SZIGMA

Matematikai közgazdasági folyóirat

A Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai-Közgazdasági Szakosztályának lapja

*

E szám szerzői:

Bod Péter, a közgazdaságtudományok doktora, az MTA Matematikai Kutató Intézet tudományos tanácsadója, Chikán Attila, kandidátus, a MKKE docense, Drechsler László, a közgazdaságtudományok doktora, az Országos Tervhivatal Tervgazdasági Intézetének igazgatóhelyettese, Hablicsek László, a Népességtudományi Kutató Intézet tudományos titkára, Medvegyev Péter, az Országos Vezetőképző Központ oktató-kutatója, Stahl János, kandidátus, a SZÁMALK tudományos tanácsadója, osztályvezető, Temesi József, a MKKE adjunktusa, Zalai Ernő, kandidátus, a MKKE docense

Szerkesztőség: Budapest XI., Budaörsi út 43–45.

Levélcím: 1502 Budapest, Pf. 262.

Terjeszti a Magyar Posta. Előfizethető bármely postahivatalnál, a kézbesítőknél a Posta hírlapüzleteiben és a Posta Központi Hírlap Irodáknál (PKHI 1900 Budapest, József nádor tér 1.) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a PKHI 215–96 162 pénzforgalmi jelzőszámára. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76 sz. alatti hírlapboltban

Előfizethető és példányonként megvásárolható: az AKADÉMIAI KIADÓ-nál, 1363 Budapest, Alkotmány u. 21. Telefon 111-010. Pénzforgalmi jelzőszámunk: 215–11488, és az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLT-ban, 1368 Budapest, Váci u. 22. Telefon: 185-612. Előfizetés díj egy évre: 80, –Ft

Külföldön terjeszti a KULTURA Külkereskedelmi Vállalat, H-1389 Budapest. Pf. 149

Bod Péter

A nyílt, statikus input-output modell nem-lineáris általánosításairól

W. Leontief nyílt, statikus input-output modellje kétségtelenül a matematikai közgazdaságtan egyik legtöbbet tárgyalt, legtöbbet vitatott és ugyanakkor legszélesebb körben alkalmazott eszköze. Eredeti formájában a modell lineáris. Természetes ezért, hogy nem lineáris általánosítására sok kísérletet tettek.

Ebben a cikkben egy korábbi [1] tanulmányunk szemléletmódját követve áttekintjük az e téren elért fontosabb eredményeket. Ezeknek az összefüggéseknek egy része az irodalomból tehát ismert; de tárgyalásuk nem egységes. A következőkben főként matematikai programozási eszközökkel fogunk dolgozni felhasználva az ún. indifferens programozás és a „minimális elemmel" rendelkező halmazok elméletét. Általánosítjuk az [1] tanulmányban leírtakat, és néhány újabb összefüggésre hívjuk fel a figyelmet.

A tárgyalás során fokozatosan léptetjük be a bizonyításokhoz szükséges feltételezéseket. Ezek részben közgazdasági megfontolásokon nyugvó feltevések lesznek, részben technikai jellegűek, amelyeket a megfelelő matematikai apparátus kíván. A nem teljesen kézenfekvő fogalmakat definiáljuk és a modell tulajdonságait tételek formájában mondjuk ki. Utalunk a fontosabb irodalmi előzményekre.

A vizsgálat tárgya, alapfogalmak, előzmények

Egy Leontief típusú gazdaságot vizsgálunk. Vagyis tekintünk egy n homogén szektorból álló, külkereskedelmi kapcsolatokkal nem rendelkező gazdaságot, amelyben minden szektor a rá jellemző egyetlen használati értéket állít elő, egyetlen technológiával. A szektorok termelésük megvalósításához felhasználnak saját és más szektorok kibocsátásaiból. A vizsgálat célja: az ágazatok bruttó kibocsátásai és a rendszer végső kibocsátásai közötti kapcsolatok számszerűsítése. Ennek érdekében az alábbi fogalmakat, illetve jelöléseket vezetjük be:

$$\textit{Az ágazatok bruttó kibocsátásai:}\ x = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_n \end{bmatrix} \in R^n$$

$$\textit{A rendszer végső kibocsátása: } y = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \eta_n \end{bmatrix} \in R^n.$$

Az elemi ráfordítások mátrixa: $X = [X_{ij}] \in R^{n \times n}$ ahol X_{ij} megmutatja, hogy a j-ik ágazat mennyi terméket használ fel az i-ik ágazat kibocsátásából.

A fentiekben bevezetett fogalmak egymásközötti kapcsolatát a következő definíciós azonossággal írjuk le:

$$x - X \cdot \mathbf{1} = y. \tag{1}$$

Vagyis a rendszer végső kibocsátását úgy definiáljuk, mint az ágazatok bruttó kibocsátásának és a megvalósításához eszközölt ráfordításoknak a különbségét.

Ez a definíció azonban még annyiban hiányos, hogy önmagában nem biztosítja a benne szereplő mennyiségek közgazdasági értelemben is normális viselkedését. Nyilvánvaló ugyanis, hogy olyan mennyiségek mint bruttó kibocsátás, végső felhasználás vagy ráfordítások nem lehetnek negatívak. Vagyis (1) korrektebbül így fest:

$$\begin{aligned} x - X \cdot \mathbf{1} &= y \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ X_{ij} &\geq 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned} \tag{2}$$

(2) már nem az a triviális azonosság, mint (1): hiszen minden további feltevés nélkül egyáltalában nem kézenfekvő, hogy akármilyen $x \geq 0$ bruttó termeléshez létezik (2)-t kielégítő (t.i. nem-negatív) végső kibocsátás és még kevésbé biztos, hogy tetszőlegesen előírt $y \geq 0$ végső felhasználáshoz található olyan nem-negatív bruttó kibocsátás, amely azt megvalósítja.

Hogy a (2) alatt megfogalmazott modellel kapcsolatban bármiféle érdemleges megállapításokat tehessünk: feltételezésekre van szükség az elemi ráfordítások viselkedéséről. Az elemi ráfordítások nyilván bizonyos függvények; csak az a kérdés, hogy mit célszerű e függvények argumentumának választani. Az irodalomban ennek a kérdésnek két megközelítése található: egy egyszerűbb és egy összetettebb. Az első Leontieftől ered, aki abból indult ki, hogy minden ágazatban, valamennyi ráfordítás kizárólag a felhasználó ágazat tevékenységének a mértékétől függ. Vagyis:

$$X_{ij} = X_{ij}(\xi_j) \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

Ha ezt tesszük fel: közvetlenül értelmezhetők az egységnyi ágazati kibocsátáshoz szükséges (fajlagos) ráfordítások:

$$a_{ij}(\xi_j) = \frac{X_{ij}(\xi)_j}{\xi_j}.$$

Leontief eredetileg éppen azt tételezte fel, hogy a fajlagos ráfordítások állandóak:

$$a_{ij}(\xi_j) = a_{ij},$$

pontosabban: nem függnek a felhasználó ágazat tevékenységének a mértékétől. Ilyen körülmények között az elemi ráfordítási függvények egyváltozós lineáris függvények és a (2) alatti egyenletekben lineáris formák állnak.

A lineáris modell legkézenfekvőbb nem-lineáris általánosítása egyszerűen ennek az utóbbi feltevésnek a feloldásából áll. Ekkor a közismert

$$[E - A]x = y$$

összefüggés helyett az

$$[E - A(x)]x = y$$

egyenlettel van dolgunk, ahol

$$A(x) = [a_{ij}(\xi_j)].$$

A modell minden egyenlete most

$$\xi_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\xi_j) \cdot \xi_j = \eta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

alakú nem-lineáris, de mindenesetre szeparálható függvényeket tartalmaz: hiszen az elemi ráfordításfüggvények továbbra is egyváltozósak.

Érdemes talán a téma történetéhez megjegyezni, hogy Evans már 1954-ben, az első nemzetközi input-output konferencián *Input-Output Computations* [3] című előadásában a modellt nem-lineáris formában mutatta be, de alapjában ez a szeparábilis forma lebegett a szeme előtt. Hasonló keretben vizsgálták a modell nem-lineáris kiterjesztését Nataf [8], Bod [1], [2] és Sandberg [9].

Lehet a kérdést azonban bonyolultabb keretben is nézni. Ezt tette bizonyos fokig már Evans is, majd különösen Tamir [10]. Később Lahiri [4] majd Lahiri és Pyatt [5], akik az első Lahiri cikk bizonyos hibáit helyesbítették.

Ebben a szélesebb keretben az elemi ráfordítási függvények n változós nem-lineáris függvények. Ez a megközelítés általánosabb. Nemcsak azért, mert speciális esetként tartalmazza a korábbit; hanem főleg azért, mert lehetővé teszi ún. externalitások, tehát a különböző ágazatok technológiáira más ágazatok fejlődéséből származó hatások figyelembevételét. *Tamir* modellje $F(x) = y$ alakú, ahol

$$F(x) = x - X(x) \cdot 1.$$

Ezzel szemben *Lahiri* az $[E - A(x)]x = y$ alakból indul ki, ahol

$$A(x) = X(x) \cdot \langle x \rangle^{-1}.$$

Ennek megfelelően Tamir az $F(x)$ leképezés, Lahiri, valamint Lahiri és Pyatt az $A(x) \cdot (x)$, illetve az $1^T A(x)$ leképezések bizonyos közgazdaságilag indokolható tulajdonságait tételezik fel.

Milyen feltételek mellett oldható meg a modell?

A továbbiakban az általános – tehát nem szeparábilis – modellt vizsgáljuk. Két alapfeltevést vezetünk be, amelyeket végig érvényeseknek tekintünk. Ezek az elemi ráfordítás-függvényeket és az ezekből képzett népgazdasági ráfordításfüggvényt jellemzik.

Népgazdasági ráfordításfüggvénynek nevezzük azt a vektorértékű függvényt, amelynek komponensei megmutatják, hogy az egyes ágazatok kibocsátásaiból mekkora felhasználás szükséges valamilyen x bruttó kibocsátás megvalósításához:

$$G(x) = \begin{bmatrix} G_1(x) \\ G_2(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ G_n(x) \end{bmatrix} = X(x) \cdot 1 = A(x) \cdot x \in R^n .$$

A népgazdasági ráfordításfüggvény segítségével kifejezhető a népgazdaság termelési függvénye:

$$F(x) = \begin{bmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_n(x) \end{bmatrix} = x - G(x) \in R^n.$$

Fenti jelölésekkel modellünk

(3) $$F(x) = y$$

alakban írható fel.

Használni fogjuk majd a következő fogalmakat:

1. *definíció:* Az $F(x) : R^n \to R^m$ leképezést *izotónnak* mondjuk, ha

$$x^1 \geq x^2 \Rightarrow F(x^1) \geq F(x^2).$$

2. *definíció:* Az $F(x) : R^n \to R^m$ leképezést *inverz izotónnak* mondjuk, ha

$$F(x^1) \geq F(x^2) \Rightarrow x^1 \geq x^2.$$

3. *definíció:* Az $F(x) : R^n_+ \to R^n$ leképezést *diagonálison kívül* antitón leképezésnek mondjuk, ha valamennyi

$$F_{ij}(\tau) = F_i(x + \tau e_j) \qquad i \neq j$$

függvény $\tau \geq 0$ növekedésével nem növekszik.

1. *alapfeltevés:* Az elemi ráfordításfüggvények R^n_+-on vannak értelmezve úgy, hogy

$$X_{ij}(x)\ \forall\ i, j\text{-re folytonos } R^n_+ \text{ belsejében}$$
$$X_{ij}(0) = 0\ \forall\ i, j\text{-re}$$
$$X_{ij}(x) \geq 0\ \forall\ i, j\text{-re, ha } |x| > 0.$$

2. *alapfeltevés:* A $G(x)$ leképezés izotón.

Az 1AF. szerint a semmit-termelés nem igényel ráfordítást, a valamit-termelés nem-negatív ráfordításokkal jár. A folytonosságot csak a nem-negatív ortáns belsejében kívánjuk meg és ez lehetővé teszi ún. fix-költségek jelentkezését is.[1]

A 2AF. értelmében nagyobb társadalmi termelés minden ágazat termeléséből többet emészt fel, mint valamely kisebb. Vegyük észre, hogy nem kívánunk izotonitást az elemi ráfordításfüggvényektől.

A $G(x)$ függvény ezen tulajdonságának a továbbiak szempontjából döntő jelentősége van. Nem gyengíthető, ha azt akarjuk, hogy a megoldhatósággal kapcsolatban pozitív eredményeink legyenek. Evans óta minden vizsgálatban feltették a ráfordítások izotonitását. Az input-output statisztikák idősoraiban néha előfordul, hogy a bruttó kibocsátás ágazatonként nő egyik évről a másikra, de a ráfordításfüggvény értéke nem minden ágazatban növekedett. Ez a jelenség — amely egyébként ritka — nem cáfolja 2AF. létjogosultságát. Az input-output statisztikák nem-homogén szektorok tevékenységét mérik és a jelzett „anomália" a szektorokon belüli termelési struktúra megváltozásával függ össze. Az elméleti tárgyalás homogenitást tételez fel — ennyiben persze elvonatkoztat a valóságtól, ahol a homogenitás valójában — akármilyen szektorbontást is alkalmazunk — soha nem érvényesül maradéktalanul.

Az alapfeltevések következtében érvényes az

1. *tétel:* $F(x)$ folytonos és diagonálison kívül antiton.[2]

$F(x)$ az elemi ráfordításfüggvények folytonos függvénye és így 1AF. értelmében maga is folytonos a nem-negatív ortáns belsejében. Tekintsük a leképezést alkotó egyik függvényt $F_i(x)$-t az $x \geq 0$ és az $x + \tau e_j$ pontokban. Minthogy $x + \tau e_j \geq x$ és $G_i(x)$ izotón, ezért $G_i(x + \tau e_j) \geq G_i(x)$. Következésként:

$$F_i(x + \tau e_j) = \xi_i - G_i(x + \tau e_j) \leq \xi_i - G_i(x) = F_i(x).$$

A kérdés már most az, hogy ilyen tulajdonságú termelési függvény mellett milyen körülmények között képes a modellel jellemzett gazdaság pozitív végső felhasználást biztosítani, illetve képes-e előírt nagyságú és összetételű végső felhasználást biztosítani.

Nyilvánvaló, hogy erre csak ún. működésképes gazdaság lehet képes.

[1] A ráfordítási függvények folytonosságát mindenki felteszi. Az eltérések csak abban vannak, hogy az elemi ráfordításfüggvényekre mondják-e ki a folytonosságot, vagy csak az összevont alakra, ami cikkünkben a $G(x)$ függvény.

[2] Ez a megállapítás először *Tamir*nál jelenik meg.

4. *definíció:* Egy a modellel jellemzett gazdaságot működőképesnek mondunk, ha $\exists\, \bar{x} \geq 0$, úgy hogy $F(\bar{x}) > 0$.

Ismeretes, hogy lineáris esetben a gazdaság működőképessége nem csak szükséges, de elégséges feltétele is annak, hogy a fenti kérdésre pozitív választ lehessen adni. Nem lineáris esetben nem ez a helyzet. Ezért itt megkülönböztetünk elérhető és nem elérhető végső kibocsátást.

5. *definíció:* Egy működőképes gazdaságban *elérhetőnek nevezzük az* $\bar{y} > 0$ végső kibocsátást, ha

$$L_{\bar{y}} = \{x \in R^n_+ \mid F(x) \geq \bar{y}\} \neq \emptyset.$$

A felvetett kérdésre az $L_{\bar{y}}$ halmaz vizsgálata révén nyerünk választ.

2. *tétel:* Az $L_{\bar{y}} \neq \emptyset$ halmaz zárt a $x^0 = x^1 \cap x^2$ vektorműveletre, ahol x^1; $x^2 \in R^n_+$ és $\xi^0_i = \min\,[\xi^1_i;\, \xi^2_i]\ \forall i$-re.

Legyen $x^1; x^2 \in L_{\bar{y}}$. Mivel $x^1 \geq 0$; $x^2 \geq 0 \Rightarrow x^0 = x^1 \cap x^2 \geq 0$. Nyilván $x^0 \leq x^1$ és $x^0 \leq x^2$, ezért

$$G(x^0) \leq G(x^1) \text{ és } G(x^0) \leq G(x^2)$$

Belátjuk, hogy x^0 minden feltételt kielégít. Tekintsük $F_i(x^0)$-t.
Ha $\xi^0_i = \xi^1_i$, akkor $F_i(x^0) = \xi^0_i - G_i(x^0) \geq \xi^1_i - G_i(x^1) \geq \eta_i$.
Ha $\xi^0_i = \xi^2_i$, akkor $F_i(x^0) = \xi^0_i - G_i(x^0) \geq \xi^2_i - G_i(x^2) \geq \eta_i$.
Tehát $x^0 \in L_{\bar{y}}$.
Felhasználjuk az alábbi tényt:

1. *segédtétel:* Ha a nem üres $H \subset R^n$ kompakt halmaz zárt a $\cap$ vektorműveletre: létezik legkisebb eleme.[3]

Tekintsük a következő szélsőértékfeladatokat:

$$\xi_i \to \min$$
$$x \in H \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Mivel H kompakt és nem üres: ezeknek a feladatoknak van megoldásuk. Legyenek ezek: $x^1; x^2; \ldots x^n$. Képezzük az $\hat{x} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} x^i$ vektort. A feltevésünk szerint $\hat{x} \in H$ és ugyanakkor: $\hat{x} \leq x,\ \forall\, x \in H$. Tehát $\hat{x}$ a H halmaz legkisebb eleme.

3. *tétel:* Az $L_{\bar{y}} = \{x \in R^n_+ \mid F(x) \geq \bar{y}\} \neq \emptyset$ halmaznak van legkisebb eleme.

2. tétel miatt $L_{\bar{y}}$ zárt a $\cap$ vektorműveletre. Ha kompakt is, akkor az állítás az 1. Segédtétel következménye. Ha $L_{\bar{y}}$ nem kompakt: legyen $\bar{x} \in L_{\bar{y}}$, ami biztosan létezik. Tekintsük az

$$\bar{L}_{\bar{y}} = \{x \in R^n_+ \mid F(x) \geq \bar{y};\ x \leq \bar{x}\}$$

[3] A segédtétel speciális esete egy G. WINTGENtől származó tételnek [11], amely elégséges feltételt ad arra, hogy egy matematikai programozási feladatcsalád indifferens legyen a függvények egy adott osztályára nézve.

halmazt. Ez biztosan nem üres és kompakt; van tehát legkisebb eleme, amely egyben az $L_{\bar{y}}$ halmaznak is legkisebb eleme.

4. *tétel:* Legyen $\bar{x}$ az $L_{\bar{y}} = \{x \in R^n_+ \mid F(x) \geq \bar{y}\}$ halmaz legkisebb eleme. $\bar{x}$ egyben komplementer megoldás is, azaz

$$\bar{x}^T [F(\bar{x}) - \bar{y}] = 0.$$

Tegyük fel, hogy a komplementaritás nem áll fenn. Akkor $\exists i$ hogy $\bar{\xi}_i > 0$ és $F_i(\bar{x}) > \eta_i$.
Képezzük az $\hat{x} = \bar{x} - \delta e_i$ vektort. Elég kis δ-ra: $\hat{x} \geq 0$. $F(x)$ folytonossága miatt $F_i(\hat{x}) = F_i(\bar{x} - \delta e_i) \geq \eta_i$, ha δ nem túl nagy. Ugyanakkor a diagonálison kívüli antitonitás miatt: minden $j \neq i$ esetén

$$F_j(\hat{x}) = F_j(\bar{x} - \delta e_i) \geq F_j(\bar{x}) \geq \bar{\eta}_j$$

vagyis $F(\hat{x}) \geq \bar{y}$ és így $\hat{x} \in L_{\bar{y}}$. Azonban $\hat{x} \leq \bar{x}$, ami ellentmond annak, hogy $\bar{x}$ az $L_{\bar{y}}$ halmaz legkisebb eleme.

5. *tétel:* Az $L_{\bar{y}} \neq \emptyset$ halmaz legkisebb eleme pozitív: $\bar{x} > 0$ és ezért $\bar{x}$-ben a feltételrendszer egyenlőségre teljesül.

Tegyük fel, hogy $\bar{x} \not> 0$ vagyis $\exists i$ hogy $\bar{\xi}_i = 0$. Ebben az esetben azonban $\bar{x}$ nem lehet megengedett. Ugyanis

$$F_i(\bar{x}) = \bar{\xi}_i - G_i(\bar{x}) \leq 0$$

hiszen $\bar{\xi}_i = 0$ és $G_i(\bar{x}) \geq 0$. Vagyis $\bar{x}$ nem elégíti ki az $F_i(x) \geq \bar{\eta}_i$ feltételt. Ha viszont $\bar{x} > 0$, akkor a komplementaritás miatt: $F(\bar{x}) = \bar{y}$.

Az 5. tétel alapján most már levonhatjuk a következtetéseket a megoldhatóság kérdésében. Kiderül, hogy először is egy sajátos extremum tulajdonsággal találkozhatunk. Vezessük be a társadalmi termelés költségeinek a fogalmát.

6. *definíció:* A *társadalmi* termelés *költségfüggvényének* nevezünk egy R^n_+-on értelmezett $\varphi(x)$ skalárértékű függvényt, ha eleget tesz az alábbi tulajdonságoknak:

- $\varphi(0) = 0$
- $\varphi(x) > 0$ ha $|x| > 0$
- izotón, vagyis $x^1 \geq x^2 \to \varphi(x^1) \geq \varphi(x^2)$.

6. *tétel:* Egy működőképes gazdaságban minden elérhető végső kibocsátás megvalósítható olyan bruttó kibocsátással, amely azt minimális társadalmi összköltséggel éri el.

Bármilyen konkrét tartalma és formája is legyen a társadalmi termelés költségeit mérő függvénynek: az a 6. D. értelmében izotón. Márpedig minden izotón függvény minimumát a megengedett megoldások halmazának legkisebb elemében veszi fel, ha ilyen elem létezik. Így esetünkben: $\varphi(\bar{x}) \leq \varphi(x) \forall x \in L_{\bar{y}}$.[4] Így állunk tehát minden elérhető végső kibocsátás esetében. Az is könnyen belátható, hogy ha létezik elérhető végső kibocsátás a gazdaságban, akkor minden ennél kisebb végső kibocsátás szintén elérhető.

7. *tétel:* Ha $\bar{y}$ elérhető végső kibocsátás, akkor minden $0 \leq y \leq \bar{y}$ ugyancsak elérhető.[5]

Minthogy $\bar{y}$ elérhető $\exists \bar{x}$, hogy $F(\bar{x}) \geq \bar{y}$. Minthogy $y \leq \bar{y}$: $L_y = \{x \in R^n_+ \mid F(x) \geq y\} \neq \emptyset$, mert $F(\bar{x}) \geq \bar{y} \geq y$.

Az eddig tett feltételezések alapján nem lehet pozitív választ adni arra a kérdésre, hogy tetszőleges $y > 0$ végső kibocsátás elérhető-e. Ennek biztosítása további feltételezéseket kíván, amelyek kizárják a kihozatal olyan mérvű romlását a termelés növekedésével, ahol már a termelés fenntartása annyi, vagy több ráfordítást igényel, mint amennyi a termelés eredménye. Szükséges és elégséges feltételt nem ismerünk; eddig csak elégséges feltételek láttak napvilágot. Ilyen például az

1. *kiegészítő feltevés:* A $G(x)$ függvény szubadditív vagyis

$$x^1; x^2 \geq 0\text{-ra}$$
$$G(x^1 + x^2) \leq G(x^1) + G(x^2).$$

1KF. miatt viszont $F(x)$ szuperadditív, mert

$$F(x^1 + x^2) = x^1 + x^2 - G(x^1 + x^2) \geq x^1 - G(x^1) + x^2 - G(x^2) = F(x^1) + F(x^2).$$

7. *definíció:* Egy gazdaságot *fejlődőképesnek* mondunk, ha 1KF. teljesül benne.[6]

8. *tétel:* Egy fejlődőképes gazdaságban tetszőleges végső kibocsátás: $y > 0$ elérhető.

Minthogy a fejlődőképes gazdaság eleve működőképes: $\exists \bar{x}$ hogy $F(x) = \bar{y} > 0$. Megmutatjuk, hogy az így elért végső kibocsátás megkétszerezhető.

[4] A 3—6. tételek speciális esetei, illetve következményei a z-függvények minimalitási és komplementaritási tulajdonságainak, amelyeket először *Tamir* vett észre. A nemlineáris input-output modell megoldásának minimalitási tulajdonsága azonban szerepel már *Evans*nál is és később *Sandberg*nél, *Lahiri*nál és természetesen *Lahiri* és *Pyatt*nál.

[5] Ezt az összefüggést már Evans észrevette.

[6] A különböző szerzők eltérő alakú, de egymáshoz nagyon hasonló tartalmi feltételekkel biztosítják, hogy tetszőleges végső kibocsátás elérhető legyen.

Nataf feltételezi, hogy az átlagos fajlagos ráfordítási együtthatók a tevékenységek növekedésével nem nőnek, és hogy ezért az $[E - A(x)]$ mátrix mindig „Leontief típusú".

*Sandberg*nél az elemi ráfordítási függvények konkávok és a mátrix mindig ún. P mátrix, ami az adott esetben azonos azzal, hogy Leontief típusú is.

Lahiri és *Pyatt* részben a $G(\lambda x) \leq \lambda G(x)$ $(\lambda > 1)$ feltevéssel élnek, részben azt teszik fel, hogy az összes fajlagos anyagfelhasználás a bruttó termelés növekedésével nem nő és mindig 1 alatt marad:

$$x^1 \geq x^2 \Rightarrow 1^T A(x^2) \leq 1^T A(x^2) < 1.$$

Ez a feltételezés is azt eredményezi, hogy az $[E - A(x)]$ mátrix „Leontief típusú" akármekkora is a bruttó termelés.

Legyen

$$\bar{\bar{y}} = \bar{y} + \bar{y} \quad \text{és} \quad \bar{\bar{x}} = \bar{x} + \bar{x}.$$

1 KF. miatt

$$F(\bar{\bar{x}}) \geqq F(\bar{x}) + F(\bar{x}) = \bar{\bar{y}}$$

vagyis $L_{\bar{\bar{y}}} \neq \emptyset$. A megduplázás kellő számú megismétlésével olyan elérhető végső kibocsátáshoz jutunk: $\hat{y}$, amelyre $\hat{y} > y$. De akkor a 7. tétel alapján $L_y \neq \emptyset$.

A modell néhány tulajdonsága további kiegészítő feltevések mellett

A lineáris input-output modell nevezetes sajátossága, hogy működőképes gazdaság esetében az együtthatómátrix: mindig invertálható és inverze nem negatív. Felvetődik a kérdés, hogy a nem lineáris esetben miként nyilvánul meg ez a sajátosság.

Az eddigi vizsgálatainkhoz technikai jellegű feltételként csak az elemi ráfordításfüggvények folytonosságára volt szükség. Most pótlólag feltételezzük a modellben szereplő leképezések differenciálhatóságát és „regularitását" is.

2. *kiegészítő feltevés:* $G(x)$ a nem-negatív ortáns minden belső pontjában differenciálható.

2KF. miatt $F(x)$ is differenciálható. A differenciálhatóság következtében léteznek parciális deriváltjaik és képezhetők a megfelelő Jacobi-mátrixok:

$$\nabla G(x) \quad \text{és} \quad \nabla F(x) = E - \nabla G(x).$$

$\nabla G(x)$ elemei differenciális fajlagos ráfordítási együtthatók. Durván szólva $\dfrac{\partial G_i(x)}{\partial \xi_j}$ kifejezi azt az i-ik szektorból származó többletráfordítást, amely ahhoz szükséges, hogy a társadalmi termelést a j-ik ágazatban az x szintről egy egységgel növeljük.

Minthogy $G(x)$ izotón: $\nabla G(x) \geqq 0$.

3. *kiegészítő feltevés:* A $\nabla F(x)$ mátrix a nem-negatív ortáns belsejének minden pontjában nem-szinguláris, azaz $[\nabla F(x)]^{-1}$ létezik $\dot{R}^n_+$-ban.

Megmutatjuk, hogy 2KF. és 3KF. mellett érvényes a

2. *segédtétel:* Legyen $\bar{x}$ az $L_{\bar{y}} = \{x \in R^n_+ \mid \bar{y} - F(x) = H(x) \leqq 0\}$ halmaz legkisebb eleme. A 2. és 3. kiegészítő feltevésből következik, hogy $\bar{x}$-ben teljesül a nem-lineáris programozás elméletéből ismert Mangasarian-féle regularitási feltétel.

8. *definíció:* Adva $H(x)$ m-elemű vektorfüggvény egy $K \subset R^n$ halmazon. Azt mondjuk, hogy az $\bar{x} \in L = \{x \in K \mid H(x) \leqq 0\}$ pontban teljesül a Mangasarian-féle regularitási feltétel, ha

1. $H_i(x)$ differenciálható $\bar{x}$-ben, $\forall i \in I^0(\bar{x})$.

2. Létezik olyan $c \in R^m$ vektor, amelyre

$$c^T \nabla H_i(\bar{x}) \geq 0; \quad \text{ha} \quad i \in I^{01}(\bar{x}),$$

$$c^T \nabla H_i(\bar{x}) > 0, \quad \text{ha} \quad i \in I^{02}(\bar{x}),$$

ahol $I^0(\bar{x})$ az x pontban aktív (egyenlőségre teljesülő) feltételek indexhalmaza, $I^{01}(\bar{x})$ az $\bar{x}$ pontban pszeudokonkáv aktív feltételek indexhalmaza és $I^{02}(\bar{x})$ az $\bar{x}$ pontban nem-pszeudokonkáv aktív feltételek indexhalmaza.

A mi esetünkben $H_i(x)$ minden feltételben aktív, hiszen az 5. tétel szerint $F(\bar{x}) = \bar{y} \rightarrow H(\bar{x}) = 0$ és $\bar{x} > 0$. $H(x)$ értelemszerűen a nem-negatív ortánsban differenciálható. Mivel $\nabla H(x) = -\nabla F(x)$, legyen $c = -[\nabla F(x)]^{-1} \cdot 1$. Ez kielégíti határozott egyenlőtlenség formájában a regularitási feltétel 2. követelményét:

$$\nabla H(\bar{x}) \cdot c = -\nabla F(\bar{x})\{-[\triangle F(\bar{x})]^{-1}\} \cdot 1 = 1 > 0.$$

A regularitás biztosítja, hogy a modell termelési függvényének Jacobi-mátrixa nem-negatív inverzzel rendelkezzék bizonyos pontokban.

9. tétel: Legyen $\bar{x}$ az $L_{\bar{y}} = \{x \in R^n_+ | \bar{y} - F(x) \geq 0\} \neq \emptyset$ halmaz legkisebb eleme. $F(x)$ Jacobi mátrixa $\bar{x}$-ben nem szinguláris és inverze nem negatív.

A nemszingularitás a 3KF. következménye. Minthogy $\bar{x}$ legkisebb eleme $L_{\bar{y}}$-ben, ezért $\bar{x}$ optimális megoldása az alábbi programozási feladatoknak:

$$\xi_i \rightarrow \min! \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$H(x) = \bar{y} - F(x) \leq 0$$

$$x \in R^n_+.$$

Minthogy $\bar{x} > 0$ és teljesül a Mangasarian-féle regularitási feltétel, teljesülnek az optimalitás szükséges feltételeiként az ún. Kuhn—Tucker feltételek. Léteznek tehát olyan $u_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ vektorok, hogy a célfüggvények gradiensei $\bar{x}$-ben megegyeznek az aktív feltételek gradiensei nem-pozitív lineáris kombinációval. Áll tehát, hogy

$$e_i = -\nabla H(\bar{x}) u_i; \ \forall i\text{-re}.$$

Legyen

$$U = [u_1; u_2; \ldots u_n].$$

Akkor:

$$E = -\nabla H(\bar{x}) U = \nabla F(\bar{x}) \cdot U$$

$$[\nabla F(\bar{x})]^{-1} = U \geq 0.$$

Biztosítható-e a termelési függvény Jacobi mátrixának nem-negatív inverze a pozitív ortáns minden pontjában? További feltételezések nélkül ez általában nem érhető el.

Mindeddig azonban semmiféle lényeges kikötést sem tettünk a modellben szereplő függvények típusáról. Legyen most:

4. *kiegészítő feltevés:* $F(x)$ kvázikonvex R^n_+-ban.

Ez annyit jelent, hogy ha x^1 és x^2 a társadalmi termelés két különböző szintje és $x^0 = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2$ $(0 < \lambda < 1)$ valamilyen átlagos szint a kettő között, akkor ez az átlagos bruttó kibocsátás egyetlen termékből sem biztosíthat nagyobb végső kibocsátást, mint a kiinduló tevékenségek által biztosított végső kibocsátások közül a nagyobbik.

Új feltételünk megszorító jellegű, de sok gyakorlati tapasztalat alátámasztani látszik. Ugyanakkor ez a feltevés sem támasztható alá egyértelműen statisztikai adatokkal.

Ellentmondó jelenségek főként a mezőgazdaságnál mutatkoznak. Ami érthető is, ha meggondoljuk, hogy a mezőgazdasági ágazatok kihozatala a ráfordítások által nincsen úgy meghatározva, mint pl. az iparban. Az időjárási viszonyok ugyanis lényegesen befolyásolják a technológia tényleges hatékonyságát.

Az $F(x)$ leképezés Jacobi mátrixának nem negatív invertálhatósága szoros kapcsolatban van azzal, hogy $F(x)$ inverz izotón-e vagy sem. A termelési függvény inverz izotonitása annyit jelent, hogy nagyobb végső kibocsátás eléréséhez nagyobb bruttó termelésre van szükség.

10. *tétel:* 2., 3. és 4KF. feltételezése mellett legyen az $F(x)$ Jacobi mátrixa a pozitív ortáns minden pontjában nem-negatívan invertálható. Ekkor $F(x)$ inverz izotón.[7]

Legyen x^1 és x^2 $\dot{R}^n_+$ két tetszőleges pontja úgy, hogy

$$F(x^1) \geq F(x^2).$$

A leképezés kvázikonvexitása miatt

$$(x^2 - x^1)^T \nabla F(x^1) \leq 0.$$

Azonban $[\nabla F(x^1)]^{-1} \geq 0$. Így $x^2 - x^1 \leq 0$ és $x^1 \geq x^2$. Tehát

$$F(x^1) \geq F(x^2) \to x^1 \geq x^2$$

A tétel állításának megfordításához nem szükséges a kvázikonvexitás feltételezése. A Jacobi mátrix inverzének nem-negativitását a leképezés inverz izotón volta biztosítja, amint ezt Moré és Rheinboldt [7]-ben bizonyították.

11. *tétel:*[8] Teljesüljön 2KF., 3KF. és legyen $F(x)$ inverz izotón: akkor $[\nabla F(x)]^{-1} \geq 0$ $\forall x \in \dot{R}^n_+$-ban.

Válasszuk az s irányt úgy, hogy $\nabla F(x) \cdot s > 0$. Minthogy $\nabla F(x)$ nemszinguláris, ilyen irány létezik. Ekkor

$$\lim_{\tau \to +0} \frac{1}{\tau} [F(x + \tau s) - F(x)] = \nabla F(x) \cdot s > 0.$$

[7] MORÉ és RHEINBOLDT [7]-ben konvex leképzésre bizonyították, hogy az akkor és csak akkor inverz izotón, ha $[\nabla F(x)]^{-1}$ létezik és nem-negatív valamilyen $D \subset R^n$ nyílt, konvex halmazon. A tétel elégséges feltételt adó részéhez csak kvázikonvexitást kell feltételezni.

[8] A 11. tétel és bizonyítása *Moré*tól és *Rheinboldt*tól származik.

Így elég kicsiny $\tau > 0$-ra $F(x + \tau s) > F(x)$ és a feltételezett inverz-izotonitás miatt $s \geq 0$. Legyen már most $\nabla F(x) \cdot s \geq 0$. Képezzük az $s^{\varkappa} - \frac{1}{\varkappa}[\nabla F(x)]^{-1} \cdot 1$ $(\varkappa = 0, 1, 2, \ldots)$ sorozatot. Ekkor

$$\nabla F(x) \cdot s^{\varkappa} = \nabla F(x)\left[s + \frac{1}{\varkappa}[\nabla F(x)]^{-1} \cdot 1\right] > 0.$$

Így az előzők miatt $s^{\varkappa} \geq 0$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots)$, aminek következtében

$$s = \lim_{\varkappa \to \infty} s^{\varkappa} \geq 0.$$

Tehát $\nabla F(x)$ olyan mátrix, hogy $\nabla F(x) \cdot s \geq 0 \to s \geq 0$. Ez viszont azt jelenti, hogy $[\nabla F(x)]^{-1} \geq 0$.

12. *tétel:* Ha $F(x)$ inverz izotón: az $F(x) = y$ egyenletrendszer megoldása minden elérhető végső kibocsátásnál egyértelmű.

Legyen $\bar{x}$ az $L_{\bar{y}} = \{x \in R^n_+ | F(x) \geq \bar{y}\} \neq \emptyset$ halmaz legkisebb eleme. Az 5. tétel következtében: $F(\bar{x}) = \bar{y}$. Tegyük fel $\exists \hat{x} \neq \bar{x}$ úgy, hogy $F(\hat{x}) = \bar{y}$. Minthogy $\bar{x}$ a halmaz legkisebb eleme, $\bar{x} \leq \hat{x}$. Az inverz izotonitás miatt $F(\bar{x}) \geq F(x) \Rightarrow \bar{x} \geq \hat{x}$, ami ellentmond annak, hogy $\bar{x} \leq \hat{x}$.

4KF.-ben bizonyos korlátot állítottunk a kihozatal, vagy ha tetszik a bruttó termelés hatékonysága, növekedésének. Nem tűnik kevésbé indokolhatónak a hatékonyság eetleges csökkenésének a korlátozása sem. Ezért a továbbiakban legyen

$$\min [F(x^1); F(x)^2] \leq F(x^0) \leq \max [F(x^1); F(x^2)].$$

Ez annyit jelent, hogy ha a bruttó termelés valamilyen x^1 szintről valamilyen x^2 szintre változik: közben

$$x^0 = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2\text{-re} \qquad (0 < \lambda < 1)$$

— mindig elérünk legalább akkora végső kibocsátást, mint a kisebb szintű végpontban és

— mindig legfeljebb akkora végső kibocsátást érünk el, mint a magasabb szintű végpontban.

5. *kiegészítő feltevés:* Legyen $F(x) R^n_+$-ben kvázimonoton.

3. *segédtétel:* Ha $H(x)$ alulról félig folytonos m elemű kvázimonoton vektorfüggvény egy $P \subset R^n$ poliéderen, akkor az $L = \{x \in P \,|\, H(x) \leq b\}$ halmaz minden $b \in R^m$ mellett maga is poliéder.

A 3. segédtétel bizonyítását lásd Martos [6] könyvének 78. oldalán.

13. *tétel:* 5KF. mellett minden $L_y = \{x \in R^n_+ \mid F(x) \geq y\}$ halmaz: poliéder. 1AF. miatt $F(x)$ folytonos; a segédtételben szereplő poliéder szerepét a nemnegatív ortáns tölti be; a kvázimonotonitást pedig feltételeztük.

Szigorítsuk meg valamelyest 5KF-t.

5a. *kiegészítő feltevés:* Legyen $F(x)$ úgy kvázimonoton, hogy egyidejűleg pszeudokonvex is $\mathring{R}^n_+$-ban.

14. *tétel:* 5aKF. mellett minden elérhető végső felhasználáshoz tartozó $L_{\bar{y}} = \{x \in R^n_+ \mid F(x) \geq \bar{y}\} \neq \emptyset$ halmaz megegyezik a

$$K_{\bar{y}} = \{x \in R^n_+ \mid (x - \bar{x})^T \nabla F(\bar{x}) \geq 0\}$$

poliéderrel, ahol $\bar{x}$ az $L_{\bar{y}}$ halmaz legkisebb eleme. Legyen $x \in L_y$ akkor: $x \geq 0$ és $F(x) \geq \bar{y}$, ugyanakkor: $F(\bar{x}) = \bar{y}$, tehát a kvázikonkavitás miatt:

$$F(x) \geq F(\bar{x}) \Rightarrow (x - \bar{x})^T \nabla F(\bar{x}) \geq 0.$$

Vagyis: $x \in K_{\bar{y}}$.

Legyen $x \in K_{\bar{y}}$, tehát $x \geq 0$ és $(x - \bar{x})^T \nabla F(\bar{x}) \geq 0$. Ekkor a pszeudokonvexitás miatt: $F(x) \geq F(\bar{x}) = \bar{y}$. Vagyis: $x \in L_{\bar{y}}$.

(Beérkezett: 1982. február 17-én)

IRODALOM

1. Bod P.: Nem-lineáris ágazatközi kapcsolatok matematikai vizsgálata. SZIGMA (1974) 261—261.
2. Bod P.: Néhány megjegyzés a lineáris modellek segítségével történő gazdasági elemzés továbbfejlesztéséhez. Döntési Modellek II. Közgazdasági és Jogi Kiadó (1969) 237—250.
3. Evans, W. D.: Input Output Computations. The Structural Interdependence of the Economy. ed. T. Barna. New York. John Wiley and Sons. (1954)
4. Lahiri, S.: Input Output Analysis with Scale-Dependent Coefficients. ECONOMETRICA 44 (1976) 947—962.
5. Lahiri, S.—Pyatt, G.: On the Solution of Scale-Dependent Input Output Models. ECONOMETRICA 49 (1980) 1827—1821.
6. Martos, B.: Non-linear Programming. Akadémiai Kiadó (1975).
7. Moré, J.—Rheinboldt, W.: On P- and S-Functions and Related Classes of n-dimensional Non-linear Mappings. Linear Algebra and its Applications 6 (1973) 45—68.
8. Nataf, A.: Systèmes économiques de production à rendement croissant. Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris. Vol. IX. Fasc. 2. (1960) 161—170.
9. Sandberg, I. W.: A Non-linear Input Output Model of Multisectoral Economy. ECONOMETRICA 41. (1973) 1167—1182.
10. Tamir, A.: Minimality and Complementarity Properties Associated with Z-Functions and M-Functions. Mathematical Programming. 7 (1974) 17—31.
11. Wintgen, G.: Indifferente Optimierungsprobleme. MKÖ Tagung, Konferenzprotokoll. (1964) Teil II. 3—6.

ON NONLINEAR GENERALIZATIONS OF THE OPEN, STATIC INPUT-OUTPUT MODEL

We give a survey on several nonlinear generalizations of the open, static input-output model. We consider that form of the model in which all inputs depend on the activity levels of each sector. Properties of the model will be proven directly in a unified framework. The model has the following form:

$$[x - G(x)] = F(x) = y$$

where G and F represent continuous mappings from R^n_+ into R^n.

We show that the statements proven in [1] for a specific model, in which each input depends only on the activity level of the consuming sector, are still valid for the general scheme. So among others:

— there exists a gross output vector: x_0 with minimum social cost for each reachable final output;

— if x_0 is a regular point: the Jacobian of the mapping $F(x)$ has nonnegative inverse.

Further properties of the model can be proven under certain assumptions concerning the behaviour of the mapping $F(x)$ over the nonnegatéve orthant:

— if $F(x)$ is quasiconvex in $\mathring{R}^n_+$: $F(x)$ is inverse isotonic

— if $F(x)$ is inverse isotonic in $\mathring{R}^n_+$: it has a nonnegative inverse in the positive orthant

— if $F(x)$ is inverse isotonic and the equation $F(x) = y$ has solution: the solution is unique

— if $F(x)$ is quasimonotonic in $\mathring{R}^n_+$: the feasible gross outputs belonging to a given final output form a polytope.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОБОБЩЕНИЯ ОТКРЫТОЙ, СТАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВВОД-ВЫВОД

В рассматриваемой работе дается обзор наиболее существенных результатов, достигнутых в отношении нелинейных обобщений открытой, статической модели ввод-вывод. В аспекте унифицированного подхода дается непосредственное доказательство на ту форму модели, в которой все затраты зависят от уровня деятельности всех отраслей, т. е. от вектора общественной валовой продукции.

По своей форме модель является следующей:

$$[x - G(x)] = F(x) = y$$

где

G и F представляют собой непрерывное отображение R^n_+ в R^n.

Указывается, что и в отношении этой более обобщенной модели являются справедливыми все те выводы, которые в нашей статье, обозначаемой как (1) были отнесены к такой специальной модели, в которой все затраты зависили исключительно от деятельности потребляющей отрасли. Так, например,

— относительно любого достигнутого конечного потребления существует такая валовая продукция x_0, которая реализуется при минимальных совокупных общественных затратах;

— если x_0 является регулярной точкой $F(x)$, то в x_0 матрица Якоби функции $F(x)$ имеет неотрицательную обратную матрицу.

Наряду с различными предположениями относительно поведения отображения $F(x)$ в неотрицательное множество устанавливаются и другие свойства модели. Например,

— если $F(x)$ в $\mathring{R}^n_+$ квазивыпуклая, то она, вместе с тем и обратило изотонна;

— если $F(x)$ в $\mathring{R}^n_+$ обратило изотонна, то в положительном квадранте ее матрица Якоби обладает неотрицательной обратной матрицей;

— если $F(x)$ обратимо изотонна, то решение системы уровнения $F(x)$-у — если оно вообще существует — является однозначным;

— если $F(x)$ в $\mathring{R}^n_+$ является квазимонотонным, то допустимое валовая продукция, относящаяся к какому-то конечному выпуску образует многогранник.

Zalai Ernő

Nem-negatív Leontief-inverz létezésének két közgazdasági kritériuma

Bevezetés

A lineáris input-output modellel végzett elemzésekben kulcsszerepet tölt be a fajlagos ráfordítási mátrix (A) ún. Leontief-inverze $(E - A)^{-1}$. A Leontief-inverz (időnként az egyszerűség kedvéért: inverz mátrix) különböző lehetséges közgazdasági interpretációi, amelyekkel itt nem foglalkozunk, rendszerint az inverz mátrix nem-negativitását is megkövetelik. Nem véletlen tehát, hogy a nem-negatív Leontief-inverz létezésének matematikai illetve közgazdasági kritériumai megkülönböztetett figyelmet élveznek az elméleti irodalomban. Közülük legismertebbek a Hawkins–Simon [3], illetve Gale [2] által adott kritériumok. Az alternatív kritériumokat és azok egyenértékűségét kimerítő részletességgel tárgyalja Nikaido [9].

Matematikai szempontból nézve a fenti inverz létezése és nem-negativitása (feltéve, hogy A nem-negatív) egyenértékű azzal az állítással, hogy A domináns sajátértéke 1-nél kisebb (lásd a Perron–Frobenius-féle sajátérték-tételeket, például Krekó B. [5], Nikaido [9], Rózsa P. [11] művekben). Közgazdászok számára többet mondanak Gale [2] ún. produktivitási kritériumai. Az A mátrix produktivitásának feltételezése ismét csak egyenértékű a nem-negatív inverz mátrix létezésének feltételezésével. Gale az általános, illetve az irreducibilis A mátrix esetére külön fogalmazta meg a produktivitás közgazdasági kritériumát. A kritériumok egyaránt megadhatók primális és duális megfogalmazásban, amelyeket Robinson [10] nyomán technológiai illetve gazdasági produktivitásnak lehet nevezni.

A technológiai produktivitás *Gale* által adott feltétele az általános esetre a következőképpen foglalható össze. Az A ráfordítási együttható mátrix produktív, azaz van nem-negatív Leontief-inverze, ha a vizsgált gazdaságban minden termékből *van* végső kibocsátás, *vagy* ugyanazon átlagos ráfordítások mellett (egyéb feltételektől eltekintve) *elvben* keletkezhetne. Ami a feltétel első felét (tényleges termelés) illeti, ott az a kitétel okozhat fennakadást, hogy „minden termékből van végső kibocsátás”, hiszen rendszerint vannak olyan termékek, amelyekre a végső fogyasztásban nincs szükség. A *fiktív termelés* bevezetésével viszont ismét túl matematikaivá válik a feltétel. Hogyan lehetne eldönteni azt, hogy elképzelhető-e ilyen termelés? A kérdés eldöntése matematikai szempontból valóban egyenértékű $(E - A)$ invertálhatóságának megvizsgálásával. Érdemes még a feltétel kapcsán utalni arra, hogy bár explicite nem kötöttük ki, hogy a vizsgált gazdaságban *minden terméket termelnek*, a feltételből azonban ez következik.

A jelzett megkötést kívánta enyhíteni Gale az irreducibilitás fogalmának bevezetésével. Ebben az esetben már elegendő mindössze annyit feltenni, hogy legalább egy ágazat termékéből van végső kibocsátás. Az irreducibilitás (indekompozábilitás) fogalmát sokféleképpen definiálhatjuk és jellemezhetjük. Nem célunk ezekkel itt részletesen foglalkozni, a fogalmat nem eléggé ismerő olvasó számára ismét csak a már korábban jelzett irodalmakat, illetve MÓCZÁR J. [6] dolgozatát ajánlhatjuk. A további felhasználás számára közöljük az irreducibilitás egyik alternatív definícióját. E szerint egy A mátrix akkor irreducibilis, ha bármely i, j indexpár esetén van olyan $i = k_0, k_1, \ldots$ $\ldots, k_s = j$ indexsorozat, hogy $a_{k_t, k_{t+1}} > 0$ $(t = 0, 1, \ldots, s-1)$. Közgazdaságilag ez a feltétel annyit jelent, hogy bármely ágazat közvetlenül $(s = 1)$ vagy közvetve $(s > 1)$ igényli bármely másik ágazat termelését. Vagyis ahhoz, hogy valamely ágazat termelhessen, *minden* más *ágazatnak termelnie kell.* Az ágazatok (termékek) ilyen szoros, kölcsönös függőségének feltételezése, különösen termékek szintjén megfogalmazott modellek esetén ismét csak ellentétben van a valóságos megfigyelésekkel, mivel egy gazdaságban nyilvánvalóan lehetnek önálló ágazatcsoportok. Ismét megjegyezzük, hogy a látszólag enyhébb megkötéssel szemben a teljes termelés vektora most is csak határozottan pozitív lehet.

A fentiek miatt érdekesnek látszik megvizsgálni, vajon lehet-e Gale feltételeivel egyenértékű, közgazdasági oldalról kézenfekvőbb produktivitási kritériumokat megfogalmazni. A kérdés természetesen inkább elméleti, s nem gyakorlati szempontból érdekes. Részben emiatt is, vizsgálatunkat a marxi értékmeghatározás ismert input-output modelljének keretében végezzük el (lásd például BRÓDY A. [1] és MORISHIMA [7]). Meg fogjuk mutatni, hogy lehetséges Gale kritériumait általánosítani, illetve közgazdasági szempontból elfogadhatóbbakkal helyettesíteni. A két új kritérium az *öncélú termelés*, illetve a gazdaság teljes *automatizálhatóságának* szabatos fogalmain alapul. Egyidejűleg megmutatjuk azt is, hogy a tiszta árutermelés modelljében a bevezetendő kritériumok szükségképpen teljesülnek és egyben elégségesek a pozitív értékek létezésének igazolásához.

Produktivitás és öncélú termelés

Egy gazdaságban egy adott ágazatcsoportról akkor mondjuk, hogy *öncélú termelést* folytat, ha előállított termékeik nem haladják meg saját termelő felhasználásukat ugyanezen termékekből (külső igények kielégítéséről tehát szó sem lehet).

Egy x termelés esetén tehát akkor beszélünk öncélú termelésről, ha A-nak van olyan

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

dekompozíciója, hogy x-et is megfelelően particionálva azt kapjuk, hogy[1]

$$x_2 \leqq A_{22} x_2 \quad \text{és} \quad x_2 > 0. \tag{1}$$

[1] Két vektor közötti nagyságrendi relációk jelölésére $>$ (minden komponensében nagyobb), $\geq$ (nem kisebb és legalább egy komponensében nagyobb) és $\geqq$ (egyetlen komponensében sem kisebb) jeleket fogjuk használni.

Célszerű lesz közelebbről megvilágítani a bevezetett fogalmat. Nyilvánvaló, hogy ha egy gazdaságot zárt termelési modellben ábrázolunk, akkor az adott gazdaság természetszerűleg öncélú termelést folytat, s itt a fogalom nem párosul semmiféle negatív megítéléssel. Ha viszont a termelést szűken értelmezzük, s a termelés alapvető céljának a végső kibocsátás elérését tekintjük, a termelő fogyasztást pedig szükséges áldozatnak, akkor az öncélú termelést negatívan kell megítélnünk, olyan tevékenységnek, amely a felhasznált elsődleges erőforrásokat elpazarolja. Nyílt modellek esetében rendszerint ez utóbbi értelmezés a helyénvaló.

Meg lehet mutatni, hogy a termelő felhasználásánál (pótlásnál) többet termelő[2] gazdaságban az ágazatok egy (valódi) része csak akkor folytathat öncélú termelést, ha az A mátrix, azaz a gazdaság nem teljesen összefüggő (reducíbilis). Fordítva azonban ez nem szükségszerű. Egy reducíbilis gazdaságban — ezt az állítást be is fogjuk bizonyítani — nem folyhat öncélú termelés, ha minden ágazat közvetlenül vagy közvetve hozzájárul a végső kibocsátáshoz. Ez viszont jóval enyhébb feltétel, mint az irreducibilitás. Fennállhat ugyanis akkor is, amikor — szélsőséges esetet véve — a gazdaság egymástól *teljesen független* ágazatcsoportokra esik szét. Csupán annyit kell feltételeznünk, hogy ezen önálló ágazatcsoportok mindegyikének van valamiből végső kibocsátása, s ehhez az adott csoporton belül mindenki valamivel hozzájárul.

Már itt célszerű felhívni a figyelmet arra, hogy Gale kritériumai az öncélú termelés lehetőségét kizárják. Az általános esetben ez teljesen nyilvánvaló, hiszen minden ágazat termékéből van végső kibocsátás. A másik esetben viszont az irreducibilitás feltevése, mint tudjuk, éppen azt jelenti, hogy minden ágazat termékére szükség van, közvetlenül vagy közvetve, bármelyik ágazatból származó végső kibocsátás előállításához. Vagyis a gyenge produktivitás és az öncélú termelés hiánya Gale két kritériumának általánosítását szolgáltatja.

Megjegyzendő még a definíció kapcsán, hogy az (1) feltételből már az is következik, hogy az A_{22} mátrix domináns sajátértéke 1 vagy 1-nél nagyobb. Ez a sajátérték-tételekből ismert állítás, de könnyen igazolhatjuk is. Ha ugyanis a jelzett sajátérték 1-nél kisebb lenne, akkor $(E - A_{22})^{-1}$ létezne és nem-negatív lenne. Ezen inverzzel az (1) egyenlőtlenség $(E - A_{22})x_2 \leq 0$ alakját beszorozva $x_2 \leq 0$ egyenlőtlenséghez jutnánk, ellentétben feltevésünkkel. Ha viszont A_{22} domináns sajátértéke 1 vagy 1-nél nagyobb, akkor nem létezhet olyan p_2^* nem-negatív vektor, amelyre fennállna a $p_2^* > p_2^* A_{22}$ egyenlőtlenség.[3] Egy olyan gazdaságban, ahol minden áru termeléséhez szükség van (közvetlenül vagy közvetve) valamilyen pozitív árú elsődleges erőforrásra, például munkaerőre, mindez egyszersmind azt is jelenti, hogy nincs olyan árrendszer, hogy legalább egy ágazat ne legyen veszteséges. *Tiszta árutermelés viszonyai között tehát az öncélú termelés lehetősége* lényegében *kizárt.*

Mindezekből a fejtegetésekből is látszik már, hogy az *öncélú termelés hiánya* és a termelő rendszer *produktivitása* egymást szorosan feltételező fogalmak. Ezt fogjuk a következőkben bebizonyítani. Először egy fentebb már előrebocsátott állítást fogunk tétel formájában bizonyítani.

[2] Ezt a kritériumot gyenge technológiai produktivitásnak lehetne nevezni, mivel Gale mindkét feltétele magában rejti.

[3] Ez ugyanis éppen a Gale-féle produktivitási feltétel duális (gazdasági) változata, amiből az következne, hogy a nevezett sajátérték 1-nél kisebb.

1. *TÉTEL*: Egy (gyengén produktív) gazdaságban, ahol minden ágazat termel ($x > 0$) és van végső kibocsátás ($x \geq Ax$), akkor és csak akkor folyik öncélú termelés, ha a végső kibocsátást nem adó ágazatok között vannak olyanok, amelyek termelését egyetlen végső kibocsátó ágazat sem igényli, sem közvetlenül, sem közvetve.

Bizonyítás: Nyilván elegendő azt megmutatni, hogy azok és csak azok az ágazatok alkotnak öncélú termelést folytató ágazatcsoportot, amelyek termelésére a végső kibocsátást adó ágazatok nem támasztanak sem közvetlenül, sem közvetve igényt.

Legyen I_0 a végső kibocsátó ágazatok indexeinek halmaza. Ilyen ágazatok definíció szerint nem folytathatnak öncélú termelést. Legyen I_1 azon nem végső kibocsátó ágazatok indexhalmaza, amelyek közvetlenül vagy közvetve „szállítanak" a végső kibocsátóknak. Azaz $j \in I_1$ akkor és csak akkor, ha $j \notin I_0$ és van olyan $j = j_0, j_1, \ldots, j_k$ index sorozat, hogy $j_k \in I_0$ és $a_{j_t, j_{t+1}} > 0$ $(t = 0, 1, \ldots, k-1)$. Nyilvánvaló, hogy az I_1-be tartozó ágazatok sem tartozhatnak öncélú ágazatcsoporthoz.

Öncélú termelést folytató ágazatok tehát csak az $N - (I_0 \cup I_1)$ ágazatok között lehetnek, ahol $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Ha tehát öncélú termelés folyik, akkor szükségképpen kell lenni olyan ágazatoknak, amelyek sem közvetlenül, sem közvetve nem járulnak hozzá a végső kibocsátáshoz.

Most megmutatjuk, hogy a fennmaradó ágazatok valóban egy öncélú termelést folytató csoportot képeznek. Ehhez vegyük figyelembe, hogy $a_{ij} = 0$ minden $i \in N - (I_0 \cup I_1)$ és $j \in I_0 \cup I_1$ esetén.

Ha ugyanis a_{ij} pozitív lenne, akkor az i-edik ágazat közvetlenül szállítana vagy egy végső kibocsátónak, vagy egy olyan ágazatnak, amelyik közvetlenül vagy közvetve szállít végső kibocsátó ágazatnak. Akármelyik eset áll is elő, az i-edik ágazat közvetlenül vagy közvetve szállítója lenne valamelyik végső kibocsátónak, így feltevésünkkel ellentétben az I_1 halmazban lenne.

Partícionáljuk most az A mátrixot és az x vektort az alábbiak szerint:

$$A_{22} = \{a_{ij} : i, j \in N - (I_0 \cup I_1)\}$$

$$x_2 = \{x_i : i \in N - (I_0 \cup I_1)\}.$$

Az $x \geq Ax$ összefüggés miatt, továbbá mivel $A_{21} = 0$ azt kapjuk, hogy

$$x_2 \geq A_{22} x_2$$

De mivel ezen ágazatoknak nincs végső kibocsátása, ezért

$$x_2 = A_{22} x_2,$$

vagyis valóban öncélú termelést folytató ágazatokról van szó.[4] Ezzel a bizonyítást befejeztük.

A teljes automatizálhatóság kritériumával való későbbi összehasonlítás végett fel kívánjuk hívni az olvasó figyelmét egy érdekes strukturális jellegzetességre. Nevezetesen arra, hogy egy gyengén produktív és öncélú termelést folytató gazdaságban van olyan ágazatcsoport (I_2), amely esetében $A_{21} = 0$

[4] Az ilyen termelőrendszert Gale [2] kvázi-produktív gazdaságnak nevezi (a mi fogalmainkkal *csak gyengén produktív* gazdaságról beszélhetnénk).

és a nettó kibocsátás megfelelő alvektora $x_2^0 = 0$. Látni fogjuk majd, hogy teljes automatizálhatóság esetén ennek duális megfelelőjét fogjuk kapni.

Valós megfigyelésen alapuló AKM-ek esetében nyilván minden ágazat termel ($x > 0$), s ha a munkaerő-szektor nem szerepel az ágazatok között, akkor kell lennie végső kibocsátásnak is. Azt viszont nem lehet garantálni, hogy minden ágazat nettó kibocsátása nem-negatív, ugyanis a külső források (készlet, import) igénybevétele egyes ágazati kibocsátások esetében meghaladhatja a külső fogyasztást. Ha azonban a ***tényleges*** termelés *vagy* (változatlannak tekintett fajlagos ráfordítások mellett) valamilyen *fiktív* termelés akkora, hogy minden ágazat nettó kibocsátása nem-negatív és néhányé pozitív, akkor az öncélú termelés hiánya biztosítja A nem-negatív Leontief-inverzének létezését. Ezt fogalmazzuk meg és bizonyítjuk be az alábbiakban.

2. *TÉTEL:* Tegyük fel, hogy az A fajlagos ráfordítási együtthatókkal jellemzett, gazdaságban minden ágazat termel ($x > 0$), és minden ágazat nettó kibocsátása nem-negatív, néhányé pozitív (azaz a gazdaság gyengén produktív):

$$x \geq Ax, \tag{2}$$

továbbá a gazdaságban nem folyik öncélú termelés. A fenti gazdaság A mátrixának létezik nem-negatív Leontief-inverze. Általában pedig, ha A-nak van nem-negatív L-inverze, akkor az adott ráfordítási együtthatók mellett nem képzelhető el öncélú termelés.

Bizonyítás: A tétel első felének bizonyításához azt fogjuk megmutatni, hogy A domináns sajátértéke 1-nél kisebb, amiből már — mint ismert (lásd a Perron—Frobenius-tételeket) — következik állításunk helyessége.

Mivel $x > 0$, ezért tetszőleges 1-nél nagyobb k esetén azt kapjuk, hogy

$$kx > Ax.$$

A Perron—Frobenius-tételekből következik,[5] hogy $\lambda(A)$ (az A mátrix domináns sajátértéke) ezen k értékeknél csak kisebb lehet.

Meg kell még mutatni, hogy $\lambda(A)$ nem lehet 1 sem. Indirekt úton bizonyítunk. Ha 1 az A mátrix domináns sajátértéke lenne, akkor tartozna hozzá szemipozitív x_0 sajátvektor, amely tehát kielégítené az alábbi egyenlőséget:

$$x_0 = Ax_0. \tag{3}$$

A (2) és (3) összefüggések összevetéséből közvetlenül belátható, hogy x és x_0 arányaiban szükségképpen eltér. Éppen ezért van olyan pozitív α skalár, amely esetén az alábbi szabály szerint képzett x_α vektor szemipozitív, de nem lesz határozottan pozitív:

$$x_\alpha = x - \alpha x_0.$$

Ugyancsak a (2) és (3) feltételek miatt azt kapjuk, hogy

$$x_\alpha - Ax_\alpha = x - Ax,$$

azaz x_α ugyanazt a végső kibocsátást eredményezi, mint x. Ugyanakkor néhány ágazat x_α esetében egyáltalán nem termel. Ez csak akkor fordulhat elő, ha

[5] Lásd például Nikaido [9], Hegedüs M.—Zalai E. [4].

ezen ágazatok termelését az adott végső kibocsátást előállító ágazatok sem közvetlenül, sem közvetve nem igénylik. Így az 1. tétel értelmében ezek az ágazatok x esetében öncélú termelést folytattak volna, ez pedig feltevésünknek ellentmondana.

Ami a tétel második felét illeti, azt kell megmutatnunk, hogy A-nak nem lehet olyan

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

dekompozíciója, hogy az

$$x_2 \leq A_{22} x_2 \tag{4}$$

egyenlőtlenségnek legyen pozitív megoldása. Ez jelentené ugyanis az öncélú termelés lehetőségét.

Korábban már megmutattuk, hogy a (4) egyenlőtlenség pozitív megoldásából az következne, hogy A_{22} domináns sajátértéke nagyobb vagy egyenlő 1-gyel. Ebből viszont az következne, hogy A domináns sajátértéke is nagyobb vagy egyenlő 1-gyel,[6] azaz A-nak nem lenne nemnegatív Leontief-inverze. Ez pedig feltevésünknek ellentmondana. A bizonyítást ezzel befejeztük.

Produktivitás és teljes automatizálhatóság

A teljes automatizálhatóság fogalmát egzakt formában, tudomásunk szerint először MORISHIMA és CATEPHORES [8] használta egy Neumann-gazdaság keretében. Vezessük be először is az m^* vektort a fajlagos munkaráfordítások jelölésére.

Egy A és m^* ráfordítási fajlagosokkal jellemzett gazdaságot akkor nevezünk *teljesen automatizálhatónak*, ha a termelő szféra képes legalább a saját termelő felhasználásával egyenlő termékmennyiséget előállítani munkaerő felhasználása nélkül. Azaz, ha van olyan szemipozitív x vektor, amely esetében $Ax \leq x$ és $m^* x = 0$.

Könnyen belátható, hogy a teljes automatizálhatóságnak szükséges feltétele, hogy vagy $m^* = 0^*$ legyen vagy az A és m^* fejlagos ráfordítási együtthatóknak legyen alábbi jellegű particiója:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$(m_1^* \quad 0^*),$$

ahol tehát a második ágazatcsoport egyáltalán nem igényel munkaráfordítást. Teljes automatizáltság esetén ugyanis csak olyan ágazatcsoportba tartozó árukat termelhetnek, amelyek sem közvetlenül, sem közvetve nem igényelnek munkaráfordítást.

Összevetve a fentit az öncélú termelés esetére megfogalmazott 1. tétel következményével, látható, hogy a teljes automatizálhatóság fogalma számos

[6] Egy nemnegatív mátrix domináns sajátértéke ugyanis nem lehet kisebb egyetlen minorjának domináns sajátértékénél sem. Lásd például NIKAIDO [9].

tekintetben az előbbi duálisának tekinthető. Ez a dualitás azonban csak strukturálisan áll fenn, hiszen a teljes automatizálhatóság egy gyengén produktív alrendszert feltételez, míg az öncélú termelés fennállása, mint láttuk, egy improduktív alrendszer létét implikálta. A két feltétel tehát korántsem egyenértékű. A marxi értékek elemzése esetében a teljes automatizálás lehetőségét mindenképpen ki kell zárnunk (munka nélkül működő gazdaságban a munkaértékek fogalma értelmetlenné válik). Látni fogjuk majd viszont, hogy ennek kizárása milyen hatásos: mind az értékek létezését mind a pozitivitását biztosítja. Mielőtt azonban ennek tárgyalására áttérnénk, célszerű külön megvizsgálni a teljes automatizálhatóság egyes sajátos tulajdonságait.

Fentebb jeleztük már a teljes automatizálhatóság egy szükséges feltételét. Most külön tételben megmutatjuk, hogy produktív A mátrix esetén a jelzett strukturális sajátosság szükséges és elégséges feltétele a teljes automatizálhatóságnak.

3. TÉTEL: Egy A és m^* nem-negatív ráfordítási együtthatókkal jellemzett produktív gazdaság akkor és csak akkor automatizálható teljesen, ha az áruknak (ágazatoknak) van egy olyan csoportja, amelyek termeléséhez sem közvetlenül, sem közvetve nincs szükség munkaerőre.

Bizonyítás: Elégségesség. Legyen N az összes, I_2 pedig azon áruk (ágazatok) indexeit tartalmazó halmaz, amelyek termeléséhez nincs munkaerőre szükség. Ha $I_2 = N$, akkor $m^* = 0^*$ és így a produktivitás feltételéből következik már a teljes automatizálás lehetősége. Ha $I_2 \neq N$ (feltevésszerűen nem lehet üres sem!), akkor A-t és m^*-ot $I_1 = N - I_2$ és I_2 indexhalmazoknak megfelelően partícionálva beláthatjuk egyrészről azt, hogy $m_2^* = 0^*$, másrészről azt, hogy $A_{12} = 0$. Ellenkező esetben ugyanis az I_2-be tartozó áruk valamelyikének vagy közvetlenül, vagy közvetve lenne munkaerő-igénye. Mivel pedig A produktív, azaz domináns sajátértéke 1-nél kisebb, ezért A_{22} minorja is produktív. Ebből már egyszerűen belátható, hogy található olyan $x = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$ vektor, amelyben x_2 pozitív, $x \geq Ax$ és $m^*x = 0$.

Szükségesség. Legyen x a teljes automatizálhatóságot eredményező termelési vektor és tegyük fel, hogy az ágazatok sorrendje olyan, hogy a felsorolásban elöl szerepelnek a nem termelő ($x_1 = 0$) ágak, hátul a termelő ágak ($x_2 > 0$). Ennek megfelelően partícionálva az együttható mátrixot, illetve vektort azt kapjuk, hogy $m_2 = 0$ illetve $A_{12} = 0$. Ebből pedig már állításunk helyessége közvetlenül kiolvasható. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

A következő két tételt úgy tekintjük mint Marx intuitív fogalomhasználatának matematikai igazolását. Egyszerűen fogalmazva arról van szó, hogy egy olyan tiszta árutermelő gazdaságban, amely a munkaerőt nem nélkülözheti, a ráfordítási fajlagosok mátrixa szükségképpen produktív és minden árunak egyértelműen meghatározott, pozitív munkaértéke van.

4. TÉTEL: Ha a vizsgált gazdaságban tiszta árutermelés folyik, azaz az érvényes árak ($p_a > 0$) és bér ($w_a > 0$) mellett egyetlen áru termelése sem veszteséges ($p_a^* \geq p_a^* A + w_a m^*$), továbbá a gazdaságot nem lehet teljesen automatizálni, *akkor* a gazdaság fajlagos ráfordítási mátrixa (A) szükségképpen produktív.

Bizonyítás: Az a tény, hogy egyetlen áru termelése sem volt veszteséges, azt is jelenti, hogy az árak nem lehetnek kisebbek az anyagköltségeknél, azaz

$$p_a^* \geq p_a^* A. \tag{5}$$

Sőt, határozott egyenlőség sem állhat fenn mindenhol, mert akkor a pozitív munkabér miatt veszteséggel állítanák elő azon árukat, amelyek (közvetlenül) felhasználnak munkaerőt. Munkarőt pedig valahol használni kell, különben teljesen automatizált gazdaságról lenne szó. Az (5) egyenlőtlenségből és p_a pozitivitásából következik, hogy A domináns sajátértéke 1-nél nem lehet nagyobb. Most megmutatjuk, hogy nem lehet 1 sem. Ha ugyanis 1 lenne, akkor lenne olyan szemipozitív $\hat{p}$ vektor, amely kielégítené az alábbi sajátérték-egyenletet:

$$\hat{p}^* = \hat{p}^* A. \tag{6}$$

Belátható, hogy p_a és $\hat{p}$ arányaiban szükségképpen eltér egymástól (mivel az (5) feltétel nem lehet tiszta egyenlőség), ezért van olyan pozitív és egyértelműen meghatározott α, amely mellett a

$$p_\alpha = p_a - \alpha \hat{p}$$

vektor nem-negatív, de legalább egy elemében 0. Az (5) és (6) egyenlőtlenségekből következik, hogy

$$p_a^* \geq p_a^* A, \tag{7}$$

továbbá a nyert egyenlőtlenség-rendszerben ott és csak ott szerepelhet egyenlőség (illetve egyenlőtlenség), ahol az (5) rendszerben. Legyen mármost

$$I_2 = \{i : p_{\alpha i} = 0\}, \qquad I_1 = N - I_2,$$

s partícionáljuk a változókat és feltételeket ezen indexhalmazoknak megfelelően. Ekkor a (7) egyenlőtlenségek I_2-be tartozó részére azt kapjuk, hogy

$$0^* = p_{\alpha_2}^* \geq p_{\alpha_1}^* A_{12} + 0^* A_{22} \geq 0^*.$$

Ebből következik egyrészt az, hogy $A_{12} = 0$, másrészt pedig az, hogy az I_2-be tartozó feltételek (5)-ben is egyenlőségek voltak, azaz:

$$p_{a2}^* = p_{a2}^* A_{22}.$$

Most már majdnem célnál vagyunk. Mivel az I_2-be tartozó áruk termelése sem volt veszteséges, ezért ott nem használhattak fel (közvetlenül) munkaerőt, azaz $m_2^* = 0^*$. Másfelől A_{22} az A mátrix minorja, így A_{22} domináns sajátértéke sem lehet 1-nél nagyobb. A kapott egyenlőség tehát éppen azt mutatja, hogy A_{22}-nek az 1 domináns sajátértéke. Ezért tartozik hozzá szemipozitív x_2 sajátvektor ($x_2 = A_{22} x_2$). Mivel $A_{12} = 0$, $m_2^* = 0^*$, ezért az $x = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$ termelési szintvektor mellett a gazdaság teljesen automatizált lenne. Ez pedig feltevésünknek ellentmondana. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

A munkaértékek létezése és pozitivitása

Jeleztük, hogy az új feltételekkel részben az volt a célunk, hogy a vizsgált modell keretei között a marxi értékek létezésének és pozitivitásának minél kézenfekvőbb és általánosabb kritériumait fogalmazhassuk meg. Tulajdonképpen most már minden szükséges feltétel rendelkezésünkre áll a kritériumok tételszerű megfogalmazásához. Célszerű azonban előtte röviden megvilágítani a kérdés közgazdasági hátterét.

Korábban már utaltunk arra, hogy egy gazdaság teljes automatizálhatósága nem csak utópia, de szöges ellentétben is áll magával a munkaérték fogalmával. Ezt a lehetőséget tehát mindenképpen ki kell zárnunk, de ez semmi tényleges megkötést nem jelent.

A fenti feltétel mellett még szükségünk van valamilyen formában az A mátrix produktivitását biztosító feltételekre. Ezt, a korábbiak alapján, kétféleképpen fogalmazhatjuk meg. Az öncélú termelés hiányának és a pótlást meghaladó termelés létezésének feltételezése a gazdaság produktivitását *technológiai oldalról* biztosítaná. Joggal felvethető azonban az az ellenérv, hogy egy valós gazdaságban sohasem pótolják természetben teljesen az elhasznált anyagi eszközöket. Ez a feltételezés tehát meglehetősen elvont, ezen még az sem segít, ha itt Marxra hivatkozunk, aki a bővített újratermelést úgy tárgyalja, mint amelyik tartalmazza az egyszerű újratermelés mozzanatát. Sokkal kézenfekvőbb tehát a másik út, amelyet a tiszta árutermelés szükségszerű kritériuma tesz lehetővé. Nevezetesen az a feltevés, hogy ne legyen veszteséges egyetlen áru termelése sem. Ez a feltétel a teljes automatizálás lehetetlenségével együtt *gazdasági oldalról* biztosítja A mátrix produktivitását. A teljesség kedvéért az alábbi tételben mindkét feltételt közöljük.

5. TÉTEL: Tekintsünk egy A és m nem-negatív fajlagos ráfordításokkal jellemzett gazdaságot. Legyen $x_a > 0$ a teljes termelés tényleges nagysága, $p_a > 0$ a tényleges árak vektora, $w_a > 0$ a tényleges munkabér. A fenti gazdaságban az értékek egyértelműen meghatározottak és pozitívak, ha a gazdaság *nem automatizálható teljesen* és teljesül az alábbi feltételek közül *valamelyik*:

i) A gazdaságban *nem* folyt *öncélú termelés*, és minden áruból legalább annyit termeltek, mint amennyit a termelésben azokból felhasználtak, valamint legalább egy áruból jutott nem termelő fogyasztásra is *(pótlást meghaladó termelés)*.

ii) A gazdaságban *egyetlen áru termelése sem volt veszteséges.*[7]

Bizonyítás: Mivel vagy a 2. vagy a 4. tétel feltételei teljesülnek, ezért az A mátrix szükségképpen produktív. Az értékek vektora (p) tehát egyértelműen meghatározható az alábbi képlet alapján (lásd, például BRÓDY A. [1]):

$$p^* = m^*(E - A)^{-1}.$$

Az A mátrix produktivitása és a ráfordítási együtthatók nem-negativitása miatt p szükségképpen nem-negatív. Be kell még látnunk, hogy p nemcsak

[7] Természetesen az iparágak átlagában értendő, hogy egyetlen áru termelése sem veszteséges. Egyes egyéni termelők termelhetnek veszteséggel.

nem-negatív, de határozottan pozitív vektor. Tegyük fel, hogy p valamelyik komponense, mondjuk az i-edik, nulla lenne, azaz

$$p_i = m^*(E - A)^{-1}e_i = 0.$$

ahol e_i az i-edik n-ed rendű egységvektor.

Az $x_i = (E - A)^{-1}e_i$ olyan termelési vektorként értelmezhető, amely esetén egyrészt az előállított termékmennyiség a pótlás igényét meghaladja, másrészt munkaerő felhasználását nem igényli. Mindez viszont ellentétben állna feltevésünkkel, amely szerint a gazdaság nem automatizálható teljesen. Ezzel a bizonyítást befejezzük.

Végeredményben tehát Bródy A., Morishima és mások a marxi érték-, ár- és újratermelési elmélet matematikai megfogalmazásaiban teljes joggal feltételezhették az A mátrix produktivitását.

(Beérkezett: 1981. november 4-én)

IRODALOM

1. BRÓDY A.: *Érték és újratermelés.* Budapest, 1969. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
2. GALE, D.: *The theory of linear economic models.* New York, 1960. Mc Graw Hill.
3. HAWKINS, D.—SIMON, H. A.: „Note: Some conditions of macroeconomic stability", *Econometrica 17,* No. 3—4.
4. HEGEDÜS M.—ZALAI E.: *Fixpont és egyensúly a gazdasági modellekben.* Budapest, 1978. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
5. KREKÓ B.: *Lineáris algebra.* Budapest, 1976. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
6. MÓCZÁR J.: „A dekompozábilitás kiterjesztése a gazdaság lineáris modelljeiben", *Szigma,* 1980. 1—2. sz.
7. MORISHIMA, M.: *Marx's Economics.* Cambridge, 1973. Cambridge University Press.
8. MORISHIMA, M.—CATEPHORES, G.: *Value, exploitation and growth.* London, 1978. Mc Graw Hill.
9 NIKAIDO, H.: *Convex structures and economic theory.* New York, 1968. Academic Press.
10. ROBINSON, S. M.: „Irreducibility in the von Neumann model", *Econometrica 41,* No.3.
11. RÓZSA P.: *Lineáris algebra és alkalmazásai.* Budapest, 1974. Műszaki Könyvkiadó.

TWO ECONOMIC CRITERIA FOR THE EXISTENCE OF NONNEGATIVE LEONTIEF INVERSE

The productivity of the input-output coefficient matrix (A) plays crucial role in both the theoretical and applied input-output analysis. This ensures the existence of the Leontief inverse, $(I-A)^{-1}$. There are several productivity criteria known in the literature, among them two criteria proposed by Gale. This paper provides two new criteria based on the exact concepts of selfserving production and full-automation. They can be viewed as dual concepts and extensions of Gale's criteria. In the context of the Marxian value model it will be shown that these new conditions trivially hold and provide sufficient basis for the existence and positivity of labor values.

ДВА ЭКОНОМИЧЕСКИХ КРИТЕРИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕНЕГАТИВНОЙ ИНВЕРСИИ ЛЕОНТЬЕВА

В теоретических и практических исследованиях, проводимых с помощью модели затраты-выход, важная роль принадлежит матрице коэффициента затрат (A) инверсии Леонтьева $(E-A)^{-1}$. Из экономических и математических условий существования (продуктивности) инверсии наиболее известны условия продуктивности Гейла. В статье формулируются два новых условия, равнозначных и отчасти обобщающих критерии Гейла. Два условия основаны на парных понятиях, находящихся в дуалистическом отношении между собой, — четких понятиях производства как такового и полной автоматизации. Одновременно показывается, что ценностная модель Маркса (предполагающая чисто товарное производство) необходимо отвечает новым условиям, которые одновременно также служат достаточными критериями существования положительной стоимости.

MEDVEGYEV PÉTER

A Neumann modell Morishima-féle általánosításról

A gazdasági növekedés Neumann modellje[1] a matematikai közgazdaságtan, ezen belül az általános egyensúlyelmélet, egyik legismertebb eredménye. A modell sokak által kritizált egyik hiányossága, hogy figyelmen kívül hagyja, elnagyoltan kezeli a keresleti — kínálati viszonyok hatását az árakra és evvel szoros összefüggésben, nem szerepelteti explicit módon a különböző társadalmi osztályokat. Neumann eredeti dolgozatának megjelenése óta (1937) számos kutató, matematikus és közgazdász, foglalkozott a modell különböző aspektusaival, általánosításaival. Az általánosítások közül talán a legismertebb M. MORISHIMA [7] modellje, mely tulajdonképpen a szabadversenyes tőkés gazdaságnak az általános egyensúlyelméleti szemléletben fogant stacionér modellje. A dolgozatban Morishima eredményeit némiképpen *általánosítjuk*, *összehasonlítjuk* más kutatók — elsősorban *J. Łoś* — eredményeivel. Morishima a modell egzisztenciáját, vagyis az egyenletek konzisztenciáját, az Eilenberg—Montgomery féle fixponttételre támaszkodva bizonyítja. Az itt követett bizonyítás fő előnye, hogy az egzisztencia-tételek bizonyítása a lényegesen egyszerűbb, ismertebb Kakutáni tételre támaszkodva végrehajtható, s így a modell tárgyalása nagyban egyszerűsíthető.

1. A modell

Legyen adva egy absztrakt gazdaság. A gazdaságban a technológia-termelési lehetőségeket egy $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ $n \times m$ típusú input-output mátrixpár fejezi ki, ahol n a gazdaságban levő áruk, jószágok; m pedig az elemi folyamatok száma. A jószágok között kitüntetett szerepet játszik a munka, melyet külön kezelünk. Legyen $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_m)$ az egyes eljárások munkaigénye. A továbbiak szempontjából elengedhetetlen annak feltételezése, hogy minden egyes termelési eljárás üzemeltetéséhez szükség van munkára, vagyis $\mathbf{v} > \mathbf{0}$. Jelölje $w > 0$ a munkabért. A gazdaságban az árak vektora $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$. Az árakról feltételezzük, hogy eleget tesznek a következő nulla-profit, és komp-

[1] A modell egyenletei:

(NNF)	$\mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{p} \geq \mathbf{0},\ \lambda > 0$
(P)	$\mathbf{Bx} \geq \lambda \mathbf{Ax}$
(D)	$\mathbf{pB} \leq \lambda \mathbf{pA}$
(PD)	$\mathbf{pBx} > 0$

$\mathbf{A}, \mathbf{B} \geq \mathbf{0}$ $n \times m$ típusú konstans mátrixok.

lementaritási feltételeknek:

$$\text{(D)} \qquad \mathbf{pB} \leq (1+\beta)\,(\mathbf{pA} + w\cdot \mathbf{v})$$

$$\text{(DKF)} \qquad \mathbf{pBx} = (1+\beta)\,(\mathbf{pA} + w\cdot \mathbf{v})\mathbf{x},$$

ahol β a profitráta, és $\mathbf{x}$ az egyes eljárások intenzitásának vektora.

A termelési folyamat ráfordításigénye értékben kifejezve, eljárásonkénti bontásban $\mathbf{pA} + w \cdot \mathbf{v}$, ahol $\mathbf{pA}$ az „anyagráfordítás" és $w \cdot \mathbf{v}$ a „munkaráfordítás". Az eljárások bevétele $\mathbf{pB}$. A (D) feltevés szerint egyetlen egy eljárás sem eredményezhet extraprofitot, s másoldalról viszont, (DKF) szerint olyan eljárást, mely β-nál kevesebbet jövedelmez, nem alkalmaznak. A (D)—(DKF) feltételek alkotják a modell *duál* oldalát.

Valamivel komplikáltabbak a *primál* oldal összefüggései. A primál oldal a piaci egyensúly összefüggéseit tartalmazza.

A kínálati oldal a termelés kibocsájtásával azonos, vagyis $\mathbf{Bx}$. Ebből kell fedezni egyrészt a termelő felhasználásokat és a gazdaság bővítésének költségeit, másrészt az improduktív kiadásokat. Vegyük sorba az egyes tételeket!

A termelési folyamat anyagfelhasználása $\mathbf{Ax}$. Tegyük fel, hogy az egységnyi munkaerő piaci kereslete a $\mathbf{p}$ árrendszer mellett $\mathbf{c}(\mathbf{p})$. Mivel a gazdaságban felhasznált összes munkaerő $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}$, ezért a munkaerő piaci kereslete $\mathbf{c}(\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{x})$, vagyis a termelési folyamat ráfordítás igénye $\mathbf{Ax} + \mathbf{c}(\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{vx}) = \mathbf{Ax} + (\mathbf{c}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{x} = [\mathbf{A} + \mathbf{c}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}] \cdot \mathbf{x}$.

Mivel egyenlő az értéktöbblet? Nyilván az összes kibocsájtás értékéből $\mathbf{pBx}$-ből le kell vonni az összes ráfordítás költségeit $\{\mathbf{pAx} + w(\mathbf{vx})\}$-et: $N = \mathbf{pBx} - \{\mathbf{pAx} + (\mathbf{vx})\}$. (DKF)-et figyelembe véve $N = \beta\{\mathbf{pAx} + w(\mathbf{vx})\}$. Ha N értéke pozitív, akkor az értéktöbbletből a gazdaság növelését illetve az improduktív kiadásokat finanszírozzák. Jelölje (1-s) az értéktöbblet improduktív célokra fordított hányadát.

Tegyük fel, hogy a gazdaságban minden egyes eljárás $(1 + \alpha)$-szorosára bővül. Ennek finanszírozása $\alpha(\mathbf{Ax} + \mathbf{c}(\mathbf{p})\mathbf{vx})$ pótlólagos ráfordításra van szükség. Jelölje $\mathbf{g}(\mathbf{p})$ az improduktív kiadások elköltésének szerkezetét. Ha I összeg áll rendelkezésre improduktív kiadásokra, akkor $I \cdot \mathbf{g}(\mathbf{p})$ az improduktív kiadások kereslete. $I = (1 - s)N$. Ha $N \leq 0$, akkor természetesen sem improduktív, sem produktív kiadásokra nincs mód. A fentieket figyelembe véve a primál oldal:

$$\text{(P)} \qquad \mathbf{Bx} \geq (1+\alpha)\{\mathbf{A} + \mathbf{c}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}\}\mathbf{x} + (1-s) \cdot \max\{0, \beta\} \cdot [\mathbf{pAx} + w \cdot \mathbf{vx}] \cdot \mathbf{g}(\mathbf{p})$$

$$\text{(PKF)} \qquad \mathbf{pBx} = (1+\alpha) \cdot \mathbf{p}\{\mathbf{A} + \mathbf{c}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}\}\mathbf{x} + (1-s) \cdot \max\{0, \beta\} \cdot [\mathbf{pAx} + w \cdot \mathbf{vx}] \cdot \mathbf{pg}(\mathbf{p}).$$

A (P) feltétel szerint a kínálatnak fedezni kell a keresletet, míg a (PKF) feltétel szerint a szabad jószágok ára nulla lesz.

A primál és duál oldalt kapcsolja össze a

$$\text{(PD)} \qquad \mathbf{pBx} > 0$$

feltétel.

Nyilván teljesülnek a $\mathbf{p} \geq 0$, $\mathbf{x} \geq 0$ megkötések. Megköveteljük még az $1 + \alpha > 0$, és $1 + \beta > 0$ összefüggéseket.

Összefoglalva: a modellt specifikáló egyenletek a következőek:

(NNF) $1 + \alpha > 0,\ 1 + \beta > 0,\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{p} \geq \mathbf{0}$

(D) $\mathbf{pB} \leq (1 + \beta) \cdot \{\mathbf{pA} + w \cdot \mathbf{v}\}$

(DKF) $\mathbf{pBx} = (1 + \beta) \cdot \{\mathbf{pA} + w \cdot \mathbf{v}\}\mathbf{x}$

(P) $\mathbf{Bx} \geq (1 + \alpha)[\mathbf{A} + \mathbf{c}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}]\mathbf{x} + (1 - s)\max\{0, \beta\} \cdot [\mathbf{pAx} + w \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}] \cdot \mathbf{g}(\mathbf{p})$

(PKF) $\mathbf{pBx} = (1 + \alpha)\mathbf{p}[\mathbf{A} + \mathbf{c}(\mathbf{p})\mathbf{v}]\mathbf{x} + (1 - s)\max\ \{0, \beta\} \cdot [\mathbf{pAx} + w \cdot \mathbf{vx}] \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{p})$

(PD) $\mathbf{pBx} > 0.$

2. A modell Morishima-féle megoldása

Morishima a fenti egyenletek kompatibilitását a következő feltételek mellett bizonyította:

a) g folytonos függvény és $\mathbf{pg}(\mathbf{p}) = 1$, $\mathbf{g}(\mathbf{p}) \geq \mathbf{0}$, $\forall\ \mathbf{p} \geq \mathbf{0}$

b) $\mathbf{c}$ folytonos függvény és $\mathbf{pc}(\mathbf{p}) = w$, $\mathbf{c}(\mathbf{p}) \geq \mathbf{0}$, $\forall\ \mathbf{p} \geq \mathbf{0}$

c) $s > 0$

d) $w > 0$, $\mathbf{v} > 0$

e) **A** és **B** eleget tesz az ún. KMT feltételeknek, vagyis **A** minden oszlopában és **B** minden sorában van pozitív elem, $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{B} \geq \mathbf{0}$. (Kemény—Morgenstern—Thompson féle feltételek.)

A fentiekkel kapcsolatban a következő észrevételek tehetők:

1° Az a) és b) feltételek első látásra elfogadhatóaknak tűnnek. A b) lényegileg az ún. „létminimum-bér"kikötés. A munkások pontosan annyi jövedelemhez jutnak, amennyit elköltenek fogyasztási javakra. Bár ez a feltétel figyelmen kívül hagyja a munkások megtakarítását, mely reális tény, a feltevést mégsem kizárólag közgazdasági okból tartom erősnek. A fő problémát az jelenti, hogy eltekint a $\mathbf{c}(\mathbf{p}) = \mathbf{c}_0$ lehetőségtől, vagyis a konstans kereslet lehetőségétől, mely szintén nem mond ellent a tapasztalatnak. Rugalmatlan kereslet esetén a bizonyítás nem alkalmazható! A modellben szereplő nemlinearitások látszólag igen általánosak, de valójában a felmerülő matematikai nehézségek megkerülését célozzák!

2° Több kifogás emelhető az $s > 0$ megszorítás ellen. Ha az értéktöbbletet teljességgel improduktív módon költik el, akkor Morishima bizonyítása nem alkalmazható. Még súlyosabb a probléma, ha eleve feltételezzük, hogy a gazdaságban csak egyszerű újratermelés lehetséges. Ilyenkor értéktöbblet nem képződik. Annak bizonyításához tehát, hogy mégis létezik egyensúly, fel kell tételezni, hogy ha létezne értéktöbblet, — ami nem létezik — akkor annak pozitív részét költenék a gazdaság növekedésének finanszírozására. Ha az egyszerű újratermelést társadalmi oldalról az egyszerű árutermeléssel, a bővített újratermelést a tőkés gazdasággal azonosítom, akkor az érvelés a következőképpen hangzik:

Ahhoz, hogy az egyszerű árutermelés egzisztenciáját belássam, fel kell tennem, hogy a tőkés termelési módban — amely történetileg, logikailag követi az egyszerű árutermelést — az értéktöbblet pozitív részét fordítják a gazdaság növekedésének finanszírozására.

3° Bár a bizonyítás módja, amit Morishima használ, különösen szellemes, mégis körülményes és egy nagyon nehéz tételre, az *Eilenberg—Montgomery fixponttételre támaszkodik.*

A fenti problémák feloldását kísérelem meg a következő pontokban.

A modell egzisztenciáját a következő feltételek mellett fogom bizonyítani:

a) $\mathbf{g}$ folytonos függévny $\mathbf{p} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{p}) \leq \mathbf{1}$, $\mathbf{g}(\mathbf{p}) \geq \mathbf{0}$

b) $\mathbf{c}$ folytonos függvény $\mathbf{c}(\mathbf{p}) \geq 0 \ \forall \ \mathbf{p}$

c) $s \geq 0$

d) $w > 0$, $\mathbf{v} > 0$

e) $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ eleget tesz a KMT feltételeknek, vagyis $\mathbf{A}$ minden oszlopában és $\mathbf{B}$ minden sorában van pozitív elem, $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{B} \geq \mathbf{0}$.

3. A három-mátrix modell

A Neumann-típusú modellek sem az árak nagyságát, sem a termelés szintjét nem határozzák meg, csak a megfelelő arányokat. Feltehető tehát, hogy

$$\mathbf{x} \in S_m = \left\{\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \,\middle|\, \sum_{j=1}^{m} x_j = 1\right\}, \quad \mathbf{p} \in S_n = \left\{\mathbf{p} \geq \mathbf{0} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\right\}.$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\lambda = 1 + \alpha, \ \mu = 1 + \beta$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{A} + w \cdot \mathbf{1} \cdot \mathbf{v}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{A} + \mathbf{c}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v} + (1 - s) \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \max\{0, \mu - 1\} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{p})\{\mathbf{pA} + w \cdot \mathbf{v}\}.$$

Ezen jelölések segítségével a modell egyenletei:

(NNF) $\xi > 0$, $\mu > 0$, $\mathbf{p} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$
(D) $\mathbf{pB} \leq \mu\mathbf{pG}$
(DKF) $\mathbf{pBx} = \mu\mathbf{pGx}$
(P) $\mathbf{Bx} \geq \lambda\mathbf{F}(\mathbf{p}, \lambda, \mu)\mathbf{x}$
(PKF) $\mathbf{pBx} = \lambda\mathbf{pF}(\mathbf{p}, \lambda, \mu)\mathbf{x}$
(PD) $\mathbf{pBx} > 0$.

A $\mathbf{G}$ mátrix konstans, az $\mathbf{F}$ pedig $(\mathbf{p}, \lambda, \mu)$ függvénye. Mivel a $\mathbf{c} : S_n \to R^n_+$ és $\mathbf{g} : S_n \to R^n_+$ *folytonos* függvények, ezért az $\mathbf{F}(\mathbf{p}, \lambda, \mu)$ mátrix a változók folytonos függvénye lesz, hiszen az $\mathbf{F}(.,.,.)$ a $S_n \times (0, \infty) \times (0, \infty)$ halmazon van értelmezve, s így az $\mathbf{F}$ definíciójában szereplő $1/\lambda$, mely a későbbiekben döntő szerepet játszik, az $\mathbf{F}$ folytonosságát az *értelmezési tartományon* nem befolyásolja.

Tekintsünk most el az $\mathbf{F}$ és $\mathbf{G}$ mátrixok konkrét származtatásától. Definiáljuk a következő egyenleteket:

(NNF) $\mathbf{x}, \mathbf{p} \geq \mathbf{0}$; $\lambda, \mu > 0$
(D) $\mathbf{pB}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \mu) \leq \mu\mathbf{pG}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \mu)$
(DKF) $\mathbf{pB}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \mu)\mathbf{x} = \mu\mathbf{pG}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \mu)\mathbf{x}$
(P) $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \mu)\mathbf{x} \geq \lambda\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \mu)\mathbf{x}$

(PKF) $\mathbf{pB}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{pF}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \mu)\mathbf{x}$

(PD) $\mathbf{pB}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \mu)\mathbf{x} > 0.$

Összehasonlítva a Neumann modell szokásos egyenleteivel két szembetűnő eltérést tapasztalhatunk.

1° A modell aszimmetrikus

2° A modell mátrixai a változók $(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \mu)$ függvényei. Tegyük fel, hogy a mátrixok a *változók folytonos függvényei.*

Az aszimmetrikus modellek vizsgálatát J. Łoś kezdeményezte[2] [1], [3], [5]. Az általa követett bizonyítás — mely a Kakutani-féle fixponttételre támaszkodik — könnyűszerrel általánosítható arra az esetre, ha $(\mathbf{F}, \mathbf{B}, \mathbf{G})$ a $(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ változók folytonos függvénye, de a λ és a μ bekapcsolása az általa követett módon nem lehetséges. Jegyezzük meg, hogy a modell aszimmetriája miatt λ és μ — szemben a szimmetrikus esettel — nem azonos. MORISHIMA[3] [1], [6], [7] olyan általános modell vizsgálatát végezte el, melyben a modell mátrixai (p, λ)-nak folytonos függvényei, de a modell szimmetrikus. Az itt követett megközelítés a fenti két „irányzat" egyesítésén alapszik.

Legyen $X = S_m \times S_n \times (0, \infty) \times (0, \infty)$. Definiálok egy $\Phi : X \to X$ ponthalmaz leképezést, melynek fixpontja a modell egyensúlyi megoldása. Φ-t négy leképezés direkt szorzataként definiálom.

$$\Phi(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \lambda, \mu) = V \times W \times \{\tilde{\lambda}\} \times \{\tilde{\nu}\}.$$

Az áttekinthetőség végett vezessük be a

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \mu) = \nu \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, 1/\nu) - \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, 1/\nu)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \nu) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, 1/\nu) - \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, 1/\nu)$$

[2] Az általa vizsgált modell:

(NNF) $\mathbf{x}, \mathbf{p} \geq \mathbf{0}, \ \lambda > 0, \mu > 0$
(P) $\mathbf{Bx} \geq \lambda\mathbf{Fx}$
(D) $\mathbf{pB} \leq \mu\mathbf{pG}$
(PKF) $\mathbf{pBx} = \lambda\mathbf{pFx}$
(DKF) $\mathbf{pBx} = \mu\mathbf{pGx}$
(PD) $\mathbf{pBx} > 0$

$\mathbf{F} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{B} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{G} \geq \mathbf{0}$ konstans mátrixok. A modell egzisztenciáját az alábbi feltételek mellett bizonyítja:

1° $(\mathbf{F}, \mathbf{B})$ eleget tesz a KMT feltételeknek.
2° $\mathbf{G} + \mathbf{B} > \mathbf{0}$.
3° $\exists \xi > 0$, $\mathbf{F} \leq \xi\mathbf{G}$.
2°—3° nyilván teljesül, ha $\mathbf{G} > \mathbf{0}$. Az irodalomban J. Łoś feltételeit a $\mathbf{G} > \mathbf{0}$ feltétellel szokás idézni.

[3] A modell egyenletei:

(NNF) $\mathbf{x} \geq 0, \mathbf{p} \geq 0, \lambda > 0$
(P) $\mathbf{Bx} \geq \lambda\mathbf{M}(\mathbf{p}, \lambda)\mathbf{x}$
(D) $\mathbf{pB} \leq \lambda\mathbf{pM}(\mathbf{p}, \lambda)$.

A modell megoldhatóságát biztosító feltételek:

1° $(\mathbf{M}(\mathbf{p}, \lambda), \mathbf{B})$ eleget tesz a KMT feltételeknek.
2° $\mathbf{M}(\mathbf{p}, \lambda)$ folytonosan kiterjeszthető $S_n \times (0, \infty)$ -ről $S_n \times [0, \infty]$-re.

mátrixokat. Felhívom a figyelmet a ν illetve az $1/\nu$ tag szerepeltetésére. Jelölje $m(\mathbf{u})$ az $\mathbf{u}$ vektor maximális komponensét, $m(\mathbf{u}) = \max\limits_i (u_i)$

$$W(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \lambda, \nu) = \{\tilde{\mathbf{p}} \in S_n \mid \{\tilde{\mathbf{p}}\mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \nu) \cdot \mathbf{x}\} \to \max\}$$

$$V(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \lambda, \nu) = \{\tilde{\mathbf{x}} \in S_m \mid \{\mathbf{p}\mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \nu) \cdot \tilde{\mathbf{x}}\} \to \max\}$$

$$\tilde{\lambda}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \lambda, \nu) = \frac{\lambda + \max\{0, -\mathbf{p}\mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \nu)\mathbf{x}\}}{1 + \max\{0, m(\mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \nu)\mathbf{x})\}}$$

$$\tilde{\nu}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \lambda, \nu) = \frac{\nu + \max\{0, -\mathbf{p}\mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \nu)\mathbf{x}\}}{1 + \max\{0, m(\mathbf{p}\mathbf{D}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \nu))\}}$$

TÉTEL: Ha $(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \nu^*) \in X$ a Φ-nek fixpontja, vagyis ha $(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \nu^*) \in \Phi(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \nu^*)$ akkor $(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, 1/\nu^*)$ kielégíti az (NNF)—(PKF) feltételeket.

Bizonyítás: Ha $(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \nu^*) \in X$ a Φ fixpontja, akkor

1° $\mathbf{x}^* \in V(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \nu^*)$

2° $\mathbf{p}^* \in W(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \nu^*)$

$$3^\circ \quad \lambda^* = \frac{\lambda^* + \max\{0, -\mathbf{p}^*\mathbf{C}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \nu^*)\mathbf{x}^*\}}{1 + \max\{0, m(\mathbf{C}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \nu^*)\mathbf{x}^*)\}}$$

$$4^\circ \quad \nu^* = \frac{\nu^* + \max\{0, -\mathbf{p}^*\mathbf{D}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \nu^*)\mathbf{x}^*\}}{1 + \max\{0, m(\mathbf{p}^*\mathbf{D}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \nu^*)\mathbf{x}^*)\}}.$$

A 3°-t átrendezve:

$$\lambda^* \cdot \max\{0, m(\mathbf{C}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \nu^*)\mathbf{x}^*)\} = \max\{0, -\mathbf{p}^*\mathbf{C}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \nu^*)\mathbf{x}^*\}.$$

Meg fogom mutatni, hogy $\mathbf{p}^*\mathbf{C}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \nu^*)\mathbf{x}^* = 0$. A bizonyítást indirekt úton végzem el. Ha $\mathbf{p}^*\mathbf{C}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \nu^*)\mathbf{x}^* > 0$, akkor mivel $0 < \lambda^* < \infty$, ezért $0 \geq m(\mathbf{C}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \nu^*)\mathbf{x}^*) \geq \mathbf{p}^*\mathbf{C}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \nu^*)\mathbf{x}^* > 0$ Ha $\mathbf{p}^*\mathbf{C}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \nu^*) \times \times \mathbf{x}^* < 0$, akkor $m(\mathbf{C}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \nu^*)\mathbf{x}^*) > 0$, vagyis $0 < e_{j0}\mathbf{C}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \nu^*)\mathbf{x}^* \leq \mathbf{p}^*\mathbf{C}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \nu^*)\mathbf{x}^* < 0$, hiszen $\mathbf{p}^* \in W(\mathbf{p}^*, \mathbf{x}^*, \lambda^*, \nu^*) = \{\tilde{\mathbf{p}} \in S_n | \tilde{\mathbf{p}}\{\mathbf{C}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \nu^*)\mathbf{x}^*\} \to \max\}$. Tehát $\mathbf{p}^*\mathbf{C}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \nu^*)\mathbf{x}^* = 0$. Ebből ismét a $\mathbf{p}^* \in \in W(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \nu^*)$ relációt figyelembe véve $\mathbf{e}_j\mathbf{C}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \nu^*)\mathbf{x}^* \leq 0$, vagyis $\mathbf{C}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \nu^*)\mathbf{x}^* \leq 0$.

Teljesen analóg módon érvelve $\mathbf{p}^*\mathbf{D}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \nu^*) \leq 0$, $\mathbf{p}^*\mathbf{D}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \nu^*) \times \times \mathbf{x}^* = 0$.

Behelyettesítve $\mathbf{C}$ és $\mathbf{D}$ definícióját:

(P) $\mathbf{B}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, 1/\nu^*)\mathbf{x}^* \geq \lambda^*\mathbf{F}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, 1/\nu^*)\mathbf{x}^*$
(PKF) $\mathbf{p}^*\mathbf{B}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, 1/\nu^*)\mathbf{x}^* = \lambda^*\mathbf{p}^*\mathbf{F}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, 1/\nu^*)\mathbf{x}^*$
(D) $\nu^*\mathbf{p}^*\mathbf{B}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, 1/\nu^*) \leq \mathbf{p}^*\mathbf{G}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, 1/\nu^*)$
(DKF) $\nu^*\mathbf{p}^*\mathbf{B}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, 1/\nu^*)\mathbf{x}^* = \mathbf{p}^*\mathbf{G}(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, 1/\nu^*)\mathbf{x}^*$.

$\mu^* = 1/\nu^*$ választással azonnal látható, hogy $(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \lambda^*, \mu^*)$ valóban egyensúlyi megoldás.

Megjegyzés: A későbbiek szempontjából ki kell emelni, hogy pl. a (P)—(PKF) reláció belátásához csakis a 2°—3° és a $0 < \lambda^* < \infty$ relációkra kellett támaszkodni, s pl. ν^* értékét nem kellett figyelembe venni.

4. Milyen feltételek mellett létezik Φ-nek fixpontja?

TÉTEL: A Φ pont-halmaz leképezés felülről félig folytonos, nem üres konvex képhalmazokkal.

Bizonyítás: A $\widetilde{\lambda}, \widetilde{\nu}$ nyilván folytonos függvények. Nyilván $W(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \nu)$ és $V(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \nu)$ nemüres, konvex halmazok, hiszen — rögzített $(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \nu)$-re —egy lineáris függvénynek egy konvex kompakt halmazon való optimumhelyeinek halmazaiként definiálódtak.

Lemma: $W: X \to S_n$ és $V: X \to S_m$ felülről félig folytonos pont-halmaz leképezések.

Bizonyítás: Elegendő pl. csak W felülről félig folytonosságát belátni, a V-re vonatkozó állítás teljesen analóg.

Legyen $\{(\mathbf{x}_n, \mathbf{p}_n, \lambda_n, \nu_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ és $\lim\limits_n (\mathbf{x}_n, \mathbf{p}_n, \lambda_n, \nu_n) = (\mathbf{x}_\infty, \mathbf{p}_\infty, \lambda_\infty, \nu_\infty) \in X$. Legyen $\widetilde{p}_n \in W(\mathbf{x}_n, \mathbf{p}_n, \lambda_n, \nu_n)$ és $\lim\limits_n \widetilde{\mathbf{p}}_n = \widetilde{\mathbf{p}}_\infty$. Azt kell belátni, hogy $\widetilde{\mathbf{p}}_\infty \in W(\mathbf{x}_\infty, \mathbf{p}_\infty, \lambda_\infty, \nu_\infty)$. Mivel $\widetilde{\mathbf{p}}_n \in W(\mathbf{x}_n, \mathbf{p}_n, \lambda_n, \nu_n)$, ezért $\widetilde{\mathbf{p}}_n\{\mathbf{C}(\mathbf{x}_n, \mathbf{p}_n, \lambda_n, \nu_n)\mathbf{x}_n\} \geq \widetilde{\mathbf{p}}\{\mathbf{C}(\mathbf{x}_n, \mathbf{p}_n, \lambda_n, \nu_n)\mathbf{x}_n\}$, $\forall\, \widetilde{\mathbf{p}} \in S_n$. Mivel $\mathbf{C}$ folytonos, ezért a határátmenetet elvégezve $\widetilde{\mathbf{p}}_\infty\{\mathbf{C}(\mathbf{x}_\infty, \mathbf{p}_\infty, \lambda_\infty, \nu_\infty)\mathbf{x}_\infty\} \geq \widetilde{\mathbf{p}}\{\mathbf{C}(\mathbf{x}_\infty, \mathbf{p}_\infty, \lambda_\infty, \nu_\infty)\mathbf{x}_\infty\}$, $\forall\, \widetilde{\mathbf{p}} \in S_n$, vagyis $\widetilde{\mathbf{p}}_\infty \in W(\mathbf{x}_\infty, \mathbf{p}_\infty, \lambda_\infty, \nu_\infty)$.

A $\Phi = V \times W \times \{\widetilde{\lambda}\} \times \{\widetilde{\nu}\}$ X-ből X-be ható pont-halmaz leképezés, mely a Kakutani fixponttétel feltételeinek „majdnem" eleget tesz. Az egyetlen probléma, hogy X nem kompakt. Az $X = S_m \times S_n \times (0, \infty) \times (0, \infty)$ homeomorf az $X' = S_m \times S_n \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ halmazzal. A homeomorfizmus legyen f. A $\Phi' = f \circ \Phi \circ f^{-1}$ pont-halmaz leképezés X'-t X'-re képezi, s nyilván továbbra is felülről félig folytonos leképezés konvex, nemüres képhalmazokkal. Φ-nek akkor és csakis akkor van fixpontja, ha Φ'-nek van fixpontja.

Tekintsük az $\bar{X}' = S_m \times S_n \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ halmazt. Tegyük fel, hogy Φ'-t ki tudjuk terjeszteni X'-ről $\bar{X}'$-re úgy, hogy:

1° Φ' továbbra is felülről félig folytonos pont-halmaz leképezés nemüres, konvex képhalmazokkal.
2° Φ'-nak nincs fixpontja $\bar{X}'/X'$-ben.

Ekkor, mivel $\Phi': \bar{X}' \to \bar{X}'$ a Kakutani tétel alapján rendelkezik fixponttal, ezért Φ-nek is van fixpontja.

A továbbiakban — az egyszerűség végett — az $\mathbf{f}$ homeomorfizmustól eltekintek, s közvetlenül Φ-nek $S_n\times S_m\times(0,\infty)\times(0,\infty)$-ről $S_n\times S_m\times[0,\infty]\times\times[0,\infty]$-re való kiterjesztéséről fogok beszélni.[4]

Φ-nek X-ről $\bar{X}$-ra való kiterjesztését „komponensenként" célszerű elvégezni. A

$$W(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \lambda, \nu) = S_n \qquad (\mathbf{p}, \mathbf{x}, \lambda, \nu) \in \bar{X}/X$$

$$V(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \lambda, \nu) = S_m \qquad (\mathbf{p}, \mathbf{x}, \lambda, \nu) \in \bar{X}/X$$

definícióval W-t és V-t egyszerűen kiterjesztjük X-ről $\bar{X}$-ra, s a leképezések nyilván továbbra is felülről félig folytonosak maradtak, s a képhalmazok pedig konvexek és nemüresek.

Több gondot jelentenek a $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\nu}$ függvények. Ha $\tilde{\lambda}$-ot és $\tilde{\nu}$-ot folytonosan ki tudjuk terjeszteni X-ről $\bar{X}$-ra akkor a Φ'-nek létezik $\bar{X}$-ben fixpontja. Legyen ez $(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \nu)$. Ha $0 < \lambda, \nu < \infty$, akkor a fixpont nem eshet $\bar{X}\setminus X$-be, vagyis csak X-be eshet.

A fixpont létezésének feltételei tehát két csoportba oszthatók:

1° $\tilde{\lambda}$ és $\tilde{\nu}$ folytonos kiterjeszthetőségét biztosító feltételek,
2° a fixpontok elhelyezkedését biztosító „peremfeltételek".

Megjegyzés: A $\tilde{\lambda}$ és $\tilde{\nu}$ függvényeknek mint többváltozós függvényeknek kell folytonosaknak lenniök és nem elegendő, ha parciálisan folytonosan kiterjeszthetőek. Másképpen: az hogy pl. a $\lim\limits_{\lambda\to 0}\tilde{\lambda}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \lambda, \nu)$ létezik, még nem jelenti azt, hogy $\tilde{\lambda}$ kiterjeszthető a $\lambda = 0$ pontra. Ha azonban a fenti határérték a többi változóban *egyenletes*, akkor — az analízis egy ismert tétele alapján — az így kiterjesztett függvény folytonos lesz.

Foglalkozzunk először a Morishima modellel:

$$\tilde{\nu}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \cdot, \nu) = \frac{\nu + \max\{0, \mathbf{pGx} - \nu\mathbf{pBx}\}}{1 + \max\{0, m(\nu\mathbf{pB} - \mathbf{pG})\}}.$$

$\tilde{\nu}$ nem függ λ-tól. Legyen

$$\tilde{\nu}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \nu) = \begin{cases} \mathbf{pGx}, & \text{ha} \quad \nu = 0 \\ \dfrac{1}{m(\mathbf{pB})}, & \text{ha} \quad \nu = \infty. \end{cases}$$

$\tilde{\nu}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \nu)$ folytonos. A $\nu = 0$ pontban a folytonosság nyilvánvaló.

$$\lim_{\nu\to\infty}\tilde{\nu}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \nu) = \lim_{\nu\to\infty}\frac{1 + \max\left\{0, \dfrac{\mathbf{pGx}}{\nu} - \mathbf{pBx}\right\}}{\dfrac{1}{\nu} + \max\left\{0, m\left(\mathbf{pB} - \dfrac{\mathbf{pG}}{\nu}\right)\right\}} = \frac{1}{m(\mathbf{pB})}.$$

$\tilde{\nu}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, 0) = \mathbf{pGx} = \mathbf{pAx} + w \cdot \mathbf{vx} > 0$, hiszen $w\mathbf{v} > 0$ és $\mathbf{x}$ szemipozitív.

[4] $[0,\infty]$-t mint a $[0,\infty)$ egy pont kompaktifikációjaként képzeljük el, vagyis a ∞ pont egy környezete pl. $K_\lambda = \{\mu \mid \lambda \leq \mu\}$ halmaz.

$\tilde{\nu}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \infty) < +\infty$ hiszen $\mathbf{B}$ minden sorában van pozitív elem és így $m(\mathbf{pB}) > 0$.
$\tilde{\lambda}$ kiterjesztése előtt alakítsuk át $\mathbf{F}$-et — küszöböljük ki μ-t.

$$\mathbf{F} = \mathbf{A} + \mathbf{c}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v} + \frac{(1-s)}{\lambda} \max\{0, \mu - 1\} \mathbf{g}(\mathbf{p})[\mathbf{pA} + w \cdot \mathbf{v}] =$$

$$= \mathbf{A} + \mathbf{c}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v} + \frac{(1-s)}{\lambda} \max\left\{0, \frac{\mathbf{pBx}}{\mathbf{pGx}} - 1\right\} \mathbf{g}(\mathbf{p})[\mathbf{pA} + w \cdot \mathbf{v}]$$

$\left(\text{Felhasználtam a } \mu = \dfrac{\mathbf{pBx}}{\mathbf{pGx}} \text{ relációt (DKF) és } \mathbf{pGx} > 0\text{-t.}\right)$

$$\lim_{\lambda \to \infty} \tilde{\lambda}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \lambda) = (\tilde{\lambda}\mathbf{p}, \mathbf{x}, \infty) = \frac{1}{m(\mathbf{F}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \infty))} = \frac{1}{m([\mathbf{A} + \mathbf{c}(\mathbf{p})\mathbf{v}]\mathbf{x})} < \infty$$

$$\tilde{\lambda}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, 0) = \lim_{\lambda \to 0} \tilde{\lambda}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \lambda) =$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \frac{\lambda + \max\{0, \mathbf{pBx} - \lambda\mathbf{pFx}\}}{1 + \max\{0, m(\lambda\mathbf{Fx} - \mathbf{Bx})\}} =$$

$$= \frac{\max\{0, \mathbf{pBx} - \lim\limits_{\lambda \to 0} \lambda\mathbf{pFx}\}}{1 + \max\{0, m(\lim\limits_{\lambda \to 0} \lambda\mathbf{Fx} - \mathbf{Bx})\}} =$$

$$= \frac{\max\left\{0, \mathbf{pBx} - (1-s)\max\left\{0, \dfrac{\mathbf{pBx}}{\mathbf{pGx}} - 1\right\} \mathbf{pg}(\mathbf{p})\mathbf{pGx}\right\}}{1 + \max\left\{0, m\left[(1-s)\max\left\{0, \dfrac{\mathbf{pBx}}{\mathbf{pGx}} - 1\right\} \mathbf{g}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{pGx} - \mathbf{Bx}\right]\right\}} \geq$$

$$\geq \frac{\max\{0, \mathbf{pBx} - (1-s)\max\{0, \mathbf{pBx} - \mathbf{pGx}\}\}}{1 + \max\{0, m[(1-s)\max\{0, \mathbf{pBx} - \mathbf{pGx}\} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{p}) - \mathbf{Bx}]\}} \geq$$

$$\geq \frac{\min(\mathbf{pBx}, \mathbf{pGx})}{1 + K(\mathbf{p}, \mathbf{x})}.$$

Megjegyzés: Csak $\tilde{\lambda}$ és $\tilde{\nu}$ parciális kiterjeszthetőséget ellenőriztem. $\tilde{\lambda}$ és $\tilde{\nu}$ mint többváltozós függvények azért folytonosak, mivel a kiterjesztés során kiszámolt határértékek $(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ szerint nyilván egyenletesek.

Legyen $(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \lambda, \nu)$ a $\Phi : \bar{X} \to \bar{X}$ leképezés fixpontja. Ekkor $\nu = \tilde{\nu}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \nu)$. Mivel $\tilde{\nu}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, 0) \neq 0$ és $\tilde{\nu}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \infty) < \infty$, ezért $0 < \nu < \infty$. Az előző paragrafus tételében követett megfontolásokat megismételve belátható, hogy $\nu\mathbf{pBx} = \mathbf{pGx}$. Mivel $\mathbf{pGx} > 0$ és $0 < \nu < \infty$ ezért $\mathbf{pBx} > 0$. Ebből $\tilde{\lambda}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, 0) > 0$. Mivel $\lambda = \tilde{\lambda}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \lambda)$, ezért $0 < \lambda < \infty$, vagyis $(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \lambda, \nu) \in X$. Tehát a modellnek létezik egyensúlya.

Most térjünk rá az általános három — mátrix modell vizsgálatára.

Feltétel

1° $\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \nu), \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \nu), \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \nu)$ folytonosan kiterjeszthetőek $X = S_m \times S_n \times (0, \infty) \times (0, \infty)$-ről $\bar{X} = S_m \times S_n \times [0, \infty] \times [0, \infty]$-re.
2° $\{\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \nu), \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \nu)\}$ eleget tesz a KMT feltételeknek az egész $\bar{X}$ halmazon.
3° $\mathbf{p}\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \nu)\mathbf{x} > 0$ az egész $\bar{X}$ halmazon.

Ezek a feltevések J. Łoś és Morishima által tett feltevések „egyesítéséből" származnak.

Mivel a $\tilde{\lambda}$ és $\tilde{\nu}$ definíciójában szereplő kifejezések folytonosan kiterjeszthetőek X-ről $\bar{X}$-ra könnyűszerrel belátható, hogy $\tilde{\lambda}$ és $\tilde{\nu}$ is kiterjeszthető $\bar{X}$-ra

$$\tilde{\lambda}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, 0, \nu) = \mathbf{p}\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, 0, \nu)\mathbf{x}$$

$$\tilde{\lambda}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \infty, \nu) = \frac{1}{m(\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \infty, \nu))} < \infty$$

$$\tilde{\nu}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \lambda, 0) = \mathbf{p}\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, 0)\mathbf{x} > 0$$

$$\tilde{\nu}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \lambda, \infty) = \frac{1}{m(\mathbf{p}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \infty))} < \infty.$$

Felhasználva a 2°–3° feltételeket, – és megismételve az előző paragrafus tételének bizonyítását – beláthatjuk, hogy ha $(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \nu)$ fixpont, akkor

$$\nu\mathbf{p}\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \nu)\mathbf{x} = \mathbf{p}\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \nu)\mathbf{x} > 0,$$

amiből
$$0 < \nu < \infty \text{ és } \mathbf{p}\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \nu)\mathbf{x} > 0,$$

és így
$$0 < \lambda < \infty, \text{ vagyis } (\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \nu) \in X.$$

Megjegyzés: A folytonos kiterjesztés feltétele rendkívül elegáns, könnyen megjegyezhető. Sajnos a Morishima modell *általánosított* formájára nem alkalmazható, hiszen az $\mathbf{F}$ mátrixra – a definíciójában szereplő $1/\lambda$ tag miatt – a folytonos kiterjeszthetőség feltétele nem áll fenn. Ha a modell konzisztenciáját egy általános tételből kívánjuk levezetni, akkor $\mathbf{F}$ kiterjeszthetőségét a következő módon kell megkövetelni:
1°′ $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \nu)$ folytonosan kiterjeszthető az $X = S_m \times S_n \times (0, \infty) \times (0, \infty)$ halmazról az $\bar{X} = S_m \times S_n \times [0, \infty] \times [0, \infty]$ halmazra *megengedve*, hogy egyes komponensek $+\infty$-nel legyenek egyenlőek, de megkívánva, hogy $\lambda\mathbf{F}$ a $\lambda = 0$ pontban folytonos legyen és $\lim_{\lambda \to 0} \lambda\mathbf{p}\mathbf{F}\mathbf{x} < \mathbf{p}\mathbf{B}\mathbf{x}$ valahányszor $\mathbf{p}\mathbf{B}\mathbf{x} > 0$.

5. A Morishima féle megoldással való összevetés

Térjünk vissza a Morishima féle feltételekhez. Tekintsük a következő három-mátrix modellt:

$$\mathbf{B}$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{A} + w\,\mathbf{1} \cdot \mathbf{v}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{A} + w \cdot \mathbf{c}(\mathbf{p})\mathbf{v} + (1 - s)\max\left\{0, \frac{\lambda - 1}{\lambda s}\right\} \mathbf{g}(\mathbf{p})(\mathbf{p}\mathbf{A} + w \cdot \mathbf{v}).$$

A $\max\left\{0, \frac{\lambda-1}{\lambda s}\right\}$ folytonosan kiterjeszthető $(0, \infty)$-ről $[0, \infty]$-re, s így az $(\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{B})$ három-mátrix modell együtthatói folytonosan kiterjeszthetők X-ről $\bar{X}$-ra, tehát létezik egyensúlyi pont. Az egyensúlyi pont egyenleteit felírva, és kihasználva a $\mathbf{pc(p)} = \mathbf{pg(p)} = 1$ relációkat:

(NNF) $\quad \mathbf{p}, \mathbf{x} \geq 0, \quad \lambda, \mu > 0$

(P) $\quad \mathbf{Bx} \geq \lambda[\mathbf{A} + w \cdot \mathbf{c(p)} \cdot \mathbf{v}]\mathbf{x} + \frac{(1-s)}{s} \max(0, \lambda - 1) \cdot \mathbf{g(p)} \times \times(\mathbf{pAx} + w \cdot \mathbf{vx})$

(PKF) $\quad \mathbf{pBx} = \lambda[\mathbf{pAx} + w \cdot \mathbf{vx}] + \frac{(1-s)}{s} \max(0, \lambda - 1) \times \times(\mathbf{pAx} + w \cdot \mathbf{vx}) = \left(\lambda + \frac{(1-s)}{s} \max(0, \lambda - 1)\right)(\mathbf{pAx} + w \cdot \mathbf{vx})$

(D) $\quad \mathbf{pB} \leq \mu(\mathbf{pA} + w\mathbf{v})$

(DKF) $\quad \mathbf{pBx} = \mu(\mathbf{pA} + w \cdot \mathbf{v})\mathbf{x}$

(PD) $\quad \mathbf{pBx} > 0.$

A PKF — DKF relációkat összevetve

$$\mu = \lambda + \frac{(1-s)}{s} \max(0, \lambda - 1), \text{ amiből}$$

$\max\left(0, \frac{\lambda - 1}{s}\right) = \max(0, \mu - 1)$. Behelyettesítve P-be és PKF-be kapjuk, hogy $(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \lambda, \mu)$ a modell egyensúlyi megoldása.

(Beérkezett: 1982. február 3-án)

IRODALOM

1. Bauer, L.: Consumption in von Neumann matrix models. [2] 13—27 p.
2. Łoś, J.—Łoś, M. W.: Mathematical models in economics. North-Holland-American Elsevier, 1974.
3. Łoś, J.: Labour, consumption and wages in von Neumann models. [2] 67—73 p.
4. Łoś, J.—Łoś, M. W.: Computing equilibria: how and why? North-Holland-American Elsevier, 1976.
5. Łoś, J.: Extended von Neumann models and game theory. [4] 141—159 p.
6. Morishima, M.: Economic expansion and the interest rate in generalized von Neumann models, Econometrica 28. 352—363 p.
7. Morishima, M.: Theory of economic growth, Clarendon Press, 1969.

ON MORISHIMA'S GENERALIZATION OF THE NEUMANN MODEL

The paper contains a new generalization of von Neumann's model enabling a unified approach to various well-known general models of the von Neumann-type (M. Morishima, J. Łoś). The existence of an equilibrium solution of the generalized model relies on Kakutani's fixed point theorem.

ОБОБЩЕНИЕ МОРИШИМА МОДЕЛИ НЕЙМАННА

Рассматриваемая работа содержит некоторое обобщение модели Неймана, которая позволяет рассмотрение общих моделей, по типу являющихся неймановскими (М. Моришима, Е. Лош) и известных по специальной литературе в рамках единого подхода. Существование сбалансированного решения обобщенной модели базируется на теореме фиксированной точки Какутани.

HABLICSEK LÁSZLÓ

Korspecifikus termékenységi arányszámok modellezése

Azokban a tudományágakban, ahol a vizsgálatok tárgyát képező jelenségek nem ismételhetők, a fizikai értelemben vett kísérletezés kizárt, állandó problémát jelent a jelenségek megvalósulásának modellezése, az empirikus adatok matematikai jellegű leírása.

Ez a demográfiában sincs másképp, annak ellenére, hogy általában bőséges népesedés-statisztikai adatok állnak rendelkezésre és a népességtudomány axiómarendszerét módszertanát és számítási eljárásait részletesen kidolgozták. Az alapprobléma az, hogy a társadalmi-gazdasági-demográfiai tényezők a jelenségek megvalósulását igen összetett, bonyolult módon határozzák meg, és a meghatározó formációk sokaságához képest a rendelkezésre álló konkrét realizációk száma kevés.

A tanulmányban demográfiai megoszlások modellezési lehetőségeit vizsgálom. A népmozgalom alapjelenségei, a *termékenység, a házassági és a vándormozgalom*, valamint a *halandóság*, mint az ember *életútjához kötött* jelenségek számos megoszlást produkálnak, például életkor szerint. Diszkrét megközelítésben tekinthetjük azt, mekkora valószínűséggel ad gyermeknek életet egy nő x és $(x + 1)$-éves kora között (f_x), milyen valószínűséggel köti meg első házasságát x évesen (n_x), mekkora „esélye" van arra, hogy x-dik és $(x + 1)$-dik születésnapja között meghaljon (q_x). A felsoroltak nem a valószínűségszámítás értelmében vett valószínűségeloszlások, hiszen összegük általában nem egy. Sorozatokról, illetve folytonos megközelítésben függvényekről van szó, melyek az adott jelenség életkor szerinti megvalósulását leírják.

A folytonos megközelítés az f, n, q függvényekkel operál, melyek az x változó (életkor) folytonos függvényei. Ebben az esetben az $(a, a + \Delta a)$ intervallumban az elhalálozás valószínűsége közelítőleg $q(a)\,\Delta a$-val egyenlő, vagyis valószínűségszámítási analógiával q „sűrűségfüggvény". Azt fogjuk mondani, hogy $q(a)$ az a életkorbeli elhalálozás valószínűsége.

Az empirikus adatok matematikai leírása, a valószínűségeket megadó függvénytípus keresése régóta tárgya demográfusok és matematikusok kutatásainak, jelentősége a népesedési folyamatok jobb megismerésében nyilvánvaló. Az adott jelenség megvalósulását leíró függvény

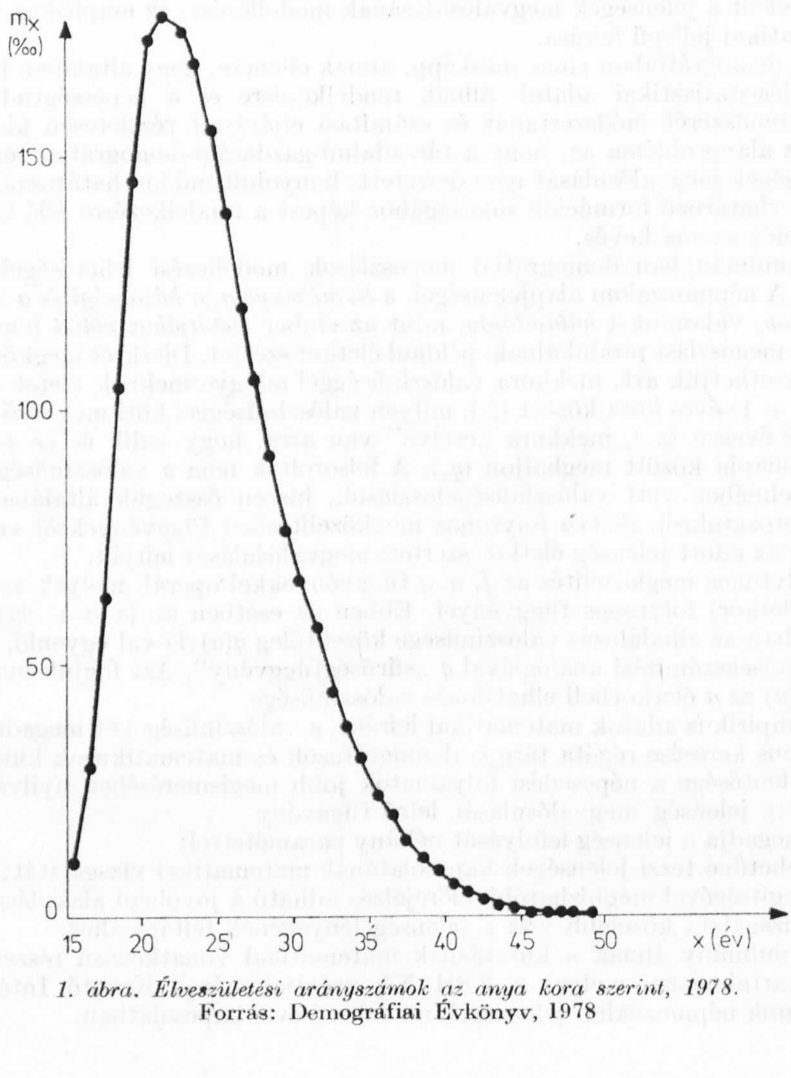
- megadja a jelenség lefolyását néhány paraméterrel;
- lehetővé teszi jelenségek kapcsolatának matematikai vizsgálatát;
- segítségével megbízhatóbb előrejelzés adható a jövőbeni alakulásra;
- vizsgálata közelebb visz a jelenség lényegének feltárásához.

A tanulmány annak a kutatásnak matematikai vonatkozású részeredményeit tartalmazza, melyet a KSH Népességtudományi Kutató Intézetben folytatunk népmozgalmi jelenségek modellezésével kapcsolatban.

A termékenységi függvény tulajdonságai

A következőkben a *korspecifikus termékenységi arányszámok* függvényszerű leírásával foglalkozunk, ami egy x éves nőre – adott naptári évben, vagy másik szemléletmód szerint x éves korában – jutó élveszületések száma (m_x). Élveszületési valószínűségek helyett azért célszerű arányszámokat tekinteni, mert a népmozgalmi statisztikában közvetlenül hozzáférhetőek és előreszámítási célokra is alkalmasabbak. A továbbiakban az m_x, $x = 15, 16, \ldots, 49$ adatsort termékenységi arányszámoknak, a megfelelő folytonos függvényt termékenységi függvénynek nevezzük.

A termékenységi függvény lényeges külső jegyeinek leírására függvényelemzési módszer alkalmas. Bár itt csak a termékenységgel foglalkozunk, az alkalmazott gondolatmenet más jelenségekre is analóg módon alkalmazható.



1. ábra. Élveszületési arányszámok az anya kora szerint, 1978.
Forrás: Demográfiai Évkönyv, 1978

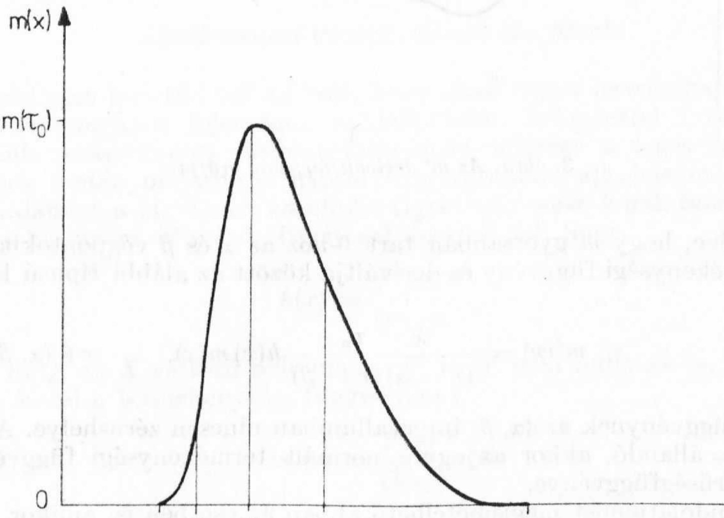
Az újabb magyar termékenységi arányszámok jellegzetes egymóduszú, aszimmetrikus görbe diszkrét pontjai. A gyermekszülés 13–14 éves korban kezdődik, a függvény igen meredeken emelkedik körülbelül 21–22 éves korig, ahol maximumát eléri. Ezen *legvalószínűbb szülési kor* után szintén meredeken, a felfutó ághoz képest azonban kevésbé gyorsan csökken és 50 év környékén gyakorlatilag 0-vá válik (1. ábra).

Ennek alapján az m termékenységi függvény egy (α, β) intervallumban, a nők úgynevezett propagatív periódusán értelmezett pozitív függvény. Az értelmezési tartomány határpontjaiban egyoldali limesszel rendelkezik: $m(\alpha + 0) = m(\beta - 0) = 0$. A függvények egyetlen szélsőértékhelye a τ_0 pont, ami maximumhely és $\tau_0 < \mu_1$, az átlagos szülési kor. Létezik továbbá két olyan pont, τ_1 és τ_2 $(\tau_1 < \tau_0 < \tau_2)$, melyekre:

— m konvex (α, τ_1)-ben

— konkáv a (τ_1, τ_2) szakaszon

— konvex τ_2 és β között (2. ábra).



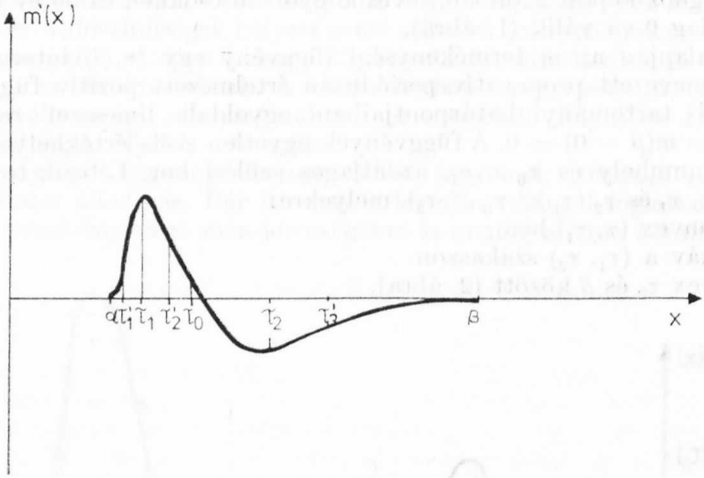
2. ábra. A termékenységi függvény gráfja

Figyelembe véve, hogy m helyettesítési értéke τ_0-ban $m(\tau_0)$ feltehetően nem függvénye a szóban forgó paramétereknek, valamint, ha ezek a paraméterek egymástól is függetlenek, a termékenységi függvény legegyszerűbb modelljének egy hatparaméteres függvény adódik:

$$m(x) = m(x, \alpha, \beta, \tau_0, \tau_1, \tau_2, m(\tau_0)). \quad (1)$$

Vizsgáljuk meg az m' deriváltfüggvény lefutását. Az m felsorolt tulajdonságaiból következik, hogy az (α, β) intervallumban m'-nek egyetlen zérushelye a τ_0 pont, τ_1-ben és τ_2-ben vannak szélsőértékhelyei (τ_1-ben maximuma, τ_2-ben minimuma). Továbbá m' értelmezési tartománya szintén (α, β) és a tapasztalat szerint $m'(\alpha + 0) = m'(\beta - 0) = 0$. A deriváltfüggvény az (α, τ_0)

intervallumban csak pozitív, a (τ_0, β) szakaszon csak negatív értékeket vesz fel. Léteznek továbbá a $\tau_1', \tau_2', \tau_3'$ pontok, melyekre m' konvex az (α, τ_1') és (τ_2', τ_3') szakaszokon és konkáv a (τ_1', τ_2'), (τ_3', β) intervallumokban (3. ábra).



3. ábra. Az m' deriváltfüggvény gráfja

Hozzávéve, hogy m gyorsabban tart 0-hoz az α és β végpontokban, mint m', a termékenységi függvény és deriváltja között az alábbi típusú kapcsolat áll fenn:[1]

$$m'(x) = \frac{x - \tau_0}{(x-\alpha)(x-\beta)} h(x)\, m(x), \qquad x \in (\alpha, \beta) \tag{2}$$

ahol a h függvénynek az (α, β) intervallumban nincsen zérushelye. Amennyiben $h(x) =$ állandó, akkor az egyre normált termékenységi függvény a β-eloszlás sűrűségfüggvénye.

Ez a gondolatmenet megismételhető abban az esetben is, amikor a termékenységi periódus nem véges ($\beta = +\infty$). Ekkor

$$m'(x) = \frac{x - \tau_0}{x - \alpha} h(x) m(x),^2 \tag{3}$$

amiből $h(x) =$ állandó esetén az egyre normált termékenységi függvényre a Γ-eloszlás sűrűségfüggvénye adódik. Tekintsünk még egy speciális esetet. Legyen

$$h(x) = -\frac{3}{2}\,\frac{x+b}{x-\alpha}, \tag{4}$$

[1] A (2) típusú egyenletnél — figyelembe véve a termékenységi függvény tulajdonságait a h függvény pozitív. Ugyanis m nem-negatív, $(x-\alpha)(x-\beta)$ negatív, $x - \tau_0$ negatív,ha $x < \tau_0$ és pozitív, ha $x > \tau_0$ és m'-nek pozitívnak kell lenni (α, τ_0)-ban, negatívnak (τ_0, β)-ban.

[2] Végtelen propagatív periódus esetén a h függvény negatív.

ekkor az ún. Hadwiger-féle eloszláshoz jutunk, melynek általános alakja — b megfelelő megválasztásával —

$$(5)\qquad m(x) = \frac{A}{(x-\alpha)^{3/2}} \exp\left[\frac{B}{x-\alpha} + \frac{x-\alpha}{C}\right]$$

Mindhárom szóban forgó, függvénytípussal jó eredményeket érték el különböző termékenységi függvények, modellezésénél ([1], [2], [3]).

A függvényvizsgálati módszerrel kapott (2) illetve (3) differenciálegyenlet az α, β, τ_0 paraméterekkel és egy h függvénnyel jellemzi a termékenységi függvényeket. Jelen pillanatban még kevés az ismeretünk ahhoz, hogy h-t meghatározhassuk. Nyitott kérdés, hogy h *levezethető-e* általános demográfiai összefüggésekből vagy pedig az egyes konkrét termékenységi függvényekhez kell becsülnünk azt.

Először h becslésével foglalkozunk.

Általánosított Pearson-típusú eloszlások

Az elsődleges kutatási cél az volt, hogy általánosan használható módszert adjunk népmozgalmi jelenségek modellezésére. Tekintettel arra, hogy az előző szakaszban kapott differenciálegyenlet-módszer a legegyszerűbb feltételezések esetén megadta a három leggyakrabban alkalmazott függvénytípust, valamint a (4) típusú közelítést figyelembe véve h-nak racionális törtfüggvény-közelítése célszerű. Tehát azt tesszük fel, hogy

$$(6)\qquad h(x) = \frac{P^h(x)}{Q^h(x)}$$

ahol P^h és Q^h az X változó polinomjai, P^h és Q^h nem nulla az (α, β) intervallumban. Ezzel a termékenységi függvényre a

$$(7)\qquad m'(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} m(x)$$

differenciálegyenletet kapjuk, ahol P és Q polinomok, P-nek egyszeres és egyetlen gyöke (α, β)-ban τ_0, $Q(x) \neq 0$, ha $x \in (\alpha, \beta)$, továbbá véges propagatív periódus esetén $Q(\alpha) = Q(\beta) = 0$, nem végesnél $Q(\alpha) = 0$.

Amennyiben P elsőfokú, Q pedig legfeljebb másodfokú polinom, akkor a (7) differenciálegyenlet a Pearson-típusú eloszlásokat adja:

$$(8)\qquad m'(x) = \frac{x-\tau_0}{ax^2+bx+c} m(x).$$

Ismeretes, hogy a legfontosabb folytonos eloszlások, így a normális, az exponenciális, a Γ-, a β-, a Student-, a χ^2 és a Cauchy-eloszlás Pearson-típusúak (m a sűrűségfüggvény).

A (7) differenciálegyenletnek eleget tévő, valamely (α, β) értelmezési tartományú sűrűségfüggvényekkel megadott eloszlásokat *általánosított Pearson-típusú eloszlásoknak*, vagy röviden és jellegükre utalva *P/Q-eloszlásoknak* fogjuk nevezni. A (7) differenciálegyenlet egy tetszőleges megoldására a *P/Q-függvény* elnevezést használjuk ([4]).

Eddigi meggondolásaink alapján tehát célszerűnek és hatékonynak látszik népmozgalmi megoszlások közelítése P/Q-függvényekkel. Két kérdés merül fel: 1. Hogyan valósítható meg egy P/Q-függvény illesztése a gyakorlatban? 2. Megfelelnek-e a P/Q-függvények családjának tulajdonságai a népmozgalmi megoszlások közti összefüggéseknek?

Az 1. kérdéssel kapcsolatban eljárást adunk a P/Q-függvények paramétereinek becslésére, aminek következtében adott p és q fokszámok esetében kiválasztható a legjobban illeszkedő P/Q-függvény. A 2. kérdésnél azt fogjuk bizonyítani, hogy a népmozgalmi megoszlások bizonyos kapcsolatba hozhatók ilyen típusú függvényekkel.

P/Q-függvények illesztése

Adott p és q fokszámok esetében vizsgáljuk egy P/Q-függvény paramétereinek becslését. Legyen $\tau \in (\alpha, \beta)$ és adjuk meg az $m(\tau)$ értéket. Ekkor a (7) differenciálegyenlet egyértelműen megoldható és

$$m(x) = m(\tau) \exp \int_{\tau}^{x} \frac{P(y)}{Q(y)} dy. \tag{9}$$

Ha adottak az m_x, $x = 15, 16, \ldots, 49$ arányszámok, akkor az elméleti m függvényt közelítő P/Q-függvény becsléséhez a P és Q polinomok együtthatóit és egy $\hat{m}(\tau)$ értéket kell „legjobban" megválasztani. Legyen

$$P(x) = \sum_{i=0}^{p} a_i x^i \quad \text{és} \quad Q(x) = \sum_{i=0}^{q} b_i x^i, \tag{10}$$

ahol feltételezhetjük, hogy $a_p = 1$. Mivel a Q polinom gyökei az α és a β értékek és ebben az esetben a (7) differenciálegyenletnek nincs értelme, a becsléseket valamely (α_1, β_1) intervallumban végezzük el, ahol $\alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta$. A gyakorlatban $\alpha_1 = 15$ és $\beta_1 = 50$ megfelelő választásnak mutatkozik. Mivel $Q(x) \neq 0$, ha $x \in (\alpha_1, \beta_1)$, ezért a (7) differenciálegyenletből a k nemnegatív egész értékekre a

$$x^k Q(x) m'(x) = x^k P(x) m(x) \tag{11}$$

összefüggések kaphatók. Vezessük be az m függvénynek az intervallumra vonatkozó „momentumait":

$$M_i(\alpha_1, \beta_1) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} x^i m(x) dx. \tag{12}$$

Integráljuk a (11) egyenletek mindkét oldalát az (α_1, β_1) intervallumban, a bal oldalakat parciálisan. Ekkor k különböző értékeire fennállnak a

$$m(\beta_1)\beta_1^k Q(\beta_1) - m(\alpha_1)\alpha_1^k Q(\alpha_1) - \sum_{i=0}^{q} b_i (i+k) M_{i+k-1}(\alpha_1, \beta_1) = \sum_{i=0}^{p} a_i M_{i+k}(\alpha_1, \beta_1) \tag{13}$$

egyenlőségek, ahol M_{-1} (α_1, β_1)-et 0-nak értelmezzük ([5]).

A (13) egyenletrendszer a P és Q polinomok együtthatóiban lineáris. Amenynyiben ismertek az $M_i(\alpha_1, \beta_1)$, $i = 0, 1, \ldots, p + q + 1 + \max(p, q)$ momentumok, valamint az $m(\alpha_1)$, $m(\beta_1)$ értékek, akkor a P és Q polinomok együtthatói meghatározhatók. A gyakorlatban az $M_i(\alpha_1, \beta_1)$ elméleti momentumokat ($\alpha_1 = 15$, $\beta_1 = 50$ esetén) a

$$\text{(14)} \qquad \widehat{M}_i(15, 49) = \sum_{x=15}^{49} (x + 0{,}5)^i m_x$$

tapasztalati értékekkel helyettesítjük, az $m(15)$ és $m(50)$ értékeket pedig valamilyen meggondolás, interpoláció stb. útján vehetjük fel. A termékenység esetében például $m(15) = m_{15}/2$ és $m(50) = 0{,}0$ jó becslésnek látszik. Felmerül a kérdés, $m(\alpha_1)$-nek és $m(\beta_1)$-nek a gyakorlatban komoly problémát okozó becslését, hogyan lehetne kiküszöbölni.

A (13) egyenletből szemeljük ki a k-dik, $(k + 1)$-dik és $(k + 2)$-dik egyenletet (ami egyben jelentse a k, $k + 1$ és $k + 2$ értékekhez tartozó egyenleteket). A tömörebb írásmód kedvéért vezessük be az

$$A_Q^k = \sum_{i=0}^{q} b_i (i + k) M_{i+k-1}(\alpha_1, \beta_1) \quad \text{és a} \quad B_P^k = \sum_{i=0}^{p} a_i M_{i+k}(\alpha_1, \beta_1)$$

jelöléseket. Ekkor a (13) egyenletrendszer így módosul:

$$\text{(16)} \qquad m(\beta_1)\beta_1^k Q(\beta_1) - m(\alpha_1)\alpha_1^k Q(\alpha_1) = A_Q^k + B_P^k.$$

ahol $k = 0, 1, \ldots$

A $(k + 1)$-dik egyenletet osszuk el β_1-el és vonjuk ki a k értékhez tartozóból. Ekkor az

$$-\alpha_1^k \left(1 - \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right) m(\alpha_1) Q(\alpha_1) = A_Q^k + B_P^k - \frac{1}{\beta_1}(A_Q^{k+1} + B_P^{k+1})$$

összefüggést kapjuk. Ugyanez k helyett $(k + 1)$-el:

$$-\alpha_1^{k+1} \left(1 - \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right) m(\alpha_1) Q(\alpha_1) = A_Q^{k+1} + B_P^{k+1} - \frac{1}{\beta_1}(A_Q^{k+2} + B_P^{k+2})$$

A második egyenletet osszuk el α_1-el, vonjuk ki az elsőből, ekkor a két egyenletből megkapjuk a

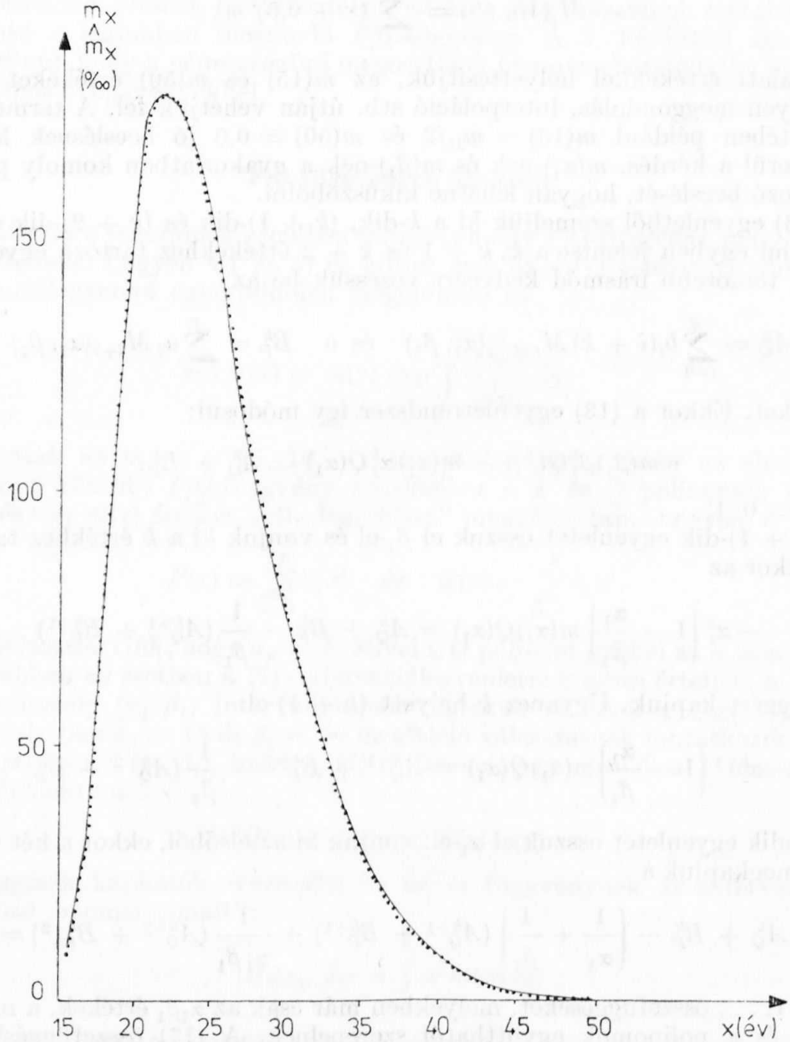
$$\text{(17)} \qquad A_Q^k + B_P^k - \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1}\right)(A_Q^{k+1} + B_P^{k+1}) + \frac{1}{\alpha_1 \beta_1}(A_Q^{k+2} + B_P^{k+2}) = 0,$$

$k = 0, 1, \ldots$ összefüggéseket, melyekben már csak az $\alpha_1 \beta_1$ értékek, a momentumok és a polinomok együtthatói szerepelnek. A (17) összefüggésben az $M_i(\alpha_1, \beta_1) \approx \widehat{M}_i(\alpha_1, \beta_1)$ helyettesítéseket végrehajtva végül a paramétereket a

$$\sum_{i=0}^{q} b_i \left((i + k)\widehat{M}_{i+k-1} - (i + k + 1)\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1}\right)\widehat{M}_{i+k} + \frac{1}{\alpha_1 \beta_1}(i + k + 2)\widehat{M}_{i+k+1}\right) +$$

$$\text{(18)} \qquad + \sum_{i=0}^{p} a_i \left(\widehat{M}_{i+k} - \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1}\right)\widehat{M}_{i+k+1} + \frac{1}{\alpha_1 \beta_1}\widehat{M}_{i+k+2}\right) = 0$$

egyenletekből számíthatjuk, ahol $k = 0, 1, \ldots, (p+q)$. A kapott $p+q+1$ egyenlet $p+q+1$ ismeretlent tartalmaz ($a_p = 1$), és a gyakorlatban általában egyértelműen megoldható. A P és Q polinomok együtthatóinak ismeretében numerikus módszerrel meghatározhatók a polinomok zérushelyei, valamint a közelítő értékek.



4. ábra. P/Q-függvény illesztése az 1978. évi korspecifikus termékenységi arányszámokhoz ($p = 1, q = 4$)

P/Q-függvények illesztésére a (18) egyenletrendszert használva számítógépes programot készítettünk FORTRAN nyelven, amely a KSH Számítóközpontjában futott.

A program alapján először a momentumok becslésére, majd a (18) egyenletrendszer megoldására kerül sor. A kapott együtthatók alapján numerikus eljárás becsli a P és Q polinomok gyökeit, valamint az

$$\int_{\alpha_1}^{x} \frac{P(y)}{Q(y)} dy$$

(x egész) integrálokat. Mivel a termékenységi arányszámok *összege*, az ún. *teljes termékenység* fontos mutató a demográfiában, az m_x arányszámokhoz úgy illesztettük az

$$\hat{m}_x^0 = \exp\left(\int_{\alpha_1}^{x} \frac{P(y)}{Q(y)} dy\right)$$

becsléseket, hogy a szorzótényező egyúttal a becsült *teljes termékenység* legyen. Ehhez egy σ szorzót határoztunk meg a

$$\sum_{x=15}^{49}\left(m_x - \sigma \frac{\hat{m}_x^0}{\sum_{y=15}^{49} \hat{m}_y^0}\right)^2 = \min. \tag{19}$$

feltétellel. Az illeszkedés jóságát az eltérések négyzetösszegével és a két adatsor közti korrelációval mértük.

Az 1. táblázat és a 4. ábra az 1978. évi korspecifikus termékenységi arányszámokra a $p = 1$ és $q = 4$ fokszámú P/Q-függvény illesztésének eredményeit tartalmazza.

Az eredmények azt mutatják, hogy a $p = 1$, $q = 4$ fokszámú P/Q-függvények családja minimális hibával írja le az 1978. évi termékenységi arányszámokat. Lényegében az illeszkedés olyan jó, hogy az eltérések okának az empirikus adatok véletlen ingadozását is tekinthetjük.

Összehasonlítás végett megjegyezzük, hogy az 1961. évi korspecifikus termékenységi arányszámok Γ-eloszláson alapuló modellje esetében a négyzetes eltérésre 1491,6 adódott ([1]), míg a $p = 1$, $q = 4$ fokszámú P/Q-függvény esetében 139,98, azaz utóbbi több mint 10-szer jobb illeszkedést produkál.

P/Q-függvények tulajdonságai

Jelöljük $\mathcal{M}$-el azon P/Q-függvények családját, melyeknek értelmezési tartománya $(\alpha, \beta) \subset (0, +\infty)$, és értelmezési tartományuk minden pontjában pozitív értéket vesznek fel. Az $\mathcal{M}$ függvényosztály a függvényszorzásra nézve csoportot alkot.

Valóban ha f és $g \in \mathcal{M}$, akkor $f \cdot g$ értelmezési tartománya is részhalmaza $(0, +\infty)$-nek és $f \cdot g$ pozitív. Ha f-et a P^f és Q^f, g-t a P^g és Q^g polinomok határozzák meg, akkor

$$(fg)' = f'g + fg' = \left(\frac{P^f}{Q^f} + \frac{P^g}{Q^g}\right)(fg)$$

1. táblázat

P/Q függvény illesztése az 1978. évi korspecifikus termékenységi arányszámokhoz

$(p = 1, q = 4)$

A $P(x)$ polinom együtthatói: $a_0 = -21{,}84$ $a_1 = 1{,}0$

A $Q(x)$ polinom együtthatói: $b_0 = -68{,}67$ $b_1 = 10{,}2$ $b_2 = -0{,}435$

$b_3 = 0{,}00176$ $b_4 = 0{,}0000723$

A P polinom gyöke (módusz): 21,84

A Q polinom gyökei: 13,91*, 48,14**

Kor	Empirikus	Becsült
	arányszámok (‰)	
15	10,6	8,5
16	29,8	29,9
17	62,9	67,0
18	104,7	109,3
19	145,0	145,0
20	173,3	168,0
21	177,7	177,4
22	175,0	176,1
23	168,7	167,2
24	154,9	153,8
25	138,3	138,2
26	119.7	121,9
27	105,9	106,1
28	90,4	91,1
29	75,3	77,5
30	66,0	65,3
31	56,6	54,5
32	43,7	45,1
33	37,2	37,0
34	31,1	30,0
35	23,3	24,1
36	19,7	19,1
37	14,2	14,9
38	11,5	11,5
39	8,9	8,6
40	5,9	6,3
41	4,7	4,5
42	3,2	3,0
43	2,0	1,9
44	0,9	1,1
45	0,4	0,5
46	0,2	0,3
47	0,1	0,0
48	0,0	0,0
49	0,0	0,0

Négyzetes eltérés: 95,7‰²
Korreláció: 0,9996

* 13,91 valójában Q szélsőértékhelye, de $Q(13{,}91)$ közel 0.
** A $\beta = 48{,}14$ érték mutatja, hogy a $\beta_1 = 50$ érték magas.

miatt az $f \cdot g$ függvényre (7) típusú differenciálegyenlet áll fenn, tehát $fg \in \mathfrak{M}$. Hasonlóan igazolható, hogy ha $f, g \in \mathfrak{M}$, akkor $f/g \in \mathfrak{M}$. Az azonosan 1 függvény nyilván $\mathfrak{M}$ eleme, és egyben egységelem. Az f függvény inverze az $\mathfrak{M}$ csoportban $1/f$.

A P/Q-függvények csoporttulajdonságának alapvető demográfiai párhuzama van. A demográfia egyik alapfelvetése szerint a népmozgalmi jelenségek *függetlenek*. Ez az ún. *függetlenségi hipotézis* azt jelenti, hogy a jelenségek hatása izolálható. Ha A és B két jelenség, akkor létezik A-nak és B-nek $q_A(x)$ és $q_B(x)$ x-beni *megvalósulási* valószínűsége, azzal a feltételezéssel, hogy a másik jelenséget teljesen kiküszöböljük. Ekkor a *független*, $p_A(x) = 1 - q_A(x)$, $p_B(x) = 1 - q_B(x)$ *megmaradási* valószínűségek[3] szorzata a valóságban tapasztalt megmaradási valószínűséggel egyenlő.

$$p_A(x) \cdot p_B(x) = p_{AB}(x), \tag{20}$$

vagyis a megmaradási valószínűségek halmaza zárt a szorzásra nézve.

A P/Q-függvények csoporttulajdonsága és a népmozgalmi jelenségek megmaradási valószínűségeinek szorzattulajdonsága arra utal, hogy P/Q-függvények a népmozgalmi megoszlások egészével kapcsolatba hozhatók.

Összefoglalva az eddigieket, a modellezésnél a függvényvizsgálati módszerrel indulva egy differenciálegyenlethez jutottunk. A (2) illetve (3) differenciálegyenletekben az ismeretlen h függvény legegyszerűbb közelítései megadták a szakirodalom által javasolt három legfontosabb modellt. A h függvény közelítése racionális törtfüggvénnyel célszerű, ennek alapján a termékenységi arányszámokat P/Q-függvénnyel becsültük. A P/Q-függvények illesztése számítógép igénybevételével lényegében problémamentesen megoldható. Az eredmények azt mutatták, hogy plusz három paraméter bevezetése 10-szeres illeszkedésjavulást eredményez, és lényegében az alkalmazott függvény elméleti modellnek tekinthető. Ezenkívül a P/Q-függvények struktúrája, tulajdonságai analógiát mutatnak a népmozgalmi megoszlások tulajdonságaival.

A megoszlás külső jegyeinek elemzése mellett a jelenség természetére vonatkozó feltételezések alapján is megkísérelhetjük a modellalkotást. A következőkben ezzel foglalkozunk.

A termékenység autoregresszív modellje

A termékenységnek, mint demográfiai jelenségnek megvalósulását általánosságban három faktor befolyásolja.

1. természetes termékenység
2. demográfiai tényezők
3. társadalmi-gazdasági hatások.

A három befolyásoló tényező közül az első kettő *funkcionális* jellegű, azaz meghatározott nagyságukhoz a termékenységi arányszámok meghatározott nagysága tartozik. A társadalmi-gazdasági körülmények *adaptív* jellegűek, tehát „sztochasztikusan" befolyásolják a termékenységet. Ennek alapján a következő modellt vehetjük fel:

Legyen (Ω, A, P) valószínűségi mező, ahol Ω a propagatív korú nők halmaza. Jelölje adott $\omega \in \Omega$ esetén $\xi_t(\omega)$, $\eta_t(\omega)$, $\zeta_t(\omega)$, $\alpha_t(\omega)$ rendre a t éves korban az ω nő által szült gyermekek számát, a természetes termékenység hatá-

[3] Tehát annak valószínűsége, hogy az A illetve a B jelenség nem valósul meg.

sát, a demográfiai tényezőket és a társadalmi-gazdasági faktort. Ekkor

(21) $$\xi_t = \int_0^t [a(\tau)\eta_{t-\tau} + b(\tau)\zeta_{t-\tau}]d\tau + \int_0^t c_\tau d\alpha_\tau$$

írható homogén megközelítésben, ahol a és b determinisztikus függvények, c_τ pedig valószínűségi változó. Kézenfekvő felvenni, hogy a természetes termékenység és a demográfiai tényezők a megelőző $\xi_{t-\tau}$ értékben összpontosulnak és hogy a nők egészére nézve a „maradék" társadalmi-gazdasági hatás várható értéke zérus körül van.[4] Emiatt a

(22) $$\xi_t = \int_\alpha^t A(t-\tau)\xi_\tau d\tau + \int_0^t B_\tau d\alpha_\tau$$

előállítás lesz érvényes, ahol $M(\int_0^t B_\tau d\alpha_\tau) = 0$. A (22) összefüggésben a determinisztikus részre azt lehet mondani, hogy $A(\tau)$ már igen kicsi, ha $(t-\tau)$ nagy, vagyis, hogy ξ_t kielégítően megadható néhány megelőző érték lineáris kombinációjával. Emiatt — feltéve, hogy egy konstans p idő elteltével már a megelőző ξ_t értékek hatása elenyésző vagyis $A(t-\tau) \approx 0$, ha $t-\tau \geqq p$,

(23) $$\xi_t = \int_{t-p}^t A(t-\tau)\xi_t d\tau + \int_0^t B_t d\alpha_\tau$$

adódik. Azaz ξ_t-t *autoregresszív módon* közelítjük. Diszkrét megközelítésben tehát ξ_x-re azt vesszük fel, hogy

(24) $$\xi_x = \sum_{i=1}^p a_i \xi_{x-i} + \varepsilon_x$$

ahol $a_1, a_2, \ldots, a_p$ valós számok és (ε_x) 0-várható értékű sztochasztikus sorozat. A (24) egyenletből várható értékre áttérve a

(25) $$m_x = \sum_{i=1}^p a_i m_{x-i}$$

összefüggés adódik, vagyis modellünk a következő: a termékenységi arányszám a megelőző p számú termékenységi arányszám lineáris kombinációja és az együtthatók nem függnek az x értéktől.

Bár az alkalmazott feltételezések, melyek a (25) egyenletekhez vezettek, eléggé „ad hoc" jellegűek, mégis a választott autoregresszív megoldás kielégítően jellemzi a termékenységi arányszámokat.

Foglalkozzunk először az együtthatók becslésével. A legkisebb négyzetek módszere alapján az $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_p$ becsléseket a

(26) $$\sum_{x=p+1+\alpha}^{\beta} \left(m_x - \sum_{i=1}^p \hat{a}_i m_{x-i} \right)^2 = \min$$

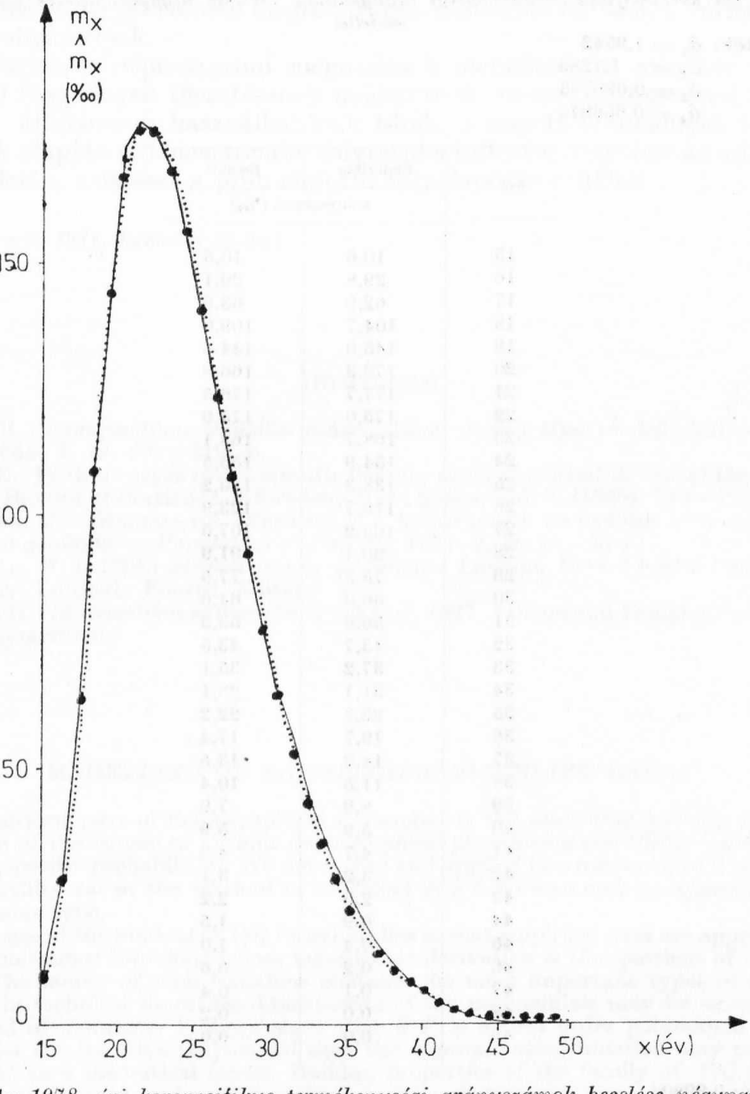
[4] „Maradék" hatáson azt értjük, amit a megelőző $t-\tau$ *életkorokhoz* tartozó $\xi_{t-\tau}$ értékek nem tartalmaznak. Ilyen értelemben mondjuk, hogy — a pillanatnyi — „maradék" hatás elenyésző.

feltétellel kaphatjuk meg, amit $\hat{a}_k$ szerint differenciálva az együtthatókra a

$$(27) \qquad \sum_{x=p+1+\alpha}^{\beta} m_x m_{x-k} - \sum_{i=1}^{p} \hat{a}_i \sum_{x=p+1+\alpha}^{\beta} m_{x-i} m_{x-k} = 0,$$

$k = 1, 2, \ldots, p$ egyenletrendszer adódik. Ennek megoldásai az $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_p$ együttható-becslések.

Ezek után az $m_\alpha, m_{\alpha+1}, \ldots, m_{\alpha+p-1}$ értékekből és a kapott együtthatókból a (25) összefüggés alapján valamennyi termékenységi arányszám becsülhető.



5. ábra. Az 1978. évi korspecifikus termékenységi arányszámok becslése négyparaméteres autoregresszív modellel

Pontosabb becsléseket kaphatunk, ha nemcsak az $\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_p$ hanem az $\hat{m}_\alpha, \ldots, \hat{m}_{\alpha+p-1}$ kezdőértékeket is megbecsüljük a (26) feltétel alapján. Ennek az eljárásnak előnye, hogy valóban autoregresszív sort kapunk, hátránya viszont, hogy a becslési eljárás jóval bonyolultabb.

A 2. táblázat és az 5. ábra egy olyan becslési eljárás eredményeit tartalmazza amelyik az említett két lehetőség között van. Ennek során először a (27) egyenletekből megbecsültük az $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_p$ együtthatókat, majd ezeket

2. táblázat

Az 1978. évi korspecifikus termékenységi arányszámok becslése négyparaméteres autoregresszív modellel

Együtthatók: $\hat{a}_1 = 1{,}9542$
$\hat{a}_2 = -1{,}1283$
$\hat{a}_3 = 0{,}090783$
$\hat{a}_4 = 0{,}056915$

Kor	Empirikus	Becsült
	arányszámok (‰)	
15	10,6	10,5
16	29,8	29,1
17	62,9	63,6
18	104,7	109,0
19	145,0	144,5
20	173,3	166,8
21	177,7	176,5
22	175,0	175,9
23	168,7	168,1
24	154,9	155,5
25	138,3	140,2
26	119,7	123,9
27	105,9	107,5
28	90,4	91,9
29	75,3	77,5
30	66,0	64,6
31	56,6	53,3
32	43,7	43,5
33	37,2	35,1
34	31,1	28,1
35	23,3	22,2
36	19,7	17,4
37	14,2	13,5
38	11,5	10,4
39	8,9	7,9
40	5,9	5,9
41	4,7	4,3
42	3,2	3,1
43	2,0	2,2
44	0,9	1,5
45	0,4	1,0
46	0,2	0,6
47	0,1	0,4
48	0,0	0,2
49	0,0	0,0

Korreláció: 0,9990
Négyzetes eltérés: 132,6‰²

elméleti értéknek fogadva el, a (26) feltételt átalakítva becsültük az $\hat{m}_\alpha$, $\hat{m}_{\alpha+1} \ldots$, $\hat{m}_{\alpha+p-1}$ kezdő értékeket.

A 2. táblázatot az 1. táblázattal összehasonlítva látható, hogy a P/Q-függvénnyel kapott becslés csak valamivel jobb az autoregresszív modell eredményeinél és — tekintettel az autoregresszív becslési eljárásnál tett megjegyzésre — ez is abból adódhat, hogy nem tudtuk megbecsülni a legjobban illeszkedő autoregresszív sorozatot. Ezek alapján — legalábbis az 1978. évi élveszületési arányszámokra — az autoregresszív modell elméleti modellnek tekinthető.

A modell összhangban van a termékenységi folyamat azon nyilvánvalónak tűnő ismérvével, hogy a nő vagy házaspár termékenységi illetve családtörténetében a gyermek születésének esélyét a megelőző néhány év (esetünkben 4 év) termékenységtörténete meghatározza, a korábbi hatások a várható érték szintjén elmosódnak.

Összefoglalva: népmozgalmi megoszlások modellezésére mindkét módszer — a P/Q-függvények illesztésének módszere és az autoregresszivitás feltételezése — általánosan használhatónak tűnik, a kapott eredmények igen jók. Mindezek alapján érdemes tovább folytatni a kutatást, egyrészt az alkalmazások területén, másrészt a jobb elméleti megalapozás céljából.

(Beérkezett: 1981. december 20-án)

IRODALOM

1. Tekse K.: Korspecifikus születési arányszámok demográfiai modelljeiről — *Demográfia,* 1965. 2. sz. 201—219. p.
2. Gilje, E.: Fitting curves to age-specific fertility rates *Statistical Review* of the National Central Bureau of Statistics of Sweden, Third Series, Vol. 7. (1969). 118—134. p.
3. Duchene, J.—Gillet—de Stefano, S.: Adjustement analytique des courbes de fécondité générale — *Population et Famille,* 1974. 2. sz. 53—93 p.
4. Kendall, M. G.: *The advaced theory of statistics* London, 1948. Charles Griffin Company Limited. Fourth Edition.
5. Jordan K.: *Matematikai statisztika.* Budapest, 1927. Athenaeum Irodalmi és Nyomdai Részvénytársulat.

MODELLING OF AGE-SPECIFIC FERTILITY RATES

An important part of demographical researches is the modelling and the functional description of the course of various demographical phenomena according to cohorts and of the age-specific probabilities. We developed and applied two methods, to describe age-specific fertility rates: the method of so called P/Q functions and an approach of the autoregressive type.

The essence of the method of P/Q functions lies in that empirical data are approximated by such continuous functions whose logarithmic derivative is the quotient of two polynomials. The family of such functions contains the most important types of functions suggested in technical literature. Coefficients of the polynomials may be estimated by the method of moments. Fittings show that if P is a first order polynomial and Q a fourth order the iterative polynomial then the approximating function may practically be regarded as a theoretical model. Besides, properties of the family of P/Q functions show some analogy to an important characteristic of demographical distributions.

The other procedure, the approach of autoregressive type starts from the assumption that at a given age the fertility of women is determined by that of a few preceding years (age). Specifically a linear relationship with constant coefficients is supposed. In the course of practical application coefficients were estimated by least squares method, then the same procedure was used for estimating initial values. In case of four years the model produces as good a fit as the method of P/Q functions.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЗРАСТНО-СПЕЦИФИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЭНТОВ ПЛОДОВИТОСТИ

Одной из важных глав фундаментальных исследований в области демографии является вероятностное моделирование, определяемое изложонно в виде функции протекания различных явлений по народонаселению с учетом возраста формирования возрастно-специфических возможностей реализации. В аспекте описания возроста-специфических коэффициентов плодовитости мы разработали и используем два метода, т. е. т. н. метод функций P/Q и авторегрессивный по своему типу подход.

Суть метода функций P/Q кроется в том, что к эмпирическим данным мы описываем посредством такой непрерывной функции, логарифмической производной которой является частное двух полиномов. Группа функций, обладающих такими свойствами включает в себя наиболее важные типы функций, предлагаемых в специальной литературе. Коэффициенты полиномов могут оцениваться методом моментов. Результаты показывают, что в случае полинома первой степени P и четвертой степени Q приближенная функция может рассматриваться, по существу, в качестве теоретической модели. Наряду с этим свойства семейства функций P/Q показывают аналогию с одной существенной характерной чертой дифференциации движения народоноселения.

Другой используемый метод, т. е. авторегрессивный по своему типу подход исходит из того, что в отношении какого-то определенного возраста фертильность женщин определяется фертильностью нескольких предшествующих лет (возрастов). В отношении порядка определения предлагается наличие постоянной коэффициентной линейной связи. В ходе практического использования коэффициенты оценивались методом наименьших квадратов и в последующем эта методика используется и при оценке начальных значений. В разрезе четырех лет данная модель дает такие же хорошие результаты, что и метод функций P/Q.

Stahl János

Hányados célfüggvényű programozási feladatok dekompozíciójáról

1. Előzmények

Egy korábbi cikkünkben [3] egy dekompozíciós eljárást származtattunk a

$$\begin{array}{lcr} & \sum_j A_j x_j = b & \\ & B_j x_j = b_j & \\ (1) & x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \ldots) \\ & \max \dfrac{\sum_j c_j x_j + \gamma}{\sum_j d_j x_j + \delta} & \end{array}$$

feladat megoldására. Az eljárás származtatása úgy történt, hogy az (1) feladat változóira alkalmaztuk azt a transzformációt, ami a Dantzig—Wolfe eljárás alapja, majd megoldottuk az így kapott hányados programozási feladatot. Ez a Charnes és Cooper által javasolt módon ([2]) történt, ami a hányados programozási feladatot egy vele ekvivalens lineáris programmal helyettesíti.

Ezt az eljárást azóta már többször is felfedezték. (Úgy látszik, a SZIGMA csak kevesekhez jut el.) Arról nincs tudomásunk, hogy valaki alkalmazta volna az eljárást, vagy akárcsak kísérleti célokra is elkészült volna egy megfelelő számítógépes program. Mi a hivatkozott cikkben ezért foglalkoztunk az eljárással, mert abban az időben a magyar vállalatok többségénél a jövedelemszabályozási rendszer olyan volt, hogy az (1) modell dekompozíciós megoldásának megfeleltethető volt, pl. egy több részegységből álló nagyvállalat decentralizált irányítási rendszere. (Természetesen egy ilyen dekompozíciós eljárás általában csak fenntartásokkal tekinthető egy decentralizált irányítási rendszer modelljének.) Időközben a vállalatok jövedelemszabályozásának mechanizmusa némileg megváltozott, de a hányados programozási modell az új mechanizmusban is fontos szerepet játszik, vagy játszhat. Ilyen vonatkozású részletekkel azonban itt nem foglalkozunk.

Valójában már [3] megírásakor felmerült az a lehetőség, hogy az ottani eljárás származtatása során végrehajtott két lépés sorrendjét fordítsuk meg: először hajtsuk végre a Charnes—Cooper transzformációt, és az így adódó feladatot oldjuk meg dekompozícióval.

A Charnes—Cooper transzformáció végrehajtása után (1) ekvivalens a

$$\begin{array}{ll} & d_1 z_1 + d_2 z_2 + \ldots + \delta\zeta = 1 \\ (2) & \\ & A_1 z_1 + A_2 z_2 + \quad\;\; - b\zeta = 0 \end{array}$$

$$
\begin{array}{ll}
 & B_1 z_1 \qquad\qquad - b_1\zeta = 0 \\
 & \qquad B_2 z_2 \qquad - b_2\zeta = 0 \\
(2) & \qquad z_1, z_2, \ldots \geq 0 \\
 & \max\,(c_1 z_1 + c_2 z_2 + \ldots + \gamma\zeta)
\end{array}
$$

lineáris programmal.

A (2) feladat egy ún. kétszeresen összekapcsolt – a „közös" feltételeken túl a közös ζ változót is tartalmazó-feladat és az ilyeneket akkor még nem tudtuk elég jól kezelni. A 2. részben először azt írjuk le, hogy mi volt a bajunk ezzel a lehetőséggel, majd azt tárgyaljuk, hogy miképpen tudunk ettől megszabadulni.

2. További lehetőségek

A Benders dekompozíció [1] „kézenfekvő" alkalmazásához helyettesítsük (2)-t a vele ekvivalens

$$
\begin{array}{ll}
 & \sum_j \sigma_j + \delta\zeta = 1 \\
 & \sum_j s_j - b\zeta = 0 \\
 & d_j z_j = \sigma_j \\
(3) & A_j z_j = s_j \qquad (j = 1, 2, \ldots) \\
 & B_j z_j = b_j \zeta \\
 & z_j \geq 0 \\
 & \max\big(\sum_j c_j z_j + \gamma\zeta\big)
\end{array}
$$

feladattal. Ha most oly módon alkalmazzuk a Benders dekompozíciót, hogy a σ_j-ket, s_j-ket és ζ-t tekintjük az ún. központi feladat változóinak, akkor az eljárás minden lépése során a részfeladat(ok)

$$
\begin{array}{ll}
 & d_j z_j = \tilde{\sigma}_j \\
 & A_j z_j = \tilde{s}_j \\
(4) & B_j z_j = b_j \tilde{\zeta} \\
 & z_j \geq 0 \\
 & \max c_j z_j
\end{array}
$$

alakú(ak), ahol $\tilde{\sigma}_j$, $\tilde{s}_j$ és $\tilde{\zeta}$ az aktuális központi feladat megoldásából adódik.

Az interpretációs lehetőségek szempontjából azok az eljárások az érdekesek ahol a részfeladatok olyan hányados programozási feladatok, melyekben a számlálók és a nevezők a $c_j x_j$-kkel illetve a $d_j x_j$-kkel – esetleg lépésenként változó – kapcsolatba hozható kifejezések [3]. A (4) részfeladatok a Charnes–Cooper transzformáció megfordításával nem hozhatók ilyen alakra.

Ha ugyanis $x_j \in \{x_j \mid B_j x_j = b_j, x_j \geq 0\}$ esetén teljesül $d_j x_j > 0$, $\tilde{\zeta} \neq 0$ és $\tilde{\tilde{s}}_j = \tilde{s}_j/\tilde{\zeta}$, akkor az

$$A_j x_j = \tilde{\tilde{s}}_j$$

$$B_j x_j = b_j$$

$$x_j \geq 0$$

$$\max \frac{c_j x_j}{d_j x_j/\tilde{\sigma}_j}$$

feladattal a Charnes–Cooper transzformáció szerint a

$$d_j z_j = \tilde{\sigma}_j$$

$$A_j z_j - \tilde{\tilde{s}}_j \zeta_j = 0$$

$$B_j z_j - b_j \zeta_j = 0$$

$$z_j \geq 0$$

$$\max c_j z_j$$

lineáris program ekvivalens. Ettől (4) abban tér el, hogy ott ζ_j értéke $\tilde{\zeta}$-nak van rögzítve. Ily módon a most felírt feladat megoldásából a (4) részfeladat egy duál lehetséges megoldása ugyan megkapható, de (4) optimumértékére legfeljebb csak egy felső korlát nyerhető és mindez a Benders dekompozíció vázolt alkalmazásához kevés. (A Benders dekompozíciós elvből adódó eljárás részletes leírására mondanivalónk szempontjából nincs szükség.)

Az elmondottak viszont azt is jelzik, hogy miképpen kelt (2)-t annak céljából átalakítani, hogy kétszeresen összekapcsolt feladatokra javasolt dekompozíciót [4] alkalmazva olyan eljáráshoz jussunk, ahol a részfeladatok hányados programozási feladatok. (A (2) feladat „kézenfekvő" dekompozíciójával ugyanis pontosan ugyanaz a „probléma", mint a Benders dekompozíciónál. Egyébként a kétszeresen összekapcsolt feladatokra vonatkozó dekompozícióból a jelen esetre adódó eljárás részletes leírásától is eltekintünk.)

Újabb változók és az őket definiáló egyenletek bevezetése után (2) ekvivalens a

$$
\begin{aligned}
&\sum_j \sigma_j + \delta\zeta = 1 \\
&\sum_j A_j z_j - b\,\zeta = 0 \\
&\zeta_j = \zeta \\
(5)\qquad &d_j z_j = \sigma_j \qquad\qquad (j = 1, 2, \ldots) \\
&B_j z_j - b_j \zeta_j = 0 \\
&z_j \geq 0 \\
&\max \left(\sum_j c_j z_j + \gamma\zeta\right)
\end{aligned}
$$

lineáris programmal. Ha itt közös feltételeknek az első három feltételt illetve feltételcsoportot, közös változóknak a σ_j-ket és ζ-t tekintjük, akkor [4] szerint olyan dekompozíciós eljáráshoz jutunk, ahol a részfeladatok

$$\begin{gathered} d_j z_j = \tilde{\sigma}_j \\ B_j z_j - b_j \zeta_j = 0 \\ z_j \geq 0 \\ \max \{(c_j - \tilde{p} A_j) z_j - \tilde{\varrho}_j\} \end{gathered} \tag{6}$$

alakúak. Itt $\tilde{p}$ és $\tilde{\varrho}_j$ a közös feltételeknek, $\tilde{\sigma}_j$ pedig a közös változóknak megfelelő központi feladatból adódik. (6) pedig nyilván ekvivalens a

$$\begin{gathered} B_j x_j = b_j \\ x_j \geq 0 \\ \max \frac{(c_j - \tilde{p} A_j) x_j - \tilde{\varrho}_j}{d_j x_j / \tilde{\sigma}_j} \end{gathered}$$

hányados programozási feladattal.

(Beérkezett: 1981. szeptember 25-én)

IRODALOM

1. BENDERS, J. F.: Partitioning procedures for solving mixed variable programming problems. *Numerische Mathematik,* 18/2, 1962.
2. CHARNES, A.—W. W. COOPER: Programming with linear fractional functionals. *Naval Research Logistics Quarterly,* 9/2, 1962.
3. KOVÁCS Á.—STAHL, J.: Dekompozíciós eljárás a vállalati érdekeltség mutatójának maximalizálása esetén. *Szigma,* VI/2, 1973.
4. STAHL J.: A kétszeres összekapcsolt lineáris programozási feladatról. *Szigma* VII/1, 1974.

ON THE DECOMPOSITION OF FRACTIONAL PROGRAMMING PROBLEMS

The note discusses the possibilities of solving the fractional programming problem by decomposition. The main point is to develop a procedure where the subproblems are also fractional programming problems.

О ДЕКОМПЕНСАЦИИ ЗАДАЧ ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ДРОБНЫМИ ЦЕЛЕВЫМИ ФУНКЦИЯМИ

В данной статье речь идет о такой декомпенсационной задаче с дробными целевыми функциями, в которой частные проблемы также предствляют собой задачи программирования дробей.

KÖNYVEKRŐL

KORNAI JÁNOS—MARTOS BÉLA (szerk.): *Szabályozás árjelzések nélkül.* Akadémiai Kiadó, 1981. 302 p.

1971-ben jelent meg Kornai János és Martos Béla tanulmánya *Gazdasági rendszerek vegetatív működése* címmel. A cikkben kifejtett újszerű gondolatok egy szerteágazó kutatás kiindulópontjává váltak. A tíz év kutatásainak eredményeit összegzi a könyv, amelyet a fenti tanulmány szerzői szerkesztettek.

Mint az előszóban írják:

„Kötetünk 13 — jelentős részben publikálatlan — tanulmányt tartalmaz 8 szerzőtől. A tanulmányokat szoros szemléleti, tartalmi és módszertani rokonság fűzi egybe.

Tartalmilag a tanulmányok valamenynyien a népgazdaság szabályozásával foglalkoznak, éspedig egyszerű mechanizmusokkal, amelyek árat nem vagy csak igen korlátozott szerepben alkalmaznak.

Módszertanilag a tanulmányok közös sajátossága a nagyfokú absztrakció és a matematikai szabályozáselmélet fogalmi rendszerének és eszközeinek használata."

Mindjárt az elején meg kell említenünk, hogy bár a könyv mondanivalója önmagában is érthető, olvasását nagyon megkönnyíti, ha együtt tekintjük Kornai János három másik munkájával. Ezek a könyvek az *Anti-Equilibrium*, *A hiány* és a *Növekedés, hiány és hatékonyság*. Ez utóbbiban az itt tárgyalt könyv folytatását láthatjuk: egy norma szerinti szabályozásra épülő, a népgazdaság egészét átfogó makromodell felépítésének kísérletét. Az első két könyv reprezentálja azt a kutatási magatartást, építi fel azt a gondolati rendszert, amely a *Szabályozás árjelzések nélkül* kötet modelljeinek alapjául szolgál.

A könyvek vitái során sokan kételkedtek abban, hogy például a reálszféra és a szabályozási szféra következetes megkülönböztetése, a gazdaság egyes részeinek norma szerinti működése, a hiányváltozók bekapcsolása, egyáltalán a gazdaság nemwalrasi egyensúlyra törekvő felfogása operacionálizálható, matematikai formába önthető lenne. A tanulmánykötet megmutatta, hogy az „Anti-Equilibrium" és a „Hiány" egyes elméleti modelljeinek adekvát matematikai megfogalmazása például a szabályozáselmélet apparátusával történhet meg. Sőt, a szabályozáselméleti közelítés új ötleteket adott, új vizsgálati irányokat jelölt ki, s nem egy esetben „visszahatott" az elméletre olyan kérdések felvetésével, amelyek a szigorúbb matematikai formulázás nélkül talán fel sem merültek volna.

A könyv három részből áll. Az első rész az *Expozíció*, a második rész címe: *Készlet, ár, nyereség*, a harmadiké *Vezérlés normál pályáról: készlet és megrendelés.*

Az első rész *első fejezete (Kornai János—Martos Béla)* már tartalmazza a fogalmakat, definíciókat, amelyek a későbbiekben majd előfordulnak, sőt, a modelleket értékelő, értelmező magyarázatok is helyet kapnak benne. Az egyes tanulmányokat olvasva jó szolgálatot tesz, ha eligazítás végett sűrűn visszalapozunk ehhez a fejezethez, ezért ismertetésünkben is részletesebben támaszkodunk rá.

A kötet modelljeinek egyik lényeges sajátossága, hogy a gazdasági rendszert *reálszférára* és *szabályozási szférára* bontják szét. A reálszféra változói a gazdasági rendszer fizikai folyamataira vonatkoznak. A szabályozási szférában megy végbe a reálszféra irányítása. E szférában meghatározott operátorok működnek, ezek írják le a rendszer résztvevőinek, döntéshozóinak viselkedési szabályosságait.

Ez a tudatos, következetesen végigvitt megkülönböztetés, valamint az ehhez jól illeszkedő *szabályozáselméleti módszertan* a gazdasági rendszer olyan dinamikus modelljeinek felírását eredményezi, amelyek — igaz, egyszerű és elvont — „gazdasági mechanizmusok" elemzésére képesek. A kötet egyik legfontosabb vonulatának ezt a kérdésfelvetést tarthatjuk, hiszen a közgazdasági matematika eddigi modelljeiben elvétve lehet csak találkozni hasonlóval.

Itt nem az a vizsgálat tárgya, hogy milyen szabályozás „tartozna hozzá" egy optimális reál-működéshez, hanem az, hogyan funkcionál ez vagy amaz a szabályozó (árjellegű vagy nem árjellegű), hogyan hat a rendszer működésére (23 o.).

A modellek közül történetileg is az első, és a továbbiak ihletője a *második fejezetben* tárgyalt készletjelzésen alapuló két vegetatív szabályozási modell. *(Kornai János — Martos Béla)*. A szabályozási folyamat elemi eseményeit a szerzők két szempontból osztályozzák:

a) Kik és hogyan végzik el a kimenő jel átalakítását, azaz a döntések, utasítások hol keletkeznek?

b) Milyen szervezetek között zajlik le a jelek átadása?

A fenti ismérvek segítségével az összetett szabályozás különböző fokozatai alakíthatók ki. Ezek közül legegyszerűbbek — s egyben legdecentralizáltabbak — a *vegetatív szabályozások*, ahol a jelek képzését a reálszervezetek saját szabályozási egységei végzik, s a jelátadás során a jel vagy nem hagyja el a szervezetet, amelyben keletkezett, vagy két különböző reálszervezet reálfolyamathoz kapcsolódó jelátadásáról van szó.

Ebben a decentralizált szabályozási mechanizmusban a jelzések általában nem-árjellegűek, vagy ha árakat be is kapcsolnak, azok mögött nem húzódnak meg valódi pénzügyi folyamatok. A sokféle lehetséges nem-árjellegű jelzés közül a kötet modelljei a *készletjelzéseket* és a *rendelésjelzéseket* használják.

Nem véletlen, hogy a kötet címe is a szabályozás árjelzés nélküliségét emeli ki. A hagyományos matematikai modellek többsége az árak mindenhatóságára épült. Ugyanakkor a szocialista gazdaság leírásában nagy szerepet tulajdonítottak a nem-árjellegű jelzéseknek, de ezeket (pl. a tervutasításokat) a centralizált gazdaságirányítás velejáróinak tekintették. Mind a kapitalista, mind a szocialista gazdaságban működtek és működnek azonban vegetatív folyamatok: a vállalatok közvetlenül reagálnak a készletek felduzzadására — apadására, a kapacitáskihasználás növekedésére — csökkenésére, a rendelés-állomány változásaira. „A (magyar) vállalatok különösen a reformok előtt, de az igazat megvallva, még a reformok után sem reagálnak érzékenyen a relatív árakra. Tevékenységeiket nem korlátozza szigorúan a mikroökonómiai elméletből jól ismert költségvetési korlát. Ezért a készlet- és rendelésjelzéses modellek, amelyekben az ár egyáltalán nem jut szerephez, vagy amelyikben van ugyan árjelzés, de nincs költségvetési korlát, közel állnak a szocialista vállalat viselkedésének tényleges gyakorlatához" (41 o.).

A második fejezet modelljei egy olyan nyílt Leontief gazdaságban működnek, ahol a termelő és a fogyasztó csak a saját készleteit figyeli meg. Ha a vállalat saját termékeiből a készlet a „normális szint" felettivé válik, csökkenti a termelést, ha a készlet leapad, érdemes növelnie azt. Ha az anyagkészlet felduzzad, a beszerzés csökkenthető, ha túl kicsi, a beszerzést kell növelni. A beavatkozást a normától való eltérés egy bizonyos mértéke váltja ki.

Az itt felvázolt magatartási szabályokat egyszerű mérlegegyenletek egészítik ki. A modell a valós gazdasági folyamatok egy absztrakt leképezése. Kérdéses azonban, hogy ez az egyszerű modell, azaz az általa képviselt árjelzés nélküli, norma szerinti szabályozáson alapuló, koordinálatlan, decentralizált mechanizmus működésben tudja-e tartani a gazdaságot?

A második fejezet második (csillapítottan szabályozott) modelljének matematikai elemzése megmutatja, hogy a felírt rendszer folytonos működése biztosított, külső zavarok (perturbációk) esetén sem válik működésképtelenné, és stabil abban az értelemben, hogy mindig visszatér a normál állapotához.

A kötet első, bevezető része a Kornai—Martos modellekkel exponált modellcsalád matematikai és közgazdasági sajátosságainak bővebb magyarázatára szán két következő fejezetet. *A harmadik fejezet (Martos Béla)* a szabályozáselmélet alapfogalmait tárgyalja. Különösen lényeges az a rész, ahol a szabályozás megítélésének kritériumairól, a *stabilitásról* ír. A szokásos stabilitásfogalom ugyanis nem minden esetben megnyugtató a közgazdász számára. A rendszer stabil lehet akkor is, ha egyes zavarokra igen nagy kilengésekkel válaszol s így tér vissza idővel a normál állapot közelébe. Ezeknek a kilengéseknek bizonyos nagysága azonban közgazdaságilag megengedhetetlen mértékűvé is válhat.

Bródy András a hatodik fejezetben „helyesen orientálónak" nevezi azt a szabályozást, amelyben az eltérésvektor minden eleme monoton csökkenve tart a zérushoz, vagyis a rendszer minden része egyenesen a kívánt állapot felé tart. A szokásos stabilitásvizsgálatok ezt a szigorú követelményt nem teljesítik.

A *negyedik fejezet* a *norma szerinti szabályozással* foglalkozik *(Kornai János)*. Értelmezésében „a norma a gazdasági rendszer valamely viselkedési változójának szokásos nagysága, a társadalmi gyakorlat által megmerevített átlaga . . ." „Normáról csak akkor beszélhetünk, ha működik egy szabályozási folyamat, amely a tényleges viselkedést a norma irányába tereli" (104. o.). A kötet modelljeiben kétfél norma jelenik meg; a készletnorma és a rendelésállomány normája. A normák tapasztalati úton megfigyelhetők és matematikai-statisztikai úton mérhetők, azaz a szabályozási modellekbe is beépíthetők lehetnek. Természetesen a norma szerinti szabályozás nem univerzális jellegű. Bár a valóság sok területén megjelenik, máshol esetleg más viselkedésminták érvényesek, például az elfogadási korlátok szerinti, az aspirációs szintek szerinti vagy a beavatkozás kritikus értékéhez kötött viselkedés.

A kötet *második részének első fejezete* az előző rész második fejezetének folytonos modelljeiből kiindulva diszkrét idős, késleltetéses szabályozási modelleket ír fel (*Dancs István—Hunyadi László—Sivák József*). A deriváltak helyébe lépő készletváltozási, termelésnövekmény, stb. változók a modellek közgazdasági értelmezését megkönnyítik, realisztikusabbá teszik. A megoldásokból viszont kitűnik, hogy ennek ára van: a késleltetés, a reakcióidő bekapcsolása megváltoztatja a működőképesség és a stabilitás feltételeit. Végül is ennek a különbségnek a hangsúlyozása mellett a fejezet második modellje egy jól értelmezhető, stabilizálható szabályozási mechanizmust mutat be.

A *hatodik fejezet* modellpárjai is folytonos és diszkrét változatokat tartalmaznak. Készletszintről és készletváltozásról, nyereségszintről és nyereségváltozásról vezérelt 8 modellt ír fel *Bródy András*. Az igen leegyszerűsített modellekkel (nem különböztetnek meg anyag- és termékkészleteket és nem tartalmaznak külső fogyasztást) végzett vizsgálatok a stabilitásra koncentrálnak, hiszen ha már itt problémák vannak, akkor a bonyolultabb modellek felírása sem vezethet eredményre. Ebben a fejezetben jelenik meg először az *árjelzés*, mégpedig a nyereségről vezérelt szabályozások egyenleteiben.

A *hetedik fejezet* második modellje visszatérve a második fejezet modelljeinek alapvető sajátosságaihoz, beépíti szabályozásában a Bródy-modellek árjelzését. *Martos Béla* modelljében a szabályozás három alfolyamatra bomlik: ármegállapítások, gazdaságossági számítások és termelési döntések. (Mint már említettük, az itt szereplő árak csak kalkulatív információk, nem járnak együtt pénzmozgással, jövedelemkeletkezéssel.) Összehasonlítva ezt az *árkommunikációs vegetatív szabályozási modellt* az egyszerű készletjelzéses modellel, alapvető hasonlóságok és különbségek tűnnek fel. A modellek információtartalmukban, szabályozási megoldásaikban jelentősen eltérnek egymástól, ugyanakkor mindkettő stabilizálható és működőképessé tehető, sőt, az ezekhez szükséges feltevések, paraméterkorlátozások is igen hasonlók. Felvetődik tehát a *szabályozók hasonlóságának és ekvivalenciájának* kérdése.

Martos Béla a *nyolcadik fejezetben* az információs kapcsolatok és a szabályozási mátrixok tulajdonságainak összefüggéseit formalizáló megállapításokat és tételeket mond ki. Ezzel óriási lépést tesz előre, hiszen a modellek szabályozási mátrixainak vizsgálata egzakt következtetésekre ad lehetőséget a modell szabályozási mechanizmusára vonatkozóan. A matematikai közgazdaságtan modelljei általában két mechanizmuskategóriát alkalmaznak: a centralizált és decentralizált mechanizmust. A szabályozási modellek jelátalakítási és jelátadási ismérvei szerinti csoportosítás egy finomabb beosztást, többfokozatú centralizált skálát jelöl ki. A második fejezet vegetatív, készletjelzéses modelljei képviselik a kötetben a legdecentralizáltabb fokozatot. Az árjelzések bekapcsolásával felírt modellek már egy magasabb fokozatot jelenítenek meg, hiszen itt kommunikáció is van a reálszervezetek között. A nyolcadik fejezet tételei a fokozatok közötti pontos különbségtevést teszik lehetővé, ugyanakkor olyan *modellvariánsok* képzését sugalmazzák, amelyek csak a mechanizmus centralizáltsági fokában (az *információellátás* mikéntjében) különböznek egymástól, a modellek elsődleges sajátosságai azonban megmaradnak.

Martos Béla a *kilencedik fejezetben* árkoordinációs, termelés-koordinációs és részleges ár- és termelési koordinációs modelleket alkot a hetedik fejezet modelljeit átalakítva. A modellek működési és stabilitási feltételei igen hasonlóak, miközben természetesen a szabályozások egészen eltérőek. A modellek elemzése két lényeges eredményre mutat rá. Egyrészt arra, hogy egy adott gazdaság működtetését igen eltérő mechanizmusok is képesek hasonló eredményességgel biztosítani. Másrészt arra, hogy a készletjelzéseken alapuló, egyszerű szabályozás is stabilan működteti a gazdaságot.

A harmadik részben, a *tizedik fejezetben* *Kornai János* és *Simonovits András* áttérnek a *normál pályáról vezérelt* gazdaság vizsgálatára. A szerzők zárt Leontief-gazdaságot szabályoznak Neumann-pálya szerint. Modelljükben megjelenik a technológiailag szükséges eszközlekötés B mátrixa is. Továbbra is készletjelzéssel szabályoznak, azonban a konkrét modellegyenletek és a hozzájuk kapcsolódó feltevések természetesen módosulnak az első és második rész modelljeihez képest. A modell feltevései erősek ugyan, de itt sem az a feladat, hogy a valós gazdaságra közvetlenül alkalmazható számszerű eredményeket kapjanak, továbbra is a stabilitás és működőképesség határainak kitapogatása a cél. A modellben adott a készleteknek a termeléshez viszonyított nagysága, és kimutatható, hogy a rendszer növekedése annál lassúbb, minél nagyobbak az *ütközőkészlet* normái. A modellen belül nem lehetett viszont vizsgálni azt, hogyan hat az ütközőkészlet nagysága a relszféra működési biztonságára.

A *tizenegyedik fejezetben Kapitány Zsuzsa szimulációs vizsgálatokat* végez az előző fejezet modelljével. A kísérletsorozat közelebb visz a valósághoz, hiszen a gazdaság valós körülményei közepette a viselkedési szabályok soha nem determinisztikusan érvényesülnek, hanem kisebb-nagyobb ingadozásokkal. A sztochasztikus válaszfüggvényű modell futtatásai a rendszer viselkedését különböző paraméterértékek mellett vizsgálják. Egyik legérdekesebb eredménye éppen a készletnormák emelése és a *működési biztonság* közötti összefüggésre vonatkozik. A készletnormák emelkedése egy bizonyos határig jótékony hatással van a rendszer biztonságára, utána azonban már a biztonságos működés gátjává válik.

A kötet eddigi modelljeiben alkalmazott készletjelzésen alapuló szabályozást a *tizenkettedik fejezetben (Kornai János—Simonovits András)* felváltja a rendelés-jelzésre építő szabályozás, amely az előzőekkel ellentétes típusú mechanizmust képvisel. „A *rendelés-jelzéses* gazdaság felfogható úgy, mint egy krónikus hiánygazdaság absztrakt képe, amelynek minden szektora tartósan távol van a walrasi egyensúlytól. Ebben is végbemennek decentralizált alkalmazkodási folyamatok. Ahol a „hiány" (amit itt a teljesítetlen rendelésállomány jelez) nagyobb a normálisnál, ott gyorsítani kell a termelésnövelést, ahol viszont a „hiány" kisebb a normálisnál, onnét elvonhatók erőforrások" (39. o.). Bár a két rendszer nem ekvivalens (a rendelésjelzés rendszer a modell feltételei között gyorsabban nő, mint a készletjelzéses), mindkettő aszimptotikusan stabillá és működőképessé tehető, azaz a két igen különböző jelzőrendszerrel rendelkező szabályozási mechanizmus egyaránt képes működtetni a gazdaságot, mégpedig árjelzések bekapcsolása nélküli, vegetatív módon.

A bemutatott modellek leglényegesebb működési tulajdonságait a stabilitásvizsgálatok elemezték. Ezek a vizsgálatok a szabályozáselmélet hagyományos eszközeivel dolgoztak, de néhol sikerült a modellek közgazdasági természetének megfelelő egyéb sajátosságokat is feltárni. A *működőképesség* egyfajta újszerű elemzését teszi lehetővé a szabályozási modellekben, ha a szabályozási változókat alsó és felső korlátokkal határoljuk be. Ezek a *szabályozási célú korlátok* közgazdasági szempontból ésszerűek, hiszen a túlzott kilengések megakadályozását szolgálják, nem biztos viszont, hogy a stabilitási tulajdonságokat helyes irányban befolyásolják. Ezt a kérdést vizsgálva *Simonovits András* a *tizenharmadik fejezetben* és igen fontos, érdekes eredményekre jut. Lesznek olyan instabil rendszerek, amelyeket a korlátozás stabilizál, és lesznek olyanok, amelyek bár önmagukban stabilak voltak, a korlátozás hatására destabilizálódnak. Simonovits András eredményei arra vonatkoznak, hogy milyen korlátozásokkal lehet a destabilizáló hatást elkerülni vagy legalábbis a lokális működőképességet megőrizni és lényeges tételeket sikerül megfogalmaznia a szabályozási paraméterek és a szabályozási változókat behatároló korlátok közötti összefüggésekről.

A kötet nemzetközi viszonylatban is úttörő kutatásokról számol be. Világos stílusa, egységes jelölésrendszere, logikus gondolati felépítése a szerkesztők gondos kezemunkáját dicséri. A téma és egzakt megfogalmazása a matematikus—közgazdászok számára vonzó és érdekes olvasmányt nyújt. De a kevesebb matematikai jártassággal rendelkező olvasónak is ajánlhatjuk a könyvet, ugyanis a modell matematikai megfogalmazását, diszkusszióját mindenütt verbális magyarázatok is követik. A szerzők — igen rokonszeves és szokatlan módon — nem hallgatják el modelljeik gyengéit sem. Nem igyekeznek többet belemagyarázni egy-egy tételbe, eredménybe, mint ami valóban benne van. Egyes kritikus helyeken megjelölik azokat a kutatási irányokat is, amerre modelljeikeit tovább lehetne fejleszteni. Részben a kötet szerzői, részben mások el is kezdték ezt a munkát. Az utóbbi években több tanulmány látott napvilágot, amelyek a szabályozáselmélet apparátusával vizsgálták —e könyv modelljeitől kissé eltérő módon vagy azokat továbbfejlesztve — a gazdaság szereplőinek viselkedését, illetve a különböző szabályozási mechanizmusokat.

Mint ismertetésünk elején említettük, a kutatási irányzat alapeszméit az *Anti-Equilibrium* és *A hiány* c. könyvek fogalmazták meg. A *Szabályozás árjelzések nélkül* tanulmányai elsősorban a módszertan területén tettek előre nagy lépést, megtalálva a leíró-magyarázó elmélet egyik lehetséges matematikai kifejezésmódját.

TEMESI JÓZSEF

Kornai János: *Növekedés, hiány és hatékonyság.* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó Budapest, 1982. 155 p.

A szakmai közvélemény nagy érdeklődéssel várta, mivel jelentkezik Kornai János átütő sikerű könyve *A hiány* megjelenése után. Nyilvánvaló volt, hogy ez a mű lezárt egy kutatási periódust, még akkor is, ha maga a szerző nyitott kérdések sokaságát említette könyvében. *A hiány* kerek egész, az erőforrás-korlátos gazdaságnak már-már mérnöki pontosságú leírása. Elemzési módszereiben mikroökonómiai, mondanivalója azonban a gazdaság egészére vonatkozik, s számos általános társadalomtudományi kérdést is felvet.

Több lehetőség állt tehát Kornai János előtt munkássága további irányának megválasztásakor. Hogy Kornait is megkísértették gondolatmenetének általános társadalomtudományi konzekvenciáit azt a *Valóság*ban megjelent cikke bizonyítja (*Hatékonyság és szocialista erkölcs*, 1980. 5. szám) — szinte meglepően hamar megjelent azonban a könyvesboltokban ez az új mű, amely eloszlatta a kételyeket Kornai további kutatásainak fő irányát illetően.

Kornai rendkívül tudatos kutató. A munkásságára jól figyelők előtt ismeretes volt, hogy nem adta fel *A hiány* készülte alatt sem azt a kutatási területet, amelyet Martos Bélával közösen írt *Gazdasági rendszerek vegetatív működése* című cikke (*Szigma* 1971, 34—50. o.) jelölt ki, s amelynek alapvető gondolati hátterét (csakúgy, mint *A hiány*ét) az *Anti-equilibrium*ban (KJK, 1971) már megfogalmazta. Részben saját kutatási eredményei, részben munkatársainak vizsgálatai vezettek el annak az elméleti szempontból igen jelentős modellcsaládnak a kialakításához, amelynek áttekintését a *Szabályozás árjelzések nélkül* című könyv adja meg (Kornai—Martos szerkesztésében, Akadémiai Kiadó, 1981.).

Kézenfekvőnek látszott tehát, hogy Kornai kísérletet tegyen a két, közös tőről származó kutatási irány szintézisére, amely a problémakör közgazdasági tartalmából következően a hagyományosan makroökonómiának nevezett területre vezetett. E kísérlet első, sokat ígérő megjelenési formája a *Növekedés, hiány és hatékonyság*, amely — a szerző megfogalmazása szerint — „a szocialista gazdaság dinamikus makroelméletéhez szól hozzá".

A szerény megfogalmazás mögött igen nagyszabású vállalkozás áll. Kornai hatalmas szellemi apparátust mozgat ebben az alig nyolc ívnyi könyvecskében (a megállapítás igazolásaként hadd utaljak a hivatkozott irodalom tartalmi spektrumára), s a további kutatások előtt tartalmi és módszertani szempontból egyaránt széles távlatokat nyitott meg. *A hiány* nemcsak tartalmában, közgazdasági következtetéseiben alapmű, hanem módszertani iskolát is teremtett — ez a könyv ebben az iskolában újabb „párhuzamos osztályt" indított.

A könyv lényegében egy modellt ír le. Hogy mi az új ebben a modellben, mennyiben tér el a korábbi kutatások eredményeitől (amelyek közül Kornai saját korábbi művei mellett főként két kutatási területre, a Neumann, Harrod és Kalecki nevével fémjelzett növekedéselméletre és a más műveiben is sokszor hivatkozott Barro, Grossman, Benassy-féle disequilibrium iskolára utal), azt sok, önmagában is fontos részletkérdésben is megfogalmazhatnánk. Hadd emeljem ki ezek közül a reálszféra és szabályozási szféra kapcsolatának következetes kezelését vagy a stock és flow változók sok lényeges következménnyel járó együttes alkalmazását. Mindezeknél fontosabbnak ítélem azonban a munka szemléletmódját, amely a hagyományos makroökonómia meglehetősen technikai közelítésmódjához úgy illeszti hozzá *A hiány*ból ismert általános társadalomtudományi közelítést, hogy mindkettő értékeit megtartja.

A hiány makroindexének (amely mintegy hordozója az említett közelítésnek) bevezetését bizonyára sokan vitatják, s kétségtelen, hogy a könyv inkább csak „feldobja a témát", s számos jogos kérdést nyitva hagy. Kornairól azonban tudjuk, hogy nála a hivatkozás arra, hogy a kutatások elején tart, nem olcsó trükk félkész ötletek elsütésére, hanem további munkát ígérő tényközlés, s egyúttal kihívás a vitára. Magam részéről nagy jelentőségűnek tartom, hogy képesek legyünk arra, hogy a formalizált, s ezáltal meglehetős egzaktságot követelő modellekben képesek legyünk „puha" változókat, rosszul körülhatárolható, bizonytalan tartalmú tényezőket kezelni, — a valóságban a közgazdasági jelenségeket leíró változók ugyanis általában ilyenek. Ez a közelítés teszi lehetővé, hogy a gazdasági rendszereket valóban társadalmi rendszerekként kezeljük, figyelembe véve azokat a valóságban nagyon is elevenen ható nem-gazdasági tényezőket, amelyeket a hagyományos közgazdasági elmélet nem tud (vagy nem akar) tételesen figyelembe venni.

A könyvben leírt modell zárt gondolati struktúra, alkalmas keret makroökonómiai elemzésre. A modellt leíró egyenletrendszer megoldható, ami lehetővé teszi, hogy ne csak logikai elemzést, hanem számszerű adatokra épülő tesztelést végezzenek vele.

Ily módon a modell kielégíti azokat a feltételeket, amelyeket Kornai az *Anti-equilibrium*ban a logikai-matematikai tudományok konstrukcióival szemben támaszt, az elmélet rangjának eléréséhez.

Kornai szándékai azonban nyilvánvalóan túlmutatnak ezen. Mint eddig munkásságában mindig, most is olyan elméleti struktúrát kíván építeni, amely a valóság magyarázatára alkalmas. A modell segítségével megfogalmazott következtetések általában ebből a szempontból is megállják a helyüket, de az is tény, hogy (mint a szerző maga is hangsúlyozza) a modell több helyen módosításra, kiegészítésre szorul.

Megítélésem szerint a legnagyobb probléma, hogy a külgazdaság kikapcsolásával a modell zárt gazdaságot tételez fel. Ez nem egyszerűen oda vezet, hogy bizonyos következtetések elmaradnak, hanem néhány vonatkozásban kimondottan a valóságnak ellentmondó megállapításokat (illetve féligazságokat) eredményez. Ez természetes is, ha a magyar gazdaság sokat emlegetett nyitottságára gondolunk. A legélesebb példa: a beruházások tárgyalásánál a fogyasztásra szimmetrikus ciklust említi Kornai első visszacsatolásként (Bauer Tamásra is hivatkozva), s teljesen kihagyja a Bauer által is tárgyalt másik esetet, a külkereskedelemre szimmetrikus ciklust, amely pedig a magyar gazdaság közelmúltbeli történetében a lényegesebb szerepet játszotta. Az illusztrációként közölt 10. ábra is igaz az ott szereplő négy évre, de ha az idősorokat folytatjuk, már nem ilyen képet kapunk. A modell szempontjából a kezelésmód jogos, a valóság oldaláról azonban komolyan kifogásolható.

A további kutatások egy fő feladatául megítélésem szerint éppen a külkereskedelem kezelését kellene kitűzni — annál is inkább, mivel a külkereskedelem-érzékenység nemcsak Magyarországra, hanem a modell referenciarendszereként elképzelhető többi európai szocialista országra is igaz.

Van még néhány kisebb-nagyobb gond a modell valósághűségével. Így véleményem szerint a termelés szabályozásánál hibás az outputkészlet jelző szerepének értékelése. Hazánkban az outputkészletek a technikai minimumszinten vannak, ez a „normál" nagyságuk, ez alá már nem csökkenhetnek, a rendelésre gyártás az általános, így helyesebb lenne a szabályozó szerepet a rendelésállományra hárítani. Nem érzem továbbá meggyőzőnek azt a fejtegetést, amely szerint, ha a hiány intenzitása egy kritikus szint fölé emelkedik, ez elveszi a háztartások kedvét a vásárlástól. Bár kétségkívül van ilyen motívum, ennél jóval sokszínűbb a háztartási magatartás az adott esetben, s egyedül ezzel kevés indokolni az aggregált vásárlás csökkenését. Hiányzik a modellből a fejlesztési pénzeszközök központosított redisztribuciója. Ezek, s az esetleg még észrevehető egyéb kisebb problémák azonban a modell és a könyv fő mondanivalóját nem befolyásolják érdemben — a további kutatások során nyilván több hasonló kérdés kerül más megvilágításba.

Még egy megjegyzés: a következtetések között számos olyan van, amely lényegében *A hiány*ban megfogalmazott gondolatok ismétlése. Ez nem baj, sőt az a tény, hogy ez a modell is igazolja őket, a megállapítások erejét növeli. Úgy vélem azonban, hogy felesleges a megállapítások leíró jellegének többszöri ismétlése — ez a közlésmód, elsősorban éppen Kornai munkásságának eredményeképpen, ma már eléggé ismertté (mégha nem is mindig elfogadottá) vált a közgazdászok számára, s így elég lenne a bevezetőben hivatkozni rá.

A munka egészét a Kornaitól megszokott pontos szerkesztés, az érthető és egyértelmű fogalmazás, az olvasmányosság jellemzi.

A *Növekedés, hiány és hatékonyság* gondolatébresztő, érdekes és fontos mű. Érdeklődéssel várjuk a folytatást.

CHIKÁN ATTILA

KÖVES P.—PÁRNICZKY G.: *Általános statisztika* Budapest, 1981. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. 363 + 387 old.

A magyar statisztikai gyakorlat hagyományosan előkelő helyet foglal el a nemzetközi ranglistán. Ez nemcsak a módszerek fejlettségében, az információ rendezettségében, a kiadványok bőségében nyilvánul meg, hanem abban is, hogy a Központi Statisztikai Hivatal és a magyar statisztikusok egyénenként is jelentős szerepet játszanak a nemzetközi statisztika fejlesztésében (nemzetközi szervezetekben, mint például az ENSZ, KGST, nemzetközi tudományos társaságokban, mint például a Nemzetközi Statisztikai Intézet, Nemzetközi Jövedelem- és Vagyonkutató Társaság, nemzetközi statisztikai vállalkozásokban, mint például a bruttó hazai termék és a vásárlóerő nemzetközi összehasonlítása). Ahhoz, hogy ezt az előkelő helyünket megtarthassuk, gondoskodnunk kell az utánpótlásról, a megfelelő statisztikai képzésről, s ennek legjelentősebb alappillére az általános statisztika oktatása, megfelelő általános statisztikai szakkönyv.

A szerzőpárosnak nem ez az első tankönyve és szakkönyve. Ők ugyan szerényen csak harmadik átdolgozott kiadásnak nevezik a jelenlegit (1973 és 1975 volt az első két kiadás éve), valójában azonban joggal beszélhetnénk új könyvről is, annyira jelentősen módosult a tártalom, a kifejtés, s a jelleg is. Már itt hozzáfűzöm, hogy mindenképpen előnyére. Bár a korábbi változatokkal szemben sem lehetett jelentős kifogásokat támasztani, a bővítések, továbbfejlesztések, szemléletbeli egységesítések, didaktikai javítások egy igazán kiváló, magas színvonalú tankönyvet (szakkönyvet) adtak eredményül.

Mielőtt a könyv tartalmához szólnék hozzá, először azokkal a dilemmákkal szeretnék foglalkozni, amelyekkel minden ilyen könyvnek az írója szembetalálkozik, s amelyeket a szerzőpáros sem kerülhetett ki.

Tankönyv vagy szakkönyv? A két műfaj nem azonos, mást kell tartalmaznia egy oktatási anyagnak, s mást a képzett szakemberek szakmai tájékozódását szolgáló munkának. A szerzők azonban helyesen találták meg a két műfajnak azt a kombinációját, amely mind a két igényt egyidejűleg ki tudja elégíteni. Kis országokban — úgy tűnik — valóban sokszor az a leggazdaságosabb megoldás, ha a két műfajt összevonjuk; lehetne ugyan külön tankönyvet és külön szakkönyvet is kiadni, de nem nagyon bírnák az erőforrásaink. A könyv szerencsés módon oldja meg ezt az egyesítést: szakkönyv ugyan, de szerkezete úgy van felépítve, hogy a tananyagszerű részek minden nehézség nélkül elkülöníthetők.

Más tananyagokra való támaszkodás mértéke. Ez a probléma elsősorban a matematikával kapcsolatban merül fel. Statisztikát lehet úgy oktatni, hogy a tanulóknál csupán a négy alapművelet ismeretét tételezik fel, de lehet úgy is, hogy a közgazdaságtudományi egyetemen matematikában oktatottakhoz mintegy csak hozzáadják a statisztika matematikai részét. A szerzők egy ésszerű középutat választottak, a bevezetőjükben ugyan azt írják, hogy a könyv feltételez középiskolai tanulmányokat meghaladó matematikai ismereteket elsősorban az analízis, a lineáris algebra és a valószínűségszámítás területén, a tananyag azonban úgy van megszerkesztve, hogy döntő többségét különösebb matematikai előképettség nélkül is jól meg lehet érteni. Valószínű, hogy az egyetem matematikai tananyagára jól emlékező hallgatók sem fogják a könyvben olvasottakat unalmasnak találni, mert az azonos tartalmú témák (például átlagok) más-más aspektusban vannak kifejtve a két tananyagban.

Jól sikerültnek minősíthető a politikai gazdaságtanban tanultakra való támaszkodás is. A szerzők a könyvben előforduló főbb közgazdasági fogalmakat a politikai gazdaságtanban tanultakkal összhangban igyekeznek használni, helyenként hivatkoznak is bizonyos tételekre. Nem erőltetik azonban ezt a kapcsolatot, nem kívánják például — mint ahogy ez korábbi statisztikai tananyagoknál nálunk is, más országokban is előfordult — a politikai gazdaságtan alaptételeiből levezetni a statisztika legfontosabb fogalmait.

Általános, illetve konkrét statisztika. Magyarországon hagyomány, hogy a közgazdászok statisztikai oktatása két részre tagozódik: a módszereket általános oldalukról tárgyaló általános statisztikára és a szakterület (például az egész gazdaság, az ipar) sajátos statisztikai problémáit tárgyaló szakstatisztikákra. Azt például, hogy miként kell általában indexeket számítani, az általános statisztika tanítja meg, azt, hogy milyen funciókat tölt be, milyen sajátos problémái vannak a fogyasztói árindexnek, ez a gazdaságstatisztika vagy életszínvonal-statisztika tárgya. Más országok egyetemi oktatásában is — ha nem is mindenütt — hasonló tagozódások fordulnak elő.

A dilemma, amivel ilyenkor a tankönyvírónak (tananyagszerkesztőnek) szembe kell néznie ez: meddig menjen az általános statisztika, s mi maradjon a szakstatisztikának. A kérdés megválaszolása nem könnyű, mert az „általános" és „konkrét" viszonylagos fogalmak, többféle értelmezésük is jogosultnak látszik; inkább azt kellene vizsgálni, oktatás-gazdaságossági szempontból mi látszik előnyösebbnek. Úgy érzem, a szerzők jó érzékkel vonták meg az általános statisztika határait, egyes területeken azonban tovább is mehettek volna az általánosításokban. Például általános statisztikába valónak érzem az idősorok összehasonlíthatóságának, diszkontinuitásainak kérdéseit (árindexeknél: új termékek keletkezése, régi termékek eltűnése, minőségváltozások okozta problémák), valamint a helyettesítések általános kérdéseit (amikor valamilyen oknál fogva nem azt a jelenséget tudjuk közvetlenül megfigyelni, amit tulajdonképpen vizsgálni akarunk, de mégis az előbbinek a mozgásából következtetünk az utóbbi alakulására; például az a megoldás, amit az iparstatisztikában helyettesítő sorok módszerének szoktak nevezni).

Fokozatosság az egyszerűbbtől a bonyolultig. Minden tananyagnál kívánatos, hogy az egyszerűbbtől haladjon a bonyolultabb felé, ez azonban nem mindig valósítható meg könnyen, mert a témák szerinti tagozódás sokszor igényelné bonyolultabb módszerek tárgyalását viszonylag korai stádiumban. A szerzők nagy súlyt helyeztek a fokozatosság követelményére, s ebből a szempontból sikeresnek minősíthető a tankönyv felépítése. Ha ebben nem is különböznek nagyon más általános statisztika tankönyvektől, abban igen, hogy a fokozatossághoz egy építőkocka-rendszerű felépítést alkalmaznak, a bonyolultabb témákat általában az egyszerűbb témák elemeire alapozzák, így a tanulónak nemcsak az az érzése keletkezik, hogy megismerkedik a statisztika különböző témáival (például viszonyszámokkal, átlagokkal, indexekkel), hanem olyan érzése is, hogy valami egésszel is megismerkedik, s állandóan érzékelni tudja, hogy az egyes építőelemekre hogyan rakódnak rá a továbbiak.

A szerzők ezeket az építőelemeket a „statisztikai elemzés jellegzetes eseteinek'' nevezik. (Az „esetek'' helyett talán az elemek kifejezés szerencsésebb lett volna.) A módszer nagyon figyelemre méltó, s véleményem szerint — más felépítésekhez viszonyítva — jóval több előnye van, mint hátránya. Különösen a szakkönyv változatban tulajdonítok ennek a megközelítésnek nagy jelentőséget, mert ily módon az egyes módszerek (például indexek) tulajdonságai sokkal mélyebben érthetők meg. Tananyagként is jelentős előnyei vannak a „statisztikai elemzés jellegzetes esetei'' felépítésnek; mikorra például az indexekről szóló fejezethez ér a tanuló, már majdnem minden lényeges elemét ismeri ennek a módszernek, alig kell valamit hozzátanulnia. Igaz, ezért bizonyos árat is kell fizetni: a korábbi fejezetek absztraktabbá, némileg nehezebben emészthetővé válnak. Például amikor a középértékek fejezetében a tanuló az átlagbér mutatószámával találkozik, nemcsak azt kell megtanulnia erről, hogy ez átlag, számtani átlag, s mint ilyen milyen tulajdonságokkal rendelkezik, hanem azt is, hogy ez az építőelem hogyan illeszkedik a jellegzetes esetek rendszerébe. Szerencsére a szerzők most jobban kerülték el azt, hogy az absztrakciókba belebocsátkoznak, mint a tankönyv korábbi változatánál, s így — megítélésem szerint — a jellegzetes esetekre alapozott felépítés előnyei sokkal jelentősebbek, mint hátrányaik.

Tárgyi ismeretek nyújtása vagy gondolkodásra tanítás. Egy tankönyvnek mindkettőt nyújtania kell, a két követelményre azonban más-más viszonylagos súlyt lehet helyezni. Nem könnyű véleményt mondani arról, hogy a szerzők miként viszonyultak a két követelmény konfliktusainak kérdéséhez (talán ebből a szempontból nem is teljesen egységes a könyv), az azonban mindenképpen örvendetes, hogy a gondolkodásra tanítás viszonylag nagy szerepet kapott. A már tárgyalt építőelem-megközelítés is nagyon jó példája ennek, de számos részletprobléma bemutatásánál is határozottan előnyösnek minősíthető, hogy a szerzők mintegy párbeszédet folytatnak a tanulókkal, nemcsak ismeretek befogadását kérik tőlük, hanem gondolkodást is.

Az illusztratív és gyakorló példák kérdése. A példák részben a problémák kifejtésének illusztrációját szolgálják, részben a már megtanultak begyakorlására adnak alkalmat. A tankönyvírásnak mindig visszatérő problémája, mennyiben tartalmazza már maga a könyv is ezeket a példákat és mennyiben támaszkodjék különböző segédletekre (példatárakra). A szerzők egy észszerű kompromisszumot választottak: bár a könyvben csak illusztratív példák szerepelnek, ezek bizonyos gyakorlásra is lehetőséget adnak. Így csupán a könyvből is lehet némi gyakorlati tapasztalatokra szert tenni. Az egyetemi oktatást azonban bőséges példatár is kiegészíti, így a gyakorlatozásban tetszés szerinti mélységig el lehet menni. Helyes, hogy a gyakorlati példák tömkelege nem magát a tankönyvet terheli, s hogy az előző kiadásokhoz képest is eltüntek az egyes fejezetek végén lévő gyakorló példák. Tipográfiailag is szerencsés módon válnak el az illusztratív példák a tulajdonképpeni tananyagtól.

Ami az illusztratív példák tartalmát illeti, azok itt-ott frissebbek is lehettek volna. A bruttó hazai termék összehasonlítását illusztráló táblánál (331. oldal) például több országra vonatkozó és frissebb adatok is rendelkezésre álltak már a tankönyv megírásának időpontjában.

* * *

Ami a könyv tartalmához fűzött egyes észrevételeimet illeti, a terjedelmi korlátok miatt nem törekedhetek itt valamiféle teljességre. Elsősorban azokkal a kérdésekkel kívánok foglalkozni az alábbiakban, amelyek változást jelentenek a korábbi tankönyvekhez képest.

A statisztika alapfogalmai (1. fejezet) egy rövid statisztikatörténeti bevezetés után magának a statisztikának többértelmű fogalmát tárgyalja, majd sorraveszi a legfontosabb alapfogalmakat, mint sokaság, ismérv, adat, mutatószám, modell, osztályozás, csoportosítás, összehasonlítás, összehasonlíthatóság stb. A fejezet jól megalapozza a későbbieket, egyetlen kisebb hiányérzetem a mutatószám fogalmával kapcsolatban támadt. Itt rá lehetett volna mutatni ennek a fogalomnak a többféle értelmezésére, az angol *indicator* nem ugyanazt jelenti, mint az orosz *pokazatyel*, s egyes magyar szerzők is különbséget tesznek például társadalmi-gazdasági indikátorok és társadalmi-gazdasági mutatószámok között, az előbbiek részét alkotják az utóbbiaknak.

A statisztikai információrendszer (2) az egyik legtöbbet változott fejezet az előző kiadásokhoz képest. Hogyan keletkeznek a statisztikai adatok, kinek van rájuk szüksége, hogyan kapcsolódik az információigény az adatszolgáltatóhoz? Ezekre a kérdésekre sok elméleti statisztikai tankönyv, egyáltalán nem válaszol. Más könyvekben — így a Köves—Párniczky 1973-as kiadásában is — csupán a statisztikai munka hagyományos tárgyalása jelenik meg, ami nem felel meg a korszerű *rendszerszemléletnek*.

A témakör egységes felfogását és logikus kifejtését e fejezet adja a statisztikai információrendszer keretei között. E keretbe illeszthető például a statisztikai fogalomalkotás, a standard osztályozási rendszerek, a kódolás tárgyalása is, de itt található néhány olyan fontos kérdés is, mint pl. a statisztika és a nyilvántartás viszonya (47—48. oldal). Ezek a témák — legalábbis ebbe a rendszerfelfogású keretbe ágyazva — a statisztikai tananyagok túlnyomó többségéből hiányoznak.

A hallgatók számítástechnikai ismereteire építve tárgyalja a könyv az adatrögzítés, karbantartás, tárolás és feldolgozás kérdéseit, sőt szóbakerül a számítógép a hibafeltárás és javítás műveleteinél is. Ezen belül legfontosabb a *statisztikai adatbázis* szerepének megértése.

Egyetlen meggondolásra javasolt megjegyzést tennék csak az ebben a fejezetben írottakhoz. A felvétel fajtáinak tárgyalásánál — más általános statisztikai tankönyvekhez hasonlóan — a teljeskörű felvétellel a reprezentatív megfigyelést állítja szembe, s csak futólag említi meg a részleges, de nem reprezentatív megfigyelést és a monográfiát. A tapasztalat azonban azt mutatja, hogy a részleges, de nem reprezentatív megfigyelések egyre nagyobb szerephez jutnak, s egyre kevesebb az igazi reprezentatív (mintavételi) eljárás, többek között azért, mert sokszor nem ott a legkisebb a teljes hiba, ahol a mintavételi hiba a legalacsonyabb. Másrészről egyre jobban terjed külföldön is, hazánkban is egy újfajta megfigyelési rendszer, amit esettanulmányok sorozatának (ankétnak?) lehetne nevezni, ahol a megfigyelt részekből nem következtetünk az egészre, mégis bizonyos kérdések tekintetében általánosítások válnak lehetővé. Igaz, ez már nem szigorúan statisztika, de nagyon közel van hozzá, s az információrendszer tárgykörébe mindenképpen beletartozik.

Az elemzés egyszerűbb eszközeivel, sorokkal, táblákkal, viszonyszámokkal, grafikus ábrázolással, középértékekkel, szóródással, gyakorisági sorok vizsgálatával négy egymásutáni fejezet (3—6) foglalkozik. Ezekben a részekben kevesebb a korábbi kiadásokkal szembeni változás, ez azonban nem jelenti azt, hogy a bíráló ebben kifogásolnivalót találna. Szépen érvényesül itt a fokozatosság, a gondolkodásra késztetés; a tárgyalás az előző kiadásokhoz képest valamivel tömörebbé vált, de ez is inkább előny, mint hátrány.

Az előző kiadásban a momentumok rövid, apróbetűs tárgyalását sok olvasó feleslegesnek érezte. A mostani kiemeltebb és úgyszólván csak két példával bővített tárgyalás jobban meggyőzi az olvasót egyrészt arról, hogy a fogalmi rendszer hasznosan bővül a momentumok megismerésével, másrészt arról, hogy a gyakorisági sorok elemzésének nagyobb távlataiba kapott betekintést.

Kevés kritikai észrevételem van ehhez a csaknem 200 oldalas részhez. A statisztikai mérlegek tárgyalásánál hiányolom a forrásfelhasználás típusú mérlegek említését (mint amilyen például a nemzeti jövedelem mérlege). Egyes részeknél — például a módusznál — úgy éreztem gyakorlati jelentőségéhez képest túl részletesre sikerült a kifejtés. A momentumok tárgyalása — helyeselhetően — rövidebb, mint az előző kiadásban, vitathatónak érzem azonban a „*rendkívül* fontos szerepük van" minősítést (267. oldal).

Az indexszámítások kérdéseivel két fejezet (7—8) foglalkozik. E nehéz táma a könyv egyik legsikerültebb része, érezhető, hogy a szerzők egyike ezeknek a kérdéseknek nemzetközileg elismert szakértője. Egyetlen lényegesnek tartott megjegyzésem az, hogy mind gyakorlati szerepüket, mind a problémák kifejthetőségét tekintve, egymáshoz képest az érték-, volumen- és árindex-kör (7. fejezet) túlságosan rövidre, a főátlagindex-kör pedig túlságosan hosszúra sikerült. A volumen- és árindexeknél például többet lehetett volna írni az indexsorok képzésének problémáiról, arról, hogy a különböző követelmények milyen konfliktusban vannak egymással, s hogy mi ezzel kapcsolatban a nemzetközi gyakorlat és az ENSZ módszertani ajánlása, továbbá a nemzetközi összehasonlításoknál a gyakorlatban használt megoldásokról. (Egészen meglepő, ha már annyi formulát említettek meg a szerzők, miért nem szóltak a Geary—Khamis módszerről, ami — úgy tűnik — a nemzetközi összehasonlítások uralkodó eljárásává válik.) A 8. fejezetet ugyanakkor — ha intellektuálisan nagyon szép is, s remek példája a fokozatosságnak, a „jellegzetes esetek" építmény betetőzésének — ahhoz képest, hogy a főátlag-, részátlag-, összetétel-indexek milyen fontossággal bírnak a gyakorlatban, túlméretezettnek érzem.

A statisztikai becslés és hipotézisvizsgálat (9. fejezet) alapozza meg a mintából való következtetés módszereit. Itt definiálnak a szerzők olyan fogalmakat, min pl. minta, becslés, konfidencia intervallum, hipotézis. Alapvető célkitűzésük szellemében a hangsúly nem a matematikai levezetéseken és bizonyításokon van, hanem a fogalmak, módszerek és az eredményül kapott adatok helyes megértésén. Ezt nem úgy értelmezik, hogy a hallgató *csak* az eljárásokat sajátítsa el; az elméletből is kell tudnia annyit, amennyi támpontul szolgál a megfelelő módszer kiválasztására. Az ilyen megértést elősegítő ismeretek például a maximum likelihood becslési módszer (II. kötet 33. oldal), a konfidencia intervallum fogalma (36, 38—39. oldal), az erőfüggvény fogalma.

A reprezentatív megfigyeléssel foglalkozó fejezet (10) nemcsak az egyszerű véletlen mintavételt tárgyalja — mint sok kevésbé igényes általános statisztikai tananyag —, hanem a bonyolultabb mintavételi eljárásokat is (rétegzett, csoportos és kétlépcsős stb.), ami azért is helyeselhető, mert a gyakorlatban az egyszerű véletlen eljárás sokszor nem gazdaságos, vagy szervezése nehézkes, vagy nincs kimerítő nyilvántartás stb.

A korreláció- és regresszió-számítással két fejezet (11—12) foglalkozik kétváltozós — többváltozós tagolásban. Helyeselhető e fejezetek felépítésének koncepciója: a könyv a *tapasztalati* mutatószámok magyarázatánál a hagyományos utat követi, ami didaktikailag jól bevált, a *matematikai modell* választásánál pedig a feltételes várható érték fogalmára és könnyen érthető feltételekre építve jut el a regressziószámítás alapelemeihez. Nagy súllyal tárgyalja a regressziószámítás közgazdasági alkalmazásait, az ehhez kapcsolódó fogalmakat és mérési eszközöket (pl. elaszticitás). Az eredmények pontosságának és megbízhatóságának vizsgálata a korszerű követelményeknek megfelelő súllyal szerepel. Röviden kitérnek a szerzők a többváltozós regressziószámítás olyan gyakorlati problémáira is, mint pl. a minőségi tényezők bevonása a magyarázó változók körébe alternatív ismérvek formájában.

A regressziószámítás gyakorlati alkalmazásának mai tömeges elterjedését a kész számítógépes „programcsomagok" tették lehetővé. Ez rendkívül megkönnyíti a felhasználó dolgát, de korántsem ad felmentést a fogalmak, módszerek és eljárások pontos ismerete alól. Felesleges viszont a numerikus számolást állítani a középpontba. Megnyugtató, hogy a könyv már ebben a korszerű felfogásban készült; az olvasó értesül arról, hogy mit várhat a számítógéptől, de arról is, hogy mit kell tudnia az eredmények szakmailag megalapozott hasznosítása érdekében.

Az idősorok analitikus vizsgálata a könyv utolsó fejezetének (13) tárgya. A fejezet tartalma és helye lényegesen megváltozott az előző kiadáshoz képest, melyben az idősorok komponenseiről szóló fejezet (a jelenlegi 13.1 alfejezet elődje) megelőzte a korrelációszámítási fejezeteket. Így az előző kiadásban a trendszámítás keretében került sor a legkisebb négyzetek módszerének bemutatására, tehát egy speciális esetben. Most az általános esetben, a kétváltozós regressziónál ismerkedhet meg az olvasó a legkisebb négyzetek módszerével, amire a trendszámítás tárgyalása támaszkodhat. De ezentúl támaszkodhat az idősorok analitikus vizsgálata a két- és többváltozós korreláció- és regressziószámítás egészére.

Az előző kiadásban a többváltozós korrelációszámítással foglalkozó fejezetben kaphatott helyet az „idősorok korrelációja" című téma, most egész alfejezetet (13.2) szenteltek a szerzők az idősorokból végzett regressziószámítás speciális kérdéseinek, melyben a korábban mostohán kezelt autokorreláció is megfelelő súllyal szerepel.

* * *

Külön említendő a könyvnek az az erénye, hogy tematikus is, szerkezetében is, stílusában is teljesen egységes, szinte észre sem lehet venni, hogy nem egy szerző írta az összes fejezetet. Összefoglalva: mind statisztikai szakirodalmunk, mind egyetemi oktatási tananyagunk szempontjából jelentős előrehaladásnak tekinthető Köves Pál és Párniczky Gábor könyve. Nemzetközi összehasonlításban is jó szakkönyvnek tekinthető, s didaktikai szempontból is kiváló tulajdonságokkal rendelkezik ahhoz, hogy felnövekvő közgazdász generációnk megfelelő statisztikai szakismeretekhez jusson.

DRECHSLER LÁSZLÓ

TUDOMÁNYOS ÉLET

A III. Magyar Ágazati Kapcsolatok Mérlege Konferencia

A Központi Statisztikai Hivatal és a Magyar Közgazdasági Társaság Statisztikai Szakosztálya, a Népgazdaságtervezési és Matematikai Szakosztályok közreműködésével 1981. november 3—5 között Hévízen rendezte meg a III. Magyar Ágazati Kapcsolatok Mérlege Konferenciát. A közel 50 előadást mintegy 50 külföldi és 120 hazai szakértő hallgatta és vitatta meg. A Konferencia díszelnöke Wassily LEONTIEF Nobel-díjas egyetemi tanár a módszer elméleti megalapozója és első gyakorlati alkalmazója volt. Az elnöki tisztet NYITRAI Ferencné államtitkár, a Központi Statisztikai Hivatal elnöke töltötte be.

A Konferencián az előadók témaválasztása meglehetősen heterogén volt. A sokrétűség ellenére megkíséreltük a Konferencia anyagát az egyes előadások fő jellemzője alapján néhány témakör szerint csoportosítani.

A Leontief-rendszer elméleti háttere és a fejlődés történeti tendenciája

A nyitó plenáris ülés keretében NYITRAI FERENCNÉ *Az Ágazati Kapcsolatok Mérlegének szerepe a népgazdaság helyzetének és fejlődésének elemzésében (magyar tapasztalatok)* címmel tartotta meg előadását. Az előadás rövid áttekintést adott a hazai ágazati kapcsolati mérlegszámítások történeti fejlődéséről, mai helyzetéről, majd a módszer alkalmazásával kapcsolatos tapasztalatokról számolt be. Külön felhívta a figyelmet arra, hogy napjainkban amikor a tervezés egyre inkább alternatívákban gondolkodik, az ágazati kapcsolati mérlegek és a számítástechnika milyen lényeges segítséget tud adni e munkához.

A plenáris ülés második előadójaként WASSILY LEONTIEF *Néhány gondolat a módszertani fejlesztés irányáról és az alkalmazási terület kiszélesítésének lehetőségeiről az input-output elemzésben* címmel a módszer továbbfejlesztéséről fejtette ki néhány elgondolását. Előljáróban hangsúlyozta a módszer kifejezetten empirikus karakterét, az elmélet és a gyakorlat között a szoros kapcsolat fontosságát a módszer életképességének fenntartása szempontjából. Azoknak az összefüggéseknek melyeket ez a gazdaságelemzési eljárás leír, van egy kifejezetten „fizikai" karaktere. Az elemzésbe bevonható egyik új terület a piacon kívüleső társadalmi-gazdasági jelenségek és folyamatok köre lehetne. Ilyenek a környezetszennyeződés és az egészségügy. Ezek inkorporálására az input-output rendszer igen előnyös kereteket nyújt. Ebbe a körbe tartoznak a háztartások is, melyek ábrázolása szokás szerint exogén. Az időben és térben részletezett háztartási jövedelemeloszlások felvétele lényegesen javíthatná a rendszer kifejező erejét. Az alkalmazási terület kiszélesítése természetesen számos követelményt támaszt az adatbázissal szemben. Ezzel kapcsolatban az előadó nyomatékosan aláhúzta az egységes terminológia jelentőségét. Óvott a termelési függvény túlzott egyszerűsítésétől és utalt a kellő dezaggregáció fontosságára. Rámutatott arra, hogy ráfordítási szerkezetről voltaképpen csupán az egyes termékek esetében lehet egyértelműen beszélni, termékcsoportok esetében rendszerint nem. Az előadó az input-output módszerrel kapott eredmények átadására ún. forgatókönyv matrixok készítését javasolta. Igen érdekesek voltak az előadásnak azok a részei, melyek a célfüggvény létezésével, a tér és időbeli összehasonlítás jogosultságával és lehetőségeivel foglalkoztak. Az előadó álláspontja a célfüggvény megfogalmazhatóságáról kifejezetten negatív volt. Összehasonlítás helyett pedig inkább azoknak a folyamatoknak a kutatását szorgalmazta, melyek két vagy több gazdaság kapcsolatát fejezik ki. A térben és időben végrehajtott összehasonlítások értékét igen viszonylagosnak ítélte az előadó, tekintettel a termékek eltérő jellegére és állandó cserélődésére. A dinamikus vizsgálatoknál felhívta a figyelmet a tőke olyan szerepeltetésére az input-output rendszerben, mely funkciójával valóban tartalmi, érdemi összhangban van. Utalt arra, hogy az e téren rendelkezésre álló könyveléstechnikai megoldások távolról sem kielégítőek. A tőke működését illetve annak a termelés alakulására gyakorolt hatását következetesen műszaki felfogásban kell megjeleníteni a modellben.

ZALAI ERNŐ *A marxi értékmeghatározás sajátértékmodellje* a munkaérték létezésének és unicitásának problémáját tárgyalta. A különféle termékek (beleértve a munkát is) értékének és a hozadék-aránynak szimultán meghatározására az előadó nem lineáris sajátérték modellt fogalmazott meg. Igazolta a nem negatív (pozitív) megoldás létezését értékben, valós feltételezések mellett, a együttható-mátrix irreducibilitásának kikötése nélkül. A feltevések a Leontief-matrix hatékonyságára új kritériumokat adnak. A sajátérték definiálásáról az előadó kimutatta, hogy az a munka heterogén karaktere esetén nem kerülhető el. Hasonlóképpen elsősorban elméleti érdeklődésre tartatott számot P. N. MATHUR előadása is: *Néhány gondolat a gazdálkodás központi magjáról input-output keretben.* A gazdálkodás edgeworth-i elméletéből indult ki. A gazdasági alanyokat olyan egyednek tekinti, akik két és többoldalú cserével igyekeznek helyzetükön javítani. A gazdasági alanyok együttműködő közösségét és egy jószágcsomagot definiálva, az elosztás lényegében a csomag eljuttatását jelenti az együttműködő partnerekhez. Az elosztás akkor hajtható végre, ha az együttműködők valamennyi ügyletet maguk között el tudják intézni. Az együttműködők gazdasági céljai szempontjából a kívülállók nem létezőknek tekinthetők. Ha feltételezzük, hogy létezik egy másik tömörülés is, melyben szintén van elosztás és ennek tagjai jobb helyzetben vannak, mint az előbbi elosztás esetén; akkor ez utóbbi uralkodó az előbbihez képest és gátolja az előbbit. A központi mag azoknak az elosztásoknak összessége, melyek megvalósíthatók és nem áll velük szemben semmiféle uralkodó tömörülés. Annak demonstrálásával, hogy a központi magban az eloszlások Pareto-optimális kompetitív jellegűek és hogy a gazdasági alanyok számának növekedésével a központi mag a kompetitív eloszlások halmazára mint határesetre zsugorodik: a fejtegetések az elmélet általánosítását, a társadalmi javak, a külső feltételek és a monopóliumok problémáját tárgyalták. KOZMA FERENC *A társadalmi-gazdasági jelenség természete és modell-rendszere* című előadása a gazdaságot mint rendszert valamilyen magasabb rendű élő organizmus analógiából vezette le. A rendszer lényeges jellemvonása: nyitottsága és az, hogy a tudatos befolyásolás sokoldalú ellenreakciót, beláthatatlan mellékhatás-láncreakciókat válthat ki. Az a modellrendszer, mely ezt az organizmust képes átfogni: *a)* az anyagcsere (termelés, kereskedelem); *b)* állagmutatók; *c)* munkaerő (demográfia); *d)* tőke újratermelése; *e)* természeti környezet újratermelése; *f)* feltételek-következmények; *g)* kapcsolódások-következmények; *h)* költségoptimum-megelőlegzési optimum modellek. Az előadás a gazdasági modellezési gondolatot igen tágan értelmezte. Arra törekedett, hogy minél teljesebb képet adjon, mi mindent kellene beépíteni egy modellrendszerbe, ha az a felmerülő kérdésekre kielégítő választ akar adni.

A mérleg-szerkesztés problémái

Az előadások másik nagy csoportja (15 előadás) az input-output táblák szerkesztésével, statisztikájával összeállításuk egyes országokban kialakult rendjével foglalkozott. *M. Edjelman* a Szovjetunióban, *K. M. Siehndel* az NDK-ban, *H. Sebyla* a Lengyelországban, *Koósné Balsay Éva* a Magyarországon, *A. Pimpao* a Portugáliában, *R. Stäglin* az NSZK-ban folyó ágazati kapcsolati mérlegszerkesztési munkákról, azok történelméről adott áttekintést. *V. Gejdos* a Csehszlovák Állami Tervbizottság 20 ágazatot felölelő input-output táblaszerkesztési munkáját mutatta be, *D. J. Balaszczuk* a KGST országok és Lengyelország rövidlejáratú külkereskedelmének elemzéséhez és tervezéséhez használt modellt tárta a hallgatóság elé.

A többi előadás szűkebb ágazati, regionális, vagy vállalati alkalmazással foglalkozott. Érdekes volt ezek között HAMZA L.—HORÁNYI M.—NÁRAY L. előadása: *Áru és jövedelem mozgásokat összekapcsoló input-output modell és alkalmazási lehetőségei a tervezésben.* Egy olyan zárt input-output modell szerkesztési kísérletéről adott számot, mely a kifejezett jövedelemáramlásokat és az ármozgásokkal kapcsolatos pénzáramlást elkülöníti egymástól. Ezáltal a modell a jövedelem-vásárlás-termelés-jövedelem körforgást követhetővé teszi. A megoldás lényegében az input-output tábla ún. negyedik moduljának kitöltésén alapul. Az előadás tárgyalta a tábla kitöltésének statisztikai lehetőségeit. Felhívja a figyelmet újszerű gazdasági összefüggésekre; bemutat egy új árelven alapuló árszámítást, mely a már ismert tényezőkön túl számol a keresleti szerkezettel és a jövedelem újraelosztásával is. Ennyiben a megoldás kétségkívül újszerűen közelíti meg az ár-jövedelem-pénzügyi politika témát. *N. Vavrejnova* a Csehszlovák gépipari és kohászati ágazatokra használt input-outpuat táblszerkesztési munkákról tájékoztatta a hallgatóságot. *Rechnitzer J.* Baranya, Somogy, Tolna és Zala megye területének egészére és egyenként a megyékre kidolgozott modellt mutatott be, amelynek segítségével a területi termelési kapcsolatokat vizsgálta. A regionális modell a területi egységek közötti „import'' és „export'' stabilitását, a szerkezet változásának kérdéseit érzékenységi vizsgálatokkal elemezte. A további előadásokon tájékoztatást kaptunk a Szolnok megyében a területi és a vállalati fejlesztési tervek ellenőrzésére kidolgozott modellről, a hazai nehézipari ágazat gazdaságelemzésében szerzett tapasztalatokról és az input-output eljárás előnyös alkalmazási lehetőségeiről termelőszövetkezeteink gazdálkodásának elemzésében és tervezésében.

Gazdaságelemzési és tervezési alkalmazások

Az előadások harmadik nagy csoportjába a közgazdasági gazdaságelemzési és tervezési alkalmazások sorolhatók (14 előadás). Az alkalmazások túlnyomórészt a statikus input-output rendszerekre alapozódtak, két előadás kísérletet tett dinamikus rendszerek hasznosítására is közgazdasági témák tárgyalásánál.

J. Jaremenko—E. Jersov—A. Szmislajev *Az ágazatok kapcsolatát leíró modell a Szovjetunióban* című előadása egy olyan modellt ismertetett, melyet a tradicionális input-output rendszerből fejlesztettek ki, annak kiterjesztésével és általánosításával a Szovjetunió középlejáratú (5—7 éves) tervei kidolgozásához. A modell mindenekelőtt számításba vesz néhány terméknél kínálati korlátokat, másoknál pedig számol viszonylagos feleslegekkel. A rendszer jól illeszkedik a Szovjetunió gazdaságának fejlődéséhez az 1970—1975 időszakban. A modell 18 ágzat termelési kapcsolatain épül fel, a végső felhasználás 12 szektorban részletezett. Az eljárás lényege, hogy a szokásos

$$X(i, j, t) = a_{ij}(t)^* Q(j, t)$$

összefüggést a

$$X(i, j, t) = a_0 + a_1(t) Q(j, T) + a_2(t) Q^*(i, t) + a_3(t) X^*(m, n, t) + a_4(t)$$

összefüggés helyettesíti, ahol az $a_2(t)Q^*(i, t)$ az i-ik termék kínálatának hatására utal és $Q(i, t)$ vagy exogén vagy egyenlő az i-ik termék folyó termelő és végső keresletének összegével.

Munkaügyi vonatkozású témát két dolgozat tárgyalt. Rácz Albert *Néhány gondolat a munka termelékenységéről és a termelés szerkezetéről* című előadásában a termékszintű termelékenység mérését vizsgálta. A terméket létrehozó folyamatot két szakaszra bontja, ennek megfelelően a termelékenység változás indexet mint az ágazaton belüli és az ágazaton kívüli hatás szorzatát definiálja. Az ágazaton belüli hatást pedig ismét két tényező szorzataként értelmezi. Nevezetesen: az élő és a holt munkának az ágazati indexre gyakorolt hatását különíti el egymástól. Az előadás második része az élőmunka szerepét tárgyalta a végső felhasználás egyes összetevőinél: a fogyasztásnál, a felhalmozásban és az exportban. Florea Gy.—Olajos Á. *Az input-output elemzés hasznosítása munkaügyi téren Magyarországon* alapgondolata, hogy a munkaügyi irányítás kellő ellátásához nem lehet lemondani arról az információ többletről, amit a végső felhasználás biztosításához szükséges élőmunka-ráfordítás elemzések nyújtani tudnak.

Az energiakérdés három igen eltérő felfogású, de egyaránt input-output eljárással operáló tanulmány tárgyát képezte. J. Beutel és H. Mürdter *Az energiaáramlás input-output elemzése és az optimális termelési tevékenységek meghatározása* c. előadása az NSZK energia politikai problémáit veszi szemügyre. A táblák 45 ágazatra részletezve ábrázolják a termelési tevékenységeket. Sajátos jellemzőjük, hogy az energiaforrásokat értékben és mennyiségben (terajoule) egyaránt tartalmazzák. A továbbiakban a szokásos Leontief-rendszer, mint programozási modell újra fogalmazódik. Előnye, hogy az általánosított input-output modell nem csupán a jól ismert három modellt, hanem a negyediket is magában foglalja. Az eljárás követi a korszerű fogyasztási elmélet alapgondolatát; a fogyasztó elsősorban bizonyos fogyasztási tevékenységek realizálásában érdekelt, nem a javak és a szolgáltatások bizonyos mennyiségének fogyasztásában. A fogyasztási tevékenységek azonban ráfordításokat követelnek meg, mégpedig állandó arányokban. A végső felhasználás vektorát ily módon a ráfordítási együtthatók adott sorozata alkotja. A cél a végső felhasználás maximálása adott ráfordítási szerkezetben, az elsődleges ráfordítások exogén módon adott nagysága mellett. Egyetlen végső felhasználás vektor esetében ez a tevékenység a célfüggvényben egy „szorzó''-val, értékben fejezhető ki. Az input-output rendszer halmozott ráfortási együtthatói a programozási modell optimális megoldásánál a versenyző adatokból és az árnyék-árakból származtathatók. Végül az előadás ismerteti, hogy az energia ágazatra hogyan határozhatók meg tapasztalati úton a műszakilag hatékony termelési folyamatok. A lineáris programozási modell ebben az általános alakjában felhasználható input-output struktúrák idő- és térbeli összehasonlítására is.

Molnár I. előadása áttekintést adott a hazai energiafelhasználás alakulásának jellemző vonásairól végső felhasználási célok (fogyasztás, felhalmozás és export) szerint 1970—1979 között.

Muraközi E.—Glattfelder P. *A kőolaj árrobbanásának hatása a magyar nemzeti jövedelemre* abból indult ki, hogy a 70-es években az olajárrobbanás a bekövetkezett árváltozásokat csupán részben magyarázza. A szerzők az 1976 évi input-output táblára támaszkodva kísérletet tettek, hogy ennek a résznek a nagyságát behatárolják. A számítási eredmények azt mutatják, hogy az import 37%-os és az export 16,8%-os áremelkedése mellett 1970—1976 között — ebből az energiahordozók árváltozásának jelentős szerep tulajdonítható — a nemzetközi jövedelemben mutatkozó veszteség, mint egyenleg 1,7—8%-os határok között becsülhető.

Az export-import témakörrel, népgazdaságunk import szükségleteivel a konferencián még további három magyar előadás foglalkozott.

Két dolgozat dinamikus input-output rendszerekkel tett kísérletet ágazati fejlődési pályák jellemzésére. Ezek a számítások egyelőre kísérleti stádiumban vannak.

Schumann J., Meyer U., Pinno U. *Input-output modell az ágazati fejlődésre és az árindexek az NSZK-ban* című előadása egy ökonometriai jellegű dinamikus input-output modellel végrehajtott vizsgálatok eredményeit ismertette. A modell az innsbrucki VII. Nemzetközi Input-Output Konferencián bemutatott *Dieckheuer—Meyer—Schumann* rendszer tökéletesített változata. A modell minden egyes ágazati végső felhasználáson ad egy fogyasztási és egy export függvényt. Az egyes ágazatokban további két árfüggvény értelmeződik. Egy, amelyik a hazai és egy másik, amelyik a külföldi értékesítési árat magyarázza. A javított változatban új a beruházási függvény is. Ez az ágazati beruházások termékösszetételét a beruházási javak ágazati kínálatával magyarázza. A modell 14 ágazatot ölel fel magában az 1960—1974 időszakban. Működőképességét az előadás az endogén változók ex post szimulálásával demonstrálta a vizsgált időszakra.

Csepinszky A. *A tényleges és az input-output modellel meghatározott fejlődési pályák és árváltozások a 70-es években Magyarországon* című előadása egy ökonometriai nyílt dinamikus input-output modell felhasználásával az ágazati termelést és az árak változását mutatja be az 1970—1979 évi időszakban. Az input-output tábla négy ágazat termelési kapcsolatait írja le. A végső felhasználáson belül az ágazati fogyasztások és exportok meghatározására ökonometriai függvények szolgálnak. A beruházási összefüggések az éves ágazati termelés növekményeket és az üzembe-helyezett beruházásokat állítják egymással szembe. Az árindexek képzéséhez az elsődleges ráfordítások alakulását trendek jellemzik a rendszerben. A szerkezeti feltételeknek, beruházási hatékonyságnak és a fogyasztási valamint export függvény alakulásának megfelelő ágazati fejlődési pályákat a sajátértékek és sajátvektorok segítségével határozza meg.

T. Iwasaki előadása *Az árváltozás-problémára alkalmazott input-output elemzés felülvizsgálata Japánban* rámutatott arra, hogy Japán gazdasági helyzetének alakulása 1955-től kezdve a gyors növekedés, a 70-es évek első felében a szerkezeti stagnálás, majd a gyorsan fokozódó infláció, az állami és a magán gazdasági kutatócsoportokat egyaránt tapasztalati input-output elemzések készítésére ösztönözték. Ezek a vizsgálatok kiterjedtek a költségek és az árak közötti összefüggések tanulmányozására is. Az előadó ez utóbbi kutatások hasznosságáról igyekezett képet adni. Következtetései az alábbiakban foglalhatók össze:

— az input-output rendszer nem mindig alkalmas az áralakulás magyarázására;
— a korlátok, a rendszer belső sajátosságaiból adódnak. Ezek a linearitás, az unicitás, az állandóság, a statikusság;
— jóllehet az árrendszer és a reál rendszer között az input-output modellben dualitás áll fenn, a fizikai és a pénzrendszerben készült elszámolások mégsem tekinthetők minden vonatkozásban szerencsésen integráltaknak a rendszer keretében.

E. Helmstadter és *J. Richterring* a ráfordítási és kibocsátási együtthatók stabilitását vette szemügyre a statikus, nyílt input-output modellben. *É. Kigyóssy—Schmidt—R. Schwart* az input-output táblák egy lényeges értékelési problémájára igyekezett kielégítő megoldást találni. Nevezetesen: míg az anyagi ágazatok kibocsátásai a ráfordításokon kívül a hasznot is tartalmazzák; addig az ingyenes, nemanyagi szolgáltatások értéke, mint a ráfordítások összege jelenik meg a táblákban. Az ajánlott megoldás: az ágazatok egymás közötti kapcsolatának mérése ne csupán természetes mértékegységben vagy a bruttó termelési értékkel történjék. Az ágazatok közötti kapcsolatokat munkaórában, valamint az állóeszközök költségében mérve következtetések vonhatók le az anyagi és az ingyenes szolgáltatások kapcsolatáról, értékéről.

G. V. L. NARASIMHAM *Kalman-szűrő eljárás input-output együtthatók előrejelzésére* című előadásában az egyik fő kutatási területet, az ágazatok egymás közötti keresletének előrejelzési lehetőségeit tárgyalta. Az input-output együtthatók állandóságának feltételezése esetén az előrejelzés hatásfoka meglehetősen gyenge. Korszerűsítésükkel a hatásfok javítható. Figyelembe véve a végső felhasználás és az ágazati bruttó termelés újabbkeletű idősoraiból származó információkat — a szabályozás elméletből kölcsönzött eljárást: a Kalman szűrőt alkalmazza. Az eljárás mint bayes-i optimális becslési problémája is megfogalmazható.

BÁNKÖVI GY.—VELICZKY J.—ZIERMANN M. *Az input-output együtthatók alakulásának becslése és előrejelzése* alapgondolata, hogy az egyes évekre szerkesztett input-output táblák egymást követő együttható rendszerei úgy tekinthetők mint diszkrét paraméterekből képzett mátrix-sorozatok realizációi. Az előadás célja: tájékoztatást adni egy új módszerről, az általánosított dinamikus főkomponens eljárásról. A korábban kidolgozott eljárás általánosítása az idősorokból képzett vektorokról a mátrixokra, előnyös lehetőséget ad az input-output együtthatóknál az időbeni változások dinamikus tendenciáinak becslésére.

Más előadók foglalkoztak a gazdasági szervezetet jellemző mutatószámok meghatározásával *(M. Kraft)*, a szingularitás problémáival a dinamikus Leontief modelleknél *(V. Meyer)*, az aggregáló függvény hasznosításával az importarányok meghatározására sokszektoros modellben *(S. Nakamure)*, az aggregációból eredő információveszteség csökkenthetőségével *(Langer L)*.

Ugyancsak az aggregáció torzító hatásával, szerepével az árváltozások és értékbeni folyamatok vizsgálatánál és a hatás csökkentésének egy módszerével foglalkozott *Kupcsik J.* A hazai ármodellekről beszélt *Riecke W.* és rámutatott arra, hogy ha a lineáris programozási modell, a termelési tényezők költségeit minimálja, az árnyékárak nagysága és szerkezete ugyanaz, mint az input-output technikával szerkesztett árindexeké. *Mikó Gy.* nemlineáris input-output modellekről beszélt, *Halpern L.* pedig egy dinamikus input-output modell és a kölcsönt nyújtó magatartást leíró elméleti rendszer összekapcsolását tárgyalta.

Kiss Albert foglalta össze a konferencia tanulságait. Kiemelte, hogy a különböző országok és intézmények munkájának, tapasztalatainak megismerése hozzájárulhat a hazai, de a más országokban folyó munka továbbfejlesztéséhez is. A 10 évenként tartott konferenciák sorában a harmadik további eredmények forrása lehet.

CS. A.—P. T.

Köszönet a kötet lektorainak

A Szigma 1982. évfolyamához benyújtott cikkeket — a Szerkesztőség állandó munkatársain kívül — a következő külső munkatársak lektorálták:

Ábel István
Andorka Rudolf
Bánhidi Ferenc
Bánkövi György
Bródy András
Cseh-Szombathy László
Dobó Andor
Galambos Sándor
Glattfelder Péter
Halabuk László
Heppes Aladár
Hulyák Katalin
Hunyadi László
Hüttl Antónia
Kádas Sándor
Katona Gyula
Madarász Aladár
Mikó Gyula
Pór András
Simonovits András
Tényi György
Vita László

Áldozatkész munkájukért ezúton is köszönetet mond a Szerkesztőség.

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója
Műszaki szerkesztő: Sándor István
A kézirat nyomdába érkezett: 1982. VI. 23. – Terjedelem: 6,55 (A/5) ív
83.10982 Akadémiai Nyomda, Budapest – Felelős vezető: Bernát György

CONTENTS

BOOK REVIEWS

SCIENTIFIC LIFE

СОДЕРЖАНИЕ

О КНИГАХ

НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ

Ára: 20,— Ft
Előfizetés egy évre: 80,— Ft

INDEX: 26 793
ISSN 0039—8128

TARTALOM

KÖNYVEKRŐL

TUDOMÁNYOS ÉLET

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST