SZIGMA

Matematikai-közgazdasági folyóirat

A Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai-Közgazdasági Szakosztályának lapja

*

E szám szerzői

ANDORKA RUDOLF, a Központi Statisztikai Hivatal munkatársa, DAVID CHAPPEL, University of Liverpool, FORGÓ FERENC, az MKKE Matematikai és Számítástudományi Intézet munkatársa, VICENTE SALAS FUMAS, Purdue University, HOCH RÓBERT, a közgazdasági tudományok doktora, a Közgazdaságtudományi Intézet osztályvezetője, HUNYADI LÁSZLÓ, a SZÁMKI osztályvezetője, AXEL LEIJONHUFVUD, University of California, Los Angeles, egyetemi tanár, LŐVEI LÁSZLÓ, az OT Tervgazdasági Intézet munkatársa, NAGY CSABA, a SZÁMKI tudományos segédmunkatársa, ORMÓS ZSOLT, a Gazdaságkutató Intézet munkatársa, PONGRÁCZ TIBOR, az Állami Népességnyilvántartó Hivatal főosztályvezetője, ANDREW B. WHINSTON egyetemi tanár, Purdue University, ZSOLNAI LÁSZLÓ egyetemi hallgató, MKKE

Szerkesztőség: Budapest XI., Budaörsi út 43—45.

Levélcím: 1502 Budapest, Pf. 262.

Terjeszt ja Magyar Posta. Előfizethető bármely postahivatalnál, a kézbesítőknél, a Posta hírlapüzleteiben és a Posta Központi Hírlap Irodánál (PKHI 1900 Budapest V., József nádor tér 1.) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a PKH 215—96 162 pénzforgalmi jelzőszámára. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest V., Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban

Előfizethető és példányonként megvásárolható: az AKADÉMIAI KIADÓ-nál, 1363 Budapest V., Alkotmány u. 21. Telefon: 111—010. Pénzforgalmi jelzőszámunk: 215—11488, és az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLT-ban, 1368 Budapest V., Váci u. 22. Telefon: 185—612. Előfizetési díj egy évre: 80,—Ft

Külföldön terjeszti a KULTÚRA Külkereskedelmi Vállalat, H-1389 Budapest, Pf. 149

Lővei László

Időleges kompetitív egyensúly

1. Az elmélet bemutatása

1.1. *Arrow—Debreu modell*

Az általános egyensúlyelmélet ma már klasszikusnak tekinthető alapmodellje az *Arrow—Debreu* modell. Részletes ismertetésére itt nem vállalkozom, az magyarul is hozzáférhető (l. Hegedüs—Zalai [9] vagy elmélettörténeti és kritikai aspektusait tekintve Kornai [13], Mátyás [14].) Csak azon jellemzőit hangsúlyozom, melyek a továbbiak megértése szempontjából fontosak.

A modellben a gazdasági személyek két csoportra oszlanak, fogyasztókra és termelőkre. A résztvevők egymástól elkülönültek, mindegyikük szigorúan racionálisan viselkedik a saját érdekei szerint. Tökéletes szabad verseny érvényesül, az árakat mindenki adottságnak tekinti.

A termelők ismerve saját termelési lehetőségeiket, tetszőleges adott árrendszer mellett képesek meghatározni azt a termelési programot (vagy programokat) — a felhasználásra és kibocsátásra kerülő javak azon együttesét —, amely a maximális nyereséget eredményezi számukra. Készleteik nincsenek, keletkező nyereségük teljes egészében a fogyasztók között kerül felosztásra, előre meghatározott arányokban.

A fogyasztók valamivel bonyolultabb lények. Adottak fogyasztási lehetőségeik és a javakból rendelkezésükre álló akkora készletek, melyek már eleve biztosítják számukra a túlélést. Rögzített ízlésük van, racionalitásuknak megfelelően ezt egy teljes és tranzitív preferenciarendezés képviseli. Ez a preferenciarendezés a megfelelő értelemben folytonos és konvex, aminek következtében folytonos és szigorúan kvázi-konkáv hasznossági függvénnyel helyettesíthető. Adott árrendszer esetén készleteik értéke és a termelőktől kapott nyereség összege meghatározva számukra, hogy mennyit költhetnek szükségleteik kielégítésére. Költségvetési kereteiken belül kiválasztják a számukra maximális hasznot nyújtó fogyasztást, és azzal mint kereslettel jelentkeznek a piacon.

Az Arrow—Debreu modell (és az általános egyensúlyelmélet) alapkérdése: milyen feltevések mellett létezik olyan árrendszer, amely esetén a termelők és fogyasztók kínálata és kereslete minden jószág piacán fedi egymást, vagyis egyensúlyban van.

Az idő explicit módon a modellben nem szerepel. Gyakori ezzel kapcsolatban az a megállapítás, hogy a modell a gazdasági élet egy adott időszakra vonatkozó jelenségeit mutatja be. Azonban így ellentmondásra jutunk, hiszen ekkor az ábrázolt fogyasztói és termelői magatartás elveszti racionalitását, mivel nem számol a jövőbeli léttel és problémákkal. Az interpretáció másik módját írja le *Arrow* (l. *Arrow—Hahn* [2]). Az árukat nemcsak fizikai jellemzőik és térbeli elhelyezkedésük alapján különbözteti meg egymástól, hanem előállításuk, kézbesítésük időpontja alapján is. Megállapítván, hogy a résztvevők számára jelenlegi döntéseikben úgyis csak véges számú időszak releváns, minden változtatás nélkül beilleszthető az eredeti keretek közé a jövővel is számoló gazdasági magatartás — egyetlen feltétel segítségével. Ez a meglehetősen irreális feltétel a minden időszakra, árura és szükségletre kiterjedő határidős piacok léte. Ezeken a résztvevők jövőbeli szükségleteik kielégítését biztosítják úgy, hogy a vevő által most kifizetett összeg ellenében az eladó vállalja bizonyos jószág meghatározott időpontban való szállítását. A jelenség jól ismert a tőzsdei világban, azonban általánosnak semmiképp nem tekinthető. Csak a legfontosabb, igen jól jellemezhető cikkek néhány hónappal, maximum egy-két évvel későbbi kézbesítésére terjed ki, célja nem annyira jövőbeli szükségletek biztosítása, hanem sokkal inkább spekuláció és a kockázat csökkentésére való törekvés. Mindkét cél létezésének alapvető oka az üzleti és egyben az egész gazdasági élet bizonytalansága. Ez a bizonytalanság a fő oka annak is, hogy a határidős piacok viszonylag rövid időtávra terjednek ki, a tranzakciók száma nem túl nagy, ami különösen ellentmond az árak adottságként való kezelésének. Sem a termelési folyamat, sem pedig az áralakulás természetes bizonytalansága nem szerepel az Arrow—Debreu modellben.

1.2. *A továbblépés irányai*

A mindenre kiterjedő határidős piacok feltételezése tulajdonképpen a jövőt a jelenbe hozza, az összes szerződést most kötik meg, semmi sem ösztönzi a résztvevőket a piacok későbbi megnyitására. Mi történik, ha elvetjük ezt az irreális feltevést, és számolunk a gazdasági életre oly jellemző bizonytalansággal?

A termelők és fogyasztók lehetőségeikhez képest igyekeznek jelenbeli szükségleteiket kielégíteni úgy, hogy közben tudják, holnap a piacon már más körülmények közé kerülnek. Nem látják előre biztosan az áralakulást, nem tudják, hogy a változó gazdasági és természeti környezet milyen hatással lesz a termelésre, mekkora lesz a kereslet és a kínálat az egyes termékekből. A gazdasági személyeknek az adott időpontban megfigyelhető viselkedése ekkor már csak a felszínt jelenti. A felszín alatt létezik a várakozások és tervek láthatatlan szövevénye, melyek a múltban gyökereznek és a döntéshozók jövőbeli tervezési horizontjáig terjednek ki. Az időleges egyensúlyi modellek alapjában véve a várakozások és tervek valódi szerepét próbálják meg ábrázolni a maguk sajátos eszközeivel.

Két fő irányzat alakult ki. Az egyik az időleges kompetitív egyensúly elmélete, amely megtartja a szabad verseny feltételét, a fő probléma továbbra is a keresletet és kínálatot egyensúlyba hozó árrendszer létezése. A másik az ún. rögzített árak melletti egyensúlyi modellek köre (használatosak még az „időleges egyensúly mennyiségi szabályozással", „keynesi időleges egyensúly" vagy „disequilibrium-elmélet" elnevezések is). Az adott árakon eltérhet egymástól az egyes termékek kereslete és kínálata, ilyenkor a résztvevők bizonyos elosztási rendszer szerint mennyiségi korlátozásokat kapnak eladásaikra és vásárlásaikra. Az alapkérdés most az elosztási rendszer és a hozzá való alkalmazkodás elemzésén keresztül különböző egyensúlyhiányos helyzetek vizsgálata, habár egy újfajta, nem kompetitív egyensúlyfogalom definiálása és létezésének bizonyítása segítségével.

1.3. *Az új gondolati keret*

A következőkben néhány szóval megpróbálom felvázolni az időleges kompetitív egyensúlyi modellek szerkezetét.

Az idő a modellekben véges számú (legtöbbször csak két) különálló intervallumra van bontva, ami az idő diszkrét változóként való kezelését jelenti. Az első időszak a jelen, a továbbiak pedig a szereplők elképzeléseiben megjelenő véges időhorizontot képviselik.

A résztvevők tudják, hogy a jövő bizonytalan. Felmérik, melyek azok az események, amelyek befolyásolják létüket (árak, gazdasági, társadalmi és természeti viszonyok) és ezeknek a bekövetkezési esélyeiről várakozásokat alkotnak maguknak. Várakozásaik természetesen függnek jelen- és múltbeli tapasztalataiktól. A függés módjára vonatkozó feltételezéseknek kulcsszerepük van az egyensúly létezésének vizsgálatakor.

Adott a fogyasztás és termelés során felhasznált vagy előállított javak listája. A modellekben ezek csak egy-egy időszakon át léteznek, ezért a tartós fogyasztási vagy beruházási cikkek úgy szerepelnek, hogy beszerzésük után az adott időszakban „amortizálódó" rész jelenik meg a résztvevők készletében.

A termelők ismerik jelenbeli termelési lehetőségeiket és készleteiket. Tudják, hogy a következő időszakokban bekövetkező bizonytalan eseményektől hogyan függ mostani és későbbi termelési folyamatuk naturális eredménye, valamint készleteik alakulása. A termelők készletei az általam ismert időleges egyensúlyi modellekben függetlenek termelési programjaiktól, ekkor azonban a berendezések elhasználódása és a beruházások kimaradnak a modell által leírható jelenségkörből. Ennek a függőségnek a bevezetésével termelési célú felhasználásukban szerepelhet beruházásuk, későbbi készleteik között pedig az ennek eredményeképpen megjelenő felhasználható berendezés.

A termelés eredménye és így a vállalat jövedelme is függ a jövőbeli eseményektől. A vállalatok termelési programja ezért — az Arrow—Debreu modelltől eltérően — most nem egyszerűen a felhasználásnak és kibocsátásnak, hanem annak az összefüggésnek a meghatározása, amely megmondja, hogy a különböző helyzetekben hogyan alakuljon a termelés. Tehát a vállalatnak „ha — akkor" típusú lehetséges termelési programjai vannak, ezek közül kell kiválasztania a várakozásai, költségvetése és célja szempontjából megfelelőt. Célként az egyes időszakokra vonatkozó termelési érték,- nyereségnövekedés valamely függvénye szerepelhet.

Minden vállalatnak vannak részvényei, melyek akár a fogyasztók, akár a termelők tulajdonában lehetnek. A részvénypiac aktív, a résztvevők a jelenlegi árak és a jövőbeli áralakulásról alkotott várakozások alapján adják-veszik a részvényeket. A többidőszakos modellekben tehát megengedett a spekuláció. A részvények árfolyama többnyire nincs explicit módon a kifizetésekhez kötve. A bemutatni kívánt modell a vásárlásoktól függő készletalakulás révén interpretálható úgy, hogy a készletek közé beleértjük a kifizetéseket is. Valójában a részvénypiac egyelőre elég neuralgikus pontja az időleges egyensúlyi modelleknek, a kifizetések és az új részvények kibocsátásának megfelelő kezelése nem megoldott (a problémáról bővebben l. GRANDMONT [7] 554—556 o.). A részvények jelentősége abban van, hogy olyan nem fizikai javakat képviselnek, amelyek tartósak, egyik időszakról a másikra változatlanul kerülnek át. Áralakulásuk viszont bizonytalan. Szükség van olyan jószágra is, amely szintén tartalékolható, de nominális értéke állandó. Ezt a szerepet a modellekben a pénz tölti be, melynek elszámolási egységként az ára mindig egy. Reálértéke természetesen változhat a többi jószág áralakulásának függvényében (az infláció megengedett), azonban értéktelenné sosem válik. A termelők feladata tehát az, hogy az adott időszakban bizonyos javakat vásároljanak, amelyeket aztán készleteik hozzáadásával a termelési folyamat révén a következő időszakban megjelenő más javak kibocsátására használnak fel. Tevékenységüket az előállított termékek, a tulajdonukban levő részvények és pénz értékesítésével finanszírozhatják.

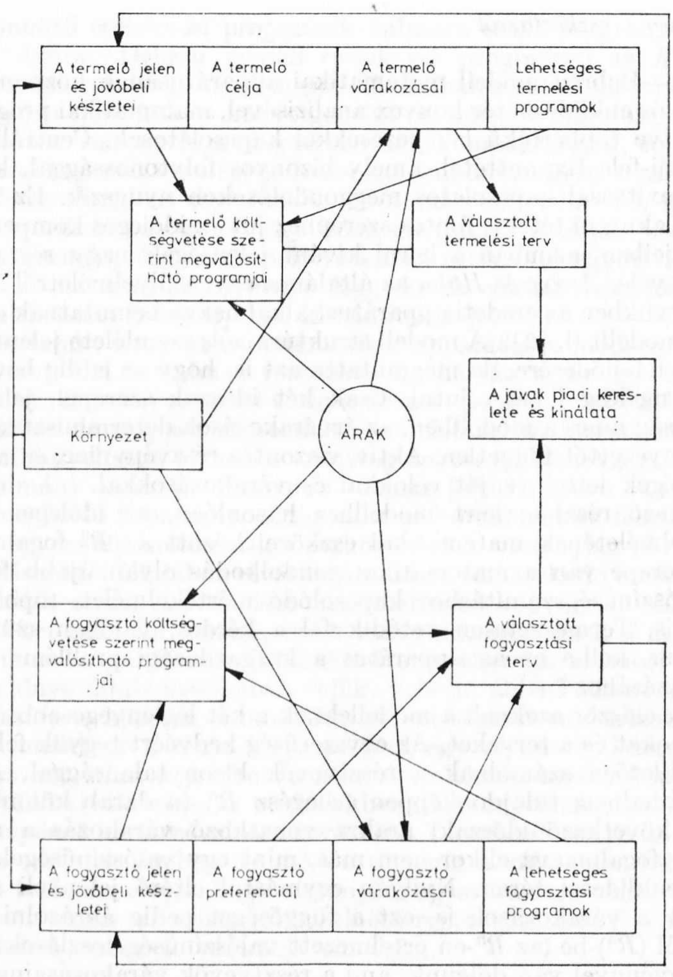
Hasonlóan a termelési egységekhez, a fogyasztók is ismerik fogyasztási lehetőségeiket és készleteiket. Cselekvési programjaik a bizonytalan jövőbeli eseményektől függő olyan vásárlásokat és egyben szolgáltatások teljesítését tartalmazzák, melyek révén biztosított a létfenntartásuk. Nemcsak a reálszféra javait, hanem részvényeket és pénzt is szerezhetnek. Újszerű a következő részben tárgyalt modellben, hogy készletük függ fogyasztásuktól is, így a vásárolt tartós fogyasztási cikkek felhasználása, valamint a teljesíthető szolgáltatások (munka) fogyasztástól való függése ábrázolható. A különböző fogyasztási kosark hasznosságát most is preferenciarendezésük szerint ítélik meg. Azonban egy cselekvési program fogyasztási konzekvenciái bizonytalanok, hiszen függnek a jövőbeli eseményektől (pl. az áraktól). Ezért ekkor már nemcsak ízlésük, hanem várakozásaik is szerepet játszanak abban, melyik tervet tekintik a legjobbnak — vagyis a következményeket súlyozzák azok bekövetkezéseinek (szubjektíven megítélt) esélyeivel.

A résztvevők a költségvetésük szempontjából lehetségesnek ítélt cselekvési programjaik közül — melyek tehát azt tartalmazzák, hogy a jelen- és jövőbeli időszakokban a körülmények alakulásától függően mit vásárolnak, adnak el, fogyasztanak, dolgoznak, illetve termelnek — kiválasztják a céljaiknak leginkább megfelelőt és az abban meghatározott első időszaki kereslettel, illetve kínálattal jelenkeznek a piacon. A jelenben érvényes árrendszer két szempontból is befolyásolja az eladási és vásárlási szándékokat. Egyrészt az Arrow—Debreu modellhez hasonlóan behatárolja a résztvevők költségvetése szempontjából most megvalósítható akciók halmazát. Másrészt, mint megfigyelt valóság, a múltbeli tapasztalatokhoz hozzáadódva hat a szereplőknek a jövőbeli árakkal kapcsolatos várakozásaira. Ezek az árvárakozások mondják meg a termelőknek, hogy mit érdemes termelni (amihez megfelelő első időszaki input szükséges), a fogyasztóknak pedig, hogyan alakul vagyoni helyzetük.

Az alapkérdés: milyen feltételek mellett létezik olyan első időszaki árrendszer, melynek ismeretében a résztvevők kereslete és kínálata mind a fizikai, mind a pénzügyi javak piacán egyensúlyban van. A következő ábrával a modell legfontosabb szerkezeti elemeinek kapcsolatait próbálom szemléltetni a mondottak könnyebb megértése érdekében.

1.4. *Rövid történeti áttekintés*

Az a gondolat, hogy a gazdasági egységeknek a bizonytalan jövőre vonatkozó hiányos ismeretei következtében a jövő a várakozásokon keresztül hat a jelenre, egyáltalán nem új, már *Marshall* figyelembe vette elemzéseiben. Tulajdonképpen alapvető fontosságú része a keynesi makroökonómiának és *Lindahl* gazdasági elméletének is. *Marshall* az ilyen típusú elemzést rövid távú egyensúlyi vizsgálatnak nevezte, a jelenlegi elnevezés (angolul temporary equilib-



1. ábra

rium) *Hicks*től ered, aki két könyvében is foglalkozott a marshalli gondolatok továbbfejlesztésével (l. Hicks [10], [11]).

Az elmélet első matematikai modelljei a hatvanas évek végén jelentek meg. A hetvenes évek elején már nyilvánvalóvá lett, hogy mind feltevéseiben, mind pedig eszköztárában új irányzat van születőben az egyensúlyelméleten belül. A területről 1977-ben közölték az első áttekintést (l. Grandmont [7]), habár még közel sem érték el a kutatók azt a logikai letisztultságot, amely az Arrow—Debreu típusú modellekre jellemző. Szerteágazó vizsgálatok folynak, különösen a disequilibrium elmélettel összeolvadó rögzített áras időleges egyensúlyi modellek körében. Egyelőre a legtöbben azt a stratégiát követik, hogy csak néhány fontos problémát választanak ki és egyszerűbb modellt készítve tanulmányozzák azokat. Ez azt eredményezte, hogy nagyszámú azonos metódussal dolgozó, bár eltérő kérdéseket vizsgáló modell jött létre.

1.5. *A szükséges eszköztárról*

Az Arrow—Debreu modell matematikai apparátusának központi fogalmai az n-dimenziós euklideszi tér konvex analízisével, matematikai programozással és egy-, illetve többértékű leképezésekkel kapcsolatosak. Centrális tétele az ún. Kakutani-féle fixponttétel, amely bizonyos folytonossággal, korlátossággal és konvexitással kapcsolatos meggondolásokon nyugszik. Ez a technika, és maga a Kakutani tétel is fontos szerephez jut az időleges kompetitív egyensúly modelljeiben, azonban a leírni kívánt jelenségek nagy része már nem ábrázolható vele. *Arrow* és *Hahn* az általános egyensúlyelméletről szóló összefoglaló könyvükben az eredeti apparátust alkalmazva bemutatnak egy időleges egyensúlyi modellt (l. [2]). A modell struktúrája és szemlélete jelentős hatással volt a terület fejlődésére, de megmutatta azt is, hogy az eddig bevált eszközrendszerrel meddig lehet eljutni. Csak két időszak szerepel, jelen és jövő, bizonytalanság nincs a modellben, az árvárakozások determinisztikusak, a termelés a környezettől független. Aktív viszont a részvénypiac, és a vállalatok önálló egységek lettek, saját célokkal és várakozásokkal.

A következő részben leírt modellhez hasonlóan, az időleges kompetitív egyensúly elméletének matematikai eszközei között az R^n fogalmai mellett alapvető szerepe van a matematikai gondolkodás olyan újabb fejezeteinek, mint a valószínűségszámításhoz kapcsolódó mértékelmélet, topológia, funkcionálanalízis. Természetesen vetődik fel a kérdés; valóban szükséges-e az alkalmazásuk, kell-e ez az apparátus a közgazdasági probléma lényegének megfogalmazásához?

Tekintsük először ezeknek a modelleknek a két leglényegesebb új fogalmát, a várakozásokat és a terveket. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy csak az árakat illetően számolnak a résztvevők bizonytalansággal. Az *a priori* lehetséges árhalmaz tulajdonképpen az egész R^n (n darab különböző jószág esetén). A következő időszaki árakra vonatkozó várakozás a matematika nyelvén megfogalmazva ekkor nem más, mint egy valószínűségeloszlás az n-dimenziós euklideszi téren. Nyilván egymástól eltérő jelenbeli árak esetén különbözőek a várakozások is, ezt a függőséget pedig ábrázolni kell. Máris egy R^n-ből M (R^n)-be (az R^n-en értelmezett valószínűségeloszlások halmazába) képező függvénnyel van dolgunk, ami a résztvevők várakozásainak tapasztalattól való függését írja le. Ahhoz, hogy be tudjuk látni az egyensúly létezését (illetve tulajdonképpen bármilyen vizsgálathoz), arra van szükségünk, hogy ettől a függvénytől bizonyos tulajdonságokat követeljünk meg. Egyszerre tehát benn találjuk magunkat a modern matematika kellős közepén, hiszen folytonossággal és konvergenciával kapcsolatos fogalmakat kell értelmeznünk valószínűségeloszlások terében, az ilyen (általánosabban mérték-) terek topológiai tulajdonságainak leírását pedig bizonyos dualitási tételeken keresztül a funkcionálanalízis adja meg. Ha azt is figyelembe vesszük, hogy az árakon kívül a résztvevőknek más bizonytalan környezeti tényezőkre vonatkozó várakozásaival is számolnunk kell, akkor már nemcsak az R^n-en, hanem absztrakt téren is kell valószínűségeloszlást, vagyis valószínűségi mértéket értelmeznünk és viselkedésében vizsgálnunk; eljutunk tehát a mértékelmélethez. Hogyan jellemezhető matematikailag a résztvevők egy cselekvési terve? A fogyasztó esetén például arról van szó, hogy terve a lehetséges jövőbeli események bekövetkezéséhez különböző reagálásokat rendel — az áraktól, készleteitől és a környezettől függően más és más fogyasztást, illetve munkaszolgáltatást ír elő. A különböző cselekvési programok halmaza tehát függvények halmazát jelenti. Az Arrow–Debreu modell cselekvési programjai az R^n pontjaival voltak azonosíthatók és így az R^n megfelelő részhalmazain kellett korlátosságot, zártságot és pontjaik között konvergenciát értelmezni. Az időleges egyensúly modelljei esetén viszont függvénytérben kell kompaktsággal, sorozatok konvergenciájával kapcsolatos meggondolásokat tennünk, amivel a valós függvénytan és funkcionálanalízis foglalkozik. Mint már volt róla szó, a résztvevők cselekvési terveik hasznosságát úgy ítélik meg, hogy a céljaik szempontjából fontos következményeket azok bekövetkezési esélyeivel együtt veszik figyelembe. Ez a matematika nyelvén függvények várható értékének, vagyis mértékekkel képzett integráljának kiszámítását jelenti.

Láthatjuk tehát, hogy ez a matematikai apparátus a modern matematika jelentős fejezeteiből tartalmaz részeket. Ez hátránya és egyben előnye is a modelleknek. Hátránya, mivel amíg a Arrow–Debreu modell bizonyításainak technikáját és alapjait megérthette az elsősorban közgazdasági és nem matematikai műveltségű olvasó is aránylag kevés, jól összefogható matematikai előtanulmány után (l. HEGEDÜS–ZALAI [9], NIKAIDO [15], ARROW–HAHN [2] megfelelő fejezeteit), addig most ez korántsem áll fenn. Az időleges kompetitív egyensúly matematikai eszköztárának viszonylag rövid, az elméleti közgazdászoktól általában elvárható tudásra támaszkodó összefoglalásával még nem találkoztam. A területtel megismerkedni vágyóknak előtanulmányként könyveket kell elolvasniuk, ezért valószínű, hogy ezek a modellek csak a matematikus közgazdászok érdeklődésére tarthatnak számot. A kiterjedt apparátus előnye általánosságában rejlik, vele korábban elhanyagolt jelenségek vizsgálatára is képesek a modellek. A valósághoz való közeledésnek látszatra ellentmond az a tény, hogy például egy olyan rendszeresen művelt döntési folyamat, mint a jövőre vonatkozó cselekvési tervek közül a legkedvezőbbnek tűnő kiválasztása, a modellekben függvénytéren képzett integrálok maximumhelyének keresésével van ábrázolva. Természetesen senki sem tételezi fel, hogy az emberek fejében ily módon történik a választás. Jól mutatja az alkalmazott technika erejét, hogy viszonylag egyszerű axiómákból levezethető a döntés ilyen, matematikailag jól kezelhető reprezentációja (l. ARROW [1] – a bizonytalanság melletti választás elmélete).

2. Egy jellemző modell

A bemutatásra kerülő modell CHETTY és DASGUPTA [4] cikke alapján készült. Bizonyos megoldatlan, illetve nem jól megoldott problémák, valamint bizonyításbeli hiányosságok miatt, bár a modell hasonlít a [4]-beli modellre, nem egyezik meg azzal. Jelentős eltérések találhatók mind a feltevések, mind pedig a bizonyítások területén. Másként definiálom a résztvevők cselekvési halmazait és készleteit; a fogyasztók lokális kielégíthetetlenségét fogyasztási halmazuk kompaktságának feloldásával a cikkben található bonyolult megoldástól eltérő módon biztosítom; a várakozások mértékterét az irodalomban általánosan elfogadott gyenge konvergencia helyett az erős konvergenciával topologizálom. Az eltérő feltevések következtében a modell nem sokat veszít az általánosságából, viszont lényegesen egyszerűbben kezelhetővé válik.

Ez a modell a szakdolgozatomban találhatónak javított változata. Mind a dolgozat, mind pedig a cikk megírásához nagy segítséget kaptam *Medvegyev*

*Péter*től, az ő támogatása és ötletei nélkül a modell nem jöhetett volna létre. Ezúton szeretnék köszönetet mondani tanácsaiért. Az esetleges hibákért a felelősség természetesen egyedül engem terhel.

Legyen I a résztvevők által figyelembe vett időszakok száma. Jelölje egyben I a $\{2,3,\ldots,I\}$ halmazt is. J és A két véges halmaz, a termelők és a fogyasztók indexeinek halmaza. L jelöli az $\{1,2,\ldots,L\}$ halmazt, a reálszféra javainak indexeit. $i\in I$ esetén $P_i\subset R^L$ a javak, $R_i\subset R^J_+$ a részvények árhalmaza. Az $(L+J+1)$-edik jószág a pénz, amely az elszámolási egységet képviseli. Az $S_i=P_i\times R_i\times\{1\}$ halmaz adja meg az $i\in I$ időszaki árrendszereket. Az első időszakban $S_1=P_1\times R_1\times\{1\}$, ahol $P_1=R^L$, $R_1=R^J_+\cdot Q'_i$, $i\in I$ teljes szeparábilis metrikus tér, a világ lehetséges állapotait jelöli az adott időszakban az árak kivételével. Legyen $Q_i=S_i\times Q'_i$, $\Omega=\prod_{i\in I}Q_i$. Az Ω halmazon a szorzattopológia által indukált Borel-féle halmazalgebra $(B(\Omega))$ elemeit tekintjük a világ jövőbeli állapotait tartalmazó eseményeknek (Borel halmazokról l. Szőkefalvi–Nagy [17], Halmos [8]).

2.1. *Termelők*

Tetszőleges termelőt mutatok be, a $j\in J$ indexet elhagyom. Az $Y_i\colon(\Omega\times T_{i-1})\to\to R^L_+$ leképezéssel adjuk meg termelési lehetőségeit, ahol a T_i, $i=1,2,\ldots,(I-1)$ halmazok (a lehetséges felhasználások) részei az R^L_+-nek, zártak és konvexek. Ha az $(i-1)$-edik időszakban a felhasználás $x\in R^L_+$, a termelést befolyásoló véletlen tényezők realizációja $\omega\in\Omega$, akkor az i-edik időszakban a kibocsátás $Y_i(\omega,x)=y\in R^L_+$ lesz. Egyidőszakos késleltetés van tehát, a technológia bizonytalan, de csak a Q'_i halmazok elemeitől függ, az áraktól természetesen nem. Feltesszük, hogy minden $i\in I$ esetén:

T.1 korlátos $F\subset T_{i-1}\subset R^L_+$ halmazhoz az $\{y\in Y_i(\Omega,x):x\in F\}$ halmaz szintén korlátos;

T.2 rögzített $\omega\in\Omega$ mellett az $Y_i(\omega,\cdot)\colon T_{i-1}\to R^L_+$ függvény gráfja (az $\{(x,y)\in T_{i-1}\times R^L_+\colon y=Y_i(\omega,x)\}$ halmaz) zárt és konvex;

T.3 rögzített $x\in R^L_+$ mellett az $Y_i(\cdot,x)\colon\Omega\to R^L_+$ függvény Borel mérhető.

Az egyes időszakokban a termelő lehetséges akcióit a G_i halmazok adják meg. Egy $f_i\in G_i$ akció áll a felhasználást jelentő $t_i\colon\Omega\to T_i$, a kibocsátást tartalmazó $k_i\colon\Omega\to R^L_+$, a részvényekre és a pénzre vonatkozó $n_i\colon\Omega\to M$ Borel mérhető függvényekből, ahol $M=[0,1]^J\times[0,\infty]$. $[0,1]^J$ a megvásárolható, illetve eladható részvények, $[0,\infty]$ pedig a tartalékolható pénzmennyiség halmaza (az R_+ tér *Alekszandrov* kompaktifikációja). Természetesen minden $i\in I$, $k_i\in G_i$ esetén fenn kell állnia a $k_i(\omega)=Y_i(\omega,t_{i-1}(\omega))$ relációnak valamely $t_{i-1}\in G_{i-1}$-re és minden $\omega\in\Omega$-ra. G_i-ről feltesszük, hogy az egyenletes konvergencia topológiájával ellátva konvex kompakt metrikus tér. Ez a feltevés teljesül például akkor, ha G_i véges számú Borel mérhető függvény konvex lineáris kombinációját tartalmazó halmaz, ami közgazdaságilag jelentheti azt, hogy a termelőnek léteznek bizonyos alapvető cselekvési sémái (számuk lehet akár millió is), azokat kombinálva képzeli el lehetséges stratégiáit.

$$G=\{f=((t_1,n_1),f_2,\ldots,f_I)\colon(t_1,n_1)\in T_1\times M,f_i\in G_i\}$$

lesz a vállalat lehetséges cselekvési terveinek halmaza. Készleteit egy $e\colon \Omega\times G\to$ $\to \prod_{i=1}^{I} (T_i\times M)$ függvény adja meg, mely az Ω-n belül szintén csak a Q_i' halmazok elemeitől függ, és $e=((t_1, n_1), e_2(\cdot), \ldots, e_I(\cdot)), e_1=(t_1, n_1)\in T_1\times M$

T.4 $\sup_{\omega\in\Omega, f\in G} e_{i,L+J+1}(\omega, f)=m_i<\infty,\ 0<m_1=e_{1,L+J+1}<\infty,$

T.5 a) rögzített $\omega\in\Omega$-ra az $e(\omega,\cdot)$ függvény gráfja zárt és konvex;

b) létezik olyan $\hat{e}\in G$, hogy $\hat{e}_1=e_1$. $\hat{e}_i=(\hat{t}_i, \hat{k}_i, \hat{n}_i)$-re $\hat{k}_i(\omega)=Y_i(\omega, \hat{t}_{i-1}(\omega))$, $p_i\hat{k}_i(\omega)\geqq 0$ minden $i\in I$, $\omega\in\Omega$ esetén és $e(\cdot, \hat{e})=\hat{e}(\cdot)$ teljesül az $\hat{e}$ megfelelően szűkített képterén.

T.4 szerint a termelők pénzkészletei korlátosak, T.5 b) azért szükséges, hogy legyen költségvetésüket is figyelembe véve autark módon megvalósítható tevékenységük. A feltétel — természetesen más formában — szerepel az Arrow—Debreu modellben is (l. HEGEDÜS—ZALAI [9] „önellátás lehetősége"). Ehhez kapcsolódik a következő, az összes termelőre vonatkozó feltétel:

T.6 $$\sum_{j\in J} e_{j1}\in \operatorname{int}\sum_{j\in J}(T_{j1}\times M)$$

amely szerint első időszaki összkészletük belső pontja jószágterük összegének.

Adott e és $s_1\in S_1$ esetén

$$\begin{aligned}\beta(e, s_1)=\{f\in G: {}& s_1((t_1, n_1)-e_1)\leqq 0\\ & s_i(t_i(\omega), n_i(\omega))-s_i(k_i(\omega), n_{i-1}(\omega))-s_i e_i(\omega, f)\leqq 0\\ & k_i(\omega)\in Y_i(\omega, t_{i-1}(\omega)) \text{ minden } i\in I,\ \omega\in\Omega\text{-ra}\}\end{aligned}$$

a vállalat költségvetési leképezése, vagyis a pénzügyileg megvalósítható tervek halmaza. Látható, hogy a vállalatok termelési tevékenységüket a tulajdonukban levő részvények eladásával, pénzzel, termékeik értékesítésével finanszírozhatják.

Nem adtuk még meg a reprezentatív termelési egység döntési szabályát. Feltesszük, hogy a vállalat célja az egyes időszakok nyereségének maximalizálásához kapcsolódik. Legyen

$$C_i(f, \omega)=p_i k_i(\omega)-p_{i-1}t_{i-1}(\omega)+r_i n_{i-1}(\omega)$$

és $u\colon R^{I-1}\to R$ korlátos, folytonos, változónként szigorúan monoton növekedő függvény.

T.7 A vállalat lehetséges stratégiái közül való választása reprezentálható a $v\colon G\times M(\Omega)\to R$ funkcionállal ($M(\Omega)$ az Ω halmazon értelmezett valószínűségi mértékek terét jelenti az erős konvergencia topológiájával, vagyis $\mu_k\to\mu_0$, ha $\mu_k(B)\to\mu_0(B)$ minden $B\in B(\Omega)$ esetén):

$$v(f, \lambda)=\int_{\Omega} u(C_2(f_1, \cdot), \ldots, C_I(f, \cdot))\,d\lambda$$

ahol $\lambda = \psi(s_1, \cdot) \times \sigma, \psi: S_1 \times B(\prod_{i \in I} S_i) \to [0, 1]$,

$$\psi(s_1, \cdot) \in M(\prod_{i \in I} S_i) \text{ minden } s_1 \in S_1\text{-re, } \sigma \in M(\prod_{i \in I} Q_i')$$

(mértékek szorzatáról l. SZŐKEFALVI—NAGY [17]).

Mit jelent a feltétel? A σ mérték rögzített, a termelőnek múltbeli tapasztalatai alapján kialakult elképzeléseit tartalmazza a környezeti tényezőkről. Ezzel szemben az árvárakozásokat képviselő $\psi(s_1, \cdot)$ mérték függ a jelenbeli árrendszertől is. A funkcionál tulajdonképpen az f cselekvési terv szubjektíve várható hasznát adja meg. Ha a termelőnek a választási helyzetekben mutatott viselkedése kielégít bizonyos axiómarendszert, akkor az alapján megkonstruálható mind a λ valószínűségi mérték, mind az u hasznossági függvény és a várható haszon hipotézis teljesül (l. ARROW [1]). Ez az axiómarendszer feltételünk mélyebb megalapozását jelentené, itt ettől eltekintünk.

T.8 A V funkcionál szigorúan kvázi-konkáv az első változójában (a vállalat rendezése konvex).

T.9 Ha $s_1^k \to s_1^0$, akkor minden zárt $C \subset \prod_{i \in I} S_i$ esetén $\psi(s_1^k, C) \to \psi(s_1^0, C)$ (a várakozások folytonos függése a jelenlegi áraktól).

T.10 Létezik olyan $\mu \in M(\prod_{i \in I} S_i)$ valószínűségi mérték, hogy $\lim_{\mu(E) \to 0} \psi(s_1, E) = 0$ minden $s_1 \in S_1$ esetén.

A T.10 feltétel matematikailag azt jelenti, hogy a termelő várakozásai egyenletesen abszolút folytonos mértékcsaládot alkotnak. Ekvivalens azzal az állítással, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy $\psi(s_1, E) < \varepsilon$ minden $s_1 \in S_1$ esetén, ha $\mu(E) < \delta$. Közgazdaságilag úgy interpretálható, hogy a termelőben múltbeli tapasztalatai alapján kialakult egy előzetes elképzelés az árakról. A jelenben megfigyelt árrendszer ezt csak korlátozottan módosíthatja; amelyik eseményt nem túl valószínűnek ítélte, azt továbbra is annak ítéli, ugyanakkor jelentős hangsúlyeltolódások lehetségesek. Feltevésünk némileg lazítható, elegendő a mértékcsalád egyenletes szorossága is (l. BILLINGSLEY [3] — Prohorov tétel), azonban a bizonyítások bonyolultabbá válnak a gyenge konvergencia használata miatt.

Legyen
$$Z(f, s_1) = V(f, \psi(s_1, \cdot) \times \sigma),$$
$$\delta(s_1) = \{f^* \in \beta(e, s_1) : Z(f^*, s_1) \geq Z(f, s_1) \text{ minden } f \in \beta(e, s_1)\}$$
így
$$\eta(s_1) = \{(t_1^*, n_1^*) : ((t_1^*, n_1^*), f_2^*, \ldots, f_I^*) \in \delta(s_1)\}$$
lesz a termelő keresleti függvénye.

2.2. *Fogyasztók*

Foglalkozzunk most a reprezentatív fogyasztó leírásával. Legyen $X = \prod_{i=0}^{I} (X_i \times M)$, ahol $X_i \subset R^L$ a fogyasztható, illetve szolgáltatható jószágmennyiségek halmaza, konvex zárt és alulról korlátos, M pedig ugyanaz, mint a termelőknél. Minden $i \in I$ esetén legyen G_i az Ω-t $(X_i \times M)$-be képező Borel mérhető függvények konvex, kompakt részhalmaza az egyenletes konvergencia topológiájával ellátva. Így a fogyasztó akcióit a

$$G = \{f = ((x_1, l_1), f_2, \ldots, f_I) \cdot (x_1, l_1) \in X_1 \times M, f_i \in G_i\}$$

halmaz tartalmazza, a szorzattopológiával ellátva. Legyen proj f az $f \in G$ függvénynek a $\prod_{i=1} X_i$ halmazra való vetítése és l_i az $f_i \in G_i$ függvénynek az M-re való vetítése.

A fogyasztó készleteit egy $e\colon \Omega \times G \to \prod_{i=1}^{I} (X_i \times M)$ függvénnyel adjuk meg, ahol $e = ((x_1, l_1), e_2(\cdot), \ldots, e_I(\cdot))$, vagyis első időszaki készlete a jószágtér rögzített pontja, további készletei bizonytalanok és függnek tevékenységétől, valamint az árak kivételével a világ állapotától.

F.1 $\sup\limits_{\omega \in \Omega, f \in G} e_{i,L+J+1}(\omega, f) < \infty$, $0 < e_{1,L+J+1} < \infty$

F.2 a) rögzített $\omega \in \Omega$-ra az $e(\omega, \cdot)$ függvény gráfja zárt és konvex;
b) létezik olyan $\hat{e} \in G$, hogy $e(\omega, \hat{e}) = \hat{e}(\omega)$ minden $\omega \in \Omega$-ra.

Az eddigiek alapján meghatározható a fogyasztó által megvalósítható akciókat definiáló költségvetési leképezés:

$$\beta(e, s_1) = \{f \in G\colon s_1((x_1, l_1) - e_1) \leq 0,$$
$$s_i f_i(\omega) - r_i l_{i-1}(\omega) - s_i e_i(\omega, f) \leq 0 \text{ minden } i \in I,\ \omega \in \Omega\}.$$

F.3 Feltesszük, hogy lehetséges stratégiái közül való választása reprezentálható a $V\colon G \times M(\Omega) \to R$ funkcionállal:

$$V(f, \psi(s_1, \cdot) \times \sigma) = \int_{\Omega} u(\text{proj}\, f(\cdot))\, d\psi(s_1, \cdot) \times \sigma$$

ahol $u\colon \prod_{i=1}^{I} X_i \to R$ korlátos, folytonos függvény, ψ és σ hasonlóak a termelők várakozási függvényeihez (a fogyasztó is kielégíti a várható haszon hipotézist).

F.4 A V funkcionál szigorúan kvázi-konkáv az első változójában.

F.5 Ha $s_1^k \to s_1^0$, akkor minden zárt $C \subset \prod_{i \in I} S_i$ esetén

$$\psi(s_1^k, C) \to \psi(s_1^0, C).$$

F.6 (kielégíthetetlenség). Tetszőleges $f = ((x_1, l_1), f_2, \ldots, f_I) \in G$ esetén létezik olyan $\hat{x}_1 \in X_1$, hogy az $\hat{f} = ((\hat{x}_1, l_1), f_2, \ldots, f_I)$ akcióra

$$u(\text{proj}\, f(\omega)) < u(\text{proj}\, \hat{f}(\omega))$$

minden $\omega \in \Omega$ esetén teljesül.

A fogyasztó választási problémája abból áll, hogy meg kell találnia azon $f^* \in \beta(e, s_1)$ akciókat, melyekre

$$Z(f^*, s_1) \geq Z(f, s_1)$$

minden $f \in \beta(e, s_1)$-re, ahol $Z(f, s_1) = V(f, \psi(s_1, \cdot) \times \sigma)$. Jelöljük az optimális akciók halmazát $\gamma(s_1)$-el, legyen

$$\xi(s_1) = \{(x_1^*, l_1^*) \colon ((x_1^*, l_1^*), f_2^*, \ldots, f_I^*) \in \gamma(s_1)\}$$

a keresleti függvény.

A modellbeli absztrakt gazdaságot jellemezhetjük a következő E halmazzal:

$$E = \{(G_a, X_a, u_a, \psi_a, e_a), (G_j, Y_{j2}, \ldots, Y_{jI}, u_j, \psi_j, e_j), a \in A, j \in J\}.$$

Egy $s_1 \in S_1$ árvektor egyensúlyi árrendszer és

$$\{f_{a1}, (t_{j1}, n_{j1}), a \in A, j \in J\}$$

egyensúlyi allokáció, ha

a) $f_{a1} \in \xi_a(s_1)$ minden $a \in A$-ra;

b) $(t_{j1}, n_{j1}) \in \eta_j(s_1)$ minden $j \in J$-re;

c) $\sum_{a \in A} f_{a1} + \sum_{j \in J} (t_{j1}, n_{j1}) \leq \sum_{a \in A} e_{a1} + \sum_{j \in J} e_{j1}$;

d) $s_1\left(\sum_{a \in A} f_{a1} + \sum_{j \in J} (t_{j1}, n_{j1})\right) = s_1\left(\sum_{a \in A} e_{a1} + \sum_{j \in J} e_{j1}\right)$.

2.3 *Az egyensúly létezése*

A következő tételeknél, ahol lehetséges, bizonyítások helyett csak a megfelelő hivatkozásokat közlöm. Ennek a felesleges ismétlések elkerülésén kívül elsősorban terjedelmi okai vannak.

Először az egyensúlyelméletben a gazdaság szűkítésének nevezett eljárás segítségével kompakttá fogjuk tenni a termelők és fogyasztók lehetséges akcióinak halmazát. A definíciók alapján ehhez csak az szükséges, hogy az X_1, illetve T_1 alulról korlátos, zárt halmazokat felülről is korlátosokkal helyettesítsük.

Definíció

Tetszőleges fogyasztó (illetve termelő) esetén releváns első időszaki fogyasztási (ráfordítási) halmaznak nevezzük azt az $X_{a1}^r(T_{j1}^r)$ halmazt, amelynek minden eleme naturális egyensúlyban levő első időszaki allokáció része lehet (vagyis a többi résztvevőknek van olyan lehetséges tevékenysége, melyekkel együtt a releváns allokáció kielégíti az egyensúly c) feltételét).

1. *Segédtétel.* A releváns fogyasztási és ráfordítási halmazok konvexek és felülről korlátosak.

Bizonyítás

A konvexitás az eredeti halmazok konvexitása alapján triviális. A felülről korlátosság egyszerű következménye a készletek rögzítettségének és a fogyasztási halmazok alulról korlátosságának.

Definíció

Nevezzük szűkített gazdaságnak azt a $\hat{E}$ halmazt, ahol

$$\hat{E} = \{(\hat{G}_a, X_a, u_a, \psi_a, e_a), (\hat{G}_j, Y_{j2}, \ldots, Y_{jI}, u_j, \psi_j, e_j), a \in A, j \in J\}$$

és a „személyi" indexeket elhagyva a fogyasztóknál

$$\hat{G} = (\hat{X}_1 \times M) \times G_2 \times \ldots \times G_I,$$

illetve a termelőknél

$$\hat{G} = (\hat{T}_1 \times M) \times G_2 \times \ldots \times G_I,$$

ahol $\hat{X}_1 = X_1 \cap H, \hat{T}_1 = T_1 \cap H, H \subset R^L$ konvex, kompakt és $X_1^r \subset \operatorname{int} H$, $T_1^r \subset \operatorname{int} H$.

1. *tétel.* A szűkített és eredeti gazdaság egyensúlypontjai egybeesnek.

A *bizonyítás* megegyezik a HEGEDÜS–ZALAI [9] 122. oldal 12. tételének bizonyításával.

A továbbiakban az $\hat{E}$ szűkített gazdasággal foglalkozom, de az eredeti jelöléseket alkalmazom.

2. *tétel.* A költségvetési leképezések kompakt, konvex értékűek és s_1-ben folytonosak.

Bizonyítás

(Ponthalmaz leképezések felülről és alulról félig folytonosságára vonatkozóan l. NIKAIDO [15], HEGEDÜS–ZALAI [9].) Először a fogyasztóval foglalkozunk. A $\beta(e, s_1)$ halmazok zártak, így a β leképezés kompakt értékű. Felülről félig folytonossága ekkor egyszerű következménye annak, hogy a gráfja zárt. Az alulról félig folytonossághoz azt kell belátni, hogy tetszőleges $s_1^0 \in S_1$ pont és $s_1^k \to s_1^0$ sorozat esetén minden $f^0 \in \beta(e, s_1^0)$ akcióhoz létezik olyan $f^k \to f^0$ sorozat, melyre $f^k \in \beta(e, s_1^k)$ minden k esetén. Ha $s_1^0(f_1^0 - e_1) < 0$, akkor elég nagy k-tól $f^k = f^0$ megfelelő választás lesz. A másik esetben, ha $s_1^0(f_1^0 - e_1) = 0$, némileg komplikáltabb a keresett sorozat konstrukciója. Tekintsük azt a $h = (h_1, \hat{e}_2, \ldots, \hat{e}_I) \in G$ akciót, melyre $h_1 = (e_{11}, \ldots, e_{1L}, 0, \ldots, 0, m_1/2)$. $0 < \lambda < 1$ esetén legyen $f_\lambda^0 = \lambda f^0 + (1-\lambda)h$. Ekkor F.1 és F.2 következtében $s_1(f_{1,\lambda}^0 - e_1) < 0$ minden $s_1 \in S_1$-re,

$$s_i f_{i,\lambda}^0(\omega) - r_i l_{i-1,\lambda}^0(\omega) - s_i e_i(\omega, f_\lambda^0) \leq 0 \text{ minden } i \in I, \omega \in \Omega\text{-ra.}$$

Legyen $\lambda^k = \min\left\{1, \dfrac{s_1^k e_1 - s_1^k h_1}{s_1^k f_1^0 - s_1^k h_1}\right\}$. Nyilván van olyan K szám, hogy minden $k > K$ esetén $s_1^k f_1^0 > s_1^k h_1$, ekkor $f_{\lambda^k}^0 \in \beta(e, s_1^k)$ és $\lambda^k \to 1$. A $k = 1, 2, \ldots, K$ indexekhez egy-egy $f^k \in \beta(e, s_1^k)$ akciót választunk.

A termelő költségvetési leképezésének hasonló tulajdonságai a T.2, T.4, T.5 feltételek felhasználásával ugyanezen a módon bizonyíthatóak.

2. *segédtétel.* Ha $f^k, f^0 \in G$, f^k pontonként konvergál f^0-hoz, $s_1^k \to s_1^0 \in S_1$, akkor $\psi(s_1^k, \cdot) \to \psi(s_1^0, \cdot)$ (erős konvergencia) és $V(f^k, \psi(s_1^k, \cdot) \times \sigma) \to$ $\to V(f^0, \psi(s_1^0, \cdot) \times \sigma)$ (l. DELBAEN [5]).

3. *tétel.* A Z függvények folytonosak.

A tétel az előző segédtétel egyszerű következménye.

4. *tétel.* A $\xi: S_1 \twoheadrightarrow X_1 \times M$ és $\eta: S_1 \twoheadrightarrow T_1 \times M$ keresleti függvények nem üres, konvex és kompakt értékű, felülről félig folytonos leképezések.

A tétel állítása a második és harmadik tétel alapján az egyensúlyelméletben alkalmazott szokásos érveléssel könnyen belátható (l. ARROW–HAHN [2], HEGEDŰS–ZALAI [9], NIKAIDO [15]).

3. *segédtétel* (lokális kielégíthetetlenség). Tetszőleges $\varepsilon > 0$, releváns $f \in \beta(e, s_1)$, $s_1 \in S_1$ esetén létezik olyan $f' \in G$, hogy

$$s_1(f'_1 - e_1) \leq \varepsilon + s_1(f_1 - e_1)$$

$$s_i f'_i(\omega) - r_i l'_{i-1}(\omega) - s_i e_i(\omega, f') \leq 0$$

és

$$V(f, \psi(s_1, \cdot) \times \sigma) < V(f', \psi(s_1, \cdot) \times \sigma)$$

Bizonyítás

Legyen $\hat{f}$ az F.6 feltételben szereplő akció és $f^\lambda = \lambda\hat{f} + (1-\lambda)f$, $0 < \lambda < 1$. Elég kis λ-ra nyilván fenn fog állni a tétel első része és az $f^\lambda \in G$ reláció, így $f' - t$ f^λ-nak választva a V szigorú kvázi-konkavitásából következik az állítás.

5. *tétel.* Tetszőleges $s_1 \in S_1$ esetén, ha $z \in \xi(s_1) - e_1$, releváns és $z' \in \eta(s_i) - e_1$, akkor $s_i z = s_i z' = 0$.

A fogyasztók esetében az előző segédtételt, a vállalatoknál pedig első időszaki pénztartalékolással a hasznossági függvény monotonitását felhasználva az állítás egyszerűen belátható.

6. *tétel.* Ha egy E gazdaság kielégíti a 2–5. tételeket, ezenkívül megvan az a tulajdonsága, hogy legalább egy résztvevő esetén minden korlátos $z^k \in \eta_j(s_1^k)$ sorozathoz az $\{s_1^k\}_{k=1}^\infty \subset S_1$ ársorozat korlátos, akkor létezik egyensúlyi állapota (l. SONDERMANN [16]).

Sondermann bizonyítása a Kakutani tételéből következő Alaptételen l. HEGEDŰS–ZALAI [9]), valamint szokásos konvexitással, korlátossággal és felülről félig folytonossággal kapcsolatos meggondolásokon nyugszik. Modellünkben az egyensúly léte bizonyított, ha be tudjuk látni a tételben használt tulajdonság fennállását. Ezt tartalmazza a negyedik segédtétel, melynek bizonyítása dolgozatom fő eredménye.

4. *segédtétel.* Ha $\{s_1^k\}_{k=1}^\infty \subset S_1$, $\lim\limits_k \|s_1^k\| = \infty$, akkor létezik olyan $j \in J$, hogy a $(t_1^k, m_1^k) \in \eta_j(s_1^k)$ sorozat utolsó komponense (vagyis a pénzkereslet) végtelenhez tart, $\lim\limits_k m_1^k = \infty$.

Bizonyítás

Legyen $\pi^k = s_1^k/\|s_1^k\|$, a π^k végtelen sorozatból korlátossága miatt kiválasztható egy π^0-hoz tartó konvergens részsorozat. $\pi^0 \neq 0$, mivel $\|\pi^0\| = 1$. A T.6 feltétel miatt

$$\sum_{j \in J} \pi^0 e_{j1} > \inf \sum_{j \in J} \pi^0(T_{j1} \times M) = \sum_{j \in J} \inf \pi^0(T_{j1} \times M)$$

Így legalább egy $j \in J$ termelőre $\pi^0 e_{j1} > \inf \pi^0(T_{j1} \times M)$ tehát létezik olyan $(t_1', n_1') \in T_{j1} \times M)$, hogy $\pi^0 e_{j1} > \pi^0(t_1', n_1')$. A továbbiakban csak ezzel a termelővel foglalkozunk, ezért elhagyhatjuk a „j" indexet.

Tegyük fel, hogy az állítás nem teljesül. Ekkor kiválasztunk egy konvergens részsorozatot, amelyben az indirekt feltevés alapján $(t_1^k, n_1^k) \to (t_1^0, n_1^0)$, ahol $m_1^0 < \infty$.

Jelöljük az ehhez a sorozathoz tartozó teljes cselekvési terveket f^k-val és f^0-al. Tekintsük a következő leképezést:

$$\varphi(e, \pi): G \times \overline{\Pi}_1 \twoheadrightarrow G$$

(a felülvonás a halmaz lezárását jelenti), ahol

$$\Pi_1 = \{s_1/\|s_1\| : s_1 \in S_1\}$$

és

$$\varphi(e, \pi) = \beta(e, s_1), \text{ha } \pi = s_1/\|s_1\|;$$

egyébként

$$\varphi(e, \pi^*) = \{f \in G\colon \pi^*((t_1, n_1) - e_1) \leq 0,\ k_i(\omega) \in Y_i(\omega, t_{i-1}(\omega)),$$
$$\text{minden } i \in I,\ \omega \in \Omega,\ s_i(t_i(\omega), n_i(\omega)) - s_i(k_i(\omega), n_{i-1}(\omega)) - s_i e_i(\omega, f) \leq 0\}$$

A φ leképezés felülről félig folytonosságának bizonyítása megegyezik a második tétel bizonyításával. Hasonlóan látható be a π^0 pontban az alulról félig folytonosság is, csak a korábbi h akció helyett most a $h' = (h_1', \hat{e}_2, \ldots \hat{e}_I)$ akciót kell alkalmaznunk, ahol $h_1' = (t_1', n_1')$. Erre azért van szükség, mert π^0 utolsó komponense 0, így nem biztos, hogy az eredeti h akciót használva a $\pi^0(h_1 - e_1) < 0$ összefüggés teljesül.

Így $f^0 \in \varphi(e, \pi^0)$. Vegyünk egy tetszőleges $\bar{f} \in \varphi(e, \pi^0)$ akciót. Az alulról félig folytonosság, alapján létezik egy $\bar{f}^k \in \varphi(e, \pi^k)$, $\bar{f}^k \to \bar{f}$ sorozat. Mivel $f^k \in \delta(s_1^k)$, ezért

$$\int_\Omega u(C(f^k, \cdot))\, d\psi(s_1^k, \cdot) \times \sigma \geq \int_\Omega u(C(\bar{f}^k, \cdot))\, d\psi(s_1^k, \cdot) \times \sigma.$$

A $\psi(s_1^k, \cdot) \times \sigma$ mértéksorozatból a T.10 feltétel alapján kiválasztható konvergens részsorozat (l. DUNFORD–SCHWARTZ [6] IV. 9.2 tétel), a harmadik tételt felhasználva így

$$\int_\Omega u(C(f^0, \cdot))\, d\psi^\circ \times \sigma \geq \int_\Omega u(C(\bar{f}, \cdot))\, d\psi^0 \times \sigma \text{ minden } \bar{f} \in \varphi(e, \pi^0)\text{-ra.}$$

Jelöljük $n_{1,\varepsilon}^0$-al az $n_1^0 + (0, 0, \ldots, 0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ összeget, vagyis az f^0 alapján tartalékolni kívánt pénzmennyiség pozitív értékkel való emelését. Tudjuk, hogy $m_1^0 < \infty$, π^0 utolsó komponense pedig 0, ezért az $\bar{f} = ((t_1^0, n_{1,\varepsilon}^0), f_2^0, \ldots, f_I^0)$ választás esetén $\bar{f} \in \varphi(e, \pi^0)$ teljesül. A C_2 nyereségfüggvény konstrukciójából és a pénz elszámolási árának rögzítettségéből következően $C_2(\bar{f}, \omega) > C_2(f^0, \omega)$ minden $\omega \in \Omega$ esetén. Mivel u szigorúan monoton, ezért $u(C(\bar{f}, \omega)) > u(C(f^0, \omega))$ minden $\omega \in \Omega$-ra. A $(\psi^0 \times \sigma)$ valószínűségi mérték, így

$$\int_\Omega u(C(\bar{f}, \omega))\, d\psi^\circ \times \sigma > \int_\Omega u(C(f^0, \omega))\, d\psi^0 \times \sigma$$

ami ellentmondás.

(Beérkezett: 1980. június 16-án)

IRODALOM

1. ARROW, K. J.: Essays in the theory of risk — bearing. Amsterdam, 1974. North Holland, Publishing Co.
2. ARROW, K. J.—HAHN, F. H.: General competitive analysis. Edinburgh, Holden—Day, 1971.
3. BILLINGSLEY, P.: Convergence of probability measures. New York, 1968. Wiley.
4. CHETTY, V. K.—DASGUPTA, D.: Temporary competitive equilibrium in a monetary economy with uncertain technology and many planning periods. Journal of Mathematical Economics, 1978. 23—42. o.
5. DELBAEN, F.: Continuity of expected utility. — Allocation under uncertainty, equilibrium and optimality. 14. fejezet. London, 1974. Macmillan.
6. DUNFORD, N.—SCHWARTZ, J. T.: Linear operators I. New York, 1958. Wiley.
7. GRANDMONT, J. M.: Temporary general equilibrium theory. Econometrica, 1977. ápr.
8. HALMOS, P. R.: Measure theory. Princeton, 1964. Van Nostrand.
9. HEGEDŰS, M.—ZALAI, E.: Fixpont és egyensúly a gazdasági modellekben. Budapest 1978. KJK.
10. HICKS, J. R.: Érték és tőke. Budapest, 1978. KJK.
11. HICKS, J. R.: Capital and growth. Oxford, 1965. Oxford University Press.
12. HILDENBRAND, W.: Core and equilibria of a large economy. New York, 1974. Academic Press.
13. KORNAI, J.: Anti-equilibrium. Budapest, 1971. KJK.
14. MÁTYÁS, A.: A modern polgári közgazdaságtan története. Budapest, 1973. KJK.
15. NIKAIDO, H.: Convex structures and economic theory. New York, 1968. Academic Press.
16. SONDERMANN, D.: Temporary competitive equilibrium under uncertainty. — Allocation under uncertainty. . . London, 1974. Macmillan.
17. SZŐKEFALVI-NAGY, B.: Valós függvények és függvénysorok. Budapest, 1977. Tankönyvkiadó.

TEMPORARY COMPETITIVE EQUILIBRIUM

The notion of temporary equilibrium is a relatively new area of the theory of general equilibrium. The mathematical models belonging here actually try to chart by their specific means the real role of expectations and plans about an uncertain future. Beyond the mathematical apparatus of the *Arrow—Debreu* model some tools of the theory of probability and of functional analysis are also applied and consequently these models are clearly distinct from the classical ones also with respect to form.

The paper presents a particular model based on the work of *Sondermann* as well as of *Chetty* and *Dasgupta*. This model is simpler than those are but in certain aspects (handling of stocks, relaxing the compactness requirement for the initial activity set) it is more general. Some defective proofs contained by the Chetty—Dasgupta paper are also corrected.

ВРЕМЕННОЕ КОМПЕТИТИВНОЕ РАВНОВЕСИЕ

Относительно новой областью теории общего равновесия является временное равновесие. Относящиеся сюда математические модели, по существу, стараются изображать посредством привлечения своих специфических средств подлинную роль надежд и планов на предполагаемое будущее. По сравнению с математическим аппаратом модели Арроу—Дебре в данном случае привлекаются некоторые аспекты теории вероятности, а также и функционального анализа и в результате этого эти модели и по форме хорошо отличаются от классических.

В статье дается описание одной характерной модели, которые составлена на основании работ Сондерманна, а также Четти и Дасгупта. Эта модель более простая, однако в некоторых аспектах (обработка запасов, снятие компактности мозможностей действия по первому этапу) она является более общей. Исправлены некоторые ошибочные доказательства, имеющиеся в модели Четти—Дасгупта.

David Chappell

Optimális növekedés egy munkaerőfelesleggel rendelkező gazdaságban[1*]

I. Bevezetés

Az optimális gazdasági növekedés elméletében számos munka állandó termelés/tőke hányadost tételez fel.[2] Ezt rendszerint a következőképp fejezik ki:

$$Y(t) = \beta K(t), \tag{1}$$

ahol $Y(t)$ az aggregált termelés (azaz a bruttó nemzeti termék) a t időszakban, $K(t)$ az aggregált tőkeállomány ugyanakkor, β pedig a termelés és a tőke (állandó) hányadosa. Világos, hogy ez egyszerűsített változata a Leontief-féle termelési függvénynek, amely:

$$Y(t) = \min\,[\beta K(t), \gamma L(t)], \tag{2}$$

ahol $L(t)$ a munkaerő és γ az állandó termelés/munka arány. Az egyszerűsítés csak akkor engedhető meg, ha feltételezzük a folyamatos munkanélküliséget vagy a munkaerő alulfoglalkoztatottságát. A munkaerőfelesleg feltételét az (1) változat szerzői valóban mindig kinyilvánították.

Tekintsük most azt a helyzetet, amelyben valamely T időszakban minden rendelkezésre álló munkaerőt teljesen kihasználunk. Ekkor $Y(t) = \gamma L(t) = \gamma L_0 e^{nT}$ (feltételezzük, hogy a munkaerő exponenciálisan nő, növekedésének üteme n, és $L(0) = L_0$). Ahhoz, hogy a termelés e szintjét elérjük, mindamellett $\gamma L_0 e^{nT}/\beta$ egységnyi tőke is szükséges. A $\gamma L_0/\beta$ kifejezést K^*-gal jelölve a termelési függvény fentivel ekvivalens formája:

$$Y(t) = \beta \cdot \min\,[K^* e^{nt}, K(t)]. \tag{2'}$$

Mivel (2') elsőfokú homogén, mindkét oldalt eloszthatjuk $L_0 e^{nt}$-vel és (2')-t felírhatjuk az egy főre jutó formában:

$$Y(t) = \beta \cdot \min\,[k^*, k(t)]. \tag{2''}$$

Ily módon, amikor a tőke/munka arány k^* (és feltételezzük, hogy nincs technikai haladás), az egy főre jutó termelés maximális értékét veszi fel: $y^* = \beta k^*$.

[1] A szerző hálával tartozik *Roger Latham* értékes segítségéért a cikk előkészítésében. Hasznos észrevételeket kaptam *David Peel*től is. A szokásos „a hibákért egyedül a szerző felelős”, kitétel persze e cikk esetében is áll.

* *Szabó Judit* fordítása.

[2] Lásd például a Chakravarty [3] és [4] valamint a Chakravarty és Manne [6] műveket.

A termelést vagy elfogyasztjuk, vagy hozzáadjuk a tőkeállományhoz. Ennek következtében a megtakarítás egyenlő a beruházással és

$$\dot{k} = \beta \cdot \min\,[k^*, k] - (n + \lambda)\, k - c, \tag{3}$$

ahol λ a tőkeállomány (exponenciális) elavulásának üteme. Feltesszük[3]; hogy $\beta > (n + \lambda)$. Mivel a tőke/munka arányt nincs értelme k^* fölé vinni és feltételezzük, hogy a gazdaságra éppen jellemző arány kisebb k^*-nál, felállítjuk a következő korlátot:

$$k - k^* \leq 0. \tag{4}$$

Tehát

$$c^* = (\beta - n - \lambda)\, k^* \tag{5}$$

az egy főre jutó fogyasztásnak maximális, végtelenségig fenntartható értéke. Ez lényegét tekintve az az „aranykori" fogyasztási szint, amiről *Phelps* beszél.[4]

Tegyük föl mármost, hogy a tervezési időszak kezdetén

$$k(0) = mk^*; \quad m \in (0, 1) \tag{6}$$

a tőke/munka arány. Cikkünk következő részében formába öntünk egy olyan fejlesztési tervet, amely

a) T időszak alatt (ahol T véges szám) k^*-ra emeli a tőke/munka arányt;

b) Ha az egyszer már elérte a k^*-ot, lehetővé teszi, hogy az egy főre jutó fogyasztás mindörökre a c^* aranykori szinten legyen.

c) Az a) által megadott időszakban maximalizálja az egy főre jutó pillanatnyi hasznosságok egy integrálját.

A III. részben egy végtelen távlatú tervet[5] adunk meg, majd a IV. rész összehasonlítja és szembeállítja egymással a két tervet. Az V. rész a befejező megjegyzéseké.

Számos szerző elemezett már a mienkéhez többé-kevésbé hasonló problémákat. Például CHAKRAVARTY [3] és [4] művei tárgyalnak egy olyan modellt, amely kapcsolható cikkünk II. részéhez. Ugyanakkor ezek mind a záró tőkeállományt, mind a tervezési időszak hosszát önkényesen veszik fel. Ezenkívül Chakravarty modelljében a paraméterek bizonyos értékei mellett a tervezési időszak végefelé a tőke leépülése következik be.[6] Az általunk megfogalmazott véges távlatú terv mentes ezektől a kellemetlen tulajdonságoktól. A végtelen távlatú modellről szólva, azt CASS [2] elemzésével hasonlíthatjuk össze. Annak ellenére, hogy *Cass* eszközei eléggé másfajták (ő például felhasználja az *Inada* korlátozó feltételeinek eleget tevő neoklasszikus termelési függvényt), eredményeink bizonyos hasonlóságokat mutatnak. Az optimális növekedési pálya mindkét modellben „aranykori" fogyasztással[7] jár, de amíg a mi modellünk ezt véges időszakon belül éri el, *Cass* optimális pályája aszimptotikusan közelíti meg a (módosított) aranyszabályt.

[3] Másszóval azzal az ésszerű feltételezéssel élünk, hogy a gazdaság eléggé termelékeny ahhoz, hogy mind a fogyasztás, mind a nettó beruházás pozitív lehessen.

[4] Lásd: PHELPS [11], 17. o.

[5] Hasonló problémák jelentkeznek meglehetősen más összefüggések között a duális gazdaságok irodalmában. Lásd például: DIXIT [7] és STERN [13].

[6] A CHAKRAVARTY [3] modellt ugyanezért tartotta kifogásolhatónak MANESCHI [9] és [10]. Lásd CHAKRAVARTY válaszát is a [9]-ben.

[7] Ezzel nem akarjuk azt mondani, hogy az „aranykori" fogyasztás szintje ugyanaz a két modellben.

II. A véges távlatú terv

Ebben a részben leírunk egy tervet, amely a

$$J_1 = \int_0^T u[c(t)]e^{-\delta t}\,dt \tag{7}$$

kifejezést maximalizálja mind u-ra, *mind T-re nézve.* A $c(t)$ jelöli az egy főre jutó fogyasztást a t időszakban, u az egy főre jutó összes hasznosság ugyanabban az időszakban, és δ egy pozitív diszkontláb. Feltételezésünk szerint δ három összetevőből áll, $\delta = r - \lambda - n > 0$, ahol az r ütem tisztán az időpreferenciát tükrözi, λ és n pedig a fent definiáltak[8]. Feltételezzük továbbá, hogy J_1 additív szeparábilis és homogén. Ily módon a pillanatnyi hasznosság függvénye állandó rugalmasságú lesz[9]:

$$u[c(t)] = \frac{[c(t)]^{1-\nu}}{1-\nu} > 0\,. \tag{8}$$

Chakravarty [3] bebizonyította, hogy a leginkább reális fogyasztási tervek $\nu > 1$ esetén jelennek meg, így mi is erre a tartományra összpontosítjuk elemzésünket. $\nu > 1$ mellett a (8) kifejezés rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

(i) $u' = c^{-\nu} > 0$
(ii) $u'' = -\nu c^{-(\nu+1)} < 0$,

azaz pozitív, de csökkenő a határhaszon.

(iii) Mivel $-c \cdot u''/u' = \nu$, a határhaszon állandó rugalmasságú.
(iv) Felülről korlátos, mivel $c \geq 0$, $u < 0$ és $\lim\limits_{c\to\infty} u' = 0$.

Az egy dolgozóra jutó nettó beruházás egyenletéből (3), tudjuk, hogy $k < k^*$ esetén

$$\dot{k} = \hat{\beta}k - c, \tag{9}$$

ahol $\hat{\beta} \equiv \beta - n - \lambda > 0$. Ezért a feladat

$$J_1 = \frac{1}{1-\nu}\int_0^T [c(t)]^{1-\nu} e^{-\delta t}\,dt \tag{10}$$

maximalizálása a

$$\dot{k} = \hat{\beta}k - c \tag{9}$$

$$c(t) \in [0, \hat{\beta}k] \tag{11}$$

feltételek és a

$$k(0) = mk^*, \tag{6}$$

$$k(T) = k^* \tag{12}$$

[8] Végig feltételezzük azt is, hogy a népesség (ugyanúgy, ahogy a munkaerő) n ütemben exponenciálisan növekszik. Tehát az ún. részvételi arány állandó.
[9] Lásd Hicks [8] C függelékét.

határfeltételek mellett, ahol T nem egy rögzített végpont, hanem a $k(T)-k^*=0$ által meghatározott összesség.

A Pontryagin és szerzőtársai [12] könyvében található ismert maximum elvet alkalmazva bevezetünk egy, az állapotváltozóhoz hozzárendelt változót (co-state variable), $q(t)$-t, és definiáljuk a Hamilton függvényt:

$$H(k,c,q,t)=\frac{c^{1-\nu}e^{-\delta t}}{1-\nu}+q\,[\hat{\beta}k-c] \tag{13}$$

$$M(k,q,t)=\sup_{c\in[0,\hat{\beta}k]} H(k,c,q,t) \tag{14}$$

Feltételezve, hogy a maximum a $[0,\ \hat{\beta}k]$ halmaz belsejébe esik, az optimalitás szükséges és elégséges feltételei a következők:[10]

$$\frac{\partial H}{\partial c}=0\rightarrow e^{-\delta t}c^{-\nu}=q,\ \forall t\in[0,T] \tag{15}$$

azaz

$$H(k,c,q,t)=M(k,q,t),\ \forall t\in[0,T],$$

$$\dot{q}=-\frac{\partial H}{\partial q}=-\hat{\beta}q \tag{16}$$

$$\frac{\partial H}{\partial q}=\dot{k}=\hat{\beta}k-c \tag{17}$$

$$M[k(t),q(T),T]=0, \tag{18}$$

(15)-öt az idő szerint deriválva és (16)-ba helyettesítve nyerjük, hogy

$$\dot{c}=RC;\ \text{ahol}\ R\equiv(\hat{\beta}-\delta)/\nu, \tag{19}$$

$$\therefore c(t)=A_1e^{RT}. \tag{20}$$

(20)-at (9)-be helyettesítve

$$\dot{k}=\hat{\beta}k-A_1e^{Rt} \tag{9'}$$

és

$$\therefore k(t)=\frac{A_1e^{Rt}}{\hat{\beta}-R}+A_2e^{\hat{\beta}t}, \tag{21}$$

ahol A_1 és A_2 tetszőleges integrációs konstansok.

Így, a határfeltételeket helyettesítve

$$k(t)=\frac{k^*}{(e^{\hat{\beta}T}-e^{RT})}\{(1-me^{RT})\,e^{\hat{\beta}t}+(me^{\hat{\beta}T}-1)\,e^{Rt}\} \tag{21'}$$

$$c(t)=\frac{(\hat{\beta}-R)\,(me^{\hat{\beta}T}-1)\,k^*e^{Rt}}{(e^{\hat{\beta}T}-e^{RT})}. \tag{20'}$$

[10] Lásd a 4. tételt [12], 60–61. oldalán.

Megjegyezzük, hogy (15)-ből

$$q(t) = \left[\frac{(\hat{\beta} - R)\,(me^{\hat{\beta}T} - 1)\,k^*}{(e^{\hat{\beta}T} - e^{RT})}\right]^{-\nu} e^{-\hat{\beta}t}. \tag{22}$$

Ezért a (18) feltételt alkalmazva

$$\left[\frac{(\hat{\beta} - R)\,(me^{\hat{\beta}T} - 1)\,k^*}{(e^{\hat{\beta}T} - e^{RT})}\right]^{1-\nu} e^{(R-\hat{\beta})T} \left\{\frac{1}{1-\nu} + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\beta} - R} + \right.$$

$$\left. + \frac{\hat{\beta}(1 - me^{RT})\,e^{\hat{\beta}T}}{(\hat{\beta} - R)\,(me^{\hat{\beta}T} - 1)\,e^{RT}} - 1\right\} = 0\,, \tag{23}$$

A kapcsos zárójelben levő kifejezést nullával téve egyenlővé, és az egyenletet átrendezve azt látjuk, hogy T-nek ki kell elégítenie az alábbi egyenlőséget:

$$\Phi(T) = m\nu(\hat{\beta} - R) - \hat{\beta}(\nu - 1)\,e^{-RT} - \delta e^{-\hat{\beta}T} = 0. \tag{24}$$

1. *tétel*: A $\Phi(T) = 0$ transzcendentális egyenletnek van egyértelmű pozitív valós gyöke:[11] T^*.

Bizonyítás

(i) *Létezés*: Tekintsük $T = \hat{\beta}^{-1} \log [m^{-1}]$. Ekkor

$$\Phi(T) = \hat{\beta}(\nu - 1)\,[m - m^{R/\hat{\beta}}] < 0\,.$$

Tekintsük ezekután

$$T = R^{-1} \log [m^{-1}] \text{ és } \Phi(T) = \delta(m - m^{\hat{\beta}/R}) > 0\,.$$

Így tehát a $\Phi(T)$ folytonossága biztosítja, hogy $\exists T^*$, melyre $\Phi(T^*) = 0$, és

$$\hat{\beta}^{-1} \log [m^{-1}] < T^* < R^{-1} \log [m^{-1}]. \tag{25}$$

(ii) *Egyértelműség*: $\Phi'(T) = R\hat{\beta}(\nu - 1)\,e^{-RT} + \delta\hat{\beta}e^{-\hat{\beta}T} > 0, \forall T$. $\Phi(T)$ tehát szigorúan monoton növekvő és ezzel T^* egyértelmű. Q.E.D.

(24)-ből nyerjük az alábbiakat is:

$$1 - me^{RT^*} = \frac{\delta(e^{\hat{\beta}T^*} - e^{RT^*})}{\nu(\hat{\beta} - R)\,e^{\hat{\beta}T^*}} \tag{26}$$

$$me^{\hat{\beta}T^*} - 1 = \frac{\hat{\beta}(\nu - 1)\,(e^{\hat{\beta}T^*} - e^{RT^*})}{\nu(\hat{\beta} - R)\,e^{RT^*}}. \tag{27}$$

[11] Explicit módon nem lehetséges a T^*-ra való megoldás, mivel az ilyen típusú egyenleteknek nincs általános analitikus megoldásuk.

E kifejezések hasznosak lesznek a tőke/munkaerő arány, az egy dolgozóra jutó nettó beruházás és az egy főre jutó fogyasztás optimális pályájának egyszerűbb alakú felírásához. Valóban

$$k(t) = \frac{k^*}{\nu(\hat{\beta} - R)} \{\delta e^{\hat{\beta}(t-T^*)} + \hat{\beta}(\nu - 1) e^{R(t-T^*)}\} \tag{21''}$$

$$\dot{k}(t) = \frac{\hat{\beta} k^*}{\nu(\hat{\beta} - R)} \{\delta e^{\hat{\beta}(t-T^*)} + R(\nu - 1) e^{R(t-T^*)}\}. \tag{28}$$

Így a nettó beruházás végig pozitív és soha sincs tőkekivonás.

$$c(t) = \frac{\hat{\beta}(\nu - 1) k^* e^{R(t-T^*)}}{\nu}. \tag{20''}$$

A tervezési időszak alatt tehát az egy főre jutó fogyasztás a $\hat{\beta}(\nu - 1) k^*/\nu e^{RT^*}$ kezdőértékről a $\hat{\beta}(\nu - 1) k^*/\nu$ ($\hat{\beta}k^*$-nál kisebb) értékre növekszik.[12] Mindazonáltal a tervidőszak végén még mindig az „aranykori" szint alatt van; így $t = T^*$-ban a fogyasztási szint egy véges ugrást tesz, hogy elérje $\hat{\beta}k^*$-ot. Úgy látszik, hogy ebben a gazdaságban (adott záró tőkeállomány mellett) a véges távlatú terv számára az optimális stratégia a fogyasztás olyan mértékű korlátozása, amely biztosítja, hogy viszonylag rövid időn belül beálljon a teljes foglalkoztatás. Vegyük észre azonban, hogy ez *nem* a lehetséges minimális időszak.

III. A végtelen távlatú terv

Ugyanazt a jelölésrendszert és függvényeket használva, mint az előző részben, feladatunk a

$$J_2 = \frac{1}{1 - \nu} \int_0^\infty [c(t)]^{1-\nu} e^{-\delta t} \mathrm{d}t \tag{29}$$

kifejezés maximalizálása a

$$\dot{k} = \hat{\beta}k - c \tag{9}$$

$$k - k^* \leq 0 \tag{4}$$

$$c(t) \in [0, \hat{\beta}k] \tag{11}$$

$$k(0) = mk^*; \quad m \in (0,1) \tag{6}$$

feltételek mellett. Ez viszonylag egyszerű szabályozási feladat, ahol az állapotváltozók tartománya korlátozott. Meg fogjuk mutatni, hogy (bizonyos, a későbbiekben kifejtendő feltételek mellett) a megoldás egy belső szakaszból ($k < k^*$ esetén) és egy határfelületi szakaszból ($k = k^*$ esetén) áll.

[12] Pontosabban növekszik, csökken vagy állandó marad, attól függően, hogy $\hat{\beta} \gtreqless \delta$ mely része áll. „Normális" paraméterértékek mellett azonban számíthatunk arra, hogy $\hat{\beta} > \delta$.

Tekintsük a

$$S = \{k \mid k \leq k^*\} \tag{30}$$

halmazt. Mivel a kiindulási (mk^*) tőke/munka hányados kisebb k^*-nál, k pályája kezdetben szükségképpen S belsejébe esik. Ezért az előző rész optimalizási feltételei, kivéve a (18) feltételt, fenn kell hogy álljanak. Nevezetesen e kezdeti szakaszban

$$c(t) = A_1 e^{Rt} \tag{20}$$

$$k(t) = \frac{A_1 e^{Rt}}{\hat{\beta} - R} + A_2 e^{\hat{\beta} t} \tag{21}$$

a megoldáshoz tartozó pálya. A k pályája mármost vagy mindenhol az S belsejében halad, vagy pedig kezdetben a belső tartományban van, később a határon. Nyilvánvaló, hogy ha a határt egyszer már elérte, később optimális akar maradni, $k = k^*$ és $\dot{k} = 0 \rightarrow c = c^*$.

Tekintsük a

$$\psi = [A_2, R] \tag{31}$$

vektort. Az olvasó könnyen igazolhatja, hogy k-nak a megoldásban levő pályája véges időn belül eléri S határát, ha $\psi \geq \mathbf{0}$ (ahol a $\geq$ azt jelöli, hogy legalább egy elemnél szigorú egyenlőtlenség áll fenn). Fel fogjuk tételezni, hogy ez a helyzet.[13] Tegyük fel, hogy k pályája valamely $T \in (0, \infty)$ időszakban éri el az S határát, azaz, hogy $k(T) = k^*$. Ekkor $t \in [0, T]$ esetén a c és k időbeli pályáját a fentiekben megadott (20′) és (21′) egyenletek írják le. A $t \in [T, \infty]$ esetben pedig

$$c(t) = \hat{\beta} k^* \tag{5}$$

és

$$k(t) = k^* \tag{21''}$$

Hátra van még az alábbiakban T'-vel jelölt optimális átváltási időszak meghatározása. Ehhez *Berkovitz* egyik eredményét fogjuk felhasználni.[14] Visszaidézzük, hogy a Hamilton függvény az alábbi alakba írható:

$$H(k, c, q, t) = u(c)\, e^{-\delta t} + q\dot{k}. \tag{13'}$$

Az optimális átváltási időnek teljesítenie kell a

$$H(T)^- = H(T)^+ \tag{32}$$

feltételt, ahol a + és − felső indexek a bal oldali és jobb oldali határértéket jelölik, $\lim\limits_{t \to T} H(k, c, q, t)$. Esetünkben a feltétel teljesül, ha

$$c(t)^- = c(T)^+ = \hat{\beta} k^* \tag{33}$$

[13] Az olyan esetek, amelyeknél a k pályája mindenkor az S belsejében halad, kevéssé érdekesek, mivel a munkanélküliség örökös fennállását jelentik. Vegyük észre azt is, hogy A_1-nek pozitívnak kell lennie, mivel $c(t) = A_1 e^{Rt}$ és a pillanatnyi hasznossági függvény szerkezetéből adódóan a zéró fogyasztás *sohasem* optimális.

[14] Lásd BERKOVITZ [1] cikkében a 2. tételt a 498. oldalon.

(mivel az S határa mentén $\dot{k} = 0$). Így (21′)-t felhasználva

$$\frac{(\hat{\beta} - R)\,(me^{\hat{\beta}T-1})\,k^*\,e^{RT}}{e^{\hat{\beta}T} - e^{RT}} = \hat{\beta}k^*. \tag{33′}$$

Átrendezve és a $k^*e^{(\hat{\beta}+R)T}$ kifejezéssel végigosztva látható, hogy T-nek ki kell elégítenie a

$$\Theta(T) = (\hat{\beta} - R)m + Re^{-\hat{\beta}T} - \hat{\beta}e^{-RT} = 0 \tag{34}$$

egyenletet.

2. *tétel.* A $\Theta(T) = 0$ transzcendentális egyenletnek van egyértelmű pozitív valós gyöke: T'.

Bizonyítás

(i) *Létezés.* Nézzük a $T = R^{-1}\log[m^{-1}]$ értéket. Ekkor

$$\Theta(T) = R(m^{\hat{\beta}/R} - m) < 0.$$

Legyen most

$$T = R^{-1}\log[\hat{\beta}/m(\hat{\beta} - R)], \quad \text{ekkor} \quad \Theta(T) = R\,[m(\hat{\beta} - R)/\hat{\beta}]^{\hat{\beta}/R} > 0.$$

Ezért a $\Theta(T)$ folytonosságából következően $\exists T'$, amely kielégíti a $\Theta(T') = 0$ egyenletet, és

$$R^{-1}\log[m^{-1}] < T' < R^{-1}\log[\hat{\beta}/m(\hat{\beta} - R)] \tag{35}$$

(ii) *Egyértelműség.* $\Theta'(T) = \hat{\beta}R(e^{-RT} - e^{-\hat{\beta}T}) > 0$ minden T esetén. Ezért $\Theta(T)$ szigorúan monoton növekvő és T' egyértelmű. Q.E.D.

(34)-ből juthatunk a következőkhöz is:

$$me^{\hat{\beta}T'} - 1 = \frac{\hat{\beta}(e^{\hat{\beta}T'} - e^{RT'})}{(\hat{\beta} - R)\,e^{RT'}} \tag{36}$$

$$me^{RT'} - 1 = \frac{R(e^{\hat{\beta}T'} - e^{RT'})}{(\hat{\beta} - R)\,e^{\hat{\beta}T'}}. \tag{37}$$

Így (36) és (37)-ből alkalmasan helyettesítve nyerjük a tőke/munka arány, az egy dolgozóra jutó nettó beruházás és az egy főre jutó fogyasztás alábbi egyszerűsített formáit:

$$k(t) = \begin{cases} \dfrac{k^*}{(\hat{\beta} - R)}\,[\hat{\beta}e^{R(t-T')} - Re^{\hat{\beta}(t-T')}], & \text{ha } t \in [0, T') \\[2ex] k^*, & \text{ha } t \in [T', \infty) \end{cases}, \tag{38}$$

$$\dot{k}(t) = \begin{cases} \dfrac{\hat{\beta}Rk^*}{(\hat{\beta} - R)}\,[e^{R(t-T')} - e^{\hat{\beta}(t-T')}], & \text{ha } t \in [0, T') \\[2ex] 0, & \text{ha } t \in [T', \infty) \end{cases}, \tag{39}$$

Tehát az egy dolgozóra jutó nettó beruházás a terv kezdeti szakasza mentén végig pozitív, de az utolsó pillanatban nullára esik (és attól kezdve természetesen ott is marad). Így tőkekivonás ez esetben sincs.

$$c(t) = \begin{Bmatrix} \hat{\beta}k^* e^{R(t-T')}, & \text{ha} \quad t \in [0, T') \\ \hat{\beta}k^*, & \text{ha} \quad t \in [T', \infty) \end{Bmatrix}, \tag{40}$$

azaz az egy főre jutó fogyasztás a kezdeti szakasz mentén végig monoton növekszik és (az előző rész véges távlatú modelljével szemben) $t = T'$ időpontban felveszi maximálisan fenntartható (aranykori) szintjét.

IV. A két modell összehasonlítása

Ebben a részben összevetjük a véges és a végtelen távlatú terv optimális megoldását. Az összehasonlítást a két célfüggvény maximális értékével kezdjük. Tekintsük elsőként a végtelen távlatú tervet. (40)-et (29)-be helyettesítve és integrálva kapjuk, hogy

$$J_2 = \frac{(\hat{\beta}k^*)^{1-\nu}}{(1-u)\, e^{\delta T'}} \left\{ \frac{1}{\delta} + \frac{(e^{\hat{\beta}T'} - e^{RT'})}{(\hat{\beta} - R)\, e^{RT'}} \right\}. \tag{41}$$

A véges távlatú tervben pedig a (20″) 10)-be helyettesítése és az integrálás után

$$J_1 = -\frac{(\hat{\beta}k^*)^{1-\nu}\,(e^{\hat{\beta}T^*} - e^{RT^*})}{\nu(\hat{\beta} - R)\, e^{(R-\nu)T^*}} \left[\frac{\nu}{\nu - 1}\right]^{\nu}. \tag{42}$$

A nem korlátozott távlatú tervvel való összehasonlítás céljaira jelenértékeket képezhetünk a terv *vége* utáni időpontok egy főre jutó hasznosságából. Feltételezve tehát, hogy a gazdaság fogyasztását az „aranykori" szinten tartja

$$J_1' = \frac{1}{1-\nu} \int_{T^*}^{\infty} [\hat{\beta}k^*]^{1-\nu} e^{-\delta t} \mathrm{d}t = \frac{(\hat{\beta}k^*)^{1-\nu}}{\delta(1-\nu)\, e^{\delta T^*}}. \tag{43}$$

Ezért, ha a gazdaság követi a *véges* horizontú tervet, akkor a *végtelenbe* nyúló jövőben elért egy főre jutó hasznosságok maximális jelenértéke

$$J_1 + J_1' = -\frac{(\hat{\beta}k^*)^{1-\nu}}{e^{\delta T^*}} \left\{ \frac{(e^{\hat{\beta}T^*} - e^{RT^*})}{\nu(\hat{\beta} - R)\, e^{RT^*}} \left[\frac{\nu}{\nu - 1}\right]^{\nu} + \frac{1}{\delta(\nu - 1)} \right\}. \tag{44}$$

Sajnos a (41) és (44) értékeket nem tudjuk közvetlen módon összehasonlítani, mert mint az előzőekben rámutattunk, nem tudunk analitikus megoldást adni a T^* és a T' értékekre. Kézenfekvő azt remélni, hogy $J_2 > (J_1 + J_1')$ és az alábbiakban bemutatott számpéldában ez is a helyzet. Tudjuk mindamellett, hogy $T' > T^*$, mivel (25)-ből és (35)-ből

$$0 < \hat{\beta}^{-1} \log [m^{-1}] < T^* < R^{-1} \log [m^{-1}] < T' < R^{-1} \log [\hat{\beta}/m(\hat{\beta} - R)] < \infty, \tag{45}$$

ami azt jelenti, hogy a végtelen időszak feletti optimalizálás esetében a teljes foglalkoztatásba való átmenet időszaka kétségtelenül hosszabb ideig tart, mint a véges esetben.

Egy számpélda: Legyen $k^* = 100$; $\hat{\beta} = 0{,}2$; $m = 0{,}75$; $\delta = 0{,}125$; $\nu = 1{,}5$. Ekkor egy iterációs módszerrel $T^* = 2{,}266$ és $T' = 10{,}430$ értékekhez jutunk. Tekintsük most az egy főre jutó fogyasztás pályáját a két terv átmeneti időszakában. A paraméterek fenti értékei mellett az alábbiakat kapjuk:

Véges távlatú terv:

$$c(t) = \frac{\hat{\beta}(\nu - 1)\,k^*\,e^{R(t-T^*)}}{\nu} = 5{,}96\,e^{0{,}05t}$$

$$\therefore\ c(0) = 5{,}96 \text{ és } c(2{,}266) = 6{,}67$$

Végtelen távlatú terv:

$$c(t) = \hat{\beta}k^*\,e^{R(t-T')} = 11{,}87\,e^{0{,}05t}$$

$$\therefore\ c(0) = 11{,}87 \text{ és } c(10{,}430) = 20 = c^*.$$

Mindez elég szemléletesen mutatja a probléma két megközelítésének alapvető különbségét. A véges távlatú tervben a teljes foglalkoztatásra való (viszonylag rövid) áttérés folyamán az egy főre jutó fogyasztás meglehetősen szigorúan korlátozott, míg a végtelen távlatú tervet sokkal fokozatosabb megközelítés jellemzi.

A végtelen távlatú terv egy másik kedvező eredménye, hogy az egy főre jutó fogyasztás kiinduló értéke bizonyos értelemben maximalizált, $T = T'$ mellett ugyanis a kiinduló egy főre jutó fogyasztás magasabb, mint bármely más, (20′)-t kielégítő pálya esetében. Emlékeztetünk rá, hogy az egy főre jutó fogyasztás kiinduló értékét általános alakban fölírva

$$c(0) = \frac{(\hat{\beta} - R)\,(me^{\hat{\beta}T} - 1)\,k^*}{(e^{\hat{\beta}T} - e^{RT})}, \tag{20'''}$$

Könnyen igazolható, hogy ez a kifejezés $T = T'$ mellett T-re nézve maximális és $\max c(0) = \beta k^* e^{-RT'}$.

Tekintsük végül a maximális jelenértékű egy főre jutó hasznosságra felírt két kifejezést (azaz (41)-et és (44)-et fentebb). A számpélda értékeiből kiszámíthatjuk, hogy

$$J_2 = -4{,}031 \text{ (végtelen távlatú eset)}$$

és

$$J_1 + J_1' = -4{,}272 \text{ (véges távlatú eset)}.$$

Így tehát erre az egyedi példára a végtelen távlatú terv egy 6%-os többletet mutat a véges távlatúhoz képest (mely utóbbit az összehasonlíthatóság kedvéért kiterjesztettük).

V. Befejező megjegyzések

Végül szeretnénk összefoglalni mi az, ami véleményünk szerint lényeges dolgozatunkban. Először is úgy érezzük, hogy a véges távlatú terv a mi megfogalmazásunkban sikeresen túljut az ilyen modellekkel szemben felhozható szokásos hiányosságokon, amennyiben

a) A tőke/munka záróértékét meghatározott céllal, és nem csupán egy önkényes döntéssel választottuk meg;

b) A tervezési időszak hosszát az optimálási folyamat részeként állapítottuk meg.

c) Modellünk semmikor sem fogyaszt előzőleg felhalmozott tőkét.

Másodszor, megmutattuk, hogy a véges és végtelen távlatú terv gazdaságpolitikailag igen különböző, az utóbbi sokkal inkább fokozatos megközelítést követ. Érzésünk szerint a végtelen távlatú tervet kell előnyben részesíteni, valószínűnek látszik, hogy a paraméterek ésszerű értékei mellett hasznossági „többletet" mutat a véges időszakú tervhez képest.[15] Végül szeretnénk rámutatni arra, hogy munkánk szándéka szerint is inkább szemléltetés volt és nem kimerítő elemzés.

(*Beérkezett: 1980 április 14-én.*)

IRODALOM

1. Berkovitz, L. D.: "On control problems with bounded state variables". Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1962.
2. Cass, D.: "Optimum growth in an aggregative model of capital accumulation". Review of Economic Studies, 1965.
3. Chakravarty, S.: "Optimal savings with finite planning horizon". International Economic Review, 1962.
4. Chakravarty, S.: "Capital and development planning". The M.I.T. Press, 1969.
5. Chakravarty, S.: "Optimal savings with finite planning horizon: a reply". International Economic Review, 1966.
6. Chakravarty, S. and A. S. Manne: "Optimal growth when the instantaneous utility function depends on the rate of change in consumption".
7. Dixit, A. K.: "Optimal development in the labour-surplus economy". Review of Economic Studies, 1968.
8. Hicks, Sir John R.: "Capital and growth". Oxford University Press, 1965.
9. Maneschi, A.: "Optimal savings with finite planning horizon: a note". International Economic Review, 1966.
10. Maneschi, A.: "Optimal savings with finite planning horizon: a rejoinder". International Economic Review, 1966.
11. Phelps, E. S.: "Golden rules of growth". New York, W. W. Norton and Co., 1967.
12. Pontryagin, L. S., V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze és E. F. Mischchenko: "The mathematical theory of optimal processes". (translated by K. N. Trirogoff). New York, Interscience Publishers, 1962.
13. Stern, N. H.: "Optimum development in a dual economy". Review of Economic Studies, 1971.

[15] *Minford* professzor rámutatott, hogy ha a véges tervben maximalizált mennyiséghez egy alkalmasan megválasztott „örökséget" csatolunk, akkor ezzel feltehetően azonossá tehető a két terv.

OPTIMAL GROWTH IN A LABOUR SURPLUS ECONOMY

In the article the functioning of the traditional macro-economic model is examined in the case of labour surplus, looking for the path that maximizes the time-integral of the discounted utility function. In case of an integral with finite horizon neither the initial capital stock, nor the length of the planning horizon are given arbitrarily. In case of infinite time horizon such a solution has been found where the consumption path reaches the ,,golden age" consumption within a finite interval. Important conclusions are drawn also from the comparison of finite and infinite horizon paths, the former reaching the state of full employment earlier albeit with a lower level of consumption.

ОПТИМАЛЬНОЕ РАЗВИТИЕ ЭКОНОМИКИ, РАСПОЛАГАЮЩЕЙ ИЗБЫТКОМ РАБОЧЕЙ СИЛЫ

В данной статье рассматривается функционирование традиционной макроэкономической модели в условиях избытка рабочей силы и изыскивается тот путь, который максимализирует повременный интеграл дисконтируемую зависимость полезности. В случае интеграла с конечным горизонтом не дается ни нулевой состав капитала, не берется произвольно протяженность горизонта планирования, при котором путь потребления в пределах установленного времени достигает потребления в «золотом веке». Существенные выводы могут быть получены при сопоставлении путей конечного и бесконечного горизонта и первый случай при более низком уровне потребления быстрее выходит к полной занятости.

Forgó Ferenc

Döntés több kritérium alapján: egy játékelméleti megközelítés

Bevezetés

A több kritérium alapján való döntés, és ennek fontos speciális esetei (pl. több célfüggvényes programozás), igen fontos helyet foglalnak el az operációkutatásban, mind a tisztázatlan matematikai kérdések, mind pedig a koncepcionális megközelítési módok vonatkozásában. Az igen széles körű alkalmazási lehetőségek kiaknázását főleg a koncepcionális kérdések tisztázása gyorsíthatná meg jelentősen. Ezen a téren meglehetős ,,káosz'' uralkodik, a Pareto optimalitáson kívül alig van általánosan elfogadott és operatívan is hasznosítható megoldási alapelv. A Pareto-optimalitás megkövetelése azonban általában nagy szabadságfokot enged a döntéshozónak és megmarad a Pareto-optimális megoldások közti válogatás fogas kérdése. Számos javaslat [7], [11] (még számítógépes program is, pl. ELECTRE) született ennek a kérdésnek a megoldására, de ezeknek heurisztikus, túlságosan is ,,rugalmas'' jellege az alkalmazók körében sokszor (joggal) gyanakvást kelt. Elsősorban az elméleti megalapozottság hiánya szembetűnő ezeknél a módszereknél.

Elméletileg is megalapozott megoldáskoncepció megalkotásának egy lehetséges módja a következő: Állítsunk fel olyan, intuitíve racionálisnak tűnő követelményrendszert, amelyet egy ,,megoldásnak'' ki kell elégítenie. Próbáljuk meg ezt a követelményrendszert úgy szigorítani, hogy lehetőleg minél kevesebb (speciálisan pontosan egy) döntési alternatíva elégítse azt ki. Ezt a gondolatmenetet a kooperatív játékok elméletében már sikerrel alkalmazták. Jó példa rá a karakterisztikus függvénnyel megadott játékok esetében a Shapley-érték [8], [9], a kompenzáció (sidey-payment) nélküli játékok esetében pedig Nash axiomatikus megoldáskoncepciója [5], [9], amelyet ő kétszemélyes játékok esetére javasolt. Ezt a megoldáskoncepciót általánosította Szidarovszky [10] n-személy esetére. Dolgozatunknak az a célja, hogy a több kritérium alapján való döntési szituációt speciális kooperatív játékként fogalmazzuk meg és a Szidarovszky-féle megoldás tulajdonságait vizsgáljuk, ill. interpretáljuk.

A játékelméleti modell

Jelöljön $A_1, A_2, \ldots, A_r$ r számú alternatívát, amelyek közül a ,,legjobbat'' kell kiválasztanunk. Minden egyes alternatívát m numerikusan jellemezhető kritérium alapján értékelünk. Ez más szóval azt jelenti, hogy van r darab R^m-beli vektorunk,

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$$

és a numerikus jellemzőket úgy választottuk meg, hogy ha $a_{ij} > a_{ik}$, akkor az i-edik kritérium szerint a j-edik alternatíva előnyösebb, mint a k-adik, ha pedig $a_{ij} = a_{ik}$, akkor nem tudunk közöttük különbséget tenni. Feltesszük továbbá, hogy már csak efficiens (Pareto-optimális) alternatíváink vannak, vagyis, hogy egyetlen i, j indexpárra sem áll fenn az

$$\mathbf{a}_i \geq \mathbf{a}_j$$

reláció. Az alternatívák közül a „legjobbat" keressük, s mivel valamennyien efficiensek, ez a valamilyen értelemben vett „legjobb kompromisszum" keresését jelenti.

Első lépésként bővítjük a szóba jöhető alternatívák halmazát. Megengedjük az eredeti „tiszta" alternatívák tetszőleges keverését, vagyis a lehetséges alternatívák halmaza ezentúl az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ pontok által kifeszített P poliéder:

$$P = \left\{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{a}_i, \quad \lambda_i \geq 0; \quad i = 1, \ldots, r; \quad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Ezt úgy lehet interpretálni, hogy ha az egyes alternatívákat rendre a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ valószínűségekkel választjuk, akkor a várható „következmények" vektora

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{a}_i .$$

A következőkben a „legjobb" következmény vektort szeretnénk meghatározni. A „jóság" mércéjének azt tekintjük, hogy a következmény vektor (ill. az ezt realizáló alternatívák) bizonyos, intuitíve racionálisnak ítélt axiomákat elégítsenek ki. E célból problémánkat játékelméleti keretbe helyezzük.

Rendeljünk minden kritériumhoz egyértelműen egy „játékost", akinek az a célja, hogy olyan alternatívát válasszon, amelynél az általa reprezentált kritérium szerinti numerikus érték minél nagyobb. Pontosan fogalmazva: minden játékos stratégiahalmaza az alternatívák véges $S = \{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$ halmaza. Az i-edik játékos kifizetőfüggvényét pedig definiáljuk a következőképpen:

$$f_i(A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_r}) = \begin{cases} a_{ij}, & \text{ha } j_1 = j_2 = \ldots = j_r = j \\ -\alpha_i & \text{egyébként} \end{cases} \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

ahol α_i egy alkalmas (általában nagy) pozitív szám ($i = 1, \ldots, m$). Ez más szavakkal azt jelenti, hogy ha minden játékos ugyanazt az alternatívát, mondjuk A_j-t választja, akkor az adott alternatívához tartozó $\mathbf{a}_j$ kifizetéseket kapják rendre. Ha viszont közülük legalább egy eltér, akkor a kifizetés igen „rossz", a meg nem értésért az i-edik játékos α_i büntetést fizet ($i = 1, \ldots, m$).

Az így definiált $G = \{S, S, \ldots, S; f_1, f_2, \ldots, f_r\}$ játéknak keressük egy kooperatív megoldását. Azok a megoldáskoncepciók, ahol a játékosok egymásnak kompenzációt (side-payment) nyújthatnak, nem jöhetnek szóba, hiszen a kiinduló feltevésünk az, hogy az egyes kritériumok egymással nem mérhetők össze.

A kétszemélyes kompenzáció nélküli játékok esetére Nash [5], [9] javasolt egy megoldáskoncepciót, amelyet Harsányi [2] és Szidarovszky [10] általánosított n személyre. Axiomatikus felépítése és meggyőző interpretálhatósága miatt a SZIDAROVSZKY által javasolt megoldást alkalmazzuk a G játék és ezen keresztül a többkritériumú döntési probléma kezelésére.

Feltételezzük, hogy adva van egy $\mathbf{f}^* \in R^m$ ún. status quo pont, amelyet úgy interpretálhatunk, hogy ha a játékosok nem tudnak megegyezni (az egyes kritériumokat nem tudjuk „összehangolni"), akkor kifizetésként $\mathbf{f}^*$ komponenseit kapják.

Legyen $L \subset R^m$ egy zárt, korlátos, konvex halmaz (a lehetséges következmények halmaza), $\mathbf{f}^* \in R^m$ pedig egy olyan vektor (a status quo pont), amelyre $\mathbf{f} > \mathbf{f}^*$ valamely $\mathbf{f} \in L$ esetén. Legyen ψ egy olyan függvény, amely egy tetszőleges, a fenti tulajdonságokkal rendelkező $(L, \mathbf{f}^*)$ párhoz hozzárendel egy m-elemű vektort (a „legjobb" kompromisszumot) és kielégíti az alábbi axiómákat:

1. $\psi(L, \mathbf{f}^*) \in L$ (lehetségesség). Ez azt jelenti, hogy a legjobb kompromisszumnak benne kell lenni a lehetséges következmények halmazában.

2. $\psi(L, \mathbf{f}^*) \geq \mathbf{f}^*$ (racionalitás). A legjobb kompromisszum semmilyen kritérium alapján sem lehet rosszabb, mint a status-quo pont, amelyet minden kooperáció, egyeztetés nélkül is el lehet érni.

3. Ha $\mathbf{f} \in L$ és $\mathbf{f} \geq \psi(L, \mathbf{f}^*)$, akkor $\mathbf{f} = \psi(L, \mathbf{f}^*)$ következik (Pareto-optimalitás vagy efficiencia). Ez azt jelenti, hogy legjobb kompromisszumként nem jöhet szóba egy olyan vektor, amelyet legalább egy kritérium szerint lehet úgy javítani, hogy egyetlen más kritérium szerint sem rontjuk.

4. Ha $L_1 \subseteq L$ és $\psi(L, \mathbf{f}^*) \in L_1$, akkor $\psi(L, \mathbf{f}^*) = \psi(L_1, \mathbf{f}^*)$ (kedvezőtlen alternatíváktól való függetlenség). Ez a tulajdonság azt az elvet fogalmazza meg, hogy ha egy tágabb halmazon egy megoldás a „legjobb" és egyúttal eleme egy szűkebb halmaznak is, akkor a szűkebb halmazon is a „legjobbnak" kell lennie.

5. Legyenek $\mu_k > 0$, β_k $(k = 1, \ldots, n)$ tetszőleges konstansok és

$$\mathbf{f}^{*\prime} = (\mu_1 f_1^* + \beta_1, \ldots, \mu_m f_m^* + \beta_m),$$

$$L' = \{(\mu_1 l_1 + \beta_1, \ldots, \mu_m l_m + \beta_m) \mid (l, \ldots, l_m) \in L\}.$$

Ekkor $\psi(L', \mathbf{f}^{*\prime}) = (\mu_1 \psi_1 + \beta_1, \ldots, \mu_m \psi_m + \beta_m)$ (monoton növekvő lineáris transzformációtól való függetlenség)[1]. Ez azt a megnyugtató tulajdonságot fejezi ki, hogy a „legjobb" kompromisszum kiválasztása független az egyes kritériumok szerinti mérésnél használt mértékegységtől és a mérési skála kiindulópontjától.

6. Tegyük fel, hogy valamely i, j indexpárra $f_i^* = f_j^*$. Ha az $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m) \in L$ reláció maga után vonja a $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in L$ reláció fennállását ($\varphi_k = f_k$, $k \neq i$, $k \neq j$, $\varphi_i = f_j$, $\varphi_j = f_i$), akkor $\psi_i = \psi_j$. Ezek szerint, ha két játékos (kritérium) szerepe mind a lehetséges következmények halmazában, mind a status quo pontban felcserélhető, akkor a „legjobb" kompromisszum pontban is ugyanannyi illeti meg őket.

SZIDAROVSZKY [10] bebizonyította a következő tételt:

1. *tétel.* Egyetlen olyan ψ függvény van, amely kielégíti az 1–6. axiómákat.

[1] Itt $\psi(L, \mathbf{f}^*) = (\psi_1, \ldots, \psi_m)$

A bizonyítás menetéből az is kiderül, hogy az egyértelműen meghatározott „legjobb" kompromisszum a

$$(1)\qquad \prod_{k=1}^{m} (x_k - f_k^*) \to \max$$
$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in L$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{f}^*$$

programozási feladat egyetlen optimális megoldása.

Minthogy az $\mathbf{f}^*$ status-quo pont egyes komponenseit úgy interpretáltuk, mint a „döntésképtelenség", ill. a „meg nem egyezés" következményét, természetesen adódik az $f^* = -(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ választás.

Legyen $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ olyan, hogy minden $\mathbf{x} \in P$ esetén $\mathbf{x} > -\alpha$, vagyis bármely lehetséges döntés (és ezek „keverékei" is) jobb, mint a meg nem egyezés. Írjuk fel az (1) feladatot:

$$(2)\qquad \prod_{k=1}^{m} (x_k + \alpha_k) \to \max$$
$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\,\boldsymbol{\lambda}$$
$$\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$$
$$\mathbf{1}\boldsymbol{\lambda} = 1,$$

ahol $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \ldots \mathbf{a}_r]$. Ha $\mathbf{A}$ sorvektorait $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$-el jelöljük, akkor (2) így is írható:

$$(3)\qquad \prod_{k=1}^{m} (\mathbf{b}_k\,\boldsymbol{\lambda} + \alpha_k) \to \max$$
$$\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$$
$$\mathbf{1}\boldsymbol{\lambda} = 1.$$

Az 5. axiómánk értelmében az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük' hogy $\mathbf{A} > \mathbf{0}$. Mind (2), mind pedig a (3) célfüggvénye a lehetséges tartományon pozitív és minthogy konkáv függvények szorzata, ezért szigorúan kvázikonkáv. (Lásd [4], 61. o. 47. tétel.) Ennek következménye, hogy minden lokális maximumpont egyúttal globális is. (Ugyanakkor, minthogy $\mathbf{A} > \mathbf{0}$, a kvázikonkáv célfüggvény gradiense mind a (2), mind a (3) feladat esetében pozitív. Ezért minden stacionárius pont globális maximumpont, mint ahogy azt a [3] 71. oldalán található V. tétel kimondja. Ez lehetővé teszi, hogy a (2), ill. a (3) feladat megoldására a nemlineáris programozás hatékony lokális módszereit (pl. a gradiens módszer változatait) alkalmazzuk.

Ha a (2) feladat célfüggvényének logaritmusát vesszük (minthogy a log monoton növekvő függvény, ezt megtehetjük, az optimumhelyek változatlanok maradnak), akkor az alábbi feladatot kapjuk:

$$(4)\qquad \sum_{k=1}^{m} \log (x_k + \alpha_k) \to \max$$
$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\boldsymbol{\lambda}$$
$$\lambda \geq \mathbf{0}$$
$$\mathbf{1}\boldsymbol{\lambda} = 1,$$

amelynek célfüggvénye konkáv, szeparábilis, s így a log $(x_k - \alpha_k)$ függvényeknek kellő finomságú, szakaszonként lineáris közelítésével lineáris programozási feladatot kapunk (lásd [3]).

Az eddigiekből kitűnik, hogy a többkritériumú döntések elméletében alapvető szerepet játszó és a gyakorlati alkalmazásoknál oly problematikus súlyozás kérdését nem érintettük, a ,,legjobb kompromisszum'' kiválasztásánál nem játszott szerepet. Az egyes kritériumok relatív fontosságát jellemző paraméterek beépítése nélkül — úgy tűnik — értelmes döntés azonban nem képzelhető el. Amíg a hagyományos döntési eljárások esetében expliciten vagy impliciten az egyes kritériumok relatív súlyát használjuk, addig esetünkben az $\boldsymbol{\alpha}$ status quo pont (,,büntetés vektor'') megválasztásának van centrális jelentősége. Az egyes kritériumok relatív fontosságát az $\boldsymbol{\alpha}$ megválasztásán keresztül juttatjuk érvényre.

Az alábbiakban néhány racionálisnak tűnő lehetőséget említünk meg az $\boldsymbol{\alpha}$ paramétervektor megválasztására. Konkrét döntési szituációkban természetesen mérlegelni kell, hogy ezek közül melyiket (esetleg valami mást) alkalmazzuk.

1. Tegyük fel, hogy a döntéshozónak az a feladata, hogy egy $\mathbf{a}_0$ pozitív vektorral jellemzett ,,szituációt'' javítson és a javításra rendelkezésre álló r lehetőség közül kell választani. Ezeket a lehetőségeket jellemzik az $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$ vektorok. Feltételezzük, hogy az $\hat{\mathbf{a}}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$ vektoroknak van olyan $\hat{\mathbf{a}}$ konvex lineáris kombinációja, hogy $\mathbf{a}_0 < \hat{\mathbf{a}}$. Ekkor az $\alpha = \mathbf{a}_0$ választás lehetséges és úgy interpretálható, hogy ha ,,döntésképtelenség'' miatt az r javítási lehetőség közül nem tudunk választani, akkor a helyzet marad a régiben, továbbra is $\mathbf{a}_0$ jellemzi.

2. Ha a döntéshozó nem tud választani az r lehetőség közül, akkor valamilyen véletlen mechanizmus fog választani a $\mathbf{p}$ eloszlás szerint, amit vagy ismerünk, vagy becsülni tudunk. Ha $\mathbf{A}\,\mathbf{p} > \mathbf{0}$ és van olyan $\mathbf{a} \in P$, hogy $\mathbf{A}\,\mathbf{p} < \hat{\mathbf{a}}$, akkor lehetséges az $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}\,\mathbf{p}$ választás.

3. Legyen $\mathbf{A} > \mathbf{0}$ és $\alpha_i = \min a_{ij}$, $(i = 1, \ldots, n)$. Az így definiált $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ vektort tekintsük ,,büntetés'' vektornak. E mögött a választás mögött az a gondolat húzódik meg, hogy ha semmit nem tudunk a döntésképtelenség várható következményéről, akkor minden ,,játékos'' (kritérium) számíthat a legrosszabb eset bekövetkezésére is s így egy összességében ugyan általában soha elő nem forduló, de komponensenként reális veszélyt kifejező ,,ideálisan'' rossz ponttól való ,,távolodás'' kívánatos lehet a döntéshozó számára.

4. Utoljára hagytuk azt az esetet, amikor a ,,döntésképtelenség'' még mint elvi lehetőség sem jöhet szóba, csupán formálisan, mint matematikai konstrukcióval számolhatunk vele. Más szóval ez azt jelenti, hogy azt a megoldást keressük (ha létezik), amelyet akkor kapunk, ha a ,,büntetés'' tart a végtelenhez. Ezért feltesszük, hogy

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha \mathbf{r}$$

ahol $\mathbf{r}$ egy pozitív vektor, amely az egyes játékosoknak büntetésből való részesedését reprezentálja, α pedig egy paraméter, amely a büntetés mértékét fejezi ki.

A (2) feladat optimális megoldása az $\boldsymbol{\alpha} = \alpha\mathbf{r}$ helyettesítés esetén, amelyet $\mathbf{x}(\alpha)$-val jelölünk, általában függvénye az α paraméternek. Ha azonban veszünk egy $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, végtelenbe tartó sorozatot, akkor az $\{\mathbf{x}(\alpha_k)\}$ sorozatnak, amelynek elemei az 1. tétel értelmében egyértelműen meghatározottak, van legalább egy torlódási pontja, mivel P zárt és korlátos. Az azonban egyáltalán nem nyilvánvaló, hogy ennek a sorozatnak csak egy torlódási pontja van. Ezt a koncepcionális nehézséget oldja fel az alábbi tétel.

Tekintsük az alábbi programozási feladatot:

$$
(5)\qquad \begin{aligned}
F(\alpha):\ &\prod_{k=1}^{m}(x_k+\alpha_k)\to \max\\
&\mathbf{x}=\mathbf{A}\boldsymbol{\lambda}\\
&\boldsymbol{\lambda}\geq \mathbf{0}\\
&\mathbf{1}\boldsymbol{\lambda}=1.
\end{aligned}
$$

2. *tétel*. Az $\{\mathbf{x}(\alpha_k)\}$ sorozatnak pontosan egy torlódási pontja van, ha $\alpha_k\to\infty$, $(k=1,2,\ldots,)$.

Bizonyítás

Az $F(\alpha)$ feladat célfüggvénye az α pozitív paraméter m-fokú polinomja. Legyen ez a polinom

$$
s(\mathbf{x},\alpha)=h_m(\mathbf{x})\,\alpha^m+h_{m-1}(\mathbf{x})\,\alpha^{m-1}+\ldots+h_1(\mathbf{x})\,\alpha+h_0(\mathbf{x}).
$$

Azt tudjuk, hogy $s(\mathbf{x},\alpha)$ bármely rögzített pozitív α esetén kvázikonkáv az R^+ pozitív ortanson. Legyen $K\subset R^+$ egy tetszőleges konvex halmaz. Tegyük fel, hogy j az a legnagyobb index, amelyre $h_j(\mathbf{x})$ nem konstans a K halmazon. Azt állítjuk, hogy ekkor $h_j(\mathbf{x})$ kvázikonkáv. Tegyük ugyanis fel az ellenkezőjét, vagyis hogy van olyan $\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2\in K$, és olyan λ, $(0<\lambda<1)$, hogy $h_j(\lambda\mathbf{x}_1+(1-\lambda)\mathbf{x}_2)<\min(h_j(\mathbf{x}_1),\ h_j(\mathbf{x}_2))$. Ez azt jelenti, hogy elég nagy α esetén $s(\lambda\mathbf{x}_1+(1-\lambda)\,\mathbf{x}_2,\alpha)<\min(s(\mathbf{x}_1,\alpha),\ s(\mathbf{x}_2,\alpha))$, ami ellentmond annak, hogy $s(\mathbf{x},\alpha)$ kvázikonkáv R^+-on.

Legyen $P^m\equiv P$ és P^k a

$$
(2)\qquad \begin{aligned}
&h_k(\mathbf{x})\to\max\\
&\mathbf{x}\in P^{k+1}
\end{aligned}
$$

programozási feladat optimális megoldásainak halmaza $(k=m-1,\ldots,1,0)$. Nyilvánvaló, hogy

$$
P^m\supseteq P^{m-1}\supseteq\ldots\supseteq P^1\supseteq P^0
$$

és a (6) feladat minden k-ra megoldható, hiszen P zárt és korlátos, $h_k(\mathbf{x})$ pedig folytonos $(k=0,\ldots,m)$, (egy többváltozós polinom). A P^m konvex, és $h_j(\mathbf{x})$, $(j\geq k+1)$ konstans a P^{k+1} halmazon, így a $h_k(\mathbf{x})$ kvázikonkáv P^{k+1}-en. Ez azt jelenti, hogy a P^k is konvex minden k-ra. P^0 biztosan egy pontból áll, hiszen az utolsó feladat:

$$
(7)\qquad \begin{aligned}
&h_0(\mathbf{x})\equiv x_1,x_2,\ldots,x_r\to\max\\
&\mathbf{x}\in P^1
\end{aligned}
$$

aminek pontosan egy megoldása van, hiszen (7) ekvivalens az

$$\ln x_1 + \ln x_2 + \ldots \ln x_r \to \max$$

$$\mathbf{x} \in P^1$$

feladattal, aminek a célfüggvénye szigorúan konkáv.

Azt állítjuk, hogy a P^0 egyetlen eleme $\mathbf{x}_0$ az $\{\mathbf{x}(\alpha_k)\}$ sorozat egyetlen torlódási pontja. Tegyük fel, hogy az $\{\mathbf{x}(\alpha_k)\}$ sorozatnak van olyan $\mathbf{x}_1$ torlódási pontja, melyre $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{x}_1$. Elegendő azt belátnunk, hogy $s(\mathbf{x}_0, \alpha) \equiv s(\mathbf{x}_1, \alpha)$, hiszen ez lehetetlen, mivel P^0-nak csak egy eleme van.

Tegyük fel, hogy $s(\mathbf{x}_0, \alpha) \not\equiv s(\mathbf{x}_1, \alpha)$ és hogy j az a legnagyobb index, amelyre $h_j(\mathbf{x}_0) > h_j(\mathbf{x}_1)$. Ekkor van olyan α_0, hogy minden $\alpha \geq \alpha_0$ esetén $s(\mathbf{x}_0, \alpha) > s(\mathbf{x}_1, \alpha)$. Mivel $\mathbf{x}_1$ torlódási pont, ezért minden $K(\mathbf{x}_1, \varepsilon)$ környezetében végtelen sok $\mathbf{x}(\alpha_k)$ pont van. A környezet sugarát, ε-t meg lehet választani olyan kicsinek, hogy $h_j(\mathbf{x}_0) > h_j(\mathbf{x}(\alpha_k))$ és $s(\mathbf{x}_0, \alpha_0) > s(\mathbf{x}(\alpha_k), \alpha_0)$ fennállnak minden $\mathbf{x}(\alpha_k) \in K(\mathbf{x}, \varepsilon)$ esetén. Ebből következik, hogy $s(\mathbf{x}_0, \alpha) > s(\mathbf{x}(\alpha_k), \alpha_0)$ fenn áll minden $\alpha \geq \alpha_0$ és $\mathbf{x}(\alpha_k) \in K(\mathbf{x}, \varepsilon)$-ra. Elég nagy k-ra $\alpha_k \geq \alpha_0$ s így $s(\mathbf{x}_0, \alpha_k) > s(\mathbf{x}(\alpha_k), \alpha_k)$, ami ellentmond annak, hogy $\mathbf{x}(\alpha_k)$ az $F(\alpha_k)$ feladat optimális megoldása.

A bizonyításból kiderül, hogy a torlódási pont meghatározásához legfeljebb m programozási feladatot kell megoldani, kvázikonkáv célfüggvényekkel. Mivel $h_{m-1}(\mathbf{x}) \equiv \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j \neq i} r_j\right) x_i$ lineáris, ezért ezek közül az első feladat

$$h_{m-1}(\mathbf{x}) \to \max$$

$$\mathbf{x} \in P$$

egy lineáris programozási feladat, amelynek általában (duál-degeneráció mentes esetben) egy megoldása van s az is P csúcspontja, vagyis egy eredeti („tiszta") alternatíva.

Kritikus szerepe van az $\mathbf{r}$ arányvektor megválasztásának is. Egy racionálisnak tűnő lehetőség az $\mathbf{r}$ vektort úgy megválasztani, hogy az egyes kritériumokat jellemző numerikus értékek nagyságrendjét reprezentálják. Ennek legegyszerűbb megvalósítása, ha

$$r_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

tehát a büntetés az átlagos értékek arányában tart a végtelenhez döntésképtelenség esetén.

Érdemes megjegyezni, hogy abból, hogy a (2) feladatnak egyetlen optimális megoldása van, egyáltalán nem következik, hogy a λ vektor is egyértelműen meghatározott. Elképzelhető, hogy ugyanazt a „legjobb" következmény vektort különböző alternatívák keverésével is előállíthatjuk. Ez egyféle szelekciót tesz lehetővé az alternatívák között, hiszen azokat az alternatívákat, amelyek az optimális következményvektor egyetlen keverésében sem szerepelnek pozitív súllyal, a döntéshozás további folyamatában figyelmen kívül hagyhatjuk.

Példaként tekintsük a következő négy alternatívát, amelyeket két kritérium alapján értékelünk:

$$\begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}, & \begin{bmatrix}1\\6\end{bmatrix}, & \begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}, & \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}. \end{array}$$

A G játékban mindkét játékos stratégiahalmaza: $S=\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$. A kifizetőfüggvények:

$$f_1(A_1, A_1) = 2 \qquad f_2(A_1, A_1) = 3$$

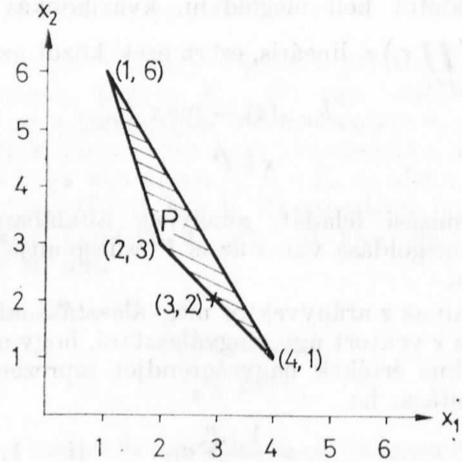
$$f_1(A_2, A_2) = 1 \qquad f_2(A_2, A_2) = 6$$

$$f_1(A_3, A_3) = 4 \qquad f_2(A_3, A_3) = 1$$

$$f_1(A_4, A_4) = 3 \qquad f_2(A_4, A_4) = 2$$

$$f_1(A_i, A_j) = -\alpha_1, \ (i \neq j), \quad f_2(A_i, A_j) = -\alpha_2, \ (i \neq j).$$

A P poliédert az alábbi ábra szemlélteti:



1. ábra

Ha status quo pontnak az $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ pontot választjuk (mindkét kritérium szerint a legrosszabb érték 1), akkor a (2) feladat optimális megoldásaként az $\begin{bmatrix}\frac{5}{2}\\[4pt]\frac{7}{2}\end{bmatrix}$ pontot kapjuk, ami azt jelenti, hogy az A_2 és A_3 alternatívákat $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ valószínűségekkel kell választani.

Ha az alternatívákat jellemző vektorok átlagát vesszük, ez $\begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ 3 \end{bmatrix}$ és a status quo pontnak a $-\alpha \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ 3 \end{bmatrix}$ pontot, ahol α egy pozitív paraméter, akkor $\alpha \geq \frac{26}{7}$ esetén mindig az $\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$ pontot, vagyis az A_2 alternatívát kapjuk „legjobb kompromisszumnak".

Az előzőekben leírt játékelméleti megközelítési módot a lineáris vektormaximum (LVM) problémára is alkalmazhatjuk. Az LVM a következő:

$$\begin{aligned} &\mathbf{C}\,\mathbf{x} \to \text{„max"} \\ (8) \qquad &\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \\ &\mathbf{A}\,\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \end{aligned}$$

ahol $\mathbf{C}$ egy $m \cdot n$-es mátrix (m kritériumunk van). Itt a lehetséges alternatívák halmaza az $L = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{A}\,\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$ poliéder. Ha L csúcspontjait tekintjük „tiszta" alternatíváknak, akkor L tulajdonképpen ezeknek az összes lehetséges konvex lineáris kombinációja. A csúcspontok közül ki lehet választani az efficienseket. Erre számos módszer ismert (pl. [1], [6]), amelyek nem túl nagy m esetén elég hatékonyak. Ha lehetséges tiszta alternatíváknak ezeket a csúcspontokat, P poliédernek pedig az összes konvex lineáris kombinációját tekintjük, akkor máris az előzőekben tárgyalt modellnél vagyunk. A különbség csak annyi, hogy itt a „keverés" megengedése már eleve a probléma természetéhez tartozik, hiszen a (6) feladat lehetséges megoldásainak halmaza ezeket a „kevert" megoldásokat tartalmazza.

(Beérkezett: 1980. augusztus 15-én.)

IRODALOM

1. Evans, J. P.—Stever, R. E.: A revised simplex method for linear multiple objective programs. Mathematical Programming, Vol. 5. No. 1. 1973.
2. Harsányi, J. C.: Rational behaviour and bargaining equilibrium in games and social situations. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1977.
3. Krekó, B.: Optimumszámítás. Közgazdasági és Jogi Kiadó, Budapest, 1966.
4. Martos, B.: Nonlinear programming theory and methods. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1976.
5. Nash, J.: The bargaining problem. Econometrica, 18, 155—162.o., 1950.
6. Philip, J.: Algorithms for the vector maximization problem. Mathematical Programming 2 (2), 1972. 207—209. o.
7. Roy, B.: Problems and methods with multiple objective functions. Mathematical Programming. Vol. 1. No. 2. 1971.
8. Shapley, L. S.: A value for n-person games. In contributions to the Theory of Games II. Annals of Math. Studies, 28. Princeton N. J. Princeton University Press, 1953.
9. Szép, J.—Forgó, F.: Bevezetés a játékelméletbe. Közgazdasági és Jogi Kiadó, Budapest, 1974.
10. Szidarovszky, F.: A kooperatív játékok Nash-féle megoldáskoncepciójának általánosítása. SZIGMA, IX. (1978), 1—2, 69—74. o.
11. Zeleny, M.: Linear multiobjective programming. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 95. Springer, 1976.

MULTICRITERIA DECISION-MAKING: A GAME THEORETICAL APPROACH

In the article the following problem is dealt with: choice has to be made on the basis of m criteria from a finite number of numerically characterized alternatives. To this problem a cooperative m-person game is associated where side-payment is not allowed. A point of the polihedron spanned by the alternatives is uniquely determined by the axioms given by *Nash* for the case of two-person games and by *Szidarovszky* for n-person games. Under certain circumstances this point can justly be regarded as the ,,solution'' of the decision-making problem. In the article characteristics of this solution are examined and interpreted, as well as possibilities of its determination are dealt with.

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЯ НА ОСНОВАНИИ НЕСКОЛЬКИХ КРИТЕРИЕВ: ПОДХОД В АСПЕКТЕ ТЕОРИИ ИГРЫ

В данной статье рассматривается следующая проблема: на основании «m» критериев необходимо выбрать конечное число численно охарактеризованных альтернатив. Проблем поставим в соответствие кооперативной игре «m», лиц, в которой компенсация (side-payment) является недопустимой. Одна точка многогранника, образуемого альтернативами однозначно определяется посредством тех аксиом, которые при игре двух лиц описаны Нэшем, а при играх «n» лиц Сидаровским. Эта точка, наличии определенных условий, с полным правом может рассматриваться в качестве «решения» проблемы принятия решения. В статье рассматриваются и интерпретируются свойства этого решения, т. е. они интегрируются, рассматриваются возможности ее определения.

Zsolnai László

Metodológiai megjegyzések Kornai János: „A hiány" c. könyvéhez

„A hiány" [4] föltehetően a hazai és a nemzetközi közgazdaságtudomány érdeklődésének homlokterébe kerül.[1] Ez azonban még nem indokolja, hogy metodológiai szempontból külön foglalkozzunk vele. Mégis ezt tesszük, s ennek oka: *Kornai munkáját nemcsak szaktudományosan, de metodológiailag is kimagasló értékűnek és jelentőségűnek ítéljük.* Ezért *bátran állíthatjuk metodológiai mintaképnek a közgazdaságtudományi, és sok vonatkozásban, más társadalomtudományi teoretikus kutatás elé.* A továbbiakban ezeket az értékeléseket tartalmazó kijelentéseket fogjuk részletesen alátámasztani.

A metodológia kifejezést tudományelméleti értelemben használjuk, vagyis nem módszertant (metodikát) értünk alatta. A metodológia a kutatásra vonatkozó stratégiai és taktikai jellegű megfontolásokat jelenti, amelyek a kutatás korrekcióját, jobbítását célozzák. A metodológiával ma már a tudománytanon belül önálló ismeretkörök foglalkoznak. Ezek az általános metodológia és az egyes szakmetodológiák [16].

A közgazdaságtudományi munkák metodológiai elemzése és értékelése három célból is hasznos lehet:

a) hozzájárulhat a közgazdaságtudományi kutatások színvonalának az emeléséhez,

b) segítheti az elemzett-értékelt munka jobb megértését,

c) mód nyílik olyan kutatási eredmények közvetítésére is, amelyeket a közgazdász kutatók viszonylag kevésbé ismernek. A modern tudományelmélet és a modern logika eredményeire gondolunk főként.

Kornaitól sohasem voltak idegenek az ismeretelméleti és metodológiai problémák. Sőt, a hazai közgazdaságtudományban egyike azon keveseknek, akik munkáikban metatudományos és metakutatási kérdéseket is boncolgatnak [1], [2], [3], [4], [5]. Így igencsak indokoltnak látszik, hogy „A hiány"-t metodológiai szempontból elemezzük és értékeljük. Megjegyzéseink három csoportba sorolhatók. Vannak olyanok, amelyek „A hiány"-ban alkalmazott metodológiai meggondolásokat „bontják ki", teszik explicitté tudományelméletileg. Más megjegyzéseink Kornai metodológiáját gondolják tovább — főként logikai szempontból. Végül lesz kritikai jellegű észrevételünk is. Mielőtt azonban ezekre rátérhetnénk, röviden le kell szögeznünk egyet s mást.

„A hiány"-ban Kornai vizsgálódási területe a hiánygazdaság és a szocialista gazdaság „metszete", ezek érintkezési pontjai (17—21. o.). Kornai régebb óta küzd a szocialista gazdaság leíró és normatív megközelítésének az éles

[1] „A hiány" a magyar kiadással egyidőben angol nyelven is megjelent.

elhatárolásáért [2]. Sőt, egyik legújabb írásában tagadja, hogy létrejöhet egy olyan ,,zárt, konzisztens társadalmi-gazdasági normatív elmélet, amely ellentmondás nélkül érvényre juttatna egy politikai-etikai értékrendet, és ugyanakkor biztosítaná a gazdálkodás hatékonyságát. Lehetetlen, ha realisztikus kíván lenni, és számításba akarja venni az emberek, közösségek, szervezetek, társadalmi csoportok valóságos természetét" [3]. Nos, ,,*A hiány" tisztán leíró elmélet.* Egyedüli célja a tanulmányozott valóságdarab meghatározottságainak minél reálisabb elméleti megismerése. Ennyi, és csak ,,ennyi"! A Kornai által vizsgált tudományos problémák a gazdasági jelenségek tulajdonságaira, milyenségére kérdeznek, a jelenségek közötti összefüggésekre, kapcsolatokra irányulnak. Kornai kizárólag a ,,Micsoda x jelenség?" típusú problémákra keres választ[2] [12].

,,A hiány"-nak vannak elmélettörténeti előzményei, mégsem szerves folytatása a korábbi kutatásoknak. *Kornai szemlélete szakterülete eddigi eredményeivel kapcsolatban ui. maximálisan kritikai.* Elhatárolja magát a vonatkozó tudományos ismeretek nagy részétől. Csak a legfontosabbakat említjük meg. Kornai szakít a standard polgári mikroökonómiával és a Clower—Barro—Grossman irányzattal is. Ez abban mutatkozik, hogy egyrészt Kornai az irányzatok jónéhány tételét kereken elutasítja. Az el nem utasított tételek jórészét viszont kénytelen átfogalmazni, pontosabb alakra hozni. Másrészt Kornai teljesen távol tartja magát a szocializmus közgazdaságtana rosszízű, sematikus-spekulatív részétől. *Mindazonáltal Kornai a tévedés igen kicsi kockázatát vállalja: óvatos.* Kizárólag olyan hipotéziseket közöl, amelyek igen koherensek egymással, és a közgazdász szakemberek és gazdasági vezetők (alá nem becsülhető) múlt és jelenbeli tapasztalataival legnagyobbrészt egybevágnak.[3]

1. Összefüggés és vizsgálati szint

A tudományos ismeretekkel szemben alapvető követelmény, hogy pontosan meg lehessen vonni érvényességi körüket. Ennek három, szükséges és elegendő föltétele van. Tudnunk kell, hogy a vizsgálati objektumot milyen összefüggésben tekintették, azaz milyen más objektumokkal hozták összefüggésbe. Ismernünk kell továbbá a vizsgálat szintjét: a vizsgálati szélességet és a vizsgálati mélységet. Ez azt jelenti, hogy tudnunk kell, a vizsgálati objektum mely jellemzőit vették tekintetbe, és azokat milyen pontossággal, milyen közelítéssel vizsgálták [21]. Kornai rendkívüli pontossággal tesz eleget ezeknek — a társadalomtudományi kutatásokban nem könnyen teljesíthető — követelményeknek. Külön kategóriákat dolgozott ki erre a célra. Olyanokat, mint az ,,alkalmazkodás árak nélkül", az ,,alkalmazkodás árak jelenlétében", a ,,pillanatnyi-", a ,,rövid távú-", a ,,hosszú távú alkalmazkodás" stb. Így lényegében pontosan megvontható minden megállapításának az érvényességi köre.

Kornai az árfelhajtó erőkről és ellenerőkről — többek mellett — a következőket mondja: ,,A szocialista vállalatnál mind az eladó, mind a vevő szerepkörében belső motivációinak hatására árfelhajtó erők működnek. A vállalat

[2] Leszámítva persze a kutatás során fölmerült mérési, metodológiai stb. metaproblémákat, amelyek Kornainál stratégiai jellegűek (hogyan lehet megcsinálni?) [12].

[3] A maximálisan kritikai szemlélet és az óvatosság szerintünk az egyik legkedvezőbb beállítódás a lehetségesek közül. Vö.: [17], [18]!

viselkedésében megjelennek mind a költség-,,nyomásos" (cost-push) árfelhajtás tendenciái (a költségemelkedés áthárítása a vevőre áremelés formájában), mind pedig a kereslet-,,húzásos" (demand-pull) árfelhajtás tendenciái (a kielégítetlen vevő magasabb árat kínál fel)". (379—380. o.) A megállapítás érvényességi köre egyértelmű. Kornai a szocialista vállalat árfelhajtó tendenciáját az általában vett szocialista gazdaság és a hiány összefüggésében tekinti. (369—371. o.) A vizsgálati szélesség is ki van mondva: a nem-mezőgazdasági termelővállalatok közti input-output áramlások árairól van szó. (369. o.) A vizsgálati mélységre nézve pedig Kornai megmondja, hogy a vizsgálati objektumot mikroszinten és dinamikusan ragadta meg, és nem szubmikroszinten és statikusan. (383. o.)

2. Kornai alapvető metodológiai elve

,,A hiány"-ban Kornai alapvető metodológiai elve a következő: ,,meghatározott társadalmi viszonyok, intézményi adottságok meghatározott magatartási formákat, gazdasági szabályosságokat, normákat szülnek." (583. o.) Ebből az következik Kornai számára, hogy *a gazdasági jelenségek vizsgálatakor nem vonatkoztathatunk el azoktól a viszonyoktól és körülményektől, amelyek között azok léteznek*. Éppen ellenkezőleg, gazdasági jelenségeket csak adott status quo mellett vizsgálhatunk — föltéve, hogy realisták kívánunk lenni. (Vö.: 30. o.!)

2.1. *A leírás logikája*

Jelöljük az x_i egyedi névvel [9] valamelyik szocialista gazdaság egy $[t, t + \mathrm{d}t]$ időintervallumban létező, konkrét egyedi jelenségét. x_i-t akarjuk leírni. Kérdésünk az, hogy x_i leírása milyen logikai szerkezet mellett konform Kornai alapvető metodológiai elvével.

Ha x_i-t Kornai szellemében akarjuk leírni, akkor meg kell határoznunk azokat a körülményeket és viszonyokat, amelyek között x_i létezik! Nevezzük ezeket a körülményeket — Kornaihoz hasonlóan — status quo-nak. Világos, hogy az x_i-hez tartozó status quo aszerint lesz más és más, hogy x_i-t mint vizsgálati objektumot milyen összefüggésben tekintjük, és milyen a vizsgálat szintje (szélessége és mélysége).

Jelöljük az adott összefüggésben és vizsgálati szinten, $[t, t + \mathrm{d}t]$-ben az x_i-hez tartozó status quo-t a Q kifejezéssel [9]. Ekkor mondhatjuk a következő állítást:

(1) ,,x_i-re Q".

Legyen továbbá R olyan kifejezés, amellyel x_i-ről — az adott összefüggésben és vizsgálati szinten — igaz módon állítunk valamit:

(2) ,,x_i-re R".

Ezekután x_i alábbi leírása lesz konform Kornai alapvető metodológiai elvével:

(3) ,,x_i-re Q, és x_i-re R".

(3) az adott összefüggésben és vizsgálati szinten tartalmazza az x_i-hez tartozó status quo-t, és x_i egy igaz jellemzőjét. (3) persze nem tekinthető x_i

kimerítő leírásának. Inkább csak leírás „atomnak", elemi leírásnak tekinthetjük. Nyilvánvaló, hogy x_i *kielégítő leírása csak* (3) *típusú elemi leírások tömegével oldható meg.* Az is célszerűnek és hasznosnak látszik, ha a gazdasági jelenségek leírásakor vegyesen alkalmazunk kvantitatív és kvalitatív elemi leírásokat.

(3)-ból az következik, hogy ha pl. valamelyik meghatározott szocialista gazdasági rendszerben, körülhatárolt $[t, t+dt]$-ben, valamelyik részpiacon a vevők egy csoportjának az attitűdjét akarjuk leírni (ez lesz x_i), akkor nem elég az, hogy megmérjük az egyes vevők attitűdjének komponenseit, és megadjuk azok eloszlását az adott vizsgálati szinten és összefüggésben (ez lesz R). Meg kell adnunk — az adott összefüggésben és vizsgálati szinten, $[t, t+dt]$-ben — a vonatkozó részpiac kvantitatív vagy kvalitatív jellemzését is (ez lesz Q). Ha ezt nem tennénk meg, és csupán azt mondanánk, hogy ezen a részpiacon, ekkor és ekkor, ilyen és ilyen a vizsgált vevőcsoport attitűdje, ezzel fatalista és voluntarista interpretációt egyaránt megengednénk. Ti. azt az interpretációt, hogy a vevőcsoport atitűdje szükségképpen meghatározott, mintegy természeti tény, ill. hogy szubjektumoktól függő, szubjektív konstelláció, s így tetszés szerint alakítható. (Az interpretációkat szándékosan sarkítottuk. Természetesen számos finomabb, de éppígy elfogadhatatlan interpretáció képzelhető el.)

„A hiány"-ban Kornai számos helyen visszautasítja azt, hogy az általa elemzett gazdasági jelenségeket természeti objektivitásúaknak gondoljuk.[4] Pl. egy adott rendszer normál hiányáról és normál slackjéről kijelenti, hogy azok „maguk is társadalmi képződmények, a történeti fejlődés eredményeképpen jönnek létre, és társadalmi konvenciók rögzítik." (63. o.) Vagy megállapítja, hogy a terv normális feszítettségét, feszítettsége alsó és felső tűrési határát ugyancsak a történeti fejlődés menete alakítja ki, s ezek nem valahonnan „kívülről", vagy „felülről" adottak. (68. o.)

A gazdasági jelenségek szubjektívként való értelmezése éppennyire idegen Kornaitól. A szocialista gazdaságokban mindenkor és mindenütt megfigyelhető mennyiségi hajszát pl. nem a vállalati vezetők attitűdjeiből vezeti le. „Igazság szerint a kulcskérdés nem az, hogy milyen motívum gerjeszti fel a mennyiségi hajszát . . . A fő probléma: van-e olyan erő, amely ellentétes irányba hat, amely ahhoz vezetne, hogy a termelés vezetői önként visszafogják az input iránti keresletüket, s expanziós törekvéseiket?" (79. o.) Vagy a vevő és az eladó attitűdjének eltéréséről írja: „nem a vevő és az eladó lelkialkatától, jólneveltségétől vagy neveletlenségétől függ. A köztük kialakuló tehermegosztást, az egymás iránt tanúsított magatartást, a két piaci fél közti társadalmi viszonyt az erőviszonyok határozzák meg. Az erőforráskorlátos, szívásos gazdaságban az „eladók piaca" uralkodik, a keresletkorlátos, nyomásos gazdaságban pedig a „vevők piaca" (138. o.)

2.2. *A leíró elmélet „magja"*

A szocialista gazdaság valamely leíró elméletétől joggal várjuk el, hogy általánosított, törvényjellegű formában ragadja meg a szocialista gazdaság(ok)ban létező $x_1, \ldots, x_k$ konkrét egyedi jelenségeket. Megköveteljük továbbá

[4] Sajnos mind a közgazdaságtudományban, mind azon kívül föllelhető az a pozitivista szemlélet, amely a társadalmi jelenségeket a természetiek mintájára gondolja el. Így pl. a szervezetkutatásban és a pszichológiában is [14], [20].

ettől az elmélettől azt is, hogy legyen konform a Kornai-féle metodológiai alapelvvel.

Jelölje az x általános név [9] az $\{x_1, \ldots, x_k\}$ jelenséghalmaz általános elemét. Az adott összefüggésben és vizsgálati szinten az x-hez tartozó status quo-t jelölje az S kifejezés. T pedig legyen olyan kifejezés, amely attributumként állítható x-ről. Ezek után mondhatjuk a következő állítást:

(4) „S status quo mellett minden x-re T".

(4) kijelentés generálja (részlegesen vagy teljesen) a szocialista gazdaság egy leíró elméletét, amely az $\{x_1, \ldots, x_k\}$ jelenséghalmazra vonatkozik.

(4) *törvényjellegű általánosítás,* ezért róla több mindent tudunk. Pl. azt, hogy nem *föltétlenül oksági kapcsolatot fejez ki* [11], [13]. Továbbá a (4) típusú állítások olyan „erős" állítások, amelyek lehetőséget biztosítanak igaz, tényellenes feltételes kijelentések (contrafactual conditionals) megfogalmazására. A tényellenes feltételes állításoknak igen nagy a jelentőségük a tudományos elméletek számára.

A tényellenes feltételes kijelentés olyan implikáció, amelynek előtagja egy, a tényeknek ellentmondó kijelentés feltételes módba helyezve, utótagja pedig egy, ugyancsak feltételes módba helyezett, az előzőhöz kapcsolódó kijelentés [8]. Pl. „Ha a Vénuszon krokodilok élnének, akkor azok elevenszülők lennének". A tényellenes feltételes állítások azért hasznosak, mert segítségükkel el tudjuk választani egymástól a törvényjellegű és az esetleges (akcidentális) általánosításokat. Ez nagyon fontos, hiszen míg a törvényjellegű általánosítások a tudományos elméletek talán legfontosabb építőkövei, addig az esetleges általánosításoknak nincs semmi keresnivalójuk a tudományban. A „Minden krokodil elevenszülő" kijelentés pl. törvényjellegű általánosítás. Ezért képezhettünk belőle értelmes és igaz, tényellenes feltételes állítást föntebb. Viszont a „Minden Nobel díjas közgazdász nem közép-kelet-európai" állítás csak esetleges általánosítás. Semmi törvényszerűt nem fejez ki. Belőle képezhető tényellenes feltételes kijelentés pl. a következő: „Ha Leontief közép-kelet-európai lenne, akkor nem lenne Nobel díjas". Ez látványos értelmetlenség!

(4)-ből a következő tényellenes feltételes állítás képezhető:

(5) „Ha y jelenség az S status quo mellett x lenne, akkor y-ra T lenne".

Valljuk Kornai fölfogását a közgazdaságtudományról mint reáltudományról: „A reáltudományokban az elmélet: a valóság változói közötti lényeges összefüggések rendszeres leírása, kizárólag olyan tételek, megállapítások, amelyeket a valóságnak nem ellentmondó feltevésekből vezettek le, s maguk is a valóságot közvetve vagy közvetlenül, többé-kevésbé pontos közelítéssel tükrözik" [1]. (4)-től megköveteljük, hogy a szocialista gazdaság(ok)ban létező $\{x, \ldots, x_k\}$ jelenséghalmaz egy leíró reálelméletét generálja. Ha (4)-től megköveteljük, hogy részlegesen vagy teljesen igazolt legyen, akkor ennek teljesülése esetén jó esélyünk van arra, hogy leíró reálelméletet generál.

A tudományelméletben a hipotézisek igazoltságát a plauzibilitás fogalmával explikálják. A hipotézisek plauzibilitásai matematikailag nézve speciális feltételes logikai valószínűségek, s ezért a [0,1] zárt intervallumon vannak értelmezve [15]. Meg szokták különböztetni a hipotézisek előzetes, azaz fölülvizsgálat előtti (a priori) és utólagos, azaz fölülvizsgálat utáni (a posteriori) plauzibilitásait [17]. A fentiek alapján, ha egy hipotézis előzetes plauzibilitása a (0,5, 1] intervallumba esik, akkor előzetes igazoltsága elég nagy.[5] Ezért (4)-től azt kell megkövetelnünk, hogy előzetes plauzibilitása nagyobb legyen, mint 0,5 és kisebb, vagy egyenlő 1. Ez persze csak szükséges, de nem elegendő föltétele annak, hogy a (4) által generált leíró elmélet reálelmélet legyen.

Nézzük mindezt egy konkrét, Kornainál szereplő esetben. Kornai igen fontos hipotézise a következő:

(6) „A hagyományos szocialista gazdaságban a vállalat költségvetési korlátja puha." (330. o.)

Belátható, hogy (6) szerkezetét tekintve (4) típusú, ui. x = a vállalat költségvetési korlátja, S = hagyományos szocialista gazdaságban létezik és T = puha. Továbbmenve megállapíthatjuk, hogy (6)-ból értelmes és igaz tényellenes feltételes kijelentések képezhetők. Pl. „Ha a Siemens hagyományos szocialista gazdaságban létező vállalat lenne, akkor költségvetési korlátja puha lenne."

Írja Kornai, hogy (6) empirikus fölülvizsgálatot igényel. (330. p.) Mindazonáltal (6) előzetes plauzibilitása — megítélésünk szerint — maximális, azaz egyenlő 1-gyel. Ezért (6)-ot tudásunk jelenlegi szintjén biztosan igaznak tekinthetjük.[6] Így jó esélyünk van arra, hogy (6) a hagyományos szocialista vállalat egy leíró reálelméletét generálja. És generálja is!

A hagyományos szocialista vállalatról többek között az alábbi megállapításokat találjuk Kornainál:

(6.1) „A vállalat továbbélése nemcsak attól függ, hogy képes-e tartósan fedezni outputjai eladásának bevételéből inputjai megvásárlásának kiadásait. Még ha az utóbbi tartósan több is az előbbinél, ezt ellensúlyozhatja adókedvezmény, állami adomány, puha hitel stb. A termelésből eredő bevétel és a termelés okozta kiadás közti különbözet nem élet-halál kérdés." (324. o.)

(6.2) „A vállalat műszaki fejlődése és növekedése nemcsak attól függ, vajon képes-e belső pénzfelhalmozásból előteremteni a beruházás forrásait. . . . A fejlődéshez és növekedéshez szükséges többlet inputok vásárlásához szükséges pénzügyi forrásokat szolgáltathatja az állam is ingyenes adományokkal, valamint a puha elvek szerint folyósított beruházási hitel." (324. o.)

(6.3) „A vállalat élete és növekedése nem függ az áraktól. Ha akar, odafigyel az árakra, de ha nem akar, hát nem figyel oda. Ha az utóbbit tenné — ettől még életben maradhat, sőt növekedhet is." (324–325. o.)

(6.4) „A vállalat nem viseli egymaga a kockázatot, hanem megosztja azt az állammal. Ha körülményei szerencsésen alakultak, akkor nem lehet biztos abban, hogy a többletnyereség az övé marad: valószínű, hogy lefölözik. Ha azonban balszerencse érte, vagy önmaga rosszul alkalmazkodott a körülményekhez, a következményeket valószínűleg át tudja hárítani másra: a vevőire, a hitelezőire, s mindenekelőtt az államra." (325. o.)

(6.5) „A vállalatnak az inputok iránti kereslete majdnem-kielégíthetetlen", ami azt jelenti, hogy „a kereslet nem «igazán» végtelen — csak éppen a végtelen felé mutató tendencia uralkodik rajta, ellentendenciák és korlátok által némiképp lefékezve." (325. o. és 116. o.)

[5] A plauzibilitások gyakorlati meghatározásáról lásd [18]!

[6] Biztosan igaz egy hipotézis akkor és csakis akkor, ha a plauzibilitása (itt előzetes plauzibilitása) maximális, azaz 1. [18].

A (6.1), . . . , (6.5) tételek empirikus ellenőrzésre szorulnak — írja Kornai. (326—327. o.) Ez igaz, előzetes plauzibilitásukat azonban „magasra" értékeljük: valószínűen igaznak[7] ítéljük őket. Látható, hogy (6), (6.1), . . . , (6.5) hierarchikus rendet alkotnak, és tartalmukban szervesen kapcsolódnak. Ezek miatt *a* {(6), (6.1), . . . , (6.5)} *kijelentés-halmazt a hagyományos szocialista vállalat leíró reálelmélete egyik „magjának" tekinthetjük.*[8]

3. Kornai kutatói alapállása

A 2.1. pontban már utaltunk Kornai kutatói alapállására, jóllehet negatív formában. Leírtuk, hogy Kornai elutasítja a gazdasági jelenségek természeti objektivitásának kimondott vagy ki nem mondott hirdetését, valamint szubjektívként való elgondolásukat. Most nézzük részletesebben és pozitív formában Kornai kutatói alapállását!

Kornai az általa vizsgált gazdasági jelenségeket nagymértékben öndeterminálttaknak tartja. Ez azt jelenti, hogy azok nem kívülről határozódnak meg, hanem belső viszonyok és körülmények által determináltak.[9]

Kornai ábrázolásában a gazdasági jelenségek határozottan dialektikusak, ami itt annyit tesz, hogy az adott gazdasági rendszer aktorainak a harca alkotja őket, ill. abból fakadnak. Jól megmutatkozik ez a szemlélet abban, amit Kornai az árak alakulásáról mond: „az árak alakulása a központi árpolitika és a vállalati törekvések együttes eredője, azok konfliktusainak és kompromisszumainak eredményeképpen változik vagy marad változatlan." (369. o.)

Már többször említettük, hogy Kornai tagadja a gazdasági jelenségek szubjektív természetét. Tagadja, hogy a gazdasági rendszer aktorai „szabad", „alkotó" alanyok lennének. Ez azonban *nem jelenti azt, hogy a tárgyalt jelenségek* — Kornai szerint — *ne lennének részben teleológikusak,* azaz ne játszanának bennük jelentős szerepet az aktorok célkitűzései, amelyek azonban nem nagyon nagy szabadságfokú döntések eredményei. E vonatkozásból igen tanulságos az, amit Kornai a tervező látásmódjáról és „feltételes reflexei"-ről ír. (299—303. o.)

Végül, de nem utolsó sorban *Kornai kutatói alapállásának fontos komponense a gazdasági jelenségek statisztikus jellegének a „posztulálása"*. Az a föltevés, hogy a gazdasági jelenségek egymástól jórészt független, különböző akciók együttes eredményei. Így ír erről: „A hiány, a slack, a kényszerhelyettesítés, az output összetételének módosítása és a többi kapcsolódó folyamat minden pillanatban szubmikroszintű elemi események millióinak formájában jelenik meg. . . . igyekeznünk kell megadni a jelenségek statisztikus leírását." (61. o.)

Kornai kutatói alapállását — mostani kutatási eredményein túl — *a modern tudományelmélet is teljes mértékben hitelesíti* [13]. Mi is rendkívüli értékűnek tartjuk. Külön kiemeljük, hogy Kornainál nem ismeretelméleti szólamok hangoztatásáról van szó — amit máshol gyakran tapasztalunk —, hanem egy releváns és helytálló kutatói alapállás szigorú keresztülviteléről.

[7] Valószínűen igaz egy hipotézis akkor és csakis akkor, ha plauzibilitása (itt előzetes plauzibilitása) nagyobb, mint 0,5 és kisebb vagy egyenlő 1. [18].

[8] Más magot is találunk Kornainál. Vö. pl. az állam és a hagyományos szocialista vállalat viszonyáról mondottakat! (576—578. o.)

[9] Fontos amit Kornai a politika „endogén" jellegéről mond (396. o.). Így közelebb kerül a Polányi-féle „társadalomba ágyazott gazdaság"-hoz [6].

A következőkben sorra vesszük ,,A hiány" néhány jelentős kutatási ,,fogását", amelyek persze Kornai kutatói alapállásából következnek. Előbb az empíriával, majd az elméleti megismeréssel összefüggő ,,fogásokat" vesszük szemügyre.

3.1. *Az empíria*

Kornai igen fontosnak tartja, hogy alapvető fogalmai operacionalizáltak legyenek: ,,A természettudományokban kialakult gyakorlatnak megfelelően egy kategória egyértelmű definícióját tulajdonképpen azzal adjuk meg, hogy megjelöljük megfigyelésének és mérésének módját. Azt kell megállapítanunk, hogy a szóban forgó kategória által tükrözött jelenség megfigyelhető-e, és mérhető-e?" (57. p.) Nos, ,,A hiány" alapvető fogalmai: a hiány, a slack, a súrlódás, a költségvetési korlát puhaságának-keménységének a foka stb. empirikusan megragadható, bár nem könnyen. Kornai úgy jár el, megjelöli a kategóriáit egzaktan explikáló z, q, w, β stb. vektorokat, majd lehetséges megfigyelési, ill. mérési utasításokat ad meg ezek komponenseinek meghatározásához. Így *,,A hiány" alapfogalmai empirikus tartalmukat tekintve nem üresek*, mint ahogy ennek ellenkezője a társadalomtudományi teoretikus kutatásoknál olyan gyakran megesik.

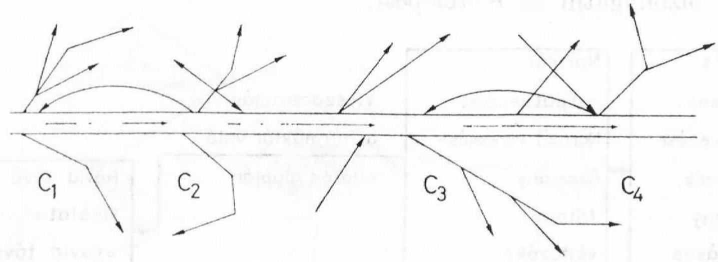
Igen fontos, ahogyan Kornai a normál állapotot értelmezi: ,,A normál állapot nem egyszerűen folyamatok jellemzőinek intertemporális átlaga. Egy rendszer normál állapotáról akkor lehet érdemlegesen beszélni, ha létezik olyan szabályozási mechanizmus, amely kibillenések esetén újra és újra visszatereli a rendszert normál állapotába." (146. o.) Ez az értelmezés igen hasznosnak bizonyul a továbbiakban, ui. lehetőséget ad Kornainak arra, hogy az általános összefüggéseket a tényezők normál értékei (z^*, q^*, w^*, β^* stb.) közti összefüggésekként értelmezze. Fontos szerep jut még a normál értéknek a szocialista gazdaság árképzési elvének tárgyalásakor (391 o.), de máshol is.

Kornai saját hipotéziseivel szemben, és ezeken keresztül egész elméletével szemben, következetesen támasztja azt az igen fontos követelményt, hogy azok ,,tapasztalatilag tesztelhetők", azaz empirikusan fölülvizsgálhatók legyenek. Hipotéziseihez meg is adja azok empirikus fölülvizsgálásának lehetséges eljárásait, ill. ezek egy részét. Nem verifikációs vagy falzifikációs eszközök ezek! Nem tartható ui. sem a verifikációs teória, sem a popperi falzifikációs elmélet: véges empíria nem igazolhat, de nem is cáfolhat meg teljes mértékben egy hipotézist, még kevésbé egy elméletet. Az empíria és elméleti ismeretek viszonyára csak a *Duhem—Quine* fölfogás alkalmazható érdemlegesen. Eszerint, *az empíria hipotéziseink (elméleteink) módosítására, átalakítására jó*, amire akkor van szükség, ha elméleti megismerésünk és empíriánk eltérései elérnek egy kritikus küszöböt. Olyan küszöb ez, amin túl már racionálisan nem tudjuk, vagy nem akarjuk ,,eltűrni" empíriánk és elméleti megismerésünk divergenciáját, ,,elhajlását" [22].

3.2. *Az elméleti megismerés*

Az oksági láncoknak igen nagy a szerepük az elméleti megismerésben. Tisztában kell lennünk azonban korlátaival. Legyen pl. $C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow C_3 \rightarrow C_4$ egy egyszerű oksági lánc. *M. Bunge* sémája (1. ábra) igen plasztikusan demonstrálja azt, hogy az ,,oksági lánc egyoldalú kiemelés a kölcsönös kapcsolatok gazdag hálójából." [13].

Komoly veszély leselkedik ránk, ha figyelmen kívül hagyjuk, vagy elfelejtjük, hogy az oksági láncok a valóságos folyamatok durva rekonstrukciói. A veszély az, hogy az oksági láncokat azonosítjuk magukkal a valóságos folyamatokkal, és ezek alapján abszurd következtetésekre jutunk [13]. És ehhez tegyük még hozzá: *a gazdasági jelenségek erősen nem-kauzális természetűek*, ha föltételezzük róluk az öndeterminációt, a dialektikát, a részleges teleológiát

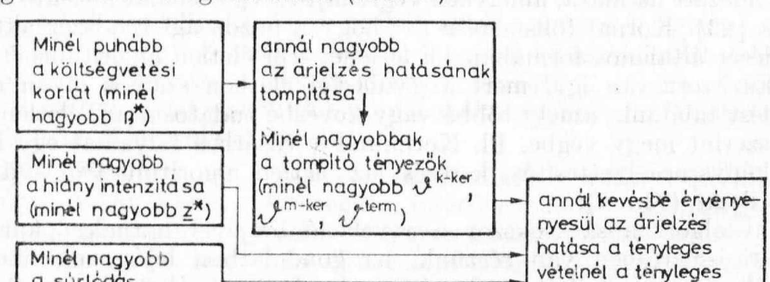


1. ábra

és a statisztikus jelleget — ahogy ezt Kornai teszi. Mindezek arra figyelmeztetnek, hogy az oksági láncok csak nagy körültekintéssel alkalmazhatók a gazdasági jelenségek vizsgálatában.

Kornai tudja ezeket, és *„A hiány"-ban az oksági láncokat megfelelő mértéktartással vázolja föl.* A rangos mezőnyből az egyik legkiválóbb a következő oksági lánc (352. o.):

Kiemeljük, hogy a fenti oksági lánc „résztvevőinek" nagyobbik része metrikusan interpretált (a β^*, z^*, w^* vektorok és a $\vartheta^{k\text{-ker}}$, $\vartheta^{m\text{-ker}}$, ϑ^{term} paraméterek segítségével), továbbá a „résztvevők" közötti kapcsolat általánosan meghatározott (monoton növekvő, ill. monoton csökkenő függvénykapcsolatokról van szó). Ez a maximum, ameddig Kornai egyelőre elmehetett ennek az oksági láncnak a megadásában. (351. o.)

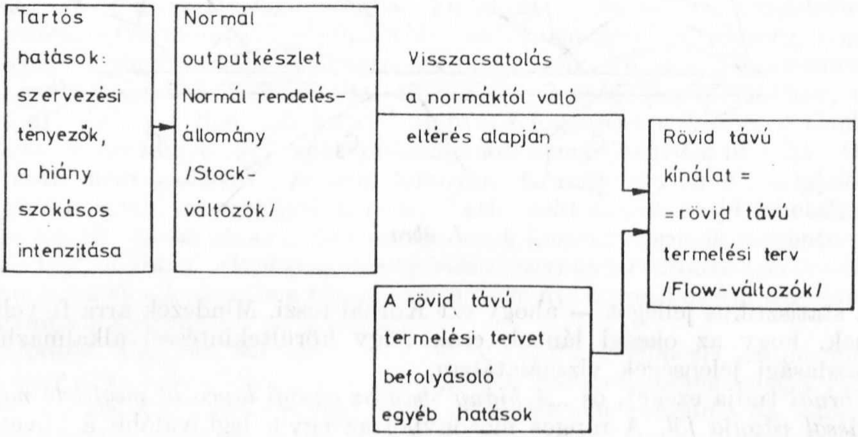


2. ábra

4. Matematizálás

Kornait régebben többen is bírálták — főleg az Anti-equilibrium kapcsán — túlzott matematizálásra való törekvéséért. A bírálatok számos ponton jogosak voltak, és hatottak is Kornaira. Olyannyira, hogy *„A hiány"-ban sikerült egyfajta matematizálási „tertium datur"-t kialakítania.*

Kornai igen általános függvényfogalmat használ, és ez számos haszonnal jár. Így nem kényszerül arra, hogy a valóságos összefüggéseket matematikai „Prokrusztész-ágyak"-ba gyömöszölje. Ezáltal nem szegényíti el az összefüggéseket, és a szemléletre is tud hatni. Pl. a vállalat rövid távú kínálati függvényét így határozza meg (35. o.):
Aki ismeri a standard polgári mikroökonómia megfelelő függvényeit, annak nem kell bizonygatni az előrelépést.

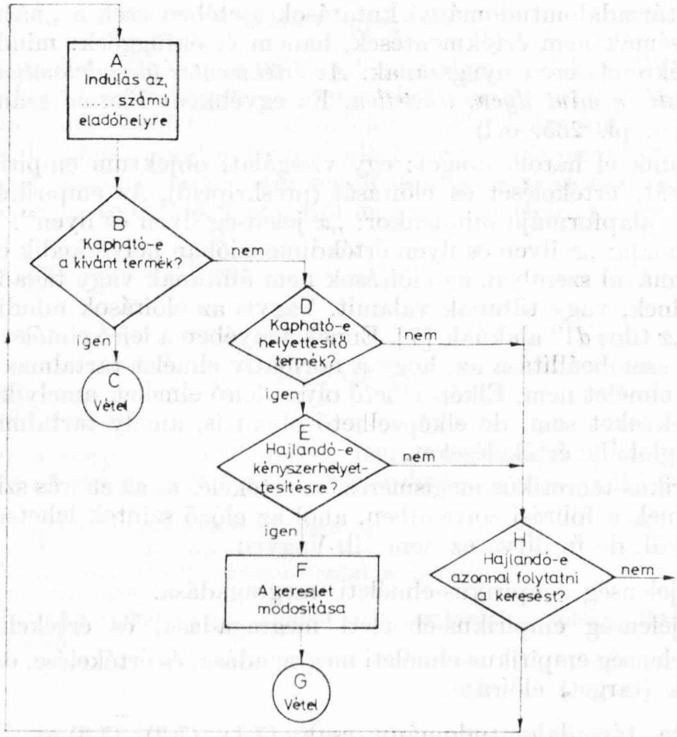


3. ábra

Kornai könyvében több helyen használ életlen (fuzzy) algoritmust. Az életlen algoritmus — nem pontosan fogalmazva — életlen, azaz nem pontos, rosszul definiált, nem teljesen egyértelmű terminusokban megadott utasítások olyan rendezett halmaza, amelynek végrehajtása egy feladat közelítő megoldását adja [23]. Kornai fölismerése az, hogy a gazdasági rendszer aktorainak viselkedését általános formában jól le lehet írni életlen algoritmusok segítségével. Ez azért van így, mert a gazdasági életben számos olyan repetitív viselkedést találunk, amely többé vagy kevésbé tudatosultan, életlen algoritmusok szerint megy végbe. Pl. Kornainál a vásárlási folyamat egy részének (siker, kényszerhelyettesítés, keresés) az életlen algoritmusa[10] — árak nélkül — ilyen (83. o.);
Kornai algoritmusai sokszor a reveláció erejével hatnak: „katartikus" magunkra-ismerésben van részünk, ha gondolatban lejátsszuk őket. Megjegyezzük, hogy az életlen algoritmusoknak mint ábrázolási eszközöknek komoly szerep juthat a közgazdaságtudományon kívül is. Alkalmazásuk különösen hasznos lehet a szociológiában, a szervezetkutatásban és a neveléstudományban.

Kornai persze él a kvalitatív matematikai modellezés eszközével is. „A hiány" függelékében két kifejtett matematikai modell található: a *Jörgen W. Weibull*lal közös „Sorbanállás a piacon", és a *Simonovits András*sal együtt

[10] Világos, hogy egy determinisztikus leírás keretében az életlen algoritmusokat (éles = nem életlen) algoritmusokkal kell fölcserélni. (Vö. 590—594. o.)!



4. ábra

készített „A kényszerhelyettesítés, a készlet és a súrlódás összefüggései". (589–618. o.) A modellek legfőbb értékét általános metodológiai szempontból abban látjuk, hogy Kornaiék reális jelenségek idealizációival dolgoznak. (Ez sajnos nem mondható el sok gazdaságmatetmatikai és más társadalomtudományi, matematikai modellről.) Mindazonáltal ezeket a modelleket Kornai elemzéseiben mértéktartással kezeli.

Kiemeljük még, hogy „az árjelzések nélkül működő, 'mennyiségi' alkalmazkodást végző, sokszereplős, soktermékes, interdependens absztrakt gazdasági rendszerek átfogó elmélete", jóllehet még nem kidolgozott, de szintén komoly eséllyel pályázhat arra, hogy más társadalomtudományi területeken is alkalmazzák. Jelesen a köznevelés mint szervezetrendszer kutatására és a szociológia egyes ágaira gondolunk.

5. Az értékprobléma

Az értékproblémával kapcsolatban érdemes két dolgot leszögezni. Ismeretes, hogy mind az empirikus, mind pedig a teoretikus megismerés fogalmi (konceptuális) sémához kötött. Ez azt jelenti, hogy a valóságot sem leírni, sem elméletileg megragadni nem tudjuk valamilyen — az adott megismerési aktushoz viszonyítva előzetes, készen talált — fogalomrendszer nélkül. Világos az is, hogy a társadalomtudományi kutatások esetében ezek a „hátterek”, ezek a fogalmi sémák nem értékmentesek, hanem értékfüggőek: mindenkor valamilyen értékrendszeren nyugszanak. *Az értékmentes társadalomtudomány ezért önellentmondó, s mint ilyen, lehetetlen.* Ez egyébként Kornai számára is egyértelmű. (Vö. pl. 285. o.!)

Különítsünk el három dolgot: egy vizsgálati objektum empirikus-elméleti megragadását, értékelését és előírását (preskripció). Az empirikus-teoretikus megismerés alapformája mindenkor: „x jelenség ilyen és ilyen”. Az értékelések alapformája: „x ilyen és ilyen értékdimenzióban helyezkedik el”. Az előző két alapformával szemben, az előírások nem állítanak vagy tagadnak, hanem megkövetelnek, vagy tiltanak valamit. Vagyis az előírások mindig „x legyen d!”, vagy „x tilos d!” alakúak [7]. Ennek fényében a leíró elmélet és a normatív elmélet szembeállítása az, hogy a normatív elmélet tartalmaz előírásokat, míg a leíró elmélet nem. Elképzelhető olyan leíró elmélet, amelyik nem tartalmaz értékeléseket sem, de elképzelhető olyan is, amely tartalmaz részleges, vagy akár globális értékeléseket.

Az empirikus-teoretikus megismerés, az értékelés és az előírás szigorúan egymásra épülnek a fölírási sorrendben, ahol az előző szintek lehetségesek a követőek nélkül, de fordítva ez nem áll. Vagyis:

(7.1) x jelenség empirikus-elméleti megragadása.

(7.2) x jelenség empirikus-elméleti megragadása, és értékelése.

(7.3) x jelenség empirikus-elméleti megragadása, és értékelése, és valamilyen állapotának (target) előírása.

Egy realista társadalomtudomány csak (7.1), (7.2), (7.3)-at ismerheti el.

Kornai „A hiány”-ban (7.2)-őt valósítja még, azzal a megszorítással, hogy témájáról (a szocialista gazdaság és a hiánygazdaság „metszete”) nem ad végső, globális értékelést, hanem csak rész-értékelésekre szorítkozik. (Pl. 247–279. o.) Érdemes kitérni Kornainak az értékelésről vallott fölfogására, hiszen az igen korszerű és megalapozott. Kornainak meggyőződése, hogy a gazdasági jelenségek egydimenziós értékelése, vagyis egy értékkel (jó—rossz, előnyös—hátrányos, rugalmas—rugalmatlan stb.) történő jellemzése durva és sematikus, s mint ilyen, káros. *A gazdasági jelenségeket sok értékdimenzióban kell egyidejűleg elhelyezni*! Ráadásul ezek az értékdimenziók általában nem additívek, hanem a legkülönbözőbb viszonyokban lehetnek egymással. Így a gazdasági jelenségeknek ún. értékalakzatok [19] feleltethetők meg, vagyis azokat egymással különböző viszonyokban levő, sok értékdimenzióban helyezhetjük csak el.

„A hiány” értékeléseit áttekintve azonban több alkalommal hiányérzetünk támad. Több fontos helyen (pl. a hagyományos szocialista vállalat elemzése kapcsán, vagy az elég puha költségvetési korlát esetében stb.) ui. hiányzanak Kornai értékelései. Ezt veszélyesnek tartjuk, jóllehet értjük Kornai tartózkodásának okát. Félünk attól, hogy mások, Kornai intencióinak nem megfelelő, akár azzal szöges ellentétben álló értékelésekre jutnak ezen helyek elolvasása után. Ebből a szempontból problematikusnak tartjuk Kornai nem-értékeléseit.

6. Záró megjegyzés

A fenti észrevétel persze nem változtat azon, hogy „*A hiány*”-*t úttörő munkának tartjuk szaktudományosan és metodológiailag egyaránt.* Sokkal inkább egy kutatássorozat kezdete, mint befejezése. Nyilván kutatók csoportjai kellenek majd ahhoz, hogy a Kornai által megnyitott problémakört bejárhassuk. Éppen ezért — talán nem esünk Bolyai Farkas naiv kívánalmába [10], ha leírjuk — remélünk Kornaitól még egy, új Hiányt.

(Beerkezett: 1980. október 18-án.)

IRODALOM

Közgazdaságtudomány

1. KORNAI J.: Anti-equilibrium. Budapest, 1971. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
2. KORNAI J.: „A hiány újratermelése”, Közgazdasági Szemle, 25 (1978), pp. 1034—1050.
3. KORNAI J.: „Hatékonyság és szocialista erkölcs”, Valóság, 23 (1980), pp. 13—21.
4. KORNAI J.: A hiány. Budapest, 1980. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
5. KORNAI J.: „A matematikai-közgazdasági kutatásokról”, Magyar Tudomány, 25 (1980), pp. 587—596.
6. POLÁNYI K.: Az archaikus társadalom és a gazdasági szemlélet. Budapest, 1976. Gondolat Kiadó.

Logika

7. LOESER, F.: Deontik. Berlin, 1966. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.
8. QUINE, M. V. O.: A logika módszerei. Budapest, 1968. Akadémiai Kiadó.
9. VOJSVILLO, J. K.: A fogalom. Budapest, 1978. Gondolat Kiadó.

Tudományelmélet, metodológia

10. ALEXITS GY.: Bólyai János világa. Budapest, 1977. Akadémiai Kiadó.
11. ALTRICHTER F.: „A konfirmáció paradoxonairól”, Magyar Filozófiai Szemle, 24 (1980), pp. 25—43.
12. BUNGE, M.: Scientific Research. I. The Search for System. Berlin, Heidelberg, New York, 1967. Springer Verlag.
13. BUNGE, M.: Az okság. Budapest, 1967. Gondolat Kiadó.
14. GARAI L.: „Egy vita és ami belőle nyilvánossá lett — avagy a zártkörűség kockázatai”, Magyar Pszichológiai Szemle, 21 (1980), pp. 402—405.
15. HÁRSING L.: A tudományos megismerés és a plauzibilis következtetések logikája. Budapest, 1971. Akadémiai Kiadó.
16. HÁRSING L.: „A metodológiai szabályok néhány típusa és megalapozási módja”, Magyar Filozófiai Szemle, 20 (1976), pp. 38—59.
17. HÁRSING L.: A tudományos érvelés logikája. Sokszorosítvány.
18. HÁRSING L.: „A relatív igazság korszerű értelmezéséhez”, Világosság, 19 (1978), pp. 679—686.
19. KENYERES Z. és társai: „Irodalom és társadalmi érték”, Literatura, 6 (1979), pp. 421—453.
20. KINDLER J.: „A pozitivista módszertan válsága”, Világosság, 21 (1980), pp. 484—493.
21. PACZOLAY GY.: Tudományok és rendszerek. Budapest, 1973. Akadémiai Kiadó.
22. QUINE, W. V. O.: „Az empirizmus két dogmája”, Magyar Filozófiai Szemle, 17 (1973), pp. 225—239.
23. ZADEH, L. A.: „Komplex rendszerek és döntési folyamatok elemzésére alkalmas új módszer vázlata”. Fogalmi rendszerekről, szerkezetekről és szervezetekről. Budapest, 1979. Akadémiai Kiadó.

METHODOLOGICAL REMARKS TO JÁNOS KORNAI'S "ECONOMICS OF SHORTAGE"

The author undertakes to analyze methodologically and to assess "Economics of shortage", a new monograph by János Kornai. He wants to show that Kornai's treatise is suitable to becoming a methodological pattern for theoretical research work in economics and other social sciences.

"Economics of shortage" can serve as a methodological model for the following reasons:

1. The range of validity of Kornai's statements can be drawn precisely since the context, width and depth of the analysis are always definite.
2. Kornai's approach of analyzing the economic phenomenon is not unconditional and absolute but the given *status quo* is considered.
3. His analyses show the real nature of the economic phenomena: self-determination, dialectics (= the phenomenon is constituted by, or emanate from, the actors' struggle), partial teleology and statistical character.
4. "Economics of shortage" is free from mathematization at any cost. Kornai successfully formed a sort of *tertium datur* of mathematization. The elaboration of fuzzy algorithm for the description of repetitive actions by actors of the economic system (eg. purchases), furthermore, the "flashing" of the theory of the multiactor, multiproduct, interdependent, abstract economic systems functioning without price signals and performing "quantitative" adaptation are the most remarkable achievements.
5. Kornai's work is a descriptive theory. It does not contain and normative element. His book is the theoretical perception and partial assessment of the socialist economy as a shortage economy.

МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ К КНИГЕ Я. КОРНАИ: «ДЕФИЦИТ»

Автор берется за методологический анализ и оценку новой монографии Яноша Корнаи, которая называется «Дефицитом" (4). Он желает показать, что работа Корнаи в методологическом плане может послужить идеалом для теоретических исследований в области экономики и прочих общественных наук.

В методологическом смысле «Дефицит» может послужить примером в силу следующих причин:

1. В отношении выводов Корнаи можно точно определить сферу действенности, т. к. в любом случае определяющими являются взаимосвязи, охват и глубина обследования.
2. Корнаи экономические явления рассматривает не без каких-либо условий, в абсолютном плане, а в рамках сложившегося «статус кво».
3. В его анализах находит свое отражение реальный характер экономических явлений: самодетерминированность, диалектика (явления складываются в рамках борьбы акторов, т. е. вытекают из этого), отчасти, телеологический и статистический характер.
4. В «Дефиците» отсутствует стремление к математизации любой ценой. Корнаи удалось развернуть своеобразный «терциум датур» математизации. Важным результатом является разработка сглаженных алгоритмов описания репетитивных действий акторов экономической системы (например, покупка) и, далее, «указание» на теорию многофакторных, интердепенсных, абстрактных экономических систем на множество изделий, функционирующих без указания цен и приобщающиеся в «количественном» плане.
5. Работа Корнаи представляет собой описывающую теорию. Она не содержит ни какие нормативные моменты. Его книга представляет собой теоретическое изложение и детальную оценку социалистической экономики как дефицитной.

FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK

NAGY CSABA

Bevezetés a fuzzy halmazok elméletébe

Bevezetés

A fuzzy halmazok elmélete alig több mint tíz éves múltra tekint vissza, de gyors fejlődése, elterjedésének széles köre, hatásának mélysége egyedülálló. Mit jelent ez a kifejezés — fuzzy halmaz —, le tudnánk-e fordítani? Nevezhetnénk talán homályos vagy elmosódott vagy bizonytalan halmazoknak, de ezek a kísérletek nem csak eleve kudarcra ítéltek, de feleslegesek is. Egy új fogalom született, és egyre inkább követeli a helyét a legkülönbözőbb tudományokban.*

A tudományos vizsgálatok során minél teljesebb, szélesebb körű feladatokkal foglalkozunk, annál több bizonytalansági tényezővel találjuk magunkat szemben. Amikor ezeket a feladatokat exakt módszerekkel tárgyaljuk, az ilyen tényezőknek leírása nagy nehézségeket okoz, sok esetben nem is valósítható meg.

A valószínűségszámítás igen jó eszköz a bizonytalanságok egy részének leírására. Jól kell azonban látni a valószínűség, és a fuzzy tulajdonság közötti különbséget. A valószínűség jól definiált, konkrétan meghatározott események előfordulásának valószínűségére ad mértéket, a fuzzy tulajdonság meg azt fejezi ki, hogy maguk az események, elemek, fogalmak bizonytalanok, rosszul definiáltak, nem tudjuk pontosan hol kezdődnek, hol végződnek, milyen mértékben tartoznak bele bizonyos összetevők.

A fuzzy halmazok elméletének alapja, hogy sok esetben nem lehet, vagy nincs értelme eldönteni, hogy egy elem egy halmazhoz tartozik-e, vagy nem. Lehet, hogy bizonyos mértékig hozzá tartozik, bizonyos mértékig nem. Ezt a tulajdonságot a fuzzy halmazok elméletében az ún. tartalmazási függvény segítségével fejezhetjük ki. A tartalmazási függvény az alaphalmazból a [0,1] intervallumba ható függvény, és azt fejezi ki, hogy egy elem milyen mértékben tartozik az alaphalmaz egy fuzzy halmazához.

A cikk első részében a fuzzy halmazok elméletének alapfogalmait ismertetjük. A fuzzy halmaz definiálása után áttekintjük, hogy milyen műveleteket lehet értelmezni a fuzzy halmazok körében, és ezeknek a műveleteknek a legfontosabb tulajdonságait. Megvizsgáljuk a közönséges halmazoknak a kiterjesztését fuzzy halmazokra, megismerkedünk a fuzzy reláció, egyszerű fuzzy reláció, és a konvex fuzzy halmaz fogalmával.

A következő fejezetben a fuzzy mértékekkel és a fuzzy integrálokkal foglalkozunk, megvizsgáljuk, hogy hogyan lehet fuzzy mértékeket konstruálni,

* A szerkesztőség véleménye szerint minél fontosabb egy új fogalom, minél valószínűbb széles körű alkalmazása, annál indokoltabb, hogy magyar nevet találjunk rá. Mi a „kócos halmaz" kifejezést javasoltuk; a szerző nem engedett a „fuzzy"-ból. *(Szerk.)*

és végül megnézzük, hogy a fuzzy mértékek és fuzzy integrálok elméletét hogyan lehet alkalmazni szubjektív értékelési folyamatokban.

Az utolsó fejezetben először a fuzzy programozási feladatot fogalmazzuk meg, megadjuk a fuzzy célfüggvény, fuzzy korlátozás, fuzzy döntés fogalmát, és végül a lineáris programozási feladat fuzzysításának lehetőségét| mutatjuk be.

1. Hálóelméleti és mértékelméleti alapfogalmak

Ebben a részben azokat a háló- és mértékelméleti fogalmakat soroljuk fel, amelyekre a fuzzy halmazokkal kapcsolatban szükségünk lesz. A következő fejezet, ami a fuzzy halmazok elméletének alapjait tárgyalja, az alábbi hálóelméleti definíciókat használja fel:

1.1. Egy X halmazt részben rendezett halmaznak nevezünk, ha bizonyos elempárjain értelmezve van egy $\leq$ reláció, amelyekre a következők teljesülnek:

1. reflexív — azaz $x \leq x \ \forall x \in X$,

2. antiszimmetrikus azaz $x \leq y \Rightarrow y \nleq x$, ha $x \neq y$,

3. tranzitív — azaz $x \leq y,\ y \leq z \Rightarrow x \leq z$.

1.2. Legyen X részben rendezett halmaz, akkor x és y X-beli elemeknek v a legnagyobb alsó korlátja, ha $v \leq x$ és $v \leq y$ valamint nem létezik olyan $\tilde{v}$ amire $\tilde{v} \geq v$, $\tilde{v} \leq x$, $\tilde{v} \leq y$ fennállnak. Hasonló módon értelmezve, u az x és y elemeknek a legkisebb felső korlátja, ha $u \geq x$ és $u \geq y$ és nem létezik olyan $\tilde{u}$ elem, amire igaz lenne, hogy $\tilde{u} \leq u$ és $\tilde{u} \geq x$, $\tilde{u} \geq y$ és ezt jelöljük a következőképpen:

$$v = x \vee y, \quad u = x \wedge y.$$

Egy részben rendezett halmazt akkor nevezhetünk hálónak, ha minden elemének létezik legnagyobb alsó és legkisebb felső korlátja.

1.3. Ha egy X hálóra az $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$,

vagy az $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge y)$

disztributivitási tulajdonságok igazak, minden $x, y, z \in X$ esetén, akkor az X hálót disztributív hálónak nevezzük.

A következő definíciókat a fuzzy mértékekről és a fuzzy integrálokról szóló részben használjuk fel.

1.4. Legyen X tetszőleges halmaz, jelöljük $\mathcal{P}(X)$-szel az X részhalmazain halmazát. Nevezzük az $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ halmazt az X halmaz egy osztályának, tehát $\mathcal{A}$ elemei X bizonyos részhalmazai.

Egy X halmaz $\mathcal{A}$ osztályát halmazalgebrának nevezzük, ha

1. $A,\ B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$,

2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$,

egy halmazalgebrát σ-algebrának nevezünk, ha bármely $\{A_k \in \mathcal{A},\ k = 1,2 \ldots\}$ halmazsorozatra $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.

Az $\mathcal{A}$-ba tartozó halmazokat $\mathcal{A}$-mérhetőknek nevezzük.

Állítás

Egy X halmaz bármely $\mathcal{A}$ osztályára létezik az őt tartalmazó legszűkebb σ-algebra. (L. *Gihman–Szkorohod* [13].)

1.5. Egy metrikus tér nyílt halmazainak osztálya által generált σ-alegbra, az őt tartalmazó legszűkebb σ-algebra; elemeit Borel halmazoknak nevezzük. (Az n-dimenziós euklideszi térben pl. a félig nyílt paralelepipedon által kifeszített, vagy generált σ-algebra adja meg a Borel halmazokat.)

1.6. Egy $\nu: \mathcal{A} \to X$ halmazfüggvényt akkor nevezünk σ-additívnak, ha $\nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k)$, ha $\forall\, i \neq j$-re, $A_i \cap A_j = \emptyset$.

1.7. Valamely $\mathcal{A}$ σ-algebrán megadott, nem negatív, σ-additív, halmazfüggvényt akkor nevezünk mértéknek, ha $\nu(\emptyset) = 0$.

1.8. Legyen $\mathcal{A}$ az X tér σ-algebrája. Egy $\mathcal{A}$-mérhető halmazon értelmezett, valós és a $\pm\infty$ értékeket felvevő $f(x)$ függvényt $\mathcal{A}$-mérhetőnek nevezzük, ha az $\{x \mid f(x) \leq r\}$ halmaz minden való r értékre $\mathcal{A}$-mérhető.

2. A fuzzy halmazok elméletének alapjai

Fuzzy halmazok. A fuzzy halmazok elméletének alapja a halmazelmélet karakterisztikus függvény fogalmának kiterjesztése. Legyen X egy tetszőleges alaphalmaz, és $A \subset X$ X egy részhalmaza, és jelöljük μ_A-val az A részhalmaz karakterisztikus függvényét:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \notin A \\ 1, & \text{ha } x \in A. \end{cases}$$

A μ_A karakterisztikus függvény az X alaphalmazról a $\{0,1\}$ kételemű halmazba hat, jelöljük ezt így: μ_A: $X \to \{0,1\}$. Tehát egy $x \in X$ elemről pontosan tudjuk, hogy egy A halmaznak eleme, vagy nem eleme. Ha azonban valamilyen sok bizonytalanságot hordozó fogalomrendszert akarunk halmazelméleti módon közelíteni, ezt ilyen egyértelműen már általában nem tudjuk megmondani. Csak ilyeneket állíthatunk, hogy az $x \in X$ elem „egy kicsit eleme", vagy „jobban eleme", vagy „már majdnem eleme" az A halmaznak. Az itt leírtak megfogalmazásához a fuzzy halmazok elméletében a karakterisztikus függvény fogalmának általánosításával juthatunk el. Ugyanis, ha a μ_A értékkészletét a $\{0,1\}$ kételemű halmazról kibővítjük a $[0,1]$ intervallumra μ_A: $X \to [0,1]$ akkor $\tilde{\mu}_A$-t X egy fuzzy részhalmazának tekinthetjük, pontosabban: X-nek egy fuzzy részhalmazát reprezentálja.

Definíció. Legyen X tetszőleges alaphalmaz, legyen μ: $X \to [0,1]$, akkor az $\{x, \mu(x)\}$ párok halmazát az X halmaz fuzzy részhalmazának nevezzük (röviden: fuzzy halmaz), a μ függvényt pedig tartalmazási függvénynek nevezzük.

Jelöljük $\mathcal{F}(X)$-szel az X halmaz tartalmazási függvényeinek halmazát, azaz $\mathcal{F}(X) = \{\mu \mid \mu: X \to [0,1]$, ekkor általában elegendő magát az $\mathcal{F}(X)$ halmazt X fuzzy halmazainak tekinteni.

Példák:

1. Legyen $X = \{1,2, \ldots, 100\}$ egész számok halmaza, ahol az $x \in X$ elem egy ember életkorát jelenti, ekkor a „fiatal" fogalmat a következő fuzzy

halmazzal írhatjuk le:

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad 30 < x < 45, \\ \dfrac{45-x}{15}, & \text{ha} \quad 0 \leq x \leq 30. \\ 0, & \text{ha} \quad 45 \leq x \leq 100. \end{cases}$$

A „fiatal" fogalomnak a felső határa bizonytalan, elmosódott. Nincs értelme annak, hogy azt mondjuk, hogy egy 34 éves ember fiatal, egy 35 éves már nem. A fuzzy halmazok segítségével itt definiált fiatal fogalmat szavakkal körülbelül így lehetne körülírni; egy 33 éves ember még majdnem teljesen fiatalnak számít, $\mu(x) = 0{,}8$, de egy 42 éves már nem éppen fiatal, $\mu(x) = 0{,}2$.

Természetesen nagyon sokféleképpen meg lehetne adni a fiatalság fogalmának fuzzy értelmezését, de ez éppen e fogalom bizonytalanságából, rosszul definiáltságából, szubjektivitásából fakad. A fuzzy halmazok segítségével éppen ezeket a tulajdonságokat szeretnénk leírni azzal, hogy legalább a fogalom jellegét megpróbáljuk megfogalmazni.

2. Most nézzük meg, hogy az „életszínvonal" kifejezésben rejlő bizonytalanságokat hogyan tudnánk fuzzysítani. Első lépésként próbáljuk meg az életszínvonal fogalmat olyan összetevőkre bontani, amelyek jobban definiáltak, vagy csak egyszerűen szűkebb értelműek. Ilyen összetevők lehetnek például a következők:

— 1 főre jutó nemzeti jövedelem,
— átlagos reáljövedelem,
— lakásviszonyok,
— infrastruktúra,
— közlekedés,
— környezet,
— társadalmi légkör,
— szellemi színvonal,
— szabadidő mennyisége,
— a szabadidő kihasználásának lehetősége, színvonala,
— közbiztonság,
— stb.

Most tehát az alaphalmaz egy diszkrét halmaz, amelynek elemei az életszínvonal összetevői, egy tartalmazási függvényt pedig akkor kapunk, ha minden elemhez hozzárendelünk egy $x \in [0,1]$ számot. Ez a felosztás közelítőleg sem teljes, és sok átfedést tartalmaz, de most nem is az a cél, hogy jól identifikáljuk az életszínvonal fogalmat, hanem hogy az életszínvonal, és a hozzá „hasonló" sok bizonytalanságot hordozó, rosszul definiált fogalmak fuzzysításának lehetőségeit és problémáit megvilágítsuk.

Tegyük fel, hogy rendelkezésünkre áll az életszínvonal egy „közelítőleg" jó felosztása. Ezen azt értem, hogy tartalmazzon „majdnem minden" szóbajöhető elemet, amelyek beletartozhatnak — akár szubjektíven — az életszínvonal fogalmába; az összetevők nem tartalmaznak átfedéseket, jól definiáltak, illetve jól körülhatároltak legyenek. A feladat bonyolultságára jellemző, hogy maguk az idézőjelbe tett kifejezések is bizonytalanok. Ha ezt a listát, az életszínvonal összetevőiről odaadnánk valakinek, és megkérnénk arra, hogy mondja meg minden összetevőről, hogy milyen mértékben tartozik bele az ő életszínvonal fogalmába, tehát minden összetevőhöz rendeljen egy 0 és 1 közé eső számot, akkor az életszínvonal egy szubjektív fuzzy reprezentációját kapnánk.

Ezután, ha különböző célú általános felméréseket végeznénk, ezek elemzésével, statisztikai vizsgálatával már globálisabb életszínvonal képeket kaphatnánk. Megvizsgálhatnánk, hogy például a különböző társadalmi rétegeknek milyen az életszínvonalról alkotott képük, és ezek miben térnek el egymástól. Nagyon fontos információt kaphatnánk a lakóhely szerinti csoportosításból, hogy például a fővárosban, nagyvárosokban, kisvárosokban, falun, tanyán élő embereknek mennyiben különbözik az életszínvonalról alkotott képük, elvárásaik.

Műveletek a fuzzy halmazok körében. A fuzzy halmazok körében a következő műveleteket lehet értelmezni.

Definíció. Legyen X tetszőleges alaphalmaz $\mu_1\colon X \to [0,]$, $\mu_2\colon X \to [0,1]$ fuzzy halmazai, akkor a fuzzy halmazok körében az unió, metszet, komplementer képzést a következő módon értelmezzük:

$$(\mu_1 \wedge \mu_2)(x) = \min\,[\mu_1(x), \mu_2(x)],$$

$$(\mu_1 \vee \mu_2)(x) = \max\,[\mu_1(x), \mu_2(x)],$$

$$\bar{\mu}_1(x) = 1 - \mu_1(x).$$

A fuzzy halmazok körében a következő rendezést definiálhatjuk.

Definíció. Legyenek $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{F}(X)$ fuzzy halmazok, μ_1 akkor és csak akkor kisebb μ_2-nél, $\mu_1 \leq \mu_2$, ha $\mu_1(x) \leq \mu_2(x)\ \forall\, x \in X$.

Ezzel a rendezéssel egy X halmaz fuzzy halmazainak csak egy részét lehet összemérni, így a fuzzy halmazok részben rendezett halmazt alkotnak. (1.1) Könnyen belátható, hogy a fuzzy halmazok a fenti rendezésre és műveletekre hálót alkotnak. (1.2) Ezenkívül fennállnak a disztributivitási szabályok, így a háló disztributív (1.3) [1].

Sokszor szükségesnek látszik egyéb műveletek bevezetése is a fuzzy halmazok körében. Két fuzzy halmaz szorzata fuzzy halmaz, ha szorzaton a két fuzzy halmaz tartalmazási függvényeinek pontonkénti szorzatát értjük. Az összeadás már kivezet a [0,1] intervallumból, így például a következőképpen értelmezhetjük.

Definíció. Legyenek $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{F}(X)$ fuzzy halmazok, akkor

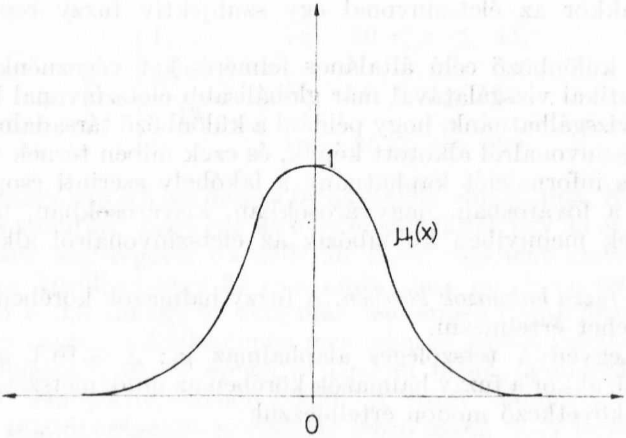
$$(\mu_1 \cdot \mu_2)(x) = \mu_1(x) \cdot \mu_2(x),$$

$$(\mu_1 + \mu_2)(x) = \mu_1(x) + \mu_2(x) - \mu_1(x) \cdot \mu_2(x).$$

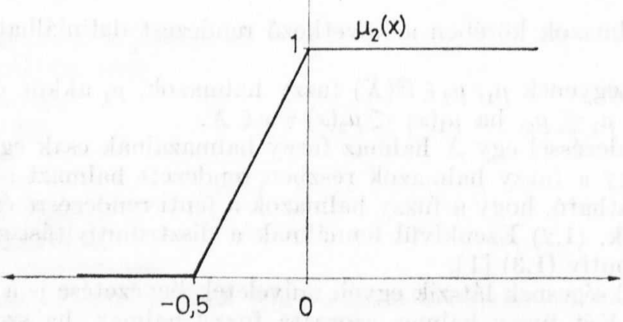
Példa: Tekintsük a következő fuzzy halmazokat (l. 1.a és 1.b ábrát):

„x közel van 0-hoz”, „x lehetőleg legyen nagyobb 0-nál”

$$\mu_1(x) = e^{-k|x|} \qquad \mu_2(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0{,}5, \\ 2x - 0{,}5 & -0{,}5 < x < 0, \\ 1 & x \geq 0. \end{cases}$$

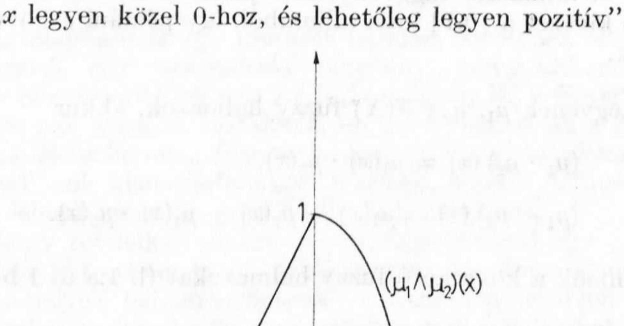


1a. ábra



1b. ábra

Metszetük: „x legyen közel 0-hoz, és lehetőleg legyen pozitív”.



2. ábra

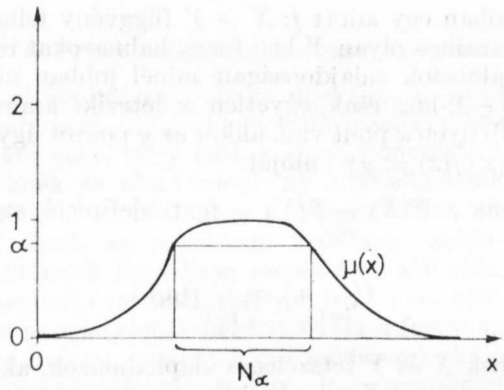
A fuzzy halmazok elmélete és a különböző matematikai módszerek közötti kapcsolatot a fuzzy halmazok α-metszetének segítségével teremthetjük meg.

Definíció. Legyen $\mu \in \mathcal{F}(X)$ fuzzy halmaz, akkor a μ α-metszete

$$N_\alpha = \{x \in X \mid \mu(x) \geq \alpha\},$$

tehát X azon közönséges részhalmaza, amelynek minden elemére $\mu \geq \alpha$

Példa:



3. ábra

Definíció. Értelmezzük egy $\mu \in \mathcal{F}(X)$ fuzzy halmaz és egy szám szorzatát:
$\cdot \mu)(x) = \alpha \cdot \mu(x)$

Negoita az α-metszet segítségével a következőképpen fogalmazza meg az ún. ebontási tételt.

Tétel. Legyen X tetszőleges halmaz, $\mu \in \mathcal{F}(X)$ fuzzy halmaz, akkor $\mu = \bigvee\limits_{\alpha \in [0,1]} \alpha \cdot \mu_{N_\alpha}$, ahol μ_{N_α} N_α karakterisztikus függvénye.

Most vizsgáljuk meg, hogy milyen függvényfogalmakat, és függvénykapcsolatokat értelmezhetünk a fuzzy halmazok körében. A matematika különböző ágaiban gyakran találkozunk olyan esetekkel, amikor egy függvény értelmezési tartományának és értékkészletének elemei maguk is függvények. A fuzzy halmazokról fuzzy halmazokra ható függvények is ilyenek lesznek, mivel a fuzzy halmazokat a tartalmazási függvényeikkel azonosíthatjuk. Mégsem szakadhatunk teljesen el a fuzzy halmazok halmaz tulajdonságainak figyelembevételétől, így a fuzzy halmazokról fuzzy halmazokra ható függvények értelmezését az alaphalmazok elemeihez kell kapcsolni.

Tehát vizsgáljuk meg, hogy hogyan lehet egy $f\colon X \to Y$ leképezést kiterjeszteni $f\colon \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$-ra, és ha f^{-1} létezik $f^{-1}\colon \mathcal{F}(Y) \to \mathcal{F}(X)$-re.

Definíció. Legyen $f\colon X \to Y$, akkor az $f\colon \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ leképezésen a következőt értjük:

$$f(\mu) = \nu; \qquad \nu(y) = \begin{cases} \sup\{\mu(x) \mid y = f(x)\}, & \text{ha} \quad y \in f(x) \\ 0, & \text{ha} \quad y \notin f(x). \end{cases}$$

Továbbá, ha f^{-1} létezik $f^{-1}: \mathcal{F}(Y) \to \mathcal{F}(X)$, akkor

$$f^{-1}(v) = v \circ f$$

ahol

$$(v \circ f)(x) = v(f(x)).$$

A fentiekben $f(X)$ az f függvény képtere; azaz

$$f(X) = \{y \in Y \mid \exists\, x \in X, f(x) = y\}.$$

Ebben a definícióban egy adott $f: X \to Y$ függvény felhasználásával az X halmaz fuzzy halmazaihoz olyan Y-beli fuzzy halmazokat rendelünk, amelyek az eredeti fuzzy halmazok tulajdonságait minél jobban megtartják.

Ha tehát egy $y \in Y$-hoz csak egyetlen x létezik, amire $f(x) = y$ akkor $v(y) = \mu(x)$. Ha több ilyen x pont van, akkor az y pontot úgy lehetne tekinteni, mint az őságépek, $\{x \mid f(x) = y\}$ unióját.

Állítás. Legyen az $f: \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ a fenti definíció szerint kiterjesztett függvény, akkor

$$f\left(\bigvee_{i=1}^{\infty} \mu_i\right) = \bigvee_{i=1}^{\infty} f(\mu_i).$$

Definíció. Legyenek X és Y tetszőleges alaphalmazok, akkor az $f: X \times U \to [0,1]$ függvényt, azaz a $X \times Y$ direkt szorzat egy fuzzy halmazát fuzzy relációnak nevezzük.

Példa. Legyen $f: R \times R \to [0,1]$ fuzzy reláció a következő:

$$f(x, y) = e^{-|x-y|}$$

ami az „x közelítőleg egyenlő y-nal" fogalmat fuzzysítja.

Negoita [1] könyvében a fuzzy relációk kompozíciójának következő egyszerű tulajdonságait mutatja meg; legyenek $f \in \mathcal{F}(X \times Y)$, $g, g' \in \mathcal{F}(Y \times Z)$ fuzzy relációk, akkor:

1. $f \circ (g \vee g') = (f \circ g) \vee (f \circ g')$,
2. $f \circ (g \wedge g') = (f \circ g) \wedge (f \circ g')$,
3. $g \leq g' \Rightarrow f \circ g \leq f \circ g'$,

ahol a $\circ$ jel a megfelelő függvények kompozícióját jelöli.

A relációk körében fontos szerepet játszanak az egyszerű relációk.

Definíció. Az $f: X \times X \to [0,1]$ fuzzy relációt egyszerű relációnak nevezzük, ha az

1. $f(x, x) = 1 \qquad \forall\, x \in X,$

$$\left.\begin{array}{l} 2.\ f(x, y) = f(y, x) \\ 3.\ f(x, y) = \bigvee\limits_{z \in Z} [f(x, y) \wedge f(z, y)] \end{array}\right\} \quad \forall\, x, y \in X$$

összefüggések fennállnak.

A fuzzy halmazok konvexitását a következőképpen értelmezzük.

Definíció. Legyen $\mu \in \mathcal{F}(R^n)$ fuzzy halmaz, $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$, akkor a μ fuzzy halmaz konvex, ha

$$\mu(\alpha x_1 + \beta x_2) \geq \mu(x_1) \wedge \mu(x_2)$$

Állítás. Egy $\mu \in \mathcal{F}(R^n)$ fuzzy halmaz akkor és csak akkor konvex, ha az α-metszetei is konvexek.

3. Fuzzy mértékek és fuzzy integrálok

A fuzzy halmazok segítségével olyan objektumok, fogalmak tulajdonságait próbáljuk megfogalmazni, amelyekben rejlő bizonytalanságokat egyéb matematikai eszközökkel nem, vagy csak nagyon bonyolult módon lehetne megadni. Amikor ezeknek az objektumoknak a viselkedését, mozgását akarjuk vizsgálni, felmerül az a kérdés, hogy a hagyományos matematikai eszközök alkalmazhatók-e? Ezek az egyébként hatékony módszerek, sokszor csak nagyon szigorú feltételek fennállása esetén használhatók fel, amelyeket egy fuzzy halmazok segítségével felállított rendszer nem tud teljesíteni.

Ezért merült fel az igény, már néhány évvel a fuzzy halmazok elméletének megszületése után, olyan matematikai módszerek kidolgozására, amelyek segítségével a fuzzy tulajdonságokat hordozó rendszerek is jól kezelhetők. Így született meg többek között a fuzzy mértékek és fuzzy integrálok elmélete. A fuzzy mértékek segítségével a fuzzy tulajdonságokkal rendelkező objektumok szubjektív értékelésére nyílik lehetőség.

A fuzzy mértékektől, ellentétben a mértékelmélet additivitást megkövetelő mérték fogalmával (1.7), csak a monotonitás fennállását követeljük meg. A mérték feltételeinek gyengítésével fuzzy mértékek nagyon széles skáláját hozhatjuk létre, nagyon sokféle fuzzy mértéket konstruálhatunk meg. Tehát a fuzzy mértéket a közönséges mérték additív tulajdonságának elhagyásával kapjuk, így magát a közönséges mértéket is tekinthetjük fuzzy mértéknek.

Definíció. Legyen $\mathcal{B}$ egy X vektortér Borel (1.5.) halmazainak rendszere. A $g\colon \mathcal{B} \to [0,1]$ halmazfüggvény fuzzy mérték, ha a

1. $g(\emptyset) = 0$, $g(X) = 1$,
2. $A, B, \in \mathcal{B}$ $A \subset B \Rightarrow g(A) \leq g(B)$
3. Ha az $\{F_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{B}$ monoton halmazsorozat, akkor

$$\lim_{n \to \infty} g(F_n) = g(\lim_{n \to \infty} F_n)$$

feltételek fennállnak.

Az $(X, \mathcal{B}, g)$ hármast fuzzy mértéktérnek nevezzük.

Példa. Legyen $X = [0,1]$, $g([a, b]) = \dfrac{b-a}{1+a}$, a, $b \in [0, 1], a \leq b$.

Könnyen belátható, hogy a g halmazfüggvényre igazak a fuzzy mérték feltételei, de mivel a g halmazfüggvény nem additív, nem mérték.

A fuzzy integrálok a várható értékhez hasonló rendeltetésű funkcionálok, de amíg a várható érték lineáris, a fuzzy integrálok csak monotonok.

Definíció. Legyen $h\colon X \to [0,1]$ Borel mérhető függvény (3.5), $A \in \mathcal{B}$. Akkor a $h(x)$ függvénynek A halmazon vett g fuzzy mérték szerinti fuzzy integrálja:

$$\int_A h(x) \circ g(\,\cdot\,) = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(A \vee F_\alpha)],$$

ahol $F_\alpha = \{x \mid h(x) \geq \alpha\}$.

Példa. Tekintsük az előbbi g fuzzy mértéket az $X = [0,1]$ intervallumon, legyen $h_1(x) = (x+1)/2$, $h_2(x) = 1 - x/2$.

Természetesen a két függvény Lebesgue integrálja megegyezik. Ha azonban a fuzzy integrálokat kiszámítjuk, azt kapjuk, hogy

$$\int_X h_1(x) \circ g(\,\cdot\,) = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(F_\alpha^1)] = 0{,}72.$$

$$\int_X h_2(x) \circ g(\,\cdot\,) = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(F_\alpha^2)] = 0{,}66.$$

A következő lépés az, hogy a fuzzy integrált a Borel halmazokról kiterjesszük a fuzzy halmazokra. Jelöljük $\mathcal{F}_B(X)$-szel a Borel mérhető fuzzy halmazokat, vagyis azokat a fuzzy halmazokat, amelyeknek tartalmazási függvénye Borel mérhető, és legyen $\mu \in \mathcal{F}_B(X)$. Így a $\int_X \mu(x) \circ g$ kifejezést az előbbi definíció szerint értelmezve fuzzy-halmazfüggvénynek tekinthetjük, és μ fuzzy mértékének nevezzük.

Most definiáljuk a fuzzy integrálást fuzzy halmazokon.

Definíció. Legyen X tetszőleges alaphalmaz, $\mu \in \mathcal{F}_B(X)$ Borel mérhető fuzzy halmaz, $h\colon X \to [0,1]$ Borel mérhető függvény, akkor a

$$\int_X h(x) \circ g = \int_X [\mu(x) \wedge h(x)] \circ g$$

kifejezést a h függvény μ fuzzy halmazon vett g fuzzy mérték szerinti fuzzy integráljának nevezzük.

A fuzzy integrálok jellemző tulajdonsága a monotonitás, amit könnyen beláthatunk az előző definíciókból:

1. ha $A \subset B$, akkor $\int_A h(x) \circ g \leq \int_B h(x) \circ g$
2. ha $h_1 \leq h_2$, akkor $\int_X h_1(x) \circ g \leq \int_X h_2(x) \circ g$
3. ha $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{F}_B(X)$ és $\mu_1 \leq \mu_2$ akkor $\int_\mu h(x) \circ g \leq \int_{\mu_2} h(x) \circ g$.

A „fuzzy tulajdonség mértéke" fogalom általánosan elterjedt a fuzzy halmazok elméletében. Ez az általános kifejezés tartalmazhatja a „fontosság mértékét", „hatékonyság mértékét", „szépség mértékét", és például a fuzzy halmazok esetén a „tartalmazás mértékét". A különböző alkalmazások során nagyon sok fuzzy mértéket adtak meg, most nézzünk meg néhány lehetőséget, hogy hogyan tudunk fuzzy mértékeket konstruálni.

Az egyik legfőbb probléma az, hogy ha $E, F \in \mathcal{B}$ és $E \cap F = \emptyset$ mi legyen a $g(E \cup F)$ fuzzy mérték. Azokat a fuzzy mértékeket, amelyek kielégítik a következő feltételt, jelöljük g_λ-val.

Legyen E, $F \in \mathcal{B}$, $E \cap F = \emptyset$, akkor

$$g_\lambda(E \cup F) = g_\lambda(E) + g_\lambda(F) + \lambda \cdot g_\lambda(E) \cdot g_\lambda(F), \quad -1 < \lambda < +\infty$$

és nevezzük ezt a feltételt λ-szabálynak.

Ha egy g_λ fuzzy mértékre igaz a λ-szabály, akkor igazak a következők:

1. $g_\lambda(E \cup F) \geq g_\lambda(E) + g_\lambda(F) \qquad \lambda \geq 0,$
2. $g_\lambda(E \cup F) \leq g_\lambda(E) + g_\lambda(F) \qquad \lambda \leq 0,$

és mivel

$$g_\lambda(X) = 1,$$

3. $g_\lambda(\bar{E}) = \dfrac{1 - g_\lambda(E)}{1 + g_\lambda(E)}.$

Legyen most az alaphalmaz a valós számok halmaza, és legyen $h(x)$ monoton, balról folytonos függvény, amelyre $\lim\limits_{x \to \infty} h(x) = 1$, és $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 0$. Az így kapott $h(x)$ függvény segítségével a következő fuzzy mértéket lehet megadni:

$$g_\lambda((a, b)) = \frac{h(b) - h(a)}{1 + \lambda \cdot h(a)}.$$

Vizsgáljuk most meg, hogy diszkrét esetben milyen lehetőségeink vannak fuzzy mértékek létrehozására? Tekintsünk egy $K = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ véges halmazt. Ha csak a λ-szabálynak eleget tevő fuzzy mértékeket nézzük, akkor teljesülni kell a

$$g_\lambda(\{s_i, s_j\}) = g_\lambda(\{s_i\}) + g_\lambda(\{s_j\}) + \lambda g_\lambda(\{s_i\}) \cdot g_\lambda(\{s_j\}) \; i \neq j,$$

és általánosan az

$$g_\lambda(E \cup F) = g_\lambda(E) + g_\lambda(F) + \lambda \cdot g_\lambda(E) \cdot g_\lambda(F) \qquad E, F \subset K, E \cap F = \emptyset.$$

feltételeknek.

Ahhoz, hogy ezek, és a $g_\lambda(K) = 1$ feltételek teljesüljenek, *Sugeno* [5] cikkében g_λ-ra és λ-ra a következő feltétel fennállását követeli meg:

$$(1) \qquad \frac{1}{\lambda}\left[\prod_{i=1}^{n} (1 + \lambda \cdot g_\lambda(\{s_i\}) - 1\right] = 1, \qquad -1 < \lambda < +\infty,$$

és ekkor egy $K' \subset K$ halmaz fuzzy mértéke:

$$g_\lambda(K') = \frac{1}{\lambda}\left[\prod_{s_i \in K'} (1 + \lambda \cdot g_\lambda(\{s_i\}) - 1\right].$$

Ahhoz, hogy ezt a feltételt teljesíteni tudjuk, először is el kell dönteni, hogy λ-t pozitívnak, vagy negatívnak válasszuk, ugyanis, ha $\lambda > 0$, akkor a $\sum\limits_{i=1}^{n} g_\lambda(\{s_i\}) < 1$, ha $\lambda > 0$, akkor a $\sum\limits_{i=1}^{n} g_\lambda(\{s_i\}) > 0$ feltételnek kell teljesülni. Alkalmas $g_\lambda(\{s_i\})$-k megadása után az (1) feltétel λ-ra egy n-edfokú polinomot ad. Ezt megoldva, és az alkalmas gyököt meghatározva megkapjuk a fuzzy mértékét. A $(K, 2^K)$-an kapott fuzzy mértékkel egy $h\colon K \to [0,1]$ függvény fuzzy integrálját a következő módon számolhatjuk ki. Feltehetjük, hogy $g_\lambda(\{s_1\}) \leq g_\lambda(\{s_2\}) \leq \ldots \leq g_\lambda(\{s_n\})$ ugyanis az $s_1, s_2 \ldots s_n$ elemek felcserélésével ez a feltétel könnyen teljesíthető. Ekkor a $h\colon K \to [0,1]$ fuzzy integrálja:

$$\int_K h(\{s\}) \circ g = \bigvee_{i=1}^{\infty} [h(s_i) \wedge g(K_i)],$$

ahol

$$K_i = \{s_i, s_{i+1}, \ldots, s_n\}.$$

Az így kapott fuzzy mértékekkel kapcsolatban a következő kikötéseket lehet tenni. Feltételeztük, hogy bármely két diszjunkt részhalmaz egyesítésének fuzzy mértékét az összeg csökkentésével vagy növelésével nyerjük, mégpedig úgy, hogy egy meghatározott konstanssal szorozzuk az összetevők mértékeinek szorzatát. A valóságban sok esetben azt kellene feltenni, hogy bizonyos elemek ,,gyengítik'', bizonyos elemek ,,erősítik'' egymást, és ennek mértéke nem biztos, hogy mindig egyenesen aránylik az összetevők súlyához. A probléma fő nehézségét az adja, hogy ,,konstruálni'' kell a fuzzy mértéket, mert az, hogy minden részhalmazra külön-külön adjuk meg a fuzzy mértéket, ha az elemszám nem túl kicsi, gyakorlatilag kivihetetlen.

A fuzzy mértékek és fuzzy integrálok egyik alkalmazási lehetősége a szubjektív értékelési folyamat vizsgálata.

Tegyük fel, hogy van egy objektumunk, például egy ház, és ennek bizonyos összetevői. Tehát $K = \{s_1, s_2, \ldots, s_5\}$ maga a ház, és az összetevők:

1. s_1 = a ház alapterülete,
2. s_2 = a ház berendezése,
3. s_3 = a ház környezete,
4. s_4 = a közlekedési lehetőségek,
5. s_5 = a környék ellátottsága.

Legyen $h\colon K \to [0,1]$ ezeknek az elemeknek az értékelése, akár fuzzy halmazok segítségével, például:

$$h(s_1) = \begin{cases} 1 & \text{ha } s_1 \geq 400 \text{ m}^2 \\ \dfrac{s_1}{400} & \text{ha } s_1 < 400 \text{ m}^2. \end{cases}$$

Ezután adjuk meg az elemek ,,fontosságának'' szubjektív mértékeit, feltételezve, hogy $\lambda > 0$ tehát feltéve pl. hogy a g_λ (a ház területe, a ház környezete) $\geq g_\lambda$ (a ház területe) $+\, g_\lambda$ (a ház környezete).

Legyen például:

1. $g_\lambda(\{s_1\}) = 0{,}2$
2. $g_\lambda(\{s_2\}) = 0{,}2$
3. $g_\lambda(\{s_2\}) = 0{,}1$
4. $g_\lambda(\{s_4\}) = 0{,}1$
5. $g_\lambda(\{s_5\}) = 0{,}1.$

Ezután az (1) feltételt λ-ra megoldva megkapjuk a fuzzy mértéket.

Ha most kiszámítjuk az $f h \circ g = \bigvee_{K}\, \bigvee_{i=1}^{5} [h(s_i) \wedge g_\lambda(K_i)]$-t a ház ún. együttes értékelését kapjuk.

Nagyon fontos, hogy különbséget tegyünk a fuzzy halmaz és a fuzzy mérték megadása között. A fuzzy halmaz megadásánál azt kellett eldönteni, hogy az elemek milyen fokon tartoznak a fogalomhoz, a fuzzy mértékeknél pedig azt, hogy például milyen „fontosak".

4. Fuzzy programozás, lineáris fuzzy programozás

A fuzzy programozási feladat fuzzy környezetben levő döntési problémákkal foglalkozik. Döntési problémának a következő eljárást tekintjük: különböző alternatív lehetőségek közül, amelyek kielégítenek bizonyos korlátozásokat, válasszuk ki azt, amelyik egy vagy több célfüggvény követelményeinek legjobban megfelel. Sok esetben mind a korlátozások, mind a célfüggvények fuzzy tulajdonságúak, ekkor a problémák fuzzy elméleti megközelítése látszik a legcélszerűbbnek.

A fuzzy programozás elméletében mind a korlátozások, mind a célfüggvények fuzzy halmazok, a feladat tehát az, hogy olyan kiválasztást hozzunk létre, ami a fuzzy korlátozásokat kielégíti, és a célfüggvényre valamilyen extremális megoldást ad.

Jelöljük X-szel a lehetséges alternatívák halmazát.

Definíció. Egy fuzzy programozási feladat fuzzy célfüggvényei, és fuzzy korlátozásai X bizonyos fuzzy halmazai lesznek.

Megjegyzés. Bár a célfüggvények és a korlátozások formailag azonosak, a különböző feladatok pontosabb értelmezhetősége (pl. ok és okozati összefüggések) miatt célszerű megkülönböztetni őket.

Nézzük most meg a determisztikus automata fogalmát.

Definíció. Az $\mathcal{U} = \{U, X, \delta\}$ együttest determisztikus automatának nevezzük, ahol U az inputtér, X az állapot tér, $\delta\colon U \times X \to X$ az állapotfüggvény.

Diszkrét esetben létezik egy $\{0,1, \ldots, T\}$ véges diszkrét időintervallum, ekkor $\delta(u_t, x_t) = x_{t+1}$, $t \in \{0,1, \ldots, T\}$.

Példa. Legyen $\mathcal{U} = \{U, X, \delta\}$ egy diszkrét determinisztikus automata. Legyen $X = R^n$, $U = R^n$, x_T az X állapottér végállapota, és az a célunk, hogy „x_T közel legyen 0-hoz". Ekkor a következő fuzzy célfüggvényt adhatjuk meg:

$$\mu(x) = e^{-k\|x\|}, \quad \|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}.$$

Legyen u_t egy rögzített input a t időpontban, akkor a fuzzy korlátozás legyen a következő $\mu' =$ „u_t legyen közel u_0-hoz", azaz $\mu'(u_t) = e^{-k\|u_t - u_0\|}$.

Definíció. Legyenek $\mu_1, \ldots, \mu_p \in \mathfrak{F}(X)$ fuzzy célfüggvények, $\mu'_1, \ldots, \mu'_q \in \mathfrak{F}(X)$ fuzzy korlátozások, akkor a következő fuzzy halmazt fuzzy döntésnek nevezzük:

$$\mu = \Phi(\mu_1, \ldots, \mu_p, \mu'_1, \ldots, \mu'_q), \; \mu \in \mathfrak{F}(X).$$

Alap fuzzy döntésnek nevezzük a következő fuzzy halmazt:

$$\mu = \Big(\bigwedge_{i=1}^{p} \mu_i\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{j=1}^{q} \mu_j'\Big).$$

Ha külön nem tagadjuk, akkor ezt tekintjük fuzzy döntésnek.

Definíció. Legyen $\mu \in \mathfrak{F}(X)$ fuzzy döntés, ekkor az

$$M_x = \{x_0 \mid \mu(x_0) = \sup_{x \in X} \mu(x)\}$$

halmazt maximális döntéshalmaznak, véges esetben az $x_0 = \max \mu(x)$ elemeket maximális döntési elemeknek nevezzük.

Most nézzük meg hogyan lehet bizonyos esetekben a maximális döntést meghatározni. Legyen $\mathcal{U} = \{V, X, \delta\}$ véges, determinisztikus, diszkrét automata, tehát V és X véges halmazok, és $\{0,1, \ldots, T\}$ diszkrét időpontok, az állapotfüggvény $\delta(u_t, x_t) = x_{t+1}$. Legyenek $\mu_1, \ldots, \mu_{T-1} \in \mathfrak{F}(U)$ fuzzy korlátozások, ahol μ_i az u_i inputra vonatkozik, és μ_T' az x_T végállapot fuzzy célfüggvénye. Rögzítsünk egy $\{u_0, \ldots, u_{T-1}\}$ inputsorozatot, és tekintsük a

$$\mu(u_0, \ldots, u_{T-1}) = \mu_0(u_0) \wedge \ldots \wedge \mu_{T-1}(u_{T-1}) \wedge \mu_T'(x_T)$$

fuzzy döntést.

A következő eljárással juthatunk el fuzzy döntéshez:

1. Rögzítsünk egy $\{u_0, u_1, \ldots, u_{T-1}\}$ inputsorozatot.

2. Az x_0 kezdeti állapotból a $\delta(u_t, x_t) = x_{t+1}$ alkalmazásaival kiszámítjuk az x_T végállapotot.

3. Meghatározzuk a $\mu(u_0, \ldots, u_{T-1}) = \mu_0(u_0) \wedge \ldots \wedge \mu_{T-1}(u_{T-1}) \wedge \mu_T'(x_T)$ döntést.

A feladat tehát az, hogy határozzuk meg azt az $\{\bar{u}_0, \ldots, \bar{u}_{T-1}\}$ inputsorozatot, amire a döntés maximális.

Most alkalmazzuk azt az eljárást, amellyel egy végállapotból kiindulva meghatározunk egy $\mu_{T-1}'(x_{T-1})$ célfüggvényt, ez azzal a tulajdonsággal fog rendelkezni, hogy amennyiben létezik hozzá optimális $\{\bar{u}_0, \ldots, \bar{u}_{T-2}\}$ inputsorozat, akkor $\bar{u}_{T-1}$-et már könnyen meg lehet határozni. Belátható, hogy

$$\mu_{T-1}'(x_{T-1}) = \max_{u_{T-1}} \big(\mu_{T-1}(u_{T-1}) \wedge \mu_T'(\delta(u_{T-1}), x_{T-1})\big).$$

Most a μ_{T-1}' fuzzy halmazt tekinthetjük az x_{T-1} állapotra vonatkozó μ_T' által generált célfüggvénynek. Az iterációt folytatva azt kapjuk, hogy

$$\mu_{T-n}'(x_{T-n}) = \max_{u_{T-n}} (\mu_{T-n}(u_{T-n}) \wedge \mu_{T-n+1}'(x_{T-n+1})),$$

ahol

$$x_{T-n+1} = \delta(x_{T-n}\; u_{T-n}).$$

Így aztán eljuthatunk a μ_1' célfüggvényhez, amihez optimális $\bar{u}_0$ megkeresése után a μ_2' célfüggvényhez kell meghatározni a $\bar{u}_1$ inputot, és ezt folytatva eljuthatunk az optimális $\{\bar{u}_0, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{T-1}\}$ inputsorozathoz.

Lineáris fuzzy programozás. Ebben a részben azt fogjuk tárgyalni, hogy hogyan lehet egy lineáris programozási feladatot fuzzysítani, és hogy a lineáris fuzzy programozási feladat segítségével hogyan lehet több célfüggvényű lineáris programozási feladatokat megoldani.

Tekintsük a lineáris programozási feladat mátrix alapját

$$\text{Min } z = cx,$$

$$Ax \leq b,$$

$$x \geq 0,$$

ahol A $n \times m$-es mátrix, $n \leq m$, $c, x \in R^n$, $b \in R^m$, $z = cx$ a célfüggvény $Ax \leq b$, $x \geq 0$ a feltételek (korlátozások).

Láttuk, hogy egy fuzzy programozási feladatnál mind a célfüggvények, mind a korlátozások fuzzy halmazok, és a feladat megoldása a fuzzy döntés valamilyen szuprémumának a meghatározása.

Jelöljük $(Ax)_i$-vel a korlátozások i. sorának jobb oldalát, ekkor ezeknek a korlátozásoknak a fuzzysítása legyen a következő: Legyen d_i egy olyan megengedett érték, amennyivel a megoldás során még túlléphetjük a b_i értéket, tehát $(Ax)_i$ lehet nagyobb, mint b_i, de kisebbnek kell lennie mint $b_i + d_i$. A korlátozásoknak ezt a „lazítását" a következő tartalmazási függvényekkel írhatjuk le:

$$\mu_i(Ax) = 1, \text{ ha } (Ax)_i \leq b_i,$$

$$0 < \mu_i(Ax) < 1, \text{ ha } b_i < (Ax)_i < b_i + d_i$$

$$\mu_i(Ax) = 0, \text{ ha } (Ax)_i > b_i + d_i.$$

A fuzzy programozási feladatnál a célfüggvények is fuzzy halmazok. Itt a következőt tehetjük. Előzetes számítási eljárások, becslések vagy szubjektív értékelések során határozzunk meg egy olyan z_0 értéket, amit a célfüggvény értékével nem akarunk túllépni, és egy olyan c_0 értéket, amennyivel még túlléphetjük. Ezt, a korlátozásokhoz hasonlóan, a következő fuzzy célfüggvénnyel adhatjuk meg:

$$\mu_c(z) = 1, \text{ ha } z \leq z_0$$

$$0 < \mu_c(z) < 1, \text{ ha } z_0 < z < z_0 + c_0$$

$$\mu_c(z) = 0, \text{ ha } z \geq z_0 + c_0.$$

Ezzel tehát fuzzysítottuk a lineáris programozási feladatot. (Az $x \geq 0$ feltételt az egyszerűség kedvéért most hagyjuk meg.)

A fuzzy programozási feladatnál a fuzzy célfüggvények és a fuzzy korlátozások szimmetrikusak, a feladat megoldásának szempontjából azonos jellegűek. Ezért, hogy egyszerűbben kezelhessük őket, végezzük el a következő összevonásokat. Legyen a B mátrix az A együttható mátrix kiegészítése a célfüggvény együtthatóival $c = \{c_1, \ldots c_n\}$-nel, és a b' vektor a b vektor kiegészítése a z_0 elemmel. Így a B egy $nx(m + 1)$-es mátrix, b' egy $m + 1$ elemű vektor lesz. A most bevezetett összevonásokat figyelembe véve, a fuzzy korlátozások és a fuzzy célfüggvény tartalmazási függvényét specifikálva, a következő tartalmazási függvények adják meg a lineáris fuzzy programozási feladatot:

$$\mu_i(Bx) = \begin{cases} 1, & \text{ha } (Bx)_i \leq b'_i \\ 1 - \dfrac{(Bx)_i - b'_i}{d_i}, & \text{ha } b'_i < (Bx)_i \leq b'_i + d_i \\ 0, & \text{ha } (Bx)_i > b'_i + d_i. \end{cases}$$

A tartalmazási függvények ezért lineárisak a $[b'_i, b'_i + d_i]$ intervallumon, hogy a feladatot lineáris programozási feladattá alakíthassuk át.

A fuzzy döntést a korlátozások, és a célfüggvény metszeteiként a $\operatorname{Min}_i \mu_i(Bx)$ meghatározásával kapjuk meg. A lineáris fuzzy programozási feladat tehát a $\operatorname{Max}_x \operatorname{Min}_i \mu_i(Bx)$ kiszámítása.

Vezessük be a $B'_i = \dfrac{B_i}{d_i}$, $b''_i = \dfrac{b'_i}{d_i}$ jelöléseket. Ekkor az előbbi maximumkeresés, a tartalmazási függvényeket figyelembe véve, ilyen alakú lesz:

$$\operatorname{Max}_x \operatorname{Min}_i (b''_i - (B'x)_i)$$

Ez a feladat már ekvivalens a következő lineáris programozási feladattal: Határozzuk meg λ maximumát az alábbi feltételek mellett:

$$\lambda \leq b''_i - (B'x)_i, \qquad i = 1, \dots m, m+1$$

$$x \geq 0.$$

Most nézzük meg, hogy az itt kapott eredményeket hogyan lehet alkalmazni több célfüggvényű lineáris programozási feladatokra. Legyenek $z_1 = c_1 x$, $z_2 = c_2 x, \dots, z_k = c_k x$ a célfüggvények, a feladat ezeknek az együttes minimalizálása az $Ax \leq b$, $x \geq 0$ korlátozások mellett.

Először minden célfüggvényre oldjuk meg az adott LP feladatot, így megkapjuk az $x^1, \dots, x^k$ megoldásokat, amelyekre minden célfüggvény különkülön optimális értéket vesz fel. Ezután határozzuk meg a

$$c_{i0} = \max_{j, j \neq i} c_i x^j \qquad i = 1, \dots, k$$

értékeket, és az előző gondolatmenetet követve tegyük fel, hogy ennyivel még túlléphetjük az optimális $z^i = c_i x^i$ értékeket. Ekkor a célfüggvények fuzzysítására adjuk meg a következő tartalmazási függvényeket:

$$\mu_{ci}(z_i) = \begin{cases} 1, & \text{ha } z_i \leq z^i \\ 1 - \dfrac{c_i x - z^i}{c_{i0} - z^i}, & \text{ha } z^i < z_i < z^i + c_{i0} \\ 0, & \text{ha } z_i > z^i + c_{i0}. \end{cases}$$

Az így kapott fuzzy célfüggvényekre és az eredeti korlátozásokra alkalmazva az előző koncepciót, megoldhatjuk a feladatot.

H. J. Zimmerman [12] cikkében az előbb leírtak szemléltetésére a következő példát adta: Egy gyár két terméket állít elő. Az első termék hazai eladásából két dollár nyereséghez jut, a második termék eladásából csak egyhez. Az első termék előállításához egy dollár értékű import anyagra van szüksége, a második terméket két dollárért adhatjuk el külföldön. A gyárnak két célja van, egyrészt, hogy maximális nyereséget érjen el, másrészt, hogy maximális legyen a külkereskedelmi mérlege.

Tehát a két célfüggvény:

$$z_1(x) = 2x_1 + x_2,$$

$$z_2(x) = -x_1 + 2x_2$$

— a következő kapacitás korlátok feltételezésével:

$$-x_1 + 3x_2 \leq 21,$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 45,$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 27,$$

$$3x_1 + x_2 \leq 30,$$

$$x_{11}x_2 \geq 0$$

két célfüggvényes *LP* feladatot kapunk.

Ha megoldjuk a feladatot a z_1 célfüggvényre, tehát ha csak a maximális nyereségre törekednénk, az optimális megoldást a (9,3) pontban kapnánk, és a célfüggvény értéke $z_1(x) = 21$. A másik célfüggvény ebben a pontban -3 lesz, azaz $z_2(x) = -3$. Ezután a z_2 célfüggvényre oldva meg az *LP* feladatot a (0,7) pont lesz az optimális megoldás, és itt

$$z_1(x) = 7, \quad z_2(x) = 14.$$

Így a következő célfüggvényeket adhatjuk meg:

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad z_1(x) \geq 21, \\ \dfrac{z_1(x) - 7}{14}, & \text{ha} \quad 7 < z_1(x) \leq 21, \\ 0, & \text{ha} \quad z_1(x) \leq 7, \end{cases}$$

$$\mu_2(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad z_2(x) \geq 14, \\ \dfrac{z_2(x) + 3}{17}, & \text{ha} \quad -3 < z_2(x) < 14, \\ 0, & \text{ha} \quad z_2(x) \leq -3. \end{cases}$$

Ezeknek a tartalmazási függvényeknek a megfelelő átalakításával és az eredeti korlátokkal meghatározott lineáris fuzzy programozási feladat a következő lineáris programozási feladattal lesz ekvivalens:

Max λ

$$\begin{aligned} \lambda &\leq -0{,}058x_1 + 0{,}117x_2 + 0{,}176 \\ \lambda &\leq 0{,}143x_1 + 0{,}714x_2 - 0{,}5 \\ -x_1 + 3x_2 &\leq 21 \\ x_1 + 3x_2 &\leq 27 \\ 4x_1 + 3x_2 &\leq 45 \\ 3x_1 + x_2 &\leq 30 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Ennek a megoldása a következő eredményeket adta: $\lambda = 0{,}74$; a maximális nyereség $= 17{,}38$; a maximális külkereskedelmi mérleg $= 4{,}58$.

(Beérkezett: 1979. december 10-én.)

IRODALOM

1. NEOGITA, C. V.—RALESCU, D. A.: Applications of fuzzy sets to system analysis. Basel, 1975. Birkhauser.
2. KAUFMANN, F.: Introduction to fuzzy sets theory. New York, 1976. Academic Press.
3. ZADEH, L. A.: Fuzzy sets. Information and Control, 1965. No. 8, pp. 338—350.
4. GOUGEN, J. A.: L-fuzzy sets. Journ. Math. Anal. and Appl., 1967. No. 18, pp. 145—174.
5. SUGENO, M.: Fuzzy measures and fuzzy integrals — a survey. In: GUPTA, M. M. (ed.): Fuzzy automats and decision processes. New York, 1977. North Holland Publishing Co., pp. 154—176.
6. TERANTO, T.—SUGENO, M.: Conditional fuzzy measures and their application. In: ZADEH, L. A. (ed.): Fuzzy sets and their applications to cognitive and decision processes. New York, 1975. Academic Press, pp. 112—129.
7. SUGENO, M.—TERANTO, T.: Analytical representation of fuzzy systems. In: GUPTA, M. M. (ed.): Fuzzy automats and decision processes. New York, 1977. North Holland Publishing Co., pp. 177—189.
8. ZADEH, L. A.: Probability measures of fuzzy events. Journ. Math. Anal. and Appl., 1968. No. 23, pp. 421—437.
9. BELLMAN, R.—ZADEH, L. A.: Decision making in a fuzzy environment. Management Science, 1970. No. 17, pp. B141—B164.
10. ZADEH, L. A.: Fuzzy sets as a basis for theory of possibility. Fuzzy Sets and Systems, 1978. No. 1, pp. 3—28.
11. NEGOITA, C. V.: On fuzzy environment in optimalization problems. In: Modern trends in cybernetics and systems. Berlin, 1977. Springer-Verlag, pp. 13—24.
12. ZIMMERMANN, H. J.: Fuzzy programming and linear programming with several objective functions. Fuzzy sets and Systems, 1978. No. 1, pp. 45—56.
13. GIHMAN, I. I.—SZKOROHOD, A. V.: Bevezetés a sztochasztikus folyamatok elméletébe. Budapest, 1975. Műszaki Kiadó.

IDEGEN TOLLAK

VICENTE SALAS FUMAS – ANDREW B. WHINSTON
(Martos Béla szerkesztői közreműködésével)

Automatikus ármódosítások hosszú távú szerződésekben*

Amikor vállalatok vagy kormányszervek olyan szerződést kötnek egymással, amelyek hosszabb időre elosztott szállításokra vonatkoznak, gyakran abban is megegyeznek, hogy az árakat időnként hozzáigazítják a termelési költségek exogén változásaihoz. E dolgozat megmutatja, hogy bizonyos feltételek mellett hogyan lehet olyan szerződést kialakítani, amely ugyan megengedi az árak változását, de nem szünteti meg a termelő ösztönzését arra, hogy hatékonyan gazdálkodjék. Csak egész különleges feltételek mellett fogadható el a teljes „áthárítás". Megmutatjuk, hogy a geometriai programozás módszere a termelésgazdaságtanra alkalmazva ennek a problémának az elemzésére is használható.

Nyilvánvaló, hogy a szocialista gazdaság viszonyai között ugyanez a módszer nemcsak a vállalatoknak egymásközötti szerződéses áraira alkalmazható, hanem hasznosítható egyrészt kormányközi hosszú lejáratú szerződések keretében is, valamint alapul szolgálhat a szabályozott árak körében arra, hogy az alkudozásos ármegállapítást automatikus árszabályozással helyettesítse.

I. Bevezetés

A dolgozat olyan problémákkal foglalkozik, amelyek gazdasági egységek között hosszú lejáratú szerződések megkötésekor merülnek fel. Például egy cégnek meg kell egyeznie nyersanyagszállítóival olyan ármódosításokról, amelyek a szállítókat érő költségnövekedéseket visszatükrözik. Tőkés vállalatokkal szemben a szakszervezetek rendszerint olyan formulákra törekszenek, amelyek megvédik tagjaikat az ár-infláció hatásaitól.

Általában a rugalmas szerződések kialakulása arra az ésszerű érvre támaszkodik, hogy vegyék figyelembe, hogy megváltozhatnak egyes olyan tényezők, amelyekre a szerződő feleknek nincs befolyásuk. Jóllehet e változások jellege és mértéke ex ante nem határozható meg, el lehet érni olyan specifikus for-

* A cikk nagyobbik része a két szerzőnek „Flexible Contracting Theory and Case Examples" *European Journal of Operations Research 3* (1979) 368–378 c. cikkének fordítása. Szerkesztő-fordítóként azonban a szerzők engedélyével helyenként kiegészítettem vagy módosítottam az eredmények interpretációját, hogy világosabbá váljék a módszer alkalmazhatósága a szocialista gazdaságban. A Függelék a két szerzőnek „Production Theory and Log-Convexity" c. publikálatlan kéziratából [4] származik. Néhány gondolatot átvettem az S. Ram-Mohan, V. Salas, A. Whinston: „An Automatic Price Adjustment Formula for a Regulated Firm" *Applied Economics 9* (1977) 243–252 c. cikkből is. (M.B.)

májú egyezményeket, amelyekben a szerződéses ár alkalmazkodik az ilyen változáshoz, ha az bekövetkezik.

A rugalmas szerződéseket indokoló fő motívum az infláció. A ráfordítások árának változása egy vállalat számára külsődleges és nem büntethető érte. Ennek ellenére a szerződéses kapcsolat egy ilyen vállalat és vevői között nem engedheti meg, hogy a kibocsátási árakat egyszerűen a ráfordítási árak arányában emeljék. A termelő egység vezetőségét ösztönözni kell arra, hogy a ráfordítás-szerkezetet is hozzáidomítsa az új feltételekhez, már amennyire ezt a technológia megengedi, úgy hogy a terméket az új ráfordítási árakon is minimális költséggel állítsa elő. A megállapodásoknak vissza kell tükrözniük a helyettesítési lehetőségeket és ösztönözniük a vállalatvezetést az elérhető legnagyobb hatékonyságra.

Az infláció az áremelés meggyőző indokául szolgálhat, miközben elfedheti egy részét a vállalatvezetői mulasztásoknak. A fő célja e dolgozatnak, hogy olyan szerződések kidolgozásához segítsen, amelyek megkülönböztetik a vállalatvezetés hibájából bekövetkezett költségemelkedést a tőle független külső hatásoktól.

Az áremelkedések által előidézett másik probléma egy gazdasági egység teljesítményének elszámolásával kapcsolatos. A teljesítmény, amit itt a költséghatékonysággal vagy termelékenységgel mérünk, sok decentralizált szervezetben a premizálás és ösztönzés alapjául is szolgál. Ismeretes, hogy a jelenlegi elszámolási módszerek, amelyek a múltbeli költségeken alapulnak, nagyon korlátozottan alkalmasak csak arra, hogy a teljesítményt mérjék olyan időszakokban, amikor az árak változtak azokhoz képest, amelyek a bázisidőszakban voltak érvényesek (vagy azokhoz amelyeken az eredeti költségvetéseket csinálták). Ez a bírálat bizonyára jogos nemcsak az amerikai, hanem a magyar teljesítmény-elszámolás módszerére is. Ilyen körülmények között, a termelő egység megfigyelt eredményei mind az árváltozásoknak, mind a hatékonyság változásának a hatását tartalmazzák. Mivel pedig a premizálási rendszer csak a hatékonyságot veheti alapul, egy ilyen rendszer sikere attól függ, hogy a két hatást külön tudjuk-e választani.

Célunk e dolgozatban, hogy elméleti és gyakorlati alapot teremtsünk a hatékonyság megfigyelésére, a minimális működési költség értelmében. A konvex és a geometriai programozás dualitás elméletének és metodikájának keretében a termelés elméletét kiterjesztjük az olyan költségindex formulák számítására, amelyek lehetővé teszik a költségbecsléseknek az árváltozások okozta módosítását a feltételezett hatékonysági szint fenntartása mellett.

A 2. fejezet részletesebben elemzi a termelési költség hatékonyságának fogalmát. A 3. fejezet a költségindexek számítására alkalmazza ezt az elméletet és megmutatja hogyan használható különböző körülmények között. Összefoglalással és következtetésekkel zárul a tanulmány.

2. Termelés és költséghatékonyság

A termelési modellekben a költséghatékonyság fogalma abból a magatartási feltevésből következik, hogy a javak és szolgáltatások termelése egy költségminimalizálási cél eredménye, amelyet a technológiai adottságok és jártasságok korlátoznak. Ebből a magatartásból levezethető a normatív szabályok egy sora, amelyeket be kell tartani, amikor a megkívánt kibocsátási szintnek megfelelő különböző ráfordítások mennyiségét megválasztják.

A termelési modellekben a következő előzetes információk állnak rendelkezésre:

(1) Az n számú ráfordítási változóból képzett $x = (x_1, \ldots, x_n)'$ vektor, amelyhez a gazdasági egység szabadon hozzájut, ha megfizeti a minden időpontban ismert egységárat, $p = (p_1, \ldots, p_n)'$. Általában $p_i > 0$ és $x_i \geq 0$, $i = 1,2, \ldots, n$.

(2) Az x vektor komponensei a termelési folyamatban úgy kombinálódnak, hogy egy adott időpontban az y kibocsátást hozzák létre. Egy adott x-re többféle y lehetséges, de a probléma arra az y-ra korlátozódik, amelyik maximálisan elérhető egy adott x-ből. Feltételezzük, hogy a termelési folyamat olyan, hogy ez a maximum létezik. A maximumot $y = F(x)$ alakban írjuk, ahol F-et a termelő *termelési függvényének* nevezzük, ez foglalja magában a technológiai lehetőségeket a vizsgált időszakban. F-ről hagyományosan feltételezik a következő tulajdonságokat (*Diewert* [1, pp. 484—485]).

(a) F az x-nek skalárértékű függvénye, amely minden $x \geq 0$-ra értelmezve van és véges, ha x véges.

(b) $F(\theta) = 0$ és F nemcsökkenő függvénye x-nek, azaz, ha $x^* \geq x^{**}$, akkor $F(x^*) \geq F(x^{**})$.

(c) Minden pozitív y kibocsátási szint elérhető, bár az általánosság akkor sem csorbul, ha azt tesszük fel, hogy y korlátos.

(d) F felülről félig folytonos.

(e) F kvázikonkáv az n-dimenziós euklideszi tér nemnegatív ortánsában, azaz az

$$\{x \mid F(x) \geq y, x \geq 0\} \tag{2.1}$$

halmaz konvex minden $y \geq 0$-ra.

A fenti (e) feltételt módosítani lehet a termelési függvényeknek azon osztálya esetén, amit ebben a tanulmányban tárgyalunk. Ezt az osztályt *pozinomoknak*[1] nevezzük, a függvények alakja a következő:

$$F(x) = \left[\sum_{j=1}^{T} \beta_j \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_{ij}} \right]^{-\gamma} \tag{2.2}$$

ahol γ és β_j ($j = 1, \ldots, T$) pozitív paraméterek, míg az α_{ij} ($i, j = 1,2, \ldots, n$) paraméterek előjele nem korlátozott, kivéve, hogy a (2.2)-ben definiált F-nek ki kell elégítenie a fenti (a)—(d) feltételeket. Az (e) feltételt a (2.2) függvény általában nem elégíti ki, de a geometriai programozás elméletéből tudjuk, hogy a függvény logkonkáv a változók logaritmusaiban. A logkonkáv függvények kvázikonkávak, tehát (2.2), jóllehet nem okvetlenül kvázikonkáv, de a változók logaritmikus transzformálásával kvázikonkávvá tehető.[2] Így a transzformált változókban kifejezett függvény az (e) feltételt is kielégíti.

[1] A pozinom függvények szolgáltak a geometriai programozás alapjául. Lásd pl. *Duffin* et al. [2].

[2] A konvex S halmazon értelmezett $\theta(x)$ függvényt logkonkávnak nevezzük, ha $0 \leq \alpha \leq 1$, $x_1, x_2 \in S$-re

Az (e) feltételnek ez az általánosítása azért fontos, mert az alább bemutatandó eredmények a pozinom optimalizálásra vonatkoznak, ahogyan az először műszaki tervezési problémákban felmerült. Továbbá a (2.2) alakú általános termelési függvény fontos lehet, mivel a termelés gazdaságtanában újabban javasolt termelési függvényeket is reprezentál [4]. Megjegyezzük még, hogy (2.2) következtében $y > 0$-hoz, $x_i > 0$, $i = 1,2, \ldots, n$ szükséges, azaz pozitív kibocsátáshoz a modell összes változói lényegesek.

A költségminimális feladat ezekután a következő:

$$\min_x \left\{ \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \mid F(x) \geq y, x \geq 0 \right\}, \tag{2.3}$$

ahol $F(x)$-et (2.2) szerint specifikáljuk.

Megjegyzendő, hogy a paraméterek megfelelő választásával $F(x)$ felveszi a termeléselméletben használt szokásos alakok akármelyikét. Például, ha $\beta_k = \beta$, $\beta_j = 0$, $j \neq k$, és $\gamma = 1$, és α_{ik} helyett α_i-t írunk, akkor a jól ismert *Cobb–Douglas* [5] termelési függvényt kapjuk:

$$F_1(x) = \beta \prod_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha_i},$$

amelyben $\alpha_i < 0$, hogy a függvény nemnövekvő legyen.

Hasonlóképpen, ha $T = n$, $a_{ii} = -1/\gamma$ $\alpha_{ij} = 0$, $i \neq j$, akkor a páronként állandó és azonos helyettesítési elaszticitású (CES) termelési függvényt kapjuk, amelyet két inputra *Arrow* et al. [6] vezetett be és *Uzawa* [7] általánosított:

$$F_2(x) = \left[\sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j^{-1/\gamma} \right]^{-\gamma}.$$

Végül, ha $T = n^2$, $\alpha_{ij} = -2/\gamma$ és β-nak a j indexét (i, j)-re változtatjuk, úgy hogy $\beta_{ij} = \beta_{ji}$, akkor az $1/\gamma$ rendű négyzetes átlagot kapjuk:

$$F_3(x) = \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} x_i^{-2/\gamma} x_j^{-2/\gamma} \right]^{-\gamma}.$$

$$\theta[\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2] \geq [\theta(x_1)]^{\alpha} [\theta(x_2)]^{1-\alpha}$$

és logkonvexnek, ha az egyenlőtlenség jele fordított. (Klinger és Mangasarian [3]). A (2.2) függvényben az

$$x_i = e^{u_i}, \text{ azaz } \ln x_i = u_i \quad x_i > 0, \quad i = 1, \ldots n$$

helyettesítéssel:

$$F(\ln x) = G(u) = \left[\sum_{j=1}^{T} \beta_j \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} u_i \right) \right]^{-\gamma}.$$

Mivel pedig a $\sum_{j=1}^{T} \beta_j \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} u_i \right)$ függvény logkonvex. ([3] 2.8 és 2.18), a $G(u)$ függvény logkonkáv ([3] 2.12). Az F-re tett monotonitási követelmény korlátozza α_{ij} lehetséges értékeit. $\gamma > 0$ esetén a globális monotonitás elégséges feltétele $\alpha_{ij} < 0$ minden i, j-re. De megelégedhetünk lokális monotonitással is, ha a függvény értelmezési tartományát olyan x-ekre korlátozzuk, ahol ez a feltétel kielégül. Ha valamelyik $\beta_j < 0$, akkor a (2.2) alak általánosított pozinomot állít elő. Ennek optimalizálását *Passy* és *Wilde* [10], valamint *Gochet* és *Smeers* [16] tárgyalták.

Ezt a függvényt *Diewert* [1] és mások vezették be mint egy általános, változó helyettesítési elaszticitású függvényt. Arra is rámutattak, hogy ez a függvény β_{ij} megfelelő választásával egy tetszőleges elsőfokú homogén függvény másodrendű közelítését adja. Végül ez is kitűnt, hogy $\gamma \to 0$ határesetben a függvény logaritmikus alakot vesz fel. (Diewert [11]-ben Lau eredményét idézi.)

A (2.3) alakú probléma a termelés gazdaságtanában kiindulópontul szolgált és az $F(x)$-re idézett példák a technológia reprezentálására leggyakrabban használt függvényalakoknak felelnek meg. A (2.3) feladatot az $F(x)$-re tett (a)—(c) feltevésekkel együtt a termelés gazdaságtanában arra használják, hogy jellemezzék az általuk definiált $C(p, y)$ költségfüggvényt. Ha az

$$X = \{x \mid x \in R^n_+,\ F(x) \geq y\}$$

halmazt a lehetséges ráfordítások halmazának nevezzük, akkor a költségfüggvény

$$C(p, y) = \min_{x \in X} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

alakban adódik. E függvényt és tulajdonságait *Shephard* [8], *Diewert* [1] és mások tanulmányozták.

A jelen tanulmányban, mivel hogy az (e) feltevést gyengítettük, a geometriai programozás duálisát használjuk fel arra, hogy (2.3)-ból a költségfüggvényt levezessük. Bár a *GP* dualitás alkalmazásának értékét a következő fejezetben bemutatandó példákkal illusztráljuk majd, már itt megjegyezzük, hogy a *GP* duálisnak az a kellemes tulajdonsága van, hogy konvex programozási feladathoz vezet. Így a költségfüggvény tulajdonságait a duális formulázásból könnyű kibontani.

A *GP*-nek és a *GP* dualitásnak eredeti megfogalmazása *Duffin* és társai műve [2]; további hivatkozások: *Passy* és *Wilde* [10] valamint *Peterson* [9]. A *GP* feladatok számítástechnikai vonatkozásait legutóbb *Dembo* [14] tekintette át.

Legyen

$$\delta = (\delta_{01}, \ldots, \delta_{0n}, \delta_{11}, \ldots, \delta_{1T})$$

a duális változók vektora. (2.3) duálisa a következőképpen fogalmazható meg:[3]

$$\max_{\delta} v(\delta) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{0i} \ln \left(\frac{p_i}{\delta_{0i}} \right) + \sum_{j=1}^{T} \delta_{1j} \ln \frac{\left(\sum_{j=1}^{T} \delta_{1j}\right) \beta_j y^{1/\gamma}}{\delta_{1j}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_{0j} - 1 = 0 \quad \text{(normalitás)} \tag{2.4}$$

$$\delta_{0i} + \sum_{j=1}^{T} \alpha_{1j} \delta_{ij} = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n \ \text{(ortogonalitás)}$$

$$\delta \geq 0 \quad \text{(nem-negativitás)}$$

[3] Levezetését lásd a Függelékben.

A feladat: konkáv függvény maximálása egy konvex (lineáris) halmazon. Ha a (2.4) feladat megengedett halmazát $Q(\delta) \geqq 0$ alakban írjuk, a $C(p, y)$ költségfüggvény a következő alternatív alakra hozható

$$C(p, y) = \max_{\delta} \{v(\delta) \mid Q(\delta) \geqq 0\}, \quad p, y > 0 \tag{2.5}$$

Az optimálási probléma konkáv-konvex jellegéből és Slater-regularitásából következik, hogy a maximum létezik. Azt is feltesszük (lásd a Függeléket), hogy a duális teret definiáló $\begin{bmatrix} I \\ \alpha_{ij} \end{bmatrix}$ mátrix rangja teljes (n).

A geometriai dualitás szerint a primál és duális változók optimális értékei közt a következő összefüggések állnak fenn:

$$\begin{aligned} \delta_{0i}^* &= \frac{p_i x_i^*}{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^*} \qquad i = 1, 2, \ldots, n \\ \frac{\delta_{1j}^*}{\sum_{j=1}^{T} \delta_{1j}^*} &= \frac{\beta_j \prod_{i=1}^{n} x_i^{*\alpha_{ij}}}{\sum_{j=1}^{T} \beta_j \prod_{i=1}^{n} x_i^{*\alpha_{ij}}} \qquad j = 1, 2, \ldots, T, \end{aligned} \tag{2.6}$$

Végül meg kell említeni a (2.5) szerint definiált $C(p, y)$ függvény következő tulajdonságait:

(a′) A $C(p, y)$ skalár függvény és értelmezve van $p > 0$ és $y > 0$-ra.
(b′) $C(p, y)$ nemnövekvő y-ban és p-ben.
(c′) $C(p, y)$ p-nek elsőfokú homogén függvénye minden $y > 0$-ra.
(d′) $C(p, y)$ p-ben konkáv függvény.

Jóllehet az (a′)–(d′) tulajdonságok teljesen jellemzik $C(p, y)$-t, explicit függvényalakot csak speciális esetekre lehet előállítani. Ezek egyike nyilván az, amikor a (2.4) feladat nehézségi foka zéró, amikor is (δ_0, δ_1) teljesen meghatározható p-től és y-tól függetlenül. Ez a helyzet akkor, ha $F(x)$ megfelel a fenti $F_1(x)$-nek (Cobb–Douglas). Ekkor $Q(\delta) \geqq 0$ úgy írható, hogy

$$\delta_{0i} - \alpha_i \gamma \delta_1 = 0 \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_{0i} - 1 = 0,$$

amiből $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha$ jelöléssel:

$$\delta_1 = \alpha\gamma$$

$$\delta_{0i} = \frac{\alpha_i}{\alpha} \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Ezt a célfüggvénybe helyettesítve:

$$C(p, y) = \beta^{\alpha\gamma} \left[\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\alpha_i}{\alpha} \right)^{-\alpha_i/\alpha} \right] y^{\alpha} \sum_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i/\alpha}.$$

Hasonlóképpen (lásd [4]) az $F_2(x)$ CES függvény esetén:

$$C(p, y) = y \left(\sum_{i=1}^{n} p_i^{1-\sigma} \beta_i^{\sigma} \right)^{1/(1-\sigma)},$$

ahol $\sigma = \gamma/(1+\gamma)$.

De általánosságban nehéz volna $C(p, y)$ explicit alakját meghatározni. Egy közelítési mód lenne az, hogy választunk egy sorozat pozitív p és y értéket abból az értéktartományból, amelyet várhatóan felvesznek és kiszámítjuk a megfelelő minimális költségértékeket. A *GP* duális ismert tulajdonságaiból következik, hogy ezek az értékek az áraknak egy konkáv határfelületét alkotják és a kibocsátás növekedésével monoton növekszenek. Minden olyan $C(p, y)$ függvényalak, amelyik az (a′)–(d′) feltételeket kielégíti, hozzáilleszthető az így kapott megfigyelési értékekhez és előállítja a költségfelületet. Ezt az eljárást *Fedorowicz* [12] javasolta.

Diewert [1] és mások a következő függvényalakot javasolták, amelyik kielégíti az e fejezetben kikötött feltételeket:

$$C(p, y) = h(y) \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{T} a_{ij}\, p_i^{\mu/2}\, p_j^{\mu/2} \right]^{1/\mu}, \qquad a_{ij} = a_{ji} > 0,$$

ahol $h(y)$ a kibocsátásnak egy skalár függvénye. Azt is megmutatták, hogy ez a függvény az árak egy tetszőleges homogén konkáv függvényét másodrendű Taylor sorbafejtésével helyettesíti [1]. A *GP* irodalomban találunk eredményeket, amelyek lehetővé teszik a minimális költségértékek érzékenységi vizsgálatát a paraméterek egy tartományán (*Dinkel* és *Kochenberger* [15]).

3. Költségindexek és termelési indexek: A GP dualitás alkalmazása a hosszú távú szerződésekben

Mint a bevezető megjegyzésekben már hangsúlyoztuk, e dolgozat célja, hogy az időbeli termelési folyamatnál figyelemmel tudjuk kísérni a költséghatékonyságot, különösen akkor, ha a ráfordítások árai változnak.

A rendszer működésének időbeli összehasonlításakor el kell különítenünk azt, ami az új árakra adott válasz, attól, ami a működés hatékonyságának ennél mélyrehatóbb változása. Noha az árak változását folyamatosnak kellene tekintenünk, mi megelégszünk a komparatív statikus közelítéssel két időpont között, és egy-egy periódus átlagos árait használjuk. A feladatnak véges időszakokra való felbontása egybe kell essék azzal a gyakorisággal, amivel a helyzetet felmérik.

E fejezetet hipotétikus példák köré építjük, amelyek lehetővé teszik, hogy a fő kérdésekre összpontosítsunk és ugyanakkor kellő alapot nyújtsunk az általánosításra. A szerzők eredeti példái ex ante árajánlatokra vonatkozó formulákat állítottak elő. Ezeket a szerkesztő a magyar olvasó igényeinek jobban megfelelő utólagos ármódosító formulákként értelmezte át.

1. Példa. *Pontos árformula*

Tegyük fel, hogy egy acélgyár termelési folyamata a fenti $F_2(x)$ függvénnyel leírható, kiegészítve ezt egy $\theta(t)$ tanulási tényezővel, ahol t az idő. Tehát

$$F(x) = \theta(t)\,[\beta_L L_t^{-1/\gamma} + \beta_M M_t^{-1/\gamma} + \beta_C C_t^{-1/\gamma}]^{-\gamma} \tag{3.1}$$

ahol $F(x)$ = időegységenkénti termelés tonnában

L_t, M_t, C_t = munka, anyag és tőkeszolgálati ráfordítások

$\gamma_L, \beta_M, \beta_C$ = pozitív paraméterek, melyeknek összege 1

γ = pozitív paraméter, amely a ráfordítások közötti σ helyettesítési elaszticitáshoz úgy kapcsolódik, hogy $\gamma = \sigma/(1-\sigma)$.

Mérnöki becslések azt mutatják, hogy $\sigma = 1/2$, míg $\theta(t)$-t úgy becsülhetjük, hogy évi 2%-os termelésnövekedést tesz lehetővé.

A (2.4) alatti probléma (2.8) alatti megoldását felhasználva y mennyiségű acél termelésének minimális költsége a t időszakban

$$C(p_t, y) = \frac{y}{\theta(t)}\,(p_{Lt}^{1-\sigma}\beta_L^{\sigma} + p_{Mt}^{1-\sigma}\beta_M^{\sigma} + p_{Ct}^{1-\sigma}\beta_C^{\sigma})^{1/(1-\sigma)}, \tag{3.2}$$

ahol p_{Lt}, p_{Mt}, p_{Ct} = a t időszakban érvényes ráfordítási árak. Tehát 1t acél árindexét a t-edik és a 0-val jelölt bázisidőszak között (3.2) alapján így írhatjuk:

$$\frac{C(p_t, 1)}{C(p_0, 1)} = \frac{\theta(0)}{\theta(t)}\left[\sum_{i=L,M,C} \frac{p_{it}^{1-\sigma}\beta_i^{\sigma}}{\sum_i p_{i0}^{1-\sigma}\beta_i^{\sigma}}\right]^{(1/1-\sigma)}.$$

Tudjuk azonban, hogy a 0 időszakban az optimumban

$$\sum_i p_{i0}x_{i0}^* = \frac{1}{\theta(0)}\Big(\sum_i p_{i0}^{1-\sigma}\beta_i^{\sigma}\Big)^{1/(1-\sigma)}.$$

Mindkét oldalon logaritmust véve, p_{i0} szerint differenciálva és p_{i0}-lal szorozva:

$$\frac{\partial \log\big(\sum_i p_{i0}x_{i0}\big)}{\partial p_{i0}}\,p_{i0} = \frac{p_{i0}x_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0}x_{i0}} = S_{i0} = \frac{p_{i0}^{1-\sigma}\beta_i^{\sigma}}{\sum_i p_{i0}^{1-\sigma}\beta_i^{\sigma}}, \quad i = L, M, C,$$

ahol S_{i0} az egyes ráfordítások részesedési aránya az összes költségből a bázisidőszakban.

E szerint helyettesítve

$$\frac{C(p_t, 1)}{C(p_0, 1)} = \frac{\theta(0)}{\theta(t)}\left[\sum_{i=1}^{n} S_{i0}\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}\right)^{1-\sigma}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}}.$$

Ha tehát 1 t acél ára a bázisidőszakban q_0 volt, és ezt a költségváltozásokkal arányosan kívánjuk emelni, akkor 1 periódussal később a jogos ár:

$$q_1 = q_0\,\frac{1}{1{,}02}\left[S_{L0}\left(\frac{p_{Lt}}{p_{L0}}\right)^{1/2} + S_{M0}\left(\frac{p_{M1}}{p_{M0}}\right)^{1/2} + S_{C0}\left(\frac{p_{C1}}{p_{C0}}\right)^{1/2}\right]^2. \tag{3.3}$$

Ha a kiinduló ár 500/tonna, az egyes tényezők költségrészesedése rendre 40%, 40% és 20% (a bázisidőszakban), továbbá a bérek 10%-kal, az anyagárak 15%-kal, a tőkeköltségek 2%-kal emelkedtek, akkor

$$q_1 = 500 \times 1{,}081 \simeq 540{,}50$$

(szemben a változatlan ráfordításarányokkal kalkulált árral, ami 541,18 lett volna).

2. Példa. *Közelítő árformula*

A vállalat új korszerűbb termék (integrált áramkör) termelésére kíván áttérni. A kísérleti gyártás költségei nem lehetnek mérvadóak arra az időre, amikor már tömeggyártás folyik majd, de bizonyos következtetések levonhatók mind az előző gyártmány termelési függvényéből, mind a kísérleti gyártás ráfordításarányaiból.

A régi gyártmány termelési függvénye pozinomiális (2.2) alakú volt és elsőfokú homogén, úgy hogy $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} = -1/\gamma$. Így (2.4) második korlátozó feltételéből (ortogonalitás) következik

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_{0i} = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{T} \alpha_{ij} \alpha_{1j} = \frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{T} \delta_{1j}$$

azaz az első (normalitási) feltételből:

$$\sum_{j=1}^{T} \delta_{1j} = \gamma.$$

Feltehető továbbá, hogy az új gyártmány termelési függvényében a β és γ paraméterek különbözni fognak a régi értékektől, de az α_{ij} paraméterértékek változatlanok maradnak (tehát ismertek). Továbbá mindezekről a paraméterekről feltehető, hogy az időben változatlanok.

A geometriai duális programból adódó

$$C(p, y) = \max_{\delta} \{v(\delta) \mid Q(\delta) \geq 0\} \quad p > 0, y > 0 \tag{3.4}$$

függvényt illetően a kísérleti gyártás adatai becslést adnak a δ_{0i} paraméterekre, a költségek tényezők közti megoszlására. Mivel az α_{ij}-k ismertek, kiszámítható, hogy vannak-e megengedett (nem-negatív) δ_{1j} értékek; ha igen, akkor az induló költségrészesedés megengedett lesz a jövőben is. E feltételek mellett alsó és felső becslés adható az új gyártmány költségindexére a kísérleti költségeket véve bázisul.

Jelölje $v(\delta^{*t}, p_t)$ a (3.4) optimális megoldását a t időszaki árak mellett, ugyanakkor a primál optimális megoldás

$$TC(x^{*t}, p_t) = \sum_{i=1}^{n} p_{it} x_i^{*t}$$

ahol x_i^{*t} az optimális ráfordításokat jelenti a t időszaki árak mellett. Mint tudjuk a primál és duális optimumok egyenlőek

$$v(\delta^{*t}, p_i) = TC(x^{*t}, p_t),$$

a kísérleti gyártásra vonatkozóan pedig

$$v(\delta^{*0}, p_0) = TC(x^{*0}, p_0).$$

Ez a következő egyenlőtlenséghez vezet az optimalitási tulajdonságokat figyelembe véve.

$$\frac{v(\delta^{*0}, p_t)}{v(\delta^{*0}, p_0)} \leq \frac{v(\delta^{*t}, p_t)}{v(\delta^{*0}, p_0)} = \frac{TC(x^{*t}, p_t)}{TC(x^{*0}, p_0)} \leq \frac{TC(x^{*0}, p_t)}{TC(x^{*0}, p_0)}. \tag{3.5}$$

Figyelembe véve β_j és γ időbeli változatlanságát a mi függvényünkre a fenti egyenlőtlenség a következőt adja

$$\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}\right)^{\delta_{0i}^{*0}} \leq \frac{\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_{it}}{\delta_{0i}^{*0}}\right)^{\delta_{0i}^{*t}} \prod_{j=1}^{T} \left(\frac{\beta_j}{\delta_{1j}^{*t}}\right)^{\delta_{1j}^{*t}}}{\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_{i0}}{\delta_{0i}^{*0}}\right)^{\delta_{0i}^{*0}} \prod_{j=1}^{T} \left(\frac{\beta_j}{\delta_{1j}^{*0}}\right)^{\delta_{1j}^{*0}}} \leq \sum_{i=1}^{n} \delta_{0i}^{*0} \left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}\right). \tag{3.6}$$

Mint látható a valódi költségindex az árváltozások súlyozott geometriai és aritmetikai átlaga közé esik,[4] de míg a valódi index kiszámításához az ismeretlen β_j paraméterekre lenne szükség, az alsó és felső becslés nélkülük is kiszámítható. A két becslés számtani közepe feltehetően kielégítő becslést ad a valódi indexre. Ily módon eldönthető, milyennek kell lennie az új termék árának a különböző jövőbeni inputárak mellett ahhoz, hogy érdemes legyen a régi helyett ezt gyártani.

4. Összefoglalás és következtetések

Dolgozatunkban a geometriai programozás technikáját alkalmaztuk az időbeli költséghatékonyság felülvizsgálatára abban az esetben, amikor a költségminimálási probléma költségparaméterei periodusonként különbözőek. Megmutattuk, hogyan jellemezhető az árak és termelési szintek költségfüggvénye pozinom optimálási feladatként; ez az alak mind a közgazdaságtudományban, mind a mérnöki szerkesztésben gyakran előfordul. Levezettünk egy feltételsorozatot, amely ilyen költségfüggvény esetén lehetővé teszi a tényleges vagy a (statisztikai értelemben) közelítő függvényforma megállapítását. A dolgozat eredményeit szembesíteni lehet a probléma klasszikus tárgyalásmódjával; az eredményeket itt a *GP* duálisból kapjuk. Ennek az az előnye, hogy a primál feladatban enyhíthetünk a konvexitási feltételeken, a duálisban pedig a szokásos klasszikus gyakorlattal szemben az eredményeink levezetésében jelentős számításbeli könnyebbségeket érünk el.

Az elméleti eredményeket a hosszú távú szerződések egy lényeges problémájára alkalmaztuk, olyan „költségátházítási" (vagy a magyar szakzsargonban

[4] A geometriai dualitás felhasználását már *Woolsey* [13, 4. fej.] is javasolta a változó árakkal számított összköltség alsó korlátjának kiszámítására.

meghonosodott szóval élve: „begyűrűztetési") formulát vezettünk be, ami a ráfordítási árak változását „átvezeti" a termék költségén, de e mögé nem bújtatható el az optimálisnál rosszabb termelékenység költségnövelő hatása. A formuláknak jelentős számításbeli előnyük van azzal szemben, mintha a költségminimálási feladatot meg kellene oldanunk valahányszor a tényezőköltségek megváltoztak. A dolgozatból kitűnik, hogy az ilyen formulákat a szerződéses árak és az ellenőrzött árszabályozás körében elterjesztve bizonyos mértékig fékezni lehet az inflációs folyamatokat is. A szerződő felek ezesetben nemcsak az induló árban alkudnának meg, amikor hosszú távú szállításokban állapodnak meg, hanem az áthárítási formulában is, amelyet a technológiai lehetőségeket visszatükröző múltbeli adatokra alapozhatnak. A formulát meghatározott periódusonként értékelnék újra, a ráfordítási árak időközben bekövetkezett változását tekintetbe véve. Így a szerződő felek biztosak lehetnének abban, hogy meghatározott mértékben növekvő hatékonyságra szerződtek.

A hatósági ármegállapítás keretében pedig számos ár alakulását automatikussá lehetne tenni, csökkentve az áralkudozásoknak mind a gyakoriságát, mind a szubjektivítását.

Függelék: A GP dualitás

A (2.3) feladat *GP* duálisát *Peterson* [9] módszerét követve mutatjuk be. Az $x_i = e^{u_i}$ helyettesítés után a primál feladat konvex Lagrange függvénye a következő lesz.

$$L(u, z, \mu) = \sum_{i=1}^{n} p_i \, e^{u_i} + \mu \left(y^{1/\gamma} \sum_{j=1}^{T} \beta_j e^{z_j} - 1 \right),$$

ahol

$$u_i = \ln x_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$z_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \ln x_i \qquad j = 1, 2, \ldots, T$$

$$\mu \geq 0$$

Így a transzformált költségminimálási probléma a következő lesz:

$$\mathrm{Min}\, L(u, z, \mu)$$

azzal a feltétellel, hogy

(u, z) eleme az $\begin{bmatrix} I \\ \alpha_{ij} \end{bmatrix}$ mátrix oszlopterének és

$$\mu \geq 0.$$

Az $\begin{bmatrix} I \\ \alpha_{ij} \end{bmatrix}$ mátrix $(T + n) \times n$ méretű, rangja pedig n, az eredeti feladat változóinak száma.

A következő definíciókra lesz szükségünk (*Peterson* [9])

a) Egy U kúp *duálisát* (D) a következő x halmaz adja

$$D \equiv \{y \in R^n \mid 0 \leq u'y \text{ minden } u \in U\text{-ra}\} \qquad \textbf{(F.1)}$$

ahol $u'y$ a két vektor skaláris szorzata. Mivel feladatunkban U vektortér lesz, D egyszerűen ortogonális komplementuma U-nak: $U^{\perp}$.

b) Egy W tartományon értelmezett w függvény *konjugáltjának* nevezzük a V tartományban értelmezett v függvényt, ha

$$v(\delta) = \operatorname*{Max}_{y \in W} [\delta' y - w(y)], \tag{F.2}$$

ahol V azoknak a δ-knak a halmaza, ahol a fenti maximum véges. Feltesszük, hogy V nem üres. A w függvényt v konjugáltjával a következő egyenlőtlenség köti össze

$$\delta' y \leq w(y) + v(\delta) \tag{F.3}$$

és az egyenlőség áll ott, ahol a fenti maximumot elérték. Továbbá

$$\delta \in \partial\, w(y),$$

ahol $\partial w(y)$ a $w(y)$ gradiense. (Pontosság kedvéért ∂w-re mint szubgradiensre kellene hivatkozni. De konvex függvény esetén, amit feltételezünk, a két fogalom egybeesik.) Továbbá két konjugált v és w függvény esetén a

$$\delta \in \partial\, w(y),\ y \in \partial v(\delta)$$

relációk ekvivalensek és egymást „megoldják" [9, 18. o.]. Továbbá mivel a GP konjugált dualitás esetén az U kúp egy vektortér $\left(\text{az } \begin{bmatrix} I \\ \alpha_{ij} \end{bmatrix} \text{ mátrix oszloptere}\right)$, a konjugált ennek ortogonális komplementer terén van értelmezve, és ez ortogonalitásból következően

$$\delta' v = 0.$$

Így az (F.3) egyenlet a következőre redukálódik:

$$-v(\delta) \leq w(y). \tag{F.3'}$$

Ha e fogalmakat most az $L(u, z, \delta)$ Lagrange függvény konjugált duálisára alkalmazzuk (miután a pozitív függvényeket logaritmusukkal helyettesítettük), akkor a $v(\delta) = v(\delta_0, \delta_1)$ függvényre a következőt kapjuk:

$$v(\delta) = \operatorname*{Max}_{u,z,\mu} \left[\sum_{i=1}^{n} \delta_{0i} u_i + \sum_{j=1}^{T} \delta_{1j} z_j - \ln\left(\sum_{i=1}^{n} p_i e^{u_i}\right) - \mu \ln\left(y^{1/\gamma} \sum_{j=1}^{T} \beta_j e^{z_j}\right)\right]. \tag{F.4}$$

Az (F.4) optimalitási feltételei a következők

$$\delta_{0i} = \frac{p_i e^{u_i}}{\sum_{i=1}^{n} p_i e^{u_i}} \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$\delta_{1j} = \mu \frac{\beta_j e^{z_j}}{\sum_{j=1}^{T} \beta_j e^{z_j}} \qquad j = 1, \ldots, T$$

$$\ln\left(y^{1/\gamma} \sum_{j=1}^{T} \beta_j e^{z_j}\right) = 0.$$

Ezt u_i, z_j és μ-re megoldva:

$$u_i = \ln \frac{\delta_{0i}}{p_i} + \ln \sum_{i=1}^{n} p_i e^{u_i} \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$z_j = \ln \frac{\delta_{1j}}{y^{1/\gamma} \beta \sum_{j=1}^{T} \delta_{1j}} \qquad j = 1, \ldots, T$$

$$\mu = \sum_{j=1}^{T} \delta_{1j}.$$

Ezeket az értékeket (F.4)-be helyettesítve:

$$v(\delta) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{0i} \ln \left(\frac{\delta_{0i}}{p_i} \right) + \sum_{j=1}^{T} \delta_{1j} \ln \frac{\delta_{1j}}{y^{1/\gamma} \beta_j \sum_{j=1}^{T} \delta_{1j}}. \tag{F.4'}$$

Ennek értelmezési tartománya

$$V = \left\{ \delta_{0i} \geq 0, \; \delta_{1j} \geq 0, \; \sum_{i=1}^{n} \delta_{0i} = 1 \right\} \tag{F.5}$$

és állnia kell a $\delta \in U^{\perp}$ ortogonalitási feltételnek is. Ez utóbbit a következőképpen láthatjuk be. A transzformált változók

$$v = [I] [\ln x]$$

$$z = [\alpha_{ij}] [\ln x)$$

előállításából és a $\delta' y = 0$, azaz

$$[\delta_0, \delta_1] \begin{bmatrix} u \\ z \end{bmatrix} = 0$$

ortogonalitási feltételből kapjuk, hogy

$$[\delta_0, \delta_1] \begin{bmatrix} I \\ \alpha_{ij} \end{bmatrix} = 0. \tag{F.6}$$

Ez lesz a duális feladat egyik (ortogonalitási) korlátja. A duális feladat tehát:

$$\text{Max} \, \{ -v(\delta) \mid \delta \in V \cap U^{\perp} \},$$

ahol $v(\delta)$-t (F.4'), V-t (F.5), $U^{\perp}$-t pedig (F.6) definiálja.

A $\nu(\delta) = -v(\delta)$ jelöléssel a (2.4) alatti duális feladatot kapjuk.

IRODALOM

1. W. E. Diewert: An application of Shephard Duality Theorem: A generalized Leontief production function, J. Political Econ. 79 (May/June 1971).
2. R. J. Duffin, E. L. Peterson and C. Zener: Geometric Programming (John Wiley, New York, 1967).
3. A. Klinger and O. L. Mangasarian: Logarithmic convexity and geometric programming, J. Math. Anal. Appl. 24 (November 1968).

4. V. SALAS and A. B. WHINSTON: Production function and log-convexity, Purdue University (August 1976). (Kézirat.)
5. C. W. COBB and P. H. DOUGLAS: A theory of production, Am. Econ. Rev. 17 (1, Supplement) (March 1971).
6. K. J. ARROW, H. B. CHENERY, B. S. MINHAS and R. M. SOLOW: Capital—Labor Substitution and Economic Efficiency, Rev. Econ. Statist. 63 (August 1961).
7. H. UZAWA: Production functions with constant elasticities of substitution, Rev. Econom. Stud. 29 (October 1967).
8. R. V. SHEPHARD: Theory of Costs and Production Functions (Princeton University Press, Princeton, N. J., 1970).
9. E. L. PETERSON: Geometric programming, SIAM Rev. 18 (January 1976).
10. U. PASSY and D. T. WILDE: Generalized polynomial optimization, SIAM J. Appl. Math. (September 1967).
11. W. E. DIEWERT: Exact and superlative index numbers, J. Econometrics 4 (May 1976).
12. A. J. FEDEROWICZ: The approximation of functions by posynomials for the purpose of applying geometric programming, R. R. 67-1C3-MCONS-R1, Westinghouse Research Lab. (April 1967).
13. C. S. BEIGHTER and D. T. PHILLIPS: Applied Geometric Programming (John Wiley, New York, 1976).
14. R. S. DEMBO: The current state of the art of algorithms and computer software for geometric programming, Report No. 88, School of Organization and Management, Yale University (1976).
15. J. J. DINKEL and G. A. KOCHENBERGER: On sensitivity analysis in geometric programming, Operations Res. 25 (1) (1977) 155—163.
16. W. GOCHET and Y. SMEERS: A branch and bound method for reversed geometric programming, CORE Discussion Paper, No. 7511, Catholic University of Louvain (1975).

KÖNYVEKRŐL

KORNAI JÁNOS: *A hiány.* Budapest 1980. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. 658 o.

Kornai János gazdaságunk egyik jellegzetes jelenségét, mégpedig alapjában véve negatív jelenségét veszi elemzés alá. Ez a vizsgálódás szerves folytatása Kornai eddigi munkásságának. Még azt is megkockáztatnám, hogy – legalábbis az én közgazdasági beállítottságom szerint – a szerző legjobb könyve.

A hiány jelensége kisebb vagy nagyobb mértékben valamennyi szocialista országban, különféle történelmi időszakaiban, különböző irányítási, gazdálkodási rendszerekben létezett és létezik. A hiány megítélése nem volt egységes a szocializmus elméletének története során. Sztálin és nyomában a politikai gazdaságtan a szocializmus erényeként, a kapitalizmushoz viszonyított felsőbbrendűségeként értékelte, hogy nálunk a kereslet gyorsabban nő a kínálatnál. Ma már eléggé egyöntetűen elfogadott a szocialista közgazdák között, hogy a hiány alapjában véve negatív jelenség. (Jóllehet – mint erre Kornai rámutat – vannak a gazdasági folyamatnak olyan szegmensei, amelyekben a társadalmi érdek, a társadalmi viszonyok, vagy éppen etikai szempontok azt követelhetik, hogy ne a pénz legyen a sorbarendezés és a szelektálás kritériuma és eszköze, s hogy ezekben a szegmensekben érdemes lehet vállalni a hiánnyal együtt járó negatív következményeket is.) S talán eléggé általánosnak mondhatom azt a véleményt is, hogy a hiány nem szükségszerű a szocialista gazdaságban; hogy képtelenség: a gazdaság fejlettségi fokától függetlenül mindig és mindenből hiány legyen. Az 1968-as reformunknak is egyik fő törekvése volt – mint erre Kornai is több helyütt rámutat: nagyon is részleges sikerrel a megvalósításban –, hogy az eladók piaca a vevők piacává váljék. Már többféle a *magyarázat* arra, hogy mi az oka a hiánynak. A könyv lényegéhez tartozik vagy talán éppen a lényegét alkotja, hogy egyfajta – érdekes és jól meggondolandó – magyarázatot ad erre a kérdésre. (Ezzel rokon az a kérdés is, hogy miért vannak ciklusok a szocialista országok gazdaságának fejlődésében, és ezzel is foglalkozik a könyv.)

A hiány az a fonál, amelyre Kornai felfűzi a szocialista gazdaságot, vagy legalábbis annak mikro (és szubmikro) szféráját (értve ezen most a vállalatok és részben a családi háztartások világát), kitekintve persze a makrovilágba (ebben a szövegösszefüggésben: a felső szintű tervezés és vezetés szférája) is. Ezt a tárgyat igyekszik egységes és konzisztens leíró-elemző modellbe foglalni.

A mű architektúrája esztétikai értelemben vett élvezetet okoz az olvasónak; annál is inkább, mert a kifejtés mindvégig világos, áttekinthető. (A szocialista gazdaság dolgaiban kevésbé járatos olvasó azt is gondolhatja, hogy maguk az összefüggések is ennyire világosak, áttekinthetők.) S itt említem meg: örömmel üdvözlöm, hogy ebben a könyvben nem nehezíti (vagy csak elvétve) az olvasó dolgát azzal, hogy jelenségek, összefüggések közismert, elfogadott elnevezéseit átkeresztelné. (Sőt még korábbi munkáiban használt terminológiáján is változtat ebben a szellemben.)

*

Már a fentiekből sejthető, hogy a recenzor nem vállalkozik könnyű feladatra. Oldalakon keresztül sorolhatnám azokat a megállapításokat, amelyeket fontosnak tartok és helyeslem őket. Hosszan kellene fejtegetnem észrevételeimet, ellenvetéseimet. E helyett azonban csak arra vállalkozom, hogy a *mű egészét érintő* néhány fő gondolatot vessek fel, s velük kapcsolatban elmondjam helyeslésemet, aggályaimat, ellenvetéseimet. Igyekszem elkerülni akár egyes fejezetek bírálatát; még azokét is, amelyekben szakértőnek hiszem magam. Nem térek ki azokra a megállapításokra sem, amelyekben Kornai állást foglal sok-éves vagy több évtizedes vitatott kérdésekben; tehát nem a szerző sajátos álláspontjáról van szó.

Továbbá: különféle irányokból lehet e művet megközelíteni. Vizsgálható matematikai-metodikai szemszögből és közgazdasági szemszögből. Bár a Szigma kért fel a recenzióra, természetesen mégis az utóbbi szempontból bírálom a könyvet; a modellezés néhány problémáját is. Ezt tehetem azért, mert sokan modellezőként tartják számon Kornait, ő mégis elsősorban és alapvetően közgazda.

1. A *mű alapgondolatát* a következőképpen lehet megfogalmazni:

A gazdaság — a könyv speciális nézőpontja szerint — kétféle lehet: keresletkorlátos (vagyis vásárlóképesség-korlátos) és erőforrás-korlátos. (Az előbbinek tiszta esete a klasszikus kapitalizmus, vagy inkább annak elméleti modellje; míg az utóbbié az ómechanizmus körülményei között működő szocialista gazdaság.) A kereslet-korlátos gazdaságot a piaci egyensúly, még inkább a kihasználatlanul maradt (slack) erőforrások jellemzik; míg az erőforráskorlátos gazdaságot a hiány, jóllehet az általános hiány sem zárja ki sem a stock, sem a flow körében a slack-et.

Mi a kemény korlátú költségvetés, és mi a puha korlátú költségvetés? Egyáltalán mit értsünk költségvetésen? A budget line-t, ami a (termelő és a fogyasztó vevő) számára a rendelkezésére álló pénz és az érvényes áruk vektora által kifeszített vásárlóképesség sík, az eladó számára pedig a kibocsátási kapacitása és az érvényes árak által meghatározott árbevételi felület. (A budget line a polgári egyensúlyi elmélet legfontosabb leleménye az én szememben.) Kornai azt mondja: ha a vásárlóképesség sík és az árbevételi felület beton szilárd (természetesen nem a változatlanság értelmében), akkor a költségvetési korlát kemény. Ha viszont a kétféle felület — többé-kevésbé — önkényesen tágítható, gumiszerű — akkor a költségvetési korlát puha. Ez az állítás-együttes nemcsak igaz, hanem — mint a fontos felismerések általában — szinte tautologikusan igaz.

Kornai alapvetően két útját jelöli meg a felpuhulásnak. Az egyik: a gazdasági aktorok — legalábbis egy része — számára az ár nem „istentől adott". A másik: az áruvásárlásra fordítható árbevétel összegét — akár az eladás, akár a vétel oldalán — piacon kívüli forrásokból növelni lehet; elvileg is és gyakorlatilag is elsősorban az állami költségvetés rovására.

Ebből következik először, hogy a költségvetési korlát fellazulása a modern kapitalizmussal kezdődik, de persze jellegzetesebb a szocialista gazdaságban. (És amúgy is az utóbbi Kornai könyvének a tárgya.) Másodszor: hogy a puha költségvetési korlát a szocializmusban a vállalatokat és intézményeket jellemzi. A háztartások költségvetési korlátja kemény. (A puhaság a természetbeni társadalmi juttatásoknál jelentkezik.)

Néhány megjegyzés:

A problémák és a tennivalók szempontjából külön világ az állami költségvetés és az árképzés — áralakulás. Az 1968-as reform mindkettőre fogalmazott meg célokat. (A téma szempontjából mellékes, hogy azok mennyire valósultak meg. A lényeg: változatlanul aktuálisak.) Egyik alapvető cél volt, hogy a piacon az eladó helyett a vevő legyen az úr (tehát éppen a hiány fokozatos megszüntetése); s hogy az így alakuló piacon az ár az eladó és a vevő között mindkét irányban közvetítsen. Minden olyan cél irreális lett volna és lenne ma is, hogy a kibocsátás feltételeiben végbemenő változásokat az ár ne közvetítse a vevő felé; vagyis hogy kizárja például a költség emelkedésének az áremelés révén való átháríthatóságát. S még kevésbé lenne reális cél, hogy a modern termelési rendszerben és szervezetben az ár a vállalattól független kategória legyen. Ez közgazdasági abszurditás. Viszont alapjában véve reális cél, hogy a vállalatok önállósága számottevően megnövekedjék, hogy a vállalatok — legalábbis többségük — erőteljesen függetlenedjenek az állami költségvetéstől, hogy alapjában véve saját eszközökből (a valóban bankszerű hitelt is ideértve) gazdálkodjanak saját pozitív és negatív kockázatukra; olyan szabályok szerint játsszanak, amelyekben lehet nyerni, de veszíteni is.

Ismét csak közgazdasági abszurditás lenne az olyan cél, hogy a termelés szereplői teljesen függetlenedjenek az állami költségvetéstől. De akkor felmerül a kérdés: ha az áraknak és a költségvetésnek a vállalattól való függetlensége nem valósulhat meg, akkor nem is szüntethető meg a hiánygazdálkodás? Azt gondolom, megszüntethető. Ami ilyen körülmények között elkerülhetetlennek látszik az — legalább kúszó infláció.

Végül: Kornai a vállalati szférát vizsgálva lényegében egyenlőségjelet tesz a folyó termelés és a beruházás közé (vagy legalábbis nem különbözteti meg világosan őket), a költségvetési korlát puhasága — mégpedig az állami költségvetés megpumpolhatóságát értve ezen — szempontjából. (Néhány helyen tesz némi disztinkciót. Lásd pl. 566. o.) Véleményem szerint a kétféle tevékenység között lényegbevágó differencia van. Amióta a hozraszcsotot bevezették, azóta a vállalatok bevételeikből fedezik a kiadásaikat. Igaz: a vállalat kerülhet veszteségbe, s ennek elkerülése nem élet-halál kérdés számára. De a költségvetés bukszáját nem nyitják ki automatikusan a veszteségbe került vállalat számára. A 68 előtti mechanizmus ismerte a tervezett veszteség kategóriáját. Amenynyiben a vállalat vesztesége a tervezett szintű volt, vagy éppen csökkentette a veszteséget, volt anyagi és erkölcsi elismerés. Ha azonban a vállalat vesztesége a tervezettnél nagyobb volt, akkor már nem jött automatikusan a többlet szubvenció. Ez utóbbi igaz ma is. A veszteséges vállalat vezetőjének nemcsak a prémiuma marad el, hanem „rászállnak" a felső vezető szervek, a területi pártbizottság stb. S ha nincs nyereségrészesedés, nagy nyomást gyakorol a vezetőre a kollektíva, a helyi pártbizottság, szakszervezeti bizottság. Ha pedig a vállalat rendszeresen veszteséges, az igazgatót leváltják. (Új igazgató, összevonás stb.) Tehát az igazgatónak, mint igazgatónak életkérdés, hogy a vállalat ne legyen rendszeresen veszteséges (a tervezett veszteség keretei között maradjon). És ha a leváltott igazgatót másik vállalat élére nevezik ki, akkor ez nem a költségvetési korlát, hanem a káderpolitika puhaságát mutatja. Tehát a folyó termelést tekintve is puha a költségvetési korlát, de azért nem olyan nagyon. Tulajdonképpen nem is lenne nehéz „megkeményíteni". A gyakorlatban látjuk, milyen könnyű vállalatok tömegét fizetésképtelen helyzetbe hozni. (Ráadásul az sem áll, hogy a vállalatok tetszés szerint emelhetik vagy emeltethetik a hatóságokkal az árakat.)

Egészen más a helyzet a beruházásokkal. Az ómechanizmusban elvileg is a költségvetés feladata volt a vállalati beruházás finanszírozása. A 68-as reform fontos törekvése volt, hogy a beruházási javak piacán is a valóságos vásárlóképesség korlátozza a beruházási igényeket. Ebből a célból nagyon kevés valósult meg; pontosabban ez a cél a lényegét tekintve nem valósult meg. És ebben a vonatkozásban nem egyszerűen arról van szó, hogy nem tettünk meg valamit, amit meg kellett volna tennünk. (Bár persze erről is szó van.) Az alapvető problémát abban látom, hogy jó gazdaságpolitika és jó mechanizmus esetén is jelentős szerepe van és kell lennie a beruházásokban az állami költségvetésnek. Az állami költségvetésnek pedig – a dolog természetéből következően – puha korlátai vannak. (Érdekes, hogy Kornai az állami költségvetést nem tekinti egyértelműen puha korlátúnak. Lásd 545. oldal.) Az állam számára sohasem élet-halál kérdés, hogy deficites-e a költségvetése vagy nem; és ráadásul pénzteremtési lehetőségei vannak és hitelt is kap deficitje finanszírozására. (Gyakorlatilag azokba a beruházásokba is „beleszáll" az állam, amelyeket valóban vállalati eszközökből és bankszerű hitelből kellene finanszírozni. De az a tény is jól ismert, hogy a hitelrendszer is rendelkezik a pénzteremtés lehetőségeivel.) A lényeg tehát: a beruházási javak piacán nemcsak a vállalati kereslet áll szemben a kínálattal, hanem a teljes, az állami vásárlásokat is implikáló kereslet. Ettől a viszonytól függ, hogy egyensúly vagy egyensúlytalanság van a beruházási javak piacán. Ennek a ténynek sajátos vetülete a beruházási ciklus. Amikor kiderül, hogy a beruházások „elszaladtak", a kormány a vállalatokat hibáztatja. Holott a túlfűtés mindig a kormány részéről indul ki. Vagyis a beruházások keresletének korlátok között tartása – úgy tűnik – nemcsak, talán nem is elsősorban a gazdasági mechanizmus kérdése, hanem a gazdaságpolitikai döntéseké és a politikai mechanizmusé is. Mindezt azért hangsúlyozom, mert a folyó termeléshez képest elsősorban a beruházásoknak van kiemelkedő szerepük a hiány, az infláció és a ciklusok alakulásában.

De eleve, elvileg is alapvető különbség van ebben az összefüggésben a folyó termelés és a beruházások között. E különbségek ismét aláhúzzák a beruházások messze domináns szerepét a hiányban.

– A folyó termelés input igénye nem nőhet végtelenül, a kapacitás szilárd határt szab számára. A beruházások bővítik a kapacitást, tehát a folyó termelés input igényét is. (Viszont csak a változatlan kapacitásokra igaz egyértelműen a határköltségek emelkedése a termelés volumenének a függvényében.) A beruházások okozta hiány világában azután a bővített kapacitással kibocsátott áruk rendszerint el is adhatók.

– A folyó termelés úgyszólván automatikusan teremt hitelt. (20.2. alfejezet.) Csakhogy ez esetben a kibocsátott (vagy rövid idő múlva kibocsátandó) jószág, árualap szív be (hitel) pénzt a forgalomba. A beruházási hitelek esetében viszont egy majdani kibocsátás reményében jelenik meg ellentétel nélkül új kereslet (fogyasztói kereslet is!) a piacon.

Vagyis ismét csak. A hiány előidézését tekintve a folyó termelés és a beruházás nincsen „azonos súlycsoportban"; még az előbbi hatását is döntően az utóbbi váltja ki.

2. Kornai könyvében – mint erre már utaltam – a gazdaság *mikroszféráját* vizsgálja, beleértve a makroszférával való kapcsolatokat is. (A mikro és makro foga-

lompárt mindig a fent már jelzett értelemben használom.) Igen nagy szükség van a mikroszféra elemzésére, már csak azért is, mert számos kérdésre nem kaphatunk választ, ha csak a makroszférát vallatjuk. Ám igaz ez fordítva is.

A könyv a címben foglalt jelenség, a hiány okára is választ keres. Úgy tűnik, hogy a szerző elégségesnek tartja a mikroszférában megtalálni vélt választ. (A 21. és 22. fejezetben a hiány mechanizmusát, semmint okát vizsgálja a könyv.) Szerintem azonban erre a kérdésre a választ, legalábbis a végső választ csak a népgazdasági szintű gazdálkodás szférájában lehet megtalálni. És csak ennek alapján értelmezhető helyesen a vállalati szféra szerepe a krónikus hiány előidézésében.

Kornai az alábbiakban jelöli meg a hiány okát.

— A vállalatok (és intézmények) inputigénye végtelen. A vállalatok és intézmények vezetői — szerepkörükkel azonosulva érzékelik a vállalatuk (intézményük) outputjával szembeni óriási igényt, kibocsátásukat minden határon túl növelni akarják. A puha költségvetési korlát ezt lehetővé is teszi. (Lásd a 3.6. alfejezetben és még sok más helyen.)

— A fenti okok miatt végtelen a beruházásokkal szembeni igényük is. Enélkül ui. csak az adott kapacitásuk (a legszűkebb erőforrás által determinált) fizikai korlátjáig mehetnek el. Érdemleges bővítés csak beruházásokkal lehetséges. A puha költségvetési korlát miatt az ilyen igényt is lényegében akadálytalanul kinyilvánítja. (9.2. alfejezet).

— A lakosság költségvetési korlátja kemény, tehát nem forrása a hiánynak. Ebben a szférában a piacon kívüli fogyasztás járul hozzá az általános hiányhoz.

Kezdjük az utolsó bajusszal. Teljesen helyes a megállapítás, hogy nálunk nem okoz általános hiányt a lakosság pénzjövedelme és összfogyasztása. Hosszú idő óta biztosítjuk (legalábbis mostanáig) a kereslet és a kínálat globális egyensúlyát. Az egyensúlytalanságok strukturális természetűek. (A strukturális hiányok persze szintén hozzájárulnak az általános hiány pszichózisához.) Sőt, azt is meg kell állapítanunk, hogy az infláció nálunk nem bérinfláció, hanem — ha ezekben a nem teljesen pontos kategóriákban gondolkodunk — költségtolta infláció és a beruházási-kereslet-húzta infláció. Azután ezek a hatások érvényesülnek a fogyasztási cikkek piacán is. Nem áll az, hogy a vállalatban nincs beépített fék a béremelések visszafogására. Igaz, minden gazdasági (és nem gazdasági) egység és alegység vezetőjében van törekvés arra, hogy beosztottjainak (és saját magának) nagyobb bért harcoljon ki. (Nagyon fontos iparágakban alacsony a költségek bérhányada, tehát kemény költségvetési korlát sem igazi akadálya eme törekvések teljesítésének.) Az egész szabályozási — és a hozzá kapcsolódó — érdekeltségi rendszer (a nemprofit intézményekben pedig maga a költségvetés) hatékony akadálya a béremelési törekvésnek. Gács Endre kiszámította; a nominálbér növekedésének éves üteme hosszú periódusban meghökkentő módon változatlan. Ehhez a konstans értékhez a legkülönfélébb árindexek, illetve reálbér növekedési indexek tartoznak. Még azt is megkockáztatom, hogy — legalábbis az állami szektorban — a vásárlóerő kiáramlás visszafogásának intézményesített (a rendszeres normarendezés is ide tartozik!) és nem intézményesített formái dominálnak a bérpolitikában és nyomják el az ösztönző funkciókat. (Ez is a cost-ja annak a benefitnek, hogy nincs bérinfláció.) Általánosabban: a szabályozórendszer mint a döntések és alkalmazkodások igen fontos motivációja a mikroszférában — véleményem szerint — nem kap elegendő súlyt Kornai könyvében.

És itt hadd tegyek a tárggyal kapcsolatos kitérőt. A könyv 19. fejezetében azt mondja, hogy bár a háztartások költségvetési korlátja kemény, mégsem szünteti meg a hiányt a fogyasztói árak emelkedése. Ez valóban tapasztalati tény. Csakhogy először is a fogyasztási javak piacán közelítően globális egyensúly van; a hiány alapjában véve strukturális. Az áremelkedés igenis biztosítani tudja, biztosítja is a (hozzávetőleges) globális egyensúlyt. Kornai voltaképpen sehol sem mutat rá erre a fontos tényre. Másodszor: a könyv két dologban látja annak okát, hogy a kemény háztartási költségvetés ellenére sem szünteti meg az áremelés a hiányt ezen a piacon. Az egyik: a többi piacnak (vállalati, intézményi piacnak, külkereskedelem) elszívó hatása. (19.3. alfejezet.) A másik: a fogyasztási javak kínálata nem árérzékeny. (512–513. o.) Kornai az utóbbit tekinti alaphatásnak és az előbbit alárendeltnek. Ez esetben nem világos számomra a könyv logikája. Kétségtelen, hogy a kibocsátó vállalatok kínálatának árrugalmassága meglehetősen alacsony. Reformunknak egyik megvalósulatlan — és ma nem is nagyon emlegetett — fontos céja: a fogyasztó az árakon keresztül (is) hasson vissza a termelésre. (Mert ez nem valósult meg, ezért sem válhatott a fogyasztási javak piaca a vevők piacává.) Csakhogy, tegyük fel a következőket. A kibocsátó vállalat egyetlen felvevője a fogyasztói piac, más piacoknak nincs elszívó hatásuk.

Tegyük fel azt is, hogy a vállalat oda sem figyel az árra; nem az áremelkedés ösztönzi nagyobb (és a piac igényeinek megfelelő struktúrájú) termelésre. (Ha emeli a termelést, akkor ennek áron kívüli okai vannak.) A fogyasztók vásárlóképességét azonban a budget line meghatározza, s a keresletük szerkezete is determinált a keresleti függvény változói — egyebek között az árak — által. A vállalat beleütközik a vásárlóképesség korlátjába; nem tudja termékeinek egy részét (ha erre sem reagál: növekvő részét) értékesíteni. Amenynyiben a vállalatnak nem közömbös (68 előtt sem volt teljesen közömbös!), hogy megveszik-e az áruját vagy a raktárakban halmozódik fel, akkor végül is kénytelen lesz reagálni az áremelésre; pontosabban a keresleti korlátra. Nagyon tanulságos a ruházati ipar esete 1968-ban. Ez az iparág a belső piac korlátaiba ütközött (jóllehet 1968. január 1-én leszállították a ruházati cikkek árát). Úgy tűnt, hogy a javak piaca az eladók kezéből a vevőkébe kerül; a fogyasztó diktálhat a kereskedelemnek, ez pedig az iparnak. Hogyan reagált a könnyűipar? A ruházati alágazat egész évi termelését eladta a külkereskedelemnek. Ismét az eladó pozíciója erősödött meg, az árak pedig emelkedtek. Tehát az elszívás bizonyult a döntő tényezőnek. És ez az egyik fő magyarázata, miért nem hatnak (kellő mértékben) a fogyasztói árak a termelésre. (Kivételesen még az is előfordul, hogy a kibocsátás csökkentésével igyekszik az eladó monopolhelyzetét fenntartani. Ez azonban éppen a Kornai által leírt expanzív gazdaságban, tartósan és tömegesen nem lehetséges.)

Még mindig az utolsó bajusz. A piacon kívüli fogyasztás, a természetbeni juttatások természetéhez tartozik a hiány, de nem feltétlenül minden alágazat vagy jószág esetében. Helyesen mutat rá Kornai, hogy bizonyos társadalmi célok érdekében nem a piac logikájának megfelelő rangsorolási elveket választunk. S ebben az esetben a költség: a hiány. Ezért viszont ezt a szférát elkülönítve kell tárgyalni a vállalati szféra hiányjelenségeitől.

Fordítsuk hát figyelmünket a szűkebb értelemben vett gazdasági tevékenységre!

Azt mondottam, hogy a hiány jelensége a végső választ csak a makroszférában találhatjuk meg. A gazdaságvezetés-tervezés szintjén mutatkozik együttesen az égető feladat, hogy a legkülönfélébb — társadalmilag teljesen jogos — óriási igényeket kielégítsék. A dilemmát sokszorosra növeli, hogy a szocializmus eddig közepesen fejlett vagy elmaradott országokban győzött. Akár deklaráljuk, akár nem, hosszú-hosszú történelmi időszakon keresztül megoldandó feladat, hogy behozzuk elmaradásunkat a termelő nemzeti vagyon volumenében és technikai színvonalában, az infrastruktúrában, a lakosság reáljövedelmének és reálfogyasztásának színvonalában, és nem utolsósorban: a védelmi képességben egyenlő színvonalat biztosítsunk. Már a hely tartása is a nemzetközi rangsorban rendszerint nagy erőfeszítéseket igényel.

A szocialista állam e tekintetben is Janus-arcú. Ő képviseli elsősorban a fenti össztársadalmi szükségleteket és törekszik kielégítésükre. E szükségletek számára *részben* (de csak részben) mint az ágazatok, régiók stb. igénytervei manifesztálódnak. De másfelől ugyanő igyekszik a lehetőségek által megszabott keretek között tartani, rangsorolni stb. ezeket a szükségleteket. Már ebből az ellentmondásos funkcióból optikai csalódás adódhat. Úgy tűnhetik, mintha „lent" képviselnék a szükségletet és annak kielégítését, „fent" pedig csak ellenállnának — időszakonként engedve a „nyomás"-nak — a kielégítésnek. Különösen így tűnik ama szférák számára, amelyek egy adott időszakban vagy tartósan nem élveznek prioritást. Ám a tény: az állam képviseli elsősorban a szükségletek halmazát és sérti meg az egyensúlyi követelményeket.

— Azt mondottam, hogy a krónikus hiány forrása: a beruházási szféra. A hagyományos mechanizmusban lényegében minden beruházás központi, tehát a „felfűtés" is csak felső szintű lehet. 68 óta a kormány — mint már mondottam — rendszerint a vállalatokat szidja a túlzott beruházásokért; holott teljesen nyilvánvaló, hogy az első számú felelős a központi beruházáspolitika.

Minél kevésbé konzisztens a terv, illetve minél kevésbé veszik figyelembe a gyakorlat során a konzisztencia követelményét, annál nagyobb a kereteket túllépő beruházás. Mindez nem elsősorban tervezés-technikai kérdés — bár az is. Nagyon fontos politikai kérdés, hogy a kormány menynyire lépheti át a törvényre emelt ötéves terv beruházási előirányzatait. A végső lényeg azonban: a felső vezetőket szorítják a megoldatlan és a bővítetten újratermelődő problémák, s a belőlük fakadó törekvés a keretek túllépésére. Csak ezt az alapdilemmát élezi, hogy a felső vezetés számára nincsenek intézményes korlátok, ha a terv nem konzisztens, ha a fejlesztési irányok nem jók, ha a gazdasági mechanizmus nem megfelelően működik.

— Az állam alakítja ki a gazdaság mezzo- és mikroszférájának játékszabályait; a mechanizmust, a konkrét szabályozórendszert, beleértve a vezetők anyagi és erkölcsi ösztönzését is, a vezetéssel kapcsolatos értékrendszert, s nem utolsósorban a gazdaságpolitikát, amit e szférának szolgálnia kell. S az állam választja ki, teszi pozícióba vagy váltja le a vezetőket. A vezetői kiválasztásban alapvető szempont, hogy a kiválasztottak mennyiben tartják be a játékszabályokat. (Ez a szempont sokszor azt is háttérbe szorítja, hogy a vezető valóban jól vezet-e? Mert ehhez sok esetben az szükséges, hogy szembekerüljön a játékszabályokkal.) S ezeknek a játékszabályoknak lényege (mind a régi, mind a 68 utáni mechanizmusban): a különféle szintű „csapatparancsnokok" minden erejükkel iparkodjanak kielégíteni a gondjaikra bízott intézményekben a felső szinten megfogalmazott célok elérését.

A fentiekkel összefüggésben is érvényesül az állam – már említett – Janus-arcúsága, s a vele kapcsolatos optikai csalódás. A dolognak ugyanis csak az egyik (bár lényegesebb) oldala, hogy az állam minden határon túli expenzióra készteti gazdasági (és nem gazdasági) intézményeit. Egyidejűen azonban az állam intézményesített fékeket is épít be a gépezetbe. A költségvetési intézményeknél ez a fék – maga a költségvetés. Bonyolultabb – és nem ennyire szembeötlő a restrikciós rendszer a vállalati szférában. Gazdasági mechanizmusunk egyik baja, hogy minden vállalatnak érdeke ugyan a növekedés, *de csak egészen szűk sávhatárig*. Leginkább (de nemcsak) a szabályozórendszer ún. bázisszemlélete hordozza a kettős sávhatárt: meghaladni a tavalyi szintet, de nem sokkal. 68-ban szerettünk volna ettől a féktől megszabadulni, de nem sikerült. Sőt, az 1980-ban bevezetett szabályozórendszer (elsősorban az ún. világpiaci árkoncepció) megerősítette. Mindegy a vállalatnak, hogy a sávplafon feletti nagyobb eredményt (termelésben, nyereségben, önköltség-színvonalban, dollár kitermelésben) a következő évben tervesítik, vagy adóval vonják el; s teszik a szabályozás alapjává. Nem áll tehát, amit Kornai állít, hogy ti. a vállalatnak érdeke a minden határon túl való növekedés. A „mindenáron növekedjünk, de azért ne nagyon" szindróma meggyőződésem szerint nemcsak annak az oka, hogy a vállalat nem dönthet úgy, hogy a teljesítményét szinten tartja, vagy éppenséggel csökkenti; hanem annak is, hogy az állami vállalatok teljesítménye nivellált, végsősoron pedig annak is, hogy számos tekintetben miért gyenge az állami szektornak a többi szektorhoz viszonyított versenyképessége.

Felmerül a kérdés, hogy a fentiek menynyire érvényesek a jelenlegi körülmények között és az előttünk álló időszakban? Ugyanezt a kérdést feltették Kornai könyvével kapcsolatban is. A szerző – jogosan – vállalja és vallja könyvének validitását.

A hetvenes évek közepén újabb beruházási boom volt és – mint az ma már közismert – elsősorban ez vezetett a nagyarányú eladósodáshoz. A jelenlegi szakaszt csak úgy lehet tekinteni, mint egy különösen elhúzódó restrikciót a felfűtött beruházási szakasz után. (A Kornai könyv igazságai is, meg az észrevételem is csak mutatis mutandis módon érvényesek a restrikciós szakaszban.) A jelenlegirestrikciós szakasznak – mint jól ismert – sajátossága főleg abban van, hogy mert a beruházási boom a fizetési mérleg rovására valósult meg, ezért a ciklus lefelé menő ágában a teljes belföldi felhasználást fogják vissza. Most a dollárbevétel növelése a szorgalmazott cél. Nem hiszem, hogy lenne közgazda, aki azt gondolná, hogy szocialista gazdaságunk új fejlődési pályája a tartós restrikció lesz. Inkább az a félő, hogy minél tovább húzódik ez a szakasz, annál inkább felhalmozódnak a kielégítetlen termelési és lakossági szükségletek és újabb ciklusnak vetik meg az alapját. S ha előbb-utóbb valóban új növekedési pályára törünk (akármilyen lesz is ez a növekedés), akkor ugyanezek az összefüggések fognak jelentkezni; hacsak a gazdasági szervezet felső és alsó szféráinak játékszabályain nem változtatunk radikálisan.

Ezzel kapcsolatban térek ki arra a dilemmára, amit Kornai az 571–72. oldalon vázol fel. Vajon: *a)* a krónikus hiány (pontosabban: a kielégítetlen társadalmi szükségletek), *b)* a gyors növekedést erőltető gazdaságpolitika és *c)* az intézményrendszer sokoldalú kapcsolatában melyiknek (vagy melyeknek) van primátusa. A szerző némileg revidiálja korábbi műveiben képviselt állásfoglalását, amelyben az *a)*-ra és a *b)*-re „szavazott"; most pedig inkább arra hajlik, hogy a *c)*-nek van kitüntetett szerepe. Azt gondolom, hogy felesleges a revízió. A kiindulás a politikai, sőt katonai jelenségű kielégítetlenség, s ez indukált egy meghatározott gazdaságpolitikát; s a gazdaságpolitikához rendelték hozzá e többé-kevésbé adekvát intézményrendszert. Persze, ha már létezik és működik ez az intézményrendszer, az okozat okká válik; s egymagában is alkalmas a könyvben vizsgált jelenségek előidézésére. Tehát mi kell a helyzet változtatásához?

– Az a felismerés, hogy a jelenlegi szakaszban (most közömbös, hogy azt intenzív szakasznak vagy új növekedési pályának hívjuk) az erőltetett ütem és az ezt szolgáló mechanizmus nem teszi lehetővé a társadalmi szükségletek kielégítési színvonalának gyors emelését. Persze a növekedési ütemnek továbbra is megvan a maga jelentősége.

— E felismerésnek megfelelő gazdasági stratégiát és ezt szolgáló intézményrendszert kell kialakítani. Csak az intézményrendszer változtatása nem is lehetséges és minden erre irányuló törekvés kudarcra van ítélve. A 68-as reform — bizonyos közkeletű elképzelésekkel szemben — tükrözte a fenti szemléletváltozást és implikálta a gazdaságpolitika változását. De mert a változtatási szándék nem volt explicit, és ezért sem érvényesülhetett következetesen, ez a tény legalábbis fontos oka a reform megfeneklésének.

3. A könyv két főrészből áll:

— „Alkalmazkodás árak nélkül"

— „Alkalmazkodás árak jelenlétében".

Jogos és fontos a gazdaság akcióit és reakcióit aszerint szétválasztani (persze a gyakorlatban összefonódnak), hogy az árak és azok változásai vagy áron kívüli tényezők váltják-e ki őket. A kutatásokban és értékelésekben ezek gyakran keverednek.

Mégis néhány problémám van e szétválasztásnak a könyvben olvasható módjával.

Először: a gazdasági akciók és reakciók nem szűkíthetők le az alkalmazkodásra; mégha az alkalmazkodás fontos motívum és magatartás is. Úgy tűnik, hogy ez a fogalom azért vált vezérszóvá, mert a címnek megfelelően a hiányhoz (vagy szélesebben: a mindenkori korlátokhoz) való alkalmazkodásként akarja bemutatni a szerző. Csakhogy a könyv sokkal többet tárgyal, mint ezt a fontos, a többi motívumokat és magatartásokat kisebb vagy nagyobb mértékben befolyásoló, de mégis csak parciális jelentőségű összefüggést. Kornai — mint már mondottam — a hiány fonalára fűzi fel az egész mikroszférát (sőt részben a makroszférát is). Úgy vélem, mindez fontos példája annak, hogy egy speciális nézőpont alkalmas lehet a jelenségvilág élesebb átvilágítására, de magában rejti az optikai csalódás veszélyét is.

Másodszor. Az „áron kívüli" gazdasági akciók és reakciók rendkívül különböző jelenségeket ölelnek fel. A jelenségek egyik csoportja — legalábbis közvetlenül — természete miatt független az áraktól. Másik része olyan magatartásmodellekkel jellemezhető, amely magyarázó változói között szerepel az ár; de a vizsgálat éppen az „áron kívüli" változókra összpontosul. Ezek a hatások azonban ténylegesen az „árak jelenlétében" érvényesülnek. (Ilyen a kínálat és a kereslet közvetlen kölcsönhatása is.)

Végül a harmadik csoport, amelyhez tartoznak azok az akciók és reakciók, amelyeket a „kereslet < kínálat" feltétele között az árak szabályoznának, ám éppen a hiány miatt a döntéseket *nem* az árak szabályozzák.

Az utolsó két jelenségcsoport azt hiszem nem igényel magyarázatot. Vegyük az alsó jelenségcsoportot! Ide sorolom először is a termelési folyamatot. Az újratermelési folyamatnak ez a mozzanata, amelyben már befejeződött, illetően még nem kezdődött meg az áruforgalom folyamata. Tehát természeténél fogva ebben a mozzanatban nincsenek jelen árak, közvetlenül nem hatnak, nem hathatnak az árak. Az üzemvezető, a művezető, a munkás „nyelve" a naturália. A kereskedelmi (stb.) osztály mennyiségi és minőségi paraméterekkel jellemzett outputot rendel meg, s ez a megrendelés, meg az alkalmazott technológia határozza meg az inputot. Ebben a szub-mikro szférában a volumenkategóriák nyelvén megadott termelési utasítások dominálnak. (Éppen annak analógiájára alakították ki a tervutasítások rendszerét a makrovilágban, az ún. direkt irányítás viszonyai között.)

Az első jelenségcsoportba tartoznak a hosszú távú (vállalati és népgazdasági) döntések. Az aktuális ár nem nyujt orientációt a fejlesztési döntések számára. Az árakra vonatkozó várakozások, az árprognózisok pedig rendszerint csak a döntési tényezők egyikét képezik, gyakran nem is a legfontosabb tényezőt. Könyvtárnyi irodalma van annak, hogy nagyvállalatok hosszú távú profitkategóriája alapvetően nem fejezhető ki a piaci kategóriák nyelvén.

Úgy tűnik számomra, hogy ezek a nagyon különböző jelenségcsoportok keverednek az „Alkalmazkodás árak nélkül" c. fő részben.

4. Kornai könyvét *modellszerűen* — vagy inkább modellszerűen is — építi fel. Számomra rendkívül szimpatikus, hogy ezek *logikai* modellek, amelyek elsősorban a bonyolult kérdésekben való logikus gondolkodás, eligazodás szerszámai. Ha a paraméterek számszerűsíthetők, akkor ez tiszta haszon. De a szerző azzal is jelzi, hogy nem ez a lényeg, hogy modelljei minden eleméről szavakban megmondja a közgazdasági értelmet, de nem minden kockát lát el szimbólumokkal, holott a latin meg a görög ábécé betűiből még futná. A könyvének Bevezetőjében mentegetőzik is, hogy nem tesz eleget az „elmélet" ama meghatározásának, amely szigorúan formalizál és matematikailag bizonyít. Az én ízlésem szerint ez a mentegetőzés

felesleges. A modellek matematikai apparátusát a függelék adja meg, nem terhelte a közgazdasági mondanivalót.

A könyv *leíró-elemző* modelleket tartalmaz, és nagyon határozottan kizárja tárgyköréből a normatív modelleket, vagyis azokat, amelyek arra hivatottak választ adni: mi felel meg viszonyainknak, mi a helyes irány, s mit kell megvalósításuk érdekében tenni. Az elemző-leíró modellekre, általánosabban: a leíró-elemző tanulmányokra valóban égető szükség van. Már az ötvenes évek első felének a végén meghirdettük: ismerjük meg milyen és hogyan működik ténylegesen szocialista gazdaságunk. Kornainak mégis igaza van abban, hogy túltengenek a normatív („milyennek kellene lennie") tanulmányok, modellek. (A dolog lényegén nem változtat, hogy Kornai egy árnyalattal sötétebbnek látja a képet a valóságos helyzetnél. Pl. nem zéró az árképzés gyakorlatát analizáló kutatás, egyet-kettőt lehet találni.)

Leíró-elemző modellek nélkül nem is lehet megalapozott normatív modelleket kidolgozni. S bár minden szerzőnek jogában áll, hogy csak a tények leírásával és elemzésével foglalkozzék, mégis igaz az előző állítás fordítottja is: megalapozott leírást és elemzést végül is akkor adhatunk, ha valamiféle normatívával rendelkezünk. Mert már a puszta ismertetés is – akarva-akaratlanul – állásfoglalás, vagy állásfoglalásnak tűnik. A Kornai-könyv több olvasójával beszéltem, akik azt *olvasták ki*, hogy a mű szükségszerűnek látja a hiányt a szocialista gazdaságban. Ezt persze „A hiány" nem állítja. De mert nem elemzi, hogy e jelenség megszüntethető-e vagy sem, óhatatlanul azt a benyomást kelti – legalább az olvasók egy részében –, hogy a szerző a címben foglalt jelenséget a szocializmus elkerülhetetlen tartozékának tekinti. (A könyv utolsó lapján a szerző megmondja, hogy az általa leírt jelenséget nem tekinti változtathatatlannak. Ez azonban nem több, mint az „ember küzdj és bízva bízzál" formula a Tragédia végén.)

Még általánosabban. Kornai – programszerűen – gondosan kerüli, hogy az elemzett összefüggéseket értékelje. Tudjuk persze, hogy nem lehetséges értékítélet-mentesség a társadalomtudományokban. A szerző sem tudja ezt a programját következetesen keresztülvinni. Már az elemzett alapkategóriára igaz ez a megállapítás. Ha a szerzőnek nem lenne értékítélete, mégpedig alapjában véve negatív értékítélete a tárgyról, nem írt volna róla vastag könyvet. Más kérdés, hogy értékítéleteinket explicitté tesszük-e, vagy implicite hagyjuk. Véleményem szerint mindig gyümölcsözőbb az előbbi eljárás. Továbbá: rögtön előbukkan az értékítélettel rendelkező közgazda és a nem érzelemnélküli társadalmi ember, ha olyan kérdésről van szó, mint pl. teljes foglalkoztatottság vagy munkanélküliség. Ezért persze nem elmarasztalni kell Kornait, hanem ellenkezőleg. Szívesen láttam volna sok más, látszólag „objektívebb" összefüggésben is állásfoglalást. Még akkor is, ha az értékítéletek és a változtatási irányok felvázolása nehezebben megalapozható, minden oldalról támadást vált ki, s ez utóbbi állásfoglalások rendszerint nehezebben védhetők, mint a tények (vagy a tényekre vonatkozó hipotézisek) hűvös leírása.

A modellezéssel kapcsolatos egy további probléma. Kornai János nemcsak egyszerűen modellező közgazda, hanem szemmel láthatóan arra törekszik, hogy a szocialista gazdaság egészét végül is egyetlen konzisztens modell-rendszerbe foglalja össze. Ez ízlés dolga, szebben kifejezve: közgazdasági iskola kérdése. Nem vitás, hogy van létjogosultsága olyan iskolának, amely az egész gazdaságot egyetlen modellben kívánja működtetni. Ám véleményem szerint komoly buktatói vannak e törekvéseknek. Csak néhányat közülük.

– Túlságosan nagy teret kaphatnak a gazdasági viszonyok és folyamatok formai (és formalizálható) oldalai a tartalmi összefüggésekhez képest.

– Az elemzést túlságosan a kvantitatív, vagy még inkább: kvázi kvantitatív irányba viheti. (Mondottam: Kornai többnyire eredményesen törekszik arra, hogy ezt a buktatót elkerülje.)

– Csapdába ejthet a hamis szimmetriák konstruálásának eleganciája. Nagyon kell hangsúlyoznom: Kornai nagyon tudatosan kerüli ezt a csapdát. De azért a szimmetria foglyává válik, amikor pl. elfogadja és alkalmazza, az ún. fogyasztói járadék, vagy ahogyan a szerző nevezi (17. fejezet): a fogyasztói többlet rendkívül felületes, s a termelői járadék analógiájára képzett elméletet.

– A modellnek éppen a gondolkodást helyesen terelő logikai jellege szenvedhet csorbát, kiváltképpen akkor, ha az univerzális modell ökonometriai működtetésére is törekszünk.

Úgy gondolom: az az iskola, amely inkább csak parciális modellekkel dolgozik, s nem akarja feltétlenül összekapcsolni őket, könnyebben kerülheti el ezeket a buktatókat.

Végül egy, a könyvben alkalmazott módszerről. Leegyszerűsítve a dolgot: a könyvben szereplő megállapítások két típusúak. Az egyik: vizsgálatokból leszűrt határozott következtetések. Őket cáfolni csak úgy lehet, ha az olvasó a vizsgálat egész menetét kétségbevonja, ha megkérdőjelezi a felsorolt tényeket, ha felmutat fontos összefüggéseket, amelyek a vizsgálatból kimaradtak, ha felfedez logikai hibákat. A megállapításnak másik típusa: a hipotézis. Ezt a szerző mindig világosan megmondja és felszólít: tessék ellenőrizni a hipotézist; verifikálni vagy cáfolni. Ezzel programot is ad önmaga és más kutatók számára. Az eljárás korrekt és hasznos. Enyhén szólva nem minden szerzőnél találjuk meg ezt a világos szétválasztást. Csakhogy az írás nehéz mesterség. Eljátszogattam a gondolattal: mit mutatna az olvasók körében végzett teszt? Hány olvasóban rögződtek a hipotézisek vizsgálatokkal megalapozott következtetésekként? Félreértés ne essék. Ez — mint a fentiekből remélem kitűnik — nem a szerző eljárásának bírálata, hanem pozitívumának nyugtázása. Inkább csak meditáció arról, hogy mennyi félreértési lehetőség van, amire írás közben ügyelnünk kellene.

Összefoglalva ismét megállapítom: „A hiány" című könyv magas színvonalú, jelentős intellektuális teljesítmény. A szerző releváns közgazdaság kategóriával releváns összefüggésekben foglalkozik. A recenzor által egyértelműen pozitívnek és vitathatónak értékelt oldalával együtt előreviszi közgazdaságtudományunkat és — reméIhetően — szocialista gazdaságunkat. Minden közgazdának javaslom, hogy Kornai János könyvét alaposan tanulmányozza át.

Hoch Róbert

Kovács Álmos: *Nyereségérdekeltség és vállalati magatartás.* Budapest, 1978. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. 160 o.

A könyv tartalma egyrészt sokkal több, másrészt valamivel kevesebb, mint amit a címe ígér. Több annál, mert alaposan és rendszerezetten bemutatja a vállalati viselkedésnek, — pontosabban a termelésnek — a termelési függvényeken alapuló neoklasszikus modelljeit és lineáris programozási modelljeit. A magyar nyelven hozzáférhető szakirodalomhoz képest előbbre lép abban, hogy a neoklasszikus és a programozási modelleket egységes felépítésben tárgyalja, így azok igen jól összehasonlíthatók. Nemcsak a szokásos nyereség-maximalizálási modelleket tárgyalja, hanem mellettük két további típusú modellt, éspedig a másodlagos nyereségérdekeltségen alapuló célfüggvényt és a fajlagos nyereségszintet maximalizáló modelleket. Kevesebbet ad a könyv a címben ígértnél a tekintetben, hogy csupán azt vizsgálja (a matematikai közgazdaságtan modelljeinek segítségével), hogyan viselkedik a vállalat háromféle érdekeltségi rendszer esetében, ha optimálisan jár el, továbbá ismerteti a Magyarországon 1968 óta alkalmazott nyereségszabályozási rendszereket, de nem foglalkozik azzal a kérdéssel, hogy ténylegesen hogyan viselkednek a vállalatok Magyarországon, milyen megfontolások alapján alakítják ki termelési döntéseiket. Más kutatások kimutatták, hogy a vállalatok tényleges viselkedése lényegesen eltér a szabályozási rendszer megalkotásakor feltételezett optimálistól. Ezeknek az eltéréseknek a bemutatása természetesen empirikus vizsgálatokat igényelne. A szerző utal is erre a könyv utolsó mondatában. Mivel azonban ez a könyv elméleti matematikai közgazdaságtani munka, nyilvánvalóan nem várhatjuk el tőle, hogy a tényleges viselkedést feltárja. A matematikai közgazdaságtani elemzésnek az a haszna, hogy világosan kimutatja: különböző érdekeltségi rendszerekben, más szóval különböző szabályozó rendszerekben hogyan kellene a vállalatnak optimálisan eljárnia.

A könyv, mint említettem, két termelési modell típust használ a vállalati viselkedés elemzésére. A neoklasszikus termelési függvényeket az jellemzi, hogy az erőforrásoknak különféle kombinációival a termékek sokfajta kombinációját lehet előállítani, más szóval mind az erőforrások, mind a termékek bármilyen kis vagy nagy mennyiségekben képesek egymást helyettesíteni, miközben a helyettesítés feltételei változnak. Matematikailag ez azt jelenti, hogy az erőforrások és a termékek közötti kapcsolatot egy folytonosan deriválható függvény fejezi ki.

A lineáris programozási modellben az erőforrásoknak nem végtelen számú kombinációja között lehet választani, hanem rögzített számú tevékenység között, egy-egy technológia keretében az erőforrások felhasználásának aránya pontosan meg van határozva. A tevékenységek természetesen keverhetők.

Talán a legszemléletesebben abban fejeződik ki a két modell különbsége, hogy a neoklasszikus modellben a termelési közömbösségi görbék valóban görbe alakúak, a programozási modellekben viszont egyenes szakaszokból állnak.

Mindkét modell esetében először megvizsgálja a két legegyszerűbb esetet: a termelés maximalizálást adott költség korlát mellett, valamint a költség minimalizálását adott termelési szint mellett. Ezután tér át a nyereséget maximalizáló vállalat viselkedésének vizsgálatára. Négy alaphelyzetet vizsgál meg: 1. egy termék — egy erőforrás, 2. egy termék — két erőforrás, 3. két vagy több termék — egy erőforrás, 4. több termék — több erőforrás. Igen elegánsan vezeti le, hogy ezek a problémák egyaránt megfogalmazhatók a neoklasszikus és a programozási modellek nyelvén és a kapott optimális megoldások között nem nagyok a különbségek.

A leírt helyzeteket háromféle nyereségérdekeltségi rendszerben vizsgálja. A tiszta nyereségérdekeltség esetében a vállalat célja a lehető legnagyobb nyereség elérése. A másodlagos nyereségérdekeltségnek nevezett esetben a vállalat a nyereség maximalizálása mellett célul tűzi ki valamely korlátozó feltétel teljesítését. Ilyen korlát lehet: meghatározott bruttó termelési értéknek, export értéknek, árbevételnek elérése. A könyvben az árbevétel és a nyereség együttes figyelembevételének esetét tárgyalja. A vállalat célját ekkor kétféleképpen lehet megfogalmazni: 1. miközben legalább egy meghatározott árbevételt akarnak elérni, a nyereség maximalizálására törekszenek, 2. miközben legalább meghatározott nyereséget akarnak elérni az árbevétel maximalizálására törekszenek. Ilyen nyereségérdekeltségi rendszerben a vállalat több erőforrást használ fel, többet értékesít, mint a tiszta nyereségérdekeltség esetében.

A fajlagos nyereség maximalizálásához fűződő érdekeltség esetében a vállalat a nyereségnek nem az abszolút összegét maximalizálja, hanem a bérhez, a létszámhoz, a felhasznált eszközökhöz viszonyított nyereség szintjét. A könyvben az eszközarányos nyereségszintet maximalizáló vállalat viselkedését vizsgálja. Az ilyen vállalat kevesebb eszközt használ fel és kevesebb nyereséget ér el, mint a tiszta nyereségérdekeltségű vállalat.

Kovács Álmos ezt követően röviden értékeli a háromfajta érdekeltségi rendszert anélkül, hogy egyértelműen állást foglalna egyikük mellett. Szerinte ugyanis csak a népgazdaság egészének helyzete és különféle céljai alapján lehet eldönteni, hogy az adott helyzetben melyik fajta érdekeltségi rendszer a legelőnyösebb.

A könyv legfőbb érdeme a leírt modelleknek és a belőlük folyó következményeknek nagyon világos kifejtése. Ezért kiválóan lehetne az oktatásban használni. Jó szolgálatot tehet bizonyos alapkérdések tisztázásában. Azt azonban nem várhatja tőle az olvasó, hogy a gazdasági szabályozó mechanizmus konkrét kialakításának kérdéseihez közvetlen segítséget kap. De ez nyilvánvalóan nem is volt a szerzőnek célja.

ANDORKA RUDOLF

PIROGOV, G. G.—FEDOROVSZKIJ, J. P.: A strukturális becslés problémái az ökonometriában. Moszkva, 1979. Szatyisztyika. 327 o.

Mint Kantorovics akadémikus előszavában megemlíti, ez az első olyan monográfia szovjet szerzők tollából, amely szűkebb értelemben vett ökonometria módszereit tekinti át. Az ökonometriai módszereket a szerzők elsősorban a tervezés kereteibe illesztik és az ökonometriában — mint ezt a szerzők előszavában olvashatjuk — a tervezési módszerek korszerűsítésének egyik eszközét látják.

Az első fejezet az ökonometria általános kérdéseivel foglalkozik. Mivel az ökonometria kétféle értelmezése elsősorban a szovjet szakirodalomban honosodott meg, érthető, hogy viszonylag nagy teret szentel a tárgy pontos körülhatárolásának és a továbbiakban az ökonometriát az angolszász országokban (és mostanság már hazánkban is) használt értelemben tárgyalja. Röviden bemutatja az ökonometria kialakulásának főbb állomásait, ezen belül érthető módon nagy hangsúlyt helyezve a 60-as és 70-es években kialakult szocialista ökonometria főbb problémáira. Még ugyancsak e bevezető fejezetben definiálja az ökonometriai modell legfőbb építőelemeit: a változókat és a különböző típusú egyenleteket. Ugyancsak definiálja a statisztika, a becslés és a becslő függvény fogalmát, a pont- és intervallum becsléseket, valamint a becslések tulajdonságait (torzítatlanság, minimális szórás, hatásosság, minimális kvadratikus eltérés, konzisztencia, aszimptotikus torzítatlanság, aszimptotikus hatásosság).

Csak verbálisan említi és tárgyalja a modellspecifikáció fontosabb elvi kérdéseit, viszont formális bevezetést ad az ökonometriába azzal, hogy bemutatja a standard lineáris modell feltételezéseit, fogalmát és klasszikus legkisebb négyzetek (OLS) módszerének alapjait. Szerkezetileg érdekes, de logikus, hogy már itt exponálja a bayes-i ökonometriát a fő fogalmak definíciójával és a bayes-i következtetéselmélet rövid formális felvázolásával.

A második — talán túlságosan rövidnek tűnő — fejezet az ökonometria matematikai eszközeivel foglalkozik. Ezen belül viszonylag nagyobb teret szentelnek a szerzők a lineáris algebrának és kevesebbet a valószínűségszámítási-statisztikai alapok bemutatására. Így az olvasó megismerkedhet a fontosabb mátrix- és vektorműveletekkel, a sajátértékekre, a mátrixok nyomára vonatkozó, az ökonometriában gyakran szereplő tételekkel és összefüggésekkel, de a statisztikai rész csak a Csebisev egyenlőtlenséget, valamint a három fontos eloszlást (χ^2, r, F) vázolja fel.

A harmadik fejezet, a könyv egyik súlypontja, a lineáris ökonometriai modellek klasszikus (nem bayesi) paraméterbecslési eljárásait mutatja be, az angolszász szakirodalomban megszokott tárgyalásmódban és jelölésrendszer felhasználásával. Kiindulva az első részben bemutatott standard lineáris modellből először az egy, majd a többváltozós esetben részletesen levezeti az OLS becslés tulajdonságait. A reziduumok autokorreláltságának feltételezése már sérti a standard modell alaphipotéziseit, és egyenesen elvezet az Aitken-féle általánosított legkisebb négyzetek becsléséhez. Ezek után rögtön áttér a magyarázó változók és a véletlen változók közti korreláltság eseteinek tárgyalására; először a késleltetett endogén változókat tartalmazó modell becslésének kisminta- és aszimptotikus tulajdonságait vizsgálja. A szimultán egyenletek becslési módszerei közül először a kétfokozatú legkisebb négyzetek, majd a korlátozott információjú maximum likelihood becsléseket mutatja be részletes, formális tárgyalásmódban. A közvetett legkisebb négyzetek módszere után két teljes információs (rendszer-) becslést ír le: a teljes információn alapuló maximum likelihood, valamint a háromfokozatú legkisebb négyzetek eljárásokat. Végül — talán egyszerűségére és népszerűségére való tekintettel — helyt ad az instrumentális változók becslésének is.

A negyedik fejezet kellemes meglepetést okoz az ökonometria gyakorlati művelőinek, ugyanis itt az iteratív becslési eljárások olyan részletes és átfogó tárgyalásával találkozhatunk, amely talán egyedülálló a világ szakirodalmában. Ezzel kapcsolatban meg kell említeni, hogy az iteratív becslési eljárások (fixpont módszerek), melyeket a 60-as évek elején *Wold* svéd ökonométer alapozott meg, különös népszerűségre tettek szert a szocialista országok ökonometriai gyakorlatában. Ennek oka valószínűleg az, hogy ezek az eljárások viszonylag egyszerűen programozhatók, kisebb számítógépeken is realizálhatók, ugyanakkor meglepően jó tulajdonságú becsléseket eredményeznek. Ebbe a keretbe jól beleillik a módszereknek az a részletes, gyakorlati példákkal is illusztrált fejezete, amely a legfrissebb nyugati ökonometriai eredményeket, sőt esetenként azok bírálatát is tartalmazza, s amely ennél fogva a könyv egyik legértékesebb részeként tekinthető.

Az ötödik fejezetet az ökonometriai modellek identifikációja kérdéseinek szentelték a szerzők. Az identifikáció talán az ökonometria legsajátosabb problémája. Ez az a pont, ahol az ökonometria összes alkotóeleme szinte szétválaszthatatlanul összefonódik, s olyan egyedi problémakört alkot, amelyet csak komplex megközelítésben lehet vizsgálni. A forgalomban levő ökonometriai kézikönyvek részletesen foglalkoznak ugyan e kérdéssel, de gyakran leegyszerűsítik ezt leíró algebrai tárgyalásra. Pirogov és Fedorovsky könyvének e fejezete sokoldalúan és példás alapossággal vizsgálja meg e kérdés részleteit is.

Terjedelmét és mondanivalóját tekintve a könyv másik súlyponti fejezete a szocialista népgazdaság ökonometriai modellezésének kérdéseit áttekintő hatodik fejezet. Itt nagy teret szentel a modell, a prognózis és a terv, valamint a leíró illetve optimalizáló modellek összehasonlító elemzésének. A prognózismódszereknek szovjetunióbeli elterjedéséről szóló beszámoló után sorra bemutatja a szocialista országokban elkészült fontosabb ökonometriai modelleket. A szovjet modellezési kísérletekből Mihalevsky, valamint Menshikov és munkatársai ökonometriai jellegű modelljét tárgyalja. Ezután bemutatja a pozsonyi VVS ökonometriai modelljeit; ezek közül kettőt is (a középtávú Csehszlovák és a középtávú Szlovák modellt) egészen az egyenletrendszer, a változólista, valamint az alkalmazott becslési eljárás mélységéig tárgyal. Hasonló részletességgel vizsgálja Pawlowski lengyel modelljét, valamint a Lódzi Egyetem W-1 modelljét is. Áttekinti a Magyarországon folyó említésre méltó modellkísérleteket is; ezeken belül az M-2, valamint a több új elemet felvonultató M-4 modellt ismerteti részletesen.

A hetedik, befejező rész a modellek verifikációjának kérdéseit tárgyalja. Bár a fejezet verbális bevezetőjében a verifikáció fogalmát és feladatát meglehetősen széles körűen szabja meg, a konkrét módszerek tárgyalása ehhez képest némiképp szegényes, hiszen csak a statisztikai hipotézisvizsgálat alapelveit és főbb lépéseit, a Durbin—Watson teszt rövid tárgyalását, valamint az előrejelzett értékeknek a Theil-féle egyenlőtlenségi mutatón alapuló vizsgálatát találhatjuk meg e szűkre szabott fejezetben. Talán a szerzők is érezték, hogy ezek a kérdések a tárgyalásmód logikája szerint nem a könyv végére illettek volna, ezért foglalkoztak itt velük a mű többi részéhez képest aránytalanul keveset.

Ha összefoglalóan akarjuk értékelni a könyvet, abból kell kiindulnunk, hogy az elmúlt években egy sor tartalmilag és didaktikailag egyaránt kiváló középfokú, illetve felsőfokú ökonometriai módszertani könyv jelent meg amerikai és nyugateurópai kiadóknál. (Elegendő példaként

Goldberger, Johnston, vagy Theil közismert munkáira utalni.) Mi az, ami miatt ezek mellett is feltétlen ajánlhatjuk Pirogov és Fedorovsky könyvét az ökonometria iránt mélyebben érdeklődő magyar olvasók figyelmébe? Két olyan fejezetet tartalmaz (az iteratív módszerekről és a szocialista modellekről), amelyeknek ilyen összefoglalója tudomásom szerint másutt aligha található meg, ennél fogva új tárgyi ismereteket ad. A paraméterbecslésekről, illetve az identifikációról írt fejezetek logikusan felépített, korrekt részek, a gyakorlati ökonometriai munkákhoz szükséges szinte minden tételt, képletet áttekinthető formában tartalmaznak. A könyv tárgyalásmódja világos, de igen tömör, ezért kifejezetten oktatási célra talán kevéssé alkalmas. Szerkezete — az említett kisebb kifogásoktól eltekintve — logikus, és a szocialista ökonometriai gyakorlatban felmerülő problémákat szerencsésen súlyozza. Korlátozott terjedelménél fogva bizonyos témákat egyáltalán nem vagy csak futólag tud tárgyalni. Ennek ellenére nyugodtan állíthatjuk, hogy elsősorban nem kezdők, de gyakorló ökonométerek hasznos középfokú kézikönyvként, háttéranyagként használhatják, tudományos értékét tekintve pedig egyenértékű a méltán híressé vált nyugati ökonometriai kézikönyvekkel, de — és ez sem elhanyagolható szempont — mintegy tizedáron, és konvertibilis valuta nélkül is beszerezhető.

HUNYADI LÁSZLÓ

TUDOMÁNYOS ÉLET

Axel Leijonhufvud

Élet az ökonok földjén*

Az *ökon* törzs óriás területet tart birtokában a távol északon. Országukat az idegenek zordnak és szomorúnak látják, amelyet nem könnyű szánon bejárni; de az ökonok a hosszú alkalmazkodási idő alatt megtanulták, hogyan csikarjanak ki valami megélhetést belőle. Ősi földjükhöz őszintén, sőt néha szenvedélyesen ragaszkodnak, az ifjakat a szomszédos, enyhébb klímát élvező *politol*ok és *szocilóg*ok elpuhultabb életének lenézésére nevelik. Közös eredetük ellenére feszült viszonyban állnak e törzsekkel, az átlag ökon bizalmatlan és lenéző szomszédaival szemben (amit azok is szívből viszonoznak), a társadalmi érintkezést számos tabu tiltja. Az ökonok szélsőséges törzsi szelleme, már-már idegengyűlölete, nehézzé, sőt talán veszélyessé is teszi, hogy egy kívülálló közöttük éljen. Talán ezzel magyarázható, hogy ezidáig még nem tanulmányozták rendszeresen az ökonok életét. Társadalmi rendszerükről és életmódjukról csak töredékes és kétes hitelességű információkkal rendelkezünk. Nagy szükség van ennek az érdekes törzsnek alaposabb tanulmányozására.

Kasztok és státuszok

Értesüléseink arra mutatnak, hogy társadalmi struktúrájuk egy ilyen primitív néphez mérten elég bonyolult. A társadalmi struktúra két fő dimenziója a kaszt és a státusz. A törzs elsődlegesen kasztokra oszlik és minden kaszton belül a státuszviszonyok szövedékét találjuk.

Az ökonok státuszrendszerének rendkívül érdekes oldala, hogy a státuszviszonyok nem képeznek egyszerű hierarchikus „szurkálási skálát", ahogyan az ember elvárná. Például azt találjuk, hogy A szurkálja B-t, B szurkálja C-t és végül C szurkálja A-t! A státuszok közötti tranzitivitásnak ez a hiánya lehet a ludas az ökonok belső viszályaiban, amelyek oly tűrhetetlenné teszik társadalmi életüket a látogató számára. Minden rendelkezésünkre álló útleírás „veszekedős fajta"-ként jellemzi az ökonokat, akik „egymás háta mögött áskálódnak". A társadalmi összetartozás érzését főképp a kívülállók iránt táplált bizalmatlanság tartja fenn. Ezzel szemben azokban a társadalmakban, amelyekben hierarchikus szurkálási rend uralkodik, rendszerint azt találjuk, hogy valamiféle egyensúly alakul ki és valójában nagyon ritkán kerül sor szurkálásra. Az ökonok közt észlelt civilizálatlan rendellenesség olyan rejtély, amelynek megoldását az ökonológiai kutatásokban kiemelt főirányként kellene kitűzni.

Végső soron az elméleti kérdés nyitjának bizonyulhat az, ami első pillantásra úgy tűnik, mintha további komplikációként akadályozná, hogy az ökon törzs helyzetét tisztán lássuk. A kasztok között hagyományosan nincs szurkálás, de ez alól a szabály alól is van kivétel. A felsőbb kasztok tagjait gyakran rajta lehet kapni, hogy alsóbb kasztok tagjait

* *A szerkesztő megjegyzése:* Mivel fiatal olvasóink közül sokan, a mai ifjúságra oly jellemző idealizmussal és tettvággyal azt tervezik, hogy az ökonok közötti életnek és munkának szentelik magukat, mint szerkesztő kívánatosnak véltem, hogy felkérjek egy tapasztalt ökonologistát, írjon beszámolót erről az alig ismert törzsről. Szorgos kutatással e tanulmány szerzőjére akadtunk. Dr. Leijonhufvud szinte tökéletesen megfelel e feladatnak, hiszen már 10 éve él száműzetésben Uclában, egy távoli ökon faluban és nemcsak állandó lakos lett belőle, hanem még a falu vénei közé is bejutott. (Nem tudtunk rájönni, hogyan álcázta magát azon túl, hogy őszes szakállat növesztett.)

A cikk eredetileg a *Western Economic Journal* (most: *Economic Inquiry*) 11. évf. (1975) 3. számában jelent meg "Life among the Econ" címen. Fordította *Létra B. Soma.*

szurkálják. Noha az ilyesmit jó ízlésbe ütközőnek tekintik, nem jár formális szankciókkal. Az alsóbb kasztnak az a tagja azonban, aki a felsőbb kasztból próbál valakit szurkálni, nagyobb kockázatot vállal: kiközösítést és a szólásjog elvesztését a törzs tanácsülésén, amelyet telenként tartanak.

E megfigyelés lényegének kifejtéséhez el kell még mondanunk néhány dolgot a törzsbeli kasztokról és státuszokról. Az ökonok „kaszt" jelentésű szava: *szaktér*. A kaszthoz tartozás az ökon öntudatnak és én-tudatnak fontos része, a felnőtt ökon így mutatkozik be: „szakterem ez és ez". Érdekes ennek a szónak a magyar eredete is, hiszen az ökon normális esetben óvakodik attól, hogy közönséges magyar nyelven beszéljen. Ami magyar szó mégis beszivárgott a nyelvükbe, azt olyan értelemben használják, hogy más ne érthesse meg, miről is van szó. Például ebben az esetben a „tér" szó használata azért félrevezető, mert a kasztok nem települnek külön. A társadalmi egységet, amely kb. a falunak felel meg, ökonul *int*nek vagy *tansz*nak nevezik. Az ökon intek mindig több szaktér tagjaiból állnak, sőt egyes esetekben minden kasztot megtalálunk egy-egy intben.

A státusviszonylatok az egyes szakterekben sok közös vonást mutatnak fel. A legjellemzőbb, ami miatt komoly kutatóknak is érdemes az ökonok közti státuszviszonyokkal foglalkozniuk, az a mód, ahogy a státusz összekapcsolódik bizonyos fajta eszközök előállításával, amelyeket *moddel*nek neveznek. A felnőtt hím státuszát az szabja meg, mennyire ügyesen tudja *szakter*ének *moddel*jét elkészíteni. Az a tény, hogy (a) minden ökon státuszra törekszik, (b) hogy státuszt csak moddel készítésével lehet elérni, és hogy (c) a legtöbb moddelnek kicsi vagy éppen semmi a gyakorlati haszna, talán magyarázatot ad a törzs elmaradottságára és nagyfokú kulturális nyomorára. A szoros kapcsolat a törzsbeli státusz és a moddel készítés között, valamint az, hogy a moddeleket inkább ceremoniális, mint praktikus célra készítik, az utóbbi idők fejleménye. Ebből sok megfigyelő pesszimista következtetésre jut az ökon kultúra életképességét illetően.

Akárhogy volt is azelőtt, tény, hogy a szakterek már nem képeznek szilárd rangsort. Ez magyarázhatja, hogy az egyéni státuszok nem tranzitivitek. Először is, két kasztnak a sorrendje néha határozatlan. Így pl. noha a *mikró* magasabbrendűnek tartja magát a *makró*nál, ugyanezt teszi egy makró egy mikróval szemben, és a kívülállók e vitában határozatlan vagy legalábbis eltérő álláspontot foglalnak el. Tehát egyes kasztok egymás közötti presztízsviszonylata nem reflexív. Más esetekben viszont tiszta a rangsor. A papi rend például (a *mat-ökon*) felsőbb szaktér, mint akár a mikró, akár a makró, míg például a *fejlők* ugyanilyen egyértelműen alacsonyabb rangúak. Másodszor: tudjuk azt is, hogy a kasztok rangsorolása (ha van is) nem állandó, hanem idővel változik. Így például bizonyítható, hogy a mat-ökonok jelenlegi magas és a fejlők alacsony rangsorolása, történelmi távlatból nézve, új jelenség. A mat-ökon felemelkedése összefüggésben lehet azzal a korábban már tárgyalt irányzattal, hogy minden ökon díszesebb, szertartási célú moddelre törekszik, míg a fejlők alacsony rangja annak tudható be, hogy ez a kaszt az utóbbi időkben megsértette a politolokkal, szocilógokkal és más törzsekkel való érintkezés tabuit. A többi ökon rossz szemmel nézi ezt, mint ami a törzs moralitását aláássa, sőt azzal gyanúsítja a fejlőket, hogy nem tisztelik a moddeleket.

Ha az ökonok nem-tranzitív státusz-rendszere első pillanatra rendhagyónak látszik is, ez legalább olyan jelenség, aminek ismerjük párját.[1] Lehet, hogy amit az ökonoknál tapasztalunk az egyszerűen felbomlása egy valaha volt társadalmi rendnek, amelyben a kasztok rangsora és a kasztokon belüli egyértelműen tranzitív státusz-rendezés még tökéletesen ép volt.

Ifjak, fölnőttek és vének

Az ifjú ökon (vagy *ökleveles*) csak akkor léphet be a fölnőttek társadalmába, ha már csinált egy moddelt és annak az *int*nek a vénei, amelyben inaséveit tölti, úgy ítélik, hogy kellő mesterségbeli tudásra tett szert. Az ifjat egy bonyolult szertartás keretében avatják fölnőtté, melynek részletei faluról falura változnak.* Egyes jobb falvakban megkövetelik

[1] Vö. pl. az indiai *jajmani* rendszerrel. (MANNING NASH: Primitive and Peasant Economic Systems, Scranton, Pa, 1966.)

* A fordító szülőfalujában (Matudémia) a szertartást *védés*nek nevezik, a felavatott ifjú *kandi-státusz*ba kerül és havi *bagópénz*t kap. Ez utóbbinak rituális-szimbolikus jellegét bizonyítja, hogy a pénzdarabok száma (472), aminek mágikus jelentőséget tulajdonítanak, generációk óta változatlan, noha egy pofa bagóért egyre több pénzt kell adni. Ugyanebben a faluban viszont kihalt az alábbi „vadonba űzés" barbár gyakorlata. (L. B. S.)

(más távolabbi falvakban nem tudjuk így van-e), hogy a fiatal fölnőtt folyamatosan bizonyítsa rátermettségét e műtárgyak készítésében. Ha ezt elmulasztja, kiűzik az intből, hogy a vadonban lelje halálát.

Ez az eljárás kegyetlennek tűnhet, de az ökonok a férfiasság rítusának tekintik, melyet a hagyomány szentesített és életbevágóan fontosnak tartják az int ereje és jóléte szempontjából. Ha a fiatalokkal szemben kemények is a követelmények, könyörületességre vall az, ahogy az ökonok az öregebbekről gondoskodnak. Akit egyszer a vének közé választottak, annak már semmit sem kell tennie, mégis jól tartják.

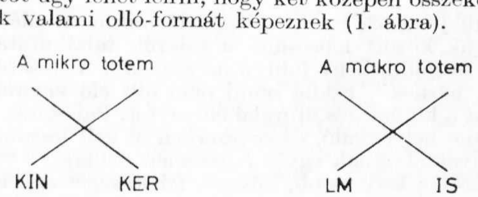
Totemek és a társadalom struktúrája

Noha eredetileg a *moddel* szó csak egy konkrét szerszámot jelentett, a kutató vakon menne el az ökonok társadalmi struktúrájának kulcskérdései mellett, ha ragaszkodnék ehhez a szemlélethez. A moddel absztrakt fogalommá fejlődött, amely uralkodik az ökonok felfogásán csaknem minden társadalmi viszonyukban — legyen ez a más törzsekkel vagy más kasztokkal való kapcsolat, vagy a státusz-viszony egy kaszton belül. Például, ha egy idegennek azt magyarázzák, miért becsülik oly kevésre a szocilógokat vagy politolokat, ennyit mondanak: „nem alkotnak moddelt" és kész.

A moddel uralkodó szerepét talán legjobban azok a (sajnos hiányos) beszámolók illusztrálják, amelyek a két legnagyobb ökon kaszt, a *mikrók* és *makrók* kapcsolatát tárgyalják. Mindkettőnek van egy-egy nagyon egyszerű alapmoddelje, és az egyes tagok által alkotott moddelek csak variációk arra a témára, amit a kaszt alap-moddelje szab meg. Itt is arra lyukadunk ki, hogy az ökonok a társadalmi viszonyokat — ez esetben két kaszt között — a megfelelő moddelekre hivatkozva fejezik ki. Így, ha egy mikróökont megkérdeznek, miért nem házasodnak a mikrók a makrókkal, ezt válaszolja: „Ők másféle moddelt csinálnak", vagy ezt: „Nem ismerik a mikró moddelt". (Ebben persze teljesen igaza is van, csak éppen ő sem ismeri a makró moddelt.)

Több megfigyelő tett már megjegyzést arra, hogy szinte lehetetlen valamelyik szaktér egy tagjától összefüggő és érthető választ kicsalni a kérdésre, mi különbözteti meg az egyik kasztot a másiktól úgy, hogy végül a válasz ne arra az állításra zsugorodjék össze, hogy a moddelek különböznek. Bár a probléma még sok kutatást igényel, már ennyi is elég annak az álláspontnak az alátámasztására, hogy az alapmoddelt a kaszt *totem*ének kell tekintenünk. Meg kell jegyezni, hogy ezt a vitás kérdést nem azért nehéz eldönteni, mintha valamilyen tabu tiltaná, hogy a kasztok kérdéséről idegenekkel beszéljenek. Nemcsak hogy nem zárkóznak el, de rendszerint nagyon is beszédesek, ha a téma szóba kerül. A baj az, hogy amit mondanak, alig áll másból mint a legközönségesebb kasztelőítéletek kifejtéséből.[2]

A tapasztalatlan szemlélőnek a főbb kasztok totemjei csaknem egyformának tűnnek. Éppen az a nagy társadalmi fontosság, melyet maguk az ökonok tulajdonítanak az apró különbségeknek, helyezi az ökonográfiát (az ökon iparművészet tanulmányozását) a modern ökonológia középpontjába. Illusztrációként nézzük meg a mikró és a makró totemeket. Durván mindkettőt úgy lehet leírni, hogy két középen összekötött faragott fapálcika alkotja őket, amelyek valami olló-formát képeznek (1. ábra).



1. ábra

Egyes ceremóniák ezekkel a totemekkel különösen fontosak számunkra, mivel az ökonok moddelkészítésének eredetére utalnak. Sajnos csak egyes utazók töredékes beszámolóit ismerjük ezekről a szertartásokról, és amikor megkísérlik, hogy laikus módon értelmezzék amit láttak, gyakran ellentmondanak egymásnak. Nagy szükség lenne rendszeres tanulmányozásukra.

[2] Ez a megfigyelés nem új. Megtalálható pl. MACHLUYP *Hajóutak* c. művében az „Őfelsége Semantick nevű hadihajójának útja Ökonföld partjára" c. fejezetben.

Az itt következő vázlatos leírás a makróknál szokásos „talajkutató" ceremóniáról több olyan talányt hoz felszínre, amelyek az e téren kutató ökonologistákat mostanában zavarba ejtik:

A vén megragadja az LM-et a bal, az IS-t a jobb kezével, és a totemet kissé behajlított könyökkel maga elé tartva egyenesen halad előre a kiválasztott terepen, éspedig a rítus szavai szerint: „nem nézve se jobbra, se balra".[3] A falu ifjai először vidáman ugrálnak körülötte, majd elcsendesednek, amikor a vándorlás hosszadalmassá és fárasztóbbá válik. Ez alkalommal az út igen hosszú volt, a terep nehéz... az ifjak elnyúló sorban, mogorván és sárosan követték vezetőjüket, aki izzadságtól gyöngyöző homlokkal, elszántságba merevedett arccal botladozott az útjába került akadályokon át... Végre valahára a totem megremeg, egyre jobban kileng és végül reszketve egyenesen lefelé mutat. A vén megvárja, míg az ifjak köréje gyűlnek, és nagy ünnepélyességgel kinyilatkoztatja: „Imé a Makró Igazsága és Hatalma."

Bizonyára egy ilyen leírásból is világos, miért tört ki olyan nagy vita az Eszközista Iskola fő tétele körül. Ez a befolyásos ökonográfiai irányzat azt bizonygatja, hogy a moddel-faragás művészetének történelmi eredete hasznos szerszámok és eszközök készítésében gyökerezik és hogy például az előbb leírt ceremónia, rituális formában, azokra a tényleges felhasználási módokra utal, amelyekre ezeket az eszközöket valaha fordították.

Bármilyen hóbortosnak látszik is ez az eszközista hipotézis, igazságtalanság lenne kapásból elvetni. Hogy a makró-moddelt szabad-e eredetileg „hasznos eszköznek" tekinteni, elsősorban attól függ, hogy a leírt szertartás rituális talajkutatása tényleges eredménnyel jár-e. Maguk a makrók kitartanak a mellett, hogy ily módon aranyra lelnek. Egyes utazók és kutatók igazolják ezt az állítást, mások elvetik, mint puszta mendemondát. Az ügy nagyon hasonlít azokhoz a kísérletekhez, amelyek a vízkutatás varázsvesszős módszerét akarták kiértékelni. Sokan esküsznek rá, hogy működik, de hogy miért, arra soha semmilyen tudományos magyarázatot nem találtak.

Megbizható szemtanúk beszámolói szólnak arról, hogy a makrók tényleg találtak aranyat. Anélkül, hogy valamennyi ilyen beszámoló hitelességét kétségbe vonnák, a szkeptikus kritikusok szerint értéküket erősen le kell szállítani. Az ökon „arany" szó, mint mondják, mindenféle sárga színű fémet jelenthet, bármily értéktelen is az. Más ökonologisták pedig azt hangoztatják, hogy a „talajkutató" szertartást soha vagy szinte soha sem végzik ismeretlen talaj fölött, és hogy a szemtanúk beszámolói olyan telérek „felfedezéséről" szólnak, amelyeket a makrók már nemzedékekkel ezelőtt is ismertek.

Megkérdezhetjük, hogyan marad életben egy szokás, ha semmi sincs mögötte. A válasz egyszerű, és aligha lepi meg azokat, akik jártasak a primitív népek hitvilágáról írt korábbi művekben. Ismerünk eseteket, amikor a szertartás semmi kézzelfogható eredményt nem hozott. Ha így esik, a makró a következő két álláspont egyikét fogadja el. Vagy megvádolja azt a személyt, aki a szertartást végezte, hogy egyes részletekben eltért a rítustól, vagy pedig kiáll a társa állítása mellett, hogy igenis ott van az arany, de nem ástak érte elég mélyre.[4]

[3] Ugyanezek a szavak jelennek meg a megfelelő mikró rituáléban is. A beszámolók szerint a makrók maguk között lebecsülik a mikrók talajkutatását, mondván, hogy egy mikró „nem tudja megállni hogy jobbra ne nézzen". A mikrók viszont azt állítják, hogy a makrók „balra néznek". Eddig senki nem állt elő valami ésszerű hipotézissel, ami megmagyarázná ezt a különleges liturgiai ellentétet. Valószínű, hogy túl messzemenő magyarázat nem is lenne helyénvaló, és egyszerűen el kell fogadnunk, hogy ez is csak az ökonok szüntelen civakodásának egyik érdektelen példája.

[4] Az utóbbi magyarázat a kedvesebb, mivel a felelősséget egy másik kasztra hárítja nevezetesen, az *au-maître*-ekre, vagy *ométer*ekre (az írásmód változó), akik a kubikusmunkát végzik mind a makrók, mind a mikrók részére.

A „kubikusok" kasztja különösen érdekes az ökonok elmaradottságával foglalkozók számára. A legalacsonyabb ökon kaszt tagjai, az ométerek, a tradíciók értelmében csak a legpiszkosabb fizikai munkát végezhették, és ami az ökonok szemében még fontosabb, nem volt soha saját totemük. A legutóbbi időkben azonban ennek a kasztnak a révén kezd utat törni valamiféle iparosodás az ökonok közt. Az ométerek, mentesek lévén a moddel-faragásra és ehhez kapcsolódó totemhitre koncentráló nevelés előítéleteitől, készségesen fordultak a modern gépek felé és járatosakká váltak a kotrógépek és gépi darálók használatában. A törzs többi részének a magatartásában ezzel az egykor páriának tekintett kaszttal szemben, amelyik most az iparosodás élén jár, keveredik a lenézés és irigység, ahogyan várhattuk.

Eléggé világos, hogy akármelyik álláspontra helyezkednek is, az „illúziók sértetlenek” abban az értelemben, hogy a totem szerepét a kaszt hitéletében nem ingathatták meg.

Mítoszok és moddelek

Utóbbi években csökkent az érdeklődés az iránt a vita iránt, hogy egyes ökon moddelek „működnek-e” vagy sem (illetve hogy milyen értelemben mondhatni róluk, hogy „működnek”). Bizonyára nem azért, mert az ügy eldőlt, valójában ma bizonytalanabbak vagyunk mint valaha, hogy mi is a válasz az eszközisták által feltett kérdésre. Inkább arról van szó, hogy megváltozott a metodológiai perspektívánk, és úgy tűnik, hogy az eszközista ügy már nem szül „jó” kérdéseket. Az „új ökonológia”, mint tudjuk, a hangsúlyt a *Verstehen*re helyezi, és ennek megfelelően elveti azt a kísérletet, hogy az ökonok hitvilágát a modern természettudományból átcsempészett racionális kritériumok szerint ítéljük meg.[5]

Egyre világosabbá válik, hogy az ökonok komolyan hisznek *minden* moddelben, akár igénylik egy bizonyos moddelnek „hasznos szerszámként” való elismerését, akár nem. Ha a „használhatóságot” tekintjük a kiindulópontnak e nép totem-kultusza megítéléséhez, akkor csak zsákutcába juthatunk, különösen ha a *mat-ökon* kasztot vesszük szemügyre.

A mat-ökonok több szempontból is a leglebilincselőbb ökon kaszt és mindenesetre a legszínesebb. Ma elég nagy a bizonytalanság, valóban illik-e a „papi” jelző erre a kasztra, az viszont könnyen érthető, miért nézték őket papoknak az első utazók. A mélységesen tiszteletteljes magatartáson túl, melyet az átlag ökon tanúsít irányukban, maguk a mat-ökonok is sok olyan kulturális bélyeget hordoznak, amelyeket más népeknél vallásos rendekkel vagy szektákkal szoktunk asszociálni. Például, olyan szegénységet vállalnak, ami még az ökon színvonalhoz képest is nyomorúságos, és világosan látszik, hogy ezt önként teszik, nem szükségszerűségből. Beszélik, hogy edzésképpen időnként anyaszült meztelenül kiállnak az absztrakció e tájakon uralkodó fagyos szélrohamába. A többi ökonok, akik rendszerint vastag gyapjúruhákba burkolózva járnak, nagyon csodálják őket ezért a szokásukért. További nagyrabecsült tehetségük a *glosszolália* is, az a képességük, hogy ugyanazt a dolgot sok különböző nyelven el tudják mondani.[6]

A mat-ökonok remekmívű, finoman megmunkált moddeleket faragnak walras-csontból. A legjobb mestereik[7] által készített példányokat minden ökonográfus egyhangúlag páratlannak ítéli, mind a nyersanyag, mind a mesteri kidolgozás szempontjából. Ha közülük egyesek még „hasznosak” is — amiről még az ökonok tanúskodása is megoszlik —, az nyilván csak esetlegesen járul hozzá elkészítésük motivációjához.

Az utóbbi években sok vita folyt arról, hogyan minősítsenek egyes ökon moddeleket és a hozzájuk tapadó hittételeket: vallásnak, folklórnak és mitológiának, vagy filozófiának és „tudománynak”, vagy pedig sportnak és játéknak. Mindegyik felfogásnak vannak tekintélyes ökonologista szószólói, de a vita nagyrészt egy helyben topog. A moddelek szertartásszerű használatát, amiről fentebb szóltunk, és az általános ökon kultúra rituális gazdagságát már régen elfogadták a vallási értelmezés bizonyítékául. De egy kommentátor szerint: „Ha ezek vallási meggyőződések is, hit nélküli vallással van dolgunk”. Ez az interpretáció megfeneklett a terminológiai ellentmondáson, és most nem túl népszerű. Érdekesebb azoknak az érvelése, akik úgy tekintenek egyes ökon hitrendszerekre, mint egyfajta kvázi tudományos kozmológiai elméletre. Ezt illusztrálja *Robinson* asszony leírása arról, amit ő *K.-izmusnak* nevez, és ami a Charles folyó menti hatalmas falvakban uralkodik; ez a leírás a régi jón filozófusok vitáira emlékeztet arról, a víz, a levegő vagy a tűz szolgál-e a világmindenség „alapanyagául”. A K.-izmus valóban nagyon hasonlít

[5] C. Lévi-Strauss: *The Savage Mind* említhető meg mint lényeges olvasmány bárkinek, akit komolyan érdekel az ökonok hitvilága.

[6] Mármint különböző matek nyelvjárásokban — az indoeurópai nyelvek nem számítanak.

[7] Az ökonografikák kezdő gyűjtőinek tudniuk kell, hogy a piacon ma található legtöbb műtárgy inasok készítette utánzat. Sokuk mégis magasabbrendű esztétikailag mint, mondjuk, a makrók durván faragott totemje, vagy mint azok a túlméretezett, gépi úton előállított moddelek, amilyeneket mostanában exportálnak az ométerek, akiknek nincsenek felújítható művészeti tradícióik.

Anaximander tanításaira.[8] Tudjuk továbbá, hogy más *tanszokon* az *M.-izmust* is tanítják, de erről még nincs világos beszámolónk és valóban keveset tudunk róla, kivéve hogy a Charles menti ökonok (mint eretnekséget?) ridegen elutasítják.* A kozmológiai nézet szóvivői azzal támasztják alá érvelésüket, hogy rámutatnak a mat-ökonok és a pythagoraszi testvériség között fennálló hasonlóságra. Tudatosan vagy sem, de a mat-ökonok szerintük annak az ősi pythagoraszi elvnek engedelmeskednek, hogy „A filozófiát úgy kell művelni, hogy legmélyebb titkaiba csak a matekban jártas tudós elmék legyenek beavatva."

A sportként és játékként való értelmezés azok miatt a beszámolók miatt kapott lábra, amelyek a *külgáz* kaszt moddel-szertartásairól szóltak.[9] De itt is az derült ki, hogy ha a szertartás tartalmazza is egy játék minden külső megnyilvánulását, a résztvevők számára valamiféle moralitásdráma jellegét ölti fel, amely lényeges vonásokban hat világfelfogásuk alapjaira.

Az ökonok jövője

Felelőtlenül járnánk el az ökon néppel szemben, ha társadalmuknak ezt a rövid bemutatását anélkül fejeznők be, hogy néhány szót szólnánk jövőjükről is. Kilátásaik sivárak. Társadalmi struktúrájukat és kultúrájukat most kell tanulmányozni, míg végleg el nem pusztul. A közvetlen és legsürgetőbb problémáiknak még felületes felsorolása is úgy hangzik, mint a napjaink primitív népeit érő csapások listája.

Szegényen élnek — egy törpe kisebbség kivételével szánalmasan szegényen. Népességük növekedési rátája a világon a legmagasabbak közé tartozik. Földjük gazdag, de öröklött természetes erőforrásaik nagy részét eladták külföldi érdekeltségeknek egy tál lencséért. Szegénységük ellenére még a gazdagabb népek gondjaitól sem mentesek; az utazók elmondják, hogy egyes falvaikat elborítja a fékevesztett moddelgyártás hulladéka, és hogy az egykor idilli tájat eléktelenítik az ométerek találomra vájt kutatóárkai. Mesélik, hogy még híres Ihlet Forrásuk is elszennyeződött.

Az ökonok népe még gondjai közepette is a régi büszke és harcos törzs maradt. Mégsem képesek arra, hogy „alkotó választ" találjanak problémáikra. Világosan látszik, mi vár rájuk, hacsak nem kapnak külső segítséget.

Némi optimizmust táplálhatunk, hogy a nyomor problémája megoldható. A népesség növekedése idővel lassulhat ugyan, de kevés a remény rá, hogy az ökon kultúra széthullása megállítható vagy visszafordítható folyamat. Újból megismétlődik a szomorú és ismert történet, amikor a primitív népek szembekerülnek a modern világgal. A szimptómák listája hosszú, mi csak néhányat érintünk közülük.

Gyöngül az ökonok politikai szervezettsége. Az alapvető politikai egység az int (vagy tansz) marad, benne a politikai hatalmat továbbra is a vének tanácsa gyakorolja. De egy idő óta a vének hatalmának alapjai meginognak. Az ifjú ökonok közt sem dívik jobban a vének iránti tisztelet, mint másutt a világon. Az életkorra és tapasztalatokra alapozott tekintély egyre gyöngül azáltal, hogy az elismert státusz egyre jobban a moddelkészítésben való ügyességhez kötődik. (Mint már említettük, sok vén abbahagyja a moddel-faragást.) Noha az intek felépítésében úgy válaszoltak erre a fejleményre, hogy gyakran egész fiatal moddel-készítőket is kooptáltak a „vének" közé, mégis veszélybe került a politikai rendszer legitim volta az ökonok szemében — és ennek megfelelően csökkent az esély, hogy a törzs problémáira konstruktív politikai választ tudjanak adni.

A fölnőtt ökon valaha az int örökös tagjának tekintette magát. Ez ma már nem áll — az intek közti vándorlás mindennapos, még a falu vénei sem tekintik magukat feltétlenül

[8] ARTHUR KOESTLER: *The Sleepwalkers*, New York, 1968, 22—23. o. jól összegezi Anaximander tanításait: „A mindenség nyersanyaga nem az anyag valamely ismert formája, hanem egy olyan szubsztancia, amelynek a megsemmisíthetetlenségen és örökkévalóságon kívül nincs határozott tulajdonsága. Minden ebből az anyagból képződött és ebbe tér vissza; e világunkat megelőzően számtalan más univerzum is létezett már, és visszaolvadt az amorf tömegbe." Ha ezt a primitív tant modern terminológiával akarnók kitüntetni, akkor Anaximandert a „pöf-pöf, dirr-durr" (putty-putty, bang-bang) kategóriába kellene sorolni.

* Más folyók mentén éppen fordítva. (L. B. S.)

[9] Egy megfigyelő ezt a szertartást maga is a társasjátékok nyelvén önti szavakba: „Minden játékos kap 2 országot, 2 jószágot, 2 tényezőt és egy ún. Bowley dobozt, . . . stb.", és intellektuális igényesség szempontjából a külgáz játékot az ostáblához hasonlítja.

állandó tagoknak. Ha ez a mozgékonyság segíti is őket megküzdeni a nyomor problémáival, a politikai szervezetet nyilván tovább gyengíti. Az urbanizáció rokon problémáját is említhetjük, sok falu már három-négyszer akkora, mint egy-két generációval ezelőtt volt. Jól ismerjük azokat a társadalmi bajokat, amelyeket a nagy városi konglomerátumok az átmeneti lakosok tömegével, valamint az alacsony hatásfokú és gyenge politikai gépezet együttesen előidéznek.

Ilyen körülmények között elidegenedést, irányvesztést és a szellemi értékek általános károsodását várhatjuk. És a valóságban is ezt látjuk. Egy kultúra felbomlásának tipikus intő jele a történelmi tudat elvesztése, és a hagyományok tiszteletének elsorvadása. A primitív társadalmak normális rendjével ellentétben, az ökon papság nem őrzi meg és nem tanítja a törzs történelmét. Egyes ökon falvakban még csak találunk egy-egy vént, aki gondját viseli a törzs egyes rég eltávozott hősei által alkotott moddeleknek, buzgón meséli a hozzájuk fűződő legendákat. De kevés ifjú vagy fölnőtt töri magát, hogy ilyen kósza tündérmesékre figyeljen arról, amit csak durván megmunkált rozsdás öreg ereklyének tekint. A fiatal nemzedék körében ritkán találni valakit, akinek az ökonok történetéről bármi fogalma is lenne. Elvesztvén múltjukat, az ökonok nem bíznak jelenükben, és nincs céljuk, iránytűjük a jövő felé.

Egyes ökonográfusok vitatják a kulturális felbomlásról itt festett szomorú képet, rámutatva, hogy a jelen az ökon művészet fénykora. Valóban szinte minden ökonográfus egyetért abban, hogy a jelenlegi moddel-készítés soha nem látott esztétikai magaslatokat ért el. De kétséges, hogy ez okot ad-e az optimizmusra. Nem ritka dolog, hogy valamilyen speciális művészeti ág egy kultúra hanyatlása közepette is kivirágzik. Lehet hogy épp a társadalom felbomlása készteti kulturális „pótcselekmény”-re a tehetségeket, akik kétségbeesetten küzdenek civilizációjuk hanyatlása ellen. Az ökonok jelenlegi lázas moddel-faragását valószínűleg ebben a megvilágításban kell szemlélnünk.

A X. Magyar Operációkutatási Konferencia

A X. Magyar Operációkutatási Konferenciát a Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai-Közgazdasági Szakosztálya szervezte a Bolyai János Matematikai Társulat Alkalmazott Matematikai és a Neumann János Számítógéptudományi Társaság Operációkutatási Szakosztályainak támogatásával és közreműködésével. A konferenciának a Debreceni Agrártudományi Egyetem adott otthont, szinte a szó legszorosabb értelmében.

Az utóbbi évek operációkutatási konferenciái alapján — a résztvevők és a benyújtott előadások számának számottevő csökkenése miatt — az a vélemény kezdett kialakulni a szervezőkben, mintha visszaesett volna az operációkutatási tevékenység, alábbhagyott volna az érdeklődés a konferenciák iránt. Ennek következtében szóba került az a lehetőség, hogy a jövőben elég lesz kétévenként megrendezni az Operációkutatási Konferenciát. A mostani konferencia azonban rácáfolt ezekre a véleményekre, mivel több mint 400 résztvevő jelent meg, és a benyújtott előadások száma meghaladta a százat. Ezt a nagy érdeklődést és aktivitást csak részben lehet a jubileumi jelleggel magyarázni, inkább arról van szó, hogy a megelőző években a körülmények kedvezőtlen összejátszása miatt érződött visszaesés.

Bevezető előadásában, a jubileum alkalmából, *Prékopa András* átfogó képet adott a hazai operációkutatás fejlődéséről, jelenlegi helyzetéről és visszatekintett az eddigi Operációkutatási Konferenciákra, amelyeknek sorozatát a Bolyai János Matematikai Társulat Alkalmazott Matematikai Szakosztálya indította el, csak később kapcsolódott be a rendezésbe a Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai-Közgazdasági Szakosztálya és a Neumann János Számítógéptudományi Társaság Operációkutatási Szakosztálya. Ez a bekapcsolódás — összhangban az operációkutatás magyarországi elterjedésével — kitágította a konferenciák kereteit, mivel egyre nagyobb mértékben vonta be a matematikai módszereket alkalmazó közgazdászokat és a számítástechnika szakembereit.

A benyújtott előadások jól érzékeltették az operációkutatás elterjedtségét, mivel az elméleti, módszertani kérdésektől a különböző módszerek rendkívül széles körű gyakorlati alkalmazásán keresztül a nélkülözhetetlen számítástechnikai területekig minden megtalálható volt, nem kis feladatot adva a programbizottságnak, amely végül is négy szekcióba sorolta be az előadásokat.

Az elméleti-módszertani előadások között két előadás is foglalkozott az ún. Hacsian-algoritmussal, amely egy ellipszoid sorozatot konstruál, melynek térfogata exponenciális gyorsasággal csökken és segítségével polinomiális gyorsasággal lehet megoldani a lineáris programozás alapfeladatát. Ugyancsak két előadásban is szóba kerültek a spline-függvények, amelyek segítségével az eredetileg éves, rövid idősorok „negyedévenként becsült éves" idősorokká bővíthetők, tehát elegendő elem-számú idősorok készíthetők úgy, hogy az eredeti idősorok közötti összefüggések továbbra is fennállnak, és az idősor-rendszer szabadságfoka nem növekszik. Egy másik előadás azt vizsgálta, hogy mikor efficiens a többszempontú optimalizálási modellekben levő programozási feladatok optimális megoldása. Figyelemre méltó volt az az előadás is, amelyben a célfüggvény együtthatóit valószínűségi változókként kezelték és ismertették a feladat egy közelítő megoldását. A felsorolt példák nem adnak teljes képet az elhangzott elméleti-módszertani előadásokról, sőt talán még nem is a legjelentősebbek, de jól szemléltetik azt a szerteágazó tevékenységet, amely a különböző igényeket próbálja meg kilégíteni, vagy újabb módszereket igyekszik bevonni az operációkutatás körébe.

A konferencián elhangzott előadások zöme az operációkutatás gyakorlati alkalmazásairól szólt. Szinte nincs sem az operációkutatásnak olyan módszere, sem a gazdasági életnek olyan területe, ami hiányzott volna a konferencia programjából. Több előadás foglalkozott a lineáris programozás alkalmazásával különböző területeken, mint pl. a villamosenergia-rendszer napi menetrendjének meghatározása, úttervezés, síküveg méretre szabása stb. Külön figyelmet érdemel — már nagysága miatt is — a villamosenergia-rendszerrel foglalkozó lineáris vegyes egészértékű feladat, amely maximálisan 2000 feltételt és 900 folytonos, valamint 450 diszkrét (0, 1 értékű) változót tartalmaz. Nem maradtak ki az egyéb optimalizációs módszerek, közöttük a készletgazdálkodási problémák sem, sőt az egyik előadás a könyvtárnyira rugó készletgazdálkodási modell elemzésére és rendszerezésére vállalkozott.

A gazdasági életben egyre több az olyan feladat, amelynél sok a bizonytalanság, jelentős a bizonytalan tényezők száma. Ezeken a területeken — a megfelelő számítástechnikai háttér kialakításának függvényében — jelentős eredményeket lehet elérni szimulációs módszerekkel. Ezeknek a módszereknek a hazai elterjedése jól nyomon követhető az operációkutatási konferenciák programjában. A mostani konferencián már szép számmal szerepeltek olyan előadások, amelyeknek témája a szimulációs módszerek alkalmazása volt. (Pl.: vállalatközi termékforgalom meghatározása, vállalati stratégia kialakítása, a népgazdaság és a külkereskedelem kapcsolatának vizsgálata, fakitermelési folyamatok programozása stb.)

A vállalati és az ágazati feladatok mellett olyan makro-szintű témákról is tartottak előadásokat, mint a matematikai-közgazdaságtan klasszikus modelljei, a Neumann-modell és a Leontieff-modell. Az egyik előadás pl. azt bizonyította be, hogy a dinamikus Leontief-modell abban az esetben is vezérelhető, ha a tőkekoefficiensek mátrixa szinguláris.

Az elhangzott előadások között sok foglalkozott az operációkutatási és a számítástechnikai módszerek mezőgazdasági alkalmazásával. Ez egyrészt azzal függött össze, hogy a házigazda, a Debreceni Agrártudományi Egyetem, jelentős szervező munkát is végzett, másrészt azzal, hogy az utóbbi években az operációkutatás legdinamikusabban a mezőgazdaságban terjedt és a gyakorlati alkalmazásoknak jelentős eredményei voltak.

A számítástechnika területéről származó előadások is szép eredményekről számoltak be. Az egyik előadás a diszkrét programozási feladatok megoldásánál használható heurisztikus programrendszereket, egy másik az R 10-es számítógépen működő, lineáris programozási feladatokat interaktív üzemmódban megoldó programcsomagot ismertetett; egy további a termelésirányítás folyamatának számítógépes modelljéről szólt. Figyelmet érdemelt az az előadás is, amelyik a mezőgazdasági termelőszövetkezetek információs rendszerének szervezéséről adott tájékoztatást, és az is, amelyik a közismert Danzig—Wolfe dekompozíciós eljárás számítógépes megvalósításáról számolt be.

Nyilvánvaló, hogy egy rövid beszámoló megközelítőleg sem tud teljes képet adni egy konferenciáról, célja csak az lehet, hogy felhívja a figyelmet, felkeltse az érdeklődést néhány kiragadott példa segítségével.

A Konferencia a záró plenáris ülésen ajánlásokat fogadott el, amelyekben a további teendőket körvonalazták és elhatározták, hogy az elkövetkező évek operációkutatási konferenciáira a természettudomány különböző területein tevékenykedő operációkutatókat is meg kell hívni.

Ormós Zsolt

Optima – COAL*

OPTIMA (A Matematikai Programozási Társaság Híradója).

A Matematikai Programozási Társaság az elmúlt években többirányú erőfeszítést tett tevékenységi köre kiszélesítésére. Az informális kommunikáció kiterjesztése érdekében végül is a Társaság úgy döntött, hogy OPTIMA címmel egy önálló Híradót jelentet meg.

Az OPTIMA szerkesztését *Donald W. Hearn* vállalta. A kiadó: Mathematical Programming Society és a College of Engineering, University of Florida, 303 Weil Hall, Hainesville, FL 32610.

D. Hearn szerkesztői cikke szerint az OPTIMA célja, hogy a tagság fóruma legyen, címjegyzék formájában tájékoztatást adjon a folyó kutatásokról, ismertesse a tagságot érintő szakmai rendezvények adatait, a Társaság tagjaival kapcsolatos fontosabb híreket stb. Minden számban megjelenik egy szélesebb kört érintő összefoglaló cikk is a matematikai programozás módszertani területeiről, fontosabb irányairól, perspektíváiról, aktuális kutatásokról vagy a kezdeti időszak eredményeiről. A rovatok az előzetes tervek szerint a következők:

— az elnök rovata
— konferencia naptár
— kutatási jelentések címjegyzéke
— levelek a szerkesztőnek
— hírek az COAL-ról
— rövid hírek.

A szerkesztőség érdeklődéssel vár az OPTIMA tartalmára vonatkozó minden további javaslatot, tájékoztatásokat a tervezett rendezvényekről és kéri a tagság közreműködését a színvonal biztosításában.

Az első szám szakmai cikke *Philip Wolfe* tollából származik. "The Ellipsoid Algorithm" címmel ad összefoglaló áttekintést a *Shor, Yudin, Nemirovsky, Khachian, Gács, Lovász* kutatási vonal és követőik eredményeiről, az ezekkel kapcsolatos számítástechnikai tapasztalatokról és a témakörbe tartozó alapvető fontosságú publikációkról. Valamenynyien tudjuk, hogy a matematikának ezek az új eredményei a közvéleményben nagy izgalmat keltettek, az új elméleti megoldások új irányokat szabnak a lineáris programozásban és valószínűleg jól használhatókká válnak a nem lineáris programozás terén is. Valószínűleg nem nagyon túlzott a New York Times, amikor a történetében először az első oldalon megjelent matematikai tárgyú cikk ezekkel az eredményekkel foglalkozott 1979. november 7-én „Egy szovjet felfedezés megrengeti a matematika világát" címmel.

Az 1980. júniusi számban rövid összefoglalót olvashattunk az Optima létrehozásáról, a Coal tevékenységéről *(Karla Hoffman)*, a SIAM-mal (Society of Industrial and Applied Mathematics) közösen alapított George B. Dantzig díjról. 11 egyetem közli a tárgyban illetékes tanszékek kutatási jelentéseinek címjegyzékét, tájékoztatást kaptunk egy sor 1980., 1981. és 1982. évi rendezvényről és néhány személyi vonatkozású eseményről.

Úgy vélem, hogy az OPTIMA sok szempontból nagyon hasznos lesz a magyar szakemberek számára is, a benne szereplő alapinformációk a kutatóknak jó segítséget nyújtanak kapcsolataik kialakításához, a szakterületen folyó munkákban és eredményekben való tájékozódáshoz.

* A tájékoztatást az Optima 1980. júniusi első száma alapján állítottuk össze.

COAL (Comittee on Algorithms)

A COAL a matematikai programozás szempontjából fontos gyakorlati kérdésekkel foglalkozik, ezért tartjuk célszerűnek röviden ismertetni tevékenységét K. *Hoffman* cikke alapján.

A számítástechnika gyakran felhasználható a matematikai programozási algoritmusok kiértékelésére annak ellenére, hogy a tesztelések módszertanának kidolgozása még nem történt meg. Ezzel a problémakörrel foglalkozik a COAL, amelynek fő céljai a következők:

1. módszerek kidolgozása a számítógépes feldolgozással kapott eredmények kiértékelésére.

2. Programfejlesztők támogatása elsősorban olyan esetekben, amikor közreadott programjaik megfelelnek a portabilitás egyes követelményeinek, jól teszteltek, könnyen kezelhetők és jól dokumentálhatók.

3. Információk gyűjtése és közreadása általános számítási igényeket kielégítő számítógépi programokról, illetve olyanokról, amelyek teszt feladatokhoz vagy teszt feladatok generálásához jól felhasználhatók.

Megalakulása — 1973 — óta a Bizottság sok munkát végzett. A számítástechnikai feldolgozási kísérletek eredményeiről való tájékoztatás módjának fő vonalairól a COAL tagjai a Mathematical Programming, a JORSA és a Transaction on Mathematical Software hasábjain számoltak be.

A COAL a Mathematical Programming Society, az IFAC, az EURO, az Institute for Management Science és az Amerikai Operációkutatási Társaság konferenciáin rendszeresen szekcióüléseket szervezett és szervez az elért eredmények bemutatására. Az elkövetkezendő hónapokban Dr. K. *Ragsdell* szerkesztésében kérdőívet adnak közre a nem lineáris programozás területén kidolgozott jól felhasználható softwarrel kapcsolatosan, ami a COAL matematikai programozási katalógusa kialakításához az első lépés. A katalógus megfelelően kódolt információkat fog tartalmazni az alkalmazott módszerről (algoritmusiról), annak irodalmi referenciáiról, kidolgozóiról és a software esetleges szolgáltatójáról.

A Bzottság Karla *Hoffman* szerkesztésében évente kétszer egy „Híradót" is megjelentet, amelynek célja a területen kialakult gondolatok nemzetközi cseréjének elősegítése, tájékoztatás az elvégzett software tesztek eredményeiről, új software termékek kidolgozásának bejelentése, valamint a szakterülettel foglalkozó nemzetközi tudományos összejövetelek előrejelzése.

A Bizottság végső soron egy nagyon jelentős kérdéssel foglalkozó kis csoport, amely munkáját csak úgy végezheti sikeresen, ha a matematikai programozással foglalkozó közösség megfelelően támogatja.

Pongrácz Tibor

TISZTÚJÍTÓ KÖZGYŰLÉS AZ MKT MATEMATIKAI-KÖZGAZDASÁGI SZAKOSZTÁLYÁBAN

A Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai-Közgazdasági Szakosztálya 1981. június 11-én tartotta tisztújító közgyűlését a Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetemen. A napirendi pontok a következők voltak:

1. Elnöki beszámoló (*Szép Jenő*)
2. Az előző vezetőség felmentése, új vezetőség és küldöttek választása
3. Gondolatok a társadalmi-gazdasági kockázatról (*Meszéna György*).

Az Elnöki beszámoló röviden összefoglalta a Szakosztály elmúlt 5 évben folytatott tevékenységét. Külön kiemelte az ezen idő alatt két ízben megrendezett országos (pécsi és debreceni) operációkutatási konferenciát, melynek sikere a Szakosztály eredményes munkáját igazolta.

Negyedik éve folyamatosan rendez a Szakosztály új kezdeményezésként félévenként Salgótarjánban szakértői „kis" konferenciákat. Az indulástól ezideig az alábbi témakörökben rendeztünk — esetenként 30—40 fővel — előadásokkal, de legfőképpen vitaalkalom teremtésével ilyen szakértői konferenciát (zárójelben a szervező neve):

1. A fogyasztás matematikai modellezése (1978. május, *Szakolczai György*)
2. Hatékonyság mérése a nemzetközi cserénél (1978. november, *Szakolczai György*)
3. A magyarországi ökonometriai modellekről (1979. június, *Szakolczai György*)
4. A beruházási tevékenység kvantitatív elemzése (1980. március, *Meszéna György*)
5. Matematikai rendszerelmélet (1980. május, *Szép Jenő*)
6. Számítógépes vállalati információs rendszer-szervezés (1980. október, *Kiss Imre*)
7. Magyar—osztrák algebrista találkozó (1981. április, *Szép Jenő*)

E kis konferenciák szakmai tapasztalatai igen jók voltak, a megrendezésüket a továbbiakban is folytatjuk.

A beszámoló ezután sorba vette a Szakosztály további tevékenységeit, majd néhány önkritikus megállapítás után kérte a jelenlevőket, hogy mind a vitában való részvételükkel, mind pedig minél aktívabb bekapcsolódással a Szakosztály tevékenységébe, segítsék elő annak munkáját.

A közgyűlés ezután az előző vezetőséget felmentette megbízatása alól, majd a jelölő bizottság nevében *Martos Béla* előterjesztette a bizottság javaslatait az új vezetőségre, illetve a küldöttek személyére, akik a Társaság küldöttközgyűlésén a Szakosztályt képviselik. A 20 főből álló vezetőségre a javaslat 25 jelöltet tartalmazott s ezek közül a legtöbb szavazatot kapott jelöltek kerültek be ténylegesen a vezetőségbe. A 20 küldöttre a javaslatot a közgyűlés megszavazta.

A Szakosztály új vezetősége:

Augusztinovics Mária (alelnök)
Bod Péter
Csepinszky Andor
Éltető Ödön
Forgó Ferenc
Halabuk László
Kornai János
Kovács Álmos
Ligeti István
Meszéna György (elnök)
Mikó Gyula
Ormós Zsolt (titkár)
Simonné, Mosolygó Nóra
Simonovits András
Sólyom Csaba (titkárhelyettes)
Szakolczai György
Szép Jenő
Tóth József
Zalai Ernő
Ziermann Margit

Amíg a szavazatok összeszámlálása folyt, a közgyűlés résztvevői *Meszéna György* jó humorú előadását hallhatták a társadalmi-gazdasági kockázatról.

Az új vezetőség első ülésén a fentiek szerint választotta meg a Szakosztály tisztségviselőit.

Az NJSZT Operációkutatási Szakosztályának vezetőségválasztó közgyűlése

Az NJSZT Operációkutatási Szakosztálya 1980. október 29-én tartotta vezetőségének újraválasztását a Kossuth klubban. A közgyűlésen Dr. *Szelezsán* János az NJSZT főtitkár-helyettese elnökölt. Első napirendi pontként a leköszönő elnökség nevében Dr. *Pongrácz* Tibor összefoglalta a szakosztály elmúlt öt évi tevékenységét. Beszámolójában kiemelte az évente mintegy 3—400 résztvevő közreműködésével megrendezett operációkutatási konferenciák jelentőségét, amelyeken rendszeresen 50—80 előadás hangzik el, jó áttekintést nyújt a szakterületen elért hazai tudományos eredményekről, a gyakorlati alkalmazások fejlődéséről. Az éves operációkutatási konferenciák a társasági élet szempontjából is rendkívül fontosak, hiszen lehetőséget biztosítanak arra, hogy szoros kapcsolatok alakuljanak ki az operációkutatással foglalkozó szakemberek között. A rendszeres találkozások alkalmat adnak arra is, hogy megismerjük a fiatal szakembereket, fórumot kínálván tevékenységük ismertetésére. Mindez azt eredményezi, hogy évente legalább egy héten át az operációkutatók pozitív értelemben vett igazi klubéletet élnek. A szakosztály egyéb tevékenységei között az előadó kiemelte az évente 3—4 alkalommal megrendezett félnapos ankétokat, az egyedi előadásokat és a szakosztály oktatási tevékenységét.

Ezután Dr. *Fílep* György tartott előadást „A hazai operációkutatási feladatok az 1980-as évek első felében" címmel. Előadásában röviden összefoglalta az elmúlt húsz évben folytatott operációkutatási tevékenységet, kiemelte ennek pozitívumait és gyengeségeit. Előadása második felében az elkövetkező évek operációkutatási feladatait, illetve az operációkutatókkal kapcsolatos elvárásokat foglalta össze, szoros kapcsolatban a népgazdaság előtt álló feladatokkal és problémákkal. Utalt a fejlett információs rendszerek és az operációkutatási tevékenység egymásra épülésének fontosságára, a szabályozó rendszer operációkutatási módszerekkel történő elemzésének szükségességére. Megállapította, hogy viszonylagos elmaradás van a rövid távú tervezésben, előrejelzésben és elemzésben, nem is szólva a hosszabb távú tervezés gondjairól. Jogosan kifogásolta, hogy a hazai operációkutatás nem foglalkozott kellő súllyal a munkaerő és az életszínvonal tervezésével, továbbá a kulturális és szociális infrastruktúrával, az urbanisztikával, az oktatás, a kultúra, a tudomány, az egészségügy, az államigazgatás témájával, általában a társadalmi tervezéssel, holott ezek a kérdések az utóbbi években jelentős helyet foglalnak el külföldi szakfolyóiratokban. Kifejtette, hogy az operációkutatásnak problémaorientált szemléletűnek kell lennie. Mindezek érdekében jelentős tevékenységet fejthet ki egy olyan nyitott és demokratikus társadalmi szervezet, mint az NJSZT Operációkutatási Szakosztálya.

Utolsó napirendi pontként a közgyűlés megválasztotta az új vezetőséget. A szakosztály vezetőségi tagjai és tisztségviselői a következők: *Blitzer* Éva (OSZV), *Bod* Péter (MTA Mat. Kut. Int.), *Bogárdi* István (Bányászati Fejl. Int.), *Elek* Györgyné (SZÁMKI), *Fílep* György (OVK), *Jándy* Géza (BME), *Krekó* Béla ifj. (OT SZK), *Lugosi* Gábor (SZIM), *Maros* István (SZÁMKI), *Móczár* József (MKKE) titkár, *Németh* Károly (HM), *Pongrácz* Tibor (ÁNH) elnök, *Stahl* János (SZÁMKI) titkár, *Tánczos* Lászlóné (BME), *Toldi* Miklós (ELGAV), *Tóth* József (Agrártudományi E. Debrecen), *Török* Tamás (BME), *Várhelyi* András (TIT).

A megválasztott új vezetőség összetételében tükrözi azt a célt, hogy a népgazdaság minél több ágazatában munkálkodó operációkutatók segítsék az NJSZT munkáját. A tagság így lát lehetőséget a szakosztályi vezetés problémaérzékenységének javítására.

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója
Műszaki szerkesztő: Marton Andor
A kézirat nyomdába érkezett: 1981. II. 20. Terjedelem: 9,8 (A/5) ív
81.9355 Akadémiai Nyomda, Budapest – Felelős vezető: Bernát György

CONTENTS

CONCEPTS AND METHODS

BORROWED QUILLS

BOOK REVIEWS

SCIENTIFIC LIFE

СОДЕРЖАНИЕ

ПОНЯТИЯ И МЕТОДЫ

СО СТРАНИЦ ЗАРУБЕЖНЫХ ЖУРНАЛОВ

О КНИГАХ

НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ

Ára: 20,—Ft.
Előfizetés egy évre: 80,—Ft.

INDEX: 26793
ISSN 0039—8128

TARTALOM

FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK

IDEGEN TOLLAK

KÖNYVEKRŐL

TUDOMÁNYOS ÉLET

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST