábbi időszakban, hogy azután a folyamatok és a gazdasági adottságok ismeretében feltevéseket tehessen ezeknek jövőbeli (ex ante) alakulására is. Az előrejelzés tehát olyan tevékenység, amely a gazdasági információkat mind visszafelé (ex post), mind a jövő irányában (ex ante) kibővíti és dinamizálja. Az előrejelzést végzők tevékenységük során a statisztikai inferenciára, a logika és a döntéselmélet eszközeire támaszkodnak.

A közvetlen előrejelzés magának a vizsgált jelenségnek a múltbeli alakulása alapján tesz feltételezéseket annak jövőbeli alakulására vonatkozólag, a közvetett előrejelzési módszerek viszont egyéb jelenségek alakulása, s ezeknek a jelenségeknek a vizsgált jelenséggel való kapcsolatai alapján következtetnek erre. Magától értetődik, hogy az ökonometriai modell komplex változórendszere alapján való előrejelzés ebbe az utóbbi kategóriába tartozik. Az előbbiekből nyilvánvaló, hogy az előrejelzés szempontjából különös jelentősége van a kapcsolatok megfogalmazásának (specifikációjának) és numerikus eredményeinek: az endogén változó előrejelzése az exogén tényező-változók, valamint a modell endogén változóinak korábbi értéke (a predeterminált változók) alapján történik. Az ökonometriai előrejelzés megbízhatóságát tükrözi az a tény, hogy matematikai-statisztikai módszerekkel az előrejelzés hibahatárai is megállapíthatók.

Az előzőek alapján világos az *egy- és többfokozatú előrejelzés* fogalma is. Az előrejelzés hibájának megállapítása bizonyos korrekciókat, esetleg ismételt korrekciókat tesz szükségessé, ami csak több fokozatban történhetik. Másrészt a közvetett előrejelzés már magától értetődően a többfokozatú (kétfokozatú) előrejelzések kategóriájába tartozik, minthogy első fokozatban az exogén változókat kell előrejelezni. Ha az előrejelzés egyben optimum-kritérium kikötését is tartalmazza, normatív előrejelzésről beszélhetünk. Az ökonometriai modell segítségével történő előrejelzés tehát a többfokozatú előrejelzések körébe tartozik. Ennek különböző módozatai lehetségesek, amelyek az előrejelzési tevékenység során egyben különböző fázisokat is jelenthetnek, bár nem jelentik szükségképpen azt, hogy a többfokozatú előrejelzés az alább megnevezett fázisokat mind felöleli:

a) a reziduumok véletlenszerűségének vizsgálata,

b) a modell alakjának, változóinak és a strukturális paramétereknek a változtatása,

c) a független változók körének módosítása, és így tovább.

A *többfokozatú előrejelzésnek* egy másik — az ökonometriai modelltől független — esete, amikor ciklikus komponenseket tartalmazó idősorok előrejelzéséről van szó. Ez szükségessé teheti az idősor komponensekre bontását, az alapirányzat meghatározását és előrejelzését. A többfokozatú előrejelzés egyes esetei könnyen illusztrálhatók szállítás-gazdasági idősorokkal.

A többfokozatú előrejelzés további esete az ún. szekvenciális előrejelzés. Ez lényegében azt jelenti, hogy az előrejelzés időszakról időszakra történik úgy, hogy az ismertté váló adatokat az adatbázishoz csatolják, s ezzel az előrejelzés megbízhatóságát fokozzák.

Az innovációk, a technológia-változások hosszútávú előrejelzése egyrészt a katasztrófa-előrejelzések körébe (pl. a motorizáció következményei, környezetszennyeződés), másrészt általában a futurológia körébe vezetnek át. Itt – szemben a mennyiségi változások túlnyomó szerepével – elsősorban a minőségi tényezők változásának az előrejelzéséről van szó, ami viszont már túlmutat a hagyományos értelemben vett ökonometria tárgykörén.

(Beérkezett: 1981. május 27-én.)

ECONOMETRIC MODELS AT NATIONAL ECONOMIC LEVEL AND METHODOLOGICAL EXPERIENCES

The article reviews and summarizes papers read at the international conference „Forecasting Models in the Socialist Economy" held in Esztergom, autumn 1980, especially those that discussed the elaboration, estimation, results and experiences of econometric models covering the entire national economy.

In the introduction those particularities are expounded (in connection with the review of the lecture summarizing Hungarian experiences) which are characteristic of most models elaborated in socialist countries: the consideration of central decisions, the role of planning, the primacy of the supply side as well as the emphasis on real processes. Models of some problems of international division of labour are presented in Chapter One. Out of them a Soviet model examines economic relations of major economic regions of the world, a Polish paper deals with the model system of CMEA-countries, while another one with estimation and forecasting of the exchange rate to be realized in socialist countries. The chapter dealing with long-term models reviews three papers. By the analysis of historical time series a Hungarian model contributed to the study of the economic history of the last century. The long-term model of the GDR is characterized by the analysis of processes reaching beyond the sphere of economy taken in a narrower sense and connected with this by an opening towards a more free system-dynamical methodology. The Bulgarian long-term model is closely connected with national economic planning and as a consequence is aimed at prognosticating major data for medium-term planning and modelling.

The examination of short- and medium-term models was in the centre of national economic modelling also at this conference. Two papers dealt with the modelling of Czechoslovakian national economy; one presented a regional (Slovakian) model, while the other complemented this with the model of the entire national economy in a foreign trade orientation. The Yugoslavian model detailing the description and prognostication of prices, wages and incomes – reflecting specific features of the national economy – seemed to be an adequate tool for the examination of topical equilibrium problems of the Yugoslavian national economy. The short- and medium-term analysis and forecasting of the Polish national economy were presented by two models: model W-3 examined the development of the entire national economy first of all from the aspect of equilibrium problems, while the model describing financial processes analyzed the development of receipts and layouts of the state budget.

Finally, two papers (by Soviet and Hungarian authors, respectively) dealt with general methodological problems of modelling whose major propositions are also reviewed in the article.

НАРОДНОХОЗЯЙСТВЕННЫЕ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И СВЯЗАННЫЙ С НИМИ МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЙ ОПЫТ

В данной статье дается изложение, суммирование тех докладов на международной эконометрической конференции «Модели прогнозирования в социалистической экономике», состоявшейся осенью 1980 г. в гор. Эстергоме, в которых обсуждался вопрос разработки эконометрических моделей по всему нардному хозяйству, их оценки, результатов и опыт такого моделирования.

Во вступлении, при изложении доклада, подытоживающего венгерский опыт экспонируются те особенности, которые присущи большинству моделей, разработанных в социалистических странах, например, принятие во внимание роли решений и планов, принимаемых в централизованном порядке, первичность предложения, а также преобладание реальных процессов. В первой главе излагаются модели по отдельным проблемам международного разделения труда. При этом в одной советской модели рассматриваются экономические связи между основными экономическими регионами мира, в одном польском докладе система моделей стран-членов СЭВ, а в другой польской модели возможности оценки, прогнозирования валютного курса в социалистических странах. В главе по долгосрочным моделям рассматривается три доклада. Посредством анализа исторического тренда времени венгерской модели указывается на несколько новые данные в аспекте изучения истории экономики последнего столетия, в то время как долгосрочная модель ГДР характеризуется анализом процессов, выходящих за рамки узко понимаемой экономической сферы и ориентированием в сторону более свободной, системно-динамической методики. Болгарская долгосрочная модель тесно увязывается с народнохозяйственным планированием и в соответствии с ним призвана прогнозировать основные цифры среднесрочного планирования и моделирования.

Самым существенным в народнохозяйственном моделировании и на этой конференции являлось изучение краткосрочных и среднесрочных моделей. В двух докладах рассматривались вопросы моделирования народного хозяйства ЧССР; в одном давалось описание одной региональной (словацкой) модели, а в другой — в порядке некоторого дополнения — излагалась модель всего народного хозяйства, сориентированная на внешнюю торговлю. Югославская модель, отражая специфические черты народного хозяйства этой страны, детально рассматривала, описывала и прогнозировала цены, заработную плату и, вообще, процессы, связанные с доходами, и она представляется средством, пригодным для детального изучения актуальных проблем равновесия югославского народного хозяйства, непосредственно увязываемого с подготовкой решений, касающихся экономической политики. С помощью двух моделей излагался краткосрочный и среднесрочный анализ и прогнозирование по польскому народному хозяйству: в модели В-3 рассматривалось развитие всего народного хозяйства в аспекте вопросов равновесия в то время как модель, описывающая финансовые процессы анализировала формирование поступлений и выплат государственного бюджета.

В заключении в двух докладах (в советском и венгерском) рассматривались общие методологические вопросы моделирования и в данной статье дается также и обзор основных выводов по этим докладам.

TÖRÖK TAMÁS

Társadalmi választás az egyszerű többségi elv általánosítása alapján

1. Bevezetés

K. J. Arrow [1] híres könyvében megmutatta, hogy nem lehet az egyéni preferencia-rendezéseket a társadalom (közösség, kollektíva, csoport) preferenciáivá alakítani, ha ragaszkodunk a teljességhez, a tranzitivitáshoz és az alábbi öt feltétel mindegyikéhez:

F.1. *a)* Az alternatívák száma legalább három.
b) Legalább két egyénből áll a kollektíva.
c) Tetszőleges preferencia-rendezések előfordulhatnak.

F.2. Teljesül a kollektív és az egyéni értékrendek *pozitív asszociációja.*

F.3. Az *irreleváns alternatívák*tól független a társadalmi választás.

F.4. A kollektíva preferencia-rendezéseit nem határozhatja meg az egyéni preferenciáktól független szabály.

F.5. *Nincs diktátor*, aki egymaga döntene a közösség nevében.

Ez az ún. *lehetetlenségi tétel* igaz abban az esetben is, ha az F.2. és F.4. feltételeket akár az erős, akár a gyenge Pareto-elvvel helyettesítjük [2, 3, 4]. Arrow tranzitív egyéni és kollektív preferencia-rendezésekből indult ki, és az öt (ill. négy) feltételt próbálta többé-kevésbé kielégíteni.

Jelen cikkben ellentétes sorrendben haladunk: az öt feltételt kielégítő függvényosztályból indulunk ki és megvizsgáljuk, hogy milyen módon lehet kielégíteni a tranzitivitást.

Ha ezen függvények bármelyikét előre rögzítenénk — függetlenül a konkrét szerkezettől —, akkor a lehetetlenségi tétel miatt nem teljesülne a tranzitivitás minden esetben. Ezért az egyéni preferencia-rendezések figyelembevételének módját nem előre adjuk meg, hanem éppen a konkrét szerkezet függvényében. Definiálni fogjuk az általánosított többségi döntések osztályát, és minden esetben ebből a függvényosztályból választunk aggregálási módszert úgy, hogy az a lehető legkevésbé térjen el az egyszerű többségi szavazástól, és minden adott esetben tranzitív legyen. Megvizsgáljuk ezen megoldási javaslat és Arrow feltételrendszerének kapcsolatát, végül egy konkrét példán mutatjuk be a javasolt módszer alkalmazását.

2. Jelölések és definíciók

Szükségünk lesz a következő jelölésekre és definíciókra. Tételezzük fel, hogy a közösség k tagból áll, indexük: $h = 1, 2, \ldots, k$. Az alternatívák halmaza legyen $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$. A közösség tagjai az alternatíva-halmaz elemeit egy közös T tulajdonság alapján hasonlítják össze. A h-adik egyén *preferálhatja* A_i-t A_j-vel szemben, jele: $A_i P_h A_j$, *indifferens* lehet kettőjükkel, jele: $A_i I_h A_j$, vagy A_j-t preferálja A_i-vel szemben. Az első két eset együttesét $A_i R_h A_j$, az A halmazra vonatkozó teljes, lineáris rendezését pedig R_h jelöli.

Hasonlóan értelmezzük a kollektíva R rendezését, illetve az alternatíva-párokra vonatkozó R, P és I relációját.

Definíciók

Az $n \times n$-es $D = (d_{ij})_{i=1}^{n} {}_{j=1}^{n}$ *döntési mátrixot* a következőképpen értelmezzük:

(1) $$d_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ ha } A_i P A_j \\ 0, \text{ ha } A_i I A_j \\ -1, \text{ ha } A_j P A_i. \end{cases}$$

A döntési mátrix bevezetésére az esetleges *parciális* és *intranzitív* egyéni rendezések, valamint a tranzitivitás eldöntésének egyszerű kezelése miatt van szükség. Mind az egyéni, mind pedig a közösség preferencia-rendezéseit a későbbiekben ilyen döntési mátrixként fogjuk fel.

A döntési mátrix fogalma a tranzitivitás alábbi értelmezését kívánja, ami természetesen ekvivalens Arrow értelmezésével, és a valós számok körében értelmezett „$\geq$" reláció tranzitivitásával analóg:

$$\forall\, 1 \leq i < j < m \leq n\colon (A_i, A_j, A_m) \to (d_{ij}, d_{jm}, d_{im}).$$

(2)

d_{ij}, d_{jm}, d_{im}					
tranzitív			intranzitív		
0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	−1
0	−1	−1	0	1	0
1	0	1	0	−1	0
−1	0	−1	0	1	−1
1	−1	0	0	−1	1
−1	1	0	1	0	0
1	−1	1	−1	0	0
−1	1	−1	1	0	−1
1	−1	−1	−1	0	1
−1	1	1	1	1	0
1	1	1	−1	−1	0
−1	−1	−1	1	1	−1
			−1	−1	1

a) Az (A_i, A_j, A_m) alternatíva-hármas tranzitív, ill. intranzitív, ha a hozzárendelt (d_{ij}, d_{jm}, d_{im}) hármas (2)-ben tranzitív ill. intranzitív.

b) Egy D döntési mátrix tranzitív, ha valamennyi alternatíva-hármasa tranzitív.

Az $n \times n$-es $P = (p_{ij})_{i=1}^{n}{}_{j=1}^{n}$ *aggregált preferenciák mátrixának* elemei:

(3) $$p_{ij} = |\{h\colon A_i P_h A_j\}|; \quad h = 1, \ldots, k$$

azt mutatják, hogy p_{ij} számú egyén szavaz A_i-re, p_{ji} számú egyén A_j-re és ha az egyéni rendezések teljesek, akkor $k - p_{ij} - p_{ji}$ számú egyén jelöl meg indifferens kapcsolatot A_i és A_j között.

Arrow olyan függvényeket vizsgált, amelyek k számú tranzitív egyéni preferencia-rendezéshez új, de szintén tranzitív, ún. *közösségi preferenciákat* rendelnek:

$$f\colon R_1, \ldots, R_k \to R,$$

vagy döntési mátrixokkal

$$f\colon D_1, \ldots, D_k \to D,$$

ahol f-et *kollektív jóléti függvénynek* (KJF) nevezzük.

Legyen Φ a bevezetésben említett öt feltételt kielégítő függvények halmaza.

Könnyen belátható, hogy ezek a függvények kétváltozósak; első változójuk az ,,igen'', második változójuk pedig a ,,nem'' szavazatok száma:

(4) $$d_{ij} = \varphi(p_{ij}, p_{ji}) \qquad 1 \leq i, j \leq n.$$

Az F.2. feltétel miatt φ *nem-csökkenő* függvénye p_{ij}-nek és *nem-növekvő* függvénye p_{ji}-nek.

Az *erős Pareto-elv* elfogadása a többségi döntések egyik határesetéhez, (minimális szavazati többség) az *egyszerű többségi döntéshez* (ETD) vezet, amely a következő alakú:

(5) $$d_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 1, \text{ ha } p_{ij} > p_{ji} \\ 0, \text{ ha } p_{ij} = p_{ji} \\ -1, \text{ ha } p_{ij} < p_{ji}. \end{cases}$$

A többségi döntések másik határesete (maximális szavazati többség), a *gyenge Pareto-elv* elfogadásán alapuló, ún. *egyhangú többségi döntés*, amely a következő alakú:

(6) $$d_{ij}^{(k-1)} = \begin{cases} 1, \text{ ha } p_{ij} > k - 1 \quad (p_{ij} = k) \\ 0, \text{ ha } p_{ij} \leq k - 1 \\ -1, \text{ ha } p_{ji} > k - 1 \quad (p_{ji} = k). \end{cases}$$

Az *általánosított többségi döntések* (ÁTD) egy φ elemének leírásához bevezetünk egy g *nem-csökkenő, egész-értékű* függvényt, amely azt mondja, hogy p_{ji} $\left(0 \leq p_{ji} < \dfrac{k}{2}\right)$ számú kisebbségi ellenszavazat esetén legalább hány többségi igen szavazatra van szükség ahhoz, hogy a közösség is igent mondjon:

(7) $$d_{ij}^{(g)} = \begin{cases} 1, \text{ ha } p_{ij} > g(p_{ji}) \\ 0, \text{ ha } p_{ij} \leq g(p_{ji}) \quad \text{és} \quad p_{ji} \leq g(p_{ij}) \\ -1, \text{ ha } p_{ji} > g(p_{ij}) \end{cases}$$

Természetesen $\forall i, j$: $g(p_{ji}) \geq p_{ji}$ és $\exists p_{ji}$: $g(p_{ji}) < k - p_{ji}$, hiszen a $\forall i, j$: $g(p_{ji}) \geq k - p_{ji} \geq p_{ij}$ megengedése $D = [0]$-hoz vezetne, ezt pedig az F.4. feltétel tiltja.

Tehát egy φ ÁTD-t egy, a fenti tulajdonságokkal rendelkező g függvény segítségével definiáltunk úgy, hogy megadtuk a φ-hez tartozó D döntési mátrix képzésének módját.

Speciális ÁTD-ek

a) Az egyszerű többségi döntés (ETD), ahol $g(p_{ji}) = p_{ji}$.
b) Az egyhangú többségi döntés, ahol $g(p_{ji}) = k - 1$.
c) Fontos speciális eset az *egyöntetű általánosított többségi döntés* (EÁTD), ahol az *igen* szavazatoknak egy adott számmal kell meghaladnia a *nem* szavazatok számát ahhoz, hogy a közösség is *igennel* döntsön. Azaz $g(p_{ji}) = p_{ji} + t$ minden p_{ji}-re!

Képletben felírva egy EÁTD-t:

$$d_{ij}^{(t)} = \begin{cases} 1, \text{ ha } & p_{ij} - p_{ji} > t \\ 0, \text{ ha } & |p_{ij} - p_{ji}| \leq t \\ -1, \text{ ha } & p_{ji} - p_{ij} > t. \end{cases} \tag{8}$$

Nyilvánvaló, hogy az ETD egyöntetű ÁTD ($t = 0$), míg az egyhangú többségi döntés nem az.

Nevezzünk két: φ, φ'-et ekvivalensnek, jelben: $\varphi \cong \varphi'$, ha $D = D'$.

Figyelemre méltó, hogy ha az egyéni preferencia-rendezések erősek, akkor $\forall \varphi \in \{\text{ÁTD}\}$-hez $\exists \varphi' \in \{\text{EÁTD}\}$: $\varphi \cong \varphi'$. Valóban, ha egy φ ÁTD-t egy g függvénnyel definálunk, akkor a $t = k - 2p$ választás, ahol

$$p = \min_{1 \leq i, j \leq n} \{p_{ji} : g(p_{ji}) > p_{ij}\} \text{ olyan, hogy } \forall i, j\text{: } d_{ij}^{(t)} = d_{ij}^{(g)}.$$

A (7) képlettel definiált $\{\text{ÁTD}\}$ függvényosztály bármelyik eleme ugyan maradéktalanul kielégíti Arrow öt feltételét, azonban egyetlen ÁTD sem tranzitív minden esetben. Arról, hogy még az egyhangú többségi döntés sem tranzitív minden esetben, könnyen meggyőződhetünk az alábbi példa alapján:

Tételezzünk fel egy két főből álló kollektívát, és három (x, y, z) alternatívát. Az egyéni preferencia-rendezések legyenek:

$$zP_1xP_1y$$

$$xP_2yP_2z.$$

Az egyhangú többségi döntés szabályát alkalmazva, a kollektív döntési mátrix:

$$D = \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

tehát $(d_{xy}, d_{yz}, d_{xz}) = (1, 0, 0)$, ez pedig intranzitív hármas (xPy, yIz, xIz).

Az egyhangú többségi döntés gyakori tranzitivitása ellenére is túl sok esetben „mossa el" a különbségeket az alternatívák között. Ezért kompromisszumra törekszünk: *Az ÁTD-t nem előre adjuk meg függetlenül a konkrét szerkezettől, hanem éppen a konkrét szerkezet függvényében.*

Célunk — a konkrét eset tranzitivitásának biztosításán túl — az, hogy minél kevésbé mossuk el a különbségeket az alternatívák kollektív megítélései között, vagyis minél közelebb legyünk az ETD-hez.

Ahhoz, hogy megoldási javaslatokat tehessünk, szükségünk lesz a következő fogalmakra:

Egy φ rendezés erősebb (tágabb értelemben) mint φ', ha $|d_{ij}| \geq |d'_{ij}|$ minden $1 \leq i < j \leq n$ esetén.

Például az ETD erősebb, mint bármely más ÁTD.

Természetesen vannak erősség szerint össze nem hasonlítható rendezések is.

1. *megoldási javaslat:*

Adott alternatíva-halmaz, és adott egyéni preferenciarendezések esetén vegyük azokat az ÁTD-eket, amelyek tranzitívak. (Ha minden ÁTD intranzitívnak bizonyult, akkor vagy minden alternatívát indifferensnek minősítünk, vagy más módszert választunk.)

Tekintsük közülük a *legerősebbeket*, és ezek közül válasszunk megoldást (KJF-t).

Az {EÁTD} függvényosztályban ez a javaslat a következőt jelenti:

$$d_{ij} := d_{ij}^{(t)} : D^{(t)} \text{ tranzitív és } t \text{ minimális.} \tag{9}$$

(A (9) alapján meghatározott $g = t$ természetesen már meghatározza a hozzá tartozó φ EÁTD-t.)

Megjegyzés: Nem tudjuk, hogy hány legerősebb tranzitív ÁTD létezik. Azt sejtjük, hogy mindig csak egy. A megoldás egyértelműségét (ekvivalens ÁTD-ek erejéig) azonban csak erős egyéni preferencia-rendezések esetén tudjuk bizonyítani. Valóban, ekkor az EÁTD-ekkel kell dolgoznunk; minél kisebb a t, annál erősebb a rendezés.

További vizsgálatra lehet szükség:

Egy ÁTD foka: $$\varphi^* = \max_{1 \leq i, j \leq n} \{g(p_{ji}) - p_{ji}\}.$$

Esetünkben tehát van olyan alternatíva-pár, amelynél φ^* szavazattöbblet még nem elegendő a közösségi igenhez, de bármely alternatíva-párnál $\varphi^* + 1$ szavazattöbblet már elegendő.

Például az ETD foka kisebb, mint bármely más EÁTD foka. Természetesen az {EÁTD}-ben $\varphi^* = t$.

2. *megoldási javaslat:*

Az 1. javaslatban szereplő megoldások közül azokat válasszuk, amelyeknek *minimális* a fokuk.

Megjegyzés: Elképzelhető, hogy az 1. javaslat megoldásai különböző fokúak (csak gyenge egyéni rendezések esetén fordulhat elő), tehát a 2. megoldási javaslat szűkíti a megoldások halmazát, esetleg egyértelművé teszi azt. Elképzelhető azonban az is, hogy több azonos fokú megoldás adódik.

3. *megoldási javaslat:*

Az 1. és 2. megoldási javaslatainkról csak szigorú egyéni rendezések esetén állítottuk, hogy egyértelmű megoldást eredményeznek. Gyenge sorrendek esetén viszont valamennyi ÁTD előállítása, és az 1., 2. javaslatok szerinti kiválasztása bonyolult algoritmust igényelne; valójában külön problémakörnek tekinthető.

Ezért a 3. megoldási javaslatunk az, hogy gyenge egyéni rendezések esetén is az {EÁTD}-ben keressünk megoldást, a könnyen megvalósítható (9) alapján.

3. A feltételrendszer és az {ÁTD} kapcsolata

A 2. fejezetben Arrow-val ellenkező sorrendben haladva, az öt feltételt kielégítő Φ függvényosztályból indultunk ki.

Ezen φ függvények argumentumának, és a hozzájuk tartozó g függvények által meghatározott leképezések tisztázásával az ÁTD-ekhez jutottunk.

Tudtuk, hogy az ETD sok esetben intranzitív kollektív rendezéshez vezet. Láttuk, hogy még a gyenge Pareto-elvet figyelembe vevő egyhangú többségi döntés sem tranzitív minden esetben.

Ezért kompromisszumra törekedtünk: A kollektív preferencia-rendezést képező ÁTD-t Arrow-val ellentétben nem *a priori* adtuk meg, hanem az A alternatíva-halmazra vonatkozó egyéni preferencia-rendezések szerkezetétől tettük függővé. Az 1. és 2. megoldási javaslataink nem állítottak feltétlen egyértelműséget, ily módon az irreleváns alternatíváktól való függetlenség (F.3.) kielégítésének vizsgálata nem is értelmes általában.

Szigorú egyéni preferencia-rendezések esetén megállapítottuk, hogy akkor az EÁTD-ekkel kell dolgoznunk. A 3. megoldási javaslat egy gyengített irrelevancia-feltételt elégít ki, amely a következőképpen szól:

F.3. Tetszőleges két alternatíva esetleges erős preferenciája az alternatívák számának növelésével legfeljebb indifferenciává válhat, de sohasem fordulhat meg, bármekkorára is növeljük az alternatívák számát.

A KJF-ek ezen tulajdonsága azonban egyáltalán nem nyilvánvaló. Nem rendelkezik ezzel a tulajdonsággal pl. a *Kendall*-módszer.

Ennek bizonyítására tételezzünk fel egy három fős kollektívát, és először három: x, y, z alternatívát. Az egyéni preferencia-rendezések legyenek:

$$xP_1yP_1z$$

$$yP_2xP_2z$$

$$zP_3xP_3y$$

Az x összegzett preferencia-gyakorisága 4, y-é 3, z-é pedig 2, tehát a kollektíva preferencia-rendezése: $xPyPz$. Vegyünk fel két új: u, v alternatívát, és az egyéni rendezések legyenek:

$$xP_1yP_1zP_1uP_1v$$
$$yP_2uP_2vP_2xP_2z$$
$$zP_3uP_3vP_3xP_3y$$

Látható, hogy x, y, z viszonya nem változott; x összegzett preferencia-gyakorisága 6, y-é 7, z-é 6, u-é 6, v-é 4. A kollektíva preferencia-rendezése tehát: $yIuPxIzPv$. Az alternatívák számának növelésével xPy-ból yPx adódott.

Az {ÁTD} függvényosztályban a konkrét szerkezettől függő KJF keresésekor minden esetben az aggregált preferenciák P mátrixából indultunk ki. Ez a szerkezet (a döntési mátrixok segítségével) lehetővé teszi, hogy parciális, sőt intranzitív egyéni rendezések esetén is tranzitív kollektív preferencia-rendezést konstruáljunk.

Megemlítjük, hogy kvázi-tranzitivitást megengedve (csak a P reláció tranzitivitását elvárva) az egyhangú többségi döntés módszere univerzális KJF.

4. Egy gyakorlati példa

A 3. megoldási javaslatnak (9) alapján történő kivitelezésére tekintsük az alábbi egyszerű példát:

Tételezzünk fel egy 6 fős kollektívát ($k = 6$), az alternatívák halmaza legyen: $A = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ ($n = 6$). A kollektíva tagjainak preferencia-rendezései legyenek a következők:

$$A_1P_1A_2P_1A_3P_1A_4I_1A_5I_1A_6$$
$$A_1I_2A_2I_2A_3P_2A_6P_2A_4P_2A_5$$
$$A_1P_3A_3P_3A_2I_3A_4I_3A_5I_3A_6$$
$$A_1I_4A_2I_4A_3P_4A_4P_4A_5P_4A_6$$
$$A_1P_5A_2I_5A_3I_5A_4I_5A_5I_5A_6$$
$$A_1P_6A_2P_6A_3P_6A_5P_6A_6P_6A_4$$

Az aggregált preferenciák mátrixa:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Képezzük a $|p_{ij} - p_{ji}|$ számértékeket, és rendezzük növekvő sorrendbe:

$$\boxed{0} \quad \boxed{1} \quad 4 \quad 5 \quad 6\,.$$

A (9)-nek eleget tevő t nyilván ezen elemek közül választódik ki.

A $t = 0$ kezdőérték választással (8) alapján:

$$D^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Következik a tranzitivitás ellenőrzése:

Az (A_4, A_5, A_6) hármas intranzitív, tehát az ETD most is intranzitív kollektív rendezéshez vezetett.

A $t = 1$ választással viszont (8) alapján:

$$D^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A tranzitivitás ellenőrzését elvégezve azt tapasztaljuk, hogy $D^{(1)}$ tranzitív döntési mátrix, amiből a kollektíva preferencia-rendezése:

$$A_1 P A_2 I A_3 P A_4 I A_5 I A_6.$$

Köszönetnyilvánítás: Köszönetemet fejezem ki *Kindler József* kandidátusnak munkám szakmai és szakirodalmi támogatásáért és *Kornai János* akadémikusnak, aki a X. Magyar Operációkutatási Konferencián (Debrecen, 1980.) hozzászólásában érdekesnek és további kutatásra érdemesnek minősítette a társadalmi választással kapcsolatos előadásunkat. Külön szeretném megköszönni *Simonovits András* segítségét, fogalmi pontosításait és azt a javaslatát, hogy jelen cikk ezen formájában készüljön el első változata helyett. Végül *Gyombolai Márton* matematikusnak tartozom köszönettel kritikai észrevételeiért.

(Beérkezett: 1981. február 26-án.)

IRODALOM

[1] Arrow, K. J.: Social choice and individual values. New York, 1963. Wiley. 2. kiadás.
[2] Sen, A. K.: Quasi-transitivity, rational choice and collective decisions. Review of Economic Studies, 34 (1969).
[3] Sen, A. K.: Collective choice and social welfare. London, 1970. Oliver & Boyd.
[4] Sen, A. K.: Social choice theory: a re-examination. Econometrica, 45 (1977).
[5] Kendall, M. G.: Rank correlation methods. London, 1970. Griffin.
[6] David, H. A.: The method of paried comparisons. London, 1976. Griffin.
[7] Bowman, V. J.—Colantoni, C. S.: Further comments on majority rule under transitivity constraints. Management Sci., 20 (1974).
[8] Blin, J. M.—Whinston, A. B.: A note on majority rule under transitivity constraints. Management Sci., 20 (1974).

[9] KINDLER, J.—PAPP, O.: Komplex rendszerek vizsgálata. Budapest, 1977. Műszaki Könyvkiadó.
[10] KISS, R.—TÖRÖK, T.: Adalék a társadalmi választás problémájához. X. Magyar Operációkutatási Konferencia, 1980. Előadás.
[11] GALÁNTAI, I.—TÖRÖK, T.: Indifferencia-reláció megengedése a páros összehasonlítás módszerénél. SZÁMOLÓGÉP, Megjelenés alatt.
[12] DOBÓ, A.: Elsőbbségi osztályozáson alapuló egyetértés létrehozása. SZIGMA, 1980/3.

SOCIAL CHOICE BASED ON A GENERALIZATION OF THE SIMPLE MAJORITY PRINCIPLE

The paper deals with the social choice problem. K. J. Arrow's investigations departed from transitive individual and social preference orderings and then tried to more or less satisfy his system of conditions in the case of predetermined functions. Here we proceed in the opposite direction: we first define the class of generalized majority decisions satisfying Arrow's conditions and turn to the study of how the transitivity condition can be satisfied afterwards.

If we fixed any one of these functions in advance, then by the virtue of the impossibility theorem transitivity would not generally obtain. Therefore we do not fix a *priori* how individual preference orderings are taken into account, but make it dependent on the actual structure.

In our proposed solutions we always choose a function from the above defined class so as to minimize the deviation from simple majority voting but retain transitivity. We claim that these solutions fully satisfy Arrow's four conditions as well as a non-trivial weakened irrelevance condition. The application of the method is illustrated by an example.

ОБЩЕСТВЕННЫЙ ВЫБОР НА ОСНОВАНИИ ОБОБЩЕНИЯ ПРИНЦИПА ПРОСТОГО БОЛЬШИНСТВА

Настоящая статья занимается проблемой общественного выбора. К. Эрроу в своих исследованиях в этом направлении исходил из личного и коллективного преференциального распределения и пытался по возможности удовлетворить системе ограничений в случае наперед заданных функций.

В настоящей статье, двигаясь в противоположном направлении, сначала даём определение класса обобщенных решений большинства, удовлетворяющих системе ограничений Эрроу, потом исследуем, каким образом можно удовлетворить условие транзитивности.

Если бы мы заранее фиксировали какую-нибудь из функций, независимо от конкретной конструкции, то по теореме о невозможности условие транзитивности не всегда выполнялось бы. Поэтому возможность учета личного преференциального распределения не задается наперед, а именно зависит от конкретной конструкции.

В предлагаемых нами решениях из класса функций обобщенных решений большинства выбираем такой аггрегационный метод, который как можно меньше отличается от простого голосования большинства и во всех случаях транзитивен.

Отметим, что предлагаемые нами решения удовлетворяют четырем условиям Эрроу, а также выполняют нетривиальное, ослабленное условие иррелеванции.

В заключение применение предлагаемого метода демонстрируется на конкретном примере.

CSÉBFALVI GYÖRGY–VÖRÖS JÓZSEF

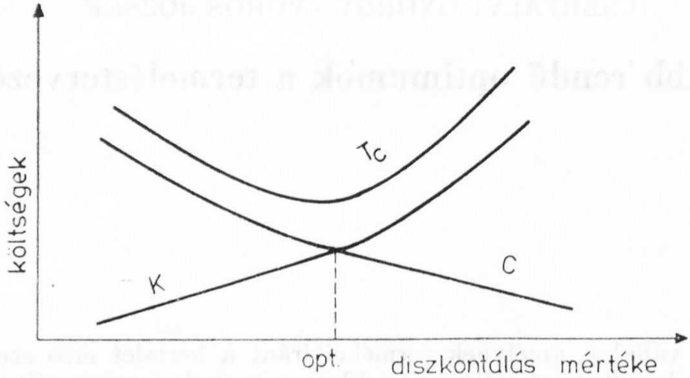
Magasabb rendű optimumok a termeléstervezésben

Az olyan vállalat, amelynek termékei iránt a kereslet erős szezonalitást mutat, nem kerülheti el teljes mértékben a termelési szint változtatásából eredő költségeket. E költségeket csökkentheti például úgy, hogy a termelést viszonylag stabil szinten tartja, a kereslet fluktuálását pedig raktározási tevékenységgel közömbösíti. Enyhe kereslet idején a raktárszint magas, keresleti csúcs idején alacsony, sőt negatív raktárszint pozíció is előfordulhat. A termeléstervezési modellek általában a következő három szélsőséges alternatíva kombinálását oldják meg:

- a munkaerő- és raktárszint állandó, a termelési szintet a munkaerő kihasználása mozgatja (pl. túlóra),
- a raktárszint állandó, a termelési szintet a munkaerő nagyságának változtatása mozgatja,
- a termelési és munkaerőszint stabil, a kereslet fluktuálását a raktározás közömbösíti.

A vázolt elgondolást először HOLT, MODIGLIANI, MUTH és SIMON öntötte formába, mely HMMS modell néven vált ismertté ([2], [8], [9], [10], [11]). A HMMS modellt többen továbbfejlesztették ([6], [7], [12], [13], [17], [18], [21], [25], stb.). Ezek a modellek megmaradnak a fenti hármas döntési alternatívánál; a keresleti előrejelzés a modellek input adata. E tanulmányban olyan modellvariánsokat mutatunk be, melyek szimultán módon határozzák meg a termelési-, munkaerő- és keresleti szinteket. Evvel tulajdonképpen a tervezésben a termelési szektor mellett a marketing szektor is helyet kap. A próbálkozás nem új keletű; M. TUITE pl. árdiszkontálással módosítja a kereslet eloszlását [22], s így a keresleti görbe egyenletesebbé válása miatt a termelési költségek csökkennek. Az árcsökkenésnek azt a nagyságát keressük, melynél a termelési költségek és a diszkontálásból eredő költségek összege minimális (lásd 1. ábra).

R. LEITH [16]-ban a kereslet eloszlását a reklámozás kumulatív hatásával befolyásolja s a problémát egy kvadratikus programozási feladatra vezeti vissza. Míg az előző két modellben a két költségnem egyensúlya adja az optimumot, a BERGSTROM–SMITH modell a bevételek és termelési költségek egyensúlyát keresi [1]. A bevétel és a kereslet közötti összefüggést másodfokú függvény írja le, s mivel a feltételrendszer eliminálható, a probléma végül is egy többismeretlenes lineáris egyenletrendszer megoldására vezethető vissza. Külön jelentőséget tulajdonítunk W. DAMON és R. SCHRAMM [5] alatti modelljének, mely a vállalat termelési és marketing szektora mellett döntést hoz a pénzügyi szférára is. Utolsó – negyedik – modellünk ezen [5] alatti modell



1. ábra

K = diszkontálásból eredő költség, C = termelési költségek,
T_c = teljes költség (diszkontálási költség + termelési költség)

általánosítása. Az első modellünk önköltségarányos árral dolgozik, melyhez a kereslet fordítottan aránylik. A költségminimalizálás az önköltség csökkenésén át az árat csökkenti, a csökkenő ár növeli a keresletet. A többletkeresletet a termelésnövekedés fedezi, mely növeli a célfüggvény értékét, de a költségminimalizálás egyrészt a leggazdaságosabb megoldást keresi, másrészt a rendszer teljesítőképességét csökkenti. Az alacsony keresletehez viszont magas ár és önköltség tartozik, s ezzel a kör bezárult. Modellünk ezen összefüggés felhasználásával lép be a HMMS típusú modellek sorába, s annak ellenére, hogy költségminimalizáló modell, a kereslet globális nagyságát mégis meghatározza. Második modellünk egy valószínűségfeltételes, keresletet átrendező árdiszkontáló modell, a harmadik pedig az első és második modelltípus szintézise. Valamennyi modellünk sem feltételrendszerében, sem célfüggvényében nem lineáris. A modellek jobb megismerése és mondanivalónk jobb megvilágítása céljából mindegyiket számszerűsítettük, s a programozási feladatokat a *Fiacco–McCormick*-féle SUMT módszerrel oldottuk meg.

1. modell

Tekintsünk egy előttünk álló T $(t = 1, \ldots, T)$ periódusból álló tervidőszakot, melyben vállalatunk terméke iránti kereslet erős szezonalitást mutat. Tételezzük fel, hogy

(F1): a kereslet és az ár közötti összefüggést az

$$S_t = a_t^{(1)} + a_t^{(2)}/R$$

függvény írja le, ahol:

S_t a t-edik periódusban a termék iránti kereslet nagysága,
R a termék ára, mely minden periódusban állandó,
$a_t^{(1)}$ és $a_t^{(2)}$ paraméterek;

(F2): vállalatunk költségstruktúráját a HMMS modell célfüggvénye adja:

$$Y_t = C_1 W_t + C_2(W_t - W_{t-1})^2 + C_3(X_t - C_4 W_t)^2 + C_5 X_t - \\ - C_6 W_t + C_7(I_t - C_8 - C_9 S_t)^2,$$

ahol: Y_t a termeléssel kapcsolatos költségek nagysága a t-edik periódusban,
X_t a termelési szint nagysága a t-edik periódusban,
I_t a raktárszint a t-edik periódus végén,
W_t a termelésben alkalmazott munkaerő nagysága a t-edik periódusban.

(F3): A termék ára önköltségarányos az alábbi módon:

$$R = \frac{\Sigma_1^T Y_t + F}{\Sigma_1^T X_t} \cdot \alpha,$$

ahol: α és F paraméterek.

Az (F1) feltételben szereplő függvény azt az egyszerű összefüggést írja le, hogy a magasabb árhoz alacsonyabb, az alacsonyabb árhoz magasabb kereslet tartozik. Természetesen az S_t-hez is mindig egyértelműen hozzárendelhető egy R. A kereslet-ár között értelmezett ezen fordított arányosság fontos alkotó eleme lesz modellünknek.

Az (F2) feltevésben $C_1 W_t$ a termeléshez felhasznált munkaerővel kapcsolatos lineáris költséget fejezi ki. A második kifejezésben az alkalmazott munkaerő mennyiségében beállt változás négyzetesen növeli a költségeket; ugyanígy hat a ledolgozott túlóra mennyisége is, a C_5 és C_6 paraméterekkel kifejezett költségrész a munkaerő kihasználatlanságából eredő négyzetes hatást tompítja. $(C_8 + C_9 S_t)$ az S_t kereslethez tartozó ideális raktárszintet fejezi ki, s a raktárszintünk eltérése az ideális szinttől szintén négyzetesen növeli a költségeket. Ezen utolsó költségnem mozgatja viszont a termelési és munkaerőszinteket. A raktárszint csak akkor maradhat ugyanis az ideális szint közelében, ha a termelés pótolja a fogyasztóknak kiadott termék mennyiségét. Így a termelési szinteknek is a keresleti szintek közelében kell lenniök, s a $C_3(X_t - C_4 W_t)^2$ költséghatás miatt a munkaerő szintnek X_t/C_4 közelében kell lennie. A kereslet megmozgatja tehát az összes költségokozó változót. Az (F3)-ban felírt összefüggésnél F-ben fix költség, míg α-ban nyereség számolható el. Az (F1) mellett az (F3)-ban definiált önköltségarányos ár adja modellünk másik fontos alkotóelemét, hiszen ez az ár keresletet határoz meg, melyhez (F2) alapján $\Sigma_1^T Y_t$ költség rendelhető. A $\Sigma_1^T Y_t$ költségösszeg és a hozzátartozó $\Sigma_1^T X_t$ termelési szint kialakítja az árat s a ciklus ismétlődik.

A bevezetőben említett összefüggés tehát valóban biztosítja az alábbi (1) modell konzisztenciáját:

$$Z_1 = \Sigma_1^T Y_t \to \text{MIN} \tag{1a}$$

$$R = \frac{\Sigma_1^T Y_t + F}{\Sigma_1^T X_t} \cdot \alpha \tag{1b}$$

$$S_t = a_t^{(1)} + a_2^{(1)}/R; \qquad t = 1 \ldots T \tag{1c}$$

$$I_{t-1} + X_t = S_t + I_t; \qquad t = 1 \ldots T \tag{1d}$$

$$Y_t = C_1 W_t + C_2(W_t - W_{t-1})^2 + C_3(X_t - C_4 W_t)^2 + C_5 X_t - C_6 W_t + + C_7(I_t - C_8 - C_9 S_t)^2; \qquad t = 1 \ldots T \qquad \text{(1e)}$$

$$S_t, X_t, W_t, I_t \geq 0; \qquad t = 1 \ldots T; \; R \geq 0 \quad \text{(1f)}$$

Az (1) alatti modell (1d) feltétele a raktározási egyenlet, mely szerint a t-edik periódusban a fogyasztóknak eladott mennyiség és a periódus végi raktárszint azonos a periódusban megtermelt termék mennyiségének és a periódus kezdetén raktáron levő termékek mennyiségének összegével. Az (1d) feltételt helyettesíti az $I_t = I_0 + \Sigma_1^t X_k - \Sigma_1^t S_k$ feltétel s ezzel az I_t változók elminálhatók (következmény: negatív raktárszint pozíció lehetősége). Természetesen az (1e) típusú feltételek is csak a könnyebb áttekinthetőség miatt szerepelnek. Az (1d) és (1e) típusú feltételek eliminálása után, s az (1f) típusú feltételeket nem tekintve, az (1) modellnek $T + 1$ egyenlőségi feltétele és $3T + 1$ változója van.

Legyen:

$T = 6$, $C_1 = 10$, $C_2 = 1{,}0$, $C_3 = 0{,}01$, $C_4 = 50$, $C_5 = 0{,}001$, $C_6 = 0{,}1$,

$C_7 = 0{,}02$, $C_8 = 20$, $C_9 = 0{,}1$, $\alpha = 1{,}2$, $F = 50$, $I_0 = 20$, $W_0 = 20$,

valamint:

t	1	2	3	4	5	6
$a_t^{(1)}$	200	100	200	300	400	300
$a_t^{(2)}$	120	100	140	200	300	250

A tervhorizontot tehát hat periódusra osztottuk, s $a_t^{(1)}$, illetve $a_t^{(2)}$ paraméterek megadott értékeiből az derül ki, hogy adott ár mellett az első három periódusban a kereslet alacsony az utolsó három periódusban megnyilvánuló kereslethez képest. A vállalat 20 fővel kezd s raktárán mindössze 20 db termék van. A tervidőszak alatt fellépő fix költség 50 egység, az önköltséghez pedig 20%-os hasznot számolunk fel ($\alpha = 1{,}2$). A C_4 paraméter szerint egy fő 50 darab terméket állít elő, egy periódusban a munkabér jellegű fajlagos költség pedig 10 egység. A konstansok felhasználásával (1) modellünk programozási feladattá válik, mely az alábbi formára hozható:

$$f(\mathbf{X}) \to \min$$

$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{0},$$

ahol az f és $\mathbf{g}$ függvények nem lineárisak.

Mivel az f és $\mathbf{g}$ függvények jelen típusai mellett a SUMT módszer nem biztos, hogy globális szélsőértéket ad, célszerű a változókra adott indulóértékeket változtatni, s így az algoritmust többször indítani. A megoldások értékelését elősegíti most az, hogy programozási feladataink a feltételek szerkezetét tekintve különbözőek lesznek, de a hozzájuk tartozó modellek gazdaságilag egymásra épülnek. Elemezve az egyes futási eredményeket, azt mondhatjuk, hogy a megadott inputok mellett az alábbi megoldás nagy valószínűséggel globális szélsőértékét adja az (1) modellnek:

$t =$	1	2	3	4	5	6	$\sum_{t=1}^{T}$
S_t^0	610,6	442,2	679	984,4	1426,5	1155,5	5298,2
W_t^0	13	9,3	13,5	20,5	27,4	24,3	
X_t^0	652,5	460,4	679,2	1036,4	1401,5	1218,8	5448,6
túlóra	2,5	−5,6	4,7	10,4	30	3,3	
I_t^0	61,9	80,2	80	132,2	107,2	170,5	

$R^0 = 0{,}292$ és $Z_1^0 = 1377{,}9$

A táblázatban szereplő S_t^0, W_t^0, X_t^0, R^0 és Z_t^0 értékeket az optimális megoldás explicite megadja, a túlórában termelt termékek mennyiségét az $(X_t^0 - C_4W_t^0)$ kifejezésből számíthatjuk ki. Ez az érték a második periódusban negatív, ami arra enged következtetni, hogy ebben a periódusban a termelési kapacitás nincs kihasználva, s ez még mindig gazdaságosabb megoldás mint a munkaerő szintjének változtatása. Az I_t^0 raktárszinteket az

$$I_0 + \Sigma_1^t X_k^0 - \Sigma_1^t S_k^0$$

kifejezés felhasználásával határozhatjuk meg. Az adatokból kiderül, hogy a kezdő raktárszint jelentősen elmarad az ideális szinttől, s a periódus végére a modell fokozatosan ledolgozza e hátrányt. A rendszer összteljesítménye 5448 db termék, s az optimális ár 0,292.

2. modell

Tekintve, hogy az ár minden periódusban állandó, az (1)-es modell (1b) és (1c) feltételei merevséget kölcsönöznek rendszerünknek; az ár nem befolyásolja rugalmasan a periódusonkénti keresletet. A problémát úgy oldjuk meg, hogy a keresleti mélyvölgyben árdiszkontálást engedünk meg, melynek következtében a kereslet nő, s így a kereslet átrendezésével a keresleti csúcsokat mérsékeljük. A keresleti görbe egyenletesebbé válásával csökkennek a termeléssel kapcsolatos költségek, viszont a diszkontálásból eredő veszteség nő. Modellünk annyiban tér el a *Tuite*-féle modell koncepciójától, hogy a keresleti mélyvölgy minden periódusában más-más árcsökkentési rátát engedünk meg. A probléma így viszont nem vezethető vissza egy egyváltozós szélsőérték-számítási feladatra. Az (F2) feltételezés mellé bevezetjük még az alábbiakat (az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy az első k periódusban a kereslet alacsony):

(F4): az i-edik ($i = 1, \ldots k$) periódusban megvalósított $100p_i$ %-os árleszállítás $(b_ip_i + e_ip_i^2)$ nagysággal (b_i és e_i paraméterek) növeli a periódus keresletét, s az árleszállítás nem változtatja meg a tervidőszak összkeresletét.

Az, hogy p_i-hez parabolikus függvényt kapcsoltunk az irodalmi hagyománynak felel meg [22], de modellünk szerkezete és megoldási algoritmusunk elbír akármilyen $p_i \geq 0$-ra folytonos, differenciálható függvényt. Feltételünk második fele viszont egy, a realitással nem szembenálló, kényszerűség: költségminimalizáló modellben egyetlen periódusban sem nőhet a kereslet, s így a termelés, egy adott szinthez képest csak akkor, ha ezt a mennyiséget valamely más periódusban nem kell megtermelni. Erre vonatkozik a következő feltétel:

(F5): az árleszállítással a $(k+j)$-edik $(j = 1, \ldots, T-k)$ periódus kereslete

$$\beta_j \sum_{i=1}^{k} (b_i p_i + e_i p_i^2)$$

nagysággal csökken, ahol: β_j normális eloszlású valószínűségi változó $\bar{\beta}_j$ várható értékkel és σ_j szórással. ($\Sigma \bar{\beta}_j = 1$ és a β_j-k egymástól függetlenek.)

(F6): a $k+j$-edik periódus kereslete nem csökkenhet tetszőlegesen: annak a valószínűsége, hogy az átrendezés a $k+j$-edik periódus keresletéből nem von el többet mind d_j, legalább π_j legyen.

Ha β_j determinisztikus lenne d_j a $\beta_j \cdot \Sigma_1^k(b_i p_i + e_i p_i^2)$-re jelentene felső korlátot. Az (F6) ennek a sztohasztikus megfelelője, s feladata annak biztosítása, hogy a keresletelvonás a $k+j$-edik periódusban ne haladjon meg egy előre meghatározott szintet. Az (F2), (F4), (F5) és (F6) feltételek alapján az (1) modell optimális megoldásából nyert R^0 és S_t^0 adatsor felhasználásával megkonstruálhatjuk a (2) modellt:

$$Z_2 = \{\Sigma_1^T Y_t + R^0 \cdot \Sigma_1^k p_i \cdot (b_i p_i + e_i p_i^2)\} \to \text{MIN} \tag{2a}$$

$$I_{t-1} + X_t = S_t + I_t; \qquad t = 1 \ldots T \tag{2b}$$

$$S_i = S_i^0 + b_i p_i + e_i p_i^2; \qquad i = 1 \ldots k \tag{2c}$$

$$S_{k+j} = S_{k+j}^0 - \bar{\beta}_j \Sigma_1^k (b_i p_i + e_i p_i^2); \qquad j = 1 \ldots T-k \tag{2d}$$

$$P(\beta_j \Sigma_1^k (b_i p_i + e_i p_i^2) \leq d_j) \geq \pi_j; \qquad j = 1 \ldots T-k \tag{2e}$$

$$Y_t = C_1 W_t + C_2(W_t - W_{t-1})^2 + C_3(X_t - C_4 W_t)^2 + C_5 X_t - C_6 W_t + C_7(I_t - C_8 - C_9 S_t)^2; \qquad t = 1 \ldots T; \tag{2f}$$

$$S_t, X_t, W_t, I_t \geq 0,\ t = 1 \ldots T,\ p_i \geq 0, \qquad i = 1 \ldots k. \tag{2g}$$

Az (F4)–(F5) feltevések alapján a (2c) és (2d) feltételek a periódusok keresletét definiálják, a (2b) és (2f) feltételek ismét eliminálhatók. A (2e) feltétel megfelel az (F6) feltevésnek, s így egy sztochasztikus programozási feladatot kell megoldanunk. A feltételben szereplő $\beta_j \Sigma_1^k (b_i p_i + e_i p_i^2)$ valószínűségi változó normális eloszlású, várható értéke $\bar{\beta}_j \cdot \Sigma_1^k (b_i p_i + e_i p_i^2)$, szórás pedig $\sigma_j \Sigma_1^k (b_i p_i + e_i p_i^2)$.

Keressük meg most azt a λ-t, melyre:

$$P(\beta_j(\Sigma_1^k b_i p_i + \Sigma_1^k e_i p_i^2) \leq \bar{\beta}_j(\Sigma_1^k b_i p_i + \Sigma_1^k e_i p_i^2) + \lambda \cdot \sigma_j(\Sigma_1^k b_i p_i + \Sigma_1^k e_i p_i^2)) = \pi_j,$$

s jelöljük ezt az értéket $\lambda(\pi_j)$-vel.

A (2e) sztochasztikus feltétel ekkor az alábbi determinisztikus feltétellel pótolható:

$$\beta_j(\Sigma_1^k b_i p_i + \Sigma_1^k e_i p_i^2) + \lambda(\pi_j)\cdot\sigma_j\cdot\Sigma_1^k(b_i p_i + e_i p_i^2) \leqq d_j\,;$$

$$j = 1\ldots T-k.$$

Az (1) modellben használt paraméterek mellett legyen:

i, j	b_i	e_i	$\overline{\beta}_j$	σ_j	π_j	$\lambda(\pi_j)$	d_j
1	3 000	5 000	0,3	0,1	0,95	1,65	112
2	5 000	10 000	0,4	0,1	0,9	1,28	200
3	3 000	5 000	0,3	0,1	0,9	1,28	300

Az első három periódusban beállt keresletnövekedésnek várhatóan 30%-a a negyedik, 40%-a az ötödik, 30%-a a hatodik periódusból származik. A π_j-kre adott értékek azt mutatják, hogy eléggé biztosak akarunk lenni afelől, hogy az utolsó három periódusból származó keresletelvonások nem lépik túl a 112, 200, 300 szinteket. A standard normális eloszlás táblázatából a π_j-hez hozzárendelhetjük a megfelelő $\lambda(\pi_j)$ értékeket, s a konstansok behelyettesítése után kapott programozási feladat az alábbi formára hozható:

$$f(\mathbf{X}) \to \min$$

$$\mathbf{X} \geqq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{g}_1(\mathbf{X}) = \mathbf{0}.$$

$$\mathbf{g}_2(\mathbf{X}) \geqq \mathbf{0}.$$

ahol az f, g_1 és g_2 függvények ismét nem lineárisak.

A feladat megoldását az alábbi táblázat mutatja:

t	1	2	3	4	5	6	Σ_1^T
S_t^0	627,6	560,2	864,2	887,7	1298,6	1058,7	5297,0
W_t^0	13,6	11,67	17,01	18,45	25,42	20,87	
X_t^0	681,3	575,7	871,5	921,1	1304,2	1079,8	5433,7
túlóra	1,3	−7,8	21,0	−1,5	33,2	36,3	
I_t^0	73,7	89,2	36,5	129,9	135,5	156,6	
p_i^0	0,0056	0,023	0,052				
$(b_i p_i^0 + e_i p_i^0)^2$	17,6	118,2	185,2				

$Z_2^0 = 1259{,}47$

A megadott inputok mellett a modell gyakorlatilag a második és harmadik periódusban javasolt (2,3%-os, illetve 5,2%-os) árleszállítást. A (2) modell összkereslete megegyezik az (1) modell összkeresletével, s értelemszerűen a két modell teljesítménye is közel van egymáshoz. Mint várható volt: $Z_1^0 > Z_2^0$, az árdiszkontálás a költségek szempontjából kedvezően befolyásolja a kereslet eloszlását. A változást a táblázat utolsó sora mutatja, s ennek megfelelően a (2) modell által mutatott keresleti szint az első periódusban 17,6, a másodikban 118, a harmadikban 185 egységgel magasabb mint az (1) modell optimális megoldásában. A keresleti görbe egyenletesebbé válásával a munkaerő szintek sem mutatnak olyan ingadozást mint az (1) modellben, s ez okozhatja, hogy ugyanezt a termelési programot kisebb termelési költséggel lehet megvalósítani.

3. modell

A (2) modell felhasználta az (1) modell optimális megoldását. Az (1) és (2) modell szimultán optimalizálása [(3) modell] várhatóan a célfüggvény értékekre nézve a $Z_1^0 > Z_2^0 \geq Z_3^0$ rangsorhoz juttat bennünket, mivel a modell egyidejűleg határozza meg a keresleti összértéket és az árdiszkontálás nagyságát. A szimultán modellben a (2) modellben inputként szereplő, az (1) modell optimumából kapott S_t^0 értékeket az (F1) feltevésben definiált függvény adja meg. Az (F1)–(F6) feltevések alapján modellünknek az alábbi formája van:

$$Z_3 = \{\Sigma_1^T Y_t + R(\Sigma_1^k p_i(b_i p_i + e_i p_i^2))\} \to \text{MIN} \tag{3a}$$

$$I_{t-1} + X_t = S_t + I_t; \quad t = 1, \ldots, T \tag{3b}$$

$$R = \frac{\Sigma_1^T Y_t + F}{\Sigma_1^T X_t} \alpha, \tag{3c}$$

$$S_i = a_i^{(1)} + a_i^{(2)}/R + b_i p_i + e_i p_i^2; \qquad i = 1, \ldots, k \tag{3d}$$

$$S_{k+j} = a_{k+j}^{(1)} + a_{k+j}^{(2)}/R - \beta_j \Sigma_1^k(b_i p_i + e_i p_i^2); \quad j = 1, \ldots, T-k \tag{3e}$$

$$P(\beta_j(\Sigma_1^k(b_i p_i) + \Sigma_1^k e_i p_i^2) \leq d_j) \geq \pi_j; \qquad j = 1, \ldots, T-k \tag{3f}$$

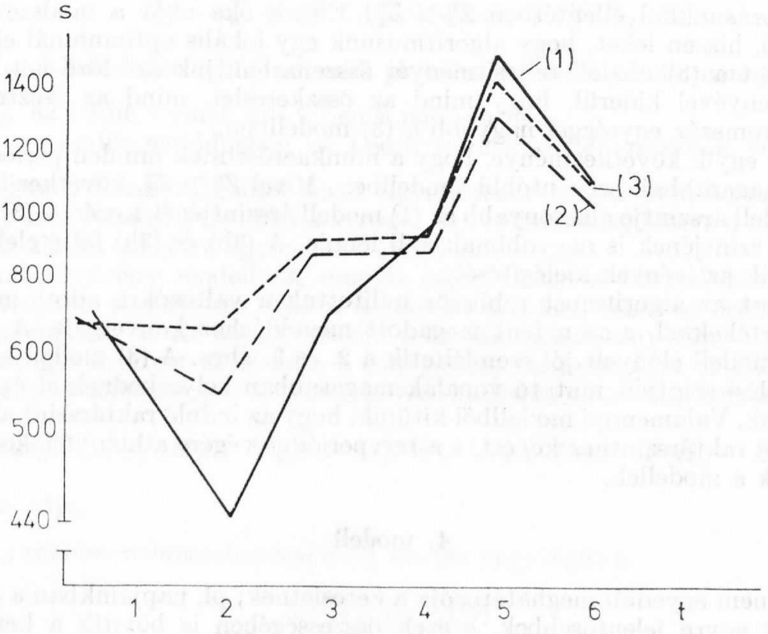
$$Y_t = C_1 W_t + C_2(W_t - W_{t-1})^2 + C_3(X_t - C_4 W_t)^2 + C_5 X_t - C_6 W_t + \\ + C_7(I_t - C_8 - C_9 S_t)^2; \qquad t = 1, \ldots, T; \tag{3g}$$

$$X_t, S_t, W_t, I_t \geq 0; \; t = 1, \ldots, T; \quad p_i \geq 0; \; i = 1 \ldots k; \quad R \geq 0. \tag{3h}$$

Az (1) és (2) modellek inputjait felhasználva a feladat megoldása az alábbi:

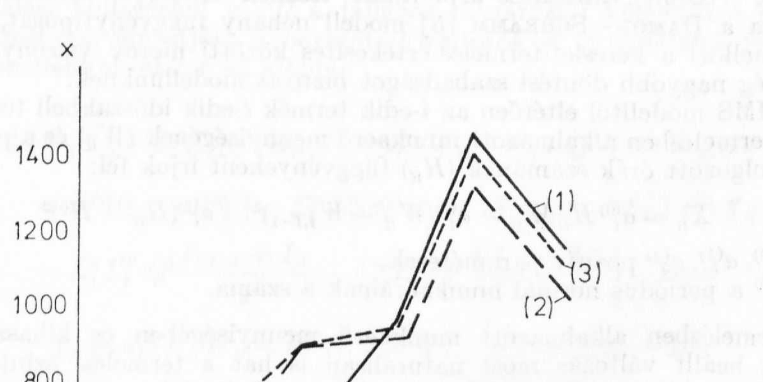
t	1	2	3	4	5	6	$\sum_{t=1}^{T}$
S_t^0	641,5	637,1	888,4	939,5	1375,1	1123,3	5583
W_t^0	13,8	13,2	17,2	19,6	26,9	22,1	
X_t^0	691,9	659,9	874,2	977,9	1377,1	1107,3	5688
túlóra	−0,1	0,0	16,9	−2,1	37,1	2,3	
I_t^0	69,9	92,0	99,0	137,4	139,2	123,2	
p_i^0	0,0	0,032	0,044				
$b_i p_i^0 + e_i p_i^{02}$	0,0	169,0	151,5				

$R^0 = 0{,}2718$, $Z_0^3 = 1305{,}9$.



2. ábra

A keresleti szint alakulása



3. ábra

A termelési szint alakulása

Várakozásunkkal ellentétben $Z_3^0 > Z_2^0$! Ennek oka akár a módszerben is kereshető, hiszen lehet, hogy algoritmusunk egy lokális optimumnál elakadt. Ha viszont a (3) modell teljesítményét összehasonlítjuk az előző két modell teljesítményével kiderül, hogy mind az összkereslet, mind az össztermelés közel háromszáz egységgel nagyobb a (3) modellben.

Ennek egyik következménye, hogy a munkaerőszintek minden periódusban rendre magasabbak ezen utóbbi modellben. Mivel $Z_1^0 > Z_3^0$, következik, hogy a (3) modell árszintje alacsonyabb az (1) modell árszintjénél, s ezért a (3) modell keresleti szintjének is nagyobbnak kell lennie. A (3b) és (3h) feltételek pedig biztosítják az igények kielégítését.

Emellett az algoritmust többször indítottuk a változókra adott más-más induló értékekkel, s az a fent megadott megoldáshoz konvergált. A (3) szimultán modell előnyeit jól szemléltetik a 2. és 3. ábra. A (3) modell keresleti és termelési szintjeit mutató vonalak magasabban helyezkednek el és egyenletesebbek. Valamennyi modellből kitűnik, hogy az induló raktárszint alacsony az ideális raktárszinthez képest, s a tervperiódus végére a hiányt fokozatosan behozzák a modellek.

4. modell

Az ár nem egyedüli meghatározója a keresletnek; pl. napjainkban a reklámkiadások egyre jelentősebbek, s ezek összességében is bővítik a keresletet. Az ilyen faktorokat költségminimalizáló modellekben nem egyszerű szerepeltetni; a bevétel növekedését a modell nem érzi. A nyereségmaximalizáló modellek viszont változatos árpolitikát tesznek lehetővé. Modellünk felhasználja a DAMON–SCHRAMM [5] modell néhány függvénytípusát, ugyanakkor mellőzi a kereslet-termelés-értékesítés közötti merev viszonyt. Ez a különbség nagyobb döntési szabadságot biztosít modellünknek.

A HMMS modelltől eltérően az i-edik termék t-edik időszakbeli termelését (X_{it}) a termelésben alkalmazott munkaerő mennyiségének (W_{it}) és a periódusban ledolgozott órák számának (H_{it}) függvényeként írjuk fel:

$$X_{it} = a_i^{(0)} H_{it} W_{it} - a_i^{(1)}(W_{it} - W_{i,t-1})^2 - a_i^{(2)}(H_{it} - H^0)^2$$

ahol: $a_i^{(0)}$, $a_i^{(1)}$, $a_i^{(2)}$ pozitív paraméterek,
H^0 a periódus normál munkaóráinak a száma.

A termelésben alkalmazott munkaerő mennyiségében és kihasználtsági fokában beállt változás most naturálisan is hat a termelési szintre, ezek financiális hatását pedig a célfüggvényben érzékeltetjük.

A termelés X_{it} mennyiséggel növeli az i-edik termékből a t-edik periódus elején meglevő $I_{i,t-1}$ raktárszintet és $a_{ij}^{(3)} X_{it}$ mennyiséggel csökkenti a j-edik nyersanyagból a t-edik periódus elején meglevő $I_{j,t-1}^M$ raktárszintet. Az X_{it} termelési szint ugyancsak csökkenti a t-edik periódusban a k-adik erőforrásból meglevő $b_{kt}^{(1)}$ mennyiséget $a_{ki}^{(4)} X_{it}$ nagysággal. A vállalat által a t-edik periódusban a j-edik nyersanyagtípusra feladott megrendelés (O_{jt}) nem lehet nagyobb mint $b_{jt}^{(2)}$, s ezen megrendelés a $t+1$-edik periódusban áll rendelkezésre. A j-edik nyersanyagból I_j^{0M}, az i-edik késztermékből I_i^0 mennyiséget képes a vállalat kizárólagossn raktározni.

A marketing szektor modellezésénél feltesszük, hogy az i-edik termék iránt a t-edik periódusban megnyilvánuló D_{it} keresletet az alábbi függvény írja le:

$$D_{it} = \alpha_{it}^{(0)} + \alpha_{it}^{(1)} Y_{i,t-1} + \alpha_{it}^{(2)} A_{it} + \alpha_{it}^{(3)}/R_{it}$$

ahol: Y_{it} az i-edik termékből a t-edik periódusban értékesített mennyiség,

R_{it} az i-edik termék ára a t-edik periódusban,

A_{it} a t-edik periódusban az i-edik termék reklámozásának volumene.

A függvény konstruálásánál ismét figyelembe vettük a kereslet-ár közötti fordított arányosságot, továbbá a kereslet és a reklámozás, illetve a fogyasztói szokások között meglevő egyenes arányosságot.

A fenti függvény modellünk magját adja, hiszen a bevétel növelésének egyik módja az ár növelése. Ekkor a kereslet csökken, tehát az értékesíthető termékmennyiség is. Ez utóbbi viszont a bevétel másik tényezője.

A pénzügyi szektort most csak a célfüggvény reprezentálja. A HMMS-féle megközelítést felhasználva a munkaerővel kapcsolatos költségeket a

$$c_i^{(1)} H_{it} W_{it} + c_i^{(2)}(W_{it} - W_{i,t-1})^2 + c_i^{(3)} W_{it} \cdot (H_{it} - H^0) + c_i^{(4)}(H_{it} - H^0)^2$$

kifejezés adja.

Az A_{it} reklám volumenhez kapcsolt kiadás nagyságát a

$$(c_i^{(5)} A_{it} + c_i^6 A_{it}^{(2)})$$

függvény definiálja, s a tervidőszakban a reklámkiadások nem haladhatják meg az A^0 forintot. A termeléssel kapcsolatos fajlagos energia- és nyersanyag-felhasználási költségeket a $c_{it}^{(7)}$, a fajlagos raktározási költségeket a $c_{it}^{(8)}$ és $c_{jt}^{(9)}$ paraméterek mutatják. A bevezetett változók és paraméterek felhasználásával modellünk ekkor az alábbi:

$$Z = \Big\{ \Sigma_1^T \Sigma_1^n R_{it} Y_{it} - \Sigma_1^n \Sigma_1^T [c_i^{(1)} H_{it} W_{it} + c_i^{(2)}(W_{it} - W_{i,t-1})^2 + c_i^{(3)} W_{it}(H_{it} - H^0) +$$

$$+ c_i^{(4)}(H_{it} - H^0)^2] - \Sigma_1^T \Sigma_1^n (c_i^{(5)} A_{it} + c_i^{(6)} A_{it}^2) - \Sigma_1^n \Sigma_1^T c_{it}^{(7)} X_{it} -$$

$$- \Sigma_1^n \Sigma_1^T c_{it}^{(8)} \frac{I_{i,t-1} + I_{it}}{2} - \Sigma_1^m \Sigma_1^T c_{jt}^{(9)} \frac{I_{j,t-1}^M + I_{jt}^M}{2} \Big\} \to \max \qquad (4a)$$

$$X_{it} = a_i^{(0)} H_{it} W_{it} - a_i^{(1)}(W_{it} - W_{i,t-1})^2 - a_i^{(2)}(H_{it} - H^0)^2$$

$$t = 1, \ldots, T; \; i = 1, \ldots, n \qquad (4b)$$

$$I_{j,t-1}^M + O_{j,t-1}^M = a_{ij}^{(3)} X_{it} + I_{jt}^M; \quad j = 1, \ldots, m; \; t = 1, \ldots, T \qquad (4c)$$

$$\Sigma_1^n a_{ik}^{(4)} X_{it} \leq b_{kt}^{(1)}; \quad k = 1, \ldots, p; \; t = 1, \ldots, T; \qquad (4d)$$

$$O_{jt} \leq b_{jt}^{(2)}; \quad j = 1, \ldots, m; \; t = 1, \ldots, T \qquad (4e)$$

$$I_{i,t-1} + X_{it} = Y_{it} + I_{it}; \quad i = 1, \ldots, n; \; t = 1, \ldots, T \qquad (4f)$$

$$\Sigma_j^m \frac{I_{jt}^M}{I_j^{0M}} + \Sigma_1^n \frac{I_{it}}{I^0} \leq 1; \quad t = 1 \ldots T \qquad (4g)$$

$$D_{it} = \alpha_{it}^{(0)} + \alpha_{it}^{(1)} \cdot Y_{i,t-1} + \alpha_{it}^{(2)} A_{it} + \alpha_{it}^{(3)}/R_{it};\ i = 1, \ldots, n;\ t = 1, \ldots, T \quad (4h)$$

$$Y_{it} \leq D_{it};\ i = 1, \ldots, n;\ t =, 1, \ldots, T \quad (4i)$$

$$\Sigma_1^T \Sigma_1^n (c_i^{(5)} A_{it} + c_i^{(6)} A_{it}^2) \leq A^0; \quad (4j)$$

$$I_{iT} \geq I_i^F;\ i = 1, \ldots, n;\ I_{jt}^M \geq I_j^{MF};\ j = 1, \ldots, m; \quad (4k)$$

$$A_{it}, Y_{it}, W_{it}, H_{it}, I_{it}, I_{jt}^M, O_{jt} \geq 0 \quad (4l)$$

minden i, t, j-re.

Legyen:

$$n = 2,\ m = 1,\ p = 1,\ T = 3,$$

valamint:

$a_1^{(0)} = 1$, $a_2^{(0)} = 1{,}2$, $a_1^{(1)} = 2$, $a_2^{(1)} = 2{,}2$, $a_1^{(2)} = 3$,

$a_2^{(2)} = 2{,}8$, $a_1^{(3)} = 4$, $a_{11}^{(4)} = 0{,}8 \cdot 10^{-3}$, $a_{21}^{(4)} = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$,

$H^0 = 160$, $b_{1t}^{(1)} = 160$, $b_{1t}^{(2)} = 10^6$, $I_1^{0M} = 0{,}55 \cdot 10^6$, $I^0 = 0{,}4 \cdot 10^6$,

$c_1^{(1)} = 3$, $c_2^{(1)} = 2$, $c_1^{(2)} = 20$, $c_2^{(2)} = 15$, $c_1^{(3)} = 1{,}5$, $c_2^{(3)} = 1$, $c_1^{(4)} = 50$,

$c_2^{(4)} = 40$, $c_1^{(5)} = 3$, $c_2^{(5)} = 2$, $c_1^{(6)} = 0{,}4$, $c_2^{(6)} = 0{,}2$, $c_1^{(7)} = 8{,}5$, $c_1^{(7)} = 7$,

$c_{1t}^{(8)} = 0{,}15$, $c_{2t}^{(8)} = 0{,}1$, $c_{1t}^{(9)} = 0{,}02$, $I^{FM} = 347 \cdot 10^3$, $I_1^F = 0{,}12 \cdot 10^6$,

$I_2^F = 0{,}0$, $I_{1,0} = 0{,}12 \cdot 10^6$, $I_{2,0} = 0$, $I_0^M = 0{,}38 \cdot 10^6$, $0_{1,0} =$

$= 0{,}6 \cdot 10^6$, $W_{1,0} = 1000$, $W_{2,0} = 0{,}0$, $A^0 = 50\,000$ és

it	$\alpha_{it}^{(0)}$	$\alpha_{it}^{(1)}$	$\alpha_{it}^{(2)}$	$\alpha_{it}^{(3)}$
11	−300 000	0,3	300	$3{,}5 \cdot 10^6$
12	−310 000	0,31	310	$3{,}6 \cdot 10^6$
13	−314 000	0,33	330	$3{,}8 \cdot 10^6$
21	−310 000	0,31	310	$3{,}6 \cdot 10^6$
22	−314 000	0,33	330	$3{,}8 \cdot 10^6$
23	−300 000	0,3	300	$3{,}5 \cdot 10^6$

Az inputok két termékre vonatkoznak, és a tervidőszakot három periódusra osztottuk. A termékek egyetlen nyersanyagot és erőforrást használnak ($m = 1$, $p = 1$). A kezdeti értékek (W_{i0}, I_{i0}) azt mutatják, hogy az 1-es indexszel ellátott termék termelése folyik a tervperiódus elején, a 2. termékből viszont a termelési szint ekkor zéró.

A termelékenységi paraméterek ($a_i^{(0)}$, $a_i^{(1)}$, $a_i^{(2)}$) és a költség-paraméterek ($c_i^{(1)}$, $c_i^{(2)}$, $c_i^{(3)}$, $c_i^{(4)}$) viszont a második terméket preferálják.

Nézzük meg, hogy modellünk milyen termelési ütemet javasolt az egyes periódusokban:

it	11	12	13	21	22	23
H_{it}	128,7	150,75	163	167,5	156,8	141,9
W_{it}	982	572,9	963,4	54,9	84,9	93,5
X_{it}	122 823	138 422	147 912	10 707	21 306	20 319,3
I_{jt}^{M}	90,18	93,14	347 079	–	–	–
I_{it}	8,56	6,04	120 000	300,4	3250,2	31,5
O_{jt}	144 227	618 719	999 170	–	–	–
Y_{it}	246 126	142 547,5	35 417	19262,7	24 426	31 370
D_{it}	246 328	142 826	35 897	2021,5	28 131	32 116
A_{it}	148	171,5	120,1	167,2	196,3	197,4
R_{it}	7,65	11,25	14,54	14,0	14,06	13,29

Az 1. termék magas kezdő raktárszintje miatt a termékből az első periódusban értékesített mennyiség (Y_{11}) a termelési szintet (X_{11}) jóval meghaladja, s ekkor az árnak (R_{11}) alacsonynak kell lennie. Az értékesítés (Y) és ár (R) adatsorból egyértelműen kiderül, hogy modellünk a termelési szerkezet módosítását javasolja, s így az 1. termék árát fokozatosan növeli, hiszen az így csökkenő kereslet nem zavarja termelési céljait.

A 2. terméknél a folyamat ellentétes. A termelési szint változtatásához kapcsolt költségek miatt csak fokozatosan lehet emelni a termelési szintet, s mindaddig magasan lehet tartani az árat, amíg az értékesítési szintet nem korlátozza a kereslet nagysága.

(Beérkezett: 1981. március 20-án.)

IRODALOM

1. Bergstrom, G. L.—Smith B. E.: Multi-item production planning -an extension of the HMMS Rules. M. Sci. 16 (10), 1970, B614—B629.
2. Bowman, E. H.—Fetter: Analyses of industrial operations. Homewood, Illinois, 1959. R. D. Irwin Inc.
3. Bowman, E. H.: Production scheduling by the transportation method of linear programming. Op. R. 2 (1), 1956, 100—103.
4. Buffa, E. S.—Taubert, W. S.: Production inventory systems: planning and control. Homewood, 1972. Irwin.
5. Damon, W.—Schramm, R.: A simultaneous decision model for production, marketing and finance, M. Sci. 19 (2), 1972, 161—172.
6. Ebert, R. J.: Aggregate planning with learning curve productivity. M. Sci. 23 (2), 1976, 171—182.
7. Florian, M.—Klein, M.: Deterministic production planning with concave costs and capacity constraints. M. Sci. 18 (1), 1971, 12—20.
8. Hanssmann, F.: Operation research in production and inventory control. N. Y.—London, 1962. John Wiley and Sons Inc.
9. Holt—Modigliani—Muth—Simon: A linear decision rule for production and employment scheduling. M. Sci. 2 (1), 1955, 1—30.
10. Holt—Modigliani—Muth: Derivation of a linear decision rule for production and employment. M. Sci. 2 (2), 1956, 159—177.

11. HOLT—MODIGLIANI—MUTH—SIMON: Planning production inventories and workforce. Englewood Cliffs, 1960. Prentice-Hall.
12. JONES, C. H.: Parametric production planning. M. Sci. 13 (11), 1967, 843—866.
13. KUNREUTHER, H.: Extension of Bowman's theory on managerial decision-making. M. Sci. 15 (8), 1969, 415—439.
14. LASDON, L. S.—TERJUNG, R. C.: An efficient algorithm for multi-item scheduling. Op. R. 19 (4), 1971, 946—969.
15. LEE, W. B.—KHUMAWALA, B. M.: Simulation testing of aggregate production planning models in an implementation methodology. M. Sci. 20 (6), 1974, 903—911.
16. LEITCH, R. A.: Marketing strategy and the optimal production schedule. M. Sci. 21 (3), 1974, 302—312.
17. LIPPMAN, S. K.—ROLFE—WAGNER—YUAN: Optimal production scheduling with deterministic demands. M. Sci. 14 (3), 1967, 1011—1029.
18. MELLICHAMP, J. M.—LOVE, R. M.: Production switching heuristics for the aggregate planning planning problem. M. Sci. 24 (12), 1978, 1242—1251.
19. PRÉKOPA, A.—SZÁNTAI, T.: On multi-stage stochastic programming progress in O. R. Vol. II. Bp. Akadémiai Kiadó 1976. 733—757.
20. SCHWARZ, L. B.—JOHSON, R. E.: An appraisal of the empirical performance of the linear decision rule for aggregate planning. M. Sci. 24 (8), 1978, 844—849.
21. TAUBERT, W. H.: A search decision rule for the aggregate scheduling problem. M. Sci. 14 (6), 1968, 343—359.
22. TUITE, M. F.: Merging marketing strategy: selection and production scheduling: a higher order optimum. The Journal of Industrial Engineering, Febr. 1968, 76—84.
23. VERGIN, R. C.: Production scheduling under seasonal demand. The J. of Industrial Eng. 17 (5), 1966, 260—266.
24. WELAM, U. P.: An HMMS type interactive model for aggregate planning. M. Sci. 24 (5), 1978, 564—575.
25. WELAM, U. P.: Multi item production planning models with almost closed solution. M. Sci. 22 (9), 1975, 1021—1028.

OPTIMA OF HIGHER ORDER IN PRODUCTION PLANNING

Problems of production planning showing strong seasonality and meeting consumer's demands with minimal costs are usually solved by the combination of the following three extreme assumptions:

— fluctuations in production level are caused by the change in employed labour force,
— fluctuations in production level are caused by the degree of utilization of manpower;
— production level is constant and fluctuations in demand are counterbalanced by stockholding.

Some authors (e.g. references 16, 22) suggest the rearrangement of demand as a fourth possibility, but these models cannot determine the global level of demand.

Four models are presented in the study determining demand levels both globally and by periods. The first three of them minimize cost, while the last one maximizes profits. All models may be reduced to such a programming problem where both the objective function, and the system of constraints are non-linear. It is shown in a numerical example that despite cost minimization the level of demand and production, respectively, will not decrease in our models.

Problems were solved by Fiacco-McCormick's SUMT method.

ОПТИМУМЫ БОЛЕЕ ВЫСОКОГО УРОВНЯ В ПЛАНИРОВАНИИ ПРОИЗВОДСТВА

Проблемы планирования производства с ярко выраженной сезонностью и удовлетворяющие потребительским запросам при минимальных затратах решаются, чаще всего посредством комбинирования трех следующих крайних альтернатив:

— колебания уровня производства вызываются изменением численности рабочей силы;
— причиной колебания уровня производства является степень использования рабочей силы;

— уровень производства является стабильным и колебания спроса нейтрализуются с помощью складских запасов.

Некоторые работы, указанные в литературе (например 16, 22) в качестве четвертой альтернативы предлогают перестройку спроса, однако эти модели не могут определить глобальный уровень спроса.

В данной работе приводятся четыре модели, которые глобально и по периодам определяют уровни спроса. Первые три модели минимализируют затраты, а последняя максимализирует прибыль.

Все модели могут быть отнесены к такой задаче по программированию, в которой ни целевая функция, ни система условий не являются линейными. С помощью цифрового примера указывается, что несмотря на минимализацию затрат в наших моделях не уменьшается уровень спроса и производства.

Рассматриваемые задания решались посредством метода Фиакко—Маккормика.

LENGYEL IMRE–KUBA ATTILA

Síküveg szabásának optimalizálása (I.)

1. Bevezetés

Tanulmányunkban húzott síküveg szabásának optimalizálásával, az Üvegipari Művek Orosházi Üveggyárában felmerült probléma matematikai modellezésével és számítógépes megoldásával foglalkozunk.

Hasonló probléma több vállalatnál (pl. fémipari, textilipari, bőripari, stb. vállalatnál) előfordul, mivel sok helyen van szükség eltérő méretű idomoknak valamilyen alapanyagból való kiszabására és a darabolási műveletek elvégzése közben jelentős mennyiségű hulladék keletkezik. Bizonyos termékek gyártásánál az önköltség csökkentése mindig is kiemelt feladat volt, az utóbbi években pedig egyre sürgetőbbé vált, ennek egyik legjelentősebb módja lehet pl. az anyagköltségek csökkentése.

Ebben a tanulmányban olyan számítógépes eljárást ismertetünk, amellyel a síküveg-szabásnál keletkező felületveszteséget minimalizálni lehet. Természetesen a darabolási folyamat optimalizálásának ez csak egy bizonyos szempontból való megközelítése, más szempontok (szabáshoz szükséges idő, raktározás, anyagmozgatás, stb.) esetleg merőben más jellegű feladatok megoldását igénylik. A modellezés során a gyakorlati szempontokat részesítettük előnyben, egyszerű matematikai eszközöket felhasználó eljárás kidolgozására törekedtünk.

A síküveg hagyományosnak tekinthető, eddig alkalmazott szabásánál gyári szakemberek becslése szerint kb. 33–35% hulladék keletkezik, ezzel szemben a számítógép által adott szabástervek vesztesége 20–22%. Vagyis a számítógépes eljárás a hagyományos szabási módszerhez képest kb. 13%-kal csökkentheti a hulladékot, vagy másképp megfogalmazva, ugyanannyi alapanyag feldarabolása esetén kb. 20%-kal nő a hasznos, eladható üvegfelület. A módszer szorosan illeszkedik a jelenlegi technológiai folyamathoz, műszaki változtatások, beruházások nélkül alkalmazható bizonyos átszervezések végrehajtása után. Tanulmányunkban a feladat modellezésének folyamatát mutatjuk be, az optimalizálást végző végleges programrendszert és alkalmazásának tapasztalatait külön cikk [14] ismerteti.

1.1. *A szabási probléma leírása*

A gyárban *alaptáblának* nevezett téglalap alakú síküveget, félkészterméket gyártanak és raktároznak. A megrendelők (házgyárak, építőipari szövetkeztek, stb.) meghatározott méretű, minőségű és tételszámú téglalap alakú síküveget kérnek, ezek a *rendelés*ek, amit a szabász-üzem a raktáron levő félkésztermékekből szab ki. A szabásnál fellépő felületveszteség minimalizálására kellett megoldást keresni, ahol a felületveszteség = (összes felhasznált alaptábla felület)–(leszabott rendelések felülete).

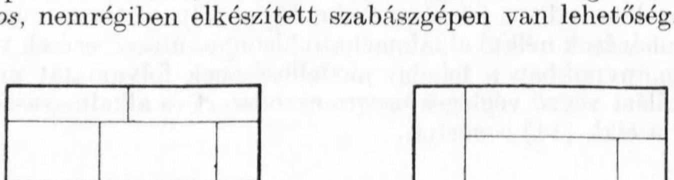
A rendelések egy adott időszakra vonatkozó (pl. hónap, dekád, stb.) összességét *rendelésállománynak* hívjuk. *Szabásképnek* (szabásrajznak, leszabási változatnak, stb.) nevezzük azt az elrendezést, ami szerint a rendeléseket az alaptáblákból leszabják. A szabásképek egy olyan sorozata, amelyben a rendelésállomány minden rendelése legalább az előírt tételszámban kiszabható: a rendelésállomány *szabásterve*. Egy rendelésállományhoz több szabásterv tartozik, ezek közül kell az optimálisat kiválasztani.

A rendelések sürgősségi jellegük folytán két csoportra oszthatók: a *napi sürgős és az előre ismert, hosszabb határidejű* rendelésekre. A napi sürgős rendelések kis tételszámúak és szinte azonnal hozzá kell kezdeni a leszabáshoz, itt az optimalizálás nagy nehézségek leküzdése árán is csak viszonylag gyengébb eredményekkel kecsegtet. Az üveggyár jelenleg nem rendelkezik számítógéppel, így az optimális szabásterv elkészítése és a tényleges lszabás csak különböző helyeken (pl. számítóközpontban és a szabász-üzemben) és időben egymáshoz képest esetleg több napos eltéréssel végezhető el, amiből következik, hogy csak a hosszabb határidejű rendelések darabolásának optimalizálása jöhet szóba. Ezek a rendelések az összes mennyiségnek a nagyobb hányadát alkotják és általában elég nagy a tételszámuk (legalább 50).

A gyárban jelenleg kétféle hagyományos módon darabolják fel az alaptáblákat. *Kézi szabásnál* a vágófejeket és a téglalapok elhelyezkedését a szabással foglalkozó munkás kézzel állítja be, így a felületveszteség nagyon függ a szakértelmétől és a tapasztalatától. A másik hagyományos szabás a *sorozatvágás*, ahol egy automata vágógép gyorsan és pontosan darabolja, pneumatikusan mozgatja az üvegtáblát, de itt nincs lehetőség a hulladék lényeges csökkentésére, mivel *egy alaptáblából csak egyféle téglalapokat* tud kivágni. A szabás megkezdése előtt kiszámítják az adott rendeléshez legmegfelelőbb alaptáblát és a raktárból bekészítik. Ezeknél a hagyományos szabási módszereknél a felületveszteség kb. 33–35%. A sorozatvágás nagy vesztesége elsősorban abból származik, hogy nem teszi lehetővé különböző méretű téglalapok egyidejű leszabását.

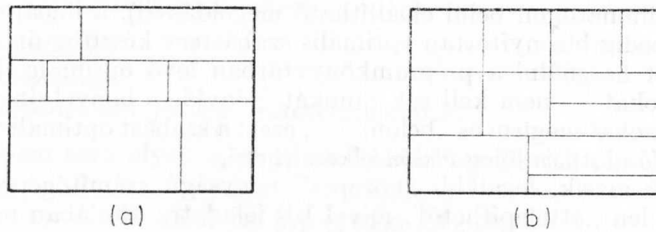
A síküveg szabásánál alkalmazott szabászgépek döntő többsége széltől-szélig karcolja az üvegtáblát (ezt *guillotine-vágásnak* is nevezik), azaz nincs lehetőség a vágófejek felemelésére (1. ábra).

A téglalapok illesztésére, ütemezésére, a felületveszteség minimalizálására a *két-asztalos*, nemrégiben elkészített szabászgépen van lehetőség. Itt először



1. ábra

Példa guillotine- (a) és nem-guillotine vágásra (b)



2. ábra

Két-ütemű (a) és általános két-ütemű (b) szabásképek

az alaptáblákból csíkokat vágnak, majd a csíkokat egyenként darabolják fel a kívánt méretre — ezt *két-ütemű guillotine vágásnak* is nevezik (lásd a 2a ábrát). Mi erre a szabási módszerre készítettük el az optimalizációs eljárást.

Ez a szabási probléma a két-dimenziós szabási, lefedési feladatok egyik speciális esete, amikor téglalapból kell téglalapokat kiszabni. Az ilyen jellegű szabási feladatokkal foglalkozott P. C. GILMORE és R. E. GOMORY alapvető cikksorozatában [1—4]. A szabási problémát lineáris programozási feladatként fogalmazták meg, amelyet módosított szimplex-algoritmussal oldottak meg úgy, hogy a bázisba bevonandó vektorokat kisegítő feladatok (hátizsák-problémák) segítségével határozták meg. Ezáltal a nagyméretű lineáris programozási feladat kisebb méretű, könnyebben kezelhető feladatokra vezették vissza. Az általuk kifejlesztett eljárást alkalmazta az üvegiparban R. G. DYSON és A. S. GREGORY [5], valamint OLI B. G. MADSEN [6—7] általános két-ütemű guillotine-vágásra (lásd a 2b ábrát). A két-dimenziós feladat általánosabb (több-ütemű guillotine-vágás) megoldására adott algoritmust J. C. HERZ [8], N. CHRISTOFIDES és C. WHITLOCK [9], valamint A. ADAMOWICZ és A. ALBANO [10]. Az általunk leírtakhoz elvében hasonlít az a módszer, amely LAMPL TAMÁS [11] dolgozatában szerepel. Az Orosházi Üveggyár által kitűzött feladat részletesebb leírása pedig [12]-ben található meg.

Megoldásként a legegyszerűbbnek tűnő eljárást választottuk: az összes szóba jöhető szabásképet elkészítjük és egészértékű lineáris programozással (ILP) választjuk ki közülük az optimális szabástervet alkotó szabásképeket. Az összes szabáskép elkészítése és a nagyméretű ILP feladat kezelése okozza az igazi nehézségeket. Az összes szabásképet mindig a konkrét rendelésállomány ismeretében egy gyors kombinatorikus algoritmussal készítjük el, az ILP feladatot pedig programkönyvtárban levő programcsomag segítségével oldjuk meg.

Miért döntöttünk úgy, hogy ezzel a módszerrel keressük meg az optimális szabástervet? Az alábbi szempontokat vettük figyelembe:

— az üvegszabás feltételei annyira speciálisak (a két-ütemű guillotine-vágás) — a két-dimenziós feladat lényegében két egy-dimenziós feladatra redukálódott —, hogy a feltételeket jól kihasználó, egyszerű kombinatorikus eljárás készíthető a szabásképek előállítására,
— a szabásképek száma bizonyos redukciók és a félkésztermékek méreteinek kicsiny száma miatt nem nagy (1000—1500-nál nem több),
— a gyártól a számítógép térben és időben messze van, ezért van idő az optimális szabástervek elkészítésére (nem kell megelégedni egy közelítő,

ámde pillanatokon belül előállítható megoldással), a lineáris programozással pedig bizonyítottan optimális szabásterv készíthető.

— fel lehet használni a programkönyvtárban levő optimalizáló programcsomagokat – nem kell sok munkát igénylő és bonyolult optimalizáló programokat megírni és ,,belőni" –, ezért a szabást optimalizáló rendszer *rövid idő* alatt és főleg *olcsón* elkészíthető,

— bármely másik, legalább ,,közepes" nagyságú számítógépre az eljárás könnyedén ,,áttelepíthető", mivel LP feladatra általában minden programkönyvtárban van megoldás.

A hosszabb határidejű rendelések optimalizálásánál lehetőség van az optimális szabástervhez szükséges félkésztermékek gyártására, azaz a termelésirányításra is (tetszőlegesen nagy fiktív raktárkészletet feltételezve). Ugyanis előírhatjuk azt, hogy olyan méretű, mennyiségű és minőségű alaptáblát gyártsanak, amelyre majd szükség lesz. Azonban a termelés-visszacsatolásnak ezt a direkt lehetőségét (és vele együtt a félkésztermék-raktár nélküli szabást) megakadályozza az a gyártási sajátosság, hogy az alaptáblák minősége csak a húzás után dől el. Más szóval az optimális tervben előírt minőségű alaptáblák helyett eltérő minőségű alaptáblákat is kapunk. Amiből mostmár az következik, hogy *szükség van az elkészült félkésztermékek raktározására és a síküveg-szabás optimalizálásánál ennek a raktárkészletnek a figyelembevételére is.* Továbbá a kézi, ill. a sorozatvágáshoz is ebből a raktárból veszik ki az alaptáblákat.

2. Üzemi, műszaki feltételek

A következőkben a két-ütemű üvegszabás speciális gyári feltételeit ismertetjük.

A rendelések paraméterei a következők: vastagság, minőség, szélesség, hosszúság és tételszám. A félkésztermékek paraméterei ugyanezek. Természetesen egy rendelést csak az ugyanolyan vastagságú és minőségű alaptáblából lehet kiszabni. Azaz egy alaptáblából csak azok a rendelések elégíthetők ki, amelyeknek a vastagsága és a minősége az alaptábláéval megegyező. Tehát a minőség és a vastagság a rendelések halmazát olyan diszjunkt részhalmazokra bontja, amelyeket egymástól függetlenül kell szabni. Következésképpen ezekre a részhalmazokra külön-külön elkészített optimális szabástervek együtt alkotják az egész rendelésállomány optimális szabástervét.

A továbbiakban egy csoporton belül vizsgáljuk a problémát. Legyen a csoport rendeléseinek halmaza: R,

$$R = \{r_i \mid r_i(x_i, y_i, t_i),\ i = 1, 2, \ldots, n\},$$

ahol: n a csoport rendeléseinek a száma,
x a szélessége,
y a hosszúsága,
t a tételszáma a rendelésnek.

A megfelelő félkésztermékek halmaza: F,

$$F = \{F_j \mid F_j(A_j, H_j, D_j),\ j = 1, 2, \ldots, p\}$$

ahol: p az alaptábla-féleségek száma,
A a szélességét,
H a hosszúságát,
D a darabszámát jelöli a félkészterméknek.

Természetesen csak olyan x_i és y_i rendelések fogadhatók el, amelyekre van olyan j, hogy

$$\max\{x_i, y_i\} \leq \max\{A_j, H_j\}$$

és

$$\min\{x_i, y_i\} \leq \min\{A_j, H_j\},$$

azaz a rendelés „ráfér" valamelyik alaptáblára.

Mivel adott vastagságnál az alaptáblák szélessége állandó, ezért

$$A = A_j \quad (j = 1, 2, \ldots, p).$$

Az optimalizálást a már említett két-ütemű vágásra készítettük el, amelynek a modellezés szempontjából fontos jellemzői az alábbiak:

(i) az alaptábla egyik oldalával párhuzamosan csíkokat vágunk (első-ütem), majd a csíkokat egyenként daraboljuk fel a kívánt méretre (második-ütem) (lásd a 3. ábrát);

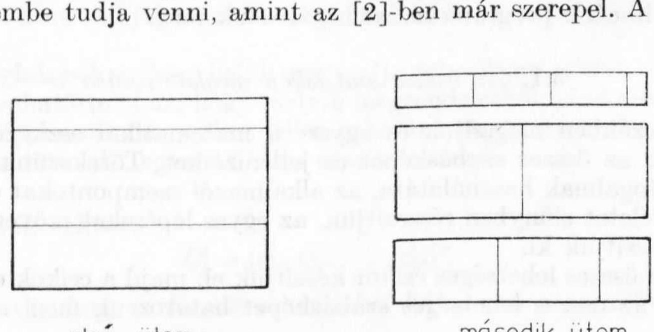
(ii) a csíkok száma legfeljebb S_1, egy csíkon belül a téglalapok száma pedig legfeljebb S_2 lehet (erre azért van szükség, mivel a vágófejek száma miatt egy asztalon legfeljebb ennyi vágást lehet egyszerre elvégezni);

(iii) az eltérő méretű téglalapok száma egy szabásképben legfeljebb T (erre a feltételre azért volt szükség, mert az üzemben a vágóasztalok mellett csak meghatározott számú megrendelés tárolható és csomagolható egyszerre).

A szükséges fogalmak és vágási feltételek ismeretében megfogalmazhatjuk a síküveg-szabás kapcsán felmerülő optimalizálási probléma megoldásra váró feladatát:

Keresendő olyan eljárás, amely a konkrét üzemi feltételeket figyelembe véve, az előre megadott rendelésekre — lehetőleg a félkésztermékek raktárkészletét is felhasználva — olyan szabástervet szolgáltat, amelynek maradéktalan teljesítése esetén a felületveszteség minimális lesz.

A Gilmore—Gomory-eljárás a (ii) feltételt, a vágófejek számának korlátozását figyelembe tudja venni, amint az [2]-ben már szerepel. A (iii) feltételt



3. ábra
Az alaptábla két-ütemű feldarabolása

is be lehet építeni az eljárásba – az általunk ismert publikációkban ilyen feltétellel nem találkoztunk –, természetesen ez a két feltétel bonyolultabbá, nehezebben kezelhetővé teszi az algoritmust, mint az általános esetben.

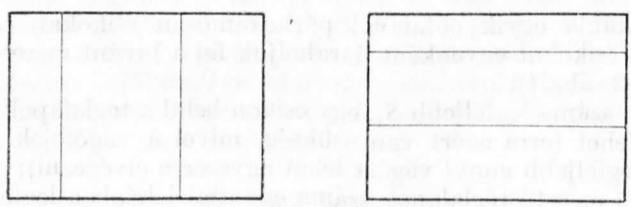
3. A leszabás matematikai modellezése

A feladatot – mint azt már említettük – két lépésben oldjuk meg:

1. fázis: az összes szóba jöhető, a feltételeknek eleget tevő szabáskép elkészítése,
2. fázis: a szabásképekből az optimális szabásterv meghatározása.

A szabás első lépésében a csíkok levágása az alaptábla helyzetétől függően kétféle módon történhet:

(i) az alaptábla szélességével párhuzamosan vágunk (lásd a 4a ábrát),
(ii) az alaptábla hosszával párhuzamosan vágunk (4b ábra).



a) b)

4. ábra

A két lehetséges csík-vágás

A továbbiakban az 1. fázisban mindkét vágási módot vizsgáljuk. Természetesen egy szabástervben csak az egyiket alkalmazhatjuk, attól függően, hogy a leszabás műszaki körülményei melyiket teszik lehetővé. Jelenleg az (i) módon lehet szabni, azonban a műszaki feltételek változtatására lehetőség van. Az összes szabáskép közül az optimális szabástervhez tartozókat a 2. fázisban egészértékű lineáris programozással határozzuk meg.

3.1. *Az összes szabáskép meghatározása*

A következőkben megadjuk és egyszerű matematikai eszközöket felhasználva leírjuk az összes szabásképet és jellemzőiket. Törekszünk az egyszerű jelölések és fogalmak használatára, az alkalmazói szempontokat és az algoritmikus szemléletet előnyben részesítjük, az egyes lépéseket szöveges magyarázatokkal egészítjük ki.

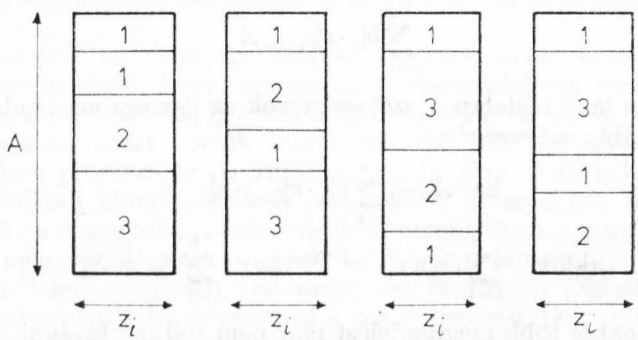
Először az összes lehetséges csíkot készítjük el, majd a csíkok egymás mellé illesztésével az összes lehetséges szabásképet határozzuk meg.

3.1.1. *Az alaptábla szélességével párhuzamos csík-vágás*

A csíkok szélessége az $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n$ méretek közül kerül ki, hiszen egy téglalap legfeljebb kétféle helyzetben, az x és az y méretének megfelelő szélességű csíkban szabható le (a 4a ábrán látható a csík-vágás). Az előbb felsorolt méretek között lehet megegyező is, ezért $z_1, z_2, \ldots, z_m$ ($m \leq 2n$, $z_i < z_j$, ha $i < j$) jelölje a csík-szélességként szóba jöhető szélesség- és hosszméretek olyan együttes felsorolását, ahol már minden szám különböző.

A z_i-hez ($i = 1, 2, \ldots, m$) hozzárendelünk több méretet, mégpedig azoknak a téglalapoknak a másik méretét, amelyekben a z_i szélességként vagy hosszúságként szerepel. Azaz z_i-hez hozzárendeljük Z^i-t:

$$Z^i = \{z_i^1, z_i^2, \ldots, z_i^N\} \ (1 \leq N \leq n,\ z_i^k < z_i^j, \text{ ha } k < j).$$



5. ábra

A csíkok azonosak a leszabás optimalizálása szempontjából

Erre azért volt szükség, mivel egy csíkban csak olyan rendelések szerepelhetnek, amelyeknek egyik mérete megegyezik a csík szélességével, ezért a z_i szélességű csíkban levő téglalapok egyik mérete z_i, a másik mérete pedig a Z^i elemei közül kerül ki. A csíkon belül a téglalapok sorrendje tetszőleges ezért pl. az 5. ábra csíkjai a leszabás optimalizálása szempontjából azonosnak tekinthetők.

Mivel a téglalapok csíkon belüli sorrendje tetszőleges, ezért a csíkot egyértelműen meghatározza az, hogy melyik megrendelésből hány szerepel benne. Következésképpen minden csíkot jellemezhetünk egy vektorral, az ún. „csíkösszeállítási-vektorral", egyszerűbben a *csík-vektorral*.

Legyen a csík-vektor:

$$C_j^i = (c_{j1}^i, c_{j2}^i, \ldots, c_{jn}^i)^*$$

ahol c_{jk}^i mutatja, hogy a k-adik rendelésből hány van a z_i szélességű j-edik csíkban.

A következő 6 feltételnek kell eleget tenni:

(1) $$c_{jk}^i \geq 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n);$$

(2) $$\text{ha } c_{jk}^i > 0, \text{ akkor } z_i = x_k \text{ vagy } z_i = y_k;$$

(3) $$\sum_{k=1}^{n} c_{jk}^i \leq S_2$$

— legfeljebb ennyi téglalap lehet egy csíkban;

(4) $$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sign} c_{jk}^i \leq T$$

— legfeljebb ennyiféle rendelés lehet egy csíkban.

Legyenek $c_{jk_1}^i, c_{jk_2}^i, \ldots, c_{jk_\alpha}^i$ a C_j^i nemzéró komponensei és $b_{k_s}^i$ az r_{k_s} rendelés z_i-től eltérő mérete (négyzet alakú téglalapnál z_i-vel egyenlő) $(s = 1, 2, \ldots, \alpha)$, akkor

(5) $$\sum_{s=1}^{\alpha} b_{k_s}^i \cdot c_{jk_s}^i \leq A$$

— a csíkban levő téglalapok szélességeinek az összege nem haladhatja meg az alaptábla szélességét;

(6) $$\text{ha } A - \sum_{s=1}^{\alpha} b_{k_s}^i \cdot c_{jk_s}^i \geq z_i^1$$

$$\text{akkor } \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sign} c_{jk}^i = T \text{ vagy } \sum_{k=1}^{n} c_{jk}^i = S_2$$

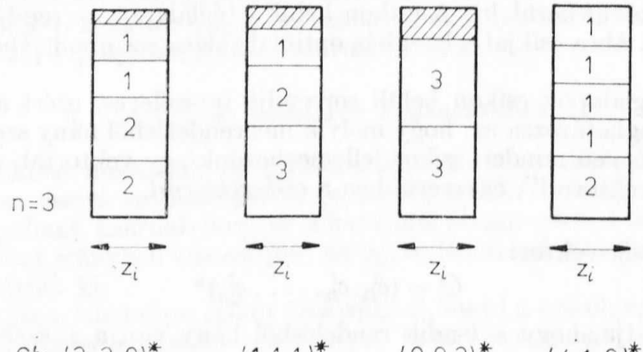
— a hulladékból több megrendelést már nem tudunk levágni.

Képezzük z_i-hez az összes lehetséges csík-vektort, ezáltal meghatározzuk az összes z_i szélességű csíkot.

A továbbiakban a C_j^i csík *veszteségén* a

$$w_j^i = z_i A - \sum_{k=1}^{n} c_{jk}^i \cdot x_k \cdot y_k$$

mennyiséget értjük.



6. ábra

Példák csíkok összeállítására 3 rendelés esetén

Tegyük fel, hogy a $z_1, z_2, \ldots, z_m$ szélességekhez az összes csík-vektort már meghatároztuk. Ki kell szűrni közülük azokat, amelyek nem szerepelhetnek az optimális szabástervben.

Egymás után alkalmazva a következő redukciós szempontokat vettük figyelembe:

(i) Ha egy rendeléshez két homogén csík tartozik (homogén egy csík, amikor csak egyféle téglalap van a csíkban, azaz $\Sigma_k \operatorname{sign} c^i_{jk} = 1$), pl. r_k-hoz az x_k és az y_k szélességű, és

$$\left[\frac{A}{x_k}\right] \leq \left[\frac{y_k}{x_k}\right] \cdot \left[\frac{A}{y_k}\right],$$

akkor az y_k szélességű csíkot elhagyjuk ([ ] az egész rész jele). Ugyanis, ha az optimális szabásterv valamelyik szabásképében szerepelne ez az y_k szélességű csík, akkor az x_k szélességűt a helyére rakva nem növelnénk a veszteséget.

(ii) Minden csík esetében megnézzük, vannak-e olyan csíkok, amelyekkel az úgy helyettesíthető, hogy ugyanazok a megrendelések szerepelnek az új csíkokban is, de a veszteség így már kisebb lesz. Ez az előbbi (i) redukciónak az általánosítása (azért vettük külön, mivel az (i) az egyszerűsége miatt a számítógépes programban is külön szerepel). Egy ilyen helyettesítés több különböző csíkból állhat, de csak olyanokból, amelyeknek a vizsgált csík szélességénél nem nagyobb a szélességük és amelyekben a vizsgált csík rendelésein kívül más rendelés nem szerepel. A vizsgált csíkot elhagyjuk, ha találunk a veszteségnél nem nagyobb veszteségű helyettesítést. (Feltételezzük, hogy a vizsgált csík olyan sokszor szerepel a szabástervben, hogy mindegyik behelyettesítendő csíkot legalább egyszer lehet alkalmazni.)

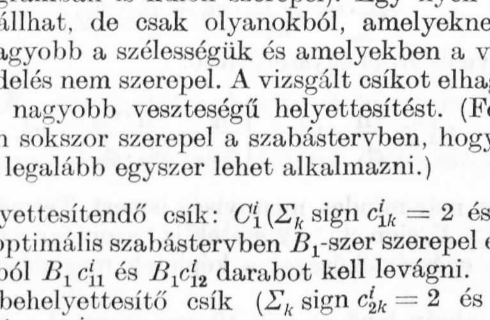
Pl.: legyen a helyettesítendő csík: C^i_1 ($\Sigma_k \operatorname{sign} c^i_{1k} = 2$ és $c^i_{11} > 0$, $c^i_{12} > 0$), tegyük fel, hogy az optimális szabástervben B_1-szer szerepel és a vesztesége: w^i_1. Ekkor a téglalapokból $B_1 c^i_{11}$ és $B_1 c^i_{12}$ darabot kell levágni.

Legyen C^i_2 egy behelyettesítő csík ($\Sigma_k \operatorname{sign} c^i_{2k} = 2$ és $c^i_{21} > 0$, $c^i_{22} > 0$), amelynek a vesztesége: w^i_2.

Ekkor

$$B_2 = \min_{k=1,2} \left\{ \left[\frac{B_1 c^i_{1k}}{c^i_{2k}} \right] \right\}$$

-szor lehet ezzel a csíkkal helyettesíteni az eredetit.



7. ábra

Numerikus példa az y_k szélességű homogén csík elhagyására

(Bevezettük a [ ] jelölést, amely bármely E valós számra

$$[E] = \begin{cases} [E] & \text{ha } E - [E] = 0, \\ [E]+1, & \text{egyébként.}) \end{cases}$$

Tegyük fel, hogy

$$B_2 \approx \frac{B_1 \cdot c_{11}^i}{c_{21}^i}$$

ekkor r_2-ből maradt

$$B_1 \cdot c_{12}^i - \frac{B_1 c_{11}^i}{c_{21}^i} \cdot c_{22}^i$$

darab. Ezt a mennyiséget homogén csíkból vágjuk ki, amely $\Sigma_k \operatorname{sign} c_{3k}^i = 1$ és $c_{32}^i > 0$, a vesztesége: w_3^i. A homogén csíkot B_3-szor kell venni,

$$B_3 \approx \frac{1}{c_{32}^i} \cdot \left(B_1 \cdot c_{12}^i - \frac{B_1 \cdot c_{11}^i}{c_{21}^i} \cdot c_{22}^i\right).$$

Az eredeti csíkot elhagyjuk, ha

$$B_1 \cdot w_1^i \geq B_2 \cdot w_2^i + B_3 \cdot w_3^i,$$

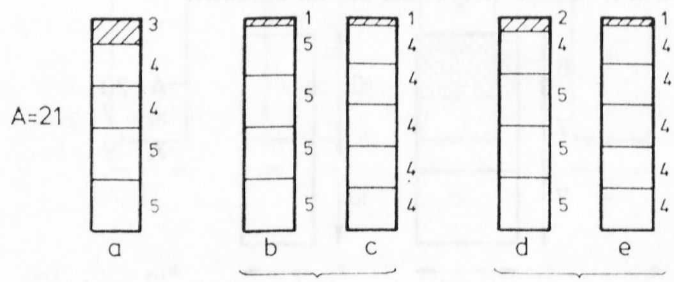
azaz behelyettesítve és B_1-el egyszerűsítve:

$$w_1^i \geq \frac{c_{11}^i}{c_{21}^i} \cdot w_2^i + \left(\frac{c_{12}^i}{c_{32}^i} - \frac{c_{11}^i \cdot c_{22}^i}{c_{21}^i \cdot c_{32}^i}\right) \cdot w_3^i. \tag{7}$$

Ebben a képletben már minden mennyiség ismert. Természetesen c_2^i homogén csík is lehet. A $T \geq \Sigma_k \operatorname{sign} c_{jk}^i > 2$ esetek is hasonlóan vizsgálhatók.

Megjegyzés: Az egészértékűséget a képletek megadásánál figyelmen kívül hagyjuk.

Példa: Ha a 8. ábrán levő a) csík 10-szer szerepel a szabástervben, akkor a b) csíkot 5-ször, a c) csíkot pedig 4-szer kell alkalmaznunk ahhoz, hogy ugyanazokat a megrendeléseket kisebb veszteséggel állítsuk elő. Hasonlóképpen, ha az a) csík 15-ször szerepel a szabástervben, akkor 10 db d) csík és 4 db c) csík kisebb veszteséggel pótolja.



8. ábra

Numerikus példa a (ii) csík-helyettesítésre

Az összes csík-vektor elkészítése és az előbb leírt redukciós lépések végrehajtása után megkaptuk a szabásrajzok képzéséhez szükséges összes csíkot és jellemzőiket. A következőkben a szabásképek előállítását ismertetjük.

Állítsuk sorba a csík-vektorokat:

$$C_1^1, C_2^1, \ldots, C_{d_1}^1, C_1^2, C_2^2, \ldots, C_{d_2}^2, \ldots, C_1^m, C_2^m, \ldots, C_{d_m}^m, \tag{8}$$

ahol d_i a redukció után megmaradt z_i szélességű csíkok száma.

Az összes szabásképet a csíkok egymás mellé illesztésével készítjük el. Egy szabásképen belül a téglalapok sorrendje, elhelyezkedése az optimalizálás szempontjából tetszőleges (9. ábra), ezért a szabásképet egyértelműen meghatározza, hogy melyik téglalapból hány szerepel benne. Ebből következik, hogy az ún. „szabáskép-összeállítási-vektorral", röviden *szabás-vektorral* a szabásrajzot egyértelműen jellemezhetjük.

A csík-vektorok (8) felsorolásából kell kiválasztani azokat, amelyek egymás mellé illesztésével szabásképet akarunk meghatározni. Nézzünk egy kiválasztást, amelyben a $C_{j_1}^{m_1}$ csík-vektor Q_{j_1}-szer, ..., *a* $C_{j_\alpha}^{m_\alpha}$ csík-vektor Q_{j_α}-szor szerepel.

A kiválasztás által meghatározott szabás-vektor (legyen ez a j-edik) a

$$K_j = (K_{j1}, K_{j2}, \ldots, K_{jn})^* = \sum_{k=1}^{\alpha} Q_{j_k} \cdot C_{j_k}^{m_k}$$

összegvektor, ahol K_{ji} azt mutatja, hogy r_i-t hányszor kell levágni ebben a szabásképben.

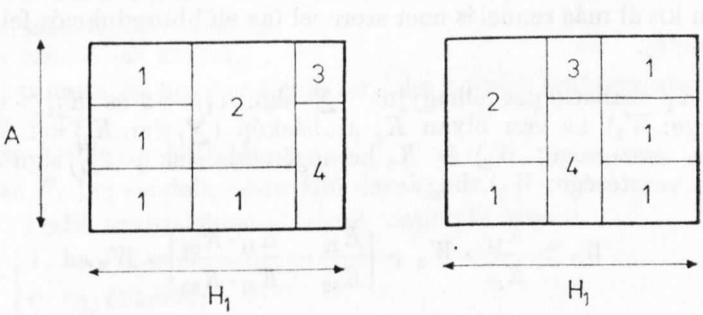
A szabás-vektoroknak a következő 4 feltételt kell kielégíteniök:

$$\sum_{k=1}^{\alpha} Q_{j_k} \leq S_1 \tag{9}$$

— legfeljebb S_1 csíkból állhat;

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sign} K_{jk} \leq T \tag{10}$$

— legfeljebb ennyiféle rendelés lehet egy szabásképben;



9. ábra

Az optimalizálás szempontjából azonosnak tekintett szabásrajzok

$$(11) \qquad \sum_{k=1}^{\alpha} Q_{jk} \cdot z_{m_k} \le H_p$$

— a csík-szélességek összege a legnagyobb alaptábla-hossznál kisebb.

A K_j-hez hozzárendelünk egy alaptábla-méretet, H_h^j-t:

$$H_h^j = \min \left\{ H_h \,\middle|\, \sum_{k=1}^{\alpha} Q_{jk} \cdot z_{m_k} \le H_h, h = 1, 2, \ldots, p \right\}$$

$$(12) \qquad \text{Ha} \quad H_h^j - \sum_{k=1}^{\alpha} Q_{jk} \cdot z_{m_k} \ge z_1,$$

$$\text{akkor} \quad \sum_{k=1}^{\alpha} Q_{jk} = S_1 \quad \text{vagy} \quad \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sign} K_{jk} = T$$

— vagyis ha újabb csíkot lehetne illeszteni a meglevők mellé, akkor ezt már csak a (9) vagy (10) feltételek megsértésével lehetne.

A K_j-hez hozzárendelünk egy *veszteséget*, amely

$$W_j = AH_h^j - \sum_{k=1}^{n} K_{jk} \cdot x_k \cdot y_k .$$

A lineáris programozási feladat felírásához a szabásképek előbb meghatározott paramétereire van szükség. A szabásképek várhatóan nagy száma miatt itt is egyszerű redukciókat hajtunk végre (a csík-redukcióhoz hasonlóan) elhagyva azokat a szabásképeket, amelyek nem szerepelhetnek az optimális szabástervben.

(i) A j-edik homogén szabásképet elhagyjuk, akkor ($\sum_s \operatorname{sign} K_{js} = 1$ és $K_{jk} > 0$), ha van olyan K_i homogén szabáskép ($\sum_s \operatorname{sign} K_{is} = 1$ és $K_{ik} > 0$), hogy $H_h^j \cdot K_{ik} > H_h^i \cdot K_{jk}$.

Egyenlőség esetén csak az egyiket tartjuk meg.

(ii) A megmaradó szabásképeknél megnézzük, van-e olyan helyettesítés, amelyet a szabáskép helyére téve a veszteség nem nő, ha van ilyen, akkor ezt a vizsgált szabásképet elhagyjuk. A helyettesítés több különböző szabásképből állhat, de csak olyanokból, amelyekben a helyettesítendő szabásrajz rendelésein kívül más rendelés nem szerepel (az előbbi redukciós feltétel ennek speciális esete).

Pl.: A K_1 szabásképet elhagyjuk ($\sum_j \operatorname{sign} K_{1j} = 2$ és $K_{11} > 0$, $K_{12} > 0$, a vesztesége: W_1), ha van olyan K_2 szabáskép ($\sum_j \operatorname{sign} K_{2j} = 2$ és $K_{21} > 0$, $K_{22} > 0$, a vesztesége: W_2) és K_3 homogén szabáskép ($\sum_j \operatorname{sign} K_{3j} = 1$ és $K_{32} > 0$, a vesztesége: W_3), hogy

$$W_1 \ge \frac{K_{11}}{K_{21}} \cdot W_2 + \left(\frac{K_{12}}{K_{32}} - \frac{K_{11} \cdot K_{22}}{K_{21} \cdot K_{32}} \right) \cdot W_3 .$$

A $T \ge \sum_j \operatorname{sign} K_{ij} > 2$ eset behelyettesítésének képlete is hasonlóan adódik.

Az egészértékűségtől itt is eltekintettünk.

A redukciók után megmaradt szabás-vektorok száma legyen: M, a sorrendjük pedig rögzített:
$K_1, K_2, \ldots, K_M$, ahol W_j és H_h^j a megfelelő veszteség, ill. alaptáblahossz ($j = 1, 2, \ldots, M$).

3.1.2. *Az alaptábla hosszával párhuzamos csík-vágás*

Jelenleg az alaptábla szélességével párhuzamosan vágnak, mivel azonban a vágási irány megváltoztatására lehetőség van, ezért röviden kitérünk a hosszal párhuzamos vágásra is (4b ábra).

A gondolatmenet hasonló az előbb leírtakhoz, először az összes csíkot határozzuk meg, majd a csíkok egymás mellé illesztésével a szabásképeket. Itt a csíkokhoz kell egy alaptábla-hosszt rendelni és a szabásképeket alkotó csíkok hosszának maximuma lesz a szabáskép hossza. Mivel a csík a veszteségét ,,viszi magával'' és az optimális szabásterv szabásképeinél az egyéb veszteség elenyésző a sok lehetséges összeállítás miatt, ezért a hosszal párhuzamos csíkvágás előnyösebbnek tűnik. Másrészt a csíkok száma ebben az esetben az alaptábla változó hossza miatt lényegesen több és ezáltal a szabásképek száma is ugrásszerűen megnő. Sajnos a két vágás összevetéséről nem állnak rendelkezésünkre adatok.

3.2. *Az egészértékű lineáris programozási feladat*

A fent leírt módon megkaptuk az összes szóba jöhető szabásképet. Ezután egészértékű lineáris programozási feladat (ILP) megoldásával megkapjuk az optimális szabástervet. Az ILP a következőképpen írható fel:

$$
\begin{aligned}
& u_j \in \{0, 1, 2, \ldots\} && (j = 1, 2, \ldots, M) \\
& \sum_{j=1}^{M} K_{ji} \cdot u_j \geq t_i && (i = 1, 2, \ldots, n) \\
(13) \qquad & \frac{\sum_{j=1}^{M} q_{jk} \cdot u_j \leq D_k}{\sum_{j=1}^{M} H_h^j \cdot u_j \to \min}\,, && (k = 1, 2, \ldots, p)
\end{aligned}
$$

ahol M a szabásképek száma,
n a rendelések száma,
K_{ji} azt mutatja, hogy az i-edik rendelés a j-edik szabásrajzban hányszor szerepel,
t_i az i-edik rendelés tételszáma,
D_k az F_k-ból rendelkezésre álló darabszám,
H_h^j a j-edik szabásképhez tartozó alaptábla hossza,

$$q_{jk} = \begin{cases} 1, \text{ ha } H_h^j = H_k \\ 0 \text{ egyébként.}; \end{cases}$$

A célfüggvény a felhasználandó félkésztermékek összfelületére utal; a cél ennek a minimalizálása, mivel felületveszteségen az összes felszabandó alaptábla felületének és a leszabott rendelések felületének különbségét értjük. A rendelések összfelülete konstans, az alaptáblák szélessége is állandó, ezért vehettük fel ilyen alakban a célfüggvényt. Gyakorlati oldalról ez azt jelenti, hogy a többlettermelést hulladéknak vesszük, azaz nem tároljuk a feleslegesen levágott darabokat.

A lehetséges megoldások halmaza üres is lehet, amennyiben a raktárban levő félkésztermékek összfelülete nem elég nagy. Bizonyos biztonsági tartalék feltételezésével ezt előre meg lehet becsülni. Természetesen akkor a legkisebb a felületveszteség, ha a D_k-kat tartalmazó feltételeket megszüntetjük, azaz tetszőlegesen nagy raktárkészletet feltételezünk. Ekkor a termelésirányítás is megvalósítható. A feladat együtthatómátrixa ,,ritka'', egy oszlopban legfeljebb T elem pozitív, ezt előnyösen kihasználó eljárásokat érdemes konstruálni, míg viszont hátrányosnak tűnik az, hogy a modellben kevés a feltétel és sok a változó ($n \ll M$).

4. A modell számítógépes megvalósítása

A matematikai alapok leírása után az alaptáblák, a rendelések legfontosabb jellemzőit és a leszabás konkrét üzemi feltételeit adjuk meg, majd a próbafeldolgozás tapasztalatait ismertetjük.

Az üveggyárban a két-asztalos szabászgéppel természetesen az alaptábláknak csak egy bizonyos osztályát szeretnék feldarabolni, amelyeknek fontos paraméterei összefoglalva az alábbiak:

(i) Az alaptáblák a minőségük szerint 4 osztályba sorolhatók: A, B, C és D minőség (természetesen ez változhat).

(ii) Az alaptáblák méretei jelenleg a következő értékek lehetnek:

Vastagság (mm)	Szélesség (mm)	Hosszúság (mm)
3	2000	2000, 2200, 2400
4	2000	2000, 2400, 2600
5–6	3000	2000, 2400, 2600

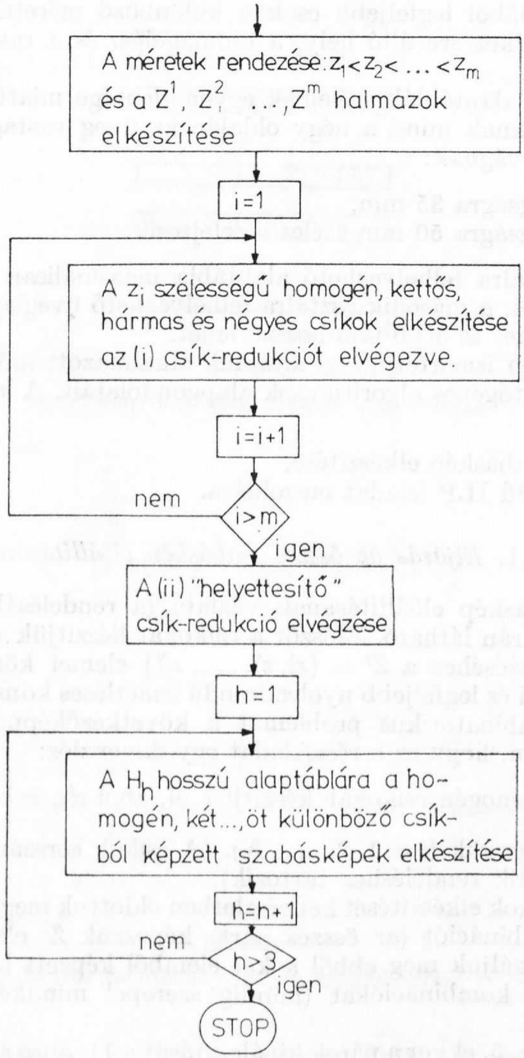
A rendelések jellemzői közül a minőség és a vastagság nyilvánvalóan megegyezik az alaptáblákéval. A szélesség és a hosszúság 256–2000 mm között milliméterenként változhat és gyakorlati megfontolások miatt a tételszám legalább 50 ($t_i \geq 50$).

A konkrét műszaki feltételek az alábbiak (a teljesség kedvéért a már említett feltételeket is megismételjük):

a) A szabás két vágóasztalon történik, az elsőn az alaptáblát csíkokra vágják fel, a másodikon a csíkokat egyenként darabolják fel a kívánt méretre.

b) Az első asztalon a gép 9 vágófejjel rendelkezik, a második asztalon 12 vágófej van, de itt is csak legfeljebb 9 működhet egyszerre. Mindkét asztalon az aktív 9 vágófej közül az első rögzített, a többi állítható, ezért $S_1 = S_2 = 8$ (azaz legfeljebb 8 csík szabható egy alaptáblából és egy csíkból legfeljebb 8 téglalap).

c) A vágófejek egymástól legalább 256 mm-re vannak (ez a minimálisan levágható téglalap-méret).



Bemenet: F és R elemei.

Kimenet: szabás-vektorok, veszteségek és alaptábla-hosszak.

Megjegyzés: kettős csíkon a $\sum_k \text{sign}\, c^l_{jk} = 2$ csíkot értjük, a hármas és négyes csík értelmezése hasonló.

10. ábra

A szabásképek előállításának vázlata

d) Egy alaptáblából legfeljebb csak 4 különböző méretű rendelést szabhatunk ki a rendelkezésre álló hely, a csomagolási és a raktározási gondok miatt, azaz $T = 4$.

e) A legyártott alaptáblák széleinek egyenetlensége miatt az a gyakorlat, hogy az alaptábláknak mind a négy oldalán az üveg vastagságától függően ún. „selejtcsíkot" vágnak:

3—4 mm vastagságra 35 mm,
5—6 mm vastagságra 50 mm széles a selejtcsík.

f) Az első asztalra felhelyezhető alaptábla maximálisan 3000 mm széles és 3500 mm hosszú, a második asztalra felhelyezhető üveglap pedig maximálisan 2000 mm széles és 3000 mm hosszú lehet.

A következőkben ismertetjük az általunk alkalmazott módszer két lépését megvalósító számítógépes algoritmusok alapgondolatait. A két lépés a következő:

(i) az összes szabáskép elkészítése,
(ii) a nagyméretű ILP feladat megoldása.

4.1. *Eljárás az összes szabáskép előállítására*

Az összes szabáskép előállításának vázlata (a rendelésállomány egy csoportjára) a 10. ábrán látható. Először a csíkokat készítjük el. A z_i szélességű csík-vektorok képzéséhez a $Z^i = \{z_i^1, z_i^2, \ldots, z_i^N\}$ elemei közül kell az összes legalább elsőrendű és legfeljebb nyolcadrendű ismétléses kombinációt kiválasztani. Ezt a kombinatorikus problémát a következőképpen oldottuk meg, erősen kihasználva, hogy ez a részfeladat egy-dimenziós:

1) Először a homogén csíkokat készítjük el, ahol $c^i_{\cdot k_j} = \left[\dfrac{A}{z_i^j}\right]$ és az (i) csíkredukciót is elvégezzük ($j = 1, 2, \ldots, N$). (A csíkok sorszámozásától eltekintünk z_i^j a k_j = edik rendeléshez tartozik).

2) A kettős csíkok elkészítését két részletben oldottuk meg. Először az összes másodrendű kombinációt (az összes párt) képezzük Z^i elemeiből, majd ezt felhasználva vizsgáljuk meg ebből a két elemből képzett legfeljebb nyolcadrendű ismétléses kombinációkat (mindig szerepel mindkét elem a kombinációban).

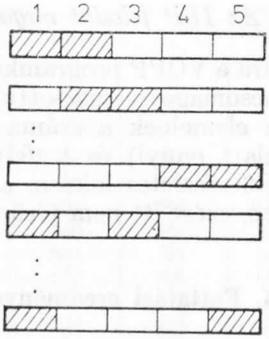
Pl. Legyen $N = 5$, ekkor a párok kiválasztását a 11. ábra szerint végezzük el, ahol a vonalkázott rész a pár tagjait jelöli. Legyen egy ilyen pár z_i^q és $z_i^s (z_i^q < z_i^s)$ és tegyük fel, hogy z_i^q a j., z_i^s a k. rendeléshez tartozik, a belőlük előállítható csík-vektorok képzését a 12. ábra mutatja.

3) A hármas és négyes csíkok elkészítése hasonló módon történik, mint a kettős csíkoké.

Az algoritmus alapján világos, hogy az összes lehetséges csík-vektort előállítjuk az előbb vázolt módon.

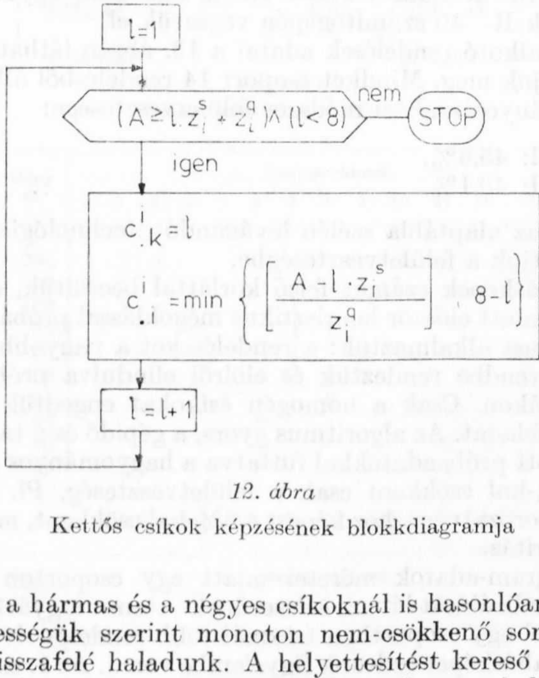
4) Az összes csík-vektor elkészítése után a (ii) „helyettesítő" csík-redukciót vizsgáljuk meg. A végrehajtása időigényes, ezért a képletet egyszerűsített formában vesszük figyelembe. A kettős csíkoknál (7) helyett csak a

$$w_1^i \geq \frac{c_{11}^i}{c_{21}^j} \cdot w_2^i + \frac{c_{12}^i}{c_{32}^i} \cdot w_3^i$$



11. ábra

A másodrendű kombinációk kiválasztása



12. ábra

Kettős csíkok képzésének blokkdiagramja

képletet nézzük, a hármas és a négyes csíkoknál is hasonlóan járunk el. Mivel a csíkok a szélességük szerint monoton nem-csökkenő sorrendben vannak, ezért hátulról visszafelé haladunk. A helyettesítést kereső eljárás az egy fa „endorder" bejárásához hasonló, ahol a fa gyökere a helyettesítendő csík. Egy út az egy lehetséges helyettesítés. A balrészfán lemegyünk a levélig és onnan megyünk balról-jobbra végig a leveleken (itt csak a leveleket keressük meg).

5) A szabásképeket a csíkok elkészítéséhez hasonlóan állítjuk elő. Először az egyféle, majd a két-, három-, négy- és ötféle csíkokat tartalmazó szabásrajzokat keressük meg a H_1 hosszú alaptáblára, azután a H_2 hosszú alaptáblára, stb. A legalább hatféle csíkot tartalmazó szabásképeket nem készítjük el, mivel kis valószínűséggel fordulnak elő. A szabásképek előállításánál a (9–12) feltételeket kellett figyelni, és azt, hogy kisebb alaptáblából ne legyen leszabható, azaz kétszer ne állítsuk elő.

4.2. *Az ILP feladat megoldása*

Az ILP feladat megoldására a VOPP programkönyvtárban levő VDG3 nevű vegyes-egészértékű programcsomagot választottuk ki, amely DOS-ban futtatható. Az együtthatómátrix elemeinek a száma legfeljebb 8192 lehet (ez a FORTRAN tömb-méret miatt ennyi) és legfeljebb 400 lehet a sorok, ill. az oszlopok száma. A VDG3 részletes leírása, a szükséges környezet ismertetése [13]-ban megtalálható, ezért itt nem térünk ki erre.

5. Futtatási eredmények

A következőkben a gyártól kapott rendelésállomány két csoportjának próbafeldolgozását ismertetjük, összevetve a számítógépes eljárás optimális szabástervét a hagyományos „sorozatvágás" és egy heurisztikus „mohó" algoritmus eredményeivel. A futtatásokat a József Attila Tudományegyetem Kibernetikai Laboratóriumának R–40 számítógépén végeztük el.

A csoportokat alkotó rendelések adatai a 13. ábrán láthatók. A méreteket centiméterben adjuk meg. Mindkét csoport 14 rendelésből áll. Erre a két csoportra a hagyományos szabási módszer felületvesztesége:

az 1. csoportnál: 45,6%,
a 2. csoportnál: 40,1%.

Természetesen az alaptábla szélén levágandó „technológiai" selejtcsíkot is mindig beleszámítjuk a felületveszteségbe.

Amikor a szabásképek számát felső korláttal becsültük, ez a szám olyan nagy lett, hogy emiatt először heurisztikus megoldással próbálkoztunk. Az ún. „mohó" algoritmust alkalmaztuk: a rendeléseket a nagyobb méretük szerint nem-növekvő sorrendbe rendeztük és elölről elindulva próbáltuk elhelyezni őket az alaptáblákon. Csak a homogén csíkokat engedtük meg, azaz egydimenziós volt a feladat. Az algoritmus gyors, a gépidő és a tárigény elenyésző, de a gyártól kapott próbaadatokkal futtatva a hagyományos szabáshoz képest átlagosan 6–9%-kal csökkent csak a felületveszteség. Pl. az 1. csoportnál 37% lett, azaz a sorozatvágáshoz képest 8,6%-kal csökkent, míg a 2. csoportnál 6,9% a megtakarítás.

A VDG3 program-adatok méretei miatt egy csoporton belül legfeljebb 20 rendelés optimalizálását láttuk célszerűnek – amit a gyártól kapott adatok is igazoltak, mivel egy csoportban húsznál több rendelés elvétve fordult csak elő –, így 400 szabásképet tudtunk figyelembe venni. Az 1. csoportnál a csíkok száma 26 lett, ezekből a csíkokból 862 szabásképet kaptunk (az (i) és (ii) szabáskép-redukciók végrehajtásával ez 650 alá csökkenthető). Felmerült a probléma, hogyan válasszuk ki a legfeljebb 400 szabásképet? A próbafeldolgozásnál ezt heurisztikusan végeztük el azon elv alapján, hogy a kiválasztott szabásképek a legkisebb veszteségűek legyenek és a közel 400 szabásképben a rendelések gyakorisága közel egyenlő legyen. Így 395 szabásképet kaptunk (a raktárt figyelmen kívül hagytuk), a VDG3 ezekből állította össze az optimális szabástervet, amely a 14. ábrán látható a 2. csoport optimális szabástervével együtt. A szabás-vektor i-edik komponense a beolvasás sorrendjében i-edik rendeléshez tartozik, a nullákat nem tüntettük fel (a szabás-vektor itt sorvektor). Pl. az S1 szabás-vektort 200×220 cm-es alaptáblára kell 204-szer

Vastagság: 3 mm, minőség: C.			Vastagság: 3 mm, minőség: B.		
Azonosító	Méretek	Tételszám	Azonosító	Méretek	Tételszám
A1	134×74	420	B1	152×80	220
A2	50×74	207	B2	184×84	700
A3	134×132	300	B3	100×100	200
A4	50×132	150	B4	162×78	300
A5	132×102	204	B5	130×82	150
A6	50×102	170	B6	134×74	280
A7	132×132	204	B7	50×74	138
A8	86×132	204	B8	134×132	200
A9	84×84	204	B9	50×132	100
A10	134×44	204	B10	132×102	136
A11	150×134	80	B11	132×132	136
A12	96×85	80	B12	86×132	136
A13	82×82	80	B13	84×84	136
A14	150×44	80	B14	134×44	136
	1. csoport			2. csoport	

13. ábra

A rendelésállomány két csoportja

Azonosító	Hány db	Szabás-vektorok 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	Alaptábla hossz
S1	204	1	1	1							1					220
S2	96	1	1	1	1											220
S3	122	1	1		1			1								220
S4	32				1			1	1							240
S5	50				1			1		2						240
S6	52								2	2						240
S7	34					1			2							240
S8	85					2	2									220
S9	40											1	2		1	240
S10	40											1		2	1	240

1. *csoport.* Az optimális szabásterv felületvesztesége: 21,7%

Azonosító	Hány db	Szabás-vektorok 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	Alaptábla hossz
T1	1													4		200
T2	75				1	2										220
T3	51				1					1		1				220
T4	85	1								1		1				220
T5	135	1							1	1						220
T6	66								1					2	1	240
T7	71				1		2								1	220
T8	69		1				2	2								240
T9	232		2													200
T10	167		1	1												200
T11	33			1							1		1			240
T12	104				1						1		1			220

2. *csoport.* Az optimális szabásterv felületvesztesége: 23,4%

14. ábra

A két csoport optimális szabásterve

alkalmazni és a szabásmintában az A1, A2, A3, A10 jelű rendelések mindegyike egyszer szerepel. Másrészt az A1 rendelés az S1, S2 és S3 szabásképekben kerül leszabásra.

A szabásképek előállításának gépideje 2–3 perc csoportonként az R–40 számítógépen, a VDG3 futási idejére nehéz becslést adni, mivel a folytonos optimum megtalálása után változó számú transzformációt hajt végre, amíg a megadott határon belül levő egészértékű megoldást eléri. Pl. az 1. csoportnál 21 transzformációt végzett el. Az egészértékű megoldás a folytonos optimumtól 0,7%-kal tért el, ez az eltérés az alkalmazás szempontjából lényegtelen. A szabás-vektorokból a szabásképek elkészítése egyszerűen elvégezhető.

	Sorozatvágás	„Mohó" alg.	Optimális
1. csoport	45,6%	37,0%	21,7%
2. csoport	40,1%	33,2%	23,4%

15. ábra

A felületveszteségek összevetése

A gyakorlatban jogos igény a gyár szakemberei részéről a rendelések kielégítésének és az alaptáblák bekészítésének „folyamatossága". Azaz, ha egy rendelés szerepel egy szabásképben, akkor addig szerepeljen a soron következőkben, amíg ki nincs elégítve. A lineáris programozással kapott optimális szabásterv nem tesz eleget a folyamatosságnak, a szabásképek csak „majdnem folyamatos" sorrendbe állíthatók. A 14. ábrán már ilyen sorrendben vannak, az 1. csoportnál csak egy rendelés leszabása szakítódik meg, és az is csak egyszer. A 2. csoportnál, ha a T1 szabáskép helyett a T6-ot nem 66-szor, hanem 68-szor alkalmazzuk, akkor csak egy rendelés leszabása szakítódik meg kétszer. Mindkét sorrend a gyakorlatban megfelelő, mivel egy rendelés tárolására van hely. Ezt a két sorrendet próbálgatással kaptuk. A legelőnyösebb sorrend kialakítására adott algoritmust DYSON és GREGORY [5], valamint MADSEN [6–7], ez utóbbi szerző [7]-ben részletes futtatási adatokat is közöl. A folyamatosság problémájára egy elméleti jellegű megközelítés található [12]-ben.

Összefoglalás

Tanulmányunkban az Orosházi Üveggyár síküveg-szabás problémájának egy lehetséges megoldását mutattuk be. Az üzemi műszaki feltételeket nagymértékben kihasználó, gyorsan és könnyen elkészíthető modellt adtunk meg a gyakorlati alkalmazhatóságot tartva mindig szem előtt. A dolgozatban leírt eljárás „életképességének" az igazolására próbafeldolgozásokat végeztünk, amely igazolta elképzeléseinket, habár „csak" szuboptimális szabásterveket kaptunk a nagy veszteségű szabásképek kihagyása miatt. A modell felállításával kapcsolatban és az elkészült programok nyomán számos olyan kérdés merült fel, amely nem csupán az optimum jobb megközelítését célozza, hanem a hatékonyabb felhasználást is lehetővé teszi. Ilyen pl.: a korlátozott számú szabáskép legmegfelelőbb kiválasztása, a speciális ILP feladatot előnyösen megoldó

módszer alkalmazása. Továbbá olyan sorrendben megadni az optimálisnak kapott szabásképeket, hogy a vágási folyamatban a lehető legkényelmesebben legyen végrehajtható (vagyis a darabolás folyamán lehetőleg kevés olyan rendelésnek kelljen a szabászasztal mellett helyet biztosítani, amelynek a leszabását fel kellett függeszteni más megrendelések miatt) stb. Hasonló problémákról és az optimalizálásra elkészült programrendszerről külön cikk készül [14].

Köszönetnyilvánítás: Ezúton köszönjük meg MOLDOVÁNYI FERENC és TÓTH PÁL (Orosházi Üveggyár Szervezési Osztály) értékes segítségét, amellyel az üvegszabás műszaki, üzemi körülményeinek tisztázását nagymértékben elősegítették.

(Beérkezett: 1981. március 12-én.)

IRODALOM

[1] GILMORE, P. C.—GOMORY, R. E.: A linear programming approach to the cutting stock problem. Operations Research 9, 1961 (849—859).

[2] Op. cit. Part II. Operations Research 11, 1963 (863—888).

[3] GILMORE, P. C.—GOMORY, R. E.: Multistage cutting stock problems of two and more dimensions. Operations Research 13, 1965 (94—120).

[4] GILMORE, P. C.—GOMORY, R. E.: The theory and computation of knapsack functions. Operations Research 14, 1966 (1045—1074).

[5] DYSON, R. G.—GREGORY, A. S.: The cutting stock problem in the flat glass industry. Operational Research Quarterly, 1974 (41—54).

[6] MADSEN, OLI B.: Glass cutting in a small firm. Mathematical Programming 17, 1979 (85—90).

[7] MADSEN, OLI B. G.: A cutting sequencing algorithm. Research report from IMSOR, No 12/1979 (Lyngby).

[8] HERZ, J. C.: Recursive computational procedure for two-dimensional stock cutting. IBM Journal Research and Dev. 1972 (462—469).

[9] CHRISTOFIDES, N.—WHITLOCK, C.: An algorithm for two-dimensional cutting problems. Operations Research 25, 1977 (30—44).

[10] ADAMOWICZ, A.—ALBANO, A.: A solution of the rectangular cutting-stock problem. IEEE Trans. on Systems, Man and Cyber. 6, 1976 (302—310).

[11] Lampl, T.: Anyagleszabási tervek készítése és programozása matematikai eszközökkel. Operációkutatási Esettanulmányok (SZÁMOK), 1971.

[12] LENGYEL, I.: Síküveg szabásának optimalizálása. Diplomamunka JATE, 1979.

[13] R-40 POS VOPP DOS/ES, Diszkrét optimalizálás, Robotron.

[14] GALAMBOS, G.—CSIRIK J.: Síküveg szabásának optimalizálása II., publikáció alatt.

OPTIMIZATION OF THE CUTTING OF FLATGLASS

A possible solution to the problem of cutting of flatglass in the Glass Work of Orosháza is presented. We propose a model that can be implemented rapidly and easily and makes use of the technological conditions of the factory keeping practical applicability always in view. In order to prove the "viability" of the procedure trial calculation was made that verified our expectations, though "only" sub-optimal cutting patterns were obtained because of the pre-selection of cutting patterns with great losses. In the course of setting up the model and calculating the programmes several problems have arisen that are aimed not only at a better approximation to the optimum, but also enable a more efficient utilization. Such are for example: the best preselection of the cutting patterns in a limited number, the adaptation of an integer LP method which utilizes the special structure of the problem. Furthermore, producing the cutting patterns in such a sequence that in the cutting process they may be most comfortably carried out (i.e. possibly few such orders should be stored beside the cutting table that have to be put aside later on because of other orders), etc. A separate article [14] is under preparation on these problems and on the computer programme for optimization.

ОПТИМИЗАЦИЯ РАСКРОЯ ЛИСТОВОГО СТЕКЛА

В данной работе приводится одно из возможных решений проблемы раскроя листового стекла на Стекольном заводе в Орошхаза. Излагается модель, в значительной мере обеспечивающая использование технических условий завода и которая быстро и легко может составляется, никогда не упуская из виду практическую используемость. В порядке доказательства «жизнеспособности» метода, приводимого в работе проводилась опытная обработка, которая подтвердила имеющиеся предположения, хотя были получены «лишь» субоптимальные проекты раскроя из–за упускания раскроечных схем, которые приводят к болшим потерям. В связи с развертыванием модели и на основании разрабатываемых на ее базе программ возникает такой вопрос, который направлен не только на достижение оптимума, а также позволят добиваться более эффективного использования. Такими являются, например, наилучший выбор раскроечной схемы, применение метода наиболее выгодно решающий специфическое задание целочисленного линейного программирования. Далее, оптимально получаемые раскроечные схемы даются в такой очередности, чтобы в процессе резки они выполнялись с наименьшими трудностями (т. е. в ходе раскроя на нарезной стол следует подавать такие заказы, из-за которых, по возможности, как можно меньше нужно было бы приостанавливать работу в связи с выполнением других заказов) и т. д. Относительно аналогичных проблем и програмной системы оптимизации будет подготовлена специальная статья.

STAHL JÁNOS

Lineáris vektormaximum problémák efficiens pontjainak létezéséről

Gyakran előfordul, hogy egy lineáris programozási modell megfogalmazásakor a vizsgált problémában több olyan szempont is van, amelyek bármelyikének megfelelő kifejezés lehetne a modell célfüggvénye. Ilyenkor, gyakran alkalmazott eljárás, hogy az

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

$$(1) \qquad \begin{Bmatrix} c_1 x \\ c_2 x \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_k x \end{Bmatrix} \rightarrow \max$$

ún. (lineáris) vektormaximum problémát összemérhető szempontok esetén az

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

$$(\sum_i \lambda_i c_i)\, x \rightarrow \max$$

lineáris programozási feladatra vezetik vissza, ahol a λ_i-k az egyes szempontoknak a modell készítői által meghatározott relatív súlyai. Egy másik, mondhatni ugyancsak szokásos eljárás, hogy egy kivételével valamennyi szempontra a modellezők valamilyen akceptálható szintet kifejező alsó korlátot állapítanak meg és így a vektormaximum problémát pl. a

$$c_2 x \geq \gamma_2$$

$$\cdots\cdots$$

$$c_k x \geq \gamma_k$$

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

$$c_1 x \rightarrow \max$$

lineáris programozási feladatra vezetik vissza. „Jobb esetben" mindezt a λ-k illetve a γ-k változtatása és a megfelelő lineáris programozási feladat újra, futtatása is követi.

A vektormaximum vagy a többszempontú optimalizálási feladat ilyen megkerülésével kapcsolatban legalább két megjegyzés kívánkozik. Az első az, hogy egy ilyen eljárás valójában annak a problémának elemzését kerüli meg, hogy mit értsünk egy vektormaximum problémában maximumon. Mindenesetre, végül is efficiens megoldáshoz kell eljutni. A lehetséges programok

$$X = \{x\colon Ax \leq b,\ x \geq 0\}$$

halmazának egy x^* eleme efficiens (pont, program vagy megoldás), ha nincs olyan $x^{**} \in X$, amely x^*-t dominálja, azaz

$$\begin{aligned} c_1 x^* &\leq c_1 x^{**} \\ c_2 x^* &\leq c_2 x^{**} \\ &\cdots\cdots \\ c_k x^* &\leq c_k x^{**} \end{aligned}$$

oly módon, hogy legalább egy helyen szigorú egyenlőtlenség teljesül. Azaz nincs olyan x^{**} lehetséges program, mely minden szempontból legalább olyan jó, mint x^* és legalább egy szempontból határozottan jobb.

A lineáris programozásra való ,,visszavezetéssel'' kapcsolatos másik megjegyzés az, hogy ezek a lineáris programok általában X efficiens pontját adják eredményül. Azaz, ha nem is tisztázott előre az efficiens pontok közötti választás, az adódó lineáris program legalább efficiens pontot eredményez. (Ezért is neveztük ,,jobb esetnek'' azt, ha megtörténik a λ-k, illetve a γ-k változtatásával adódó esetleg különböző efficiens programok összehasonlítása.)

A dolgozatban éppen azt pontosítjuk, hogy az ilyen visszavezetések mikor eredményeznek efficiens megoldást.

Elsőként egy szükséges és elégséges feltételt adunk arra, hogy X-ben legyen efficiens program. Ezzel kapcsolatban felhasználjuk, hogy ha X nem üres és $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ pozitív számok, akkor az

$$\begin{gathered} Ax \leq b \\ x \geq 0 \\ (\sum_i \lambda_i c_i)\, x \to \max \end{gathered}$$

lineáris programozási feladat megoldása efficiens. Az állítás megfordítása, amit mi egyébként nem fogunk használni, már nem triviális, nevezetesen, hogy egy efficiens x^*-hoz találhatók szigorúan pozitív λ-k oly módon, hogy x^* optimális megoldása az előbbi lineáris programozási feladatnak.

Lemma. Legyen $X \neq \emptyset$. X-ben akkor és csak akkor van efficiens pont, ha nincs olyan X-beli irány, azaz olyan x, amelyre

$$\begin{gathered} Ax \leq 0 \\ x \geq 0 \end{gathered}$$

fennáll, hogy teljesülnek a

$$c_1 x \geq 0$$
$$c_2 x \geq 0$$
$$\dots\dots$$
$$c_k x \geq 0 \tag{2}$$

egyenlőtlenségek oly módon, hogy közülük legalább egy szigorú egyenlőtlenség.

Bizonyítás: Az állítás egyik fele nyilvánvaló. Ha ugyanis lenne fenti tulajdonságú $\tilde{x}$, akkor tetszőleges $\bar{x} \in X$-t $\bar{x} + \tilde{x} \in X$ dominálna.

Másrészt, ha nem létezik fenti tulajdonságú x, akkor az

$$Ax \leq 0$$
$$c_2 x \geq 0$$
$$\dots\dots$$
$$c_k x \geq 0$$
$$x \geq 0$$

egyenlőtlenségeknek következménye a

$$c_1 x \leq 0$$

egyenlőtlenség. Ekkor a Farkas-tétel alapján létezik olyan $p^{(1)} \geq 0$, $\lambda_2^{(1)}, \dots$ $\dots, \lambda_k^{(1)} \geq 0$ és $q^{(1)} \geq 0$, hogy

$$c_1 = p^{(1)} A - \lambda_1^{(1)} c_1 - \lambda_2^{(1)} c_2 - \dots - \lambda_k^{(1)} c_k - q^{(1)}$$

$(\lambda_1^{(1)} = 0)$.

Hasonlóan, $i = 2, \dots, k$-ra is létezik olyan $p^{(i)} \geq 0$, $\lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(i)}, \dots, \lambda_k^{(i)} \geq 0$ és $q^{(i)} \geq 0$, hogy

$$c_i = p^{(i)} A - \lambda_1^{(i)} c_1 - \lambda_1^{(i)} c_2 - \dots \lambda_k^{(i)} c_k - q^{(i)}$$

teljesül.

Az egyenlőségeket összegezve adódik egy

$$\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \dots + \lambda_k c_k = pA - q$$

egyenlőség, ahol $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k > 0$, $p \geq 0$ és $q \geq 0$.

Tekintsük most az

$$Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$
$$(\sum_i \lambda_i c_i)\, x \to \max$$

lineáris programot. Ez nem lehet korlátos, mivel ekkor az

$$Ax \leq 0$$
$$x \geq 0$$
$$(\sum_i \lambda_i c_i)\, x > 0$$

egyenlőtlenségekből egyrészt a $pAx \leq 0$, másrészt pedig a $pAx = (\sum_i \lambda_i c_i)\, x + qx > 0$ egyenlőtlenség adódna, ami ellentmondás. Tehát a felírt feladatnak van optimális megoldása, ami a λ-k pozitivitása miatt efficiens.

A lemmából következik, hogy amennyiben pl. valamennyi célfüggvény, korlátos X-en, akkor van efficiens megoldás, de ugyanakkor az is látszik hogy efficiens megoldás úgy is létezhet, ha egyetlen célfüggvény sem korlátos felülről.

Legyen

$$X = \{x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)\colon 0 \leq \xi_1 \leq 1,\ \xi_2, \xi_3 \geq 0\}$$

és

$$c_1 x = \xi_1 + \xi_2 - 2\xi_3$$

$$c_2 x = \xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3.$$

Sem c_1x, sem pedig c_2x nem korlátos X-en, ugyanakkor a $\{\xi_1 = 1,\ \xi_2 \geq 0,\ \xi_3 = 0\}$ és a $\{\xi_1 = 1,\ \xi_2 = 0,\ \xi_3 \geq 0\}$ félegyenesek X-nek az efficiens pontjaiból állnak.

Látszólag más úton is igazolható a lemma állítása. Azért nevezzük csak látszólag más útnak, mert a bizonyításban használt apparátus lényegében ugyanaz, mint az előzőnél. Mivel a bizonyításban vizsgált lineáris programozási feladat a későbbiekben is szerepel, ezt az utat is bejárjuk. Ugyanakkor a dolgozat korábbi változata lektorának egy megjegyzése alapján Krekó B. ,,Optimumszámítás'' c. könyvének 398. oldalán találtam egy olyan állítást, amely a lemmánkéval nagyjából ekvivalens. Az ottani állítás bizonyítása is meglehetősen közel van ehhez a második bizonyításhoz. Ezúton szeretném megköszönni a lektor további javaslatait és megjegyzéseit is.

Legyen $\bar{x} \in X$ tetszőleges és tekintsük az

$$\begin{aligned}
Ax &\leq b \\
c_1 x - \xi_1 &= c_1 \bar{x} \\
c_2 x - \xi_2 &= c_2 \bar{x} \\
&\cdots\cdots \\
c_k x - \xi_k &= c_k \bar{x} \\
x \geq 0,\ \xi_1, \xi_2 &\ldots \xi_k \geq 0 \\
(\sum_i \xi_i) &\to \max
\end{aligned} \tag{3}$$

lineáris programozási feladatot.

Ez a feladat akkor és csak akkor nem korlátos, ha van olyan $\tilde{x} \geq 0$, $\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \ldots, \tilde{\xi}_k \geq 0$, amelyekre

$$\begin{aligned}
A\tilde{x} &\leq 0 \\
c_1 \tilde{x} - \tilde{\xi}_1 &= 0 \\
c_2 \tilde{x} - \tilde{\xi}_2 &= 0 \\
&\cdots\cdots\cdots \\
c_k \tilde{x} - \tilde{\xi}_k &= 0
\end{aligned}$$

és

$$\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_k > 0,$$

azaz $\bar{x}$ kielégíti a (2) feltételeket oly módon, hogy az utolsó k számú egyenlőtlenség között van szigorú egyenlőtlenség is. Másrészt a (3) feladat akkor és csak akkor nem korlátos, ha (3)-nak nincs optimális megoldása, azaz ha (3)-nak van optimális megoldása, akkor (2)-nek nincs olyan megoldása, amelyre $\sum_i c_i x > 0$, és fordítva.

A (3) egy optimális megoldásának x-része viszont nyilván efficiens program, hiszen ha X egy eleme dominál egy másikat, akkor ahhoz nagyobb (3)-beli célfüggvény érték tartozik.

A (3) program nemcsak azért érdekes, mert megoldásával eldönthető, hogy van-e X-nek efficiens eleme (és ha igen, akkor (3) megoldása efficiens), hanem azért is, mert segítségével az is eldönthető, hogy egy $\bar{x} \in X$ efficiens-e vagy sem. $\bar{x}$ nyilván akkor és csak akkor efficiens, ha a (3) feladat optimumértéke zérus.

A továbbiakban a lemmát felhasználva belátjuk, hogy a többszempontú optimalizálással kapcsolatban vizsgált bizonyos feladatoknak általában van efficiens megoldásuk.

1. *tétel.* Legyen $i = 1, 2 \ldots k$-ra $\lambda_i \geq 0$. Tegyük fel, hogy az

$$(4) \qquad \begin{gathered} Ax \leq b \\ x \geq 0 \\ (\sum_i \lambda_i c_i)\, x \to \max \end{gathered}$$

lineáris programozási feladatnak van optimális megoldása és X-nek van efficiens pontja. Akkor a most felírt feladat optimális megoldásai között van efficiens pont is.

[Mivel az nyilvánvaló, hogy valamennyi $\lambda_i > 0$ esetén a feladat optimális megoldása efficiens, ebben az esetben nem szükséges az efficiens megoldás létezésének külön feltételezése, illetve nincs is mit bizonyítanunk. Ugyanakkor, az efficiens pont létezésének feltételezése nélkül a tétel állítása általában nem igaz.

Legyen pl. X ugyanaz, mint az előző példában, de most

$$c_1 x = \xi_1 - \xi_2,$$
$$c_2 x = \xi_1 - \xi_2 + \xi_3.$$

$c_1 x$ korlátos X-en, ugyanakkor X-nek nyilván nincs efficiens pontja.]

Bizonyítás: Legyen λ^* a most felírt feladat optimum értéke. Az

$$\begin{gathered} Ax \leq b \\ (\sum_i \lambda_i c_i)\, x = \lambda^* \\ x \geq 0 \end{gathered}$$

feltételekkel meghatározott nem üres $X(\lambda^*)$ halmaznak a lemma alapján van a $c_1, c_2, \ldots, c_k$ szempontok szerint efficiens pontja.

Ugyanis az

$$x \geq 0$$
$$Ax \leq 0$$
$$(\sum_i \lambda_i c_i)\, x = 0$$
$$c_1 x \geq 0$$
$$c_2 x \geq 0$$
$$\cdots\cdots$$
$$c_k x \geq 0$$

feltételrendszernek nincs olyan megoldása, hogy az utolsó k egyenlőtlenség közül legalább egy szigorú egyenlőtlenségként teljesülne, hiszen feltételeink szerint az

$$x \geq 0$$
$$Ax \leq 0$$
$$c_1 x \geq 0$$
$$c_2 x \geq 0$$
$$\cdots\cdots$$
$$c_k x \geq 0$$

feltételrendszernek sincs ilyen megoldása. Ugyanakkor $X(\lambda^*)$ egy efficiens x^* pontja efficiens pontja X-nek is. Ugyanis, ha létezne olyan $x^{**} \in X$, amely x^*-ot dominálná, erre a $(\sum_i \lambda_i c_i)\, x^* \leq (\sum_i \lambda_i c_i)\, x^{**}$ egyenlőtlenségből $(\sum_i \lambda_i c_i)\, x^{**} = \lambda^*$, azaz $x^{**} \in X(\lambda^*)$ adódna, ami ellentmondás.

Megjegyezzük, hogy a bizonyításban nem hivatkozhattunk volna $X(\lambda^*)$-nak a zérus λ_i-knek megfelelő c_i-k szerinti efficiens pontjaira.

Legyen X most is ugyanaz, mint a korábbi példákban, $c_1 x$ és $c_2 x$ ugyanaz, mint az első példában, legyen továbbá

$$c_3 x = -3\xi_2 + 2\xi_3.$$

Akár a lemma alapján is látható, hogy X-nek van efficiens pontja, továbbá $(c_1 + c_3)\, x = \xi_1 - 2\xi_2$ korlátos X-en, maximális értéke 1. Ugyanakkor a $0 \leq \xi_1 \leq 1$, $\xi_2, \xi_3 \geq 0$ és $\xi_1 - 2\xi_2 = 1$ feltételekkel meghatározott X (1) halmaznak nyilván nincs c_2 szerint efficiens (azaz az adott esetben maximális) pontja.

Az előzőek alapján X-nek egy olyan efficiens pontja, mely a (3) feladatnak optimális megoldása, az

$$Ax \leq b$$
$$(\sum \lambda_i c_i)\, x = \lambda^*$$

$$
\begin{aligned}
c_1 x - \xi_1 &= c_1 \bar{x} \\
c_2 x - \xi_2 &= c_2 \bar{x} \\
&\cdots\cdots\cdots \\
c_k x - \xi_k &= c_k \bar{x} \\
x \geq 0,\ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k &\geq 0 \\
\left(\sum_i \xi_i\right) &\to \max
\end{aligned}
$$

lineáris programozási feladat megoldásával határozható meg, ahol $\bar{x}$ a (4)-nek egy optimális megoldása. (A fenti feladatból elhagyhatók mindazon ξ_i változók, melyeknek megfelelő $\lambda_i > 0$.)

2. *tétel*. Tegyük fel, hogy az

$$
\begin{aligned}
Ax &\leq b \\
c_2 x &\geq \gamma_2 \\
&\cdots\cdots \\
c_k x &\geq \gamma_k \\
x &\geq 0 \\
c_1 x &\to \max
\end{aligned}
\tag{5}
$$

feladatnak van lehetséges megoldása és X-nek van efficiens pontja. Akkor a most felírt feladat optimális megoldásai között van efficiens pont is.

Bizonyítás: Az előző tétel bizonyításakor követett úton haladunk. Minthogy X-nek van efficiens pontja, nincs olyan x, melyre

$$
\begin{aligned}
x &\geq 0 \\
Ax &\leq 0 \\
c_2 x &\geq 0 \\
&\cdots\cdots \\
c_k x &\geq 0 \\
c_1 x &> 0,
\end{aligned}
$$

így az (5) feladat nem lehet nem korlátos.

Legyen γ_1^* a feladat optimumértéke. Az

$$
\begin{aligned}
Ax &\leq b \\
c_2 x &\geq \gamma_2 \\
&\cdots\cdots \\
c_k x &\geq \gamma_k \\
c_1 x &= \gamma_1^* \\
x &\geq 0
\end{aligned}
$$

feltételekkel meghatározott $X(\gamma_1^*)$ halmaz tehát nem üres. A lemma alapján van a $c_1, c_2 \ldots c_k$ szempontok szerint efficiens pontja. Ugyanis az

$$\begin{gathered} x \geq 0 \\ Ax \leq 0 \\ c_2 x \geq 0 \\ \cdots\cdots \\ c_k x \geq 0 \\ c_1 x = 0 \\ c_1 x \geq 0 \\ c_2 x \geq 0 \\ \cdots\cdots \\ c_k x \geq 0 \end{gathered}$$

feltételrendszernek nincs olyan megoldása, hogy az utolsó k-egyenlőtlenség közül legalább egyik szigorú egyenlőtlenségként teljesül, hiszen feltételeink szerint már az

$$\begin{gathered} x \geq 0 \\ Ax \leq 0 \\ c_1 x \geq 0 \\ c_2 x \geq 0 \\ \cdots\cdots \\ c_k x \geq 0 \end{gathered}$$

feltételrendszernek sincs ilyen megoldása. Ugyanakkor $X(\gamma_1^*)$ egy x^* efficiens pontja efficiens pontja X-nek is. Ugyanis, ha létezne olyan $x^{**} \in X$, mely x^*-ot dominálná, akkor $c_i x^* \leq c_i x^{**}$ miatt $x^{**} \in X(\gamma^*)$, ami ellentmondás.

Az előzőek alapján az (5) feladat egy efficiens megoldása az

$$\begin{gathered} Ax \leq b \\ c_1 x = \gamma_1^* \\ c_2 x - \xi_2 = \gamma_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ c_k x - \xi_k = \gamma_k \\ x \geq 0,\ \xi_2, \ldots, \xi_k \geq 0 \\ (\sum_{i \geq 2} \xi_i) \to \max \end{gathered}$$

lineáris programozási feladat megoldásával határozható meg.

Következőnek az ún. cél programozásban (goal-programming) vizsgált

$$
(6)\qquad
\begin{gathered}
Ax \le b \\
c_1x + \zeta_1 - \xi_1 = \gamma_1 \\
c_2x + \zeta_2 - \xi_2 = \gamma_2 \\
\dots\dots\dots\dots \\
c_kx + \zeta_k - \xi_k = \gamma_k \\
x \ge 0, \zeta_1, \dots, \zeta_k, \xi_1, \dots, \xi_k \\
(-\sum_i \zeta_i) \to \max
\end{gathered}
$$

alakú lineáris programozási feladatra vonatkozóan bizonyítunk be egy, az eddigiekhez hasonló tételt.

Valójában a célprogramozási feladatokban a ζ_i-k és a ξ_i-k — egy esetleg súlyozott — összegét szokták minimalizálni. A maximalizáló többszempontú optimalizálási feladatnak azonban az felel meg, hogy a kitűzött γ_i célok túlteljesítését kifejező ξ_i-ket ne büntessük.

3. *tétel.* Ha az X-ben van efficiens program, akkor a (6) lineáris programozási feladat optimális megoldásai között is van ilyen.

Bizonyítás: Legyen (6) optimumértéke $(-\zeta^*)$ és tekintsük az

$$
(7)\qquad
\begin{gathered}
Ax \le b \\
c_1x + \zeta_1 - \xi_1 = \gamma_1 \\
c_2x + \zeta_2 - \xi_2 = \gamma_2 \\
\dots\dots\dots\dots \\
c_kx + \zeta_k - \xi_k = \gamma_k \\
\sum_i \zeta_i = \zeta^* \\
x, \zeta_1, \dots, \zeta_k, \xi_1, \dots, \xi_k \ge 0 \\
(\sum_i \xi_i) \to \max
\end{gathered}
$$

lineáris programozási feladatot. Ez nem lehet nem korlátos, mivel akkor létezne olyan $\tilde{x}, \zeta_1, \dots, \zeta_k, \xi_1, \dots, \xi_k \ge 0$, melyekre

$$
\begin{gathered}
A\tilde{x} \le 0 \\
c_1\tilde{x} + \tilde{\zeta}_1 - \tilde{\xi}_1 = 0 \\
c_2\tilde{x} + \tilde{\zeta}_2 - \tilde{\xi}_2 = 0 \\
\dots\dots\dots\dots \\
c_k\tilde{x} + \tilde{\zeta}_k - \tilde{\xi}_k = 0 \\
\sum_i \tilde{\zeta}_i = 0 \\
\sum_i \tilde{\xi}_i > 0,
\end{gathered}
$$

azaz

$$
\begin{aligned}
A\tilde{x} &\leq 0 \\
c_1 \tilde{x}\ (= \tilde{\xi}_1) &\geq 0 \\
c_2 x\ (= \tilde{\xi}_2) &\geq 0 \\
\ldots\ldots\ldots & \\
c_k \tilde{x}\ (= \tilde{\xi}_k) &\geq 0
\end{aligned}
$$

teljesül oly módon, hogy az utolsó k egyenlőtlenség közül legalább egy szigorú egyenlőtlenségként áll fenn. Ez viszont a lemma szerint ellentmond annak, hogy X-ben efficiens pont.

(7) egy optimális megoldásának x^*-része viszont efficiens pontja X-nek. Tegyük fel ugyanis, hogy van olyan $x^{**} \in X$, mely dominálja x^*-ot. $c_i x^{**} > \gamma_i$ esetén legyen $\xi_i^{**} = c_i x^{**} - \gamma_i$, $\zeta_i^{**} = 0$, $c_i x^{**} < \gamma_i$ esetén pedig legyen $\xi_i^{**} = 0$, $\zeta_i^* = \gamma_i - c_i x^{**}$. A $c_i x^* \leq c_i x^{**}$ egyenlőségből adódik, hogy $\zeta_i^{**} \leq \zeta_i^*$ és $\xi_i^{**} \geq \xi_i^*$. Ezekből először minden i-re a $\zeta_i^{**} = \zeta_i^*$ és a $\sum\limits_i \zeta_i^{**} = \zeta^*$ majd a $\xi_i^{**} = \xi_i^*$ egyenlőségek következnek, azaz $c_i x^* = c_i x^{**}$, ami ellentmondás.

4. *tétel.* Legyen $i = 1, 2 \ldots k$-ra $\lambda_i \geq 0$ és $\sum\limits_i \lambda_i = 1$. Tegyük fel, hogy az

$$
(8)\qquad
\begin{array}{l}
Ax_1 + Ax_2 + \ldots + Ax_k \qquad\qquad \leq b \\
x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \lambda_1 x = 0 \\
\qquad\quad x_2 \qquad\qquad\qquad\quad - \lambda_2 x = 0 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x_k - \lambda_k x = 0 \\
\\
\qquad\qquad x_1, x_2, \ldots, x_k, x \geq 0 \\
\qquad\qquad (\sum\limits_i c_i x_i) \to \max
\end{array}
$$

lineáris programozási feladatnak van optimális megoldása és X-nek van efficiens pontja. Akkor (8)-nak az optimális megoldásai között van olyan, melynek x-része efficiens pontja X-nek.

Bizonyítás: A (8) feladat egy $(x_1^*, x_2^*, \ldots x_k^*, x^*)$ megoldásában szereplő x^* lehetséges megoldása (4)-nek. Másrészt, (4) egy x^* megoldásából kiindulva legyen $x_i^* = \lambda_i x^*$, $(i = 1, 2 \ldots k)$. Akkor az így kapott $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^*, x^*)$ lehetséges megoldása (8)-nak és a hozzátartozó célfüggvényértékre $\sum\limits_i c_i x_i^* = (\sum\limits_i \lambda_i c_i)\, x^*$, amiből az állítás már következik.

Valójában (8) duálisa, a

$$
\begin{gathered}
pA + y_1 \geq c_1 \\
pA + y_2 \geq c_2 \\
\cdots\cdots\cdots \\
pA + y_k \geq c_k \\
-\lambda_1 y_1 - \lambda_2 y_2 - \ldots - \lambda_k y_k \geq 0 \\
p \geq 0 \\
pb \to \min
\end{gathered}
$$

lineáris programozási feladat az érdekes. Az egyetlen cx célfüggvény esetével szemben most nem várható el, hogy legyen olyan $p \geq 0$, melyre $pA \geq c_i$, minden i-re. Ellenben ,,jónak'' tekinthetők az erőforrások olyan értékelései, melyekre valamilyen y_i járulékkal kiegészített c_i-re az egyenlőtlenség már teljesül minden i-re, és ahol a járulékoknak a szempontok fontosságának megfelelő λ_i-kel súlyozott összege nem negatív. Ezzel a feladattal még nem találkoztunk a többszempontú optimalizálással kapcsolatban. A feladat ilyen irányú közgazdasági vonatkozásaira később még vissza kívánunk térni.

(Beérkezett: 1981. július 10-én.)

ON THE EXISTENCE OF EFFICIENT POINTS IN THE LINEAR VECTOR MAXIMUM PROBLEM

The paper gives a necessary and sufficient condition on the existence of an efficient point in the linear vector maximum problem. Applying this result we prove that among the optimal solutions of the linear programs (4), (5), (6) and (8) there is an efficient point of the corresponding linear vector maximum problem (1).

О СУЩЕСТВОВАНИИ ЭФФЕКТИВНЫХ ТОЧЕК ПРОБЛЕМ ЛИНЕЙНОГО ВЕКТОРНОГО МАКСИМУМА

В статье рассматривается несколько задач линейного программирования при анализе задачи линейного векторного максимума (1) с точки зрения того, при каких условиях решение их будет эффективным решением (1).

Анализировавшиеся задачи — линейные программы (4), (5), (6) и (8). Доказательство соответствующих теорем основано само по себе на интересной лемме, которая является необходимым и достаточным условием существования эффективной точки.

RUZSÁNYI TIVADAR–LELKES PÉTER

A RULE–3 automatikus osztályozási eljárás

1. Bevezetés

Napjainkban az automatikus osztályozási eljárásoknak nagyon változatos és folyamatosan bővülő szakirodalma áll rendelkezésünkre, sőt a számítógépekkel szállított software-k sem nélkülözik a szélesebb körben is ismert eljárások egyikét-másikát. Annak ellenére azonban, hogy ma már a legkülönfélébb problémák megoldására alkalmas, számítógépi alkalmazásra javasolt algoritmusok széles tárházából válogathatunk, megismerhetjük a különböző eljárások alkalmazásának feltételeit, előnyeit, hátrányait (PÁRNICZKY, 1976; FÜSTÖS–MESZÉNA–SIMONNÉ, 1977; S. BENEDIKT–VÁRI, 1977; SVÁB, 1979), a gyakorlat folyamatosan olyan újabb és újabb problémákat vet fel, melyek megoldásához célszerű a már ismert módszerek valamilyen ésszerű ötvözetét kidolgozni, létrehozni egy a korábbiaktól eltérő, viszonylag új eljárást. A RULE–3 eljárás kifejlesztésekor is lényegében erről volt szó.

Az automatikus osztályozási eljárásokra vonatkozó elméleti elemzések (GOWER, 1967; SOKAL, 1974), az eljárások által nyújtott eredményeknek, ill. maguknak az eljárásoknak összehasonlítása (DUBES–SAIN, 1976; ATTINGER et alia, 1978), továbbá a témákhoz kapcsolódó saját tapasztalataink (RUZSÁNYI 1979; 1980) alapján ugyanis nyilvánvaló számunkra az, hogy az automatikus osztályozási eljárások nem alkalmazhatók mechanikusan. Az alkalmazás során számos, a vizsgált probléma jellegéből, a rendelkezésre álló adatok tartalmából, a jellemzők (tényezők) kiválasztásából, a változók típusaiból adódó kérdést kell részletesen elemezni. Problémát okozhat a hasonlósági mérték, az osztályok kialakulását meghatározó döntési kritérium értelmezése, figyelembevételük az eredmények interpretálásakor. A gyakorlati alkalmazások során sűrűn előfordul az is, hogy a különböző eljárásokat felhasználó szakemberek – mivel csak részlegesen ismerik a bonyolultabb eljárások elméleti apparátusát – bizonyos kétkedéssel, bizalmatlansággal fogadják az eredményeket.

A RULE–3 kidolgozásakor igyekeztünk figyelembe venni az előzőekből fakadó tanulságokat, de kihasználtuk a korszerű hardware és software által kínált lehetőségeket is. A kidolgozott programcsomagok ugyanis lehetővé teszik az osztályozás kiinduló mátrixának, az osztályozandó objektumoknak (elemeknek), ill. tulajdonságoknak (tényezőknek) interaktív szűrését.

2. Az eljárás célja, az alkalmazás előkészítése

Az eljárás eredetileg a korszerű döntési módszerek alkalmazásához, az összegyűjtött tényanyag elemzéséhez kapcsolódott (RUZSÁNYI–VÁRI, 1980). Ezen probléma kutatása külföldön már a korábbiakban is folyt és egy hasonló vizsgálat során olyan kérdőíves módszert használtak, melyet mi is adaptáltunk a következő előnyei miatt:

— a probléma átgondolása után a kérdőív rövid idő alatt kitölthető és
— viszonylag nagy számú, az aktuális problémára vonatkozó állítás („kérdés") érvényessége, illetve érvénytelensége tárható fel (SCHULTZ–SLEVIN, 1975).

A kutatás első fázisában kellett tehát megoldanunk a kérdőívek feldolgozását (RUZSÁNYI–LELKES, 1980). A kérdés az volt, hogy milyen homogén csoportokba rendeződnek a kérdőívek, figyelembe véve tartalmukat, azaz az egyes állítások érvényességére vonatkozó ítéleteket, továbbá, milyen csoportokba rendeződnek az állítások. A probléma annak kapcsán merült fel, hogy vajon elkülönülnek-e a sikeres, illetve sikertelen döntéselőkészítésekre vonatkozó kérdőívek, és az állítások milyen specifikus csoportja kapcsolódik ezekhez.

Az eljárást tehát valamely kérdőíves felmérés feldolgozására, a kérdőívek (vizsgálati elemek) és a kérdőívbe foglalt „kérdések" (tényezők) automatikus és hierarchikus osztályozására alakítottuk ki. Figyelembe vettük a komplex rendszerek elemzésével foglalkozó szakemberek azon igényét is, hogy olyan automatikus osztályozásra van szükség (KINDLER–PAPP, 1977), melyek lehetővé teszik

— sorrendi,
— intervallum és
— arányskálán

rendelkezésre álló adatok felhasználását egyazon eljárás keretében. A RULE–3 ezen túlmenően lehetőséget nyújt nominális skálán rendelkezésre álló adatoknak a hasznosítására is, természetesen a szükséges skálatranszformációkat követően, együtt az előbbiekkel.

Mielőtt részleteznénk a különböző módszerek, megközelítési módok összekapcsolását, kitérünk arra, hogy az input adatokat milyen meggondolások alapján lehet előállítani, ugyanis a programcsomag többek között olyan, a gyakorlatban nagyon elterjedt kérdőíves adatok feldolgozására is alkalmas, amikor a résztvevők különböző tényezők (tulajdonságok, minőségi jellemzők, kritériumok stb.) szerint *öt osztálybasorolási lehetőség* felhasználásával értékelnek egy vagy több, a vizsgálatba bevont dolgot (objektumot). (Az értékelők és a vizsgált objektumok számának szorzata adja a vizsgálati elemek maximális számát.)

Az automatikus osztályozás bázisa mindig a kiinduló mátrix. Ilyen kiinduló mátrixot mutat be az 1. táblázat, a 8 vizsgálati elemet és 7 tényezőt tartalmazó példa a későbbiekben is szerepel majd.

Az 1. táblázatban feltüntetett kiinduló mátrixot tehát megkaphatjuk úgy, hogy mind a 8 értékelő ugyanazt az objektumot értékeli a 7 tényező szerint, de az is előfordulhat, hogy 4 értékelő 2 objektumot értékel. Gyakori lehet az is, hogy egy-egy kérdőívet tekintünk vizsgálati elemnek, azaz az első kérdőívre adott „válaszok" az előző táblázat szerint sorrendben a következők: 5, 1, 1, 2, 4, 1, 3. Előfordulhat, hogy a „tényezők az értékelők", azaz ekkor 7 értékelő értékel — külön-külön — 8 objektumot, stb. Nagyon lényeges tehát az, ha a kiinduló mátrix adatai diszkrét értékkészlettel rendelkező intervallum skálán

1. táblázat

Osztályozás kiinduló mátrixa

Elem \ Tényező	T–1	T–2	T–3	T–4	T–5	T–6	T–7
E–1	5	1	1	2	4	1	3
E–2	1	2	4	5	2	3	5
E–3	5	1	3	3	5	2	3
E–4	4	5	3	1	3	4	1
E–5	4	2	2	3	5	1	4
E–6	1	3	5	4	1	4	5
E–7	3	5	4	1	2	5	2
E–8	2	3	2	5	1	3	4

adottak, ekkor a mérési skálából adódó lehetőség miatt ugyanazzal az eljárással és közvetlenül osztályozhatók a kiinduló mátrix sorai és oszlopai.

Az alkalmazás előkészítésével kapcsolatban célszerű felhívnunk a figyelmet arra, hogy a jellemzők (tényezők) kiválasztásakor — különösen bonyolult esetekben — speciális szervezési technikák is használhatók. Vizsgálatunk során gazdasági mérnökhallgatók körében az NCM (nominal group technique) módszerrel (Kindler, 1978) tártuk fel a korszerű döntési módszerek sikerességét befolyásoló tényezőket. Ez kettős célt szolgált. Egyfelől lehetőséget nyújtott az első, kísérletinek tekintett kérdőív módosítására, másfelől pedig azt is lehetővé tette, hogy a hallgatók egységes kulcsfogalmak felhasználásával készíthessenek esettanulmányt egy-egy konkrét döntési probléma megoldásáról.

Az öt osztályhoz a következő minősítéseket rendelhetjük:

Osztály kód	Minősítés
5	kiváló
4	jó
3	közepes
2	megfelelő
1	rossz

Alkalmas az öt osztály bizonyos állítások (tényezők) igaz, vagy hamis voltának megítélésére is (kérdőíves felmérésünk során ezt alkalmaztuk), pl. a következő módon:

Osztály kód	Az állítás jellege
1	az állítás pontosan tükrözi a valóságot
2	az állítás közelítően megfelel a valóságnak
3	ismerete szerint nincs összefüggésben az állítás a valósággal
4	az állításnak inkább az ellenkezője fogadható el
5	az állításnak pontosan az ellenkezője fogadható el

Az öt osztály lehetőséget teremt egyfelől arra, hogy az értékelést szakértők végezzék el, mégpedig kvalitatív tulajdonságok alapján, de alkalmas arra is, hogy egyazon automatikus osztályozás keretében ne csupán kvalitatív, hanem közvetlenül mérhető tényezők is szerepeljenek, amennyiben ilyen adatok sorrendi, intervallum, vagy arányskálán állnak rendelkezésre. Az említett skálákon mért adatokat természetesen át kell alakítani. Ez pl. oly módon történhet, hogy az adatok terjedelme, eloszlása stb. ismeretében egy szakértő, ill. szakértői csoport meghatározza az adott tényező szempontjából megfelelő öt osztályt, majd az egyes adatokhoz rendelt osztály kódja lesz az input adat. Más módozatok is elképzelhetők az osztályozás kiinduló mátrixának előállítására. Pl. elterjedt az a módszer, hogy az adott téma szakembere az egyes vizsgálati elemeket több jellemző szerint, arányskálán rendelkezésre álló adatokból minősíti. Ebben az esetben az eredeti változók számánál jóval kevesebb tényező marad a további vizsgálatokhoz — kérdéses, hogy célszerű-e elveszteni a minősítés során az információ egy részét, bár a szakértők szerint erről szó sincs.

3. Az eljárás áttekintése

Előljáróban ismét érdemes felhívnunk a figyelmet arra, hogy az osztályozás kiinduló mátrixa olyan adatokat (kódokat) tartalmaz, melyek célszerű előkészítés után megteremtik a lehetőséget mind a vizsgálati elemek, mind a tényezők automatikus és hierarchikus osztályozásának. Ezért az eljárásra épülő program a kiinduló mátrix sorai és oszlopai szerint is elvégezheti az osztályozást. A továbbiakban tehát osztályba sorolandó vizsgálati elem alatt az osztályozás kiinduló mátrixának sorait értjük, de emlékeznünk kell arra is, hogy osztályba sorolandó elemnek tekinthetjük a kiinduló mátrix oszlopait is. A kiinduló mátrix $\mathbf{P}$, eleme P_{ij}.

A hierarchikus (többszintű) módszer adta osztályozás egy irányított fával reprezentálható, melyet dendogramnak szokás nevezni és amely nagyon jó eszköz a hierarchia és a kritikus szintek illusztrálására.

Az eljárást úgy építettük fel, hogy öt különböző hasonlósági mérték alkalmazására nyíljék lehetőség, továbbá ellenőrizhető legyen a hasonlóság, ill. a dendrogramhoz kiszámított „hasonlósági szint szignifikanciája" is. Természetesen ez közvetett módon történik, mégpedig úgy, hogy illeszkedésvizsgálatot végzünk a hasonlónak tekintett elemekre. A hasonlósági mutatók mindegyikét egy általánosan ismert fogalom, a gyakoriság alapján határozzuk meg. A gyakoriságok kiszámításához, ill. az illeszkedés vizsgálatához egy 5×5 típusú kontingencia táblát alkalmazunk — kapcsolódva az elemeknek előzetes öt osztályba sorolásához az egyes tényezők szerint. Ha a kiindulási mátrix i és j vizsgálati elemét hasonlítjuk össze, akkor ez a következő, 5×5 típusú tábla alapján végezhető el (1. tábla)

A táblában n_{ij} a gyakoriságok számát jelöli, mégpedig attól függően, hogy milyen kapcsolatban áll egymással a P_{ik} és a P_{jk}. Ha pl. $P_{ik}=1$, $P_{jk}=1$, akkor ez az n_{11} cellában levő gyakoriságok számát növeli. A P_{ik} és P_{jk} által felvehető értékekhez tehát a következő gyakoriságokat összegező cellaindexeket rendeljük:

$$\text{HA} \left\{ \begin{array}{l} P_{ik} = 4,\ P_{jk} = 1 \\ P_{ik} = 1,\ P_{jk} = 2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ P_{ik} = 2,\ P_{jk} = 2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ P_{ik} = l \quad P_{jk} = m \\ P_{ik} = 5,\ P_{jk} = 5 \end{array} \right. \quad \begin{array}{c} \text{AKKOR A CELLA} \\ \text{INDEXE} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 11 \\ 12 \\ \cdot \\ 22 \\ \cdot \\ lm \\ 55 \end{array} \right.$$

1. tábla

		E_j				
		1	2	3	4	5
E_i	1	n_{11}	n_{12}	n_{13}	n_{14}	n_{15}
	2	n_{21}	n_{22}	n_{23}	n_{24}	n_{25}
	3	n_{31}	n_{32}	n_{33}	n_{34}	n_{35}
	4	n_{41}	n_{42}	n_{43}	n_{44}	n_{45}
	5	n_{51}	n_{52}	n_{53}	n_{54}	n_{55}

N számú tényező (ill. a kiindulási mátrix transzponáltjának vizsgálatakor M elem) esetén

$$\sum_{l=1}^{5} \sum_{m=1}^{5} n_{lm} = N .$$

A kontingencia tábla elemeiből (az i és j elem összehasonlítása esetén) a következő összevont gyakoriságok képezhetők:

1) $n_1^{ij} = n_{11} + n_{22} + n_{33} + n_{44} + n_{55}$,
az n_1^{ij} tehát a $P_{ik} = P_{jk}$ feltétel teljesülésének gyakoriságát adja;

2) $n_2^{ij} = n_{12} + n_{21} + n_{23} + n_{32} + n_{34} + n_{43} + n_{45} + n_{54}$,
az n_2^{ij} tehát a $P_{ik} - P_{jk} = \pm 1$ feltétel teljesülésének gyakoriságát adja;

3) $n_3^{ij} = N - n_1^{ij} - n_2^{ij}$,
az n_3^{ij} tehát a $P_{ik} - P_{jk} \geq \pm 2$ feltétel teljesülésének gyakoriságát adja;

4) $n_4^{ij} = n_{13} + n_{24} + n_{35} + n_{31} + n_{42} + n_{53}$;

5) $n_5^{ij} = n_{14} + n_{25} + n_{41} + n_{52}$;

6) $n_6^{ij} = n_{15} + n_{51}$.

Az eljárás alkalmazása esetén felhasználható hasonlósági mértékek az alábbiak (h_{ij}-val jelölve az i és j elem hasonlóságát, $\mathbf{H}$-val az elemek páronkénti összehasonlításával keletkező szimmetrikus hasonlósági mátrixot):

I. $$h_{ij} = \sum_{k=1}^{N} |P_{ik} - P_{jk}| = n_2^{ij} + 2n_4^{ij} + 3n_5^{ij} + 4n_6^{ij}.$$

A hasonlósági mátrix ($\mathbf{H}$) legkisebb elemének indexei adják azt a két sorindexet, melynek alapján a leghasonlóbb vizsgálati elemek kiválaszthatók, azaz a hasonlóságot a következő alapján keressük: min $\{h_{ij}, h_{ij}$ eleme $\mathbf{H}\}$-nak. Ez a hasonlósági mérték egyébként a legegyszerűbbnek tekinthető. Minimális értéke 0 lehet. A súlyozás „enyhén büntető" jelleget ad az összevont gyakorisági celláknak.

II. $$h_{ij} = \sum_{k=1}^{N} (P_{ik} - P_{jk})^2 = n_2^{ij} + 4n_4^{ij} + 9n_5^{ij} + 16n_6^{ij}.$$

Ez a hasonlósági mérték az osztályok közötti eltérések négyzetösszegére épül. Minimális értéke 0 lehet. A hasonlóságot a min $\{h_{ij}, h_{ij}$ eleme $\mathbf{H}$-nak$\}$ alapján, azaz a legkisebb négyzetösszeg segítségével határozzuk meg. Ez a hasonlósági mérték az előzőhöz viszonyítva már „erősen büntető" jellegű, mivel a megfelelő összevont gyakorisági cellák súlyai négyzetesen növekednek. Természetesen más súlyozás is elképzelhető.

III. $$h_{ij} = \frac{n_1^{ij}}{n_1^{ij} + n_3^{ij}}.$$

Ez a hasonlósági mérték szintén közismert. Lényegét tekintve arról van szó, hogy figyelmen kívül hagyjuk mind a nevezőben, mind a számlálóban a viszonylag bizonytalan és kis eltéréseket rögzítő cellákat, azaz az n_2^{ij}-t. A hasonlósági mutató max. értéke 1, minimális értéke 0 lehet. Az $n_3^{ij} = 0$ esetén 1 a mutató értéke. A hasonlóságot a max $\{h_{ij}, h_{ij}$ eleme $\mathbf{H}$-nak$\}$ alapján keressük.

IV. $$h_{ij} = \frac{n_1^{ij}}{N}.$$

Ez a formula közismert nevén a *Russel–Rao* mérőszám. Értéke szintén 0 és 1 között változik, azonban a nevezőben figyelembe veszi az n_2^{ij}-t is. Ezért a nevezője ennyivel nagyobb az előző mutató nevezőjénél, azaz egy „szigorúbb" mértékről beszélhetünk. A hasonlóságot a max $\{h_{ij}, h_{ij}$ eleme $\mathbf{H}$-nak$\}$ alapján keressük.

V. A következő mutató jelentősen eltér mind az I. és II. típusú, mind a III. és IV. típusú mutatótól, mivel az $r_{lm}^{i} = n_{lm}^{ij}/N$ relatív gyakoriságból indulunk ki a *Shannon* által bevezetett (FARAG, 1979) kölcsönös információs mértéken alapuló mutató kiszámításához. Ekkor figyelembe véve, hogy

$$r_{\cdot m}^{ij} = \sum_{l=1}^{5} r_{lm}^{ij}$$

és

$$r_{l\cdot}^{ij} = \sum_{m=1}^{5} r_{lm}^{ij},$$

a hasonlósági mutató a következő:

$$h_{ij} = \sum_{l=1}^{5} \sum_{m=l-1,\, m\neq 0}^{m=l-1,\, m\neq 6} \alpha_{lm} \cdot r_{lm}^{ij} \cdot \log \left\{ \frac{r_{lm}^{ij}}{r_{\cdot m}^{ij} \cdot r_{l\cdot}^{ij}} \right\},$$

$$\text{ahol: } \alpha_{lm} = \begin{pmatrix} 1 \text{ ha } l = m \\ \frac{1}{2} \text{ ha } l \neq m \end{pmatrix}.$$

Legkisebb értéke 0 lehet, amikor ugyan az i és j vizsgálati elem lehet hogy nem független, de a mérték alapján nem hasonló egymáshoz.

Miután meghatároztuk a **H**-t, kiválasztottuk a megfelelő i és j vizsgálati elemet, akkor kerül sor az első ciklus lezárására, az első osztály kialakítására, melyet a dendrogramon az első szint képvisel. Ezt az osztályt a továbbiakban a **P**-ben a z sor képviseli az i és j sor törlése után. Ehhez azonban meg kell határoznunk a P_{zk} értékeket, melyhez az ún. „legtávolabbi szomszéd" elnevevezésű technika alapgondolatát felhasználva jutunk el. Azonban nem a hasonlósági mátrixot (távolsági mátrixot) használjuk közvetlenül fel, hanem visszatérünk a P-hez. Meghatározzuk a z sort, töröljük az i és j sort. Erre a redukcióra a következő két döntésfüggvény (redukciós mérték) valamelyikének felhasználásával kerülhet sor, jelölve M-mel a **P** sorainak számát (a döntési kritériumokat is a gyakoriságon alapulónak tekinthetjük az I. és a II. hasonlósági mértéknél bemutatottak szerint):

I. Ha $P_{ik} = P_{jk}$, akkor $P_{zk} = P_{ik}$;

ha $P_{ik} \neq P_{jk}$, akkor $P_{zk} = P_{ik}$, abban az esetben,

$$\text{ha } \sum_{m=1}^{M} |P_{ik} - P_{mk}| \geq \sum_{m=1}^{M} |P_{jk} - P_{mk}|,$$

$$\text{egyébként } P_{zk} = P_{jk},\ (k = 1, 2 \ldots N)$$

(lásd az I. hasonlósági mértéket!).

II. Ha $P_{ik} = P_{jk}$, akkor $P_{zk} = P_{ik}$;

ha $P_{ik} \neq P_{jk}$, akkor $P_{zk} = P_{ik}$, abban az esetben,

$$\text{ha } \sum_{m=1}^{M} (P_{ik} - P_{mk})^2 \geq \sum_{m=1}^{M} (P_{jk} - P_{mk})^2,$$

$$\text{egyébként } P_{zk} = P_{jk},\ (k = 1, 2 \ldots N)$$

(lásd a II. hasonlósági mértéket!).

Ezzel zárult le az első ciklus, mivel meghatároztuk a redukált **P**-t. Sorok szerinti osztályozás esetén $M - 1$, oszlopok szerintinél $N - 1$ ciklus szükséges az összes elemnek egy osztályba egyesítéséhez. Az egyes redukciók alapjául szolgáló h_{ij}-k ismeretében, az elemek megfelelő rendezését követően a dendrogram már megrajzolható.

Mivel a RULE—3 automatikus osztályozási eljárás a gyakoriságokra épül, ezért megvizsgálhatjuk, hogy az osztályba sorolás szignifikánsnak tekinthető-e. Tehát abban az esetben, ha valamelyik ciklusnál az i és j elemet választottuk ki a h_{ij} alapján, akkor az i és j illeszkedését *Kolmogorov–Szmirnov*-próbával elemezhetjük. A próba előnye, hogy igen kicsiny minták esetében is használható. A kumulált gyakoriságok összegezésén alapul. Először kiszámítjuk a kumulált elméleti gyakoriságokat, majd ezeket összehasonlítjuk a kumulált tapasztalati gyakoriságokkal. A próba azt vizsgálja, hogy ez a legnagyobb eltérés tulajdonítható-e véletlennek. Az elméleti elosztást – a kontingencia tábla alapján – egyenletes eloszlásnak tételezzük fel, tehát ha az i és j sor illeszkedése véletlenszerű, akkor

$$n_{11} = n_{12} = n_{13} = \ldots = n_{55},$$

azaz esetünkben

$$r_{lm} = 1/25 = 0{,}04.$$

A próba elvégzéséhez az n_1^{ij}-t, n_2^{ij}-t és az n_3^{ij}-t használjuk fel:

n_1^{ij}-hez rendelt elméleti gyakoriság: $E_{\mathrm{I}} = 5/25 = 0{,}2,$

n_2^{ij}-hez rendelt elméleti gyakoriság: $E_{\mathrm{II}} = 8/25 = 0{,}32.$

n_3^{ij}-hez rendelt elméleti gyakoriság: $E_{\mathrm{III}} = 12/25 = 0{,}48.$

A kumulált elméleti gyakoriságok:

$$KE_{\mathrm{I}} = 0{,}2 \qquad KE_{\mathrm{II}} = 0{,}52 \qquad KE_{\mathrm{III}} = 1{,}00.$$

Tényleges gyakoriságok:

$$T_{\mathrm{I}}^{ij} = n_1^{ij}/N \qquad T_{\mathrm{II}}^{ij} = n_2^{ij}/N \qquad T_{\mathrm{III}}^{ij} = n_3^{ij}/N.$$

A kumulált tényleges gyakoriságok:

$$KT_{\mathrm{I}}^{ij} = T_{\mathrm{I}}^{ij} \qquad KT_{\mathrm{II}}^{ij} = T_{\mathrm{I}}^{ij} + T_{\mathrm{II}}^{ij} \qquad (KT_{\mathrm{II}}^{ij} =$$

Az osztályok képzésénél figyelembe vett hasonlósági mértékek mellett megadjuk a következő mutatókat is, melyek szignifikanciája az N (ill. M) ismeretében ellenőrizhető, a próba elvégezhető:

$$D_{\mathrm{I}}^{i} = KE_{\mathrm{I}} - KT_{\mathrm{I}}^{ij}$$

$$D_{\mathrm{II}}^{ij} = KE_{\mathrm{II}} - KT_{\mathrm{II}}^{ij}.$$

A kidolgozott programcsomag segítségével tehát 10 különböző technika (5 hasonlósági mérték, 2 döntésfüggvény) felhasználásával elemezhetjük a kiinduló mátrixot vagy transzponáltját, vizsgálhatjuk a kialakuló osztályokat.

4. A programok ismertetése

Napjainkban reneszánszukat élik a kis- és középgépek, egyre inkább elterjednek a számítógépes hálózatok. A kis- és középgépek alkalmazásának nagy előnye, hogy szoros ember-gép kapcsolat alakítható ki, amely – megítélésünk szerint – nagyon fontos egy adathalmaz (kiinduló mátrix) elemeinek automatikus osztályozásánál. De az is nagyon fontos, hogy a szükséges módosítások kisebb költséget és rövidebb időt igényelnek, a számítógép közvetlenül beépülhet a szervezeti egységek munkájába, az elemzési munkafolyamatba. Az ember-gép kapcsolat igénye és lehetősége vezetett bennünket akkor, amikor programcsomagunkat a hazai gyártású R—10 és TPA—1140 típusú számítógépekre dolgoztuk ki.

A programcsomag két programból áll. Az első, a STAT nevű, az adatokat mágnesszalagra másolja és ellenőrzés céljából listázza. A program segítségével két szinten egymásba ágyazott részcsoportok is kijelölhetők. A program az egyes részcsoportok végén kinyomtatja az adatok csoporton belüli százalékos megoszlását. A csoportok a dendrogram alapján jelölhetők ki. A program nagyvonalú blokksémáját az 1. ábra mutatja be.

A program blokksémájából kitűnik, hogy futás közben a folyamat konzol üzenetekkel irányítható. Ezt a kapcsolatot úgy alakítottuk ki, hogy a téves utasításokat a program figyelmen kívül hagyja. A mágnesszalagra átmásolt adatokat a RULE—3 törzseljárás programjának segítségével dolgozzuk fel. A program saját futtatási opcióit a futás elején a printeren nyomtatja ki. Az eljárás interaktív módon konzolról irényítható. A program nagyvonalú blokksémáját a 2. ábra mutatja be.

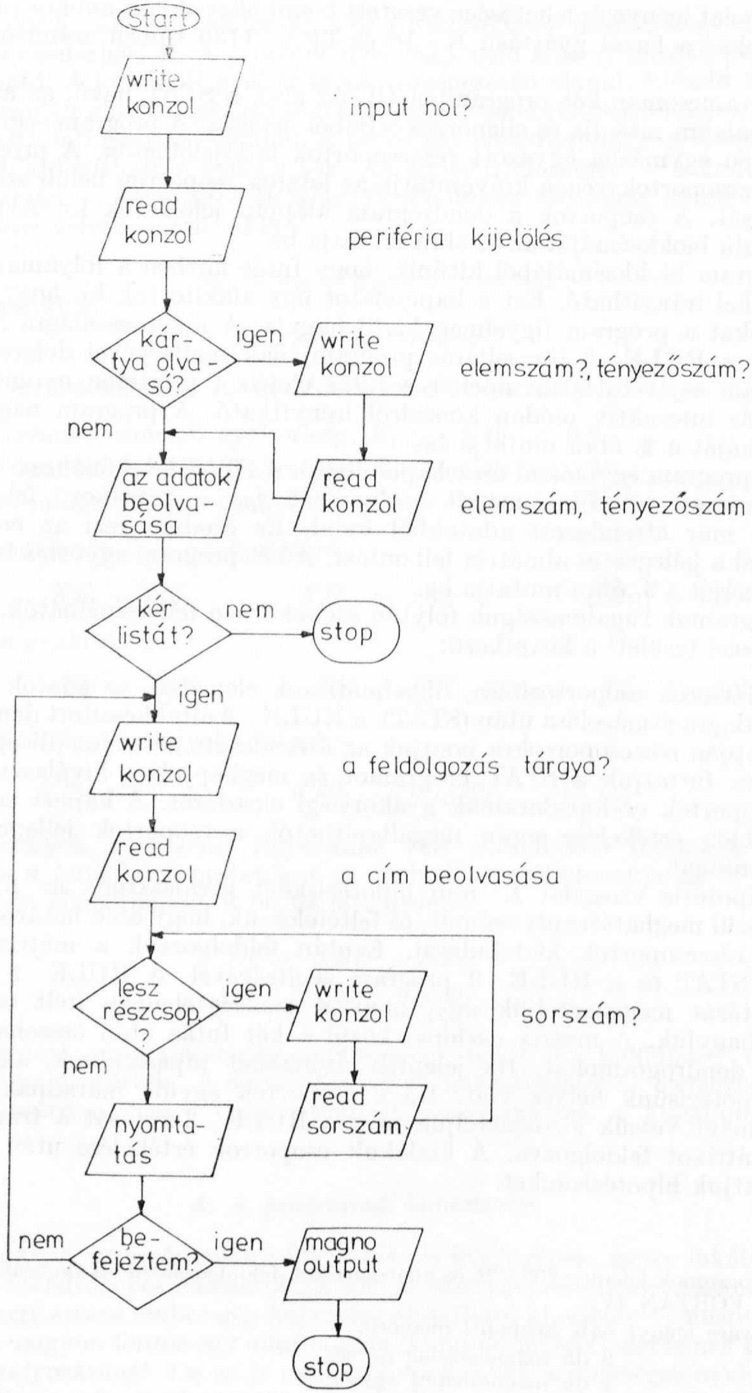
A két program egymással összekapcsolható. A STAT lehetővé teszi a disc-re írt átrendezett adatfile ismételt beolvasását, így a következő feldolgozási ciklus a már átrendezett adatokból indul. Ez eredményezi az eredménymátrixnál a jellegzetes almátrix felbontást. A két program együttes futásának blokksémáját a 3. ábra mutatja be.

A programok rugalmasságuk folytán széleskörűen felhasználhatók. Néhány alkalmazási terület[1] a következő:

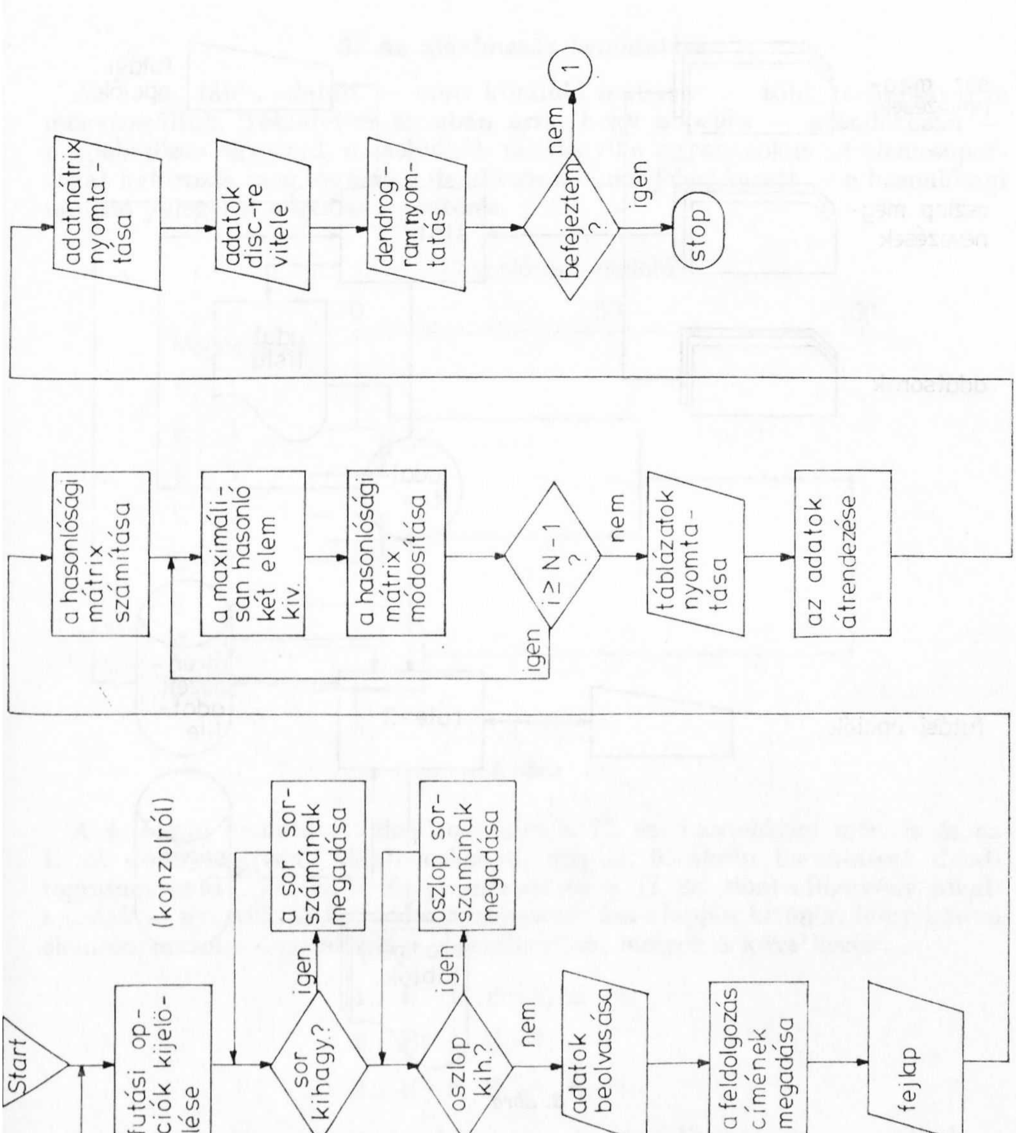
— Adatsorok csoportosítása, ill. almátrixok elemzése: az adatok mágnesszalagra átmásolása után (STAT), a RULE—3 által készített dendrogram alapján részcsoportokra bontjuk az átrendezett mátrixot (disc). Ezután újra futtatjuk a STAT programot és megkapjuk a kiválasztott részcsoportok oszlopadatainak gyakorisági eloszlását. A kapott eredménytablók értékelése során megállapíthatók a csoportok jellemző tulajdonságai.
— Hipotézis vizsgálat I.: null hipotézisként kiválasztunk az N tényező közül meghatározott számút, és feltételezzük, hogy ezek határozzák meg a részcsoportok kialakulását. Ezután feldolgozzuk a mátrix adatait a STAT és a RULE—3 program segítségével. A RULE—3 program futását megismételjük úgy, hogy a szükségtelennek ítélt oszlopokat elhagyjuk. A mátrix oszlopai közül a két futás után összehasonlítjuk a dendrogramokat. Ha jelentős eltéréseket tapasztalunk, akkor nullhipotézisünk helyes volt. Ha a csoportok együtt maradnak, feltevésünket vessük el, ismételjük meg a RULE—3 futását a transzponált mátrixot feldolgozva. A kialakult csoportok értékelése után módosíthatjuk hipotézisünket.

[1] A programok jelenleg 200×25-ös adatmátrixok feldolgozására alkalmasak, programnyelvük FORTAN IV.

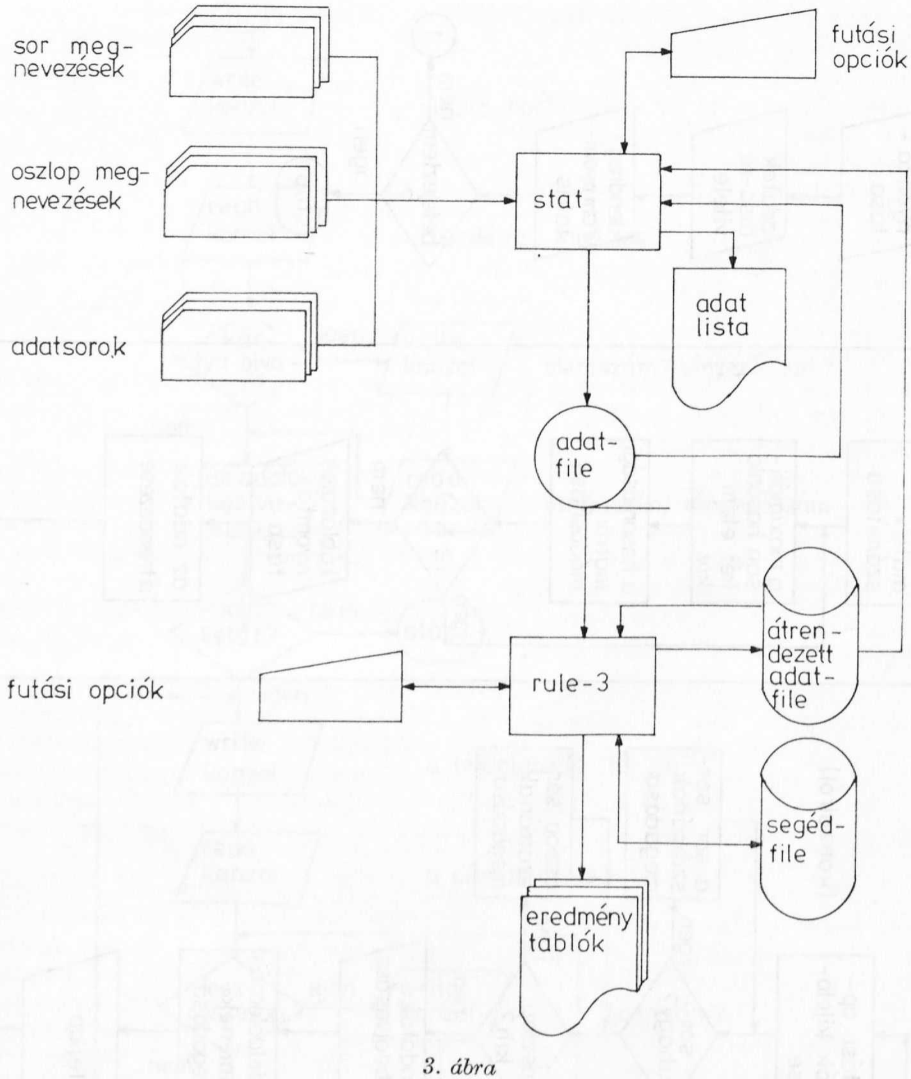
Hardware igény: 64K központi memória
2 db mágnesszalag egység
1 db mágneslemez egység
1 db printer
konzol display


Start
write konzol
input hol?
read konzol
periféria kijelölés
kártya olvasó?
igen
write konzol
elemszám?, tényezőszám?
nem
read konzol
elemszám, tényezőszám
az adatok beolvasása
kér listát?
nem
stop
igen
write konzol
a feldolgozás tárgya?
read konzol
a cím beolvasása
lesz részcsop. ?
igen
write konzol
sorszám?
nem
read sorszám
nyomtatás
befejeztem?
nem
igen
magno output
stop

1. ábra


Start
futási op-ciók kijelö-lé se
sor kihagy?
igen
a sor sor-számának megadása
(konzolról)
oszlop kih.?
igen
oszlop sor-számának megadása
nem
adatok beolvasása
a feldolgozás címének megadása
fejlap
1
a hasonlósági mátrix számítása
a maximáli-san hasonló két elem kiv.
a hasonlósági mátrix módosítása
i ≥ N-1 ?
igen
nem
táblázatok nyomta-tása
az adatok átrendezése
adatmátrix nyomta-tása
adatok disc-re vitele
dendrog-ram nyomtatás
befejeztem ?
nem
1
igen
stop

2. ábra

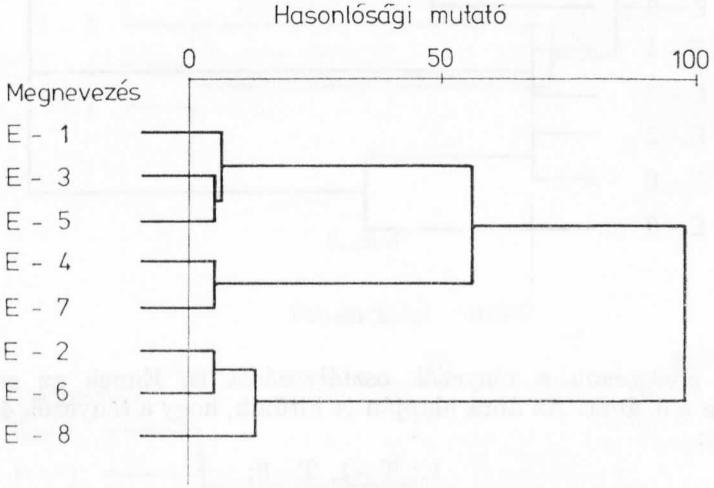


3. *ábra*

— Hipotézis vizsgálat II.: ha feltételezzük, hogy kiinduló mátrixunk redundáns oszlopokat tartalmaz, a RULE–3 futása után töröljük a RULE–3 segítségével a fölöslegesnek vélt oszlopokat és újra futtatjuk a programot. Ezután összehasonlítjuk a két dendrogramot. Ha a kettő megegyezik, vagy csak „kicsit" tér el egymástól, az elhagyott oszlopok valóban fölöslegesek voltak.

5. Az alkalmazás bemutatása

Az 1. sz. tábla adatait – mint kiinduló mátrixot – több technikával is megvizsgáltuk. Tekintettel azonban arra, hogy a példa – szándékosan – meglehetősen egyszerű, a technikák mindegyike ugyanazokat az elemcsoportokat határozta meg, csupán a dendrogramoknál jelentkezett – a hasonlósági mutató jellegéből adódóan – eltérés.



4. ábra

A 4. ábrán bemutatott dendrogramot a II. sz. hasonlósági mérték és az I. sz. döntésfüggvény alkalmazásával, míg az 5. ábrán bemutatott dendrogramot a III. sz. hasonlósági mérték és a II. sz. döntésfüggvény alkalmazásával nyertük. A két ábra összehasonlítása alapján kitűnik, hogy három elemcsoportról – osztályról – beszélhetünk, melyek a következők:

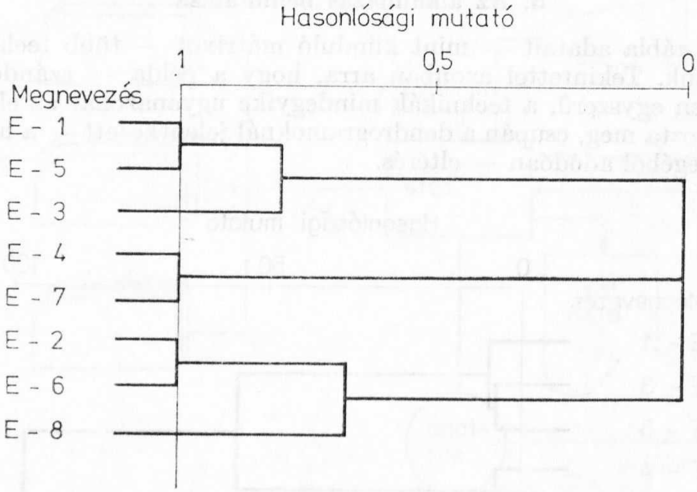
1.: E–1, E–3, E–5;

2.: E–4, E–7;

3.: E–2, E–6, E–8.

Az 5. ábrán bemutatott dendrogramot úgy is felfoghatjuk – az alkalmazott technika sajátosságából adódóan –, mintha a 4. ábrán látható dendrogram azon részét nagyítanánk ki, amely az 5-től 56-ig terjedő tartományban van. Az 5. ábra dendrogramja az osztályokat „automatikusan” határozza meg, bár a *Kolmogorov–Szmirnov*-próba szerint az E–8-nak a 3. osztályba való besorolása már eléggé kockázatos.

Az osztályozás kiinduló mátrixának sorait az 5. ábra dendrogramjának megfelelő rendezésben a 2. táblázat tartalmazza. A táblázatban elhatároltuk egymástól a három osztály sorait. Az azonos osztályba sorolt elemek adatsorainak hasonlósága magáért beszél. A 2. tábla alapján – egy konkrét példa esetén a tényezők (tulajdonságok) ismeretében – az osztályok jellemző ismérvei leírhatók, azonban ezt az elemzést lényegesen megkönnyíthetjük



5. ábra

azzal, ha elvégezzük a tényezők osztályozását is. Ennek az eredményét mutatja be a 6. ábra. Az ábra alapján is kitűnik, hogy a tényezők 4 osztályba sorolhatók:

1.: T–1, T–5;

2.: T–2, T–6;

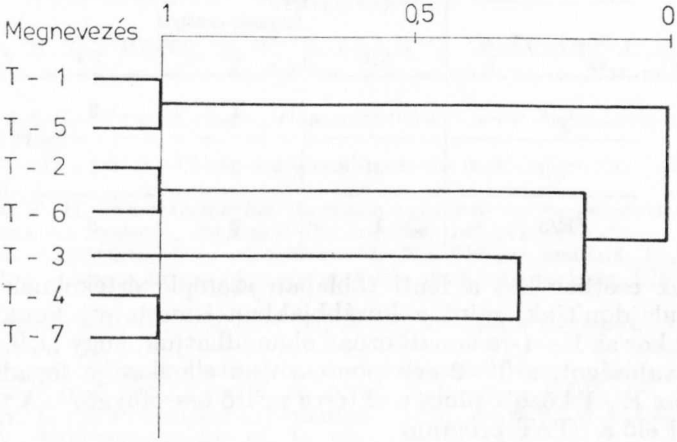
3.: T–3;

4.: T–4, T–7.

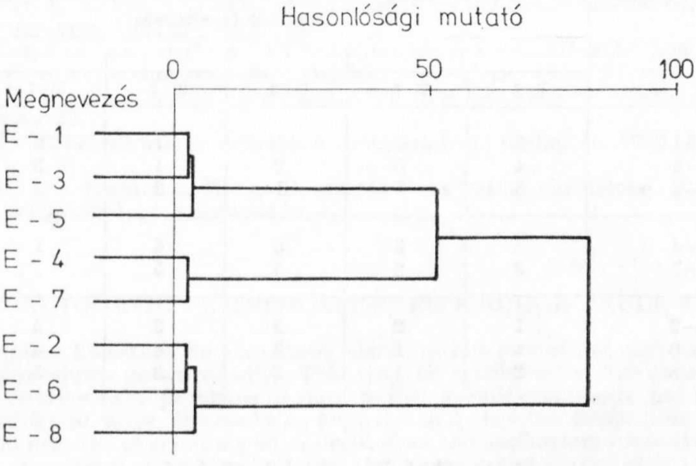
2. tábla

Elem	Tényező						
	T–1	T–2	T–3	T–4	T–5	T–6	T–7
E–1	5	1	1	2	4	1	3
E–5	4	2	2	3	5	1	4
E–3	5	1	3	3	5	2	3
E–4	4	5	3	3	3	4	1
E–7	3	5	4	1	2	5	2
E–2	1	2	4	5	2	3	5
E–6	1	3	5	4	1	4	5
E–8	2	3	2	5	1	3	4

A T–3 besorolását a 4. osztályba a *Kolmogorov–Szmirnov*-próba alapján is el kell vetnünk. A T–3 értékeinek áttekintése, ill. önálló osztályként való szereplése alapján arra a következtetésre juthatunk, hogy a T–3 elhagyása esetén nem változnak meg a kialakult osztályok. Ha osztályozzuk az elemeket



6. ábra



7. ábra

a II. mutató és az I. döntésfüggvény alapján, akkor a 7. ábrát kapjuk. Ha most összevetjük a 4. és a 7. ábrát, akkor megállapíthatjuk, hogy következtetésünk helyes volt, az osztályok és a dendrogram lényegében változatlanok maradtak.

Az eddigiek alapján már osztályokba rendezhetjük a kiinduló mátrix oszlopait és sorait is — ekkor mind az elemeket, mind a tényezőket osztályba soroljuk, azaz „kétdimenziós osztályozásról" beszélhetünk. Mivel az elemek osztályozásánál a T—3 nem játszik szerepet, ezért ezt akár el is hagyhatjuk, mint ahogyan azt a végleges elemzéshez alapuló szolgáló 3. táblánál tettük. A táblán elhatároltuk egymástól az elemek és a tényezők osztályait, hogy ezzel a kialakult almátrixokat kerekített értékkel jellemezhessük, mégpedig a következő módon:

Elemek osztályai	Tényezők osztályai		
	T/1	T/2	T/3
E/1	5	1	3
E/2	3	5	1
E/3	1	3	5

Abban az esetben, ha a fenti táblában szereplő értékeknek ugyanazt a jelentést tulajdonítjuk, mint a korábbiakban ismertetett konkrét vizsgálatunknál, akkor az E–1-re vonatkozóan elmondhatjuk, hogy „a T–1 pontosan tükrözi a valóságot, a T–2-nek pontosan az ellenkezője fogadható el, míg a T–3 és az E–1 között nincs említésre méltó összefüggés”. A tábla kialakítását segíti elő a STAT program.

3. tábla

Osztály	Elem	Tényezők és osztályaik					
		1		2		3	
		T–1	T–5	T–2	T–6	T–7	T–4
1	E–1	5	4	1	1	2	3
	E–5	4	5	2	1	3	4
	E–3	5	5	1	2	3	3
2	E–4	4	3	5	4	1	1
	E–7	3	2	5	5	1	2
3	E–2	1	2	2	3	5	5
	E–6	1	1	3	4	4	5
	E–8	2	1	3	3	5	4

A továbbfejlesztés lehetőségei

Az eljárás és a programcsomag használata alapján három fejlesztési irányt körvonalazhatunk:

– Volumen fejlesztés. A jelenlegi 200×25-ös kiinduló mátrixméretnél nagyobb, így 1000×100-as mátrixok feldolgozására is célszerű felkészülni, pl.: pszichológiai, szociológiai, szervezeti vizsgálatokhoz.
– Az alkalmazható hasonlósági mutatók és döntésfüggvények körének bővítése. A jelenlegi 5 féle hasonlósági mértéken felül még nagyon sok fellelhető a szakirodalomban. Minimális fejlesztéssel bővíthető a lehetőségek száma.
– Célszerű lenne olyan adatelőkészítő szubrutinokat is kidolgozni, melyek megkönnyíthetik a skálatranszformációt.

(Beérkezett: 1981. május 27-én)

IRODALOM

1. Attinger, E. O.—Henry, D. T.—Attinger, F. M.—Adams, J. M.—Anné, A.: Biological control hierarchies. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 1978/1.
2. S. Benedikt, V.—Vári, A.: Egyes clusteranalíziseljárások és gazdasági alkalmazások. Szigma, 1977/3.
3. Dubes, R.—Jain, A. K.: Clustering techniques: the user's dilemma. Pattern Recognition, 1976.
4. Farag, R. F. H.: An information theoretic approach to image partitioning. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 1978/11.
5. Füstös, L.—Meszéna, Gy.—Simonné, M. N.: Cluster analízis. Szigma, 1977/3.
6. Gower, S. C.: A comparison of some methods of cluster analysis. Biometrics, 1976. december.
7. Kindler, J.—Papp, O.: Komplex rendszerek vizsgálata Budapest, 1977. Műszaki Könyvkiadó.
8. Kindler, J.: A csoportos döntések korszerű módszerei, különös tekintettel a névleges csoport módszerre. BME Ipari Üzemgazdasági Tanszék, 1978.
9. Párniczky, G.: A statisztikai informatika alapjai. Statisztikai Kiadó, 1976.
10. Rényi, A.: Valószínűségszámítás. Tankönyvkiadó, 1973.
11. Ruzsányi, T.: Preferencia, szervezet, döntés. Tudományszervezési Tájékoztató, 1979/5.
12. Ruzsányi, T.: Vállalatok összehasonlító elemzésének módszere. Ipargazdaság, 1980/10.
13. Ruzsányi, T.—Vári, A. (szerk.): A döntéselméleti kutatások és alkalmazások helyzete Magyarországon. OMFB—REI, 1980.
14. Ruzsányi, T.—Lelkes, P.: A RULE-3 eljárás és program. OMFB—REI kézirat, 1980.
15. Schultz—Slevin: Implementing OR/MS. New York, 1975. Elsevier.
16. Sokal, R. R.: Classification: purposes, principles, progress, prospects. Science, 1974. szeptember 27.
17. Sváb, J.: Többváltozós módszerek a biometriában. Budapest, 1979. Mezőgazdasági Kiadó.
18. Yule, G. U.—Kendall, M. G.: Bevezetés a statisztika elméletébe. Budapest, 1964. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.

AUTOMATIC CLASSIFICATION PROCEDURE "RULE-3"

The technical literature on automatic classification procedures and the number of suggested procedures grows steadily. This may be attributed to the fact that various fields of utilization raise problems of most varied technical contents and of data to be treated in different ways. It should be kept in mind that the application of automatic classification procedures is not a goal in itself, since the application must always be fitted into a concrete process of problem solution, that is input and output of the procedure are largely determined by the users. The elaboration of RULE-3 may be attributed to similar reasons.

The essence of the procedure is the following: columns and rows of the initial matrix of classification are first classified, then the sub-matrices of the rearranged matrix are characterized — expediently — by a (rounded) numerical value. This way a „two-dimensional" classification is produced and a reduced matrix obtained that is suitable for the determination of specific relationships between the classes of observation elements and those of observation parameters. By means of the programme package the initial matrix and its transpose may be analyzed by using 10 various techniques (5 similarity measures, 2 decision functions). The procedure is suitable also for the simultaneous handling of data measured on various scales after an appropriate scale transformation. An example demonstrates the simplicity and many-sided practical utility of the procedure.

МЕТОД АВТОМАТИЧЕСКОЙ КЛАССИФИКАЦИИ РУЛЕ-3

Специальная литература по методам автоматической классификации, вся совокупность разработанных методик все время расширяется, что может относиться за счет того, что в различных сферах использования возникают проблемы, содержащие самые различные специальные аспекты, т. е. данные, к которым нельзя подходить по одинаковому. Во внимание следует принимать и то, что использование методов автоматической классификации не является самоцелью в связи с тем, что само использование каждый раз должно увязываться с конкретным процессом решения проблемы, т. е. вход и выход метода в значительной мере уже определен самыми потребителями. Причина разработки РУЛЕ-3 также может сводиться к — аналогичным вышеизложенному-причинам.

Суть метода заключается в том, что классифицируются колонки и строки исходной матрицы, а потом подматрицы упорядоченной матрицы характеризуются — целесообразно — одним (округленным) цифровым значением, т. к. проводится «двух диапазонная» классификация, в результате которой получаем такую редуцированную матрицу, которая пригодна для определения специфических связей между классами рассматриваемых элементов и классами рассматриваемых параметров. С помощью разработанных пакетов программ и при использовании 10 различных техник (5 зависимостей по аналогии и 2 по принятию решений) можно анализировать и транспонированную исходную матрицу. Этот метод пригоден также и для того, чтобы после соответствующей трансформации одновременно обрабатывать данные, имеющиеся на различных шкалах измерения. Приводимый в статье пример указывает на простоту метода и многогранность его практического применения.

KÖNYVEKRŐL

Bell, D. E., Keeney, R. L., Raiffa, H. (szerk): *Conflicting objectives in decisions.* (Ellentétes célok a döntésekben) Laxenburg, 1977. A Wiley-Interscience Publication. International Institute for Applied Systems Analysis. 442 p.

Ellentétes célok vizsgálata a döntéselmélet egyik olyan központi problémája, amely nemcsak nagy elméleti jelentőséggel bír, hanem az alkalmazások széles skálájának is legalkalmasabb vizsgálati eszköze. Például üzleti kérdések, közgazdaságtan, műszaki tudományok, a pszichológia, a mezőgazdaság számos területe ide tartozik, hogy csak a legfontosabbakat említsük. A könyv e kérdéskörnek elméleti és gyakorlati szempontból egyaránt bő és hasznos anyagát dolgozza fel. Két nagy részre bontható, az első rész módszertannal, a második rész pedig konkrét alkalmazásokkal foglalkozik.

A könyvet jól összeállított bevezetés nyitja, ebben a szerkesztők összefoglalják a témakör legfontosabb probléma köreit és feladatait. Egyúttal jól vázolják a könyv további, már részletekbe menő vizsgálatait.

A módszertani rész első dolgozata (*V. M. Ozernoi* és *M. G. Gaft* munkája) többcélú döntési problémák rendszerszemléletű absztrakt megfogalmazását adja meg, valamint a megoldási koncepciókkal szemben támasztott főbb követelményeket vázolja. Alkalmazásként egy szénbányászati problémát mutat be.

B. Roy tanulmányában fuzzy halmazoknak preferenciák analízisére vonatkozó alkalmazását tárgyalja. Ez a témakör a többcélú döntéshozásnak az elmúlt években az egyik legdinamikusabban fejlődő területe.

J. Wallenius és *S. Zionts* a Modern Vezetéselmélet Európai Intézetének a többcélú döntéshozással kapcsolatos kutatási programjáról számol be. Efficiens vektorok meghatározására dolgoztak új módszert, amely a döntéshozóval állandó interaktív kapcsolatra épül. Matematikai szempontból pedig az eljárás a súlyok és a korlátok módszerének alkalmas kombinációjaként fogható fel.

M. Peschel és *C. Riedel* dolgozatában egy gradiens módszerhez hasonló interációs eljárást mutat be. Igen jól választott numerikus példával is illusztrálják az algoritmust. Eljárásukat arra az esetre is kiterjesztik, amikor a döntési feladat bizonytalanságokkal terhelt. *K. R. Mac Crimmon* és *D. A. Wehrung* indifferencia és preferencia görbék megválasztásával és azoknak a döntéshozásra gyakorolt hatásával foglalkozik. *R. D. Luce* az együttes méréselmélet rövid áttekintését adja. Dolgozatában halmazok direkt szorzatán értelmezett bináris relációk főbb tulajdonságaival foglalkozik és alkalmas feltételek mellett hasznossági függvények létezését mutatja meg, és néhány speciális osztályukat tárgyalja. *P. Fishburn* a többdimenziós hasznossági függvények elméletével foglalkozik. A Neumann—Morgenstern axiómákból kiindulva vezeti be az érték és hasznosság függetlenségének fogalmát, és az ezek következményeként fellépő egyszerűbb struktúrájú hasznossági függvények létezését. Befejezésül a frakcionális függetlenséget tárgyalja. *O. I. Larichev* szubjektív kritériumokra alapuló döntéshozás egy gyakorlati módszerét mutatja be, *A. Tversky* pedig különféle megfontolásokra épülő preferencia szempontokról ír. A bizonyossági, utalási hatásokat vizsgálja tanulmányában. *R. Kulikowski* egy dinamikus fogyasztási modellel és hasznossági funkcionálok optimalizálásával foglalkozik. Az általa vizsgált modell funkcionáljai integrálszorzat alakban állíthatók elő, ahol a változó az idő. *R. F. Meyer* állapotfüggő preferenciákkal foglalkozik. Az előző és a rákövetkező időpontokhoz tartozó állapotoktól is függő hasznossági függvények tulajdonságaival és konkrét felírásával foglalkozik.

A második rész első dolgozata, *W. Edwards* munkája, a társadalmi döntéshozás kérdéseit vizsgálja többváltozós hasznossági függvények alkalmazásaként. Konkrét példaként egy földhasznosítási problémát, egy kormányzati kérdést (gyermekegészségügyi, oktatási és jóléti programot) valamint vízminőségi mutatókkal kapcsolatos feladatot elemez. *A. C. Hax* és *K. M. Wiig* tőkebefektetések vizsgálatáról ír döntésanalízis segítségével. A probléma leírása után a bizonytalan paramétereket vizsgálja, majd egy kétcélú vizsgálatot végez el, ahol a profit és az output jelenti a célokat. *R. L. Keeney* és *K. Nair* atomerőművek telepítésével foglalkozik. A többcélú döntési problémát additív, vagy multiplikatív hasznossági függvények vizsgálatára vezetik vissza. Megkonstruálják a konkrét hasznossági függvényeket, azok normalizáló tényezőit, valószínűségi mutatóit, majd modelljük érzékenységvizsgálatát is elvégzik. *V. Bauer* és *M. Wegener* többdimenziós hasznossági függvények felhasználásával közösségek visszacsatolt információs rendszerét elemzik. Szimulációs módszert dolgoznak ki, amellyel a rendszer viselkedését tanulmányozhatják, így a célok, súlyok és hasznosság függvények rendszerét egy tanuló modell-elven alapuló számítási eljárással becsülhetik meg.

Modellüknek alkalmazását is bemutatják egy konkrét város esetében és részletesen elemzik számszerű eredményeik valódi alkalmazhatóságát. Környezeti és várostervezési alkalmazással foglalkozik *Y. Sawaragi*, *K. Inoue* és *H. Nakayama* közös tanulmánya. Egy kétcélú problémát vizsgálnak, amelynek megoldására a Lagrange-multiplikátor elvre épülő optimalizációs eljáráson kívül a kompromisszum-programozás elvét is bemutatják. *J. S. Dyer* és *R. F. Miles, Jr.* a NASA Jupiter és Saturn programjának egyes kérdéseivel foglalkozik, nevezetesen űrszondák pályájának meghatározását vizsgálják. A kooperatív játékok elméletéből is jól ismert megegyezéses halmazok vizsgálatával analóg módszert, valamint Nash és Harsányi kooperatív megoldási koncepcióját alkalmazzák. Jól elemzik az egyes megoldási elvek előnyeit és hátrányait. *D. E. Bell* erdők fapusztulásának matematikai vizsgálatával foglalkozik. Hasznossági függvények helyett először ún. értékfüggvényeket vizsgál, majd a probléma időben dinamikus átfogalmazása után magukat a hasznossági függvényeket is előállítja. A modellt és megoldási módszereit számpéldán is bemutatja.

Minden dolgozat a munkaértekezleten felvetett problémákkal és az azokra adott válaszokkal zárul. Ezek a rövid megjegyzések jól világítják meg az egyes problémakörökkel kapcsolatos kétségeket és azok esetleges megoldását. A könyvet az általános vita rövid leírása zárja. Ebben ismét megemlítik a többcélú döntéshozás legfontosabb elméleti és gyakorlati problémáit.

Mint láthatjuk, a bemutatott könyv a többcélú, általában ellentétes célokat tartalmazó döntési feladatok megoldási módszereinek és főbb alkalmazási területeinek igen jól szerkesztett, gondosan felépített összefoglalását adja meg. A könyv a különféle mélységű matematikai előképzettséget igénylő dolgozatok és az igen széles körű alkalmazási területek következtében is sokféle szakember érdeklődésére tarthat számot.

A szerkesztők nyilvánvalóan az alkalmazási lehetőségek bemutatását tekintették fő feladatuknak, ezért történhetett meg az, hogy számos olyan fontos matematikai részterületről, mint például a *M. Zeleny* által kidolgozott többcélú szimplex módszerről még említés sincs. Ez utóbbi észrevételünket semmiképpen sem róhatjuk fel a szerkesztők hibájának, mert a szakterület nagyfokú heterogenitása, az alkalmazási területek szinte végtelen spektruma is lehetetlenné teszi valamennyi fontos részterület tárgyalását.

Az elmondottakat összefoglalva a könyvet melegen ajánljuk mindazoknak, akik a többcélú döntéshozás elméleti és gyakorlati kérdései iránt érdeklődnek.

SZIDAROVSZKY FERENC

STARR, M. K., ZELENY, M. (szerk.): *Multiple criteria decision making* (Többkritériumú döntéshozatal) TIMS Studies in the Management Sciences, Volume 6. Amsterdam, 1977. North-Holland Publising Company. 326 p.

A cikkgyűjtemény, a többcélú programozás és döntéselemzés legfontosabb fejezeteibe és módszereibe enged bepillantást. Véleményünk szerint e céljának a könyv kintűnően megfelel, minthogy a gyakorlati alkalmazások szempontjából valóban a legfontosabb témaköröket öleli fel.

M. K. Starr és *M. Zeleny* bevezető dolgozatukban a többcélú döntéshozatallal kapcsolatos kutatási irányokról és a legfontosabb jövőbeni feladatokról írnak. Az efficiens (Pareto optimális) megoldásokat kereső koncepciókon kívül az interaktív módszerekről és a többtényezős hasznossági függvények elméletének alapjairól is említést tesznek. Részletezik az intervallum-programozás, a dominancia struktúrák alapjait, ezeken kívül pedig az ideális megoldásra alapuló módszereket és a kompromisszum programozási módszer alapjait vázolják. *P. G. W. Keen* a többcélú döntéshozás koncepcióit történeti kialakulását vázolja. Jól ismerteti a különféle alapelvek alapjait és összehasonlítását, továbbá az egymástól gyakran igen távol álló koncepciók jól áttekinthető rendszerezését is megadja. E két bevezető tanulmány a témakör jól felépített áttekintését adja, amely mind a szakterületben otthonosan mozgó kutatók és gyakorlati szakemberek, mind a témakörrel ismerkedni vágyók számára egyaránt világos és tömörségében is részletes. Valóban a legfontosabb részterületek összefoglalását kapjuk. *P. H. Farquhar* a többtényezős hasznossági elmélet áttekintésekor a Neumann—Morgenstern axiómarendszerből kiindulva vezeti be a hasznossági függvényeket. Speciális alakú függvények vizsgálatát a preferencia függetlenség és az additív hasznossági függvények vizsgálatával kezdi, majd multiplikatív és kvázi-additív függvényosztályokat tárgyal. A legújabb eredmények bemutatásával zárja az elméleti részt, majd alkalmazási lehetőségeket tárgyal. Itt a konkrét feladattípusok ismertetése helyett rövid irodalmi áttekintést ad. Ezt a dolgozatot egy méretében is hatalmas irodalomlista zárja. Ennek, mint referenciának a felhasználását a témakörrel foglalkozó minden szakembernek melegen ajánljuk. *P. Wright* és *F. Barbour* döntési stratégiák kezdeti stratégiából való fejlesztésének metodikai kérdését elemzi. Ebben a dolgozatban is részletesen elemzik a legfontosabb döntéshozó magatartások jellemzőit és beépítésüket a metodikai modellbe. *M. K. Starr* és *H. Greenwood* többcélú elemzés alapján alternatívák előállításával foglalkozik. Módszerükben az egyes alternatívák kumulatív entrópiáját fogalmát vezetik be és ezt hasznosan alkalmazzák az alternatívák generálási folyamatának megállapításában. Eljárásukat konkrét számpéldán is illusztrálják. *J. M. Blin* a fuzzy-halmazoknak a többcélú döntéselőkészítésben való alkalmazását tárgyalja. Először fuzzy-halmazoknak az alaptulajdonságait ismerteti, majd T. Saaty eredményeire támaszkodva efficiens megoldások előállításával foglalkozik. *M. Zeleny* preferenciák adaptív változásait tárgyalja, ahol mind a hasznossági függvények elméletére és mind az ideális pontok alapján történő döntéshozói magatartásra figyelemmel van. *P. L. Yu* a döntéshozás négy alapelemét — az alternatívákat, kritériumokat, hozamokat és preferenciákat —, és ezek dinamizmusát vizsgálja. *B. Roy* dolgozatában új koncepciókkal kapcsolatos kérdéseket vizsgál, többek között bevezeti a pre-kritérium, szemi-kritérium, pszeudo-kritérium fogalmát a döntéshozási folyamat matematikai formalizmusába. *R. K. Sarin* tanulmányában interaktív módszerket tárgyal többszempontú vizsgálatokban. Bevezeti az ún. korlát-módszert és ennek többféle általánosítását is ismerteti. A tárgyalt módszereket könnyen áttekinthető és szemléletes számpéldákkal is illusztrálja. *R. E. Steuer* interaktív többcélú lineáris programozási módszert mutat be. Részletesen elemzi azt az esetet is, amikor a súlyokra intervallumbecslések állnak a döntéshozó rendelkezésére. Ez a dolgozat is számpéldával zárul. *H. Isermann* is többcélú lineáris programozással foglalkozik, a dualitás témakörét, és annak fontosságát tárgyalja. Az egycélú feladatok dualitási tételéhez hasonló efficiens megoldásokra vonatkozó eredményeket mutat be.

Befejezésül a dualitás közgazdasági tartalmát elemzi, valamint a dualitáselméletnek a döntéshozás mechanizmusára gyakorolt hatását vizsgálja. *B. Viswanathan, V. V. Aggarwal* és *K. P. K. Nair* Markov típusú döntési folyamatokat tárgyal. Megadja a probléma lineáris programozási modelljét, majd a megoldási algoritmust részletezi. Könnyen követhető számpélda zárja a dolgozatot. *S. M. Lee* és *R. L. Morris* egész értékű célprogramozási módszereket ismertet. A metsző síkok módszerét, a korlátozás és szétválasztás elvét, valamint a 0—1 programozási módszerekre vonatkozó implicit leszámlálási algoritmust vázolják. Számítástechnikai tapasztalatokról is beszámolnak.

Mint már említettük, a tanulmánykötet kitűnően öleli fel a témakör legfontosabb részterületeit, és mind elméleti és gyakorlati szempontból jól tárgyalja a kiválasztott anyagot. A módszerek leírása alapos, közvetlenül alkalmazhatónak tűnnek, ezt nagymértékben megkönnyíti az a számos jól válogatott számpélda is, amellyel eljárásukat a szerzők illusztrálják. Az egyes dolgozatokat követő irodalomjegyzékek is nagy mértékben segítik a témakörrel alaposabban ismerkedni vágyók dolgát, mert véleményünk szerint valóban a legfontosabb irodalmi vonatkozásokat gyűjtötték össze a kötet szerzői. Összefoglalva: a tanulmánykötetet melegen ajánljuk minden, a témakör iránt érdeklődő szakembernek.

Szidarovszky Ferenc

TUDOMANYOS ÉLET

Az OT Számítástehcnikai Központjának feladatai a népgazdasági tervezés segítésében

A matematikai módszerek felhasználása a népgazdasági tervezésben az 50-es évek végén kezdődött meg. Az első és gyakorlatilag is hasznosnak bizonyult modell az ágazati kapcsolatok mérlege volt, amelyet a tervmérlegek egyensúlyának felderítésére használtak. Ez a modell hamarosan a tervmetodikába beépülő és a tervezőmunkában rendszeresen felhasznált módszerré vált. A 60-as évek közepétől egyre bővült a tervezés-módszertani kutatások köre is. Megalakult a Tervhivatal Tervgazdasági Intézete. A Tervgazdasági Intézetben kezdetben egyik kiemelt kutatási irány volt a népgazdasági szintű modellek kísérleti alkalmazása. A III. ötéves terv munkafolyamatában összeállított lineáris programozási modell „kétszintű tervezés" néven vált nemzetközileg is ismertté.

Részben a kezdeti munkákban kirajzolódó új igények, részben pedig az 1968-ban bevezetett gazdaság-irányítási reform követelményei vetették föl annak szükségességét, hogy a Tervhivatal saját számológéppel, és az ezt működtető szellemi kapacitással rendelkezzék. Ezért alapították meg 1968-ban a Tervhivatal Számítástechnikai Központját. A Központ megalakulása után a legsürgősebb két feladat az új számológép üzembehelyezése és a káderállomány kialakítása volt. A jelenleg is üzemelő ICL System 4—70 gépet 1971-ben installálták. Az elmúlt 10 év alatt megerősödött az a szakembergárda is, amely az eszközöket eredményesen működteti és a tervezési feladatok növekvő részét számítógéppel oldja meg. A Számítóközpont jelenlegi létszáma mintegy 200 fő, amelynek fele felsőfokú végzettséggel rendelkező munkatárs. A felsőfokú végzettségűeknek mintegy fele matematikus, a másik fele egyenlő arányban közgazda és műszaki. A jelenlegi szellemi kapacitás nemcsak a tervezési feladatok megoldásában vesz részt, hanem a tervezési munkafolyamat egyes fázisaiban külső intézmények részére is nyújt számítástechnik a szolgáltatást. A szakmailag megerősödött szakembergárda így a hazai számítástechnikaiési matematikai-közgazdasági kutatásoknak is jelentős szellemi bázisa.

A *Központ feladatai* a létrehozása óta eltelt időben lényegében változatlanok maradtak.[1] A Központnak részt kell vennie a tervezésben felmerülő és a számítástechnika fel használásával megoldható feladatok megfogalmazásában, számológépre szervezésében, üzemeltetnie kell a meglevő számítástechnikai eszközöket, berendezéseket. Az alkalmazási tevékenység természetesen nagyon összetett: magába foglalja a feladatok megfogalmazását, a megoldáshoz szükséges eszközök feltárását és a közvetlen feladatmegoldást.

A Központ *szervezeti felépítése* követi az alapfeladatoknak megfelelő munkamegosztást. A számítástechnikai eszközök üzemeltetését két szervezeti egység, az Üzemeltetési Osztály és a Software Osztály látja el. Ehhez a tevékenységhez kapcsolódik még az Adatrögzítő Csoport munkája. A másik tevékenységi körhöz tartozó feladatokat négy alkalmazási osztály oldja meg. Természetesen a szervezeti egységek között nincsenek merev határok, hiszen a feladatok túlnyomó többsége csak a különböző szakmai részterületek szoros együttműködésével oldható meg. Ezért az elmúlt évek tapasztalata szerint jól bevált munkaszervezési módszer a feladatmegoldás teamekben.

A Központ tevékenységét meghatározó *alkalmazási környezet* a népgazdasági tervezés· A feladattípusok sokfélék és jellemző vonásuk a nagy változékonyság. Az elmúlt években a változó feladattípusok mellett is kirajzolódtak azok a fő irányok, amelyek várhatóan hosszú távra meghatározó fontosságúak a tervezés számítástechnikai segítésében.

A számítástechnika felhasználásának különböző fokozatai, módjai alakultak ki: egyik lehetőség az, hogy a számolóközpont csak a számítógépi kapacitásokat biztosítja, a másik,

[1] E cikk kereteiben elsősorban a tervezési alkalmazást kívánjuk bemutatni, ezért szükségszerűen eltekintünk a Központ munkájában fontos más feladatok részletezésétől.

hogy önállóan a feladatokhoz igazodó eszközök fejlesztését végzi, és végül lehetséges az, hogy a feladatokat a tervezőkkel együtt oldja meg. Valamennyi forma és módszer között természetesen ez utóbbinak van különös fontossága. Bebizonyosodott ugyanis, hogy a feladatokat leghatékonyabban így lehet megoldani.

A számítástechnika az alábbi fő *feladatcsoportokban* segítette a tervezést:

— a tervezés megalapozását szolgáló tényadat-ellátás;
— a matematikai modellek megoldása;
— a tervezésmódszertani kutatások támogatása.

A *tényadat-ellátás* az alkalmazások jelentős részét teszi ki. E funkció keretébe tartozik a különböző méretű adathalmazokon végzett matematikai-statisztikai elemzés, valamennyi adattárolási és feldolgozási tevékenység. Ez utóbbinak a jelentősége az államigazgatás korszerűsítésének eredményeként egyre növekszik. Az államigazgatás számítógépesítésében elért fejlődés ugyanis lehetővé teszi, hogy a gyűjtött adatok egyre nagyobb részét adathordozókon tárolják. Mivel a Tervhivatal nem gyűjt közvetlenül adatokat, ezért a tervezési folyamathoz szükséges tényadatokat az elsődleges adatgyűjtő szervektől veszi át, elemi vagy feldolgozott formában. E munkák keretében készültek feldolgozások a tervezés számára a népszámlálás eredményeiből, rendszeres a vállalati pénzügyi mérlegbeszámolók adatainak elemzése. Az önálló feldolgozások mellett egyre jelentősebbé válik az államigazgatási információs intézetek szorosabb együttműködése.

A *modellek* megoldása kezdettől fogva jelentős részarányt képvisel az OTSzK munkájában. Elsősorban a középtávú és a hosszútávú tervek egyes fázisaihoz készültek modellek. A középtávú tervezésben a nagyméretű lineáris programozási feladatok kidolgozásának és megoldásának nagy hagyományai vannak. A III. ötéves tervtől kezdődően valamennyi középtávú terv kidolgozását segítették a különböző modellszámítások. Eleinte az volt a törekvés, hogy a tervezés teljes összefüggésrendszerét egyetlen nagy modell képezze le. Az elkészült optimalizálási modellek több ezer feltételt és több ezer változót tartalmaztak. Megoldása önmagában nagyigényű számítástechnikai feladat volt, figyelembe véve a tapasztalatok hiányát. A fejlődés a tervezés egyes munkafázisainak kérdésfelvetéséhez jobban igazodó, különböző típusú és méretű modellek készítése és megoldása irányába haladt. A gazdaságpolitikai elgondolások kidolgozásához, valamint a tervkoncepció megalapozásához szimulációs technikát alkalmazó aggregált modellek készülnek, míg a részletes tervjavaslat kidolgozásának szakaszában az erősen dezaggregált optimalizálási modellek játszanak alapvető szerepet. Majd a számítástechnikai lehetőségek bővültek és létrejöttek a tervszámítási rendszerek kidolgozásának feltételei. A távlati tervezésben alkalmazott kvantitatív szintézis rendszere például magába foglalta a modellek input adatainak előállítását, a modellek megoldását és az eredmények számítógépes kiértékelését.

A *tervezésmódszertani kutatások* a számítástechnikai eszközöket elsősorban az új modelltípusok kipróbálására és adaptálására igénylik. A széleskörűen elterjedt lineáris modellek mellett különböző nem lineáris és dinamikus modellek megoldása, valamint az ökonometriai modellek kutatása az új feladat. Az ökonometriai modellek közül a dinamikus faktoranalízis kidolgozása olyan kutatási irány, amelynek eredményei kecsegtetők és elsősorban az éves tervezés számára adnak új eszközt. A tervszámítási feladatok megoldásában felhasznált *alkalmazási eszközök* az elmúlt tíz év alatt folyamatosan fejlődtek és az igényeknek megfelelően változtak. A leggyakrabban használt eszközök két csoportba sorolhatók. Az egyikbe tartoznak azok az általános matematikai eljárások, amelyekre vagy a számítógépgyártó cég maga, vagy más, erre a célra alapított szervezetek készítenek programcsomagokat. A másik csoportba azok az eszközök tartoznak, amelyeket a Központ dolgozott ki a tervezés olyan specifikus feladatainak megoldásához, amelyekre általában nem kaphatók kész programtermékek.

Az *általános matematikai eljárások* közül az elmúlt tíz év során a tervezési feladatok megoldásában különösen az alábbiaknak volt kiemelkedő szerepük:

— matematikai programozás, elsősorban lineáris programozás,
— a matematikai statisztika eljárásai: regressziószámítás, faktoranalízis és klaszteranalízis, idősorelemzés egyéb módszerei,
— a numerikus matematika eljárásai: sajátérték keresés, differencia- és differenciálegyenletek közelítő megoldási módszerei,
— hálózattervezés.

Ezek az eszközök hatékonyan működtethetők. A nagyon gyakran használt lineáris programozási programcsomagot az igényeknek megfelelően úgy fejlesztettük tovább, hogy jelenleg sokirányú felhasználást tesz lehetővé.

Az alkalmazások kezdeti időszakában az egyedi programok írása volt túlsúlyban, mivel a programcsomagok a megjelenő feladatok megoldásának csak egy részét tették lehetővé. A tervezési feladatok jelentős részénél a gépi megoldás ideje csupán töredéke a feladat megfogalmazására, programírásra, programpróbára fordított időnek. Ilyen körülmények között a szellemi kapacitás szűkössége miatt fontos lett a probléma megfogalmazására és programok kidolgozására fordított idő csökkentése. Ennek a követelménynek olyan általános programtermékek kidolgozásával lehet megfelelni, amelyek hatékony és automatikus hibaelhárítással működnek és használatuk egyszerű, a tervezési feladatokhoz rugalmasan illeszthetők. Ezért indult el 1974-ben olyan *általános tervezési programrendszer* kialakítása, amely magába foglalta az adatok egységes tárolását, valamint egy *tervezésorientált nyelvet*. Ez a rendszer több munkatárs több mint hároméves munkájával készült. Központi magja a tervezésorientált nyelv. Ennek szabályai egyszerűek, így a számítástechnikában kevésbé jártas felhasználók is megfogalmazhatják feladataikat.

Ezzel egyidőben jelent meg egy másik fejlesztési feladat: olyan programtermék kidolgozása, amely alkalmas *nagyméretű adathalmazok statisztikai értékelésének* gyors megfogalmazására és megoldására. Néhány éves munka után ez a programrendszer is elkészült és meggyorsította a munkát, mivel egyedi programok írása helyett a feladat a programrendszer paramétereinek összeállítására redukálódott. Természetesen az eszközök fenti két csoportjának felhasználása mellett szükség van sok esetben egyedi programok írására is.

A felhalmozott tapasztalatokat és az elért eredményeket valamint a tervezés előtt álló feladatokat figyelembe véve a jövő követelményei is megfogalmazhatók.

A továbbfejlődés várhatóan két fő irányba fog végbemenni:

— a számítástechnikai kultúra általános tendenciáit és a tervezők részéről az utóbbi időben mutatkozó igényeket vizsgálva megállapítható, hogy a jövőben az ember—gép kapcsolatok még magasabb szintjének biztosítására lesz nagy igény,

— a tervezés bonyolult, sok összefüggést tartalmazó rendszere nem fogalmazható meg egyetlen modellel. Ugyanakkor viszont a részterületek egységes számítástechnikai rendszerré kapcsolódhatnak össze, amelyet hatékony alkalmazási programtermékek támogatnak. Kiemelt feladattá válik így egy integrált alkalmazási rendszer kifejlesztése.

Ezekben a fő irányokban a továbblépés egyik feltétele, hogy a technikai eszközbázis megújuljon és az új feladatokkal összhangban bővüljön.

Sivák József

A Magyar Tudományos Akadémia Operációkutatási Bizottsága

A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Tudományok osztálya 1980 őszén Operációkutatási Bizottságot hozott létre. Az 1981—85 időszakra a bizottság elnökéül Prékopa Andrást, az MTA levelző tagját, titkárának pedig Heppes Aladárt, a matematikai tudományok kandidátusát választották meg. A téma interdiszciplináris jellegének megfelelően a bizottság tagságában további matematikusok mellett helyet foglalnak az operációkutatási módszerek alkalmazásában érintett más szakterületek neves képviselői is.

A Bizottság tagjai: *Augusztinovics* Mária, a közgazd, tud. doktora, *Bakó* András docens, *Benedek* Pál akadémiai lev. tag. *Bod* Péter a közgazd. tud. doktora, *Dávid* László a műsz. tud. doktora, *Gagyi Pálffy* András fejlesztési igazgató, *Harnos* Zsolt a mat. tud. kandidátusa, *Horváth* Mátyás a műsz. tud. kandidátusa, *Jándy* Géza a műsz. tud. doktora, *Klafszky* Emil a mat. tud. kandidátusa, *Kovács* László Béla a mat. tud. kandidátusa, *László* Zoltán a mat. tud. kandidátusa, *Lovász* László akadémiai lev. tag., *Martos* Béla a mat. tud. kandidátusa, *Rabár* Ferenc docens, *Stahl* János a mat. tud. kandidátusa, *Szép* Jenő a mat. tud. doktora, *Tóth* József a mezőgazd. tud. doktora, *Ziermann* Margit a mat tud. kandidátusa.

A Bizottság feladatának tekinti az operációkutatással összefüggő kérdések és problémák felderítését, számontartását és megoldásuk előmozdítását. Ilyenek *hazai tevékenység terén*

— az operációkutatás hazai helyzetének sokoldalú vizsgálata, konkrét javaslatok megvitatása,

— az oktatás, továbbképzés, minősítések, díjak, pályamunkák figyelemmel kísérése, véleményezése, illetve támogatása,
— konferenciák szervezésében való részvétel,
— a társulati tevékenység figyelemmel követése,
— publikációs fórumok biztosítása, véleményezés, (folyóirat és könyvkiadás terén egyaránt), álláspályázatok véleményezése,
— sikeres alkalmazások, illetve operációkutatási műhelyek megtekintése, (beszámolók, publikálás szorgalmazása),
— helyzetfelmérések készítése,
— megemlékezések szervezése.

Nemzetközi kapcsolatok terén

— az operációkutatás neves képviselőinek meghívása egyénileg, ill. konferenciák alkalmából,
— magyar képviseletek biztosítása konferenciákon, munkabizottságokban, illetve szervezetekben,
— az ország IFORS tagságának biztosítása és a képviselet ellátása.

Munkamódszerét tekintve a Bizottság felkért referensek, (alkalmi) albizottságok útján, esetenként külső szakértők bevonásával működik, üléseit kéthavonta tartja.

A Bizottság konkrét munkatervéből a jelentősége miatt kiemeljük az országos felmérések és helyzetelemzések programját. Már 1981-ben sor kerül az operációkutatás oktatása hazai helyzetének vizsgálatára. A további években készülnek el az operációkutatás matematikai módszereivel, számítástechnikai problémáival, valamint a gazdasági, műszaki, élő rendszerekre vonatkozó, illetve társadalomtudományi alkalmazásaival foglalkozó helyzetelemzések.

HEPPES ALADÁR

A kiadásért felel az Akadémia Kiadó igazgatója
Műszaki szerkesztő: Sándor István
A kézirat nyomdába érkezett: 1981. VIII. 5. – Terjedelem: 10,15 (A/5) ív
82.9943 Akadémiai Nyomda, Budapest – Felelős vezető: Bernát György

CONTENTS

BOOK REVIEWS

SCIENTIFIC LIFE

СОДЕРЖАНИЕ

О КНИГАХ

НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ

Ára: 40,— Ft.
Előfizetés egy évre: 80,— Ft.

INDEX: 26 793
ISSN 0039—8128

TARTALOM

KÖNYVEKRŐL

TUDOMÁNYOS ÉLET

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST