SZIGMA

Matematikai-közgazdasági folyóirat

A Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai-Közgazdasági Szakosztályának lapja

*

E szám szerzői:

BÁRÁNY IMRE, a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Intézetének tudományos munkatársa, BRÓDY ANDRÁS, a közgazdasági tudományok doktora, a MTA Közgazdaságtudományi Intézet tudományos csoportvezetője, FIALA TIBOR, az ELTE TTK Numerikus és Gépi Matematika tanszék tanársegédje, DUNCAN K. FOLEY, a Barnard College (New York) közgazdasági tanszékének professzora, FÜSTÖS LÁSZLÓ, az MTA Szociológiai Kutató Intézet tudományos munkatársa, KORNAI JÁNOS, az MTA levelező tagja, az MTA Közgazdaságtudományi Intézet tudományos tanácsadója, MESZÉNA GYÖRGY, docens, a MKKE Matematikai és Számítástudományi Intézet osztályvezetője, MUSZÉLY GYÖRGY, a SZÁMKI Ökonometriai Laboratórium tudományos munkatársa, NYÁRI ZSIGMOND, a Központi Statisztikai Hivatal főelőadója, SIMONNÉ MOSOLYGÓ NÓRA, az Országos Tervhivatal Tervgazdasági Intézet főelőadója, SIMONOVITS ANDRÁS kandidátus, az MTA Közgazdaságtudományi Intézet tudományos munkatársa, SZÉP JENŐ, a matematikai tudományok doktora, MKKE tanszékvezető egyetemi tanár, TÖRÖK TAMÁS, a NIM Továbbképző Központ főelőadója

Szerkesztőség: Budapest XI., Budaörsi út 43–45.

Levélcím: 1502 Budapest, Pf. 262.

Terjeszti a Magyar Posta. Előfizethető bármely postahivatalnál, a kézbesítőknél a Posta hírlapüzleteiben és a Posta Központi Hírlap Irodáknál (PKHI 1900 Budapest, József nádor tér 1.) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a PKHI 215–96 162 pénzforgalmi jelzőszámára. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76 sz. alatti hírlapboltban

Előfizethető és példányonként megvásárolható: az AKADÉMIAI KIADÓ-nál, 1363 Budapest, Alkotmány u. 21. Telefon 111-010. Pénzforgalmi jelzőszámunk: 215–11488, és az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLT-ban, 1368 Budapest, Váci u. 22. Telefon: 185-612. Előfizetés díj egy évre: 80,–Ft

Külföldön terjeszti a KULTURA Külkereskedelmi Vállalat, H-1389 Budapest. Pf. 149

Bródy András

A tervezett és a valóságos megtakarításról

Az árak segítségével a gazdaság szereplői látszólag képesek kiszámítani döntéseik következményeit. A lovak és a traktorok ára segít eldönteni, hogy a parasztgazdaságnak érdemes-e traktorral szántani.

Csakhogy az ilyen döntések – ha valóban általánosak – visszahatnak az árakra is. Ha a mezőgazdaság átnyergel a lóról a traktorra, akkor a lovak (a kereslet csökkenése következtében) olcsóbbodnak, míg a traktorok (a kereslet növekedése folytán) viszonylag drágulnak. Így valószínű, hogy az új technika bevezetése után, az új árrendszeren kiszámított és ténylegesen elérhető megtakarítás egészen más lesz, mint a tervezett.

A tőkés és szocialista termelés mintegy két évszázados folytonos „modernizálása" ellenére hatékonyságuk fő mutatója, az elért átlagos évi növekedési ütem nem gyorsult számottevően, sőt az utóbbi évtizedekben még lassul is világszerte. A tervezett nyereségek tehát nem váltak valóra.

Ha növekvő hozadékú termelésről csökkenő hozadékú termelés felé helyettesítünk, akkor könnyen akadhat olyan eset is, amelyben a helyettesítés előzetes számítás alapján igen gazdaságosnak tűnik, azonban éppen végrehajtása révén a vélt megtakarítás valóságos veszteséggé válik. (Lásd például az olajjal helyettesített szénenergia esetét.)

A gazdasági döntéseket korunkban tehát többnyire valóságos következményeik mérlegelése, ismerete, sőt megismerhetősége nélkül hozzák meg.

A matematikai gazdaságtan kínál ugyan valamelyes segítséget, azonban csak mesterséges feltételezések bevezetésével: ha feltesszük, hogy a termelés hozadéka konstans minden ágazatban és az érintett termékek korlátozás nélkül újratermelhetők.

A feltevés alapján a termelés és az árak összefüggéseit jól közelíthetjük egy Leontief–Sraffa típusú input-output rendszerrel, ahol is a következőképpen érvelhetünk:

Legyen az eredeti rendszer ráfordítási együtthatóinak mátrixa A és árrendszere p. Akkor az árrendszer és az elsődleges ráfordítások[1] v értéke közt a következő összefüggés áll fenn:

$$p = pA + v, \tag{1}$$

[1] Szándékosan nem specifikáltam v értékét pontosabban. Ez lehet munkaóra, ha értékre gondolunk, profit vagy adó ha egyéb árrendszerekben kívánjuk interpretálni a gondolatainkat. A fontos, hogy minden ami változhat magában az A mátrixban szerepeljen, s így v tartalmazhatja mindazt a maradékot, amit a döntés nem érint.

amiből a Leontief-inverz, $Q = (1 - A)^{-1}$, felhasználásával következik, hogy

$$p = vQ. \tag{2}$$

Adódjanak most új technikai lehetőségek, amelyeknek a tervezett és a tényleges kihatását össze kívánjuk vetni. Az új technika mellett az együtthatók mátrixa megváltozik

$$A^* = A - H. \tag{3}$$

A H mátrix tehát az új technológiák bevezetéséből származó „helyettesítési" mátrix, amelynek általában pozitív *és* negatív elemei lesznek. A negatív elemek a többletráfordítást, a pozitív elemek a megtakarítást jelzik a régi technológiákkal szemben.

Akkor döntünk az új technológiák bevezetése mellett, ha pH minden eleme pozitív (tehát a megtakarítás mindenütt meghaladja a többletráfordítást). A megtakarítás vélt, „ex ante" nagyságát a

$$\mu = pHx \tag{4}$$

bilineáris szorzat adja meg. Itt x a teljes termelés vektora, amelyet az (1) egyenlet duálisaként az

$$x = Ax + y \tag{5}$$

összefüggésből kapunk meg.[2]

A döntések megtörténte után azonban nemcsak az együttható-mátrix, hanem p és x értéke is változni fog és a megtakarítás tényleges „ex post" nagyságát a

$$\mu^* = p^*Hx^* \tag{6}$$

érték adja meg.

Az „ex ante" és „ex post" megtakarítás közt mármost a következő összefüggés áll fenn[3]

$$\mu^* = p^*Hx^* = pH(1 + QH)^{-2}x. \tag{7}$$

Mivel QH általában pozitív elemekből áll (hiszen $pH > 0$ a hatékonyság feltétele és p a Q mátrix sorainak pozitív lineáris kombinációja) az „ex post" megtakarítás általában kisebb, gyakran sokkalta kisebb, mint az „ex ante" remélt.

Ha csak egyetlen szektort vizsgálunk, akkor az összefüggés még frappánsabb. Legyen ugyanis a vélt megtakarítás a termelés egységén

$$\mu = ph, \tag{8}$$

ahol p az árrendszersor, h az i-edik szektorban vizsgált helyettesítési lehetőség oszlop-vektora. Ekkor

$$\frac{\mu - \mu^*}{\mu^*} = Q_i h. \tag{9}$$

[2] Itt y a végtermék. Értékét ismét nem határozzuk meg pontosabban; ez az a vektor, amelyet az új technika bevezetése nem érint. Lehet személyi fogyasztás vagy export stb. — ugyanolyan maradék, mint az imént v értéke volt.

[3] A bizonyítást lásd a függelékben.

Az egységnyi megtakarítás „ex ante" felmérésénél elkövetett relatív hiba gyorsan számítható a Leontief-inverz ismeretében: nem más, mint a helyettesítési h mennyiségek megtermeléséhez szükséges teljes termelés az érintett i. szektor termékeiből. Ha ez a mennyiség negatív, akkor alábecsüljük, ha pedig pozitív (általában pozitív lesz), akkor fölébecsüljük az elérhető megtakarítást.

A (9) egyenletben jelzett világos és egyszerű számítást el lehetne végezni minden gazdasági döntés mérlegelésekor, persze csak olyan — általában elégtelen, közelítő — részletességgel, ahogyan az inverz rendelkezésre áll.

Vegyünk példának egy képzelt mezőgazdasági újítás esetét, amikor a vegyiparból származó 10 fillérnyi műtrágyával a mezőgazdaságból származó 20 fillérnyi vetőmagot lehet megtakarítani. Az „ex ante" megtakarítás tehát egy forintnyi termelésre 10 fillér. Mivel azonban az inverz megfelelő koefficienseinek értéke az 1979. évben [1] 0,17, illetve 1,43 volt, ezért $Q_i h$ értéke kereken 0,26, ami azt jelenti, hogy az „ex post" megtakarítás valamivel 8 fillér alatt lesz a (9) képletnek megfelelően. A különbség ugyan csekély, de nem jelentéktelen: a tervezett és a tényleges megtakarítás közt 26 százalékos az eltérés, az utóbbi rovására, s akkor még nem vettük figyelembe, hogy az újítás következtében a teljes termelési értékek is változni fognak és szintén csökkentik az eredetileg remélt megtakarítás végösszegét.

(Beérkezett: 1981. november 16-án.)

FÜGGELÉK

1\. *Állítás:*

Ha $Q = (1 - A)^{-1}$, akkor $Q^* = (1 - A + H)^{-1} = Q(1 + HQ)^{-1} = (1 + QH)^{-1}Q$

Bizonyítás:

$(1 - A + H)Q(1 + HQ)^{-1} = (1 + HQ)(1 + HQ)^{-1} = 1$

illetőleg $(1 + QH)^{-1}Q(1 - A + H) = (1 + QH)^{-1}(1 + QH) = 1$

2\. *Állítás:*

Ha $p = vQ$, akkor $p^* = p(1 + HQ)^{-1}$

Bizonyítás:

$p^* = vQ^* = vQ(1 + HQ)^{-1} = p(1 + HQ)^{-1}$

3\. *Állítás:*

Ha $x = Qy$, akkor $x^* = (1 + QH)^{-1}x$

Bizonyítás:

$x^* = Q^*y = (1 + QH)^{-1}Qy = (1 + QH)^{-1}x$

4\. *Állítás:*

$p^*Hx^* = pH(1 + QH)^{-2}x$

Bizonyítás:

$p^*(1 + HQ) = p$

amiből $p^*H + p^*HQH = pH$

azaz $p^*H = pH(1 + QH)^{-1}$

amiből $x^* = (1 + QH)^{-1}x$-el való szorzás után az állítás következik.

IRODALOM

1. Ágazati kapcsolatok mérlege 1970—1979. Budapest, 1981. Központi Statisztikai Hivatal. 90—91. o.
2. HENDERSON, H. V., SEARLE, S. R. (1981): On deriving the inverse of a sum of matrices Siam Review, Vol. 23. No. 1.

ON PLANNED AND REAL SAVINGS

Technological decisions made on the basis of prices have a repercussion on prices, therefore calculated and effective savings do deviate from each other. A method is given how this difference may be computed from the Leontief-Sraffa model.

ПЛАНИРУЕМАЯ И РЕАЛЬНАЯ ЭКОНОМИЯ

Принятые на основе цен технологические решения могут оказать обратное воздействие на цены, и поэтому запланированная и фактическая экономия могут быть различными. В статье представлен метод вычисления этого различия с помощью модели Леонтьева—Шраффа.

Kornai János—Simonovits András

Egy makronövekedési modell matematikai tulajdonságairól

I. Bevezetés

Cikkünk egy növekedési modellt elemez, amely — elmélettörténeti előzményeit tekintve — elsősorban Harrod, Neumann és Kalecki modelljeivel rokon.[1] A modell feltevéseinek, változóinak és egyenleteinek részletes közgazdasági értelmezése és indokolása a „Növekedés, hiány és hatékonyság" című könyvben található.[2] Az a néhány mondat, amelyet ebben a cikkben a modell közgazdasági jellemzésére szánunk, nem pótolja a könyv megismerését. Jelen cikkünk célja a könyv közgazdasági mondanivalójának *kiegészítése* a modell néhány tulajdonságának egzakt bemutatásával, s az ezzel kapcsolatos tételek matematikai bizonyításával.

A modell makroszinten, tehát mindennemű ágazati bontás nélkül írja le a gazdaság számos fontos összefüggését. Magában foglalja mind a reálszféra, mind a szabályozási szféra leírását. (Ez utóbbiban különbözik számos más növekedési modelltől, amely csak a reálszféra leírására szorítkozik.) A reálszféra modellezésében alkalmazott feltevések eléggé általánosak; többé-kevésbé megegyeznek a lineáris növekedési modellek szokásos feltevéseivel. Ezek tehát nem mutatnak rendszer-specifikus — csak a *szocialista* gazdaságra jellemző — vonásokat. Ezzel szemben a szabályozási szféra modellje rendszer-specifikus. Olyan összefüggéseket emel ki, amelyek kifejezetten a szocialista gazdaságra jellemzőek. (Például a beruházások volumenének szabályozása különböző mennyiségi jelzések hatására stb.)

A modell szemléltetni akarja azt a gondolatot, hogy a szocialista gazdaságban meghatározott *belső szabályosságok* működnek („válaszfüggvények", különböző belső jelzésekre reagáló visszacsatolások, normák stb.). E szabályosságok érvényesülése biztosítja, hogy a rendszer — meghatározott külső feltételek mellett — képes konszolidált, „normális" működésre. Ha normál pályájáról letérne, a belső szabályozási mechanizmusok képesek visszaterelni oda. E gondolatokat támasztják alá — az absztrakt elemzés síkján — a jelen cikkben tárgyalt tételek a rendszer normál pályájáról és a norma szerinti szabályozás stabilitásáról.

A modell kísérletet tesz a hiány újfajta makroszintű modellezésére. A Z *szintétikus hiány index* a rendszer latens változója.[3] Összevont formában fejezi

[1] E modellek ismertetését lásd például Andorka—Dányi—Martos [2], valamint Ligeti—Sivák [4] könyveiben.

[2] A [3] könyv alapjául szolgáló modellt *Kornai János* szerkesztette, s ő végezte el az ezzel kapcsolatos közgazdasági elemzést. *Simonovits András* már a könyv írásakor is segítségére volt a modell matematikai tulajdonságainak vizsgálatában. A jelen cikk számára Simonovits András végezte el a tételek matematikai bizonyítását.

[3] A latens változók értelmezéséről és ökonometriai kezeléséről lásd például Herman Wold [5] és Aigner—Goldberger [1] könyvét. Magyarországon *Meszéna Gy.*, *Ziermann M.* és *Rimler J.* végeztek bizonyos tekintetben rokon feladatok megoldására irányuló vizsgálatokat.

ki a gazdaságban megfigyelhető sokféle részleges hiánymutató együttmozgását. A makrodinamikai modellen belül e változó kétféle szerepet játszik. Egyrészt: *információs* változó; jelzésére reagál a modell sokféle döntési változója. Másrészt: *reál*hatást gyakorol az input-output arányokra: a folyó és a beruházási inputok felhasználására és a munka termelékenységére.

A modell jelen stádiumban kizárólag az absztrakt („tiszta") elméleti elemzés céljaira használható. A „Növekedés, hatékonyság és hiány" c. könyv is elméleti síkon foglalkozik olyasféle kérdésekkel, mint például a rendszer (matematikai értelemben vett) stabilitása, a foglalkoztatás és a hatékonyság kérdései, a növekedés extenzív és intenzív[4] szakasza és így tovább. Ha a kutatás egy későbbi szakaszában ökonometriai alkalmazásra törekednénk, akkor ehhez a modell számottevő átalakítására lenne szükség, nem utolsósorban annak figyelembevételével, hogy milyen adatok állnak rendelkezésre a paraméterek becsléséhez.

2. Az egyenletrendszer részletes formája

Az alábbiakban ismertetjük a modell egyenletrendszerét. A közgazdasági értelmezést néhány helyen az egyenlet egyes tagjai alá tördelt rövid verbális magyarázattal adjuk meg, másutt viszont szükség lesz részletesebb kifejtésre és indokolásra.

2.1. REÁLSZFÉRA: *Készletegyenletek*

Outputkészlet

$$(2.1)\qquad \underset{\boxed{\text{output-készlet}}}{U(t)} = U(t-1) + \underset{\boxed{\text{termelés}}}{X(t-1)} - \underset{\boxed{\text{vállalati vásárlás}}}{Y(t-1)} - \underset{\boxed{\text{háztartási vásárlás}}}{H(t-1)}\,.$$

Inputkészlet

$$(2.2)\qquad \underset{\boxed{\text{input-készlet}}}{V(t)} = V(t-1) + \underset{\boxed{\text{vállalati vásárlás}}}{Y(t-1)} - \underset{\boxed{\text{folyó input}}}{A(t-1)} - \underset{\boxed{\text{beruházási input}}}{B(t-1)}\,.$$

Beruházási elkötelezettség

$$(2.3)\qquad K(t) = \sum_{\vartheta=1}^{G-1} \sum_{\tau=\vartheta+1}^{G} \beta_M(\tau) M(t-\vartheta)$$

A modell„évjárati" (vintage) szemléletben írja le a beruházási folyamatot. A t-edik évben $M(t)$ volumenű *beruházási évjárat* indul, amelynek megvalósítása összesen G éven át tart; a G *gesztációs idő* exogén paraméter. A volument a tervezett beruházási kiadásokkal mérjük; a tényleges beruházási ráfordítás – a hiány függvényében – eltérhet ettől, amint az majd a (2.5) egyenletből kitűnik.

[4] Ebben a dolgozatban csak az extenzív növekedési szakasszal foglalkozunk, s figyelmen kívül hagyjuk az intenzív szakaszra vonatkozó kiegészítéseket és módosításokat.

Az $M(t)$ volumenből rendre $\beta(1)\,M(t), \beta(2)\,M(t+1), \ldots, \beta(G)M(t+G-1)$ beruházási input lenne esedékes, ha a kiadások az eredeti terv szerint alakulnának, ahol $\beta(\tau)$ a beruházási évjárat *megvalósítási részaránya* ($\Sigma_{\tau=1}^{G}\beta(\tau) = 1$).

A $K(t)$ *beruházási elkötelezettség* a még megvalósítás alatt álló beruházási évjáratokból még hátralevő, esedékes inputokat összegezi.

2.2. REÁLSZFÉRA: *Input-output kapcsolatok*

Folyó input

$$A(t) = \alpha_X X(t) + \alpha_Z\big(Z(t) - Z^*(t)\big). \tag{2.4}$$

Az $A(t)$ *folyó input* két tételből tevődik össze. Az első a termeléssel arányos; α_X a *folyó input együttható*. Kizárólag a termeléstől függne a folyó input, ha a tényleges hiány egyenlő lenne a normál hiánnyal. Amennyiben a tényleges hiány nagyobb a normálisnál, akkor — az egyenlet jobb oldalának második tagja szerint — nagyobb lesz a folyó input; ellenkező esetben pedig kisebb.

Beruházási input

$$B(t) = \sum_{\vartheta=0}^{G-1} \beta_M(\vartheta+1)\,M(t-\vartheta) + \beta_Z\big(Z(t) - Z^*(t)\big)\,. \tag{2.5}$$

beruházási input	a megvalósítás alatt álló évjáratok esedékes beruházási inputja, normál hiány mellett	a normál hiánytól való eltérés függvényében hozzáadandó (vagy levonandó) beruházási input

Munkahelyteremtés

$$J(t) = \chi \Phi^t M(t)\,, \tag{2.6}$$

ahol $J(t)$ a t-edik évben kezdődött évjárat által teremtett *munkahelyek* száma, χ a *kezdeti munkahely-teremtési együttható*, Φ pedig a *munkahelyteremtés növekedési tényezője*. A formula azt az ismert tendenciát fejezi ki, hogy a műszaki fejlődés nyomán évjáratról-évjáratra csökken az egységnyi beruházási ráfordítás által teremtett munkahelyek száma.

Beruházási évjárati termelékenység

$$q(t) = \lambda \Psi^t \tag{2.7}$$

ahol $q(t)$ a t-edik évben kezdett beruházási *évjárat munkatermelékenysége*, λ a *kezdeti évjárati munkatermelékenységi együttható*, Ψ pedig az *évjárati munkatermelékenység növekedési együtthatója*. Ez a formula is ismert tendenciát fejez ki: a műszaki fejlődés nyomán évjáratról-évjáratra nő az újabb és újabb gépeken végzett munka termelékenysége.

Standard termelékenység

$$p(t) = \sum_{\vartheta=G}^{T+G-1} J(t-\vartheta)q(t-\vartheta) \Big/ \sum_{\vartheta=G}^{T+G-1} J(t-\vartheta) - (\Psi^t/\Gamma_Z^t)\,\Pi_Z\big(Z(t) - Z^*(t)\big). \tag{2.8}$$

A jobb oldal első tagja az évjárati termelékenységek súlyozott átlaga, mégpedig aszerint súlyozva, hogy a különböző évjáratok milyen arányban vannak képviselve a t-edik évben működő állótőkében. Minél magasabb a viszonylag új évjáratok részaránya, annál magasabb értékű a tört. Nevezzük ezt a termelés/munka hányadost *műszaki termelékenységnek.* Mérnöki számításokon alapuló előzetes becslésekre épül, amelyeket azzal a várakozással alakítottak ki, hogy a hiány normális intenzitású lesz.

A második tag korrigálja a műszaki termelékenységet, attól függően, hogy a tényleges hiány erősebb-e vagy enyhébb a normálisnál. A hiány hatásával korrigált műszaki termelékenységet jelöljük $p(t)$-vel és nevezzük *standard termelékenységnek.*

Munkaerő-kereslet

$$(2.9)\qquad \underset{\boxed{\begin{array}{c}\text{munkaerő-}\\ \text{kereslet}\end{array}}}{L_D(t)} = \underset{\boxed{\begin{array}{c}\text{munkahelyek}\\ \text{száma}\end{array}}}{\sum_{\vartheta=G}^{T+G-1} J(t-\vartheta)}.$$

A T exogén paraméter az *állótőke élettartamát* adja meg. A jobb oldal a t-edik évig már befejezett évjáratok által teremtett és még mindig „élő" állótőkéhez tartozó munkahelyeket összegezi.

Foglalkoztatás

$$(2.10)\qquad \underset{\boxed{\begin{array}{c}\text{foglal-}\\ \text{koztatás}\end{array}}}{N(t)} = \underset{\boxed{\begin{array}{c}\text{munkaerő}\\ \text{kereslet}\end{array}}}{L_D(t)}.$$

Ez az egyenlet csupán a szocialista gazdaság extenzív növekedési periódusára érvényes. (Ezen a helyen nem foglalkozunk azokkal a módosításokkal, amelyeket az intenzív periódus modellezésekor kell alkalmaznunk.)

Hiány

$$(2.11)\qquad \underset{\boxed{\text{hiány}}}{Z(t)} = \underset{\boxed{\begin{array}{c}\text{normál}\\ \text{hiány}\end{array}}}{Z^*(t)} + \underset{\boxed{\begin{array}{l}\text{a normál beruházási}\\ \text{elkötelezettségtől}\\ \text{való eltérés hatása}\end{array}}}{\zeta_K\big(K(t)-K^*(t)\big)} +$$

$$+ \underset{\boxed{\begin{array}{l}\text{a normál outputkész-}\\ \text{lettől való eltérés}\\ \text{hatása}\end{array}}}{\zeta_U\big(U(t)-U^*(t)\big)} +$$

$$+ \underset{\boxed{\begin{array}{l}\text{a normál inputkész-}\\ \text{lettől való eltérés}\\ \text{hatása}\end{array}}}{\zeta_V\big(V(t)-V^*(t)\big)} +$$

$$+ \underset{\boxed{\begin{array}{l}\text{a normál hiánytól}\\ \text{való múltbeli eltérés}\\ \text{hatása}\end{array}}}{\zeta_Z\big(Z(t-1)-Z^*(t-1)\big)}.$$

2.3. SZABÁLYOZÁSI SZFÉRA: *Szabályozási egyenletek*

Beruházási évjárat volumene

$$\underbrace{M(t) - M^*(t)}_{\text{a beruházási évjárat volumenének eltérése a normálistól}} = \mu_H\underbrace{\left(H(t-1) - H^*_{\text{plan}}(t-1)\right)}_{\text{a háztartási vásárlás eltérése a normálistól}} - \mu_K\underbrace{\left(K(t - K^*(t)\right)}_{\text{a beruházási kötelezettség eltérése a normálistól}} - \mu_Z\underbrace{\left(Z(t) - Z^*(t)\right)}_{\text{a hiány eltérése a normálistól}}. \tag{2.12}$$

A beruházás szabályozásának fenti egyenlete – a modell formális keretei között – azt fejezi ki: a beruházásokat normális növekedésükhöz képest lefékezik, ha elmaradás mutatkozik az életszínvonal megszokott növekedéséhez képest; ha feszült a helyzet a beruházási piacon, illetve, amikor általában kiéleződött a hiány. (Lásd ezzel kapcsolatban *Bauer Tamás, Soós K. Attila* és *Lackó Mária* munkáit.)

Termelés

$$X(t) - X^*(t) = -\xi_U\left(U(t) - U^*(t)\right) + \xi_Z\left(Z(t) - Z^*(t)\right). \tag{2.13}$$

Vállalati vásárlás

$$Y(t) - Y^*(t) = -\eta_V\left((V(t) - V^*(t)\right) - \eta_Z\left(Z(t) - Z^*(t)\right). \tag{2.14}$$

Háztartási vásárlás

$$H(t) - H^*_h(t) = -\chi_Z(Z(t) - Z^*(t)) \tag{2.15}$$

A termelő a hiány kiéleződésére azzal felel, hogy a normál termelésnél, $X^*(t)$-nél többet termel; „rohammunkázik", túlóráztat stb. Ezzel szemben a vevők – mind a vállalati, mind a háztartási szektor – azzal reagálnak a hiány kiéleződésére, hogy a normálishoz képest visszafogják a vásárlást. A hiány miatt rosszabb összetételű, a keresletüktől nagyobb mértékben eltérő kínálatot kevésbé hajlandók átvenni. (A normálisnál enyhébb hiány esetén a hatások iránya fordított.)

Reálbéralap

$$W(t) - W^*(t) = -\omega_H\left(H(t-1) - H^*_{\text{plan}}(t-1)\right). \tag{2.16}$$

A reálbérek emelkedése meggyorsul, ha a háztartási fogyasztás elmarad a tervezők által normálisnak tartott fogyasztási pályától.

2.4. SZABÁLYOZÁSI SZFÉRA: *Szabályozási változók normál értéke*

Beruházási évjárat normál volumene

$$M^*(t) = \Gamma_M M^*(t-1) = \Gamma_M^t M_0^*. \tag{2.17}$$

Modellünkben a beruházási volumen normál értékét exogén módon visszük rá egy exponenciális növekedési pályára.

Normál termelés

$$\underbrace{X^*(t)}_{\text{normál termelés}} = \underbrace{p(t)}_{\text{standard termelékenység}} \times \underbrace{N(t)}_{\text{foglalkoztatás}}. \tag{2.18}$$

Vállalati normál vásárlás

$$\underbrace{Y^*(t)}_{\text{vállalati normál vásárlás}} = \underbrace{\Gamma_Y}_{\text{normál növekedési tényező}} \times \underbrace{Y(t-1)}_{\text{korábbi tényleges vállalati vásárlás}}. \tag{2.19}$$

Háztartási normál vásárlás (a reálbérből levezetve)

$$\underbrace{H_h^*(t)}_{\text{háztartási normál vásárlás}} = \underbrace{\chi_W}_{\text{költési hányad}} \times \underbrace{W(t)}_{\text{reálbéralap}}. \tag{2.20}$$

Normál reálbéralap

$$\underbrace{W^*(t)}_{\text{normál reálbéralap}} = \underbrace{\omega_N}_{\text{kezdeti reálbérráta}} \times \underbrace{\Omega^t}_{\text{normál növekedési tényező}} \times \underbrace{N(t)}_{\text{foglalkoztatás}}. \tag{2.21}$$

2.5. SZABÁLYOZÁSI SZFÉRA: *A visszacsatolásokban szereplő jelzések normál értéke*

Normál outputkészlet

$$U^*(t) = \varrho\big(H(t-1) + Y(t-1)\big). \tag{2.22}$$

Normál inputkészlet

$$V^*(t) = \sigma\big(A(t-1) + B(t-1)\big). \tag{2.23}$$

A ϱ és σ paraméterek az összes értékesítéshez, illetve az összes inputhoz tartozó normál készlet együtthatók.

Normál beruházási elkötelezettség

$$(2.24)\qquad \underbrace{K^*(t)}_{\text{normál beruházási elkötelezettség}} = \underbrace{\Gamma_K}_{\text{növekedési tényező}} \times \underbrace{K(t-1)}_{\text{korábbi beruházási elkötelezettség}}.$$

Normál fogyasztás

$$(2.25)\qquad \underbrace{H^*_{\text{plan}}(t)}_{\text{normál fogyasztás}} = \underbrace{\Gamma_H}_{\text{növekedési tényező}} \times \underbrace{H(t-1)}_{\text{korábbi fogyasztás}}.$$

Míg a (2.20) egyenlet a reálbérből vezeti le a háztartás normál vásárlását, (2.25) a tervező elvárását fejezi ki: a lakossági fogyasztás növekedjék exponenciális növekedési pályán.

Normál hiány

$$(2.26)\qquad Z^*(t) = \Gamma_Z Z^*(t-1) = \Gamma_Z^t Z_0^*.$$

Akárcsak (2.17) esetében, itt is a Γ_Z növekedési tényező révén exogén módon visszük rá a hiány normál értékét egy exponenciális növekedési pályára.

3. Tételek és bizonyítások

Ebben a részben kimondjuk és bebizonyítjuk tételeinket.

3.1. *A részletes és a tömör-modell*

A 2. fejezetben leírt 26 egyenletes modellt *részletes* modellnek nevezzük. A modell *rekurzív*, azaz egyenletei olyan sorrendben is felírhatók, hogy minden időszakban az egyenletek *egymásután* adják a megfelelő változók értékét a korábbi időszakok és a jelen időszak már kiszámított változóinak függvényeként. Itt bizonyítás nélkül megadunk egy ilyen sorrendet. Mindenekelőtt megemlítjük, hogy $T+G+7$ kezdőérték határozza meg a rendszert: $U(0)$, $V(0)$, $Z(0)$, $H(0)$, $H(-1)$, $Y(0)$, $Y(-1)$, $M(0)$, $M(-1)$, $\ldots$, $M(-G-T+1)$.

A $(t-1)$-edik időszak végéig kiszámított változókból közvetlenül meghatározhatók a következő új változók: $U(t)$, $V(t)$, $K(t)$, $U^*(t)$, $V^*(t)$, $K^*(t)$, $H^*_{\text{plan}}(t)$, $Z^*(t)$, $Y^*(t)$, $p(t)$, $L_D(t) = N(t)$, $q(t)$, $X^*(t)$, $M^*(t)$. Most következik az egyetlen bonyodalom: $W^*(t) \to W(t) \to H^*_h(t)$ lánc ill. $Z(t)$. A megmaradó szabályozási egyenletekből adódik $M(t)$, $X(t)$, $Y(t)$, $H(t)$, s végül az inputegyenletekből $A(t)$, $B(t)$, $J(t)$.

Ez a részletes modell nagyon kényelmes a közgazdasági elemzésnél, de túlságosan széteső a matematikai vizsgálat esetén. Ezért bevezetünk egy *tömör* modellt, amely csak 6 változóból és 6 egyenletből áll. A 6 „főváltozó" a következő: U, V, Z és M, Y, H. A többi változót „segédváltozónak" nevezzük.

Mielőtt fölírnánk a 6 „főegyenletet", elvégezzük a következő behelyettesítéseket.

(2.9)-be helyettesítsük be (2.6)-ot és (2.7)-et.

$$N(t) = \varkappa \sum_{\vartheta=G}^{G+t-1} \Phi^{t-\vartheta} M(t-\vartheta). \tag{3.1}$$

(2.18)-ba helyettesítsük be (2.6–8)-at és (3.1)-et:

$$X^*(t) = m \sum_{\vartheta=G}^{G+T-1} (\Phi\Psi)^{t-\vartheta}\, M(t-\vartheta) - \left(\frac{\Psi}{\Gamma_z}\right)^{t} \sum_{\vartheta=G}^{G+T-1} \Phi^{t-\vartheta}\, M(t-\vartheta)\,\hat{Z}(t)\,, \tag{3.2}$$

ahol $m = \varkappa\lambda$.

A főváltozók egyenletébe behelyettesítve a segédváltozókat – a terjedelme miatt kivéve $X(t)$-t – a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$U(t) = U(t-1) + X(t-1) - H(t-1) - Y(t-1) \tag{3.3}$$

(3.4)

$$V(t) = V(t-1) - \alpha_X X(t-1) + Y(t-1) - \sum_{\vartheta=1}^{G} \beta_M(\vartheta) M(1-\vartheta) - \gamma\hat{Z}(t)$$

ahol $\gamma = \alpha_Z + \beta_Z$.

$$\begin{aligned} \hat{Z}(t) = {} & \zeta_K \sum_{\vartheta=1}^{G-1} \overline{\beta}_M(\vartheta)\left[M(t-\vartheta) - \Gamma_M^{t-\vartheta} M_0\right] + \gamma_Z \hat{Z}(t-1) - \\ & - \zeta_U\{U(t) - [H(t-1) + Y(t-1)]\} - \\ & - \zeta_V\{V(t) - [\alpha_X X(t-1) + \sum_{\vartheta=1}^{G} \beta_M(\vartheta) M(t-\vartheta) + \gamma\hat{Z}(t)]\}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

ahol $\overline{\beta}_M(\vartheta) = \sum_{\tau=\vartheta+1}^{G} \beta_M(\tau)$.

$$\begin{aligned} M(t) = {} & \Gamma_M^t M_0 + \mu_H[H(t-1) - \Gamma_H H(t-2)] - \\ & - \mu_K \sum_{\vartheta=1}^{G-1} \overline{\beta}_M(\vartheta)[M(t-\vartheta) - \Gamma_M^{t-\vartheta} M_0] - \gamma_Z \hat{Z}(t)\,. \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} Y(t) = {} & \Gamma_Y Y(t-1) - \eta_V\{V(t) - [\alpha_X X(t-1) + \\ & + \sum_{\vartheta=1}^{G} \beta_M(\vartheta) M(t-\vartheta) + \gamma\hat{Z}(t)]\} - \eta_Z \hat{Z}(t)\,. \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} H(t) = {} & \chi_W \omega_N \varkappa \sum_{\vartheta=G}^{G+T-1} \Phi^{t-\vartheta} M(t-\vartheta) - \chi_W[H(t-1) - \\ & - \Gamma_H H(t-2)] - \chi_Z \hat{Z}(t)\,, \end{aligned} \tag{3.8}$$

ahol

$$\begin{aligned} X(t) = {} & \sum_{\vartheta=G}^{G+T-1} (\Phi\Psi)^{t-\vartheta} M(t-\vartheta) - \\ & - \left[\Pi_Z \varkappa \left(\frac{\Psi}{\Gamma_Z}\right)^{t} \sum_{\vartheta=G}^{G+T-1} \Phi^{t-\vartheta} M(t-\vartheta) - \eta_Z\right] \hat{Z}(t) - \\ & - \xi_U\{U(t) - \varrho[H(t-1) + Y(t-1)]\}\,. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Megjegyzések. A tömör modell (3.3–3.8) egyenletei szintén rekurzívak és a részletes modellnél említett kezdeti értékek határozzák meg a főváltozók pályáit is. Könnyű belátni, hogy a főváltozók pályája egyértelműen meghatározza a segédváltozók pályáját is, azaz a részletes és a tömör modell egymással *ekvivalens*.

A félreértések elkerülése végett megjegyezzük, hogy a főváltozók száma *egyértelmű*, azonban a főváltozók halmaza nem egyértelmű. Például $Y(t)$ helyett $X(t)$ is szerepelhetne főváltozóként, s ekkor az egyenletek is más alakúak volnának.

3.2. *Megvalósíthatóság és növekedőképesség*

Közgazdasági modellekben a modell konzisztenciáján kívül a pálya pozitivitása, gyakran növekvő volta is elengedhetetlen az értelmezhetőséghez. Szükségünk lesz tehát a következő definícióra:

Definíció: A rendszer *megvalósítható* pályán halad, ha minden változója minden $t \geq 1$ évre nemnegatív értéket vesz fel, és kielégíti a reálszférát leíró (2.1)–(2.11) rendszert.

1. *Tétel*: *Megvalósíthatóság. A rendszer megvalósítható pályán képes haladni, sőt képes növekedni, ha a reálparaméterek kielégítik a következő feltételt*:

(3.10) $$(1 - \alpha_X)mT > 1 + \chi_W \omega_N \varkappa T_\Phi,$$

ahol

(3.11) $$T_\Phi = \frac{\Phi^{-G+1} - \Phi^{-G-T+1}}{\Phi - 1},$$

ahol Φ egy pozitív szám.

Megjegyzés: A (3.10) feltétel meglehetősen nehezen értelmezhető önmagában. Ezért talán nem felesleges a következő magyarázat. Szorítkozzunk egy *stacioner* pályára, ahol a változók az időben állandóak. Ekkor $(1 - \alpha_X)mT = (1 - \alpha_X)X/M$ és $\chi_W\omega_N\varkappa T_\Phi = H/M$. Ekkor a (3.10) bal oldalán a netto kibocsátás és M hányadosa áll, míg (3.10) jobb oldalán a beruházás(i évjárat) és M hányadosa plusz a fogyasztás és M hányadosa áll. Stacioner esetben természetesen (3.10) két oldala egyenlő, növekvő gazdaságban pedig egyenlőtlenség várható. Jelenleg azonban nem tudjuk matematikailag igazolni azt a nyilvánvalónak látszó tényt, hogy a (3.10) feltétel nemcsak elégséges, de szükséges is a megvalósíthatósághoz, (az utóbbi feltételbe beleértve az egyenlőség esetét is!)

A bizonyításban speciális szerkezetű pályára szorítkozunk, s ez a körülmény indokolja a következő kitérőt.

3.3. *Normál pálya, Harrod–Neumann pálya*

A kitérőt két definícióval kezdjük:

Definíció: A rendszer *normál pályán* halad, ha mindegyik szabályozási változó tényleges értéke egybeesik normál értékével, ahol a normál érték a (2.17)–(2.21) rendszerből adódik.

Képletben

$$
(3.12)\qquad
\begin{aligned}
M(t) &= M^*(t) && \text{(beruházási évjárat volumene)}\\
X(t) &= X^*(t) && \text{(termelés)}\\
Y(t) &= Y^*(t) && \text{(vállalati vásárlás)}\\
H(t) &= H^*(t) && \text{(háztartási vásárlás)}\\
W(t) &= W^*(t) && \text{(reálbéralap).}
\end{aligned}
$$

Definíció: A rendszer *Harrod–Neumann pályán* (röviden: H–N pályán) halad, ha minden újratermelhető stock- és flow-változója egyöntetű és állandó ütemben nő, vagyis ha

$$
(3.13)\qquad
\begin{aligned}
M(t) &= \Gamma^{*t} M_0^* && \text{(beruházási évjárati volumen)}\\
X(t) &= \Gamma^{*t} X_0^* && \text{(termelés)}\\
Y(t) &= \Gamma^{*t} Y_0^* && \text{(vállalati vásárlás)}\\
H(t) &= \Gamma^{*t} H_0^* && \text{(háztartási vásárlás)}\\
U(t) &= \Gamma^{*t} U_0^* && \text{(outputkészlet)}\\
V(t) &= \Gamma^{*t} V_0^* && \text{(inputkészlet),}
\end{aligned}
$$

ahol $\Gamma^* > 1$ az *általános növekedési tényező*, a nulla indexű szimbólumok pedig a szóbanforgó változók kezdő (azaz nulladik évbeli) értékei.

A következő megállapítást tehetjük.

2. *Tétel*: *A* (3.10) *feltétel mellett akkor és csak akkor* létezik megvalósítható normál pálya, (amely egyben Harrod–Neumann *pálya), ha teljesül a következő feltétel-hármas*:

$$
(3.14)\qquad
\begin{aligned}
&\text{A)}\ \Gamma_M = \Gamma_Y = \Gamma_K = \Gamma_H = \Gamma^*\\
&\text{B)}\ \Psi \ = 1/\Phi\\
&\text{C)}\ \Omega \ = \Psi.
\end{aligned}
$$

Megjegyzések: Modellünk abban tér el a szabályozáselmélet szokásos normál pályáitól, hogy csak két változó normál értékét definiáljuk exogén módon, adott esetben exponenciális pályával: a $Z^*(t)$ normál hiányt, melynek növekedési tényezőjét, Γ_Z-t szintén Γ^*-gal definiáljuk, és az $M^*(t)$ beruházási évjárati normál volument.

Az A) feltételben a Γ^* általános növekedési tényező szerepel egyöntetűen a különböző szabályozási változók normál értékének meghatározásánál, lehetővé téve, hogy a normál pálya H–N pálya legyen. Ennek ellenére ez az összefüggés nem triviális.

Elég sok olyan feltevés van modellünkben, amely megkülönbözteti azt a Harrod- és a Neumann-modellektől: bonyolult késleltetési szerkezet, a beruházások „évjárati" felbontása, az input- és az outputkészletek szerepeltetése. Megnyugtató, hogy ennek ellenére „visszakapjuk" az egyenletes növekedésre vonatkozó Harrod–Neumann eredményeket.

A B) feltétel egyszerűen azt fejezi ki, hogy a műszaki fejlődés során egységnyi évjárati beruházás éppen annyiszor teremt kevesebb munkahelyet, amennyiszer termelékenyebb egységnyi munkahely: Harrod-semlegesség.

Bizonyítás: a) *Szükségesség* Először azt bizonyítjuk be, hogy a normál pálya exponenciális pálya, nem feltétlenül azonos növekedési tényezőjű elemekkel. Normál pályán — melynek változóit $**$-gal különböztetjük meg — (2.17) szerint $M^{**}(t) = \Gamma^t_M M^*_0$, (2.19) szerint $Y^{**}(t) = \Gamma^t_Y Y^t_0$, (2.21) szerint $W^{**}(t) = \omega_N \Omega^t N^{**}(t) = \omega_N \Omega^t (\Gamma_M \Phi)^t N^*_0$, ahol figyelembe vettük a (3.1) összefüggést is.

Összegezve: $W^{**}(t) = (\Omega \Gamma_M \Phi)^t W^*_0$.

Némileg bonyolultabban igazolható $H^{**}(t) = H^{**}_{\text{plan}}(t)$ felhasználásával, hogy $H^{**}(t) = \Gamma^t_H H^*_0$. Hasonlóan következik (3.2)-ből $X^{**}(t) = (\Phi\Psi\Gamma_M)^t X^*_0$. Ezzel beláttuk, hogy a normál pálya exponenciális pálya.

Nem nehéz belátni, hogy a növekedési tényezők azonosak, azaz az A) feltétel szükséges. Valóban, (2.1) és (2.21) szerint X^{**} Y^{**} és H^{**} lineáris kombinációja. Két különböző kitevőjű exponenciális pálya lineáris kombinációja viszont nem adna újabb exponenciális pályát, vagyis mindhárom növekedési tényező egyenlő: $\Gamma_Y = \Gamma_H = \Phi\Psi\Gamma_M$. Hasonló gondolatmenettel adódik (3.4) és (2.22) összevetéséből $\Gamma_Y = \Gamma_M$. Végül $\Gamma_K = \Gamma_M$ közvetlenül adódik (2.3)-ból.

A B) és a C) feltétel szükségessége a fentiekből következik.

b) *Elégségesség* Tegyük föl, hogy teljesül a (3.14) feltétel-hármas. Levezetjük azt az egyenletet, amelyet Γ^*-nak ki kell elégítenie ahhoz, hogy az általános növekedési tényező legyen.

(2.1) és (2.21) értelmében

$$X^*_0 = \left(1 + \varrho \frac{\Gamma^* - 1}{\Gamma^*}\right)(H^*_0 + Y^*_0)\,.$$

(3.4) és (2.22) értelmében

$$Y^*_0 = \left(1 + \sigma \frac{\Gamma^* - 1}{\Gamma^*}\right)\left(\alpha_X X^*_0 + \sum_{\vartheta=0}^{G-1} \beta_M(\vartheta + 1)\Gamma^{*-\vartheta} M^*_0\right).$$

Figyelembe véve, hogy $X^*_0 = \lambda\varkappa T_{\Gamma^*} M^*_0$ és $H^*_0 = \chi_W \omega_N \varkappa T_{\Phi\Gamma^*} M^*_0$, (vö.: az 1. Tételhez fűzött megjegyzéssel) helyettesítsük be az Y_0-ra vonatkozó egyenletet az X^*_0-ra vonatkozó első egyenletbe. Ekkor csak az M^*_0 változó marad meg, ezzel azonban egyszerűsíthetünk; s így a következő egyenletet kapjuk Γ^*-ra:

$$\lambda\varkappa T_{\Gamma^*} = \left(1 + \varrho \frac{\Gamma^* - 1}{\Gamma^*}\right)\chi_W \omega_N \varkappa T_{\Phi\Gamma^*} + \left(1 + \varrho \frac{\Gamma^* - 1}{\Gamma^*}\right)\left(1 + \sigma \frac{\Gamma^* - 1}{\Gamma^*}\right)\left[\alpha_X \lambda\varkappa T_{\Gamma^*} + \sum_{\vartheta=0}^{G-1} \beta_M(\vartheta + 1)\Gamma^{*-\vartheta}\right]. \tag{3.15}$$

Figyelembe véve a (3.11) jelölést, leolvasható, hogy a (3.15) egyenlet $(G + T + 1)$-ed fokú polinom. Jelenleg keveset tudunk e polinom gyökeinek elhelyezkedéséről, nevezetesen arról, hogy a közgazdaságilag értelmezhető $(1, +\infty)$ intervallumba a polinomnak hány gyöke esik. A (3.10) elégséges feltétel úgy adódik (3.15)-ből, hogy $\Gamma^* = 1$-et írunk az utóbbiba és az egyenlőségjelet $>$ jellel pótoljuk. Mivel $\Gamma^* = +\infty$ esetén (3.15)-ben ellenkező értelmű egyenlőtlenség áll, Bolzano-tétele értelmében létezik legalább egy Γ^* növekedési tényező, amely kielégíti (3.15)-öt. Egyszerű számolással belátható, hogy több gyök létezése esetén bármelyik gyököt véve, az összes változó pozitívnak adódik. Felhívjuk a figyelmet, hogy ezzel a bizonyítással az 1. Tételt is igazoltuk. Megjegyezzük, hogy nem nyilvánvaló (3.10) szükségessége, ugyanis a (3.15)-beli polinom nem feltétlenül monoton. Logikailag elképzelhető olyan eset is, hogy a (3.10) feltétel nem áll fönn, de a polinom annyira nő, hogy legalább kétszer nullává válik, mielőtt a $-\infty$-hez tartana. Mivel mindegyik megoldás pozitív lesz, nem tudjuk kizárni több pozitív megoldás létezését. Megnyugtatásul csak annyit mondunk, hogy az egyértelműség bizonyítható, ha vagy a) nincsenek készletek: $\varrho = \sigma = 0$ vagy b) nincs késleltetés: $G = T = 1$.

3.4. *Szabályozás és stabilitás*

Az előző alfejezetben beláttuk, hogy rendszerünkben létezik normál pálya (sejtésünk szerint egy) és hogy ennek a pályának Harrod–Neumann tulajdonságai vannak. A modell szerkezete azonban megengedi, hogy a rendszer más pályán haladjon. Sőt, ha a rendszer nem a normál pályáról indul, akkor épp az a szabályozás feladata, hogy rávezesse a rendszert a normál pályára (szabályozhatóság) vagy legalább a normál pálya tetszőleges közelébe vezesse (stabilizálja). Teljesíthetők-e a szabályozás fent említett feladatai? Mielőtt a kérdésre válaszolnánk, pontosabban fogalmazzuk meg magát a kérdést.

Definíció: Bármely *szabályozási rendszer* két alrendszerből áll: a *szabályozott alrendszerből* és a *szabályozó alrendszerből*. 1) A szabályozott alrendszerben az állapotváltozásokat a döntések határozzák meg, míg 2) a szabályozó alrendszerben a döntéseket az állapotok határozzák meg.

Példa: A tömör modellben a (3.3)–(3.5) egyenletrendszer írja le az U, V, Z állapotváltozók változását az M, Y, H szabályozási (döntési) változók függvényében. A (3.6)–(3.9) egyenletrendszer a „visszacsatolást" írja le.
Először csak a szabályozott alrendszert vesszük adottnak és tetszőleges szabályozási mechanizmusokat mérlegelünk.

Definíció: Egy szabályozott alrendszer *szabályozható*, ha tetszőleges kezdő állapothoz található a szabályozási változóknak olyan véges időbeni sorozata, amely a rendszert elvezeti egy tetszőlegesen kijelölt végállapotba. Esetünkben a kijelölt végállapot mindig a normál pálya valamelyik pontja.

Megjegyzés: A rendszer szabályozhatósága elemi tulajdonság, teljesülése nélkül reménytelen a rendszer mindennemű szabályozása. A legtöbb rendszer szerencsére szabályozható.

3. *Tétel*: *A* (3.3)–(3.5) *rendszer szabályozható.*

Ebben az állításban meglepő sincs, hiszen 3 állapotváltozóra 3 szabályozási változó jut. A formális bizonyításra azonban csak később kerítünk sort.
A szabályozhatóság meglétéből még nem következik az, hogy egy rendszert ténylegesen úgy kell szabályozni, hogy véges időn belül a normál pályára kerüljön. A szóbanforgó szabályozás általában nehezen határozható meg és gyakran értelmezhetetlen közgazdaságilag. Ez utóbbi megállapítás súlyosan esik latba egy olyan deskriptív megközelítésnél, mint amilyen a mienk. Modellünkben nemcsak a szabályozott alrendszer, hanem a szabályozó rendszer is adott. Mi a szabályozási rendszer stabilitását vizsgáljuk.

Definíció: Egy szabályozási rendszer *aszimptotikusan lokálisan stabilis* (röviden: stabilis), ha létezik a normál kezdő értékeknek egy olyan környezete, hogy bármelyik pontjából indítva el a rendszert, az hosszútávon a normál pályájához tart.

Jelenleg nem ismerünk jól használható *általános* stabilitási feltételt rendszerünkre. Numerikus tapasztalatok alapján azonban azt *sejtjük*, hogy létezik a visszacsatolási paramétereknek, μ_H, μ_K, μ_Z, ξ_U, ξ_Z, η_V, η_Z, χ_Z, ω_H-nak egy olyan együttese, amelynek mind a kilenc eleme határozottan pozitív, közgazdaságilag értelmezhető nagyságú és stabilizálja a rendszert.

E sejtés bizonyítása helyett meg kell elégednünk egy szerényebb stabilitási tétellel, ahol csak három rövidtávú hiány-reakció paraméter különbözik nullától és melyeknek pozitivitása kérdéses.

4. *Tétel: Az* 1. *Tétel feltételei mellett, a* (3.6)—(3.9) *szabályozási alrendszerben megadható olyan* χ_Z, η_Z *és* ξ_Z *visszacsatolási együttható-hármas, amely mellett a* (3.3)—(3.5) *szabályozott alrendszer stabilis, sőt két év alatt a normális pályára vezérelhető (szabályozható)*:

$$\mu_H = \mu_K = \mu_Z = \xi_U = \eta_V = \omega_H = 0.$$

Bizonyítás: A tömörség kedvéért a változókat a H—N (kétcsillagos) pályától mért eltéréseként írjuk föl. Jelölés: $\tilde{X} = X - X^{**}$ stb.

A modell *szabályozási egyenletei* a következők:

$$\tilde{H}(t) = -\chi_Z\hat{Z}(t) \tag{3.16}$$

$$\tilde{Y}(t) = -\eta_Z\hat{Z}(t) \tag{3.17}$$

$$\tilde{X}(t) = (\xi_Z - \tilde{\Pi})\hat{Z}(t), \tag{3.18}$$

ahol (3.9) lokális linearizálásából következően

$$\tilde{\Pi} = \Pi_Z \varkappa T_{\Phi\Gamma *} M_0^*.$$

A modell *állapotegyenletei* a következők:

$$\tilde{U}(t) = \tilde{U}(t-1) + \tilde{X}(t-1) - \tilde{Y}(t-1) - \tilde{H}(t-1) \tag{3.19}$$

$$\tilde{V}(t) = \tilde{V}(t) - \alpha_X\tilde{X}(t-1) + \tilde{Y}(t-1) - \gamma\hat{Z}(t-1) \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}\hat{Z}(t) = &-\zeta_U\{\tilde{U}(t) - \varrho[\tilde{Y}(t-1) + \tilde{H}(t-1)]\} - \\ &- \zeta_V\{\tilde{V}(t) - \sigma[\alpha_X\tilde{X}(t-1) + \gamma\hat{Z}(t-1)]\} + \zeta_Z\hat{Z}(t-1).\end{aligned} \tag{3.21}$$

Helyettesítsük be (3.19)-et és (3.20)-at (3.21)-be:

$$\begin{aligned}\hat{Z}(t) = &-\zeta_U\{\tilde{U}(t-1) + \tilde{X}(t-1) - (1+\varrho)[\tilde{Y}(t-1) + \\ &+ \tilde{H}(t-1)]\} - \zeta_V\{\tilde{V}(t-1) + \tilde{Y}(t-1) - (1+\sigma)\times \\ &\times [\alpha_X\tilde{X}(t-1) + \gamma\hat{Z}(t-1)]\} + \zeta_Z\hat{Z}(t-1).\end{aligned} \tag{3.22}$$

Helyettesítsük be (3.16)-ot, (3.17)-et és (3.18)-at (3.19)-be, (3.20)-ba és (3.22)-be, és vezessük be a következő jelöléseket:

$$\varphi = \zeta_Z - \tilde{\Pi} + \eta_Z + \chi_Z \tag{3.23}$$

$$\psi = \alpha_X(\xi_Z - \tilde{\Pi}) + \eta_Z + \gamma \tag{3.24}$$

$$(3.25)\qquad \delta = \zeta_Z - \zeta_U[(\xi_U - \tilde{\Pi}) + (1+\varrho)(\eta_Z + \chi_Z)] + \\ + \zeta_V\{\eta_Z + (1+\sigma)[\alpha_X(\xi_U - \tilde{\Pi}) + \gamma)\}.$$

Jelöléseink segítségével az új egyenletek röviden fölírhatók:

$$(3.26)\qquad \tilde{U}(t) = \tilde{U}(t-1) + \varphi\hat{Z}(t-1)$$

$$(3.27)\qquad \tilde{V}(t) = \tilde{V}(t-1) - \psi\hat{Z}(t-1)$$

$$(3.28)\qquad \hat{Z}(t) = -\zeta_U\tilde{U}(t-1) - \zeta_V\tilde{V}(t-1) + \delta\hat{Z}(t-1).$$

A (3.26), (3.27) és (3.28) egyenletek egy harmadrendű lineáris rendszert képeznek, amelynek stabilitása a hozzátartozó karakterisztikus polinom viselkedésétől függ:

$$(3.29)\qquad F(\tilde{\lambda}) = \tilde{\lambda}^2 - (1+\delta)\tilde{\lambda} + \delta + \zeta_U\varphi - \zeta_V\psi.$$

A stabilitás szükséges és elégséges feltétele a következő:

$$(3.30)\qquad F(1) > 0,\ F(-1) > 0 \text{ és } F(0) < 1.$$

A (3.30) feltételbe behelyettesítve a (3.29) polinomot, a következő feltételhármashoz jutunk:

$$(3.31)\qquad \zeta_U\varphi > \zeta_V\psi$$

$$(3.32)\qquad 2 + 2\delta + \zeta_U\varphi - \xi_V\psi > 0$$

$$(3.33)\qquad \delta + \zeta_U\varphi - \zeta_V\psi < 1.$$

A (3.31)–(3.33) stabilitási feltétel a (3.23)–(3.25) jelölések segítségével visszavezethető olyan feltétel-rendszerre, amelyben csak a modell eredeti paraméterei szerepelnek. Ez az átalakítás azonban csak bonyolultabbá teszi a feltételeket.

Talán egyetlen speciális esetre érdemes elvégezni ezt az átalakítást, amikor nincs *visszacsatolás*:

$$(3.34)\qquad \mu_H = \mu_K = \mu_Z = \xi_U = \xi_Z = \eta_V = \eta_Z = \omega_H = \chi_Z = 0,$$

Ekkor (3.31)–(3.33) a következő alakot ölti:

$$(3.35)\qquad \zeta_U\tilde{\Pi} < \zeta_V(\alpha_X\tilde{\Pi} - \gamma)$$

$$(3.36)\qquad 2 + 2[\zeta_Z + \zeta_U\tilde{\Pi} + \zeta_V(1+\sigma)(\alpha_X\tilde{\Pi} - \gamma)] - \zeta_U\tilde{\Pi} + \zeta_V(\alpha_X\tilde{\Pi} - \gamma) > 0$$

$$(3.37)\qquad \zeta_Z + \zeta_V\sigma(\alpha_X\tilde{\Pi} - \gamma) < 1.$$

Látható, hogy visszacsatolás nélkül nem mindegyik rendszer stabilis, pl. $\zeta_Z > 1$ esetén biztosan nem az.

Rátérünk a szabályozhatóság bizonyítására.

Állításunk ekvivalens azzal, hogy létezik olyan számhármas, amelynél a (3.29) polinom két együtthatója nullává válik. Mivel két együtthatóról van szó, amely három paraméter lineáris függvénye, állításunkban semmi meglepő nincs. A precíz igazoláshoz elegendő a legegyszerűbb $\xi_Z = \tilde{\Pi}$ esetre szorítkozni, amikor a termelés azonos a H—N termeléssel. Ekkor az $F(\tilde{\lambda}) = \tilde{\lambda}^2$ feltételből adódó kétismeretlenes lineáris egyenletrendszer determinánsa $\zeta_U \zeta_V \varrho$, tehát nullától különböző, ezért az egyenletnek mindig van megoldása.

IRODALOM

[1] Aigner, D. J. és Goldberger, A. S. (szerk.) *Latent Variable in Socio-Economic Models*, North-Holland, Amszterdam, 1977.
[2] Andorka R., Dányi D. és Martos B.: *Dinamikus közgazdasági modellek*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1967.
[3] Kornai J.: *Növekedés, hiány és hatékonyság*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1982.
[4] Ligeti I. és Sivák J.: *Növekedés, szabályozás és stabilitás a gazdasági folyamatokban*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1979.
[5] Wold, H.: *Model Construction and Evaluation when Theoretical Knowledge is Scarce*, sokszorosítva, Faculté des Sciences Economiques et Sociales, Université de Genève, 1979.

ON THE MATHEMATICAL PROPERTIES OF A MACROECONOMIC GROWTH MODEL

Harrod's, *Kalecki's* and *Neumann's* models are suitable for an abstract description of the process of economic growth but do not deal with the control of this process. One of the authors of the present article, János *Kornai* examined the control of growth process in the socialist economy in his book entitled "Growth, shortage and efficiency". Propositions of the book requiring more complicated proof were given without proof in the book, while the present article presents these proofs. (Sect. 4) Prior to this notations of the model are presented (Sect. 2) as well as its equations (Sect. 3).

The article does not deal with the interpretation of assumptions, equations and results of the model but this is contained in the book. Theorems of the article may be briefly characterized as follows:

1. Parameters of the model have to satisfy a certain inequality (4.10) so that the *existence of growth paths* may be proved.
2. A *normal growth path* does exist if and only if norms and growth factors conform with each other (4.14).
3. *The real sphere is controllable.*
4. Choosing appropriate reaction parameters the *feedback control of the system by norms is stable.*

О МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОСОБЕННОСТЯХ ОДНОЙ МОДЕЛИ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА

Модели Хэррода, Калецкого и Наймана пригодны для абстрактного представления процесса экономического роста, но не рассматривают *регулирование* этого процесса. Один из авторов данной статьи, Янош Корнаи, в своей книге «Рост, дефицит и эффективность», провел анализ регулирования процесса росга в социалистической экономике. Теоремы книги, требующие сложных доказательств, приводятся в книге без доказательств, которые содержит настоящая статья [4]. Однако им предшествуют условные обозначения модели [2] и ее уравнения [3].

В статье не даны толкования гипотезы, уравнений и вытекающих из них положений модели, так как они содержатся в книге. Представленные в статье положения могут быть кратко охарактеризованы следующим образом:

1. Параметры модели должны удовлетворять определенному неравенству (4.10) для того, чтобы можно было доказать существование *траекторий роста*.
2. *Нормальная траектория роста* существует тогда и только тогда, когда нормы и факторы роста согласованы между собой (4.14).
3. *Реальная сфера управляема.*
4. При выборе соответствующих параметров реакции *обратная связь* системы устойчива.

Muszély György

Idősoros és keresztmetszeti adatokból származó jövedelemrugalmasságok

(Következtetések a fogyasztás dinamikájára és differenciáltságára)

Bevezetés

A dolgozatban különböző fogyasztási modellekkel végzett számítások eredményeit fogjuk összehasonlítani. A számításokat a SZÁMKI Ökonometriai Főosztályán folyó fogyasztáselemzési vizsgálatok során végeztük, nagy részét több cikkben illetve tanulmányban már publikáltuk (lásd: Hulyák K. [2], [3], valamint Muszély Gy. [4]). Az összehasonlítás során elsősorban a jövedelemrugalmasságokra, valamint a fogyasztás dinamikájával kapcsolatos eredményekre fordítjuk a figyelmet. Megmutatjuk, hogy a különböző módon kapott paraméterek közötti eltéréseknek milyen elméleti okai vannak; ezeknek az okoknak az ismeretében megállapíthatjuk, hogy a látszólag különböző paraméterek éppen hogy megerősítik egymást, sőt a fogyasztói szokások újabb törvényszerűségeire mutatnak rá.

A korábban alkalmazott modellek közül [1] a dolgozat támaszkodik a konstans elaszticitású modellnek, valamint a kiadások lineáris modelljének (korábbi nevén *Stone*-modellnek) újabb, szélesebb adatbázisra való illesztésére [2], [3]. Mindkét modell statikus jellegű, a fogyasztásra ható tényezők közül csak a folyó jövedelem és ár hatásának számszerűsítését teszi lehetővé. Ugyanakkor, mint ismeretes, a fogyasztást egyéb tényezők is befolyásolják. Ilyen például a fogyasztói szokások változása, a kínálat és a választék bővülése, vagy éppen ellenkezőleg, a kereslet kielégítetlensége. A tartós fogyasztási cikkek vásárlása sem statikusan változik, alakulásában szerepet játszik az állomány nagysága.

Az újonnan alkalmazott modellek közül a dinamikus *Houthakker–Taylor* modell (Hulyák K. [3]) a fogyasztói szokások változásának, valamint a tartós cikkek fogyasztói dinamikájának leírására is alkalmas. A modellnek nemcsak az eredményei érdekesek, segítségével olyan elméleti törvényszerűségek vezethetők le, amelyek tükröződnek a keresztmetszeti adatokra alkalmazott modell eredményeiben is, és segítséget adnak az idősoros és a keresztmetszeti számítások összehasonlításához.

A felsorolt modellek az átlagos fogyasztási értékek idősorain alapultak. Keresztmetszeti adatokat is felhasználtunk számításaink során, nevezetesen az 1976 és 1979 közötti évek háztartásstatisztikai felméréseit. Ezeken egyrészt egyszerű regressziós számításokat végezünk, róluk ebben a dolgozatban fogunk először beszámolni. Másrészt alkalmaztuk a *Deaton* és *Muellbauer* által „majdnem ideális keresleti rendszernek" nevezett modellt egy továbbfejlesztett változatban [4]. Az árhatások számszerűsítésénél azt tapasztaltuk, hogy cikkcsoportonként szükség van lineáris trend-tag bevezetésére, enélkül az árrugalmasságokra torz becsléseket kaptunk volna. Ez az eredményünk cáfolja a fogyasztás statikus jellegét. Belátható, hogy az idősoros és keresztmetszeti jövedelemrugalmasságok összehasonlításából hasonló előjelű időbeli változás határozható meg. A *Houthakker—Taylor* modell segítségével elméleti úton is igazolható, hogy a két különböző típusú jövedelemrugalmasság között a nagyságrendi viszony a fogyasztói magatartás dinamikus tulajdonságaiból következik.

Az említett [4] dolgozatban vizsgáltuk az egyes rétegek fogyasztásában jelentkező differenciákat. A *Deaton—Muellbauer* modellel azonban nem sikerült teljes mértékben számszerűsíteni ezeket az eltéréseket. Jelen dolgozatunk érdekes eredménye, hogy e különbségek jelentős részét sikerült visszavezetni a jövedelmek korábbi változásaiban észlelt eltérésekre. Ily módon ezek a fogyasztásbeli eltérések — mivelhogy egyazon dinamikus modellel írhatók le — éppen hogy a rétegek fogyasztói magatartásának hasonlóságát bizonyítják.

1. Az idősoros modellek áttekintése

1.1. HULYÁK K. a [2] és [3] dolgozatban beszámol a konstans elaszticitású modellnek, valamint a kiadások lineáris modelljének számszerűsítéséről 1960 és 1977 közötti adatokon. A teljes lakossági fogyasztás konstans elaszticitású modelljét egy részletesebb, 67 cikkcsoportos bontásban becsli, valamint két összevontabb bontásban is, mégpedig a javak jellege szerinti nyolc illetve rendeltetése szerinti 11 cikkcsoportban. Az utóbbi két változatban készült el a kiadások lineáris modelljének számszerűsítése is. Ugyanő számításokat végzett a fő társadalmi rétegek háztartásstatisztikából vett idősorai alapján is, ezekre a számításokra azonban a jelenlegi dolgozatban nem térünk ki. Mivel magukról a modellekről egy korábbi dolgozat [1] is részletesen beszámolt, itt csak annyit említünk meg, hogy *mindkét modell statikus*, a fogyasztást a folyó jövedelem és árak függvényeként írja le.

Ugyancsak a [3] dolgozat ismerteti a dinamikus Houthakker—Taylor modell számszerűsítését is a fenti adatok alapján. Mivel ez a modell a jelen dolgozat következtetéseiben is fontos szerepet játszik, vele részletesebben fogunk foglalkozni.

1.2. A fogyasztás alakulását *dinamikus folyamatként felfogó elmélet szerint* a fogyasztás pillanatnyi értéke nemcsak a jövedelemtől, hanem a jövedelem változási sebességétől is függ, méghozzá a tartós és a szokásoktól befolyásolt cikkcsoportoknál ellentétes módon.

A könnyebb megértés kedvéért képzeljünk el két azonos jövedelmű fogyasztót, A-t és B-t, akik abban különböznek egymástól, hogy míg A reáljövedelme már régóta, mondjuk 10—15 éve, ugyanazon a szinten van, addig B ugyanerre a szintre reáljövedelmének az utóbbi években végbement gyors növekedése során jutott el. Van-e lényeges különbség A és B fogyasztói szokásai között? (A statikus modellek szerint nincs.) Az évek során A már beszerezte a legtöbb számára elérhető tartós fogyasztási cikket. Ezekből a cikkekből ma már csak az elhasználódott állományt pótolja. Ezért több pénze marad olyan nem tartós cikkekre, amelyeket korábban luxusnak tartott. Olyan fogyasztói szokásai alakultak ki, amelyek az elért jövedelmi szintre jellemzőek. Azt mondhatjuk, hogy A egy olyan *egyensúlyi szintre* jutott, amelyet a jövedelemnek, a fogyasztási struktúrának, a tartós cikkek állományának és végül a kialakult fogyasztói szokásoknak az állandósága jellemez. Természetesen *az egyensúlyi fogyasztási struktúra függ az elért egyensúlyi jövedelemtől*: más és más jövedelmi szinten egyensúlyba jutott fogyasztóra más és más fogyasztási struktúra jellemző.

Mi jellemzi ugyanakkor B fogyasztását? Jövedelme korábban alacsony volt, ezért most szerzi be azokat a tartós cikkeket, amelyek az elért jövedelmi szinthez tartoznak. Emiatt kevesebb pénze marad egyéb fogyasztásra, de nem is szokott még ezekhez hozzá: fogyasztói szokásaiban még elmaradt jelenlegi lehetőségeitől. B fogyasztása tehát *két szempontból* tér el az ugyanolyan jövedelmű, de az egyensúlyi szintet képviselő A-étól: *Ugyanabból a jövedelemből többet költ tartós és kevesebbet a szokásoktól függő cikkekre illetve szolgáltatásokra.* Tegyük még hozzá, hogy az előbbi gondolatmenetet folytatva, következik, hogy *minél nagyobb B jövedelemnövekedésének a sebessége, fogyasztási struktúrája annál jobban eltér a pillanatnyi jövedelmi szintjére jellemző egyensúlyi fogyasztástól.*

1.3. A következőkben ismertetjük a HOUTHAKKERtől és TAYLORtól származó dinamikus modellt [5], az 1.4.—1.6. pontokban pedig megmutatjuk, hogy a fent leírt fogyasztói magatartás a modell egyenleteiből levezethető. A modell a jelen és a múlt közötti kapcsolatot a vizsgált cikkcsoportra vonatkozó s_t *állományváltozó* bevezetésével teremti meg. (A cikkcsoport indexét sem itt, sem a továbbiakban nem tüntetjük fel a változók és konstansok mellett.) Az s_t a tartós cikkek esetében elvileg megfigyelhető, nem tartós cikkekre és szolgáltatásokra azonban nem mérhető. Utóbbiakat csak mint a fogyasztói szokások felhalmozódott ,,*pszichológiai készletét*'' tudjuk értelmezni. Végül is tekintet nélkül a cikkcsoport jellegére, az s_t-t *fiktív változóként szokás értelmezni.* Tételezzük fel, hogy az állományváltozónak létezik egy úgynevezett ,,kívánatos'' szintje is, amely a reáljövedelemnek és a saját relatív árnak lineáris függvénye:

$$s_t^* = A + Bx_t + Cp_t. \tag{1}$$

Mint látni fogjuk, s_t^* adja az állománynak azt az *egyensúlyi* szintjét, amelyet a fogyasztó tartósan állandó jövedelmi szint és állandó ár mellett elér. Az állományváltozó évenkénti változásáról feltesszük, hogy arányos s_t^* és s_t különbségével:

$$\dot{s}_t = k(s_t^* - s_t), \quad 0 < k. \tag{2}$$

Másrészt s_t változását a q_t új vásárlások és az évi értékcsökkenés különbsége adja, mely utóbbiról feltehetjük, hogy arányos s_t-vel:

$$\dot{s}_t = q_t - \delta s_t\,. \tag{3}$$

A felírt összefüggések alapján

$$q_t = k(s^* - s_t) + \delta s_t = kA + kBx_t + kCp_t + (\delta - k)s_t, \tag{4}$$

azaz a fogyasztás mennyisége a reáljövedelemnek, a saját relatív árnak és az állománynak lineáris függvénye. Megjegyezzük, hogy a modell ismertetésénél az (1), (2), (3) feltételrendszer helyett általában a (3) és (4) egyenletekből szokás kiindulni, az utóbbit a

$$q_t = \alpha + \beta s_t + \gamma x_t + \beta p_t \tag{4a}$$

alakban írva ([3], [5]). Attól függően, hogy a $\beta = \delta - k$ paraméter negatív vagy pozitív, az s_t állományváltozó növekedése a fogyasztást csökkenti illetve növeli. Az előbbi eset *a tartós fogyasztási cikkek esete*, az utóbbi esetben pedig s_t felfogható mint a kialakult *fogyasztói szokások mértéke*. Azokat a cikkeket és szolgáltatásokat, amelyekre vonatkozóan β pozitív, ezért *szokások által befolyásoltaknak* nevezzük.

A (4) egyenlet mindkét oldalát deriválva, majd (2)-t felhasználva, kapjuk, hogy

$$\dot{q}_t = kB\dot{x}_t + kC\dot{p}_t + (\delta - k)k(s_t^* - s_t).$$

Ha az utóbbi egyenletbe s_t^*-t (1)-ből, s_t-t (4)-ből behelyettesítjük, végül is megkapjuk a Houthakker–Taylor modellnek azt az alakját, amely az állományváltozót már nem tartalmazza:

$$\dot{q}_t = \delta kA + \delta kBx_t + kB\dot{x}_t + \delta kCp_t + kC\dot{p}_t - kq_t. \tag{5}$$

Ugyanez az egyenlet (41) jelöléseivel így írható:

$$\dot{q}_t = \delta\alpha + \delta\gamma x_t + \gamma\dot{x}_t + \delta\eta p_t + \eta\dot{p}_t + (\beta - \delta)q_t. \tag{5a}$$

Az (5a) egyenlet a Houthakker–Taylor modell folytonos alakja. Az (5) és (5a) egyenletekben fontos szerepet játszik a fogyasztásnak a jövedelem szerinti „*rövid távú*" deriváltja: $kB = \gamma$. A „rövid távú" derivált azt a hatást fejezi ki, amellyel a fogyasztás azonnal reagál a jövedelem változására, megelőzve a késleltetett hatásokat. A „hosszú távú" deriváltat, amely az időben elnyújtott összes hatás összegét fejezi ki, a későbbiekben ismertetjük.

Befejezésül megemlítjük még, hogy annak érdekében, hogy a modell paramétereit becsülni lehessen, a folytonos modellt közelíteni kell diszkrét időintervallumokkal. Ezzel a kérdéssel a már említett irodalom ([3], [5]) foglalkozik.

1.4. A most következő alfejezetekben azt a speciális esetet fogjuk vizsgálni, amikor az x_t *reáljövedelem* és a p_t *relatív ár hosszabb ideig megközelítőleg egyenletesen változik.* Ez az eset magába foglalja természetesen az *egyensúlyi helyzetet* is, amikor x_t és p_t állandósulása következtében q_t és s_t véges határértékhez konvergál.

Az állományváltozó vizsgálatához elégséges a (2) egyenletből kiindulni. Az s_t-re vonatkozó differenciálegyenletet megoldva:

$$s_t = e^{-kt}\Big(s_0 + \int_0^t ke^{k\tau}s_\tau^* d\tau\Big).$$

Számunkra előnyös lesz, ha a parciális integrálás elvét alkalmazzuk:

$$s_t = e^{-kt}\Big(s_0 + s_t^* e^{kt} - s_0^* - \int_0^t \dot{s}_\tau^* e^{k\tau} d\tau\Big). \tag{6}$$

Ha ugyanis x_t és p_t megközelítőleg egyenletesen változik, akkor (1) alapján $\dot{s}_\tau^*$ közel állandó: $\dot{s}_\tau^* \approx \dot{s}^*$. Ekkor (6) alapján

$$s_t \approx \hat{s}_t = e^{-kt}\left[s_0 + s_t^* e^{kt} - s_0^* - \frac{\dot{s}^*}{k}(e^{kt} - 1)\right],$$

amiből

$$s_t - s_t^* \approx \hat{s}_t - s_t^* = e^{-kt}(s_0 - s_0^*) - \frac{\dot{s}^*}{k}(1 - e^{-kt}).$$

Ha a jövedelem és az ár említett változása viszonylag hosszú idő óta tart, azaz t elég nagy, akkor

$$s_t - s_t^* \approx \hat{s}_t - s_t^* \to -\frac{\dot{s}^*}{k}, \tag{7}$$

azaz a valóságos s_t érték $\frac{\dot{s}^*}{k}$-val elmarad a ,,kívánatos'' s_t^* értékétől (amely (1) alapján szintén egyenletesen változik). Amikor az ,,elmaradást'' említettünk, akkor hallgatólagosan feltettük, hogy $\dot{s}^*$ pozitív, azaz s_t^* növekszik. Ez a feltétel például jövedelemnövekedés és nem túl nagy árváltozás esetén teljesül.

Abban a speciális esetben, amikor a jövedelem és az ár sokáig változatlan, és így $\dot{s}^* = 0$, az állományváltozó (7) szerint megközelíti az állandó $s^* = s^*$ értéket. Általában *az állományváltozónak az* (1) *egyenlettel definiált bármely* s_t^* *,,kívánatos'' értékét egyensúlyi értéknek is nevezhetjük* (adott x_τ és p_τ mellett), mert ha a jövedelem és az ár a t időponttól fogva nem változik, akkor, $\tau \to \infty$ esetén, s_τ az s_t^*-hoz konvergál.

1.5. Az előző alfejezetben azt vizsgáltuk, hogy hogyan alakul s_t értéke abban az esetben, ha a reáljövedelem és a relatív ár hosszabb ideig viszonylag egyenletesen változik. Most ugyanezt a vizsgálatot a q_t *fogyasztásra* is el fogjuk végezni.

Célszerű először az *egyensúlyi* értéket meghatározni. (3) alapján az *egyensúlyi fogyasztás*

$$q_t^* = \delta s_t^* = \delta(A + Bx_t + Cp_t). \tag{8}$$

Ehhez tart tehát q_t, ha a t időponttól kezdve a reáljövedelem és a relatív ár nem változik. A q_t^* egyensúlyi fogyasztás függ a jövedelemtől, jövedelem szerinti deriváltja a kétféle jelölésmódban felírva:

$$\frac{\partial q_t^*}{\partial x_t} = \delta B = \frac{\gamma\delta}{\delta - \beta}. \tag{9}$$

Belátható, hogy ez az érték a *jövedelem szerinti ún. ,,hosszú távú'' derivált*, amely az egységnyi jövedelemváltozás összes hatásának összegét adja.

A *viszonylag egyenletes jövedelem- és árváltozás esetére* áttérve, induljunk ki (4)-ből:

$$q_t = k(s_t^* - s_t) + \delta s_t = (k - \delta)(s_t^* - s_t) + \delta s_t^* = (k - \delta)(s_t^* - s_t) + q_t^*,$$

azaz

$$q_t^* - q_t = (k - \delta)(s_t^* - s_t).$$

Felhasználva az előző pont eredményeit, kapjuk, hogy ha a jövedelem és az ár említett változása hosszú ideig tart, azaz ha t elég nagy, akkor

$$q_t^* - q_t = (k - \delta)(s_t^* - \hat{s}_t) \to \frac{k - \delta}{k}\dot{s}^* = -\frac{\beta}{(\delta - \beta)^2}(\gamma\dot{x} + \eta\dot{p}). \tag{10}$$

A (10) összefüggésben felhasználtuk a (4a)-ban alkalmazott szokásos jelöléseket, $\dot{x}$ és $\dot{p}$ pedig a viszonylag egyenletesen változó reáljövedelem és relatív ár évi átlagos növekményét jelöli.

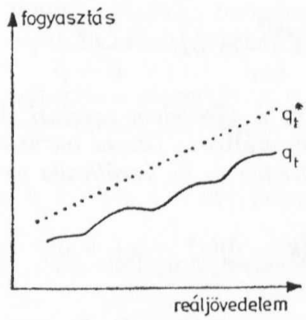
1.6. Végezetül foglaljuk össze a (7), (8) és a (10) relációk tartalmi jelentését szavakban.

A) A modell feltételezései szerint minden x_t, p_t értékpárhoz tartozik az állományváltozónak és a fogyasztásnak egy bizonyos *egyensúlyi szintje*, ezeket az (1) és a (8) egyenletek definiálják. Az egyensúlyi állapotot a fogyasztó akkor éri el, ha reáljövedelme és a vizsgált cikk relatív ára hosszabb ideig változatlan. Más és más x_t, p_t értékekhez más és más q_t^* érték tartozik; így különböző jövedelmi értékek, de azonos p_t mellett (8) felfogható mint azon fogyasztók Engel-görbéje, akiknek a jövedelme egyénenként eltérő, de hosszabb ideje azonos szinten stagnál.

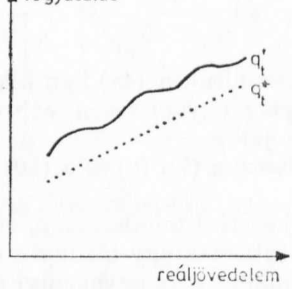
B) A *viszonylag egyenletes tempójú jövedelem- és árváltozás* esetének szemléltetésénél — az egyszerűség kedvéért — szorítkozzunk arra az esetre, amikor a reáljövedelem nő, a relatív ár pedig változatlan.

Az *állományváltozó* egyensúlyi, vagy más szóval ,,kívánatos'' értéke (1) szerint nő. Az állományváltozó valódi értéke (7) szerint ettől elmarad; minél nagyobb a jövedelem növekedésének tempója, annál nagyobb az elmaradás.

A valódi és az egyensúlyi *fogyasztás* viszonya ehhez nagyon hasonló, azzal az egy különbséggel, hogy a valódi fogyasztás csak a szokásoktól függő cikkeknél kisebb az egyensúlyinál, a tartós fogyasztási cikkeknél a helyzet fordított. A kétféle fogyasztás időbeli alakulását az 1. és 2. ábrán szemléltetjük, a vízszintes tengelyen a reáljövedelem, a függőleges tengelyen pedig a fogyasztás értékeit ábrázoltuk. Az egyensúlyi fogyasztási pontokat (8) szerint (változatlan ár mellett) egy egyenes köti össze, és a valóságos fogyasztás görbéje (10) alapján közel párhuzamos ezzel az egyenessel. A két ,,párhuzamos'' távolsága arányos a jövedelem növekedésének mértékével; *a szokásoktól befolyásolt fogyasztású cikkeknél a valóságos fogyasztás görbéje az egyensúlyi egyenes alatt, a tartós cikkeknél pedig fölötte halad.*



1. ábra. A fogyasztás időbeli lefolyása a szokás jellegű cikkeknél



2. ábra. A fogyasztás időbeli lefolyása a tartós fogyasztási cikkeknél

Végiggondolva a most elmondottakat, megállapíthatjuk, hogy Houthakker és Taylor dinamikus modellje alkalmas az 1.2. pontban vázolt fogyasztói magatartás leírására. Hátra van még az elméletnek a számítási eredményekkel való összevetése.

2. Az idősoros adatok alapján számított jövedelemrugalmasságok összehasonlítása

2.1. Az *1.—4. táblázatokban* összegeztük a különböző aggregáltsági szinten kapott összlakossági jövedelemrugalmasságokat. Feltüntettük a keresztmetszeti adatokból nyert értékeket is, de ezekkel csak a következő fejezetekben fogunk foglalkozni. Itt említjük meg, hogy a táblázatokban közölt paraméterek olyan idősoros illetve keresztmetszeti számításokból származnak, amelyeknél

1. táblázat

A különböző módon kapott jövedelemrugalmasságok a vásárolt fogyasztás jelleg szerinti fő cikkcsoportjaiban

Cikkcsoportok	Konst. elaszt. modell	A kiadások lineáris modellje	Hosszú távú dinam.	E_i^{33}	E_i^5	Relatív trend-együttható (%) becslése	Relatív trend-együttható (%) szórása
1. Élelmiszerek	0,72	0,72		0,53	0,52	—0,68	0,17
2. Élvezeti cikkek	1,25	1,26	1,27	1,03	0,99	5,30	1,24
3. Ruházati cikkek	0,57	0,60		0,87	0,86	—5,08	0,92
4. Fűtés, házt. energia	1,09	1,05		0,60	0,62	3,68	1,21
5. Tartós fogy. cikkek	1,36	1,63	1,30	1,90	1,87	—2,32	3,88
6. Egyéb iparcikkek	1,37	1,56		1,10	1,18	4,07	0,69
7. Szolgáltatások	0,67	0,75	0,85	1,06	1,20	0,08	0,87
8. Lakásép., ingatlanvás.	1,52	1,27	1,28	2,64	2,47	—3,88	1,03

2. táblázat

A különböző módon kapott jövedelemrugalmasságok a teljes fogyasztás rendeltetés szerinti főcsoportjaiban

Cikkcsoportok	Konst. elaszt. modell	A kiadások lineáris modellje	Hosszú távú dinam.
1. Élelmiszer	0,56	0,53	
2. Italok, kávé, tea	1,51	1,53	1,53
3. Dohány	1,25	1,20	1,15*
4. Ruházkodás	0,62	0,62	0,70*
5. Lakásszolgáltatás	1,00	1,19	1,13*
6. Fűtés és házt. energ.	1,23	1,05	
7. Házt. és lakás felsz.	1,38	1,35	1,45
8. Egészségügy, testáp.	1,66	0,86	1,31
9. Közl., hírközlés	1,52	1,79	0,90
10. Oktatás, kultúra, sport és üdülés	1,41	1,47	1,55
11. Egyéb fogyasztás	1,62	1,82	

* Csak a jövedelemváltozók alapján számítva.

3. táblázat

A jövedelemrugalmasságok összehasonlítása 67 cikkcsoportos bontásban

Cikkcsoportok (amelyekre kaptunk hosszútávú rugalmasságot)	A konstans elaszticitású modell rugalmasságai	Hosszú távú rugalmasságok a dinamikus modell esetében
5. Hal, halkészítmények	1,09	1,06*
20. Zöldségkészítmények	1,76	1,52*
23. Gyümölcskészítmények	2,31	1,71*
27. Bor	0,95	2,15
28. Sör	1,31	1,29*
29. Égetett szeszes italok	1,82	1,48*
30. Dohányáruk	1,24	1,14*
32. Férfi felsőruházat	0,55	0,58*
33. Női felsőruházat	0,40	0,32*
34. Gyermek felsőruházat	1,42	1,26*
35. Alsóruházat	0,41	0,55*
40. Lakásszolgáltatások	1,01	1,13*
44. Bútorok	1,50	1,54*
47. Mosógép és centrifuga	1,29	0,89
48. Háztartási és lakástextil	1,24	1,31
51. Mosó- és tisztítószerek	0,71	0,39*
52. Háztart. szolgáltatások	0,69	0,67*
53. Testápolási és kozm. cikkek	1,66	1,10
55. Személygépkocsi	4,91	2,37*
56. Kerékpár, motorkerékpár stb.	0,12	0,82*
61. Tartós kult. cikkek	2,30	2,65
62. Híradástechnikai készülékek	2,41	1,24*
63. Könyv, újság, papír stb.	1,47	1,61
66. Egyéb tartós cikkek (óra, ékszer)	2,07	2,40*

* Csak a jövedelemváltozók alapján számítva.

módszertani okokból a jövedelmet a kiadások összegével helyettesítettük. Így helyesebben a „fogyasztásnak a kiadások összege szerinti rugalmassága'' elnevezést kellene használnunk, ennek ellenére alkalmazkodtunk az általánosan elfogadott szóhasználathoz. Megjegyezzük még, hogy HULYÁK K. a [2] dolgozatban valódi jövedelemrugalmasságokra vonatkozó számításokat is végzett.

A különböző modellekkel kapott rugalmasságok nagyobb összhangja érdekében a [2] és [3] dolgozatban közölt táblázatokhoz képest az alábbi módosításokat hajtottuk végre:

— A kiadások lineáris modellje alapján kapott rugalmasságokat a vizsgált időszak közepén elhelyezkedő 1969-es év jövedelmi szintjén tüntettük fel.

— A Houthakker—Taylor féle dinamikus modellre vonatkozóan az ún. hosszú távú rugalmasságokat közöltük. A hosszú távú jövedelemrugalmasság az egyensúlyi fogyasztás hosszú távú, jövedelem szerinti deriváltja (9) segítségével, de a valóságos fogyasztás felhasználásával származtatható:

$$e_t^* = \frac{\gamma\delta}{\delta - \beta} \Bigg/ \frac{q_t}{x_t}. \tag{11}$$

— A 2. és a 3. táblázatban egyes megjelölt cikkcsoportok hosszú távú jövedelemrugalmasságát kizárólag a jövedelemhatások figyelembevételével becsültük. Emiatt némelyikük eltér a [3] dolgozatban közölt értékektől.

4. táblázat

A különböző módon kapott jövedelemrugalmasságok összehasonlítása a keresztmetszeti számítások 34 cikkcsoportjában

Cikkcsoportok	Konst. elaszt.	Hosszú távú dinamikus	E_i^{33}	E_i^{5}	Relatív trend együttható (%) becslése	Relatív trend együttható (%) szórása
Hús és húskészítmények	0,78		0,61	0,57	0,41	0,27
Tej és tejtermékek	0,86		0,35	0,38	−1,20	1,15
Zsiradékok	0,08		0,35	0,30	−3,65	0,45
Kenyér, liszt, rizs	0,35		0,21	0,17	−1,92	0,21
Cukor, édesség	0,52		0,55	0,55	6,45	0,39
Idényjellegű élelmiszerek	0,46		0,55	0,54	−2,03	0,44
Egyéb élelmiszerek	0,40		0,54	0,55	−2,92	0,40
Házonkívüli étkezés			0,82	1,00	3,07	1,62
Kávé tea	2,14	} 1,53	0,69	0,73	3,34	0,87
Italok	1,41		1,19	1,12	3,36	0,37
Dohány	1,25	1,15	0,54	0,55	2,88	0,61
Ruházat	0,62	0,70	0,87	0,86	−5,06	0,92
Szilárd és cseppf. fűtőanyag	0,42		0,61	0,52	2,78	0,89
Központi és távfűtés, gáz	} 3,03		0,75	1,03	4,79	3,42
Elektromos energia			0,47	0,51	−0,94	2,59
Bútor	1,50	1,54	1,56	1,53	−5,83	4,64
Egyéb tartós házt. cikkek	1,70		1,12	1,07	−13,82	4,30
Gépkocsi	4,90	2,37	4,02	3,96	−4,10	5,54
Kerékpár, motor	0,12	0,82	0,84	0,71	−1,98	4,63
Tartós kult. cikkek, óra, ékszer	2,22	2,56	1,11	1,17	−0,39	6,81
Házt. textil, edény, fogyóeszköz	1,49		1,05	1,05	0,01	1,02
Testápolási, kozm. cikkek	1,66	1,10	0,81	0,95	−0,07	2,25
Gyógyszer			0,45	0,54	3,55	7,47
Járműalk., üzemanyag	3,57		1,64	1,79	4,85	1,25
Kisebb kult. sport- és játékcikkek	1,50		1,04	1,18	2,84	0,68
Építőanyag, ingatlan			2,55	2,39	−3,41	1,67
Ruházati, lábbeli szolgáltatás	−1,36		1,28	1,42	−6,38	5,42
Lakásszolgáltatás	1,00	1,13	1,00	1,21	−4,01	1,21
Háztartási szolgáltatás	0,69	0,67	1,40	1,69	−0,88	2,14
Egészségügyi, testáp. szolgáltatás			1,04	1,23	1,65	1,29
Közl., hírközl. szolgáltatás	1,03		1,02	1,14	1,72	1,98
Oktatás, kult. szolgáltatás	1,35		1,20	1,37	5,10	2,58
Építk. szolgáltatás			3,12	2,91	−4,05	2,17
Egyéb szolgáltatás			0,95	0,99	0,12	1,57

Ezzel kapcsolatban röviden utalunk arra, hogy a Houthakker—Taylor-modell paraméterei egy lineáris regressziós modell együtthatóiból származtathatók. A δ paraméter azonban két különböző módon is számítható: külön a jövedelemváltozók és külön az árváltozók együtthatóiból. A [3] dolgozatban legtöbbször a kétféle becslés számtani közepe szerepel, mi azonban sok esetben azt tapasztaltuk: ha a δ együtthatót kizárólag a jövedelemhatások figyelembevételével számítjuk ki, akkor a hosszú távú jövedelemrugalmasságok közelebb esnek a statikus modellekből számított rugalmasságokhoz.

2.2. Mint megfigyelhetjük, a *háromféle, különböző módon számolt jövedelemrugalmasság igen közel áll egymáshoz.* A két statikus becslés az 1960. és 1977. közötti időszak átlagos rugalmasságára vonatkozik, ezért hasonlóságuk nem meglepő. Az viszont, hogy a dinamikus becslés miért áll közel a statikusokhoz, a következőképpen magyarázható. A vizsgált időszakban a jövedelem évenként erősen ingadozó mértékben, de mégis permanensen nőtt. A reáljövedelem évenkénti növekedésének átlaga 1961. és 1967. között 4,1%, 1968. és 1972. között 5,4%, végül 1973. és 1977. között 4,2% volt. Mint az előző fejezetben bebizonyítottuk, ha a fogyasztás időbeli alakulását a reáljövedelem függvényében ábrázoljuk, akkor viszonylag egyenletes jövedelemnövekedés esetén a kapott görbe kisebb-nagyobb eltérésekkel, de nagyjából párhuzamosan halad az egyensúlyi fogyasztás egyenesével. Ezért a hosszú távú jövedelemrugalmasság megadja a valóságos fogyasztás idősorára jellemző rugalmassági értéket, azt, amelyet megközelítőleg akkor is megkapunk, ha az adatokra statikus modellt illesztünk.

3. A keresztmetszeti adatokon végzett számítások

3.1. Az előző fejezetben az idősoros számításokból kapott jövedelemrugalmasságokkal jellemeztük a fogyasztásnak mint a jövedelem függvényének időbeli lefutását. A háztartásstatisztikai felmérés teljes anyagát használjuk viszont fel a keresztmetszeti számításokban. Ezek a jövedelemrugalmasságok tartalmilag mást fejeznek ki, nevezetesen azt, hogy *egy adott időpontban milyen eltérések mutatkoznak a különböző jövedelmű fogyasztók vásárlásaiban.* A keresztmetszeti számításokat megnehezíti az a körülmény, hogy egy-egy nagyobb rétegen vagy méginkább az egész felmérésen belül a különböző jövedelmi csoportoknak eltérő a szociális és demográfiai összetétele. A háztartások szociális és demográfiai vonásai önmagukban is befolyásolják a fogyasztási struktúrát, hatásaik azonban látszólag mint a jövedelmi különbségek következményei jelentkeznek. Ha ezt nem vesszük figyelembe, akkor az említett tényezők *torzítólag* hatnak a jövedelemrugalmasságok becsléseire.

E zavaró körülmény kiküszöbölésére két mód kínálkozik. Az egyik eljárás az, hogy a rendelkezésre álló mintát viszonylag homogén fogyasztói csoportokra bontjuk, és ezeken belül külön-külön vizsgáljuk a jövedelem hatásait. A másik lehetséges módszer az, hogy a teljes minta alapján olyan keresleti függvényt becslünk, amely a szociális és demográfiai tényezők számszerűsítése céljából magyarázó változókat tartalmaz. Mindkét eljárás az egyes szűk fogyasztói rétegek fogyasztási, jövedelmi adataira illeszkedő Engel-görbéket eredményez, csak az egyik esetben ezeket külön-külön, a másik esetben pedig az összes rétegre egyszerre elvégzett becsléssel kapjuk meg. A rétegenként külön lebonyolított számítással természetesen olyan Engel-görbéket kapunk, amelyek jobban illeszkednek az adatokra, ezzel szemben az egész felmérés alapján becsült keresleti függvény segítségével az egyes szociális és demográfiai faktorok hatása mérhető jobban.

Az évenként mintegy 8500 háztartásról készített felmérés lehetővé tette a fogyasztás vizsgálatát a jelleg szerinti 8, a rendeltetés szerinti 12, valamint egy részletesebb 34 cikkcsoportos bontásban a lakosság 33 rétegére. A rétegeket a fő társadalmi osztályok (munkások, szellemiek, termelőszövetkezeti dolgozók, kettősjövedelműek, önálló inaktívak), a lakóhely (Budapest, vidéki város, község) és a gyermekszám szerint különböztettük meg. Pontos felsorolásukat a [4] dolgozat táblázatai tartalmazzák. Mivel az 1976-tól 1979-ig terjedő négy év adatait használtuk fel, lehetőség nyílott az időbeni hatások megfigyelésére is.

3.2. A számítások egy részénél, amelyet [4]-ben ismertettünk Deaton és Muellbauer [6] modelljéből indultunk ki. A modell statikus, tehát a kiadásokat a pillanatnyi árak és a jövedelem függvényében írja fel. A számítások során az árrugalmasságokra nagy pozitív és negatív becsléseket kaptunk, amit az okozott, hogy az Engel-görbék évről-évre jelentősen eltolódtak, és ezt a statikus modell csak az árváltozásokkal volt képes megmagyarázni. Ez a jelenség cáfolja a fogyasztás statikus voltát, és egyben azt is, hogy a fogyasztás időbeli alakulását keresztmetszeti adatokból származó jövedelemrugalmasságokkal le lehet írni. A rendelkezésre álló rövid időszak azonban nem elegendő egy dinamikus modell becslésére, ezért az árváltozáson túl a többi időbeli hatás számszerűsítésére az eredeti keresleti egyenletet lineáris trenddel egészítettük ki. Végül is keresleti egyenleteink

$$w_{iht}(x, p_{it}, p_t) = a_i + b_i \cdot \log(x/p_t) + b_i \cdot c_h + d_i \cdot \log p_{it}' + f_i \cdot t \qquad (12)$$

alakban írhatók, ahol w_{iht} megadja, hogy az a fogyasztó, aki a h-ik réteghez tartozik és a t-ik évben kiadásainak összege x, kiadásainak mekkora hányadát költi az i-ik cikkre vagy szolgáltatásra. A reáljövedelem helyett a kiadások összegének a p_t általános fogyasztói árindexszel deflált x/p_t értéke szerepel az egyenletben. p_{it}' a saját relatív ár; a_i, b_i, d_i, f_i a cikkcsoportokra, c_h pedig a rétegre jellemző ismeretlen konstansok.

Szignifikáns trend jelenléte önmagában igazolja az idősoros és keresztmetszeti jövedelemrugalmasságok különbözőségét. Az eltéréseket, valamint a lineáris trendre kapott becsléseket a 4. fejezetben a legtöbb cikkcsoportnál a fogyasztói magatartás dinamikus tulajdonságaira fogjuk visszavezetni. Itt is azokra a törvényszerűségekre fogunk hivatkozni, amelyeket a Houthakker—Taylor féle dinamikus modellből kiindulva az 1.4—1.6 pontokban vezettünk le.

3.3. Mint a (12) egyenletből látható, a *réteghatást specifikáló* c_h *paraméter* minden cikkcsoportnál azonos. A c_h szerepe a következőképpen interpretálható. A h-ik réteg fogyasztási struktúrája fejlettebb, mint a g-ik rétegé, ha $c_h > c_g$. Ugyanis azokra a cikkekre, amelyek jövedelemrugalmassága egynél nagyobb, és ezért luxuscikkeknek is szokás nevezni, a h-ik réteg Engel görbéje mindenütt a g-ik rétegé felett halad, azokra a cikkekre viszont, amelyek jövedelemrugalmassága egynél kisebb, azaz alapvetőeknek tekinthetők, a helyzet fordított.

A valóságban azonban — legalábbis hazai viszonyok között — ez általában nem így igaz. Emiatt a c_h-k közötti eltérések a réteget meghatározó három faktor közül csak a gyermekszám szerinti bontásban feleltek meg a várakozásnak. A lakóhely és a fő társadalmi rétegek szerinti megkülönböztetésben a c_h-k között nem kaptunk szignifikáns eltéréseket, azaz a modell nem tudta számszerűsíteni ennek a két tényezőnek a fogyasztást differenciáló hatását. Mint az 5. fejezetben látni fogjuk, a lakóhely, valamint a fő társadalmi réteghez való tartozás nem elsősorban az alapvető és a luxuscikkek arányát, hanem a tartós cikkek és a szokások által befolyásolt fogyasztás arányát szabja meg. Ennek elméleti magyarázatát szintén a dinamikus fogyasztói magatartásból kiindulva fogjuk megadni, gyakorlati igazolásul azonban *újabb számításokat* végeztünk, amelyekről ebben a dolgozatban számolunk be először.

3.4. *Újabb számításainkban*, a (12) egyenletet tovább általánosítva, feltételeztük, hogy a vizsgált időszakban ($t = 1, 2, 3, 4$) az egyes rétegekre

$$w_{iht} = a_{iht} + b_i \cdot \log(x/p_t) \tag{13}$$

alakú függvények írják le a kiadási hányad függését a reáljövedelemtől (pontosabban: az összkiadásnak az általános fogyasztói árindexszel deflált értékétől). Az a_{iht}, b_i együtthatók cikkcsoportonként külön-külön a legkisebb négyzetek módszerével becsülhetők.

Mint látható, egy-egy cikkcsoportban a $\log(x/p)$ együtthatója minden rétegre és évre vonatkozóan azonos. Ez azt jelenti, hogy a w_{iht} görbék egymással párhuzamosak. A fogyasztási struktúra eltérései az a_{iht} paraméterek összehasonlításával vizsgálhatók. A szóba jövő értékek nagy száma miatt azonban a társadalmi rétegződés és a lakóhely szerepe nehezen szűrhető ki, ezért egy egyszerűbb megoldást választottunk.

Eljárásunk abból állt, hogy *a (13) egyenletet két változatban számszerűsítettük*. Az első változatban a 3.1-ben részletezett módon 33 réteget különböztettünk meg, a második változatban ezeket a rétegeket összevontuk öt nagyobb demográfiai csoportba. Ebben a változatban az egyes rétegek csak a gyermekek számában tértek el, és csak az önálló inaktív háztartások csoportját hagytuk érintetlenül. Az összevonás során inhomogén rétegeket kaptunk. Így a társadalmi osztálynak és a lakóhelynek a befolyása a fogyasztásra szintén mint a jövedelem hatása jelentkezett, és torzítólag hatott a b_i paraméterek becslésére. Az 5. fejezetben összehasonlítjuk a kétféle rétegbontás alapján számolt b_i együtthatókat és jövedelemrugalmasságokat. Ebből fogunk következtetni a fogyasztás rétegenkénti differenciáltságára, pontosabban a lakóhely és a társadalmi rétegződés szerepére.

A (13) típusú keresleti egyenleteknek van egy másik előnye is a (12) egyenletekkel szemben. Azzal egyidejűleg, hogy jobban illeszkednek az egyes rétegek fogyasztási adataira, a b_i együtthatók — természetesen a részletes bontás alapján számolva — egyben jobban tükrözik a valóságos jövedelemhatást is. A (12) modell esetében ugyanis azáltal, hogy a c_h együtthatók nem tudták jól kiszűrni a réteghatásokat, ez utóbbiak torzítólag hatottak a b_i együtthatókra. Ezért a következő fejezetben, amikor az idősoros és keresztmetszeti adatokból számított jövedelemrugalmasságokat összehasonlítjuk, az utóbbiakat a (13) keresleti egyenletek paraméterei fogják képviselni.

4. Az idősoros és a keresztmetszeti jövedelemrugalmasságok összehasonlítása

4.1. Az 1. és a 4. táblázatban az idősoros számítások eredményei mellett feltüntettük azokat a keresztmetszeti jövedelemrugalmasságokat is, amelyeket a (13) egyenletnek a háztartásstatisztika 33 rétegre bontott változatából kaptunk (E_i^{33}). Ugyanott megtalálhatók az öt összevont rétegre kapott eredmények is (E_i^5), ezekkel azonban csak a következő fejezetben fogunk foglalkozni. A jövedelemrugalmasságokat az

$$E_i = 1 + \frac{b_i}{\bar{w}_i} \tag{14}$$

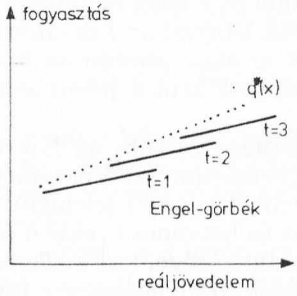
formula szerint számoltuk, ahol $\overline{w}_i$ a négy év teljes háztartásstatisztikai felméréséből képzett átlagos kiadási hányad az i-ik cikkcsoportra. Ily módon tehát a táblázatokban feltüntetett értékek szintén az összlakosságra vonatkoznak, pontosabban: a teljes lakosságnak arra a jelentős hányadára, amelyet a háztartásstatisztika képvisel.

Mint a 3. fejezet elején hangsúlyoztuk, az idősoros jövedelemrugalmasságoknak az eltérése a hasonló keresztmetszeti paraméterektől — a jövedelem- és árhatásokon kívüli egyéb olyan tényezők jelenlétére utal, amelyek a vizsgált időszakban, tehát a hatvanas és hetvenes években érvényesültek. Ilyen tényezők például a kereslet kielégítetlensége, vagy ellenkezőleg, a választék bővülése; ezek az idősoros számítások során látszólag a jövedelem hatásaként jelentkezhetnek, és befolyásolhatják a rugalmassági becsléseket. Mint látni fogjuk, a dinamikus hatások szintén igen jelentős szerepet játszanak; *a szokás jellegű cikkeknél többnyire az idősoros, a tartós fogyasztási cikkeknél pedig a keresztmetszeti számítások adták a nagyobb becsléseket.*

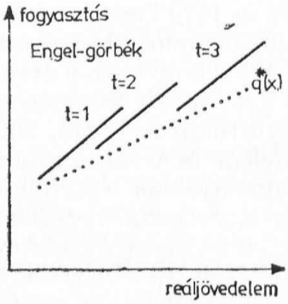
Hasonló jellegű, de az 1976 és 1979 közötti periódusra jellemző időbeli hatásokra utal a Deaton—Muellbauer modell számszerűsítésénél szükségszerűleg bevezetett lineáris trend is. A [4] dolgozatból átvettük és az 1., valamint a 4. táblázatban feltüntettük az $f_i/\overline{w}_i$ *relatív trend-együttható* százalékos értékét és szórását. A relatív trend-együttható megadja, hogy évente hány százalékkal változik a fogyasztás a jövedelem- és árváltozáson kívüli egyéb időbeli hatások következtében. Mint az eredményekből látni fogjuk, *ahol az idősoros jövedelemrugalmasság nagyobb a keresztmetszetinél, ott általában pozitív trendet kapunk, ahol pedig a viszony fordított, ott többnyire a trend-együttható is negatív.*

4.2. Mielőtt az előzőekben vázolt összefüggéseket a táblázatok alapján cikkcsoportonként részletesen elemeznénk, keressük meg a tapasztalt *jelenség okát.* Most is a már többször hangoztatott elvből indulunk ki: minél nagyobb valamely fogyasztó jövedelemnövekedésének tempója, fogyasztása annál jobban eltér a megfelelő jövedelmi szinthez tartozó egyensúlyi fogyasztástól: tartós cikkeknél fölötte van, a szokástól függő cikkeknél pedig alatta. Hogy ezt az elvet a gyakorlatra alkalmazni tudjuk, vizsgáljuk meg, *hogyan változtak a számszerűsített időszakban a jövedelmek.* A hazai jövedelemeloszlási vizsgálatokból úgy tudjuk, hogy ez alatt az időszak alatt csökkentek a relatív jövedelmi különbségek. Ez a csökkenés azonban elég kismértékű volt, és az abszolút jövedelmi különbségek már jelentős mértékben növekedtek [7]. Ez azt jelenti, hogy azok, akiknek az időszak végén, tehát 1976—1978-ban magas volt a jövedelmük, többnyire gyorsabb jövedelemnövekedés következtében jutottak ebbe az állapotba, mint azok, akiknek a jövedelme jelenleg is alacsony. Ennek megfelelően a *magasabb jövedelműeknek mind a tartós, mind a szokásoktól függő cikkekből való fogyasztása jobban eltér az egyensúlyi fogyasztástól, mint az alacsony jövedelműeké.*

Ezt a jelenséget a 3., és 4. ábrán szemléltetjük a szokások meghatározta, illetve a tartós cikkekre. Az ábrákon egyenes szakaszokkal ábrázoltuk egy tetszőleges réteg Engel-görbéit a vizsgált években. A szakaszok végei a réteg legalacsonyabb illetve legmagasabb jövedelmű fogyasztóit szemléltetik. Az ábrákon feltüntettük azt az idealizált $q^*(x)$ Engel-görbét, amely a különböző jövedelmi értékekhez tartozó egyensúlyi fogyasztási értékeket köti össze. A $q^*(x)$ menti derivált az úgynevezett hosszú távú derivált. Az ábrából leolvasható, hogy a keresztmetszeti adatokból nyert Engel-görbe mentén a jövedelem szerinti derivált tartós fogyasztási cikkekre nagyobb, szokás jellegű cikkekre



3. ábra. Az Engel-görbék és az egyensúlyi fogyasztás viszonya a szokás jellegű cikkeknél



4. ábra. Az Engel-görbék és az egyensúlyi fogyasztás viszonya a tartós cikkeknél

kisebb, mint a hosszú távú derivált. Mivel a (11) formulában a hosszú távú jövedelemrugalmasságot a valóságos (és nem az egyensúlyi) fogyasztás segítségével definiáltuk, az előbbiek elmondhatók a rugalmasságokra is. Az előző fejezetben viszont beláttuk, hogy a hosszú távú rugalmasság lényegében megegyezik a statikus módszerekkel számított jövedelemrugalmassággal, ezért a fenti állítás általában igaz az idősoros és keresztmetszeti adatokból kapott rugalmasságok viszonyára is. Összefoglalva tehát *a tartós fogyasztási cikkekre az idősoros jövedelemrugalmasságok többnyire kisebbek, mint a keresztmetszeti adatokból nyert hasonló paraméterek, a szokások által befolyásolt cikkeknél pedig a helyzet fordított.*

Ugyancsak a 3. és a 4. ábrából olvasható le, hogy miért volt szükség a Deaton—Muellbauer modellnél a lineáris trend bevezetésére, és, hogy *a trend a tartós cikkeknél negatív, a szokásoktól függő cikkeknél pedig pozitív.*

4.3. *A következőkben az eredményeken ellenőrizzük* a fentiekben levezetett összefüggéseket. Először a jelleg szerinti főcsoportokra (1. táblázat), majd pedig részletesebb bontásban is (4. táblázat) összehasonlítjuk a különböző idősoros, valamint az E_i^{33} oszlopában található keresztmetszeti jövedelemrugalmasságokat. Mindjárt előrevetjük, hogy a szokásoktól való függés, valamint a tartós jelleg fogalmát kissé tágabb értelemben véve, a fogyasztási cikkek és szolgáltatások e két fő osztályába nem pontosan azokat a cikkcsoportokat soroltuk, amelyek a dinamikus modell szerint annak bizonyultak.

Sok szempontból egymáshoz hasonló tulajdonságokat mutat három fő cikkcsoport: a vásárolt élelmiszerfogyasztás, a háztartási energia, és az egyéb iparcikkek. Bár ezen cikkcsoportok egyike sem kimondottan szokás jellegű — a dinamikus modell illesztése sem sikerült — mégis ilyen vonásokat mutatnak. Erre utal az említett cikkcsoportok esetében a kétféle típusú rugalmasság viszonya. Az élelmiszervásárlás a saját termelésű fogyasztás terhére, az energiafogyasztás pedig a lakások számának emelkedése és a technika fejlődése következtében gyors ütemben növekedett az elmúlt húsz évben. Viszont a jövedelem nem játszik lényeges szerepet a két cikkcsoport kiadásaiban — amint erről az alacsony keresztmetszeti rugalmasságok tanúskodnak. A lineáris trendre kapott becslések szerint az élelmiszervásárlás növekedése a hetvenes évek második felében lelassult, a másik két csoport kiadásai azonban tovább növekedtek.

Az élvezeti cikkek vásárlását, valamint a szolgáltatások igénybevételét a dinamikus Houthakker—Taylor modellel végzett számítások szerint a fogyasztói szokások befolyásolják. A szolgáltatások esetében mégis fordított a rugalmasságok viszonya, s gyakorlatilag zérus a trend-együttható is. Ennek oka az a közismert tény, hogy a szolgáltató hálózat nem fejlődött annak a tényleges keresletnek megfelelően, amelyet éppen a magas keresztmetszeti rugalmasság is igazol.

A fennmaradt három cikkcsoport — a ruházati és a tartós fogyasztási cikkek, valamint a lakásépítésre és ingatlanvásárlásra fordított kiadások — valamennyi paraméter szerint tartós jellegűnek bizonyultak. Hangsúlyozzuk, hogy a negatív trend nem jelent abszolút csökkenést — ez az eredmény csak arra utal, hogy a vásárlások az időben lassabban növekednek, mint ahogy az a keresztmetszeti adatokból kapott jövedelemrugalmasságok alapján várható lenne.

A főcsoportok vizsgálata után most a 4. táblázat segítségével tekintsük át *részletesebb bontásban* a fogyasztási cikkek jövedelemrugalmasságait. Mint látni fogjuk, a fogyasztói szokások illetve a tartós jelleg eddig tapasztalt hatása nem érvényesül egyértelműen. Általánosabban megfogalmazva az *idősoros rugalmasságok a jövedelem hatása mellett tükrözik az egyéb időbeli hatásokat is, és ugyanez elmondható a lineáris trendről is.*

A táblázatban a saját termelésű fogyasztással megnövelt teljes élelmiszer- és élvezeti cikk fogyasztás rugalmasságait tüntettük fel. A húsra és húskészítményekre, valamint a zsiradékokra vonatkozó eredmények a fogyasztási szerkezet korszerűsödését mutatják. Ugyanerre utal a tej és a tejtermékek magas idősoros rugalmassága, valamint a házonkívüli étkezésre kapott szignifikáns pozitív trend. Ugyanakkor az idényjellegű, valamint az egyéb élelmiszerek fogyasztása nem növekedett kellőképpen.

Az egyes élvezeti cikkek paraméterein jól látszik ezek szokás jellege. Bár a keresztmetszeti statisztika szerint nem rugalmasak, az utóbbi húsz évben mégis nagyon divatba jöttek. A ruházati cikkeknél valamennyi mutató e cikkcsoport tartós jellegét tükrözi. Az energiafogyasztáson belül érdemes megvizsgálni a szilárd és cseppfolyós fűtőanyagokat. Az eredmények alapján úgy látszik, hogy ezek fogyasztása a 70-es évek közepéig lassan, ezután pedig gyorsabban fejlődött. Különösen dinamikus volt viszont a központi és távfűtés, valamint a gázszolgáltatás elterjedése.

A különböző tartós fogyasztási cikkeknél már nem egyértelmű a kép. Bár a főcsoportra érvényes volt az elméleti összefüggés, az egyes részcsoportokra azonban ez nem teljesül; több esetben az idősoros rugalmasság nagyobb a keresztmetszetinél. Ennek oka az lehet, hogy egyes cikkcsoportoknak a vásárlása a 60-as és 70-es években terjedt el igazán. Külön vizsgálatot kívánna annak a megállapítása, hogy vajon az utóbbi évek kínálati ingadozásai okozták-e a trend-együtthatók nagy becslési hibáit, vagy pedig a fogyasztás dinamikájának leírására még ilyen rövid időszakra sem elégséges a lineáris trend.

Folytatva a sort az egyéb iparcikkeken, ezekre általában teljesül az, hogy szokás jellegűek, vagy legalábbis fogyasztásuk ahhoz hasonló. Érdemes megemlíteni, hogy a háztartási textil, edény- és fogyóeszköz, valamint a testápolási és kozmetikai cikkek esetében a Deaton—Muellbauer modell az 1976 és 1979 közötti időszakra lényegében statikus keresleti egyenletet adott: a trend-együtthatóra gyakorlatilag zérust kaptunk. Kivételt képez viszont az építőanyag- és ingatlanvásárlások csoportja, itt a negatív trend azt sugallja, hogy ez a cikkcsoport tartós.

A szolgáltatások különböző ágai meglehetősen heterogén képet mutatnak. A ruházati és lábbeli szolgáltatás kitűnő például szolgál a kétféle rugalmasság közötti tartalmi különbségre: igénybevétele erősen függ a jövedelemtől — erre mutat E_i^{33} nagy értéke —, ugyanakkor a negatív idősoros rugalmasság és a negatív trend arról tanúskodik, hogy ezt a szolgáltatást a késztermékek vásárlása erősen kiszorítja. A háztartási szolgáltatások lassú fejlődésében valószínűleg hasonló okok játszanak közre: míg a háztartási készülékek vásárlása jelentősen nőtt, a javításukra fordított kiadások 1970-től alig emelkedtek. Ennek a kérdésnek az elemzése annak a megvizsgálását is kívánná, hogy miért bizonyult a dinamikus modell szerint tartós jellegűnek ez a szolgáltatás. A többi szolgáltatási csoport, az egyetlen építkezési szolgáltatás kivételével, többé-kevésbé a szokások befolyásoló hatását tükrözi, míg ez utóbbi az építőanyag- és ingatlanvásárlásokhoz hasonlóan, tartós jellegű.

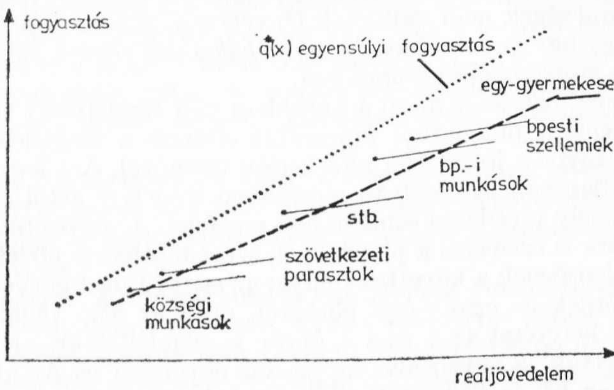
5. A rétegek fogyasztásának differenciáltsága

5.1. Ebben a fejezetben a fő társadalmi rétegződésnek (munkások, szellemiek, termelőszövetkezeti dolgozók, kettősjövedelműek és inaktívak), valamint a lakóhely jellegének (Budapest, vidéki város, község) a fogyasztási struktúra fejlettségében való szerepét vizsgáljuk. A rétegek átlagos fogyasztásában levő eltérések részben az átlagos jövedelmi szintek közötti különbségekből származnak. Ebben a fejezetben megpróbáljuk elkülöníteni egymástól a jövedelem és a valódi réteghatás szerepét, oly módon, hogy azt vizsgáljuk, hogy miben térnek el a különböző rétegekhez tartozó, de azonos jövedelmű fogyasztók vásárlásai.

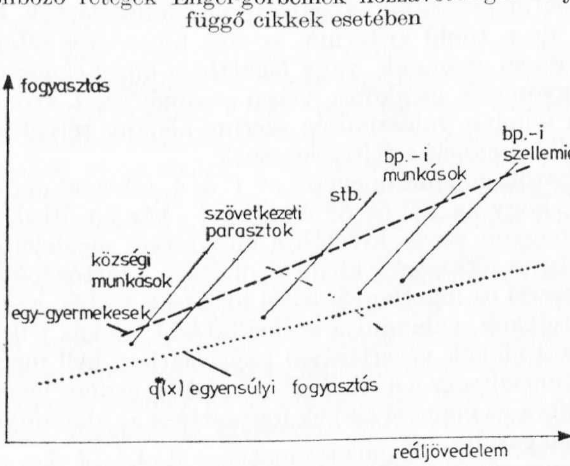
Vizsgálatainkban a 3. fejezetben leírtaknak megfelelően a (13) egyenletnek a 33 réteges és az 5 réteges bontását vetjük egybe. Az utóbbi változatban kapott b_i együtthatók segítségével, az E_i^{33} rugalmasságokhoz hasonlóan, szintén a (14) formula alapján képeztük az E_i^5 paramétereket, mégpedig ugyanazokkal az egész mintára jellemző átlagos $\overline{w}_i$ kiadási hányadosokkal. Így a már részben ismertetett 1. és 4. táblázat E_i^{33} és E_i^5 értékei közötti különbségek kizárólag a különböző változatokból származó b_i együtthatók különbségéből származnak.

Hogy az E_i^{33} és az E_i^5 eltéréseiből a fogyasztási struktúra differenciáltságára következtetni tudjunk, tekintsük át a *vizsgált rétegek jövedelmi viszonyait.* Csak az aktív rétegeket tekintve, legalacsonyabb a jövedelem a községi munkásoknál. Valamivel magasabb a szövetkezeti parasztok és a vidéki városi munkások jövedelme, ezután a kettősjövedelműek és a budapesti munkások következnek. Legmagasabb a szellemiek átlagjövedelme, a rétegen belül a lakóhely szerint a sorrend: községiek, vidéki városiak, budapestiek. Megfigyelhető tehát, hogy a nem túl nagy különbségekben a lakóhely és a képzettség meghatározó szerepet játszik.

Mint tudjuk, (13) első változatának számszerűsítésekor az egyes rétegek kiadásai arányait párhuzamos görbék közelítik. A könnyebb megértés kedvéért tekintsük egyelőre csak azokat a rétegeket, amelyek a gyermekszám szempontjából megegyeznek, például csak egy-gyermekes háztartásokat tartalmaznak. A második változat számszerűsítése esetén egyetlen görbe illeszkedik az ilyen háztartások kiadásai arányaira. Ezt a helyzetet ábrázolja erősen leegyszerűsítve az 5. és a 6. ábra az $E_i^{33} < E_i^5$ illetve az $E_i^{33} > E_i^5$ esetnek megfelelően. Az $E_i^{33} < E_i^5$ egyenlőtlenség azt sugallja, hogy egyre nagyobb átlagjövedelmű rétegeket tekintve a görbék többnyire egymás felett helyezkednek el. Más szóval, ha a különböző rétegekből azonos jövedelmű fogyasztókat választunk ki, akkor e fogyasztók annál többet költenek a kérdéses cikkre, mennél képzettebb réteghez tartoznak, illetve mennél városiasabb településen laknak.



5. *ábra.* A különböző rétegek Engel-görbéinek hozzávetőleges helyzete a szokásoktól függő cikkek esetében



6. *ábra.* A különböző rétegek Engel-görbéinek hozzávetőleges helyzete a tartós fogyasztási cikkek esetében

A 6. ábra viszont az $E_i^{33} > E_i^5$ esetet ábrázolja, a helyzetet erősen idealizálva. Itt az átlagjövedelem szerint balról jobbra haladva, az egyes rétegek görbéi egymás alatt helyezkednek el. A fenti gondolatmenetet megismételhetjük a gyermektelen, a kétgyermekes, a három és többgyermekes háztartásokra is, az ábrák ugyanúgy vonatkoznak ezekre a rétegekre is.

5.2. A táblázatokat megvizsgálva észrevehetjük, hogy a szokásoktól függő cikkek a tartós cikkekkel szemben a rétegek szerinti differenciák szempontjából is eltérő fogyasztási magatartást tükröznek. A szituációt most is az azonos jövedelmű, de különböző rétegekhez tartozó fogyasztók összehasonlításával szemléltetve azt mondhatjuk, hogy *minél előkelőbb helyet foglal el a fogyasztó a fő társadalmi réteg és a lakóhely szerinti ranglistán, annál többet költ a szokások által befolyásolt cikkekre, és annál kevesebbet a tartós jellegűekre.* Mielőtt a táblázatot részletesen áttekintenénk, a vázolt jelenséget — a korábbiakhoz hasonlóan — ismét a *közelmúlt jövedelmi mozgásaira* fogjuk visszavezetni.

A jövedelemeloszlási vizsgálatok azt is megmutatták [7], hogy az abszolút jövedelemkülönbségeknek az utóbbi években bekövetkezett növekedése nem a társadalmi rétegek között, hanem azokon belül ment végbe: a társadalmi rétegek közötti különbségek nem változtak lényegesen. Számunkra előnyös megfogalmazásban ez úgy is mondható, hogy *a különböző rétegek jövedelemnövekedésének tempója megközelítőleg azonos volt.*

Kapcsoljuk most ezt össze azzal a korábban már részletezett elméleti eredménnyel, miszerint a pillanatnyi fogyasztás eltérése a megfelelő egyensúlyi fogyasztástól arányos a jövedelem növekedési ütemével. Azt kapjuk, hogy az egyes rétegek átlagosan ugyanolyan mértékben térnek el attól az egyensúlyi fogyasztástól, amely jövedelmi szintjüknek megfelel. Az egyes rétegeken belül azonban továbbra is érvényes a jövedelmek szóródásának a növekedése, valamint ennek a jelenségnek a következménye: az egyes Engel-görbék felső végükön jobban eltérnek az egyensúlyi görbétől, mint az alsó végükön. A leírt, erősen idealizált helyzetet az 5. és a 6. ábrán is szemléltettük, ahol szaggatott vonallal feltüntettük az egyensúlyi fogyasztás egyenesét is. Az ábrák alapján érthetővé válik az E_i^{33} és E_i^5 közötti nagyságrendi viszony.

A vázolt gondolatmenet során hallgatólagosan feltételeztük, hogy az azonos családszerkezetű, de a többi kritérium szerint különböző rétegek egyensúlyi fogyasztási függvényei azonosak, vagy legalábbis közel esnek egymáshoz. Ez természetesen nagyon erős megkötés, végső eredményeink azonban — néhány cikkcsoporttól és minden valószínűség szerint néhány rétegtől eltekintve — nem mondanak ellent ennek a feltételezésnek.

5.3. Az imént vázolt gondolatmenetet az 1. és 4. táblázat alapján ellenőrizve megállapíthatjuk, hogy az E_i^{33} és E_i^5 értékek — bár közöttük a különbségek nem nagyok — nagyon kevés kivételtől eltekintve, megfelelnek az elméleti megfontolásnak. Így a *főcsoportok* közül a ruházati, a tartós fogyasztási cikkek, valamint az építkezési és ingatlanvásárlási kiadások tartós, az energiafogyasztás, az egyéb iparcikkek, valamint a szolgáltatások szokás jelleget tükröznek. Egyedül az élvezeti cikkek vásárlásával kapcsolatban kell megemlíteni, hogy a fogyasztás differenciáltsága a 6. ábrának megfelelő: azonos jövedelmű fogyasztókat összehasonlítva az élvezeti cikkek fogyasztása az alacsonyabb társadalmi helyzetűeknél a magasabb.

Részletesen megvizsgálva a cikkcsoportokat, szintén kevés eltérést találunk az 5.2.-ben lefektetett elvektől, ezek a kivételek sem meglepőek. A saját termelést is tartalmazó teljes élelmiszerfogyasztás összességében statikus jellegű, részleteiben vizsgálva viszont megállapíthatjuk, hogy míg az alacsonyabb átlagjövedelmű rétegekre a hús, zsír, valamint a kenyér, liszt és rizsfogyasztás a jellemzőbb, addig a magasabb átlagjövedelmű, kvalifikáltabb városi lakosságnál a tej és a tejtermékek, valamint a házonkívüli étkezés játszik jelentősebb szerepet. Hangsúlyozzuk persze, hogy ezek a megállapítások nem a rétegek átlagfogyasztására, hanem a különböző réteghez tartozó, de azonos jövedelmű fogyasztókra érvényesek.

Megállapíthatjuk azt is, hogy az élvezeti cikkek fent említett kivételes helyzete csak az italfogyasztásnál érvényesül. A kávé, a tea és a dohány tipikusan szokás jellegű cikkek, és a társadalmi ranglistán előkelőbb helyet foglaló rétegekre jellemzőbb.

Lényeges eltérés van az energiafogyasztás módjaiban: a vidéki lakosság a szilárd és cseppfolyós fűtőanyagokat, a városiak pedig a korszerűbb fűtési technikát veszik igénybe.

A tartós cikkek egyes csoportjai általában jól tükrözik az elméleti úton levezetett szabályt, egyetlen kivétel a kulturális cikkek, óra, ékszer csoport. Ezt a cikkcsoportot inkább a műveltebb, városi rétegek részesítik előnyben.

Az egyéb iparcikkek a kétféle rugalmasság összehasonlítása szerint tisztán szokás jellegűek, amennyiben a már korábban is kiemelt építőanyag és ingatlanvásárlásokat a tartós cikkek közé soroljuk. Erre a cikkcsoportra a 6. ábra szerinti elrendeződés jellemző: azonos jövedelmű fogyasztók közül ezekre a tételekre azok költenek többet, akik alacsonyabb átlagjövedelmű rétegekhez tartoznak.

Ugyanúgy a szolgáltatások közül az egyetlen kivétel az építkezési szolgáltatások csoportja, amely már előző vizsgálataink szerint is tartós jellegűnek bizonyult. A többi szolgáltatás esetében a rétegek differenciáltságát az 5. ábra tükrözi helyesen.

Mint láthatjuk, a rétegek közötti különbségek vonatkozásában jobban érvényesülnek a dinamikus tényezők, mint a fogyasztás időbeli változásának alakításában. Külön szabály csak egyes élelmiszercikkekre, az italokra, a szilárd és cseppfolyós fűtőanyagokra, valamint a tartós kulturális cikkekre mondható ki. Ez azt jelenti, hogy *a rétegenként eltérő struktúrájú fogyasztás többnyire ugyanazzal a modellel írható le, s a meglevő eltérések csak a jelen és a múlt eltérő jövedelmi viszonyaiból fakadnak.* Végül is ebben a fejezetben *a rétegek fogyasztásának hasonlóságát hangsúlyoztuk.* Nem tagadjuk természetesen, hogy a felsorolt kivételek mellett léteznek egyéb finomabb eltérések is, ezek felkutatására a bemutatott globális elemzés azonban nem alkalmas.

5.4. Befejezésül visszatérünk *a fogyasztási struktúra fejlettségének* 3.3.-ban felvetett problémájára. Ezt a kérdést természetesen csak azonos jövedelmű és azonos családszerkezetű háztartások körében érdemes felvetni. A fejezetben beláttuk, hogy olyan azonos jövedelmű és azonos gyermekszámú háztartáshoz tartozó fogyasztók között, amelyek egyéb szempontból különböző rétegekhez tartoznak, általában nem a rugalmas luxus- és a rugalmatlan alapvető cikkek között, hanem a tartós és a szokásoktól függő cikkek fogyasztása között mutatkozik eltérés. Két fogyasztó közül az, amelyik ahhoz a réteghez tartozik, amelynek átlagjövedelme jelenleg és az elmúlt húsz évben is meghaladta a másik rétegét, és ezért fogyasztási szerkezete korszerűbbnek mondható, általában többet költ a már kialakult szokásoktól függő fogyasztásra és kevesebbet tartós cikkekre.

Összefoglalás

A dolgozatban különböző idősoros és keresztmetszeti adatokból származó jövedelemrugalmasságokat hasonlítottunk össze. Az eltéréseket legtöbb esetben sikerült az 1960 és 1979 közötti időszak jövedelmi mozgásainak dinamikus hatásaival magyarázni.

Beláttuk, hogy az idősoros adatokon számszerűsített statikus fogyasztási modellek azért adnak a dinamikus Houthakker—Taylor modell ún. hosszú távú jövedelemrugalmasságaihoz közeleső becsléseket, mert 1960 és 1977 közt a jövedelmek viszonylag egyenletesen nőttek.

Az idősoros és a keresztmetszeti rugalmasságok összehasonlításakor azt kaptuk, hogy a kialakult szokások által befolyásolt fogyasztásra az előbbiek, a tartós cikkekre az utóbbiak a nagyobbak. Ugyanezt az eltérést támasztja alá a keresztmetszeti mintára illesztett, eredetileg statikus Deaton—Muellbauer modell esetében szükségszerűen bevezetett lineáris trendtag előjele is. Megmutattuk, hogy ennek a jelenségnek az oka a jövedelem eloszlásának változásában van. Bár a vizsgált időszakban a relatív jövedelemkülönbségek valamelyest csökkentek, az abszolút eltérések mégis jelentősen nőttek. Természetesen egyéb tényezők is befolyásolják a fogyasztás időbeli alakulását, ezek jelenlétére az elméleti úton levezetett fenti szabálytól való eltérésekből is következtethetünk.

Végül számításokat végeztünk a fogyasztás rétegenkénti differenciáltságára. Azt vizsgáltuk, hogy milyen szerepet játszik a fogyasztási struktúra fejlettségében a fő társadalmi réteghez tartozás (munkások, szellemiek, termelőszövetkezeti dolgozók, kettősjövedelműek, inaktívak) és a lakóhely jellege. Megállapítottuk, hogy azoknak a rétegeknek a fogyasztási arányaiban, amelyek az elmúlt húsz év folyamán magasabb jövedelemben részesültek, a szokások által befolyásolt fogyasztás viszonylag nagyobb, a tartós cikkek vásárlása viszonylag kisebb szerepet játszik.

(Beérkezett: 1981. augusztus 27-én.)

IRODALOM

[1] Hulyák K.—Losonczy I.-né: Keresleti modellek számszerűsítése idősoros adatok alapján. *Szigma*, 1978. XI. évf. 3—4. sz.

[2] Hulyák K.: A lakossági fogyasztás elemzése a kiadások lineáris modellje és ennek kiterjesztett változata segítségével. A fogyasztás ökonometriai modellezésének eredményei II. SZÁMKI, Budapest, 1980.

[3] Hulyák K.: A lakosság fogyasztásának vizsgálata dinamikus keresleti függvényekkel. *Statisztikai Szemle*, 1980. 1224—45. o.

[4] Muszély Gy.: Keresleti egyenletek becslése háztartásstatisztikai adatok alapján. *Szigma*, 1982. XV. évf. 1. sz.

[5] Houthakker, H. E.—Taylor, L. D.: *Consumer demand in the United States. Analyses and projections.* Harvard University Press. Cambridge, 1970.

[6] Deaton, A.—Muellbauer, I.: An almost ideal demand system. *The American Economic Review*, June 1980, 312—326. old.

[7] Versztovsek R.—Enyedi J.: *A fogyasztás társadalmi osztályok — rétegek szerinti differenciálódása Magyarországon.* Belkereskedelmi Kutató Intézet, Budapest, 1978.

COMPARING INCOME ELASTICITIES ESTIMATED FROM TIME SERIES AND CROSS-SECTIONAL DATA

In the paper income elasticities estimated from time series and cross-sectional data are compared. Deviations can be explained in most cases by dynamic effects of income changes of the period 1960–1977.

We have observed that static consumption models estimated on the basis of time series data give estimations close to the so-called long-term income elasticities of the dynamic Houthakker–Taylor model because incomes increased relatively steadily between 1960 and 1977.

When comparing time series and cross-sectional elasticities, respectively, we obtained that for habitual consumption the former, while for durable goods the latter were larger. The same deviation was supported also by the sign of the linear trend term applied to the static version of the Deaton-Muellbauer model estimated from cross-sectional data. We have shown that the reason for this phenomenon lies in changes in income distribution.

Finally, computations were made concerning the stratification of consumption, too. It can be stated that the higher the income the larger the budget share of consumption influenced by habits, and the smaller the budget share of durables.

СРАВНЕНИЕ ЭЛАСТИЧНОСТЕЙ ПО ДОХОДУ, ПОЛУЧЕННЫХ ИЗ ДАННЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ И СЕМЕЙНЫХ БЮДЖЕТОВ

В работе приводится сравнение эластичностей по доходу, полученных из данных временных рядов и семейных бюджетов. В большинстве случаев различия удалось объяснить динамическим воздействием изменений доходов в период 1960–1977 гг.

Было установлено, что статические модели, построенные на основе временних рядов, дают эластичности, которые близки к долгосрочным эластичностям динамической модели Хоутаккера и Тейлора, так как за период 1960–1977 гг. доходы возрастали относительно равномерно.

При сравнении эластичностей из временных рядов к эластичностям из семейных бюджетов было установлено, что для потребления, на которое влияют установившиеся привычки, первые больше последных, а для товаров длительного пользования отношение противоположно. То же самое различие подтверждается коэффициентом линейного тренда, который был прибавлен к статической модели Дитона и Мюллбоуэра, при ее применении на данных семейных бюджетов. Показано, что причина этого явления заключается в изменении распределения доходов.

В последней главы статьи приведены результаты расчетов по дифференциации потребления по слоям населения. Было установлено, что чем больше доходов у домашних хозяйств, тем меньше доля расходов на товары длительного пользования, и тем больше доля расходов на товары и услуг, потребление которых находится под влиянием привычек.

Török Tamás

A következetes rangsorolás egy új értelmezése

1. Bevezetés

Tételezzünk fel különböző alternatíváknak egy n elemű $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ halmazát, melynek elemei összehasonlíthatók egy közös T tulajdonságuk alapján.

Bármely $x_i, x_j \in X$ esetén az x_i alternatívát *preferálhatjuk* az x_j alternatívával szemben; jele; x_iPx_j, x_i-t és x_j-t *indifferensnek* minősíthetjük; jele: x_iIx_j, vagy x_j-t preferáljuk x_i-vel szemben. Ha x_iPx_j vagy x_iIx_j, akkor ezt x_iRx_j jelöli. Az R tehát egy bináris reláció $X \times X$-en.

Tartalmi szempontból a preferálás egyszerűen előnyben részesítést jelent, vagyis x_i-t akkor preferáljuk x_j-vel szemben, ha a T tulajdonság szerint kedvezőbbnek ítéljük. Az x_i és az x_j indifferens megítélése nem jelenti a két alternatíva feltétlen azonosságát; csupán azt, hogy nem tudunk különbséget tenni x_i és x_j között a T tulajdonság alapján.

Például különböző tárgyak súly szerinti összehasonlításakor indifferensnek ítélhetünk két tárgyat, ha a valóságos (mérleg szerinti) súlykülönbség kisebb, mint az általunk érzékelhető minimális súlykülönbség.

Ha valamennyi (x_i, x_j) alternatíva-párt összehasonlítottunk, és megadtuk az x_iPx_j, x_iIx_j, x_jPx_i relációk valamelyikét (vagyis, ha R teljes és kapcsolt), akkor rendelkezésünkre áll egy $\langle X \times X, R \rangle$ relációs struktúra. Felmerül a következő kérdés: milyen esetben nevezzük *racionálisnak, következetesnek* az $\langle X \times X, R \rangle$ struktúrát, és hogyan definiáljuk az alternatívák rangsorát?

Ennek a kérdésnek a megválaszolása, az alternatíva-páronkénti összehasonlításokon alapuló értékrend következetességének definiálása nemcsak önmagában érdekes és lényeges probléma, hanem a csoportos döntések, a társadalmi választások vizsgálatában is [1, 4, 5].

Ebben a cikkben *a P és I reláció valóságos tartalmából kiindulva* (formális definiálásuk nélkül) *a következetes rangsorolás egy új értelmezését adjuk.*

2. A szakirodalmi előzmények rövid elemzése

A szakirodalomban a következetességet Kendall [3] javaslatára alternatíva-hármasok tranzitivitásával azonosítják [1—5]. Az (x_i, x_j, x_k) hármas páronkénti összehasonlításakor az alábbi:

(1)
$$\text{a)}\ (x_iPx_j \,\&\, x_jPx_k) \rightarrow x_iPx_k$$
$$\text{b)}\ (x_iIx_j \,\&\, x_jIx_k) \rightarrow x_iIx_k$$

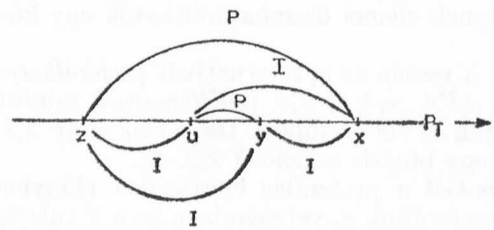
implikációk teljesülését várják el, tehát a P és az I tranzitivitását egyaránt.

Nevezzük az $\langle X \times X, R \rangle$ struktúrát *R-tranzitívnak*, ha valamennyi x_i, x_j, $x_k \in X$ esetén teljesül (1). Ez a racionalitási kritérium szerepel a társadalmi választás ARROW-féle modelljében is [1].

Az R-tranzitivitás (1.b) elvárása túl erősnek tűnik, ugyanis az indifferencia-reláció ily módon elveszíti valóságos tartalmát; tulajdonképpen egyenlőséget jelent, és nem tűr meg egy ,,megkülönböztethetetlenségi tartományt''.

Igaz, hogy a valós számok körében értelmezett ,,$\geq$'' reláció tranzitivitásának ,,átültetése'' a P és I relációra kézenfekvő, de valójában nem a számokról kívánunk felvilágosítást szerezni, hanem a dolgokról.

Az I reláció tartalmi ,,megmentését'' célozza az alternatíva-hármasok *kvázi-tranzitivitása*, amikor csak az (1.a) P-tranzitivitást várjuk el és megengedjük, hogy $x_i I x_j$ és $x_j I x_k$ esetén $x_i P x_k$ is előfordulhasson [4, 5].



1. ábra

Vagyis indifferenciák egymásutánjából preferencia is következhet.

Például A és B, valamint B és C súlyát nem tudjuk megkülönböztetni, de az A és C közötti súlykülönbséget már érzékeljük.

Nevezzük az $\langle X \times X, R \rangle$ struktúrát *Q-tranzitívnak*, ha valamennyi x_i, x_j, $x_k \in X$ esetén teljesül (1.a).

A Q-tranzitivitás látszólag tartalmi és formai szempontból is a következetesség elfogadható értelmezésének tűnik. Valójában nem az, ugyanis sajátos belső ellentmondást hordoz. Ennek bemutatására vegyük azt a négyelemű $X = \{x, y, z, u\}$ alternatíva-halmazt, amelyre a páronkénti összehasonlítások:

$$xIy,\ xPz,\ xIu,\ yIz,\ yPu,\ zIu.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy valamennyi alternatíva-hármas P-tranzitív, tehát az $\langle X \times X, R \rangle$ struktúra Q-tranzitív.

Ha azonban egy P_T preferencia-skálán ábrázoljuk az alternatívákat, akkor az xPz, xIy és yIz relációkból következik, hogy y az x és a z között helyezkedik el. Ehhez hasonlóan az xPz, zIu és xIu relációk következménye u helye x és z között. (Lásd az 1. ábrát.)

Mégis yPx, ami azt jelenti, hogy egy indifferencia-tartományba: (y, z) preferencia-tartomány: (y, u) esett. Hasonló eredményhez jutnánk u és y fordított elhelyezésével.

Ez a furcsa paradoxon pedig nyilván nem kívánatos.

Megjegyzés: Az alternatíváknak preferencia-skálán való elhelyezhetőségét az indokolja, hogy egyparaméteres (a T tulajdonság szerinti) összemérési problémáról van szó. Az más kérdés, hogy abban az esetben, amikor a T tulajdonság esetleg több: $T_1, \ldots, T_k$ elemi tulajdonság együttese, akkor célszerű-e vagy helyes-e mégis az összetett T tulajdonság alapján rangsorolni. Ezzel a problémával a jelen cikkben nem foglalkozunk. Csupán példaként jegyezzük meg, hogy elnökválasztásnál a jelölők egyetlen szempontja a jelöltek „alkalmassága". Nyilván az alkalmasságnak is számtalan kritériuma van, ennek ellenére a szavazási formák – valószínűleg egyszerűségük miatt – egydimenziósak. A fentiek alapján jogtalan lenne tehát az alternatívák síkbeli vagy térbeli elhelyezése (bár feloldaná a bemutatott paradoxont), mert ez azt jelentené, hogy egyetlen tulajdonságnak több iránya létezik.

3. A következetes rangsorolás egy új értelmezése

Ebben a fejezetben a következetes rangsorolás egy olyan értelmezését kívánjuk megadni, amely nem alternatíva-hármasok tranzitivitására épül, hanem egyidejűleg veszi figyelembe valamennyi (x_i, x_j) alternatíva-párra megadott relációt, valamint feloldja a kvázi-tranzitivitás paradoxonát. Szükségünk lesz az alábbi jelölésekre:

(2) $$x_i \in X; \quad E(x_i) = \{x_j \colon x_i P x_j;\ x_j \in X\}$$
$$H(x_i) = \{x_k \colon x_k P x_i;\ x_k \in X\}.$$

Az $E(x_i)$ és $H(x_i)$ halmazokat nevezhetjük az x_i alternatíva *előny-*, ill. *hátrányhalmazainak.*

Ezekután egy $\langle X \times X, R \rangle$ struktúrát *G-tranzitívnak* nevezünk, ha az $\{1, 2, \ldots, n\}$ elemeknek létezik olyan $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ permutációja, amelyre:

(3) $$E(x_{i_1}) \supseteq E(x_{i_2}) \supseteq \ldots \supseteq E(x_{i_n})$$
$$H(x_{i_1}) \subseteq H(x_{i_2}) \subseteq \ldots \subseteq H(x_{i_n}).$$

Akkor mondjuk, hogy az alternatívák rangsorolása következetes (ezen új értelmezés szerint), *ha az $\langle X \times X, R \rangle$ struktúra G-tranzitív* (globálisan tranzitív).

Egyszerű megfontolásokból következik az alábbi két állítás:

(4) Ha $\langle X \times X, R \rangle$ R-tranzitív, akkor G-tranzitív is.

(5) Ha $\langle X \times X, R \rangle$ G-tranzitív, akkor Q-tranzitív is.

Láthatjuk tehát, hogy a G-tranzitivitás erősség szempontjából a szokásos R-tranzitivitás és a Q-tranzitivitás között van.

Az alternatívák rangsorának értelmezéséhez (G-tranzitivitás esetén) bevezetünk két új relációt:

(6) $x_i I^* x_j$ akkor és csak akkor, ha:

a) $x_i I x_j$

és b) $E(x_i) = E(x_j)$ & $H(x_i) = H(x_j)$.

(7) $x_i P^* x_j$ akkor és csak akkor, ha:

a) $x_i I x_j$

és b) $[E(x_i) \supset E(x_j)$ & $H(x_i) \subseteq H(x_j)] \vee [E(x_i) = E(x_j)$ & $H(x_i) \subset H(x_j)]$, Nyilván igaz az alábbi három egyszerű megállapítás:

(8) a) $x_i I^* x_j \rightarrow x_j I^* x_i$

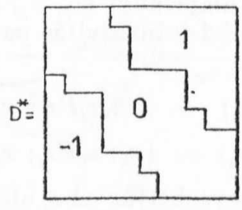
b) $x_i P^* x_j \rightarrow (\sim x_j P^* x_i)$

c) $x_i I x_j \rightarrow (x_i I^* x_j \vee x_i P^* x_j \vee x_j P^* x_i)$,

Ha egy $\langle X \times X, R \rangle$ struktúra G-tranzitív, akkor a most bevezetett relációk alapján az alternatívák rangsora:

(9) $$x_{i_1} G^* x_{i_2} G^* \ldots G^* x_{i_n}, \quad \text{ahol} \quad G^* \in \{P, P^*, I^*\}.$$

Megjegyzés: Nem állítjuk, hogy $x_i P^* x_j$ esetén x_i „jobb", mint x_j, hiszen ebben az esetben $x_i I x_j$ a megadott reláció. Az azonban biztos, hogy x_i előnyhalmaza bővebb, vagy hátrányhalmaza szűkebb, mint x_j-é. Az x_i tehát dominálja az x_j-t.



2. ábra

Rendkívül nehézkes lenne a G-tranzitivitás gyakorlati ellenőrzése a (3) definíció alapján, különösen az alternatívák nagy száma esetén. Ezért egy újabb fogalmat vezetünk be.

Az $n \times n$-es $D = (d_{ij})_{i=1}^{n} {}_{j=1}^{n}$ *döntési mátrixot* a következőképpen értelmezzük:

(10) $$d_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ ha } x_i P x_j \\ 0, \text{ ha } x_i I x_j \\ -1, \text{ ha } x_j P x_i . \end{cases}$$

Egy D döntési mátrixot nevezzünk G-tranzitívnak, ha az alternatívák felcserélhetők úgy, hogy az így kapott D^* mátrix rendelkezik a következő tulajdonságokkal (lásd a 2. ábrát is):

(11) a) A főátló felett csak 0 vagy 1 szerepel

b) Ha egy sorban valamelyik elem $+1$, akkor az összes utána következő is az

c) A $+1$-esek száma a sorok sorrendjében nem növekvő.

Megjegyzés: D-ben az x_i és x_j alternatíva felcserélése az x_i-nek és az x_j-nek megfelelő sor és oszlop felcserélését jelenti.

Könnyen ellenőrizhető az alábbi állítás igazsága:

(12) Egy $\langle X \times X, R \rangle$ struktúra akkor és csak akkor G-tranzitív, ha a hozzá tartozó D döntési mátrix is az.

Jelölje $x_i \in X$ esetén $e(x_i)$ az $E(x_i)$ halmaz számosságát, $h(x_i)$ pedig a $H(x_i)$-ét. Egyszerű okoskodással belátható, hogy:

(13) Egy D döntési mátrix akkor és csak akkor G-tranzitív, ha D-t az $e(x_i) - h(x_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ különbségek csökkenő sorrendjében átrendezve D^* alakú mátrixot kapunk.

Ez utóbbi állítás lehetővé teszi a G-tranzitivitás egyszerű és konstruktív ellenőrzését. Lássunk erre egy példát. Az alternatíva-halmaz legyen $X = \{1, 2, \ldots, 10\}$, a hozzá tartozó döntési mátrix pedig:

$$
D = \begin{array}{c|cccccccccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
5 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\
6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\
7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
8 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
9 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\
10 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

$$e - h = (7, 3, 7, 1, -1, -6, 6, -8, -2, -7)$$

Ezt a vektort rendezzük csökkenő sorrendbe (13) értelmében és ennek alapján D-t hozzuk a következő alakra:

$$
D^* = \begin{array}{c|cccccccccc|}
 & 1 & 3 & 7 & 2 & 4 & 5 & 9 & 6 & 10 & 8 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
4 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
5 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
9 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
10 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
8 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

D^* pedig eleget tesz a (11) követelménynek, tehát a kiindulási D döntési mátrix G-tranzitívnak bizonyult. Ugyanakkor D nem teljesíti a szokásos R-tranzitivitást (pl. $2I4$, $4I5$ és mégis $2P5$).

Az alternatívák rangsora:

$$1I^*3P^*7P^*2P^*4P^*5P^*9P\,6P^*10P^*8\,.$$

(Beérkezett: 1981. november 10-én.)

IRODALOM

[1] Arrow, K. J.: *Social choice and individual values*. New York, Wieley, 1963., 2. ed.
[2] David, H. A.: *The method of paired comparisons*. London, Griffin, 1976.
[3] Kendall, M. G.: *Rank correlation methods*. London, Griffin, 1970.
[4] Sen, A. K.: Quasi-transitivity, rational choice and collective decisions. *Review of Economic Studies*, 34 (1969).
[5] Sen, A. K.: Social choice theory: a re-examination. *Econometrica*, 45 (1977).

A NEW INTERPRETATION OF CONSISTENT RANKING

In the present article a new interpretation of consistent ranking is given (G-transitive preference-order) that is weaker than the usual transitivity and stronger than quasi-transitivity.

While quasi-transitive order may not always be plotted on a preference-scale, G-transitive order can always be plotted so.

НОВОЕ ТОЛКОВАНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО УПОРЯДОЧЕНИЯ

В статье дано такое новое толкование последовательного упорядочения (G-транзитивный порядок), которое слабее *обычной* транзитивности и сильнее *квази*-транзитивности.

В то время как квази-транзитивность не во всех случаях может быть представлена на шкале упорядочений, то G-транзитивная последовательность поддается такому представлению.

BÁRÁNY IMRE—FIALA TIBOR

Többgépes ütemezési problémák közel optimális megoldása

1. Bevezetés

A következő problémával foglalkozunk. Legyen adva m gép és n munkadarab. Minden munkadarabot minden gépen meg kell munkálni, ismert az i-edik munkadarab megmunkálásához szükséges idő a j-edik gépen: t_{ij}. Egy munkadarab egyszerre csak egy gépen lehet, és egy gépen sem lehet egyszerre két munkadarabot megmunkálni. Az i-edik munkadarab megmunkálása a j-edik gépen nem szakítható meg (minden i-re és j-re). Ezután egy ütemezést úgy lehet megadni, hogy definiálunk bizonyos τ_{ij} kezdési időket az i-edik munkadarabra a j-edik gépen, a befejezési idő ekkor $\tau_{ij} + t_{ij}$ lesz. A fenti feltételek azt jelentik, hogy az $I_{ij} = (\tau_{ij}, \tau_{ij} + t_{ij})$ intervallumok bármely rögzített $i = 1, 2, \ldots, n$, illetve bármely rögzített $j = 1, 2, \ldots m$ mellett páronként diszjunktak. Az a cél, hogy az utolsó befejezési idő, $\max\limits_{i,j}(\tau_{ij} + t_{ij})$ minimális legyen. Ez az *open shop* feladat.

A *flow shop* feladatnál van még egy megszorítás: minden munkadarabot először az első, aztán a második, ... végül az m-edik gépen kell megmunkálni.

Cikkünket a következőképpen tagoltuk. A második rész tartalmazza a flow shop feladatra vonatkozó tételeinket és megjegyzéseket, a harmadik az openshop problémára vonatkozókat. A negyedik részben a bizonyításokat adjuk meg, itt szerepel annak a három lemmának a kimondása és igazolása is, amelyekre a bizonyításokban szükség lesz.

2. A flow shop feladat

A flow shop feladat két gép esetén egyszerűen megoldható (JOHNSON 1954), a Johnson-féle algoritmus lépésszáma $O(n \cdot \log n)$. Három vagy több gép esetén azonban a feladat NP-teljes (GAREY, JOHNSON, SETHI 1976), még abban az esetben is, ha a bemenő adatok hosszát a $[t_{ij}]$ mátrix helyett a $\sum\limits_i \sum\limits_j t_{ij}$ mennyiség segítségével mérjük. Emiatt nincs remény arra, hogy $m \geq 3$ esetén a flow shop feladatot effektív algoritmus segítségével teljes általánosságban meg lehessen oldani. Ez teszi indokolttá olyan algoritmusok keresését, amelyek valamilyen értelemben közelítőleg optimális megoldást szolgáltatnak. Ilyen algoritmusokat, vagy heurisztikus eljárásokat többen vizsgáltak már (PALMER 1965, CAMPBELL 1970, FEJES 1974, GRAHAM, LAWLER, LENSTRA, RINNOOY KAN 1979). Mi is megadunk egy közel optimális algoritmust. Eredményünk ismertetéséhez szükségünk lesz néhány fogalom és jelölés bevezetésére.

Egy ütemezést permutáció szerintinek nevezünk, ha a munkadarabok sorrendje minden gépen ugyanaz. Ez a sorrend az 1, 2, ..., n számok egy π permutációjával adható meg. Közismert (TANAJEV, SKURBA 1975), hogy két és három gép esetén az optimális ütemezések között van permutáció szerinti, négy vagy több gép esetén viszont ez általában nem igaz. Megjegyezzük, hogy egy π permutáció még nem határoz meg egyértelműen egy ütemezést, azonban a π permutáció szerinti ütemezések közül könnyű kiválasztani a legrövidebb átfutási idejűt. Legyen ennek átfutási ideje $T(\pi)$. Az optimális átfutási időt T_{opt}-tal jelöljük. Legyen továbbá

$$K = \max_{i,j} t_{ij},\ M_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} \quad (j = 1, \ldots, m),$$
$$M = \max_j M_j.$$

Világos, hogy $M \leq T_{\mathrm{opt}} \leq T(\pi)$ minden π permutáción.

1. *tétel.* Létezik olyan π permutáció, melyre

$$M \leq T_{\mathrm{opt}} \leq T(\pi) \leq M + m(m-1)K.$$

Ez a permutáció megadható egy $O(n^2m^3)$ lépésszámú algoritmussal.

Ezt a tételt a következő geometriai eredményből fogjuk levezetni.

2. *tétel.* Legyen adva egy olyan $V \subset R^d$ vektorhalmaz, hogy $||v|| \leq 1$ minden $v \in V$ esetén és $\sum_{v \in V} v = 0$. Ekkor V elemei felírhatók egy $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sorrendben úgy, hogy

$$\max_{1 \leq k \leq n} \left|\left| \sum_{i=1}^{k} v_i \right|\right| \leq d.$$

Ez a sorrend megadható egy $O(n^2m^3)$ lépésszámú algoritmussal.

Itt $||\ \ ||$ valamilyen R^d-beli normát jelöl, az 1. tételben a maximum normára lesz szükségünk. A 2. tétel azt mondja ki, hogy tetszőleges, legfeljebb egységnyi hosszúságú d-dimenziós vektorokból álló zárt töröttvonal átendezhető úgy, hogy az átrendezett töröttvonal teljes egészében benne fekszik a $C(d)$ sugarú gömbben, ahol $C(d)$ a V-től (és annak elemszámától) független konstans.

Az 1. tétel lényege az, hogy megadható — méghozzá polinomiális algoritmussal — egy olyan permutáció, hogy $T_\pi - T_{\mathrm{opt}} \leq C(m, K)$, ahol a $C(m, K)$ konstans nem függ a munkadarabok számától. Tehát, ha K rögzített és $n \to \infty$, akkor aszimptotikusan optimális ütemezést szolgáltat.

BELOV és SZTOLIN vették észre 1974-ben, hogy egy $T_\pi - T_{\mathrm{opt}} \leq C(m, K)$ típusú becslés következik a vektor-átrendezési tételből. KADEC (1953) egy tétele kimondja, hogy $C(d) \leq 2^d$ az euklideszi normára, ezt felhasználva Belov és Sztolin megmutatta, hogy $C(m, K) \leq 2^{m-1} \cdot (m-1) \cdot K$, algoritmusuk lépésszáma $O(n^m)$. Tőlük függetlenül FIALA 1977-ben szintén megtalálta a két állítás közötti kapcsolatot. 1978-ban SZEVASZTYANOV megmutatta, hogy $C(d) \leq d$ $\big(O(d \cdot 2^d \cdot n^2)$ lépésszámú algoritmussal$\big)$, ebből igazolta, hogy $C(m, K) \leq (m-1) \cdot K$. Tőle függetlenül, ugyancsak 1978-ban BÁRÁNY $C(d) \leq \frac{3(d-1)}{2}$-t kapott egy $O(n^2d^3 + nd^4)$ lépésszámú algoritmussal, ebből $C(m, K) \leq \frac{3}{2}(m-1)^2 \cdot K$ következik. Végül Szevasztyanov és Bárány módszereit továbbfejlesztve GRINBERG és SZEVASZTYANOV igazolták a 2. tételt 1980-ban.

3. Az open shop feladat

Adott S ütemezés esetén átfutási időnek nevezzük, és T_S-sel jelöljük a legelső művelet elkezdésétől a legutolsó befejezéséig eltelt időt. Első célunk az optimális átfutási idő becslése. Jelöléseink egyeznek a flow-shop feladat esetén látottakkal, tehát

$M_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij}$, a j-edik gépen elvégzendő műveletek összideje;

$L_i = \sum_{j=1}^{m} t_{ij}$, az i-edik munkadarab megmunkálásához szükséges összidő;

$$M = \max_j M_j$$

$$L = \max_i L_i .$$

Tetszőleges S ütemezés esetén a T_S átfutási időre nyilvánvalóan érvényes az alábbi becslés

$$T_S \geq \max(M, L). \tag{1}$$

Eszerint, ha olyan ütemezést tudunk megadni, melynél $T_S = M$ vagy $T_S = L$, akkor ez az ütemezés optimális. Jelöljük a t_{ij} műveleti idők maximumát K-val! Legyen S egy tetszőleges ütemezés, melynél egy gép csak akkor áll, ha nincs olyan művelet, melyhez hozzáfoghatna. Az ilyen ütemezéseket mohó ütemezésnek hívjuk a továbbiakban.

Racsmány Annától számazik a következő fontos megjegyzés (szóbeli közlés):

Állítás. Tetszőleges S mohó ütemezés esetén

$$T_S \leq M + (m-1)K.$$

Bizonyítás. Legyen j annak a gépnek a sorszáma, amelyik utolsóként fejezi be a munkát, és tekintsük a j-edik gép ütemezését jelző idődiagramot az 1. ábrán. Egyik állásidő alatt sem lehetett az i_n munkadarabot megmunkálni. Ennek csak az lehetett az oka, hogy mindegyik állásidő alatt az i_n munkadarab megmunkálás alatt áll valamelyik másik gépen.

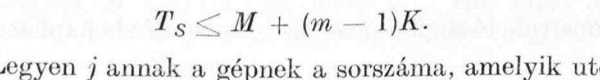
Az állásidők összege legfeljebb

$$\sum_{l \neq j} t_{i_n, l} \leq (m-1)K.$$

Ezért

$$T_S \leq \sum_{i=1}^{n} t_{ij} + (m-1)K \leq M + (m-1)K.$$

2 gép esetén mindig elérhető, hogy az átfutási idő egyezzen az (1) triviális alsó korláttal. Ezt T. Gonzalez és S. Sahni (1976) igazolta egy $O(n)$ műveletigényű algoritmussal.



1. ábra

Könnyű példát mutatni arra, hogy három vagy annál több gép esetén előfordulhat, hogy

$$T_{\text{opt}} > \max(M, L).$$

Azt is tudjuk, hogy három vagy több gép esetén az open shop probléma NP-teljes (GONZALEZ–SAHNI, 1976), ha az input méreteként az $n \cdot m$ szorzatot használjuk. Ezért nincs remény arra, hogy a problémát effektív algoritmusokkal meg lehessen oldani teljes általánosságban. Az átfutási idő alsó és felső becslése azt mutatja, hogy ha $M > L$, akkor minden mohó ütemezés közeloptimális eredményt ad. Cikkünkben azt fogjuk megmutatni, hogy ha M elég nagy, akkor az optimális ütemezés is megadható effektív algoritmusokkal. Ezt állítja a következő

3. *tétel*. Minden m-re van olyan $c(m)$ konstans, hogy

$$M \geq c(m)K \text{ esetén } T_{\text{opt}} = M. \tag{2}$$

Természetesen az a cél, hogy minél kisebb $c(m)$-re tudjunk olyan algoritmust adni, amelyik M átfutási idejű optimális ütemezést ad.

Jelöljük $c_{\min}(m)$-mel azoknak a $c(m)$ konstansoknak a minimumát (infimumát), melyekre (2) érvényes. Ekkor érvényesek a következő tételek.

4. *tétel*.

$$c_{\min}(m) \leq m^2 + 2m - 1,$$

és $M \geq (m^2 + 2m - 1)K$ esetén $O(n^2m^3)$ lépésben adható olyan S optimális ütemezés, melyre

$$T_S = M.$$

A 4. tételt a 2. tételből fogjuk levezetni az 1. tétel bizonyításához analóg konstrukcióval.

Nehezebb konstrukció segítségével élesebb becslés is kapható $c_{\min}(m)$ nagyságrendjére.

5. *tétel*.

$$c_{\min}(m) \leq (16\, m \log_2 m + 21\, m)K,$$

és $M \geq (16\, m \log_2 m + 21\, m)K$ esetén $O(nm^3)$ lépésben adható olyan S optimális ütemezés, melyre

$$T_S = M.$$

Világos, hogy a 3. tétel triviálisan adódik akár a 4. akár az 5. tételből.

Az 5. tétel algoritmikus bizonyításának magvát az alábbi eredmény képezi. Jelöljünk $G = (V, E)$-vel egy páros gráfot, ahol $V = A \cup B$ a pontok halmaza és $E \subset A \times B$ az élek halmaza. Tetszőleges $S \subset E$, $x \in V$ esetén az x pontra illeszkedő élek halmaza legyen $H(x, S)$. Ha $\lambda : E \to R$ egy adott súlyfüggvény, akkor legyen

$$\lambda(x, S) = \sum_{e \in H(X,s)} \lambda(e).$$

6. *tétel*. Legyen $G = (V, E)$ egy páros gráf, $V = A \cup B$, $E \subset A \times B$ és tegyük fel, hogy minden A-beli pont foka páros. Legyen adott egy $\lambda : E \to R^+$ súlyfüggvény, amelyre

$$\lambda(e) \leq K \quad (e \in E).$$

Ekkor $O(|E| \cdot \min(|A|, |B|))$ lépésben megadható az éleknek egy $E = E_1 \cup E_2$ partíciója úgy, hogy

$$x \in A \text{ esetén} \qquad |H(x, E_1)| = |H(x, E_2)| = \frac{1}{2} |H(x, E)|,$$

$$x \in B \text{ esetén} \qquad \left|\lambda(x, E_1) - \frac{1}{2}\lambda(x, E)\right| \leq K,$$

$$\text{és} \qquad \left|\lambda(x, E_2) - \frac{1}{2}\lambda(x, E)\right| \leq K.$$

Ezt a tételt nem fogjuk bizonyítani, mert a bizonyítás elég hosszadalmas (lásd FIALA 1979).

4. Bizonyítások

Szükségünk lesz három lemmára.

1. *lemma.* Legyen x^0 az

$$\begin{aligned} \langle a_i, x\rangle &= b_i \quad (i \in I), \\ \langle a_j, x\rangle &\leq b_j \quad (j \in J) \end{aligned} \tag{3}$$

relációkkal adott $H \subseteq R^n$ konvex halmaznak egy extremális pontja, itt I és J véges indexhalmazok. Ekkor x^0-ban legalább $n - |I|$ számú $\langle a_j, x\rangle \leq b_j$ alakú egyenlőtlenség egyenlőségként teljesül.

Bizonyítás. Legyen $B = \{j \in J \mid \langle a_j, x\rangle = b_j\}$. Ha most $|I \cup B| < n$, akkor tekintsük a következő homogén egyenletrendszert ($y \in R^n$):

$$\begin{aligned} \langle a_i, y\rangle &= 0 \quad i \in I, \\ \langle a_j, y\rangle &= 0 \quad j \in B. \end{aligned}$$

Itt n változóra n-nél kevesebb egyenletünk van, tehát létezik nullától különböző $y^0 \in R^n$ megoldás. Ekkor azonban minden elég kis abszolút értékű t-re

$$x^0 + ty^0 \in H,$$

ami ellentmond annak, hogy x^0 H-nak extremális pontja.

2. *lemma.* Legyenek $v_1, \ldots, v_n$ m-dimenziós vektorok, amelyekre $\|v_i\| \leq K$ és $\sum_{i=1}^{n} v_i = v$. Ekkor $O(nm^3)$ lépésben megadható $\{1, \ldots, n\}$-nek egy olyan $S \cup R$ partíciója, hogy

$$\left\|\sum_{i \in S} v_i - \frac{1}{2} v\right\| \leq \frac{n}{2} K \text{ és } \left\|\sum_{i \in R} v_i - \frac{1}{2} v\right\| \leq \frac{n}{2} K.$$

Bizonyítás. Tekintsük a

$$P = \left\{x \in R^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} x_i v_i = \frac{v}{2},\ 0 \leq x \leq 1\right\}$$

poliédert. Ez a poliéder nemüres, mert $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right) \in P$, legyen x^* a P-nek egy extremális pontja. Az 1. lemma szerint $x_i^* = 0$ vagy $x_i^* = 1$ legfeljebb m koordináta kivételével. Legyen

$$A = \{i \mid x_i^* = 1\},$$
$$B = \left\{i \mid 1 > x_i^* > \frac{1}{2}\right\},$$
$$C = \left\{i \mid \frac{1}{2} \geq x_i^* > 0\right\}.$$

Legyen továbbá $S = A \cup B$ és $R = \{1, \ldots, n\} \setminus S$. Ekkor

$$\sum_{i \in S} v_i - \frac{v}{2} = \sum_{i \in S} v_i - \sum_{i=1}^{n} x_i^* v_i = \sum_{i \in B} (1 - x_i^*) v_i + \sum_{i \in C} (-x_i^*) v_i .$$

B és C együttes elemszáma legfeljebb m, az $1 - x_i^*$ $(i \in B)$ és $-x_i^*$ $(i \in C)$ együtthatók abszolú értéke legfeljebb $\frac{1}{2}$, tehát

$$\left\| \sum_{i \in S} v_i - \frac{1}{2} v \right\| \leq \frac{m}{2} K .$$

Másrészt

$$\sum_{i \in R} v_i - \frac{1}{2} v = - \left(\sum_{i \in S} v_i - \frac{1}{2} v \right),$$

tehát a lemma másik állítása is teljesül. Az x^* extremális pont előállításához legfeljebb n-szer kell egy (3) alakú egyenletrendszert megoldani. Egy megoldás pl. *Gauss*-algoritmussal $O(m^3)$ lépést igényel, így a teljes lépésszám $O(nm^3)$.

3. *lemma*. Legyen $G = (V, E)$ páros gráf, $V = A \cup B$, $E \subseteq A \times B$, $|B| = m$, $|A| = s$. Tegyük fel, hogy a $\lambda : E \to R^+$ súlyfüggvényre $\lambda(e) \leq K$ (minden $e \in E$-re). Legyen továbbá $2^{k-1} < m \leq 2^k = m'$. Ekkor $O(s \cdot m \cdot \log_2 m \times \times \min(s, m))$ lépésben megadható az éleknek egy $E = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_{m'}$ partíciója úgy, hogy

(A) $x \in A$, $1 \leq j \leq m'$ esetén x foka E_j-ben legfeljebb 1,

(B) $x \in B$, $1 \leq j \leq m'$ esetén

$$\lambda(x, E_j) \geq \frac{1}{m'} \lambda(x, E) - 2K ,$$

(C) $x \in B$, $1 \leq i \leq m'$ esetén

$$\left| \lambda(x, \bigcup_{s=1}^{i} E_s) - \frac{i}{m'} \lambda(x, E) \right| \leq K \log m' .$$

Bizonyítás. Először azzal az esettel foglalkozunk, mikor $m = m' = 2^k$, ebből az általános eset egyszerűen következik majd. Először az E élhalmazt a 6. tétel szerint felbontjuk $E^0 \cup E^1$ alakban, ekkor

$x \in A$, $i = 0, 1$ esetén x foka E^i-ben 2^{m-1}, és

$x \in B$, $i = 0, 1$ esetén $\left| \lambda(x, E^i) - \frac{1}{2} \lambda(x, E) \right| \le K$.

Ha most $i_1 = 0, 1$; $i_2 = 0, 1$; $\ldots$ $i_s = 0, 1$ $(s < K)$ $E^{i_1 i_2 \ldots i_s}$ már értelmezve van úgy, hogy

$x \in A$ esetén x foka $E^{i_1 \ldots i_s}$-ben 2^{m-s}, és

$$x \in B \text{ esetén } \left| \lambda(x, E^{i_1 \ldots i_s}) - \frac{1}{2} \lambda(x, E^{i_1 \ldots i_{s-1}}) \right| \le K,$$

akkor megint a 6. tétel szerint $E^{i_1 \ldots i_s}$-et fel lehet bontani két diszjunkt $E^{i_1 \ldots i_s 0}$; és $E^{i_1 \ldots i_s 1}$ részre úgy, hogy

$x \in A$, $i = 0, 1$ esetén x foka $E^{i_1 \ldots i_s i}$-ben 2^{m-s-1} és

$$x \in B,\ i = 0, 1 \text{ esetén } \left| \lambda(x, E^{i_1 \ldots i_s i}) - \frac{1}{2} \lambda(x, E^{i_1 \ldots i_s}) \right| \le K.$$

Ezt a konstrukciót elvégezve $s = 1, 2, \ldots, k - 1$-re $E^{i_1 \ldots i_k}$ $(i_1 = 0, 1; \ldots i_k = 0, 1)$ értelmezve van.

Legyen $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, ekkor $j - 1$ diadikus alakja:

$$j - 1 = 2^k \left(\frac{i_1}{2} + \frac{i_2}{4} + \ldots + \frac{i_k}{2^k} \right), \text{ ahol } i_s = 0 \text{ vagy } 1.$$

Ezzel megadjuk az E_j halmazt, legyen

$$E_j = E^{i_1 \ldots i_k}.$$

A konstrukcióból azonnal adódik, hogy az E_j halmazok páronként diszjunktak és

$$x \in A \text{ esetén } x \text{ foka } E_j\text{-ben } 1.$$

t szerinti indukcióval könnyen igazolható, hogy $x \in B$ és $t = 1, 2, \ldots, k$ esetén

$$\left| \lambda(x, E^{i_1 \ldots i_t}) - \frac{1}{2^t} \lambda(x, E) \right| \le 2K.$$

Speciálisan $t = k$ mellett

$$x \in B,\ 1 \le j \le m \text{ esetén } \lambda(x, E_j) \ge \frac{1}{m} \lambda(x, E) - 2K.$$

Végül legyen $l \in \{1, \ldots, m\}$ és $l - 1$ diadikus alakja

$$l - 1 = 2^k \left(\frac{i_1}{2} + \frac{i_2}{4} + \ldots + \frac{i_n}{2^k} \right).$$

Ha most $x \in B$, akkor

$$\left| \lambda(x, \bigcup_{j=1}^{l} E_j) - \frac{l}{m} \lambda(x, E) \right| = \left| \sum_{t=1}^{k} i_t (\lambda(x, E^{i_1 \ldots i_t}) - \frac{1}{2^t} \lambda(x, E)) \right| \le$$
$$\le kK = K \cdot \log_2 m.$$

Ezzel a (C) tulajdonságot is ellenőriztük, tehát kész vagyunk az $m = m'$ esettel.

Legyen tehát $m < m'$. Egészítsük ki a B halmazt $m' - m$ új ponttal, és ezzel a bővebb halmazzal és az eredeti A-val képezzünk egy teljes páros gráfot! Az új éleken λ-t nullának definiálva azonnal adódik a lemma állítása az eddig bizonyítottak alapján. A lépésszám becslését a 6. tétel lépésszámából kapjuk, hiszen a 6. tétel algoritmusát $\log_2 m'$-ször kell alkalmaznunk.

A 2. tétel bizonyítása (*Grinberg–Szevasztyanov*). Indukció segítségével megkonstruáljuk a $V_d \subset V_{d+1} \subset \ldots \subset V_n = V$ halmazokat és a $\lambda_i : V_i \to R^1$ számokat úgy, hogy

$$|V_i| = i, \quad 0 \leq \lambda_i(x) \leq 1 \ (\forall i \text{ és } \ \forall x \in V_i\text{-re}),$$

$$\sum_{x \in V_i} \lambda_i(x) = i - d \ (\forall i),$$

$$\sum_{x \in V_i} \lambda_i(x) x = 0 \qquad (\forall i).$$

Az indukciót $i = n$-nel kezdjük és visszafelé megyünk. $\underline{i = n}$: Legyen $V_n = V$ és $\lambda_n(x) = \dfrac{n-d}{n}$ $(\forall x \in V_n\text{-re})$. $\underline{i+1 \to i}$: Tekintsük azokat a $(\mu(x) \mid x \in V_{i+1})$ vektorokat, amelyek kielégítik a következő lineáris rendszert:

$$0 \leq \mu(x) \leq 1 \quad (x \in V_{i+1}),$$

$$\sum_{x \in V_{i+1}} \mu(x) = i - d,$$

$$\sum_{x \in V_{i+1}} \mu(x) x = 0.$$

A megoldáshalmaz konvex és kompakt, továbbá nemüres, mert például

$$\mu(x) = \frac{i-d}{i+1-d} \lambda_{i+1}(x)$$

hozzátartozik. Legyen $\mu^0(x)$ a megoldáshalmaz egy csúcsa. Állítjuk, hogy $\mu^0(x) = 0$ valamely $x \in V_{i+1}$ esetén. Ellenkező esetben ugyanis $\mu^0(x) > 0$ minden $x \in V_{i+1}$-re, a lemma miatt $\mu^0(x) = 1$ legalább $(i+1) - (d+1) = i - d$ darab $x \in V_{i+1}$-re. Ebből viszont $\sum_{x \in V_{i+1}} \mu^0(x) > i - d$ következne. Tehát valamely $x^0 \in V_{i+1}$-re $\mu^0(x^0) = 0$. Legyen most $V_i = V_{i+1} \setminus \{x^0\}$ és $\lambda_i(x) = \mu^0(x)$ $(x \in V_i)$.

Ezzel a konstrukciót befejeztük. Világos, hogy az algoritmus lépésszáma $O(n^2 d^3)$.

Legyen most $v_i = V_i \setminus V_{i-1}$, ha $i > d$, $v_1, \ldots, v_d$ pedig a maradék vektorok valamilyen sorrendje. Ekkor ha $k \leq d$

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} v_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{k} \| v_i \| \leq k \leq d.$$

Másrészt, ha $k > d$, akkor

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} v_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{k} v_i - \sum_{x \in V_k} \lambda_k(x) x \right\| = \left\| \sum_{x \in V_k} x - \sum_{x \in V_k} \lambda_k(x) x \right\| =$$

$$= \left\| \sum_{x \in V_k} (1 - \lambda_k(x)) x \right\| \leq \sum_{x \in V_k} (1 - \lambda_k(x)) = k - (k - d) = d.$$

Az 1., 4. és 5.-tétel bizonyításához úgynevezett *redukált feladatot* értelmezünk, melynél mindegyik gépnek ugyanannyit kell dolgoznia. Pontosan fogalmazva az eredeti t_{ij} idők helyett olyan t'_{ij} fiktív időket vezetünk be, melyekre

$$t_{ij} \leq t'_{ij} \leq K, \text{ és}$$

$$\sum_{i=1}^{n} t'_{ij} = M \quad j = 1, 2, \ldots, m\text{-re}.$$

Ilyen t'_{ij} számok $O(mn)$ lépésben megadhatók, hiszen $n \cdot K \geq M$, tehát $M_j < M$ esetén az $M - M_j$ különbséget szét lehet darabolni n részre úgy, hogy az i-edik rész ne haladja meg a $K - t_{ij}$ értéket. Ha az i-edik részt hozzáadjuk a t_{ij}-hez, megkapjuk a kívánt t'_{ij} időket. Ha most a t'_{ij} idők által definiált problémára egy S' ütemezés adott, akkor ebből úgy kaphatunk egy S ütemezést az eredeti problémára, hogy az S' szerinti t'_{ij} hosszúságú időintervallumon belül tetszőleges módon kijelölünk egy t_{ij} hosszúságú intervallumot, és az i-edik munkadarab j-edik műveletét ebben az időintervallumban végezzük el. Ez nyilván megengedett ütemezés, és S átfutási ideje nem hosszabb S' átfutási idejénél. A redukált és az eredeti feladat n, m, M és K paraméterei azonosak, tehát az átfutási időt ezekkel becsülve a kapott becslés az eredeti feladatra is érvényes marad. Ezért az 1., 4. és 5. tétel bizonyítását eleve a redukált feladatra végezzük. A műveleti időket t_{ij}-vel fogjuk jelölni t'_{ij} helyett, és feltesszük, hogy $M_1 = M_2 = \ldots = M_m$.

Az 1. tétel bizonyítása. Az i-edik munkához rendeljük hozzá a

$$v_i = \begin{bmatrix} t_{i1} - t_{i2} \\ t_{i2} - t_{i3} \\ \vdots \\ t_{im-1} - t_{im} \end{bmatrix}$$

$(m-1)$-dimenziós vektort. Világos, hogy $\| v_i \| = \| v_i \|_{\max} \leq K$ és hogy $\sum_{i=1}^{n} v_i = 0$. Tehát a $v_1, \ldots, v_n$ vektorhalmazra alkalmazható a 2. tétel $d = m - 1$-gyel. Az áttekinthető jelölésrendszer kedvéért tegyük föl, hogy a 2. tétel algoritmusa éppen a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sorrendet adja, tehát

$$\max_{1 \leq k \leq n} \| \sum_{1}^{k} v_i \| \leq (m-1)K.$$

Másképp fogalmazva ez azt jelenti, hogy minden $j = 1, \ldots, m-1$ és minden $k = 1, 2, \ldots, n$ esetén

$$-(m-1)K \leq \sum_{i=1}^{k} t_{ij} - \sum_{i=1}^{k} t_{ij+1} \leq (m-1)K.$$

Definiáljuk most a τ_{ij} kezdési időket:

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= 0, & \tau_{i1} &= \tau_{i-1\,1} + t_{i-1\,1}, \\ \tau_{12} &= mK, & \tau_{i2} &= \tau_{i-1\,2} + t_{i-1\,2}, \\ &\vdots \\ \tau_{1j} &= (j-1)mK, & \tau_{ij} &= \tau_{i-1\,j} + t_{i-1\,j}, \\ &\vdots \\ \tau_{1m} &= (m-1)mK, & \tau_{im} &= \tau_{i-1\,m} + t_{i-1\,m}. \end{aligned}$$

Világos, hogy tetszőleges rögzített j esetén az $I_{ij} = (\tau_{ij}, \tau_{ij} + t_{ij})$ intervallumok páronként diszjunktak. Megmutatjuk, hogy ez érvényes tetszőleges rögzített i esetén is. Tegyük fel tehát, hogy $j < j'$, igazolni akarjuk, hogy I_{ij} és $I_{ij'}$ diszjunkt. Ehhez elég megmutatni, hogy $\tau_{ij} + t_{ij} \leq \tau_{ij'}$, ezt viszont elég $j' = j + 1$ esetén igazolni. De akkor

$$\tau_{i\,j+1} - (\tau_{ij} + t_{ij}) = j \cdot mK + \sum_{p=1}^{i-1} t_{p\,j+1} - \left[(j-1)mK + \sum_{p=1}^{i-1} t_{pj} + t_{ij}\right] =$$

$$= mK + \left(\sum_{p=1}^{i-1} t_{p\,j+1} - \sum_{p=1}^{i-1} t_{pj}\right) - t_{ij} \geq mK - (m-1)K - K = 0 .$$

A τ_{ij}-kkel definiált ütemezés tehát megengedett. Egyszerű számolás mutatja, hogy a befejezési idő éppen $M + m(m-1)K$, tehát $\tau(\pi) \leq M + m(m-1)K$.

Az algoritmus lépésszáma a 2. tételből adódik.

A 4. tétel bizonyítása. Olyan Q ütemezést konstruálunk, melynél $T_Q = M$, tehát minden gép megállás nélkül dolgozik és M idő elteltével egyszerre fejezik be a munkát.

Az 1. Tétel bizonyításához hasonlóan alkalmazzuk a

$$v_i = \begin{bmatrix} t_{i1} - t_{i2} \\ \vdots \\ t_{im-1} - t_{im} \\ t_{im} - t_{i1} \end{bmatrix} \in R^m$$

$(i = 1, \ldots, n)$ vektorokra a 2. tétel algoritmusát! A kapott új sorrendet $1, 2, \ldots, n$-nel jelölve $1 \leq k \leq m$ és $j = 1, \ldots, m-1$, illetve $j = m$ esetén

$$-mK \leq \sum_{i=1}^{k} t_{ij} - \sum_{i=1}^{k} t_{ij+1} \leq mK ,$$

illetve

$$-mK \leq \sum_{i=1}^{k} t_{im} - \sum_{i=1}^{k} t_{i1} \leq mK.$$

A munkadarabok sorrendje az egyes gépeken ilyen lesz:

az első gépen:	$1, 2, 3, \ldots$	$\ldots$	$\ldots n-1, n$	
a másodikon:	$i_2 + 1, i_2 + 2, \ldots$	$n, 1, \ldots$	$\ldots$	$,i_2$
a harmadikon:	$i_3 + 1, i_3 + 2, \ldots$	$\ldots$	$n, 1, \ldots$	$,i_3$
$\vdots$				
az utolsón:	$i_m + 1, i_m + 2, \ldots$	$\ldots$	$n, 1, \ldots$	$,i_m.$

Rekurzió segítségével megadjuk az $i_2, i_3, \ldots, i_m$ indexeket. Ez rögtön meg fogja adni az első munkadarab kezdési idejét, az s-edik gépen, τ_s-et. Ugyanis nyilván ($s \geq 2$-re)

$$\tau_s = \tau_{1s} = \sum_{k=i_s+1}^{n} t_{ks}, \tag{4}$$

a további kezdési idők pedig

$$\tau_{is} = \begin{cases} \tau_s + \sum_{k=1}^{i-1} t_{ks}, & \text{ha } i \leq i_s, \\ \sum_{k=i_s+1}^{i} t_{sk}, & \text{ha } i > i_s. \end{cases}$$

Legyen tehát i_2 az a legnagyobb index, melyre

$$\sum_{i=i_2+1}^{n} t_{i2} \geq (m+1)K.$$

Ha már i_s ($s \geq 2$) meg van határozva, akkor (4) alapján τ_s is, és legyen i_{s+1} az a legnagyobb index, melyre

$$\sum_{i=i_{s+1}+1}^{n} t_{i\,s+1} \geq \tau_s + (m+1)K.$$

Könnyen látható, hogy $\tau_s \leq \tau_{s-1} + (m+2)K$ ($s = 2, 3, \ldots, m$ esetén), tehát ha $M \geq (m^2 + 2m - 1)K$, akkor i_s és τ_s jól van definiálva $s = 2, 3, \ldots, m$-re, sőt

$$M \geq \tau_m + (m+1)K.$$

Ezzel $s = 2, 3, \ldots, m$-re definiálva van i_s, tehát az egész ütemezés is.

A $\tau_2, \ldots, \tau_m$ „késleltetések" azt biztosítják, hogy egyik munkadarab se kerüljön egy időben két gépen megmunkálásra. Valóban, legyen i egy tetszőleges munkadarab indexe. Jelöljük s-sel azt a legnagyobb indexet, melyre $\tau_k + \sum_{s=1}^{k} t_{sk} \leq M$. (Ez azt jelenti, hogy $j = 2, \ldots, k$-ra a j-edik gépen az i-edik munkadarab megmunkálása a τ_j időpont után kezdődik, $j = k+1, \ldots, n$-re pedig τ_j előtt.) Azt fogjuk belátni, hogy ekkor

$$\begin{cases} \tau_{i2} \geq \tau_{i1} + t_{i1}, \\ \vdots \\ \tau_{ik} \geq \tau_{i\,k-1} + t_{i\,k-1} \end{cases} \tag{5}$$

és $k < m$ esetén

$$\tau_{i1} \geq \tau_{im} + t_{im}, \tag{6}$$

$$\begin{cases} \tau_{im} \geq \tau_{i\,m-1} + t_{i\,m-1}, \\ \vdots \\ \tau_{i\,k+2} \geq \tau_{i\,k+1} + t_{i\,k+1}. \end{cases} \tag{7}$$

(5) igazolása egyszerű: $2 \leq j \leq k$ esetén

$$\tau_{ij} - \tau_{ij-1} = \tau_j - \tau_{j-1} + \sum_{l=1}^{i-1} t_j - \sum_{l=1}^{i-1} t_{j-1} \geq (m+1)K - mK = K \geq t_{ij-1}.$$

Ugyanígy adódik (7) is. Végül (6) is teljesül, mert

$$\tau_{im} = \sum_{l=i_m+1}^{i-1} t_{lm} = \tau_m - M + \sum_{l=1}^{i-1} t_{lm} \leq$$

$$\leq \tau_m - M + \sum_{l=1}^{i-1} t_{l1} + mK \geq \sum_{l=1}^{i-1} t_{l1} - K = \tau_{il} - K.$$

Beláttuk tehát, hogy a megadott ütemezés ütközésmentes és így optimális. Az algoritmus műveletigénye automatikusan adódik a 2. tételből.

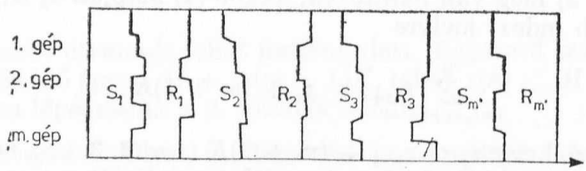
Az 5. tétel bizonyítása. Feltesszük, hogy a gépek számára

$$2^{k-1} < m \leq 2^k$$

teljesül (k természetes szám).

A továbbiakban 2^k-t jelöljük m'-vel. Megjegyezzük, hogy ez az m' az eredeti m-nek kevesebb, mint kétszerese.

Az optimális ütemezéshez tartozó idődiagram jellegét a 2. ábra mutatja. Bevezetve az $S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_{m'} = S$ és $R_1 \cup R_2 \cup \ldots \cup R_{m'} = R$ jelöléseket, az ábrán látható $2m'$ blokkról a következőket tesszük fel:



2. ábra

(a) $S \cup R$ az összes elvégzendő művelet halmazának egy partíciója, azzal a kiegészítéssel, hogy egy munkadarabnak vagy minden művelete S-ben vagy minden művelete R-ben van.

(b) Ha egy munkadarabnak minden művelete S-ben van, akkor minden i-re S_i-ben legfeljebb egy művelete van ($i = 1, 2, \ldots, m'$). Ha egy munkadarab minden művelete R-ben van, akkor mindegyik R_i-hez legfeljebb egy művelete tartozik.

(a) miatt egy S_i-beli és egy R_j-beli művelet különböző munkadarabhoz tartozik, tehát szomszédos blokkok közötti ütközés nem fordulhat elő.

Ha el tudjuk érni, hogy S_j/R_j valamennyi művelete hamarabb fejeződjék be, mint S_{j+1}/R_{j+1} bármelyik művelete elkezdődik ($j = 1, 2, \ldots, m' - 1$), akkor az ütemezés ütközésmentes, és (mivel minden gép megállás nélkül dolgozik) optimális lesz.

Ezt a célt úgy fogjuk elérni, hogy a műveletek halmazát (gépenként) egyenletes rétegekre szedjük szét. M-et pedig olyan nagyra választjuk, hogy egy réteg (blokk) vastagsága révén képes legyen a két szomszédos réteget (időben) elszigetelni.

A konstrukció a következő lépésekből áll:

1. A $v_i = (t_{i1}, t_{i2}, \ldots, t_{im})$ vektorokra alkalmazva a 2. lemma algoritmusát, elkészítjük a munkadarabok halmazának egy $\{1, 2, \ldots, n\} = \bar{S} \cup \bar{R}$ partícióját, úgy, hogy minden j-re ($j = 1, 2, \ldots, m$)

$$\left| \sum_{i \in \bar{S}} t_{ij} - \frac{M}{2} \right| \leq \frac{m}{2} K$$

és

$$\left| \sum_{i \in \bar{R}} t_{ij} - \frac{M}{2} \right| \leq \frac{m}{2} K$$

teljesüljön. (Itt kihasználtuk, hogy $\sum_{i=1}^{n} t_{ij} = M$.)

S-sel jelöljük az $\bar{S}$-beli munkadarabok műveleteinek halmazát, R-rel pedig az $\bar{R}$-beli munkadarabok műveleteinek halmazát.

2. Definiálunk egy $G_S = (V, E)$, $U = A \cup B$, $E = A \times B$ páros gráfot, ahol az A halmaz $|\bar{S}|$ elemű, pontjai az $\bar{S}$-beli munkadaraboknak felelnek meg; a B halmaz m elemű, pontjai a gépeknek felelnek meg. Az i-edik munkadarabnak megfelelő pontból a j-edik gépnek megfelelő pontba vezető élen legyen a λ súlyfüggvény értékre t_{ij}. Analóg módon bevezetjük a G_R páros gráfot, ahol az A halmaz $|\bar{R}|$ elemű, pontjai az $\bar{R}$-beli munkadaraboknak felelnek meg, a konstrukció többi része pedig változatlan.

Ezekre a gráfokra alkalmazva a 3. lemma algoritmusát az S, illetve R halmazt egyaránt m' részre szedjük, azaz

$$S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_{m'} \quad \text{és}$$
$$R = R_1 \cup R_2 \cup \ldots \cup R_{m'}$$

partíciókat készítünk úgy, hogy

(A) Egy $\bar{S}$-beli munkadarab minden művelete különböző S_j-be tartozzon. $\bar{R}$-beli munkadarab minden művelete másik R_j-be tartozzék.

(B) $j = 1, 2, \ldots, m$ és $l = 1, 2, \ldots, m'$ esetén

$$\sum_{\substack{i \\ (i,j)\in S_l}} t_{ij} \geq \frac{M}{2m'} - \frac{5}{2} K$$

$$\sum_{\substack{i \\ (i,j)\in R_l}} t_{ij} \geq \frac{M}{2m'} - \frac{5}{2} K$$

(C) $j = 1, 2, \ldots, m$ és $l = 1, 2, \ldots, m'$ esetén

$$\left| \sum_{\substack{i \\ (i,j)\in S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_l}} t_{ij} - \frac{l}{m'} \sum_{i \in \bar{S}} t_{ij} \right| \leq K \cdot \log_2 m'$$

$$\left| \sum_{\substack{i \\ (i,j)\in R_1 \cup R_2 \cup \ldots \cup R_l}} t_{ij} - \frac{l}{m'} \sum_{i \in \bar{R}} t_{ij} \right| \leq K \cdot \log_2 m'.$$

A (C)-beli egyenlőtlenségek összeadásával

$$\left| \sum_{\substack{i \\ (i,j)\in S_1 \cup R_1 \cup \ldots \cup S_l \cup R_l}} t_{ij} - \frac{l}{m} \cdot M \right| \leq 2K \cdot \log_2 m'$$

adódik. Eszerint az ábrán szaggatott vonallal jelölt választóvonalak ingadozásának mértéke legfeljebb $4K \log_2 m'$. (B) miatt mindegyik réteg vastagsága legalább $\dfrac{M}{2m'} - \dfrac{5}{2} K$. Emiatt az ütközések elkerülésének elégséges feltétele az $\dfrac{M}{2m'} - \dfrac{5}{2} K \geq 4K \log_2 m'$, tehát

$$M \geq (8m' \log_2 m' + 5m')K$$

egyenlőtlenség.

Figyelembe véve, hogy az itt szereplő m' az m-nek legfeljebb 2-szerese, az eredeti m-mel

$$M \geq (16m \log_2 m + 21m)K$$

elegendő.

Az $\bar{S} \cup \bar{R}$ felbontás a 2. lemma szerint $O(nm^3)$ műveletet igényel. A 3. lemma algoritmusát 2-szer alkalmazzuk. Mindkét esetben $|A| = S \leq n$, tehát min $(S, m) \leq m$ miatt a további műveletek lépésszáma $O(nm^2 \log_2 n)$. Ezzel az 5. tételt teljes egészében beláttuk.

(Beérkezett: 1982. január 13-án.)

IRODALOM

BÁRÁNY I.: A vector-sum theorem and its application to improve flow-shop guarantees, *Mathematics of Operations Research*, 1981.

CAMPBELL, H. G., DUDEK, R. A. and SMITH, L. M.: A heuristic algorithm for the n job, m machine sequencing problem, *Management Science* 16 (1970) 630—637.

GAREY, M. R., JOHNSON, D. S. and SETHI, R.: The complexity of flow-shop and job-shop scheduling, *Mathematics of Operations Research* 1 (1976) 117—129.

GONZALES, T., SAHNI, S.: Open shop scheduling to minimize finish time, *J. Assoc. Comp. Mach.* 23 (1976) 665—679.

GRAHAM, R. L., LAWLER, E. L., LENSTRA, J. K., RINNOOY KAN, A. H. G.: Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling: a survey, *Annals of Discrete Math.* 5 (1979) 287—326.

FEJES K.: Flow-shop ütemezések közelítő megoldási módszereinek összehasonlítása, *Számológép* 2 (1974) 5—15.

FIALA T.: Közelítő algoritmus a három gép problémára, *Alkalmazott Matematikai Lapok* 3 (1977) 389—398.

FIALA T.: *Ütemezési algoritmusok* (doktori disszertáció) 1979.

JOHNSON, S. M.: Optimal two- and three-stage production schedules with setup times included, *Naval Res. Log. Quaterly* 1 (1954) 61—68.

PALMER, D. S.: Sequencing jobs through a multi-stage process in the minimum total time — A quick method of obtaining a near optimum, *Operational Research Quarterly* 16 (1965) 101—107.

Белов, И. С.–Столин, Я. Н.: Алгоритм в одномаршрутной задаче календарного планирования, в книге: Мат. экономика и функциональный анализ, Наука, 1974.

Гринберг, В. С.–Севастьянов С. В.: О величине константы Штейница, Функциональный анализ и его приложения 14 (1980), 56–57.

Кадец, М. И.: Об одном свойстве векторных ломаных в n-мерном пространстве, Успехи Мат. Наук 8 (1953), 139–143.

Севастьянов, С. В.: О приближенном решении некоторих задач теории расписаний Дискретный анализ 32 (1978), 66–75.

Танаев, В. С.–Шкурба, В. В.: Введение в теорию расписаний, Наука, 1975.

NEARLY OPTIMUM SOLUTION OF MULTI-MACHINE SCHEDULING PROBLEMS

We deal with flow shop and open shop problems. Since in case of three or more machines both problems are NP complete, only obtaining of a nearly optimum polynomial algorithm may be hoped.

Let the number of work-pieces be n, that of machines m. In case of a flow shop problem Theorem 1 corrects a previous result of *Belov* and *Stolin*. According to this theorem by means of an algorithm of $O(n^2m^3)$ steps such a schedule may be given whose finish time T yields an asymptotically optimum estimation. Proof is based on a theorem of vector rearrangement (Theorem 2) where it is stated that any closed broken line consisting of d-dimensional vectors with unit length at most may be rearranged in such a way that it is placed in a sphere with radius d. Theorem 2 is proved by the method of *Grinberg* and *Sewastianoff*.

In case of an open shop problem not only nearly optimum, but also optimum solution may be obtained. This is discussed more precisely in Theorem 3. In Theorem 4 an algorithm consisting of $O(n^2m^3)$ steps is given which yields an optimum scheduling under certain conditions. By means of a more complicated procedure a more exact estimation can also be given. According to Theorem 5 optimum scheduling may be constructed in $O(nm^3)$ steps under other conditions.

БЛИЗКОЕ К ОПТИМАЛЬНОМУ РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ СОСТАВЛЕНИЯ МНОГОМАШИННОГО ГРАФИКА

Статья посвящена проблемам *flow-shop* и *open-shop*. Поскольку в случае трех и больше машин эти задачи NP-полные, то можно надеяться на получение лишь приближенного оптимального полиноминального алгоритма.

Пусть количество обрабатываемых деталей равно n, машин m. В случае задачи *flow-shop* теорема 1 улучшает более ранний результат Белова и Столина. В соответствии с этим, с помощью алгоритма с последовательностью действий $O(n^2\,m^2)$ можно дать такой график, который дает асимптотически оптимальную оценку на время прохождения Т. Доказательство основано на формуле векторного преобразования (теорема 2), которая говорит, что замкнутая ломаная линия, состоящая из d-мерных векторов произвольной, но не больших одной единицы длины, может быть преобразована так, чтобы помещалась в шаре радиусом d. Доказательство теоремы 2 ведется методом Гринберга и Севастьянова.

В случае задачи *open-shop* можно получить не только близкое к оптимальному, но и оптимальное решение. Это решение дает теорема 3.

В теореме 4 мы имеем алгоритм с такой последовательностью действий, который при определенных условиях может дать оптимальный график. С помощью более сложного метода может быть дана еще более точная оценка. В соответствии с теоремой 5 при других условиях при последовательности действий $O(nm^3)$ может быть составлен оптимальный график.

FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK

FÜSTÖS LÁSZLÓ—MESZÉNA GYÖRGY—SIMONNÉ MOSOLYGÓ NÓRA

A sokdimenziós skálázás egyes újabb módszerei I.

Számos tényezőt figyelembe venni a mérésnél és összehasonlításnál, ez a gyakorlat számára is igen vonzó probléma. A sokváltozós statisztikai vizsgálatokhoz alkalmas induló táblák általában a vizsgált objektumok számos jellemzőre tartalmaznak megfigyelési értékeket. Rendelkezésünkre állnak tehát a sokdimenziós „állapot-térben" a pontok és a közöttük észlelt hasonlóságok, különbözőségek vagy távolságok. A klasszikus skálázás ezután úgy kívánja kijelölni egy tengelyen az objektumok helyét, hogy a származtatott sorrendjük egy egy-dimenziós skálán valamilyen értelemben az eredeti térben fennálló viszonyoknak feleljenek meg. Tágabb értelemben skálázásról beszélünk akkor is, ha a származtatott tér 2, 3 vagy több, de az eredetinél kisebb dimenziószámmal rendelkezik. Szemléletes kép az eredményekhez természetesen csak 3 dimenzióig tartozik, de egyes esetekben az állapottér dimenziószámának számottevő csökkentése is sokat segíthet az összefüggések felismerésében.

A sokváltozós skálázás számos módszerével, vonatkozásával foglalkozik KINDLER—PAPP: Komplex rendszerek vizsgálata (Műszaki Kiadó Bp. 1977) c. könyve, de a SZIGMÁBAN is több tanulmány jelent már meg e témakörből. Cikkünk, amelynek most I. részét közöljük nem törekszik teljességre, nem adja áttekintő összefoglalását sem e területnek. Részletesen foglalkozunk viszont azokkal az újabb, egyre kiforrottabbá váló számítógépes eljárásokkal melyek a hazai köztudatban még szinte teljesen ismeretlenek s a többi sokváltozós módszerrel egyetemben a korszerű statisztikai módszertan ígéretes eszköztárának tekinthetők.

1. Történeti áttekintés[1]

A skálázás első modelljét RICHARDSON dolgozta ki 1938-ban. Arra keresett választ, hogy hogyan lehet a pontok közötti (euklideszi) távolságokból a faktoranalízishez szorosan kapcsolódó módszerrel meghatározni a pontok koordinátáit és a térben ábrát készíteni. Elgondolásainak jelentőségét az adja, hogy Richardson előtt a skálázó módszerek alkalmazói feltételezték a vizsgált terület dimenzióinak az ismeretét. Richardson modellje feloldotta ezt a megkötést, és az alapadatokból a dimenziók ismeretétől függetlenül határozta meg a tengelyekre vonatkozó vetületeket, azaz a koordináták értékeit.

Hasonló eredményeket publikált YOUNG és HOUSEHOLDER 1938-ban, elgondolásukat TORGERSON használta fel és fejlesztette tovább 1954-ben és 1958-ban.

[1] Lásd: FORGÁCSNÉ, KOVÁCS ERZSÉBET: „A sokdimenziós skálázás, mint a matematikai statisztika új módszere" c. doktori értekezés; MKKE 1981, kézirat.

Ezt a munkát számos könyv és tanulmány követte. Az időrendet követve meg kell említenünk COOMBS Adatelméletét (1964), amelyben megtalálható a nem-metrikus sokdimenziós skálázás kezdeti leírása mellett az egyéni preferenciákat feltáró modell is.

Ez a könyv elsősorban a skálázó modellek elméleti és geometriai megalapozásával foglalkozik. 1970 és 1973 között három olyan tanulmány is megjelent, amelyek a módszereknek a piackutatásban való alkalmazhatóságát mutatják be. Természetesen jól használhatják az üzleti és pénzügyi élet más területén dolgozók is az algoritmusok összehasonlítására és a közülük való választásra.

SHEPARD, ROMNEY és NERLOVE kétkötetes munkája (1972) a sokdimenziós skálázás elméletének és alkalmazásainak átfogó bemutatását adja. Az első kötetben a skálázó modellek és módszerek csoportosítása után a nem-metrikus elemzés, az egyéni különbségek vizsgálata és még számos más elméleti kérdés szerepel. A második kötet az alkalmazási lehetőségek széles körét mutatja be. Találunk példát antropológiai, szemantikai vizsgálatokra, valamint a nemzetek közötti különbözőségek elemzésére is.

Az említett könyveken kívül számos cikk jelent meg különböző folyóiratokban. A cikkek egyrésze a skálázás elméleti kérdéseit boncolgatja, más részük gyakorlati problémákat feszeget. SHEPARDnak (1962) olyan két írása jelent meg, amelyben a közelségek elemzését kísérli meg ismeretlen távolság-függvény segítségével. KRUSKAL (1964) pedig az illeszkedés jóságát helyezi vizsgálatai középpontjába, és bevezeti a legkisebb négyzetes monoton regressziót a távolságok és a hasonlóságok közötti kapcsolat becslésére.

GUTTMAN 1968-ban új számítási módszert dolgoz ki a legkisebb dimenziójú tér megtalálására.

Jelentős eredményt publikál CAROLL és CHANG 1970-ben az egyéni különbségek skálázása terén. A sokdimenziós skálázás általánosításaként bevezetik az INDSCAL-nek nevezett módszert, amelyet *Eckart-Young* általánosított eljárásával oldanak meg.

A módszertani és gyakorlati alkalmazási témákról írt cikkek is egymás után jelennek meg a társadalomtudományi, matematikai és statisztikai folyóiratokban.

Az egyéni különbözőségek skálázásával számos szerző foglalkozik. TUCKER és MESSICK (1963) cikkében a különbözőségi mátrixokat csoportosítja, és az egyes clusterek átlagos mátrixait elemzi sokdimenziós skálázással.

MCGEE (1968) a nem-metrikus egyéni különbségeket vizsgálja, és az illeszkedés elégtelensége függvénnyel jellemzi a konfiguráción belüli távolságot. KRUSKAL és CAROLL az illeszkedés elégtelenségének különböző mértékeit határozza meg, és elméleti eredményeket közöl a hatás-függvényről.

WISH (1970) a nemzetek közötti hasonlóságot elemzi INDSCAL-lal.

WISH, DEUTSCH és BIENER (1970) az INDSCAL alkalmazásával kimutatták, hogy a nemzetek közötti hasonlóság megítélésénél a dimenziók súlyozásának egyéni különbségei szisztematikusan függnek az egyén politikai beállítottságától, valamint attól, hogy mennyit tud az egyén az adott nemzetről, milyen országból származik és a neme is befolyásolja döntését.

CAROLL (1971) az egyéni különbségeknek az észlelésben és a preferenciákban játszott szerepét tárgyalja.

TUCKER (1972) olyan módszert dolgoz ki az egyéni különbségek elemzésére, amely az INDSCAL általánosítása, de hiányzik belőle a dimenzionális egyediség tulajdonsága.

Caroll és Wish (1973) a háromutas sokdimenziós skálázás modelljeit és módszereit bemutató cikkében részletesen bemutatja az IDIOSCAL-nak nevezett modellt, amelyben az euklideszi távolság általánosítása szerepel, és speciális esetként magába foglalja az INDSCAL-t is.

A módszertani kérdések között olyanok szerepelnek, mint a távolságok súlyozása (McGee, 1966), metrikus, azaz számszerű információk származtatása nem-metrikus adatokból (Shepard, 1966) és az illeszkedés milyenségének vizsgálata.

A gyakorlati alkalmazások között megtaláljuk a Morse jelekhez hasonló jelzések észlelését elemző modellt (Wish, 1967), valamint Caroll és Chang (1972) cikkét, amelyben az 1960-as amerikai elnökválasztást elemzik sokdimenziós skálázással.

Megjelentek olyan cikkek is, amelyek az alakzat pontosságát, a megfelelő dimenziók meghatározását, valamint a véletlen hibát vizsgálják pl. Monte Carlo módszerrel (Klahr, 1969, Stenson és Knoll 1971).

Young (1970) a nem-metrikus skálázással nyerhető metrikus információt határozza meg. A tényleges és a megállapított távolságok közötti korrelációs együtthatót a „metrikus meghatározottság mértékének" tekinti és a kapott alakzat pontosságát becsli ennek segítségével.

2. A sokdimenziós skálázás kapcsolata a sokváltozós statisztika egyes fejezeteivel

Már a bevezetésben mondottakból is felismerhető, hogy a tágabb értelemben vett sokdimenziós skálázás mind a faktoranalízissel (l. SZIGMA: 1970. III. évf. 2. sz.) mind pedig a clusteranalízissel (l. SZIGMA: 1977. X. évf. 3. sz.) több vonatkozásban is kapcsolatba hozható. Az alábbiakban e kérdést kissé részletesebben vizsgáljuk meg.

Beszéljünk először a skálázás és a cluster analízis viszonyáról. Alapjaikat tekintve mindkét eljárás a vizsgált rendszer — az állapottérben elhelyezkedő pont-konfiguráció —, struktúrájának a felismerését tűzi ki céljául. Így jól használhatók kölcsönösen egymás eredményeinek ellenőrzésére, stabilitás vizsgálatokra, egy-egy probléma megközelítésére több oldalról. A járt út azonban már különböző.

A skálázás esetében az egyedek közötti hasonlósági vagy különbözőségi mérőszámok az induló adatok. Az eredmények egy-két-három, esetleg több dimenzióbeli pontkoordináták, azaz egy térbeli ábra. Egy dimenzió esetén egy skála, két és három dimenzió esetén egy szemléletesen értékelhető pontfelhő, a magasabb dimenziókban aztán már a szemlélet előnye elmarad. (Természetesen az induló hasonlóságok vagy különbözőségek a szokásos sokváltozós induló tábláknak, megfigyeléseknek, jellemzőknek a felhasználásával is előállíthatók.)

A cluster analízis ugyanabból az induló táblából változatlan dimenziószám mellett állapítja meg — számos különböző technikával —, az egyedeknek sok szempont szimultán figyelembevételével kialakítható, relatíve homogénebb rész-halmazait, fürtjeit, clustereit. A hierarchikus technikák esetében aztán az eredményeket egy jól kezelhető két dimenziós ábrán, a dendogramon szemlélteti.

Mindennemű alkalmazás esetében feltétlenül szem előtt tartandó, hogy mind a több tucat cluster-technika, mind a nagy számú skálázó eljárás esetenként egymástól lényegesen eltérő eredményeket adhat. Az eljárások és az egész problémakör mélyebb átgondolása esetén e jelenség gyorsan természetessé válik. A fejlődés jelenlegi fokán éppen a leginkább adekvát eljárás kiválasztása okozza a legnagyobb nehézségeket. Különösképpen igaz tehát, hogy a skálázó és clusterező megfontolások igen sok körülmény miatt adhatnak kisebb-nagyobb mértékben eltérően interpretálható eredményeket. Kimondhatjuk az egész területre leginkább jellemző egyik ajánlást: mindenfajta mechanikus alkalmazást messzemenően kerüljünk el. Ugyanakkor az eltérő eredmények jellege, ismerve a különböző technikák sajátosságait, értékes információkat hordozhat.

Egy külön is megemlítendő probléma a következő. A skálázó eljárások optimalizálási feladatainak megoldása gyakran csak pl. lokális minimumok elérését biztosítja. A megoldás hatékonyságának, a globális optimum megtalálásának, esetleg valószínűsítésének további vizsgálata gyakran sok újabb kérdést vet fel.

A két eljárás eredményeinek praktikus összehasonlítására jó lehetőséget ad a következő gondolatmenet. Két dimenziós skálázást végezve a kapott pontábrában alkalmasan megjelöljük az egy clusterba tartozó pontokat. Az esetleges összhang a két megközelítés között igen szemléletesen azonnal felmérhető.

Foglalkozzunk most a skálázás és a faktoranalízis eljárásainak összevetésével.

A sokdimenziós skálázásnak az a tulajdonsága, hogy kis dimenziószámú térben állít elő az eredeti állapottér különbözőségi (távolság) viszonyait tükröző pont konfigurációt, közvetlenül hozható kapcsolatba a faktoranalízissel. A skálázás pontábrájába elhelyezhető tengelyek, fő-irányok, a köréjük csoportosuló jellemzők, illetve objektumok képe a lényeg kiemelésének gondolatával azonosítható. A faktoranalízis is igyekszik csökkenteni a dimenziószámot, új — fiktív — tengelyeket határoz meg. Ezek értelmezése éppen úgy igen érdekes, de sok problémát felvető tevékenység, mint a skálázás esetében.

Az induló adatrendszerek itt is lehetnek azonosak, de részben el is térhetnek egymástól. A skálázás az egyedek különbözőségeit tartalmazó táblából indul. E mértéktől azt kívánjuk meg, hogy kisebb távolsághoz kisebb, nagyobb távolsághoz nagyobb érték tartozzon. A faktoranalízis a megfigyelések korrelációs mátrixát tekinti induló táblának, s így a megkötések szigorúbbak az előbbieknél. (Gondoljunk a korrelációs együtthatónak két vektor skalár szorzataként történő értelmezésére).

Érdemes felhívni a figyelmet a két eljárás logikai gondolatmenete közötti rokonságra. A sokdimenziós térben keresett pont-koordináták meghatározásánál mindkét esetben sajátvektorok és sajátértékek számításán át vezet az út. A faktoranalízisnél a korrelációs mátrix reprodukálása, a skálázásnál a különbözőségek és a távolságok egymásnak való minél jobb megfeleltetése a cél. Egyik esetben sincs azonban a cél mindenek elé helyezve. Mindkét eljárás azt a minimális dimenziószámú teret keresi, melyben a dimenziószám csökkenéséből eredő előny még kiegyenlíti a reprodukálásban, illetve megfeleltetésben elszenvedett veszteséget. A faktoranalízisnél minimalizáljuk a faktorszámot s maximalizáljuk a kommunalitásokat, a skálázásnál a különbözőségek — távolságok illeszkedését mérő különböző célfüggvények minimalizálása megy végbe.

Ígéretes lehetőségeket kínál a két eljárás összekapcsolására a skálázás eredmény-ábrájának a faktoranalitikus eredményekkel összevetett elemzése. Célunk itt a két oldalú közelítés felhasználásával a pont ábrában elhelyezhető tengelyek végső irányának és értelmezésének minél körültekintőbb megállapítása.

A két eljárás közötti kapcsolat fordított irányban is igen gyümölcsözően hasznosítható. Köztudomású, hogy a faktoranalízis gondolatmenete szigorúan kapcsolódik a linearitás problémaköréhez. Ezért ha a vizsgált változók között erősen nem-lineáris összefüggések vannak, a faktoranalízis eredményeként kényelmetlen, sok dimenziós megoldáshoz juthatunk. A skálázó eljárások alacsony dimenziós megoldáshoz juthatunk. A skálázó eljárások alacsony dimenziószámú megoldásai ilyenkor sokat segíthetnek az összetett törvényszerűségek felismerésében.

3. Nem metrikus módszerek

A sokdimenziós skálázás feladata a minimális dimenziószámú térben olyan ponthalmaz meghatározása, amelyben az output térbeli távolságok monoton függvényei az input rendszer elemei közötti különbözőségeknek. Teljesül a következő összefüggés:

ha $\delta_{ij} < \delta_{kl}$, akkor $d_{ij} \leq d_{kl}$,

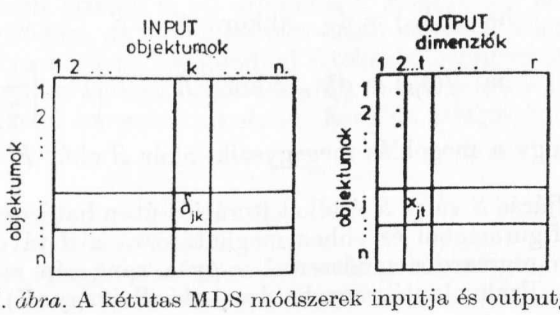
ahol δ_{ij}, δ_{kl} a megfelelő objektumok közötti különbözőségeket (input)

d_{ij}, d_{kl} a megfelelő objektumok közötti távolságokat jelenti (output).

Az ilyen *gyenge monotonitási* kritériumot kielégítő eljárásokat nem metrikus módszereknek nevezzük.

3.1. *A MINISSA modell*

Legyen adott n objektumra (megfigyelési egységre) a különbözőségeket kifejező $n \times n$-es szimmetrikus mátrix (δ). Az eljárás kétutas input mátrixból kiindulva, a hasonlósági vagy különbözőségi mértékek alapján határozza meg az adott feltételt kielégítő minimális dimenziószámú térre vonatkozó eredmény mátrixot. A kétutas (two-way) módszerek input és output mátrixát mutatja be az 1. sz. ábra. Az algoritmus az n objektumnak megfelelő pont koordinátáit keresi az r-dimenziós térben ($r < n$), olyan feltételek mellett, hogy a pontok közötti távolságok sorrendisége megegyezzen a különbözőségek sorrendjével.



1. ábra. A kétutas MDS módszerek inputja és outputja

Az objektumok különbözőségeit jelölje δ_{jk} $(j, k = 1, \ldots, n)$; ez lehet például egyszerű rangszám is, amely 1-től $n\,(n-1)/2$-ig veheti fel értékeit.

Az output pontok koordinátáit jelölje x_{jt}, $t = 1, \ldots, r$; két pont közötti távolság a következő:

$$d_{jk} = \left\{ \sum_{t=1}^{r} | x_{jt} - x_{kt} |^p \right\}^{1/p}.$$

Ha $p = 2$, az ismert euklideszi távolságot kapjuk.

A célfüggvényt *Limgoes* és *Roskam* a következőképpen definiálta:

$$S = \sqrt{\frac{\sum\limits_{jk} \{d_{jk} - f(\delta_{jk})\}^2}{\sum\limits_{jk} d_{jk}^2}},$$

ahol $f(\delta_{jk})$ a δ_{jk} különbözőségi indexnek monoton függvénye, vagyis bármely $\delta_{jk} > \delta_{il}$ esetén $f(\delta_{jk}) > f(\delta_{il})$.

Minél nagyobb S értéke annál rosszabb az output pontábra és az f függvény illeszkedése az adatrendszerre.

Az eltérések mérésére más mértéket is alkalmaznak, a *Guttman*-féle K-együtthatót;

$$K = 1 - \frac{\left\{\sum\limits_{jk} d_{jk}\, f(\delta_{jk})\right\}^2}{\sum\limits_{jk} d_{jk}^2 \sum\limits_{jk} \left(f(\delta_{jk})\right)^2}$$

A MINISSA modellben az $f(\delta_{jk})$ függvény kétféle módon határozható meg:

a) a *Kruskal*-féle monoton regressziós eljárással $(\hat{d}_{jk})$

b) a *Guttman*-féle rang-kép eljárással (d_{jk}^*).

A megfelelően megválasztott kezdeti értékekből kiindulva keresi az algoritmus a pontoknak azt a konfigurációját, amely mellett a célfüggvény értéke minimális.

Belátható a

$$\sum_{jk} d_{jk}(d_{jk} - \hat{d}_{jk}) = 0$$

$$\sum_{jk} d_{jk}^2 = \sum_{jk} (d_{jk}^*)^2$$

összefüggések felhasználásával, hogy az S és K együttható értéke között a következő relációk érvényesek:

$$\text{ha} \quad f(\delta_{jk}) = \hat{d}_{jk} \quad \text{akkor} \quad K = S$$

$$\text{ha} \quad f(\delta_{jk}) = d_{jk}^* \quad \text{akkor} \quad K = S\left(1 - \left(\frac{1}{2}S\right)^2\right)$$

Ez azt jelenti, hogy a megoldás megegyezik, akár S akár K minimalizálását végezzük el.

A MINISSA eljárás S vagy K értékét iterációs-úton határozza meg. Kiindul egy kezdeti konfigurációból és ehhez meghatározza a d távolságokat, majd vagy a monoton regressziós módszerrel vagy a rang-kép módszerrel állítja elő $f(\delta)$ értékeit. Ezek alapján meghatározható S (vagy K) értéke. Ezután az algoritmus olyan x értéket keres, amelyik jobb illeszkedést ad $f(\delta)$-hoz. Az iteráció a második lépésben az új konfigurációnak megfelelő távolságértékek alapján újra számítja S értékét. Az eljárás addig folytatódik amíg S értéke adott korlát alá nem esik, vagy értéke már nem változik az egyes lépések során.

A kezdeti konfiguráció a következő mátrix (C) elemeivel határozható meg: [l. részletesebben a 4.2. pontban]

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 + \sum\limits_j \varrho_{ij}/l & i = j \\ 1 - \varrho_{ij}/l & i \neq j \end{cases}$$

ahol: $l = n(n-1)/2$

ϱ_{ij} a δ_{ij} különbözőségek rangszáma.

A kezdeti pontok meghatározásához csak az adatok sorrendiségét használjuk fel.

Az iteráció következő lépéseiben a „legmeredekebb lejtő" módszert alkalmazzuk, ahol a pontok koordinátáit a gradiens módszer alapján változtatjuk:

$$x_{jt}^{(p+1)} = x_{jt}^{(p)} - \alpha_p \left\{ \frac{\partial S}{\partial x_{jt}} \right\}^{(p)},$$

ahol α_p optimálisan választott lépéshossz,

p az iterációs lépés sorszáma.

3.2. *Monoton regressziós eljárás*

A *Kruskal*-féle algoritmus $\hat{d}$ értékeinek olyan halmazát keresi, amely monoton függvénye a különbözőségeknek és minimalizálja a távolságoktól mért eltérés négyzetösszegét:

$$\sum_{jk} (d_{jk} - \hat{d}_{jk})^2 \to \min.$$

Az algoritmus menete a következő: a páronkénti különbözőségeket monoton növekvő sorrendbe rendezzük. Így az első (jk) indexpárhoz a legkisebb, az utolsóhoz pedig a legnagyobb különbözőség tartozik. E sorrend szerint rendezzük az iteráció során kapott konfiguráció d_{jk} távolságait is. Ha az illeszkedés tökéletes, akkor a távolságok ebben a rendezésben már monoton növekedőek. Vegyük a legkisebb különbözőségi indexhez tartozó d értéket és amíg nem találunk nála nagyobb d értéket, helyettesítsük az első d-t és az őt követő nála nem nagyobb értékeket az átlagukkal. Ezután a „nagyobb értékből" kezdjük a vizsgálódást, az előbbihez hasonlóan keressük a következő nála nagyobb d értéket, a közbeeső és kiinduló értékeket pedig az átlagokkal helyettesítjük. Ez az eljárás addig folytatódik amíg az átlagokra is teljesül, hogy monoton nem csökkenő sorozatot alkotnak. Ezek az átlagos értékek adják a keresett $\hat{d}$ értékeket.

3.3. *Rang-kép eljárás*

A *Guttman*-féle rang kép módszer a távolságok permutációjával határozza meg d^* értékeit. Ez a következő rendezést jelenti: legyen δ_p a különbözőségek nagyság szerinti sorrendjében a p-edik elem, d_p pedig a távolságok sorrendjében a p-edik elem. Ekkor d_p a δ_p különbözőségi érték rang-képe lesz. Más szavakkal, ha δ_{jk} rangszáma p, és a d_{ip} távolság a távolság rangsorában a p-edik elem, akkor d_{ip}^* egyenlő d_{ip} értékével. A d^* értékek általában nem minimalizálják a $\sum_{jk} (d_{jk} - d_{jk}^*)^2$ kifejezést adott d_{jk} értékek esetén. Ezért a MINISSA eljárásban d^* értékét csak az iteráció első lépésében számítjuk ki, a további lépéseket a regressziós eljárással végezzük.

A monoton regressziós $\hat{d}$ értékek és a rangkép eljárás d^* értékeinek számítását illusztrálja az 1. táblázat. (Az adatok forrása: Inter-University Research Councils Series, Report No. 32. May 1977.)

1. táblázat

Az $f(\delta)$ értékek illesztésének bemutatása

1/a

Különbözőségek δ	Távolságok d	Átlagolás			$\hat{d}$	d^*
1	12	10	10	10	10	6
2	8	10	10	10	10	8
3	10	10	10	10	10	9
4	11	11	11	11	11	10
5	18	18	12	12	11 3/4	11
6	6	6	12	12	11 3/4	12
7	14	14	14	11 1/2	11 3/4	14
8	9	9	9	11 1/2	11 3/4	17
9	17	17	17	17	17	18
.						
.						
.						
stb.						

1/b

Hasonlóságok δ		Távolságok d	A d értékek rangszámai		$\hat{d}$		d^*	
csoportosított	nem csoportosít.		csoportosított	nem csoportosított	első	második	első	második
1	3	2,0	3	7	4,25	4,83	5,0	6,67
1	1	8,0	1	1	8,0	4,83	8,0	6,67
1	2	3,0	2	6	4,25	4,83	7,0	6,67
2	6	4,0	2	4	4,0	4,83	3,0	3,33
2	5	5,0	1	3	4,25	4,83	3,0	3,33
2	4	7,0	1	2	4,25	4,83	4,0	3,33
3	8	2,0	3	8	2,0	2,0	2,0	1,67
3	9	1,0	3	9	1,0	2,0	1,0	1,67
3	7	3,0	2	5	3,0	2,0	2,0	1,67

3.4. *A sokdimenziós skálázás dimenzióinak értelmezése*

A MINISSA eljárás a koordináták X mátrixát minden lépésben normálja:
a) a koordináták átlaga minden tengelyen nulla:

$$\sum_j x_{jt} = 0. \qquad t = 1, \ldots, r$$

b) a koordináták négyzetösszege egyenlő n-el:

$$\sum_{jt} x_{jt}^2 = n .$$

A fenti feltételekből következik, hogy az euklideszi távolságok négyzetösszege egyenlő n^2-el.

c) a tengelyeket úgy transzformálja az eljárás, hogy a koordináták a különböző dimenziókban korrelálatlanok:

$$\sum_k x_{jt}\, x_{kl} = 0 \qquad \forall t = l \text{ esetén.}$$

Nem alkalmazunk rotációt, ha nem-euklideszi távolságokat használunk, ilyen esetekben a tengelyek korreláltak lesznek.

A sokdimenziós skálázás output pontábrájának értelmezése az ábrázolt „pontok" irányainak vizsgálatával oldható meg. Ha a skálázás terének minden iránya nem is, de a koordináta tengelyek iránya viszonylag jól értelmezhető. Ehhez segítséget ad a vizsgált jellemzők és a tengelyek páronkénti korrelációs együtthatója. A regresszióelemzés alkalmazható annak a hipotézisnek a tesztelésére, hogy a pont-ábra adott elhelyezkedésével egy változóhalmaz kapcsolatban van-e. Az ábra koordinátáinak olyan kombinációját keressük, amely jól becsüli, jól magyarázza a változókat. Az eredmények jóságát a többszörös korreláció méri.

Arra nincs szigorú szabály, hogy az induló adatrendszernek és a MINISSA eljárás eredményeként kapott konfigurációnak az eltérését mérő S (vagy K) értékét hogyan minősítsük. Gyakorlati számítások alapján a következő kategóriák alakíthatók ki az illeszkedés jóságára:

$S < 0{,}05$	kiváló
$0{,}05 \leq S < 0{,}10$	jó
$0{,}10 \leq S \quad 0{,}15$	közepes
$0{,}15 \leq S < 0{,}20$	elfogadható
$0{,}20 \leq S$	gyenge.

A *Guttman*-féle K érték általában 1,4-szer nagyobb mint S értéke. Ugyanazon adathalmaz esetén általában várható, hogy a dimenziók számának növelésével jobb illeszkedéshez, alacsonyabb S értékhez jutunk. Ez azonban nem minden esetben teljesül, előfordulhat, hogy az iterációk megengedett számán belül csak lokális optimumhoz jutunk.

3.5. *Példa a MINISSA eljárásra*

Milton Rokeach amerikai nemzeti mintán (1409 felnőtt, húsz év alatti lakos) 36 eszköz- és célérték struktúráját vizsgálta 1967–68-ban. A 18 cél- és 18 eszközérték vizsgálatát az Életmód, Életminőség és Értékrendszer vizsgálat (Hankiss E., Manchin R., Füstös L. 1978) megismételte magyar országos reprezentatív mintán (808 fő). A kérdés így hangzott:

„Kérem, rendezze ezeket az értékeket sorrendbe, aszerint, hogy mint irányelvek, milyen fontos szerepet játszanak az Ön életében. Tanulmányozza gondosan a kártyákat, azután válassza ki közülük a legfontosabbat. Tegyük itt le az asztalra, legfölül. Most válassza ki a sorrendben következő legfontosabbat. Tegyük a másik alá. És így tovább. Mikor elkészült, lapozza végig még egyszer a kártyákat s ellenőrizze, hogy helyes-e a sorrend. S ha megvan, akkor engedje meg, hogy leírjam a sorrendet."

Ezután 18 cél- és 18 eszközértéket kellett külön-külön sorbarendezni. Mérési értékként tehát rangszámokat kaptunk.
A 18 cél- és 18 eszközérték a következő:

1. Anyagi jólét (jómód, bőség)
2. Béke (háborútól és konfliktusoktól mentes világ)
3. Boldogság (megelégedettség)
4. Bölcsesség (életbölcsesség)
5. Családi biztonság (szeretteinkről való gondoskodás)
6. Belső harmónia (belső feszültségtől mentes élet)
7. Egyenlőség (testvériség, mindenki számára azonos lehetőség)
8. Az elvégzett munka öröme (teljesítmény, hasznosság)
9. Érdekes, változatos élet (élményekben gazdag, aktív élet)
10. A haza biztonsága (külső támadásokkal szembeni védettség)
11. Igazi barátság (szoros emberi kapcsolat)
12. Igaz szerelem (meghitt testi és lelki kapcsolat)
13. Kellemes, élvezetes élet (örömök, sok szabadidő)
14. Emberi önérzet (öntudat, önbecsülés)
15. Szabadság (függetlenség, választás lehetősége)
16. A szépség világa (a természet és a műalkotás szépsége)
17. Társadalmi megbecsülés (elismerés, tisztelet)
18. Üdvözülés (megváltás, örök élet)
19. Alkotó szellem (újító, eredeti gondolkodású)
20. Bátor, gerinces (kiáll a nézeteiért)
21. Előítéletektől mentes (elfogulatlan, nyílt gondolkodású)
22. Engedelmes (kötelességtudó, tisztelettudó)
23. Értelmes (gondolkodó, intelligens)
24. Fegyelmezett (önuralommal rendelkező)
25. Felelősségteljes (megbízható, felelősségtudó)
26. Hatékony (hozzáértő, szakszerű)
27. Jókedélyű (vidám, könnyű szívű)
28. Logikus gondolkodású (racionális, ésszerű)
29. Megbocsátó (nem bosszúálló)
30. Önálló (független, erős egyéniség)
31. Segítőkész (mások jólétéért dolgozik)
32. Szavahihető (becsületes, őszinte)
33. Szeretettel teljes (ragaszkodó, gyöngéd)
34. Tiszta (rendes, ápolt)
35. Törekvő (szorgalmas, vinni akarja valamire)
36. Udvarias (jó modorú, jól nevelt)

A 18 cél- és 18 eszközérték terében 25 társadalmi csoportot vizsgáltunk.

A társadalmi csoportok az értéktérben

Település

1. Falu
2. Kisváros
3. Nagyváros
4. Budapest

Életkor

5. 20—29 éves
6. 30—39 éves
7. 40—49 éves
8. 50—59 éves
9. 60—69 éves

Iskolai végzettség (években)

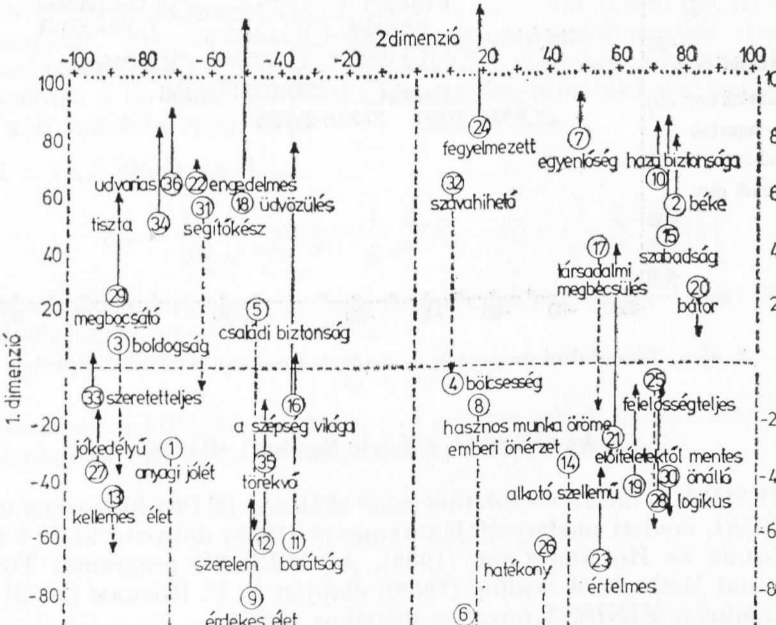
10. 4 év vagy kevesebb
11. 5—8 év
12. 9—11 év
13. 12 év
14. 13—15 év
15. 16—17 év
16. 18 év vagy több

Jövedelem (személyes jövedelem)

17. 1000 Ft vagy kevesebb
18. 1001—2000 Ft
19. 2001—2500 Ft
20. 2501—3000 Ft
21. 3001—4000 Ft
22. 4001—6000 Ft
23. 6001 Ft vagy több

Nem

24. Férfi
25. Nő

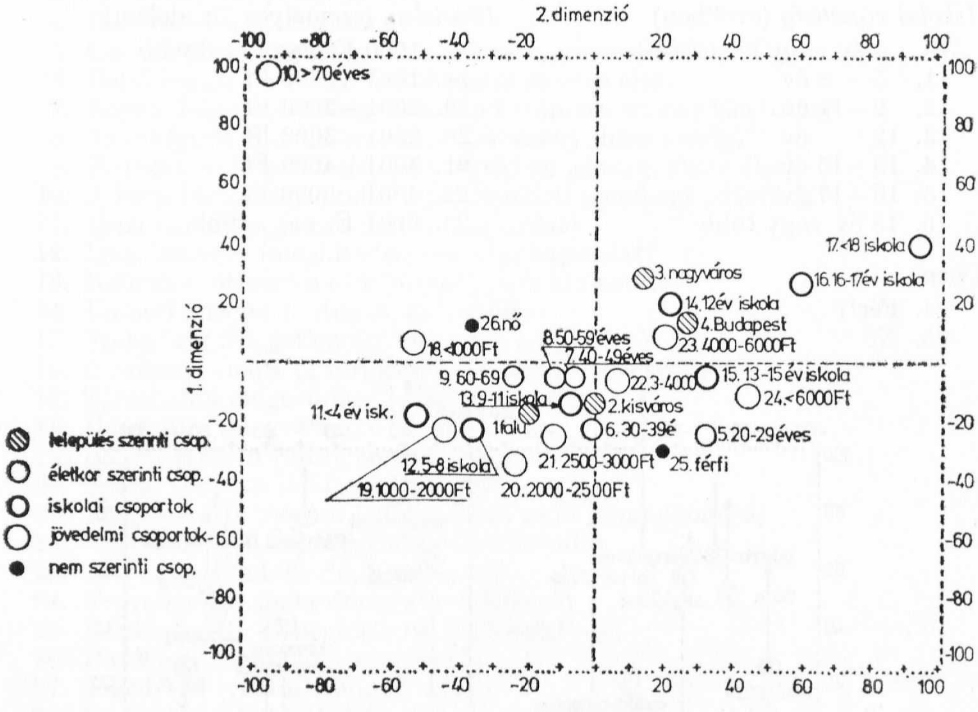


2. *ábra.* Az értékek axiológiai tere Magyarországon; MINISSA eljárás: három dimenziós megoldás

A módszer eredményeit a 2. és 3. ábrában mutatjuk be. Az értékek páronkénti hasonlóságait a korrelációs mátrixból képeztük az $(r + 1)/2$ képlet szerint. A társadalmi csoportok eltéréseit az értékválasztásaik mediánjaiból számítottuk euklideszi távolság alapján (δ_{ij}):

$$\delta_{ij}^2 = \sum_{k=1}^{36} (y_{ik} - y_{jk})^2 .$$

Az eredmények értelmezését az olvasó az Értékszociológiai Elemzések Műhelye más kiadványaiban találhatja meg.



3. *ábra.* Társadalmi csoportok az értékek terében; MINISSA eljárás

4. Az MRSCAL (Metric Scaling) eljárás

Az MRSCAL a metrikus sokdimenziós skálázás (MDS) klasszikus eljárása. Az MRSCAL eredeti módszerét Richardson (1938) dolgozta ki, ezt módosította Young és Householder (1938). Az MRSCAL programot Torgeson (Theory and Methods of Scaling (1958)) alapján F. F. Roskam (1972) fejlesztette ki, mint a MINISSA program metrikus párját.

Az MRSCAL eljárás abból a feltevésből indul ki, hogy az n pontnak (stimulus, objektum . . .) létezik egy olyan minimális dimenziószámú tere, amelyben a pontok közötti távolságok (d_{ij}) az eredeti térben mért különbözőségeknek δ_{ij} lineáris vagy logaritmikus transzformációjával állíthatók elő:

$$d_{ij} = f(\delta_{ij}) \qquad \text{vagy} \qquad d_{ij} = f(\log \delta_{ij})$$

Az MRSCAL célja megtalálni az n pont (objektum) koordinátáinak (X) azt a becslését az adott dimenzió-számú térben, amelyben a számított távolságok (d_{ij}) lineáris függvényei a minta-térben mért különbözőségeknek (δ_{ij}).

4.1. *Az additív konstans probléma*

Az additív konstans problémát eredetileg TORGERSON (1958) úgy fogalmazta meg, mint megtalálni azt a konstanst (c), amely a megfigyelt viszonylagos távolságokat (különbözőségeket, δ_{ij}) átalakítja abszolút távolságokká (d_{ij}) olyan módon, hogy az eredményül kapott euklideszi tér dimenziószáma minimális legyen.

Ez a következőképpen fejezhető ki:

$$d_{ij} = \delta_{ij} + c, \tag{1}$$

ahol δ_{ij}: az i-edik és j-edik objektum különbözősége a megfigyelési térben
d_{ij}: az i-edik és j-edik objektum távolsága a származtatott térben

$$d_{ij} = \left[\sum_{t=1}^{r} (x_{it} - x_{jt})^2\right]^{1/2}$$

c: az additív konstans
$i, j = 1, 2, \ldots, n$, n az objektumok száma.

Az additív konstans problémát MESSICK és ABELSON (1956) elemezte először részletesebben. Vizsgálták a konstans hatását a sokdimenziós struktúrára. Eljárásukban az objektumok távolságainak négyzeteiből kiszámították az objektumoknak a tér tengelyeire eső vetületei (koordináták) skaláris szorzatait, és azt a B mátrixba rendezték.

A $B = \{b_{ij}\}$ általános eleme:

$$b_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n}\sum_{j}^{n} d_{ij}^2 + \frac{1}{n}\sum_{i}^{n} d_{ij} - d_{ij}^2 - \frac{1}{n^2}\sum_{i}^{n}\sum_{j}^{n} d_{ij}^2\right] \tag{2}$$

A B mátrix diagonális elemei, az objektumoknak önmaguktól mért távolságai, feltételezés szerint egyenlőek nullával:

$$d_{ii} = \delta_{ii} = 0 \tag{3}$$

A konstans c-t a különbözőséghez $i \neq j$ esetben adjuk hozzá. Ezért az (1) és (3) egyenleteket egy egyenletben a következőképpen írhatjuk:

$$d_{ij} = \delta_{ij} + c(1 - \varepsilon_{ij}), \tag{4}$$

$$\text{ahol } \varepsilon_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \neq j \\ 1, & \text{ha } i = j. \end{cases}$$

A (4) egyenletet behelyettesítve a (2) egyenletbe már olyan formulát kapunk, amelyből látszik a c konstans hatása a konfigurációra.

Először a távolságok négyzete a (4) egyenlet alapján:

$$d_{ij}^2 = \delta_{ij}^2 + (2c\delta_{ij} + c^2)(1 - \varepsilon_{ij}) \tag{5}$$

Ezt (2)-be behelyettesítve kapjuk (a levezetést lásd MESSICH és ABELSON (1956) 3. old.):

$$b_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n}\sum_j^n \delta_{ij}^2 + \frac{1}{n}\sum_i^n \delta_{ij} - \delta_{ij}^2 - \frac{1}{n^2}\sum_i^n\sum_j^n \delta_{ij}^2 + \right.$$

$$\left. + 2c\left(\frac{1}{n}\sum_j^n \delta_{ij} + \frac{1}{n}\sum_i^n \delta_{ij} - \delta_{ij} - \frac{1}{n^2}\sum_i^n\sum_j^n \delta_{ij}\right) + c^2\left(\varepsilon_{ii} - \frac{1}{n}\right)\right] \tag{6}$$

Mátrix jelölésekkel:

$$B = A + cE + \frac{1}{2}c^2 H, \tag{7}$$

ahol:

$$a_{ij} = \frac{1}{2}\left(\sum_j^n \delta_{ij}^2 + \frac{1}{n}\sum_i^n \delta_{ij} - \delta_{ij}^2 + \frac{1}{n^2}\sum_i^n\sum_j^n \delta_{ij}^2\right)$$

$$e_{ij} = \frac{1}{n}\left(\sum_j \delta_{ij} + \frac{1}{n}\sum_i \delta_{ij} - \delta_{ij} - \frac{1}{n^2}\sum_i^n\sum_j^n \delta_{ij}\right)$$

$$h_{ij} = -\frac{1}{n},\ i \neq j \quad \text{és} \quad h_{ii} = 1 - \frac{1}{n}.$$

A B mátrix diagonális elemei:

$$b_{ii} = \frac{1}{n}\sum_j \delta_{ij}^2 - \frac{1}{2n^2}\sum_i\sum_j \delta_{ij}^2 + c\left(\frac{2}{n}\sum_j \delta_{ij} - \frac{1}{n^2}\sum_i\sum_j \delta_{ij}\right) + \frac{1}{2}c^2\left(1 - \frac{1}{n}\right). \tag{8}$$

Ha a B mátrix legnagyobb sajátértéke β_1 és a hozzá tartozó sajátvektor x_1, akkor

$$Bx_1 = \beta_1 x_1. \tag{9}$$

MESSICK és ABELSON a nagy sajátértékeket összeadta:

$$\sum_i^r \beta_i = x_1' Bx_1 + \ldots + x_r' Bx_r \tag{10}$$

és a (10)-be beírta a (7) egyenletet, majd egyszerűsítésekkel olyan egyenlethez jutott, amelyből már a c értékét kiszámíthatta:

$$\sum_i^r \beta_i = \sum_i^r x_i' Ax_i + c\sum_i^r x' Ex_i + \frac{1}{2}c^2\sum_i^r x_i' Hx_i. \tag{11}$$

A H mátrix speciális szerkezete miatt a (11) egyenlet a következőképpen írható:

$$\sum_i^r \beta_i = \sum_i^r x_i' Ax_i + c\sum_i^r x_i' Ex_i + \frac{1}{2}rc^2. \tag{12}$$

Messich és Abelson a (12) egyenlet megoldásával kapta meg a konstans értékét azzal a feltételezéssel, hogy a maradék sajátértékek $(n-r)$ nullák.

Messich és Abelson megoldásának a problémáját az a feltételezés adja, hogy az „igazi" megoldásban a pozitív sajátértékeknek van egy minimális száma, a többi gyök pedig nulla. A gyakorlatban ez a feltételezés csak ritkán teljesül. Egy másik probléma adódik, ha nagy abszolút értékű negatív gyök merül fel. Ilyen esetben a kutató bajba kerül, mivel ezt nem tudja interpretálni, hacsak nem tételezi fel, hogy ez a hiba-hatás, és így nem értelmezi.

Cooper (1972) a fenti problémák miatt az additív konstans új megoldását kereste. Abból indult ki, hogy a metrikus skálázásnál van egy hiba tag:

$$d_{ij} = \delta_{ij} + c + e_{ij}. \tag{13}$$

Cooper kereste azt a konstanst, amelyik a hiba tag függvényét minimalizálja:

$$G = \frac{1}{2} \sum_{i}^{n} \sum_{j \neq 1}^{n} e_{ij}^2 \to \min. \tag{14}$$

A G függvény kifejtve:

$$G = \frac{1}{2} \sum_{i}^{n} \sum_{j \neq 1}^{n} \left(\left(\delta_{ij} + c^2\right) + \sum_{k}^{r} (x_{ik} - x_{jk})^2 - 2(\delta_{ij} + c) \left[\sum_{k}^{r} (x_{ik} - x_{jk}{}^2) \right]^{1/2} \right), \tag{15}$$

A G függvény c szerinti parciális deriváltja:

$$\frac{\partial G}{\partial c} = \sum_{i}^{n} \sum_{j}^{n} \delta_{ij} + n(n-1)c - \sum_{i}^{n} \sum_{j}^{n} \left[\sum_{k}^{r} (x_{ik} - x_{jk})^2 \right]^{1/2} = 0. \tag{16}$$

Ha a különbözőségeket úgy adjuk meg, hogy átlaguk nulla, a (16) egyenletből c értékét a következőképpen határozzuk meg:

$$c = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i}^{n} \sum_{j}^{n} \left[\sum_{k}^{r} (x_{ik} - x_{jk})^2 \right]^{1/2}. \tag{17}$$

A hiba függvénynek (G) az objektumok vetületei (x_{ik}) szerinti parciális deriváltjai, ha figyelembe vesszük, hogy a távolságok invariánsak a tér origójának változtatására, a következő egyenlettel fejezhetők ki (lásd részletesebben: Cooper 1972):

$$\frac{\partial G}{\partial x_{j^*k^*}} 2\left[n x_{j^*k^*} - \sum_{i \neq j^*}^{n} (\delta_{ij^*} + c) \right] \cdot (x_{j^*k^*} - x_{ik^*}) \left(\sum_{k}^{r} (x_{j^*k} - x_{ik})^2 \right)^{1/2}. \tag{18}$$

Cooper a megoldást a *Fletcher–Powell* iterációs eljárással kereste. (Megjegyzendő, hogy a Fletcher–Powell eljárás hatékonyságát a fenti sokváltozós függvény minimalizálására Gruvaeus és Jöreskog (1970) megvizsgálta, és azt hatékonynak találta.)

A Fletcher–Powell eljárás felhasználásával programot is készítettek az additív konstans és az objektumok koordinátái megkeresésére COSCAL néven. A COSCAL-t FORTRAN-IV. nyelven írták IBM OS 360/91 számítógépre. A program lehetőségként megengedi kezdeti konfiguráció megadását. Különben az additív konstansnak olyan becslését keresi, amelyhez olyan abszolút távolságok tartoznak, hogy a legkisebb távolságok is nagyobbak nullánál.

Az abszolút távolságokból a (2) egyenlettel számolt skaláris szorzat mátrix első r főkomponensét felelteti meg az r-dimenziós tér kezdeti konfigurációjának. Az illesztés jóságát a következő mutatóval méri:

$$FIT = 1 - \frac{\sum_{i<j}^{n} e_{ij}^2}{\sum_{i<j}^{n} (\delta_{ij} - \delta_{i..})^2}. \tag{19}$$

4.2. *Az MRSCAL módszere*

Az MRSCAL eljárás keresi az n pontnak azt a konfigurációját az adott r dimenzió-számú output térben, amelyre a következő összefüggés igaz:

$$d_{ij} = f(\delta_{ij}), \tag{20}$$

ahol: δ_{ij}: az i és j pont között a megfigyelési (minta) térben mért különbözőség

d_{ij}: az r-dimenziós származtatott (redukált térben mért) távolság (Minkowski metrika)

$$d_{ij} = \left\{ \sum_{k}^{r} | x_{ik} - x_{jk} |^p \right\}^{1/p}$$

f: a δ_{ij}-k megengedett függvénye.

Az MRSCAL programban az „f" függvény lineáris: $d = a\delta + b$, de lehetőség van a különbözőségek logaritmikus transzformációjára: $d = a(\log \delta) + b$.

Az eljárás az illeszkedés jóságát mérő K (coefficient of alienation) együtthatót minimalizálja:

$$K = \sqrt{1 - \frac{\left\{\sum_{ij} d_{ij} \cdot f(\delta_{ij})\right\}^2}{\sum_{ij} d_{ij}^2 \cdot \sum (f(\delta_{ij}))^2}}. \tag{21}$$

A monotonitási együtthatót a K együtthatóból a következőképpen számítja:

$$MU = \sqrt{1 - K^2}. \tag{22}$$

Az MRSCAL a K együttható minimalizálását iterációval végzi. *Az iteráció két fázisból áll.* Az iteráció *első fázisában* keressük a pontoknak azt a konfigurációját ($x^{(s+1)}$) amelyben a d_{ij} távolságok legjobban illeszkednek az $f(\delta_{ij})^{(s)}$ értékhez, amelyet az előző iteráció második fázisában számítottunk. A pontok koordinátáit a *„legmeredekebb lejtő"* (the steepest descent) módszerrel változtatjuk:

$$x_{jt}^{(s+1)} = x_{jt}^{(s)} - \alpha_s \left\{ \frac{\partial K}{\partial x_{jt}} \right\}^{(s)} \tag{23}$$

(Az α_s az optimálisan választott lépéshossz.)

Az iteráció *második fázisában* kerssük a δ_{ij} adatoknak azt a függvényét (f), amely a legjobban illeszkedik az első fázisban kapott $d_{ij}^{(s)}$ értékekhez. A második fázisban a legkisebb négyzetek módszere értelmében legjobban illeszkedő regressziós függvényt határozzuk meg. A kezdő lépésben megadhatunk egy kezdeti konfigurációt, vagy a programra bízhatjuk annak előállítását. Ekkor a kezdeti pontok a C mátrix főkomponensei. A C mátrix elemei:

$$\{c_{ij}\} = \Delta_{ij} \sum_k \frac{\delta_{ik}^0}{a} - \frac{\delta_{ij}^0}{a} \tag{24}$$

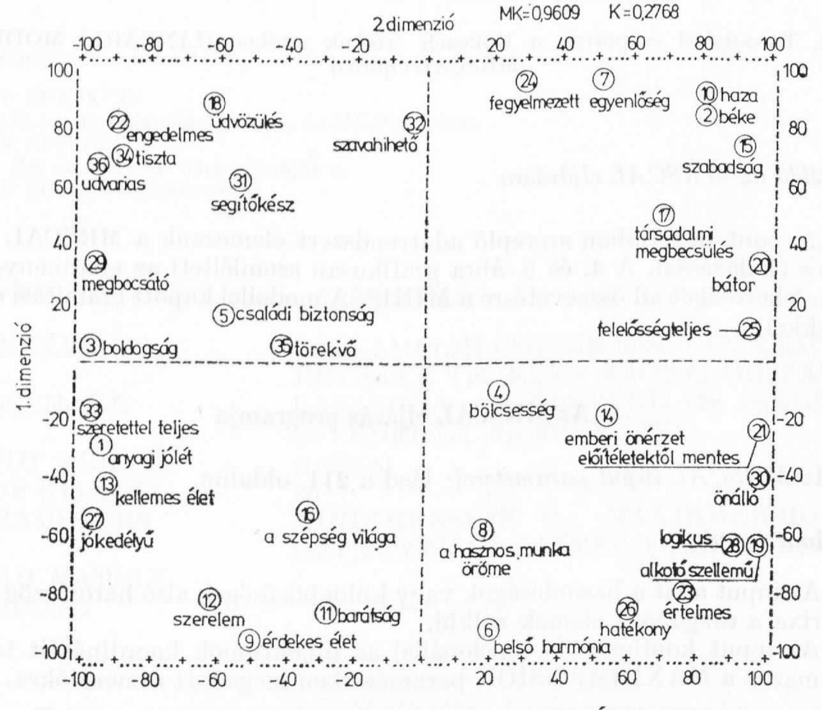
ahol $\Delta_{ij} = 1$ ha $i = j$ és 0 különben

δ_{ik}^0 a δ_{ik} bármely megengedhető transzformációjának maximuma

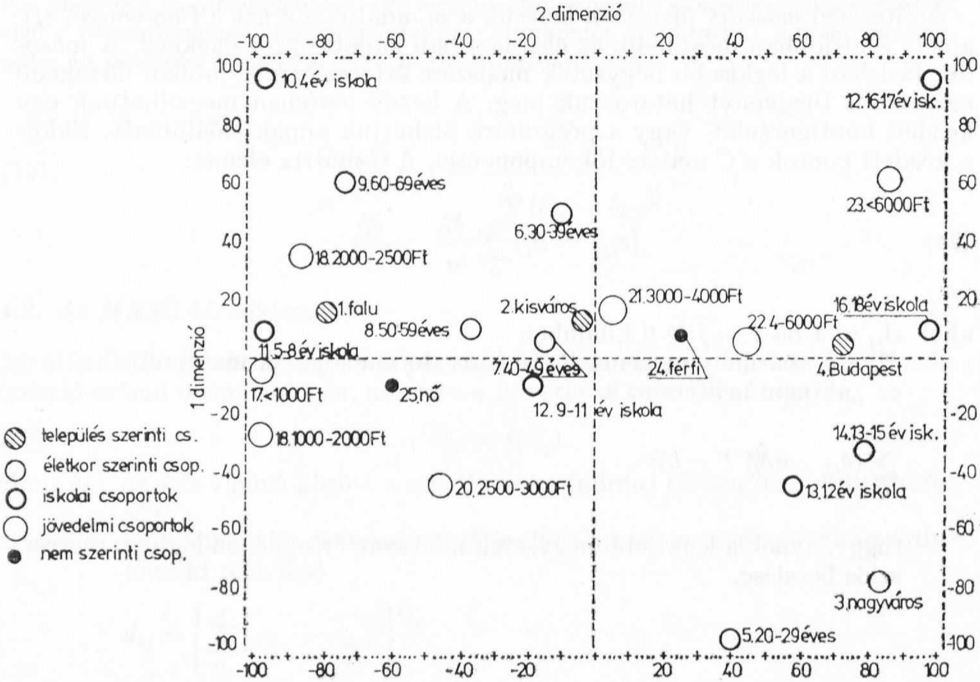
az „a" nem más, mint a

$$\sum_{ij} (\delta_{ij} - a\hat{\delta}_{ij}^{(s-1)} - b)^2$$

függvénynek a legkisebb négyzetek módszere értelmében legjobb regressziós becslése.



4. ábra. Rokeach értékek a magyar társadalomban (LINEÁRIS MODELL, MRSCAL eljárás)



5. ábra. Társadalmi csoportok a Rokeach értékek terében (LINEÁRIS MODELL, MRSCAL eljárás)

4.3. *Példa az MRSCAL eljárásra*

A 3.5. pont példájában szereplő adatrendszert elemezzük a MRSCAL sokváltozós skálázással. A 4. és 5. ábra grafikusan szemlélteti az eredményeket, egyben lehetőséget ad összevetésre a MINISSA modellel kapott számítási eredményekkel.

5. Az MRSCAL eljárás programja

5.1. *Az MRSCAL input paraméterei:* lásd a 211. oldalon.

5.2. *Adat input*

— Az input adat a hasonlóságok vagy különbözőségek alsó háromszög mátrixa a diagonális elemek nélkül.
— Az input konfiguráció (opcionális) az objektumok koordinátáit tartalmazza a MAXDIMENSION paraméterben megadott dimenziókra.

Kulcsszó	Belső érték	Funkció
MINDIMENSION	2	Az elemzés minimális dimenziójának a száma
MAXDIMENSION	4	Az elemzés maximális dimenziójának a száma. A megoldás a MAXDIMENSION-tól a MINDIMENSION-ig történik
DATA TYPE	0	0: ha az input adatok hasonlóságok 1: ha az input adatok különbözőségek
PLOT	1	0: nem ad ábrát az outputon 1: ábrát ad az outputon
PUNCH	0	0: kilyukasztja a koordinátákat 1: a végső megoldás koordinátáit kilyukasztja
LINEAR TRANSFORMATION	0	0: Nem végez lineáris transzformációt 1: Lineáris transzformációt végez
LOG TRANSFORMATION	0	0: Nem végez logaritmikus transzformációt 1: Logaritmus transzformációt végez
CRITERION	0,00001	Kritérium érték az iteráció terminálásához
MINKOWSKI METRIC	2	A Minkowski metrika paramétere ($p = 2$ esetben egyenlő az euklideszi távolsággal)
MATFORM	0	(Csak akkor érvényes, ha READ CONFIG utasítást használjuk) 0: Az input konfiguráció sora az objektumok az oszlopai a dimenziók 1: Az input konfiguráció sorai a dimenziók, az oszlopai az objektumok

Megjegyzés:

OF SUBJECTS
Ez az utasítás nem érvényes az MRSCAL-ban.
OF STIMULI
Ezt az utasítást felcserélhetjük a
OF POINTS utasítással.

5.3. *Példa egy futás inputjának megadására*

RUN NAME	TÁRSADALMI CSOPORTOK A ROKEACH ÉRTÉKEK TERÉBEN MAGYARORSZÁGON
TASK NAME	LAKÓHELY (4), ÉLETKOR (5), ISKOLA (6), JÖVEDELEM (7), FÉRFI, NŐ
INPUT FORMAT	(10F8.5)
N OF STIMULI	25
PARAMETERS	MINDIMENSION (2), MAXDIMENSION (3), DATA TYPE (1), LINEAR TRANSFORM (1)
READ MATRIX	
COMPUTE	

5.4. *Az MRSCAL outputja*

1. A paraméterek beállított értékeinek a listája.
2. Az adatok logaritmikus transzformációja (ha kértük).
3. A kezdeti konfiguráció mátrixa.
4. A monotonitási együttható (MU) táblázata.
5. A végső konfiguráció koordinátái és a *MU* és *K* együtthatók értéke.
6. A reprodukált távolságok a Minkowski metrikával.
7. A különbözőségeknek a transzformált mátrixa.
8. Az objektumok pontábrája.

A program a 4–8. pontokat ismétli a különböző dimenziószámú megoldásokra, eredményeinek nyomtatásakor.

(Beérkezett: 1981. május 4-én.)

IRODALOM

COMBS, C. H.—KAO, R. C.: On a Connection between Factor Analysis and Multidimensional Unfolding. PSYCHOMETRICA — Vol. 25. No. 3. Sept. 1960.

FLETCHER, R. and POWELL, M. J. D.: A rapidly converging descent method for minimization. Computer Journal, 2, 163—168., 1963.

GRUVAEUS, G. T. and JÖRESKOG, K. G.: A computer program for minimizing a function of several variables. Educational Testing Service Research Bulletin. RB-70-14., 1970.

KRUSKAL, J. B.: Multidimensional Scaling by optimising goodness of fit to a non-metric hypthesis. PSYCHOMETRIKA, 29, 1—27, 115—129., 1964.

KRUSKAL, J. B.: The Relationship between Multidimensional Scaling and Clustering in Classification and Clustering. ed by I. Van RYZIZ Academic Press; New York 1977.

LIFF, C. N.: Orthogonal rotation to congruence. PSYCHOMETRIKA, 31, 33—42., 1966.

MESSICK, B. J. and ABELSON, R. P.: The additive constant problems in multidimensional scaling. PSYCHOMETRIKA, 21, 1—17., 1956.

RICHARDSON, M. W.: Multidimensional psychophysics PSYCHOLOGICAL BULLETIN 35., 1938.

ROSKAM, E. E.: MESCAL: An algorithm for multidimensional scaling by metric transformation of data. Nijmegen: PROGRAM BULLETIN "%, (106) 659—660., (1972a).

SCHÖNEMANN, P. H.: A generalized solution of the orthogonal procrustes problem. PSYCHOMETRIKA, 21, 1—10., 1966.

RORGERSON, W. S.: Theory and Methods of Scaling. New York, 1958.

YOUNG, G. and HOUSEHOLDER, A. S.: Discussion of a set of points in terms of their mutual distences. PSYCHOMETRIKA, 3., 19—22., 1938.

IDEGEN TOLLAK

DUNCAN K. FOLEY

A tőke forgalmi folyamata

1. Bevezetés[1,2]

A „Tőke" második kötetében Marx a tőkeérték időbeli mozgását tárgyalja, zárt körforgás formájában. Azt a célt tűztem ki, hogy a tőke körforgásának olyan matematikai modelljét alkossam meg, amely megfelel a bővített újratermelés marxi elemzésének. A modellt a realizálás és felhalmozás összefüggéseinek vizsgálatára használom fel, exponenciális növekedés esetében. A feladat végrehajtása során az alábbi eredményekhez jutottam:

Először is a tőke körforgásának marxi eszméit szigorú és ellentmondásmentes modellben lehet ábrázolni, ennek változói a tőkés vállalatok pénzügyi elszámolásának szokásos adataival mérhetők. Másodszor a modellben a felhalmozás állandósulhat, ha mesterségesen feltételezzük hogy az alapvető paraméterek nem változnak a felhalmozás következtében. Harmadszor, szabatosan értelmezhető az az eset, amikor a felhalmozás – a hitelfeltételek bővülésének hiányában – nem fér össze a realizációval, azaz a termelt áruk eladásával, az összesített hatékony kereslet elégtelensége miatt. Ezt a nehézséget csak a hitelek állandó növekedésének feltételezésével szüntethetjük meg. Negyedszer, a hitelek színvonalának emelése növelheti a felhalmozási rátát, de a megvalósítható felhalmozás rátájának van egy felső korlátja. Ezt a korlátot a termelés mindenkori társadalmi viszonyai és a termelőerők fejlettsége határozza meg, nem pedig a rendelkezésre álló források és a munka teljes kihasználása, mint a neoklasszikus növekedési modellekben. Ötödször, elemezhetővé válik a pénzérték csökkenése. Ez akkor következik be, ha a felhalmozás tényleges rátáját igen közel tartjuk a maximálisan lehetséges rátához. Ez az egyszerű modell tehát olyan keretet ad, amely a marxi gazdasági elméleten alapszik és alkalmas a makroökonómia klasszikus kérdéseinek újszerű megvilágítására.

A második fejezet a tőke körforgásának egyszerű modelljét állítja fel és megvizsgálja ennek alapvető sajátosságait. A harmadik fejezet a realizálás és a felhalmozás összefüggéseit elemzi ebben a modellben. A negyedik fejezet mutatja meg, hogyan lehet a realizálást biztosítani a hitelfeltételek bevezetése révén. Az ötödik fejezet bevezeti a pénzérték módosulásának lehetőségét és elemzi a megoldás ennek megfelelő változását. A hatodik fejezet néhány befejező megjegyzést tartalmaz.

[1] Köszönetemet szeretném kifejezni Alain *Lipietz*, Suzanne de *Brunhoff* és Andrew M. *Senchak* kollégáimnak korábbi fogalmazványom segítő bírálatáért.

[2] Fordította *Bródy* András. A tanulmány egy munkában levő tankönyv fontos fejezete.

2. A tőke körforgásának modellje

A legegyszerűbben úgy ábrázolhatjuk a tőke körforgását, mint az értékáramlatok egymásutánját, amelyeket késleltetések kötnek össze, ezek a körforgás különböző szakaszait képviselik.

Legyen $C(t)$ a teljes értékáramlat amely a termelést célozza a nyersanyagok, a termelési eszközök és a termelő munka bére formájában előlegezve. Ez az áramlat összesíti az összes tőkés vállalat előlegeit és megoszlik a bérek közt [ez az egész áramlat k-adrésze] és a nem-bér előlegek közt [az egész áramlat $(l - k)$-adrésze], az utóbbi előlegek tartalmazzák a hosszú életű tőkejószágok bruttó beruházását is.

Ennek az áramlatnak lesz az eredménye a befejezett termelés $Q(t)$ áramlata. Mivel az értékáramlat különböző alkotóelemei különböző ideig időznek a termelési folyamatban, ezért Q és C viszonyát mint úgynevezett konvoluciót fejezhetjük ki:

$$Q(t) = \int_{-\infty}^{t} C(t')a(t - t'; t')dt' \tag{2.1}$$

itt az $a(t^*; t')$ függvény pozitív $t^* > 0$ értékekre van értelmezve, értéke nemnegatív és integrálja eggyel egyenlő. Tehát $a(t^*; t')$ a költségeknek az a hányada, amelyet a t' időpillanatban előlegeznek és amely a $t' + t^*$ időpillanatban válik befejezett termeléssé.

A befejezett termelés Q áramlata hasonlóan bizonyos idő befejeztével mint eladási áramlat jelentkezik, legyen ez $S(t)$. Az áruk eladási ára meghaladja ezek költségét valamely átlagos $q(t)$ haszonkulcs hozzáadása révén, úgy, hogy

$$S(t) = \int_{-\infty}^{t} Q(t')(1 + q(t'))b(t - t'; t')dt', \tag{2.2}$$

ahol a $b(t^*; t')$ hasonló sajátosságú mint az a (.) függvény és nem más, mint a t' időpillanatban befejezett termék azon hányada, amelyet a $t' + t^*$ időpillanatban adnak el.

A munkaértékelmélet nézőpontjából a haszonkulcs azt a tényt tükrözi, hogy a munkakifejtés több értéket ad hozzá az árukhoz, mint amennyit a termelő munkásoknak bér formájában megfizetnek. Az értéktöbblet nyilvánvalóan qC. Természetes a munkaértékelmélet szempontjából, a q haszonkulcsot mint az értéktöbblet és a bérhányad, e, viszonyának és a teljes költség bérhányadának, k-nak, szorzataként kifejezni.

Az S értékáramlat két összetevőből áll, az első S' az előlegek értékét pótolja (beleértve a hosszú életű tőke értékcsökkenését), a második S'' az értéktöbbletnek felel meg. A költség-összetevőt úgy tekintjük, mint ami visszatér a termelésbe, habár bizonyos késéssel. Az értéktöbblet egy p hányada szintén visszatér a termelésbe. Ez részben el nem osztott jövedelem, részben pedig a háztartások megtakarítása, ezek kamatot vagy osztalékot kapnak a pénzügyi közvetítőktől a pénzpiacon. E p hányadot a tőkésítés rátájának fogjuk nevezni. Az értéktöbblet maradékát a háztartások elköltik — ehhez jövedelem vagy közvetlen fogyasztás formájában jutnak hozzá. Így lezárhatjuk a tőke körforgását, ha azt írjuk:

$$C(t) = \int_{-\infty}^{t} S'(t')c(t-t';t')dt' + \int_{-\infty}^{t} p(t')S''(t')c(t-t';t')dt'. \tag{2.3}$$

A késleltetési függvények, $a(\,.\,)$, $b(\,.\,)$ és $c(\,.\,)$ következményeként minden pillanatban bizonyos értékösszeg lesz lekötve a körforgás egyes szakaszaiban. Ez az N termelőtőke, az M árutőke (a készáruk készlete, amely eladásra vár), és az F pénztőke (a tőkés vállalatok kezében levő pénzügyi eszközök, a realizált érték, amelyet még nem fordítottak termelésre). Ezeket a tőkéket az alábbi mozgástörvények kormányozzák:

$$dF(t)/dt = S'(t) + p(t)S''(t) - C(t) \tag{2.4}$$

$$dN(t)/dt = C(t) - Q(t) \tag{2.5}$$

$$dM(t)/dt = Q(t) - S'(t) \tag{2.6}$$

Itt a készáruk készletét a szokásos módon költsége alapján értékeljük.

A (2.1), (2.2), és (2.3) egyenletek együttesen zárt, homogén és lineáris integrálegyenletrendszert alkotnak. Itt csak a rendszer exponenciális megoldásait vizsgáljuk. Mostantól kezdve feltesszük, hogy a késleltetési függvények, $a(\,.\,)$, $b(\,.\,)$ és $c(\,.\,)$ az időben stacionáriusak és a p és q paraméterek változatlanok.

Először is tekintsük a rendszer olyan megoldásait, amelyekben minden áramlat és minden állag azonos g rátával növekszik. Mivel a rendszer homogén kiköthetjük, hogy $C(0) = 1$, és így $C(t) = \exp(gt) = e^{gt}$.

S a kezdeti feltételek és a növekedési ráta az alábbi feltételeknek lesz alávetve, amelyek a (2.1), (2.2) és (2.3) egyenletekből folynak:

$$Q(0) = a^*(g) \tag{2.7}$$

$$S(0) = (1+q)b^*(g)Q(0) = (1+q)a^*(g)b^*(g) \tag{2.8}$$

$$S'(0) = S(0)/(1+q) = a^*(g)b^*(g) \tag{2.9}$$

$$S''(0) = qS(0)/(1+q) = qa^*(g)b^*(g) \tag{2.10}$$

$$C(0) = 1 = c^*(g)[S'(0) + pS''(0)] = (1+pq)a^*(g)b^*(g)c(g)_* \tag{2.11}$$

Itt $a^*(g) = \int_0^\infty a(t')\exp(-gt')dt'$ nem más mint az $a(\,.\,)$ késleltetési függvény diszkontált értéke, ahol a diszkontláb g. Hasonlóan áll ez $b^*(g)$ valamint $c^*(g)$ értékére.[3]

[3] A (2.7) egyenlet például az alábbi módon vezethető le: helyettesítsük be a $C(t) = \exp(gt)$ és a $Q(t) = Q(0)\exp(gt)$ értéket a 2.1) egyenletbe.
Ekkor kapjuk, hogy

$$Q(t) = Q(0)\exp(gt) = \int_{-\infty}^{t} \exp(gt')a(t-t';t')dt'$$

Helyettesítsük most a $t^* = t - t'$ változót az integrálba, ekkor azt kapjuk, hogy

$$Q(0)\exp(gt) = \int_0^\infty \exp(gt)\exp(-gt^*)a(t^*)dt^* = a^*(g)\exp(gt)$$

Ez adja meg a (2.7) egyenletet. Hasonlóan járunk el a többi egyenlet esetében is.

Ha $pq > 0$, akkor, ha $g = 0$, (2.11) jobb oldala egyenlő $1 + pq > 1$. Ez következik abból, hogy ilyenkor $a^*(0) = b^*(0) = c^*(0) = 1$, mivel a késleltetési függvények — $a(\,.\,)$, $b(\,.\,)$ és $c(\,.\,)$ — integrálja a definíció szerint egységnyi. Az $a^*(g)$, $b^*(g)$ és $c^*(g)$ függvények g-nek monoton csökkenő függvényei, mivel ezek nem-negatív függvények diszkontált értékei. Ezért a diszkontláb, g, növekedtével a (2.11) egyenlet jobb oldala monoton csökken és zérushoz tart. Ezért szükségszerűen van egy olyan g érték, amelyre

$$1 = (1 + pq)\,a^*(g)\,b^*(g)\,c^*(g)$$

Ezt az értéket a rendszer felhalmozási móduszának fogjuk nevezni.

Könnyen belátható, hogy g-nek növekednie kell p, a tőkésítés rátájának növekedtével, szintúgy q, a haszonkulcs növekedtével is. Ugyancsak növekednie kell, ha az $a(\,.\,)$, $b(\,.\,)$ vagy $c(\,.\,)$ késleltetési függvények úgy változnak meg, hogy diszkontált értékük minden diszkontláb esetében csökken.

E megoldások birtokában meghatározhatjuk a termelőtőke, árutőke és pénztőke viszonylagos tömegét az exponenciális felhalmozási pálya mentén. A (2.4), (2.5) és (2.6) egyenletekből ugyanis

(2.12) $$N(0) = (1 - a^*(g))/g$$

(2.13) $$M(0) = (a^*(g)\,(1 - b^*(g))/g$$

(2.14) $$F(0) = ((1 + pq)\,a^*(g)\,b^*(g)\,(1 - c^*(g)))/g.$$

Ily módon kiszámíthatjuk a tőkés vállalatok összesített mérleg adatait a stacionárius növekedés esetében és azt is megmondhatjuk, hogyan változnak ezek a felhalmozás alapvető paramétereinek változásával.

A tőkék összességének bruttó profitrátáját az értéktöbblet S'' áramlatának és a termelésben és forgalomban foglalkoztatott összes tőkének, $N + M + F$ értékének viszonya adja meg. Felhasználva a (2.7.—2.14) egyenleteket kimondhatjuk, hogy a (2.11) egyenlet alapján

(2.15) $$N(0) = M(0) + F(0) = pqa^*(g)\,b^*(g)/g.$$

Tehát a bruttó profitrátának, r-nek ki kell elégítenie az alábbi egyenletet:

(2.16) $$r = S''/(N + M + F) = gqa^*(g)\,b^*(g)/pqa^*(g)\,b^*(g) = g/p$$

vagyis

(2.17) $$pr = g.$$

Ez a „cambridgei egyenlet” egybefűzi a profitrátát, a felhalmozási rátát és a tőkésítés rátáját (az utóbbi, Keynes-i fogalmak szerint a profitmegtakarítási hajlandóság).[4]

A rendszerben a folyamatos felhalmozást öt alapvető paraméter szabja meg: a q haszonkulcs, ez foglalja össze az értéktöbblet termelésének és elsajátításának körülményeit; a p tőkésítési ráta, ez az értéktöbblet újból befektetett hányada; végül az $a(\,.\,)$, $b(\,.\,)$ és $c(\,.\,)$ függvények, amelyek időbeli késleltetéseket fejeznek ki, vagyis a körforgás egyes szakaszainak megtérülési rátáit. Vegyük

[4] Lásd PASINETTI (1974) aki körültekintően tárgyalja a gazdasági növekedés Keynes-i modelljeinek ezt a kategóriáját.

figyelembe, hogy a termelési késleltetés, amelyet az a (.) függvény fejez ki, *nem* azonos a termelésre fordított munkaidővel. A teljes termelési idő tartalmazza azt az időszakaszt is, amikor a termék nem tényleges tárgya a munkának.[5]

Az elemzés megmutatja hogyan alakul ki a profitráta a társadalmi tőke szintjén. A többletérték áramlatát ténylegesen a hozzáadott érték azon hányada határozza meg, amelyet a termelő munkások bér formájában kapnak meg; mivel a termelési eszközök értékkel bíró áruk formáját öltik, ezért mint „tőkék", azaz mint a termelésben lekötött értékek jelennek meg. A munkaértékelmélet szempontjából minden kísérlet, amely a tőke termelékenységét vagyis határtermékét kívánja kiszámítani, mint például a termelési függvények tanulmányozása, elvéti a makroökonómiai lényeget, mivel összekeveri a termelés és realizálás időbeli késéseit a munka kizsákmányolásának társadalmi körülményeivel és a termelés technikai feltételeit kifejező q haszonkulccsal.

3. Realizálás és felhalmozás

Az itt körvonalazott modell burkoltan eltekint a realizálás problémájától, vagyis — az elfogadott makroökonómiai nyelvvel élve — a hatékony kereslettől. Elvonatkoztat, amennyiben felteszi, hogy a termelés és az eladás közti késés, a $b($. $)$ függvény, a rendszer adott paramétere. Ez azt jelenti, hogy feltesszük: a vállalatnak csupán annyit kell tennie az eladás érdekében, hogy előállítja az árut és aztán a megfelelő ideig vár, amíg egy vásárló leemeli azt a polcról.

Azonban a realizálás a tőkés termelésben nem automatikus, sem az egyes vállalat számára, mert esetleg helytelen árut termelt a kereslet éppen érvényes nagysága vagy minősége szempontjából, sem pedig a társadalmi tőke egésze számára, mint erre *Keynes* és *Kalecki* figyelmeztet a hatékony összkereslet elemzése alkalmából. Honnan származik a hatékony kereslet, hogy a késztermékeket realizálja?

A tőke körforgásának szempontjából a pénz formájában jelentkező kereslet, amely az árukat realizálja, magából a körforgásban létrehozott jövedelmekből ered. A kereslet egyik része a tőkések termelési eszköz vásárlása, kC. Ez a vásárlás késztermékek iránti kereslet, avégett, hogy a termelés ráfordításaiként vagy termelési eszközökként használják fel ezeket. A kereslet második alkotóeleme a termelőmunkásoknak fizetett bérből ered, ezt létfenntartási eszközökre költik, talán némi dinamikus késleltetéssel, amint azt az életciklusra vonatkozó fogyasztási hipotézis sugallja. A harmadik alkotóelem a tőkés háztartások kereslete, valamint olyan háztartásoké, amelyek a nem-termelő munkából fakadó jövedelmeket élvezik (adminisztratív, kereskedelmi és pénzügyi költségek stb.), oly kereslet ez, amely visszavezethető az értéktöbbletből fakadó jövedelmekre. Az államháztartás is keresletet támaszthat bizonyos késztermékekre, jövedelme a többletérték különböző részeire vagy a bérekre kivetett adókból fakad.

Itt tehát egyéb értékkörforgásokkal foglalkozunk, aholis a szereplők pénzügyi jövedelme abból fakad, hogy eladják munkaerejüket, vagy elsajátítják az értéktöbblet bizonyos részeit, s ezt a pénzt aztán készárukra költik.

[5] Lásd Marx (Összes művei 24. kt.) A tőke II. kötet XII. és XIII. fejezetét e megkülönböztetés tárgyalását illetően.

S itt egyszerre paradoxonra bukkanunk. Ha feltételezzük a sima és folytonos felhalmozást, a tőke körforgásának minden szakaszában a megfelelő késleltetésekkel, akkor a körforgás bármely pontján jelentkező értékáramlat oly értékáramlatnak felel meg, amely korábbi időpontban és a körforgás egy korábbi szakaszában jelentkezett. Tehát a (2.8) és (2.11) egyenletekben:

$$S(0) = (1 + q)a^*(g)b^*(g) \tag{3.1}$$

$$C(0) = (1 + pq)c^*(g)S(0)/(1 + q). \tag{3.2}$$

Márpedig az $a^*(g)$, $b^*(g)$ és $c^*(g)$ együtthatók kisebbek egynél, ha g pozitív és csökkennek g növekedtével. De a hatékony kereslet C-ből és S alkatelemeiből ered. Ha a tőkés késéssel költi el az újra megtérült költségeket, vagy a munkásháztartások késéssel költik el a rájuk jutó értéktöbbletet, vagy késve ruházzák be újra az értéktöbbletet, akkor e forrásokból kisebb hatékony kereslet fakad, mint az eladások szükséges értéke. Csak ha $g = 0$, tehát ha a késleltetési együtthatók eggyel egyenlőek, csak akkor elégséges a kereslet arra, hogy realizálja a készárukban foglalt értéktöbbletet. Ebben az értelemben tehát ellentmondás van a pozitív rátájú felhalmozás és a termelt áruk realizálása közt.[6]

Ez az ellentmondás csak úgy oldható fel, ha a rendszer bizonyos szereplői, a tőkés vállalatok, az állam vagy a háztartások elkölthetik jövedelmüket még mielőtt realizálták volna. Ez kétféle módon történhet: a legnyilvánvalóbb és általános az adós olyan kötelezettségvállalása, amelyet későbbi jövedelemből tervez kiegyenlíteni. A második olyan pénztőkék elfogyasztása, amelyeket a tőkés termelési folyamaton kívül halmoztak fel.

A várható jövedelem meghitelezése *nem hoz létre* új értéket, s ezt igen fontos tudatosítani. Ténylegesen csak átruházza azt az értéket, amelyet a termelés egyik szereplője már realizált és átmenetileg pénzformában tart, egy másik szereplőre, aki elkölti ezt — és ezzel más készáruk értékét realizálja. A hitelező részére a kölcsön a múltban létrehozott és realizált értéket képvisel; az adós számára pedig olyan értéket, amelyet a jövőben remél csak megkapni. A szempontok ilyen különbözőségéből ered a csőd lehetősége és a hitelrendszer egyéb fennakadásai.

A hitelező rendszerint olyan helyzetben van, hogy kialkudhatja annak az értéktöbbletnek egy részét, amelyet a tőkés adós a termelés megfelelő ciklusának megindításával, a kölcsön elköltésével, elsajátítani remél. Ez a rész a kölcsön kamata. Létezése a tőkéseknek nyújtott kölcsönök esetében azt eredményezi, hogy a többi adósnak is meg kell fizetnie, hogy a kölcsönökért versenyezni tudjon. Tehát a háztartások és az állam kölcsönt vehetnek fel, anélkül, hogy azt terveznék: a tőkés termelésbe fektetve értéktöbbletet fognak létrehozni, a kamatot azonban akkor is ugyanúgy meg kell fizetniök. Normálisan azt várhatnánk, hogy a kamatráta nem emelkedhet hosszú időre a bruttó profitráta fölé, mivel az utóbbi ráta korlátozza azt amit a lehetséges tőkés adósok felkínálhatnak. Alulról a kamatrátát az a fáradság és kockázat korlátozza, amely a kölcsönadással jár. E tág korlátokon belül a hitelezők és adósok gazdasági helyzete ingadoztatja a kamatrátát.

Hitelválság idején természetesen más körülmények is befolyásolhatják a kamatrátát: az adósok kötelezettsége egyéb adósságok kifizetésére a likviditás

[6] E problémának híres irodalma van. Lásd Marx i. m. XXI. fejezetét, Luxemburg (1951) valamint Luxemburg és Bukharin (1972) könyveit.

hiányának periódusaiban, és a hitelezők bizonytalansága a kölcsönvevők fizetőképességét illetően.

A tőke körforgásának szempontjából a hitelműveleteket elsősorban azok a késleltetések határozzák meg, amelyeket maguk a tőkés vállalatok szenvednek el jövedelmeik elköltése és későbbi jövedelmeik befutásának tervezése során. Költségvetési és pénzügyi szervei révén az állam szabályozza és korlátozza ezt az összeütközést saját hitelezése és kölcsönzése bonyolítása révén — ezek formájukban nem különböznek alapvetően a magánhitel és magánkölcsön formáitól. Persze az állam nem tipikusan mint tőkés vesz fel kölcsönt, nem értéktöbblet létrehozása céljából. Az államadósság kamatait az adóbevételekből fizetik ki.

A kamat maga ez esetben pusztán egyik alkateleme az értéktöbblet áramlatának, nem valamilyen értékes áru vagy szolgáltatás ellenértéke, hacsak nem igen átvitt értelemben.

Az itt felállított modell nyelvén, ha a realizálást közelebbről figyelemmel kísérjük, akkor el kell vetnünk azt a feltételezést, hogy az eladás késleltetése, a $b(\,.\,)$ függvény, adott. Meg kell engednünk, hogy az eladás késését maguk a belső adottságok határozzák meg, ezek ismét az összesített kereslettől függenek.

Az eladásokat így foglalhatjuk képletbe:

$$S(t) = (1-k)C(t) + \int_{-\infty}^{t} k(t')d(t-t';t')C(t')dt' + \int_{-\infty}^{t} e(t-t';t')[1-p(t')]S''(t')dt' + B'(t), \tag{3.3}$$

itt $d(\,.\,)$ az a késleltetés, amellyel a dolgozók háztartása költi el a béreket, $e(\,.\,)$ az a késleltetés, amelyet a nem felhalmozott értéktöbbletből eredő jövedelmek szenvednek el és $B'(t)$ az az állami és háztartási kiadás, melyet a későbbi jövedelem reményében új kölcsönök felvételével finanszíroznak.

Ekkor $C(t)$ is részekre bontandó, mint

$$C(t) = \int_{-\infty}^{t} S'(t')c(t-t')dt' + \int_{-\infty}^{t} p(t')S''(t')c(t-t')dt' + B(t), \tag{3.4}$$

és itt $B(t)$ az új kölcsönökkel fedezett kiadás.

A készáruk készletét továbbra is az alábbi egyenlet kormányozza:

$$dM(t)/dt = Q(t) - (S(t)/[1+q(t)]). \tag{3.5}$$

Ha kereskedelmi készleteket FIFO folyamatnak[7] tekintjük, akkor az eladás nem más mint a készáruk értéke egyszerű T késés után, aholis

$$dT/dt = S(t)/((1+q)Q(t-T)) - 1. \tag{3.6}$$

[7] FIFO, azaz „first in, first out": a legkorábban beérkezett készletek kerülnek legelőször eladásra. Ez az alábbi szabálynak felel meg:

$$\int_{t-\Delta t}^{t} S(t')/(1+q(t'))dt' = \int_{t-\Delta t-T(t-\Delta t)}^{t-T(t)} Q(t')dt'$$

Mindkét oldalon differenciálva kapjuk a (3.6) egyenletet.

4. Realizálás és felhalmozás

A realizálást is expliciten számba vevő modellt a következőképpen foglalhatjuk össze:

$$Q(t) = \int_{-\infty}^{t} C(t')\,a(t-t';t')\,dt' \tag{4.1}$$

$$S(t) = (1-k(t))C(t) + \int_{-\infty}^{t} k(t')C(t')\,d(t-t';t')\,dt' + \int_{-\infty}^{t} (1-p(t'))S''(t')\,e(t-t';t')\,dt' + B'(t) \tag{4.2}$$

$$C(t) = \int_{-\infty}^{t} S'(t')\,c(t-t';t')\,dt' + \int_{-\infty}^{t} p(t')S''(t')\,c(t-t';t')\,dt' + B(t) \tag{4.3}$$

$$dF/dt = S'(t) + S''(t) - C(t) + B(t) \tag{4.4}$$

$$dN/dt = C(t) - Q(t) \tag{4.5}$$

$$dM/dt = Q(t) - S'(t) \tag{4.6}$$

$$dT/dt = S(t)/(1+q(t-T))Q(t-T) - 1 \tag{4.7}$$

$$S'(t) = S(t)/(1+q(t-T)) \tag{4.8}$$

$$S''(t) = q(t-T)S(t)/(1+q(t-T)). \tag{4.9}$$

Kilenc változónk van, $Q, C, S, S', S'', F, N, M$ és T; ugyancsak kilenc egyenletünk, így a rendszer jól meghatározott ha adottak a késleltetési függvények, ezenkívül p, q, B és B' értéke.

A (4.7), (4.8) és (4.9) egyenletek az eladásra váró készáru-készletek FIFO dinamikáját írják le. Ez határozza meg az adott pillanatban eladott kibocsátás pontos keletkezési idejét és így a bevétel feloszlását megtérült költségekre és többletértékre. A q haszonkulcsot ebben a modellben a termelés idején határozzák meg, mivel $q = ek$. A költségek k összetétele a termelési döntések következménye. Az e értéktöbbletrátát $(1 - wm)/wm$ alakban mérjük, ahol w az órabér és m a pénz értéke a termelés idején, s így e értékét is a termelés határozza meg. Ebben a fejezetben feltesszük, hogy a pénz m értéke állandó marad az idő folyamán. Ezt a felosztást adottnak véve a (4.2) és (4.3) egyenletek egy autonóm alrendszert alkotnak, ez az a körforgás, amely a termelést leíró (4.1) egyenlethez az eladásra váró készáruk készlete révén kapcsolódik, amit M, illetve a T eladási késleltetés mér.

Tehát itt most olyan modellünk van, amelynek tényleges felhalmozási rátája a realizálás körülményeitől függ, lényegében tehát a $c(\,.\,)$, $d(\,.\,)$ és $e(\,.\,)$ késleltetési függvényektől és a B valamint B' új hitelektől. Feltételezve mármost, hogy a rendszer exponenciális növekedésben van, s így B és B' is éppúgy exponenciálisan növekszik, mint a többi változó, kiszámíthatjuk adott stacionárius $a(\,.\,)$, $b(\,.\,)$, $c(\,.\,)$, $d(\,.\,)$ és $e(\,.\,)$ késleltetések és állandó p és q paraméterek mellett az értékáramlatok relatív nagyságát.

A (4.2) egyenletből (1.8) és (4.9) felhasználásával következik, hogy

$$S'(0) = [1 - k(1 - d^*(g)) + B'(0)]/[1 + q(1 - (1 - p)e^*(g))], \tag{4.10}$$

a (4.3) egyenletből pedig

$$1 = c^*(g)(1 + pq)S'(0) + B(0). \tag{4.11}$$

E két utóbbi egyenlet határozza meg a felhalmozás tényleges g rátája és az új hitelek $B(0)$ és $B'(0)$ szintje közti kapcsolatot, ha adott a késleltetés, p és q. Ha a munkások késleltetés nélkül költik el béreiket és az értéktöbbletet is azonnal elköltik, akkor $d^*(g) = e^*(g) = 1$ minden g érték esetében. Ha továbbá feltesszük, hogy csak a tőkés vállalatok kölcsönöznek, s ezért $B'(0) = 0$, akkor azt kapjuk, hogy $S'(0) = 1/(1 + pq)$. Ez a klasszikus marxi eset, s ekkor a (4.11) egyenlet alakja

$$B(0) = 1 - c^*(g). \tag{4.12}$$

Világos, hogy a realizált g növekedési ráta összefügg az új hitelekkel fedezett tőkés költségek részarányával, ennek értéke $B(0)$. Minél magasabb g, annál nagyobb lesz $B(0)$ is.

Adott g növekedési ráta esetén

$$Q(0) = a^*(g) \tag{4.13}$$

$$N(0) = [1 - a^*(g)]/g \tag{4.14}$$

$$M(0) = (a^*(g) - S'(0))/g \tag{4.15}$$

$$F(0) = [(1 + pq)S'(0) - 1 + B(0)]/g \tag{4.16}$$

$$D(0) = B(0)/g, \tag{4.17}$$

ahol $D(t)$ a tőkés vállalatok adósságállománya.

A realizált növekedési úton a tőkés vállalatok a pénztőkeként felhalmozott F pénzértékét veszik kölcsön, továbbá a többi szektor esetleges nettó pénzfelhalmozását. A klasszikus marxi esetben például

$$F(0) = B(0)/g = D(0). \tag{4.18}$$

Hogy a tárgyalást egyszerűsítsük, csak azt az esetet vesszük szemügyre, ahol a pénzköltés azonnali és csak a tőkések vesznek fel hiteleket, s így $d^*(g) = e^*(g) = 1$, valamint $B'(0) = 0$.

Bármely adott g növekedési ráta esetén, így

$$M(0) = [a^*(g) - 1/(1 + pq)]/g, \tag{4.19}$$

és ha $dT/dt = 0$ — és így kell ennek lennie az exponenciális pályán — akkor

$$(1 + q)Q(0)\exp(-gt) = S(0), \tag{4.20}$$

vagyis

$$T = (1/g) \ln [(1 + pq) a^*(g)]. \tag{4.21}$$

Ezek az egyenletek mármost felülről korlátozzák a realizálható g növekedési rátát, mivel mind $M(0)$ mind T értéke pozitív.
Ezt a felső g^* korlátot a

$$(1 + pq) a^*(g^*) = 1 \tag{4.22}$$

reláció határozza meg.

Ez az eredmény, amely szerint a felhalmozás maximális g^* rátája a q haszonkulcstól, a p tőkésítési rátától és az $a(\,.\,)$ termelési késleltetéstől függ, központi fontosságú marxista szempontból. A haszonkulcs a költségek összetételétől függ, s ez az $a(\,.\,)$ termelési késleltetéssel együtt a termelőerők fejlettségének szintjét tükrözi, valamint az értéktöbblet rátájától, amely a tőkések és munkások közti társadalmi viszonyokat tükrözi. A felhalmozás maximális rátájának nem kell a munkaerő növekedésének rátájától, vagy a rendelkezésre álló erőforrások teljes kihasználásától függenie, mint a neoklasszikus növekedési elméletben. Az érték csak a haszonkulcs révén növekedhet, amely minden egyes körforgásában rárakódik. A maximális növekedési ráta az érték lehető leggyorsabb körforgásától függ, amikor a realizációs késleltetés zérus. Ez az eset a Neumann-féle növekedési útnak felel meg, mivel a felhalmozást csupán a termelési idő és a tőkék rendszerének adott növekedési képessége korlátozza.

A klasszikus marxi esetben világosan látható a tőke körforgásának paraméterei és a felhalmozás realizált és maximális rátái közötti kapcsolat. Minél alacsonyabb a haszonkulcs, mennél alacsonyabb a tőkésítés rátája és mennél hosszabb a termelési késleltetés, annál alacsonyabb a felhalmozás maximális rátája. Minél magasabb a felhalmozás realizált rátája, annál nagyobbnak kell lennie az új hitelekkel fedezett költségek részarányának, annál rövidebbnek a termelés és eladás közt eltelt időnek, tehát annál kisebbek a készárukészletek, amelyek eladásra várnak.

Ez a modell összeveti és megmutatja a hatékony kereslet Keynes-i elemzése és a marxista termelési elemzés közti viszonyt. Ahogyan arra Keynes rámutatott: a hatékony kereslet bővülése növelni fogja a felhalmozás realizált rátáját, de a tőkés termelés nyereségességének változása nélkül csak akkor teheti ezt, ha meggyorsítja az érték mozgását a tőkék körforgásában, mégpedig a készletek csökkentése révén — vagy esetleg az állótőke kihasználásának növelése révén.

5. Változások a pénz értékében

Mindezideig feltételeztük, hogy a pénz értéke, a társadalmi absztrakt munka tömege, amelyet mondjuk egy dollár képvisel, állandó. Vizsgáljuk most azt a helyzetet, amikor a rendszernek ez a paramétere az idő folyamán sima exponenciális módon változik.

Minden egyes pillanatban a pénz $m(t)$ értéke munkaidőmennyiségekre váltja át a pénzmennyiségeket. A pénz értéke nem reciproka az árszínvonalnak, mint ahogy azt általában mérik, mivel az árszínvonal a jószágok és szolgáltatások egy bizonyos kosarának pénzára. A pénz értékének reciproka az ilyen értelemben vett árszínvonal és a munkatermelékenység szorzata, az utóbbi a javak azon tömegét méri, amelyet egy órai munkával elő lehet állítani. Ha megértjük a pénz értékének mozgását, ez az első lépés az árszínvonal mozgásának megértéséhez, de ezt ki kell egészíteni a munkatermelékenység változásainak elméletével, hogy az árszínvonal elméletéhez jussunk.

Azt a megállapodást fogadjuk el, hogy a pénz értékét az áruk realizálásának pillanatában mérjük; nem más ez, mint az átlagos árura fordított szükséges munka viszonya az eladás folytán realizált pénzbeni hozzátett értékhez. Ha a munka termelékenysége változik, akkor az áru értéke eladásakor az akkor éppen újratermeléséhez szükséges munka mennyisége, és nem az a történeti munka, amelyet ténylegesen tartalmaz.[8]

A pénz értékének változásai nem érintik a tőke körforgásának értékviszonyait. Ez a következtetés adódik, ha feltesszük, hogy az értéktöbblet rátája, vagy ami ezzel egyenértékű, a munkaerő értéke nem változik, miközben a pénz értéke megváltozik.

Ez annyit jelent, hogy feltesszük: a pénzbérek teljesen és azonnal igazodnak a pénz értékének változásához, úgy hogy a pénzbér és a pénz értékének szorzata, a munkaerő értéke, azonos marad. Ez a feltevés néha fennáll, de gyakorta nem érvényesül egyes történeti közjátékok folyamán.

A készáruk áramlatának értéke, költségén mérve, továbbra is

$$Q(t) = \int_{-\infty}^{t} a(t-t';t')C(t')dt'. \tag{5.1}$$

Ha Q pénzbeni értékét akarjuk kiszámítani, bármilyen időpillanatban, akkor el kell ezt osztanunk a pénz értékével. A változó elé tett csillaggal fogjuk jelezni, hogy a változó *pénzértékéről* van szó, és akkor

$$*Q(t) = Q(t)/m(t). \tag{5.2}$$

Olyan útvonalakat fogunk vizsgálni, amelyek mentén a pénzérték exponenciálisan csökken, mégpedig u ütemben:

$$m(t) = m(0) \exp(-ut). \tag{5.3}$$

A realizációs almodell — a (4.2) és (4.3) egyenletek megfelelője — most pénzértékben fejezendő ki. Világos, hogy a felhalmozás *pénzbeni* rátája magasabb g-nél, mégpedig a pénz elértéktelenedésének ütemével, u-val. A klasszikus marxi esetben, ahol a pénzköltés nem késlekedik és csupán a tőkés vállalatok vesznek fel hitelt, azt kapjuk, hogy

$$*S(t) = *C(t) \tag{5.4}$$

$$*C(t) = \int_{-\infty}^{t} *S(t')c(t-t';t')dt' + *B(t). \tag{5.5}$$

Ha a rendszer exponenciális pályán mozog, akkor a pénzáramlatok mind a $(g+u)$ rátával fognak növekedni. A felhalmozás pénzbeni rátája és az új hite-

[8] Lásd RUBIN (1972) és MARX i. m. I. kötet 1. fejezet.

lezések szintje közti összefüggés — lásd imént a (4.12) egyenletet — most a következő lesz:

$$*B(0) = 1 - c^*(g + u) \tag{5.6}$$

Minél magasabb a pénz elértéktelenedésének rátája, annál alacsonyabb a felhalmozás reális rátája minden adott $*B(0)$ esetében, az utóbbi a pénzben kifejezett költségek új hitelekkel fedezett hányada.

Még egy összefüggésre van szükségünk, hogy meghatározzuk u, azaz a pénz elértéktelenedésének ütemét. Mint első közelítést tegyük fel, hogy u csak T-től függ, a termelés és az eladás közti időtartam nagyságától. Az elgondolás itt az, hogy ha T rövidé válik, akkor a tőkések úgy vélik, hogy a kereslet erőteljes és a piacok elbírják az áremelést, de ha T nagy, akkor a vállalatok csak nagy üggyel bajjal tudják eladni termékeiket és visszariadnak az áremeléstől, sőt tán kénytelenek csökkenteni is az árakat. Vegyük észre, hogy T makroökonómiai változó és annak az *átlagos* nehézségnek a mértéke, amellyel az *összes* tőkés vállalkozó küzd termékei eladásakor. T nem mértéke egyes vállalatok versenyelőnyének. Persze a valóságban a vállalatok az átlag körül fognak szóródni éppen a versenyből fakadó különbségek miatt. Egyes vállalatok szűkös piacokkal állhatnak szemben akkor is, amikor átlagosan túltermelés és igen lassú eladás tapasztalható. T maga továbbra is a haszonkulcstól, a tőkésítési rátától és a növekedés valóságos rátájától függ:

$$T = (1/g) \ln [(1 + pq) a^*(g)] \tag{5.7}$$

$$u = u(T), \text{ ahol is } u' < 0. \tag{5.8}$$

Az (5.6), (5.7) és (5.8) egyenletekből kiszámíthatjuk g, u és T értékét, ha adott p, q, $*B(0)$, valamint a termelési és pótlási késleltetések, $a(\,.\,)$ és $c(\,.\,)$. Világos, hogy $*B(0)$ értékének növekedése megfelel $(g + u)$ növekedésének; ez a növekedés megoszlik a felhalmozás tényleges rátája és a pénz elértéktelenedése közt, az (5.7) és (5.8) egyenletek által meghatározott arányban. Sőt, behelyettesíthetjük az (5.7) egyenletet az (5.8) egyenletbe, amikor is azt írhatjuk, hogy:

$$u = u\{(1/g) \ln [(1 + pq) a^*(g)]\}. \tag{5.9}$$

Az utóbbi egyenletet deriválva világos, hogy u együtt növekedik g-vel, ha a többi paraméter adott, és *csökken* ha a felár növekszik vagy a tőkésítés rátája növekszik, ha g állandó.

Itt teljes az összefüggés a termelés és a forgalom közt a realizálás késleltetése és a pénz elértéktelenedése révén. Nagyobb hatékony kereslet — amelyet ebben a modellben nagyobb $*B(0)$ képvisel — növeli a felhalmozás rátáját, pénzben mérve. Ennek a növekedésnek egy része az értékfelhalmozás realizált rátájának növekedése, a maradéka pedig a pénz elértéktelenedésének magasabb rátáját eredményezi. Amint a felhalmozás realizált rátája megközelíti a termelőerők fejlettsége és a társadalmi viszonyok által meghatározott maximális rátát, a felhalmozás pénzbeni rátájának egyre nagyobb része mint a pénz elértéktelenedése jelenik meg.

Meglepő eredménye e modellnek, hogy a haszonkulcs csökkenése, amely csökkenti a felhalmozás maximális rátáját, inflációs hatást fog kelteni, mivel csökkenteni fogja az eladásra váró készáruk készletét és rövidíteni fogja az eladási időt. Mivel a tőkésítés rátája, p, mindig a haszonkulccsal szorozva jelenik meg, azonos eredményekre vezet a tőkésítés rátájának csökkenése is.

Ez a következtetés megmutatja, hogy az összesített hatékony kereslet befolyásolása az új hitelezés szabályozása révén hatással van a felhalmozás tényleges rátájára, azonban ezt a hatást korlátozzák a nyereségesség és a felhalmozás alapvető körülményei.

A modell könnyen kiterjeszthető az általános esetre, amikor a munkások fogyasztása és az értéktöbbletből való fogyasztás is késlekedik, és ahol más szektorok is eladósodnak, a tőkéseken kívül.

6. Következtetések

A tőke körforgásának eszméje a makroökonómiai elemzés alternatív módszerét kínálja, amely a marxi munkaértékelméleten alapul. Általános elemzési keret ez, amely más elméletek hipotéziseit is fel tudja ölelni, ellenőrizhető formában. Például a „reál egyenleg" hatását fel lehetne mérni, ha p értékét, azaz a tőkésítés rátáját, a háztartások vagyonától tesszük függővé. A beruházás és a kamatláb összefüggésének Keynes-i elméleteit a tőke körforgásának keretében kifejezhetjük, ha az új hitelezés, B értékét, vagy a pótlási késleltetés $c(\,.\,)$ függvényét a kamatlábtól tesszük függővé. Mivel a tőkekörforgási modell változóit a vállalati mérlegek révén megfigyelhetjük, elvileg ellenőrizhetjük, hogy milyen fontosak ezek a hipotetikus makroökonómiai hatások az egyes időszakokban.

Egyszerű lineáris formájában, ahogy e tanulmányban bemutattam, a tőke körforgásának modellje a tőkés felhalmozás összesített folyamatának alapvető marxi felfogását tükrözi. A felhalmozás maximális rátáját a termelés társadalmi viszonyai korlátozzák, ezek az értéktöbbletrátában nyernek kifejezést, valamint korlátozza azt a termelőerők fejlődésének szintje is, ez a költségek összetételében és a termelési késleltetésben fejeződik ki. A munka és más erőforrások korlátozottsága — amely alapvetően meghatározza a növekedési rátát a neoklasszikus növekedési modellekben — itt csak a társadalmi változók révén gyakorol hatást a felhalmozás maximális rátájára. A felhalmozás tényleges rátája megfelel a rendszerben található új hitelezés bizonyos szintjének. A tőkés termelés alapvető nyereségességének csökkenése csökkenti a felhalmozás maximális rátáját és a realizálási késleltetést. Ha a pénz elértéktelenedésének rátája növekszik, amint az eladási késleltetés megrövidül, akkor az alacsonyabb haszonkulcs megfelel a pénz gyorsabb elértéktelenedésének. Ha a pénz nem értéktelenedhet el gyorsabban, akkor a rendszernek a felhalmozás alacsonyabb tényleges rátájához kell alkalmazkodnia, oly folyamat ez, amely elősegítheti a felhalmozás és a hitelek válságát azonban a válságot magát csak az itt elemzett exponenciális növekedési útvonalakon túlmenve lehet vizsgálni. Ezek a következtetések Marx egyik fontos eszméjét tükrözik: a pénz értékének és a felhalmozás rátájának változásához hasonló jelenségek az alapvető társadalmi viszonyok változását tükrözik, amelyek a termelést szabályozzák.

A tőke körforgásának modellje úgy tekinthető, mint ami a gazdasági növekedés számos elméleti megközelítését összefoglalja. Keynes eszméje, hogy a gazdasági tevékenység az összesített hatékony kereslettől függ, kifejeződik a felhalmozás tényleges rátája és az új hitelezés bővülésének viszonyában. A tőke körforgási modellje megmagyarázza e viszony dinamikáját; nagyobb hatékony kereslet meggyorsítja az érték áramlását a körforgáson belül, mivel csökkenti a realizálás késlekedését. (El lehet képzelni olyan rendszereket, amelyekben a termelési késleltetés is rövidülne amint a felhalmozás realizált rátája növekszik. Ez a rövidülés az állótőke kihasználási rátájának növekedése képében jelentkezne.) A tőke körforgási modellje megmutatja, hogyan kapcsolódik a hatékony kereslet szerepe a felhalmozás maximális rátájának korlátozottságához. A felhalmozás maximális rátája sajátos esete a Neumann-féle növekedési rátának, mivel ha a realizáció késleltetése zérus, akkor a rendszert az értéknek a termelésben való bővülési képessége korlátozza. Más szempontból a tőke körforgásának modelljét a Harrod—Domar féle modellek általánosításának tekinthetjük, ahol a pénzpiacokat részletesebben kezeljük.

Bár az itt vizsgált modell tisztán lineáris, elemezhetünk ugyanebben a keretben nem lineáris késleltetési struktúrákat és paramétereket és az exponenciális útvonal elemzéséről áttérhetnénk a teljes dinamikus sajátosságok vizsgálatára.

IRODALOM

Foley, D.: *A Note on the Value of Money, the Value of Labor Power, and the Transformation Problem*, mimeo. Barnard College, 1980.

Kalecki: *Studies in the Theory of Business Cycles*, New York, Kelley, 1966.

Keynes, J. M.: *The General Theory of Money, Interest, and Employment*, New York, Harcourt, Brace, 1936.

Lipietz, A.: „The So-Called 'Transformation Problem' Revisited", *Journal of Economic Theory*, (megjelenés alatt) 1982.

Luxemburg, R.: *The Accumulation of Capital*, New York, Monthly Review, 1951.

Luxemburg, R., and Bukharin, N.: *The Accumulation of Capital An Anti-Critique*, New York, Monthly Review, 1972.

Marx, K.: *Capital*, Volumes I and II, New York, International Publishers, 1967.

Pasinetti, L.: *Growth and Income Distribution*, Cambridge, Cambridge University Press. 1974.

Rubin, I. I.: *Essays on Marx's Theory of Value*, Detroit, Black and Red, 1972.

KÖNYVEKRŐL

HUNYADI LÁSZLÓ—NEMÉNYI JUDIT—SUBICZ PÉTER—FIALA ANDRÁS: *A rövidtávú tervezés ökonometriai modellje* (SZÁMKI Könyvek) Budapest, 1980. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. 167. pl.

A könyv azt az ökonometriai modellt mutatja be, amely a Számítógépalkalmazási Kutatóintézetben 1978-ban azzal az igénnyel készült, hogy a rövidtávú tervezés számára segédeszközül szolgáljon. A munka két fő részből áll: az első rész az ökonometriai modellezés céljait és eszközeit tárgyalja; a második a modellt, a becslési eredményeket és a modell segítségével készült előrejelzéseket részleteiben mutatja be.

Az első rész lényegében az ökonometriai modellezés módszertani kérdéseivel, a modell és a tervezés kapcsolatával, a modell szerkezeti felépítésével foglalkozik. Ez a rész tartalmazza a modell adatbázisának részletes tárgyalását is. A második rész a modell specifikációját, a becsült eredményeket és a becslések statisztikai megbízhatóságát, az ezek alapján levonható közgazdasági következtetéseket, valamint az előrejelzéseket tárgyalja. Ezzel kapcsolatban különböző modellvariánsokkal végzett számítási eredményeket is bemutat. A műhöz a Függelék, a használt források jegyzéke és az irodalomjegyzék csatlakozik.

A magyar szakirodalomban viszonylag kicsi azoknak a műveknek a száma, amelyek konkrét ökonometriai modellt mutatnak be. Önmagában ez a tény is aktuálissá tette Hunyadi és szerzőtársai modelljének megjelentetését — annál is inkább, mert az elmúlt években Magyarországon is fokozódott az ökonometriai modellekkel szemben támasztott olyan értelmű várakozás, hogy ezeket a gazdaságpolitika és gazdaságirányítás problémakörével szorosabban kapcsolják össze.

Megfogalmazódott néhány alapvető követelmény a modellekkel szemben, mint pl. a szabályozórendszer hatásainak figyelembevétele, a reálszféra és a pénzügyi szféra összekapcsolása, negyedéves adatokon alapuló egyenletek, nem-lineáris összefüggések, különböző típusú modellek közötti kapcsolatteremtés. Ezek közül a módszertani feladatok közül nem is egyre a szóban forgó modell megpróbál valamilyen megoldást találni. Éppen az ajánlott módszertani megoldások és a gyakorlati probléma-orientáltság összeszövődése folytán a könyv rendkívül érdekes gondolati konstrukció.

A tervezés és a modell kapcsolata az ökonometriában már J. *Tinbergen* korai művei óta téma. Az ökonometriai modell ma is a tervezés egyik fontos eszköze Hollandiában, s növekvő mértékben kezd azzá lenni pl. Franciaországban is. A modell mindenekelőtt a *rövidtávú* tervezés (és előrejelzés) segédeszköze akar lenni. Egyre parancsolóbb szükségszerűség a rövid távon érvényesülő hatások kifejezése a modellekben — ami önmagában is nehéz probléma, mert az idősorokon alapuló ökonometriai modell elsősorban hosszú távon érvényesülő kapcsolatok kifejezésére képes. A rövid távú — elsősorban szabályozási — hatások számszerűsítésére olyan változók szolgálnak, mint az adók, árkiegészítések, visszatérítések változói, részben egyszeri hatásokat számszerűsítő karakterisztikus változók.

A pénzügyi szféra és a reálszféra közötti kapcsolatot a szerzők különböző pénzügyi változók specifikációjával igyekeztek biztosítani. Ezzel azonban a reálszféra és a pénzügyi szféra kölcsönös függőségének az ábrázolását még nem oldották meg.

A modell nagy figyelmet szentel a dezaggregáció kérdésének. A modell központi blokkjában (részmodelljében) aggregált összefüggések szerepelnek, az ágazati összefüggések pedig az „ágazati részmodellben". A módszer elvben csak helyeselhető. A szokás azonban az, hogy egy központi maghoz általában több részmodell (fogyasztási, jövedelmi stb. részmodell) csatlakozik. Ettől eltérően és némileg szokatlanul azt a megoldást választották a szerzők, hogy a dezaggregált összefüggéseket nem több részmodellben, hanem *egyetlen* ágazati részmodellben vizsgálják — ennek pedig az a feladata, hogy a központi részmodell előrejelzéseiből kiindulva becsülje és előrejelezze az ágazati folyamatokat. Az egyetlen ágazati részmodell alkalmazása azonban — több részblokk helyett — kevésbé indokolt megoldásnak tűnik.

Kiemelt érdekességű az időbeli dezaggregációnak a kötetben tárgyalt módozata: az éves adatbázison becsült egyenletek lebontása negyedévekre. A szellemes megoldási módszer lényege, hogy a negyedéves modell a „fiktív" negyedéves modell és a negyedéves „eltérések modellje" segítségével írható fel (53—62. o.). Ez persze kényszermegoldás, hiszen a probléma megoldását az jelentené, ha valamennyi egyenletet lehetséges volna negyedéves adatbázison becsülni. A kutatások jelenlegi állása szerint erre nem volt mód (a szerzők sem tűzhették ki célul), a szerzők kénytelenek voltak megelégedni azzal, hogy a nyolc legfontosabb aggregált változó negyedéves függvényeit elkészítsék (111. o. és köv.).

Érdekes módszerbeli újítással éltek a szerzők, amikor az ökonometriai modellt lineáris programozási feladattal kapcsolták egybe. Lényegében az 1979-re végzett előrejelzés egyik változatát állították elő ezzel a módszerrel: a programozási feladat korlátozó feltételei, amelyek változatonként eltértek egymástól, az exogén változók jövőbeli alakulásának lehetséges alternatíváit fejezik ki. (Nem helyes, hogy a szerzők ezt a változatot mint az éves modell egyik „megoldási módját" tárgyalják — ez csupán az előrejelzésben alkalmazott egyik alternatíva).

Az ökonometriai modelleket bemutató munkák gyakran túlságosan kevés figyelmet fordítanak az adatbázissal kapcsolatos kérdéseknek, holott a becsült eredmények szempontjából ez nem csekély fontosságú. Hunyadi és társainak modellje ebből a szempontból is örvendetes kivétel: a problémának tág teret szentelnek.

A központi részmodell 44 egyenlettel (ennek megfelelően hasonló számú endogén változóval) és 42 predeterminált változóval operál, ez utóbbiak közül, a modell dinamikus jellegének megfelelően, jelentékeny számú (összesen 20) a késleltetett változó. Az ágazati részmodell 121 endogén változót és 185 predeterminált változót tartalmaz. A központi részmodell 44 összefüggése közül 20 a sztochasztikus egyenletek száma. A modellben alapvető jelentőségű reálszféra központjában a kapacitások oldaláról magyarázott bruttó termelés egyenlete áll. E köré csoportosulnak a fogyasztás, a felhalmozás, a külkereskedelem, az árak, jövedelmek, bérek, eszközjárulékok egyenletei. A pénzügyi szféra leírásának központjában a hozzáadott érték képződése és elosztása áll. Az áralakulások modellezése a modell folyóáras jellegéből következik. A világpiaci helyzetet leíró (exogén) változók a nem-rubel relációs importárindex közvetítésével befolyásolják a belföldi árakat. Az exogén változók további csoportját a központi támogatásokat és elvonásokat reprezentáló pénzügyi változók képezik.

A kiadvány a valósághoz híven bemutatja a standard statisztikai próbák eredményeit is. A determinációs együtthatók igen magas (az 1-hez közel eső) értékűek. Sajnos, meglepően magas azonban a nem szignifikáns paraméterek (és nem „változók", l. 91. old.) száma (a t-próba alapján, 95 százalékos szignifikancia-szinten számítva). 176 szignifikáns paraméterrel szemben 164 nem-szignifikáns áll. Dicsérni kell a szerzőknek azt a szándékát, hogy modelljuknek ezeket a „gyenge pontjait" nem kendőzik el, sőt saját maguk mutatnak rá. Az inszignifikáns paraméterek nagy száma azonban az előrejelzések megbízhatóságát kérdőjelezi meg, és mindazoknak a gazdaságpolitikai következtetéseknek a realitását, amelyek a modell alapján tehetők. Mindennek ellenére az 1978. évi előrejelzések viszonylag jónak mondhatók. Szem előtt kell tartani természetesen, hogy főleg a világgazdasági változások begyűrűzése, valamint a gazdasági irányításban gyakran bekövetkező változások folytán a prognosztizálás tárgyi feltételei ma lényegesen nehezebbek mint néhány évvel ezelőtt. Mindenesetre áll, hogy az 1978-as előrejelzések némiképpen magasabb növekedési ütemet prognosztizáltak annál, ami ténylegesen bekövetkezett; ennek legfőbb oka, hogy az 1977. év aránytalanságainak egyes továbbgyűrűző hatásai újabb aránytalanságokat szültek. Azon, hogy az ex post előrejelzett értékek szempontjából leggyengébbnek a készletfelhalmozás változója és a külkereskedelmi egyenleg változója mutatkozott, lényegében nincs mit csodálkozni. Az 1979. évi előrejelzés realitását már eleve veszélyeztette, hogy az 1979. évi számítások adatbázisa az 1977. évvel zárult, az 1978. évet már nem vehette figyelembe. Az előrejelzések egyébként különböző gazdaságpolitikai koncepcióktól illetve feltevésektől függően különböző változatokban készültek. A kötetet részletes és jó bibliográfiai összeállítás egészíti ki.

A kötet hazai ökonometriai irodalmunk határozott nyereségeként értékelhető.

NYÁRY ZSIGMOND

TUDOMÁNYOS ÉLET

A Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem Matematikai és Számítástudományi Intézetének munkássága

I. Az MSZI szervezeti felépítése

1976-ban alakult meg a Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetemen a Matematikai és Számítástudományi Intézet a volt Matematikai tanszék és a Számítástechnikai tanszék összevonásával.

Működési köre a matematika, a számítástechnika és a kapcsolódó tudományágak oktatására és művelésére terjed ki, ellátja a közgazdász továbbképzésből ráháruló szervező és oktató tevékenységet is. Nyomon követi a matematika és számítástudomány azon ágainak fejlődését, amelyeknek a közgazdasági alkalmazásokban szerepük van, vagy a jövőben szerepük lehet.

Alap- és alkalmazott kutatásokat végez e tudományterületeken, átveszi és népszerűsíti e tudományterületek hazai és nemzetközi eredményeit. Célja az, hogy magas általános műveltségű és matematikai ismeretekkel rendelkező közgazdászokat képezzen, akik a matematikai és számítástechnikai, elméleti és gyakorlati tudásuk alapján képesek a népgazdaság és a vállalatok előtt álló feladatok megoldásához hozzájárulni, új ismereteket befogadni és alkalmazni a tudományos és gyakorlati életben.

Az Intézet az Egyetem Általános Közgazdasági Karához tartozik. Öt osztályból áll, amelyekhez még a laboratórium és a könyvtár csatlakozik. Az osztályok feladatai a következők:

1. *A matematikai rendszerelméleti osztály* feladata a matematikai elméleti jellegű és egyszersmind a közgazdasági alkalmazásokkal összefüggő tárgyak oktatása, valamint saját kutatómunkáján kívül az Intézet kutatómunkájának összefogása és koordinálása.
2. *A közgazdasági alkalmazások osztályának* feladata a matematikai programozási, matematikai statisztikai és a sztochasztikus módszerekkel és modellekkel foglalkozó tárgyak oktatása, valamint a gyakorlati alkalmazásokat célzó kutató munka.
3. *Az oktatási módszertani osztály* feladata a matematikai alapozó tárgyak oktatása, a tananyagok elkészítése és az Intézet valamennyi tananyagának elkészíttetése egységes didaktikai alapon. Figyelemmel kíséri a vizsgáztatás, a számonkérés és ellenőrzés korszerű módszereit és gondoskodik bevezetésükről.
4. *A számítástudományi osztály* feladata az alapozó és a speciális számítástechnikai tárgyak oktatása. Elkészíti a szükséges oktatási anyagokat és szakmai kutatómunkát végez.
5. *Az informatika osztály* feladata az információs rendszerek oktatása alapozó és speciális tárgyak keretében. Foglalkozik az informatika matematikai és számviteli-statisztikai alapjaival és kutatja az alkalmazás lehetőségeit.
6. *Az intézeti laboratórium* feladata a számítástechnikai és matematikai oktatásban és a kutatómunkában fellépő, számítógép használatát igénylő munkák ellátása.

II. Az MSZI oktatómunkája

Az Egyetem minden szakán és tagozatán oktatunk. Alaptárgyainkat minden hallgató, szaktárgyainkat pedig elsősorban tervgazdasági- és iparszakos hallgatók veszik fel. Alternatív blokktárgyainkat az Egyetem bármely hallgatója felveheti. (A nappali tagozaton az I. éves hallgatók választhatnak a „normál” vagy az „emelt szintű” matematikai alapképzés között. Az emelt szintű képzés magasabb óraszámban folyik.) A tárgyakat az 1. táblában foglatuk össze, megjelölve, hogy az egyes szakokon a különböző tárgyakból hány féléven át folyik oktatás.

1. táblázat

Az egyes alap és szaktárgyak oktatása (félévek)

	Nappali tagozat								Esti és levelező		Mérnök közg.
	Terv-gazd. szak	Ipar szak	Közl. mezőg. pü. és áruforg.	Kül-gazd. szak	Nemz. kapcs.	Tanár A	Tanár B	Tanár C	Ipar szak	Többi szakok	Ipar és külgazd.
Analízis (függvénytan, diff. egy.)	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
Valószínűségelmélet (sztoch. folyamatok, mat. stat., szimuláció)	8	2	1	2	1	1	1	1	1	1	1
Algebra (lineáris alg., mat. progr., játékelmélet, gráfok, hálózatok)	8	2	1	1	1	1	1	1	3	1	1
Operációkutatás (elemek, esettanulmányok)	1		1						1	1	1
Informatika	3	1	1	1	1	1	1		1	1	
Számítástechnika, gépi nyelvek	4	2	2	2	2	1	2	1	2	2	
Összesen	27	8	7	7	6	5	6	4	9	7	3

Az Intézet által gondozott alternatív blokkok

A délelőtti hallgatók a 6. félévtől, az esti hallgatók pedig a 8. félévtől kezdve egy alternatív blokk tárgyait kell, hogy felvegyék. Az Intézet alternatív blokkjait elvileg minden hallgató felveheti, de a speciális előképzettség igénye miatt a tervmatematika blokkunkat elsősorban a tervgazdasági szak hallgatóinak javasoljuk. (A *-gal jelölt tárgyakat nem az MSZI oktatja.)

Számítástechnikai modellező

Programcsomagok és könyvtárak alkalmazása, Szimulációs modellezés, PL/1, Információrendszerek számítástechnikai bázisa (2 félév), Véges automaták elmélete, Formális nyelvek elmélete.

Termékáramlás és készletgazdálkodás (esti tagozaton is)

A termékáramlás és készletezés alapvető közgazdasági kérdései*, A termékszintű készletezés, mint szabályozási probléma*, Termékáramlás és készletezés a vállalati gazdaságban (2 félév), A termékáramlás és készletezés szervezése és irányítása*, Számítógépes készletezési rendszerek*, Vállalati magatartás és népgazdasági készletalakulás, a termékforgalom és készletezés makromodelljei.

Vállalati informatika (esti tagozaton is)

Vállalati informatika (3 félév), Informatika gyakorlatok (3 félév), Döntéselmélet.

Adatbázis tervezés

Adatszerkezet, Az adatbázis kezelés alapjai, Adatbázis modellek, Az adatbázis kezelés módszertana, Adatbázis szervezés, Az adatbázis kezelő rendszerek alkalmazása.

A matematika közgazdasági alkalmazásai (csak esti tagozaton)

Modellgyakorlatok, Operációkutatási esettanulmányok (2 félév), Módszertani ismeretek, Számítástechnika az alkalmazásokban, Ökonometriai modellek*.

Terv-matematika

A matematikai programozás speciális kérdései, Valós függvénytan, Variációszámítás és optimális irányítás, Numerikus módszerek, Statisztikai döntéselmélet, Kombinatorikus optimalizálás

és a hallgatók az 5. félévben még választhatnak a következő *alternatív tárgyak* közül: A lineáris algebra közelítő módszerei, Döntéselmélet, A regionális tervezés matematikai módszerei, Ortogonális függvények, Gyakorlati számítástechnika, Lindenmayer rendszerek, Számítógépes vállalati információrendszerek, Differenciáljátékok, Speciális fejezetek a lineáris algebrából, Diszkrét matematika.

Fakultatív tárgyak

Az Intézet bármelyik tárgya felvehető fakultatív tárgyként, ha az a hallgató szakának tantervében kötelező tárgyként nem szerepel. Ezen felül fakultatív tárgyakat csak a nappali tagozaton hirdetünk meg, de azokat az esti hallgatók is felvehetik:

Válogatott fejezetek az algebrából és a matematikai logikából (2 félév), Az analízis gazdasági alkalmazásai, Válogatott fejezetek a többváltozós analízisből, Vállalati informatika, Az informatika alapjai (2 félév)

Szakszemináriumok

Minden hallgató egyetemi tanulmányainak utolsó 3 félévében szakszemináriumi munkát végez. Ennek keretében írja meg diplomamunkáját is. Az MSZI jelenleg 35 különböző szakszeminárium között nyújt választást.

III. Az MSZI tudományos munkássága

Az Intézet tudományos tevékenysége kiterjed a matematika és számítástudomány valamennyi területére, amelyek kapcsolatba hozhatók a közgazdaságtudomány művelésével. A munka nagy vonalakban két részre osztható. Az egyikhez sorolhatók az alapkutatások, a másik részhez az alkalmazott kutatások. Az alapkutatásokhoz tartoznak az elméleti algebrai és analitikus módszerek fejlesztése. Az alkalmazott kutatásokhoz a közvetlenül alkalmazható matematikai és számítástudományi eljárások, a külső megbízásos munkák és az újításként értékesíthető eredmények.

Az alapkutatások terén elért eredményeket az Intézet által kiadott és rendszeresen megjelenő idegen nyelvű kiadványokban ismertetjük, valamint hazai és külföldi folyóiratokban. Az Intézet oktatói a szoros értelemben vett tankönyveken kívül számos olyan szakkönyvet is megjelentettek, amelyek egy-egy szakterület legfontosabb eredményeiről adnak összefoglaló tájékoztatást, s melyek egyszersmind segédkönyvként is használhatók. A tudományos tevékenységnek fontos részét képezi a szakmai konferenciák megrendezése, amelyekben a Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai Szakosztályával, a Bolyai János Matematikai Társulattal és a Neumann János Számítógéptudományi Társasággal működünk együtt.

A Matematikai Rendszerelméleti Osztály tudományos tevékenységét elsősorban az alapkutatások adják; ezen belül az algebrai struktúrák, az automata elmélet, a metrikus terekben jelentkező fixponttételek, a differenciálegyenletek, differenciáljátékok, valamint a mindezeket magába foglaló és az utóbbi években kifejlődésnek induló matematikai rendszerelmélet általános alapjainak vizsgálata. Az osztály az Intézet egyéb feladataihoz kapcsolódva részt vesz az alkalmazott kutatásokban is.

A Közgazdasági Alkalmazások Osztály tudományos tevékenysége kiterjed a tananyag korszerűsítésére, a külső megbízások teljesítésére és egyéni kutatási témákra.

Hosszabb távon művelt fontosabb kutatási témák a következők: a nemlineáris programozás elméleti kérdései, játékelmélet, a gyakorlati programozás problémái, egészértékű programozás, a regionális tervezés módszertani kérdései, statisztikai döntéselmélet, többcélú döntések elmélete és gyakorlata, készletmodellezés, a sokváltozós sztochasztikus módszerek és modellek alkalmazásai, a gazdasági kockázat és mérésének módszerei, beruházásgazdaságossági számítások.

Az Osztály tudományos munkája szorosan kapcsolódik gyakorlati gazdasági kérdésekhez is. Így folyamatosan jó témákat kínál a hallgatók TDK és szakdolgozataihoz.

Számítástudományi Osztály kutatási profilja eléggé széleskörű, kiterjed elméleti és gyakorlati orientációjú területekre egyaránt. Az oktatók az alábbi kutatási főtémák valamelyikébe kapcsolódtak be: Számítógépes vállalati modellezési technikák, Közgazdasági folyamatok sztochasztikus szimulációja, Programfejlesztési technikák, Az automaták algebrai elmélete, Hibabecslés és függvényminimalizálás, A differenciálegyenletek numerikus módszerei.

Az Oktatási Módszertani Osztály elsődleges feladata az alaptárgyak oktatási módszertanának kidolgozása, az oktatástechnikai és számítástechnikai eszközök és alkalmazási lehetőségeik felkutatása, bevezetésük szorgalmazása. Az Osztályon a következő témák kutatása folyik: A távoktatás (levelező oktatás) módszertani kérdései, Alaptárgyaink korszerűsítése, kapcsolódva a középiskolai matematika oktatás reformjához, Az új dialektikai és oktatástechnikai eszközök alkalmazásának külföldi tapasztalatai, A számítógép alkalmazási lehetőségei a matematikai tárgyak oktatásában.

Az Informatika Osztály elsősorban a vállalati információs rendszerek matematikai és számviteli-statisztikai alapjaival foglalkozik és a gyakorlati alkalmazás lehetőségét kutatja. Az Osztály által kidolgozott TEZAURUS módszer bevezetésére több vállalattól is kapott megbízást.

Külső megbízás alapján végzett munkák

Az MSZI az utolsó 5—6 évben több mint 50 különböző külső megbízás alapján folytatott kutató munkát. Lehetetlen lenne itt mindent felsorolni, csak mutatóban említünk néhányat:

A szelektív iparpolitika korszerű műszaki-gazdasági módszerei a vegyiparban.
Cukorrépa betakarítási folyamat tervezése és szervezése.
A beruházások telepítésével összefüggő gazdaságossági számítások továbbfejlesztése.
A beruházások gazdaságosságának megítélésére szolgáló módszerek és a hozzájuk tartozó feltételrendszerek meghatározása.
Oktató-vizsgáztató berendezés software-vel való ellátása mikroprogramozás útján.
A „Fémmunkás" vállalat számítógépes vállalati információrendszere.
Kis- és középméretű iparvállalatok rugalmasságának vizsgálata.
Geostatisztikai módszerek alkalmazásával fúrástelepítési és vagyonbecslési vizsgálatok.
Műszaki és biztonsági előírások egységes elbírálásának kvantitatív módszerei.
A szénbányászat számítógépre orientált információs rendszerének kidolgozása.
A csendvédelem alapvető kérdései.
Iparpolitikai döntések módszertani megalapozása.
A TOP tűzeseti és tűzoltási adatfeldolgozó rendszerének rendszerterve és programozási munkái.
Turbulens áramlás hőátadási viszonyainak közelítő számítása.

A fentiekből látható, hogy a MSZI tudományos-szakmai tevékenysége meglehetősen széleskörű, akár a matematikai területekről, akár a számítástudomány elméleti, ill. gyakorlati kérdéseiről is van szó. Az Intézet szakmai kapacitása lehetővé tenne együttműködést más kutatóhelyekkel, ami jobban előrevihetné mind az elméleti kutatásokat, mind az alkalmazásokat.

MESZÉNA GYÖLGY—SZÉP JENŐ

A kiadásért felel az Akadémiai kiadó igazgatója
Műszaki szerkesztő: Sándor István
A kézirat a Nyomdába érkezett: 1982. III. 19. — Terjedelem: 9,10 (A/5) ív
82.10692. Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

CONTENTS

CONCEPTS AND METHODS

BORROWED QUILLS

BOOK REVIEWS

SCIENTIFIC LIFE

СОДЕРЖАНИЕ

ПОНЯТИЯ И МЕТОДЫ

СО СТРАНИЦ ЗАРУБЕЖНЫХ ЖУРНАЛОВ

О КНИГАХ

НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ

Ára: 20,— Ft
Előfizetés egy évre: 80,— Ft

INDEX: 26 793
ISSN 0039—8128

TARTALOM

FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK

IDEGEN TOLLAK

KÖNYVEKRŐL

TUDOMÁNYOS ÉLET

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST