# SZIGMA

## Matematikai-közgazdasági folyóirat

### A Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai-Közgazdasági Szakosztályának lapja



*


E szám szerzői:

ÉLTETŐ ÖDÖN, a Központi Statisztikai Hivatal osztályvezetőhelyettese, FÉNYES TAMÁS kandidátus az MTA Matematikai Kutató Intézet tudományos főmunkatársa, GALÁNTAI IMRE, matematikus, a Labor MIM munkatársa, R. E. KALMAN, az Eidgenössische Technische Hochschule Zürich és a University of Florida professzora, KORNAI JÁNOS, az MTA levelező tagja, az MTA Közgazdaságtudományi Intézet tudományos osztályvezetője, MESZÉNA GYÖRGY, egyetemi docens, a MKKE Matematikai és Számítástechnikai Intézet osztályvezetője, MUSZÉLY GYÖRGY, a SZÁMKI munkatársa, SÁRI JÓZSEF, a Magyar Nemzeti Bank osztályigazgatója, TÖRÖK TAMÁS, a NIM Továbbképző Központ főelőadója, UJVÁRI JÓZSEF, a Központi Statisztikai Hivatal előadója, VITA LÁSZLÓ, az Országos Tervhivatal Tervgazdasági Intézetének főelőadója



Szerkesztőség: Budapest XI., Budaörsi út 43–45.

Levélcím: 1502 Budapest, Pf. 262.

Terjeszti a Magyar Posta. Előfizethető bármely postahivatalnál, a kézbesítőknél a Posta hírlapüzleteiben és a Posta Központi Hírlap Irodáknál (PKHI 1900 Budapest, József nádor tér 1.) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a PKHI 215–96 162 pénzforgalmi jelzőszámára. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76 sz. alatti hírlapboltban

Előfizethető és példányonként megvásárolható: az AKADÉMIAI KIADÓ-nál, 1363 Budapest, Alkotmány u. 21. Telefon 111-010. Pénzforgalmi jelzőszámunk: 215–11488, és az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLT-ban, 1368 Budapest, Váci u. 22. Telefon: 185-612. Előfizetés díj egy évre: 80,–Ft

Külföldön terjeszti a KULTURA Külkereskedelmi Vállalat, H-1389 Budapest. Pf. 149

Kornai János

# A szocialista gazdaság leíró-magyarázó elméleti modelljei (Egy kutatási irányzat áttekintése*)

## 1. Bevezetés

A cikk végén található irodalomjegyzékben szereplő tanulmányok együttese *kutatási irányzatot* alkot.[1] Valamennyiök közös vonása, hogy matematikai modellek segítségével elemez közgazdasági problémákat. Ezt azonban sok más mű is megteszi. Cikkem célja tisztázni: mi az, ami az irodalomjegyzékben szereplő művekben közös és ami őket más matematikai-közgazdasági munkáktól megkülönbözteti.

Az áttekintés alkalmat ad némi vitára más irányzatokkal. Cikkem végén néhány kutatási feladatot vázolok fel.

## 2. Egy példa: a rendelés-jelzéses modell

Az irodalomjegyzék nagyszámú modellje közül kiemelünk egyet. Nem mintha ezt tekinteném a legjobbnak vagy leginkább teljesnek, hanem mert egy aránylag egyszerű példára való hivatkozás megkönnyíti majd a gondolatok kifejtését. A rendelés-jelzésen alapuló gazdasági rendszer modelljét Simonovits Andrással együtt dolgoztuk ki. (Lásd [11] és [12], 12. fejezet.)

A gazdaságnak $n$ szektora van. Ezeket Leontief-típusú reálinput-output kapcsolatok kötik össze, a szokásos feltevések mellett (nincs helyettesítés stb.). A gazdaság működését egy lineáris differencia-egyenletrendszer írja le. A modell összefoglalása:[2]

*A termelés és az eladás azonossága*

$$\underbrace{r(t)}_{\text{termelés}} = \underbrace{Y(t) \cdot 1}_{\text{eladás}}. \tag{1}$$

*Inputkészlet-mérleg*

$$\underbrace{V(t+1)}_{\text{input-készlet}} = V(t) - \underbrace{A\langle Y(t) \cdot 1 \rangle}_{\text{termelő felhasználás}} + \underbrace{Y(t)}_{\text{vétel}}, \tag{2}$$

ahol $A$ a folyó ráfordítási együtthatók Leontief-mátrixa.

* A cikk azt az előadást foglalja írásba, amelyet a szerző 1981. szeptember 15-én tartott Miskolcon, a XI. Operációkutatási Konferencián.

[1] Az irodalomjegyzékben szereplő művek egy részének szerzője vagy társszerzője vagyok, más részükben nem működtem közre. Külön is szeretném kiemelni *Martos* Béla, *Simonovits* András és Jörgen W. *Weibull* hozzájárulását az irányzat kialakulásához.

[2] *Jelölések*. Kisbetű: $n$ komponensű vektor; nagybetű: $n \times n$-es mátrix; nagybetű $\langle\rangle$ zárójelben: $n \times n$-es diagonál matrix; $\otimes$ jel: mátrixok logikai (elemenkénti) szorzata.

*Rendelésállomány*

$$(3)\qquad \underbrace{K(t+1)}_{\text{rendelés-állomány}} = K(t) + \underbrace{Z(t)}_{\text{rendelés}} - \underbrace{Y(t)}_{\text{eladás}}.$$

*Az eladás szabályozása*

$$(4)\qquad \underbrace{Y(t)}_{\text{eladás}} = \underbrace{Y^*(t)}_{\text{normál eladás}} - P\otimes[\underbrace{\underbrace{K^*(t)}_{\text{normál}} - \underbrace{K(t)}_{\text{tényleges}}}_{\text{rendelésállomány}}],$$

ahol $P$ a szabályozási paraméterek (reakciósebességek) mátrixa.

*A rendelés szabályozása*

$$(5)\qquad \underbrace{Z(t)}_{\text{rendelés}} = \underbrace{Z^*(t)}_{\text{normál rendelés}} - Q\otimes[\underbrace{\underbrace{V(t)}_{\text{tényleges}} - \underbrace{V^*(t)}_{\text{normál}}}_{\text{input-készlet}}],$$

ahol $Q$ a szabályozási paraméterek (reakciósebességek) mátrixa.

A modell – elvont, rendkívül leegyszerűsített formában – *a hiánygazdaság szabályozásának* néhány vonását emeli ki. E modell világában $K(t)$, a teljesítetlen rendelések állománya méri a hiány intenzitását. A hiány mértéke jelzésként is szolgál. A (4) szabály értelmében az eladás (és vele együtt a termelés) több a normálisnál, ha a rendelésállomány nagyobb a normálisnál. A krónikus hiány miatt outputkészletek nincsenek. Ezt fejezi ki az (1) egyenlet: amit megtermeltek, azt azonnal eladják. Viszont a termelők inputkészletek felhalmozására törekszenek. A vételt rendelésnek kell megelőznie. A rendelés – az (5) szabály értelmében – nagyobb a normálisnál, ha az inputkészlet a normális szint alá apadt.

Matematikailag igazolható: meghatározott – itt nem tárgyalt – további feltételek mellett a rendszer működőképes; alkalmas arra is, hogy növekedjék. Az output-oldalon rendelés-jelzésre, input-oldalon készlet-jelzésre épülő szabályozási mechanizmus biztosítja a rendszer stabilitását.[3]

## 3. A modellek közös fő jellegzetességei

Most pedig lépjünk túl a szemléltető példán. Az irodalomjegyzékben felsorolt munkák, a bennük szereplő modellek *közös* vonásait, hat fő jellegzetességét emeljük ki.

[3] Az idézett művek megadják az aszimptotikus stabilitás, illetve a relatív aszimptotikus stabilitás elégséges feltételeit.

*1. Dinamikus rendszerek.* Modelljeink dinamikus rendszereket írnak le. Matematikai formájuk: differenciál- vagy differencia-egyenletrendszer. A munkák egy része — bár nem mindegyik — a szabályozáselmélet apparátusát használja fel. Ezt tettük példánk, a 2. szakaszban leírt rendelés-jelzéses modell esetében is.

Ez a vonás elválasztja munkáinkat a matematikai közgazdaságtan számottevő részétől, amely statikus modellekkel dolgozik.

*2. Reálszféra és szabályozási szféra.*[4] A matematikai közgazdaságtan jelentős része a reálszféra elemzésére szorítkozik, vagy esetleg exogén módon veszi figyelembe a reálfolyamatok szabályozását. Ezt teszi például hazai irodalmunkban a tervezéshez kapcsolódó, a Leontief-modellek vagy a matematikai programmozás apparátusát alkalmazó legtöbb elemzés. Ugyanez elmondható azokról a klasszikus tanulmányokról is, amelyek a matematikai közgazdasági elmélet két kimagasló eredményéről: a dinamikus Leontief-modellről és a Neumann-féle növekedési modellről szólnak. Például a Neumann-modell kiszámítja az adott kritérium mellett optimális pályához tartozó optimális árakat és diszkontlábakat, de ezeket nem táplálja vissza magába a rendszerbe.

Ezzel szemben irányzatunk jellegzetessége: a modellekben endogén módon képződnek a jelzések és e jelzések alapján endogén módon megy végbe a szabályozás. Vagy ha ez nem is történik meg átfogó módon, legalábbis endogén a szabályozási szférának az a része, amely a szóbanforgó vizsgálat előterében áll. A modellszerkesztő egyenlő figyelmet fordít mind a reálszféra, mind a szabályozási szféra ábrázolására. Példánkban az (1) és (2) egyenletek írják le a reálszféra, a (3), (4) és (5) egyenletek pedig a szabályozási szféra működését. Itt — és az irányzat valamennyi modelljében — éppen a két szféra kapcsolata áll az elemzés középpontjában.

*3. A szocialista gazdaság viselkedési szabályosságai.* A reálszféra leírásában modelljeink rendszerint szokványos feltevéseket alkalmaznak. Nem igyekszünk rendszer-specifikus vonások kiemelésére; modelljeinknek ezek az elemei bármely rendszer reálszférájára vonatkozhatnának. Példánkban Leontief-típusú termelési függvény szerepel: ez nyilvánvalóan általános érvényű, illetve bármiféle valóságos reálinput-output kapcsolatokhoz képest hasonló mérvű egyszerűsítést jelent.

Ezzel szemben a szabályozási szféra modellezésében rendszer-specifikus vonásokat kívánunk leképezni. Az irányzat kutatóit a *szocialista* gazdaság problémái foglalkoztatják. Vagy olyan viselkedési szabályosságokat formalizálunk, amelyek kizárólag a szocialista gazdaságban, esetleg annak valamelyik konkrét változatában érvényesülnek. Vagy pedig olyan szabályosságokat, amelyek megjelennek ugyan különféle gazdasági rendszerekben, de a szocialista gazdaságban különlegesen fontos szerephez jutnak.

Ez a helyzet például a 2. szakaszban ismertetett rendelés-jelzéses mechanizmussal. Egy-egy vállalatnál vagy akár egész ágazatokban megtalálható ez a szabályosság tőkés gazdaságban is. Mégis, sokkal inkább jellemző az olyan gazdasági formációkra, amelyekben széleskörű és krónikus a hiány. Igaz, a valóságos szocialista rendszerek szabályozása eltér a (4) és (5) egyenletekben

[4] A megkülönböztetést Anti-equilibrium c. könyvem vezette be (Közgazdasági és Jog Könyvkiadó, Budapest, 1971). A reálszféra a gazdasági rendszer fizikai folyamatait (termelés, beruházás, fogyasztás, forgalom) foglalja magában, míg a szabályozási szférába a reálfolyamatok szabályozását végző információs és döntési folyamatok tartoznak.

bemutatott végletesen leegyszerűsített, absztrakt sémáktól. Mégis azt hisszük: ez a két egyenlet — az elvontság magas szintjén — valami olyat mutat be, ami mélyen jellemző gazdasági rendszerünk szabályozási folyamataira.

Másik példaként a [8] tanulmányban ismertetett makrodinamikai modellre hivatkoznék. E modellben a beruházások szabályozását leíró egyenlet — *Bauer, Soós, Lackó* és mások kutatási eredményeit felhasználva — azokat a viselkedési szabályosságokat formalizálja, amelyeket a keleteurópai szocialista gazdaságok történeti-tapasztalati megfigyelése mutatott ki. Ugyanez a modell más összefüggések leírásánál is a szocialista gazdaságban megfigyelhető viselkedési szabályosságokat próbálja matematikai alakban visszatükrözni: a hiány kiéleződésére, a vevők sürgetésére a termelő a kínálat növelésével, „rohammunkával" próbál reagálni; ugyanakkor a hiány kiéleződése a vevők egyrészét már visszatartja a vásárlástól: inkább elköltetlenül marad a pénzük, mintsem hogy a számukra elfogadhatónál több és hátrányosabb kényszerhelyettesítést hajtsanak végre.

Modelleinknek ez a vonása azon a tudomány-filozófiai és társadalom-filozófiai meggyőződésen alapul, hogy a szocialista gazdaságnak, s ezen belül a szocialista gazdaság szabályozásának vannak *regularitásai, szabályosságai, törvényszerűségei*. A gazdaságban — noha a központnak nagy a szerepe — mégsem egyszerűen az történik, amit a központ elhatároz. A társadalmi viszonyok, a tulajdonviszonyok, az intézményi adottságok meghatározott szabályosságokat alakítanak ki, s ezek mindaddig érvényrejutnak, amíg az őket létrehívó viszonyok fennmaradnak. E szabályosságok megfigyelhetőek, szavakkal leírhatóak. S ha ez így van, akkor — alkalmas egyszerűsítő feltevések alkalmazásával — matematikailag is megfogalmazhatóak olyan modellek számára, amelyek kvalitatív összefüggések elméleti elemzésére szolgálnak.

*4. Válaszfüggvények.* Túl erős és felesleges megszorításnak érezzük azt a feltevést, hogy a gazdasági rendszerben tevékenykedő valamennyi döntéshozónak hasznossági függvénye van, amelynek maximumát kívánja elérni. Nem „cáfolni" akarjuk ezt a feltevést, amely önmagában csupán üres gondolkodási keret. Inkább azt mondhatnánk: kényelmetlen kényszerzubbonynak érezzük, amely feleslegesen megköti a modellező kezét.

Ehelyett elégségesnek tartunk egy ennél sokkal általánosabb, kevésbé megszorító feltevést: a döntéshozó meghatározott impulzusokra meghatározott módon reagál. Másszóval: viselkedése leírható *válaszfüggvényekkel*. Példánkban a (4) és (5) egyenlet adja meg a válaszfüggvényeket. Az előbbiben a rendelésállományra reagál eladással, illetve termeléssel, az utóbbiban az inputkészletre reagál vétellel.

Számos tanulmány különleges figyelmet szentel a szabályozás egy sajátos formájának, a *norma szerinti szabályozásnak*. A társadalmi tapasztalat, a megszokás, a hagyomány normákat alakít ki, amelyek „beállítójelként" működnek. A normától való eltérés meghatározott reakciókat vált ki, amelyek visszaterelik a rendszert a normál pályájára. Példánk ezt a formát alkalmazza: a rendelésállomány normájától, illetve az inputkészlet-normától való eltérés negatív visszacsatolására reagál a szabályozás.

A norma szerinti szabályozás matematikailag jól kezelhető formalizmus. Kényelmesen illeszthető be a matematikai szabályozáselmélet apparátusába. Emlékeztetünk arra, hogy a szabályozáselmélet egyik fő ihletője, a műszaki szabályozás sokszor alkalmazza ezt a formát. Ráadásul sok előnnyel járna számszerűsítés esetén, azaz egy eredetileg elméleti célra szerkesztett modell ökonometriai felhasználásakor. A normák, a különböző gazdasági mutató számok normál értékei rendszerint jól mérhetőek.

Ugyanakkor távol áll tőlünk az a szándék, hogy valamiféle kizárólagos egyeduralmi helyzetet teremtsünk a norma szerinti szabályozás modelljének. Ez *egyike* azoknak a „kereteknek", „sémáknak", amelyekben a döntési-szabályozási folyamat leírható. Van, amikor ezt a legelőnyösebb alkalmazni, mert a valóságban tapasztalatilag megfigyelhető folyamat lényeges mozzanatát emeli ki. Más esetekben viszont erőltetett vagy kényelmetlen lenne a használata.[5] Irodalomjegyzékünkben szerepelnek olyan modellek is, amelyek nem alkalmazzák ezt a modelltípust. Így például a [13] tanulmány, amely egy sorbanállásos hiánygazdasági piac működését írja le, egyszerű válaszfüggvényekkel operál. A vevő a várható sorbanállási időtől teszi függővé, hogy beálljon-e a sorba vagy kényszerhelyettesítést hajtson végre — anélkül, hogy ebben a modellben feltételeznénk: létezik „normális sorbanállási idő".

5. *Nem-árjellegű jelzések.* Modelljeinkben sokféle információ-áramlás jelenik meg. Nagyrészük nem-árjellegű (vagy ahogy a nyugati irodalom — némileg pontatlan módon — nevezi: „mennyiségi") jelzés. Felsorolok néhány példát.

— A 2. szakaszban leírt példa (KORNAI–SIMONOVITS [11]): *a rendelésállomány és az inputkészlet eltérése a normától.*

— Sorbanállásos piac modellje (KORNAI–WEIBULL [13]): *várható sorbanállási idő.*

— Makrodinamikai modell (KORNAI [8]): *a hiány szintétikus mérőszáma,* mint a mikroszinten ható hiánymutatók reprezentánsa; továbbá *a fogyasztás, a beruházási elkötelezettség és a készletek eltérése a normálistól.*

— A beruházási ciklus modellje (LACKÓ [17]): *a külkereskedelmi egyenleg és a beruházási feszültség* mérőszámai.

Nem állítjuk, hogy a nem-árjellegű jelzéseknek kizárólagos a hatásuk. Az árak szerepe rendkívül fontos minden gazdasági rendszerben. Az persze egy-egy rendszer sajátosságaitól függ, hogy melyik szektorban mekkora erővel hatnak az árak, illetve a nem-árjellegű jelzések. Utóbbiak fontos szerephez jutnak még a kapitalista gazdaságban is, noha ott az araké az uralkodó befolyás. Ami a szocialista gazdaságot illeti: itt mindvégig nagy hatást gyakorolnak az árak a háztartás vásárlási döntéseire. Viszont a központi tervezők, a közületek és a vállalatok kevéssé érzékenyek az árakra, s alapjában véve nem-árjellegű, „mennyiségi" jelzésekre reagálnak. A mechanizmus reformjaitól remélhető, hogy ebben a tekintetben némi változást hoz.

Az a feltevés, hogy a gazdasági döntéshozó „tisztán" nem-árjellegű jelzésekre reagál, a valóság leegyszerűsítése. S még erősebb absztrakció egy olyan

[5] Sok olyan szabályozási folyamat figyelhető meg a szocialista gazdaságban, amely meghatározott *kritikus értékek* elérésére vagy túllépésére, fizikai vagy magatartási korlátokba tűrési határokba való beleütközésre éles fordulatokkal reagál. (Például a beruházások drasztikus visszafogása, ha a fizetési mérleg passzívuma vagy az adósságállomány túllépett egy kritikus értéket.) Irányzatunk egyelőre adós e fontos szabályozás-típus formalizálásával. Igaz, hogy ez matematikailag sokkal nehezebben kezelhető, mint a norma szerinti szabályozás.

rendszer modellezése, amelyben egyáltalán nincsenek árak, hanem kizárólagosan nem-árjjelegű jelzések léteznek. Irányzatunknak ezt a vonását jobban megértjük, ha beágyazzuk a kérdés elmélettörténetébe. Hosszú időn át a neoklasszikus elméleti alapokon álló matematikai közgazdászok uralták a terepet. Modelljeik rendkívül leegyszerűsített és egyoldalú formában írták le a gazdaságban áramló információkat: *kizárólagos* szerepet tulajdonítottak az áraknak. Ha a *Walras–Arrow–Debreu*-modellek jelentik, a maguk klasszikus, kikristályosodott alakjukban, a „tézist", akkor a mi irányzatunk „antitézisnek" minősíthető.[6] Éppen mert antitéziskén lép fel, egyoldalúan emeli ki a nem-árjellegű jelzések szerepét. Nyilvánvaló, hogy egy *teljes* elméletben a valóságos gazdasági rendszerekben megfigyelhető arányokban helyet kell kapniok mind az áraknak, mind a nem-árjjelegű jelzéseknek. Mi még csak egy-két szerény lépést tettünk az antitézistől a szintézis felé. (Például MARTOS [19] tanulmánya összehasonlítást tesz árakra és nem-árjellegű jelzésekre reagáló mechanizmusok között. A KORNAI–WEIBULL [13] modell szekvenciális döntési folyamatot ábrázol: a vevő előbb az árra, majd nem-árjellegű jelzésre reagál.) A szintézistől még messze vagyunk.

6. *Nem-walrasi állapot.* Gazdasági rendszerek tartósan lehetnek olyan állapotban, amely eltér a walrasi tökéletes piaci egyensúlytól. Például krónikus hiány vagy krónikus felesleg mutatkozik a termelésben és a piacon, vagy egyszerre, egymás mellett van hiány és felesleg.

Gondoljuk át a 2. szakaszban bemutatott példát. Ebben a rendszerben egyszerre létezhet tartósan felduzzadt kielégítetlen kereslet (nagy a teljesítetlen rendelésállomány normál értéke) és ugyanakkor a halmozási tendencia következtében ugyancsak felduzzadt inputkészlet (nagy az inputkészletek normál értéke). A rendszer normálpályán (azaz a rendszerre specifikusan jellemző nem-walrasi „egyensúlyi" pályán) haladhat, miközben tartósan, következetesen távol van a tökéletes pici egyensúlytól.

| | Népgazdasági szinten aggregált (makro modell) | Dezaggregált (mikro) modell |
|---|---|---|
| A gazdaság egészét átfogja | Makrodinamikai modellek: [3], [8] | n-szektoros modellek: [1,] [2], [4], [5], [9], [10], [11], [12], [15], [19], [20], [23], [24], [25] |
| A gazdaság **egy** körülhatárolt **részét fogja át:** parciális modellek | Beruházási ciklusok modelljei: [14], [17], [18], [22] Lakossági fogyasztás modelljei: [16], [21] | Sorbanállásos részpiac: [13] |

[6] A kapitalista körülmények között érvényesülő nem-árjellegű jelzések fontosságára *Keynes* hívta fel a figyelmet. Utána — több évtizednyi késéssel — megjelentek a nyugati rodalomban az első matematikai modellek a „mennyiségi alkalmazkodás" elemzésére. Ide sorolhatóak *Clower*, *Barro*, *Grossman*, *Benassy*, *Malinvaud* és mások munkái, amelyek között ebben a vonatkozásban is (azaz a nem-árjellegű jelzések szerepének kiemelésében) okonságot mutatnak a mi irányzatunkkal.

Az irodalomjegyzékben szereplő számos modell ezeknek a krónikus hiányoknak és feleslegeknek, tartós aszimmetriáknak, nem-walrasi „egyensúlyi" pályáknak a tanulmányozását szolgálja.[7]

Miközben a fenti hat jellegzetesség közös vonása az irányzat valamennyi munkájának, abban eltérnek egymástól, hogy mennyire fogják át a népgazdaság egészét, illetve az aggregálás-dezaggregálás milyen fokát alkalmazzák. Ebből a szempontból a fenti táblázatban tekintjük át a munkát.

## 4. Leíró-magyarázó elmélet

Eddig a *modellek*, a tanulmányokban alkalmazott *apparátus* jellegzetes vonásaival jellemeztük a kutatási irányzatot. Most áttérünk annak tisztázására, hogy melyek azok a tipikus *kérdések*, amelyekre a modellek segítségével válaszolni szeretnénk.[8] A kérdés, amit egy kutatási irányzat feltesz magának, gyakran még jellemzőbb, mint a válasz, hiszen utóbbi — különösen fiatal szellemi áramlat esetén — sokszor még kezdetleges, hiányos vagy pontatlan.

A kutatási irányzat a szocialista gazdaság *leíró-magyarázó elméletének* kidolgozásához kíván hozzájárulni. Bontsuk fel elemeire a fogalmat és tekintsünk előbb közelebbről a jelzőre: *leíró-magyarázó* elméletről van itt szó, nem pedig normatív elméletről. Arra akarunk felelni: *mi van* a szocialista gazdasági rendszerben (leírás) és ami van, az *miért van* (magyarázat), s nem arra: *mi legyen.*

Ez a kétféle kutatási kérdésfeltevés nem zárja ki egymást. A matematikai modelleknél maradva: sok esetben ugyanazzal a modellel felelhetünk arra, hogy mi van és arra is, hogy mi legyen. Egy ÁKM-mel elemezzük a közelmúlt vagy a jelen reálinput-output kapcsolatait és ugyanazzal az ÁKM-mel tervet készítünk a jövedő input-output kapcsolatokra. Egy szimulációs modellel ex post gazdaságtörténeti elemzést végzünk, amely elmegy a jelenig, majd ugyanazzal a modellel alternatív prognózisokat készíthetünk, s állástfoglalunk: melyik alternativa megvalósítására érdemes törekedni.

Miközben lehetségesnek tartom a kétféle kérdés összekapcsolását, együttes megválaszolását, megkockáztatnám a következő megállapítást: a magyar matematikai-közgazdasági munkák számottevő része eddig nem fordított kellő figyelmet az első kérdésre. Sokszor maradt adós a leírással, s különösen gyakran a magyarázattal. Az erők nagyobb részét döntési, tervezési, operációkutatási modellek készítése köti le, amelyek rendeltetése egyértelműen és egyoldalúan normatív. Kevés az olyan modell, amelyet eleve azzal a céllal szerkesztenének, hogy leíró-magyarázó elméletet adjon szabályszerűen ismétlődő gazdasági jelenségekre. A döntési modellek is sikeresebbek lennének, ha megfelelő leíró-magyarázó elméletre támaszkodnának. Akkor ritkábban fordulna elő, hogy a döntési modell javasol valamit — de valójában más történik.

[7] A 4. és még inkább az 5. és 6. fő vonás szorosan kapcsolódik olyan gondolatokhoz, amelyeket „A hiány" című [7] könyvemben fejtettem ki. Az irodalomjegyzékben szereplő tanulmányok modelljeinek közgazdasági tartalmát jobban megérti az, aki ismeri a könyvet is.

„A hiány" jórészt verbálisan adott elő elméleti megállapításokat és módszertani gondolatokat. Az irodalomjegyzékben szereplő művek egyike-másika kísérlet ezeknek az elméleti és módszertani gondolatoknak a formalizálására. Ugyanakkor úgy érzem: „A hiány" teljes, átfogó formalizálása még nincs elvégezve.

[8] Az elválasztás némiképpen önkényes. Tulajdonképpen már az 5. és 6. fővonásról szólván érintettük a modellek közgazdasági tartalmát, az irányzat érdeklődésének előterében álló elméleti kérdéseket.

Nem mindig azért, mert a külső körülmények másképpen alakultak, mint ahogy azt a modell számszerűsítésekor előre látták. Más történik, mert voltak belső erők, a gazdasági rendszer mélyén ható viselkedési szabályosságok, érdekek, döntéshozói attitüdök és „feltételes reflexek", amelyek másfele húzzák a gazdaságot, mint ahová a döntési modell ajánlásai terelni szeretnék.

A probléma szorosan összefügg azzal, amiről a cikk korábbi részében, a kutatási irányzat 2., 3. és 6. fő vonása kapcsán már szó esett. A döntési modellek többnyire csupán a reálszférát foglalják magukba és esetleg, ezen felül a szabályozási szféra egy részét: a jövedelmek áramlását, a költségek és árak alakulását. Rendszerint nem szerepelnek bennük *magatartási egyenletek*, amelyek leírnák a gazdasági rendszer szereplőinek viselkedését, tipikus reakcióit az őket érő impulzusokra. A gazdaságpolitika csupán exogén tényező, amely — a tervezők sőt éppenséggel a modellezők ajánlásaira hallgatva — eldönti, hogy mit tegyen. Holott valójában a gazdaságpolitika a rendszer endogén része, s viselkedését — vagy legalábbis annak egyes elemeit — meghatározott szabályosságok jellemzik. Leíró-magyarázó modellnek — vagy olyan kettős rendeltetésű modellnek, amely egyszerre kíván leíró-magyarázó *és* normatív lenni — okvetlenül tartalmaznia kell magatartási egyenleteket.

A számítógép az ÁKM vagy a matematikai programozási modell segítségével könnyen egyensúlyba hoz minden mérlegegyenletet. Tervmodellel megtervezhető a gazdasági rendszer tökéletes walrasi egyensúlya — és utána rosszalólag állapítjuk meg, hogy a rendszer ismét eltért tőle. A szocialista gazdaság leíró-magyarázó elméletének azt kell megvilágítania, hogy meghatározott viselkedési szabályosságok mellett nem lesz, nem is lehet a rendszer walrasi egyensúlyban, hanem attól tartósan el *kell* térnie.

A fenti problémákat szemléletesen igazolja egy közelmúltban megjelent cikk: *Boda* Györgynek, az Országos Tervhivatal munkatársának leírása az importigényességről.[9] Kitűnő írás ez, amely mélyrehatóan és alaposan mutatja meg: hogyan „szalad el" újra és újra a népgazdaság importigénye, noha a központ újra és újra radikálisan megpróbálja korlátozni. A cikk valósággal sugalmazza azt a gondolatot, hogy itt egy *viselkedési szabályossággal* állunk szemben: a termelésben szinte kielégíthetetlen az importéhség, amely állandóan újratermelődik; a beavatkozások — a visszafogás-eleresztés váltakozásai — ciklikusan mennek végbe és így tovább. Sajnos, a szerző megáll e gondolat sugalmazásánál, de nem vállalkozik arra, hogy megfigyeléseit elméletileg általánosítsa, formalizálja, s magatartási egyenletekként modelljébe beépítse. Amennyire az a cikkből kiderül, tervszámításaiban a döntéshozók csupán exogén módon jelennek meg. Nem arról van szó, benyomásom szerint, hogy az a kutató, aki a cikkben ismertetett kiváló elemzést elvégezte, nem lenne képes továbblépni az általam kívánatosnak tartott irányban. Azt hiszem, egyszerűen arról van szó, hogy magát a *kérdést*, amit most firtatok, *nem szokás feltenni*. Nem szokás azt kérdezni: melyek azok a magatartási szabályosságok, amelyek érvényesülése messzemenően eldönti majd (vagy legalábbis mélyrehatóan befolyásolja) a gazdasági változók jövendő alakulását.

Áttérünk a „leíró-magyarázó elmélet" kifejezés második része, az *elmélet* szó kommentálására. Az irodalomjegyzékben szereplő művek számottevő része abba a kategóriába tartozik, amelyet „tiszta elméletnek" szoktak nevezni.

[9] Boda György: „A magyar gazdaság importigényességéről", *Közgazdasági Szemle*, 28. évf. 1981, 1148—1163.

Igen erős abszrakciókkal dolgozunk. A munkák nagy része nem törekszik arra, hogy számszerű eredményekhez jusson el, csupán kvalitatív elemzést végez. Egzakt formában megfogalmazott tételeket mond ki és azokat matematikailag bizonyítja. (Egyes esetekben, például KAPITÁNY ZSUZSA [4] és [5] tanulmányaiban szigorúan bizonyított tételek helyett sejtésekről van szó, amelyek helytálló voltát számítógépi szimuláció segítségével valószínűsíti a szerző.) A tanulmányok jelentős része a következő eljárást alkalmazza. Leír egy reálszférát és ennek szabályozását rábízza egy meghatározott szabályozási mechanizmusra. (Ilyen volt a 2. szakasz példájában a rendelés-jelzéses mechanizmus.) Majd ilyesféle kérdéseket tesz fel:

— Működőképes-e a rendszer?
— Van-e normálpályája (azaz olyan — matematikai értelemben vett — „egyensúlyi" pályája, amely eltérhet a walrasi egyensúlytól)?
— Képes-e növekedni? Mitől függ a növekedés üteme?
— Képes-e „önszabályozásra?" Stabil-e a rendszer? Milyen korlátok hatására mehet végbe destabilizálódás? Ha perturbációk letérítik a normál pályáról, milyen gyors a konvergenvia a normálpálya felé?
— Van-e ciklikus mozgás a rendszerben?
— Mi a bizonytalanság hatása a rendszerre?

Megtörténtek az első szerény lépések különböző gazdasági rendszerek összehasonlítására. Ezek különböznek egymástól abban, hogy milyen jelzésekre reagálnak; a centralizáció-decentralizáció milyen fokozatai és kombinációi érvényesülnek bennük; hatnak-e rájuk exogén korlátok és így tovább.

Az elemzések eredményei közül ezen a helyen csak kettőt emelek ki.

Az egyik fontos elméleti eredmény: igazolható, hogy nem-walrasi rendszerek is rendelkezhetnek olyan tulajdonságokkal, amelyek érvényesülését korábban csak walrasi rendszerekre vonatkozóan bizonyította a matematikai-közgazdasági elmélet. Ilyen tulajdonságok: normálpálya létezése, működőképesség, stabilitás. Így például a bennünket leginkább foglalkoztató eset, a krónikus hiánygazdaság ábrázolására megszerkeszthetőek olyan modellek, amelyekben *a hiány állandóan újratermelődik — miközben a rendszer él, működik, növekszik és szabályozása stabil.*

Egy másik fontos elméleti eredmény annak igazolása, hogy *létezik olyan szabályozás, amely — noha árjelzések nélkül működik — mégis decentralizált.* A közgazdaságtudomány korábban hajlott arra, hogy két végletes és egyoldalú típust állítson szembe egymással: a teljesen centralizált rendszert, amelyben „mennyiségi" jelzések vannak és a teljesen decentralizált rendszert, amelyben kizárólag az árak szolgálnak jelzésként. Igazoltuk, hogy van harmadik típus is (pontosabban: a konkrét rendszer-típusok egész családja), amelyben nincsen árjelzés és mégis képes decentralizált információáramlással és decentralizált döntések alapján működni. (A 2. szakaszban példaképpen bemutatott rendszer is ebbe a rendszer-családba tartozik: minden termelő maga dönt termelésről, vételről és eladásról, saját készleteinek és rendelésállományának megfigyelése alapján.)

## 5. Rokon irányzatok

Ezzel az irányzat ismertetésének végére jutottunk. Az irodalomjegyzékben azok a matematikai modellek szerepelnek, amelyekben megtalálható a 3. szakaszban tárgyalt hat fő vonás és amelyek a 4. szakaszban körvonalazott kérdésekre próbálnak felelni, azaz leíró-magyarázó elmélet igényével lépnek fel.

Az irodalomjegyzékbe felvettem olyan műveket is, amelyek szerzői nem vallják fennhangon, hogy ebbe az irányzatba sorolják önmagukat. Nem a szerző egyetértésétől, hanem tanulmányuk jellegzetességeitől tettem függővé, hogy idetartozónak tekintem-e.

Viszont nem soroltam ide azokat a műveket, amelyek egy-két lényeges tulajdonságukban rokonságban állnak ugyan a jelen irányzattal, más fontos vonásaikban viszont eltérnek ettől.

Mindenekelőtt hangsúlyozni kell: a jelen ismertetés kizárólag olyan műveket tekint át, amelyek *matematikai* apparátust használnak. Velük egyidőben és szoros szellemi kölcsönhatásban (sőt néhány esetben azonos szerző tollából) számos olyan mű született, amely kérdésfeltevéseiben, szemléletmódjában, kiinduló feltevéseiben és fogalmi rendszerében megegyezik az itt tárgyalt műveivel, vagy igen közel áll hozzájuk — csak éppen nem alkalmaz matematikai modelleket az elemzéshez. Ezekre a ,,verbális'' művekre is jellemző a jelen cikk 2. szakaszában tárgyalt hat vonás: 1. dinamikus szemléletűek, 2. vizsgálják a reálszféra és a szabályozási szféra kapcsolatát, 3. igyekeznek feltárni a szocialista gazdaság viselkedési szabályosságait, 4. nem tételeznek fel optimalizáló magatartást a rendszer cselekvő alanyairól, 5. különös figyelmet szentelnek a nem-árjellegű jelzéseknek és 6. a nem-walrasi állapotoknak. Tulajdonképpen egy *széles kutatási áramlatról* van szó, amely a szocialista gazdaság leíró-magyarázó elméletének kidolgozására törekszik, s amelyben egymás mellett, egymással összefonódva él a matematikai és a nem-matematikai ,,aláramlat''.[10]

A legfontosabb nemzetközi áramlat, amely a jelen cikkben leírt matematikai-közgazdasági kutatási irányzattal sok rokonságot mutat, az úgynevezett ,,disequilibrium elmélet''. Ez a keynesi makroökonómia hatására, a walrasi mikroökonómiát részlegesen revideálva jelent meg a nyugati irodalomban. Első úttörői *Clower*, *Barro* és *Grossman*; későbbi művelői közül kiemelhetjük *Benassy*, *Grandmont*, *Malinvaud*, *Younès* nevét.[11] A ,,disequilibrium iskola'' tagjainak nagy része a kapitalista gazdasággal foglalkozik, bár megjelent néhány figyelemreméltó írása a szocialista gazdaságról is.[12] Nem tudunk ezen a helyen belebocsátkozni annak részletes tisztázásába, hogy mely pontokon egyezik meg, s melyeken tér el álláspontjuk és módszertanuk a mienkétől.

[10] Utóbbiba sorolom saját munkáim közül ,,A hiány'' c. [7] könyvet, amely — egy-két fejezet, valamint a függelékek kivételével — verbális jellegű. Ide tartozónak érzem — hogy csak néhány fontos és jellegzetes példát emeljek ki — *Bauer* Tamásnak és *Soós* K. Attilának a beruházási ciklusról írott műveit, *Gács* János és *Lackó* Mária cikkét a tervezői magatartásról, *Gács* írásait az építőanyagipari hiányról és az importkorlátokról, *Laki* Mihály tanulmányát a termelés egyenetlenségéről, *Farkas* Katalin, *Chikán* Attila, *Nagy* Márta és *Fábri* Ervin írásait a készletekről és így tovább. Természetesen a hasonlóságok mellett eltérések is vannak az itt említett szerzők szemléletmódja és tudományos eszköztára között.

[11] Magyar nyelven lásd BENASSY, J. P.: ,,Disequilibrium-elmélet'', *Szigma*, 1974, 7. évf. 135—163, 241—270. Összefoglaló áttekintést és átfogó bibliográfiát ad DRAZEN, A.: ,,Recent developments in macroeconomic disequilibrium theory'', *Econometrica*, 1980, 48. évf. 283—306.

[12] Lásd elsősorban PORTES, R.—WINTER, D.: ,,The demand for money and for consumption goods in centrally planned economies'', *Review of Economics and Statistics*, 1978, 60. évf. 8—19, és ugyanezen szerzőktől ,,Disequilibrium estimates for consumption goods markets in centrally planned economies'', *Review of Economic Studies*, 1980, 47. évf. 137—159.

Mindenesetre a „disequilibrium elmélet" művelőit úgy tekinthetjük, mint akik „szövetségeseink" a közgazdaságtudomány megújításáért végzett erőfeszítésekben. S mellettük számos más irányzat, áramlat létezik, amellyel legalábbis egy, két vagy több fontos elméleti és módszertani kérdésben rokon nézetet vallunk. Nem érezzük tehát elszigeteltnek magunkat próbálkozásainkban.

## 6. Kutatási feladatok

Az irodalomjegyzékben szereplő művek együttes terjedelme sokszáz oldal. Mégis azt kell mondanunk: még eléggé a kezdetnél tartunk. Egyelőre igen egyszerű modellekkel dolgozunk, s az eredmények szerények. A szerteágazó feladatok közül hármat emelek ki.

1. Egy-egy kész modellel kapcsolatban el kellene végezni a szokásos további lépéseket: *megkísérelni a leginkább megszorító, a valóságot legerősebben leegyszerűsítő feltevések feloldását.* Sok modellünk lineáris formában ír le olyan összefüggéseket, amelyeket kívánatos lenne nem-lineáris formában megadni; sok modellünkbe korlátozó feltételeket kellene beépíteni és így tovább.

2. Célszerű lenne a kutatást kiterjeszteni olyan témákra, amelyekkel eddig nem foglalkoztunk. Így például nagy szükség lenne *az árképzés és az árakra adott reakciók* modellezésére, azoknak az elméleti és módszertani gondolatoknak a szellemében, amelyeket cikkemben vázoltam.

Vegyük először az *árképzés* vizsgálatát. Ismertek az úgynevezett „ármodellek". Ezeket nagy és gondos munkával állították össze és fontos szerepet töltenek be a döntéselőkészítésben. A költségek és árak közti belső kapcsolatokat írják le, többnyire Leontief-modellek segítségével. Képesek arra, hogy feltételes prognózist adjanak: miképpen változnának az árak, *ha* egyik vagy másik termék vagy termelési tényező ára, illetve egyéb költségtényezők, vagy kalkulációs elvek módosulnának. Nem felelnek azonban arra (nem is akarnak rá felelni), hogy milyen *viselkedési szabályosságok* érvényesülnek az árak *tényleges* alakulásában, beleértve azok magatartását, akik befolyást gyakorolnak az árakra.

Az árak *hatásának* vizsgálatához két részre kell osztani a gazdaságot. A fogyasztói áraknak a *háztartásokra* gyakorolt hatásával elég sokat foglalkozott a hazai irodalom, de — kevés kivételtől eltekintve — nem eléggé árnyaltan elemezte azokat a sajátos körülményeket (hiány, adminisztratív szabályozás stb.), amelyek a szocialista gazdaságban korlátozzák a fogyasztói árak hatását. A szórványos kivételeket (Lackó [16] és Simon [21]) besoroltuk irodalomjegyzékünkbe.

Az áraknak a *vállalati és közületi szférában* kifejtett hatásával alig foglalkozott a matematikai-közgazdasági irodalom hazánkban.

Az itt jelzett kutatási feladatok összefonódnak egy másik igen fontos témával: ki kellene dolgozni *a szocialista gazdaság körülményei között érvényesülő inflációs irányzat* leíró-magyarázó elméletét és matematikai modelljeit. Még csak az első lépések történtek meg ebben az irányban.

3. Az irodalomjegyzékben — néhány kivételtől eltekintve — „tiszta elméleti" modellek szerepelnek. A soronkövetkező lépés az *ökonometriai* feldolgozás:[13]

[13] Itt és a cikkben mindvégig szűkebb értelemben használom az „ökonometria" szót. Így nevezem a matematikai-statisztikai módszerek felhasználását közgazdasági modellek számszerűsítésében, elméleti hipotézisek tesztelésében.

az elméleti modellek átalakítása-továbbfejlesztése oly módon, hogy a modell számszerűsíthető legyen. Az elmélet által feltárt szabályosságok hipotéziseknek tekinthetők, amelyeket ökonometriai úton kell ellenőrizni: igazolni, pontosítani vagy elvetni. (Az irodalomjegyzékben szereplő ökonometria jellegű munkák a következők: LACKÓ [16] és [17], SIMON [21] és [22], KYN és társai [14], valamint MARESSE [18].) Óriási az a munka, amit ezután kell elvégezni.

Ezen a helyen szeretnék néhány megjegyzést tenni a hazai ökonometria helyzetéről. Az elmúlt tíz-tizenöt évben szélesen kibontakozott a magyar ökonometria; ma már szép számmal vannak az ehhez jól értő közgazdászok; egy-két erős kutatócsoport alakult ki. A fő baj, nézetem szerint, abban áll, hogy az ökonometriai kutatások számottevő része hiján van az elméleti megalapozásnak. Amióta csak az ökonometria megjelent a világ közgazdaságtudományában, újra és újra felvetődött a kérdés: lehet-e mérni elmélet nélkül? Nálunk is napirenden van ez a kérdés. Nézetem szerint az esetek többségében elkerülhetetlen a következő sorrend: *előbb* elméletileg tisztázni kell a közgazdasági összefüggéseket és ennek alapján hipotéziseket kell felállítani és *utána* kell hozzálátni a méréshez, a hipotézis ökonometriai teszteléséhez.

Jónéhány ökonometriai kutató az elméleti tisztázást átugorva egyenesen a méréshez látott hozzá. Kissé a szerencsére bízták magukat, abban reménykedve, hogy felbukkan valami közgazdaságilag értelmezhető eredmény a számítások nyomán. Ha kissé karikírozni akarnám a helyzetet, ehhez még hozzátehetném: mindig a legfrissebb nyugati modellt importálták, tekintet nélkül arra, hogy a szóbanforgó modell mögött meghúzódó elmélet ráillik-e a szocialista gazdaság sajátos adottságaira. Eközben negligálták a magyarországi elméleti kutatásokat, amelyek a szocialista gazdaság sajátosságainak megértésére összpontosították figyelmüket.

Nem szeretném a kialakult helyzetért egyoldalúan az ökonometria művelőire hárítani a felelősséget. Bizonyára az elméleti közgazdászokat is terheli mulasztás, amiért nem kezdeményezték az együttműködést, elméleti gondolataik ökonometriai vizsgálatát. Mindenesetre szeretném remélni, hogy előbb-utóbb változik a helyzet. Mind többen lesznek az ökonometria művelői között, akik magukévá teszik a jelen cikkben vázolt kutatási feladatokat és készek résztvenni a szocialista gazdaság leíró-magyarázó elméletének kidolgozásában és empirikus elemzésében.

## 7. Rövid zárómegjegyzés

A cikkemben ismertetett kutatási irányzat nem lép fel a tudományos monopólium igényével. Egyrészt: *komplementer* más kutatási tevékenységekkel. Leíró-magyarázó elmélet kidolgozására törekszik, tehát ki kell egészíteni normatív kutatásokkal. Elméleti jellegű, tehát ki kell egészíteni gyakorlatiasabb vizsgálatokkal.

Másrészt: szükség van a tudományos kutatásban is *versenyre*. Többféle egymással rivalizáló irányzat együttesen közelebb juthat a gazdasági rendszerek működésének megértéséhez és a javításukat szolgáló javaslatok eredményes kidolgozásához.

(*Beérkezett: 1981. december 9-én.*)

## IRODALOM

[1] Bródy A.: „Szabályozási modellekről", *Szigma*, 6. évf. 1973, 93—103.
[2] Dancs I.—Hunyadi L.—Sivák J.: „Készletjelzésen alapuló szabályozás Leontief-típusú gazdaságban", *Szigma*, 6. évf. 1973, 185—208.
[3] Hewett, E. A.: *A Macroeconometric Model of a Centrally Planned Economy with Endogenous Plans: The Hungarian Case*, sokszorosítva, University of Texas, Austin, 1980.
[4] Kapitány Zs.: „Dynamic Stochastic Simulation of a System Controlled by Stock Signals", megjelent a következő kötetben: Janssen, J. M. L., Pau L. F. és Straszak, A. (szerk.): *Models and Decision Making in National Economies*, North-Holland, Amsterdam, 1979.
[5] Kapitány Zs.: „Simulation Analysis of Economies Stochastically Controlled by Stock- and Order-Signals", *Studies*, Institute of Economics, Hungarian Academy of Sciences, 1980, No. 19.
[6] Kornai J.: „A gazdasági viselkedés normái és a norma szerinti szabályozás", *Közgazdasági Szemle*, 23. évf. 1976, 1—14.
[7] Kornai J.: *A hiány*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 1980. Angol nyelven: *Economics of Shortage*, North-Holland, Amsterdam, 1980.
[8] Kornai J.: *Növekedés, hiány és hatékonyság. A szocialista gazdaság egy makrodinamikai modellje*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1982. Angol nyelven: *Growth, Shortage and Efficiency — A Macrodynamic Model of the Socialist Economy*, Blackwell, Oxford, 1981. (Megjelenés alatt.)
[9] Kornai J.—Martos B.: „Gazdasági rendszerek vegetatív működése", *Szigma*, 4. évf. 1971, 35—50. Angol nyelven: „Autonomous Control of the Economic System", *Econometrica*, 41. évf. 1973, 509—528.
[10] Kornai J.—Simonovits A.: „Neumann-gazdaságok szabályozási problémái", *Szigma*, 8. évf. 1975, 81—100. Angol nyelven: „Decentralized Control Problems in Neumann-Economies", *Journal of Economic Theory*, 14. évf. 1977, 44—67.
[11] Kornai J.—Simonovits A.: „Rendelés-jelzésen alapuló szabályozás egy Neumann-gazdaságban", *Szigma*, 8. évf. 1975, 281—290.
[12] Kornai J.—Martos B. (szerk.): *Szabályozás árjelzések nélkül*, tanulmánykötet; szerzők: Bródy A., Dancs I., Hunyadi L., Kapitány Zs., Kornai J., Martos B., Simonovits A. és Sivák J. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1981. Angol nyelven: *Non-Price Control*, North-Holland, 1981.
[13] Kornai J.—Weibull, J. W.: „A piac normál állapota hiánygazdaságban: egy sorbanállási modell", *Szigma*, 11. évf. 1978, 1—32. Angol nyelven: „The Normal State of the Market in a Shortage Economy: A Queue Modell", *Scandinavian Journal of Economics*, 80. évf. 1978, 375—398.
[14] Kyn, O.—Schrettl, W.—Slama, J.: „Growth Cycles in Centrally Planned Economies: An Empirical Test", megjelent a következő kötetben: Kyn, O.—Schrettl, W. (szerk.): *On the Stability of Contemporary Systems*, Vandenhoeck-Ruprecht, Göttingen, 1979.
[15] Ligeti I.—Sivák J.: *Növekedés, szabályozás és stabilitás a gazdasági folyamatokban*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1978.
[16] Lackó M.: „Lakossági megtakarítás és ellátási helyzet", *Közgazdasági Szemle*, 23. évf. 1976, 535—551. Angol nyelven: „Consumer Savings and the Supply Situation", *Acta Oeconomica*, 15. évf. 1975, 365—384.
[17] Lackó, M.: „Feszültségek felhalmozása és leépítése", *Közgazdasági Szemle*, 27. évf. 1980, 923—940. Angol nyelven: „Cumulating and Easing of Tensions" *Acta Oeconomica*, 24. évf. 1980.
[18] Maresse, M.: „The Bureaucratic Response to Economic Fluctuation: An Econometric Investigation of Hungarian Investment Policies", *Journal of Policy Modeling*, 3. évf. 1981, 221—243.
[19] Martos, B.: „Öt mechanizmus", *Szigma*, 9. évf. 1976, 213—226.
[20] Martos, B.: „Comparison of Economic Control Systems", megjelent a következő kötetben: Janssen J. M. L.—Pau, L. F.—Straszak, A. (szerk.): *Models and Decision Making in National Economies*, North-Holland, Amsterdam, 1979.
[21] Simon A.: „A lakossági fogyasztás és megtakarítás vizsgálata ökonometriai móddszerrel", *Szigma*, 10. évf. 1977, 249—264.
[22] Simon A.: „A magyarországi beruházások ciklusainak egy modellje", *Közgazdasági Szemle*, 28. évf. 1981, 293—302.
[23] Simonovits A.: „A decentralizált szabályozás maximális konvergenciasebessége",

*Szigma*, 11. évf. 1978, 49—68. Angol nyelven: „Maximal Convergence Speed of Decentralized Control", *Journal of Dynamics and Control*, 3. évf. 1981, 51—64.
[24] SIMONOVITS A.: *A teljesen decentralizált szabályozás*, kéziratban, MTA Közgazdaságtudományi Intézet, Budapest, 1981.
[25] VIRÁG I.: „Gazdasági rendszerek vegetatív működése sztochasztikus külső fogyasztással", *Szigma*, 6. évf. 1971, 261—268.

## DESCRIPTIVE-EXPLANATORY THEORETICAL MODELS OF THE SOCIALIST ECONOMY (REVIEW OF A RESEARCH TREND)

The collection of works given in the bibliography forms a *research direction* of mathematical economics. The article is aimed at clarifying what is common in these works and what separates them from others in mathematical economics.

The common main features of the models are the following: 1. they describe dynamical systems, 2. they are modelling not only the real sphere, but also the control sphere, 3. they formalize behavioural regularities of the socialist economy, 4. no optimizing behaviour is supposed, but only that the decision maker possesses some response function, 5. they focus on non-price signals and 6. on non-Walrasian states of the economy.

They wish to give a contribution to the elaboration of a *descriptive-explanatory* theory. They wish to explain *what is* in the socialist system and *why*, and not to tell what should be. These are researches made at the level of „pure theory", therefore, models are based on rather abstract assumptions and considerable simplifications.

Finally, the article speaks about research tasks. Attempts should be made to relax the most restrictive assumptions, to elaborate a method of econometric testing, to modify models developed for the purposes of pure theory in such a way that they may be quantified on the basis of econometric estimation. Besides, it would be expedient to widen also the thematical range of research. The formation and effects of prices would be particularly important to study with the new onlook presented by this research trend.

## ОПИСЫВАЮЩИЕ-ПОЯСНЯЮЩИЕ МОДЕЛИ СОЦИАЛИСТИЧЕСКОЙ ЭКОНОМИКИ (ОБЗОР ОДНОГО ИЗ НАПРАВЛЕНИЙ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ)

Работы, приводимые в перечне специальной литературы в совокупности представляют собой одно из направлений исследований, проводимых в области математической экономики. Цель данной статьи уяснение того, что в этих работах является общим и что отличает их от прочих работ по математической экономике.

Общими характерными чертами рассматриваемых моделей являются следующие:

1. Дается описание динамичных систем.
2. Моделируется не только реальная сфера, а и сфера регулирования.
3. Формализируются правила поведения социалистической экономики.
4. Оптимальное поведение не предполагается, а всего лишь то, что принимающий решение располагает ответной функцией.
5. Внимание концентрируется на сигналы, по своему характеру не являющиеся ценовыми и
6. на, «не вальрасовое» состояние экономики.

Авторы желают внести свой вклад в разработку описывающей-поясняющей теории. Они стремятся дать ответ на то, что имеется в социалистической системе и почему оно налицо, а не на то, что должно было бы быть. Эти исследования проводятся в «чисто теоретической» плоскости, т. е. модели базируются на довольно абстрактных предпосылках и довольно существенных упрощениях.

В заключении, в статье указываются задачи по развитию. Следует предпринять попытку исять наиболее жесткие предпосылки, попытаться дать эконометрическую обработку и енменить модели, разработанные с учетом целей чистой теории таким образом, чтобы их можно было изложить в цифровом виде на основании их эконометрической оценки. Наряду с этим исследования целесообразно расширить и в аспекте тематики. В особенности своевременным является изучение формирования и воздействия цен на базе подхода, излогаемого в приводимом в статье направлении исследования.

ÉLTETŐ ÖDÖN—VITA LÁSZLÓ

# Jövedelemeloszlások közelítése és prognosztizálása

## Bevezetés

Cikkünkben a jövedelemeloszlások prognosztizálásának egy viszonylag egyszerű, s ugyanakkor hatékonynak tűnő módszerét írjuk le. A módszer azokon a kutatásokon alapszik, amelyek egyrészt az empirikus-jövedelemeloszlásokat leíró függvények típusának, másrészt a jövedelmi egyenlőtlenséget kialakító legfőbb tényezőknek az időbeli stabilitását vizsgálták. A stabilitás-vizsgálat az első esetben annak a kérdésnek az eldöntését jelenti, hogy a különböző évekre vonatkozó empirikus jövedelemeloszlások ugyanolyan típusú valószínűségeloszlással közelíthetők-e, a második esetben pedig arra irányul a vizsgálódás, hogy a jövedelemegyenlőtlenséget — pontosabban a jövedelmek relatív szórásnégyzetét — ugyanazok a tényezők, s ugyanolyan mértékben határozzák-e meg az egyes évek során.

Mindkét fajta stabilitás-vizsgálatra az adja meg a lehetőséget, hogy a Központi Statisztikai Hivatal 1962 óta ötévenként rendszeresen — lényegében hasonló technikával és hasonló fogalmi rendszerben — hajt végre országos reprezentatív jövedelmi felvételeket. Cikkünkben a három legutóbbi (az 1967., 1972. és 1977. évekre vonatkozó) jövedelmi felvétel adatainak elemzéséből indulunk ki. A továbbiakban mindig az egy főre jutó személyes jövedelmek eloszlását, illetve egyenlőtlenségét vizsgáljuk, majd e vizsgálataink eredményei alapján teszünk kísérletet a jövedelemeloszlások prognosztizálására. Ennek megfelelően vizsgálataink és prognozósaink természetesen csak a statisztikailag regisztrálható jövedelmekre vonatkoznak. A számba nem vehető jövedelmek arányáról és a jövedelmek egyenlőtlenségére gyakorolt hatásáról különböző — nagyságrendben eléggé eltérő — hipotézisek láttak már napvilágot. Mivel azonban ezek empirikus adatokkal nem verifikálhatók, célszerűbbnek láttuk, ha a jövedelmi felvételek tényleges adatait használjuk fel számításainkhoz.

A tanulmány első részében a jövedelemeloszlások közelítéséhez használt függvényeket, ezek néhány tulajdonságát, a paraméterbecslési eljárásokat és az illeszkedésvizsgálatok eredményeit ismertetjük. A második részben azt mutatjuk be, hogyan alkalmazhatók a jövedelemeloszlásokat leíró függvények típusának időbeli változására vagy stabilitására vonatkozó eredmények bizonyos hipotézisekre támaszkodva jövedelemeloszlások prognosztizálására prognózis változatok készítésére.

# 1. Jövedelemeloszlások közelítése eloszlásfüggvényekkel

## 1.1 *Az alkalmazott eloszlásfüggvények és néhány tulajdonságuk*

Vizsgálatainkban a *Pareto*-eloszlást (P), a két-, illetve háromparaméteres lognormális eloszlást (L-2, illetve L-3), gamma-eloszlást (G-2, illetve G-3), *Champernowne*-féle eloszlást (C-2, illetve C-3), valamint a *logisztikus* vagy más néven általánosított *sech*² eloszlást (L) alkalmaztuk a magyar jövedelemeloszlások leírására. Lényegében ezek azok az eloszlásfüggvények, amelyek legtöbbször szerepelnek a nemzetközi irodalomban jövedelemeloszlások közelítésére. (L. pl. [1], [2], [14], [15].) Ezek közül a P és C-3 eloszlások egyáltalán nem bizonyultak alkalmasnak a magyar jövedelemeloszlások leírására, mert – egy-két esettől eltekintve – irreálisan magas alsó korlátokat adtak a legalacsonyabb jövedelmekre. Ezért velük a továbbiakban nem is foglalkozunk. A többi valószínűségeloszlás $f(x)$ sűrűségfüggvényét és $F(x)$ eloszlásfüggvényét az 1. táblázat tartalmazza.[1]

*1. táblázat*

A vizsgált valószínűségeloszlások sűrűség- és eloszlásfüggvényei

| Eloszlás | Sűrűségfüggvény | Eloszlásfüggvény |
|---|---|---|
| L-2 | $\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad x>0$ | $\Phi(\ln x \mid m, \sigma^2)$ |
| L-3 | $\frac{1}{(x-\tau)\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{[\ln(x-\tau)-m]^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad x>\tau$ | $\Phi(\ln(x-\tau) \mid m, \sigma^2)$ |
| G-2 | $\frac{x^{\alpha-1}\exp\{-x/\beta\}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}, \quad \alpha,\beta>0, \quad x>0$ | $\frac{\Gamma_{x/\beta}(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$ |
| G-3 | $\frac{(x-\gamma)^{\alpha-1}\exp\left\{-\frac{x-\gamma}{\beta}\right\}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}, \quad \alpha,\beta>0 \quad x>\gamma$ | $\frac{\Gamma_{\frac{x-\gamma}{\beta}}(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$ |
| C-2 | $\frac{2}{\pi}\frac{\alpha\left(\frac{m}{x}\right)^{\alpha}}{x\left[1+\left(\frac{m}{x}\right)^{2\alpha}\right]}, \quad x>0$ | $1-\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{m}{x}\right)^{\alpha}$ |
| L | $\frac{\alpha\beta x^{\beta-1}}{(1+\alpha x^{\beta})^2}, \quad x>0$ | $1-\frac{1}{1+\alpha x^{\beta}}$ |

[1] A táblázatokban szereplő Gamma, ill. Béta-függvények definíciója:

Teljes Gamma-függvény: $\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1}e^{-x}dx, \quad p>0$

Nem teljes Gamma-függvény: $\Gamma_x(p) = \int_0^{x} t^{p-1}e^{-t}dt$

Teljes Béta-függvény: $B(p,q) = \int_0^{\infty} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, \quad p,q>0$

Nem teljes Béta-függvény: $B_x(p,q) = \int_0^{x} t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$

$\Phi(x \mid m, \sigma^2)$ az $m$, $\sigma$ paraméterű normális eloszlásfüggvényt jelöli.

*2. táblázat*

A vizsgált valószínűségeloszlások jellemzői

| Eloszlás | $\mu_r$ | $M$ | $D^2$ | $Me$ | $Mo$ |
|---|---|---|---|---|---|
| L-2 | $e^{rm+\frac{1}{2}r^2\sigma^2}$ | $e^{m+\frac{1}{2}\sigma^2}$ | $M^2(e^{\sigma^2}-1)$ | $e^m$ | $e^{m-\sigma^2}$ |
| L-3 | $e^{rm+\frac{1}{2}r^2\sigma^2}+\tau$ | $e^{m+\frac{1}{2}\sigma^2}+\tau$ | $(M-\tau)^2(e^{\sigma^2}-1)$ | $e^m+\tau$ | $e^{m-\sigma^2}+\tau$ |
| G-2 | $\beta^r\dfrac{\Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha)}$ | $\alpha\beta$ | $\dfrac{M^2}{\alpha}$ | $\dfrac{3\alpha-1}{3}\beta$ * | $\beta(\alpha-1)$ |
| G-3 | $\beta^r\dfrac{\Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha)}+\gamma$ | $\alpha\beta+\gamma$ | $\dfrac{(M-\gamma)^2}{\alpha}$ | $\dfrac{3\alpha-1}{3}\beta+\gamma$ * | $\beta(\alpha-1)+\gamma$ |
| C-2 | $\dfrac{m^r}{\cos\dfrac{r\pi}{2\alpha}},\quad r<\alpha$ | $\dfrac{m}{\cos\dfrac{\pi}{2\alpha}}$ | $M^2\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{\alpha}}{\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2\alpha}}-1\right)$ | $m$ | $m\left(\dfrac{\alpha-1}{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{2\alpha}}$ |
| L | $\alpha^{-\frac{r}{\beta}}\dfrac{r\dfrac{\pi}{\beta}}{\sin(r\pi/\beta)},\quad r<\beta$ | $\alpha^{-\frac{1}{\beta}}\dfrac{\pi/\beta}{\sin(\pi/\beta)}$ | $M^2\left(\dfrac{\operatorname{tg}(\pi/\beta)}{\pi/\beta}-1\right)$ | $\alpha^{-\frac{1}{\beta}}$ | $\left(\dfrac{\beta-1}{\beta+1}\right)^{\frac{1}{\beta}}\cdot\alpha^{-\frac{1}{\beta}}$ |

* Közelítő formulák

A vizsgált eloszlások jellemzői közül a 2. táblázatban az alábbi jellemzőket adjuk meg: a nem centrális

$$\mu_r = \int_0^\infty x^r(x)\,dx$$

momentumokat, külön feltüntetve az $M = \mu_1$ várható értéket; a

$$D^2 = \int_0^\infty (x - M)^2 f(x)dx = \mu_2 - \mu_1^2$$

szórásnégyzetet, ami egyben a második centrális momentum; továbbá az $Me$-vel jelölt mediánt, valamint az $Mo$-val jelölt móduszt.

A 3. táblázat a szóban forgó eloszlások

$$F_1(x) = \frac{1}{\mu_1} \int_0^\infty t f(t)\,dt$$

ún. első momentum – eloszlásfüggvényét tartalmazza.[2]

*3. táblázat*

A vizsgált valószínűségeloszlások első momentum-eloszlásfüggvénye

| Eloszlás | Első momentum-eloszlásfüggvény |
|---|---|
| L-2 | $\Phi(\ln x \mid m + \sigma^2, \sigma^2)$ |
| L-3 | $\frac{\tau}{M} \Phi(\ln(x - \tau) \mid m, \sigma^2) + \frac{M - \tau}{M} \Phi(\ln(x - \tau) \mid m + \sigma^2, \sigma^2)$ |
| G-2 | $\frac{\Gamma_{x/\beta}(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)}$ |
| G-3 | $\frac{1}{\alpha\beta + \gamma} \; \frac{\beta \Gamma_{\frac{x-\gamma}{\beta}}(\alpha + 1) + \gamma \Gamma_{\frac{x-\gamma}{\beta}}(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$ |
| C-2 | $\frac{1}{\pi} \cos \frac{\pi}{2\alpha} B_{\frac{1}{1+\left(\frac{m}{x}\right)^{2\alpha}}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\alpha}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2\alpha}\right)$ |
| L | $\frac{1}{\pi/\beta} \sin \pi/\beta \left[ B\left(1 - \frac{1}{\beta}, 1 + \frac{1}{\beta}\right) - B_{\frac{1}{1+\alpha x^\beta}} \left(1 - \frac{1}{\beta}, 1 + \frac{1}{\beta}\right) \right]$ |

[2] A 2. és 3. táblázatban található formulák többségének levezetése [8]-ban és [16]-ban található.

Az $F_1(x)$ első momentum-eloszlásfüggvény felhasználásával definiálható végül a

$$v = \frac{1 - F_1(M)}{1 - F(M)} \cdot \frac{F(M)}{F_1(M)}$$

egyenlőtlenségi mérőszám, melyet a hazai mikro jövedelemstatisztika rendszeresen használ és közöl. Belátható, hogy e mérőszám az $M$-nél magasabb, illetve alacsonyabb jövedelemmel rendelkező személyek átlagjövedelmének hányadosa. A részleteket illetően a [4] tanulmányra utalunk.

E jellemzők bemutatását azért tartjuk célszerűnek, mert egyrészt elég jól mutatják az eloszlás jellegét – a módusz pl. a sűrűségfüggvény maximum helyét adja –, másrészt mert az egyes eloszlásoknak az empirikus jövedelemeloszlásokhoz való illeszkedése értékelése során a jellemzők empirikus adatokból számított értékeit összevetettük az egyes eloszlások becsült paraméterei alapján meghatározható értékekkel.

A 2. táblázatból látható, hogy az $m$ paraméter a C-2 eloszlásnál épp a medián, az L-2 eloszlásnál pedig a medián logaritmusa, továbbá L-2 $\sigma$ paramétere, a G-2 és C-2 $\alpha$ paramétere és az L $\beta$ paramétere egyértelműen meghatározzák a relatív szórást (illetve általánosabban az eloszlás egyenlőtlenségét).

A 2. táblázatban közölt jellemzők alapján egyszerűen meghatározhatók az egyes eloszlások aszimmetriáját, illetve csúcsosságát mérő

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3 - 3M\mu_2 + 2M^3}{D^3},$$

illetve

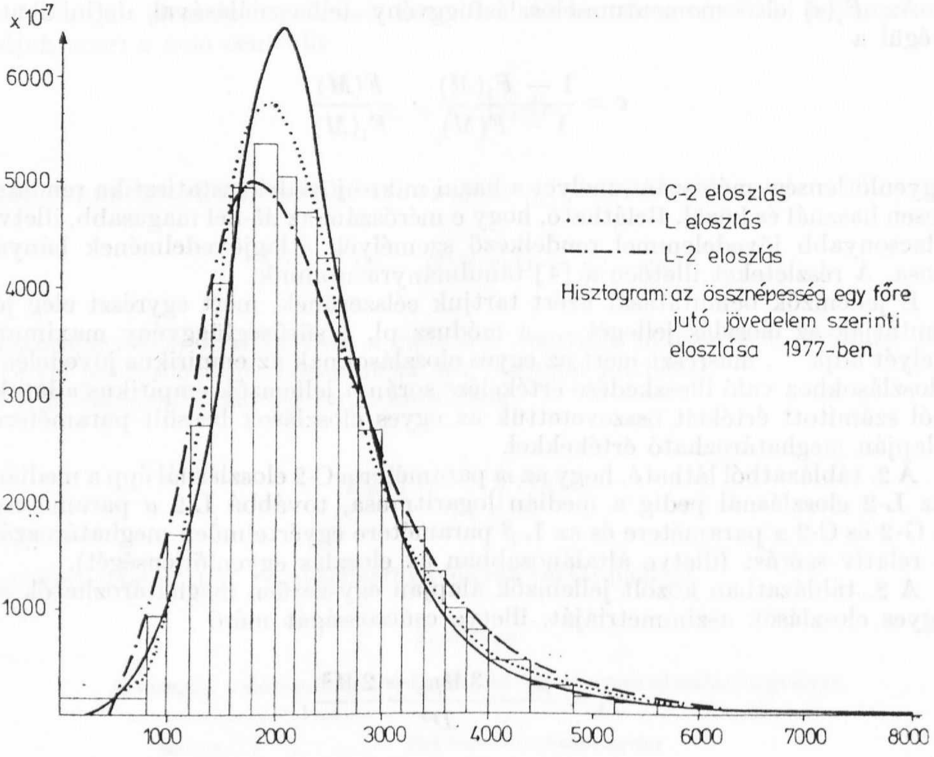
$$\gamma_2 = \frac{\mu_4 - 4M\mu_3 + 6M^2\mu_2 - 3M^4}{D^4} - 3$$

együtthatók is, amelyek jó szolgálatot nyújtanak az egyes sűrűségfüggvények alakjának jellemzéséhez. $\gamma_1$ pozitív értéke bal oldali, negatív értéke jobb oldali aszimmetriára utal, $\gamma_2$ pedig aszerint pozitív vagy negatív, hogy az eloszlás csúcsosabb vagy lapultabb-e a standard normális eloszlásnál.

Talán nem érdektelen ebből a szempontból összehasonlítani a jól ismert L-2 eloszlás, illetve a kevésbé ismert C-2 és L eloszlások sűrűségfüggvényeit, annál is inkább, mert az utóbbi a továbbiakban fontos szerepet játszik. Az 1. ábra mutatja a három sűrűségfüggvényt azonos – az össznépesség 1977. évi jövedelemeloszlásának megfelelő – várható érték és szórás mellett. Összehasonlításul a szóban forgó empirikus eloszlás hisztogramját is berajzoltuk az ábrába.

Látható, hogy a – bal oldali – aszimmetria, de méginkább a csúcsosság tekintetében jelentős különbség van a három eloszlás között. Leginkább aszimmetrikus és csúcsos a C-2 eloszlás, legkevésbé az L-2 eloszlás, az L eloszlás mindkét tekintetben közepes helyet foglal el. A 4. táblázatban megadjuk a három ábrázolt eloszlás néhány jellemzőjét.

Látható, hogy különösen $\gamma_2$ igen érzékeny mérőszám, a csúcsosságokban az ábrán mutatkozó nem túl nagy eltéréseket erősen felnagyítva mutatja




*1. ábra*

*4. táblázat*

Az ábrázolt három eloszlás néhány jellemzője

| Eloszlás | $\gamma_1$ | $\gamma_2$ | *Me* | *Mo* |
|---|---|---|---|---|
| L-2 | 1,316 | 3,232 | 2154,8 | 1838,2 |
| L | 2,694 | 34,345 | 2170,1 | 1987,2 |
| C-2 | 3,798 | 132,561 | 2178,5 | 2061,2 |

Általánosságban is kimutatható, hogy azonos várható értékű és szórású L-2 és L eloszlások közül mindig az utóbbi mutatja a nagyobb aszimmetriát és csúcsosságot. L és L-2 aszimmetriája közötti különbség ugyanis

$$\frac{M^3}{D^3} \cdot \frac{\operatorname{tg}^2(\pi/\beta)}{(\pi/\beta)^2}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{3}\operatorname{tg}^2(\pi/\beta)} - \frac{\operatorname{tg}(\pi/\beta)}{\pi/\beta}\right]$$

alakban írható, ami $\beta > 3$ esetén mindig pozitív. Hasonlóképpen megmutatható az is, hogy a két eloszlás csúcsosságának a különbsége is mindig pozitív

$\beta > 4$ esetén. Mindkét különbség értéke annál nagyobb, minél közelebb van $\beta$ 3-hoz, illetve 4-hez. $\beta \to \infty$ esetén pedig mindkét különbség 0-hoz tart, azaz az L eloszlás alakja annál jobban közelíti az ugyanolyan várható értékű és szórású L-2 eloszlásét, minél nagyobb L $\beta$ paraméterének értéke.

## 1.2 *A paraméterek becslése*

Mint a bevezetésben már jeleztük, vizsgálataink adatbázisát a KSH által 1963 óta rendszeresen végrehajtott reprezentatív jövedelmi felmérések 1967-re, 1972-re és 1977-re vonatkozó adatai képezték. Mint ismeretes, e felmérések adatai igen jól egyeznek a megfelelő makrostatisztikai adatokkal, s néhány kisebb módosítást, pontosítást leszámítva lényegében azonos módon és technikával készültek. Ily módon kitűnő adatbázist nyújtanak a jövedelemeloszlások dinamikus vizsgálatára.

Kiemelkedő fontossága miatt az egy főre jutó személyes rendelkezésű jövedelmek eloszlásainak időbeli alakulását tettük vizsgálat tárgyává a gazdaságilag aktív, az inaktív és a teljes népesség körében. E két népességcsoport jövedelemeloszlásainak egymástól elkülönített vizsgálatát az a tény teszi indokolttá, hogy nagymértékben különböznek egymástól az aktív és inaktív népesség jövedelmi forrásai és a jövedelmeik egyenlőtlenségét előidéző tényezők is, ami feltehetően eltérő jellegű jövedelemeloszlásokhoz vezet.

Ismeretes, hogy egy empirikus eloszláshoz illeszkedő valószínűségeloszlás paramétereit többféle eljárással is lehet becsülni, részben attól függően, hogy milyen kritérium alapján bíráljuk el az illeszkedés jóságát. Ha ugyanahhoz az empirikus eloszláshoz többféle eloszlásfüggvényt illesztünk, elvileg olyan paraméterbecslő eljárást kell alkalmazni, amely ugyanazon kritérium alapján ad optimális becslést a vizsgált eloszlásfüggvények ismeretlen paramétereire. Ugyanis csak ezúton válik a különböző eloszlások illeszkedése összemérhetővé. Ideális az lett volna, ha minden esetben a paraméterek ún. *maximum likelihood becslését* tudtuk volna meghatározni. A vizsgált eloszlásfüggvények többségénél azonban a maximum likelihood becslés meghatározása még egyedi adatok használata esetén is elég bonyolult, csoportosított adatokra pedig — a jövedelemeloszlások osztályközös gyakoriságok formájában álltak rendelkezésünkre — elméletileg sem teljesen megoldott. Egyedül az L-2 eloszlásra volt meg — 1972-re és 1977-re — a paraméterek maximum likelihood becslése, ami ebben az esetben az egyedi jövedelmek logaritmusainak átlaga, illetve szórásnégyzete.

Ezért általában más becslési eljárásokat alkalmaztunk, így pl. esetenként az ún. *momentum módszert*. Ennek során annyi

$$m_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} n_i x_i^r, \quad n = \sum_{i=1}^{k} n_i, \quad r = 1, 2, \ldots$$

mintabeli momentumot, ahány becsülendő paraméter van, egyenlővé teszünk a $\mu_r$ elméleti momentumokkal, s az így adódó egyenleteket megoldva a $\mu_r$-ekben szereplő paraméterekre, kapjuk a paraméterek momentum-becsléseit. $m_r$ formulájában $x_i$ az $i$-edik háztartás egy főre jutó jövedelme, $n_i$ pedig a taglétszáma

Gyakran alkalmazzák a paraméterek becslésére a *minimális $\chi^2$ módszert* is amely azon $\Theta$- értékeket tekinti az ismeretlen $\Theta$ paraméter-vektor becslésének amelyre a

$$\chi^2(\Theta) = n \sum_{i=1}^{k} \frac{\left[\frac{n_i}{n} - p_i(\Theta)\right]^2}{p_i(\Theta)} \tag{1.1}$$

kifejezés minimális Itt

$\frac{n_i}{n}$ — az $i$-edik jövedelmi kategóriába tartozó személyek relatív gyakorisága

$p_i(\Theta)$ — az $i$-edik jövedelmi kategóriába esés valószínűsége az illesztett eloszlásfüggvény alapján.

De becsülhetők az ismeretlen paraméterek a hisztogramhoz, illetve az empirikus eloszlásfüggvényhez a *legkisebb négyzetek módszerével* illesztett sűrűség-, illetve eloszlásfüggvény alapján is. Előbbi esetben — egyenletes osztályközöket feltételezve — a

$$\Delta(\Theta) = \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{n_i}{n} - p_i(\Theta)\right]^2 \tag{1.2}$$

négyzetösszeget, az utóbbi esetben pedig az

$$S(\Theta) = \sum_{i=1}^{k-1} [F_n(x^i) - F(x^i, \Theta)]^2 \tag{1.3}$$

négyzetösszeget kell minimalizálni, ahol

$$F_n(x^i) = \sum_{j=1}^{i} \frac{n_j}{n},$$

$x^i$ pedig az $i$-edik jövedelem kategória felső határa.

Megjegyzendő, hogy a különböző becslési eljárások másképp illesztik a szóban forgó valószínűségeloszlást az empirikus adatokhoz, s így természetesen más-más becsléseket adnak a paraméterekre. Így pl. a minimális $\chi^2$ módszer — mivel relatív eltéréseket tekint — elsősorban az eloszlás szélein, a kis relatív gyakoriságú kategóriákhoz igyekszik jó illeszkedést biztosítani. Ezzel szemben $S(\Theta)$ minimalizálásakor inkább az eloszlás közepén — ott, ahol az eloszlásfüggvény meredeken emelkedik — lesz jobb az illeszkedés, $\Delta(\Theta)$ minimalizálása során ugyanakkor egyformán értékelődnek a sűrűségfüggvénynek a hisztogramtól vett eltérései az eloszlás különböző részein.

Az esetek túlnyomó többségében mindegyik felsorolt becslési eljárás nemlineáris, explicite nem megoldható egyenletrendszerekhez vezet. Legegyszerűbb a momentum-becslések meghatározása, különösen akkor, ha csak két paramétert kell becsülni. Ez utóbbi esetben, ha egyedi — és nem csoportosított — adatokból számított mintabeli átlag és szórásnégyzet áll rendelkezésre, a momentum módszer elég megbízható becsléseket szolgáltat a keresett két paraméterre. Ezt tapasztalataink is alátámasztották. 1972-re és 1977-re ugyanis meg tudtuk határozni mindhárom vizsgált eloszlás esetén az egyedi adatokból számolt momentumokon alapuló becsléseket az összes tekintett két-paraméteres eloszlásfüggvényre, és ezek — összevetve más módszerekkel nyert becslésekkel — elég hatásosaknak bizonyultak, különösen az L eloszlásoknál. A háromparaméteres eloszlások (L-3, G-3) esetén ezzel szemben a momentum módszer meglehetősen rossz hatásfokú becsléseket eredményezett, nem elsősorban azért, mert a harmadik mintabeli momentumot csak csoportosított adatokból tudtuk számítani, hanem inkább amiatt, mert a harmadik paraméternek — küszöb paraméter lévén — nem sok köze van a harmadik momentumhoz.

Mint említettük, az elbírálás egységességét, az eredmények összehasonlíthatóságát az biztosítja, ha mindegyik évre, mindhárom rétegre és valamennyi figyelembe vett eloszlásfüggvényre azonos módszerrel történik a paraméterek becslése. Ilyen egységes módszernek kínálkozott az empirikus eloszlásokhoz legkisebb négyzetek módszerével illesztett eloszlásfüggvények alkalmazása, mivel erre, mint nem lineáris regresszióra kész programcsomag állt rendelkezésre. Az iterációhoz a kezdő értékeket általában a momentum módszerrel nyert becslések szolgáltatták. Kivételt képezett az L eloszlás, amelynél — mint erről könnyűszerrel meggyőződhetünk — az

$$\ln \frac{F(x)}{1 - F(x)} = \ln \alpha + \beta \ln x \tag{1.4}$$

összefüggés alapján egyszerűen nyerhetők regressziós becslések az $\alpha$ és $\beta$ paraméterekre.

Az (1.3) kifejezés minimálizálása néhány esetben nem szolgáltatott elfogadható becslést a keresett paraméterekre. Ez volt a helyzet az L-eloszlással 1967-re és 1972-re, feltehetően több lokális szélsőérték létezése miatt. A G-3 eloszlás esetén viszont 1972-re és 1977-re nem kaptunk megfelelő becsléseket, itt elsősorban a túl magasra becsült küszöb-paraméter okozott problémát. Az L-eloszlás paramétereire ezekben az esetekben a fenti (1.4) összefüggésből adódó lineáris regressziós becsléseket a G-3 eloszlás esetén pedig a momentum becsléseket fogadtuk el.

Az egyes eloszlások paramétereire végül elfogadott becsléseket az 5. táblázat tartalmazza. Megjegyezzük, hogy az illeszkedés-vizsgálatokhoz a táblázatban közöltnél több tizedesjegyet használtunk.

### 1.3 *A vizsgált valószínűségeloszlások illeszkedése*

A vizsgált valószínűségeloszlások becsült paramétereit felhasználva minden esetben meghatároztuk az egyes empirikus jövedelemeloszlásokat közelítő elméleti valószínűségeloszlásokat, s összevetettük azokat a megfelelő empirikus jövedelemeloszlásokkal. Ez az összevetés többféleképpen is megtehető.

Elvben természetesen ugyanazt a kritériumot kellene alapul venni az összehasonlítások során is, mint amelyek szerint optimalizáltunk akkor, amikor a vizsgált valószínűségeloszlások ismeretlen paramétereit becsültük. A jelen esetben tehát elméletileg az (1.3) mérőszám szerinti összehasonlítás volna indokolt, mert a paraméterek becslése a legtöbb esetben $S(\Theta)$ minimalizálása útján történt. Úgy véljük azonban, hogy gyakorlati szempontból elősorban az illeszkedés relatív mértéke bír jelentőséggel, ami például az (1.1)-ben definiált $\chi^2$-értékek alapján történő összehasonlítást indokolná. A szokatlanul nagy mintaelemszámok miatt viszont a szokásos $\chi^2$-próbás illeszkedésvizsgálat még viszonylag kis eltérések esetén is általában szignifikáns eltérést jelzett volna az empirikus és az azokhoz illesztett eloszlások között. Ezért inkább az leíró mérőszámok használata mellett döntöttünk. Az (1.5) mérőszámok ugyanis

5. *táblázat*

A vizsgált valószínűségeloszlások becsült paraméterei

| Eloszlás-paraméter | 1967 Aktív | 1967 Inaktív | 1967 Összes | 1972 Aktív | 1972 Inaktív | 1972 Összes | 1977 Aktív | 1977 Inaktív | 1977 Összes |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | népesség | | | | | | | | |
| *L-2 eloszlás* | | | | | | | | | |
| $\hat{m}$ | 6,9934 | 6,6247 | 6,9625 | 7,3249 | 6,8671 | 7,2864 | 7,7198 | 7,4493 | 7,6831 |
| $\hat{\sigma}$ | 0,3853 | 0,3967 | 0,3983 | 0,3866 | 0,4648 | 0,4102 | 0,3584 | 0,3994 | 0,3734 |
| *L-3 eloszlás* | | | | | | | | | |
| $\hat{m}$ | 7,2238 | 6,7261 | 7,2354 | 7,4606 | 6,8328 | 7,5588 | 7,7444 | 7,4107 | 7,7964 |
| $\hat{\sigma}$ | 0,3106 | 0,3638 | 0,3092 | 0,3383 | 0,4792 | 0,3143 | 0,3501 | 0,4139 | 0,3352 |
| $\hat{\tau}$ | −275,1 | −79,3 | −323,1 | −215,1 | 31,3 | −446,4 | −54,5 | 62,6 | −253,6 |
| *G-2 eloszlás* | | | | | | | | | |
| $\hat{\alpha}$ | 6,7123 | 5,3833 | 6,0745 | 5,7973 | 4,5045 | 5,4093 | 6,9099 | 5,8450 | 6,4523 |
| $\hat{\beta}$ | 172,6 | 148,9 | 185,8 | 280,2 | 232,3 | 290,4 | 345,7 | 315,0 | 357,5 |
| *G-3 eloszlás* | | | | | | | | | |
| $\hat{\alpha}$ | 3,8070 | 2,7862 | 3,7263 | 2,693 | 0,958 | 2,823 | 1,782 | 1,387 | 1,868 |
| $\hat{\beta}$ | 232,7 | 195,2 | 236,5 | 426,1 | 584,1 | 420,1 | 715,5 | 697,2 | 696,5 |
| $\hat{\gamma}$ | 282,4 | 272,4 | 256,2 | 495,3 | 522,5 | 400,3 | 1137,4 | 906,3 | 1031,0 |
| *C-2 eloszlás* | | | | | | | | | |
| $\hat{m}$ | 1090,2 | 753,6 | 1057,0 | 1519,1 | 962,8 | 1462,3 | 2253,7 | 1719,3 | 2173,1 |
| $\hat{\alpha}$ | 3,6403 | 3,5664 | 3,5193 | 3,5565 | 3,0259 | 3,3441 | 3,9048 | 3,5361 | 3,7532 |
| *L-eloszlás* | | | | | | | | | |
| $10^{14} \cdot \hat{\alpha}$ | 0,6242 | 1,5095 | 1,3697 | 5,8949 | 414,8642 | 28,7873 | 0,0146 | 1,6272 | 0,0722 |
| $\hat{\beta}$ | 4,6859 | 4,7941 | 4,5931 | 4,1671 | 3,8118 | 3,9743 | 4,7229 | 4,2620 | 4,5376 |

$$\overline{RH}_a = \frac{1}{k_1}\sum_{j=1}^{k_1} \frac{\left|\frac{n_j}{n} - p_j\right|}{\frac{n_j}{n}}; \quad \overline{RH}_k = \frac{1}{k_2}\sum_{j=k_1+1}^{k_1+k_2} \frac{\left|\frac{n_j}{n} - p_j\right|}{\frac{n_j}{n}}$$
$$\overline{RH}_m = \frac{1}{k_3}\sum_{j=k_1+k_2+1}^{n} \frac{\left|\frac{n_j}{n} - p_j\right|}{\frac{n_j}{n}}; \quad \overline{RH} = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \frac{\left|\frac{n_j}{n} - p_j\right|}{\frac{n_j}{n}} \tag{1.5}$$

azzal az igen előnyös tulajdonsággal rendelkeznek, hogy azt az átlagos relatív becslési hibát mutatják az eloszlás alsó, középső és felső szakaszára, illetve egészére nézve, amit a tényleges jövedelemeloszlásnak egy becsült eloszlással való közelítésekor követünk el. Ennek megfelelően $k_1$ az eloszlás alsó, $k_2$ az eloszlás középső, $k_3$ pedig az eloszlás felső szakaszába tartozó jövedelemkategóriák számát jelöli. Az eloszlások három szakaszát oly módon definiáltuk, hogy a személyek aránya minden esetben megközelítően 30, 60, illetve 10% legyen. Ez a szakaszokra bontás önkényes ugyan, de a jövedelemkategóriák adott száma és határai mellett nem találtunk jobb megoldást. Az (1.5) mutatók értékeit a 6. táblázat tartalmazza az egyes eloszlások alsó és középső szakaszának felső határaival együtt.

Az illeszkedés három szakaszon történő vizsgálatát azért tartottuk indokoltnak, mert kérdéses volt, hogy az eloszlások egyes szakaszainak közelítésére ugyanaz a valószínűségeloszlás alkalmas-e, illetve az egyes szakaszok egyformán közelíthetők-e. Az eredmények igazolták eljárásunkat, ugyanis az eloszlások alsó és középső szakasza általában a felső szakasznál lényegesen jobban közelíthető, s a különböző szakaszok közelítésére általában nem ugyanazok az eloszlások a legalkalmasabbak.

A teljes eloszláshoz való illeszkedést vizsgálva jól látható, hogy az utóbbi tíz év folyamán az *aktív* és *összes* népesség jövedelemeloszlásának típusában érdekes változás állt be. Míg ugyanis 1967-ben e két népességcsoport jövedelemeloszlása az L-3 eloszlással volt a legjobban közelíthető, addig 1977-ben a két szóban forgó jövedelemeloszlást már az L eloszlás írta le a legjobban. Az 1972-es év e szempontból érdekes átmenetet képez 1967 és 1977 között, mert ekkor az aktív népesség esetén a C-2 eloszlás tűnik a legalkalmasabbnak a jövedelemeloszlás közelítésére, az össznépességnél pedig az L-3 és C-2 eloszlások lényegében azonos mértékben a legmegfelelőbbek. Ez annál is inkább érdekes, mert a C-2 eloszlás 1967-ben még egyértelműen a legkevésbé használhatónak bizonyult. Az *inaktív* népesség jövedelemeloszlásának típusa ezzel szemben időben jóval stabilabbnak tűnik, mert az L-2 eloszlás mindhárom évben igen jól közelíti a szóban forgó tényleges eloszlást. Igaz ugyan, hogy 1972-ben az L-3 és L eloszlás, 1977-ben pedig az L-3 eloszlás az L-2-nél valamivel jobb eredményt ad, de a közöttük fennálló különbség minimális. Említést érdemel még az is, hogy a más vizsgálatok [14] során jól használhatónak tűnő G-2 és G-3 eloszlás nálunk 1972-ben és 1977-ben a legkevésbé alkalmasnak tűnt. Ez valószínűleg a G-3 eloszlás küszöb-paraméterének nem kielégítő becslésével is kapcsolatos.

*6. táblázat*

A vizsgált valószínűségeloszlások illeszkedése az empirikus jövedelemeloszlások különböző szakaszain

| Eloszlás | 1967 | | | 1972 | | | 1977 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Aktív | Inaktív | Összes | Aktív | Inaktív | Összes | Aktív | Inaktív | Összes |
| | népesség | | | népesség | | | népesség | | |
| | | | | Alacsony jövedelmek | | | | | |
| Felső határ | 900 | 700 | 900 | 1200 | 800 | 1200 | 1800 | 1400 | 1800 |
| L-2 | 0,1291 | 0,0268 | 0,1334 | 0,2780 | 0,0179 | 0,2718 | 0,2602 | 0,1170 | 0,2186 |
| L-3 | 0,0454 | 0,0107 | 0,0332 | 0,2173 | 0,0581 | 0,1320 | 0,2562 | 0,1310 | 0,1640 |
| G-2 | 0,0258 | 0,0870 | 0,0309 | 0,1905 | 0,3026 | 0,1001 | 0,2672 | 0,2238 | 0,1752 |
| G-3 | 0,1259 | 0,0287 | 0,1103 | 0,4018 | 0,4961 | 0,3832 | 0,6333 | 0,4642 | 0,5189 |
| C-2 | 0,0647 | 0,0853 | 0,0746 | 0,0508 | 0,2060 | 0,0513 | 0,1067 | 0,1097 | 0,0205 |
| L | 0,1040 | 0,1575 | 0,1311 | 0,1291 | 0,0744 | 0,1331 | 0,1212 | 0,0656 | 0,0663 |
| | | | | Közepes jövedelmek | | | | | |
| Felső határ | 1800 | 1300 | 1800 | 2400 | 1700 | 2400 | 3600 | 3000 | 3600 |
| L-2 | 0,0469 | 0,0951 | 0,0413 | 0,0256 | 0,0645 | 0,0467 | 0,0320 | 0,0860 | 0,0267 |
| L-3 | 0,0312 | 0,0932 | 0,0307 | 0,0268 | 0,0598 | 0,0303 | 0,0315 | 0,0845 | 0,0379 |
| G-2 | 0,0454 | 0,1129 | 0,0477 | 0,0917 | 0,0973 | 0,0791 | 0,0973 | 0,1350 | 0,0921 |
| G-3 | 0,0370 | 0,0943 | 0,0311 | 0,0903 | 0,1402 | 0,0913 | 0,0826 | 0,1195 | 0,0787 |
| C-2 | 0,1057 | 0,1412 | 0,1146 | 0,0524 | 0,0858 | 0,0740 | 0,0666 | 0,0578 | 0,0822 |
| L | 0,1116 | 0,1336 | 0,1228 | 0,0561 | 0,0808 | 0,0786 | 0,0386 | 0,0504 | 0,0489 |
| | | | | Magas jövedelmek | | | | | |
| L-2 | 0,1521 | 0,2217 | 0,1721 | 0,0690 | 0,1865 | 0,0739 | 0,1366 | 0,2061 | 0,1343 |
| L-3 | 0,1173 | 0,3104 | 0,1231 | 0,0914 | 0,1579 | 0,0993 | 0,1366 | 0,1978 | 0,1489 |
| G-2 | 0,1629 | 0,4077 | 0,1934 | 0,1846 | 0,3256 | 0,1712 | 0,2226 | 0,4300 | 0,2708 |
| G-3 | 0,1815 | 0,3473 | 0,1463 | 0,1636 | 0,2340 | 0,0575 | 0,2272 | 0,1914 | 0,2036 |
| C-2 | 0,3479 | 0,9541 | 0,4103 | 0,1345 | 0,1859 | 0,1671 | 0,2827 | 0,4801 | 0,3520 |
| L | 0,1855 | 0,3585 | 0,1598 | 0,0998 | 0,1362 | 0,1222 | 0,1577 | 0,3415 | 0,1657 |
| | | | | Összesen | | | | | |
| L-2 | 0,1049 | 0,1670 | 0,1115 | 0,1180 | 0,1101 | 0,1269 | 0,1279 | 0,1488 | 0,1142 |
| L-3 | 0,0690 | 0,2198 | 0,0690 | 0,1026 | 0,1016 | 0,0774 | 0,1267 | 0,1468 | 0,1094 |
| G-2 | 0,0899 | 0,2930 | 0,1042 | 0,1423 | 0,2245 | 0,1037 | 0,1852 | 0,2916 | 0,1759 |
| G-3 | 0,1123 | 0,2447 | 0,0926 | 0,2081 | 0,2312 | 0,1822 | 0,2766 | 0,2138 | 0,2370 |
| C-2 | 0,1973 | 0,6391 | 0,2283 | 0,0675 | 0,1459 | 0,0841 | 0,1522 | 0,2688 | 0,1600 |
| L | 0,1404 | 0,2751 | 0,1394 | 0,0888 | 0,1036 | 0,1051 | 0,1016 | 0,1923 | 0,0941 |

Ami a szakaszonkénti illeszkedést illeti, csak egy olyan eset van (az összes népesség 1967. évi jövedelemeloszlása), amikor ugyanaz az eloszlástípus bizonyul a legjobbnak a tényleges eloszlás mindhárom szakaszán, mint a teljes eloszlásra nézve. Általánosságban annyit mondhatunk, hogy az eloszlások *középső-* és *felső* szakaszának közelítésére legtöbbször az L-2 és L-3 eloszlás bizonyult a legjobbnak. Az *alsó* szakasz tekintetében már nem ilyen egyöntetű a kép. Az aktív és összes népesség esetében 1967-ben a G-2 eloszlás, 1972-ben és 1977-ben pedig a C-2 eloszlás bizonyult a legjobbnak e szakaszon. Az inaktív népességnél ezzel szemben 1967-ben és 1972-ben az L-2 és L-3 eloszlás, 1977-ben pedig az L eloszlás.

*7. táblázat*

A jövedelemeloszlások tényleges és az illesztett valószínűségeloszlások becsült paraméterei alapján számított jellemzői

| Eloszlás | 1967 | | | 1972 | | | 1977 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Aktív | Inaktív | Összes | Aktív | Inaktív | Összes | Aktív | Inaktív | Összes |
| | népesség | | | népesség | | | népesség | | |
| | | | | | Medián | | | | |
| Egyedi tényleges | — | 760,0 | 1069,0 | 1525,0 | 965,0 | 1476,0 | 2252,0 | 1733,0 | 2186,0 |
| Csoportosított tényleges | 1102,0 | 760,0 | 1069,0 | 1525,0 | 965,0 | 1476,0 | 2256,6 | 1722,6 | 2180,2 |
| L-2 | 1089,4 | 753,5 | 1056,3 | 1517,6 | 960,1 | 1460,3 | 2252,6 | 1718,6 | 2171,2 |
| L-3 | 1096,6 | 754,6 | 1064,7 | 1523,1 | 959,0 | 1471,2 | 2254,1 | 1716,2 | 2178,4 |
| G-2 | 1100,7 | 752,1 | 1066,4 | 1530,8 | 968,9 | 1474,0 | 2273,4 | 1736,2 | 2187,8 |
| G-3 | 1090,8 | 751,2 | 1058,5 | 1500,9 | 887,4 | 1446,1 | 2174,0 | 1640,9 | 2100,0 |
| C-2 | 1090,2 | 753,6 | 1057,0 | 1519,1 | 962,8 | 1462,3 | 2253,7 | 1719,3 | 2173,1 |
| L | 1074,9 | 763,7 | 1043,0 | 1495,4 | 968,3 | 1430,4 | 2253,2 | 1719,0 | 2172,4 |
| | | | | | Relatív szórás | | | | |
| Egyedi tényleges | — | — | — | 0,455 | 0,547 | 0,474 | 0,397 | 0,482 | 0,415 |
| Csoportosított tényleges | 0,394 | 0,425 | 0,414 | 0,426 | 0,528 | 0,445 | 0,396 | 0,438 | 0,408 |
| L-2 | 0,400 | 0,413 | 0,414 | 0,402 | 0,491 | 0,428 | 0,370 | 0,416 | 0,387 |
| L-3 | 0,393 | 0,413 | 0,407 | 0,394 | 0,493 | 0,414 | 0,369 | 0,418 | 0,383 |
| G-2 | 0,386 | 0,431 | 0,406 | 0,415 | 0,471 | 0,430 | 0,380 | 0,414 | 0,394 |
| G-3 | 0,389 | 0,399 | 0,401 | 0,426 | 0,528 | 0,445 | 0,396 | 0,438 | 0,408 |
| C-2 | 0,519 | 0,534 | 0,545 | 0,537 | 0,696 | 0,589 | 0,470 | 0,541 | 0,497 |
| L | 0,428 | 0,416 | 0,438 | 0,495 | 0,558 | 0,527 | 0,423 | 0,481 | 0,445 |
| | | | | | *v* egyenlőtlenségi mutató | | | | |
| Egyedi tényleges | 1,877 | 1,929 | 1,916 | 1,892 | 2,142 | 1,958 | 1,792 | 1,923 | 1,835 |
| L-2 | 1,851 | 1,886 | 1,891 | 1,855 | 2,104 | 1,927 | 1,773 | 1,894 | 1,816 |
| L-3 | 1,851 | 1,895 | 1,892 | 1,847 | 2,104 | 1,912 | 1,773 | 1,895 | 1,813 |
| G-2 | 1,857 | 1,999 | 1,925 | 1,954 | 2,093 | 1,996 | 1,835 | 1,949 | 1,885 |
| G-3 | 1,834 | 1,860 | 1,866 | 1,942 | 2,200 | 2,006 | 1,838 | 1,949 | 1,875 |
| C-2 | 1,937 | 1,959 | 1,973 | 1,962 | 2,119 | 2,025 | 1,858 | 1,968 | 1,903 |
| L | 1,801 | 1,826 | 1,834 | 1,960 | 2,105 | 2,020 | 1,812 | 1,947 | 1,866 |

Végül megjegyezzük még, hogy az aktív és összes népesség jövedelemeloszlása 1967-ben és 1972-ben kissé jobban volt közelíthető, mint 1977-ben.

Érdemes ezután még az empirikus eloszlásokból közvetlenül, illetve az azok közelítésére használt eloszlások paramétereinek felhasználásával számított néhány jellemzőt összevetni egymással. Választásunk a mediánra, relatív szórásra és a *v* egyenlőtlenségi mutatóra — mint a jövedelemeloszlások fontos jellemzőire — esett.

Az eredményeket a 7. táblázat tartalmazza. A táblázat adataiból látható, hogy a mediánt egy-két esettől eltekintve kielégítően közelítik a valószínűségeloszlások becsült paramétereiből számítható medián-értékek. Nem ez a helyzet viszont a relatív szórással és a *v* egyenlőtlenségi mutatóval. A vizsgált valószínűségeloszlások többsége ugyanis általában alulbecsli még a csoportosított adatok alapján becsült relatív szórást is, ami köztudottan alacsonyabb az

*8. táblázat*

A tényleges jövedelemeloszlások és az azokhoz legjobban illeszkedő valószínűségeloszlások, 1977

| Egy főre jutó havi jövedelem, Ft | Aktív | | Inaktív | | Összes | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | népesség | | | | | |
| | tényleges | becsült[a] | tényleges | becsült[b] | tényleges | becsült[c] |
| – 800 | 1,2 | 0,8 | 3,5 | 2,8 | 1,5 | 1,1 |
| 800 – 1000 | 1,3 | 1,4 | 5,1 | 6,0 | 1,9 | 1,8 |
| 1000 – 1200 | 2,3 | 2,7 | 9,9 | 9,7 | 3,4 | 3,5 |
| 1200 – 1400 | 4,4 | 4,7 | 11,2 | 12,0 | 5,4 | 5,6 |
| 1400 – 1600 | 7,4 | 7,0 | 12,7 | 12,5 | 8,1 | 8,0 |
| 1600 – 1800 | 9,4 | 9,2 | 12,4 | 11,7 | 9,9 | 9,9 |
| 1800 – 2000 | 10,8 | 10,6 | 10,5 | 10,2 | 10,7 | 10,9 |
| 2000 – 2200 | 10,4 | 10,9 | 8,5 | 8,4 | 10,1 | 10,7 |
| 2200 – 2400 | 9,9 | 10,2 | 6,1 | 6,7 | 9,4 | 9,7 |
| 2400 – 2600 | 9,0 | 8,9 | 5,9 | 5,1 | 8,6 | 8,2 |
| 2600 – 2800 | 7,2 | 7,3 | 3,3 | 3,9 | 6,7 | 6,6 |
| 2800 – 3000 | 5,8 | 5,8 | 2,5 | 2,9 | 5,4 | 5,3 |
| 3000 – 3200 | 4,4 | 4,5 | 1,7 | 2,2 | 4,0 | 4,1 |
| 3200 – 3400 | 3,9 | 3,5 | 1,6 | 1,6 | 3,5 | 3,1 |
| 3400 – 3600 | 3,0 | 2,7 | 1,2 | 1,2 | 2,7 | 2,4 |
| 3600 – 3800 | 2,2 | 2,0 | 1,1 | 0,8 | 2,0 | 1,9 |
| 3800 – 4000 | 1,8 | 1,6 | 0,6 | 0,6 | 1,6 | 1,4 |
| 4000 – 4400 | 2,1 | 2,2 | 0,8 | 0,8 | 2,0 | 2,0 |
| 4400 – 4800 | 1,3 | 1,3 | 0,5 | 0,4 | 1,1 | 1,2 |
| 4800 – 5200 | 0,8 | 0,8 | 0,3 | 0,2 | 0,7 | 0,8 |
| 5200 – 5600 | 0,4 | 0,5 | 0,3 | 0,1 | 0,4 | 0,5 |
| 5600 – 6000 | 0,3 | 0,4 | 0,1 | 0,1 | 0,3 | 0,3 |
| 6000 – | 0,7 | 1,0 | 0,2 | 0,1 | 0,6 | 1,0 |
| Összesen | 100,0 | 100,0 | 100,0 | 100,0 | 100,0 | 100,0 |
| A megfigyelt személyek száma | 41 421 | | 6940 | | 48 361 | |

a) *L*-eloszlás: $\hat{\alpha} = 1,4626419 \cdot 10^{-16}$, $\hat{\beta} = 4,7228700$
b) L-2 eloszlás: $\hat{m} = 7,4492505$, $\hat{\sigma} = 0,3993919$
c) L-eloszlás: $\hat{\alpha} = 7,2191982 \cdot 10^{-16}$, $\hat{\beta} = 4,5375546$

egyedi adatokból számított relatív szórásnál. Ezzel szemben az L, de különösen a C-2 eloszlás legtöbbször még az egyedi adatokból számított relatív szórást is felülbecsli, a C-2 eloszlás nemegyszer igen lényegesen. Ami a $v$ egyenlőtlenségi mutatót illeti, lényegében itt is hasonló a helyzet. Azzal az eltéréssel, hogy 1967-ben az L-eloszlás feltételezése is a $v$ egyenlőtlenségi mutató alulbecsléséhez vezet, 1972-ben és 1977-ben viszont a G-2 és G-3 eloszlás feltételezése is felülbecsli $v$-t. Ebből adódóan aztán nem mindig azoknál a valószínűségeloszlásoknál egyeznek a legjobban a becsült paraméterek alapján számított jellemzők a közvetlenül számítottakkal, amelyek az (1.5) mutató szerint a legjobban illeszkednek az empirikus eloszlásokhoz.

Mindent egybevetve úgy tűnik, hogy a jövedelemeloszlásokat közelítő valószínűségeloszlások típusában az utóbbi évtizedben változás állt be. Ez a változás azonban csak az aktív és összes népesség jövedelemeloszlásának típusát érintette, az inaktív népességét nem. *Eszerint az aktív és összes népesség jövedelemeloszlásának típusa az utóbbi tíz évben L-3-ról L-re változott, míg az inaktív népességé továbbra is jól közelíthető L-2 eloszlással.* Érdemes megjegyezni azonban, hogy az L-3, ill. L-2 eloszlás feltételezése az aktív és összes népesség esetében továbbra is megengedhető, mert e két eloszlás csak a jövedelemeloszlás *alsó* részében illeszkedik lényegesen rosszabbul az empirikus adatokhoz, mint az L eloszlás. Ennek hatása azonban az eloszlás egészére vonatkozó $\overline{RH}$ mérőszám értékére nem túl nagy.

Azt a tényt, hogy a vizsgált jövedelemeloszlások mindegyike jól leírható valamelyik tekintett kétparaméteres valószínűségeloszlással, a 2. részben fogjuk kihasználni.

Végül a 8. táblázatban megadjuk az 1977. évi empirikus eloszlásokat, és az azokhoz legjobban illeszkedő valószínűségeloszlásokat.

## 2. A jövedelemeloszlások prognosztizálása

Ideálisan a jövedelemeloszlások prognosztizálása olyan szimulációs modellek kidolgozását igényelné, amelyek nemcsak egyszerűen a jövedelemeloszlások előrejelzésére alkalmasak, hanem felhasználhatók annak meghatározására is, hogy egy adott jövedelemeloszlás elérése érdekében milyen konkrét gazdaságpolitikai vagy társadalompolitikai intézkedések meghozatalára van szükség. Az ilyen modellek kidolgozása azonban igen sok adatot, időt és munkát igényel, ezért gyakorlati megvalósításukra — tudomásunk szerint — eddig még nem került sor.

Úgy véljük azonban, hogy ha a jövedelmek adott típusú eloszlását tételezzük fel a jövőben, s az eloszlásfüggvényben szereplő ismeretlen paramétereket nem mechanikusan extrapoláljuk, hanem különféle gazdaság- és társadalompolitikai feltételezések alapján becsüljük, akkor az ideálishoz közel eső eredményekre juthatunk. Cikkünk e részében egy ilyen prognosztizálási eljárást ismertetünk és alkalmazunk a gyakorlatban.

### 2.1 *A prognosztizálás módszere*

Az eljárás alkalmazásának az az előfeltétele, hogy a jövedelmek eloszlása a prognosztizált időszakban *kétparaméteres valószínűségeloszlás*sal legyen közelíthető. Az 1. pontban ismertetett vizsgálataink alapján ez a feltevés rövid távon mindenképpen, de esetleg még hosszú távon is reálisnak tűnik.

Az a tény, hogy a jövedelmek eloszlása két paramétert tartalmazó eloszlás segítségével kielégítően közelíthető, egyben azt is jelenti, hogy a tervezett átlagos jövedelem ($M_t$) és a *jövedelmek relatív szórása* prognosztizált értékének ($V_p$) ismeretében már egyértelműen meghatározhatók az alapulvett valószínűségeloszlás ismeretlen paraméterei, majd ezek alapján az egész jövedelemeloszlás is.

Ha például a jövedelmek eloszlása a jövőben L-2 eloszlással közelíthető, akkor a

$$\sigma_p = \sqrt{\ln (V_p^2 + 1)} \quad \text{és} \quad m_p = \ln M_t - \frac{1}{2}\sigma_p^2 \tag{2.1}$$

formulákból, L eloszlás feltételezése esetén pedig az

$$\alpha_p = \left( \frac{\pi/\beta_p}{M_t \sin(\pi/\beta_p)} \right)^{\beta_p} \tag{2.2}$$

összefüggés alapján adódnak az ismeretlen paraméterek, ahol $\beta_p$ a

$$\frac{\operatorname{tg}(\pi/\beta_p)}{\pi/\beta_p} = V_p^2 + 1 \tag{2.3}$$

egyenlet megoldása.[3]

A tervezett $M_t$ átlagos jövedelmi szint az egy főre jutó reáljövedelem tervezett növekedési üteme és bázisidőszaki színvonala alapján egyértelműen meghatározható. A relatív szórás $V_p$ prognosztizált értéke ezzel szemben a szórásnégyzet-felbontás néven ismert eljárással kapott eredmények bizonyos időbeli stabilitása alapján tűnik meghatározhatónak.

Induljunk ki ezért a szórásnégyzet jól ismert

$$S^2 = S_b^2 + S_k^2 \tag{2.4}$$

felbontásából, ahol

$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$ – a jövedelmek *teljes* szórásnégyzete,

$S_b^2 = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{L} n_l S_l^2$ – a jövedelmek *belső* szórásnégyzete,

$S_k^2 = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{L} n_l (\bar{x}_l - \bar{x})^2$ – a jövedelmek *külső* szórásnégyzete,

$\bar{x}_l$, illetve $\bar{x}$ – az $l$-edik részsokaságra, ill. az egész sokaságra vonatkozó átlagos egy főre jutó jövedelem,

$S_l^2$ – az egy főre jutó jövedelmek szórásnégyzete az $l$-edik részsokaságban,

$n_l$ – az $l$-edik részsokaságba tartozó személyek száma,

$n = \sum_{l=1}^{L} n_l$ – az összes személyek száma.

A részsokaságokat egy vagy több olyan ismérv alapján konstruáljuk meg, hogy azok a jövedelemegyenlőtlenségnek önálló közgazdasági tartalommal rendelkező, fontos tényezői legyenek. Erre általában mindig megvan a lehetőség.

Ha a részsokaságok képzésére használt ismérvek valóban lényegesek a jövedelemegyenlőtlenség alakulása szempontjából, akkor arra lehet számítani, hogy a jövedelmek szórásnégyzetének a figyelembe vett ismérvek által együt-

[3] A (2.3) egyenlet $V_p$ ismeretében iterációval könnyen megoldható.

tesen megmagyarázott

$$H^2 = \frac{S_k^2}{S^2} \tag{2.5}$$

hányada időben több-kevesebb stabilitást mutat. E feltevés természetesen annál inkább helytálló, minél rövidebb távra szól a prognózis. Hosszú távon ugyanis — legalábbis elvileg — nemcsak $H^2$ nagysága, hanem még a jövedelemegyenlőtlenséget meghatározó tényezők azonossága is kérdésessé válhat.

Végezzük el ezután $S_k^2$-nek az egyes ismérveknek tulajdonítható

$$\tilde{S}_k^2(r) = \lambda S_k^2(r)$$

ún. korrigált hozzájárulásokra való

$$S_k^2 = \sum_{r=1}^{m} \tilde{S}_k^2(r) \tag{2.6}$$

felbontását, ahol

$S_k^2(r)$ — a jövedelmek teljes szórásnégyzetének az $r$-edik részsokaságképző ismérv által ténylegesen megmagyarázott része[4]

$m$ — a részsokaságok képzésére használt ismérvek száma

$\lambda = \dfrac{S_k^2}{\sum_{r=1}^{m} S_k^2(r)}$ — korrekciós tényező.

Erre a korrekcióra azért van szükség, mert a gyakorlatban a részsokaságok képzésére használt ismérvek általában nem teljesen függetlenek egymástól, s következésképpen általában

$$S_k^2 \neq \sum_{r=1}^{m} S_k^2(r).$$

A (2.4) és (2.6) felhasználásával a relatív szórásnégyzet

$$V^2 = \frac{S^2}{\bar{x}^2} = V_b^2 + \sum_{r=1}^{m} \tilde{V}_k^2(r) \tag{2.7}$$

felbontásához jutunk, ahol

$$V_b^2 = \frac{S_b^2}{\bar{x}^2} \quad \text{és} \quad \tilde{V}_k^2(r) = \frac{\tilde{S}_k^2(r)}{\bar{x}^2}.$$

Ekkor azonban (2.5) és (2.6) következtében nyilvánvaló, hogy $H^2$ és a $\tilde{V}_k^2(r)$ mennyiségek ismeretében

$$V^2 = \frac{\sum_{r=1}^{m} \tilde{V}_k^2(r)}{H^2} \tag{2.8}$$

adja meg a relatív szórás négyzetét.

[4] Ezt az $S_k^2$ általános formulája alapján számítjuk úgy, hogy a részsokaságokat kizárólag az $r$-edik ismérv alapján képezzük.

Tegyük fel ezután, hogy $H^2$ értéke időben stabil, illetve meghatározott mértékben változik,[5] valamint azt, hogy a jövőben az $r$-edik ismérv jövedelemegyenlőtlenségre gyakorolt — $\tilde{V}_k^2(r)$-rel mért — hatásának $t_r$-szeresre való változtatása kívánatos. Ekkor a relatív szórásnégyzet $V_p$ prongosztizált értéke (2.8) felhasználásával a következő:

$$V_p^2 = \frac{\sum_{r=1}^{m} t_r \tilde{V}_k^2(r)}{H^2}. \tag{2.9}$$

A (2.9)ben szereplő $t_r$ együtthatók

$$t' = [t_1, t_2, \ldots, t_m] \tag{2.10}$$

vektora ezek szerint mindig valamilyen jövedelempolitikát reprezentál. E jövedelempolitika jellegét a bázisidőszakhoz viszonyítva mindig a figyelembe vett ismérvek, ill. a $t_r$ együtthatók 1-től vett eltérése határozza meg, hiszen a

$$t_0' = [1, 1, \ldots, 1]$$

vektor reprezentálja a bázisidőszak jövedelempolitikáját. Mint a továbbiakban látni fogjuk, bizonyos korlátok között még arra is lehetőség van, hogy egy-egy $t$ vektorhoz — s ily módon az annak megfelelő jövedelemeloszláshoz — konkrét cselekvési-intézkedési programot rendeljünk hozzá. Ez pedig már igen közel esik a jóval bonyolultabb szimulációs eljárásokkal elérhető eredményekhez.

Hangsúlyozzuk, hogy ezt a viszonylag egyszerű eljárást az teszi lehetővé, hogy kizárólag két ismeretlen paramétertől függő jövedelemeloszlást tételezzünk fel a jövőre nézve.

Végül meg kívánjuk még jegyezni, hogy a vázolt eljárás a jövedelmek relatív szórásnégyzete helyett közvetlenül a logaritmikus szórásnégyzetükre is alkalmazható, ha a jövedelmek L-2 típusú eloszlását tételezzük fel a jövőben (l. [5]).

## 2.2 *Egy illusztratív alkalmazás*

Az előző pontban leírt eljárás illusztrálására bemutatjuk az aktív népesség jövedelemeloszlása prognosztizálásának menetét. Ehhez mindenekelőtt azt tételezzük fel — az 1. pontban bemutatott eredményekkel összhangban —, hogy az aktív népességnek az egy főre jutó jövedelem szerinti eloszlása a jövőben L-2 vagy L eloszlással lesz közelíthető. A feladat az L-2 eloszlás $\sigma$, illetve az L eloszlás $\beta$ paraméterének prognosztizálása.

Ehhez legelőször megadjuk a 9. táblázatban, hogy milyen mértékben járultak hozzá a jövedelmek relatív szórásnégyzetéhez 1977-ben:

— a háztartásban eltartott 19 éven aluli gyermekek száma,

— a háztartás keresőinek havi átlagos keresete,

[5] Természetesen az is feltételezhető, hogy $H^2$ a jövőben a $H_1^2$ és $H_2^2$ határok között mozog. Ilyenkor azonban $V^2$-re is két határ adódik, ami megnöveli a prognózisváltozatok számát.

— a háztartás keresőinek száma és
— a háztartásfő beosztása[6]
szerinti jövedelmi különbségek.

*9. táblázat*

Az aktív népesség 1977. évi relatív szórásnégyzetének felbontása

| Ismérv | Csoportok száma | $V_k^2(r)$ | $\tilde{V}_k^2(r)$ |
|---|---|---|---|
| Eltartott gyermekek száma | 5 | 0,05289 | 0,05498 |
| Keresők átlagos keresete | 11 | 0,01737 | 0,01805 |
| Keresők száma | 4 | 0,00758 | 0,00788 |
| Háztartásfő beosztása | 9 | 0,01405 | 0,01461 |
| Összeg | — | 0,09189 | 0,09552 |
| Együttesen | — | 0,09552 | 0,09552 |

A felsorolt négy tényező a relatív szórásnégyzetnek (0,15785) 60,5%-át magyarázta meg együttesen 1977-ben, $\lambda$ értéke pedig 1,03952 volt.

A 10. táblázatban néhány konkrét prognózis-változatot generáló $t$ vektort adunk meg. Feltételezve továbbá, hogy a jövőben a négy ismérv a relatív szórásnégyzetnek együttesen 57,5; 60,5; illetve 63,5%-át fogja meghatározni, megadjuk a relatív szórás ezekhez tartozó prognosztizált értékét, valamint a $\sigma$ és $\beta$ paraméterek értékeit (négy tizedesjegyre kerekítve).

Példaképpen: a IV. változat relatív szórásnégyzete a $H^2 = 0{,}605$ esetben a következőképpen adódik a (2.9) formula, valamint a 9. és 10. táblázatok megfelelő adatai alapján:

$$V_p^2 = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}05498 + 2{,}00 \cdot 0{,}01805 + 1{,}05 \cdot 0{,}00788 + 1{,}30 \cdot 0{,}01461}{0{,}605}$$

$$= 0{,}15926, \text{ amiből } V_p \approx 0{,}3991.$$

Ebből végül (2.1), illetve (2.3) alapján a

$$\sigma_p = 0{,}3844 \quad \text{és} \quad \beta_p = 4{,}9610$$

prognosztizált paraméter értékek adódnak.

A 10. táblázatban szereplő $t$ vektorok $t_r$ elemeinek nagyságát alapvetően két tényező határozza meg: egyfelől a vizsgált sokaság $t_r$-nek megfelelő ismérv szerinti megoszlásának, másfelől pedig az adott ismérv szerinti jövedelmi arányoknak a jövőbeni alakulása. A jövedelmi arányok azt mutatják, hogy a szóban forgó ismérv szerint képzett részsokaságok egy főre jutó átlag jövedelmei hogyan aránylanak egymáshoz. Ragadjuk ki példaképpen a napjainkban legfontosabb jövedelemdifferenciáló ismérvet, az eltartott gyermekek számát.

[6] A beosztás a végzett munkát minősíti aszerint, hogy
— szellemi vagy fizikai
— vezető, irányító vagy irányított
— szakképzett vagy szakképzetlen
tevékenység-e. A háztartásfő beosztása szerint az aktív keresős háztartásokat 9 csoportba sorolták.

*10. táblázat*

A négy ismérv relatív szórásnégyzethez való abszolút hozzájárulásának feltételezett változása 1977-hez képest és ennek hatása

| Tényező | I. | II. | III. | IV. | V. | VI. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | *t* értéke az ... változat esetén | | | | | |
| Eltartott gyermekek száma | 1,00 | 1,00 | 1,00 | 0,60 | 0,40 | 0,20 |
| Keresők átlagkeresete | 1,50 | 2,00 | 3,00 | 2,0 | 2,50 | 3,00 |
| Keresők száma | 1,05 | 1,05 | 1,05 | 1,05 | 1,05 | 1,05 |
| Háztartásfő beosztása | 1,20 | 1,30 | 1,50 | 1,30 | 1,40 | 1,50 |
| | $H^2 = 0{,}575$ | | | | | |
| Relatív szórás ($V_p$) | 0,4331 | 0,4537 | 0,4922 | 0,4094 | 0,4083 | 0,4072 |
| $\sigma_p$ | 0,4146 | 0,4326 | 0,4658 | 0,3936 | 0,3926 | 0,3917 |
| $\beta_p$ | 4,6362 | 4,4655 | 4,1876 | 4,8567 | 4,8674 | 4,8782 |
| | $H^2 = 0{,}605$ | | | | | |
| Relatív szórás ($V_p$) | 0,4222 | 0,4423 | 0,4799 | 0,3991 | 0,3980 | 0,3970 |
| $\sigma_p$ | 0,4050 | 0,4227 | 0,4552 | 0,3844 | 0,3835 | 0,3825 |
| $\beta_p$ | 4,7338 | 4,5579 | 4,2713 | 4,9610 | 4,9720 | 4,9832 |
| | $H^2 = 0{,}635$ | | | | | |
| Relatív szórás ($V_p$) | 0,4121 | 0,4317 | 0,4684 | 0,3895 | 0,3885 | 0,3875 |
| $\sigma_p$ | 0,3961 | 0,4134 | 0,4454 | 0,3759 | 0,3749 | 0,3740 |
| $\beta_p$ | 4,8295 | 4,6485 | 4,3534 | 5,0632 | 5,0745 | 5,0860 |

A 11. táblázat tartalmazza a különböző gyermekszámú háztartások népességének 1977. évi tényleges és jövőben feltételezett megoszlását, valamint a jövedelmi arányok három különböző változatát az azoknak megfelelő $t_1$ együtthatókkal együtt.

*11. táblázat*

Megoszlás és jövedelmi arányok az eltartott gyermekek száma szerint

| Eltartott gyermekek száma | 1977 | | Feltételezett | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | megoszlás | arányok | megoszlás | arányok A | arányok B | arányok C |
| 0 | 32,9 | 100 | 32,1 | 100 | 100 | 100 |
| 1 | 28,3 | 77 | 28,5 | 80 | 85 | 90 |
| 2 | 29,0 | 64 | 31,0 | 70 | 75 | 80 |
| 3 | 6,6 | 52 | 6,6 | 60 | 65 | 70 |
| 4 és több | 3,2 | 36 | 1,8 | 40 | 45 | 55 |
| $t_1$* | 1,00 | | – | 0,611 | 0,419 | 0,264 |

* A $t_1$ együtthatók az 1977-re vonatkozó tényleges és a táblázatba foglalt feltételezésekből adódó külső szórásnégyzetek hányadosai.

Látható, hogy az A jelű eset a IV. változathoz, a B jelű eset pedig az V. változathoz közelálló $t_1$ értékeket eredményez.

A jövedelem források szerinti összetételének bázis évi ismeretében még annak vizsgálatára is lehetőség nyílik, hogy milyen konkrét jövedelempolitikai intézkedések meghozatalára van szükség a kívánt jövedelmi arányok eléréséhez. Ennek részleteibe azonban itt nem áll módunkban belemenni.

A többi három ismérv szerint is hasonló módon lehetne eljárni, és igen nagy számú prognózis-változatot lehetne létrehozni. Ez azonban természetesen azzal jár, hogy egyre több feltevéssel kell élnünk a változatok kidolgozása során. Egy erre alkalmas gépi programmal azonban, véleményünk szerint, viszonylag egyszerűen megoldható a különféle változatok generálása, s a megfelelő jövedelemeloszlásoknak az összehasonlítása egymással és a bázisidőszak jövedelemeloszlásával. Az egyedüli problémát az okozhatja, hogy a valóságban a figyelembe vett jövedelmi arányok nem egymástól függetlenül alakulnak, bár $\lambda$-nak 1-hez közeli értéke arra utal, hogy a négy szóban forgó ismérv kölcsönös függősége nem túl nagy, s így talán megengedhető, hogy jövedelemdifferenciáló hatásukat egymástól függetlennek tekintsük.

Visszatérve a 10. táblázatra, látható, hogy a benne szereplő $t$ vektorok egymástól elég lényegesen eltérő jövedelempolitikákat képviselnek. Míg ugyanis az I., II. és III. változat az eltartott gyermekek száma szerint mutatkozó jövedelmi arányok fenntartása mellett kívánja több-kevesebb mértékben fokozni a kereseteknek és a háztartásfő beosztásának a jövedelem-differenciáló hatását, addig a másik három változat esetében a gyermekszám szerinti jövedelmi különbségek különböző mértékű mérséklése mellett kerül sor ugyanerre. A relatív szórásnégyzethez való abszolút hozzájárulásoknak az eltérő nagyságrendje miatt ennek az a következménye, hogy az első három változat megvalósulása a jövedelmek relatív szórásának elég jelentős mértékű fokozódásával járna, míg a második három változat esetében a gyermekszám szerinti különbségek mérséklődése általában ellensúlyozná a többi tényező jövedelemdifferenciáló hatásának fokozódását. Ezért úgy véljük, hogy a gyakorlatban csak a IV., V. és VI. változat jöhet szóba tényleges alternatívaként, mert különben az egyre nagyobbá váló abszolút jövedelmi különbségek igen könnyen társadalmi feszültségek okozójává válhatnának.

Végül a 12. táblázatban azt közöljük, hogy a 10. táblázatban felsorolt hat változat esetében — $H^2 = 0{,}605$ feltételezése mellett — hogyan alakul a négy vizsgált ismérv százalékos hozzájárulása a relatív szórásnégyzethez.

*12. táblázat*

A négy ismérv százalékos hozzájárulása a relatív szórásnégyzethez

| Ismérv | I. | II. | III. | IV. | V. | VI. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | változat | | | | | |
| Eltartott gyermekek száma | 30,9 | 28,1 | 23,9 | 20,7 | 13,9 | 7,0 |
| Keresők átlagkeresete | 15,2 | 18,5 | 23,5 | 22,7 | 28,5 | 34,4 |
| Keresők száma | 4,6 | 4,2 | 3,6 | 5,2 | 5,2 | 5,2 |
| Háztartásfő beosztása | 9,8 | 9,7 | 9,5 | 11,9 | 12,9 | 13,9 |
| Egyéb tényezők | 39,5 | 39,5 | 39,5 | 39,5 | 39,5 | 39,5 |
| Együtt | 100,0 | 100,0 | 100,0 | 100,0 | 100,0 | 100,0 |

Látható, hogy a $t_2$ együttható növelése még a $t_1$ együttható állandó szinten tartása mellett is csökkenti az eltartott gyermekek számának a jövedelmek relatív szórásnégyzetéhez való százalékos hozzájárulását (I–III. változat), de a két érintett tényező relatív súlyának lényeges módosítása csak $t_1$ és $t_2$ egymással ellentétes irányú változtatása útján érhető el.

Hátra van még a különböző változatokhoz tartozó jövedelemeloszlások meghatározása. Ehhez – mint láttuk – a $\sigma_p$ és $\beta_p$ paraméterek mellett még az $m_p$ és $\alpha_p$ paraméterek meghatározására van szükség a (2,1) és (2,2) összefüggések alapján.

Illusztrációképpen a 10. táblázatban szereplő IV. változathoz tartozó jövedelemeloszlásokat határozzuk meg az L-2, illetve L eloszlás feltételezése mellett. Tételezzük fel, hogy az aktív népesség egy főre jutó tervezett jövedelme a prognosztizált időszakban 3200 Ft lesz.[7] Az $m_p$ és $\alpha_p$ paraméterek prognosztizált értékei a fenti feltétel és a IV. változathoz tartozó $\sigma_p$, illetve $\beta_p$ értékek mellett az alábbiak:

| $H^2$ | $m_p$ | $\alpha_p$ |
|---|---|---|
| 0,575 | 7,99344 | $1{,}33563 \cdot 10^{-17}$ |
| 0,605 | 7,99701 | $5{,}71343 \cdot 10^{-18}$ |
| 0,635 | 8,00027 | $2{,}48786 \cdot 10^{-18}$ |

Az itt és a 10. táblázatban található paramétereknek megfelelő jövedelemeloszlásokat a 13. táblázat mutatja.

Itt is látható a két eloszlásnak az 1.1 pontban említett jellegzetes eltérése, az ti., hogy az L eloszlás csúcsosabb, jobban tömörül a módusz körül. Így pl. ha a prognosztizált időszakban a jövedelmek eloszlása L-2 eloszlást fog követni,

*13. táblázat*

A IV. változatnak megfelelő prognosztizált jövedelemeloszlások

| Egy főre jutó havi jövedelem (1980-as árakon) | $H^2 = 0{,}575$ | | $H^2 = 0{,}605$ | | $H^2 = 0{,}635$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | L-2 eloszlás | L eloszlás | L-2 eloszlás | L eloszlás | L-2 eloszlás | L eloszlás |
| –1500 | 4,2 | 3,4 | 3,8 | 3,1 | 3,4 | 2,9 |
| 1500–2000 | 11,7 | 9,1 | 11,4 | 8,8 | 11,0 | 8,5 |
| 2000–2500 | 17,4 | 17,3 | 17,5 | 17,2 | 17,5 | 17,1 |
| 2500–3000 | 18,0 | 20,9 | 18,3 | 21,3 | 18,7 | 21,6 |
| 3000–3500 | 15,1 | 17,8 | 15,5 | 18,2 | 15,9 | 18,6 |
| 3500–4000 | 11,3 | 12,1 | 11,5 | 12,3 | 11,8 | 12,5 |
| 4000–4500 | 7,9 | 7,4 | 8,0 | 7,5 | 8,0 | 7,5 |
| 4500–5000 | 5,2 | 4,4 | 5,2 | 4,4 | 5,2 | 4,4 |
| 5000–5500 | 3,4 | 2,7 | 3,3 | 2,6 | 3,3 | 2,6 |
| 5500–6000 | 2,2 | 1,6 | 2,1 | 1,6 | 2,0 | 1,5 |
| 6000–7000 | 2,2 | 1,7 | 2,1 | 1,6 | 2,0 | 1,5 |
| 7000– | 1,4 | 1,6 | 1,3 | 1,4 | 1,2 | 1,3 |
| Összesen | 100,0 | 100,0 | 100,0 | 100,0 | 100,0 | 100,0 |

[7] Ez hozzávetőlegesen az aktív népesség 1985-re tervezett egy főre jutó személyes jövedelmének felel meg 1980-as árszinten kifejezve.

akkor $H^2$-nek és a relatív szórásnak a feltételezett értékétől függően a személyek 33—35%-a fog 2500 és 3500 Ft közötti jövedelemmel rendelkezni, míg ha a jövedelemeloszlás L eloszlás szerint alakul, akkor ez az arány 39—40% körül lesz. Az eltérés az eloszlás típusában természetesen a jövedelem egyenlőtlenségben is megmutatkozik: a relatív szórás azonos mértéke mellett L-2 eloszlás esetén valamivel nagyobb egyenlőtlenséget jeleznek a különböző egyenlőtlenségi mutatók, mint L eloszlás esetén.

## 2.3 *Néhány záró megjegyzés*

Cikkünkben érthető módon a jövedelemeloszlások prognosztizálására helyeztük a hangsúlyt. A jövedelemeloszlások különféle valószínűségeloszlásokkal való közelítése azonban önmagában is fontos kérdés, s az empirikus ökonometria régi törekvései közé tartozik. Az ezt célzó legismertebb kísérletek Pareto [13], Gibrat [7] és Champernowne [2] nevéhez fűződnek, de a téma kutatása napjainkban is változatlan intenzitással folyik ([9], [12], [14] és [15]). Hazánkban az első ilyen vizsgálatokra a hatvanas évek elején került sor [3]. Cikkünk első része azt bizonyítja, hogy az ilyen vizsgálatokat időről-időre mindenképpen célszerű megismételni, mert a jövedelemeloszlásokat közelítő valószínűségeloszlások típusában az idő folyamán változások állhatnak be. Természetesen igen izgalmas kérdés volna annak vizsgálata is, hogy miért következnek be e változások, s hogy mennyire nemzetközi érvényűek a változási tendenciák. E kérdések megválaszolása azonban még további széles körű vizsgálódást igényel. Ugyanígy adós még az elmélet annak vizsgálatával is, hogy társadalompolitikai szempontból a jövedelmek melyik valószínűség-eloszlás szerinti megoszlása lenne kívánatosabb.

Az a tény, hogy az eloszlások minden lényeges jellegzetessége kevés számú paraméterbe sűríthető, önmagában is nagy jelentőségű, de — mint láttuk — jól felhasználható a jövedelemeloszlások prognosztizálására is. A 2.2 pontban az általunk javasolt eljárást egy adott népességcsoportra, az aktív népességre alkalmaztuk illusztratív módon. A módszer természetesen más népességcsoportokra is alkalmazható. Ennek lényegében csak az az előfeltétele, hogy előzetesen feltárjuk az adott népességcsoportok jövedelemegyenlőtlenségére ható legfőbb tényezőket. A különböző népességcsoportok jövőbeni súlyának és jövedelemeloszlásának ismeretében ezután igen könnyen előállítható az össznépesség jövedelemeloszlása is. Mivel már az egyes népességcsoportokra is nagy számú változat állítható elő — a változatok közé beleértve a jövedelmek eltérő típusú eloszlásának feltételezését is —, még fokozottabban igaz ez az össznépesség jövedelemeloszlására.

A 2.1 pontban leírt módszernek igen előnyös tulajdonsága az, hogy nemcsak az abszolút jövedelemkategóriák szerinti jövedelemeloszlás előállítására alkalmas, hanem az ún. kvantilis-eloszlások (pl. decilis-eloszlások) meghatározására is. A kvantilis eloszlások az L-2, illetve L eloszlás esetében csak a $\sigma$, ill. $\beta$ paramétertől függenek.

További előnyös tulajdonság az is, hogy a prognosztizált eloszlások paramétereinek ismeretében igen egyszerűen megoldható az abszolút kategóriák szerinti jövedelemeloszlás átszámítása tetszőleges árszínvonalra. Ha ugyanis a fogyasztói árindex értéke nem nagyon függ az egy főre jutó jövedelem nagyságától — mint például az 1970-es évtizedben —, akkor az új árszínvonalon számított jövedelemeloszlás paraméterei L-2 eloszlást alapul véve

$$m'_p = m_p + \ln I_p \quad \text{és} \quad \sigma'_p = \sigma_p.$$

L eloszlást feltételezve pedig

$$\alpha'_p = \alpha_p \cdot I_p^{-\beta_p} \quad \text{és} \quad \beta'_p = \beta_p,$$

ahol a vessző nélküli paraméterek egy adott év árszínvonalán meghatározott értékek, a vesszővel jelölt értékek egy ettől eltérő árszínvonalon meghatározott paraméterértékek, $I_p$ pedig a két árszínvonal arányát kifejező fogyasztói árindex.

A javasolt módszer leggyengébb pontja a $t$ vektor elemeinek meghatározása, amennyiben egy-egy konkrét $t$-hez nem rendelhető hozzá teljes egyértelműséggel egy társadalom- és jövedelempolitikai intézkedés-sorozat. Úgy véljük azonban, hogy e részleges hiányosságért bőséges kárpótlást nyújt a módszer igen egyszerű és könnyen áttekinthető volta.

*(Beérkezett: 1981. március 28-án)*

## IRODALOM


[1] Aitchison, J.—Brown, J. A. C.: The Lognormal Distribution, Cambridge University Press, 1969.

[2] Champernowne, D. G.: The Graduation of Income Distributions, *Econometria*, Vol. 20. (1952): pp. 591—615.

[3] Éltető Ö.: Jövedelem-eloszlások jellegének és tulajdonságainak vizsgálata. (Az életszínvonal elemzésének és nemzetközi összehasonlításának kérdései.) Akadémiai Kiadó, Budapest, 1962. 191—206. old.

[4] Éltető Ö.—Frigyes E.: Új jövedelemegyenlőtlenségi mutatók tulajdonságai és hasznosítási lehetőségeik. *Szigma*, I. évf. (1968.) 17—28. old.

[5] Éltető Ö.: Kísérlet a jövedelemeloszlás prognosztizálására, a családi jövedelemkülönbségekre ható tényezők alapján. *Gazdaság*, XV. évf. 4. szám.

[6] Fisk, D. R.: The Graduation of Income Distributions, *Econometrica*, Vol. 29. (1961.) pp. 171—185.

[7] Gibrat, R.: Les Inegalités Economiques, Paris, Recueil Sirey, 1931. 296.p.

[8] Johnson, N. L.—Kotz, S.: Continuous Univariate Distributions Volumes 1 and 2, New York, Wiley 1970.

[9] Kloek, T.—H. K. Van Dijk: Efficient Estimation of Income Distribution Parameters, *Journal of Econometrics*, Vol. 8. (1978) pp. 61—74.

[10] Központi Statisztikai Hivatal: A családi jövedelmek színvonala és szóródása 1972-ben. Statisztikai Időszaki Közlemények. 351. kötet, Budapest, 1975.

[11] Központi Statisztikai Hivatal: A családi jövedelmek színvonala és szóródása 1977-ben. Statisztikai Időszaki Közlemények, 462. kötet, Budapest, 1980.

[12] McDonald, J. B.—Ransom, M. R.: Functional Forms, Estimation Techniques and the Distribution of Incomes, *Econometrica*, Vol. 47 (1979) pp. 1513—1525.

[13] Pareto, V.: Cours d'Economie Politique, Lausanne and Paris: Rouge & Cie, 1897.

[14] Salem, A. B. Z.—Mount, T. D.: A Convenient Descriptive Model of Income Distribution: The Gamma Density, *Econometrica*, Vol. 42 (1974), pp. 1115—1128.

[15] Singh, S. K.—Maddala, G. S.: A Function for Size Distributions of Incomes, *Econometrica*, Vol. 44. (1976), pp. 963—970.

[16] Vita L.: Jövedelemeloszlások prognosztizálása a jövedelemeloszlásokat leíró függvények típusának időbeli stabilitás-vizsgálata alapján. Kézirat, OT Tervgazdasági Intézet, 1981.


## APPROXIMATION AND FORECASTING OF INCOME DISTRIBUTIONS

The study consists of two main parts. In the first part the authors examine temporal changes in the type of functions describing Hungarian income distributions on the basis of grouped income distribution data (with 26—30 income brackets) of three conse-

cutive income surveys (in the years of 1967, 1972 and 1977). They come to the conclusion that the type of distribution of the active and the entire population according to per capita income changed from L-3 to L between 1967 and 1977, while income distribution of the inactive population may be satisfactorily approximated also further on by the L-2 distribution.

In the second part a simple forecasting method is presented and illustrated based on the assumption that the income distribution of a population group may be approximated also in the future with some two-parameter probability distribution. The authors determine future values of parameters of the supposed distribution on the basis of planned average income and the decomposition of relative variance of incomes as well as on that of changing the contribution of some most important factors to relative variance in the desired direction and to the desired extent.

## ПОДХОД К РАСПРЕДЕЛЕНИЮ ДОХОДОВ И ИХ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ

Данная работа складывается из двух частей. В первой авторы рассматривают изменения по времени в типах зависимостей, описывающих распределение доходов в Венгрии по данным следующих друг за другом обследований доходов (1967, 1972 и 1977 гг.), сгруппированных соответственно распределению доходов (26—30 классы являются общими). Они приходят к такому выводу, что в период с 1967 по 1977 гг. тип распределения доходов активного и всего населения из расчета на душу изменился с $L_3$ до L в то время как распределение доходов по неактивному населению и в последующем может удовлетворительно устанавливаться с помощью распределения по $L_2$.

Во второй части приводится и иллюстрируется такой простой метод прогнозирования базирующийся на такой предпосылке, в соответствии с которой распределение доходов по отдельным группам населения и впредь может устанавливаться посредством какого-то вероятного распределения с использованием двух параметров. Значения параметров предполагаемого распределения в будущем авторы устанавливают на основании дифференциации квадрата относительного рассеивания доходов и планируемых средних доходов, т. е. желаемого направления и величины участия некоторых наиболее существенных факторов.

Muszély György

# Keresleti egyenletek becslése háztartásstatisztikai adatokból

## Bevezetés

A dolgozat célja a magyar lakossági fogyasztás vizsgálata szociális rétegenkénti bontásban. A számítások alapja, csakúgy mint korábbi hasonló számításainkban [4], a hazai háztartásstatisztikai felmérés. Míg korábban az egyes szociális és jövedelmi csoportok fogyasztását külön-külön, egymástól függetlenül modelleztük, addig most az egyes rétegek keresleti egyenleteit, mint egy egységes modell rész-egyenleteit egyidejűleg határozzuk meg. Segítségünkre volt az 1977-ben Deaton és Muellbauer által publikált, általuk majdnem ideális keresleti rendszernek nevezett modell [1], amely más előnyös tulajdonságai mellett, az egyes fogyasztókra, illetve fogyasztói rétegekre aggregálható keresleti egyenletekből áll. Természetesen a gyakorlatban minden egyes fogyasztó részére nem állíthatók fel külön keresleti egyenletek, és a szerzők is az összlakosságra vonatkozó, teljes körű fogyasztási idősort használtak. A mi számításaink eltérnek az általuk alkalmazott változattól: a háztartásstatisztikai felmérés alapján ugyanis az egyes szűk szociális rétegekre is különálló keresleti egyenletek származtathatók.

A másik különbség oka szintén az adatbázis eltérő típusában kereshető. Bár a keresztmetszeti adatokban rejlő információ lehetővé teszi a jövedelemrugalmasságok biztonságos becslését, azonban nem írható jól le a fogyasztás időbeli változása. Ennek oka a fogyasztás dinamikus változásaira vezethető vissza. Amikor a modellt eredeti, statikus változatában az 1976 és 1979 közötti adatokra számszerűsítettük, az árrugalmasságokra torz — nagy abszolút értékű pozitív és negatív — becsléseket kaptunk. Ugyanakkor a rendelkezésre álló néhány év adatai nem tették lehetővé a dinamikus tulajdonságok modellezését. Ezért úgy döntöttünk, hogy az időbeli változásokat a jövedelem- és árváltozó szerepeltetése mellett lineáris trend hozzáadásával közelítjük. Ezzel a lépéssel bizonyos mértékig sikerült kiküszöbölni az árrugalmasság becslésekor fellépő torzítást — ugyanakkor a trend-tag is szignifikánsnak mutatkozott. Befejezésül megemlítjük, hogy az [5] dolgozatban eredményeinket összehasonlítottuk idősoros adatokon számszerűsített modellek eredményeivel, s az észlelt eltéréseket sikerült kapcsolatba hozni az általunk számított trend-értékekkel. Ugyanebben a dolgozatban bemutatjuk azokat a legfontosabb dinamikus hatásokat, amelyek a kapott trend-értékekhez vezettek.

## 1. A számítási módszer ismertetése

### 1.1. *A Deaton-Muellbauer-féle majdnem ideális keresleti rendszer specifikálása*

A következőkben először a Muellbauer által definiált konzisztens aggregálás fogalmát határozzuk meg úgy, ahogyan az a majdnem ideális keresleti rendszerről írt [1] dolgozatban szerepel. A tárgyalásban csak egy szemléleti különbség lesz, nevezetesen, ahol az eredeti dolgozat egyedi fogyasztókat említ, ott mi különálló fogyasztói rétegekről fogunk beszélni. Tekintsük $H$ számú fogyasztói rétegnek $w_{ih}(x_h, p)$ függvényekkel leírható kiadási hányadait, azaz jelölje $w_{ih}(x_h, p)$ a $h$-adik réteg ($h = 1, \ldots, H$) átlagos egy főre eső $x_h$ összkiadásából az $i$-edik cikkre ($i = 1, \ldots, n$) fordított kiadás hányadát, ahol $p$ az $n$ számú cikk áraiból alkotott vektor. A $w_{ih}(x_h, p)$ keresleti függvényekben tehát a klasszikus modellekben szokásos módon a jövedelem szerepét a kiadások összege veszi át. A $w_{ih}$ függvények akkor teljesítik a konzisztens aggregálás feltételét, ha a

$$\overline{w}_i = \frac{\sum_h x_h \cdot w_{ih}(x_h, p)}{\sum_h x_h}$$

átlagos kiadási hányad $\overline{w}_i = w_i(x_0, p)$ alakban írható, ahol

$$x_0 = x_0(x_1, \ldots, x_H, p) \tag{1}$$

egy bizonyos reprezentatív kiadási szint. Más szóval bárhogy is változtatjuk a vizsgált rétegek jövedelemeloszlását, az átlagos kiadási hányad csak az (1)-gyel definiált reprezentatív jövedelmi szinttől függ. Az [1] dolgozat megadja a feltételeket kielégítő $w_0$ és $w_{ih}$ alakját, ezt azonban ebben az általános formában itt nem részletezzük. Átvesszük viszont azt a speciálisabb esetet, amikor felteszik, hogy $x_0$ nem függ $p$-től, és a $w_{ih}$ keresleti függvények preferencia konzisztens fogyasztási struktúrát írnak le. Ebben az esetben $w_{ih}$ vagy

$$w_{ih}(x, p) = (x \cdot k_h)^\alpha \frac{(A \cdot B)^\alpha}{B^\alpha - A^\alpha}(A_i - B_i) + \frac{B^\alpha B_i - A^\alpha A_i}{B^\alpha - A^\alpha} \tag{2}$$

vagy

$$w_{ih}(x, p) = \frac{\log (x \cdot k_h) - \log A}{\log B - \log A}(B_i - A_i) + A_i \tag{3}$$

alakban írható, ahol $\alpha$ tetszőleges konstans, $A$ és $B$ a $p$ árvektor elsőfokú homogén konkáv függvényei,

$$A_i = \frac{\partial \log A}{\partial \log p_i}, \quad B_i = \frac{\partial \log B}{\partial \log p_i}, \quad A < B, \tag{4}$$

végül $k_h$ a fogyasztói rétegre jellemző konstans. A $k_h$ paraméter értelmezését az eredményekkel foglalkozó fejezetben fogjuk ismertetni.

A modell alkotóihoz hasonlóan mi is *csak a (3) típusú függvények formájában számszerűsítettük a kiadási hányadokat,* sőt azt is feltettük, hogy (3)-ban

$\log(x \cdot k_h)$ együtthatója konstans, ami a

$$\log B = \log A + \Pi p_j^{b_j}$$

feltételezéssel azonos. *Ekkor (3) a következő alakban írható:*

$$w_{ih} = A_i + b_i(\log(x \cdot k_h) - \log A). \tag{5}$$

A specifikáció az $A(p_1, \ldots, p_n)$ függvény konkrét formájának megadásával lenne teljes. Ennél az utolsó lépésnél, az adatbázis eltérő típusa miatt eltértünk az eredeti specifikációtól. Akármilyen nagy is a keresztmetszeti minta, ha az évek $T$ száma elég kicsi, akkor kevés azon paraméterek száma, amelyeket egyértelműen meghatározhatunk. Más szóval az $A(p_1, \ldots, p_n)$ függvényt nagyon speciális formában kellene rögzíteni ahhoz, hogy a paraméterek becslése elvégezhető legyen. Ehelyett olyan elhanyagolásokat fogunk tenni, amelyek mellett a paraméterek száma csökken.

Az [1] dolgozat szerint $A(p) = C(0, p)$, ahol $C(u, p)$ az ún. költségfüggvény, amely azt a minimális jövedelmet jelenti, amelyből a $p$ árvektor mellett az $u$ haszonszint elérhető (a hasznossági függvény értéke $u$).

$$\frac{A(p_t)}{A(p_0)} = \frac{C(0, p_t)}{C(0, p_0)} = I(p_t, p_0 | 0), \tag{6}$$

ahol $I$ az ún. megélhetési költség index a 0 haszonszint mellett.

Ismeretes (lásd pl.: [6], 94. old.), hogy

$$\frac{\partial \log C(u, p)}{\partial \log p_i} = w_i^0(u, p), \tag{7}$$

ahol $w_i^0(u, p)$ az $i$-edik kiadási hányad az $u$ haszonszint és a $p$ árak mellett. Felhasználva a (4) összefüggést, az (5) keresleti egyenlet (6) és (7) alapján

$$w_{ih} = w_i^0(0, p) + b_i[\log x - \log I(p_t, p|0) - \log A(p_0) + \log k_h] \tag{8}$$

alakban írható.

A számszerűsítés megkönnyítése céljából két egyszerűsítést fogunk végrehajtani a (8) egyenletben. Deaton és Muellbauer javasolják $\log I$ helyettesítését valamilyen ismert indexszel. Legyen ez esetünkben az általános fogyasztói árindex. Tételezzük fel ezenkívül, hogy $w_i^0(0, p)$, amely az árak függvénye, az összes ártól csak a $p_i'$ saját relatív áron keresztül függ. Ha az árváltozások nem túl nagyok, $w_i^0(0, p)$ a $w_i^0(0, p) = a_i^0 + d_i \log p_i'$ alakban kereshető.

Mindezen megfontolások alapján végül is a *keresleti egyenletek*

$$w_{ih} = a_i + b_i \cdot \log(x/P) + b_i \cdot c_h + d_i \cdot \log p_i' \tag{9}$$

*alakban becsülhetők*, ahol $P$ az általános fogyasztói árindex, $a_i = a_i^0 - b_i \log A(p_0)$, $c_h = \log k_h$. Itt az ismeretlen paraméterek az $a_i$, $b_i$, $c_h$ és $d_i$ együtthatók. Ezekben a (9) egyenlet nem lineáris, de egy olyan iterációs eljárással, mint amilyent például a *Stone* modell becslésénél szokás alkalmazni a paraméterek a legkisebb négyzetek elve alapján becsülhetők [3]. Az egyértelmű becsléshez azonban a $c_h$ paraméterekről valamilyen feltételezést kell tennünk, ellenkező esetben ugyanis a $c_h$-kra, illetve az $a_i$-kre végtelen sok megoldás létezik. Legegyszerűbb kikötni, hogy a $c_h$ együtthatóknak a rétegenkénti mintanagyságokkal súlyozott átlaga

$$\bar{c} = \sum_h s_h c_h = 0 \tag{10}$$

legyen, ez a feltétel ugyanis az iteráció során könnyen teljesíthető.

Maga az iterációs becslési eljárás a következőképpen végezhető el: A kiinduló $c_h$ értékeket minden $h$-ra 0-nak választva, az $a_i$, $b_i$ és $d_i$ együtthatók lineáris regresszióval becsülhetők. Ezek ismeretében, ugyancsak lineáris regresszióval, a $c_h$ értékek finomíthatók, és az eljárás többször megismételhető. Az iterációnak ebben a formában való végrehajtása során (10) minden lépésnél teljesül.

A (9) egyenlet alapján a következőképpen számíthatók ki a különböző rugalmasságok:

$$\text{jövedelemrugalmasság:} \quad E_{ih} = 1 + \frac{b_i}{w_{ih}},$$

$$\text{saját árrugalmasság:} \quad e_{ih} = (d_i - w_i)\left(1 - \frac{1}{w_{ih}}\right) - w_{ih}E_{ih} \tag{11}$$

$$\text{kompenzált saját árrugalmasság:} \quad e^*_{ih} = (d_i - w_i)\left(1 - \frac{1}{w_{ih}}\right).$$

Mint a bevezetésben utaltunk rá, a saját árrugalmasságokra legtöbb esetben elfogadhatatlanul nagy pozitív illetve negatív értékeket kaptunk. Ennek a jelenségnek az okát vizsgálva arra a megállapításra jutottunk, hogy a rétegek fogyasztását *évenként* leíró Engel-görbék évről-évre jelentősen eltolódnak: egyes cikkeknél emelkednek, másoknál csökkennek. Ez az emelkedés illetve süllyedés hasonló évenkénti változást okoz a kiadási hányadoknál is. A (9) egyenlet szerint viszont ez az eltolódás csak az árak változásával magyarázható. Az egyenlet statikus, azaz a fogyasztás pillanatnyi értéke (egy-egy rétegen belül) csak a folyó jövedelemtől és az áraktól függ. A becslés során nagy abszolút értékű $d_i$ együtthatókat kaptunk, ami az árrugalmasságok említett torz értékeihez vezetett. *A számítások kudarca cáfolja a fogyasztás statikus voltát*, azonban a rendelkezésre álló néhány év adatai nem teszik lehetővé az okok beható vizsgálatát. Ezért úgy döntöttünk, hogy a fogyasztás alakulását befolyásoló egyéb olyan tényezők hatását, amelyek évente megközelítőleg azonos eltolódást okoznak a fogyasztásban *lineáris trend* segítségével próbáljuk számszerűsíteni. Ily módon *a (9) egyenletet a következővel* helyettesítettük:

$$w_{iht} = a_i + b_i \cdot \log(x/P_t) + b_i \cdot c_h + d_i \cdot \log p'_{it} + f_i \cdot t, \tag{12}$$

$$(t = 0, 1, \ldots, T).$$

Az ismeretlen paraméterek száma eggyel nőtt, de a fent leírt iterációbecslés most is elvégezhető. Célszerű azonban korlátozást bevezetni abból a célból, hogy az árrugalmasságokra reális értékeket kapjunk. Kikötöttük, hogy az egész mintára képzett átlagos $\bar{w}_i$ kiadási hányadhoz tartozó kompenzált saját árrugalmasságokra

$$-2{,}5 \leq e_i^* \leq 0 \tag{13}$$

teljesüljön. A (13) feltétel a vele ekvivalens

$$-w_i \frac{w_i + 1{,}5}{w_i - 1} \leq d_i \leq w_i \tag{14}$$

korláttal helyettesíthető. Gyakorlatilag ezt a korlátozást a számítások során a következőképpen vettük figyelembe. Az iterációs becslés befejezése után azokra a cikkcsoportokra, amelyekre a (14) feltétel valamelyik oldala az átlagos $\overline{w}_i$ mellett nem teljesült, az esetnek megfelelően vagy a $d_i = \overline{w}_i$ vagy a $d_i = -\overline{w}_i(\overline{w}_i + 1{,}5)/(\overline{w}_i - 1)$ korrekciót alkalmaztuk. Ennek megfelelően a többi paramétert is újra kell becsülni, azonban ezek közül nem változtattuk a $c_h$ együtthatókra kapott iterációs becslést. Ezeket rögzítve, egy lépésben módosítottuk az $a_i$, $b_i$ és $f_i$ becsléseit, ezekben ugyanis a (12) egyenlet lineáris. A (13) feltétel bal oldalának megválasztása önkényes, azonban az eredmények ismertetése során látni fogjuk, hogy azokban az esetekben, amikor alkalmazása szükségessé vált, sikerült a trend együtthatóra is reális becslést kapni.

A bemutatott eljárással az árrugalmasságok pontosabb becslése mellett következtethettünk a fogyasztás olyan dinamikus változásaira, amelyek az ár- és jövedelemhatásokkal nem magyarázhatók. Ezekről a tapasztalatokról az eredmények ismertetése során, valamint az [5] dolgozatban számolunk be.

### 1.2. *A gépi számítások technikája*

A gépi számítások során egy technikai jellegű problémát kellett megoldani, amely *az adatbázis nagy méretével* volt kapcsolatos. A konkrét esetben négy év felméréseinek együttes feldolgozása több mint 34 000 háztartás adatainak kezelését kívánta. Minden iterációs lépés során sokváltozós regressziós lépéseket kellett elvégezni, ahol az $Y'Y$, $Y'X$, $X'X$ tömbök (itt a regressziós számítások szokásos jelöléseit használtuk) lépésenként változtak. Nem gondolhattunk arra, hogy minden egyes lépésnél az egész minta felhasználásával készítsük el ezeket a tömböket. Ezért a háztartásstatisztika szalagok *egyszeri* végigolvasásával minden évre és ezen belül minden rétegre külön-külön képeztük a

$$\sum_j n_j w_{jk}^2, \ \sum_j n_j w_{jk}, \ \sum_j n_j w_{jk} \cdot \log x_j,$$

$$\sum_j n_j, \ \sum_j n_j \cdot \log x_j, \ \sum_j n_j \log x_j^2$$

összegeket, ahol $j$ végigfut az adott réteg adott évre vonatkozó mintáján, $k$ az összes cikkcsoporton, $n_j$ jelöli a $j$-edik háztartás taglétszámát, $x_j$ az egy főre eső jövedelmet, végül $w_{jk}$ a kiadási hányadot. A kapott tömbökből minden egyes iterációs lépéshez lineáris transzformációkkal képezhetők a szükséges tömbök. Ennél az eljárásnál a regressziós számításokhoz szükséges műveletek száma nem függ a minta nagyságától, csak a változók számától.

Az iterációs eljárás minden esetben *gyorsan konvergált*. A paraméterek változása nagyon gyorsan lecsökkent, s 6—8 lépés után mindenütt kisebb volt $10^{-4}$-nél. A közelítés hibája az első néhány lépés után már észrevehetően nem csökkent.

## 2. A felhasznált adatok ismertetése

A számításoknál a hazai háztartásstatisztikai mintát, és a KSH által publikált fogyasztói árindexeket használtuk fel.

A *háztartásstatisztikai felméréssel* megismerkedhetünk a KSH időszaki közleményeiből [7], ahol a felmérések alapján készített részletes statisztika is található. Mi azonban nem ezeket a publikált adatokat használtuk fel, hanem az eredeti teljes felmérést, ami mágnesszalagokon állt rendelkezésünkre. Mint a bevezetőben említettük, modellünket *az* 1976 *és* 1979 *közötti évek* felmérésein számszerűsítettük, amelyek évenként több mint 8500 háztartás adatait tartalmazták. A háztartásokat 33 *rétegbe* csoportosítottuk, az osztályozás szempontjai a következők voltak: a fő társadalmi rétegek (munkások, szellemiek, kettősjövedelműek, termelőszövetkezeti dolgozók, nyugdíjasok), a gyermekek száma, valamint a lakóhely (Budapest, vidéki város, község). A pontos felsorolást a 4. *táblázatban* találhatjuk meg. Szükségesnek tartottuk, hogy a vizsgált rétegek mind a három szempont szerint homogének legyenek, ez okozta a rétegek nagy számát.

A *fogyasztási cikkeket* a javak jellege szerint 8, a javak rendeltetése szerint 12 cikkcsoportra, valamint részletesebben 34 cikkcsoportra bontottuk. Mindhárom aggregációs változaton belül újabb két-két változatot különböztettünk meg, aszerint, hogy az élelmiszereknél és az élvezeti cikkeknél csak a vásárolt fogyasztást vettük figyelembe, vagy a saját termelésű fogyasztást is.

Mint az előző fejezetben említettük, az alkalmazott modellben (a klasszikus keresleti egyenleteknél megszokott módon), a jövedelem szerepét a kiadások összege veszi át. Ebben azonban nem voltunk konzekvensek: az összehasonlíthatóság kedvéért mind a vásárolt fogyasztás, mind a saját termelésű fogyasztással megnövelt fogyasztás számszerűsítésénél ez utóbbiak folyó áron vett összegével helyettesítettük a jövedelmet.

A háztartásstatisztika közismert torzításai közül — tekintve, hogy csak modellszámításokat végeztünk és nem készítettünk előrejelzést — csak egyet korrigáltunk. Nevezetesen az *élvezeti cikkekre* bevallott fogyasztást a korábbiakhoz hasonlóan most is *felszoroztuk rögzített állandókkal.* Ez a szorzó a kávé és tea esetén 1,3, az üdítőitaloknál 2,4, a dohánynál 1,7 volt. Egyes szeszes italoknál a szorzó rétegenként változott: a borra 1,1 és 3,1 között, az égetett szeszes italokra 2,5 és 3,6 között. A sör szorzója egységesen 4,5 volt. Ily módon elértük, hogy az évezeti cikkek kiadási arányai a teljes körű fogyasztási statisztikák alapján számított kiadási arányokhoz hasonlítsanak. Az eljárásra nemcsak az élvezeti cikkek fogyasztásának pontosabb elemzése végett van szükség, hanem a fogyasztás volumene a kiadások összegén, mint magyarázó változón keresztül kihat a többi cikkcsoportra is.

A modellben szereplő *árakat* a KSH időszaki közleményeiben publikált [8] 1977, 1978 és 1979 évi összlakossági fogyasztói árindexekkel számszerűsítettük. Mivel a modell feltételezi, hogy az árindexek minden rétegre azonosak, ezért mi sem használtuk a réteg-árindexeket. Ugyanakkor viszont az árrugalmassági számításokat is csak a teljes lakosságra, pontosabban a teljes felmérésre végeztük el.

## 3. Az eredmények áttekintése

A táblázatokban a becsült $a_i, \ldots, f_i$ együtthatók helyett a belőlük származtatott mutatókat fogjuk ismertetni. A rövidség kedvéért ezeket is csak a teljes fogyasztásról közöljük teljes terjedelemben, a vásárolt fogyasztásra vonatkozóan a $k_h$ paraméterek tárgyalására szorítkozunk.

### 3.1. *A jövedelemrugalmasságok*

Az 1., 2. és 3. táblázatban kétféle jövedelemrugalmassági értékeket közöltünk. Az első oszlopban közölt $E_i^0$ rugalmasságok a modellnek egy olyan vál-

*1. táblázat*

A javak jelleg szerinti főcsoportjaira kapott legfontosabb paraméterek

| Cikkcsoportok | Jövedelem-rugalmasság | | Saját árrugalmasság | | | Relatív trend együttható (%) | | | Korr. együtt-ható |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $E_i^0$ | $E_i$ | közvetlen | korrigált | szórása | közvetlen | korrigált | szórása | |
| Élelmiszerek | 0,55 | 0,56 | 0,18 | −0,18 | 0,19 | −0,90 | −0,68 | 0,17 | 0,65 |
| Élvezeti cikkek | 1,05 | 1,06 | −1,11 | | 0,33 | 5,30 | | 1,24 | 0,11 |
| Ruházati cikkek | 0,88 | 0,96 | 1,11 | −0,11 | 2,39 | −5,52 | −5,08 | 0,92 | 0,09 |
| Fűtés, energia | 0,67 | 0,62 | −0,65 | | 0,35 | 3,68 | | 1,21 | 0,23 |
| Tartós fogy. cikkek | 1,78 | 1,75 | 3,53 | −0,12 | 2,94 | 2,42 | −2,32 | 3,88 | 0,27 |
| Egyéb iparcikkek | 1,17 | 1,16 | −0,05 | −0,10 | 0,45 | 4,15 | 4,07 | 0,69 | 0,14 |
| Szolgáltatások | 1,25 | 1,20 | −0,56 | | 0,29 | 0,08 | | 0,87 | 0,13 |
| Lakásépítés, ingatlan | 2,17 | 2,09 | 0,02 | −0,13 | 0,91 | −3,79 | −3,88 | 1,03 | 0,29 |

*2. táblázat*

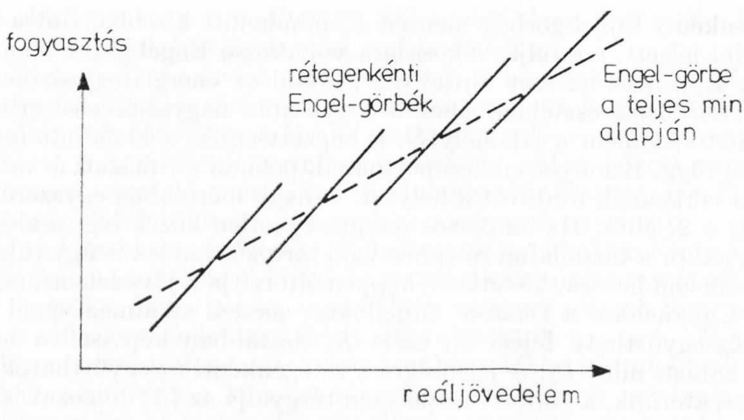
A javak rendeltetés szerinti főcsoportjaira kapott legfontosabb paraméterek

| Cikkcsoportok | Jövedelem-rugalmasság | | Saját árrugalmasság | | | Relatív trend-együttható (%) | | | Korr. együtt-ható |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $E_i^0$ | $E_i$ | közvetlen | korrigált | szórása | közvetlen | korrigált | szórása | |
| Élelmiszer | 0,55 | 0,56 | 0,18 | −0,18 | 0,19 | −0,90 | −0,68 | 0,17 | 0,65 |
| Italok, kávé, tea | 1,11 | 1,10 | −0,89 | | 0,22 | 4,39 | | 1,08 | 0,13 |
| Dohány | 0,67 | 0,78 | −0,13 | | 0,11 | 2,84 | | 0,61 | 0,11 |
| Ruházkodás | 0,90 | 0,97 | 0,17 | −0,11 | 2,35 | −5,36 | −5,26 | 0,91 | 0,09 |
| Lakásszolgáltatás | 1,21 | 1,07 | −0,88 | | 0,47 | −3,98 | | 1,21 | 0,03 |
| Fűtés, házt. energia | 0,67 | 0,62 | −0,65 | | 0,35 | 3,68 | | 1,21 | 0,23 |
| Házt. és lakásfelszer. | 1,21 | 1,19 | −2,69 | −2,59 | 0,81 | −3,09 | | 0,79 | 0,11 |
| Egészségügy, testápolás | 1,03 | 0,95 | −0,36 | | 0,77 | 4,65 | | 2,65 | 0,03 |
| Közlekedés, hírközlés | 1,92 | 1,87 | −0,92 | | 0,58 | 1,24 | | 1,24 | 0,29 |
| Oktatás, kult., sport, üdülés | 1,24 | 1,25 | 2,41 | −0,07 | 3,01 | 7,63 | 2,62 | 6,09 | 0,12 |
| Egyéb fogyasztás | 1,06 | 1,10 | −0,80 | | 0,41 | −0,62 | | 1,15 | 0,04 |
| Lakásépítés, ingatlan | 2,17 | 2,09 | 0,02 | −0,13 | 0,91 | −3,79 | −3,88 | 1,03 | 0,29 |

3. *táblázat*

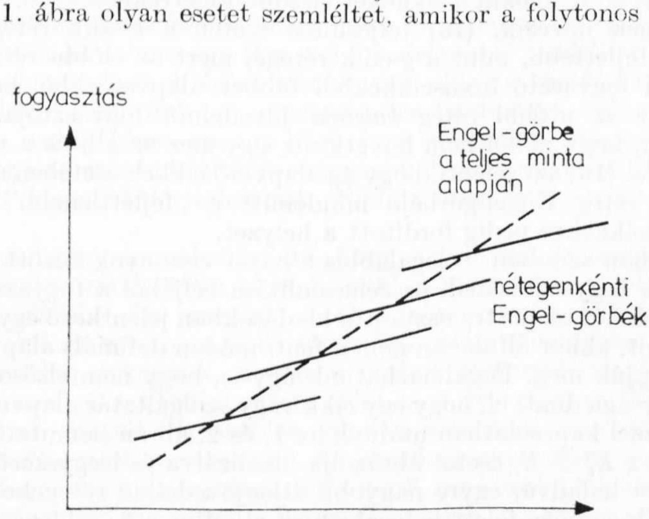
A részletes cikkcsoportú bontásra kapott legfontosabb paraméterek

| Cikkcsoportok | Jövedelem-rugalmasság | | Saját árrugalmasság | | | Relatív trend-együttható (%) | | | Korr. együtt-ható |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $E_i^0$ | $E_i$ | közvetlen | korrigált | szórása | közvetlen | korrigált | szórása | |
| Hús, és húskészítmények | 0,63 | 0,64 | −0,07 | | 0,07 | 0,41 | | 0,27 | 0,36 |
| Tej- és tejtermékek | 0,39 | 0,38 | −1,10 | | 0,37 | −1,20 | | 1,15 | 0,48 |
| Zsiradékok | 0,34 | 0,35 | −0,59 | | 0,48 | −3,65 | | 1,45 | 0,50 |
| Kenyér, liszt, rizs | 0,20 | 0,23 | −0,15 | | 0,06 | −1,92 | | 0,21 | 0,67 |
| Cukor, édesség | 0,54 | 0,53 | −1,95 | | 1,24 | 6,45 | | 0,39 | 0,40 |
| Idényjellegű élelmiszerek | 0,58 | 0,55 | −0,71 | | 0,14 | −2,03 | | 0,44 | 0,34 |
| Egyéb élelmiszerek | 0,58 | 0,59 | −1,50 | | 0,21 | −2,92 | | 0,40 | 0,31 |
| Házonkívüli étk. | 0,92 | 1,01 | −1,43 | | 0,50 | 3,07 | | 1,62 | 0,02 |
| Kávé, tea | 0,81 | 0,82 | −0,42 | | 0,05 | 3,34 | | 0,87 | 0,22 |
| Italok | 1,16 | 1,15 | −0,76 | | 0,32 | 3,36 | | 0,37 | 0,12 |
| Dohány | 0,67 | 0,77 | −0,13 | | 0,11 | 2,88 | | 0,61 | 0,12 |
| Ruházat | 0,88 | 0,95 | 1,10 | −0,11 | 2,39 | −5,50 | −5,06 | 0,92 | 0,09 |
| Szilárd és cseppf. fűtőanyag | 0,58 | 0,49 | −0,07 | | 0,46 | 2,78 | | 0,89 | 0,17 |
| Központi fűtés, gáz | 1,02 | 0,98 | −0,83 | | 1,03 | 4,79 | | 3,42 | 0,03 |
| Elektromos energia | 0,58 | 0,58 | −1,68 | | 0,46 | −0,94 | | 2,59 | 0,26 |
| Bútor | 1,47 | 1,52 | 2,58 | −0,04 | 1,89 | −12,08 | −5,83 | 4,64 | 0,11 |
| Egyéb tartós háztartási cikkek | 1,07 | 1,09 | −2,81 | −2,52 | 1,12 | −14,85 | −13,82 | 4,30 | 0,05 |
| Gépkocsi | 3,56 | 3,35 | −2,11 | | 1,87 | −4,10 | | 5,54 | 0,24 |
| Kerékpár motor | 0,75 | 0,89 | −4,11 | −2,50 | 2,03 | 0,22 | −1,98 | 4,63 | 0,03 |
| Tartós kult. cikkek, óra, ékszer | 1,22 | 1,24 | −0,82 | | 1,91 | −0,39 | | 6,81 | 0,05 |
| Házt. textil, edény, fogyóeszköz | 1,07 | 1,03 | −1,57 | | 0,42 | 0,01 | | 1,02 | 0,02 |
| Testáp., kozm. cikkek | 1,01 | 1,05 | −1,84 | | 0,59 | −0,07 | | 2,25 | 0,05 |
| Gyógyszer | 0,58 | 0,36 | −1,01 | | 1,03 | 3,55 | | 7,47 | 0,13 |
| Járműalk., üzemanyag | 1,77 | 1,81 | −0,71 | | 0,19 | 4,85 | | 1,25 | 0,19 |
| Kisebb kult. c., sport- és ját. c. | 1,05 | 1,11 | −0,65 | | 0,37 | 2,84 | | 0,68 | 0,06 |
| Építőanyag, ingatlan | 2,09 | 2,05 | 0,78 | −0,11 | 1,04 | −2,19 | −3,41 | 1,67 | 0,27 |
| Ruház., lábbeli szolg. | 1,53 | 1,41 | −10,46 | −2,50 | 3,88 | 1,92 | −6,38 | 5,42 | 0,07 |
| Lakásszolgáltatás | 1,21 | 1,08 | −0,88 | | 0,47 | −4,01 | | 1,21 | 0,03 |
| Háztart. szolgáltatás | 1,67 | 1,44 | 1,08 | −0,00 | 4,32 | −1,09 | −0,88 | 2,14 | 0,05 |
| Egészségügyi, testápolási szolgáltatás | 1,27 | 1,13 | 0,01 | −0,01 | 1,08 | 1,65 | 1,64 | 1,29 | 0,03 |
| Közl., hírközlési szolg. | 1,22 | 1,22 | −0,70 | | 0,44 | 1,72 | | 1,98 | 0,10 |
| Oktatás, kult. szolg. | 1,40 | 1,36 | 0,99 | −0,03 | 0,87 | 5,10 | 2,20 | 2,58 | 0,11 |
| Építk. szolgáltatás | 2,61 | 2,43 | −0,33 | | 1,63 | −4,05 | | 2,17 | 0,19 |
| Egyéb szolgáltatás | 1,05 | 1,08 | −0,60 | | 0,67 | 0,12 | | 1,57 | 0,03 |




*1. ábra*

tozatából származnak, amelynél a teljes háztartásstatisztikai mintát, mint egyetlen réteget tekintettük. Más szóval ebben a változatban nem vezettük be a rétegenként dfferenciált $k_h$ paramétereket. Tulajdonképpen ez a változat az iterációs eljárás első lépéseként adódott, amikor az összes $c_h = \log k_h$ paraméter nulla volt. A második oszlop tartalmazza a modellel számított $E_i$ rugalmasságokat. Mindkét esetben (11) alapján számoltunk az átlagos $\overline{w}_i$ értékek mellett. Mivel a háztartásstatisztika a legtöbb hazai réteget képviseli, ezért mindkét oszlopban a lakosság nagy részére vonatkozó átlagos jövedelem-rugalmasságokat kaptunk. A kétféle eredmény közötti eltérés tartalmi különbségből fakad. Míg $E_i^0$ a heterogén összetételű teljes mintára illesztett Engel-görbe mentén érvényesülő jövedelem-fogyasztás összefüggést fejez ki, addig $E_i$ a rétegenkénti Engel-görbék mentén számított átlagos jövedelemrugalmasságot adja meg. Az 1. és 2. ábra sematikus rajza érthetővé teszi a kétféle mutató eltérését. Az 1. ábra olyan esetet szemléltet, amikor a folytonos vonallal jel-




*2. ábra*

zett rétegenkénti Engel-görbék mentén $E_i$ mindenütt kisebb, mint a szaggatott vonallal jelzett, s a teljes lakosságra vonatkozó Engel-görbe mentén számított $E_i^0$. Éppen ez az eset fordul elő például az energiafogyasztás vagy a gyógyszervásárlások esetében, ahol a fogyasztás nagysága elsősorban nem a jövedelemtől, hanem a lakóhelytől, a képzettségtől, a kialakult fogyasztói szokásoktól függ. Bizonyos cikkcsoportoknál, például a ruházati és más tartós fogyasztási cikkeknél, fordított a helyzet — nagy mértékben egyszerűsítve — ezt tükrözi a 2. ábra. Ha az összes rétegre egyetlen közös regressziós görbét illesztünk, akkor a társadalmi réteghez való tartozás hatása is úgy tükröződik, mint a jövedelem hatása, következésképpen eltorzítja a jövedelemrugalmasság becslését. Ugyanekkor a Deaton—Muellbauer modell alkalmazásánál a réteghatást a $k_h$ együttható fejezi ki, ezért $E_i$ tisztábban képviseli a valóságos jövedelemhatást, mint $E_i^0$. A jelenségre a rétegenkénti $k_h$ együtthatók tárgyalásánál visszatérünk, a kérdést részletesen tárgyalja az [5] dolgozat is.

### 3.2. *A fogyasztási struktúra „fejlettségének" jellemzése*

Az egyes rétegek fogyasztási struktúrái között az eltéréseket a $k_h$ együttható a következőképpen szabja meg. Ha a $h$-adik és a $g$-edik rétegre

$$k_h > k_g, \tag{15}$$

akkor tetszőleges $x$ és $p$ mellett

$$w_{ih}(x, p) \le w_{ig}(x, p), \quad \text{ha} \quad b_i \le 0,$$

és (16)

$$w_{ih}(x, p) > w_{ig}(x, p), \quad \text{ha} \quad b_i > 0.$$

Azokat a cikkeket, amelyekre $b_i < 0$, szokás alapvető cikkeknek nevezni, mert rájuk $E_i < 1$. Azokat a cikkeket viszont, amelyekre $b_i > 0$, és így $E_i > 1$, luxuscikkeknek nevezik. (15) teljesülése esetén a $h$-adik réteg fogyasztási struktúrája fejlettebb, mint a $g$-edik rétegé, mert az előbbi réteghez tartozó $x$ jövedelmű fogyasztó luxuscikkekből többet, alapvetőekből kevesebbet fogyaszt, mint az utóbbi réteg *hasonló* jövedelmű fogyasztója. Megjegyezzük azonban, hogy ebből nem következik ugyanez az állítás a rétegek átlagfogyasztására. (16) azt jelenti, hogy az alapvető cikkek esetében a „fejlettebb" fogyasztású réteg Engel-görbéje mindenütt a „fejlettlenebb" rétegé alatt halad, luxuscikkekre pedig fordított a helyzet.

A valóságban azonban — legalábbis a hazai viszonyok között —, ha különböző rétegek fogyasztásának összehasonlítása céljából a fogyasztási cikkeket megpróbáljuk két csoportra osztani a kiadásokban jelentkező egyenlőtlenségek iránya szerint, akkor általában nem a fenti módon definiált alapvető és luxuscikkeket kapjuk meg. Fogalmazhatunk úgy is, hogy nem elsősorban a rugalmasság nagysága dönti el, hogy egy cikk vagy szolgáltatás alapvető vagy luxus jellegű-e. Ezzel kapcsolatban utalunk az 1. és 2. ábrán bemutatott jelenségre. Az 1. ábra az $E_i^0 > E_i$ esetet ábrázolja idealizálva és leegyszerűsítve, amikor balról jobbra haladva, egyre nagyobb átlagjövedelmű rétegeket tekintve, az Engel görbék egymás felett helyezkednek el. Mint a 3. táblázatból megfigyehetjük, a szóba jövő esetekben $E_i < 1$ és $E_i > 1$ egyaránt előfordul. Ugyanakkor viszont, ha ezen cikkek és szolgáltatások jellegét figyeljük meg, akkor, mint az előző pontban is említettük, többnyire olyanokat találunk, amelyek igénybevétele *a kialakult fogyasztási szokásoktól függ.*

Vizsgáljuk most azokat a cikkcsoportokat, amelyekre $E_i^0 < E_i$. Ilyenkor egyre nagyobb átlagjövedelmű rétegeket tekintve, az Engel görbék többnyire egymás alatt helyezkednek el. Ezt az esetet ábrázolja — erősen leegyszerűsítve — a 2. ábra. A 3. táblázat szerint ezek között a cikkek között rugalmatlanok és rugalmasak egyenlő mértékben fordulnak elő. Viszont megfigyelhetjük, hogy a *tartós cikkek* többsége éppen ebbe a csoportba tartozik.

Az [5] dolgozatban részletesen foglalkozunk azokkal az okokkal, amelyek következtében a szokásoktól függő fogyasztás, valamint a tartós cikkek vásárlásának nagysága döntő módon megszabják az egyes rétegek fogyasztói struktúrájának valóságos fejlettségi fokát. Röviden arról van szó, hogy a képzettebb, főleg nagyvárosi fogyasztók már korábban kialakítottak olyan fogyasztói szokásokat, amelyeket a községi, főleg paraszti rétegek még nem vettek át. Ugyanakkor utóbbiak tartóscikk vásárlásai nagyobbak, mert ezekkel a cikkekkel való telítettségük viszonylag kisebb. Természetesen a fent elmondott törvényszerűség alól számos kivétel van. Így például az élvezeti cikkek tipikusan szokás jellegű cikkcsoport, mégis az alacsonyabb képzettségű rétegek fogyasztásában képvisel jelentősebb hányadot. Ezzel szemben viszont a gépkocsi vásárlására fordított összegek ezeknél a rétegeknél kisebbek, mint például a városi szellemi lakosságnál, még azonos jövedelemkategóriákat tekintve is.

A 4. *táblázat* alapján vizsgáljuk meg, hogy az elmondottak hogyan tükröződnek az eredményekben. A táblázatban az egyszerűség kedvéért nem közöltük a rendeltetés szerinti 12 cikkcsoportos bontás eredményeit, mert azok nagymértékben hasonlítanak a jelleg szerinti főcsoportok alapján számolt mutatókra.

A legjelentősebb eltérés az egyes rétegek között a gyermekszám szerinti bontásban van. Itt azt az első pillanatban meglepő tényt tapasztaljuk, hogy a *gyerekszám növekedésével a „fejlettség" mértéke jelentősen nő*, legmagasabb a két- vagy a háromgyermekes háztartásoknál. Ha azonban arra gondolunk, hogy a $k_h$ együtthatók az azonos egy főre eső jövedelemmel rendelkező háztartások fogyasztásának összehasonlítására alkalmasak, akkor érthetővé válik az előbbi tény. Ha például tekintünk egy gyermektelen háztartást, valamint egy kétgyermekeset, amelyekben az egy főre jutó jövedelem megegyezik, akkor valószínű, hogy az utóbbi háztartás magasabb jövedelmű, kvalifikáltabb, képzettebb aktív keresőkkel rendelkezik. Emiatt fogyasztói struktúrája is korszerűbb.

Ezek az eredmények valamint az, hogy az *inaktív háztartásokra* kapott paraméter minden változatban kicsi, beleillik a fogyasztási struktúráról alkotott elképzelésünkbe. Ha azonban a *társadalmi rétegek*, valamint az ezzel összefüggő *lakóhely* szempontjából vizsgáljuk az eredményeket, akkor elég ellentmondásos képet kapunk. A csak a *vásárolt fogyasztás* alapján számított paraméterek szerint a községi, ezen belül is a szövetkezeti dolgozók és a kettősjövedelmű rétegek fogyasztása minden számítási változat szerint fejlettebbnek tűnik, mint a városiaké. Ez azonban egyszerűen magyarázható: az élelmiszerfogyasztás alapvetőnek tekinthető, s a községi lakosok által vásárolt élelmiszerfogyasztás alacsony, fogyasztásuk jelentős részét saját termelésből fedezik. A saját termelésű fogyasztással kiegészített *összes fogyasztás* modellezésénél már nem ilyen egyértelmű a kép. Míg az *összevont cikkcsoportok*

*4. táblázat*

A fogyasztási struktúra fejlettségét jellemző viszonyszámok

| Rétegek | A vásárolt fogyasztás | | A teljes fogyasztás | |
|---|---|---|---|---|
| | 8 | 34 | 8 | 34 |
| | cikkcsoportos bontása alapján | | | |
| *A gyermektelen háztartásokon belül:* | | | | |
| Budapesti szellemiek | 0,54 | 0,47 | 0,81 | 0,62 |
| Budapesti munkások | 0,53 | 0,55 | 0,80 | 0,66 |
| Vidéki városi szellemiek | 0,67 | 0,60 | 0,89 | 0,73 |
| Vidéki városi munkások | 0,64 | 0,65 | 0,79 | 0,71 |
| Községi szellemiek | 0,93 | 0,74 | 0,82 | 0,75 |
| Községi munkások | 0,96 | 0,87 | 0,80 | 0,80 |
| Kettősjövedelműek | 1,09 | 0,92 | 0,85 | 0,86 |
| Termelőszövetkezeti dolgozók | 1,10 | 0,89 | 0,69 | 0,77 |
| *Az egygyermekes háztartásokon belül:* | | | | |
| Budapesti szellemiek | 0,66 | 0,67 | 0,97 | 0,83 |
| Budapesti munkások | 0,63 | 0,73 | 0,94 | 0,85 |
| Vidéki városi szellemiek | 0,78 | 0,77 | 1,01 | 0,90 |
| Vidéki városi munkások | 0,81 | 0,87 | 1,01 | 0,95 |
| Községi szellemiek | 1,12 | 0,91 | 1,08 | 0,96 |
| Községi munkások | 1,20 | 1,12 | 1,04 | 1,04 |
| Kettősjövedelműek | 1,30 | 1,15 | 1,03 | 1,08 |
| Termelőszövetkezeti dolgozók | 1,41 | 1,24 | 1,00 | 1,09 |
| *A kétgyermekes háztartásokon belül:* | | | | |
| Budapesti szellemiek | 0,83 | 0,95 | 1,16 | 1,13 |
| Budapesti munkások | 0,72 | 0,93 | 1,09 | 1,08 |
| Vidéki városi szellemiek | 0,93 | 1,01 | 1,16 | 1,14 |
| Vidéki városi munkások | 0,96 | 1,09 | 1,15 | 1,15 |
| Községi szellemiek | 1,20 | 1,33 | 1,17 | 1,28 |
| Községi munkások | 1,42 | 1,47 | 1,20 | 1,32 |
| Kettősjövedelműek | 1,36 | 1,33 | 1,10 | 1,21 |
| Termelőszövetkezeti dolgozók | 1,55 | 1,47 | 1,13 | 1,27 |
| *A három vagy többgyermekes háztartáson belül:* | | | | |
| Budapesti szellemiek | 0,75 | 0,99 | 1,15 | 1,16 |
| Budapesti munkások | 0,69 | 0,89 | 1,09 | 1,04 |
| Vidéki városi szellemiek | 0,94 | 0,99 | 1,18 | 1,14 |
| Vidéki városi munkások | 0,90 | 1,03 | 1,18 | 1,13 |
| Községi szellemiek | 1,17 | 1,22 | 1,13 | 1,12 |
| Községi munkások | 1,21 | 1,48 | 1,17 | 1,36 |
| Kettősjövedelműek | 1,20 | 1,25 | 1,03 | 1,11 |
| Termelőszövetkezeti dolgozók | 1,52 | 1,73 | 1,23 | 1,48 |
| Inaktív háztartások | 0,61 | 0,61 | 0,58 | 0,61 |

esetében nem találunk lényeges eltérést a különböző társadalmi helyzetű (de azonos gyermekszámmal bíró) rétegek között, addig a *részletes bontás* szerint ismét a községiekre, s közülük is elsősorban a képzetlenebb rétegekre kaptunk nagyobb $k_h$ értékeket. A kapott, negatívnak is nevezhető eredmények okát a fejezet elején elemeztük. Konkrétan arról lehet szó, hogy a valójában fejlettebb városi és főleg a szellemi foglalkozású réteg fogyasztására inkább a fogyasztási szokásoktól függő, kis rugalmasságú cikkek és szolgáltatások igénybevétele, a községi lakosok fogyasztására pedig a tartós fogyasztási cikkek vásárlása a jellemző. Mint említettük, a kérdést az [5] dolgozat részletesen tárgyalja.

### 3.3. *Az árrugalmasságok és a lineáris trend becslése*

Az 1., 2. és 3. táblázatban közölt $e_{ii}$ árrugalmasságokat a (11) formula alapján az átlagos $\overline{w}_i$ mellett számítottuk ki. A $d_i$ szórásra kapott becslés alapján becsültük $e_{ii}$ szórását is, elhanyagolva a (11)-ben szereplő többi paraméter hibáját. Mint korábban említettük, a modell első, trend tagot nem tartalmazó változatában nagy pozitív és negatív saját árrugalmasságokat kaptunk. A jelenség okáról a bevezetésben és a módszertani részben írtunk. A táblázatokból viszont meggyőződhetünk, hogy a trend tag alkalmazásával sikerült az árrugalmasságokra elfogadható értékeket kapnunk. Azonban a becslést megnehezítette, hogy a vizsgált időszak meglehetősen rövid volt. Több cikkcsoport relatív ára vagy nem változott jelentősen, vagy egyenletesen változott. Ez utóbbi esetben multikollinearitás lépett fel az ár- és a trendváltozó között, ami mindkét változó együtthatójának növelte a becslési hibáját. Ezért több esetben, a módszertani részben leírtaknak megfelelően, módosítani kellett a $d_i$ együtthatókat is, mert a kompenzált árrugalmasságra pozitív, néhány esetben pedig irreálisan nagy negatív becslést kaptunk. A táblázatokban külön oszlopokban tüntettük fel a *korrekció* következtében megváltozott árrugalmasságot, valamint relatív trendegyütthatót. Statisztikai hipotézis-vizsgálattal is igazoltuk, hogy a kompenzált árrugalmasságokra vonatkozó (13) feltételt helyesen választottuk meg. A (14) egyenlőtlenséget, az átlagos $\overline{w}_i$ mellett mint nullhipotézist, a $t$-próba alapján ellenőriztük és azt tapasztaltuk, hogy egy cikkcsoportot kivéve, minden esetben már 95%-os szinten elfogadható volt. Más szóval, bár az átlagos $\overline{w}_i$ mellett, (14) a becsléssel kapotti $d_i$ értékekre több esetben nem teljesült, a valamivel enyhébb

$$-1{,}96\sigma_i - \overline{w}_i\frac{\overline{w}_i + 1{,}5}{\overline{w}_i - 1} < d_i \leq \overline{w}_i + 1{,}96\sigma_i\,,$$

egyenlőtlenség, ahol $\sigma_i$ a $d_i$ szórására vonatkozó becslés, egy esettől eltekintve, mindig igaznak bizonyult. Az egyetlen cikkcsoport, ahol a $t$-próba értéke meghaladta a kritikus 1,96 értéket, a ruházati és lábbeli szolgáltatás volt, ahol a próbára 2,05 adódott. A korrekció a becslés szórásához viszonyítva tehát nem nagy. Ezt megfigyelhetjük a táblázatokban is, ha az árrugalmasság illetve a relatív trend-együttható eredeti és korrigált értékeinek eltérését összevetjük a közölt szórásokkal. Ehhez hozzájárul az is, hogy a becslés szórása ezekben az esetekben elég nagy. Általában az összes cikkcsoportot áttekintve megállapíthatjuk, hogy az *esetek közel felében* a szórás nagyobb 0,5-nél. Ezekről a cikkcsoportokról azt mondhatjuk, hogy *az árrugalmasság becslése nem megbízható.*

A korrekció elsősorban nem az árrugalmasságok, hanem a trend-együtthatók reálisabbá tétele szempontjából bizonyult hasznosnak. Miután a multi-kollinearitás torzító hatását bizonyos mértékig kiszűrtük, olyan trend-együtthatókat kaptunk, amelyek jobban megfelelnek az alább részletezendő gyakorlati és elméleti vizsgálatoknak.

A táblázatokban a $100 \cdot f_i/\overline{w}_i$ százalékban kifejezett *relatív trend-együtthatókat*, valamint ezek szórásait tüntettük fel. Mint már említettük, szignifikáns trend-együttható létezése azt jelenti, hogy a fogyasztás időbeli változása (változatlan árakat feltételezve) nem adható meg csupán a keresztmetszeti adatok alapján számszerűsített jövedelemrugalmasságok segítségével. Ez tükröződik abban az ismert tényben, hogy ha a jövedelemrugalmasságokat mind idősoros, mind keresztmetszeti adatok alapján számszerűsítjük, akkor a kétféle módon kapott paraméterek általában eltérnek egymástól. A már említett [5] dolgozatban eredményeinket összehasonlítottuk idősoros adatok alapján számolt (lásd: Hulyák Katalin [2], [3]) paraméterekkel. Az összevetés igazolta az általunk használt trend-tag szignifikanciáját: attól függően, hogy az idősoros rugalmasság nagyobb vagy kisebb mint a keresztmetszeti, a trend előjele általában pozitív, illetve negatív.

A nem keresztmetszeti típusú adatbázison végzett számításokon kívül elméleti meggondolások és a fogyasztás alakulására vonatkozó gyakorlati tapasztalatok is alátámasztják a trend-tagok előjelére kapott eredményeket. Szignifikáns trend-tag jelenléte azt jelenti, hogy a fogyasztás időbeli alakulása nem statikus, hiszen a pillanatnyi jövedelem és árak nem határozzák meg egyértelműen. A cikkcsoportok és szolgáltatások egy részénél a trend-tag a jövedelemváltozások dinamikus hatásainak szerepét veszi át. Ezzel a kérdéssel részletesen az [5] dolgozatban foglalkozunk, ahol kimutatjuk, hogy az utóbbi évek jövedelemváltozásainak dinamikus hatásai a cikkek és szolgáltatások két nagy csoportjánál ellenkező módon érvényesülnek. A *tartós fogyasztási cikkeknél* ezeknek a tényezőknek a következtében a trend negatív. A dinamikus hatások szempontjából ide sorolhatók a ruházati cikkek is, ezenkívül az építőanyagok és ingatlanvásárlás, valamint az építkezési szolgáltatás. Hangsúlyozzuk azonban, hogy a negatív trend nem jelenti a fogyasztás abszolút vagy valamilyen értelemben vett viszonylagos csökkenését, csupán arról van szó, hogy a fogyasztás időbeli növekedése lassúbb, mint ahogy az a keresztmetszeti adatokból számolt jövedelemrugalmasságok alapján várható.

A másik csoportba tartozó cikkekre és szolgáltatásokra az jellemző, hogy a kiadások mértékét a kialakult *fogyasztói szokások* szabják meg. Az [5] dolgozatban elméleti úton igazoljuk, hogy az ilyen típusú cikkek esetében — legalábbis hazai viszonyok között — a dinamikus hatások pozitív trendet eredményeznek. A szokás jellegű cikkek közé tartoznak az élvezeti cikkek, de ide sorolható az energiafogyasztás és a különböző szolgáltatások is. Valószínűleg ezzel a tulajdonsággal bír a legtöbb kisebb fogyasztási iparcikk is.

Természetesen az említett dinamikus hatásokon kívül még *egyéb* olyan *tényezők* is befolyásolják a fogyasztás alakulását, amelyek modellünknél a lineáris trendtagban tükröződnek. Ilyenek lehetnek többek között a fogyasztói szokásokban bekövetkező gyors változások vagy egyes területeken a választék bővülése. Így például a konfekcióiparból származó cikkek választékának bővülése az egyébként a szokásoktól függő ruházati és lábbeli szolgáltatás iránti kereslet csökkenését eredményezte. Ugyanakkor a trend csökkenését eredményezheti a kínálat hiánya, vagy az ellátás fejletlensége. Valószínűleg ez is hozzájárult a bútorok, valamint a tartós iparcikkek elméletileg negatív trend-együtthatóinak nagy abszolút értékéhez. Hasonlóan feltételezhetjük, hogy a szolgáltatások pozitív trendjeire csökkentőleg hatott az ellátottság helyenkénti alacsony színvonala.

### 3.4. *A modell megbízhatósága a becslések pontossága*

A táblázatokban a rövidség kedvéért nem közöltük a paraméterek szignifikanciájáról tájékoztató $t$-próba értékeit. A *jövedelem logaritmusának* együtthatójára két eset kivételével nagy szignifikanciájú becsléseket kaptunk. Az élvezeti cikkek összevont csoportjára, valamint a központi és távfűtés, gáz együttes igénybevételére a próba értékek azt mutatják, hogy a jövedelem nem játszik szerepet a kiadási hányad alakulásában. Maga a kiadás természetesen erősen függ a jövedelemtől. Tulajdonképpen erre utal az 1 körüli jövedelemrugalmasság is. A *saját relatív ár logaritmusának* együtthatójára vonatkozó $t$-próba helyett jól tájékoztat a becslés megbízhatóságáról az árrugalmasság szórása, amelyet már tárgyaltunk. Ugyanez mondható a *lineáris trendről* is.

A táblázatokban közöltük a cikkenkénti *többszörös korrelációs együtthatót,* amely ebben az esetben azt fejezi ki, hogy a kiadások becslésén együttesen mennyit javít a jövedelmet, az árat, valamint a trendet tartalmazó tag. Azoknál a cikkeknél, amelyek esetében a kiadási hányad nem függ jelentősen a felsorolt tényezőktől, azaz közel konstans, a korrelációs együttható tetszőlegesen kicsi is lehet. Az alacsony korrelációs együttható nem zárja ki magának a kiadás nagyságának az említett tényezőktől való függését. Ezeknél a cikkeknél a jövedelemrugalmasság közel egységnyi, tehát maga a kiadási hányad függ a jövedelemtől.

A másik ok, ami miatt a korrelációs együtthatók alacsonyak, az, hogy az egyedi háztartások fogyasztási struktúrája még a vizsgált szűk rétegeken belül is nagyon sok általunk nem vizsgált tényezőtől függ. A kapott keresleti egyenletek jól írják le az egyes rétegeken belül a különböző jövedelmű kategóriákra jellemző *átlagos* fogyasztást, de az egyes háztartások fogyasztási struktúrája még nagyon sokféle lehet. Ezért sem lehet összehasonlítani korrelációs együtthatóinkat idősoros adatokon végzett számítások hasonló mutatóival. Az utóbbiaknál a korrelációs együttható a keresleti görbének nem egyedi fogyasztási adatokra, hanem átlagos fogyasztási értékekre való illeszkedését méri.

*(Beérkezett: 1981. augusztus 27-én)*

## IRODALOM

[1] DEATON, A.—MUELLBAUER, J.: An almost ideal demand system. The American Economic Review, June 1980, 312—326. old.

[2] HULYÁK K.: A lakosság fogyasztásának vizsgálata dinamikus keresleti függvényekkel. Statisztikai Szemle, 1980. 1224—1245. old.

[3] HULYÁK K.: A lakossági fogyasztás elemzése a kiadások lineáris modellje és ennek kiterjesztett változata segítségével. A fogyasztás ökonometriai modellezésének eredményei II. OAÁH és SZÁMKI, Budapest, 1980.

[4] MUSZÉLY GY.: Egy fogyasztási modell számszerűsítése keresztmetszeti adatok alapján. Szigma 1979, 173—189. old.

[5] MUSZÉLY GY.: Idősoros és keresztmetszeti adatokból származó jövedelemrugalmasságok: következtetések a fogyasztás dinamikájára és differenciáltságára. Szigma (előkészületben).

[6] THEIL, H.: Theory and measurement of consumer demand. 1—2. North-Holland, 1975—1976.

[7] Háztartásstatisztika 1976., 1977., 1978., 1979. KSH Időszaki Közlemények

[8] A fogyasztói árak változásai a lakosság egyes rétegeinél, 1977., 1978., 1979. KSH Időszaki Közlemények.

## ESTIMATING DEMAND EQUATIONS FROM DATA OF HOUSEHOLD STATISTICS

In the paper computation results of a consumption model adjusted to cross-sectional data of several years are presented. Both from positive and negative results of the computations important conclusions are drawn concerning consumption habits of various social groups.

The development of consumption is characterized first of all not by the larger share of elastic, so called luxury goods and the smaller share of inelastic, so called primary consumption goods. Out of two consumers with identical income usually that one has a more developed consumption structure who consumes relatively less of durable consumer goods and relatively more of goods and services whose purchases are influenced by consumption habits.

Another important statement derived from our computations is that a static demand model in which consumption depends only on current incomes and prices cannot be fitted to cross-sectional data even for a few years. This is in harmony with the well-known fact that income elasticities estimated on the basis of time series and cross-sectional data, respectively, are different. Available data of four years did not enable the fitting of a dynamical model, however, coefficients of the linear trend proved significant in the majority of cases. Trend coefficients were negative in case of durable consumer goods, while usually positive in the sphere of consumption depending on habits.

## ОЦЕНКА УРАВНЕНИЙ СПРОСА С УЧЕТОМ ДАННЫХ СТАТИСТИКИ ДОМАШНИХ ХОЗЯЙСТВ

В данной работе излагаются результаты расчетов по модели потребления, опирающейся на данные нескольких лет. На основании как положительных, так и отрицательных результатов проведенных расчетов можно придти к существенным выводам по потребительским привычкам различных слоев населения.

Уровень развития протребления необязательно характеризуется большим потреблением товаров с большой элатичностью, т. е. предметов роскоши и меньшим потреблением товаров с небольшой эластичностью, т. е. товаров широкого потребления. Если рассматривать двух потребителей, располагающих одинаковыми доходами, то более развитой структура потребления может считаться того, кто потребляет относительно небольшое количество ппредметов длительного пользования и относительно больше таких товаров и услуг, на которые влияют сложившиеся привычки потребления.

Другой важный вывод проведенных расчетов заключается в том, что статическая модель спроса не может основываться даже на данных нескольких лет, т. е. речь идет о такой модели, в соответствии с которой потребление зависит только от имеющихся доходов и цен в какой-то момент времени. Это увязывается с тем общеизвестным фактом, в соответствии с которым эластичности но доходу, полученные по семейным бюджетам и по временным рядам, различны. Имеющиеся данные за несколько лет не позволяют применение динамичной модели, однако коэффициенты линейного тренда в большинстве случаев оказывались сигнификантными. Относитеьно к предметам длительного пользования трендовые коэффициенты оказывались отрицательными, а по потреблению, связанному со сложившимися привычками чаще всего положительными.

FÉNYES TAMÁS–SÁRI JÓZSEF

# A kamatteher előrebecslése a vállalati gazdálkodásban

A Szigma hasábjain megjelent előző cikkünkben [1] a kamat közgazdasági szerepét, jelentőségét vizsgáltuk és elemeztük a népgazdaságban. Ekkor a szocialista állam központi- és jegybankja kamatlábpolitikájának gyakorlati alkalmazására fogalmaztunk meg egy közgazdasági-matematikai modellt. A jelen cikkben az önálló elszámolást folytató gazdálkodó szervezetek oldaláról mutatjuk be a kamatot azzal a céllal, hogy módszert ismertessünk előrejelzésére a pénzügyi tervezés keretében.

## 1. A kamat a vállalati önálló elszámolásban

A *kamat* mindenekelőtt *költség* a vállalat gazdálkodásában, s mint ilyen, levonás a nyereségből, ezért szoros kapcsolatban van a vállalati jövedelmezőséggel. Az önálló elszámolás alapelve, hogy a bevételek fedezzék a kiadásokat, s emellett tiszta jövedelmet is eredményezzenek az állami költségvetéssel szembeni kötelezettségek teljesítése, a különböző érdekeltségi alapok, elsősorban az egységes vállalati alap képzése céljára. Az önállóság fő kritériuma éppen az, hogy a vállalat saját pénzeszközökkel rendelkezzék, amelyeket — a jogszabályok keretei között — tetszés szerint használhat fel gazdálkodásában.

A gyakorlatban azonban nem mindenkor fedezik a bevételek a kiadásokat. A kiadási többlet lehet időszakos, eseti, véletlenszerű, vagy tartós, tervszerű, tudatos fejlődés, fejlesztés következménye. A hiány — ha a gazdálkodó szervezet hitelképes — bankkölcsön felvételével pótolható. A hitel tehát a saját erőforrások kiegészítésére szolgál, s a használatáért fizetett díj — amely nemzetközi és hazai vonatkozásban is mind nagyobb terhet ró a vállalatokra — lejön a vállalat tiszta jövedelméből. Így válik *a kamat,* — amely lényegét tekintve eszközteher, de a felszínen a forgalom költségeként jelenik meg — a döntéselőkészítések mércéjévé, a vállalati önálló elszámolás tárgyává, ahol *számviteli, árképzési és tervezési tétel.*

A kamat funkcióját és hatékonyságát a vállalati önálló elszámolás összmechanizmusa és általánosan a kamattal kapcsolatban levő értékkategóriák határozzák meg. Elsődlegesen azonban specifikus tényezők befolyásolják szerepét, mindenekelőtt a hitel nagysága, a kamatláb, a kamatfizetés formája (önköltség terhére vagy nyereségből) és kapcsolata a nyereségérdekeltség rendszerével. A magyar gyakorlat szerint a bankkamatot általában vállalati általános *költségként számolják el* a gazdálkodó szervezetek. Az előírt számlán azonban nemcsak a kamatok jelennek meg, hanem az egyéb *bankköltségek* is, mint amilyen a forgalmi és a rendelkezésre tartási jutalék, a bankgarancia díja és hasonló tételek. Ugyanakkor ezen a számlán írják jóvá a betéti kamatot is megtérülésként. Más a helyzet a *befejezetlen beruházásokra* folyósított hitelek után fizetett kamatok esetében, amelyek *a fejlesztési alapot terhelik*.

Mivel a hitelkamatokat már *bankköltségekkel együttesen könyvelik* a vállalatok a kötelező számlakeret szerint előírt számlákon, ez a gyakorlat sok esetben nem ad elégséges alapot szerepének meghatározására a vállalat gazdálkodásában, sem pedig a kamat jövőbeni alakulásának előrejelzésére. Ezért célszerű statisztikai módszerekkel, tartalmuk szerint csoportosítani a bankkal összefüggő költség- és eredményszabályozó tételeket. Erre a megoldásra számos példa található, különösen azoknál a vállalatoknál, ahol a hitel aránya jelentős a finanszírozásban. Az önálló elszámolás elvéhez tartozik az is, hogy milyen mértékben befolyásolja a kamat a vállalat elhatározásait és hogyan viszonyul ez a költségtétel a vállalati érdekeltséghez. Megállapítható, hogy a jelenlegi feltételek között a kollektív vállalati érdekeltség egyik tétele, és ily módon befolyásolja a képezhető vállalati alapok, ezen belül a részesedési alap nagyságát.

A szabályozás kiterjed a vállalati kalkuláció, vagyis az *árképzés* módjára is. Bár az egyes vállalatoknál (népgazdasági ágakban) bizonyos mértékig eltérhetnek az árképzés feltételei (elsősorban az árrendszer sajátosságai miatt), lényegében mindegyiknél azonos a tárgyunk szempontjából. Az előírások szerint a vállalat köteles *külön számlán összegyűjteni* azokat a költségeket, amelyek figyelembe vehetőek az árképzésnél, és külön azokat, amelyek nem. A kamat a gazdálkodó szerv központi irányításának költségeihez tartozik és (az improduktív költségek között elszámolt fizetett és kapott késedelmi kamat kivételével) részét képezi az önköltségtípusú árnak. Értelemszerűen nem tekinthető az ár alkotó elemének a befejezetlen beruházásokat finanszírozó hitelek kamata, miután azt nem költségként, hanem a fejlesztési alap terhére kell elszámolnia a vállalatnak.

A szocialista termelési módban *tervezik* a gazdasági folyamatokat és jelenségeket. Az értékkategóriák tervezési rendszerében a vállalatok előirányozzák bevételeiket és kiadásaikat, költségeiket és eredményeiket, a hitel- és betétállományokat és ennek függvényében a bankkamatot is. A tervezésnek sajátos szerepe, jelentősége van a vállalatok életében. Nem egyszerűen arról van szó, hogy mennyiségileg meghatározzák, mennyi lesz az elkövetkezendő időszakban a kamat összege, hanem akkor helyes és célirányos ez a munka, ha *mozgósító jellegű*, ha az ésszerű eszközgazdálkodásra és az önköltség csökkentésére ösztönöz. Ez a feltétele annak, hogy az önálló elszámolást folytató vállalatnál gazdaságilag hatékony legyen az igénybevett hitel felhasználása. Ez pedig elsősorban abban jut kifejezésre, hogy a kamatvolumen tervszerű csökkentésével párhuzamosan növekszik a vállalat nyeresége és ezzel együtt az alapképzés lehetősége.

*A kamat tervezése* nem önálló, formálisan is különálló dokumentumokban történik, hanem

— a vállalati hitelterv,
— az önköltségi (termelési költségek) terv és
— az eredményterv összeállítása keretében.

A kamat elszámolása szerint különböző eljárások adódnak az előirányzat elkészítésére. Az időben lejátszódó változások és a hitel gazdasági rendeltetése szerint is indokolt *két lépcsőben* elvégezni a tervezést, egyrészt a hitelek lejáratának, másrészt az elszámolás módjának a figyelembevételével. *A hitel lejárata alapján* külön tervezendők

— a rövid lejáratú (eseti és likviditási) hitelek és
— a közép és hosszú lejáratú forgóeszköz- és beruházási hitelek után fizetendő kamatok.

Az utóbbiaknál vagyis a *beruházási hiteleknél* megkülönböztetjük továbbá, hogy a kamatot

— a költség terhére, vagypedig
— a fejlesztési alap terhére

kell-e elszámolni az előírások szerint. A terv metodikájától függően a *tervezés időtartamának hossza* alapján megkülönböztethetünk

— folyó évet terhelő és
— hosszabb időszakra vagy több évre előrebecsült

kamatokat a vállalati közép távú tervek részeként.

A tervezés módszertanát és az eredmény megbízhatósági fokát illetően kétségkívül az *éves tervek* bírnak nagyobb jelentőséggel. Ez következik abból, hogy — bár a rövid lejáratú hitel tekintetében is megállapodnak és szerződést kötnek a bankkal — mégis ez a hitel az, amelynek nagysága, időbeli alakulása számos véletlenszerű hatásnak van kitéve.

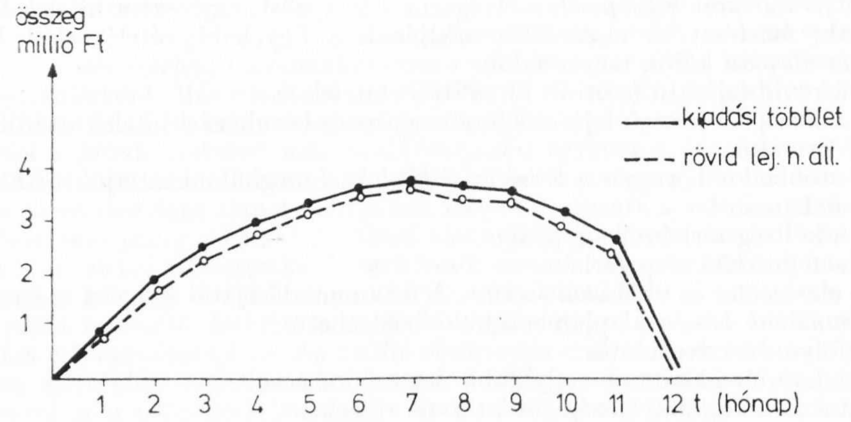
A tervezés kétféle módszerrel történhet:

— *állományszemléletű* vállalati eszköz-forrás különbségre épülő hitelterv és
— *forgalmi szemléletű* bevételi-kiadási mérlegen alapuló hitelszükséglet szerint.

A két módszer lényegében ugyanarra az eredményre vezet, a forgalmi szemléletű tervezés előnye mégis az, hogy pontosabban lehet nyomon követni a hitel fennállásának időtartamát. Egyébként mindkét módszernél felhasználható az előző időszakok tapasztalati számaiból ismert *átlagos* hiteligénybevételi *időtartam* és az ehhez csatlakozó vagy szintén tapasztalati számokból levezetett *átlagos kamatláb*. A múltbeli adatok elsősorban azoknál a vállalatoknál használhatók fel jól a jövőbeni kamatteher előrejelzésére, ahol a vállalat fejlődése egyenletes, a szezonális jelleg esetén pedig az éven belüli alakulás kellően karakterisztikus.

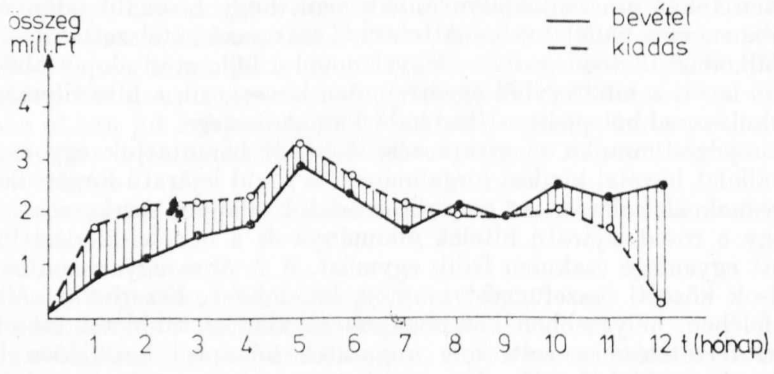
*A közép és hosszúlejáratú hitelek* kamatjának előrebecslése jórészt adottság, hiszen mind a folyósítási, mind a törlesztési kötelezettség a kamattételekkel együttesen a vállalat és a hitelező bankszerv hitelszerződésében szerepel. Ezen a területen tehát nincs akadálya annak sem, hogy hosszabb időn át előre figyelembe vegye a vállalat a kamatteherből származó kötelezettségeit; a tervévi gazdálkodást illetően pedig — figyelemmel a fejlesztési alap szabad pénzeszközeire is —, a hiteltervből egyértelműen következik a hitelállomány várható alakulása, abból pedig a fizetendő kamat összege.

Az előrejelzési munka megszervezése céljából bemutatjuk egy szezonális jellegű vállalat bevétel-kiadási forgalmának és rövid lejáratú forgóeszközhitelállományának alakulását. Az empirikus adatok alapján szerkesztett 1. ábra jelzi, hogy a rövid lejáratú hitelek állománya és a bevétel-kiadási forgalom halmozott egyenlege csaknem fedik egymást. A 2. ábra ugyanezen bevételek és kiadások közötti összefüggést mutatja havonként. Eszerint a vállalat az év első felében, helyesebben két hónapon át kiadási többletet ért el, s így bankhitel felvételére szorult, míg augusztus hónaptól kezdődően bevételi többlete volt, amelyből törleszteni tudta tartozásait.




*1. ábra*

Feltételezve, hogy a vállalat bevételi-kiadási adatai tervszámok, belőlük viszonylag könnyen meghatározható a kamat összege. A bevételek és a kiadások halmozott egyenlege alatti terület nagysága ti. a mindenkor fennálló hitelállománnyal azonos. A hitelállományok ismeretében pedig a kamat összege is meghatározható a jellemző függvények segítségével. Ezek a függvények általában szakaszonként folytonosak és differenciálhatóak. A gazdálkodó szervezetek másik — és joggal állíthatjuk, hogy nagyobbik — részénél a bevételek és a kiadások különbségéből szintén egyértelműen adódik a hitelszükséglet, de az állományok alakulása véletlenszerű, a változások diszkrét pontokban mennek végbe, s így viselkedésük nem írható le könnyen kezelhető függvényekkel. Ezeknél a szervezeteknél az időbeli eloszlás valamilyen feltételezésével végezhetjük el a számításokat. Ha pontosabban kívánunk számolni, akkor negyedéves szakaszokra osztjuk a havonkénti bevételi-kiadási forgalmat, mert a magyar gyakorlatban utólagosan, a negyedév utolsó napján számolják el a kamatot a vállalatok terhére. További javítás érhető el, ha az elszámolási időszakon belül bevételi hiányos (hitelszükségleti) és többletes (törlesztéses) intervallumokat képezünk.




*2. ábra*

Tervkészítéskor azonban még nem ismertek a forgalmi adatok, s így a hitelállományok jövőbeni alakulása sem. A becslések elvégzésére jó alapul szolgálhatnak a rendelésállomány, a tervezett árbevétel összege és az előző évek havi, negyedévi bontásban rendelkezésre álló tapasztalati adatai. Ezt a megoldást indokolja, ha a vállalatnak különböző kamatozású hitelállománya áll fenn, vagy lesz a tervidőszakban, vagy pedig ha a lejárat hosszától függően differenciálja a kamatlábakat a bank. Ebben az esetben ugyanis a becsléseknél feltételezhető, hogy a bevételi többletből mindig azt a hitelt törleszti a vállalat, amelyet előbb vett fel, ha pedig a tényleges lejáratok ismertek (pl. az induló hitelállomány esetében), akkor azok figyelembevételével kalkulálható a lejáratokhoz kapcsolódó kamatláb. A jelenlegi gyakorlatban azonban ilyen megkülönböztetés nem szükséges, mert a Magyar Nemzeti Bank megszüntette az ún. ,,kamatlépcső'' alkalmazását.

A cikk 2. fejezetében — a fentiekben ismertetett adottságokra figyelemmel — *egy folytonos és egy diszkrét modelljét* ismerhetjük a vállalati hitelezésnek, amelyek segítségével becslések, előrejelzések végezhetők a kamat összegére. A feladat megoldásánál feltételezzük, hogy a vállalat ismeri a bankkal szemben fennálló (tervezés, előrejelzés esetén a várható) hitel- és betétállományi adatokat; pénzügyi terve tartalmazza az éves (havi) bevételi-kiadási forgalmat. A forgalom rövidebb időszakokra jutó (várható) értékeit eloszlásfüggvény vagy egyszerűen tapasztalati alapon, megoszlási viszonyszámok segítségével határozhatjuk meg. A kezdő hitelállomány — módosítva a havonkénti bevételek és kiadások különbségével — sorra megadja a hóvégi hiteltartozások nagyságát, amit az adott hónap átlagos hitelállományának tekinthetünk. A számítás pontosbítható, ha a hó elején és végén fennálló állományok egyszerű számtani átlagát tekintjük a kamatszámítás alapjának. Feltételezzük továbbá, hogy a bank minden negyedév utolsó napján terheli meg a vállalat számláját. A terhelés ténylegesen az elszámolási számlán történik, mivel azonban a kamat kiadás, ezért végeredményben ugyanazt az eredményt kapjuk, ha azt a hitelállomány növekedésének tekintjük, feltéve, hogy az elszámolási számla egyenlege (a vállalat követelése) állandó, azaz a kamatterhelés miatt nem változik meg. Ez a feltételezés a gyakorlatban azért fogadható el, mert meghatározott nagyságú tartós pénzügyi szükségletet (ún. diszponibilitást ami 3—5 napi kiadást fedez) a bank figyelembe vesz a hitelezésnél.

## 2. A feladat matematikai megfogalmazása és megoldása

Az alábbiakban a vállalati hitelezés szakaszonként folytonos függvénnyel leírható eseteit integro-differenciál-egyenlettel, míg a nem szezonszerű és nem egyenletes ütemben működő illetve fejlődő gazdálkodó szervezetekét diszkrét modell segítségével oldjuk meg.

### *A vállalati hitelezés integro-differenciál-egyenlete*

Ebben a pontban a vállalati rövid lejáratú hitelezés folytonos matematikai modelljét ismertetjük. Feltételezzük, hogy a vállalat kiadása és bevétele a időszak adott *folytonos* függvényei. Figyelembe kell azonban vennünk, hogy a vállalat a kamatot nem folyamatosan fizeti minden időpontban, hanem csak a $t = kT$ diszkrét időpontokban ($T$ rögzített pozitív szám, a gyakorlatban három hónap; $k = 0, 1, 2, \ldots$); és az ezekben az időpontokban egy összegben fizetett kamat a szóbanforgó időpontokat megelőző $T$ időszak átlagos hitelállományára vonatkozik.

A vállalati hitelezésnél alkalmazott fogalmakra bevezetjük az alábbi jelöléseket:

$H(t)$ = a vállalat teljes hitelállománya (Ft)
$K(t)$ = a vállalat teljes kamatmentes kiadása (forint/idő)
$B(t)$ = a vállalat teljes bevétele (forint/idő)
$T$ = az időtartam, amire a kamatfizetés vonatkozik (a jelen gyakorlatban negyedévenként utólag számolja el a bank a kamatot)
$p$ = a $T$ időtartamra vonatkozó, állandónak feltételezett kamatláb

Fenti gondolatmenet alapján — ha a folyamatot a $0 \leq t < \infty$ intervallumon vizsgáljuk — a hitelezés alapegyenlete formálisan az alábbi módon írható fel:

$$\frac{dH(t)}{dt} = \begin{cases} \dfrac{p}{T}\displaystyle\int_{t-T}^{t} H(\tau)d\tau + K(t) - B(t), & \text{ha} \quad t = kT \\ K(t) - B(t), & \text{ha} \quad t \neq kT. \end{cases} \tag{1.1}$$

Az (1.1) egyenletek közgazdasági értelmezése: a teljes hitelállomány időegységre eső változása egyenlő a vállalat kamatmentes kiadási-bevételi forgalma különbözetének és a $t = kT$, ($k = 1, 2, \ldots$) időpontokban a $T$ időtartamra utólagosan fizetett kamatnak az összegével.

Fenti egyenletek a klasszikus analízis talaján maradva értelmetlenek. A diszkrét időszakokban történő kamatfizetés miatt a hitelállománynak a $t = kT$ időpontokban ugrása van, így a $H(t)$ függvény nem lévén folytonos, nem is differenciálható, és így klasszikus értelemben nem tehet eleget (1.1)-nek sem. Ahhoz, hogy a folyamatot pontosan leírhassuk, be kell vezetnünk a disztribúció-elméletben matematikailag egzakt módon definiált és az elméleti fizikában régóta használt Dirac-delta függvényt, másnéven Dirac impulzust. E cikk keretében nem foglalkozhatunk a disztribúció-elmélet elemeinek ismertetésével (lásd [2], [3], [4]), de szükségünk lesz a disztribúció elméletben egzakt módon megfogalmazható, alábbi, formális definíciókra és összefüggésekre.

A Dirac-$\delta$ függvény definíciója:

$$\delta(t) = 0, \quad \text{ha} \quad t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1. \tag{1.2}$$

Tetszőleges folytonos $f(t)$ függvény esetén

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t) \tag{1.3}$$

Az egységlökés függvény definíciója:

$$E(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad t > 0 \\ 0, & \text{ha} \quad t < 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

A $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k E(t - kT)$ végtelen sor általánosított (disztribúció) értelemben konvergens minden $\alpha_k$ együttható sorozat mellett.

Ha $F(t)$ a $0 \leq t < \infty$ intervallumon a $t = kT$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$ pontokat kivéve abszolút folytonos és a $t = kT$ helyeken $F(kT + 0) - F(kT - 0)$ nagyságú véges ugrása van, akkor

$$\frac{dF(t)}{dt} = F'(t) + \sum_{k=0}^{\infty} [F(kT + 0) - F(kT - 0)]\delta(t - kT), \tag{1.5}$$

és itt a kapott végtelen sor általánosított (disztribúció) értelemben ismét konvergens, továbbá $\frac{d}{dt}$ az általánosított deriválást, a $'$ pedig a $t \neq kT$ helyeken fellépő klasszikus deriválást jelöli.

Ha speciálisan $F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k E(t - kT)$,

akkor kapjuk a nagyon fontos

$$\frac{dF(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \delta(t - kT) \tag{1.6}$$

összefüggést, amelynek további speciális esete az egyszerű

$$\frac{d}{dt} E(t - kT) = \delta(t - kT) \tag{1.7}$$

formula. Az (1.6) és az (1.7) szerint tehát az egységlökés általánosított deriváltja a Dirac-$\delta$, az egységlökések *tetszőleges* szuperpozíciójának általánosított deriváltja pedig az egyes egységlökések általánosított deriválásából származó Dirac-$\delta$ függvények szuperpozíciója.

A Dirac-$\delta$ függvény bevezetésével a hitelezés alapegyenlete már matematikailag egzakt módon egy egyenletben összefoglalva írható fel:

$$\frac{dH(t)}{dt} = \left[\frac{p}{T} \int_{t-T}^{t} H(\tau)d\tau\right] \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT) + K(t) - B(t), \quad 0 \leq t < \infty, \tag{1.8}$$

ahol természetesen a $\frac{d}{dt}$ az (1.5)-ben értelmezett általánosított (disztribúció) értelemben vett deriváltat jelöli. Az (1.3) alapján

$$\frac{dH(t)}{dt} = \frac{p}{T} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\int_{(k-1)T}^{kT} H(\tau)d\tau\right] \delta(t - kT) + K(t) - B(t). \quad 0 \leq t < \infty \tag{1.9}$$

*Matematikailag* (1.9) a $H(t)$-re nézve egy disztribúció értelemben tekintett retardált integro-differenciálegyenlet. Egyértelmű (általánosított) megoldásához elő kell írnunk, mint kezdeti feltételt, a $H(t)$ függvényt a $-T \leq t \leq 0$ intervallumon. A $H(t)$ megoldás a $t \neq kT$ pontokban folytonos függvény, míg a $t = kT$ pontokban $\frac{p}{T} \int\limits_{(k-1)T}^{kT} H(\tau)d\tau$ nagyságú véges ugrása van.

*Közgazdaságilag* a hitelállomány a $t \neq kT$ pontokban a folytonosan változó kiadási-bevételi forgalom különbözetének hatására folytonosan változik, míg a $t = kT$ pontokban fellépő *kamat-impulzusok* hatására véges pozitív ugrással bír. A folyamatot a $-T \leq t \leq 0$ bázisintervallumon ismert hitelállomány a jövőre nézve egyértelműen meghatározza.

Bevezetve az $A(t) = K(t) - B(t)$,

$$a(t) = \int\limits_0^t [K(\tau) - B[\tau)]d\tau$$

$$\lambda = \frac{p}{T}$$

jelöléseket, (1.9) megoldását az

$$H(t) = H(-0) + \lambda \int\limits_{-T}^{0} H(\tau)d\tau + a(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k E(t - kT) \tag{1.10}$$

alakban keressük, ahol a $\beta_k$ értékek egyelőre ismeretlen együtthatók, $H(-0)$ a nulla időpontban levő bal oldali határérték. Látjuk, hogy (1.10) a $t = kT$ pontokban véges ugrással bír, $t \neq kT$-re folytonos, a nulla időpontban levő jobb oldali határérték

$$H(+0) = H(-0) + \lambda \int\limits_{-T}^{0} H(\tau)d\tau, \tag{1.11}$$

és így $H(+0) - H(-0)$ megegyezik a bázis-intervallumra fizetett kamat értékével, mint ahogy annak lennie kell.

A $\beta_k$ együtthatók meghatározására helyettesítsük be (1.10)-et az (1.9)-be. Az (1.6) és (1.11) figyelembevételével kapjuk, hogy — a $k = 0$-nak megfelelő tagot leválasztva —

$$\begin{aligned}[\lambda \int\limits_{-T}^{0} H(\tau)d\tau]\,\delta(0) + A(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \delta(t - kT) &= [\lambda \int\limits_{-T}^{0} H(\tau)d\tau]\,\delta(0) + \\ + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \int\limits_{(k-1)T}^{kT} \left[ H(+0) + a(\tau) + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i E(\tau - iT) \right] d\tau \right\} \delta(t - kT) + A(t).\end{aligned} \tag{1.12}$$

(1.12)-t rendezve elemien adódik, hogy

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \delta(t - kT) &= pH(+0) \sum_{k=1}^{\infty} \delta(t - kT) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \int\limits_{(k-1)T}^{kT} a(\tau)d\tau \right] \times \\ &\times \delta(t - kT) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \int\limits_{(k-1)T}^{kT} \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i E(\tau - iT)d\tau \right] \delta(t - kT).\end{aligned} \tag{1.13}$$

(1.13) jobb oldalának utolsó tagja lényegesen egyszerűbben írható, mert rögzített $k > 1$ esetén az $i$ szerint végtelen sornak csak az első $(k-1)$ tagját kell figyelembe venni; $k = 1$ mellett pedig az (1.13) jobb oldalán szereplő utolsó tag eltűnik. U.i., ha $k = 1$, akkor

$$\int_0^T \left( \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i E(\tau - iT) \right) d\tau = 0\,,$$

mivel az integrandusz eltűnik a $0 \leq t \leq T$ szakaszon. Ha pedig a $k > 1$, akkor

$$\int_{(k-1)T}^{kT} \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i E(\tau - iT) \right] d\tau = \int_{(k-1)T}^{kT} \left[ \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i E(\tau - iT) \right] d\tau +$$

$$+ \int_{(k-1)T}^{kT} \left[ \sum_{i=k}^{\infty} \beta_i E(\tau - iT) \right] d\tau\,.$$

Az utolsó jobb oldali integrál azonban eltűnik, mivel az integrandusz nulla értékű a $(k-1)T \leq t \leq kT$ szakaszon.

E meggondolás alapján $k \geq 1$-re

$$\text{(1.14)} \qquad \int_{(k-1)T}^{kT} \left[ \sum_{i=k}^{\infty} \beta_i E(\tau - iT) \right] d\tau = \int_{(k-1)T}^{kT} \left[ \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i E(\tau - iT) \right] d\tau = T \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i\,,$$

ha megállapodunk abban, hogy $\sum_{i=1}^{0} \beta_i$ a nullát jelöli. Az (1.13) így az alábbi alakban írható

$$\text{(1.15)} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \delta(t - kT) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ pH(+0) + \lambda \int_{(k-1)T}^{kT} a(\tau) d\tau + p \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i \right] \delta(t - kT)\,.$$

A disztribúció-elmélet elemeiből következik, hogy ha egyenlő argumentumú Dirac-$\delta$ függvényekből álló két végtelen sor egymással egyenlő, akkor a megfelelő együtthatók is egyenlőek egymással. Azaz

$$\text{(1.16)} \qquad \beta_k = pH(+0) + \lambda \int_{(k-1)T}^{kT} a(\tau) d\tau + p \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i\,, \qquad k \geq 1.$$

Az (1.16) pedig egy egyszerű rekurzív formula a $\beta_k$ együtthatók meghatározására. $\beta_1 = pH(+0) + \lambda \int_0^T a(\tau) d\tau$, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{k-1}$ ismeretében $\beta_k$ meghatározható.

Azonban (1.16) még tovább is egyszerűsíthető. Ha (1.16)-ban $k$ helyére $(k+1)$-et írunk, és az így kapott egyenletből (1.16)-ot kivonjuk, akkor az

$$\text{(1.17)} \qquad \beta_{k+1} - (1 + p)\beta_k = \lambda \left[ \int_{kT}^{(k+1)T} a(\tau) d\tau - \int_{(k-1)T}^{kT} a(\tau) d\tau \right], \qquad k \geq 1$$

elsőrendű differencia-egyenletre jutunk, amelynek a megadott $\beta_1$-értéket kielégítő megoldása követlenül felírható.

$$(1.18) \qquad \beta_k = \beta_1(1+p)^{k-1} + (1+p)^k \sum_{\nu=1}^{k-1} \frac{T(\nu)}{(1+p)^{\nu+1}}, \qquad k \geq 1,$$

ahol $T(k)$ (1.17) jobb oldalát jelöli, és definíciószerűen legyen (1.18)-ban a szumma a zérus, ha $k = 1$.

*Az (1.10)-ből és (1.12)-ből azonban következik, hogy a $\beta_k$ értékek éppen a $t = kT$ helyeken fellépő kamatimpulzusok nagyságát adják meg.* Így a hitelre vonatkozó integro-differenciálegyenletet az (1.10) felvételével, a Dirac-$\delta$ függvények segítségével egy egyszerű – a kamatra vonatkozó – differenciaegyenletre vezettük vissza.

*A vállalati hitelezés diszkrét modellje*

Az alábbiakban ismertetjük a vállalati rövid lejáratú hitelezésnek a gyakorlati számításokra igen alkalmas diszkrét modelljét. Az időegységet egy hónapnak választjuk, figyelembe vesszük azonban, hogy a kamatot csak háromhavonként utólagosan fizeti a vállalat.

Jelölések:

$H(t)$ = a teljes hitelállomány értéke a $t$-edik és $t + 1$-edik időpont között
$K(t)$ = az összes kamatmentes kiadások értéke a $t$-edik és $t + 1$-edik időpont között
$B(t)$ = az összes bevételek értéke a $t$-edik és $t + 1$-edik időpont között
$p$ = az egy hónapra számított állandó kamatláb.

Ha $A(t) = K(t) - B(t)$, akkor a vállalati hitelezés alapegyenlete

$$(2.1) \qquad \Delta H(t) = p\alpha(t) \sum_{\tau=1} H(t-\tau) + A(t), \qquad t \geq 0$$

ahol

$\Delta$ = differenciaképzés szimbóluma.

$$\alpha(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } t = 3k \\ 0, & \text{ha } t \neq 3k. \end{cases} \qquad k = 0, 1, \ldots$$

A (2.1) közgazdságilag úgy értelmezhető, hogy a teljes hitelállomány megváltozása a $t - 1$-edik és $t$-edik időpont között megegyezik a vállalat kamatmentes kiadási-bevételi forgalma különbözetének és a háromhavonta utólagosan fizetett kamatnak az összegével.

A (2.1) egy periódikus együtthatójú lineáris, inhomogén differenciaegyenlet. $\alpha(t)$ periódikus volta miatt a megoldás explicit alakban előállítható $\mathfrak{z}$-transzformáció alkalmazásával. (Lásd [5].)

A (2.1) alapján felírhatók az alábbi összefüggések.

$$(2.2) \qquad H(3k) - H(3k-1) = p[H(3k-1) + H(3k-2) + H(3k-3)] + A(3k)$$

$$(2.3) \qquad \begin{aligned} H(3k+1) - H(3k) &= A(3k+1) \\ H(3k+2) - H(3k+1) &= A(3k+2). \end{aligned}$$

A (2.3)-ból

$$H(3k+1) = H(3k) + A(3k+1) \qquad (2.4)$$
$$H(3k+2) = H(3k) + A(3k+1) + A(3k+2).$$

Látható, hogy ha a $H(t)$ értékeit ismerjük a $t = 3k$ időszakokban, akkor a $H(t)$ értékei $t \neq 3k$-ra (2.4)-ből közvetlenül adódnak. Először tehát a $H(3k)$ függvényt kell meghatároznunk.

Írjunk (2.4)-ben $k$ helyére $k - 1$-et. Ekkor

$$H(3k-2) = H(3k-3) + A(3k-2) \qquad k \neq 0 \qquad (2.5)$$
$$H(3k-1) = H(3k-3) + A(3k-2) + A(3k-1)$$

(2.5)-öt a (2.2)-be behelyettesítve és rendezve, adódik, hogy

$$H(3k) = (3p+1)H(3k-3) + (2p+1)A(3k-2) + \qquad (2.6)$$
$$+ (p+1)A(3k-1) + A(3k), \qquad k \neq 0$$

Visszaírva $k$ helyére $k + 1$-et

$$H(3k+3) = (3p+1)H(3k) + (2p+1)A(3k+1) + \qquad (2.7)$$
$$+ (p+1)A(3k+2) + A(3k+3)$$

A (2.7) már állandó együtthatós differenciaegyenlet. Ezért ha ismerjük a $H(0)$ értéket, akkor (2.7) megoldható a $\mathfrak{z}$-transformációval.

$H(0)$ ismeretéhez meg kell adnunk a $H(-1)$, $H(-2)$, $H(-3)$ kezdeti feltételeket. Ezek birtokában (2.2)-ből kiszámítható $H(0)$

$$H(0) = (p+1)H(-1) + pH(-2) + pH(-3) + A(0) \qquad (2.8)$$

Legyen az egyszerűbb írásmód kedvéért

$$A^*(3k) = (2p+1)A(3k+1) + (p+1)A(3k+2) + A(3k+3)$$

Vezessük be az alábbi $\mathfrak{z}$-transzformáltakat:

$$h(z) = \mathfrak{z}[H(3k)] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{H(3i)}{z^{3i}} \qquad (2.9)$$

$$a(z) = \mathfrak{z}[A^*(3k)] = \beta[(2p+1)A(3k+1) + (p+1)A(3k+2) +$$
$$+ A(3k+3)] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2p+1)A(3i+1) + (p+1)A(3i+2) + A(3i+3)}{z^{3i}}.$$

A $\mathfrak{z}$-transzformáció egy elemi szabálya értelmében (lásd [3])

$$\mathfrak{z}[H(3k+3)] = z^3[h(z) - H(0)]. \qquad (2.10)$$

Képezve tehát (2.7) mindkét oldalának $\mathfrak{z}$-transzformáltját, a (2.9), (2.10) formulák alkalmazásával $h(z)$-re az alábbi algebrai egyenletet kapjuk:

$$z^3[h(z) - H(0)] = (3p+1)h(z) + a(z). \qquad (2.11)$$

Ennek megoldása

$$h(z) = \frac{H(0)z^3 + a(z)}{z^3 - (3p+1)}, \tag{2.12}$$

A következő lépésben meg kell határozni a (2.12) inverz-transzformáltját. Ez azonban igen könnyen megy. Ui.

$$\frac{z^3}{z^3 - (3p+1)} = \frac{1}{1 - \dfrac{3p+1}{z^3}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(3p+1)^i}{z^{3i}},$$

ha $z$ abszolút értéke elég nagy. Következésképp

$$\mathfrak{z}^{-1}\left[\frac{z^3}{z^3 - (3p+1)}\right] = (3p+1)^k, \quad \text{ha } t = 3k, \tag{2.13}$$

és elemi operátoros szabály szerint

$$\mathfrak{z}^{-1}\left[\frac{1}{z^3 - (3p+1)}\right] = \begin{cases} 0, & \text{ha } t = 0 \\ (3p+1)^{k-1}, & \text{ha } t = 3k, \quad k \neq 0 \end{cases} \tag{2.14}$$

A $\mathfrak{z}$-transzformáció konvolúció tétele értelmében

$$\mathfrak{z}^{-1}\left[\frac{a(z)}{z^3 - (3p+1)}\right] = \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{k-1} (3p+1)^{k-j-1} A^*(3j), & \text{ha } t = 3k, \quad k \neq 0 \\ = 0, & \text{ha } t = 0. \end{cases} \tag{2.15}$$

A (2.13)-ból és (2.15)-ből $h(z)$ inverz transzformáltja, a hitelállomány, explicite felírható

$$H(t) = H(0)\,(3p+1)^k + \sum_{j=0}^{k-1} (3p+1)^{k-j-1} A^*(3j), \quad \text{ha } t = 3k, \quad k \neq 0. \tag{2.16}$$

Továbbá a $t = 0$-ban fennálló $H(0)$ hitel a (2.8)-ból, míg a $t \neq 3k$-ban fennálló hitel a (2.4)-ből számítható

$$\begin{aligned} H(t+1) &= H(t) + A(t+1), \qquad t = 3k \\ H(t+2) &= H(t) + A(t+1) + A(t+2) \end{aligned} \tag{2.17}$$

A hitel ismeretében a kamat már felírható explicit alakban. Azaz a kamat értéke a $t = 3k$ időszakokban, (2.5)-ből

$$\begin{aligned} & p[H(3k-1) + H(3k-2) + H(3k-3)] = \\ & = p[H(3k-3) + A(3k-2) + A(3k-1) + H(3k-3) + \\ & + A(3k-2) + H(3k-3)] = \\ & = p[3H(3k-3) + 2A(3k-2) + A(3k-1)] = \\ & = p[3H(0)(3p+1)^{k-1} + \sum_{j=0}^{k-2} (3p+1)^{k-j-2} A^*(3j) + \\ & + 2A(3k-2) + A(3k-1)], \qquad \text{ha } k > 1. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Míg a $k = 1$-re a kamat értéke:

$$p[H(2) + H(1) + H(0)] = p[3H(0) + 2A(1) + A(2)], \tag{2.19}$$

végül $k = 0$-ra a bázis hitelállományából a kamat értéke

$$p[H(-1) + H(-2) + H(-3)].$$

## 3. Gyakorlati alkalmazás

Az első pontban ábrákon mutattuk be egy idényszerű vállalat kiadási-bevételi forgalmának halmozott és havonkénti egyenlegét, jellemezni kívánván ezzel a forgalom által meghatározott hitelszükségletet. Az ábra lényegében olyan folytonosnak tekinthető függvénnyel leírható folyamatot mutat be, amelyből a kamatteher nagysága viszonylag könnyen kiszámítható. Tekintettel azonban arra, hogy a vállalatok többségénél a bevételek és a kiadások időbeli lefolyása nem fejezhető ki könnyen kezelhető függvényekkel, és ily módon a hitelállományuk is véletlenszerűen alakul, ezért olyan vállalat adatait használtuk fel a gyakorlati számítások céljára, amely az előző pontban ismertetett diszkrét modell szerint kezelhető. Általában is az a véleményünk, hogy a diszkrét modell az, amely célszerűbben alkalmazható a vállalatok tervező munkájában. A hitelállományok és a kamatkiadások nagyságának kiszámítására a diszkrét modellben szereplő (2.1), vagy pedig a (2.18) ill. a (2.19) képleteket használhatjuk fel, amelyek megfelelnek a folytonos modellre (1.9)-ben, illetve az (1.16)-ban és az (1.18)-ban megadott összefüggések közelítésének.

A vállalat 1981-re várható havi forgalmi adatait az értékesítési tervéből, továbbá a rendelésállományok, valamint a szállítói visszaigazolások adataiból határoztuk meg oly módon, hogy az éven belüli havi adatok kialakításánál figyelemmel voltunk az 1980-as év kiadásainak és bevételeinek időbeli megoszlási arányaira is. Az éven belüli megoszlás pontosabb meghatározása több év adatainak az ismeretét tenné szükségessé, jelen esetben azonban ettől el kellett tekintenünk az 1980. január 1-vel életbelépett új árrendszernek az összetételt módosító hatása miatt. Az adatok szerint ugyanis több vonatkozásban megváltozott a vállalati bevételek és kiadások viszonylati összetétele és időbeli alakulása. Az általunk kalkulált idősorokat a cikkhez *csatolt táblázat* tartalmazza. Az 1981-re várható forgalmi adatokból, valamint az 1980 év utolsó negyedévének hitelállományaiból viszonylag könnyen levezethető a vállalat hitel-, ill. kamatprognózisa, a fentebb megadott képletek segítségével. A gyakorlati feladatnál különös gondot kell fordítani arra, hogy a havi kiadási és bevételi forgalom adatainak különbsége az adott $t$ időszak utolsó napjára jelzi az előző hó utolsó napjához képest bekövetkezett, ill. várható hitelállomány változást. Ebből következik, hogy a forgalmi számokból levezetett tartozás az egyes hónapok utolsó napjára vonatkozik.

A hivatkozott képletekből látható az is, hogy a kamatszámításnál minden esetben az 1 időszakkal előbbi pontról indulunk el és a következő időtartam az, amely alatt a meghatározott és a táblázatban szereplő hitelállomány kamatozik. Mindebből következik, hogy a negyedév utolsó napján fennálló hitelállomány, amely időpontban a kamatot a bank felszámítja, az adott $t$ időszakban már nem kamatozik. A számításnak ez a módja elfogadható pontosságú eredményre vezet abban az esetben, ha a hónapok első napjaiban elégíti ki hitelszükségletét a vállalat, ill. ha a hitelállomány csökken, a lejárt tartozások törlesztése is nagyjából a hó elején történik. Komolyabb letérés lehetséges azonban akkor, ha a forgalom a hónap folyamán egyenletesen, esetleg teljesen véletlenszerűen növekvő vagy csökkenő hitelállományokat indukál.

Tekintettel arra, hogy a válllat nem napról-napra veszi fel a gazdálkodásához szükséges összegeket, ill. törleszti a lejárt tartozását, hanem meghatározott diszkrét időpontokban (ennek az időpontnak az előrebecslése azonban teljesen lehetetlen), ezért azt a gyakorlatot célszerű követni, hogy a kamat-

Egy nem idényszerű vállalat becsült adatai

Összegek millió Ft-ban

| Év, hó | Forgalom: kiadás (kamat nélkül) | Forgalom: bevétel | Hitelállomány: havi változása | Hitelállomány: hó végén | Kamat összege: (2.1) képlet szerint | Kamat összege: havonkénti átlagok szerint | Év, hó, nap |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | 1980. |
| | | | | 389 | | | IX. 30. |
| | | | | 389 | | | X. 31. |
| | | | | 429 | | | XI. 30. |
| | | | | 253 | 8,9 | 9,5 | XII. 31. |
| | | | | 261,9 | | | |
| 1981. | | | | | | | 1981. |
| jan. | 537 | 383 | 154 | 415,9 | | | I. 31. |
| febr. | 291 | 562 | −271 | 144,9 | | | II. 28. |
| márc. | 718 | 432 | 286 | 430,9 | 8,3 | 7,4 | III. 31. |
| | | | | 439,2 | | | |
| ápr. | 478 | 387 | 91 | 530,2 | | | IV. 30. |
| máj. | 392 | 396 | − 4 | 526,2 | | | V. 31. |
| jún. | 503 | 554 | − 51 | 475,2 | 12,8 | 12,6 | VI. 30. |
| | | | | 488,0 | | | |
| júl. | 595 | 581 | 14 | 502,0 | | | VII. 31. |
| aug. | 370 | 350 | 20 | 522,0 | | | VIII. 31. |
| szept. | 486 | 509 | − 23 | 499,0 | 12,7 | 12,6 | IX. 30. |
| | | | | 511,7 | | | |
| okt. | 546 | 552 | − 6 | 505,7 | | | X. 31. |
| nov. | 370 | 332 | 38 | 543,7 | | | XI. 30. |
| dec. | 526 | 714 | −188 | 355,7 | 11,7 | 12,3 | XII. 31. |
| | | | | 367,4 | | | |
| 1981. év összesen | 5812 | 5752 | + 60 | 105,5 | 45,5 | 44,9 | |

összeg kiszámításánál nem az előző $t$ időszak utolsó, ill. — ami ezzel teljesen megegyező — a jelen időszak első napján fennálló hitelállományt vesszük a kamatozás alapjául, hanem sorban 2—2 időpontban fennálló hitelállomány számtani átlagát. Ezzel azt érjük el, mintha a vállalat minden hitelműveletét az adott $t$ időszak közepén hajtaná végre. Ily módon az előrebecslés pontosbítható,[1] bár hosszabb időszakot tekintve a kamatösszegekben viszonylag nem túl nagy az eltérés. (L. a táblázatot.)

Az előzőekben már utaltunk arra, és ezt a képletekben is kifejezésre juttattuk, hogy a kamatot minden negyedév végén, az utolsó napon terhelik a vállalat számlájára. Ezt a gyakorlatot érzékeltetjük a táblázatban is. A kamat összege tehát ezen a napon növeli a kiadások összegét, és egyidejűleg megnöveli a hitelszükségletet, ill. a hitelállományt. Igaz ez a megállapítás abban az esetben, ha feltételezzük, hogy a vállalat rendelkezésére álló betétállomány (elszámolási számla egyenlege), változatlan marad az év folyamán. A gyakorlatban természetesen az elszámolási számla egyenlege napról-napra változik. Ezen a számlán könyvelik a bevételeket és a kiadásokat, többek között a kamatot is. Mivel pedig a hitelezés nem követheti ilyen gyorsan a pénzállomány változását, a vállalat hiányzó pénzeszközeinek pótlása csak diszkrét időpontokban, a hó folyamán valamikor, bármely napon (napokon) lehetséges. Ebből következik, hogy az állományok rendezése, vagyis a pénzügyi egyensúly helyreállítása is csak bizonyos, a tervezés időpontjában még pontosan nem látható napokon történik. A hitel- ill. a kamatmodell diszkrét változata a folyamatot nem képes minden időpontban visszatükrözni, ezért csak feltételesen igaz az, hogy a pénzállomány állandó. A konstans pénzállomány feltételezése azonban elégséges a gyakorlat számára ahhoz, hogy az éves pénzügyi terv keretében elvégezhető legyen a kamatok becslése.

A hazai kamatlábak mai színvonala miatt (a rövid lejáratú hiteleknél pl. évi 10%)[2] a bankkamat nem elhanyagolható tétel a vállalatok kiadásaiban. Tájékoztatásul megemlítjük pl. hogy a vállalatokat terhelő forgóeszköz hitelek után fizetett átlagos éves kamatláb 9,6% volt 1980-ban. A teljes kamatteher elérte a vállalati összes költség 2,5%-át. Még plasztikusabb a kamat súlyának bemutatása, ha azt a kamatérzékenységi mutató segítségével (kamatösszeg/nyereségösszeg) fejezzük ki. 1980-ban a kamat összege közel $^1/_4$-e volt a nyereségnek. Az ismertetett adatok országosan átlagos értékek, amiből következik, hogy különösen azoknál a vállalatoknál kell komolyan venni a kamatköltséget és jó vállalati gazdálkodással csökkenteni mértékét, ahol a hitelsáv, vagyis az eszközök hitellel való megfinanszírozásának aránya viszonylag magas.

A jelen cikkben bemutatott példa is arra hívja fel a figyelmet, hogy nem lebecsülendő a kamatteher a vállalat pénzügyeiben. Ezúttal csak a rövid lejáratú hitelek kamatainak előrejelzését mutattuk be, mégis megállapítható, hogy a táblázatban szereplő 60 millió forint éves kamatnélküli hiteligény mellett a kamatok miatt további kereken 45 millió forint hitelszükséglet keletkezik. A vállalat teljes kamatterhe természetesen ennél jóval nagyobb is lehet attól függően, hogy milyen nagyságú közép és hosszú lejáratú hitellel tartozik a banknak. Ezeket a tételeket azonban tudatosan nem vettük számításba cikkünkben, mert — amint már az első fejezetben is utaltunk rá — azok

[1] Pl. az 1981. I. f. évi kamat ténylegesen 19,3 millió Ft volt.
[2] 1981. szeptember 1-én 11%-ra emelkedett.

összegét, igénybevételének és törlesztésének ütemét, valamint a kamatfeltételeket szerződésekben rögzítette a vállalat és a bank. Ily módon ezek becslése bármely következő időszakra (évre) könnyen és viszonylag pontosan elvégezhető. Ahhoz azonban, hogy teljes kamatterhét figyelembe vehesse a vállalat a terveiben és az árkalkulációjában, a rövid lejáratú hitelek kamataihoz hozzá kell adni ezeket a tételeket (kivéve azt a részt, amely a fejlesztési alapot terheli). Az elmondottakból következik az is, hogy a közép és hosszú lejáratú hiteleknek a költség terhére elszámolt kamatai részei a vállalat kiadásának, következésképpen ezekkel a kamatösszegekkel is növekszik a vállalat hitelszükséglete.

Az ismertetett eljárás alapjában véve igen egyszerű, nem haladja túl a kamatszámítás műveleti igényeit; mégis úgy véljük, hogy a tervezés során azért is foglalkozniok kell vele a vállalatoknak, mert nem mindegy, hogy a hitel felvétele és törlesztése melyik hónapra, az év melyik szakaszára (pl. elejére vagy végére) esik. A kamat összege ti. nemcsak a hitelállománytól és a kamatlábtól, hanem a hiteltartozás fennállásának időtartamától is függ. Az időtartam pedig olyan tényező, amely a fő bizonytalanságot okozza az előrejelzésekben. Ezért rendkívül fontos, hogy a bevételek és a kiadások éven belüli ütemét jól határozzuk meg, mert az döntően kihat a kamatbecslés minőségére.

Végezetül szeretnénk hangsúlyozni, hogy az általunk javasolt előrejelzési módszernek nemcsak abban van a szerepe, hogy választ ad a kamat nagyságára — bár ez sem lebecsülendő eredmény —, hanem abban is, hogy széles körben elemeznie kell a vállalatnak pénzügyi bevételeit és kiadásait. Az értékfolyamatok folyóáras számbavétele megnöveli az értékkategóriák szerepét, a pénzügyi egyensúly létrehozásának szükségességét a vállalati gazdálkodásban, erősíti az anyagi és az értékfolyamatok közötti kapcsolatok szorosságának tudatát. Az értékfolyamatok időbeli lefolyása visszahat az anyagi folyamatokra, a termelés, a forgalmazás, az értékesítés rendjére, ütemére. A folyamatok időbeli lefolyása feltárja az év közben jelentkező likviditási helyzetet, jelzi a diszponibilitás időszakonként fellépő hiányát, amelynek pótlásáról a vállalat ennek megfelelően tud időben gondoskodni. A hiány fedezése hitellel vagy más forrásból a gazdálkodás tervszerű, tudatos szervezésével mind olyan tevékenység, amely a vállalatok munkájának minőségi jellemzője. A pénzügyek ésszerű megszervezése, a pénzügyi egyensúly megteremtése a vállalat elsőrendű érdeke. Ennek részeként mutattuk be a hitel- és a kamat összegek előrejelzésére szolgáló módszert.

*(Beérkezett: 1981. augusztus 17-én)*

## IRODALOM

[1] Fényes T.—Sári J.: Kamatlábpolitika közgazdasági-matematikai modellel. Szigma 1980./4. sz.

[2] Cristescu, R.—Marinescu, G.: Bevezetés a disztribúcióelméletbe és alkalmazásaiba. Műszaki Könyvkiadó, Bp. 1969.

[3] Vlagyimirov, V. Sz.: Bevezetés a parciális differenciálegyenletek elméletébe. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.

[4] Zemanian, A. H.: Distribution theory and transform analysis. New York—San Francisco—Toronto—London—Sidney, 1965.

[5] Jury, E. I.: Theory and application of the Z-transform method John Wiley, Sons. New York—London.

# FORECASTING INTEREST BURDENS IN ENTERPRISE MANAGEMENT

The authors present interest from the viewpoint of economic organizations with independent accounting aiming at submitting a method for its forecasting in the framework of financial planning. Interest is first of all a kind of enterprise *costs* and as such is closely connected with profitability. Interest may thus become a measure of decision preparation, a subject of independent enterprise accounting where it means an item in accountancy, price formation and planning.

Planning may be made with two methods, namely according to credit plan based on the difference between assets and resources of enterprises in a stock approach, and according to credit demand based on money process balances of incomes and expenditure in a turnover approach.

The area below functional curves expressing the cumulated balance of incomes and expenditures is always identical with the existing credit stock; and, in the knowledge of debts also the amount of interests may be determined. These functions are piecewise continuous and differentiable. With another part of economic organizations credit demand is unambiguously given by the difference between incomes and expenditure, but the development of stocks is random, changes occur at discrete dates, thus their behaviour may not be described by functions easy to handle. With these organizations computations may be made with the assumption of some distribution in time. The stock of orders, the amount of planned sales receipts and empirical data of previous years available in monthly and quarterly breakdowns may serve as a basis for this.

With the above particularities in view the authors present a *continuous and a discrete model* of enterprise credit policy. In case of the continuous model it is assumed that expenditure and incomes of the enterprise are given as continuous functions of time. However, the enterprise does not pay interest continuously, but only at discrete dates (in the practice every three months) after the average stock of credit of the period.

The basic equation of the discrete model may be interpreted in such a way that the change in the entire stock of credit between dates $t$-1 and $t$ is equal to the sum of the difference between interest-free expenditure and incomes of the enterprise and of the interest paid every three months subsequently. In general, a discrete model may be better applied in the planning activity of enterprises. The authors present practical computations also using this kind of model.

The importance of the suggested forecasting method lies not only in that it determines interest burdens, but also in that the enterprise has to make wide-range analysis concerning the development of its financial incomes and expenditure. The accounting of value processes at current prices increases the role of value categories, draws attention to the necessity of financial equilibrium in enterprise management and strengthens relations between material and value processes.

# ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ВЫПЛАТ ПО ПРОЦЕНТАМ В ХОЗЯЙСТВОВАНИИ ПРЕДПРИЯТИЙ

Авторы представляют проценты со стороны хозяйственных организаций, находящихся на хозяйственном расчете с тем, чтобы демонстрировать — в рамках финансового планирования — свой метод прогнозирования. Проценты являются, в первую очередь, расходами предприятия и в качестве таковых тесно увязываются с прибыльностью. Таким образом проценты станавятся критерием принятия решений, предметом хозяйственного расчета предприятий, в которых представляют собой позицию учет, ценообразование и планирование.

Планирование может осуществляться при использовании двух методов, т. е. соответственно кредитному плану, базирующемуся на различиях в источниках средств предприятия при подходе с точки зрения фондов и потребности в кредитах, базирующейся на балансе процессов поступлений и выплат при подходе с точки зрения оборота.

Величина территории под кривыми зависимостей, выражающих совокупный баланс поступлений и выплат в любом случае аналогична наличию кредитов на определенный момент; зная величину кредитов может быть установлена и сумма процентов. Эти зависимости — чаще всего по отдельным этапам — являются непрерывными и могут быть дифференцированы. В других хозяйственных организациях на основании разницы между поступлениями и выплатами со всей определенностью может быть установлена потребность в кредитах, однако формирование этих сумм является случайным, изменения п роисходят в дискретные сроки и поэтому их поведение не может описываться посредством легко обрабатываемых зависимостей. В этих организациях расчеты погут проводиться при предположении какого-то распределения по времени. Основой для этого могут быть совокупность заказов, сумма планируемых поступлений по ценам и конкретные данные по предшествующим годам в разбивке по месяцам и кварталам.

С учетом вышеизложенных особенностей авторы излогают одну непрерывную и одну дискретную модель кредитования предприятий. Относительно непрерывной модели они предполагают, что расходы и поступления предприятия являются непрерывным зависимостями какого-то определенного времени. Однако предприятие выплачивает проценты не непрерывно, а лишь в какие-то дискретные сроки (практически через каждые три месяца) и на основании средней наличности кредитов на соответствующий период.

Основное уравнение дискретной модели в экономическом смысле может тольковаться так, что изменение общей величины кредитов в период между $t_1$ и $t$ совпадает с суммой разницы беспроцентного оборота предприятия и процентов, выплачиваемых по истечении каждых трех месяцев. Дискретная модель, вообще, может с большим использоваться в рамках работы предприятий по планированию. С учетом этого авторы приводят соответствующие практические расчеты.

Предлогаемый метод прогнозирования играет определенную роль не только в том, что дает ответ на величину выплат по процентам, а и в том, что необходимо проводить развернутый анализ по формированию денежных поступлений и выплат предприятия. Учет стоимостных процессов по текущим ценам увеличивает роль стоимостных категорий, обращает внимание на необходимость обеспечения финансового равновесия в хозяйствовании предприятий ,усиливает увязку между материальными и стоимостными процессами.

Galántai Imre—Török Tamás

# A páros összehasonlítás módszerének egy általánosítása

## 1. Bevezetés

A páros összehasonlítás egy adott alternatíva-halmaz elemeinek (lehetnek döntési alternatívák, értékelési tényezők, objektumok, termékek, személyek, stb.) súlyozására, fontosságuk számszerű meghatározására alkalmas módszer. A kísérleti pszichológiában már régóta ismerték [1, 2], matematikai igazolása azonban csak jóval később született meg [3].

A rangmódszerek családjába tartozik. Az alternatívák közvetlen rangsorolásához képest többlet-információt szolgáltat a döntéshozók következetességének és egyetértésének meghatározásával.

Alkalmazása a különböző értékrendek vizsgálatánál külföldön elterjedt és hazánkban is terjed. Alkalmazható önállóan is. Ilyen alkalmazás pl. a munkahelyhez való kötődést befolyásoló tényezők (anyagi juttatások, a munka jeljellege, a vezetés színvonala stb.) fontosságának meghatározása. Vagy alkalmazható más módszerekkel együtt. Ilyen alkalmazás pl. a feltárt funkciók fontosságának megállapítása értékelemzésnél, vagy a műszaki-gazdasági kritériumok fontosságának meghatározása termékszerkezet-vizsgálatnál.

A módszer nem engedi meg a döntéshozóknak az egyes alternatívák azonos preferálását, vagyis az indifferens megítélést. Thurstone [2] ugyanis pszichológiai kísérletek alapján kimutatta, hogy két dolog között preferálás szempontjából az emberek döntő többsége (?) képes különbséget tenni. Ezért a módszer alkalmazói kizárják az indifferenciát — részben mint gyakorlatilag elhanyagolható lehetőséget, részben pedig létező elmélet hiányában [6]. Kétségtelen, hogy *Thurstone* ún. modális diszkriminációs törvénye (kétféle választás lehetősége) bizonyos esetekben kézenfekvő, különösen akkor, ha az alternatívák megítélését külső ingerek is befolyásolják, amelyek pillanatról-pillanatra változhatnak, megkönnyítve ezzel a választás problémáját.

A döntések többségének azonban időben tartós és reális értékrendeken kell alapulnia. Másrészt az emberek értékítélete nagymértékben szubjektív, diszkriminációs képessége különböző, ezért az indifferencia meg nem engedése a következetlenség újabb forrása lehet, torzíthatja a reális értékrendeket, ezek aggregálásával az öröklött hiba megnövekedhet.

Ezen megállapításokat támasztja alá H. A. David [4], aki a döntetlenek kezeléséről a következőket írja: „Kiküszöbölhetjük ezt a problémát brutális erővel, vagyis úgy, hogy utasítjuk a döntéshozót, hogy ha másképpen dönteni nem tud, akkor szellemi érme feldobásával döntsön, vagy megengedjük neki, hogy visszatartsa a döntést, és pénzfeldobással döntsön helyette. E két módszer előnye az, hogy az eredményül kapott adatokat már létező módszerekkel analizálhatjuk".

Az indifferencia létjogosultságát ugyancsak bizonyítja a szakirodalomból ismert gyenge sorrend fogalma és használata [5, 7, 9, 10], és a többfokozatú preferenciaskáláé [6] — amelynek szimmetriapontja éppen az azonos preferálást reprezentálja.

Tényként megállapíthatjuk: a háromféle választás („igen", „nem", „is") bizonyos döntési helyzetekben általánosabb kezelésmódot biztosít, igaz hogy lényegesen bonyolultabb módszertani háttér segítségével.

Munkánkban az indifferencia-reláció megengedésével elemezzük a páros összehasonlítás módszerét. Elsősorban azt vizsgáljuk: hogyan módosulnak a módszer által szolgáltatott információk (következetességi mutató, egyénenkénti és aggregált értékrend, egyetértési együttható), melyeknek nyomonkövetése matematikai, gyakorlati alkalmazása pedig számítástechnikai problémákat vetett fel.

Cikkünkben a módszer egy konkrét alkalmazásával a fenti értékek számszerű alakulásáról is beszámolunk.

## 2. A tranzitivitás értelmezése

Tételezzük fel, hogy rendelkezésünkre áll alternatíváknak egy $A = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ halmaza. Elemeit egy közös $T$ tulajdonságuk alapján hasonlítjuk össze. Az $A_i$ alternatívát preferálhatjuk $A_j$-vel szemben, jele: $A_iPA_j$; indifferensek lehetünk kettőjükkel, jele: $A_iIA_j$; vagy $A_j$-t preferáljuk $A_i$-vel szemben.

Ha valamennyi $(A_i, A_j)$ $1 \leq i < j \leq n$ alternatíva-párt összehasonlítottuk, megjelölve a fenti három reláció valamelyikét, akkor összesen $\binom{n}{2}$ elemi döntést hoztunk.

Az $n \times n$-es $D$ *döntési mátrix*ot (páros összehasonlító táblázatot) a következőképpen értelmezzük:

$$(1) \qquad d_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } A_iPA_j \\ 0, & \text{ha } A_iIA_j \\ -1, & \text{ha } A_jPA_i \end{cases}$$

Nyilván $D^T = -D$, tehát $D$ ferdén szimmetrikus ($d_{ii} = 0$). Tegyük az alábbi hozzárendelést, és készítsünk el ez alapján egy tranzitivitási táblázatot:

$$1 \leq i < j < m \leq n\colon\ (A_i, A_j, A_m) \to (d_{ij}, d_{jm}, d_{im})$$

Ezekután a tranzitivitást a túloldali (2) táblázat szerint definiáljuk.

(3.1) Az $(A_i, A_j, A_m)$ alternatíva-hármas megítélése tranzitív, ha a hozzárendelt $(d_{ij}, d_{jm}, d_{im})$ hármas (2)-ben tranzitív.

(3.2) A $D$ döntési mátrix tranzitív, ha valamennyi alternatíva-hármasa tranzitív.

A tranzitivitás ezen definiálása természetesen ekvivalens a szakirodalmi értelmezéssel [5, 9], ami a valós számok körében értelmezett „$\geq$" relációval analóg.

(2)

| $d_{ij}, d_{jm}, d_{im}$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| tranzitív | | | intranzitív | | |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | −1 |
| 0 | −1 | −1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | −1 | 0 |
| −1 | 0 | −1 | 0 | 1 | −1 |
| 1 | −1 | 0 | 0 | −1 | 1 |
| −1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | −1 | 1 | −1 | 0 | 0 |
| −1 | 1 | −1 | 1 | 0 | −1 |
| 1 | −1 | −1 | −1 | 0 | 1 |
| −1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | −1 | −1 | 0 |
| −1 | −1 | −1 | 1 | 1 | −1 |
| | | | −1 | −1 | 1 |

## 3. A következetességi mutató értelmezése és meghatározása

Tudjuk, hogy a hagyományos, kétféle választás esetében egy $D$ döntési mátrixszal ($d_{ij} \neq 0$, ha $i \neq j$) rendelkező értékelő személy következetességi mutatója [3, 6]:

$$k(D) = 1 - \frac{q(D)}{q_{\max}(n)}; \tag{4}$$

ahol

$$q_{\max}(n) = \begin{cases} \dfrac{n^3 - n}{24}, & \text{ha } n \text{ páratlan} \\[2ex] \dfrac{n^3 - 4n}{24}, & \text{ha } n \text{ páros} \end{cases} \tag{5}$$

$q(D)$ — a $D$ intrazitív hármasainak száma
$q_{\max}(n)$ — adott $n$ esetén az intrazitív hármasok maximális száma.

(A $k(D)$, $q(D)$ jelölés arra utal, hogy $D$ elemei a főátlót kivéve nem lehetnek nullák.)

A [4] értelmezés analógiájára a *következetességi mutatót* a háromféle választás esetén az alábbi módon definiálhatjuk:

$$K(D) = 1 - \frac{Q(D)}{Q_{\max}(n)} \tag{6}$$

Nyilván $k(D)$, és $K(D)$ értékkészlete egyaránt a $[0, 1]$ intervallum.

A fenti $K(D)$ mutató kiszámítása tehát két dolog meghatározását igényli:
— egy adott $D$ intrazitív hármasainak számát: $Q(D)$,
— a $D$-től függetlenül, kizárólag az alternatívák számától ($n$) függő, maximálisan véthető intranzitív hármasok számát: $Q_{\max}(n)$.

Szükségünk lesz néhány további jelölésre és megállapításra. Egy $D$ döntési mátrix $i$-edik sorában előforduló $+1$, $0$, $-1$ elemek számát jelölje rendre $s_i^+(D)$, $s_i^0(D)$, $s_i^-(D)$; ahol az $s_i^0(D)$ mennyiségek a $d_{ii}=0$ elemet nem tartalmazzák. Nyilván igaz, hogy:

$$(7.1)\qquad \sum_{i=1}^{n} s_i^+(D) = \sum_{i=1}^{n} s_i^-(D)$$

$$(7.2)\qquad \sum_{i=1}^{n} s_i^0(D) = n^2 - n - \sum_{i=1}^{n} (s_i^+(D) + s_i^-(D))$$

$$(7.3)\qquad s_i^0(D) = n - 1 - (s_i^+(D) + s_i^-(D)) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Egy $D$ döntési mátrix $(d_{ij}, d_{jm}, d_{im}; 1 \le i < j < m \le n)$ hármasainak alábbi egyszerű tulajdonságai a (2) tranzitivitási táblázat alapján közvetlenül beláthatók:

(8.1) A pontosan három nulla elemet tartalmazó hármasok tranzitívak. Ezek számosságát $D$-ben jelölje $N(D, 3)$.

(8.2) A pontosan kettő nulla elemet tartalmazó hármasok intranzitívak.

(8.3) Ha $d_{ij} = d_{im} = 1$, vagy $d_{ji} = d_{jm} = 1$, vagy $d_{mi} = d_{mj} = 1$, akkor a hármas tranzitív.

### 3.1. *Q(D) kiszámítása*

A kétféle választás esetében egy $n \times n$-es $D$ döntési mátrix intranzitív hármasainak, $q(D)$-nek a kiszámítása egyszerű módon adódik:

$$(9)\qquad q(D) = \frac{1}{12} n(n-1)(2n-1) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (s_i^+(D))^2$$

Mielőtt $Q(D)$ meghatározását tűznénk ki célul, tekintsük a következő példát $n = 4$ esetén:

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Látható, hogy az egyes $s_i^+$, $s_i^0$, $s_i^-$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ mennyiségek a két mátrixban rendre megegyeznek, ugyanakkor az intranzitív hármasok száma különböző $(Q(D_1) = 2, Q(D_2) = 3)$.

Teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy tetszőleges $n(>4)$ esetén sincs olyan $f$ függvény, amelyre

$$Q(D) = f(s_1^+(D), s_1^-(D), \ldots, s_n^+(D), s_n^-(D)).$$

Tegyük fel ui., hogy a $D_1$ és $D_2$ $n \times n$-es mátrixok rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy a hozzájuk tartozó $s_i^+$, $s_i^0$, $s_i^-$ mennyiségek minden $i$-re megegyeznek, és mégis $Q(D_1) \neq Q(D_2)$.

$D_1$ és $D_2$ segítségével megadunk olyan $D_1'$, ill. $D_2'$, most már $(n+1)\times(n+1)$-es mátrixokat, amelyek hasonló tulajdonságúak, mint az indukciós feltevésben szereplő $D_1$, ill. $D_2$ mátrixok.

$$D_1' = \left[\begin{array}{c|c} & 0 \\ & 0 \\ D_1 & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \\ \hline 0\ 0\ \cdots & 0 \end{array}\right], \qquad D_2' = \left[\begin{array}{c|c} & 0 \\ & 0 \\ D_2 & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \\ \hline 0\ 0\ \cdots & 0 \end{array}\right]$$

*1. ábra*

Ezen szegélyezett mátrixok struktúrájából következik, hogy:

$$\forall 1 \le i \le n\colon\ s_i^+(D_1') = s_i^+(D_2'),\ \ s_i^0(D_1') = s_i^0(D_2'),\ \ s_i^-(D_1') = s_i^-(D_2').$$

Ugyanakkor (8.1.) és (8.2.) figyelembevételével:

$$Q(D_1') = Q(D_1) + \frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{n}(s_i^+(D_1) + s_i^-(D_1))$$

és

$$Q(D_2') = Q(D_2) + \frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{n}(s_i^+(D_2) + s_i^-(D_2)).$$

Az indukciós feltételből következik, hogy $Q(D_1') \neq Q(D_2)$. Tehát $Q(D_2')$ kiszámításához nem tudunk megadni (9)-hez hasonló összefüggést.

Ezért $Q(D)$ értékét minden egyes esetben úgy határozzuk meg, hogy előállítjuk az összes, $\binom{n}{3}$ számú $(d_{ij}, d_{jm}, d_{im};\ 1 \le i < j < m \le n)$ hármast, és a (2) táblázat alapján döntjük el tranzitív ill. intranzitív voltukat.

### 3.2. $Q_{max}(n)$ *meghatározása*

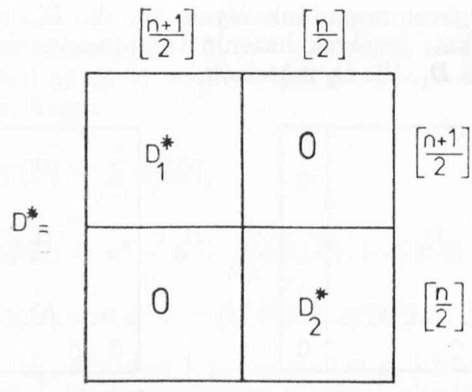
Tetszőleges, de rögzített $n$ esetén induljunk ki az alábbi konstrukcióból: ahol $D_1^*$ ill. $D_2^*$ olyan, hogy a főátlón kívül nem tartalmaz 0 elemet, továbbá:

$$q(D_1^*) = q_{\max}\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]\right) \quad \text{és} \quad q(D_2^*) = q_{\max}\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right),$$

$\left[\frac{n}{2}\right]$ — az $\frac{n}{2}$ egész része.

A $D^*$ mátrix struktúrájából (8.3.) segítségével következik:

$$(10)\quad Q(D^*) = \binom{n}{3} - \binom{\left[\frac{n+1}{2}\right]}{3} - \binom{\left[\frac{n}{2}\right]}{3} + q_{\max}\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]\right) + q_{\max}\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right)$$




*2. ábra*

Másképpen:

$$Q(D^*) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}k(13k^2 - 6k - 1), & \text{ha } n = 4k \\ \dfrac{1}{6}k(52k^2 + 15k - 7), & \text{ha } n = 4k + 1 \\ \dfrac{1}{3}k(26k^2 + 27k + 7), & \text{ha } n = 4k + 2 \\ \dfrac{1}{6}k(52k^2 + 93k + 47) + 1, & \text{ha } n = 4k + 3 \end{cases}$$

$(k = 1,2, \ldots)$

Bizonyítani fogjuk, hogy $Q_{\max}(n) = Q(D^*)$.

Ehhez a következő segédtételekre lesz szükségünk:

1. *segédtétel*: Ha D-ben $\dfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} s_i^0(D) \leq \left[\dfrac{n^2}{4}\right]$, akkor $Q(D) \leq Q(D^*)$.

*Bizonyítás*: A feltételből és a (7.1), (7.2) megállapításokból következik, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} s_i^+(D) \geq \binom{n}{2} - \left[\frac{n^2}{4}\right].$$

(8.2) alapján teljesül a $Q(D) \leq \dbinom{n}{3} - \sum_{i=1}^{n} \dbinom{s_i^+(D)}{2}$ egyenlőtlenség. Ennek figyelembevételével $Q(D)$ maximális értékét csak akkor veheti fel, ha

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} s_i^0(D) = \left[\frac{n^2}{4}\right] \text{ és } \forall_i \leq n\colon \ |s_i^+(D) - s_i^-(D)| \leq 1\,.$$

Az $n = 4k + m$ $(m = 0, 1, 2, 3)$ felbontásokat elvégezve, majd ennek alapján a $\sum_{i=1}^{n} \binom{s_i^+(D)}{2}$ minimumok kiszámításával pontosan $Q(D^*)$ megfelelő értékeit kapjuk.

2. *segédtétel*: Ha $D$-ben $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} s_i^0(D) = \left[\frac{n^2}{4}\right] + L$

$$\left(L = 1, 2, \ldots, \binom{n}{2} - \left[\frac{n^2}{4}\right]\right), \text{ akkor}$$

a) $N(D, 3) \geq L \left[\frac{n}{4}\right]$ és

b)
$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \binom{s_i^+(D)}{2} &\geq 2k(k-1)^2 - Lk, && \text{ha } n = 4k \\
&\geq \frac{k(k-1)(4k-1)}{2} - Lk, && \text{ha } n = 4k+1 \\
&\geq k(k-1)(2k+1) - Lk, && \text{ha } n = 4k+2 \\
&\geq \frac{k(4k^2+k-1)}{2} - Lk, && \text{ha } n = 4k+3\,.
\end{aligned}$$

A 2. segédtételt terjedelmi korlátok miatt nem bizonyítjuk.

*A 2. segédtétel következménye*: Ha $D$-ben $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} s_i^0(D) = \left[\frac{n^2}{4}\right] + L$

$$\left(L = 1, 2, \ldots, \binom{n}{2} - \left[\frac{n^2}{4}\right]\right), \text{ akkor } Q(D) < Q(D^*).$$

*Bizonyítás*: A 2. segédtétel a) és b) állításaiból, valamint a (8.1) és (8.3) tulajdonságokból következik, hogy:

$$Q(D) \leq \binom{n}{3} - L\left[\frac{n}{3}\right] - \sum_{i=1}^{n} \binom{s_i^+(D)}{2}$$

Az $n = 4k + m$ $(m = 0, 1, 2, 3)$ felbontásokat elvégezve kapjuk a következmény-tétel állítását.

Az 1. segédtétel, valamint a 2. segédtétel következménye alapján kimondhatjuk tehát:

*Tétel*: $Q_{\max}(n) = Q(D^*)$.

A hagyományos kétféle, és a most levezetett háromféle választásban szereplő $q_{max}(n)$, ill. $Q_{max}(n)$ értékek összehasonlítására az alábbi táblázatot közöljük:

| $n$ | $\binom{n}{3}$ | $q_{max}(n)$ | $Q_{max}(n)$ |
|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 4 | 2 | 4 |
| 5 | 10 | 5 | 10 |
| 6 | 20 | 8 | 20 |
| 7 | 35 | 14 | 33 |
| 8 | 56 | 20 | 52 |
| 9 | 84 | 30 | 77 |
| 10 | 120 | 40 | 110 |
| 11 | 165 | 55 | 148 |
| 12 | 220 | 70 | 196 |

*Megjegyzés*: Egy tetszőleges $n \times n$-es $D$ döntési mátrixhoz hozzárendelhető — izomorf módon — egy $n$ szögpontú teljes vegyes gráf ($nTVG$), amely irányított és irányítatlan élek halmaza, és bármely két szögpontját ($A_i$, $A_j$) él köti össze. Értelmezve van rajta továbbá egy tranzitivitási reláció. Ily módon $Q_{max}(n)$ meghatározása ekvivalens egy $nTVG$ intranzitív hármasainak maximalizálásával.

## 4. Egyéni és aggregált értékrend; egyetértési együttható

Az egyéni értékrend egy olyan súlyvektor, amelynek komponensei azt fejezik ki, hogy az egyes alternatívák a $T$ tulajdonsággal mennyire rendelkeznek. (A $T$ tulajdonság sok esetben fontosságot jelöl.)

Tekintettel arra, hogy a döntéshozók a páros összehasonlítás módszerével sorrendi skálán fejezik ki preferenciáikat, ezért az egyes alternatívákhoz a preferencia-gyakoriságukat szokás hozzárendelni [3, 6].

Az $I$ reláció esetében egy indifferenciapár mindkét tagjának $1/2$–$1/2$ preferenciát tulajdonítunk, így érvényben marad az a szabály, hogy a döntéshozók mindegyike $\binom{n}{2}$ preferenciaösszeggel rendelkezzék. Természetesen előfordulhat, hogy így az egyes alternatívák súlyszáma nem feltétlenül egész szám.

Tételezzük most fel döntéshozóknak egy $k$ tagból álló csoportját. A kollektíva véleményét kifejező aggregált értékrend képzésének egyik lehetséges módja az egyéni értékrendek átlagolása, az alternatívákhoz átlagos preferencia-gyakoriságok hozzárendelése. Itt is elvégezhető a súlyértékek intervallumskálára való transzformálása a *Guilford*-féle eljárás alapján [6].

A döntéshozó kolletíva véleményegyezésének mérésére a *Kendall*-féle $u$ egyetértési együttható logikáját követjük, hiszen a páros összehasonlítás módszerénél nem kötjük ki a teljes következetességet (az $u$ mutató nem tévesztendő össze a Kendall-féle $W$ rangkonkordancia együtthatóval).

Az *aggregált preferenciák* $n \times n$-es $P$ mátrixából indulunk ki, melynek elemei:

$$p_{ij} = |\{h: A_i P_h A_j;\ h = 1, 2, \ldots, k\}| \tag{11}$$

azt mutatják, hogy $p_{ij}$ egyén szavaz $A_i$-re, $p_{ji}$ egyén $A_j$-re és $k-(p_{ij}+p_{ji})$ egyén jelöl meg indifferens kapcsolatot $A_i$ és $A_j$ között.

Az egyetértési együtthatót a háromféle választás esetében a következőképpen definiáljuk:

$$u=\frac{2\Sigma'}{\binom{k}{2}\binom{n}{2}}-1;\quad \text{ahol} \tag{12}$$

$$\Sigma'=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\left[\binom{p_{ij}}{2}+\binom{p_{ji}}{2}+\binom{k-(p_{ij}+p_{ji})}{2}\right]. \tag{13}$$

Egyszerű megfontolásokból következik, hogy:

$$\max(u)=1$$

$$\min(u)=\begin{cases}-\dfrac{1}{3}-\dfrac{3}{4k}, & \text{ha } k=3m\pm 1\\[2ex] -\dfrac{1}{3}-\dfrac{4}{3(k-1)}, & \text{ha } k=3m.\end{cases}\qquad (m=1,2,\ldots)$$

## 5. A módszer egy gyakorlati alkalmazása

Intézetünk, a NIM Továbbképző Központ egy vállalat felkérésére széleskörű vizsgálatot folytatott a célból, hogy a kutatás és fejlesztés új rendszerének kialakításához a szükséges tényezőket feltárja és súlyozza.

Az elemzésben többek között a páros összehasonlítás módszerét is alkalmaztuk indifferencia-reláció megengedésével. Az értékelésben a vállalat harminc szakembere vett részt.

*A vizsgálatba bevont értékelési tényezők*:

$E_1$ — A $K+F$ rugalmasságát ösztönző érdekeltségi rendszerek kialakítása
$E_2$ — Határozott fejlesztési politika kialakítása
$E_3$ — Vezetők, menedzserek, szakemberek kiválasztása az új szervezethez
$E_4$ — Hatékony, többirányú információs rendszer kialakítása
$E_5$ — Műszaki és komplex fórum létrehozása
$E_6$ — Központi kiszolgáló fejlesztési szervezetek kialakítása
$E_6$ — Menedzser típusú fejlesztési vezérigazgatóhelyettes kiválasztása
$E_8$ — A marketing munka erősítése
$E_9$ — A fejlesztés integrált szervezetének meghatározása
$E_{10}$ — A szervezeti egységek átalakítása
$E_{11}$ — Rugalmas fejlesztési stratégiák kialakítása
$E_{12}$ — A VHFT működésének kibővítése

*A számítógépes feldolgozás eredménylistája*:

Értékelési tényezők száma: $n=12$
Értékelő személyek száma: $k=30$

Tényezőpárok száma: $\binom{n}{2} = 66$

Maximálisan véthető intranzitív hármasok száma: $Q_{\max}(12) = 196$

*A kapott eredmények a teljes csoportra*:

Következetességi mutatók átlaga: $\bar{K} = 0{,}924$

Szórása: $\sigma = 0{,}065$

Egyetértési együttható: $u = -0{,}025$

Figyelembe véve, hogy ebben az esetben $u \in [-0{,}37, 1]$, így az egyetértés $\sim$2,15%-os.

Az indifferens párok előfordulási aránya: $\bar{I}_p = 8{,}3\%$

| Értékelési tényezők | $E_1$ | $E_2$ | $E_3$ | $E_4$ | $E_5$ | $E_6$ | $E_7$ | $E_8$ | $E_9$ | $E_{10}$ | $E_{11}$ | $E_{12}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Indifferencia gyak. átlag | 0,6 | 1,0 | 1,0 | 1,0 | 1,5 | 0,5 | 0,1 | 0,8 | 1,0 | 1,1 | 0,8 | 1,4 |
| Preferencia gyak. átlag | 6,4 | 6,2 | 7,8 | 5,1 | 5,5 | 3,0 | 3,4 | 4,9 | 6,9 | 6,3 | 4,8 | 5,7 |

*Az aggrepált prefenciák táblázata*

| | $E_1$ | $E_2$ | $E_3$ | $E_4$ | $E_5$ | $E_6$ | $E_7$ | $E_8$ | $E_9$ | $E_{10}$ | $E_{11}$ | $E_{12}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $E_1$ | 0 | 12 | 10 | 19 | 18 | 22 | 25 | 16 | 10 | 14 | 20 | 16 |
| $E_2$ | 16 | 0 | 10 | 14 | 16 | 19 | 17 | 19 | 15 | 18 | 13 | 15 |
| $E_3$ | 17 | 18 | 0 | 22 | 19 | 26 | 25 | 22 | 14 | 16 | 22 | 19 |
| $E_4$ | 8 | 11 | 5 | 0 | 14 | 22 | 22 | 8 | 6 | 9 | 17 | 14 |
| $E_5$ | 8 | 13 | 9 | 13 | 0 | 19 | 20 | 12 | 11 | 11 | 21 | 6 |
| $E_6$ | 7 | 8 | 4 | 7 | 8 | 0 | 11 | 8 | 5 | 6 | 10 | 8 |
| $E_7$ | 5 | 12 | 5 | 8 | 10 | 18 | 0 | 9 | 7 | 8 | 10 | 8 |
| $E_8$ | 13 | 11 | 4 | 16 | 12 | 21 | 21 | 0 | 4 | 6 | 16 | 11 |
| $E_9$ | 18 | 12 | 9 | 22 | 17 | 24 | 23 | 25 | 0 | 13 | 16 | 14 |
| $E_{10}$ | 15 | 12 | 10 | 16 | 16 | 21 | 21 | 23 | 10 | 0 | 15 | 15 |
| $E_{11}$ | 9 | 7 | 7 | 11 | 8 | 18 | 20 | 13 | 11 | 15 | 0 | 13 |
| $E_{12}$ | 13 | 12 | 8 | 15 | 6 | 22 | 22 | 15 | 14 | 7 | 14 | 0 |

*A kapott eredmények egy kiválasztott döntéshozó esetén*:

Azonosító: 15

Következetességi mutató: $K = 0{,}97$

Intranzitív hármasok száma: $Q = 5$

Indifferens párok száma: $I_p = 6$

| Értékelési tényezők | $E_1$ | $E_2$ | $E_3$ | $E_4$ | $E_5$ | $E_6$ | $E_7$ | $E_8$ | $E_9$ | $E_{10}$ | $E_{11}$ | $E_{12}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Preferencia gyakorisága | 9,5 | 4,0 | 9,5 | 7,5 | 0,5 | 4,0 | 6,0 | 6,5 | 11,0 | 3,0 | 4,0 | 0,4 |
| Indifferencia gyakorisága | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 | 1 |

*(Beérkezett: 1981. április 28-án)*

## IRODALOM

[1] THORNDIKE, E. L.: A Constant Error in Psychological Ratings. J. Appl. Psychol., 1920.
[2] THURSTONE, L. L.: Method of Paried Comparisons for Social Values. J. Abn. Soc. Psychol., 1927.
[3] KENDALL, M. G.: Rank Correlation Methods. London, Griffin, 1970.
[4] DAVID, H. A.: The Method of Paried Comparisons. London, Griffin, 1976.
[5] ARROW, K. J.: Social Choice and Individual Values. New York, Wiley, 1963. 2. kiadás
[6] KINDLER J.—PAPP O.: Komplex rendszerek vizsgálata. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1977.
[7] KISS R.—TÖRÖK T.: Modell és eljárás komplex rendszerek vizsgálatára műszaki-gazdasági kritériumok alapján. Szigma, 1979.
[8] KISS R.—TÖRÖK T.: Adalék a társadalmi választás problémájához X. Magyar Operációkutatási Konferencia Előadás, 1980.
[9] TÖRÖK T.: Társadalmi választás az egyszerű többségi elv általánosítása alapján Szigma, 1981, 143–151 old.
[10] MOON, J. W.—MOSER, L.: On a Problem of Turan, Mat. Kut. Int. Közl. 1962. 7. sz.

## A GENERALIZATION OF THE METHOD OF PAIRWISE COMPARISON

In our paper the method of pairwise comparison was examined allowing for indifference relation. The generalization of transitivity, consistency indicator and of the agreement coefficient means that it contains the traditional case of binary choice.

A computer programme was elaborated suitable for processing sheets of pairwise comparison (at individual and group levels) even in case of indifference.

## НЕКОТОРОЕ ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА ПАРНОГО СРАВНЕНИЯ

В данной работе метод парного сравнения рассматривался при допускании индиференциального отношения. Обобщение коэффициента согласованности, транзитивитивности показателя последовательности таково, что включаются также и традиционные случаи возможности двоякого выбора.

Авторами была разработана программа для вычислительной машины, которая пригодна для переработки парных сравнивающих листов (в индивидуальном или же групповом порядке )даже и в случае аналогичной преферированности.

# IDEGEN TOLLAK

R. E. KALMAN

# Identifikálhatóság és a modellválasztás problémái az ökonometriában*

## 1. Háttér és perspektívák

Az ökonometria az 1920-as években egy nagyszerű álom megvalósulásaként született. Ma, több mint fél évszázad tudásával az álmot pontos, részletes, tudományos elemzés váltja fel.

„A közgazdaságtudomány egymással összefüggő átfogó jelenségekkel foglalkozik. Lehetetlen fontos változók (mondjuk az adózás és a megtakarítások) között a mennyiségi összefüggéseket anélkül tanulmányozni, hogy ne hivatkoznánk a változók és az összefüggések környezetére. Ugyancsak lehetetlen olyan kísérleteket, vagy közvetlen megfigyeléseket végezni, amelyek az összefüggéseket kiragadják környezetükből vagy csökkentik a zajszintet, amely mellett hatásuk megfigyelhetővé válik. Számtalan idősorral rendelkezünk, amelyeket éppen azok a közgazdasági „erők" hoztak létre, amiket le akarunk leplezni. Idősorokon alapuló modellek felállításától azt remélhetjük, hogy közvetlen módon hozzájuthatunk a kívánt közgazdasági mennyiségi összefüggésekhez, mivel ezek vannak „elrejtve" a modellekben és ezért a modellek szerkezetéből és paramétereiből megismerhetőknek kell lenniük. A közgazdasági igazságok megváltoztathatatlanok legalábbis rövid távon, és éppen ezért nincs elvi oka annak, hogy miért ne lehetne pontos modelleket felállítani a hozzáférhető adatokból, a gazdasági idősort zavaró tényezők, hibák, ésszerűtlenségek, várakozások és egyéb véletlen hatások ellenére."

Ebből a gondolatmenetből az következik, hogy a közgazdaságtudománynak a *rendszerelméleti* megközelítést kell választania. A közgazdaságtannak olyan módszerekre van szüksége, amelyek hatékonyak az egymással kölcsönhatásban levő jelenségek felkutatásában, magyarázatában. Ily módon az ökonometria álma ma mint rendszerelméleti technikai probléma jelenik meg.

Sajnálatos módon azonban az ökonometria tényleges fejlődése meglehetősen más utat járt be. A rendszerelmélet az 1920-as és 30-as években még a láthatáron sem volt, s az ökonometria korán a statisztikusok uralma alá került. HAAVELMO [9] reménye, miszerint az ökonometriát a valószínűségelmélet következetes alkalmazásával kellene megalapozni, azért nem valósult meg (a szerző véleménye szerint), mivel a valószínűségelmélet nem tud semmit sem mondani a rendszerelméleti problémákról.

* Az Ökonometriai Társaság IV. Világkonferenciáján (Aix-en-Provence, 1980 augusztus) elhangzott előadás alapján. A cikk egyidejüleg angolul is megjelenik a P. R. KRISHNAIAH (szerk.) *Developments in Statistics*, Vol. 4. Academic Press, New York, 1982 kötetben.

Fordította *Halpern László*.

1980-ra a rendszerelmélet eljutott az érettség bizonyos fokára. Képes arra, hogy új tudományos kereteket biztosítson, amelyek között a közgazdaságtan és az ökonometria alapvető gondolatai felülvizsgálhatók és további objektív elemzés, kritika válik lehetővé.

Számos régebbi publikációmban [21], [22], [24], [25] rámutattam arra, hogy a közgazdasági kutatás nem lehet értelmes, ha a modell koncepcionálisan megalapozatlan és matematikailag pongyola. A közgazdasági modellezés eljárásait nem lehet és nem szabad kizárólag közgazdasági gondolkodás alapján igazolni.[1] A modellezésnek megvan a saját logikája függetlenül attól, hogy mit modellez. Túl ezen, a modellező logika által felállított korlátok messze fontosabbak az olyan földhözragadt kérdéseknél, mint az adatok megbízhatósága, az érvényben levő közgazdasági elmélet felhasználása, a statisztikai módszertan és az ehhez hasonlóak. Egy modellnek a valóságos adatokat kell megmagyaráznia, nem szabad a modellező előítéleteinek kezdetleges kifejezőjévé válnia.

Az előbb hivatkozott cikkeim a modellezés általános, sőt filozófiai vonatzásaival foglalkoznak. E cikknek szűkebb a célja: újravizsgálni az identifikálhatóság fogalmát.

Az, amit az ökonometriában identifikálni kell, az általában valamilyen fajta rendszer. A statisztika Fisher-féle paradigmájának hatása alatt az ökonométerek hosszú ideig kétkedés nélkül éltek azzal a feltevéssel, miszerint egy rendszer nem más mint egy csokor paraméter. Éppen ezért úgy gondolják, hogy a rendszer identifikálása azonos a paraméterek becslésével. A rendszerelmélet-kutató ezzel nem ért egyet.

A matematikai gondolkodás úgy kívánja meg, hogy egy rendszert elsősorban absztrakt objektumnak tekintsük. Természetes értelmezés szerint a ,,paraméterek'' (minden előzetes korlátozás nélküli számhalmaz) általában nem adják meg egy matematikai objektum helyes leírását; az esetek többségében a parametrizációnak olyan problémái merülnek fel, amelyek a rendszer elemzésének későbbi szakaszában jelennek meg.

A ,,parametrizációt'' a ,,koordináta-rendszerbe helyezés'' fogalmával szinonim módon használjuk. Ez azt jelenti, hogy az absztrakt objektumok halmazának minden egyes tagját egyértelműen leírja egy számhalmaz explicite megadott korlátozásokkal. Ugyanakkor amíg a paraméterek meghatározása absztrakt matematikai eljárások eredménye, addig az eredményül kapott ,,paraméterek'' ritkán rendelkeznek közvetlen intuitív jelentőséggel, matematikai tulajdonságaik határozzák meg őket és általában nem egyértelműek. Soha nem ,,egy paramétert'' identifikálunk; az identifikáció során számszerű értékeket rendelünk valamely specifikált parametrizáció összes paramétereinek halmazához.

A tudományos irodalomban a ,,paraméter'' szó számos különféle és homályos használata a fogalmi zűrzavar jele. A vétkek kisebbítése érdekében e cikkben bevezetjük a *leíró* és a *lényeges* paraméterek közötti éles megkülönböztetést. Az előbbi körülbelül az ökonometriában (és más alkalmazási területen) általában használt paraméter fogalma; az utóbbi a fent említett matematikai objektum paramétereinek meghatározására utal.

[1] Közgazdászok rengeteg energiát pazaroltak a *Forrester—Meadows* világmodell leleplezésére, az elavult adatokra, a valósághoz és a közgazdasági elmé ethez nem illeszkedő voltára stb. hivatkozva. Voltaképpen a modell a saját súlya alatt, belső logikája miatt omlik össze, amelynek semmi köze a közgazdaságtanhoz. Lásd [24], 7. 1. fejezetét.

A leíró paraméterek nem egyebek, mint eszközök arra, hogy számszerűsítsük a matematikai objektumot. A leíró paraméterek nem utalnak az objektumok belső tulajdonságaira. Végül is a rendszer identifikációjának problémáját a lényeges paraméterek valamely halmazának segítségével kell kifejezni. A megvalósításhoz szükséges fogalmi építmény már létezik a rendszerelméletben, ezt a 3. fejezet ismerteti.

Az identifikáció úgy tekintendő, mint a realizálási elmélet problémája. A realizálási elmélet által nyújtott eszközöket használva a magatartási adatok lefordíthatók a „modell", azaz a megadott adatokkal összeegyeztethető rendszerek halmazának nyelvére. Amikor a modellnek, mint egy absztrakt objektumnak paramétereit meghatározták, akkor egyértelmű megfeleltetés létesül a magatartási paraméterek és a modell paraméterei között. Elvileg ez oldja meg az identifikáció problémáját.

Ha a realizációs probléma megoldása nem egyértelmű, akkor a „modell" nem-ekvivalens rendszerek halmazából fog állni. Ekkor a modellhez tartozó minden rendszert a (lényeges) paraméterek két halmaza írja le. Az egyik — a magatartási paramétereket tartalmazó — meghatározza, hogy a rendszer melyik modell része. A másik paraméterhalmaz az adott rendszer pozícióját írja le, abban a családban, ami maga a modell.

A klasszikus statisztika figyelme olyan kérdésekre irányul, mint a hipotetikusan előállított eloszlás átlagának és szórásának „becslése". Az ökonometria jelentős részében a „paraméter identifikáció" feladatára ezt az álláspontot kritikátlanul fogadták el. Ez súlyos hibát jelenthet, mivel a statisztikai paramétereket rendszerint leíró értelemben kezelik, holott a rendszer paramétereket „lényeges" értelemben kell kezelni. Ezért a „paraméter identifikáció" álláspontját fokozatosan fel kell váltania a „rendszer identifikációnak" és az ezt követő „rendszer parametrizációjának".

A klasszikus statisztikai paradigma az ökonometriában túlzott hangsúlyt helyez a statisztikára és elsiklik a rendszer problémák fölött. Véleményünk szerint a helyzetet az ellenkezőjévé kell változtatni. Jobb túlzott hangsúlyt fektetni a rendszerelméleti vonatkozásokra, mivel más módon nem bizonyosodhatunk meg róla, hogy egy valóságos objektumot identifikáltunk, nem pedig valamilyen mesterséges képződményt, amit szubjektív módszertanunk hozott létre.

A gyakorlati ökonométer számára szőrszálhasogatásnak tűnhet, ha azt mondjuk, hogy egy modell mindig identifikálható, és mégis megengedjük, hogy a modell több nem-ekvivalens rendszert is tartalmazzon, melyek mindegyike egyaránt érvényes reprezentánsa a magatartási adatoknak. Hogyan válasszon hát a különféle olyan rendszerek közül, amelyek mindegyike ugyanannak a modellnek a része? Miért ne mondhatná egyszerűen azt, hogy néhány együttható „nem identifikálható"?

Az egyetlen helyes válasz ezekre a kérdésekre az, hogy az új elméleti megközelítés jobb az előzőeknél, mivel lehetőséget nyújt az identifikáció alapvető problémáiba való mennyiségi (ezáltal mélyebb) betekintésre. Látni fogjuk, hogy ez csak azért van, mert a múltban nem kutatták olyan gondosan az „identifikálhatóságot", mint ahogy kellett volna.

A realizálási elmélet, az identifikáció és a paraméterek meghatározása a 2. és 3. fejezet tárgya. Ezt szemléltetik a 4., 5., 6. fejezetek az általánosság különböző szintjén, az ökonometriából vett példákkal. A 7. fejezet a rendszerelmélet néhány mélyebb alkalmazásával ismerteti meg az olvasót.

E cikk értelme nem abban van — és ezt fontos hangsúlyozni —, hogy új módszert javasoljon az ökonometria számára. Inkább abban, hogy felhívja a figyelmet azokra a kényes és súlyos nehézségekre, amelyek az ökonometria számos klasszikus megközelítésének velejárói.

A rendszerelmélet a megfelelő elméleti keret. Ez az, ami új hatékony eszközöket bocsát rendelkezésre. Ezeket kell alkalmazni. És ekkor *lesznek* új eredmények és lesz előrehaladás.

*Köszönetnyilvánítás*: Sok barátom és kollégám járult hozzá az itt közölt eredmények tisztázásához, mind az eredeti, mind az átdolgozott változatok megírása során. Külön köszönetet szeretnék mondani *M. Deistler*nek, a bécsi Technische Universität professzorának, *M. Intrilligator*nak, University of California Los Angeles professzorának, *H. Wald*nak, az uppsalai és a genfi egyetem professzorának, *Dr. P. Tinsley*nek és *Dr. P. A. V. B. Swamy*nak, a washingtoni Federal Reserve Board munkatársainak, valamint *Dr. A. Marawall*nak, a Bank of Spain munkatársának. A tanulmányt *M. v. N.*-nek dedikálom, akinek a segítsége nélkül valószínűleg soha nem született volna meg.

## 2. Realizáció

Az ökonometria modelleknek idősorokból való identifikációja az első lépéstől, a *modell* definiálásától kezdve a rendszerelméletre támaszkodik. Ez kézenfekvőnek tűnhet, ám valójában döntő jelentőségű.

Habár még nem terjedt el mindenütt, képszerűen ábrázoljuk az identifikációs problémát, mint ami az objektumok három osztályából és két összekötő műveletből áll:

$$(2.1)\qquad \underset{\text{(A)}}{\left\{\begin{array}{l}\text{a determinisztikus}\\ \text{rendszer és szto-}\\ \text{chasztikus kör-}\\ \text{nyezete}\end{array}\right\}} \xrightarrow[\text{magatartás}]{\qquad} \underset{\text{(B)}}{\left\{\begin{array}{c}\text{magatartási}\\ \text{adatok}\end{array}\right\}} \xrightarrow[\text{realizáció}]{\qquad} \underset{\text{(C)}}{\{\text{modell}\}}.$$

Részletesebben a feladat a következő:

A. Specifikálni kell a (determinisztikus) *rendszerek* egy osztályát és az őket körülvevő sztochasztikus környezetet. (Az egyszerűség kedvéért a rendszert mindig determinisztikusnak, a „környezetet" pedig mindig sztochasztikusnak tekintjük. Más lehetőségek természetesen megengedettek.) Az alapkövetelmény az, hogy az ismeretlen valóságos $\sum$ rendszer (amelyet identifikálni akarunk és amelyről azt gondoljuk, hogy az adatokat előállította) az A osztály tagja legyen.

B. Specifikálni kell egy osztályt, amely tartalmazza mindazokat a megfigyeléseket (méréseket), amelyeknek elvégzése az A osztályba tartozó rendszereken és környezeteken megengedett. Az ilyen feltételeket teljesítő megfigyelések összességét *magatartási adatoknak* nevezzük. Ideális értelemben ez egy valószínűségeloszlás specifikálását jelenti, gyakorlatilag általában a minta átlagát és kovarianciáját, amelyeket a megfigyelések mért értékeiből számítanak ki.

A → B azt mutatja, miképp lehet kiszámítani az A osztályba tartozó mindegyik $\Sigma$ rendszer $S_\Sigma$ magatartását. Ebből a felírásból közvetlen feltételek származnak, amelyek lehetővé teszik a B osztályba tartozó bármelyik adat ellenőrzését ($\Sigma$ ismerete nélkül), vajon $S$ valóban valamely A osztálybeli $\Sigma$ által keletkezhetett-e vagy sem. Ezeket a feltételeket *magatartási relációk*nak nevezzük.

C. Az A → B műveletet megfordítva határozzuk meg azon rendszerek és környezetek C osztályát, amelyek a B osztálybeli adott $S$ adatra teljesítik a magatartási relációkat. Magától értetődően a C osztály magába foglalja az A osztályt, de lehet nagyobb is nála, ha a feladat eredeti megfogalmazása nem vette figyelembe az összes lehetséges rendszert, amely a megfigyelt adatokat létrehozza. Eképpen a C osztály az A osztály bizonyos ,,lezárásának'' tekinthető.

B → C azt mutatja meg, miképp kell az $S$ magatartási adatok bármely adott (rögzített) részére kiszámítani (a C osztályba tartozó) vele összeegyeztethető $\Sigma_S$ rendszereket. Adott $S$-re az összes ilyen rendszerek $\Sigma_S$ halmaza $S$-nek a *modellje*. Az A és B közötti nyíl a kérdéses rendszerek *magatartásáról* nyújt a priori információt. A B és C közötti nyíl úgy tekinthető, mint a magatartás inverze (matematikai nyelven: a magatartás adjungált funktora), ezt a fontos műveletet *realizálásnak* nevezi a rendszerelmélet. Nyilvánvaló a ,,magatartás inverziója'' az identifikáció elméletének alapvető problémája.

Bármely identifikációs probléma legfőbb célja a *modell* mennyiségi meghatározása (a fentiekben ismertetett különös értelemben). Vegyük észre, hogy a modell egynél több rendszerből is állhat, az adatokat többféleképpen magyarázhatjuk meg. A modellezésnek ez a többértelműsége az identifikációs probléma elkerülhetetlen tulajdonsága. Ez nem küszöbölendő ki mesterséges feltételezésekkel úgy, ahogy azt a paraméter becslési módszerek esetében teszi néha a statisztika.

Az identifikáció nem fogalmi, hanem matematikai probléma. Csak az objektumok három osztályára és a ,,magatartási'' és ,,realizálási'' műveletekre adott pontos matematikai definíciók után végezhető el. Erre térünk most rá, éspedig a lineáris determinisztikus rendszerek esetére szorítkozva.

Aa. *A rendszer.* A klasszikus idősor-irodalom csak lineáris modellekkel és a valószínűségelmélet idevágó területeivel foglalkozik. Éppen ezért (itt) mi is erre korlátozzuk az elemzést: lineáris rendszerekre és normális eloszlású környezetekre. A *lineáris rendszer* pontos fogalma [28] 1., 2. és 10. fejezetében van axiomatikusan kifejtve. Ez a hivatkozási pont, amire minden további definíciónk és eredményünk támaszkodik.

Egy rendszer definíciója során pontos technikai értelmezést kell adnunk a következő jelzőknek: *lineáris, véges* (-dimenziójú és végesen parametrizálható), *többszörös bemenet/többszörös kimenet, állandó* (= a definiáló tulajdonságaiban időtől független) és *dinamikus*. Ezek a szavak mind szerepelnek az általános definíciók[2] között, amelyek két változatban következnek.

Folytonos idő esetében, azaz olyan időhalmazra, ahol $T = \mathbf{R} =$ valós számok, a (fenti tulajdonságokkal rendelkező) $\Sigma$ rendszer a következőképpen

[2] A 2.$a$—$b$ pontok jelölési módja — amelyet 1960 körül nagyszerű tanárom F. G. H. LINEAR emlékére vezettem be — általánosan elfogadott a rendszerelméletben.

írható le:

$$\text{(2.2a)} \qquad \frac{dx}{dt} = Fx(t) + Gu(t), \; y(t) = Hx(t), \quad t \in \mathbf{R}.$$

Diszkrét időre, ahol $T = \mathbf{Z} =$ egész számok, a rendszer a következőképpen adott:

$$\text{(2.2b)} \qquad x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \; y(t) = Hx(t), \quad t \in \mathbf{Z}.$$

A (2.2a—b) képletekben a valós (vagy komplex) $x$, $u$ és $y$ vektorokat rendre *állapot, bemenet* és *kimenet* névvel illetjük, $F$, $G$, $H$ valós (vagy komplex) számokat tartalmazó mátrixok.

Elég világos a definícióból, hogy a ,,rendszer"-t (amely rövidített írásmódja lesz a (2.2) pontban kifejtett pontos fogalmi együttesnek) valójában az $(F, G, H)$-ban levő ,,paraméterek" (elemek) definiálják. Egyszerűen ezt így fogjuk közölni $\Sigma := (F, G, H)$. A jelölést szándékosan választjuk úgy, hogy ne legyen a folytonos és diszkrét időkezelés között jelölésbeli különbség. A rendszerelméleti kérdések természetüket tekintve tisztán algebraiak, $F$, $G$ és $H$ tulajdonságain alapulnak, ezért ilyen megkülönböztetés nem szükséges, az eredmények egyszerre igazak mind folytonos, mind diszkrét idő esetén.

[A ,,rendszer" gondolata a newtoni mechanikára megy vissza, hozzátéve a rendkívül fontos, modern ,,bemenet" és ,,kimenet" fogalmakat. Nagyon jó gondolati modell, különösen diszkrét időben, a számítógép. Az alapvető definíciók fogalmilag érvényesek teljes általánosságban, kivéve a linearitás feltételezését. Lásd [21] 1. fejezetét. Azonban a linearitás fontossá válik, ha egyetemleges (azaz rendszerelméleti) matematikai eredményeket akarunk, nemcsak definíciókat. A matematika ereje, ahogy ez jelenleg a rendszerelméletben alkalmazásra kerül, majdnem teljesen a ,,lineáris" szóból ered.]

(2.2a—b) egyenleteket néha egy rendszer *belső* definíciójának is tekintik. Ez arra a tényre utal, hogy a definíció a belső vagy *állapot*változókkal, az $x$ vektor komponenseivel van kifejezve.

Ab. *A sztochasztikus környezet.* Emlékeztetőül: egész gondolatmenetünkben a rendszer fogalma mindig determinisztikus. Sztochasztikus hatások csak kívülről érik a rendszert és ezt ennek megfelelően kell modellezni.

Ilyeténképpen le kell írnunk az összes sztochasztikus hatást (bemeneti zavarokat), amelyek a rendszerre hatnak, ugyanúgy, mint a megfigyelés során fellépő zavarokat. Ez történik meg az általános gaussi feltevés szerint, amikor a szóbanforgó véletlen változók átlagainak és kovarianciáinak osztályát határozzuk meg. Ilyen adatok akár a sokaságra, akár a mintára is vonatkozhatnak. Lásd a 4., 5. és 6. fejezetekben található példákat.

B. *Magatartás.* Determinisztikus esetben a ,,megfigyelés" *definíciószerűen* azt jelenti, hogy adott időpontra ismerjük az összes bemenetet *és* kimenetet; az állaptváltozók soha nem megfigyelhetőek.

Sztochasztikus esetben a megfelelő változók valószínűségeloszlásainak specifikálása váltja fel a bemenet és kimenet pontos ismeretét. Például, a rendszer bemenete és kimenete csak az additív zajjal együtt figyelhető meg. Az ilyen zajok természete része e sztochasztikus környezet meghatározásának, ugyanakkor a magatartási adatok meghatározása egyenértékű lenne a (bemenet + zaj), valamint a (kimenet + zaj) együttes valószínűségeloszlásának megadásával. A további taglalást a példák ismertetéséig elhalasztjuk.

Egy lineáris, determinisztikus rendszer kimenete lineárisan (és okozatilag) függ a bemeneteitől. Magától értetődőnek véve a kauzalitást és nem használva mást csak a linearitás matematikai definícióját, egy diszkrét idejű rendszerben a bemenet és a kimenet között az összefüggés formája a következő:

$$y(t) = \sum_{\tau=0}^{t-1} A_{t-\tau}\, u(\tau), \quad x(0) = 0. \tag{2.3}$$

(2.3)-ból láthatjuk egy rendszer *magatartási (külső)* definíciáját. Így egy, lineáris, diszkrét idejű rendszerben a „magatartás" a (2.3)-ban szereplő mátrixok végtelen sorozata meghatározásával formalizálható és számszerűsíthető:

$$S := (A_1, A_2, \ldots). \tag{2.4}$$

Folytonos idejű rendszerek esetében $S$-t megint ugyanígy definiáljuk, (2.4) szerint. [Ilyen rendszerek esetében azonban (2.3)-at konvolúciós integrállal kell helyettesíteni és (2.4) levezetése bonyolult matematikai technikát igényel, itt elhagyjuk.]

Az A → B művelet illusztrálásaképpen meghatározzuk a (2.2)-vel megadott rendszer magatartását. Ez könnyű. (2.2a)-t rekurzívan használva kapjuk:

$$A_t := HF^{t-1}G, \qquad t = 1, 2, \ldots \tag{2.5}$$

Világos, hogy (2.5) adja a $\Sigma = (F, G, H)$ rendszer explicit *magatartási relációó* az $S$ adatoknak megfelelően. A (2.5) képlet egy leképezést határoz meg: $\Sigma \to S_\Sigma$. Ez a leképezés szükségszerűen szurjektív, abból fakadóan, hogy csak azokat az $S$ magatartásokat vesszük figyelembe, amelyeket az előírt osztályba tartozó $\Sigma$ rendszer generálhatott. Másrészről pedig a leképezés majdnem soha nem injektív, azaz általában lehet több rendszer, $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots$, amely ugyanolyan magatartást mutat, $S_{\Sigma_0} = S_{\Sigma_1} = \ldots$.

Az $X$ állapottér koordinátáinak változása $T\colon x \to \hat{x}$, $\det T \neq 0$ formában definiálható.

A koordináták változása a $\Sigma = (F, G, H)$ és $\hat{\Sigma} = (\hat{F}, \hat{G}, \hat{H})$ rendszerek között a következő összefüggések teljesülését jelenti:

$$\begin{cases} \hat{F}T = TF, \\ \hat{G} \;\;= TG, \\ \hat{H}T = H. \end{cases} \tag{2.6}$$

Továbbá $T$ a $\Sigma$ rendszernek olyan más $\hat{\Sigma}$ rendszerbe történő $\Sigma \to \hat{\Sigma}$ transzformációját idézi elő, amelynek ugyanaz a magatartása. [Bizonyításul egyszerűen helyettesítjük (2.6)-ot (2.5)-be.] Más szavakkal, csak a koordináták változásában különböző két rendszer magatartás tekintetében ugyanahhoz az ekvivalencia osztályhoz tartozik. Ezen ekvivalencia osztály jelölése $[\hat{\Sigma}]$. Így, ha $\Sigma \to \hat{\Sigma}$ (2.6) szerint, akkor $[\Sigma] = [\hat{\Sigma}]$ és $S_\Sigma = S_{\hat{\Sigma}}$.

Fontos rendszerelméleti tény, hogy determinisztikus rendszerekre a megfordítás is igaz bizonyos, pontosan meghatározott értelemben, amire még visszatérünk.

C. *A modell.* Tekintsük ismét a (2.5) képletet, próbáljuk meg a magatartás kiszámításának nyilát invertálni. A probléma a következő. Adott lévén (2.5) bal oldala, azaz *adatván egy rögzített* $S_0$ *magatartás, létezik-e olyan* $\Sigma$ *rendszer* (vagy több rendszer), *amelynek definiáló mátrixai* F, G, H *teljesítik* (2.5)-öt *minden* t-*re.*

Ez a *realizáció* problémája. Bármely $\Sigma$, amely adott $S_0$-ra teljesíti (2.5)-öt, az $S_0$ egy *realizációja.* Ezt $\Sigma_{S_0}$-lal jelöljük. Adott bal oldallal és ismeretlen jobb oldallal (2.5)-öt *realizálási feltételeknek* nevezzük.

Ha $\Sigma$ egy realizáció, akkor realizáció minden olyan $\hat{\Sigma}$ is, amely a koordináta változással definiált $[\Sigma]$ ekvivalencia osztályba tartozik. Ezért nem tekintjük az ilyen $\Sigma$-t és $\hat{\Sigma}$-t különböző realizációnak. Ennek ellenére előfordulhat, hogy a rögzített $S_0$ összes realizációjának osztálya $\{\Sigma_{S_0}\}$ tartalmaz lényegesen különböző elemeket, azaz olyan $\Sigma$-t és $\hat{\Sigma}$-t, amelyek nem ekvivalensek semmilyen koordináta változás esetén. Ebben az esetben a realizálási probléma megoldása *nem egyértelmű.*

A lineáris rendszerelmélet alapvető eredménye, amelyet [14] ismertet (lásd még [19] és [24]), miszerint *determinisztikus lineáris rendszerekre a realizálási probléma megoldása egyértelmű,* feltéve, hogy a $\Sigma_{S_0}$ realizációt a lehető legegyszerűbb („kanonikus") részre „redukáljuk" úgy, hogy eltekintünk a (2.2a—b)-ben szereplő szükségtelen állapotváltozóktól, az egyértelműséget pedig úgy értelmezzük, hogy „eltekintünk az állapottérben a koordináták változásától". [Jóllehet ezt az eredményt többnyire csak szűkebb értelemben, azaz véges-dimenziójú, konstans, lineáris rendszerekre használják, az itt használt általánosabb megfogalmazás jogosult analóg tételek alapján a következő esetekre is:

(i) véges-dimenziójú, konstans, nemlineáris (polinomiális) [41],
(ii) végtelen-dimenziójú, konstans, lineáris [46] és
(iii) véges-dimenziójú, nem-konstans lineáris esetre, melynek eredeti bizonyítása a szerző műve, megjelent [28] 10. C függelékében.]

De *sztochasztikus rendszerekre a realizációs problémának általában nem egyértelmű a megoldása,* sőt az is lehetséges, hogy bizonyos esetekben nincs is megoldás.

Ha az identifikációs kérdésben objektív álláspontot akarunk fenntartani, akkor meg kell hagynunk a részleges siker lehetőségét, amikor több különböző rendszert kell elfogadnunk, mivel ezek építik fel az itteni értelemben definiált modellt. Más szavakkal: a sztochasztikus realizációt érintő matematikai tények egyáltalán nem intuíció-ellenesek.

A modell koncepcióját tekintetbe vevő terminológiánk új, de aligha vitatható. Például KOOPMANS és REIERSOL ([30], p. 169) megjegyzik, hogy „[ilyesmi elfogadható], ha ellenállunk annak a kísértésnek, hogy a fontos jellemzők [egyértelmű] identifikálhatósága szempontjából specifikáljuk a modelleket." Az identifikálási probléma, azaz a (2.1) bal oldalán levő rendszerek A osztályának meghatározása alapvetően a modellező választásától függ. Ezért el kell fogadni a következményeket; a sztochasztikus magatartási adatok realizációjaként feltevéseiből szigorú logikával levezetett „modelljéről" kiderülhet, hogy nem-létező, egyértelmű vagy nem-egyértelmű.

### 3. Parametrizáció

Mielőtt a (2.1) képlet elméleti keretét bármilyen konkrét formába öntenénk, a *parametrizáció* kérdését kell szemügyre vennünk.

Ez a legfőképpen a számok kérdése. Az adatok általában számszerűek és ezért a rendszert vagy a modellt ugyanígy kell specifikálni. Magától értetődőnek tűnhet, a témát mégis számos komoly félreértés kíséri a közgazdasági irodalomban, és nemcsak ott.

Mint ahogy a bevezetőben említettük, a félreértést úgy kerülhetjük el, ha éles különbséget teszünk a *leíró paraméterek* és a *lényeges paraméterek* között.

A leíró paramétereket általában „szabadnak" tekintik, azaz tetszőleges számoknak. Így, ha a matematikai objektumot $n$ valós számmal írjuk le, akkor absztrakt módon ez az objektum azonos egy ponttal $\mathbf{R}^n$-ben. Azonban az ilyen objektumok halmaza a legritkább esetben az egész $\mathbf{R}^n$. Ez azt jelenti, hogy korlátozni kell a leíró paramétereket ahhoz, hogy helyesen határozzuk meg a halmazt. Például, az $n \times n$-es mátrixok $\{A\}$ halmaza megegyezik $\mathbf{R}^{n^2}$-tel, de az $n \times n$-es nemszinguláris mátrixok halmazát már úgy specifikáljuk, hogy az $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ leíró paramétereket a $\det A \neq 0$ implicit feltételnek is alávetjük.

A $\Sigma$ lineáris rendszer leíró paraméterei természetesen az $F$, $G$, $H$ mátrixok elemei.

Az $S$ lineáris magatartás (elvileg) az $A_1, A_2, \ldots$, (végtelen) mátrixsorozat (végtelenül sok) elemei teljességének megadásával specifikálható, amit ezért együttesen *leíró magatartási paramétereknek* nevezünk. Egy rendszer sztochasztikus környezetének leíró paraméterei rendszerint a kovariancia mátrixok elemeiként jelennek meg.

*Példa*: A leíró és a lényeges paraméterek közötti különbség megvilágítására klasszikus példa a 2 dimenziós térben való $\mathfrak{R}^*$ elforgatás. A forgatást egy $2 \times 2$-es mátrixszal írhatjuk le

$$M = \begin{bmatrix} a & c \\ -c & b \end{bmatrix}, \quad a,\ b,\ c \text{ valós számok,}$$

amely eleget tesz az

$$MM' = I$$

ortogonalitási feltételnek. A leíró paraméterek: $a$, $b$, $c$. A tetszőleges $a$, $b$, $c$ értéknek megfelelő $M$ mátrixok $\mathfrak{R}^*$ osztálya jóval tágabb, mint a 2 dimenziós forgatások $\mathfrak{R}$ osztálya. $\mathfrak{R}$-et, mint $\mathfrak{M}$ alosztályát az ortogonalitási feltételek választják ki. Ezek a feltételek 3 olyan algebrai azonosságot írnak elő a paraméterekre, amelyek közül csak 2 független. Így következtethetünk arra, de ezen a szinten csak az intuíció útján, hogy az $M$ forgatási mátrix egy (független) paraméterrel adott. Matematikai eszközökkel bizonyítható, hogy minden ilyen $M$ mátrix felírható a következő alakban:

$$M = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Ez azt mutatja, hogy az (egyetlen) lényeges paraméternek $\theta$ tekinthető. De ez a $\theta$ még mindig nem tetszőleges, hanem eleget tesz egy ekvivalencia relációnak, hiszen $M(\theta) = M(\hat{\theta})$, ha $\hat{\theta} = \theta \bmod 2\pi$. Most már kölcsönösen egyértelműen megfeleltethető egymásnak az $M =$ forgatás és a $[\theta]$ ekvivalenciaosztály.

Más szavakkal $\mathfrak{R}$, mint absztrakt matematikai objektum, a $[0,2\pi]$ zárt intervallumnak felel meg, az intervallum két végpontja azonosnak tekintendő. A leíró paraméterek az $MM' = I$ implicit korlátozásnak tesznek eleget, míg $\theta$ korlátai explicit formában adottak. Ennek az az ára, hogy $M$ most már $[\theta]$ bonyolult függvénye. Ezenkívül $[\theta]$ és $(a, b, c)$ között is bonyolult kapcsolat van

$$[\theta]: = \arccos a = \arcsin b.$$

A példa alapján megállapíthatjuk, hogy egy rendszerosztály *lényeges paramétereit* a következőkkel jellemezhetjük:

(i) Az osztályba tartozó minden egyes rendszernek egy és csakis egy paraméterhalmaz felel meg.

(ii) A paramétereket korlátozó feltételek explicitek.

Ezek a tulajdonságok bármely identifikációs probléma szempontjából fontosak.

*Rendszerek parametrizációja.* A (2.1) sémára visszatérve nézzük meg, hogyan illusztrálhatjuk a lényeges parametrizációt.

A *rendszerek osztályát* néhány invariáns tulajdonság megadásával kell meghatároznunk, például választhatjuk az $n$-dimenziós $m$-bemenetű $p$-kimenetű rendszereket. Ekkor a leíró paraméterek, mint ahogy már tudjuk a $\Sigma = (F, G, H)$ mátrixok $n(n + m + p)$ számú elemei.

A lényeges parametrizáció azonban a $[\Sigma]$ ekvivalencia osztállyal foglalkozik és *nem az egyes* $\Sigma$ rendszerekkel. Az ekvivalenciát (2.6) szerint határoztuk meg, ez a $\Sigma$ feletti általános lineáris csoport megadását jelenti. Így magától értetődő azt feltételezni, hogy a lényeges parametrizáció megfelelő $F_*$, $G_*$, $H_*$ kanonikus formák[3] definiálásával oldható meg. Ez valóban igaz, bár a probléma korántsem egyszerű. A kérdés első szigorú taglalása [18]-ban található meg.

A legfőbb eredmény az, hogy a fenti osztályba tartozó objektumok halmaza kvázi-projektív algebrai sokaságot hoz létre. Ebből következően az $F_*$, $G_*$, $H_*$ kanonikus alak elemei e sokaság lokális koordinátáinak tekinthetők. Tény, hogy nem léteznek (folytonos) globális koordináták. Ebből fakadóan a *lényeges paramétereket csak lokálisan definiáltnak szabad tekinteni.* (A lokális koordinátarendszerek átfedik egymást. Együttesen lefedik az egész sokaságot, de nincs egyetlen koordinátarendszer, amely lefedné az egészet.) A kanonikus alaknak, mármint a lényeges parametrizáció kanonikus alakjának pontos leírása meglehetősen bonyolult. Lásd [42] és [27].

A magatartási adatok lényeges parametrizációjára áttérve az első követelmény az, hogy meghatározzuk azokat a korlátozó feltételeket, amelyek kifejezik azt az alapfeltevést, hogy az adatok a (2.1) összefüggés szerint definiált rendszerek osztályából származnak. Mivel a rendszereket (gyakorlati szempontokból) véges számú paraméterrel kell jellemeznünk, ugyanaz a követelmény érvényesítendő a magatartási adatokra annak ellenére, hogy első lépésben kényelmes lehet az utóbbiakat [lásd (2.4)] végtelen számú (leíró) paraméterrel jellemezni.

Ennek megvalósítását biztosító matematikai eszközök a realizálási elmélet részét képezik. A lineáris rendszerekre jólismert eredmény (lásd [28] 10. feje-

[3] Nem tévesztendő össze a kanonikus rendszerekkel, ezeket lásd később.

zetét) a „rang-feltétel”

(3.1) $$\text{rang}\, B(S_\Sigma) \leq \dim \Sigma = n,$$

ahol $B(S_\Sigma)$ a $\Sigma$ rendszer által generált $S$ magatartási adatokhoz tartozó *magatartási mátrix*, melynek definíciója

(3.2) $$B(S_\Sigma) = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \dots \\ A_2 & A_3 \\ \dots & \dots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Eképpen $S$ lényeges parametrizációja olyan paraméterek bevezetését kívánja $A_1, A_2, \dots$-ben, hogy $n$ több (előre megadott) értékére és az $(F, G, H)$ halmaz lényeges paramétereinek minden értékére teljesüljön (3.1).

Ezt a nehéz feladatot a lineáris realizálási elmélet segítségével lehet megoldani. Másszóval, (2.1) második nyilát kell szemügyre venni. A klasszikus elvi eredmények (1962; [28] 10. fejezet, [19] és [42] VI. fejezet) a következőképpen írhatók le.

a) *Ha S-nek van egy véges dimenziójú* $\Sigma_S$ *realizációja, akkor van* $\Sigma_S^{\text{can}}$ *kanonikus realizációja is* (kanonikus = elérhető és megfigyelhető).

(3.3) b) *Minden* $\Sigma_S^{\text{can}}$ *kanonikus realizáció egyetlen ekvivalencia osztályhoz* $[\Sigma_S^{\text{can}}]$*-hez tartozik, amelyet* (2.6) *definiál.*

c) *Minden kanonikus realizációra*: $\dim \Sigma_S^{\text{can}} = \text{rang B(S)}$.

Másképp kifejezve, ez a tétel a (2.1)-ben szereplő második nyílról a következő rendkívül fontos állítást fogalmazza meg:

(3.4) *Determinisztikus, lineáris, dinamikus rendszerek magatartási adatai egyértelműen meghatározzák a modellt, (amelyet kanonikus rendszernek is vehetünk).*

Valóban, ha realizációk egyáltalán léteznek (véges dimenziójú értelemben), akkor kanonikusak is lehetnek (3.3a szerint); a modell egyértelmű, mivel $\{\Sigma_S\}$ egyetlen ekvivalencia-osztályt $[\Sigma_S^{\text{can}}]$ tartalmaz, s ezért nincsenek lényegesen különböző realizációk ((3.3b) szerint); a realizáció „mérete”, azaz az állapotváltozók száma közvetlenül meghatározható a magatartási adatokból anélkül, hogy fel kellene építeni a realizációt magát ((3.3c)-nek megfelelően).

Ugyanezeket az eredményeket más formában is megfogalmazhatjuk:

(3.5) S *és* $[\Sigma_S^{\text{can}}]$ *között kölcsönösen egyértelmű a megfeleltetés.*

Tényleg, az $S$ adatok egyértelműen meghatározzák az $[\Sigma_S^{\text{can}}]$ modellt, (mivel minden kanonikus realizáció (3.3a) szerint ugyanahhoz az ekvivalencia osztályhoz tartozik); másrészről pedig, bármely realizáció (ennélfogva bármely $\Sigma_S^{\text{can}}$ kanonikus realizáció) meghatározza $S$-et, éppen a realizáció definíciójának megfelelően.

Így a (2.1) identifikálási feladat *determinisztikus, lineáris, véges dimenziójú* esetének van megoldása és ez a megoldás olyan szép, amilyen csak lehet. A megoldás lehetősége alapvetően a *kanonikus rendszerek* gondolatán alapul, valószínűleg ez a 60-as évek legnagyobb rendszerelméleti felfedezése. (3.3) tétel értelmében $[\Sigma^{\mathrm{can}}_{S_{\Sigma_*}}]$ az elképzelhető legjobb helyettesítője a $S_{\Sigma_*}$ adatokat létrehozó, ismeretlen, valóságos $\Sigma_*$ rendszernek és teljesen megérdemli a ,,modell'' nevet.

Sietünk hozzátenni, hogy amíg (3.5) teljesülése számára a ,,determinisztikus'' fontos, addig a ,,lineáris'' és ,,véges dimenziójú'' biztosan nem. Lásd a 2. fejezet végén található hivatkozásokat.

A modell és az adatok közötti kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés (3.5) azt jelenti, hogy az adatok bármely lényeges parametrizációja meghatározza a modell lényeges parametrizációját és megfordítva.

Egy realizáció tényleges előállítása, amely nem kerülhető meg a lényeges paraméterek kiszámításakor, fokozatosan hajtható végre. Ez az ún. parciális realizációs elmélet, amelyet a 7. fejezet röviden tárgyal.

Az idősorelemzés történeti fejlődésében és a hozzákapcsolódó ökonometriai tanokban állandóan ismétlődő tendencia, hogy a szekér mögé fogják be a lovat. A szokásos ,,megközelítés'' az, hogy előbb *egy* adott $S_0$ számadataiból (leíró paraméterek) határozzák meg *egy* $\Sigma_{S_0}$ modell (leíró paramétereinek) értékeit, mielőtt $S_0$ és *a* modell $\{\Sigma^{\mathrm{can}}_{S_0}\}$ (a mi tárgyalásmódunk szerint) közötti viszonyt megértenék. Az ilyen eljárásnak — lásd például [11] és [4] — az a veszélye, hogy az identifikációs probléma tanulmányozásának eredménye inkább a felhasznált parametrizáció, semmint a valóságos, identifikálandó rendszer lényeges tulajdonságaitól függő kezdetleges valami *lehet*. Ezt a kérdést az ún. szimultán egyenletbecslés klasszikus megközelítésével kapcsolatban fogjuk vizsgálni. Lásd még az ARMAX modellek elemzését a 6. fejezetben.

A parametrizáció egy magasabbrendű ügy; ha már csináljuk, nemcsak ,,leíróan'', hanem ,,lényegesen'' kell tennünk. Ez bonyolult matematikai probléma, túl bonyolult ahhoz, hogy ,,közgazdasági megérzés'' alapján jussunk el a megoldáshoz.

Az olvasó számára már ismert rendszerelméleti nyelvre támaszkodva, az identifikációs feladatot a következő lépésekben oldhatjuk meg:

(I) Határozzuk meg a rendszerek és környezetek azon osztályát, amelyben a rendszert megfigyeltük. Ez az osztály természetesen kell, hogy tartalmazza azt a modellt, amelyet a magatartási adatokból identifikálni szeretnénk.

(II) Határozzuk meg a magatartási adatok (= elérhető megfigyelések) osztályát. Az $S_{\Sigma_0}$ adatok, amelyeket az (I) szerint specifikált $\Sigma_0$ rendszer generálhatott, természetesen ehhez az osztályhoz kell hogy tartozzanak.

(III) Oldjuk meg a realizálási feladatot: tetszőlegesen adott, rögzített (II)-ben meghatározott $S_0$ magatartási adatok alapján megkeressük az (I) alapján meghatározott osztályba tartozó összes $\Sigma_{S_0}$ rendszert, amely $S_0$-at generálhatta. Ez az $S_0$ adatok $\{\Sigma_{S_0}\}$ *modellje.*

(IV) Kiszámítjuk a modellcsalád és a magatartási adatok lényeges parametrizációját.

Az identifikálási feladatot most már elvileg megoldottuk. Éspedig a lehetséges legjobb módon, nevezetesen a rendszer és környezet (előírt) osztályából és a megadott adatokból következtetve.

(3.5) miatt a modell numerikus meghatározása automatikus, ha már az adatokat parametrizáltuk. Ily módon valójában nem létezik a ,,paraméter identifikáció", mihelyt a paramétereket „lényegesnek" is és nemcsak leírónak tekintjük. Ezáltal csak a „paraméter meghatározásának" kérdése marad hátra, azaz megfeleltetni az adatok paramétereit a modell paramétereinek a (3.5) leképezés szerint. A 4. és az 5. fejezet ennek az eljárásnak a részleteit fogja illusztrálni az ökonometriából vett példákon keresztül.

Végülis valamelyest leegyszerűsítve arra a következtetésre jutottunk, hogy

(3.6) *Identifikálás = Realizáció + Parametrizáció.*

A (3.5) megállapításban semmi olyan nincs, amely eleve lehetetlenné tenné a *sztochasztikus identifikálásra* való alkalmazását. Ennek a kérdésnek *sztochasztikus realizálási elmélet* címszó alatt gazdag irodalma van (lásd pl. [15], [39], [5], [1], [35] [36], [6], [37]).

Figyelmeztetjük azonban az olvasót, hogy ez az irodalomban leginkább az *egzakt sztochasztikus realizáció problémáival* foglalkozik. Ilyen problémára példa a Markov-modell felépítése adott autokovariancia függvényből, ami a szokásos elméleti lépés a „Kalman-szűrő" problémának „Wiener-szűrő" problémává egyszerűsítése során. Lásd [15], [20]. Ezeknek az egzakt problémáknak a matematikai kezelése a determinisztikus realizálási elmélet útmutatásait követi, egyszerűen egzakt sztochasztikus adatokkal (olyannal, mint például az egzakt módon megadott kovariancia függvény) helyettesíti az egzakt determinisztikus adatokat (olyant, mint például az $S$ sorozatot).

A valóságban azonban majdnem mindig *zajos sztochasztikus realizációs* problémával állunk szemben, ahol az alapadatok nem egzakt, „zajos" módon állnak rendelkezésre. Ez a helyzet az ökonometria számos klasszikus problémája esetében. A „zaj" akármit jelenthet, amiről nincs egzakt információnk vagy feltételezésünk. Ez lehet mérési hiba, zavaró tényező, a linearitástól vagy a stacionaritástól való eltérés stb. A 2. fejezet fogalmi kerete nyilván alkalmazható a zajos identifikációs probléma felírására. Jelenleg azonban erre nincs kidolgozott elmélet. Így, amikor a 4. és 5. fejezetben az identifikáció példáit vesszük szemügyre, tárgyalásunk szükségszerűen vázlatos és befejezetlen lesz.

Ezzel együtt a zajos identifikációs probléma jelentősége óriási, mivel jövő kutatási feladatot jelez. Ezek konkrét, nyitott rendszer problémák, amelyeknek tanulmányozása valószínűleg elég könnyű, és siker esetén bizonyára jelentősen segítené az ökonometria fejlődését.

## 4. Sztochasztikus identifikálás: példa[4]

A (2.1) sémának a zajos sztochasztikus realizálásra való alkalmazására egy klasszikus példát mutatunk be. A feladat egy statikus lineáris összefüggés identifikálása, és e tekintetben a (dinamikus) rendszerelmélet szempontjából triviális. A probléma „identifikálhatósági" vonatkozását KOOPMANS[5] és REIERSOL [30] klasszikussá vált cikke tárgyalta.

Tekintsük egy $u$ skalár *bemenet* és egy $y$ skalár *kimenet* között $\alpha$ és $\beta$ ismeretlen paraméterekkel megadott affin összefüggést:

$$y = \alpha + \beta u. \tag{4.1}$$

[4] Ez a fejezet nem szerepelt a konferencián előadott anyagban.

[5] Köszönettel tartozom *Koopmans* professzornak azért, mert immár 15 évvel ezelőtt felhívta a figyelmemet erre és az ehhez kapcsolódó cikkekre.

Az összefüggésről két zajos megfigyelési forrásból érkeznek adatok, amelyet (a [8]-ban ismertetett „Kalman szűrő-elmélet" klasszikus jelölésének megfelelően) a következő alakba írjuk:

$$(4.2)\qquad \begin{cases} z_1 = u + v_1, \\ z_2 = y + v_2. \end{cases}$$

Ezt a problémát formálisan fogalmazzuk át a (2.1) koncepcionális séma nyelvére.

A *determinisztikus rendszert* (4.1), valamint a bemenet, a kimenet és a megfigyelés ezt megelőző leírása adja meg. (Általában, és itt is, a sztochasztikus rendszerek esetében a kimenet nem feltétlenül azonos a megfigyelhetővel.)

A rendszer *sztochasztikus környezetét* a (4.1—2)-ben szereplő változók együttes valószínűség-eloszlására vonatkozó feltevések határozzák meg. [30]-cal egyezően feltesszük, hogy az $u$ skalár normális eloszlású valószínűségi változó és független a $v$ zajvektortól. $v$-t szintén gaussinak feltételezzük és a következőképp specifikáljuk:

$$(4.3)\qquad \begin{cases} \text{(a)} \quad Ev_1 = Ev_2 = 0. \\ \text{(b)} \quad \operatorname{cov} v_1 v_2 = 0. \end{cases}$$

Feladatunk *magatartási adatait* a szokásos hipotézis alapján specifikáljuk, miszerint a megfigyelhető $z$ valószínűségi eloszlásának függvénye ismert. Mivel $z$ gaussi, ez azt jelenti, hogy feltételezzük a sokaság paramétereinek ismeretét:

$$(4.4)\qquad \text{magatartási adatok:} = \{Ez, \operatorname{cov} zz'\}, \text{ ahol } \operatorname{cov} zz' > 0.$$

Tekinthetjük úgy is (4.4)-et, mintha a mintaátlaggal és mintaszórással lenne kifejezve. A „sokaság" kontra „minta" kérdés a következő elemzés szempontjából érdektelen.

A (4.1—3) feltételekkel specifikált rendszer és környezet magatartási adathalmazt generál. Az ilyen adatok mindenképpen (4.4) részhalmazát jelentik valamilyen $Ez$, cov $zz'$ paraméterekkel, hiszen (4.4) a két gaussi változót magába foglaló legáltalánosabb adathalmaz. Másszóval, *feladatunk az, hogy a $z_1$, $z_2$ gaussi véletlen változók között affin összefüggést identifikáljunk abban az esetben, amikor az összefüggést (4.2) szerinti zajmechanizmus ismeretlen nagyságú zajjal homályosítja el.*

(4.5) *Megjegyzés.* Ha megengedtük volna, hogy $z$ várható értéke ismeretlen (de nem nulla) érték legyen, akkor ezek az $Ez_1$, $Ez_2$ ismeretlen értékek az $\alpha$ konstans meghatározását befolyásolták volna (4.1)-ben. Ebben az esetben $\alpha$ identifikálásának problémája nem lett volna jól definiált, mivel

$$\begin{aligned} Ez_1 &= Ey + Ev_2, \\ &= \alpha + \beta Eu + Ev_2, \\ &= \alpha + \beta Ez_1 - \beta Ev_1 + Ev_2, \end{aligned}$$

ebből

$$\alpha := Ez_2 - \beta Ez_1 - (Ev_2 - \beta Ev_1).$$

Ez azt jelenti, hogy $\alpha$-t nem lehetne meghatározni a magatartási adatokból, függene ugyanis a zaj ismeretlen várható értékétől is. *Ekkor $\alpha$ identifikálhatat-*

*lan lenne, mivel nem jól definiált.* Ez elvileg lehetetlen. Ha megengedjük azt, hogy a (feltevés szerint nem mérhető várható értékű) zaj magyarázzon meg $z_1$ és $z_2$ között valamilyen affin összefüggést, akkor (4.1)-et egyáltalán nem identifikálhatnánk. Másszóval, a zaj várható értékét a (4.1)-ben megkövetelt determinisztikus összefüggés részének kell tekintenünk. Eszerint a (4.3a) feltevés elengedhetetlen.

[Az itt tárgyalt eset hasonló ahhoz a fizikai feladathoz, amelyben az $R_1$ ellenállás ellenállásának „identifikálása" a feladat, és az egyetlen megengedett mérés egy olyan áramkör végpontjain végezhető el, amelyben egy $R_2$ ismeretlen ellenállású ellenállás van kapcsolva $R_1$-gyel párhuzamosan. Az ilyen mérés esetében értelmetlen azt képzelni, hogy a ténylegesen mért $R = R_1 \| R_2$ valamilyen ismeretlen módon két kívülről megkülönböztethetetlen részre bontható fel. Az a tény, hogy $R_1$-et láthatjuk, $R_2$ pedig rejtett (mondjuk a kapcsolótábla mögött van) érdektelen, amíg az identifikációról van szó.]

(4.3b) feltevés szintén kötelező. Ugyanis, ha cov $v_1 v_2 \neq 0$, akkor $v_2$-öt $\hat{v}_2$-vel helyettesíthetnénk a következő képlet szerint:

$$v_2 = \ddot{\beta} v_1 + \hat{v}_2, \text{ ahol}$$

$$\hat{\beta} := (\operatorname{var} v_1)^{-1} \operatorname{cov} v_1 v_2 \text{ és } \operatorname{cov} v_1 \hat{v}_2 = 0.$$

Ezáltal, ha $\beta \neq 0$, akkor a (4.1)-ben szereplő $\beta$ nem lenne jól definiált, mivel a $z_1$ és $z_2$ között affin összefüggés linearitási együtthatója $\hat{\beta}$-tól és $\beta$-tól is függ.

A feladat formális definiálásának teljessé tételéhez bevezetjük a (4.1) determinisztikus rendszer és (4.2), (4.3) környezete leíró paramétereit.

A rendszert a következőképp írjuk le:

$$\begin{cases} \delta_1 := \alpha, \\ \delta_2 := \beta. \end{cases}$$

Nincsenek korlátozások; ezeket a paramétereket lényeges paramétereknek is tekinthetjük.

A környezet leírása

$$\begin{cases} \delta_3 := Eu, \\ \delta_4 := \operatorname{var} u > 0, \\ \delta_5 := \operatorname{var} v_1 > 0, \\ \delta_6 := \operatorname{var} v_2 > 0. \end{cases}$$

A szórásokról a következő elemzés egyszerűsítése végett tettük fel, hogy szigorúan pozitívak; tekintsük ezt a probléma-specifikáció részének. A pozitivitási kikötést szem előtt tartva a $\delta_3$-tól $\delta_6$-ig terjedő paramétereket is lényegesnek tekinthetjük.

Az adatparaméterek a következők:

$$Ez_1,\ Ez_2;\ \operatorname{var} z_1,\ \operatorname{cov} z_1 z_2,\ \operatorname{var} z_2.$$

Ezekből az utolsó három a (4.4)-ben már említett cov $z > 0$ feltételnek eleget tesz.

Most már rendelkezésünkre állnak a magatartási összefüggések leírásához szükséges jelölések. Ezeket megkapjuk, ha kiszámítjuk az $x$ adatszórást a rendszer és a környezet paramétereinek függvényében. Ez meglehetősen egyszerű ebben az esetben; az eredmény

$$
(4.6)\qquad \begin{cases} Ez_1 = \delta_3, \\ Ez_2 = Ey = \alpha + \beta\delta_3, \\ \operatorname{var} z_1 = \delta_4 + \delta_5, \\ \operatorname{var} z_2 = \beta^2\delta_4 + \delta_6 \\ \operatorname{cov} z_1 z_2 = \beta\delta_4 \end{cases}
$$

Ellenőrizzük még egyszer, vajon a magatartási adatok jól definiálták-e vagy sem. Ehhez meg kell mutatnunk, hogy (4.6) bal oldala megfelel a (4.4) specifikációnak, amikor $\alpha$, $\beta$, $\delta_3, \ldots, \delta_6$ értéke megengedett, de tetszőleges. $Ez_1$ és $Ez_2$ várható értékre ez nyilvánvaló, mivel semmilyen feltételt nem kell kielégíteniük. A szórások esetében cov $zz'$ pozitivitása $\delta_4$, $\delta_5$, $\delta_6$ feltételezett pozitivitásából következik. Lásd később.

[30] felteszi (4.3a)-t, de (4.3b)-t nem. Következtetése az, hogy az $\alpha$, $\beta$ *már nem identifikálható* $Ez$ *és* cov $zz'$ *adatok alapján.*

Ez a következtetés elfogadhatatlan rendszerelméleti szempontból és nem csak azért, mert (4.3b) hiányában $\beta$ rosszul meghatározott.

[30] a következőképpen gondolkodik. Feltéve, hogy cov $zz'$ szigorúan pozitív definit (a 4.4 adatspecifikáció része), $\beta$ tetszőleges adott értékére nyilvánvaló, hogy a

$$
\begin{bmatrix} 1 & \beta \\ \beta & \beta^2 \end{bmatrix} \delta_4 < \operatorname{cov} zz'
$$

egyenlőtlenség eléggé kicsi pozitív $\delta_4 = \operatorname{var} u$ segítségével teljesül.

Ekkor a

$$
\operatorname{cov} zz' = \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ \beta & \beta^2 \end{bmatrix} \operatorname{var} u + \operatorname{cov} v
$$

egyenlőség kielégíthető megfelelően választott pozitív $\delta_5$ és $\delta_6$ segítségével. Minden választott $\beta$-ra az

$$
Ez_2 = Ey = \alpha + \beta Eu = \alpha + \beta Ez_1
$$

egyenlőségek $\alpha$ egyetlen értékét határozzák meg, mivel $Ez_1$ és $Ez_2$ az adatspecifikáció részeként ismert. (Mivel [30] nem határozza meg cov $zz'$-t, $\alpha$-t egyszerűen cov $z_1 z_2 - \beta\delta_4$-nek *vesszük* ebben az összefüggésben.)

Koopmans és Reiersol idézett gondolatmenete azt mutatja, hogy a „magatartás" leképezése (2.1)-ben két, egymástól különböző objektumnak (= rendszer + környezet) tulajdoníthatja ugyanazt a magatartást. Ezért azt várhatnánk, hogy (értelmezésünkben) a realizálási problémának nem egyértelmű a megoldása. Tulajdonképpen a [30] által megállapított „paraméterek identifikálhatatlanságához" az ott használt gondolatmenetet túl kell haladni és az alkalmazott parametrizációt részletesen kell megvizsgálni.

A probléma következetes rendszerelméleti elemzése a következő.

Meghatározzuk a (4.6) realizálási feltételek és a (4.4) adatfeltételek mindegyik ($\alpha$, $\beta$, $\delta_3$, . . . , $\delta_6$) megoldás-halmazát. Az első egyenlet triviális. A második egyenlőség $\beta$ bármely adott értékére triviálisan oldható meg $\alpha$-ra. Így csak az utolsó három egyenlőség megoldása érdekes.

A (4.6) első három egyenletét megoldó ($\beta$, $\delta_4$) pár, ha létezik egyáltalán, ki kell hogy elégítse a következő feltételeket

$$(4.7)\qquad \left|\begin{array}{l} \text{(a)}\ \beta\delta_4 = \operatorname{cov} z_1 z_2, \\ \text{(b)}\ \operatorname{var} z_1 > \delta_4 > 0, \\ \text{(c)}\ \dfrac{\operatorname{var} z_2}{|\operatorname{cov} z_1 z_2|} > |\beta|. \end{array}\right.$$

A (4.7) összes ($\beta$, $\delta_4$) megoldáshalmazának előállítása elemi feladat az algebrai geometriában. Kiderül, hogy megoldás mindig létezik a $\operatorname{cov} z > 0$ feltétel miatt. Valójában a (4.7a) hiperbolának az a szelete adja meg az összes megoldások halmazát, amelyeket a (4.7b—c) egyenlőtlenségek határolnak be. *Tehát a realizálási feladat megoldása nem egyértelmű.* (Ez lényegesen erősebb állítás, mint egyszerűen megállapítani az „identifikálhatatlanságot" [30].)

(4.7) megoldása közvetlenül is kifejezhető az alábbi feltétellel:

$$(4.8)\qquad \varrho^2_{z_1 z_2} < \frac{\operatorname{var} u}{\operatorname{var} z_1} < 1,$$

ahol $\varrho_{z_1 z_2}$ a $z_1$ és $z_2$ véletlen változók közötti korreláció koefficiense. A (4.8) egyenlőtlenség azt a mennyiségi hatást mutatja, amit a zaj gyakorolt $\operatorname{cov} u$ identifikálásának nem egyértelműségére; kis zaj $\varrho_{z_1 z_2} \sim 1$ és $\operatorname{var} v_1 \sim 0$, tehát ekkor az identifikáció elég pontos.

Ha $\delta_4 = \operatorname{var} u$ értékét úgy rögzítjük, hogy a (4.8) követelményeket kielégíti, akkor a rendszer plusz környezet minden más paramétere egyértelműen meghatározott; például $\beta = (\operatorname{cov} z_1 z_2)/(\operatorname{var} u)$.

Tehát emlékeztetve a *mi* modell definíciónkra, miszerint a magatartási adatok (adott rögzített halmaza) realizálásainak összessége a modell, azt mondhatjuk, hogy *problémánkra a modell absztrakt módon megfelel a* ($\varrho^2_{z_1 z_2}$, 1) *nyitott intervallumnak, a modellben bármely* (rendszer plusz környezet) *egyértelműen írható le ezen intervallum egy pontjának kiválasztásával és ezúton* $\operatorname{var} u (\operatorname{var} z_1)^{-1}$ *értékének megadásával.* Tehát *a modell* a rendszer és környezet *egyparaméterű családja.*

Elméleti szempontból bizonyára ez a lehetséges legjobb eredmény, hiszen csak a magatartási adatok lényeges paramétereivel írja le a modellt.

Ugyanakkor az előző állítás érthetősége nagymértékben az alkalmazott parametrizáción múlik. Még világosabbá tehető, ha például (4.8)-at helyettesítjük egy, a $\beta$ (lényeges) paraméterre vonatkozó egyenlőtlenséggel. Az ilyen egyenlőtlenség létezése előző eredményeinkből következik. Egyszerű számítás a következő eredményre vezet

$$(4.9)\qquad \frac{|\operatorname{cov} z_1 z_2|}{\operatorname{var} z_1} < |\beta| < \frac{\operatorname{var} z_2}{|\operatorname{cov} z_1 z_2|}, \quad \operatorname{sgn} \beta = \operatorname{sgn} \operatorname{cov} z_1 z_2,$$

Ez nagyon érdekes összefüggés, hiszen a realizálási probléma megoldását a klasszikus regressziós együtthatók szerepeltetésével adja meg. De itt úgy kerülnek be a sztochasztikus realizálási probléma megoldásának leírásába, hogy a klasszikus statisztikának sem a feltevéseire, sem a technikájára nem kellett hivatkozni.

(4.9) meglepő formája azt sejteti, hogy a sztochasztikus realizálási elmélet, (ami ebben a fejezetben érintett zajos esetre még kidolgozásra vár), bizonyos tekintetben a klasszikus statisztikával szemben alternatívát igér, legalábbis ami a legkisebb négyzetek módszerét, a regressziós elemzést és a maximum likelihood becslést illeti. Az ebből eredő következményeket [26]-ban ismertetem $n$ zajos változó közötti $m$ lineáris összefüggés identifikálásának általános esetére.

Az ökonometriában a (4.1—3) szerkezet általában, mint a ,,hiba-a-változókban" modell ismeretes (lásd [8]). Én felcserélném ezt a régies és kétértelmű terminológiát a ,,lineáris összefüggések identifikálása zajos adatokból" kifejezésre, ami [26] címe. A probléma lényege a $z_1$ és $z_2$ közötti összefüggés lineáris részének az előállítása; az adatokból (4.1) eltávolítása utáni statisztikai maradék mérési hibának tulajdonítható, de lehet megmagyarázatlan tényezők, egyéb változók, a lineáritás hiányának stb. hatása, ami — a fenti állásfoglalásom szerint — a ,,zaj" szó jelenlegi tudományos használatában foglalható össze.

A ,,hiba-a-változókban" modell (hogy ezt a már meggyökeresedett terminológiát használjuk) rossz hírre tett szert az ökonometriában. Ez az ,,identifikálhatatlansági" aspektusnak köszönhető. Nem értek egyet ezzel az értékeléssel, sem pedig a Koopmans—Reiersol-féle érveléssel.

Az itt vizsgált felvetés megegyezik azzal, amit FRISCH használt úttörő munkájában [7]. (Egyébként (4.3) mindkét tagját feltételezi!). Különösen, ha egynél több lineáris összefüggés identifikálásáról van szó, akkor Frisch problémáját soha nem tanulmányozták matematikailag megfelelően. Nehéz elkerülni a következtetést [26], hogy Frisch elgondolásának jelenlegi népszerűtlensége, továbbfejlesztésének elmaradása inkább matematikai, mint koncepcionális nehézségeknek köszönhető.

A következtetések érdekében összefoglaljuk a rendszerelméleti kritikát Koopmans és Reiersol állításáról, miszerint ,,$\alpha$ és $\beta$ nem identifikálható".

(i) Egy paraméter identifikálhatósága rosszul definiált fogalom. Egy adott paraméternek nincsen invariáns jelentése, mivel több ekvivalens parametrizáció létezik. Például var $u$ és $\beta$ ekvivalens módon használható a realizáció nem egyértelműségének bemutatására.

(ii) Ami jól definiált, az a modell (= minden realizáció együtt) absztrakt parametrizálása. Az itteni feladatot illetően kiderült, hogy ez egy nyílt intervallum. Az, hogy a megoldásként kapott intervallum hogyan ábrázolódik, attól függ, hogy milyen parametrizációt fogadtunk el.

(iii) Helytelen az az állítás, amely szerint az $(\alpha, \beta)$ pár nem identifikálható; ha $\beta$ (4.8)-nak megfelelő tetszőleges értéket vesz fel, akkor (4.6) második összefüggése rögzíti $\alpha$-t. Így az $\{\alpha, \beta\} = \mathbf{R}^2$-ben levő egy görbének bizonyos szakasza az, amelyik nem identifikálható és nem egy tetszőleges $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ pont.

Az ökonométereket az a naív (a statisztikai paraméterbecslésből és a maximum likelihood módszerből fakadó) célkitűzés babonázta meg hosszú éveken át, hogy minden „paraméternek" csak egyetlen „becsült" értéke lehet. Nincs ésszerű ok, hogy miért lenne így, ha a rendszer megfigyelésében bizonytalanság van, mint esetünkben, akkor célszerű az értékek egy intervallumát keresni. És ésszerűtlen arra törekedni, hogy egyetlen értéket kapjunk eredményül, mivel ez szükségszerűen személyes előítéletek ráerőszakolását jelenti az adatokra. A realizálási elmélet azt mutatja be, hogy zajos adatoknak valószínűségi modell felel meg.

Az itt elvégzett identifikálhatósági elemzés eredményei erőteljesen kapcsolódnak az identifikálandó rendszert és sztochasztikus környezetét érintő kezdeti feltevésekhez.

Például [33] bemutatta, hogy problémánk esetében (szintén explicit módon a cov $v_1 v_2 = 0$ feltétellel) a sztochasztikus realizáció nem egyértelműsége megszüntethető a következő átalakítással. Tekintsük $u$-$t$ és $v_1$-et véletlen sorozatnak és feltesszük, hogy az első autokorrelált, míg a második fehér. Azután var $u$ egyértelműen meghatározható, ez a feltevés bizonyos „előítéleteket" (lásd a 110. old.) jelent, amelyeket a (4.4) becsléséhez felhasznált $\{z_t, = 1, 2, \ldots\}$ idősorra tesztelni kell. Elfogadva [33] előítéletét a probléma láthatóan az egzakt sztochasztikus realizálási elmélethez tartozik.

Zárjuk ezt a fejezetet azzal a reménnyel, hogy a benne elemzett (4.1–2) feladatot egyszer majd a zajos realizáció-elmélet csírájának fogják tekinteni.

## 5. Szimultán egyenletek becslése

Ebben a fejezetben a szimultán (statikus) összefüggések standard ökonometriai becslésének feladatára alkalmazzuk a sztochasztikus realizálási elméletet. Az elemzés a [9], [29], [31]-ben ismertetett hagyományos keretekre szorítkozik.

Az olvasó érdekében az 1. táblázatban megadjuk a hagyományos és az itt használt fogalmak közötti megfeleltetést. (Sajnálatos, hogy a „struktúra" fogalma, ahogyan azt Koopmans [29]-ben definiálta és később Malinvaud a [32] mű 18. fejezetében, valamint Theil a [43] mű 9. és 10. fejezetében használja, csaknem szöges ellentéte annak, ahogyan ezt a fogalmat az ökonometria berkein kívül értelmezik. A „struktúra" rendszerint az általános feltevéseket vagy egy probléma elemzésének teljes keretét foglalja magába, sohasem valamilyen specifikus paraméterértéket; a struktúra a csont és nem a hús.

E fejezet tanulmányozásának tárgya egy lineáris szimultán egyenletrendszer, amelyben a változók értékét sokszor megfigyeljük:

$$By_t = Cu_t + v_t, \quad t = 1, 2, \ldots, T_0. \tag{5.1}$$

Itt $y_t \in \mathbf{R}^p$ a *kimeneti* vektor, $u_t \in \mathbf{R}^m$ a *bemeneti* vektor és $v_t \in \mathbf{R}^p$ az úgynevezett „egyenlet-hiba" vagy „zavar" vektor, amely a $\Sigma = (B, C)$ párral definiált determinisztikus rendszer magyarázott területén kívüli összes sztochasztikus hatást képviseli.

Mivel a modellezés célja az, hogy a kimenetnek a bemenettől való függését tanulmányozzuk, nyilvánvalóan fel kell tennünk, hogy az input egyértelműen meghatározza az outputot.

*1. táblázat*

| KOOPMANS fogalmai [22] | E cikk fogalmai |
|---|---|
| Endogén változók | kimenet |
| Exogén (vagy predeterminált) változók | bemenet |
| Modell (= struktúrák csoportja) | rendszerek és környezetek osztálya |
| Modell (szimultán egyenletbecslésre) | szelektor |
| Struktúra | rendszer plusz sztochasztikus környezet adott paraméter értékkel |
| Strukturális paraméterek | leíró paraméterek |
| Megfigyelten ekvivalens struktúrák | rendszer és környezet azonos magatartással |
| Identifikált (identifikálható) egyenletek | kanonikus alakok |
| Éppen identifikált strukturális paraméterek | a kanonikus alak együtthatói; lényeges paraméterek; lokális koordináták |
| — | modell |
| — | magatartás |

Ezért fel kell tennünk, hogy az osztály összes (5.1) rendszerére teljesül:

$$\det B \neq 0. \tag{5.2}$$

Ez teszi teljessé a (2.1) értelmében a ,,rendszer'' meghatározását. (Ebben az elemi tárgyalásban eltekintünk az (5.1) változói közötti autokorreláció (időkorreláció) lehetőségétől. Így a problémát tisztán statikusan kezeljük; eleve kizárjuk a dinamikus modellezést.

A (2.1)-beli ,,sztochasztikus környezetet'' a hagyományos specifikációk itt következő második adagja adja meg, azaz minden véletlen változó gaussi és

$$\begin{aligned} &Ev = 0, \\ &\operatorname{cov} uv' = 0 \ ('= \text{transzponált}) \\ &\operatorname{cov} v > 0 \ (\text{rögzített, ám ismeretlen}) \\ &Eu = 0, \ \operatorname{cov} uu' > 0. \end{aligned} \tag{5.3}$$

[A sokaság átlaga és szórása helyett, mintaátlagként és mintaszórásként is definiálhatjuk az (5.3) adatokat. Ez jelentené a *Fisher*-i paradigma (amely a paramétereket valószínűségeloszlásokkal definiálja) elkerülését és ahelyett, hogy közvetlenül az adatokkal dolgoznánk, véges $\{(y_t, u_t), t = 1, \ldots, T\}$ idősorokkal lesz dolgunk. Ami a jelen tárgyalásmódot illeti, a két álláspont közötti különbség érdektelen.]

A rendszer „magatartásának" meghatározása általában az $y$, $u$ valószínűségi vektorok együttes eloszlásának megadását jelenti. Normális eloszlást feltételezve, ez ekvivalens a következő specifikációval:

$$E\begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} = 0, \quad \mathrm{cov}\begin{bmatrix} yy' & yu' \\ uy' & uu' \end{bmatrix} > 0. \tag{5.4}$$

Ismét érdektelen, vajon a „cov"-ot alapsokaság vagy minta értelemben használjuk.

Esetünkben a (2.1)-gyel analóg (rendszer $\to$ magatartás) nyíl megértéséhez szükséges elemzés egyszerű. Az első kérdés: milyenek az ekvivalens rendszerek? A $By = Cu$ egyenlőség mindkét oldalát megszorozzuk egy nem szinguláris mátrixszal. (5.2)-t használva az következik, hogy az $(I, B^{-1}C)$ rendszer ekvivalens a $(B, C)$ rendszerrel. Általában a rendszerekvivalencia megkövetelt definíciója ezek után:

$$(B_1, C_1) \sim (B_2, C_2) \text{ akkor és csak akkor, ha } B_1^{-1}C_1 = B_2^{-1}C_2. \tag{5.5}$$

A $(B, C)$ ekvivalencia osztálya nyilvánvalóan tartalmazza az $(I, B^{-1}C)$ elemet. Nincs értelme tehát, hogy ne fogadjuk el a hagyományos terminológiát, amely szerint

$$y = Au + w, \quad A := B^{-1}C, \quad w := B^{-1}v, \tag{5.6}$$

az (5.1) *redkuált formája.* Világos, hogy ekvivalens rendszerek azonos (5.4) magatartási adatokkal rendelkeznek.

A következő kérdés az, vajon az (5.4) specifikáció magába foglalja-e az (5.1–2)-nek megfelelő rendszer és környezet által generálható összes adatot. Ez esetben a válasz elég egyszerű. A feltételes várható érték (vagy regresszió) módszerét használva rögtön azt kapjuk, hogy

$$A := (\mathrm{cov}\, yu')(\mathrm{cov}\, uu')^{-1}, \quad w := y - Au, \quad \mathrm{cov}\, uw' = 0. \tag{5.7}$$

Épp ezért láthatjuk, hogy bármely (5.4) *magatartási adat pozitív definit kovariancia mátrixszal megfelel az* (5.1–4) *feltételeket kielégítő rendszernek és környezetnek.* Továbbá a realizálási probléma megoldása előállításának természetes módja az, hogy meghatározzuk az (5.4) adatokat előállító minden rendszer ekvivalencia osztályának egy specifikus elemét, azaz az (5.7) redukált formát.

A realizálási probléma megoldásának teljessé tételéhez meg kell határoznunk még a hibatag kovarianciamátrixát. Ez könnyű, egyenesen következik $w$ meghatározásából:

$$\mathrm{cov}\, ww' = \mathrm{cov}\,(y - Au)(y - Au)' = (I - A)\,\mathrm{cov}\begin{bmatrix} yy' & yu' \\ uy' & uy' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I \\ -A \end{bmatrix}. \tag{5.8}$$

A magatartási adatok és $A$ ismeretéből egyértelműen következik cov $ww'$ ismerete.

Most már rendelkezésünkre áll az ökonometriában jól ismert tétel:

(5.9) *Az (5.1)-re vonatkozó realizálási feladatnak egyetlen megoldása van az (5.2—4) hagyományos specifikáció esetén az (5.5) ekvivalencia relációt kielégítő osztály ok körében.*

Ez újabb példa olyan egzakt sztochasztikus realizálási problémára, amelyik a determinisztikus realizálási problémák alapvető egyértelműségét megőrzi. [Ha az (5.1—3) rendszert sokaság értelemben specifikáljuk, míg az (5.4) adatokat minta értelemben adjuk meg, akkor természetesen bizonytalanság léphet fel $A$ és cov $ww'$ meghatározásában, éspedig a sokaság kovarianciájának a mintából való (5.4) szerinti becslése pontatlanságából fakadóan. Ez a probléma érdektelen a cikkben tárgyalt kérdések szempontjából.]

Helytelen ennek az eredménynek az ökonometriában szokásos értelmezése, miszerint a magatartási adatokból „egyértelműen identifikálható a redukált forma". Az (5.6) redukált forma csak a $[(B, C)]$ ekvivalencia osztály egy eleme és éppen *az ekvivalencia osztály az, amely egyértelműen identifikált*, nem pedig egy eleme.

Az ökonometriában kritika nélkül elfogadják, hogy a cél a $(B, C)$, det $B \neq 0$ „strukturális forma" paramétereinek „identifikálása". Mivel a $(B, C) \to B^{-1}C$ leképezése nem injektív, ebben a naiv értelemben az identifikáció nem lehet egyértelmű. Hogy ezt mégis kikényszerítse, Koopmans elképzelése az volt, hogy egy olyan $(B_*, C_*)$ párt specifikál, amelynek bizonyos elemeit zérusnak tekinti, míg a többi elem szabad paraméter marad. Ezt az motiválta, hogy az identifikáció során olyan „közgazdasági" ismeretet lehet figyelembe venni, amelyektől a magatartási adatok (5.4) specifikációjánál eltekintettünk. Tegyük fel, hogy $(B_*, C_*)$ kiválasztható ilyen módon, azaz szabad paraméterei kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők $A$ paramétereinek, és ezáltal a magatartási adatoknak. Ekkor $(B_*, C_*)$ paraméterei, valamint azok az egyenletek, amelyekben megjelennek, Koopmans szavaival „éppen identifikáltak" vagy „identifikálhatók". [Matematikai értelemben nincs olyan $(B_*, C_*) \neq (I, A)$, amely kölcsönösen egyértelműen megfeleltethető lenne az összes $A$-nak, az $A$ mátrixok egy kis halmaza általában ki kell hogy maradjon. Lásd MALINVAUD ([32], p. 718).]

Egy (5.1)-beli tetszőleges $(B, C)$ mátrixpár vizsgálata annyi, mintha leíró paramétereket keresnénk. $(B_*, C_*)$-ben a zérushelyek megadása oly módon, hogy a megmaradó (szabad) paraméterek majdnem kölcsönösen egyértelműen felelnek meg $A$-nak, annyit tesz, mintha lényeges paramétereket keresnénk. [Nem foglalkozunk ehelyütt az ún. „túlidentifikált" esettel, ami további korlátozásokat jelent $A$-ra nézve.]

Az „identifikálni" igének és származékainak előbb kifejtett értelmű használata az ökonometria megrögződésévé vált. Ez felettébb sajnálatos. A tudományos modellépítésben elterjedt jelentése: „a megfigyelésekből a rendszer jellemzőire való következtetés". Ez alapvetően eltér a Koopmans által az „identifikálni" szónak adott technikai értelmezéstől.

Ahhoz, hogy tisztán lássunk, megismételjük, hogy a magatartási adatok csak az $[(I, A)]$ ekvivalencia osztályt „identifikálják" a szó igazi értelmében. Az ekvivalencia osztályok $\{[(I, A)]\}$ családja kölcsönösen egyértelműen felel meg az $\{A\}$ családnak; másképpen, minden egyes ekvivalencia osztály pontosan egy numerikus $A$ mátrixnak felel meg. A Koopmans-i értelemben vett

„identifikálás" (majdnem) minden ekvivalencia osztályból egy $(B_*, C_*)$ típusú reprezentáns kiválasztását követeli meg. Ha ez a feltétel kielégül, akkor $(B_*, C_*)$-ot az $A$ (majdnem) *kanonikus alak*jának nevezzük. [Ez nemcsak rendszerelméleti terminológia, hiszen megegyezik a régi tiszta matematikai szóhasználattal, ahol a „kanonikus alak" egy ekvivalencia osztály családjának minden tagjából (valamilyen absztrakt vagy konkrét szabály szerint) egyetlen reprezentánst választ ki.]

KOOPMANS, RUBIN és LEIPNIK [31] megoldották azt a problémát, hogy hogyan specifikáljunk egy *megfelelő* $(B_*, C_*)$-ot, azaz kanonikus alakot $A$-ra. Ez a tartalma az ún. „identifikálhatósági rang- és rendfeltételeknek".

Félrevezető egy megfelelő $(B_*, C_*)$ szabad koefficienseiről azt mondani, hogy „identifikálták". Akárcsak $A$ elemei, ezek a koefficiensek is csak az $[(I, A)] = [(B_*, C_*)]$ ekvivalencia osztály „koordinátái". Mindkét paraméterhalmaz megfelelő „koordináták" halmaza. A választás közöttük nem tartozik bele az identifikációs probléma (2.1) értelmű specifikációjába.

Az $(I, A)$ forma arra jó, hogy az (5.4) magatartási adatok értékeit konvertálja az adatok által meghatározott ekvivalencia osztályhoz tartozó rendszerek paramétereivé. Amikor ez kész van, hasznos lehet ezeket a számokat még egy formában felírni, ez $(B_*, C_*)$, amelyet úgy választunk ki, hogy az adatok megfelelő közgazdasági interpretációja lehetővé váljon.

A $(B_*, C_*)$-ban szereplő közgazdasági feltevések semmilyen szerepet nem játszanak az identifikálás során. Az adatok $(B_*, C_*)$ formába történő átalakítása a világon semmit sem mond az (5.1—4) specifikációban bennerejlő közgazdasági feltevésekről. [Azonban a $(B_*, C_*)$ forma könnyebbé vagy közvetlenebbé teheti az ilyen vizsgálat elvégzését.]

Számos közgazdaságilag indokolható kanonikus alak létezik. Mindegyiket szembesíteni kell a valóságos adatokkal. Ha a modellezőnek tetszenek azok a számok, amiket a realizáció során kedvenc $(B_*, C_*)$-jához kapott, megnövekedhet bizalma a kanonikus alak választása során beépített különös közgazdasági feltevéseiben. Ezzel szemben valószínűleg nem állíthatja azt, hogy az adatokból „identifikálta" ezeket a feltevéseket; lehet, hogy egy másik kanonikus alak $(B_\#, C_\#)$ még szebb számokat adna.

Elfogadva Koopmans klasszikus identifikációs problémájának (5.3) környezeti specifikálását, még nyitva marad az (5.5) ekvivalencia osztályból a „helyes" kanonikus alak választásának általa nem érintett kérdése.

Feltesszük, hogy két szimultán egyenletre a következő paramétereket kaptuk:

$(D_*)$ mennyiség $= \alpha$ (ár) $+ \beta$ (fogyasztó jövedelme),

$(S_*)$ mennyiség $= \gamma$ (ár) $+ \delta$ (termelési költség),

amely a következő mátrixszerkezetnek felel meg:

$$(5.10) \qquad (B_*, C_*) := \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \cdot \beta & 0 \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ 1 & -\gamma \cdot 0 & \delta \end{bmatrix}.$$

Pusztán az (5.10) alakjából biztosan nem helyes arra következtetni (ahogy ezt az ökonometriai szövegek megteszik), hogy $(D_*)$ keresleti egyenletként „identifikált" (azt állítva, hogy a mennyiség a fogyasztó jövedelmétől függ és nem függ a termelési költségtől), és hogy ($S_*$) kínálati egyenletként ,,identifikált" (mivel a mennyiség a termelési költségtől függ és nem függ a fogyasztó jövedelmétől). Bármelyik kereslet-kínálati helyzetet úgy kell felfogni, mint a gazdaság bonyolult tényezőinek egymásra hatását; épp ezért ugyanúgy indokolt (és talán javítja a közgazdasági intuíciót) a következő kanonikus alak definiálása:

$$(5.11)\qquad (B_{\#}, C_{\#}) := \begin{bmatrix} 1 & -a\cdot b & 0{,}01b \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ 1 & -c\cdot 0{,}1d & d \end{bmatrix}.$$

(5.11)-et használva, az $(a, b, c, d)$ paraméterek ,,identifikálására" valószínűleg eltérő értékeket eredményezne az (5.10) kanonikus alak által nyújtott $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ ,,identifikált" paraméterektől.

Elkerülhetetlen az a következtetés, miszerint *a hagyományos értelemben lehetetlen a kereslet-kínálat összefüggések identifikálása az* (5.4) *adat-specifikáción kívüli új feltevések nélkül.*

Másképpen, a kereslet és kínálat árrugalmasságainak [az $(\alpha, \beta)$, illetve $(a, b)$ paramétereknek] maghatározása során nélkülözhetetlen egy további *feltevés,* egy különösen kanonikus alak kiválasztása, amely logikailag független az adatoktól.

Azt javasoljuk, hogy az ilyen modell-feltevéseket nevezzük *előítélet*nek. Így az előítéletet pontosan definiált technikai fogalomként használhatnánk, az adatok specifikációjától független feltevéseket jelölnénk ezzel. A szándékolt intuitív jelentés közel áll a szó hétköznapi jelentéséhez, amely pejoratív. Emlékeztetni kell, hogy a modellezés során az előítélet lehet jó is, és valóban a legértékesebbek az olyanok, amelyek az adatok természetére vonatkozó brilliáns feltevéseket tartalmazzák. (A fotoelektromos effektus einsteini magyarázata szolgálhat például.)

Természetesen a rendszernek és a környezetnek a specifikációja maga is nevezhető magasabb szintű ,,előítéletnek". Ehhez további megjegyzések szükségesek. A ,,linearitás" nem bagatellizálható előítéletté, hiszen a vizsgált összefüggések világában nagyszámú esetre ellenőrizték ezt a feltevést. Hasonlóképpen, egy ismeretlen normális eloszlásra vonatkozó Fisher-féle feltevéseket a tapasztalat igazolja. Ugyanakkor a modellezés magasabb szintjén kívánatos lenne megszabadítani a mai elméletet (és gyakorlatot) a ,,linearitás" és a ,,normál eloszlás" előítéleteitől.

Haavelmo, Koopmans és a későbbi irodalom szimultán egyenletbecslési modelljének hagyományos specifikációja számos alacsonyszintű előítéletet tartalmaz. Hármat említünk ezek közül:

(i) A változók *ad hoc* szétválasztása ,,exogén" és ,,endogén" csoportokra.

(ii) (5.3)-ban $\operatorname{cov} uv' = 0$ megkövetelése, amely lehetővé teszi, hogy (5.1)-ben $v$ egyenlet-hibák a különböző egyenletek között korreláltak legyenek, de korrelálatlanok a magyarázó változókkal.

(iii) A magyarázó változók mérése pontosságának feltevése.

Az előítéletek első fajtáját Haavelmo közismert [9] cikkével lehet szépen bemutatni, amely a fogyasztási hajlandóság $\gamma$ becslésével foglalkozik. Haavelmo azt állítja, hogy $\gamma$ meghatározása a $c$ fogyasztásnak az $y$ jövedelemre vonatkozó regressziójával (statisztikai értelemben) torzított, mert a jövedelem nem autonóm, viszont (a keynesi közgazdaságtannak megfelelően) a $z := y - c$ beruházás az. Haavelmo a keynesi előítélet fényében elemzi az adatokat. $c$-nek $y$-ra vonatkozó regressziója, mely szerint a jövedelem okozza a fogyasztást, a másik előítélet alkalmazása. (Mivel nehéz jövedelem nélkül fogyasztani, a klasszikus közgazdaságtan utóbbi előítélete indokoltnak tűnik sokak, különösen a nem-közgazdászok szemében.) Az itt bevezetett technikai értelemben *mindkét* eljárás előítéletnek minősül. Haavelmo nem szembesíti az adatokat a keynesi előítélettel egyszerűen kényszeríti az adatokat, hogy $\gamma$-ra értéket adjanak. Ha Haavelmo előítéletét olyan adatokra alkalmaznák, ahol a nemzeti jövedelmet babiloniak születésnapjaival, a fogyasztást telefonszámokkal helyettesítenénk, akkor is kapnánk $\gamma$-ra egyértelmű értéket. Ez azonban számolás, nem identifikálás.

Mesénk tanulsága világos. *A klasszikus szimultán egyenletbecslési probléma az egzakt sztochasztikus realizálási elmélet triviális esete.* Koopmansnak és követőinek elmélete nem az igazi identifikálási problémával foglalkozik, mivel a rendszerre és környezetre már eleve előítéleteket tartalmazó feltevéseket erőltetnek. Koopmans elmélete csak a megfelelő parametrizáció leszűkített kérdésével foglalkozik; ezt a feladatot oldja meg teljesen.

Két érvényes kanonikus alak $(B_*, C_*)$ és $(B_\#, C_\#)$ közötti választást, amely az identifikálási probléma lényegének látszik, a hagyományos szimultán egyenletbecslés nem vizsgálja. Ez a választás a hagyományos feltevések keretein belül maradva nem végezhető el.

A szimultán egyenletek hagyományos három előítéletének modern kritikája ma is élő kutatási feladat. Bizonyos szempontból való összefoglalást találhat az olvasó WOLD [45] művének 1. fejezetében. A matematikai problémák egy részét [26]-ban vizsgáltuk.

## 6. Az ARMAX modell

Az ARMAX modellek (lásd [2]) széleskörű ökonometriai alkalmazása kifejtésre váró rendszerelméleti kérdéseket vet fel.

Az ökonometria az ilyen típusú modelleket általános formában a következőképpen önti képletbe (lásd pl. [11]):

$$\sum_{r=0}^{n_1} Q_r y_{t-r} = \sum_{s=0}^{n_2} N_s u_{t-s} + v_t. \tag{6.1}$$

Az $u_t$ és $y_t$ vektorváltozók az identifikálandó determinisztikus rendszer *bemenetét* és a *kimenetét* jelölik. A $v_t$ vektor az additív „hibatag", amely az identifikálási feladat sztochasztikus környezetét képviseli.

A következőkben csupán (6.1)-nek a determinisztikus vonatkozásait vizsgáljuk. A megválaszolandó alapkérdés: *milyen értelemben határoz meg* (6.1) *egy lineáris rendszert?*

A választást nyolc megjegyzés formájában adjuk elő:

1) A (6.1) egyenletek a rendszert *külső* értelemben írják le, nincsenek állapotváltozók. Állapotváltozók szerepeltetését [a (6.1)-gyel ekvivalens (2.2b) alakú

rendszer létét] a realizálási elmélet megköveteli. Lényegtelen az, hogy a modellező szeret-e az állapotváltozó fogalmával gondolkodni; az állapotváltozók mindig jelen vannak, amikor a lineáris rendszer koncepcióját elemezzük.

2) Ahhoz, hogy az $u_t$ bemenő sorozat egyértelműen meghatározza az $y_t$ kimenő sorozatot, teljesülnie kell a

$$\det Q(z) \neq 0 \tag{6.2}$$

feltételnek ($\det Q$-ra mint polinomra), ahol a $Q(z)$ mátrixpolinom:

$$Q(z) := \sum_{r=0}^{n_1} Q_r z^{n_1-r}. \tag{6.3}$$

3) Most már értelmezhetjük a $Q^{-1}(z)\,N(z)$ objektumot, ahol $N(z)$ a következő mátrixpolinom:

$$N(z) := \sum_{s=0}^{n_2} N_s z^{n_2-s}. \tag{6.4}$$

$Q^{-1}(z)\,N(z)$ reacionális mátrixfüggvény és ezért $z = \infty$ körül formálisan Laurent sorba fejthető. Ahhoz, hogy a szóban forgó $\Sigma$ rendszer átmeneti függvényét összefüggésbe hozhassuk ezzel a sorral, az okság miatt szükséges feltenni, hogy

(6.5) $\quad Q^{-1}(z)\,N(z) =$ (szigorúan) valódi tört mátrixfüggvény legyen.

4) A legutóbbi feltevés azt jelenti, hogy

$$Q^{-1}(z)\,N(z) = \sum_{t>0} A_t z^{-t}, \tag{6.6}$$

ahol = a formális hatványsorok értelmében érvényes. Most már abban a helyzetben vagyunk, hogy meg tudjuk adni a rendszer $S = (A_1, A_2, \ldots)$ standard külső leírását a (2.4) alakban. Természetesen $S$ *definíciószerűen* „identifikálható", mivel ezek azok az adatok, amelyekre végül is az identifikálási feladat vonatkozik.

5) A (6.5) identifikálhatóságára vonatkozó „feltételeket" néha közöl az irodalom. Ezek általában $u_t$-re vonatkoznak (például $u_t \neq 0$). Szeretnénk, ha egy rendszerről beszélve *nem* használnánk ilyen fogalmakat; „az identifikálhatóság" $S$ lényeges tulajdonsága kell hogy legyen, s nem pedig a környezettől függő valami. Érdekes lenne megvizsgálni „$S$ identifikálásának" kérdését „azt figyelembe véve, hogy jelzések egy bizonyos környezetébe van beágyazva", ám ehhez hasonló kérdéseket itt most nem érintünk.

6) Nyilvánvaló, hogy $(Q(z), N(z))$-nek a (6.6) képlet szerinti lényeges identifikálhatósága azokra az összefüggésekre vonatkozik, amelyek egyrészt $S$-nek az $A_1, A_2 \ldots,$ mátrixokkal megadott leíró paraméterei, másrészt a $(Q(z), N(z))$ párnak a (6.3–4)-beli $Q_0, Q_1, \ldots$ és $N_0, N_1 \ldots$ koefficiensmátrixokkal megadott leíró paraméterei között állnak fenn.

Ilyen kérdéseket azonban csak akkor vizsgálhatunk, ha már a rendszer jól definiált. Ez nyilvánvalóan megköveteli egy ekvivalencia reláció bevezetését:

$$(Q(z), N(z)) \sim (\hat{Q}(z), \widehat{N(z)}), \tag{6.7}$$

amelyet a

$$Q^{-1}(z)\, N(z) = \hat{Q}^{-1}(z)\, \hat{N}(z) \qquad (6.8)$$

feltétellel határozunk meg. Ez a reláció úgy tekinthető, mint a (6.3—4)-gyel megadott leíró paraméterekre vonatkozó korlátozás.

A (6.7) ekvivalencia műveletre azért van szükség, hogy elkerüljük a rosszul definiáltságot, amit $Q(z)$ és $N(z)$ közös osztói, valamint a különféle normálási konvenciók okozhatnak.

[*Megjegyzés.* A (6.3—4)-ben használt normálás a szokásos rendszerelméleti gyakorlatot követi, sajnos különbözik a [11], [12] művekben használtaktól. A szabványos terminológiát és jelöléseket lásd [2]-ben.]

7) A (6.2), (6.5) összefüggések, valamint (6.7) ekvivalencia reláció nyilvánvalóan szükséges és elégséges ahhoz, hogy a (6.6)-ban megadott

$$(Q(z), N(z)) \rightarrow S \qquad (6.9)$$

absztrakt leképezés injektív legyen.

Ahhoz, hogy megmutassuk, hogy (6.1) egy rendszer helyes (külső) definíciója, be kell mutatni, hogy ez a leképezés kölcsönösen egyértelmű. Így már csak azt kell belátni, hogy létezik (6.6)-ot kielégítő

$$S \rightarrow Q((z), N(z)) \qquad (6.10)$$

injektív leképezés. Ez matematikai elemzést igényel.

Feltéve, hogy $S$-nek van véges dimenziójú ($\Sigma_S$) realizációja, a realizálási elmélet szerint van olyan $Z(z)$ valódi irreducibilis tört mátrixfüggvény, amelynek formális hatványsora megegyezik (6.6) jobb oldalával. Bemutatható továbbá, hogy minden valódi tört mátrixfüggvény lehetővé teszi a $Z(z) = Q^{-1}(z)\, N(z)$ faktorizációt. Másképpen kifejezve: megfelelően definiált $(Q_*(z), N_*(z))$ kanonikus alakok előállításával könnyű egy (6.6)-ot kielégítő $\Sigma_S \rightarrow (Q_*(z), N_*(z))$ leképezést megadni. Az erre vonatkozó irodalmat és módszereket Antoulas [2] mutatja be.

Ez bizonyítja már egy (6.10) alakú injektív leképezés létezését. Ebből következik, hogy az $S$ és $(Q(z), N(z))$ közötti megfeleltetés kölcsönösen egyértelművé tehető a fent említett feltételek segítségével.

A legfontosabb dolog amire emlékezni kell az az, hogy egy lineáris rendszer (6.1)-gyel való helyes meghatározása a $(Q(z), N(z)) \rightarrow Z \rightarrow S \rightarrow \Sigma$ folyamat tanulmányozását követeli meg. Megfordítva, a standard külső $S$ adatok lefordítása az ARMAX modell nyelvére lényegében egy realizálási probléma és legkönnyebben az $S \rightarrow \Sigma \rightarrow (Q(z), N(z))$ folyamatként ábrázolható. Így a realizálási elmélet az ARMAX modelleknek elkerülhetetlenül része, még a parametrizáció kérdésének felmerülése előtt.

Az ARMAX modell (lényeges) parametrizációja azért nehéz, mert egy (6.5)-szerű ekvivalencia relációra van hozzá szükség. Ez egyáltalán nem triviális probléma. A legjobban ezt végül is úgy vizsgálhatjuk, ha mindegyik alapdefiníciót összehasonlítjuk a $\Sigma$ rendszer definíciójával, amelyet az összehasonlítás során hivatkozási pontnak tekintünk. Például Hannan [11] eredményeit nehéz érvényesség, jelentőség vagy újszerűség szempontjából kiértékelni, mivel azokat $(Q(z), N(z))$ egy *ad hoc* parametrizációjával kapta.

8) Hannannál [11 első mondatában] vagy Hannan, Dunsmuir és Deistlernél [12, p. 277, (4) egyenlet és később] az az elképesztő állítás talál-

ható, hogy *egy lineáris rendszer definíciója sztochasztikus jellegű feltételeknek van alávetve.* Egyetlen mondaton belül nézhetünk itt szembe annak a két alapelvnek az összezagyválásával, amelyekre e cikk (és az egész rendszerelmélet) elemzései épülnek.

A *linearitás* koncepciója olyan algebrai definíció, amelyet semmi mással nem szabad összekeverni. Ha megtesszük, akkor a matematika komoly felhasználása lehetetlenné válik.

A *rendszer* fogalma, ahogy ezt a 2. fejezetben kifejtettük, élesen megkülönböztetendő sztochasztikus környezetétől. A mai irodalomban számos zagyvaságért ennek elmulasztása a felelős. Az ún. Kalman-szűrő elmélet sikerének egyik titka éppen az, hogy ezt megfontoltan végzi el.

Ha ezeket a technikai finomságokat szem előtt tartjuk, akkor azt a kérdést, hogy hogyan határozunk meg egy determinisztikus lineáris dinamikus rendszert (külső értelemben) $(Q(z), \bar{N}(z))$ segítségével, jelenleg teljes mértékben meg tudjuk válaszolni. A fennmaradó problémák a lényeges parametrizáció jobb megértésére vonatkoznak. Megemlítendő, hogy a szükséges matematikai eszközök meglehetősen újak még a rendszerelméletben is, és voltaképpen az utóbbi tíz évben fejlődtek ki ROSENBROCK könyve [40] nyomán.

Ismét oda jutottunk, hogy ,,a paraméter identifikálhatóság" nem létező probléma a (6.1) formában megadott feladat esetében, kivéve azt az esetet, amikor ezt a terminológiát csak a ,,parametrizáció" kódjául használják.

Az ARMAX általános lineáris rendszert határoz meg. Kétségkívül ez a reá támaszkodó módszerek sikerének fő oka. Ha elhagyjuk akár az AR-t, akár a MA-t, azaz ha csak mozgó átlagoló vagy csak autoregresszív modelleket vizsgálunk, akkor az általánosság eltűnt és további komoly fogalmi és technikai nehézségek lépnek fel. Ezt vizsgáljuk a következő fejezetben.

## 7. A realizálási elmélet alkalmazásai

,,A paraméter identifikálhatósága" intuitíve is meglehetősen vonzó fogalom. Miért nem működik lineáris rendszerekre? Az ok egyszerűen az, hogy a rendszerelmélet — a tudomány egy speciális területe — most már elérte azt a pontot, ahol a realizálási elmélet (az előbbinek egy alterülete) képes szigorú tudományos vizsgálatnak alávetni ,,a paraméter identifikálhatósága" intuitív fogalmát. Miután ,,a paraméter identifikálhatóság" fogalmát a lineáris rendszerek pontos és konkrét esetére megvizsgálták, kiderült, hogy az nem életképes koncepció — mindamellett működnie *kell* lineáris rendszerekre, ha egyáltalán igényt tart elméleti jelentőségre.

A rendszerelméletet hasonlóképpen alkalmazhatjuk, ha a *mozgó átlagolású* (MA) és az *autoregresszív* (AR) modellek előnyeit akarjuk felbecsülni. A 20-as évek végefelé ezeket javasolták és használták az idősorelemzéssel foglalkozó szakemberek, jóval a rendszerelmélet megjelenése előtt. Ezek az eredmények ösztönzést adtak a rendszerelmélet kezdeti fejlődésének.

Jók-e vagy rosszak ezek a modellek? Bármelyik jó rendszerelméleti szakember bátor válasza erre a kérdésre bizonyára ez: ,,rosszak". Ezt az érzelmi következtetést szigorú módszerekkel levezetni nem is olyan könnyű, csak az ún. ,,parciális realizálási" elmélet kifejlesztése után vált lehetővé (lásd [16], [23]).

A parciális realizálási feladat akkor áll elő, amikor $S$ csak parciálisan van megadva (2.4)-ben, azaz egy véges $A_1, \ldots, A_t$ mátrixsorozattal. Ekkor a minimális $n_t$ dimenziójú $\Sigma_t^{\min}$ realizációk esetleg nem egyértelműek, de természetesen $n_t$ egyértelmű a minimalitás követelménye miatt. $n_t$-nek $t$ függvényeként való elemzése nagyon fontos információkat nyújt a klasszikus realizálási feladatokról (lásd [23]). Mivel $n_t$ az egész számokon értelmezett monoton, nem csökkenő, egész értékű függvény, ezért értéke csak ,,ugrásokban" változhat. Ezeknek az ugrásoknak a szerkezete erős regularitási feltételeket elégít ki (lásd később).

Az AR és az MA sémák konstruktív egzisztencia bizonyítást szolgáltatnak: *a parciális realizálási feladatnak van (véges) megoldása minden t-re.* Matematikailag ez egy egyszerű ügy. Sajnos, ez az AR és az MA sémákhoz tartozó *egyetlen* rendszerelméleti gondolat.

A (skalár) AR séma akkor és csak akkor alkalmazható, ha $n_t$ egy-ugrású függvény. Ez egyáltalán nem általános eset. Általában elő sem fordul. Mivel a realizálási feladatban az alapvető jelenségek az ,,ugrások", ezért biztos, hogy található az ugrások különböző fajtáinak jelenlétét megállapító statisztikai módszer.

Ilyen módszert még nem fejlesztettek ki (a szerző tudomása szerint). Következésképp, az AR modellek alkalmazása valóságos adatokra: rendszerelméleti képtelenség. Amikor egy AR sémát alkalmaznak, előítéletből teszik, minden statisztikai bizonyosság nélkül arra, hogy a nagyonis valószínűtlen esettel van ténylegesen dolguk. Nem lehet azzal érvelni, hogy az AR az adatokhoz illeszkedik, mivel az ARMA, általánosabb lévén még jobban illeszkedik (lásd 6. fejezet). Mulatságos, hogy $n = 1$-re triviálisan igaz az, hogy AR = ARMA. Következésképpen nincsen semmi kivetnivaló az elsőrendű autoregresszió alkalmazásában. Tulajdonképpen akkor dől össze az AR elmélet, amikor az $n > 1$ esetre próbálunk áttérni. Olyan általánosítással van dolgunk, amely jóval nehezebb rendszerelméleti problémához vezet, mint amilyennek először tűnik.

Magától értetődően ugyanez igaz az MA sémára is.

A parciális realizálási elmélet másik alkalmazása az $S = (A_1, A_2, \ldots)$ adatok parametrizálását érinti. Vegyük a skalár esetet $S = (a_1, a_2, \ldots)$, ahol az $a_i$-k valós számok, mivel a [23]-ban adott elmélet erre az esetre szorítkozik. Ilyen skalársorozatot például diszkrét idejű autokovariancia függvénynek tekinthetünk.

A [17]-ben kifejtett elmélet *bármely* ilyen sorozatra alkalmazható (nincsenek feltételek!). Következésképpen bármely $a_1, a_2, \ldots$ ,,adathoz" tartozik egy hozzá tartozó lényeges ugrási szerkezet. Ha a $t_i$ időpontban $q_i := n_{t_i} - n_{t_i-}$ nagyságú ugrás jelentkezik, akkor a következő megállapítások tehetők:

(i) $a_{t_i} \neq a^*_{t_i} := [a_{t_i}$-nek az $a_1, \ldots, a_{t_i-1}$-en alapuló (egyértelmű) parciális realizáció alapján, (2.5) felhasználásával számított értéke]. Ez az állítás értelmes: mivel a parciális realizálási elmélet fő tétele biztosítja azt, hogy $t_i$-ben csak akkor jelenik meg ugrás, ha $a_1, \ldots, a_{t_i-1}$-nek van egyetlen minimális realizációja. Ezért $a_{t_i}$ nem szabad paraméter, mivel $a_{t_i} = a^*_{t_i}$ megengedésével ellentmondana a lényeges ugrási szerkezetnek.

(ii) $q_i$ nagyságú ugrás után az $a_{t_i+1}, \ldots, a_{t_i+q_i}$ sorozatnak pontosan $q_i$ számú eleme ,,szabad", azaz ezen paraméterek bármilyen értéket felvehetnek anélkül, hogy ellentmondanának az ugrási szerkezetnek.

(iii) $q_i$ nagyságú ugrás előtt a sorozatnak pontosan $q_i - 1$ számú eleme rögzített, azaz a sorozat első $2n_{t_{i-1}}$ elemén alapuló minimális parciális realizáció (2.5) segítségével egyértelműen meghatározza a rögzítetteket.

Ez azt mutatja, hogy naiv dolog $S = (a_1, a_2 \ldots)$-ről, mint a (lényeges) paraméterek sorozatáról beszélni, ha a paramétereket abban a szokásos értelmében szemléljük, hogy minden valós értéket felvehetnek. Csak a sorozatnak az $i$-edik [(ii) típusú] ugrási pontot követő $q_i$ számú eleme szerepelhet paraméterként ebben az értelemben. Az (i) típusú elemeknek teljesíteniük kell egy $\neq$ feltételt. A (iii) típusú elemek (amelyek nem jelennek meg az általános esetben) teljesen rögzítettek. Továbbá, és ez a döntő pont, az elemek különböző típusának helyét az ugrási szerkezet rögzíti. Ez az adatoknak egy lényeges tulajdonsága, amelyet az idősorral foglalkozó irodalomban fel sem vetettek [16] és [23] előtt.

$S$ parametrizációja különösen abban az esetben fontos, amikor a rendszer $n$ dimenziója nincsen előre rögzítve, s ez a normális eset az identifikáció során. Ebben az esetben a parciális realizáció $(F, G, H)$-ra a parametrizációk egymásba skatulyázott sorozatát adja. Ez abból a tényből fakad, hogy $n_t$ $t$-vel monoton nő, mint ahogy ezt 10 évvel ezelőtt Rissanen [38] bemutatta. Az ehhez a kérdéshez más módszerrel közelítő próbálkozások nem jártak sikerrel. Például Deistler és Hannan művéhez [4] fordulhat az olvasó, amely részben ezzel a kérdéssel foglalkozott, és maga is eldöntheti vajon megoldották-e vagy sem az egymásba skatulyázott parametrizáció problémáját.

## 8. Következtetések

A rendszerelmélet egy új paradigma. Kettős értelemben is alkalmazható a közgazdaságtanban: közgazdasági modellek rendszertulajdonságainak vizsgálatára, valamint a modellezés ökonometriai receptjeinek kritikájához. Cikkünkben a második értelemben vizsgálódtunk.

A tudomány fejlődése — bizonyára a közgazdaságtanban is — elérte mára zt a szintet, amikor Newtont már nem tekinti jó példaképnek. Éppen a newtoni megközelítés az — először elkülöníteni a jelenségeket és tekintet nélkül a különböző összefüggésekre megkísérelni a legegyszerűbb megjelenésükben vizsgálni őket —, amely *alkalmazhatatlan* a közgazdaságtan kérdéseire, mivel a gazdasági jelenségek lényegileg rendszer (külső összefüggés) viszonyúak.

Az ökonometria törekvése, azaz az egymással összefüggő adatokból rejtett mennyiségi viszonyok megállapítása, a rendszerelméletnek is központi problémája. Csak a modellezésből eredő magasabbrendű problémák fokozottabb szem előtt tartásával érhet el sikert az ökonometria, illetve az ökonométer; ilyen kérdés például a lényeges paramétereké és viszonyuké a valóságos adatokhoz. Nem elég naiv értelemben gondolni a paraméterekre. Különösen ha visszagondolunk arra, hogy „a paraméter identifikálhatóságának" intuitív fogalma nem lehet értelmes tudományos koncepció. A realizálási elmélet eszközei jelentik az életképes alternatívát.

Befejezésül felidézzük Neumann János [27] 25 évvel ezelőtti egyik legutolsó nyilvános megállapítását. A közgazdaságtanban elérhető tudományos fejlődés kérdését érintő vitaválaszában tagadta azt, hogy a fejlődést megállítaná a „kísérletek lehetetlensége" (az ellenpéldája a klasszikus csillagászat, amely kísérletek nélkül is sikeres volt) vagy ,,az adatok hiánya'' (számos tudományos eredményt, olyant, mint Einstein fotoelektromossági törvényét, sőt az általános relativitáselméletet is kevés elérhető adatra támaszkodva fogalmazták meg). A legfontosabb dolog, ami szerinte hiányzik a közgazdaságtanban: a ,,kategóriák definíciója''.

Amit ő ezen akkor értett, azt a mai szóhasználatban az ,,invariáns'', ,,lényeges tulajdonságok'', ,,elemekre bontás'' stb. szavakkal fejezzük ki. Ha az idősorelemzésnek van lényeges mondanivalója a közgazdaságtan számára — és *ez* a remény mindannyiunké —, akkor a rendszerelméletnek képesnek kell lennie arra, hogy a valóságos adatokból kiássa Neumann hiányzó kategóriáit, és egyúttal mélyebben megértse a modellek elméletét.

Napjainkban e rendszerelméletben nagyon sok eredmény és kutatás foglalkozik ehhez hasonló problémákkal. Az ökonometriának szintén hozzá kell járulnia a megoldáshoz, különben elhervad, mint a statisztika egy jelentéktelen hajtása.

A valóságos adatokból közgazdasági (vagy egyéb) eredményekhez számos úton lehet eljutni. A tudományos út nem kötelező. Már a csillagjóslással is próbálkoztak. Az optimisták nem vitatkoznának az olyan kijelentésekkel, miszerint ,,a gazdaságpolitika valóságos világának felfedezése inkább megerősítette, mint lerombolta az abbéli hite(me)t, hogy a közgazdasági elmélet hasznos és fontos'' (Whitman [44]). Az ártatlan hit gyakran hegyeket mozdít el. Ne tartsák vissza lélegzetüket! Jobb leülni és elkezdeni a helytelen koncepciók újbóli átgondolását.

## IRODALOM


[1] Akaike, H.: ,,Stochastic theory of minimal realization'', *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1974. AC-19: pp. 667—674.

[2] Antoulas, A.: ,,On canonical forms for linear constant systems'', *International J. Control*, 1981. 33: pp. 95—122.

[3] Box, G. E. P. and Jenkins, G. M.: *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, Holden-Day, 1976.

[4] Deistler, M. and Hannan, E. J.: ,,Some properties of the parameterization of ARMA systems with unknown order'', *J. of Multivariate Analysis*, 1981. **11.**

[5] Faurre, P.: ,,Réalisations markoviennes de processus stationnaires'', Research Report No. 13, 1973. IRIA, Rocquencourt, France.

[6] Faurre, P., Clerget, M. and Germain, F.: *Opérateurs Rationnels Positifs: Application a l'Hyperstabilité et aux Processus Aléatoires*, Dunod, 1979.

[7] Frisch, R.: *Statistical Confluence Analysis by Means of Complete Regression Systems*, Publication No. 5, University of Oslo Economic Institute. 1934.

[8] Griliches, Z.: ,,Errors in variables and other unobservables'', *Econometrica*, 1974. **42.** pp. 971—998.

[9] Haavelmo, T.: ,,The probability approach in econometrics'', *Econometrica*, 1944. **13,** Supplement.

[10] Haavelmo, T.: ,,Methods of mesuring the marginal propensity to consume''. *J. American Statistical Association*, 1947. **42.** pp. 105—122.

[11] Hannan, E. J.: ,,The statistical theory of linear systems'', in *Developments in Statistics* 1979. Vol. 2, pp. 83—121.
Szerkesztette: Krishnaiah, P. R. Academic Press.

[12] Hannan, E. J.—Dunsmuir, W. T. M. and Deistler, N.: ,,Estimation of vector ARMAX models'', *J. Multivariate Analysis*, 1980. **10.** pp. 275—295.

[13] Kalman, R. E.: ,,A new approach to linear filtering and prediction problems'', *J. Basic Engineering* (Trans. ASME), 1960. **82** D, pp. 35—45.

[14] Kalman, R. E.: ,,Canonical structure of linear dynamical systems'', *Proc. National Academy of Sciences* (USA) 1962. **48.** pp. 596—600.

[15] Kalman, R. E.: ,,Linear stochastic filtering theory — reappraisal and outlook'', in

*Proc. Symposium on System Theory,* 1965. pp. 197—205. Szerkesztette: FOX, J. Polytechnic Institute of Brooklyn.

[16] KALMAN, R. E.: ,,On minimal partial realizations of a linear input/output map'', in *Aspects of Network and System Theory* (a collection of papers in honor of Guilemin, E. A.) 1971. pp. 385—408. Szerkesztette KALMAN, R. E. és DECLARIS, N., Holt, Rinehart, and Winston.

[17] KALMAN, R. E.: ,,Kronecker invariants and feedback'', in *Proc.* 1971—*NRL-MR Conference on Ordinary Differential Equations,* 1972. Szerkesztette: WEISS, L. Academic Press.

[18] KALMAN, R. E.: ,,Algebraic-geometric description of the class of linear systems of constant dimension'', in *Proc. 8th Annual Princeton Conference on Information Sciences,* 1974. pp. 189—191.

[19] KALMAN, R. E.: ,,Realization theory of linear dynamical systems'', in *Control Theory and Functional Analysis,* Vol. II., 1976. pp. 235—256. International Atomic Energy Agency, Vienna.

[20] KALMAN, R. E.: ,,A restrospective after twenty years: from the pure to the applied'', in *Applications of Kalman Filter to Hydrology, Hydraulics, and Water Resources,* 1978. pp. 31—54. Szerkesztette CHAO-LIN CHIU, Dept. of Civil Engineering, University of Pittsburgh.

[21] KALMAN, R. E. ,,A system-theoretic critique of dynamic economic models'', in *Global and Large-Scale System Models,* 1979, 1—24. Szerkesztette B. LAZAREVIC, Springer.

[22] KALMAN, R. E.: ,,Theory of modeling'', in *Proceedings of the IBM System Science Symposium,* 1979, 53—69. Oiso, Japan. Szerkesztette: Y. NISHIKAWA.

[23] KALMAN, R. E.: ,,On partical realizations, transfer functions, and canonical forms'' in *Acta Polytechnica Scandinavica,* Mathematics and Computer Science Series No. 31. 1979.

[24] KALMAN, R. E.: ,,System-theoretic critique of dynamic economic models'', *International J. of Policy Analysis and Information Systems,* 1980, **4.** 3—22.

[25] KALMAN, R. E.: ,,Dynamic econometric models: a system-theoretic critique'', in *New Quantitative Techniques for Economic Analysis.* Szerkesztette: CELLINA, A. and SZEGŐ, G. P. Academic Press, 1980.

[26] KALMAN, R. E.: ,,Identification of linear relations from noisy data'', in *Developments in Statistics,* Vol. 4. Szerkesztette: KRISHNAIAH, P. R. Academic Press, 1982.

[27] KALMAN, R. E.: *Realization Theory.* I. *Deterministic System,* (megjelenés előtt).

[28] KALMAN, R. E., FALB, P. L. and ARBIB, M. A.: *Topics in Mathematical System Theory,* McGraw Hill. 1969.

[29] KOOPMANS, T. C.: ,,Identification problems in economic model construction'', *Econometrica,* 1949. **17.** 125—144.

[30] KOOPMANS, T. C. and REIERSOL, O.: ,,The identification of structural characteristics'', *Annals of Mathematical Statistics,* 1950. **21.** 165—181.

[31] KOOPMANS, T. C., RUBIN, H. and LEIPNIK, R. B.: ,,Measuring the equation systems of dynamic economics'', in *Statistical Inference in Dynamic Economic Models.* 1950. 54—231. Szerkesztette KOOPMANS, T. C. Cowles Commission Monograph No. 10. Wiley.

[32] MALINVAUD, E.: *Méthodes Statistiques de l'Econométrie.* 3. kiadás, Dunod. 1978.

[33] MEHRA, R. K.: ,,Identification and estimation of the error-in -variables model (EVM) in structural form'', in *Mathematical Programming Study* (North Holland), 1976. Vol. 5. 191—210.

[34] NEUMANN, von J.: ,,The impact of recent developments in science on the economy and on economics'', summary of speech before the National Planning Association, Washington, DC; in *Looking Ahead,* **4.** 11, vagy *Collected Works,* Volume VI. 1955. 100—101.

[35] PICCI, G.: ,,Stochastic realization of gaussian processes'', *Proceedings of the IEEE,* 1976. **64.** 112—122.

[36] PICCI, G.: ,,Some connections between the theory of sufficient statistics and the identifiability problem'', *SIAM J. Applied Mathematics,* 1977. **33.** 383—398.

[37] PUTTEN van C. and SCHUPPEN, van J. H.: ,,On stochastic dynamical systems'', *Proceedings 4th International Symposium on the Mathematical Theory of Networks and Systems,* Delft, Netherlands, 1979.

[38] RISSANEN, J.: ,,Recursive identification of linear systems'', SIAM J. *on Control,* 1971. **9.** 420—430.

[39] Rissanen, J. and Kailath, T.: ,,Partial realization of random systems", *Automatica,* 1972. **9.** 389—396.
[40] Rosenbrock, H. H.: *State-space and Multivariable Theory,* Wiley, 1970.
[41] Sontag, E. D. and Rouchaleau, Y.: ,,On discrete-time polynomial systems", *J. Nonlinear Analysis,* 1976. **1.** 55—64.
[42] Tannenbaum, A.: *Invariance and System Theory: Algebraic and Geometric Aspects,* Springer Lecture Notes in Mathematics, No. 845. 1981.
[43] Theil, H.: *Principles of Econometrics,* John Wiley, 1971.
[44] Whitman, M. v. N.: *Reflections of Interdependence: Issues for Economic Theory and US Policy,* University of Pittsburgh Press, 1979.
[45] Wold, H. (szerkesztő) *The Fix-Point Approach to Interdependent Systems,* North-Holland, 1981.
[46] Yamamoto, Y.: ,,Realization theory of infinite-dimensional linear systems", 1981. (megjelenés előtt).

# KÖNYVEKRŐL

Korán Imre: *Világmodellek. A Római Klub jelentéseitől az ENSZ kezdeményezéséig.* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó Budapest, 1980. 204. o.

*Korán* Imre „Világmodellek" című könyve egy rendkívül sokat emlegetett és az utóbbi években egyre bővülő szakmai és egyéb (például politikai) viták kereszttüzébe került problémakörről nyújt vázlatos, de azért rendkívül hasznos információkat. A hatvanas évek végétől kezdve kíséri figyelemmel azokat a tanulmányokat modellkísérleteket, amelyek átfogó képet igyekeztek nyújtani a Föld lakossága, nemzetei előtt álló legjelentősebb társadalmi-gazdasági problémákról, a „világot", az emberiséget jelenleg is valósan — vagy várhatóan — fenyegető veszélyekről, elképzelhető „katasztrófa szitúációkról". Óriási irodalma van ma ennek a témának, s nemcsak kifejezetten tudományos (természet- vagy társadalomtudományi) értelemben, hanem a napi zsurnalisztika szintjén is, hiszen ezek a kérdések azok, amelyek talán a leginkább foglalkoztatták — elsősorban a fejlett tőkés társadalmakban — a tudományos és a nem-tudományos közvéleményt egyaránt a elmúlt évtizedben.

Mindezen túl a könyv azért is tarthat nagy érdeklődésre számot, mivel magyar nyelven alapvető hiányt pótol. Ez az első olyan összefoglaló mű, amely megkísérli áttekinteni az elkészült világmodelleket, a világ általános gazdasági és társadalmi helyzetével és jövőjével kapcsolatban megjelent legfontosabb alkotásokat.

A könyv egyrészt a megszületés időpontja, másrészt a különböző modelleknél alkalmazott fő metodológiai alapelv szerint csoportosítja és rendszerezi az elkészült tanulmányokat. Így egy-egy fejezete — a nyitó és záró fejezetet leszámítva — több hasonló módszertani indíttatású modellt ismertet.

A II. fejezet az ún. „rendszerdinamikai világmodellek" jellemzőit, ezek tudományos és politikai alapelemeit, feltevéseit tárgyalja. Az összes ismertetett modellek közül ezek a legformalizáltabbak, a leginkább épülnek az utóbbi évtizedekben kidolgozott rendszerelméletre. Magukon viselik a számítógépek, a számítástechnika robbanásszerű elterjedéséből adódó tudományos (és nem tudományos) illúziókat, nevezetesen, hogy a valóság rendkívül bonyolult és összetett folyamatai teljesen (vagy majdnem teljesen) leírhatók bizonyos matematikai apparátusokkal és a számítógépek segítségével.

Az ezen modellekben alkalmazott rendszerdinamika alapjait J. W. *Forrester* és kutatócsoportja rakta le az „ipari dinamika" keretében. Ezek szerint olyan rendszereknél alkalmazható ez a módszer amelyeknek két alapösszetevője van, éspedig a folyamatok ütemei, azaz az áramlási sebességek, valamint a rendszerállapotok, vagyis a rendszer elemeinek halmozódási szintje. A döntések az adott szintek információin alapulnak, és a szintek (állapotok) közötti áramlási sebességek szabályozására irányulnak. A modell egyszerű algebrai és differenciálegyenletekkel írható le.

Két ilyen rendszerdinamikai alapokon nyugvó világmodellt ismertet Korán Imre könyve, a J. W. Forrester által publikált „A világ dinamikája" és a D. L. *Meadows* és kutatócsoportjánál készült „A növekedés határai", című jelentést, amely utóbbi, mint a Római Klub 1. számú jelentése, világhírnévre tett szert, és óriási vitákat váltott ki.

Mindkét modell lényeges módszertani alapgondolata: a világ gazdasági és társadalmi helyzete matematikai modellekkel leírható; különböző változókkal szimulálható; a rendszer várható jövőbeni állapotai meghatározhatók a számítógépes modellezés segítségével.

A Forrester-féle világmodell egyik legérdekesebb része kísérlet az „életminőség" vizsgálatára trendszámítás segítségével. A modell alapfeltevése, hogy a világgazdaságban a termelés növekszik, a nyersanyag-készlet csökken. A modellt a népesség növekedési ütemére, a tőkebefektetések mértékére, a nyersanyagfelhasználás ütemére, a környezetszennyezés fokára, az élelmiszertermelésre vonatkozó döntések vezérlik. Az ún. „életminőséget" megpróbálja számszerűsíteni is a modell, mégpedig oly módon, hogy az említett életminőség faktorok szorzataként értelmezi. Tehát, ha $L$-el jelöljük az életminőséget, akkor $L = L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 \cdot L_4$ ahol $L_1 = F$ (az egy főre eső élelmiszerkínálat), $L_2 = F$ (anyagi életszínvonal); $L_3 = F$ (népsűrűség); $L_4 = F$ (elszennyeződés). Az $L$ érték így a modell magatartását jelző indikátor.

A Forrester modell rendkívül érdekes kísérlet a valóság matematikai formalizálására, több fontos eredménnyel, ugyanakkor élesen láthatóvá teszi azokat a problémákat, amelyek éppen ebből a formalizmusból következnek.

Hasonló alapállásból bírálható a D. L. Meadows és kutatócsoportja által kidolgozott, talán leghíresebb tanulmány és világmodell, amely „A növekedés határai" nevet viseli. Meadows és társai is rendszerelméleti meggondolások alapján építették fel a világmodellt, amelyben az alapvető tényezők a népesedés és iparosodás folyamata, az élelmiszertermelés, a környezetszennyeződés és a fogyó nyersanyagkészletek voltak. Magát az alapmodellt több alrendszer modellje egészíti ki, amelyeket pozitív és negatív visszacsatolás köt össze. Ennek folyamatábráiból világosan kirajzolódnak a modellek elméleti, módszertani alapfeltevései. Maga a Meadows-féle modell természetesen a vázlatos ismertetésnél lényegesen bonyolultabb, 93 változót tartalmaz, csoportosításuk, mérési módjuk, mértékegységük megtalálható a könyvben. „A növekedés határai" — a kutatás zárójelentése természetesen csak a legfontosabb modellváltozatokat, a leglényegesebb eredményeket közli. Korán Imre könyve pedig ennek is csak a vázlatos, de igen informatív kivonatát. Ami „A növekedés határai" zárókövetkeztetéseit illeti, jó részük — bár csak hézagosan, és némileg leegyszerűsítve — ismertté vált az egész világon. (Hangsúlyozottan rá kell azonban arra mutatni, s Korán Imre is ezt teszi, hogy még az összefoglaló zárójelentésben is 12 modellváltozatról van szó, ezeknek különbözőségeit, alapfeltevéseik és eredményeik eltérését a könyv pontosan leírja.)

Sokan elmondták már, tehát nem újdonság „A növekedés határai"-val kapcsolatban, hogy igazi ereje nemcsak a világproblémák újtípusú — rendszerszemléletű — megközelítésében van — (ennek kapcsán a formalizmus hibái újfent kísértenek), hanem elsősorban abban, hogy igen hatásosan és látványosan hívta fel a figyelmet azokra a tényleges veszélyekre és problémákra, amelyekkel a 20. század vége felé tartó emberiségnek szembe kell néznie.

A következő fejezetekben ismertetett világmodellek elkészítését tulajdonképpen „A világ dinamikája" és „A növekedés határai" körül kialakul viták is inspirálták. Pontosabban azok az ellenvélemények, amelyek a két modellt túl formalizáltnak tartották, s azért bírálták, mert a világot zárt automata rendszerként kezelve, a belső — földrészenkénti, régiókénti — különbségeket elmosták.

M. *Mesarovič* és *E. Pestel*: „Fordulóponton az emberiség című tanulmánya egy regionalizált többszintű világmodell elkészítésére tett kísérlet, ezt a modellt ismerteti a III. fejezet. Ebben a modellben a világot tíz sajátos fejlettségű földrajzi régió kapcsolatrendszere ábrázolja. Az alrendszereknek „organikus" növekedést kellene mutatniuk, ehelyett azonban „vadul", exponenciálisan növekednek, s így katasztrófahelyzetek, az egész világot fenyegető szituációk alakulhatnak ki a részek nem megfelelő „együttműködése", funkcionálása folytán. A válságszituációk más és más következményekkel járhatnak az egyes régiók számára, azonban a kölcsönös függőségek miatt kihatnak a többi részre is.

Mesarovičék esetében maga a modell az egész kísérletnek csak az egyik „része", ugyanis, amint Korán Imre írja: „A komputermodell a rendszer evolúciójának jövőjét többféle „feltétel" közlése alapján számítja. A feltételek — a lehetséges döntések, intézkedések, események — a szcenáriókban fogalmazódnak meg. A módszert szcenárió-analizísnek nevezik . . . A szcenárióanalízis rugalmas eljárás, mely különböző lehetőségek vizsgálatára vállalkozik." A szerzők elképzelése szerint a világ, s így a modell is, hierarchikus struktúrával rendelkezik, a különböző szintek ebben a szerkezetben szorosan összefüggenek egymással. Az említett szintek a modellben (és a számítógépes ábrázolásban) a következők: környezeti szint; technológiai szint; demoökonómiai szint; társadalmi szint; individuális szint.

A számítógép alkalmazása pedig itt nem azt jelenti, hogy a már említett változókra, kapcsolatokra, relációkra, ezek összefüggéseire egy optimalizáló algoritmust dolgoztak ki, hanem többféle numerikus módszert alkalmaznak, s a logikai és kvalitatív megfogalmazásoknak és következtetéseknek is nagy szerepük van. A fejezet befejező részében a könyv röviden ismerteti a Mesarovič—Pestel modell legfontosabb eredményeit a „jövedelmi szakadékról", a népességrobbanásról, az energiáról, a világélelmezés helyzetéről, az energiaforrások jutatásáról. Meg kell még jegyezni, hogy ennek a modellnek a nemzetközi fogadtatása kedvezőbb volt, mint az előző modelleké.

Bizonyos értelemben a Mesarovič—Pestel modellhez hasonló elméleti alapállás jellemzi az ENSZ felkérésére Wassily *Leontief* által készített tanulmányt, amely amely ,,A világgazdaság" jövője" címet viseli, és globális input-output modellnek nevezhető. A Leontief modell a könyv IV. fejezetének témája.

Az input-output modellek alkalmazása, a gazdasági rendszerek vizsgálatánál ma már rendkívül elterjedt módszer,. A Leontief modell a világgazdaságot is összefüggő egésznek írja le, amelyben különböző — fejlett és fejlődő — régiók gazdaságai kapcsolódnak egymáshoz; hasonlóan, mint a nemzetgazdaságok ágazatai, vagy gazdasági egységei; a termelés és kibocsátás összefüggéseit pedig konkrét statisztikai adatok alapján az ÁKM modellekből is ismert közvetlen és közvetett ráfordítási és kibocsátási együtthatók írják le.

Az input-output modell így gazdasági ágazatok (mezőgazdaság, nyersanyag és energiahordozók kitermelése, feldolgozó ipar, szolgáltatás és infrastruktúra) kapcsolódásait írja le a különböző — fejlett országok, kedvezőbb adottságú fejlődő országok — régiókon belül és azok között.

Maga a modell előrejelzési, becslési célokat szolgál, azzal a céllal, hogy megpróbálja kimutatni azokat a gazdasági folyamatokat amelyek eredményeképpen 2000-re a fejlettségbeli és jövedelmi különbségek számottevően csökkenjenek. A jövedelmek mérésére a modellben a GNP/fő dollárban kiszámított értéke szolgált.

Több modellváltozat is készült, amelyeknél a vizsgált paraméterek, a bruttó termék, a lakosságszám, az egy főre jutó bruttó termék változása más-más ütemű. A modell által vizsgált gazdasági ágazatok lehetséges fejlődésének és a különböző növekedési ütemek egymásrahatásának eredményeit ismerteti a szerző a fejezet zárórészében. Ragadjunk ki ebből egy példát a Leontief modell módszerének illusztrálására: ,,A világkereskedelmi változások és fizetésimérleg-gondok" című fejezetben például az egyik változat azt feltételezi, hogy a fejlődő országok importrészesedése a világ importjából a vizsgált 30 évben 16%-ról 35%-ra nő. Mivel export részesedésük kb. azonos marad 16—17%, külkereskedelmi mérlegükben így 14%-os negatív egyenlegük lesz, s így a mai (1970-es) árakon számolva 190 milliárd $ mérleghiány keletkezik. Így viszont nem valósítható meg a gyorsított gazdasági fejlődés, a beruházások volumene nem éri el a kívánt szintet, ez visszahat a jövedelmekre, a mezőgazdasági termelés fejlesztésére, ez a népesség helyzetére és így tovább. Az input-output modell tehát látható módon minden modellkísérletnél végig kívánja vizsgálni a fontos paraméterek változásának hatásait a többi paraméter mozgására.

A Leontief-modell sok szempontból — nemcsak módszertanilag — más alapállású, mint a Római Klub jelentései. Részben azért, mert igen nagy hangsúlyt helyez a jövedelemeloszlásra és a társadalmi-gazdasági viszonyokra. Továbbá azért is, mert meglehetősen optimista hangvételű, s úgy véli, hogy a világ jelenlegi gazdasági-társadalmi (és nem utolsósorban pénzügyi) adottságai lehetővé teszik a problémák megoldását, megfelelően összehangolt fejlesztési politikák esetén. Rendkívül érdekes továbbá az is, hogy igen nagy szerepet szánna a politikai és szociális intézmények átalakításának, valamint a résztvevő gazdasági — társadalmi alanyok ,,jóakaratú" magatartásának.

A további fejezetekben még három jelentősebb modellről esik szó a könyvben. Az első modell (a könyv V. fejezete) Jan *Tinbergen* munkája: ,,A nemzetközi rend átalakítása". Bár a szerző nevéhez világszerte elsősorban az ökonometria fogalmára asszociálnak, az általa vezetett kutatócsoportnak az ENSZ számára készített ,,szakértői ajánlása" nem a matematikai formalizmus talaján áll, hanem lényegében verbális társadalmi-gazdasági elemzés a világ helyzetéről, a jövőben követendő célokról és a megvalósításukhoz szükséges gazdasági és nem gazdasági eszközökről. A tíz témakör amelyekről a jelentés szól, felöleli az összes fontos világgazdasági problémát. Ezek: a nemzetközi valutarendszer; a jövedelem elosztása és a fejlődés finanszírozása; az élelmiszer termelése és elosztása; az iparosítás, a kereskedelem és a nemzetközi munkamegosztás; energia, ércek, ásványok; a tudományos kutatás és a technikai fejlesztés; a transznacionális vállalatok; az emberi környezet; a leszerelés; a tengerek igazgatása. Az elemzések három ,,világszférára" vonatkoznak az iparosodott tőkés szférára; a szocialista szférára; a fejlődő országokra. Tinbergen és kutatócsoportja mindezen kérdéskörökben pontos és alaposan átgondolt javaslatokat tesz, részben általános formában, részben pedig különböző időhorizontokra — középés hosszútávra—vonatkozóan.

Igen érdekes volt a modell nemzetközi fogadtatása, általában méltányolták a humánus alapállást és célokat, de ugyanezért kissé naívnak tekintik a Tinbergen jelentést, mivel szinte teljes egészében a fejlett világtól várja a fejlődő világ problémáinak megoldását, elsősorban morális meggondolásokból kiindulva (de természetesen megfelelő politikai, gazdasági stb. eszközökkel).

A VI. fejezetben ismertett „A hulladékkorszak után" című modell tulajdonképpen a „A növekedés határai"-nak kiegészítése, amely az abból hiányolt tudományos és technikai fejlődést hivatott pótolni. A magyar származású *Gábor* Dénes által irányított tudóscsoport fő vizsgálati területei: a munkaszervezés; az energia, az anyagok, az élelmiszerek, az éghajlat voltak.

„Célok az emberiség számára" címmel jelent meg a Római Klub legutóbbi tanulmánya, amelyet a szintén magyar származású *László* Ervin és kutatócsoportja publikált. Ez a modell vetette fel a legélesebben a társadalmi tervezés gondolatát, amely nélkül a világ gazdasági rendjének átalakítása sem képzelhető el. Annál kevésbé, mivel a legsúlyosabb gondokkal küzködő fejlődő világ a népesség növekedésének mai üteme mellett a következő évszázadban már a Föld népességének kb. 90%-át teszi ki, s problémáik nem oldhatók meg, világosan megfogalmazott célok, értékek, érdekek figyelembevétele nélkül. A tanulmány igyekszik a különböző társadalmi rendszerű régiók sajátos céljait interpretálni. Ez az ún. „célok világatlasza" rész tulajdonképpen a jelenlegi politikai, ideológiai jellemzők, törekvések összefoglalásának is tekinthető.

Ezután a kutatócsoport a jelentésben kísérletet tesz arra, hogy megfogalmazza az emberiség elé a jövőben kitűzendő legfontosabb olyan célokat, amelyek megvalósítása révén leküzdhetőek lennének a jelenlegi súlyos világproblémák. Ilyenek többek között a globális (és nem katonai) biztonságon nyugvó együttélés, a globális élelmiszer, energia és nyersanyaggazdálkodás megteremtése. Ezek után a jelentés a legfontosabb célok eléréséhez szükséges gazdasági, társadalmi — politikai, kulturális eszközöket kívánta felsorolni, erőteljesen hangsúlyozva olyan morális tényezők fontosságát is, mint a szolidaritás eszméje, vagy az egyéni érdekekről való lemondás. A László Ervin féle modell tehát kevés rokonságot mutat az előző modellekkel, mert a humán tényezők elsőrendű fontosságát hangsúlyozza.

Korán Imre igen informatív könyvének befejező két fejezete a világmodellek megvalósulásáról és a hazai jövőkutatási törekvésekről, valamint ezeknek a világmodellekhez való viszonyulásáról szól. Ez utóbbi részben felhívja a figyelmet arra, hogy a hazai jövőkutatásnak is mind intenzívebben be kell kapcsolódnia nemzetközi kutatásokba, átvéve azokat az eredményeket, és eszközöket, amelyek a világmodellek készítésénél hasznosnak, jónak bizonyultak és meghaladni azokat, amelyek mai ismereteink szerint tévesek, használhatatlanok.

Ujvári József

# *TUDOMÁNYOS ÉLET*

# Szakértői konferencia sorozat Salgótarjánban

A Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai-Közgazdasági Szakosztályának vezetősége 1978 tavaszán határozta el, hogy félévenként rendszeresen szakértői „kis-konferenciát" szervez. Partnerként csatlakozott a kezdeményezéshez az MKT Nógrád megyei szervezete és megkaptuk a megyei, és a salgótarjáni városi párt és állami vezetés állandó támogatását is. A konferenciák helye így állandóan a Salgótarján üdülő körzetében található Salgó Hotel, a résztvevők száma 40, igen kis ingadozással. A Matematikai-Közgazdasági Szakosztály vezetősége esetenként felveszi a kapcsolatot az MKT-nak az aktuális téma iránt érdeklődő szakosztályaival, működjenek közre a meghívandó szakembergárda kiválasztásában. A konferenciák jellege a következő főbb típusok között váltakozik:

1. Elméleti kérdésekkel foglalkozó szakemberek cserélik ki gondolataikat.
2. Alkalmazók számolnak be egymásnak s a közvetlen gyakorlat irányítóinak újabb eredményeikről, felhasználói lehetőségekről.
3. A felhasználók fogalmazzák meg igényeiket.

— Lényeges sajátsága szinte valamennyi konferenciának a jól körülhatárolt *speciális szakterület*, s az a tény, hogy nem az előadások, hanem inkább a viták dominálnak a szervezésben.

A szervezők tőlük telhetően minden esetben igyekeznek a konferencia jellegének és témájának megfelelő hazai szakmai centrumok felderítésére és képviseletének biztosítására.

A szakértői kis konferenciák szervezésével kapcsolatos alapvető elgondolás az volt, hogy szemben a többszáz fős, nagy tömegeket mozgató rendezvények számos más pozitív tulajdonságával, ezen alkalmakkor a legszorosabb értelemben vett szakmai munka álljon előtérben. Ma már egyértelműen megállapítható, hogy a kezdeményezés bevált, a Szakosztály vezetősége folytatja e rendezvénysorozatot.

A kezdeményezés óta eltelt idő alatt az alábbi konferenciákat tartották meg: (lásd: 126. oldalon)

A következőkben röviden összefoglaljuk az egyes konferenciák fontosabb programpontjait.

## 1. A fogyasztás matematikai modellezése

A konferencia munkája négy fő gondolatmenet köré csoportosult. A fogyasztási szerkezet alakulására vonatkozó számítási eredmények. Az eredményekből levonható ár- és társadalompolitikai következtetések, előrejelzési és tervezési célú felhasználásuk. Módszertani tapasztalatok a Stone modellel és a modell továbbfejlesztése. Újabb módszerek a fogyasztáselemzésben.

Előadást tartottak: *Éltető* Ödön, *Enyedi* József, *Simon* András, *Szakolczai* György, *Antal* Kálmánné, *Penzné*, *Lajta* Katalin és *Valló* Tamás, *Versztovsek* Radmila, *Hulyák* Katalin, *Kakuszi* István, *Muszély* György, *Ördög* Miklós, *Semjén* András.

## 2. A hatékonyság mérése a nemzetközi cserénél

A központi témák a következők voltak:

— A népgazdasági szemléletű exportgazdaságosság mérésénél alkalmazott mutatók. (Az exportgazdaságosság mérése, a netto devizahozam, az exportgazdaságosság érvényre jutása és javítása.) Előadó: *Deák* János.

| Sorszám | Dátum | Téma | A szervezést irányította |
|---|---|---|---|
| 1. | 1978 máj. 29–30. | A fogyasztás matematikai modellezése | Szakolczai György |
| 2. | 1978 nov. 14–16. | A hatékonyság mérése a nemzetközi cserénél | Szakolczai György |
| 3. | 1979 jún. 4–6. | A magyarországi ökonometriai modellekről | Szakolczai György |
| 4. | 1980 márc. 17–19. | A beruházási tevékenység kvantitatív elemzése | Meszéna György |
| 5. | 1980 máj. 26–28. | Matematikai rendszerelmélet | Szép Jenő |
| 6. | 1980 okt. 27–29. | Számítógépes vállalati információs rendszerek tervezése és szervezése | Kiss Imre |
| 7. | 1981 ápr. 23–26. | Magyar–Osztrák algebrista találkozó | Szép Jenő |
| 8. | 1982 máj. 24–26. | A számítástudomány rendszerelméleti aspektusai | Peák István |

— A külgazdasági kapcsolatok hatékonyság vizsgálatának problémái. Előadó: *Drechsler* László.
— Néhány gondolat a külkereskedelmi csere hatékonyságának mérésével kapcsolatban. Előadók: *Medgyessy* Péter, *Aut* Henrik. Korreferáltak: *Némedi* László, *Botos* Katalin, *Kristóf* Imre.
— A hatékonyság mérése a nemzetközi cserénél. Előadó: *Simán* Miklós. Korreferáltak: *Zsednai* Pál, *Botka* Tibor, *Bogyó* Tibor, *Faragó* Katalin.
— Az export reális költségei: eredmények és továbbfejlesztési lehetőségek. Előadók: *Szakolczai* György, *Hamza* Lászlóné, *Pölöskei* Pál. Korreferált: *Csepinszky* Andor.

## 3. A magyarországi ökonometriai modellekről

A megvitatott modellek az OT Tervgazdasági Intézetében, a KSH-ban, a Konjunktúra és Piackutató Intézetben és a SZÁMKI-ban készültek. Kissé részletesebb áttekintésüket az alábbiakban adjuk meg.

A KSH Ökonometriai Laboratóriumának M-modelljei *(Halabuk* László). A gazdasági folyamatok és a népgazdaság főbb mutatói közötti sztohasztikus kölcsönhatások néhány elvi problémája *(Bánkövi* György—*Veliczky* József—*Ziermann* Margit). A külgazdasági folyamatok és a népgazdaság főbb mutatói közötti sztochasztikus kölcsönhatások dinamikus faktormodellezése. *(Postáné Vellay* Györgyi—*Veliczky* József). A népgazdaság főbb folyamatai teljesen rekurzív (dinamikus) ökonometriai modellezésének eddigi tapasztalatai. *(Getherné Simon* Erzsébet). A rövidtávú tervezés ökonometriai prognózis modellje. (*Hunyadi László—Neményi* Judit—*Subicz* Péter—*Fiala* András). A magyar népgazdaság egy ökonometriai modellje *(Simon* András). Elképzelések a Gazadságkutató Intézet előrejelzési ökonometriai modelljének módosításáról *(Nyáry* Zsigmond—*Ormós* Zsolt). Cyclical Centralism's Explanation of Hungarian Investment Fluctuations (Michael *Marese*). A magyar gazdaság hosszútávú vizsgálata ökonometriai módszer segítségével. *(Nyáry* Zsigmond). A magyar sertésciklus ökonometriai modellje *(Kornai* Gábor).

## 4. A beruházási tevékenység kvantitatív elemzése

A konferencia a bevezetőben felsorolt típusok szemszögéből átmenet volt a kettes és hármas kategória között. Aktív és sokoldalú szakember gárda, élénk s igen eredményesnek ítélt viták jellemezték a konferenciát. A megvitatott témák a következők voltak. Nyitott kérdések a beruházási tevékenység elemzésében (*Havas* Péter). Megoldatlan problémák a beruházásgazdaságossági vizsgálatokban (*Drechsler* László). A beruházások befejezetlen állományának szimulációs modellezése (*Forgó* Ferenc—*Temesi* József). Tapasztalatok a vállalati beruházások finanszírozási szférájából (*Fodor* Gyula) Fejlesztések és a munkaerő kapcsolata (*Nyilas* András). Komplex beruházások kvantitatív döntéselőkészítési problémái (*Csuka* József—*Ress* Sándor—*Szabó* Elek). Beruházási politikánk főbb kérdései (*Winkler* György). A beruházási költség előrejelzése (*Bakonyi* Árpád—*Csatlós* Ferenc—*Törökné Matits* Ágnes).

## 5. Matematikai rendszerelmélet

A Matematikai Rendszerelmélet témájú tudományos szakértői konferenciát az MKKE Matematikai és Számítástudományi Intézete és a Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai-Közgazdasági Szakosztálya közösen rendezte, mintegy 45 fő részvételével. A résztvevők jelentős része magyar volt, de voltak résztvevők az Egyesült Államokból, Hollandiából és Venezuelából is. Az előadók között szerepelt R. E. *Kalman* professzor Zürich-ből és A. *Lindenmayer* professzor Utrechtből. A konferencián résztvett és előadást tartott több, hazánkban dolgozó vietnami aspiráns is. Az előadások az általános és dinamikus rendszerelmélet, a biológiai rendszerek matematikai elmélete, az automaták és a formális nyelvek elmélete és a párhuzamos folyamatok elmélete egyes fejezeteiben elért legújabb eredmények bemutatását szolgálták és alkalmat adtak a témakörökben kötetlen, elmélyült beszélgetésekre.

A konferencián elhangzott 21 előadás anyagát az MKKE Matematikai és Számítástudományi Intézete *Peák* I. és *Szép* J. szerkesztésében angol nyelvű kiadványban jelentette meg: Conference on Mathematical System Theory, Held in Salgótarján, May 26—28, 1980, Dept. of Math. K. Marx Univ. of Economics, Budapest, 1981, címmel.

## 6. Számítógépes vállalati információs rendszerek tervezése és szervezése

A konferencián három fő terület képviselői vettek részt: a felsőoktatás és továbbképzés területén dolgozók, a szervezőintézetek vezető munkatársai, vállalati szervező szakemberek. A cél a kutatások helyzetének, az alkalmazások eredményeinek és a továbbfejlesztés lehetőségeinek áttekintése volt. A megvitatott központi témekörök az alábbiak voltak: az informatika elmélete, az informatika módszertana és a számítógépes alkalmazások. Előadásokat és korreferátumokat tartottak: *Kiss* Imre; *Gábor* András, *Bodnár* Pál, *Ágoston* László, *Kiss* József, *Roób* Gusztáv.

## 7. Magyar—Osztrák algebrista találkozó

A rendezvény 26 fő részvételével, 10 osztrák, egy NDK, két Csehszlovák és 13 magya algebrista találkozója volt. A konferencián négy nagyobb előadás hangzott el:
U. *Oberts:* Algebra und Kombinatorik
R. *Pöschel:* Dualität von Funktionen und Relationen
H. *Kautschitsch:* Formale Potenzreichen
R. *Castoral:* Anwendungen der Verbandstheorie.

A rendelkezésre álló többi időben a résztvevők kisebb csoportokban vitatták meg az algebra aktuális problémáit, például az interpoláció elmélet, a radikál-elmélet, a lineárisan kompakt gyűrűk elmélete, a hálóelmélet témaköreiben.

## 8. A számítástudomány rendszerelméleti aspektusai

A konferenciát, amelyet 1982. május 24—26 között tartunk, az 1980-ban ugyancsak Salgótarjánban megtartott Matematikai rendszerelmélet c. konferencia folytatásának szánjuk, elsősorban hazai résztvevőkkel, de számítunk néhány neves külföldi kutató részvételére is. Előzetes terveink szerint a konferencián a következő témákban hangzanak el az előadók legújabb eredményeit bemutató előadások: algebrai és dinamikus rendszerelmélet, a biológiai rendszerek matematikai elmélete, mesterséges intelligenciák, az automaták és formális nyelvek elmélete, adatstruktúrák és relációstruktúrák, rendszerprogramok és alkalmazásaik, továbbá logiakai programozás. A konferenciát mintegy 50 résztvevővel tervezzük és kb. 20—25 előadásra számítunk. Az előadások anyagát az MKKE Matematikai és Számítástudományi Intézete angol nyelvű kötetben jelenteti meg.

Meszéna György

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója — Műszaki szerkesztő: Sándor István
A kézirat nyomdába érkezett: 1982 február 1. Terjedelem: 11.2 (A/5 ív),

82.10473 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős: Bernát György

## CONTENTS



## BORROWED QUILLS



## BOOK REVIEWS



## SCIENTIFIC LIFE



## СОДЕРЖАНИЕ



## СО СТРАНИЦ ЗАРУБЕЖНЫХ ЖУРНАЛОВ



## О КНИГАХ



## НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ

Ára: 40,— Ft
Előfizetés egy évre: 80,— Ft

INDEX: 26793
ISSN 0039—8128

## TARTALOM



## IDEGEN TOLLAK



## KÖNYVEKRŐL



## TUDOMÁNYOS ÉLET



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST