SZIGMA

Matematikai közgazdasági folyóirat

A Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai-Közgazdasági Szakosztályának lapja

*

E szám szerzői:

FÉNYES TAMÁS kandidátus, az MTA Matematikai Kutató Intézet tudományos főmunkatársa, KORNAI JÁNOS akadémikus, az MTA Közgazdaságtudományi Intézet tudományos tanácsadója, Dr. KOVÁCS MARGIT, kandidátus, az ELTE Számítóközpont osztályvezetője, KŐRÖSI GÁBOR, az MTA Közgazdaságtudományi Intézet tudományos munkatársa, SÁRI JÓZSEF, a Magyar Nemzeti Bank osztályigazgatója, SIMON GYÖRGY, a közgazdaságtudományok doktora, az MTA Közgazdaságtudományi Intézet tudományos tanácsadója, SIMON JUDIT, az Országos Tervhivatal főelőadója, SIMONOVITS ANDRÁS kandidátus, az MTA Közgazdaságtudományi Intézet tudományos főmunkatársa, VASTAG GYULA, a Pénzügyi és Számviteli Főiskola tanársegédje, Dr. VÁRLAKI PÉTER kandidátus, a BME Közlekedéstechnikai Intézet tudományos főmunkatársa, JÖRGEN W. WEIBULL, Royal Institute of Technology, Stockholm

Szerkesztőség: Budapest XI., Budaörsi út 43–45.

Levélcím: 1502 Budapest, Pf. 262.

Terjeszti a Magyar Posta. Előfizethető bármely postahivatalnál, a kézbesítőknél a Posta hírlapüzleteiben és a Posta Központi Hírlap Irodáknál (PKHI 1900 Budapest, József nádor tér 1.) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a PKHI 215–96 162 pénzforgalmi jelzőszámára. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76 sz. alatti hírlapboltban

Előfizethető és példányonként megvásárolható: az AKADÉMIAI KIADÓ-nál, 1363 Budapest, Alkotmány u. 21. Telefon 111-010. Pénzforgalmi jelzőszámunk: 215–11488, és az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLT-ban, 1368 Budapest, Váci u. 22. Telefon: 185-612. Előfizetés díj egy évre: 80,–Ft

Külföldön terjeszti a KULTURA Külkereskedelmi Vállalat, H-1389 Budapest. Pf. 149

Kornai János — Simonovits András

Beruházás, hatékonyság és hiány: egy makronövekedési modell*

1. Bevezetés

Témaválasztásunkat a kelet-európai szocialista országok jelenlegi gazdasági nehézségei inspirálták. A következő folyamatok közti összefüggéseket szeretnénk leírni: (i) A hiány intenzitása az említett országok egyikében sem csökken lényegesen, sőt egyes országokban jelentősen fokozódik. (ii) Mind a termelés, mind a beruházás hatékonysága több országban fokozatosan romlik. (iii) Jelentősen lassul, esetenként megáll a beruházások, a termelés és a fogyasztás növekedése. (iv) Egyes szocialista országokban a kapacitások bővítési ütemét a beruházási hányad fokozatos emelésével próbálják fenntartani — akár a fogyasztás korlátozása, akár a hiány kiélezése árán.

A felsorolt jelenségek nyilvánvalóan összefüggnek egymással. Például csökkenő beruházási hatékonyság állandó beruházási hányad mellett csökkenő növekedési ütemet okoz a kapacitásoknál, s ezt a beruházási hányad emelése is csak részben tudja ellensúlyozni; sőt a túlberuházás által okozott fokozódó hiány tovább rontja a beruházási hatékonyságot.

Tanulmányunkkal szeretnénk összekapcsolni a közgazdasági irodalom két régióját. Az egyik régió: a *növekedéselmélet*, amelynek hagyományos témája a beruházási hányad, a beruházási hatékonyság és a növekedési ütem összefüggéseinek vizsgálata.[1] Kimutatható (bár ezt mi cikkünkben a terjedelem korlátai miatt nem tehetjük meg), hogy a növekedéselmélet egyes klasszikus tételei megfogalmazhatóak saját modellünk keretei között is, annak alkalmas specifikálása esetén. A másik régió: *a szocialista gazdaság leíró elmélete*, pontosabban: annak az a változata, amelyet Magyarországon dolgoztak ki, s amelynek összefoglaló munkája *Kornai* „A hiány" c. könyve (1980). Ennek az elméleti irányzatnak a keretében már tettünk kísérletet a szocialista gazdaság makrodinamikájának modellezésére [lásd *Kornai* (1982) és *Kornai — Simonovits* (1982)].[2] A jelen dolgozat közvetlen folytatása e két tanulmánynak; az

* Köszönettel tartozunk hasznos megjegyzéseikért V. *Benacek*nek, *Halpern* Lászlónak, *Körösi* Gábornak, *Martos* Bélának, *Molnár* Györgynek, *Rimler* Juditnak és J. W. *Weibull*nak a tanulmány első fogalmazványához fűzött értékes megjegyzéseikért.

[1] Áttekintő összefoglalását lásd például *Hahn—Matthews* (1964) cikkében vagy Sen bevezetőjében az általa szerkesztett *Sen* (1970) kötethez. A szocialista gazdaság növekedéselméleti elemzésének klasszikus modellje *Kalecki* (1972). Kísérletek történtek a hagyományos növekedéselmélet és a disequilibrium-elmélet összekapcsolására. (Lásd *Henin—Michel* (1982)). Saját megközelítésünk némi rokonságot mutat ezzel a francia kutatási irányzattal. A készletek szerepét hangsúlyozza a disequilibrium-elméletben *Honkapohja* és *Ito* (1980), a beruházásokét *Malinvaud* (1980). A disequilibrium-elmélet és a szocialista gazdaságok kapcsolatával foglalkozó statikus modellek közül megemlítjük *Portes* (1981)-et.

[2] A magyar irodalomból a fent említett munkákon kívül elsősorban a következő művek adtak támpontokat a jelen tanulmányhoz: *Kornai—Martos* (1981): az árjelzések nélküli

elméleti háttér részletesebb megismerése végett a korábbi munkához utaljuk az olvasót. Dolgozatunk azonban több vonatkozásban különbözik a szóbanforgó két tanulmánytól. Egyfelől meglehetősen leegyszerűsítjük a korábbi modellt: eltekintünk a folyamatok késleltetéseitől és egzogénnek vesszük a fogyasztási hányadot. Másfelől viszont előrehaladásról számolhatunk be. Megszabadulva a korábbi modell Neumann-típusú feltevéseitől, sikerült olyan modellt kialakítani, amelyben a termelés, a beruházás és a fogyasztás növekedési üteme nemcsak rövidtávon, hanem hosszútávon is eltérhet egymástól. A korábbi modell mesterkélt additív hiányindexe helyett a könnyebben értelmezhető multiplikatív mutatóval dolgozunk. Általában elmondhatjuk: új modellünk analitikusan jobban kezelhető, mint a régi.

Tanulmányunk a tiszta elmélet keretei között marad. Nem foglalkozunk azzal, hogy ökonometriai elemzés céljaira milyen módosításokat kell végrehajtani a modellen.

A tanulmány 2. fejezetében ismertetjük a modellt és a feltevéseket. A 3. fejezet a stacionárius pálya stabilitási és működőképességi tulajdonságait elemzi. A 4. fejezet olyan növekedési pályákat elemez, amelyeken a romló beruházási és termelési hatékonyság miatt lassul a kapacitások növekedési üteme. A segédtételek matematikai bizonyítását a Függelék tartalmazza.

2. A modell

2.1. *Alapfeltevések*

Előrebocsátjuk az alapfeltevéseket; a további speciális feltevéseket a modell leírása és elemzése során ismertetjük.

1. Egyetlen homogén makrotermék van.
2. Az árak rögzítve vannak. Az aggregálást e rögzített árakon végezzük.
3. A pénznek nincs explicit szerepe.
4. A fogyasztási hányad egzogén módon adva van.
5. Az egyetlen termelési tényező a kapacitás, melyet beruházás hoz létre. A munkának nincs explicit szerepe. A technikai haladással explicite nem foglalkozunk.
6. Kizárólag raktározható termékekkel foglalkozunk.
7. Nincsenek időbeli késleltetések a reál-, illetve a szabályozási folyamatokban.
8. A gazdaság zárt, nincs külkereskedelem.
9. Az idő folytonos változó és a modell paraméterei folytonosan differenciálható függvények.

A fenti feltevések – különösen a 4. és 8. számúak – lehetővé teszik, hogy aránylag egyszerű és áttekinthető összefüggéseket mutathassunk be. A fogyasztás és a külkereskedelem endogén kezelése elvégezhető; kezünkben vannak azok az elemzések, amelyekben ezt meg is tettük. Ismertetésük azonban feleslegesen megterhelné az első expozíciót. Emellett kívánatos is, hogy a

---

szabályozás modellezése; *Bauer* (1981): a szocialista országokban megfigyelhető beruházási ciklus elmélete és tényanyaga; *Lackó* (1980): a beruházási folyamat ökonometriai vizsgálata.

probléma vizsgálatát olyan modellel kezdjük, amely a beruházási folyamatra összpontosítja a figyelmet, mert itt van a szocialista gazdaság működésében és növekedésében mutatkozó szabályosságok magyarázatának a magva.

2.2. *Változók*[3]

A rövidség kedvéért a t argumentumot elhagyjuk.

V = *készlet.* Előző dolgozatainktól eltérően csak a termelő outputkészleteit szerepeltetjük változóként, s eltekintünk attól, hogy a termelő és a fogyasztó inputkészleteit külön változóként írjuk le.
X = (brutto) *termelés.*
K = *kapacitás.* A korábban felhalmozott állótőke és inputkészlet segítségével „elméletileg" elérhető maximális termelés, amelyet azonban a valóságos termelés még a csúcspontokon sem ér el.
H = *fogyasztás.*
I = *beruházás.* Az állótőke és a termelői inputkészlet nettó növekményét biztosító felhalmozást tekintjük beruházásnak. E ráfordítások késleltetés nélkül hozzájárulnak a kapacitás növekedéséhez.
B = *kapacitásnövekmény.*
A = *termelői felhasználás.* Magában foglalja a pótló beruházásokat.

Az eddig felsorolt hét változó szokványos kardinális mutatószám, amely a „homogén makrotermék" volumenében mérődik. Eltér tőlük a következő mutatószám, amely ordinális jellegű.
Z = *a hiány foka.* Értéke annál nagyobb, minél nagyobb a hiány. Magyarázatára később térünk vissza.

2.3. *A modell egyenletei*

Mérlegegyenletek

Definíció szerint teljesülnek a következő — differenciálegyenletként megfogalmazott — mérlegegyenletek:

Készletváltozás:

$$\dot{V} = X - A - I - H \tag{1}$$

Kapacitásváltozás:

$$\dot{K} = B \tag{2}$$

A változók hányadosai

Modellünkben fontos szerepet játszanak majd a változók bizonyos hányadosai. Egyelőre nevüket és képletüket soroljuk föl:

Készlet forgási sebessége:

$$v = X/V \tag{3}$$

[3] *Jelölési elveink* a következők. A modell *abszolút* változóit latin nagybetűvel, megfelelő *relatív* változóit pedig ugyanazon latin kisbetűvel jelöljük. A *hiánymentes rendszer* (időben változó) paramétereit ~ jellel különböztetjük meg a *tényleges* rendszer paramétereitől. Az *állandókat* (pl. a hiány szerinti rugalmasságokat) általában görög kisbetűvel jelöljük, kivételt képeznek a normával rendelkező változók *normái* és szélsőértékei; ezeket — noha szintén állandók — csillaggal, illetve alsó indexszel különböztetjük meg latin kisbetűs megfelelőjüktől.

Kapacitás kihasználása:

$$k = X/K \tag{4}$$

Ráfordítási együttható:

$$a = A/X \tag{5}$$

Beruházási hatékonyság:

$$b = B/I \tag{6}$$

Beruházási hányad:

$$i = I/X \tag{7}$$

Fogyasztási hányad:

$$h = H/X \tag{8}$$

A hagyományos *lineáris* növekedési modellekben a most bevezetett hányadosokról fölteszik, hogy kívülről (egzogén módon) meghatározott *állandók*. Ebben a dolgozatban a szóbanforgó hányadosok időben változnak és bizonyos összefüggések érvényesülnek egyes változók között. Ezek leírásához azonban először ismernünk kell a hiány fokát meghatározó egyenletet.

A hiány foka

A „hiány" szóhasználatunkban egy széles jelenségcsoportra utal, amely milliónyi elemi mikroeseményből tevődik össze: a vevők nem képesek kielégíteni eredeti konkrét keresletük egy részét, megpróbálkoznak keresséssel, hogy megtalálják a kívánt árut, vagy kényszerhelyettesítést hajtanak végre, vagy későbbre halasztják a vásárlást. Ezeknek az elemi eseményeknek a gyakoriságát és súlyosságát reprezentáljuk – a makroelemzés keretei között – egy szintétikus hiányindex-szel.[4] A most következő egyenlet azt írja le, hogy *mitől függ Z*, a hiány foka, míg az utána következő három egyenlet azt fogja megvilágítani, mi a hiány *hatása* a modell többi változójára.

A krónikus hiánygazdaságban mutatkozó hiány teljes magyarázatát sok tagból álló összetett oksági láncolat adná meg. [Lásd *Kornai* (1980)]. Ebben az egyszerű növekedési modellben csupán az oksági láncolat utolsó tagjaival foglalkozunk (illetve még ezeknek is csupán egy részével). Feltesszük, hogy a hiány annál intezívebb, minél nagyobb a készlet forgási sebessége és minél feszítettebb a kapacitás kihasználása, azaz minél gyakoribb, hogy a termelés a kapacitás konkrét mikro-korlátaiba a géppark vagy az anyagellátás szűk keresztmetszeteibe ütközik. Ennek az összefüggésnek a bemutatására elegendő lenne egy általános $Z(k, v)$ függvényt megadnunk, amely mindkét argumentumában növekvő. Célszerűbbnek tartottunk azonban, hogy ehelyett a $Z(k, v)$ függvény egy speciális alakját válasszuk:

$$Z = \left[1 - \left(\frac{k}{k_m}\right)^{\sigma}\right]^{-\zeta}\left[1 - \left(\frac{v}{v_m}\right)^{\tau}\right]^{\zeta-1}, \quad \text{ahol } \zeta < 1; \tag{9}$$

[4] A *Z ordinális* index, a „hiány foka" rokonságban áll, de nem azonos a standard elméletben használatos *kardinális* jellegű aggregált túlkereslet fogalmával. Terjedelmi korlátok miatt nem vállalkozhatunk arra, hogy itt kifejtsük: miért részesítjük előnyben ezt az indexet a szokványos aggregált túlkereslettel szemben. Ugyancsak nem foglalkozhatunk Z mérésének problémáival. (Lásd ezekről a kérdésekről *Kornai* (1982), 20–32, 41–46 és 152–155).

ahol k_m a kapacitáskihasználás és v_m a készlet forgási sebességének *maximális* megengedett értéke, σ és τ pozitív állandók. Z minimális értéke 1, ami $k = 0 = v$-nél valósul meg.[5] Z maximális értéke ∞, ami $k = k_m$ vagy $v = v_m$ fennállásakor valósul meg. Minél nagyobb a ζ, annál inkább függ a hiány foka a kapacitáskihasználtságtól és annál kevésbé függ a készletek forgási sebességétől. Minél nagyobb a σ, annál gyorsabban nő a hiány foka a kapacitáskihasználás növekedésekor; minél nagyobb a τ, annál gyorsabban nő a hiány foka a forgási sebesség növekedésekor.

A rendszer *működőképességét* a következőképpen definiáljuk:

$$0 < v < v_m \text{ és } 0 < k < k_m.$$

Megjegyzések. A (9) függvény specifikációjának megválasztásakor két szempont vezetett bennünket. Egyrészt: ez könnyen kezelhető forma. Másrészt: „Cobb—Douglas-szerű" alakja ismerős és jól értelmezhető a közgazdász számára. A (9) formula jól tükrözi az okozati összefüggést abban a helyzetben, amikor egyszerre áll fenn az outputkészlet nagy forgási sebessége *és* a szűk keresztmetszetekbe gyakran beleütköző magas kapacitáskihasználás (utóbbi a feszített outputtervek és „rohammunkák" következtében). Viszont a formulának van egy lényeges fogyatékossága. A krónikus hiány körülményei között rendszeresen megtörténik, hogy éppen mert valamelyik erőforrás szűk keresztmetszetnek bizonyul, a többi komplementer erőforrás kihasználása nem teljes, s ezért az összes erőforrás együttes átlagos kihasználása alacsony. Ez a jelenség csupán dezaggregált modellben írható le kielégítően. A mi determinisztikus aggregált modellünkben a kapacitás magasfokú kihasználása tulajdonképpen azt a sztochasztikus mikroszintű jelenséget fejezi ki, hogy a termelésben gyakori a szűk keresztmetszetekbe ütközés és ez szélesen tovagyűrűző hatással jár.

Hasonlóan kirekesztjük elemzésünkből a makrováltozókon belül meglevő *strukturális* vonatkozásokat; pl. azonos készletforgási sebesség egészen különböző hiányhelyzeteket takarhat.

A hiány reálhatása

Míg az előzőkben a hiányt az erőforrások feszített kihasználtságával magyaráztuk; most a fordított hatásirányt írjuk le: a fokozott hiányt tesszük felelőssé az erőforrások rossz hatékonyságú kihasználásáért.

Képzeljünk el először egy *hiánymentes rendszert*, ahol az időben általában változó *anyagráfordítási együttható* $\tilde{a}$ és a *beruházási hatékonyság* $\tilde{b}(i)$ értékű volna. Egyelőre nem foglalkozunk a szóbanforgó időfüggvények tulajdonságaival, csak annyit jegyzünk meg, hogy a beruházási hatékonyság csökkenő függvénye a beruházási hányadnak az $\tilde{a}$ és a $\tilde{b}(i)$ paramétereket egzogén időfüggvényeknek tekintjük.

Modellünkben azonban a *tényleges* ráfordítási együttható és beruházási hatékonyság szerepel. Föltesszük, hogy a ráfordítási együttható növekvő, a beruházási hatékonyság csökkenő függvénye a hiány fokának. Valóban, a

[5] Elméletileg helyesebb volna úgy módosítani a Z függvény (9) alakját, hogy pozitív v-re és k-ra legyen $Z = 1$. Egyébként a σ és τ paraméterek megfelelő választása lehetővé teszi, hogy már valódi v-k és k-k esetén is Z közelítőleg 1 legyen. Numerikus számításainkban ilyen paraméterek szerepelnek.

hiány okozta kényszerhelyettesítés minőségromláshoz és anyagpazarláshoz vezet, a túlhajszolt beruházási tevékenység a megvalósítás gyakori fennakadását, az üzembe helyezések elhúzódását idézi elő, ez viszont gyakran párosul költségtúllépéssel és a tervezett hatékonyságtól való elmaradással. A továbbiakban $\tilde{a}$-t *minimális* ráfordítási együtthatónak, $\tilde{b}$-t *maximális* beruházási hatékonyságnak nevezzük. A hiány hatékonyságrontó hatását *állandó rugalmasságú* függvényekkel írjuk le. A hiány fokának 1%-os növekedése α%-kal növeli a ráfordítási együtthatót és β%-kal csökkenti a beruházási hatékonyságot. Képletben:

$$a = \tilde{a}Z^{\alpha} \tag{10}$$

és

$$b = \tilde{b}(i)Z^{-\beta} \tag{11}$$

Speciálisan föltesszük, hogy a maximális beruházáshatékonyságnak a beruházási hányad szerinti rugalmassága is állandó:

$$\tilde{b}(i) = \tilde{c}i^{-\omega}, \tag{12}$$

ahol $\omega < 1$ és $\tilde{c}$ egzogén időfüggvény.

Megjegyzés. A (11)–(12) függvény mögött rejlő közgazdasági gondolat némileg rokon *Branko Horvat* (1958), (1968) megfigyelésével: a beruházás túlhajszolása csökkenti a hatékonyságot. Hasonlóképpen rokonság mutatható ki a beruházások csökkenő határhatékonyságát feltételező neoklasszikus növekedési modellekkel.[6] Az eltérés főként abban van – formai különbségektől eltekintve, – hogy mi explicit módon elsősorban a gazdaság makroállapotával, „kihasználtságával", „feszítettségével" hozzuk összefüggésbe a beruházás hatékonyságát. *Emellett* modellünk figyelembe veszi azt *is*, hogy a beruházási hatékonyság függhet a beruházási hányadtól.

Méginkább újdonságnak tekinthető a (10) függvény. A folyó inputráfordítás függvényét szinte minden növekedési modell egzogén adottságnak tekinti. Itt viszont endogén módon függ a gazdaság makroállapotától, a hiány fokától.

A hiány szabályozási hatása

Eddig a hiány reálhatásával foglalkoztunk, most rátérünk a hiány szabályozási hatására.

A *beruházási hányad* alakulását két tényezővel magyarázzuk. Kiindulunk egy egzogén adott, de időben változó $\tilde{\imath}$ maximális beruházási hányadból, amelyet a gazdaság akkor valósítana meg, ha nem lenne hiány. A tényleges gazdaságban azonban hiánnyal találkozik a döntéshozó, és kénytelen-kelletlen csökkenti a beruházási hányadot. (Vigyázat, modellünkben $\tilde{\imath}$ nem a tervezett beruházási hányad, amely esetleg túlteljesíthető. Modellünkben $\tilde{\imath}$ a beruházási hányad felső határa, amelytől a gazdaság mindig kénytelen lefelé eltérni.)

[6] A növekedéselméleti irodalomban a következő alternatív feltevések ismeretesek A Harrod–*Domar* modellben $\omega = 0$, amennyiben a növekedési ütem kisebb a „természetes"-nél. A neoklasszikus növekedési modellben (pl. *Phelps* (1961)) $\omega = 1$. Megemlítjük, hogy *Eltis* (1963) egy $\tilde{b}(i) = \tilde{c}_0 + \tilde{c}_1 i$ alakú függvényt választott. (Az említett szerzők mindegyike időben állandó beruházási hatékonysággal dolgozott.)

Itt is hatványfüggvénnyel írjuk le a tényleges beruházási hányad alakulását. A hiány 1%-os növekedése ι%-kal csökkenti a beruházási hányadot:

$$i = \tilde{i}Z^{\iota} \tag{13}$$

Rátérve a *kapacitáskihasználás* leírására, mindenekelőtt megjegyezzük, hogy most kényelmetlen volna a Z mutatót szabályozási jelként használni, hiszen Z is függ k-tól, azaz implicit egyenlethez jutnánk. Ezért a következő összefüggés számbavételére szorítkozunk: a folyó termelés szabályozása készletjelzés alapján megy végbe. Ha a készlet forgási sebessége a *normájához* képest megnő (ami egymagában is a hiány-intenzitás növekedését jelzi), akkor a termelést és vele együtt a kapacitáskihasználást a normájához képest növelni kell és *vice versa*.[7]

Legyen k^* és v^* a kapacitás kihasználásának, illetve a készlet forgási sebességének időben változatlan *normája*. Feltesszük, hogy a tényleges kapacitáskihasználás arányos saját normájával és a forgási sebesség minden 1%-nyi többlete saját normájához képest $\varkappa$ %-kal növeli a tényleges kihasználást:

$$k = k^* \left(\frac{v}{v^*}\right)^{\varkappa}, \quad \text{ahol} \quad \varkappa < 1. \tag{14}$$

Megjegyzés: A $\varkappa \geq 1$ esetet azért kell kizárni, mert $\varkappa > 1$ esetén az abszolút változókra vonatkozó $X = X(K, V)$ termelési szabály nagyobb készlethez nagyobb termelést rendelne; a $\varkappa = 1$ esetben pedig a termelési szabály nincs is definiálva.[8]

Végül feltesszük, hogy a *fogyasztási hányad* tényleges értéke megegyezik a hiánymentes rendszerével; mely utóbbi szintén egzogén adott függvény:

$$h = \tilde{h}. \tag{15}$$

Összefoglalva a modell egyenleteit:

$$a = \tilde{a}Z^{\alpha},\ b = \tilde{c}Z^{-\beta-\iota\omega}\,\tilde{i}^{-\omega},\ i = \tilde{i}Z^{-\iota},\ k = k^*(v/v^*)^{\varkappa},\ h = \tilde{h}, \tag{16}$$

ahol

$$Z(v) = \left[1 - \left(\frac{k^* v^{\varkappa}}{k_m v^{*\varkappa}}\right)^{\tau}\right]^{-\zeta} \left[1 - \left(\frac{v}{v_m}\right)^{\tau}\right]^{\zeta-1} \tag{17}$$

2.4. *Alapegyenlet*

A modell elemzését megkönnyítjük azzal, hogy a változók közül kiemelünk egy *fő változót* és megfogalmazzuk a rávonatkozó differenciálegyenletet, amelyet *alapegyenletnek* nevezünk. Mint látni fogjuk, igazolható: ha egyértelműen meghatároztuk a fő változó pályáját, akkor — az eredeti egyenletrendszer felhasználásával — egyértelműen meghatározható a többi eredeti változó pályája is.

[7] Ez — a jelen nem-lineáris modell keretei között — rokon a *Kornai—Martos* (1981) kötetben szereplő lineáris készletjelzéses modellek szabályozási elvével.

[8] Nyilvánvaló, hogy a (14) szabály a legnagyobb kapacitáskihasználást a legnagyobb készletforgási sebességhez, v_m-hez rendeli. Természetesen előfordulhat, hogy az így kapott kapacitáskihasználás, $k^*(v_m/v^*)$- nagyobb mint a maximálisan megengedett kapacitáskihasználás. k_m. Ilyenkor módosítani kell a v korlátját v_m-ről $v_k = v^*(k_m/k^*)^{1/k}$-ra. A továbbiakban feltesszük, hogy $v_k \geq v_m$, tehát v_m marad a felső korlát.

Kényelmi szempontból a készlet forgási sebességét, v-t választottuk fő változónak (bár választhattunk volna más változót is erre a célra a modell eredeti változói közül).

Mindenekelőtt a kapacitásnövekedési *ütemet* kell meghatároznunk. *Harrod* (1939) és *Domar* (1946) képletéhez hasonlóan teljesül a következő azonosság: a kapacitásnövekedési ütem = kapacitáskihasználás szorozva beruházási hatékonyság szorozva beruházási hányad. A hiánymentes és a tényleges rendszer kapacitásnövekedési ütemét jelöljük $\tilde{r}$-mal, ill. r-rel és írjuk föl képletünket matematikai alakban:

$$\tilde{r} = k^*\tilde{b}(\tilde{\imath})\tilde{\imath} \text{ és } r = kb(i)i. \tag{18}$$

A két növekedési ütem közti összefüggés a következő:

$$r = \tilde{r}z^{-\beta-\iota\vartheta}\left(\frac{v}{v^*}\right)^{\varkappa}, \; \tilde{r} = k^*\tilde{c}\tilde{\imath}^{\vartheta}, \; \vartheta = 1 - \omega. \tag{19}$$

Rátérünk az alapegyenlet ismertetésére:

$$\dot{v} = \frac{v^2}{1-\varkappa}\,[\tilde{h} - g(v)], \tag{20}$$

ahol

$$g(v) = 1 - \tilde{a}Z(v)^{\alpha} - \tilde{\imath}Z(v)^{-\iota} - \tilde{r}Z(v)^{-\beta-\iota\vartheta}v^{\varkappa-1}(v^*)^{\varkappa}. \tag{21}$$

1. *segédtétel.* A (20) differenciálegyenlet egyértelműen megoldható a $(0, v_m)$ intervallumban

2. *segédtétel.* Az eredeti modell megoldása létezik és egyértelmű, továbbá egyértelműen meghatározható az alapegyenlet megoldásából.

Mindkét segédtétel bizonyítását a Függelék közli.

3. Stabilitás és működőképesség

Ebben a fejezetben az alapegyenletet tanulmányozzuk. Az így kapott eredmények könnyen átvihetők az eredeti modellre.

A dinamikai vizsgálatokban központi szerepet játszik a *stacionárius pont*, amelyből indítva dinamikus rendszerünket a rendszer a stacionárius pontban marad. Képletben:

$$v_0 = \bar{v} \text{ mellett } v(t) = \bar{v} \text{ minden } t\text{-re}. \tag{22}$$

A (20) értelmében a stacionárius pont(ok) azonos(ak) a

$$g(v) = \tilde{h} \tag{23}$$

egyenlet gyöke(i)vel, amikor is $\dot{v} = 0$.

Megjegyzés. Felhívjuk az Olvasó figyelmét arra, hogy a stacionárius ponthoz tartozó eredeti változók távolról sem állandóak; sőt még a növekedési ütemek is változóktól és időpontoktól függően változhatnak. Mindössze a készlet forgási sebességének, illetve a hiány fokának kell időben állandónak lennie. A stacionárius pont sajátos nem-walrasi dinamikus egyensúly: a rendszer olyan állapota, amelyben a hiánymentes walrasi állapottól való eltérés ,,foka'' állandósult, krónikus ,,normál'' hiány áll fenn. A továbbiakban azt a pályát, amely kielégíti a (23) feltételt, azaz mindvégig a stacionárius pontban marad, *állandó hiányú* pályának nevezzük.

3.1. *Időben változatlan paraméterű rendszer*

Elöljáróban célszerű lesz az *időben változatlan paraméterű* rendszereket vizsgálni, ahol

$$\tilde{a}(t) = \tilde{a},\ \tilde{\imath}(t) = \tilde{\imath},\ \tilde{b}(t, i) = \tilde{b} \text{ és } \tilde{h}(t) = \tilde{h}. \tag{24}$$

A $g(v)$ függvénynek a Függelékben adott elemzéséből kitűnik, hogy létezik a

$$\hat{h} = \max_{v} g(v) \tag{25}$$

mennyiség, amelyet *kritikus fogyasztási hányadnak* nevezünk. Az elnevezés jogosságát mutatja az a tény, hogy ha a fogyasztási hányad nagyobb mint a kritikus érték, akkor (20) szerint $\dot{v} \geq v^2(\tilde{h} - \hat{h}) > 0$, tehát tetszőleges $v(0)$ induló állapot mellett a rendszer előbb vagy utóbb *működésképtelenné* válik: $v(t_1) = v_m$. Ilyenkor persze nincs *stacionárius állapot.*

Ellenben ha a *fogyasztási hányad kisebb, mint a kritikus érték,* akkor *legalább két* stacionárius állapot létezik, hiszen $g(0) = -\infty = g(v_m)$, tehát a maximumhelytől balra is és jobbra is létezik legalább egy-egy stacionárius állapot.

3. *segédtétel.* A $g(v) = \tilde{h}$ *egyenletnek legfeljebb két gyöke van.* A bizonyítást a Függelék közli.

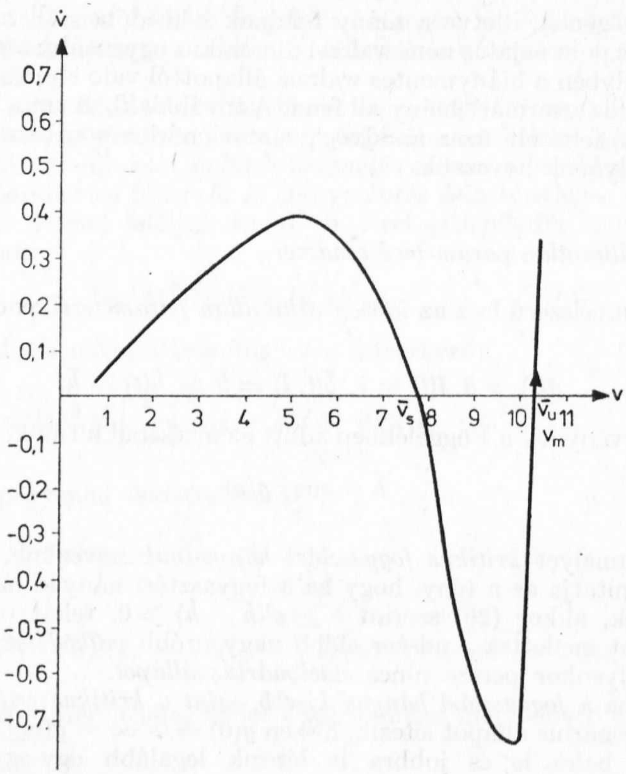
Eddigi megállapításainkból közvetlenül következik az

1. *tétel.* Időben állandó paraméterű rendszerben a stacionárius állapotok száma 0, 1 vagy 2 attól függően, hogy a $\tilde{h}$ fogyasztási hányad nagyobb, egyenlő vagy kisebb a $\hat{h}$ kritikus értéknél.

Megjegyzések. Később világossá váló okokból jelöljük $\bar{v}_s$-sel (stabil), illetve $\bar{v}_u$-val (instabil) a *kisebbik,* illetve a *nagyobbik* stacionárius pontot. Megemlítjük, hogy $\bar{v}_u(v^*)$ *növekvő* függvény, $\bar{v}_s(v^*)$ pedig *csökkenő* függvény. Belátható továbbá, hogy létezik olyan v_u^* és v_s^* számpár, amelyre $\bar{v}_u(v_u^*) = v_u^*$ és $\bar{v}_s(v_s^*) = v_s^*$.

Az 1. ábra[9] a készletforgás gyorsulását a forgási sebesség függvényében ábrázolja a (20) összefüggés alapján. A stacionárius pontok a görbe és az abszcissza tengely metszéspontjai.

[9] Az 1. és a 2. ábra megszerkesztéséhez zömében ugyanazokat az adatokat használtuk fel, mint a 4. fejezetben ismertetésre kerülő szimulációban (lásd még a 10. lábjegyzetet).



1. ábra. A készletforgás gyorsulása a készletforgás függvényében és a két stacionárius állapot

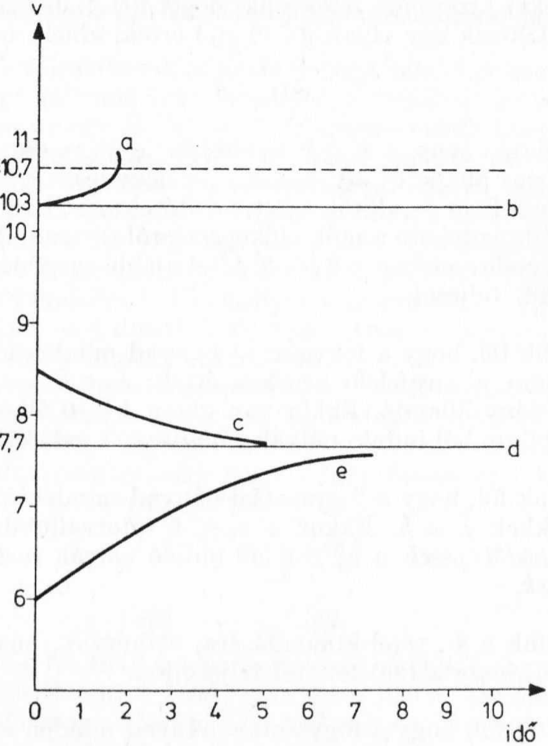
Rátérünk a nem stacionárius állapotokból induló pályák *stabilitásának és működőképességének* a vizsgálatára. Az 1. ábra alapján triviálisan bizonyítható a

2. *tétel.* Időben állandó paraméterű rendszerben teljesüljön $\tilde{h} < \hat{h}$. Ekkor a $v_0 < \bar{v}_u$ intervallumból induló pályák *stabilak* ($\bar{v}_s$-hez tartanak) és *működőképesek*; a $v_0 = \bar{v}_u$-ból induló pálya ($v(t) = \bar{v}_u$ minden t-re) *instabil* és *működőképes*; végül a $\bar{v}_u < v_0 < v_m$ intervallumból induló pályák *instabilak* és *működésképtelenek*. (Lásd a 2. ábrát.)

A 2. tételhez hasonlóan bizonyítható a következő két tétel.

3. *tétel.* Időben állandó paraméterű rendszerben teljesüljön $\tilde{h} = \hat{h}$. Ekkor $\bar{v}_u = \bar{v}_s = \bar{v}$ és a $v_0 \leq \bar{v}$ intervallumból induló pályák *stabilisak* és *működőképesek*, míg a $\bar{v} < v_0 < v_m$ intervallumból induló pályák *instabilak* és *működésképtelenek*.

4. *tétel.* Időben állandó paraméterű rendszerben teljesüljön $\tilde{h} > \hat{h}$. Ekkor *nem létezik stacionárius állapot* és minden pálya *működésképtelen*.



2. ábra. Stabil és instabil pályák
Jelölések a = instabil és működésképtelen pálya, b = instabil és működőképes pálya, c, d és e = stabil és működőképes pályák

3.2. *Időben változó paraméterű rendszer*

Rátérünk az *időben változó paraméterű* rendszerek vizsgálatára. Ekkor nem várható, hogy a (23) egyenlet gyökei időben állandóak legyenek. Elméleti szempontból azonban érdemes e kivételes esetet is tanulmányozni. Triviális, de hasznos az

1'. *tétel. A* $\bar{v} < v_m$ állapot akkor és csak akkor *stacionárius állapot*, ha minden t-re teljesül a

$$\tilde{h}(t) = g(t, \bar{v}). \tag{26}$$

konzisztencia-feltétel.

Megjegyzések Felvetődik a következő kérdés: Mikor ad a (26) feltétel *stabil* stacionárius állapotot? Mielőtt a kérdésre válaszolunk, be kell vezetni egy jelölést és egy feltevést: Adott $t \geq 0$ mellett a $g(t, v)$ függvény maximumhelye legyen $\hat{v}(t)$. Mellesleg ekkor a kritikus fogyasztási hányad a következőképpen írható fel az időben változó paraméterek esetében:

$$\hat{h}(t) = \max g(t, v) = g[t, \hat{v}(t)].$$

A triviális eseteket kizárandó feltesszük, hogy $\hat{h}(t) > 0$. Kimondjuk a következő feltevést: Létezik egy olyan $\bar{\bar{v}} \in (0, v_m)$ érték, amely minden t-re kisebb mint $\hat{v}(t)$:

$$v(t) > \bar{\bar{v}}. \tag{27}$$

Könnyen belátható, hogy a $\bar{v} \geq \bar{\bar{v}}$ feltétel teljesülése esetén a (26) feltétel *stabilis* stacionárius állapotot ad: $\bar{v} = \bar{v}_s$. Természetesen a (26) feltételt kielégítő $\bar{v}_u(t)$ általában függ az időtől, ezért a 2. tétel most kimondandó párjában csak gyengébb állítás tehető a működőképességről és a stabilitásról. Az időben változó paraméterek esetében a 2. és 3. tétel alábbi megfelelői bizonyíthatók; feltéve, hogy (26) teljesül.

2'. *tétel.* Tegyük föl, hogy a fogyasztási hányad minden időpontban *határozottan kisebb*, mint a megfelelő kritikus érték: $\tilde{h} < \hat{h} - \varepsilon$, ahol $\varepsilon > 0$ egy tetszőlegesen kicsiny állandó. Ekkor van olyan $\delta > 0$ állandó, hogy a $v_0 < \bar{v}_s - \delta$ intervallumból induló pályák *stabilisak és működőképesek.*

3'. *tétel.* Tegyük föl, hogy a fogyasztási hányad minden időpontban *egyenlő* a kritikus értékkel: $\tilde{h} = \hat{h}$. Ekkor a $v_0 \leq \bar{v}$ intervallumból induló pályák *stabilisak és működőképesek*, a $v_0 > \bar{v}$-ből induló pályák *instabilak* és gyakran *működésképtelenek.*

Mielőtt rátérünk a 4'. tétel kimondására, aláhúzzuk, hogy kimondadó feltevésünk kizárja, hogy a (26) feltétel teljesüljön.

4'. *tétel.* Tegyük föl, hogy a fogyasztási hányad minden időpontban *határozottan nagyobb*, mint a megfelelő kritikus érték: $\tilde{h} > \hat{h} + \varepsilon$, ahol $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen kicsiny állandó. Ekkor *nincs stacionárius állapot* és minden pálya *működésképtelen.*

Megjegyzések. Az elemzés legfontosabb kvalitatív eredménye: időben változó paraméterű rendszerben is létezhet működőképes és stabil állandó hiányú pálya; a gazdaság olyan állapota, amelyben a walrasi egyensúlytól való eltérés „foka", a krónikus hiány intenzitása állandósult. A rendszer képes endogén módon úgy szabályozni önmagát, hogy az állandó hiányú pályáról letérve oda visszatérjen. Ehhez a szabályozáshoz elégséges jelzést ad a hiány foka, illetve a készlet forgási sebessége.

Ugyanakkor felhívjuk a figyelmet arra, hogy alapjában véve egzisztenciatételeket mondtunk ki az állandó hiányú pályáról, továbbá megadtuk ilyen pályák létezésének feltételét, de korántsem tisztáztuk a stabilitás és a működőképesség összes szükséges és elégséges feltételét. Nemcsak a működőképes és működőképtelen állapotokat *elválasztó* állapotot nem tudjuk az időben változó paramétereknél meghatározni, de még az elválasztó állapot létezése is bizonytalan.

Ugyancsak adósak maradunk a *vegyes esetek* elemzésével, amikor pl. $\tilde{h} < \hat{h} - \varepsilon$ és $\tilde{h} > \hat{h} + \varepsilon$ felváltva teljesülnek, pl. ciklikusan váltakozva.

4. Alternatív növekedés stratégiák összehasonlítása

Miután az előző fejezetben kvalitatív jellegű tételeket fogalmaztunk meg a stacionárius pont (állandó hiányú pálya) létezéséről, működőképességéről és stabilitásáról, most egy lépést teszünk apparátusunk közgazdasági alkalmazása felé. Nem törekszünk egyik vagy másik ország valóságos történelmi útjának vagy jövendő fejlődési lehetőségeinek számszerű, ökonometriai vizsgálatára. Továbbra is a *tiszta elmélet* síkján maradunk. A korábbi feltevéseken kívül kiegészítő feltevéseket vezetünk be, s ezek következményeit mutatjuk be. A szemléltetés kedvéért néhány szimulációs számítást végeztünk, stilizált magyar adatokból kiindulva.[10] Hangsúlyozni szeretnénk, hogy ezek kizárólag az elméleti gondolatmenet illusztrációját szolgálják és nem tekinthetők a történelmi fejlődés reális visszatükröződésének.

A kelet-európai szocialista országokban az utóbbi évtizedben végbemenő hatékonyság-romlási folyamat egzogén és endogén tényezőit próbáljuk az alábbiakban szemléltetni.[11] Egzogénnek tekintjük azt a hatékonyságromlást, amely a hiánymentes rendszerben is végbemenne. Számításainkban ezt a jelenséget a következőképpen formalizáltuk:

$$\tilde{a}(t) = \tilde{a}_0 + (\Delta\tilde{a})t \tag{28}$$

és

$$\tilde{c}(t) = \tilde{c}_0 - (\Delta\tilde{c})t. \tag{29}$$

Célszerű lesz az eddig használt *bruttó* termelés és az ehhez viszonyított beruházási hányad helyett áttérni a *nettó* termelésre, illetve az ehhez viszonyított nettó beruházási hányadra. Megkülönböztetésül a nettó mennyiségeket n alsóindexszel különböztetjük meg bruttó megfelelőjüktől.

$$\tilde{i}_n = \tilde{i}/(1-\tilde{a}),\ i_n = i/(1-a),\ X_n = (1-a)X. \tag{30}$$

Állandó hiányú pályán a négy beruházási hányad, $\tilde{i}$, $\tilde{i}_n$, i és i_n egymással arányosan változik, a többi pályán azonban bonyolultan változik egymáshoz viszonyított értékük.

Rátérünk a hatékonyságromlás endogén tényezőinek elemzésére. Makroszemléletünkhöz híven eltekintünk a strukturális kérdésektől, s elsősorban a növekvő erősségű hiánnyal magyarázzuk a ráfordítási együtthatónak a növekedését az egzogén növekedésen túl, illetve a beruházási hatékonyságnak a csökkenését az egzogén tényezőn túl.

Három jellegzetes növekedési stratégiát hasonlítunk össze, amelyek kizárólag egy-egy stratégiai tényezőben (beruházási vagy fogyasztási hányadban) különböznek egymástól.[12]. Feltesszük, hogy a külső körülmények és a kezdőértékek mindhárom pályán azonosak.

[10] Általában a 70-es évek magyar makroadatait vettük alapul, kivéve a hiányparamétereket. Ez utóbbiak önkényesen felvett értékek. Ábráink a szimulációval kiszámított pályákat szemléltetik. Az adatok ismertetésétől eltekintünk, hiszen számításunkkal kizárólag elméleti összefüggések illusztrálására törekszünk.

[11] *Jánossy* (1982) és *Bródy* (1982) foglalkoztak a hatékonyságromlás és a növekedési ütem kapcsolatával.

[12] *Augusztinovics* (1981) a távlati tervezés céljait szolgáló numerikus vizsgálataiban szintén alternatív növekedési stratégiát vizsgált: a MAXIMOST rokon a mi *A* stratégiánkkal, a MAXIMAJD pedig még a mi *B* stratégiánknál is jobban összpontosít a beruházási hányad növelésére. Lásd még erről a kérdésről *Erdős* (1982).

A három stratégia jellemzőit az 1. táblázat tartalmazza, s a növekedési pályákat a 3., 4. és 5. ábra szemlélteti.

1. táblázat

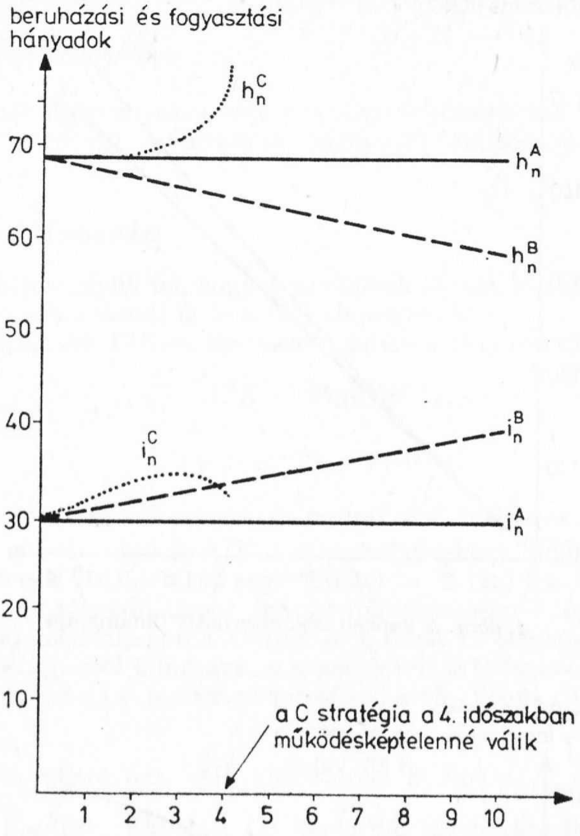
Alternatív növekedési stratégiák összehasonlítása

A stratégia jele	A	B	C
A STRATÉGIA TULAJDONSÁGAI			
Egzogén tényezők			
A ráfordítási függvény	nő $a^A(t, Z) =$	nő $a^B(t, Z) =$	nő $a^C(t, Z)$
A beruházási hatékonyság függvénye	csökken $b^A(t, i, Z) =$	csökken $b^B(t, i, Z) =$	csökken $b^C(t, i, Z)$
Stratégiai tényezők			
Maximális nettó beruházási hányad	állandó $\tilde{i}_n^A(t) = i_0$	nő $< \tilde{i}_n^B(t) =$	nő $\tilde{i}_n^C(t)$
Nettó fogyasztási hányad	alig nő $\tilde{h}_n^A(t) \sim \tilde{h}_n(0) >$	csökken $\tilde{h}_n^B(t) <$	alig nő $\tilde{h}_n^C(t) = \tilde{h}_n^A(t)$
A hiány foka	állandó $Z^A(t) = Z(0) =$	állandó $Z^B(t) <$	növekvő $Z^C(t)$
Következmények			
Működőképesség	végig	végig	időlegesen
Kapacitásnövekedés	lassul $K^A(t) <$	lassul, de kevésbé $K^B(t) >$	lassul $K^C(t) \sim K^A(t)$
Nettó termelés növekedése	lassul, majd megáll	kevésbé lassul	gyors, majd csökkenésbe fordul
Fogyasztásnövekedés	arányos	időleges	időleges

Röviden utalunk a három stratégia azonosságaira és különbségeire.

Az *A stratégia* a termelési és beruházási stratégia romlása ellenére is kitart a kezdeti nettó (maximális) beruházási hányad mellett. Belenyugszik a kapacitás növekedési ütemének csökkenésébe, de fenntartja a hiány kezdeti intenzitását és az ezzel konzisztens fogyasztási hányadot. Az 1'. tétel (26) konzisztencia feltétele szerint számított fogyasztási hányad lényegében állandó. Az A stratégia viszonylag kiegyensúlyozott növekedést biztosít: a nemzeti jövedelem és a fogyasztás egymással arányosan nő, bár az ütem lassuló.

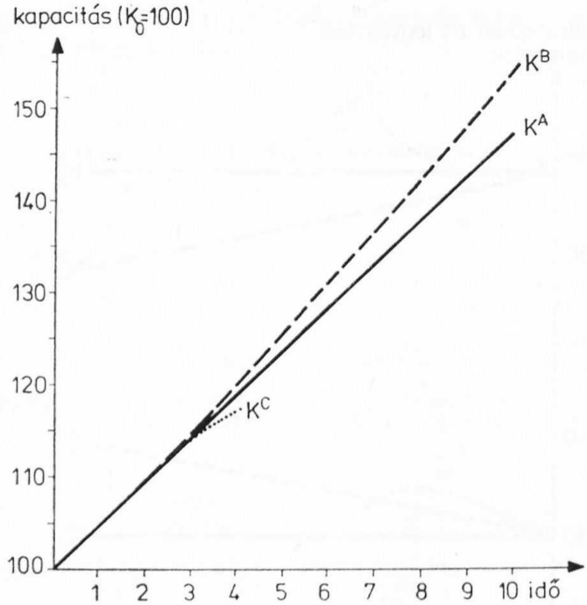
A *B stratégia* nem akar belenyugodni a növekedés ilyen fokú lassulásába és a nettó beruházási hányad emelésével megpróbálja legalább fékezni a növekedési ütem süllyedését. Ez a stratégia is ragaszkodik azonban a hiány kezdeti intenzitásához, s a konzisztencia feltétellel összhangban jelentősen csökkenti a fogyasztási hányadot. Nem meglepő, hogy a B stratégiánál mind a kapacitás, mind a nemzeti jövedelem gyorsabban nő, mint A-nál, a fogyasztás azonban nemcsak, hogy elmarad A-étól, de a kezdeti szerény növekedés csökkenésbe vált át.



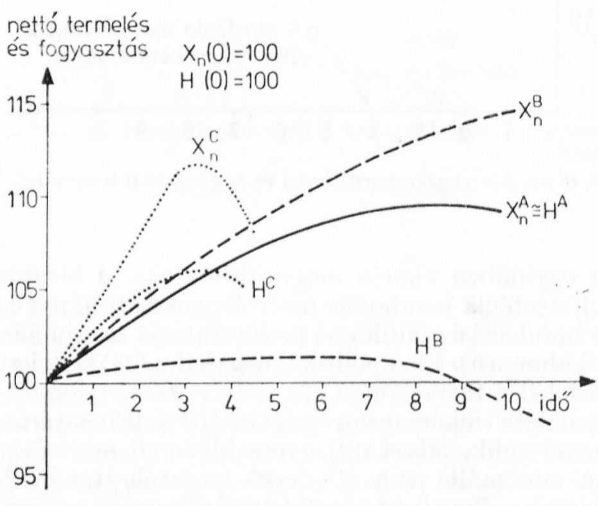
3. ábra. Alternatív beruházási és fogyasztási hányadok

A *C stratégia* egyidőben akarja megvalósítani az *A* stratégia fogyasztási politikáját (az *A* stratégia maximális nettó fogyasztási hányadát alkalmazva) és a *B* stratégia beruházási politikáját (a *B* stratégia maximális nettó beruházási hányadát alkalmazva). Ez a politika megsérti a (26) konzisztencia feltételt, és egyre jobban feléli a tartalékokat: az output készlet forgási sebessége és a kapacitás kihasználása fokozatosan megközelíti felső határát, s a rendszer működésképtelenné válik. Mivel $a(t)$ gyorsabban nő mint $\tilde{a}(t)$, a nettó és a bruttó, illetve a maximális és a tényleges mutatók trendje jelentősen eltér egymástól. Felhívjuk a figyelmet a nettó termelés gyors kezdeti növekedésére, amely a kapacitáskihasználás fokozásából adódott, amelyet azonban hamarosan csökkenésbe fordít a hiány nyomában járó hatékonyságromlás.

A dolgozat végére érve a következő megjegyzéseket tehetjük. A szocialista országok növekedési problémáinak megértéséhez nem elegendő egy egyszerű keynesi vagy neoklasszikus növekedési modell. Még időben változatlan paraméterű rendszerben sem lehet kizárólag a *maximális* növekedési ütem meghatározására szorítkozni (mint pl. *Phelps* (1961) klasszikus munkája teszi), s eltekinteni a nagyon is jelentékeny hiányhatásoktól. Úgy véljük, jelentősen



4. ábra. A kapacitások alternatív dinamikája



5. ábra. Alternatív nettó termelési és fogyasztási pályák

növeli modellünk realizmusát, hogy növekedéselméleti aranykori pályák helyett olyan fejlődési utakat vizsgálunk, amelyekre a beruházás és a fogyasztás eltérő üteme jellemző.

Adósak vagyunk még a külkereskedelem és a fogyasztási szféra részletesebb vizsgálatával. Ez, mint említettük, későbbi cikkeink feladata lesz.

FÜGGELÉK: A SEGÉDTÉTELEK BIZONYÍTÁSA

Az 1. segédtétel bizonyítása

A paraméter-függvényekre tett simasági feltételek miatt a (20) differenciálegyenlet a $(0, v_m)$ intervallum bármelyik kezdőértékére egyértelműen megoldható.

A 2. segédtétel bizonyítása

Kiindulásként tegyük fel, hogy a modellnek létezik legalább egy megoldása. Ebből a feltevésből vezetjük le a (20) alapegyenletet.

Helyettesítsük be $V/K = k/v$ összefüggésbe a (14) összefüggést:

$$V/K = k^*/(v^{*\varkappa}v^{1-\varkappa})$$

Fejezzük ki v-t:

$$v = (k^*K/v^{*\varkappa}V)^{1/(1-\varkappa)}$$

Differenciáljuk v-t az idő szerint, és vegyük figyelembe az (1)–(8)-ból adódó $\dot{V}/K = (1 - a - i - h)k$ és $\dot{K}/K = r$ összefüggéseket. Némi számítás után – behelyettesítve a (16) és (19) egyenleteket – a (20) összefüggéshez jutunk.

Adott (V_0, K_0) kezdőállapot fenti képletünk szerint egyértelműen meghatározza a v_0 kezdőállapotot. Oldjuk meg tehát az alapegyenletet a kiszámított v_0 kezdőállapottól kiindulva; v ismeretében (17) segítségével Z, majd (16) segítségével a, b, i és k rendre meghatározhatók. Végül r-t (18)-ból határozzuk meg.

Az abszolút változókra való visszatérést a $K(t) = K_0 \exp \int_0^t r(s)ds$ képlet segítségével kezdjük. Ekkor a (4) képletből meghatározható X, (3)-ból V, (5)-ből A, (7)-ből I, (6)-ból B és (8)-ból H.

A. 3. segédtétel bizonyítása

Kényelmi okokból térjünk át $w = 1/v$-re, és $Q(w) = 1/Z(v)$-re. Szorozzuk be a $g(w) - \tilde{h}$ kifejezést Q^α-val és jelöljük $G(w)$-vel a kapott kifejezést:

$$G(w) = \tilde{a} - (1 - \tilde{h})Q(w)^\alpha + \tilde{\imath}Q(w)^{\alpha+\iota} + r^*w^{*\varkappa}w^{1-\varkappa}Q(w)^{\alpha+\beta+\iota\vartheta}.$$

Állításunk ismert tételre vezethető vissza, *(Pólya* és *Szegő* (1981) II. kötet V. rész 77. feladat), ha $\varkappa = 1$. (Vigyázat: ez a paraméter érték tulajdonképpen nincs is megengedve!)

A $0 \leq \varkappa < 1$ esetben azonban egyszerűbbnek tűnik egy közvetlen bizonyítást adni, mint megpróbálni a feladatot visszavezetni az i.m. 7. §-ára. Indirekt bizonyítunk:

Legyen $G(w)$-nek legalább három különböző gyöke a $w < w_m$ intervallumban: $\bar{w}_1 < \bar{w}_2 < \bar{w}_3$. Egyszerű rendezéssel a következő összefüggéshez jutunk:

$$1 - \tilde{h} = \tilde{\imath} \cdot \frac{Q(\bar{w}_2)^{\alpha+\iota} - Q(\bar{w}_1)^{\alpha+\iota}}{Q(\bar{w}_1)^\alpha - Q(\bar{w}_1)^\alpha} + r^*w^{*\varkappa} \frac{\bar{w}_2^{1-\varkappa}Q(\bar{w}_2)^{\alpha+\beta+\iota\vartheta} - \bar{w}_1^{1-\varkappa}Q(\bar{w}_1)^{\alpha+\beta+\iota\vartheta}}{Q(\bar{w}_2)^\alpha - (Q\bar{w}_1)^\alpha}.$$

Használjuk föl Cauchy elemi középértéktételét a jobb oldalon álló két törtre külön-külön: Létezik két olyan szám w_{12} és $\widehat{w}_{12}$ a $(\overline{w}_1, \overline{w}_2)$ intervallumban, hogy a törtek rendre egyenlőek a számláló és a nevező deriváltjának a hányadosával – a megfelelő w_{12} ill. $\widehat{w}_{12}$ helyen. Mivel $[Q(w)^\alpha]' = \alpha Q(w)^{\alpha-1}Q'(w)$ stb. Egyenlőségünk helyett a következő összefüggést írhatjuk:

$$1 - \tilde{h} = \tilde{\iota}\,\frac{(\alpha+\iota)Q(w_{12})}{\alpha} + r^* w^{*\varkappa} w_{12}^{1-\varkappa}\,\frac{(\alpha+\beta+\iota\vartheta)Q(\widehat{w}_{12})^{\beta+\iota\vartheta}}{\alpha} +$$

$$+ r^* w^{*\varkappa}(1-\varkappa)\,\frac{\widehat{w}_{12}^{1-\varkappa}Q(\widehat{w}_{12})^{\beta+\iota\vartheta+1}}{Q'(\widehat{w}_{12})}.$$

Hasonlóan igazolható egy olyan $(w_{23}, \widehat{w}_{23})$ számpár létezése, amelynek mindkét eleme a $(\overline{w}_2, \overline{w}_3)$ intervallumba esik és az utolsó összefüggést kielégíti. Igenám, de az első és második tag nyilvánvalóan növekvő függvény, a harmadik tag ról ugyanez igazolható némi számolással. Valóban,

$$\frac{Q'(w)}{w^{-\varkappa}Q(w)} = \zeta\left[1 - \frac{k^*}{k_m}\left(\frac{w^*}{w}\right)^\sigma\right]^{-1}\frac{k^*}{k_m}\left(\frac{w^*}{w}\right)^{\sigma-1}\frac{(\sigma-1)w^*}{w^{2-\varkappa}} +$$

$$+ (1-\zeta)\left[1 - \left(\frac{w_m}{w}\right)^\tau\right]^{-1}\tau\left(\frac{w_m}{w}\right)^{\tau-1}\frac{w_m}{w^{2-\varkappa}}$$

s ez valóban csökkenő függvény.

De ekkor ellentmondást kaptunk, mert $(w_{12}, \widehat{w}_{12})$ és $(w_{23}, \widehat{w}_{23})$ nem elégítheti ki a szóban forgó összefüggést egyszerre.

(Beérkezett: 1983. március 3-án)

IRODALOM

AUGUSZTINOVICS M. (1981) A gazdasági növekedés üteme Magyarországon 1950–2000 között. *Közgazdasági Szemle 28*, 523–539. o.

BAUER T. (1981) *Tervgazdaság, beruházás, ciklusok*, Budapest, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.

BRÓDY A. (1982) *Lassuló idő*, sokszorosítvány, MTA KTI

DOMAR, E. E. (1946) *Capital Expansion, Rate of Growth and Expansion, Econometrica 14*, 137–147. o. (magyarul: Szakolczai szerk. (1963) 137–168. o.)

ELTIS, W. A. (1963) Investment, Technical Progress and Economic Growth, *Oxford Economic Papers, New Series 15* 32–53. o. (magyarul: Szakolczai szerk. (1967) 244–265. o.)

ERDŐS T. (1982) Gazdasági növekedésünk üteme és az új növekedési pálya, *Közgazdasági Szemle 29*, 1281–1302. o.

HARROD, R. (1939) An Essay in Dynamic Theory, *Economic Journal 49*, 14–33. o. (magyarul: Szakolczai szerk. (1963) 169–192. o.)

HONKAPOHJA, S.–ITO, T. (1981) Inventory Dynamics in a Simple Disequilibrium Macroeconomic Model, *Scandinavian Journal of Economics 82*, 184–198. o.

HORVAT, B. (1958) The Optimum Rate of Investment, *Economic Journal, 68*.

HORVAT, B. (1968) The Rule of Accumulation in a Planned Economy, *Kyklos 21*, 239–268. o.

HAHN, F. H.–MATTHEWS, R. C. O. (1964) The Theory of Economic Growth: a Survey, *Economic Journal 74*, 779–903. o.

HENIN, P. Y. és MICHEL, P. (1982) *Croissance et Accumulation en Desequilibre*, Párizs, Economica.

KALECKI, M. (1982) *A szocialista gazdaság működéséről*, Budapest, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
KORNAI J. (1980) *A hiány*, Budapest, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
KORNAI J. (1982) *Növekedés, hiány és hatékonyság*, Budapest, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
KORNAI J.—MARTOS B. szerk. (1981) *Szabályozás árjelzések nélkül*, Budapest, Akadémia.
KORNAI J.—SIMONOVITS A. (1982) Egy makronövekedési modell matematikai tulajdonságairól, *Szigma 15*, 133—147. o.
LACKÓ M. (1980) Feszültségek felhalmozása és leépítése. A magyar beruházási ciklus alakulásának egyszerű modellje, *Közgazdasági Szemle 27*, 923—940. o.
PÓLYA GY.—SZEGŐ G. (1981) *Válogatott feladatok és tételek az analízis köréből*, I—II. kötet, Budapest, Műszaki Kiadó.
PHELPS, E. E. (1961) The Golden Rule of Accumulation: A Fable for Growthmen, *The American Economic Review 60*, 638—643. o. (magyarul: Szakolczai szerk. (1967) 266—275. o.)
SZAKOLCZAI GY. (1963) *A gazdasági fejlődés feltételei*, Budapest, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
SZAKOLCZAI GY. (1967) *A gazdasági növekedés feltételei*, Budapest, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.

INVESTMENT, EFFICIENCY AND SHORTAGE: A MACRO-GROWTH MODEL

In our paper we try to analyze problems of growth and efficiency of East-European socialist countries by means of pure theory, with special regard to phenomena observed in the last decade. Deviating from traditional growth models our attention is concentrated on the modelling of the following processes: (i) partly for external and partly for internal reasons the *efficiency* of both current production and investment is continuously *deteriorating*. (ii) In order to counterbalance the slowdown and occasional stop of growth the continuous increase of the rate of investment is often tried. (iii) At such occasions the strengthening of shortage cannot be prevented but by a continuous decrease of the rate of consumption. If there is no harmony between the rate of consumption and that of investment, shortages will become gradually stronger and stronger endogeneously impairing efficiency.

In Chapter 1 of the paper the sphere of problems is introduced to the reader. Chapter 2 reviews the model. Chapter 3 deals with viability and stability properties of the stationary (constant shortage) path.

The most important qualitative result of the analysis is that there exists a viable and stable constant shortage path even for a system with time-dependent parameters; a state of the economy, where the "degree" of deviation from Walrasian equilibrium, the intensity of chronic shortages became constant. The system is able to control itself in an endogeneous way so that it returns to the constant shortage path even after eventual deviations. For this control the degree of shortage and the circulation speed of stocks, respectively, give sufficient signalling. In Chapter 4 alternative growth paths are examined through numerical examples. Mathematical proofs may be found in the Appendix.

ЭФФЕКТИВНОСТЬ КАПИТАЛЬНЫХ ВЛОЖЕНИЙ И ДЕФИЦИТ — МАКРОМОДЕЛЬ РОСТА

В своей работе авторы с помощью чисто теоретических средств пытаются проанализировать проблемы роста и эффективности в социалистических странах Восточной Европы, в особенности те явления, которые наблюдаются в последнее время. В отличие от традиционных моделей роста внимание авторов обращено на моделирование следующих процессов: (I) отчасти в результате внешних, а отчасти внутренних причин имеет место постоянное *ухудшение эффективности* как текущего производства, так и капиталовложений, (II) замедление, а иногда и полную остановку роста пытаются возместить постоянным повышением доли капиталовложений, (III) в этих случаях для того, чтобы помешать усилению дефицита, должна постоянно сокращаться доля потребления. Если доля потребления и доля капиталовложений не находятся в соответствии, *дефицит* постоянно растет и изнутри *ухудшает эффективность*.

В первой части статьи авторы знакомят читателя с проблемой. Во второй части знакомят с моделью. В третьей части рассматривают функциональные и стабильные особенности стационарной (инвариантной по отношению к дефициту) траектории. *Важнейший качественный результат анализа: и в системе с изменяющимися во времени параметрами также существует действующая и стабильная инвариантная по отношению к дефициту траектория, такое состояние экономики, при котором степень отклонения от Вальрасового равновесия, интенсивность хронического дефицита становится постоянной. Система способна саморегулироваться изнутри и возвращаться на инварительную траекторию дефицита.* Достаточным сигналом для регулирования является степень дефицита, а также скорость оборота запасов. В четвертой части на числовом примере анализируются альтернативные траектории роста. В приложении дается математическое обоснование.

Fényes Tamás—Sári József

A devizakintlevőségek megtérülésének egy determinisztikus modellje

Az 1983 évi népgazdasági terv a népgazdaság külső egyensúlyi helyzetének javításában határozza meg a gazdasági munka fő célját. A feladat teljesíthetőségét a nemzetközi gazdasági kapcsolatok bővítésére, elsősorban a kivitel számottevő növekedésére alapozza a terv. Ennek érdekében erőteljesen kell javítani a termelés exportképességét, mérsékelni a ráfordításokat és növelni a hatékonyságot. A népgazdasági tervben megfogalmazott cél elérése feltételezi a gazdaságirányítás korszerű eszköztárának ésszerű alkalmazását, amikor a termelés prioritásában fogalmazódik meg az exportképesség növekedése és a külgazdasági egyensúly javításának lehetősége. *Pénzügyi oldalról* nézve azonban nem elegendő csupán megtermelni és eladni a külső piacokon a termékeket, hanem legalább ugyanilyen fontos feltétele az egyensúlynak, hogy a devizaellenértékek kellő időben megtérüljenek, a követelések a kötésekben megszabott lejáratkor befolyjanak. A tőke körforgását jellemző egyszerű P—Á—P' összefüggésből is következik, hogy a befektetések megtérülése csak akkor teljes, ha a termelés megelőlegezése érdekében felhasznált pénz — megnövekedett értékben — ismét a népgazdaság, ill. a vállalat rendelkezésére áll; vagyis esetünkben akkor, ha az exportkintlevőségek kiegyenlítése megtörténik.

Az *exportkintlevőség* az ország devizakészletének szerves része; lényegét tekintve egyenértékű a mobil készletállománnyal. Következik ebből a tartalmi sajátosságból, hogy a devizakövetelés valóságos anyagi érték, és hogy ebben a formában rendelkezésre álló eszközökre is érvényes mindaz a vállalati gondosság, amelyet a készletgazdálkodásban nyilvánvalónak tartunk. A forgóeszközök gyorsabb megtérülése, forgási idejének lerövidítése, általában a *forgási sebesség növelése* megtakarítást eredményez a népgazdaság számára; az exportkintlevőségek gyorsabb megtérülése ezen túl hozzájárulhat a gazdaság külső egyensúlyának javításához, az ország *likviditásának*, fizetőképességének javításához. A devizakövetelések időbeni kiegyenlítése közvetve csökkenti az ország nemzetközi terheit, mert a jobb likviditás egyben kisebb hitelszükséglettel és kevesebb kamatfizetési kötelezettséggel jár.

Ahhoz, hogy a népgazdaság nemzetközi likviditása elfogadható mértékű legyen, elsőrendű feltétel a vállalatok devizaeszközeinek, exportkintlevőségeinek jó mobilitása. A fogalmat a vonatkozó szakirodalom [1] a következőképpen határozza meg: „*Mobilitás*: A gazdálkodó szerv eszközeinek dologi formából pénzformába való átalakulása, e folyamat mozgási sebessége, a mozgósítható eszközöknek az összes eszközökhöz viszonyított aránya." A mobilitás definíciójából következik, hogy az eszközök pénzzé tehetőségének sorrendiségéről, valamely nem pénzjellegű eszköznek pénzeszközzé való átalakulási idejéről van szó. Ugyancsak a fent hivatkozott szakirodalomban található a likviditás fogalma, amelyet nem mindig a megfelelő értelemben használnak. A két fogalom közötti különbség jobb megértése céljából idézzük „*Likviditás*: olyan fizetőképesség (felkészültség), amely biztosítja a kötelezettségek pontos teljesítését." Ebben az értelemben a likviditás nem más, mint realizált mobilitás, azaz a likviditásnak előfeltétele a mobilitás. Ezért foglalkozunk a jelen cikkben elsődlegesen a mobilitással, amely a külföldi pénznem meghatározott, szállítási szerződésekben (kötésekben) megszabott határidőn belüli megtérülését, a Magyar Nemzeti Bank számláján való jóváírását jelenti. Végeredményben ez a tény a feltétele annak, hogy a vállalat is hozzájuthasson a deviza forintellenértékéhez; a népgazdaság pedig rendelkezzék azokkal a külföldi fizetőeszközökkel, amelyek az esedékes nemzetközi kötelezettségek teljesítésének fedezetét képezik. A kérdéssel való beható foglalkozást az teszi időszerűvé hogy a konvertibilis elszámolási viszonylatokban kedvezőtlen tendenciák alakultak ki az elmúlt években. Erre utal az ebben a témában megjelent cikk [2], amelyben a szerző megállapítja, hogy 1979-től 1981-ig 13,5%-kal nőtt az exportforgalom és ugyanakkor 22%-kal a devizakintlévőségek nagysága, s ezen belül a *lejárt* követeléseké, 97.7%-kal. Nagymértékben növekedett a *kétes* követelések aránya is (34%). Hasonló tendenciát tapasztalhatunk az iparvállalatok országos adataiból számított *forgási időből*[1] is. A tőkés exportkintlévőségek átlagos forgási ideje az 1979 évi 76,9 napról 1981-ben 88,7 napra növekedett. A forgási idő meghosszabbodására ellentétesen hatott két tényező; a forgalom növekedése 7,4 nap csökkenést, az állományok felhalmozódása pedig 19,2 nap növekedést okozott.

Felvetődik a kérdés, miért romlott ilyen nagy mértékben az exportkintlevőségek forgási ideje, ill. a követelések mobilitása. Az okok között leggyakrabban a világgazdasági helyzetet, a világpiaci recessziót, és ezzel együtt a vevők fizetőkészségének és -képességének romlását szokták említeni a vállalatok. Hozzátehetjük azonban, hogy a magyar vállalatok sem tettek meg mindent annak érdekében, hogy a kötéseikben számukra előnyös fizetési feltételeket szabjanak meg és kintlevőségeiket a szállítási szerződésekben megadott időre behajtsák. Ennek elsődleges oka az, hogy a népgazdasági és vállalati érdek között ellentmondás van: a vállalatok lényegében csak az áru kilépésében érdekeltek, a népgazdaság viszont abban, hogy a devizaellenérték mielőbb jóváírassék az MNB számláin. A továbbiakban röviden áttekintjük a mobilitás vizsgálati módszereit, konkrét számadatok segítségével elemzést végzünk az exportkintlevőségek mobilitására; foglalkozunk a fizetési feltételek javításának lehetőségeivel. Ezt követően bemutatjuk a devizakintlevőségek megtérülésének egy dinamikus modelljét; végül pedig utalunk arra, hogyan lehetne javítani a vállalatok mobilitását és likviditását.

[1] Az átlagos forgási időt a gyakorlatban alkalmazott és általánosan ismert módon számítjuk ki; azaz a vevőállomány és a nettó árbevétel hányadosaként. Az évre vonatkoztatott forgási idő:

$$f_i = \frac{360 \cdot \text{átlagos vevőállomány}}{\text{export bevétel.}}$$

A devizakintlevőségek mobilitása

A könyvben [1] ismertetett mobilitás-vizsgálat tájékoztatást ad mind a belföldi, mind a külgazdasági kapcsolatokban keletkezett kintlevőségek számbavételére, elemzésére. A vizsgálat elvégezhető egy-egy időpontban fennálló követelésállományra vonatkozóan (mérleg adat — statikus helyzet), de lehet a forgalmi adatok alapján is méréseket végezni az üzletesemények lebonyolítási sorrendjében, a követelések keletkezésének és megszűnésének folyamatában is. Az előbbi, gyakorlatilag a mérlegkészítések időpontjában, esetleg a hóvégi állapotokról ad hasznos felvilágosítást, az utóbbi pedig egy-egy hosszabb-rövidebb időtartamról, általában két mérlegkészítési időpont közötti időtartamról (negyedév, év). Ha figyelembe vesszük, hogy az egyes időpontokban fennálló állományok várható kiegyenlítési idejét a felek a szállítási szerződésekben (kötésekben) rögzítik, és ugyanakkor bizonyos tapasztalatokkal rendelkezünk arról is, hogy ténylegesen milyen mértékben térnek el az egyes külföldi partnerek a várt fizetési kötelezettségek időbeni teljesítésétől, akkor a bármely napon felvett kintlevőségi állomány tételenkénti adataiból következtetni lehet a vállalat várható exportárbevételére és ennek időbeli eloszlására, ütemére is. A kintlevőségek megfigyelése forgalmi folyamatok szerint arról tájékoztat, hogy az áru kiszállítása (számlázása) és a kötésekben meghatározott fizetési időpontok, ill. az ellenértékek tényleges beérkezésének napja között mennyi idő telik el. Ennek a megfigyelésnek abban van a jelentősége, hogy minden egyes áruértékesítési ügylet kapcsán következtetni lehet a vállalat jövőbeni likviditási helyzetére, a kintlevőségek várható megtérülésére.

A megfigyelés és elemzés céljától függően osztályozhatjuk az exportkintlevőségeket elszámolási viszonylatok és fizetési módok szerint. A devizakintlevőségek keletkezésének megfigyelése lényegében kettős pilléren nyugszik. Mégpedig:

— *népgazdasági* számbavétel a nemzetközi elszámolási mérlegben,

— *vállalati* nyilvántartás az árbevétel elszámolását tükröző számlákon.

Az üzleti eseményeknek ez az ún. *eredmény szemléletű* könyvelése a gyakorlatban időbelileg megegyezik az áru számlázási, ill. kilépési napjával. Ekkor azonban még csak követelés (kintlevőség) keletkezik a külfölddel szemben. Az eszközök valóságosak a devizaellenérték tényleges beérkezésével, a számla bankközi kapcsolatokban eszközölt kiegyenlítésével térülnek meg; pénzügyileg tehát csupán az MNB külföldi devizaszámlájára jóváírt összeggel realizálódik. Ezt a folyamatot tükrözi a nemzetközi fizetési mérleg ill. a *pénzforgalmi szemléletű* elszámolásokban megfigyelt adat, amely gyakran több hónappal később követi a szállítás időpontját.

Mind vállalati, mind népgazdasági szempontból különös jelentőséget tulajdonítunk a számláknak a szállítási szerződésben meghatározott időpontra történő, pontos kiegyenlítésének. A kötésekben rögzített és a tényleges kiegyenlítés egybeesése teszi lehetővé ugyanis a tervszerű pénz- és devizagazdálkodást, ad biztonságot a devizalikviditás fenntartására, saját kötelezettségeink rendszeres teljesítésére. A szerződés szerinti és a tényleges teljesítés közötti időkülönbség jellemzi a *fizetési morált.* A tapasztalati adatokból megfelelő valószínűséggel következtetni lehet a várható eltérésekre, az ebből származó veszteségekre.

Az információ megfigyelése megfelelő szervezettséget és gépi felszereltséget igényel. Bár kevés tétel esetén a feladat kisgépes eljárással is elvégezhető, nagyobb vállalatoknál, — és a külkereskedelmi forgalmat lebonyolító vállalatok általában ilyenek, — azonban csak lyukkártya-rendszerű vagy elektronikus gépi adatfeldolgozás teszi lehetővé az adatok naprakész állapotban tartását, a kintlevőségi állomány lejárat szerinti feltérképezését. Ez utóbbi gépi eljárásnál mód nyílik arra is, hogy a tényleges kiegyenlítés időpontjaiban olyan kimutatásokat lehessen készíteni, amelyek tájékoztatnak a szállítási és a teljesítési időpontokról, továbbá a közöttük eltelt időtartamok hosszáról is.

A megfigyelés alapbizonylatai lehetnek:

— a *vállalati mérlegbeszámolók*, ahol a vállalat egészére vonatkozó állományi és forgalmi adatokból lehet forgási sebesség mutatókat számítani;

— a *vállalat különféle nyilvántartásai* (könyvelés, számlázás, lejárati napló), amelyek tételes adataiból részletesebb kimutatások készíthetők a fennálló devizakintlevőségi állományok esedékességéről;

— a *bankok devizaelszámolásai*, ahol pénznemek, országok és fizetési viszonylatok szerint állnak rendelkezésre a nemzetközi elszámolási és fizetési mérlegre vonatkozó adatok. Ha a fenti két mérlegben szereplő azonos tételeket egyedileg kölcsönösen szembeállítjuk egymással, akkor lényegében az árumozgás és a pénzmozgás közötti időkülönbségre, az ún. *devizafutamidőre* lehet következtetni.

A *devizakintlevőségek összetételének* vizsgálatát a vállalati mérlegben, ill. a leltárakban, számlakivonatokban szereplő állományadatok lejárat szerinti csoportosításával kezdhetjük, amikor is kiszámítjuk az egy-egy csoportba tartozó összeg arányát a teljes állományhoz. Ekkor a megoszlási viszonyszámok jellemzik a kintlevőségi állomány szerkezetét. A viszonyszámok időbeli összehasonlítása tájékoztatást ad arról is, hogy tendenciájában javul-e vagy romlik a vállalat, ill. a népgazdaság devizakintlevőségeinek mobilitása. Ha ti. növekszik a rövidebb esedékességű követelések aránya a teljes devizaállományon belül, akkor javuló, ellenkező esetben rosszabbodó mobilitásról beszélhetünk.

A napi jegyzékekből (naplókból) összeállított forgalmi kimutatás teljes képet nyújt az *áruszállítások lejárati szerkezetéről* és arról, hogyan változnak a mobilitást jellemző futamidők az egyes időszakokban. A szerkezet-vizsgálat továbbá lehetővé teszi a különböző viszonylatok ($, Rbl, országok, devizanemek) forgási sebesség-mutatóinak időbeli összehasonlítását. A *forgási sebesség kiszámítása* kétféleképpen végezhető: először az ún. klasszikus módszerrel, ami gyakorlatilag az egyazon pénznemben lebonyolított áruforgalom és a hozzá tartozó átlagos kintlevőségi állomány hányadosa (lásd 1. sz. lábjegyzetet), másodszor pedig az egyes időosztályközökbe tartozó átlagos időhosszaknak az adott osztályközben tartozó exportforgalommal súlyozott átlagával. Ez a számítási módszer az előbbinél pontosabb eredményt ad, és alkalmasabb a részletek feltárására.

A mérlegkészítési időpontokban végzett elemzésekkel statikus állapotot vizsgálunk, noha az esedékességek szerkezetének bemutatásával, a különböző lejárati idők összefüggéseit előrevetítve, hosszabb-rövidebb időszak várható bevételeit térképezik fel. Ennek érzékelésére szolgál az *1. táblázat*.

Számításaink szerint a vevőállomány mobilitási jellemzője a vizsgált vállalatnál:

1980. június 30-án	27,1 nap,
szeptember 30-án	26,6 nap,
1981. június 30-án	34,1 nap,
szeptember 30-án	24,2 nap.

1. táblázat

Az osztályközöket jellemző átlagos futamidők a negyedév záró napjától számítva

Időszak (nap)	1980		1981	
	jún. 30.	szept. 30.	jún. 30.	szept. 30.
1—4	3,1	2,1	2,3	1,6
5—11	8,9	8,1	8,9	8,3
12—20	16,9	16,2	15,7	15,7
21—30	22,7	25,5	25,6	25,3
31—45	38,0	37,1	39,8	39,2
46—60	53,8	56,0	52,3	51,6
61—90	75,6	65,1	79,9	64,4
91 napon túl	118,0	127,9	112,9	115,4

A kintlevőségek várható időtartamainak összefüggése — annak feltételezésével, hogy az összetétel rövid időn belül nem változik meg lényegesen —, bizonyos előrejelzéseket is lehetővé tesz a vállalati eszközök megtérülésére, ill. annak becslésére. Az ily módon tehát a mérlegben szereplő devizaállomány-adatokból számított mobilitási mutató (M) egy adott időpontban meglevő állomány pénzzé válásának időtartamát tükrözi a futamidőkből képzett osztályközök és viszonylatok szerint.

A 2. *táblázat* adataiból (a 2. sz. lábjegyzet alapján) kiszámítható, hogy a II. n. évi összes kintlevőség teljes átlagos futamideje 46,6 nap, szemben a mérlegkészítés időpontjában fennálló június 30-i devizaállomány 34,1 napjával.

2. táblázat

A kintlevőségek kiegyenlítései ideje a számlázás időpontjától számítva értékesítési irányok szerint 1981. II. n. évben
%-ban

Időszak (nap)	Belföld	Export	Kintlevőség összesen
1—10	4,8	0,6	3,9
11—14	18,4	—	14,5
15—20	5,5	1,0	4,5
21—30	11,8	6,2	10,6
31—45	19,1	14,5	18,2
46—60	20,9	8,7	18,2
61—90	16,3	19,5	17,0
91 napon túl	3,2	49,5	13,1
Összesen	100,0	100,0	100,0

A viszonylati csoportosításból egyidejűleg megállapítható az is, hogy
a devizakintlevőségek 78,5 napos és
a belföldi forintkintlevőségek 37,4 napos
átlagos futamideje között minőségi különbség mutatkozik a belföldi követelések javára. Figyelemmel továbbá arra, hogy a vállalat általában 3 havi (90 nap) fizetést köt ki a konvertibilis viszonylatú export-szállításaira, az időben

történő kiegyenlítés 71,0 napra (7,5 nappal) csökkentené a devizakintlevőségek futamidejét.

A következő 3. *táblázatban* az áruk raktárból történő kiszállítását követő számlázás adatai szerepelnek. Ez a nyilvántartás lehetőséget ad a vállalati kintlevőségek teljes mobilitásának megfigyelésére, a bármely időpontban keletkező kintlevőség várható kiegyenlítési időtartamának meghatározására. Ezt a mobilitási mutatót M_v-nek nevezzük.[2] Az M_v mutató *folyamatában* jellemzi (esetleg napról napra) az egyes időpontokban keletkezett vevőállomány (devizakintlevőség) fennállásának teljes időhosszát.

3. táblázat

Nem rubel viszonylatú devizakintlevőség
(devizanem, ország, árufőcsoport, fizetési mód szerint részletezésben)

Számlázás (ill. árukiszállítás kelte)	Összeg (ezer Ft-ban)	Határátlépés kelte	Fizetés (kiegyenl.) kelte		Kiegyenlítés időtartama		Eltérés + – nap (7–6)
			szerződés sz.	ténylegesen	szerződés sz. (4–3)	ténylegesen (5–3)	
1	2	3	4	5	6	7	8
.							
.							
.							
hó, n. év, év összesen							

A devizakintlevőségek elszámolásában – a táblázat fejrovatából adódóan – *három nevezetes időpontot* különböztethetünk meg, mégpedig:

– 1. a *követelés keletkezését* (számlázás, ill. a határátlépés időpontja);

– 2. a *pénzügyi teljesítés szállítási szerződésben kikötött időpontját* a (kötelezettség kiegyenlítésének várható ideje);

– 3. a *pénzügyi teljesítés tényleges időpontját* (a Magyar Nemzeti Bank által elszámolt devizaellenérték jóváírása a vállalat elszámolási számláján).

Az előbbi három nevezetes időpont összehasonlításából figyelemmel a kapott időtartamokra, a következő mutatók számíthatók:

– a 2 – 1 = a szállítási szerződésekben kikötött határidőkből *várható mobilitási jellemző*;

[2] A vállalat egészére jellemző mutatót a vevőállománnyal (abszolút összeggel vagy megoszlási viszonyszámmal) súlyozott átlagként határozzuk meg. Ezek alapján a vevőállomány mobilitási mutatója:

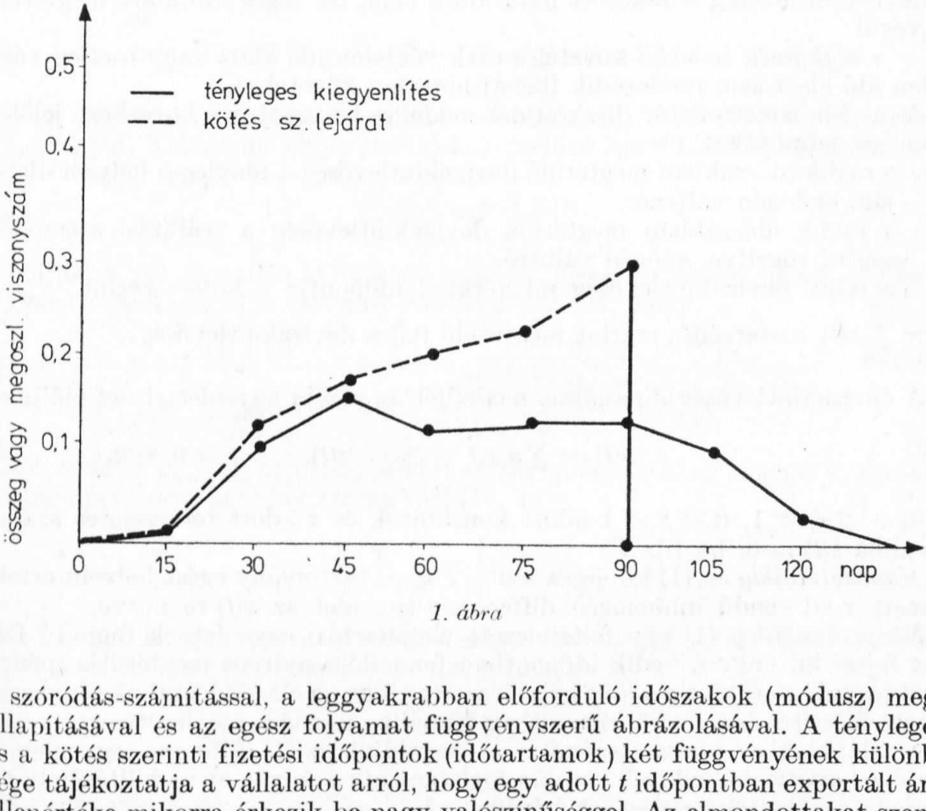
$$M_v = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot V_i}{\sum_{i=1}^{k} V_i},$$

ahol n = az osztályköz átlagos (illetve az egyes tétel egyedi) kiegyenlítési ideje napokban,
V = a vevőállomány,
i = az osztályközök (tételek) száma ($i = 1, 2, \ldots, k$).

— a 3—1 = a *tényleges* kiegyenlítési időtartamokból adódó *mobilitás*, a kintlevőségek megtérülésének valóságos hossza;

— a 3—2 = a szerződéstől eltérő teljesítések miatti *időkülönbözet*, ami jellemzi a fizetési fegyelmet, s a be nem tartásából származó veszteségeket (késedelem esetén) vagy nyereségeket (előbbi teljesítés).

Az elemzés egyik fontos módszere, hogy nem csak a futamidő különbségeket vizsgáljuk, hanem azt is megállapítjuk, hogy az áruszállítás teljesítését követő fizetési határidők milyen időbeli eloszlást mutatnak a kötések és a tényleges teljesítések szerint. Hasznos információkat kaphatunk ebben a tekintetben



1. ábra

a szóródás-számítással, a leggyakrabban előforduló időszakok (módusz) megállapításával és az egész folyamat függvényszerű ábrázolásával. A tényleges és a kötés szerinti fizetési időpontok (időtartamok) két függvényének különbsége tájékoztatja a vállalatot arról, hogy egy adott t időpontban exportált áru ellenértéke mikorra érkezik be nagy valószínűséggel. Az elmondottakat szemlélteti az **1.** ábra.

Az eddigiekben közgazdasági és banktechnikai oldalról közelítettük a devizakintlevőségek mobilitásának problémáját; az ismertetett ellemző módszerek sem mentek túl a statisztikai-matematika eszköztárán. A következő pontban bemutatjuk a devizakintlevőségek megtérülésének egy dinamikus modelljét.

Devizakintlevőségek megtérülésének dinamikus modellje

A devizakintlevőségek keletkezése és pénzügyi kiegyenlítése időben lejátszódó, sztochasztikus folyamat. Ezért emeltük ki az elemző módszerek között a leíró függvények szerepét és a valószínűségszámítás jelentőségét a fizetési határidők várható értékeinek meghatározására. A cikk jelen pontjában — éppen a sajátos jelleg hangsúlyozása, a szokványostól való eltérés és a könnyebb kezelhetőség érdekében mégsem sztochasztikus, hanem egy viszonylag egyszerű determinisztikus dinamikus modellt ismertetünk. Elöljáróban megjegyezzük még, hogy a matematikai modellben a mobilitást a közgazdasági fogalomnál szigorúbban és differenciáltabban definiáljuk. Mégpedig:

— a *mobilitás* azt jelenti, hogy a devizakintlevőség a szállítási szerződésben (kötésben) megszabott határidőre (határidőn belül) kiegyenlítődik;

— *az ideiglenesen immobil* fogalmát azokra az esetekre értelmezzük, amikor a devizakintlevőség a kikötött határidőre nem, de véges idő alatt megtérül, és végül

— *a véglegesen immobil* követelés csak végtelen idő alatt vagy esetleg végtelen idő alatt sem rendeződik (behajthatatlan követelés).

Az alább ismertetendő diszkrétidős modellre bevezetjük a következő jelöléseket és definíciókat.

$x(t)$ a t-edik időszakban megtérülő devizakintlevőség a tényleges helyzet alapján, endogén változó,

$z(t)$ a t-edik időszakban megtérülő devizakintlevőség a szállítási szerződés szerint rögzítve, exogén változó,

T a teljes devizakintlevőség megtérülési időpontja a kötés szerint,

$Z = \sum_{t=0}^{T} z(t)$ a szerződés szerint megtérülő teljes devizakintlevőség.

A devizakintlevőség dinamikus modelljét az alábbi egyenlettel definiáljuk.

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\tau} \alpha_i x(t-i) + \beta z(t), \qquad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

ahol $0 < \alpha_i < 1$, $0 < \beta < 1$ adott konstansok és τ adott természetes szám, továbbá $z(t) = 0$, ha $t > T$.

Matematikailag az (1) kifejezés a $0 \leq t < \infty$ tartomány egész helyein értelmezett τ-ad rendű inhomogén differencia-egyenlet az $x(t)$-re nézve.

Közgazdaságilag (1) egy feltételezett magatartási egyenletnek fogható fel. Azt fejezi ki, hogy a t-edik időpontban fennálló tényleges megtérülés (pénzügyi realizálás) értéke a α_i és β súlyok szerint függ az előző időszakok tényleges megtérüléseitől és a t-edik időpontban fennálló szerződés kötelezettségtől.

Az alábbiakban operátorszámítással megoldjuk az (1) differenciaegyenletet, majd a kapott eredmények alapján foglalkozunk a folyamat mobilitásának és a modell működőképességének kérdéseivel.

Tekintsük az $x(t)$ és $z(t)$ függvényeket a diszkrét operátortest elemeinek az alábbi alakban:

$$x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x(j)}{(1+q)^j}, \quad z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z(j)}{(1+q)^j}; \tag{2}$$

ahol az absztrakt q elem az ún. differencia-operátor és $1/(1+q)$ az eltolási operátor. A (2)-ben a konvergencia operátoros értelemben triviálisan teljesül. (Lásd [3], [4]). Az eltolási operátor ismert tulajdonságának és (2)-nek a figyelembevételével (1) az alábbi alakban írható át:

$$x = \sum_{i=1}^{\tau} \frac{\alpha_i}{(1+q)^i} + \sum_{i=1}^{\tau} \sum_{k=1}^{i} \frac{x(-k)}{(1+q)^{i-k}} + \beta z, \tag{3}$$

ahol az $x(-k)$ értékek a feladat kezdeti értékei, és ezek biztosítják az (1) megoldásának egyértelműségét. Ezek az értékek azonban nullák, mert a megtérülés folyamatát konkrét esetben úgy tekintjük, hogy az a $t = 0$ időpontban kezdődik. Ily módon a (3)-ból az $x(t)$ megtérülés operátorára kapjuk, hogy

$$x = \frac{\beta z(1+q)^\tau}{(1+q)^\tau - \sum_{1=1}^{\tau} \alpha_i (1+q)^{\tau-i}}. \tag{4}$$

A (4)-hez tartozó (5) polinomot

$$Q(1+q) = (1+q)^\tau - \sum_{i=1}^{\tau} \alpha_i (1+q)^{\tau-i} \tag{5}$$

az (1) karakterisztikus polinomjának nevezzük. Írjuk fel (4)-et mint a t idő függvényét. Tekintsük ehhez az (5)-höz tartozó karakterisztikus egyenletet

$$\xi^\tau - \sum_{i=1}^{\tau} \alpha_i \xi^{\tau-i} = 0. \tag{6}$$

Jelöljük a (6) egyenlet különböző gyökeit ξ_k-val, multiplicitásaikat pedig σ_k-val. Ekkor parciális törtekre bontással adódik, hogy

$$\frac{(1+q)^\tau}{(1+q)^\tau - \sum_{i=1}^{\tau} \alpha_i (1+q)^{\tau-i}} = (1+q) \sum_{k=1}^{M} \sum_{p=1}^{\delta_k} \frac{\gamma_{k,p}}{(1+q-\xi_k)^p}, \tag{7}$$

ahol M és a $\gamma_{k.p}$ együtthatók ismert elemi módszerekkel meghatározhatók. Elemi operátoros szabály szerint fennáll, hogy

$$\frac{1+q}{(1+q-\xi)^p} = \left\{\xi^{t-p+1} \binom{t}{p-1}\right\}$$

minden ξ-re és természetes p-re. A diszkrét konvolúció-tétel alkalmazásával a (4)-et és a (7)-et figyelembe véve kapjuk, hogy

$$x(t) = \beta \sum_{i=0}^{t} z(i) \sum_{k=1}^{M} \sum_{p=1}^{k} \gamma_{k,p} \xi^{t-i-p+1} \binom{t-i}{p-1}, \tag{8}$$

mely kifejezés leegyszerűsödik abban a gyakorlatilag majdnem mindig teljesülő esetben, amikor a (6) karakterisztikus egyenlet összes gyökei különbözőek ($\sigma_k = 1$). Ekkor

$$x(t) = \beta \sum_{i=0}^{t} z(i) \sum_{k=1}^{\tau} \gamma_k \xi_k^{t-i}. \tag{9}$$

Az alábbiakban az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy a gyökök különbözőek. Ezzel a modellből levonható mobilitási és működőképességi viszonyok vizsgálatát nem korlátozzuk, az azokra kimondott feltételek és kritériumok a gyökök multiplicitásától lényegében függetlenek.

Megjegyezzük, hogy a ξ_k gyökök között komplexek is lehetnek, a (9) értelemszerűen ekkor is valós értékű függvényt állít elő, amely trigonometrikus függvényeket tartalmaz, és ekkor rezgések léphetnek fel.

A mobilitás és működőképesség definíciója:

A devizamegtérülésnek (1)-ben differencia-egyenlettel leírt folyamatát mobilisnak nevezzük, ha

$$Z = \sum_{t=0}^{T} z(t) \leq \sum_{t=0}^{T} x(t).$$

A devizamegtérülés (1)-gyel leírt folyamatát ideiglenesen immobilisnak, illetőleg a matematikai modellt működőképesnek nevezzük, ha

$$Z = \sum_{t=0}^{T} z(t) > \sum_{t=0}^{T} x(t)$$

és létezik olyan $T_1 > T$ *véges* időpont, melyre fennállnak az alábbi feltételek:

$$\sum_{t=0}^{T} z(t) \leq \sum_{t=0}^{T_1} x(t) \quad \text{és} \quad \sum_{t=0}^{T} z(t) > \sum_{t=0}^{T_1-1} x(t).$$

A fentiek közgazdaságilag plauzibilisek. A mobilitás, amint azt a modell általános bevezetőjében definiáltuk, azt jelenti, hogy az összes devizakintlevőség a szállítási szerződésben rögzített határidőig megtérül. Az ideiglenes immobilitás, illetve a matematikai modell működőképessége azt jelenti, hogy az (1)-gyel leírt összes devizakintlevőség a szerződésben rögzített határidőn túl ugyan, de véges időtartam alatt megtérül. Láthatjuk, hogy a modell működőképessége az immobilitáshoz kapcsolódik. Mobilitás esetén nem beszélünk a modell működőképességéről. A modell ilyen értelmű megfogalmazását indokolja az a jelenleg fennálló külgazdasági környezet, amely a követelések kiegyenlítésének időpontját többé-kevésbé a végtelen felé tolja el a kötésekben megszabott lejáratokhoz képest.

Alapvető fontosságú a működőképesség kritériumainak, illetve a T_1-időpontnak a meghatározása. Ide kapcsolódik az alábbi két tétel.

1. *tétel. Tegyük fel, hogy a folyamat nem mobilis és legyenek a* (6) *karakterisztikus egyenlet gyökei különbözőek. Ha a* (6)*-nak van egynél nagyobb abszolút értékű gyöke, akkor a modell működőképes.*

Az állítás könnyen belátható. Az (1)-ből nyilvánvaló, hogy $x(t) > 0$ minden $t \geq 0$-ra.

Mivel $z(t) = 0$, ha $t > T$, (9)-ből kapjuk, hogy a $t > T$ tartományban

$$x(t) = \beta \sum_{i=0}^{T} z(i) \sum_{k=1}^{\tau} \gamma_k \xi_k^{t-i} = \beta \sum_{k=1}^{\tau} \gamma_k \xi_k^t \sum_{i=0}^{T} z(i) \xi_k^{-i} = \beta \sum_{k=1}^{\tau} \delta_k \xi_k^t, \tag{10}$$

ahol

$$\delta_k = \gamma_k \sum_{i=0}^{T} z(i) \xi_k^{-i}. \tag{11}$$

Mivel a (6) legnagyobb abszolút értékű gyöke egynél nagyobb, ezért (10)-ből

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \infty,$$

következésképp kell léteznie egy egyértelműen meghatározott T_1 időpontnak, amelyre nézve teljesülnek a

$$(12)\qquad \begin{aligned} &\sum_{t=0}^{T}(t) \leq \sum_{t=0}^{T_1} x(t), \\ &\sum_{t=0}^{T} z(t) > \sum_{t=0}^{T_1-1} x(t) \end{aligned}$$

feltételek. A modell tehát működőképes.

A T_1 meghatározásával kapcsolatban az alábbiakat állíthatjuk. Írjuk fel a $t > T$ tartományban a ténylegesen megtérült devizakintlevőséget. A (10)-ből és (11)-ből adódik, hogy

$$(13)\qquad \begin{aligned} \sum_{l=0}^{t} x(l) = \sum_{l=0}^{T} x(l) + \sum_{l=T+1}^{t} x(l) = \beta \sum_{l=0}^{T} \sum_{i=0}^{l} z(i) \sum_{k=1}^{\tau} \gamma_k \xi_k^{l-i} + \\ + \beta \sum_{l=T+1}^{t} \sum_{k=1}^{\tau} \delta_k \xi_k^l = P + \beta \sum_{k=1}^{\tau} \delta_k \sum_{l=T+1}^{t} \xi_k^l, \end{aligned}$$

ahol a $0 \leq t \leq T$ intervallumon megtérült összes devizát P-vel jelöltük. A véges mértani sor összegképletének alkalmazásával nyerjük, hogy

$$(14)\qquad \sum_{l=0} x(l) = P + \beta \sum_{k=1}^{\tau} \delta_k \frac{\xi_k^{T+1} - \xi_k^{t+1}}{1 - \xi_k}, \qquad t > T.$$

A kapott összefüggés a $t > T$ tartományban egyszerűen számítható és így a konkrét esetben a (12) feltételeknek eleget tevő T_1 szám numerikusan meghatározható.

2. *tétel. Tegyük fel, hogy a folyamat nem mobilis és legyenek a* (6) *karakterisztikus egyenlet gyökei különbözőek és egynél kisebb abszolút értékűek. A modell akkor és csakis akkor működőképes, ha*

$$(15)\qquad Z = \sum_{t=0}^{T} z(t) < P + \beta \sum_{k=1}^{\tau} \delta_k \frac{\xi_k^{T+1}}{1 - \xi_k}.$$

Bizonyítás. Mivel (6) összes gyökére nézve $|\xi_k| < 1$, elvégezve a (14)-ben a $t \to \infty$ határátmenetet kapjuk, hogy

$$(16)\qquad \sum_{l=0}^{\infty} x(l) = P + \beta \sum_{k=1}^{\tau} \delta_k \frac{\xi_k^{T+1}}{1 - \xi_k}.$$

Ha a (15) fennáll, akkor a (16) alapján világos, hogy létezik pontosan egy $T_1 < \infty$ természetes szám, amely eleget tesz a (12) feltételeknek. A modell tehát működőképes.

Fordítva tegyük fel, hogy a (15) nem teljesül, azaz

$$(17)\qquad Z = \sum_{t=0}^{T} z(t) \geq P + \beta \sum_{k=1}^{\tau} \delta_k \frac{\xi_k^{T+1}}{1 - \xi_k}.$$

A (16) és a (17) szerint

$$\sum_{t=0}^{T} z(t) \geq \sum_{l=0}^{\infty} x(l). \tag{18}$$

Ez pedig azt jelenti, hogy ha a (18)-ban az egyenlőség fennáll, akkor a teljes devizakintlevőség csak végtelen hosszú idő alatt térül meg. Ha viszont az egyenlőtlenség áll fenn, akkor a teljes devizakintlevőség még végtelen hosszú idő alatt sem térül meg. A modell tehát nem működőképes.

Megjegyzések

1. Ha a karakterisztikus egyenlet gyökeire érvényes, hogy $|\xi_k| \leq 1$, vagyis egy abszolút értékű gyökök is felléphetnek, akkor az (1) differencia-egyenletet nem tekinthetjük egy stabil közgazdasági folyamat modelljének. Ekkor ugyanis az α_i és β együtthatók tetszőlegesen kicsiny megváltoztatása az egy abszolút értékű gyököket a komplex egységkör külsejébe vagy belsejébe viheti át, mely esetekben már az előző tételekben kimondott működőképességi kritériumok érvényesek.

2. Ha a modell működőképes, akkor a teljes devizakintlevőség a $t = T_1$ időpontig megtérül, a folyamat itt befejeződik, és a $t > T_1$ tartományban az (1) közgazdaságilag már semmit sem reprezentál. Ennek ellenére – mint ahogy azt az előző tételekben láttuk – a működőképesség kritériumainak levezetésénél az (1) differencia-egyenlet megoldásának a $t > T_1$ tartományban való viselkedése alapvető szerepet játszik.

3. A 2. tételben szereplő működőképességi kritériumot az alábbi alakban is írhatjuk.

$$Z - P < K,$$

ahol

$$K = \beta \sum_{k=1}^{\tau} \delta_k \frac{\xi_k^{T+1}}{1 - \xi_k}.$$

Ez az egyenlőség pedig azt az egyszerű tényt fejezi ki, hogy a szállítási szerződésben rögzített T lejárati időpontig, a szerződés szerinti és a ténylegesen megtérült teljes devizakintlevőség különbségének egy K korlát alatt kell maradnia. Ha ez nem teljesül, akkor a szerződés szerinti teljes devizakintlevőség már nem térülhet meg.

4. Az ideiglenes immobilitás mérőszámára bevezethetjük az

$$\eta = \frac{T_1 - T}{T_1} = 1 - \frac{T}{T_1}$$

mennyiséget. Nyilvánvalóan $0 < \eta < 1$; és minél kisebb a T/T_1 arány, annál nagyobb az η és annál erősebb a folyamat immobilitása.

*

A jelen cikkben ismertetett modell megfogalmazásánál szem előtt tartottuk, hogy az elemző módszerek széles körben alkalmazhatóak legyenek, és hogy a matematikai apparátus ne adjon bonyolultabb feladatot, mint amelyet viszonylag egyszerű számítógépekkel el lehet végezni. A téma időszerűsége egyben felveti azt az igényt, hogy mielőbb össze kell hangolni a népgazdasági és a vállalati érdeket a devizakintlevőségek viszonylagos és tényleges csökkentése érdekében. Ezért a pénzintézeteknek — elsősorban a Magyar Nemzeti Banknak — fokozottabb figyelemmel kell kísérniök a vállalati kötésekben a fizetési feltételeket, hogy azokat a népgazdaság érdekei szerint befolyásolhassák. Ezen túlmenően a vállalatoknak szorgalmazniok kell a kintlevőségek időbeni behajtását, és jogi eszközökkel is biztosítaniok a késedelmes és a behajthatatlan követelések rendezését.

A cél elérése érdekében rendszeresen figyelemmel kell kísérni a devizakintlevőségek állományának alakulását, a forgalmi folyamatok lebonyolítását a devizakövetelés keletkezésétől egészen a pénzügyi kiegyenlítésig. Ennek érdekében a cikkben javasolt megfigyelésű és elemző módszereket — beleértve az általunk megadott modellt is — fel kellene használni a vizsgálatoknál és a következtetések levonásánál. Mind népgazdasági, mind vállalati szinten el kellene érni, hogy a devizakintlevőségek mobilitása a jelenlegihez képest jelentősen javuljon, és ezáltal jobb legyen a népgazdaság likviditása is. A devizafutamidők rövidítése népgazdasági megtakarítást eredményez, mert csökkenti a külfölddel szembeni hiteligényt és a kamatteher miatti veszteségeket.

Az eddigiekben ismertetett módszer nagy előnye, hogy rendkívül egyszerű, gyakorlatilag könnyen alkalmazható, hátránya viszont, hogy nem veszi figyelembe a fellépő véletlen jelenségeket. Ezért az alábbiakban *Malinvaud* [5] alapján röviden ismertetünk egy sztochasztikus modellt is, melyre a működőképesség 2. tétele értelemszerűen alkalmazható. Ennek lényege, hogy a devizamegtérülés $[0, T]$ intervallumon felvett ismert értékeiből kiindulva matematikai-statisztikai módszerrel megkíséreljük a megtérülés értékeit a $t > T$ tartományba előre jelezni.

Azzal a feltételezéssel élünk, hogy a tényleges megtérülés idősora egy olyan stacionárius folyamatot reprezentál, melynek létezik az autoregresszív reprezentációja, azaz fennáll az

$$x(t) - \bar{x} = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i [x(t-i) - \bar{x}] + \omega(t) \tag{19}$$

összefüggés úgy, hogy a (19)-hez tartozó

$$y(t) = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i y(t-i) = 0, \qquad y(t) = x(t) - \bar{x} \tag{20}$$

homogén differenciaegyenlet karakterisztikus egyenletének valamennyi gyöke egynél kisebb abszolút értékű. Fentiekben $\bar{x}$ az $x(t)$ átlaggal becsült várható értékét jelöli és $\omega(t)$ véletlen stacioner folyamat, melynek változói függetlenek, egyenlő eloszlásúak nulla várható értékkel.

Először meg kell határozni a folyamat tapasztalati korrelogramját, mely az ún. autokorrelációs együtthatók sorozatát adja meg. Ezek definíciója (lásd [5]):

$$r(\theta) = \frac{T \sum_{t=1}^{T-\theta} (x(t) - \bar{x})(x(t+\theta) - \bar{x})}{(T-\theta) \sum_{t=1}^{T} (x(t) - \bar{x})^2}, \qquad \theta = 1, 2, \ldots, \tag{21}$$

Az $x(t)$ $[0, T]$ intervallumon felvett értékeinek $\bar{x}$ átlagát meghatározva az autokorrelációs együtthatók közvetlenül kiszámíthatók. A korrelogramból leolvashatjuk, hogy mely időszakokhoz tartozó γ_i együtthatókat kívánunk (19)-ben tekintetbe venni: azokat, melyek olyan időeltolódásokhoz tartoznak, ahol szoros az autokorreláció. A k értékét nem érdemes túl nagyra választani, nehogy a számítások hosszadalmasak legyenek. A γ_i együtthatókat a legkisebb négyzetek módszerével becsülve az alábbi normál egyenletrendszerre jutunk:

$$\mathbf{A}\gamma = r, \tag{22}$$

ahol γ az ismeretlen vektor, komponensei $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k)$ a keresett együtthatók becslései, r az autokorrelációvektor, komponensei a tapasztalati korrelogramból kiolvasott $r(1), r(2), \ldots, r(k)$ értékek. Az $\mathbf{A}$ mátrix szimmetrikus, főátlójában csupa 1-es van, sémája az alábbi:

$$\begin{matrix} 1 & r(1) & r(2) & r(3) & \ldots\ldots & r(k-1) \\ & 1 & r(1) & r(2) & \ldots\ldots & r(k-2) \\ & & 1 & r(1) & \ldots\ldots & r(k-3) \\ & & & 1 & \ldots\ldots & . \\ & & & & & . \\ & & & & & 1 \end{matrix}$$

A (22) egyenletrendszerből a $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ együtthatók becsült értékei kiszámíthatók. (Megjegyezzük, hogy a félreértés veszélye nélkül az elméleti együtthatókat és azok becsléseit ugyanúgy jelöljük.)

Ezután a (20) differenciaegyenlet közvetlenül felhasználható a $t > T$ tartományban való előrejelzésre. A $[0, T]$ bázisintervallumon felvett kezdeti értékek alapján a megoldás a cikkben ismertetett módszerrel explicite felírható a $t > T$ tartományban. Könnyen belátható, hogy a 2. tétellel analóg tétel fogalmazható meg az előrejelzett értékek ismeretében. Az előrejelzés hibája is meghatározható, ennek ismertetésébe nem kívánunk belemenni.

(Beérkezett: 1983 április 5-én)

IRODALOM

1. KOVÁCS, K.— SÁRI, J.: *Mobilitás, likviditás, diszponibilitás.* Budapest, 1977. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
2. SZALAY, GY.: Lejárt követelések; devizabevételre várva *Figyelő,* XXVII. évf. 3. sz. 1983. január 20.
3. BUTZER, P. L.—SCHULTE, H.: *Ein Operatorenkalkül zur Lösung gewöhnlicher und partieller Differenzengleichungssysteme von Funktionen diskreter Veränderlicher und seine Anwendungen.* Köln und Opladen, 1965. Westdeutscher Verlag.
4. JURY, E.: *Theory and Application of the z-Transform Method.* New York, 1964. Wiley and Sons.
5. MALINVAUD, E.: *Az ökonometria statisztikai módszerei.* Budapest, 1974. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.

A DETERMINISTIC MODEL OF THE RETURNS OF FOREIGN EXCHANGE OUTSTANDINGS

The national economic plan considers the improvement of external equilibrium of the country as the main objective of economic work in the present period. In the interest of this exportability of production should be considerably improved, inputs diminished and efficiency increased. From the *financial side,* however, it is not enough only to produce

and sell goods on external markets, but at least as important equilibrium condition is that foreign exchange countervalue be paid in due time and outstandings come in as fixed in contracts. *Export outstandings* form an integral part of the foreign exchange stock of the country; practically they are equivalent with mobile stocks. It results from this property that foreign exchange outstanding asset is a real material value, therefore, a *faster velocity of circulation* may bring about savings for the national economy; the faster return of export outstandings may contribute to the improvement of external equilibrium, liquidity and solvency of the country.

Following these general statements the authors define the notion of mobility and liquidity, then discuss international and domestic reasons for irregularities of payment, risk factors and the mode of payment as a determinant factor. Beside the circulation speed they stress the importance of structural composition. Special importance is attributed to three dates: the day when the outstanding debt began, the day of payment fixed in the contract and the day of actual payment. A dynamic model of the returns of foreign exchange outstandings is presented in the second part. Here the authors distinguish mobile, temporarily immobile and finally immobile assets, and define viability constraints of the model connected with these notions.

ДЕТЕРМИНАНТНАЯ МОДЕЛЬ ВОЗМЕЩЕНИЯ ВАЛЮТНЫХ ДЕБИТОРСКИХ ЗАДОЛЖЕННОСТЕЙ

Как основную цель хозяйственной деятельности в настоящее время народнохозяйственный план определяет улучшение внешнеэкономической сбалансированности. Для этого необходимо постоянно улучшать экспортную способность производства, снижать затраты и повышать эффективность. Однако с *финансовой точки зрения* мало произвести и продать товары на внешних рынках, по крайней мере таким же важным условием равновесия является своевременное поступление стоимости экспорта в валюте и покрытие дебиторских задолженностей в определенные договором сроки. *Дебиторские валютные задолженности* являются органической частью валютных запасов страны, по существу они однозначны оборотной части запасов. Из этой их существенной особенности следует, что дебиторские валютные задолженности представляют реальную материальную ценность и поэтому *повышение скорости их оборота* ведет к экономии в народном хозяйстве. Быстрое возмещение экспортных задолженностей может способствовать улучшению внешнего равновесия и улучшению *ликвидности* и платежеспособности экономики страны.

Затем авторы дают определение понятий мобильности и ликвидности и подробно рассматривают международные и внутренние причины платежных нарушений, факторы риска и способы оплаты как один из определяющих факторов. Они вносят предложение по наблюдению и анализу процессов валютного обращения и образования валютных запасов. Наряду с показателем скорости оборота они придают большое значение лучше выражающему мобильность средств структурному составу как с точки зрения срока платежа, так и оплаты. Особое значение они придают трем конкретным временным моментам: возникновение задолженности, определенный договором срок выплаты и фактический срок выплаты. Рассмотрев анализ мобильности с экономической точки зрения и банковской техники, авторы дают динамичную модель возмещения валютных задолженностей, в которой они оперируют понятиями мобильный, временно и окончательно иммобильный, показывая и определяя условия и ограничения функционирования модели связанные с этими понятиями.

Simon György—Kőrösi Gábor

Bányászati növekedési funkcionál

1. Bevezetés

A cikkben néhány olyan kutatási eredményről lesz szó, amely az utóbbi években született, abból, hogy a növekedési funkcionált (lásd pl. [3]) a bányászat területére alkalmaztuk.[1]

A növekedési funkcionál alapváltozatában [2], [3], [4] az ásványvagyon növekedési tényezőként explicit alakban *nem* szerepel. Tekintettel az ásványkincsek népgazdasági és világgazdasági jelentőségére, célszerűnek látszott megkísérelni az ásványvagyon-tényező bekapcsolását a modellbe. A kutatást 1980-ban a Nehézipari Minisztérium (dr. Kapolyi László) kezdeményezte, s főbb eredményeit az [1] tanulmány foglalta össze.[2]

Meg kell jegyezni, hogy gazdasági funkcionáloknak, illetve ásványvagyon-tényezőt is tartalmazó termelési függvényeknek az alkalmazását már korábban javasolták a szakirodalomban (például [5] és [6]), s az utóbbi években ásványvagyon hasznosítási rendszermodellt is kialakítottak [7].

Fontos kiindulópontját képezték kutatásainknak az ásványi nyersanyagok műrevalósági minősítésére kidolgozott módszerek ([8,] [9], [10], [11]), különösen a természeti paraméter-függvényes reálköltségkalkuláció. E problémakör elvi-módszertani alapjait *dr. Tóth Miklós* és *dr. Faller Gusztáv* fejtették ki a 60-as évek óta megjelent tanulmányaikban. (Összefoglalója [12].)

Utalunk továbbá *Mach Péter* 1979-ben írt kandidátusi értekezésére [13], amelyben *Megyeri Endre* bizonyos kutatási ereményeire [14] támaszkodva a szénbányászatban keletkező bányajáradékot vizsgálta.

Említést kell még tenni *Kozma Ferenc, Cságoly Ferenc* és *Muraközi Ernő* néhány tanulmányáról ([15], [16], [17]), valamint a Szovjetunióban gazdaságmatematikai módszerek felhasználásával folyó kutatásról [18] is.

A viszonylag nagy számú publikáció és tanulmány azonban csak bizonyos kiindulópontokat nyújtott a bennünket érdeklő problémának, az ásványvagyon növekedési tényező szerepének megközelítéséhez. Meg kellett kísérelnünk egy viszonylag átfogó, de ugyanakkor a feladat szempontjából eléggé konkrét elvi koncepció kialakítását, majd ellenőrzését a tényadatok alapján. Erről lesz szó a továbbiakban.

[1] Részletesebben lásd [1]-ben. Jelen cikk megírásához felhasználtuk újabb kutatási eredményeinket is, melyeket [1] nem tartalmaz.

[2] A kutatásban különböző formában számos szakértő működött közre. Ki kell emelni dr. *Tóth* Miklós, dr. *Faller* Gusztáv, dr. *Simon* Kálmán, dr. *Csernai* Mihály, dr. *Nagy* János, dr. *Szabó* Gábor, *Pruzsina* János, továbbá dr. *Lengyel* László és *Halkovics* László hozzájárulását a kutatómunkához. Külön szeretnénk köszönetünket kifejezni dr. *Kapolyi* Lászlónak, aki folyamatosan figyelemmel kísérte és támogatta munkánkat.

2. Kiinduló feltevések

*Növekedési tényezők*nek a gazdaságfejlődés olyan feltételeit tekintjük, amelyek rendszerint pozitív irányban befolyásolják a gazdálkodás eredményét: a termelés, a hozzáadott érték vagy a nemzeti jövedelem volumenét.[3] A gazdaságfejlődésben fontos szerepet játszó, elsődleges jellegű és mind terjedelmük, mind parciális hatásuk szempontjából mérhető tényezőket a továbbiakban reprezentortényezőknek, illetve röviden *reprezentor*oknak nevezzük.[4]

A reprezentortényezők két fő csoportra oszthatók: 1. az élőmunka mennyiségét; 2. a gazdálkodás egyéb feltételeit jellemző tényezőkre. Utóbbiakat *gazdasági katalizátorok*nak nevezzük, mivel közös sajátosságuk, hogy azonos munkamennyiséggel (egységnyi munkaidő alatt) nagyobb gazdasági eredmény előállítását teszik lehetővé.

A gazdasági katalizátorok lehetnek *természetes vagy mesterséges eredetűek.* Utóbbiakhoz tartoznak az állóeszközök (mesterséges munkaeszközök), valamint a munka hatékonyságát befolyásoló olyan tényezők, mint a képzettség, ösztönzöttség, stb. (személyi katalizátorok).

Természetes eredetű gazdasági katalizátor a termőföld, valamint az *ásványvagyon.* Előbbi a mezőgazdaságban, utóbbi a bányászatban rendkívül fontos növekedési tényező. Közös sajátosságuk, hogy az adott ágazatban nélkülözhetetlen feltételei a termelőfolyamatnak: mennyiségüktől és minőségüktől nagy mértékben függ a társadalmi munka termelékenysége, hatékonysága. A termelővállalatoknál ebből adódó tisztajövedelem különbségek kapitalista viszonyok között, mint azzal már Marx behatóan foglalkozott a Tőkében, földjáradék, illetve bányajáradék formájában jelennek meg.[5]

Az *ásványvagyon* ún. *domináns reprezentor.* [1] Ezen lényegében az értendő, hogy a hatékonyság alakulása szempontjából az adott ágazat, a kitermelőipar döntő fontosságú tényezője, s eközben reprezentál (komplementer jellegűvé alakít át) olyan tényezőket is, nevezetesen a személyi katalizátorokat, amelyek a népgazdaság más területein reprezentorok.

Vizsgálataink arra az eredményre vezettek, hogy a bányászat fejlődése, hatékonyságának alakulása viszonylag jól megmagyarázható három reprezentortényező függvényében. Ezek a következők: 1. az élőmunka mennyisége (foglalkoztatottak létszáma); 2. az állóeszközök (mesterséges munkaeszközök) volumene; 3. az ásványvagyon nagysága.

Feltéve persze, hogy az ásványvagyon megfelelő módon — erről a továbbiakban szó lesz — s a másik két bányászati reprezentortényezővel kölcsönhatásban kerül számbavételre. Ily módon kapjuk a növekedési funkcionál bányászatra specializált alakját, melyet a továbbiakban bányászati növekedési funkcionálnak, illetve rövidebben (bányászati) funkcionálnak fogunk nevezni.

Az eddigiek alapján a *növekedési funkcionált* úgy definiálhatnánk, mint olyan összefüggést, amely a *reprezentortényezők függvényében* írja le a gazdasági eredmény (termelési volumen, nemzeti jövedelem, stb.) alakulását.

[3] A növekedési tényező fogalma analóg a termelési tényező fogalmával.

[4] Vö. [1]-, [2]- és [4]-gyel. Ha a tényező parciális hatása nem mérhető, de a többi feltételek teljesülnek, komplemeter tényezőről, röviden komplementerről beszélünk.

[5] Ehelyütt nem kívánunk kitérni arra a vitára, amely a föld-, illetve bányajáradék szocializmusbeli szerepéről, valamint a termőföld és ásványvagyon gazdasági értékeléséről folyt, illetve részben még ma is folyik. Összefoglalóan lásd például [13]-ban és [19]-ben

Valójában azonban többről van szó: a funkcionál az elsődleges növekedési tényezők mellett *származékos tényezőket* is figyelembe vesz, melyek azért jelennek meg, mert a gazdaságfejlődés ütemét és a hatékonyság színvonalát befolyásolja az élőmunka gazdasági katalizátorokkal való felszereltségének mértéke. A bányászatban vizsgálati eredményeink szerint két származékos tényezőnek van meghatározó szerepe. Egyik a *munka technikai felszereltsége*, a másik a munka *ásványvagyon-felszereltsége*.[6]

A származékos tényezők hatása miatt a gazdasági eredmény változása valamely időszakban nemcsak a kezdő és végállapottól, hanem az *egész fejlődési pályától függ*.[7]

Nem nehéz belátni, hogy az ásványvagyon többféleképpen befolyásolja a gazdasági eredményt:

1. minőségi jellemzőivel (például fajlagos hőtartalom, fémtartalom stb.);
2. elhelyezkedésének sajátosságaival (koncentráltság, mélység, telepvastagság stb.);
3. fekvésével (felhasználás helyétől való távolság stb.).

Hazánkban a harmadik sajátosságnak viszonylag kisebb a jelentősége, s figyelmünket a továbbiakban az első két összetevőre, különösen az elhelyezkedési sajátosságokra összpontosítjuk.

Gazdasági eredményen jelen esetben mindenekelőtt a *termelés volumenét* értjük: ez képezi a bányászati növekedési funkcionál *függő változó*ját. Tekintettel az egyes bányászati ágak termelésének viszonylag homogén jellegére, az ily módon értelmezett gazdasági eredmény naturálisan is kifejezhető, ami megkönnyíti az összefüggések feltárását.

Ugyanakkor számításba kell venni, hogy a nettó termeléstől (nemzeti jövedelemtől) eltérően a bruttó termelés függ a fajlagos anyagjellegű ráfordításoktól: a *fajlagos anyagköltségek változása esetén* a bruttó termelés és a reprezentortényezők közötti összefüggés nem ad pontos képet a gazdasági hatékonyság alakulásáról.

Ezért a hatékonyság vizsgálatához a bányászati növekedési funkcionált célszerű kiegészíteni egy olyan összefüggéssel, melynek függő változója a fajlagos (termékegységre jutó) anyagköltség, független változói pedig az utóbbi alakulását meghatározó tényezők.

Tekintettel az ásványvagyon egyes fajtáinak (szén, ércek, szénhidrogének stb.) lényegesen eltérő sajátosságaira, a növekedési funkcionál bányászati alakját elvileg ágazatonként is specializálni kell. Vizsgálataink alátámasztották azt a korábbi felismerést, hogy az alapvető különbségek az ásványvagyon halmazállapotával függnek össze.[8] Ennek megfelelően a bányászati növekedési funkcionál két alapváltozatát dolgoztuk ki: 1. szilárd halmazállapotú; 2. nem szilárd halmazállapotú ásványvagyonra. Előbbit elsősorban a szénbányászat,[9] utóbbit a kőolaj-földgáztermelés példáján.

Fontos továbbá megkülönböztetni, legalábbis a szilárd halmazállapotú ásványvagyon vonatkozásában a mélyművelést és a külszíni fejtést. (Vö. [1], [8].) Vizsgálataink során úgy jártunk el, hogy mélyművelési adatok alapján

[6] Vannak összetettebb származékos tényezők is, mint arról szó lesz. Vö. továbbá [3] és [4]-gyel.

[7] Mint látni fogjuk, az ásványvagyon-felszereltség az adott vonatkozásban másként hat, mint a technikai felszereltség.

[8] Ez kifejeződik, bár részben vitathatóan, a [8] és [9] metodikák közötti eltérésben.

[9] Ellenőrző számításokat a bauxitbányászatra végeztünk: [1] 68–69. old.

dolgoztuk ki a szilárd halmazállapotú ásványvagyon funkcionálját, majd megvizsgáltuk, mennyiben módosítandók a kapott összefüggések külszíni bányászás esetén.[10]

3. A funkcionál általános alakja

Vezessük be a következő *jelöléseket*:

X = a termelés volumene (szilárd halmazállapotú ásványvagyon esetén ezer tonnában, szénhidrogénekre ezer GJ-ben);
L = a foglalkoztatottak száma (főben);
K = állóeszközök bruttó értéke (1980. évi áron, 5 ezer Ft-ban);
A_v = az ásványvagyon effektív terjedelme (lásd később);
t = idő (mint változó);
t_i = az i-edik időpont (pl. i-edik év);
X, L, K és A_v az idő függvényei;
A_s = az ásványvagyon (ún. ipari vagyon) kezdeti értéke az adott lelőhelyen (10^6 tonnában, illetve $1/15\ 10^6$ GJ-ben);
A_f = leműveltségi fok: az adott időpontig kitermelt ásványvagyon osztva a kezdeti vagyonnal;
B = bányaterület (km²);
M = művelési mélység (szilárd halmazállapotú ásványvagyonra $2 \cdot 10^2$, nem szilárd halmazállapotúra $2 \cdot 10^3$ méterben);
V = telepvastagság (méter);
D = tektonizáltság;[11]
N = telepnyomás (MPa-ban, ahol 1 MPa $\approx$ 10 atmoszféra, 1-nél kisebb MPa esetén N = 1);
P = porozitás (%-ban, 1%-nál kisebb porozitás esetén $P = 1$);
H = kiemelt vízmennyiség (m³/tonna);
$a_f^{(1)}, a_f^{(2)}$ = költségszempontból legkedvezőbb leműveltségi fok szilárd, illetve nemszilárd ásványvagyonra;
a, b, b_i = a modell paraméterei.

Származékos tényezők:

$F_1 = \ln (K/L)$,(ha $K/L > 1$ különben 0)
$F_v = \ln (A_v/L^F)$, ahol A_v és F értékét specifikus függvényekkel kapjuk (lásd később)
$S_1 = \{1 - \exp (aF_1)\}$, ahol[12] $a = -0{,}05$
$S_1^{(b)} = \{1 - \exp \widehat{b}(aF_1)\} \approx bS_1$ (F_1 ma jellemző értékeinél $\widehat{b} \approx b$)
$\dot{F}_1, \dot{F}_v = F_1, F_v$ idő szerinti deriváltjai, vagyis

$$\dot{F}_1 = \frac{dF_1}{dt}, \quad \dot{F}_v = \frac{dF_v}{dt}.$$

[10] Az utóbbi kérdésre jelen cikkben nem térünk ki (lásd [1]-et).
[11] Szilárd halmazállapotú ásványvagyonra: telepek változékonysága, nevezetesen relatív mérőszám/20. Ha a relatív mérőszám 20-nál kisebb D=1. Szénhidrogénekre heterogénitás: kissé heterogén = 1, heterogén = 2, nagyon heterogén = 3.
[12] A növekedési funkcionál bázisváltozata alapján (lásd [4]-ben).

Fentebb ln a természetes (e alapú) logaritmus jele, melyet az egyszerűség kedvéért gyakran a változó fölé tett hullámvonallal helyettesítjük. Tehát például $\tilde{L} = \ln L$, továbbá $\dot{\tilde{L}} = d\tilde{L}/dt = d(\ln L)/dt$.

Írjuk fel a *bányászati növekedési funkcionál relatív alakját.* Ez közelítően azt a törvényszerű kapcsolatot fejezi ki, amely a bányászati termelés logaritmikus növekménye és a reprezentortényezők között áll fenn valamely $[t_1, t_2]$ időszakban. (Vö. [4] 5.2. alfejezetével.)

$$X_{t_1 t_2} = \int_{t_1}^{t_2} (\dot{\tilde{L}} + S_1^{(b)} \dot{F}_1 + \dot{F}_v) dt, \tag{1}$$

ahol $X_{t_1, t_2} = \ln (X_{t_2}/X_{t_1})$.

Eszerint a bányászat termelési volumene akkor változik, ha vagy a foglalkoztatottak számában, vagy a munka technikai, illetve ásványvagyon-felszereltségében változás történik. Amennyiben a felszereltségi tényezők (F_1, F_v) nem változnak, a termelés változása arányos a létszám változásával (extenzív növekedés). Ha viszont a létszám változatlan, de nő a technikai vagy ásványvagyon-felszereltség, intenzív növekedés megy végbe, abban az értelemben, hogy nő a munka termelékenysége.

Meg kell jegyezni, hogy a felszereltségi mutatók természetesen csökkenhetnek is. Ez a bányászatban, F_v vonatkozásában viszonylag gyakori jelenség, mivel az ismert ásványvagyonból gazdaságossági megfontolásokból előbb rendszerint a jobb lelőhelyeket termelik ki.[13] Ezért a bányászatra sok esetben, igaz korántsem mindig, csökkenő hozadék jellemző.

Tekintsük most a bányászati növekedési funkcionál *abszolút alakját* (v.ö. [4] 5.3. alfejezetével), mely arra hivatott, hogy magyarázatot adjon rá, miként határozzák meg a reprezentortényezők valamely időpontban (évben) a bruttó termelés *volumenét* (X_{t_i}-t).

Elöljáróban megjegyezzük, hogy az abszolút alak esetünkben mindenekelőtt azért fontos mert jó lehetőséget nyújt a bányászati növekedési funkcionál paramétereinek becsléséhez, keresztmetszeti vizsgálatok lefolytatásához.

Mivel a funkcionál abszolút alakja elvileg feltételezi a teljes gazdaságfejlődési pálya ismeretét, konkrét vizsgálatokhoz közelítő képlettel írható fel. A bányászatra nem túl nehéz viszonylag jó közelítő formulát találni. Egy ilyen képletet mutatunk be az alábbiakban.[14]

$$X_{t_i} \approx b_0 L^{(1-b\bar{S}_1-F)} K^{b\bar{S}_1} A_v, \tag{2}$$

[13] Ennek ellenkezője főként akkor fordul elő, ha a jobb lelőhelyet később fedezik fel.

[14] A (2) összefüggést (1)-ből úgy kaptuk, hogy (1)-et mindenekelőtt átírtuk a következő alakra:

$$X_{t_1, t_2} = \sum_{t_1}^{t_2}{}' (\Delta\tilde{L} + \Delta F_v) + b \int_{t_1}^{t_2} S_1 \dot{F}_1 dt$$

Kiterjesztve az integrálást (illetve összegezést) a teljes $[t_0, t_i]$ gazdaságfejlődési pályára

$$\sum_{t=t_0}^{t_i}{}' \Delta\tilde{L} = \tilde{L},$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_i}{}' \Delta F_v = F_v.$$

ahol b_0 = konstans (regressziószámítással becsülhető);
$\bar{S}_1$ = az S_1 súlyfüggvény közelítő értéke.

$$(3) \qquad \bar{S}_1 = \left\{1 - \exp\left(a \frac{{}^{t}F_1}{2}\right)\right\}.$$

4. Az ásványvagyon hatását jellemző függvények

A (2) összefüggésből mostmár csak A_v és F szorul közelebbi magyarázatra. Előbbi, mint arra már utaltunk, *az ásványvagyon effektív terjedelme*, pontosabban az annak értékét bármely (t_i) időpontban közelítően megadó függvény jelölése. F szintén az ásványvagyonnal összefüggő függvényt szimbolizál.

A_v és F, mint alább látni fogjuk, lényegesen különbözik a szilárd, illetve nemszilárd halmazállapotú ásványvagyon esetében. Nézzük mindenekelőtt A_v-t.

Az ásványvagyon effektív (vagyis az adott t_i időpontban a termelés volumenére ható) terjedelmét olyan függvénnyel közelítjük, melynek független változói az ásványkincsek releváns mennyiségi és minőségi jellemzői, mint résztényezők. Feltételezzük, hogy a résztényezők multiplikatív kölcsönhatásban állnak egymással és más tényezőkkel a gazdasági eredmény (termelési volumen) létrehozásának folyamatában.

Másszóval A_v sajátos termelési függvény, melyben többnyire az ásványvagyon-jellemzők hatványkitevői a termelésrugalmassági együtthatók. (Utóbbiak a függvény logaritmizált alakjával viszonylag könnyen becsülhetők. Megbízhatóan persze csak akkor, ha a regressziószámításnál a (2) összefüggés más tényezőit is figyelembe veszik.)

Tekintsük előbb a szilárd halmazállapotú ásványvagyon A_v függvényét, melyet $A_v^{(1)}$-el jelölünk (a nem szilárd halmazállapotút $A_v^{(2)}$-vel).

$$(4) \qquad A_v^{(1)} = B^{b_1}(A_S/B)^{b_2}\,[\exp\,(b_3 v^{-1})](1 + M)^{b_4} D^{b_5}(1 + H)^{b_6}\,[\exp\,(b_7 \hat{A}_f^{(1)})],$$

$\hat{A}_f^{(1)}$ = a szilárd halmazállapotú ásványvagyon leműveltségi fokának hatását jellemző függvény:

$$(5) \qquad \hat{A}_f^{(1)} = A_f(1 - a_f^{(1)} A_f), \; a_f^{(1)} \approx 0{,}7$$

$$(5.a) \qquad A_f = \sum_{t=t_0}^{t_i} X_t / A_S \quad \text{(leműveltségi fok valamely időpontban)}$$

$$(5.b) \qquad 0 \leq A_f \leq 1.$$

Könnyen belátható meggondolások alapján (lásd [1] 58—59. oldal) $\int_{t_0}^{t_i} (S_1 \dot{F}_1) dt \approx \overline{S}_1 F_1$, ahol $\overline{S}_1$-et a (3) összefüggés adja. Az ily módon kapott eredményt nem logaritmizált alakra átírva, s a b_0 konstanssal kiegészítve:

$$X_{t_i} \approx b_0 L (K/L)^{b\bar{S}_1} (A_v/L^r).$$

Ebből átrendezéssel kapjuk a (2) összefüggést.

A nem szilárd halmazállapotú ásványvagyonra (kőolajra és földgázra) vizsgálataink során (4)-től jelentősen eltérő A_v függvényt kaptunk:

$$A_v^{(2)} = A_S^{b_{11}S_A} \exp(b_{12} S_{VN}) \tag{6}$$

$$S = 1 - \exp\left[-\frac{1}{4}(\tilde{V} + \tilde{N} + \tilde{P}) \exp\left(-\tilde{D} - \frac{\tilde{M}}{2}\right)\right] \tag{7}$$

$$S_{VN} = 1 - \exp\left[-\frac{1}{4}\tilde{V}\tilde{N} \exp(-\tilde{M})\right] \tag{8}$$

ahol $\tilde{M} = \ln(1 + M)$,
$\tilde{V} = \ln V$, ha $V \geq 1$ és 0, ha $V < 1$,
$\tilde{N}, \tilde{D}, \tilde{P} = \ln N, \ln D, \ln P$.

Mivel az S_A és S_{VN} függvény változói nem negatívak, fennállnak a következő összefüggések is:

$$0 \leq S_A, S_{VN} \leq 1. \tag{9}$$

Közgazdasági tartalmát tekintve az S_A változó olyan súlyfüggvény, mely a tágabb értelemben vett minőségi ásványjellemzők (V, N, P, D, M) nagyságától függően emeli hatványra a kőolaj- és földgázvagyon értékét (A_S-t). Az is kitűnik a közölt összefüggésekből, hogy a minőségi jellemzők egy része (vastagság, nyomás, porozitás) pozitívan, másik része (mélység és heterogenitás) negatívan hat az ásványvagyon értékére, illetve effektív terjedelmére.[15]

S_A-val analóg szerepe van az S_{VN} változónak. Ez a vastagság és rétegnyomás logaritmikus *szorzatának* függvényében jelentkező pozitív hatást fejez ki, mely a mélység függvényében csökken.

Tekintsük most az ásványvagyonnal szintén kapcsolatban álló F függvényt. A különbség A_v-vel szemben elvileg az, hogy F nem az ásványvagyon viszonylag tiszta gazdasági hatását mutatja, hanem azt, mely az élőmunkával nagyon szoros összefüggésben jelentkezik.[16]

Szilárd halmazállapotú ásványvagyon esetében az F csupán egyetlen paramétert tartalmaz, nevezetesen:

$$F^{(1)} = b_1, \text{ vagyis } L^{-F^{(1)}} = L^{-b_1} \tag{10}$$

A (4) összefüggésből látható, hogy a b_1 paraméter az ásványvagyon mennyiségére, pontosabban annak egyik alapvető komponensére, a bányaterületre vonatkozik. Vizsgálataink szerint b_1 pozitív, ami azt jelenti, hogy nagyobb bányaterülethez, egyébként azonos körülmények (létszám stb.) esetén nagyobb termelési eredmény és magasabb hatékonyság tartozik. Kézenfekvő az is, hogy a termelés, illetve termelékenység szempontjából általában kedvező, ha nagyobb az egy dolgozóra jutó bányaterület.[17] $F^{(1)}$-hez úgy jutottunk, hogy

[15] Feltéve, hogy a b_{11}, b_{12} paraméter pozitív. Vizsgálataink szerint e feltétel teljesül.

[16] F az L tényező eredményét *hatványozza*, míg A_v „csupán" *szorozza*. [Lásd a (2) összefüggést.] Meg kell azonban jegyezni, hogy az F függvény szerepe közgazdasági értelemben negatív: magasabb pozitív értékei csökkentik az L tényező parciális hatását, mint az a (2) összefüggésből látható.

[17] Feltéve persze, hogy a viszonylag nagy bányaterület nem abból adódik, hogy vékonyak az ásványrétegek. Utóbbi körülmény azonban az $A_v^{(1)}$ összefüggés jobb oldalának más tényezőiben kifejezésre jut: lásd például az $(A_S/B)^{b_2}$ résztényezőt.

vizsgáltuk az egy főre jutó bányaterület (B/L) parciális hatását a termelésre, amit a $(B/L)^{b_1}$ összefüggés fejez ki. (Utóbbi nyilvánvalóan nem más, mint $B^{b_1} \cdot L^{-b_1}$.)

Nem szilárd halmazállapotú ásványvagyon (kőolaj, földgáz) esetében F-re vizsgálataink alapján az alábbi függvény adódott:

(11) $$F^{(2)} = b_{11}S_A - b_{13}\hat{A}_f^{(2)},$$

ahol

(12) $$\hat{A}_f^{(2)} = A_f - a_f^{(2)}, \; a_f^{(2)} \approx 0{,}25.$$

Következésképp:

(13) $$L^{-F^{(2)}} = L^{-b_{11}S_A + b_{13}\hat{A}_f^{(2)}}.$$

Vizsgálati eredményeink szerint b_{11} pozitív, b_{13} pedig negatív paraméter. Tekintettel arra, hogy S_A és $\hat{A}_f^{(2)}$ értéke nem negatív (rendszerint pozitív), $F^{(2)}$ általában csökkenti az L tényező parciális hatását.

$F^{(2)}$ első komponenséhez $F^{(1)}$-el analóg megfontolások alapján jutottunk, az $(A_S/L)^{b_{11}S_A}$ összefüggés alapján.

$F^{(2)}$ második komponense azt fejezi ki, hogy a kőolaj és földgázkitermelésben az ásványvagyonnak a költség szempontjából legkedvezőbb leműveltségi fokától való eltérés ($\hat{A}_f^{(2)}$) negatívan hat az élőmunka parciális gazdasági eredményére.

5. A modell paraméterei

A bányászati funkcionál paraméterei közül az a-val jelölt koefficiens értékét, mint arra már utaltunk, a növekedési funkcionál bázisváltozatából vettük át, [4] alapján. A többi paramétert (b, b_i) bányászati adatokat felhasználva becsültük.[18]

A paraméterek becsléséhez a (2) összefüggés logaritmizált alakját használtuk fel. Az alábbiakban azokról az eredményekről lesz szó, melyek szilárd halmazállapotú ásványvagyonra a szénbányászat, nem szilárd halmazállapotúra a kőolaj- és földgázbányászat adatai alapján adódtak.

A *szénbányászati* vizsgálatokat két szakaszban: vállalati, majd akna-adatokkal végeztük. Az első szakasz nyolc bányavállalat (egész mélyművelésű szénbányászatunk) 1960–80 évi adatait ölelte fel, éves bontásban. Ily módon minden mutatóra 168 (8×21) mérési adat állt rendelkezésre. A második szakaszban aknánkénti adatokat vettünk számításba, három kiemelt évre: 1970-re, 1975-re és 1980-ra. Összesen 159 mérési adatot mutatóként.[19]

A vállalati vizsgálatokból kitűnt, hogy a mélyművelésű *szénbányászatban* a b paraméter (jelöljük $b^{(1)}$-el) nem különbözik szignifikánsan 1-től. Az aknaszintű vizsgálatokat – a többi (b_i) paraméter pontosabb meghatározása érdekében – az alábbi regressziós egyenlet felhasználásával végeztük:

(14) $$\ln(X/L) - \bar{S}_1F_1 = \bar{b}_0^{(1)} + b_1 \ln(B/L) + b_2 \ln(A_S/B) + \\ + b_3(1/V) + b_4 \ln(1+M) + b_5 \ln D + b_6 \ln(1+H) + b_7\hat{A}_f^{(1)},$$

[18] A számítások az MTA SZTAKI IBM 3031. számítógépén készültek.

[19] A kiinduló adatokat vállalati szakértők állították össze, dr. *Csernai* Mihály (Szénbányászati Koordinációs Központ) irányításával.

ahol $\tilde{b}_0^{(1)} = \ln b_0^{(1)}$, vagyis a szilárd halmazállapotú ásványvagyonra vonatkozó b_0 konstans ($b_0^{(1)}$) logaritmizált értéke

$b_1, b_2, \ldots b_7$ = regressziós együtthatók.

Meg kell jegyezni, hogy $\tilde{b}_0^{(1)}$-re a t hányados alapján nullától nem szignifikánsan különböző érték adódott. Ezért a regressziószámítást $\tilde{b}_0^{(1)} = 0$ ($b_0^{(1)}=1$) feltételezésével megismételtük. Alább az így kapott eredményeket ismertetjük.

1. táblázat

Paraméterek szilárd halmazállapotú ásványvagyon esetén
(a szénbányászat aknaszintű adatai alapján)

Jelölés	Regressziós együttható értéke	t hányados
b_1	0,155	6,59
b_2	0,114	3,66
b_3	−0,752	6,11
b_4	−0,542	9,21
b_5	−0,199	5,52
b_6	−0,042	2,66
b_7	1,017	4,68

Mint az 1. táblázatból látható, 95%-os valószínűségi szinten valamennyi b_i ($i = 1, 2, \ldots, 7$) paraméter szignifikáns.

Viszonylag magas a determinációs együttható (R^2) is: vállalati adatok alapján kb. 0,95, akna-adatok alapján 0,893 (X logaritmizált értékére vonatkoztatva).

Az eredmények közgazdasági szempontból szintén megfelelnek a várakozásnak. Érdemes e tekintetben szemügyre venni az együtthatók előjelét. Az első két együttható (b_1, b_2) pozitív előjele arról tanúskodik, hogy az ásványvagyon mennyiségének növelése pozitívan hat a termelés volumenére.

A harmadik együttható (b_3) negatív előjele arra utal, hogy a művelési telepvastagság növelése szintén pozitívan hat, hiszen b_3 V reciprokát szorozza. Ugyanakkor b_4, b_5, b_6 negatív előjele összhangban van azzal az ismert ténnyel, hogy a művelési mélység, a tektonizáltság, valamint a bányászás során eltávolítandó vízmennyiség kedvezőtlen hatású.

A b_7 koefficiens pozitív értéke arról tanúskodik, hogy az ásványvagyon leműveltségi fokának növekedésével a termelés hatékonysága kezdetben nő, majd egy bizonyos pont elérése után csökken. [Vö. az (5), (5a) összefüggéssel.]

A bányászati funkcionálban figyelembe vett természeti jellemzők köre eltér a természeti paraméter-függvényes reálköltségkalkulációban számításba vettől. A (4) összefüggésben [8]-hoz képest új a *művelési* telepvastagság (V), valamint a leműveltségi fok hatását jellemző függvény ($\hat{A}_f^{(1)}$) szerepeltetése. A b_3, b_7 paraméter számértékeiből és szignifikanciájából (t hányadosaiból) látható, hogy ezek az ásványvagyon effektív terjedelmének fontos tényezői.

Valószínűleg kevésbé lényeges az az eltérés, hogy funkcionálunkban bruttó szénvastagság helyett területegységre jutó ásványvagyon (A_S/B) szerepel. E két mutató arányaiban az ásványok fajsúlykülönbségei miatt tér el egymástól.

A [8] metodika a vízzel analóg módon (m^3/tonnában), a gázhozamot is számításba veszi. Megkíséreltük e megoldást vizsgálataink során alkalmazni, de a gázhozam hatása a rendelkezésre álló tényadatok alapján nem bizonyult matematikai-statisztikai értelemben szignifikánsnak. Valószínű, hogy 1 m^3 gáz jóval kisebb negatív hatást fejt ki, mint 1 m^3 víz.[20]

A *kőolaj és földgázbányászat* paramétereit az egyes *szénhidrogénmezőkre* vonatkozó tényadatok alapján becsültük, szintén három kiemelt évet (1970, 1975, 1980) véve számításba. Néhány nagyon kicsi, évi 10^5 GJ-nél kisebb hozamú mezőt figyelmen kívül hagyva 72 mérési adattal rendelkeztünk.[21]

A paraméterbecslés a szénhidrogének vonatkozásában az alábbi regressziós egyenlettel történt:

$$\ln (X/L) = \tilde{b}_0^{(2)} + b^{(2)}\bar{S}_1 F_1 + b_{11} S_A \ln (A_S/L) + \\ + b_{12} S_{VN} + b_{13} \hat{A}_f^{(2)} \ln L, \tag{15}$$

ahol $\tilde{b}_0^{(2)} = \ln b_0^{(2)}$ (analóg $\tilde{b}_0^{(1)}$-el, regressziós konstans),
$b^{(2)}, b_{11}, b_{12}, b_{13}$ = regressziós együtthatók.

A regressziószámítás során $b_0^{(2)}$-re nem adódott nullától szignifikánsan különböző érték. A számítást $\tilde{b}_0^{(2)} = 0$ $(b_0^{(2)} = 1)$ feltételezéssel megismételve a 2. táblázatban szereplő eredményeket nyertük.

2. táblázat

A kőolaj és földgázkitermelés paraméterei
(mezőnkénti adatok alapján)

Jelölés	Regressziós együttható értéke	t hányados
$b^{(2)}$	1,222	4,58
b_{11}	0,671	6,32
b_{12}	3,10	6,80
b_{13}	−0,511	7,94

Mint látható, valamennyi regressziós együttható szignifikáns: a t hányadosra kapott értékek minden esetben viszonylag magasak. A determinációs együttható (R^2) mezőnkénti adatokra 0,84 (X logaritmizált értékét számításba véve), ami a reprezentortényezők és a bruttó termelés volumene közötti viszonylag szoros kapcsolatra utal.

A paraméterbecslés eredményei közgazdasági szempontból a kőolaj és földgáztermelésben is kielégítőnek nevezhetők. Érdekes, hogy $b^{(2)}$ mintegy 20%-kal nagyobb $b^{(1)}$-nél. Ez arra mutat, hogy a kőolaj és földgázbányászatban az állóeszközök (következésképp a beruházások) fajlagos parciális hatása magasabb, mint a mélyművelésű szénbányászatban, továbbá a népgazdaság egészében.[22]

A [9] metodikával eredményeinket nehéz összehasonlítani, mert a probléma megközelítési módjában lényegbevágóak a különbségek. A legfontosabb elté-

[20] További vizsgálatok alapján úgy tűnik, hogy kb. 1/4-szer akkorát. Ennek megfelelően a (4) összefüggésben célszerű az $(1 + H)^{b_8}$ résztényező H változóját helyettesíteni $(H + G/4)$el, ahol G a gázhozam (m^3/tonnában).

[21] A kőolaj és földgázipari szakértőket dr. Nagy János (KBFI) irányította.

[22] A népgazdaság egészére $b = 1$ érték jellemző [4].

rések megítélésünk szerint abból adódnak, hogy a szóban forgó módszertan figyelmen kívül hagyja a szénhidrogén vagyon majdnem valamennyi minőségi jellemzőjét (vastagság, nyomás, porozitás, heterogenitás), amelyek vizsgálataink során lényegesnek bizonyultak.[23]

6. Növekedési tényezők és hatékonyság

A növekedési funkcionál alapváltozatához hasonlóan a bányászati funkcionál is alkalmas a növekedési tényezők parciális hatásának elemzésére. Az (1) összefüggést ebből a szempontból célszerű a következő alakra hozni:

$$X_{t_1,t_2} = \int_{t_1}^{t_2} [S_L^{(b)}\tilde{L} + S_K^{(b)}\dot{\tilde{K}} + \dot{\tilde{A}}_v]dt, \tag{16}$$

ahol
$$\dot{\tilde{K}} = \frac{d \ln K}{dt}, \quad \dot{\tilde{A}}_v = \frac{\mathrm{d} \ln A_v}{dt},$$

$$S_L^{(b)} = 1 - S_K^{(b)} - F, \quad S_K^{(b)} = S_1^{(b)} \approx bS_1. \tag{17}$$

Az $S_L^{(b)}$, $S_K^{(b)}$ súlyfüggvények konkrét értékei az L, illetve K tényező *relatív* differenciális eredményét,[24] más kifejezéssel határhatékonysági *koefficiensét* [3] adják meg a bányászat területén.

Az ásványvagyon effektív terjedelméhez, A_v-hez tartozó relatív differenciális eredmény (határhatékonysági koefficiens) a (16) összefüggés értelmében 1-gyel egyenlő. Ugyanakkor A_v egyes résztényezői (például bányaterület, ipari vagyon stb.) vonatkozásában lényegében a b_i koefficiensek (lásd az 1. és 2. táblázatot) képezik a relatív differenciális eredményt.[25]

Miként alakul a bányászatban a létszám és az állóeszközök (beruházások) relatív differenciális eredménye? Példaként nézzük meg a bányászatunk alapvető ágaira vonatkozó értékeket a 70-es években (A 3. táblázatban tájékoztatásul az F függvény megfelelő értékeit is közöljük).

Mint látható, az adott vonatkozásban lényegbevágó különbségek vannak a két alapvető bányászati ág között. A mélyművelési szénbányászatban az élőmunka, a kőolaj és földgázkitermelésben az állóeszközök határhatékonysági együtthatói a nagyobbak.

F értékeiből arra lehet következtetni, hogy az ásványvagyon-felszereltségnek a kőolaj és földgáztermelésben jóval nagyobb a jelentősége, mint a szénbányászatban.

Viszonylag egyértelműek a koefficiensek változási irányai: $S_K^{(b)}$ mindkét ágazatban növekvő, $S_L^{(b)}$ csökkenő tendenciájú, s ez elsősorban a technikai felszereltség (F_1) emelkedésével függ össze.

[23] A szóban forgó metodika és a felhasználásával kapott eredmények tudomásunk szerint a szakértők körében is erősen vitatottak.

[24] Vö. [4]-gyel. E mutatók analógok a termelési függvények termelésrugalmassági együtthatóival. Bizonyos értelemben azok dinamizált változatai.

[25] Kivétel például a kőolaj és földgáztermelésnél az A_S tényező, melynek határhatékonysági koefficiense a $b_{11}S_A$ összefüggésből számítható.

3. táblázat

A létszám és állóeszközök határhatékonysági koefficiensei
a bányászat fő ágazataiban
(magyar adatok alapján)

Mutató	Ágazat*	1970	1975	1980
$S_K^{)}$	1	0,185	0,188	0,199
	2	0,289	0,325	0,352
$S_L^{(b)}$	1	0,660	0,657	0,646
	2	0,201	0,136	0,069
F	1	0,155	0,155	0,155
	2	0,510	0,539	0,579

*1 = Szénbányászat (külfejtések nélkül)
2 = Kőolaj és földgázkitermelés

Meg kell jegyezni, hogy $S_K^{(b)}$ értékei a kőolaj és földgáztermelésben főként a technikai felszereltség viszonylag magasabb szintje miatt nagyobbak a szénbányászatiaknál. Szerepe van azonban annak is, mint már említettük, hogy a szénhidrogénbányászatban a b koefficiens értéke 1-nél nagyobb.

Az egyes növekedési tényezők befolyását a hatékonyság alakulására átfogóbban jellemzik az abszolút differenciális eredmények [4], amelyek a bányászati termelésnek azt a volumenváltozását (tonnában, illetve hőtartalomban fejezik ki, melyet valamely tényező egységnyi növelése eredményez, a többi tényező változatlansága esetén.[26]

A differenciális eredmény nem más, mint a tényező határhatékonysági koefficiensének és átlagtermelékenységének szorzata, vagyis a bányászati funkcionál létszám és állóeszköztényezőjére az alábbi módon írható fel:

$$X_L = S_L^{(b)} \frac{X}{L}, \quad X_K = S_K^{(b)} \frac{X}{K}. \tag{18}$$

Nézzük meg hogyan alakultak e mutatók hazánkban. Az összehasonlíthatóság érdekében alább a széntermelést is hőtartalomban fejezzük ki.

4. táblázat

A létszám és állóeszközök differenciális eredményei
a bányászat fő ágazataiban, hőtartalomban (GJ) kifejezve
(magyar adatok alapján)

Mutató	Ágazat	1970	1975	1980
X_K	Szénbányászat*	2805	2650	2659
	Kőolaj, földg. b.	5631	6212	3993
X_L	Szénbányászat*	13,1	11,7	9,8
	Kőolaj, földg. b.	37,5	30,5	22,8

* Külfejtések nélkül

[26] A rövidség kedvéért differenciális eredménynek fogjuk nevezni.

Mint a 4. táblázat adataiból látható, a kőolaj és földgáztermelésben a differenciális eredmények magasabbak, mint a szénbányászatban. Ebből persze nem lenne helyes olyan következtetést levonni, hogy napjainkban a szénbányászat a népgazdasági átlaghoz képest is kedvezőtlen hatékonyságú. (E kérdésről alább szó lesz.)

A változási tendenciák a vizsgált viszonylag rövid időszak alapján nem ítélhetők meg egyértelműen. Mint látható, a létszám differenciális eredményeire bizonyos mérvű hullámzás jellemző. Az állóeszközöknél csökkenés figyelhető meg. Ennek ütemét azonban aligha lenne helyes hosszú távra kivetíteni. Sok múlik ugyanis azon, hogy a továbbiakban milyen ásványmezőket sikerül felfedezni, termelésbe állítani.

Miként viszonyulnak a tényezők differenciális eredményei a bányászatban népgazdasági átlagértékeikhez? E meglehetősen bonyolult kérdésre ehelyütt csak nagyon hozzávetőleges válasz adható.

Mindenekelőtt át kell transzformálni az eddig közölt eredményeket nettó értékre. Továbbá becsülni kell a vizsgált tényezők népgazdasági differenciális eredményeit. Hogy a problémát némileg egyszerűsítsük, a továbbiakban csak az 1980-as évet vizsgáljuk.

A bányászati differenciális eredmények nettó értékre úgy számíthatók át, hogy az anyagjellegű költségeket levonjuk a bruttó értékből. Ehhez elvileg ki kell fejezni a tényezők differenciális eredményét értékben. Közelítően úgy is eljárhatunk, hogy az anyagköltségek (a kutatási és feltárási költségeket is ideszámítva) és bruttó termelési érték arányával[27] csökkentjük a 4. táblázatban közölt naturális eredményeket,[28] s a kapott mutatókat aktuális világpiaci áron (dollárban) fejezzük ki. Utóbbit a kőolaj jelenlegi (1983 áprilisi) világpiaci árából (hozzávetőlegesen 200 dollár/tonna, vagyis kb. 5 dollár/GJ) kiindulva határozzuk meg figyelembe véve a szén viszonylag kisebb használati értékét is.[29]

Végeredményben az alábbi számértékeket kaptuk (5. táblázat).

5. táblázat

A létszám és állóeszközök dollárban kifejezett differenciális eredménye bányászatunk fő ágazataiban 1980-ban
(aktuális dollárárakon)

Mutató		Szénbányászat (külfejtések nélkül)	Kőolaj-földgáztermelés	2/1
Jelölés	Megnevezés	1.	2.	
$Y_L^{(b)}$	Dollár/fő	3404	12 248	3,6
$Y_K^{(b)}$	Dollár/5 ezer Ft álló-eszköz*	12,54	63,94	5,1

* Bruttó érték, 1980. évi áron.

[27] Utóbbi 1980-ban mélyművelésű szénbányászatunkban 36%, a kőolaj-földgáztermelésben kb. 25% volt.

[28] A bányászati amortizációról feltételezzük, hogy X_K fenti módon csökkentett értéke nyújt rá fedezetet.

[29] Mélyművelési bányászással kapott hazai szeneinkre átlagosan 2 dollár/GJ-vel számolunk. Egyes szakértők a kőolajhoz viszonyítva magasabb értékelést tartanak reálisnak, azonban a belföldi és világpiaci árarányokhoz a fenti számérték áll közel. Meg kell jegyezni, hogy a földgázt a világpiaci árarányoknak megfelelően kb. a kőolaj hőár 3/4-ével értékeljük (3,75 dollár/GJ).

L és K népgazdasági differenciális eredményeit (utóbbit amortizáció nélkül) a következő képletek alapján becsültük (vö. (1) 117. oldal).

$$Y_K = S_1 \left(\frac{Y}{K} \right) \tag{19}$$

$$Y_L = \frac{Y - Y_K K}{L}, \tag{20}$$

ahol Y = a nemzeti jövedelem az anyagi termelésben (1980-ban, folyóáron);
K = állóeszközök év eleji bruttó értéke az anyagi termelésben (1980. évi áron);
L = foglalkoztatottak évi átlagos száma az anyagi termelésben (1980-ban).

Az S_1 függvény értéke természetesen szintén az anyagi termelés egészére vonatkozik, 1980. évi adatok alapján. Y_L-re (20)-ból hozzávetőlegesen 123 ezer Ft/fő, Y_K-ra pedig (19)-ből 0,06 adódott.

Ezek után meghatározhatjuk, hogy a népgazdasági értékek alapján mekkorák lettek volna Ft-ban fő bányászati ágaink hozamnormatívái, s a kapott eredményeket mint ráfordítást (opportunity cost-ot) szembeállíthatjuk a dollátban kifejezett tényleges határhozadékokkal (utóbbiakat az 5. táblázatban már közöltük). Képletben:

$$\hat{Y}_K^{(b)} = \frac{(Y_K + C_a^{(b)})5 \cdot 10^3}{Y_K^{(b)}} \tag{21}$$

$$\hat{Y}_L^{(b)} = \frac{Y_L}{Y_L^{(b)}}, \tag{22}$$

ahol $C_a^{(b)}$ = amortizációs kulcs a bányászatban: szénre átlagosan 0,065, kőolaj és földgázra 0,078 (1980. évi magyar adatok alapján).

6. táblázat

A dollárkitermelés költségei bányászatunk fő ágazataiban a tényezők differenciális eredményei alapján
(1980-ban aktuális dollárárakon, Ft/dollár)

Mutató	Szénbányászat*	Kőolaj- és földgáztermelés
$\hat{Y}_L^{(b)}$	36,1	10,0
$\hat{Y}_K^{(b)}$	49,8	10,8

* Külfejtések nélkül.

A 6. táblázatban közölt adatok arra mutatnak, hogy az univerzális tényezők (létszám és állóeszközök) határhatékonysága jelenleg szénbányászatunkban nem marad el a népgazdasági átlagtól, kőolaj és földgáztermelésünkben pedig sokszorta magasabb.

7. Az ásványvagyon szerepe

Miként befolyásolja a termelés volumenét és a gazdasági hatékonyságot az ásványvagyon? E nagyon bonyolult kérdéskör részletes tárgyalásába ehelyütt nem bocsátkozhatunk (bővebben lásd [1]-ben), hanem csak néhány olyan összefüggésre mutatunk rá, amely a bányászati növekedési funkcionálból közvetlenül levezethető.

Az ásványvagyon gazdasági szerepe függ mennyiségi és minőségi jellemzőitől. Valamely jellemző parciális hatását úgy becsülhetjük, hogy meghatározzuk a bányászati termelésnek az adott ásványvagyon-résztényező szerinti parciális differenciálhányadosát (differenciális eredményét).[30] Szilárd halmazállapotú ásványvagyonra az alábbi összefüggések adódnak (a parciális deriválás szabályait lásd például [20]-ban).

(23) $X_B = \dfrac{\partial X}{\partial B} = (b_1 - b_2)\dfrac{X}{B}$ (bányaterület differenciális eredménye)

(24) $X_{A_s} = \dfrac{\partial X}{\partial A_S} = b_2 \dfrac{X}{A_S}$ (az ipari kezdő vagyon diff. eredménye)

(25) $X_V = \dfrac{\partial X}{\partial V} = -b_3 \dfrac{X}{V^2}$ (a művelési telepvastagság diff. eredménye)

(26) $X_M = \dfrac{\partial X}{\partial M} = b_4 \dfrac{X}{1+M}$ (a művelési mélység parciális hatása)

(27) $X_D = \dfrac{\partial X}{\partial D} = b_5 \dfrac{X}{D}$ (a tektonizáltság parciális hatása)

(28) $X_H = \dfrac{\partial X}{\partial H} = b_6 \dfrac{X}{1+H}$ (a vízkiemelés parciális hatása)

(29) $X_{A_f} = \dfrac{\partial X}{\partial A_f} = b_7(1 - 2a_f^{(1)} \cdot A_f)X$ (a leműveltségi fok parciális hatása).

A kőolaj és földgázbányászatban a helyzet bonyolultabb, főként ami az egyes minőségi jellemzőket illeti. A globális parciális hatások azonban viszonylag egyszerűen becsülhetők az alábbi képletekkel:

(30) $X_{A_s} = \dfrac{\partial X}{\partial A_S} = b_{11} S_A \left(\dfrac{X}{A_S}\right)$ (az ipari kezdő vagyon differenciális eredménye)

(31) $X_{VN} = \dfrac{\partial X}{\partial S_{VN}} = b_{12} X$ (a telepvastagság és a rétegnyomás pótlólagos differenciális eredménye)

[30] Pontosabb közelítés érhető el, ha a bányászati fajlagos anyagköltségek alakulását leíró függvényeket [1] is felhasználjuk. Itt azonban erre az egyszerűbb tárgyalás kedvéért nem térünk ki.

Mekkora hányadát képezi a bányászat termelési volumenének az *ásványvagyon differenciális eredménye*? Ha feltételezzük, hogy az ásványvagyon tágabb értelemben vett minőségi jellemzői nem változnak, mennyisége pedig a másik két reprezentortényezővel (L-lel és K-val) arányosan nő, akkor a korábbiak értelmében [lásd az (1) és (17) összefüggést] e kérdésre az F függvény mindenkori értéke [lásd a (10) és (11) összefüggést] ad választ.

F-et megkaphatjuk a (17) összefüggés alapján az alábbi módon is:

$$F = 1 - S_L^{(b)} - S_K^{(b)}. \tag{32}$$

A 3. táblázat adataiból kitűnik, hogy F nagysága kőolaj és földgázbányászatunkban 0,5 körül van, szénbányászatunkban ennek kb. 1/3-a.

Kézenfekvő, hogy az ásványvagyon differenciális eredménye összefüggésben áll a bányajáradékkal és az ásványvagyon gazdasági értékelésével. Nagyon hozzávetőlegesen azt mondhatnánk, hogy a *bányajáradék* egyenlő a bányászat nettó termelésének azzal a hányadával, amely az ásványkincsek differenciális eredménye, az *ásványvagyon gazdasági értéke* pedig megfelel a kitermelése révén keletkező differenciális eredmények összegének.

Valójában a helyzet bonyolultabb. Mindenekelőtt azért, mert az ásványvagyon befolyásolja a bányászat másik két reprezentortényezőjének (L-nek és K-nak) differenciális eredményét. Utóbbiak lényegesen magasabbak lehetnek a népgazdaság egészére jellemző értékeknél. Erre lehet következtetni például a 6. táblázat adataiból.

Ha abból indulunk ki, hogy a bányajáradék és ásványvagyonérték népgazdasági kategóriák, akkor L-t és K-t társadalmi, nem pedig bányászati (individuális) differenciális eredményeikkel kell számításba venni (részletesebben lásd például [1]-ben). Ez azt eredményezi, hogy a bányajáradék részaránya esetünkben a fentebb kimutatottnál magasabb lesz, s ennek megfelelően nagyobbnak adódik az ásványvagyon gazdasági értékelése is.

Ugyanakkor az erőforrások optimális allokációja szempontjából rendkívül fontos a tényezők bányászati differenciális eredményeinek ismerete is, mert ennek alapján lehet következtetni arra, hogy mennyivel előnyösebb valamely tényező igénybevétele az adott területen (ágazatban, bányában), mint a népgazdaságban általában.

Az ásványvagyon-tényező differenciális eredménye ebből a szempontból különleges jellegű, mivel L-től és K-tól eltérően a népgazdaság más területein nem áll vele szemben opportunity cost. Ily értelemben ráfordítás nélküli eredményről van szó.[31]

Az ásványvagyon értékének realizálása a bányászatban felhasznált másik két reprezentortényezőtől, L-től és K-tól függ. Utóbbiak saját individuális differenciális eredményük létrehozásán *felül* mobilizálják a járadékot, pontosabban az ásványvagyon differenciális eredményét is.

Napjainkban a gazdaságfejlesztés korlátja többnyire a felhalmozási eszközök „szűkössége", vagyis K tekinthető az alapvető járadékmobilizálási tényezőnek. Ezért ha a beruházások optimális allokációjáról van szó, K olyan korrigált differenciális eredményét célszerű számításba venni, mely a járadékot is tartalmazza (vö. [1] 170. old.).

[31] A kutatási-feltárási ráfordítások, mint arra már utaltunk, az anyagjellegű ráfordítások között szerepelnek, így a nettó termelés részét képező differenciális eredményeket nem terhelik.

Az ásványvagyon differenciális eredményének ismerete természetesen fontos az ásványkincsek feltárására irányuló kutató-fejlesztő tevékenység optimalizálása szempontjából is.

*

A vázoltak alapján úgy látjuk, hogy a bányászati növekedési funkcionál a gazdaságirányítás hasznos eszközévé válhat mind makroökonómiai, mind pedig vállalati szinten.

Végül megjegyezzük, hogy a bányászati funkcionál kidolgozása része annak a kutatásnak, amely a növekedési funkcionál alapváltozatának kialakításával kezdődött [3], s a modern gazdaság változási törvényszerűségeinek mélyebb feltárására, ily módon végső soron a gazdaságdinamika mint tudomány (vö. [4] 4.3. alfejezetével) megteremtésére irányul.

(Beérkezett: 1983. április 20-án)

IRODALOM

1. A bányászat gazdasági hatékonyságának és a gazdaság fejlődésében betöltött szerepének vizsgálata növekedési funkcionálok és az ásványvagyonhasznosítási rendszermodellek alapján. Zárójelentés (Összeállította: SIMON Gy). Készült az Ipari Minisztérium megbízására. Budapest, 1982 MTA KTI.
2. SIMON, GY.: *Gazdaságfejlődés és növekedési funkcionál.* Budapest, 1979. MTA KTI.
3. SIMON, G.—SAMOVOL, V. S.: On the Economic Growth Functional. *Matekon* Spring 1982 Vol. XVIII. No. 3. p. 65—84.
4. SIMON, GY.: *Gazdaságpolitika és gazdaságfejlődési törvényszerűségek* (Növekedési modell és alkalmazási lehetőségei) Budapest, 1983. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
5. KAPOLYI, L.: *Ásványvagyon komplex hasznosításának bányagazdaságtani vizsgálata a rendszerszemlélet módszerével.* Akadémiai doktori értekezés. Tatabánya, 1975.
6. KAPOLYI, L.: *Ásványi eredetű természeti erőforrások rendszer és függvényszemlélete.* Budapest, 1981. Akadémiai Kiadó.
7. Az ásványi nyersanyagok hasznosítására javasolt rendszermodell. KBFI tanulmány (Készítették: dr. LENGYEL L. és mások). Budapest, 1980.
8. Az energia- és fémhordozó ásványi nyersanyagok műrevalósági újraminősítésének szakmai-módszertani előírásai. Budapest, 1980. Központi Földtani Hivatal.
9. Szénhidrogén előfordulások természeti paraméteres reálköltségszámításának módszerei Budapest, 1979. OKGT—OGIL.
10. TÓTH, M.: Az ásványi nyersanyagelőfordulások egyszerűsített műrevalósági minősítésének módszere. Budapest, 1979. Központi Földtani Hivatal.
11. PRUZSINA, J.: Az ásványi nyersanyagtermelés, az ásványvagyon gazdasági értékelése, az ásványvagyon műrevalósági minősítése (Közreműködött: dr. SZABÓ G. és dr. TÓTH M.) Budapest, 1981. MTA KTI.
12. FALLER, G.—TÓTH, M.: A bányagazdaságtan és az ásványgazdálkodás területén végzett tudományos kutatómunka tézisekbe foglalt eredményei. Budapest, 1972.
13. MACH, P.: A természeti erőforrások gazdasági értékeléséről, különös tekintettel az ásványvagyon értékelésére. Kandidátusi értekezés. Pécs, 1979.
14. MEGYERI, E.: *Erőforrásértékelés és jövedelemszabályozás.* Budapest, 1976. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
15. KOZMA, F.: Gondolatok a természeti erőforrások hasznosításának hatékonyságáról. *Közgazdasági Szemle.* 1978. 9. 1051—1075. o.
16. KOZMA, F.: *A nyitott szerkezetű gazdaság.* Budapest, 1980. Kossuth Kiadó.
17. CSÁGOLY, F.—MURAKÖZI, E.: Az energiahordozók világpiaci árának alakulása mögött meghúzódó alapvető összefüggésekről. *Közgazdasági Szemle.* 1978. 5. 593—607. o.
18. FEDORENKO, N. P. (szerk.): *Ekonomicseszkije problemü optimizacii prorodopolzovanyija.* Moszkva, 1973. Nauka,
19. SZABÓ, G.: *A mezőgazdasági termőföld gazdasági értékelése.* Budapest, 1975. Akadémiai Kiadó.
20. SZÉP, J.: *Analízis.* Budapest, 1972. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.

GROWTH FUNCTIONAL FOR THE MINING INDUSTRY

In this paper the economic growth functional (see [3]) is modified for mining, considering mineral resources as a specific growth factor.

First the general form of the growth functional of mining is described. Second the functions, characterizing the effects of mineral resources are provided according to the sectors of mining (coal mining, oil and natural gas exploitation).

Data in pit/oil field breakdown were used for estimating the coefficients of the model. The estimated coefficients are statistically significant and easily interpretable.

The marginal efficiency of the main factors (labour force, fixed capital, mineral resources) is studied primarily from methodological point of view.

Finally the authors outline the connection among the marginal efficiency indicators derived from the functional, the mine rent and the evaluation of mineral resources. They refer to the significance of the results in respect to the optimal resource allocation.

ФУНКЦИОНАЛ РОСТА ДОБЫВАЮЩЕЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

В статье конкретизируется функционал экономического роста (см. напр. (3)) на область горнодобывающей промышленности, учитывая полезные ископаемые в качестве специфического фактора экономического развития.

В статье дается общий вид разработанного функционала, а также формулы, характеризующие влияние фактора полезных ископаемых в основных отраслях добывающей промышленности (в угольной и нефте-газовой).

Оценка параметров модели проводилась на основе данных отдельных предприятий, шахт и нефтегазовых залежей. Полученные результаты оказались в математико-статистическом смысле достоверными, вместе с тем они экономически хорошо интерпретируются.

В статье рассматриваются частичные эффекты основных факторов (рабочей силы, основных фондов, полезных ископаемых) добывающей промышленности, главным образом с методической точки зрения.

В заключительной части статьи указывается на связь показателей предельной эффективности факторов функционала с рентой добывающих отраслей и экономической оценкой полезных ископаемых, а также на значение полученных результатов с точки зрения оптимального распределения ресурсов современной экономики.

Jörgen W. Weibull

Súrlódás és egyensúlytalanság a lakáspiacon: egy dinamikus modell

1. Bevezetés*

A városi területek lakáspiacát számos országban a klasszikus közgazdasági értelemben vett többé-kevésbé tartós egyensúlytalanság jellemzi. Olyan „piaci tökéletlenségek" miatt, mint amilyen a lakbérszabályozás és a cserében mutatkozó súrlódások — hogy csak két példát említsünk —, a névleges kereslet és kínálat ritkán találkozik a városi lakáspiac minden szegmentjében. Az egyensúlytalansági helyzetekben tipikus, hogy az árakat olyan állományjellegű jelzések egészítik ki, mint a kiadó lakások aránya az összes lakáshoz és a sorbanállási, illetve keresési idő. Következésképpen kívánatosnak látszik a nem-walrasi egyensúly és dinamika egy stock-flow modelljének kifejlesztése. Dolgozatunk megvizsgálja hogyan lehet megközelíteni a kérdést ebből az irányból. Nyilvánvaló, hogy az egyensúlytalanság a gazdaság más ágazataiban is releváns kérdés; itt csak a munkaerőpiacot, az oktatást, az egészségügyet és a közlekedést említjük meg. Ezért a lakáspiac formális disequilibrium modelljének szélesebb alkalmazási köre lehet majd. Mindazonáltal a meghatározottság kedvéért az összes értelmezés és taglalás kizárólag a lakáspiac esetére korlátozódik.

Egy dinamikus stock-flow modellt fejlesztünk ki, amelyben a szereplők aggregátumai deklarálják az árakon és nem árjelzéseken alapuló hatékony kereslet eiket és kínálataikat. A modellben nem tesszük föl, hogy a csere súrlódásmentes (amikoris a kereslet és a kínálat késés nélkül megfelel egymásnak). Ellenkezőleg egy időbeli alkalmazkodási folyamatot definiálunk. Az áralakulást a piaci feltételek határozzák meg, beleértve mint speciális esetet, az egzogén módon rögzített árakat. Mint tipikus példát, olyan lakáspiacot óhajtunk leírni, amelyben van mind magán-lakáspiac szabad áralakulással és cserével, mind pedig közületi lakáspiac, amely adminisztratívan rögzített árak mellett osztja el a lakásokat. Az egyensúlyt a hatékony kereslet, kínálat és csere egyenlősége definiálja. Következésképpen egzogén módon rögzített árak mellett is létezhet egyensúly. A súrlódások miatt általában együtt létezik „hiány" és „slack" a lakáspiac minden szegmentjében, még egyensúly esetén is. Feles-

* A cikk párhuzamosan megjelenik a *Scandinavian Journal of Economics*-ban is. Az angol nyelvű eredetiből *Simonovits András* fordította.

Köszönetnyilvánítás: A szerző hálás Kornai Jánosnak azokért a lényeges javaslatokért és megjegyzésekért, amelyeket a dolgozathoz vezető munka egyik korai szakaszán közölt. A dolgozat korábbi változatára vonatkozó segítő megjegyzésekért szívélyes köszönetemet fejezem ki két névtelen bírálónak. A kutatást a Svéd Építési Kutatásokkal Foglalkozó Tanács, a Svéd Társadalomtudományi Kutatásokkal Foglalkozó Tanács és az Olasz Nemzeti Kutatási Tanács támogatta.

leges elmondani, hogy a modell csak néhány vonatkozását tükrözi a lakáspiac összetett folyamatainak. Például nem tanulmányzzuk a jövedelmek, az adók, a kamatlábak, az energiaárak stb., hatásait.

Ez a munka kiterjesztése egy korábbi tanulmánynak, amelyet Kornai Jánossal írtunk a piacok tartós hiány melletti működéséről vö. *Kornai—Weibull* (1978). A jelen munkát nagyban inspirálta *Kornai* (1980) átfogó vizsgálata, és az ott kifejlesztett fogalmi rendszer több elemét felhasználjuk. Például a cseréval járó súrlódások mostani kezelése Kornai elképzeléseinek egyenes formalizálása. Sőt, a 2. szakaszban kifejlesztett keret-modell a Dániel Zsuzsával és Kornai Jánossal együtt írt korábbi tanulmány továbbfejlesztése és kiterjesztése, vö. *Dániel—Kornai—Weibull* (1981). Másrészt a jelen megközelítés lényegesen eltér a nem-walrasi elemzés jelenleg uralkodó irányzataitól, melyeknek úttörői a matematikai közgazdaságtanban *Dréze* (1975), *Benassy* (1975) és mások voltak. A kutatási terület legtöbb modellje statikus, figyelmen kívül hagyja a stock jelzéseket és a cserével járó súrlódásokat, kizárólag az eladások és vételek mennyiségi korlátaival megfogalmazott disequilibrium jelzésekre összpontosít.[1] Mostanában írt tanulmányaik sorozatában *Peter A. Diamond* és *Eric Maskin* a gazdasági egyensúly új megközelítését ajánlják, amely a csere folyamatokat hasonlóan ábrázolja mint a jelen dolgozat. Náluk a hasznosságot maximalizáló vevők és eladók különféle típusai cserélik egyetlen áru egységeit olyan ár mellett, amelyet egy bizonyos alku-megoldás határoz meg, lásd *Diamond—Maskin* (1979, 1981) és *Diamond* (1982).[2] Alternatív stock-flow megközelítést dolgozott ki *Kornai—Martos* (1973, 1981) árjelzés nélküli szabályozásokra.

A lakáspiacok más modelljét dolgozta ki *Snickars* (1978) részben *Kornai—Weibull* (1978) által inspirálva. Determinisztikus stock-flow modellt fejlesztett ki a szabályozott lakáspiacra, melyben egyetlen homogén lakástípus van. Egyetlen vállalat épít, bont és újít fel lakásokat. Ez a vállalat igazgatja a lakásokat és bocsájtja őket a háztartások egy homogén csoportjának a rendelkezésére, egzogén módon rögzített ár mellett. Egyszerű demográfiai és helyváltoztatási folyamatok is szerepelnek a modellben. A stacionárius állapotok létezését, stabilitási és komparatív-statikai tulajdonságait vizsgálja a szerző.

Dolgozatom felépítése a következő. A 2. szakaszban a keret-modellt vezetem be, majd a 3. szakaszban elemzem az egyensúly fogalmát és viszonyítom a „rövidebb oldal elvéhez" és a walrasi egyensúlyhoz. Egyebek között megmutatom, hogyha a cserével járó súrlódások nullára csökkennek és az árak rugalmasak, akkor modellem egyensúlya egybeesik a walrasi egyensúllyal.[3] A 4. és az 5. szakasz néhány speciális esetet vizsgál, amelyben a keresletnek, a kínálatnak és az ár alakulásának példái szerepelnek. Árszabályozásos és árszabályozás nélküli egyensúlyi állapotok létezése, egyértelműsége és kom-

[1] A nem-walrasi elemzés néhány kivételét lásd: *Varian* (1975), aki dinamikus modellt vezet be, de állományváltozók és cserével járó súrlódások nélkül; *Honkapohja—Ito* (1980), aki dinamikus stock-flow modellt ad a cserével járó súrlódások nélkül; és *Benassy* (1982), az általános nem-walrasi egyensúly statikus modelljét szerkeszti meg, és nem támaszkodik a súrlódásmentesség feltevésére.

[2] A jelen modellt *Diamond* és *Maskin* munkáitól függetlenül fejlesztettem ki.

[3] A cserével járó súrlódások, a rövid-oldal és a walrasi egyensúly közti viszony általánosabb elemzését lásd: *Weibull* (1983).

paratív-statikai valamint stabilitási tulajdonsága kerül taglalásra. A 6. szakaszban közületi lakások feketepiacát elemzem szimulációs modellel. Végül a 7. szakasz zárja a cikket a jövő kutatás néhány irányának rövid ismertetésével.

2. A modell

A lakások n típusát különböztetjük meg olyan fizikai jellemzők szerint mint méret, komfort, hely és tulajdonforma. Minden lakástípus számára létezik egy *allokációs csatorna,* amelyen keresztül a lakások cserélődnek. Például allokációs csatorna lehet egy piac, ahol az árakat a piaci feltételek endogén módon határozzák meg, és a csere egyéni vevők és eladók közt zajlik; de lehet egy (közösségi) elosztó hivatal, amely sorbanálló háztartásoknak egzogén módon rögzített áron ajánlja a lakásokat. A modell aggregált abban az értelemben, hogy nem azonosítja az egyes vevőket és eladókat, csak összesített keresletüket, kínálatukat és cseréiket.[4]

A releváns *időhalmaz* (T) feltevés szerint a valós egyenesnek egy olyan nyílt intervalluma, amely tartalmazza az origót, $t = 0$-t. A lakáspiac *pillanatnyi állapota* a $t \in T$ időpontban az $x(t) = [u(t), v(t), p(t)] \in X = R^n_+ \times R^n_+ \times R^n_{++}$, ahol R_+ jelöli a nemnegatív valós számok halmazát, és R_{++} a pozitív valós számok halmazát. Az $u(t)$, $v(t)$ és $p(t)$ vektorok mindegyikének egy eleme van az egyes lakástípusokra: $u_i(t)$ az i-típusú lakás iránti *hatékony kereslet* pillanatnyi *állománya*, $v_i(t)$ az i-típusú lakás *hatékony kínálatának* pillanatnyi *állománya*, és $p_i(t)$ az i-típusú lakás pillanatnyi (névleges) *ára*. Más szavakkal: $u_i(t)$ azoknak az i-típusú lakásoknak a száma, amelyet a vevők összessége a t időpontban meg akar vásárolni és $v_i(t)$ azoknak az i-típusú lakásoknak a száma, amelyeket az eladók összessége el akar adni. A „hatékony" jelző megszorítása azt jelzi, hogy általában az áron kívül más jelzések is befolyásolják a kereslet és a kínálat alakulását. A valóságban egy lakásvétel időben széthúzódó kiadások áramával jár. Ennek ellenére, az egyszerűség kedvéért ezek az áramlások skalár (pénzbeli) árként jelennek meg a modellben.

A lakáspiac dinamikáját a következő (általában nem-lineáris) közönséges differenciálegyenlet rendszer ábrázolja:

$$\left.\begin{aligned} \dot{u}_i(t) &= a_i(x(t), t) - b_i(x(t), t) \\ \dot{v}_i(t) &= c_i(x(t), t) - b_i(x(t), t) \\ \dot{p}_i(t) &= f_i(x(t), t) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Itt a pont időszerint deriválást jelent, $(x(t), t) \in X \times T$ és az i alsó index 1-től n-ig fut. Az a_i, b_i, c_i és f_i függvények valós értékűek, az $X \times T$-n vannak értelmezve és a következőképpen értelmezzük őket:

$a_i(x(t), t)$ a pillanatnyi *nettó hatékony keresleti ráta* az i-csatornában (azaz az újonnan érkező igények minusz a visszavont igények),

$b_i(x(t), t)$ a pillanatnyi *csere ráta* az i-csatornában (azaz a csatornán keresztül értékesített lakások rátája),

[4] A modell könnyen dezaggregálttá teheto véges számú háztartási típus bevezetésével, melyek jövedelem, méret stb. szerint különböznek.

$c_i(x(t), t)$ a pillanatnyi *nettó hatékony kínálati ráta* az i-csatornában (azaz az újonnan eladásra kínált lakások száma minusz az eladástól visszalépők száma),

$f_i(x(t), t)$ a pillanatnyi *árváltozási ráta* az i-típusú lakásoknál (azaz az a ráta, amellyel a $p_i(t)$ ár időben változik).

Ezzel az értelmezéssel összhangban természetes megkövetelni a következő feltevések teljesülését:

*A*1. $a_i(x, t) \geq 0$ minden (x, t)-re ha $u_i = 0$

*A*2. $b_i(x, t) \geq 0$ minden (x, t)-re és $= 0$ minden (x, t)-re ha $u_i v_i = 0$

*A*3. $c_i(x, t) \geq 0$ minden (x, t)-re, ha $v_i = 0$

Más szavakkal: ha nincs kereslet, akkor nem lehet visszalépni a keresléttől (A1); ha nincs kereslet vagy kínálat, akkor nincs csere (A2); ha nincs kínálat, akkor nem lehet visszavonni a kínálatot (A3).

Vegyük észre, hogy mindegyik ráta függhet a lakáspiac pillanatnyi állapotától — az $x(t)$ változón keresztül, valamint külső tényezőktől mint például a jövedelmektől, kamatlábaktól, energia áraktól, demográfiai folyamatoktól a t változón keresztül. Másrészről az összes állományváltozó, $u_i(t)$, $v_i(t)$ és $p_i(t)$ általában függ a lakáspiac egész történetétől és e piacot érő külső hatásoktól a dinamikus egyenleteken keresztül.

Ahhoz, hogy egy differenciálegyenlet-rendszer értelmes leírása legyen egy dinamikus rendszernek, szavatolni kell a rendszer (dinamikus) megoldásának létezését és egyértelműségét. A *Picard—Lindelöf* tétel alkalmazása közvetlenül adja:

1. *állítás*: *Ha A*1—*A*4 *teljesül, akkor* (1)-*nek van (lokálisan) egyértelmű megoldása* $X \times T$ *minden pontján keresztül.*

*A*4. Minden függvény folytonos és folytonosan differenciálható x szerint[5].

Az 1. *állítás bizonyítása*: A Picard—Lindelöf tételből következik, hogy (1)-nek egyetlen megoldása van az $X \times T$ halmaz minden belső pontján keresztül (lásd pl. *Hale* (1969) Theorem I.3.1.). Ezenkívül az (1) egyenlet vektormezeje A1—A3 szerint az X halmaz határán befelé mutat. Ezért a határpontoknak is egyértelmű megoldásuk van Q.E.D.

Néhány szót az ármeghatározásról. Jelenlegi „behaviorista" megközelítésünkben az f árszabály megállapítása empirikus feladat. Mindazonáltal, a priori megfontolások alapján van egy elméletileg érdekes „tiszta" eset: néhány allokációs csatornában az árakat a piaci feltételek endogén módon úgy határozzák meg, hogy a hatékony keresleti állomány egyensúlyban van a hatékony kínálati állománnyal. Pontosabban: legyen $z_i(t)$ a hatékony keresleti állomány és a hatékony kínálati állomány pillanatnyi különbsége:

$$z_i(t) = u_i(t) - v_i(t) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

[5] Valójában elégséges, ha az összes függvény folytonos (x, t) szerint és lokálisan Lipschitz-tulajdonságú x szerint, lásd Theorem I.3.1. *Hale* (1969).

Az i-csatorna ár-rátájáról azt mondjuk, hogy a hatékony keresleti és kínálati állomány különbsége *endogén módon határozza* meg, ha

$$f_i(x, t) = F_i(z_i)p_i \qquad \forall (x, t)\text{-re}, \tag{2}$$

ahol F_i valamilyen folytonosan differenciálható előjeltartó függvény.[6]

Más szavakkal: az árváltozási százalék a z_i egyenleg föggvénye. Ekkor $\dot{p}_i = 0$ akkor és csak akkor, ha $z_i = 0$, mivel az X állapottér definíciója szerint $p_i > 0$ minden i-re és minden $x \in X$-re.

Mind elméletileg, mind gyakorlatilag fontos kérdés, hogy miképpen jut el a z_i jel azokhoz a piaci szereplőkhöz, akik végsősoron az ármegállapítók. (Ez helyénvaló kérdés a walrasi modellben is, ahol rendszerint a kitalált kikiáltó végzi el ezt a munkát.) A jelen modellben ténylegesen létezik néhány út arra, hogy a vevők és az eladók megfigyeljét z-t, vagy bizonyos megközelítőjét. Egy névleges vagy fizikai sor esetén u_i egyszerűen a sorhossz és v_i az üres helyek száma. A keresés tipikusabb esetében általában nehezebb megfigyelni u_i-t. Ennek ellenére, általánosan szólva, $z_i = 0$ azt jelenti, hogy az i-csatornában egyformán nehéz vagy időigényes venni és eladni. Szemléltetésként tegyük fel, hogy az eladók és a vevők találkozása egyedi eladók és vevők egyforma valószínűségű találkozásainak sztochasztikus pontfolyamataként írható le. Ekkor a $z_i = 0$ feltétel azt jelenti, hogy egy végtelenül kicsiny időszakra jutó sikeres tranzakció valószínűsége azonos a vevők és az eladók számára.

Ezen az általánossági szinten a modell a helyzetek széles körére alkalmazható, beleértve a gazdasági és demográfiai növekedést és hanyatlást. Következésképpen a lakáspiac bővülhet, összehúzódhat vagy változatlan maradhat az idő múlásával — nemcsak belső okokból, hanem váltakozó külső hatások miatt is. A következő szakaszban egy egyensúlyi fogalmat javasolunk és viszonyítjuk őt a walrasi egyensúlyhoz.

3. Egyensúly, a rövid-oldal elve és a walrasi egyensúly

A dinamikus modellezés szokásos szóhasználatával összhangban egy x^* állapotot *egyensúlynak* (vagy stacionárius állapotnak, vagy kritikus pontnak) nevezünk, ha $x(0) = x^*$ maga után vonja, hogy $x(t) = x^*$ minden $t \in T$-re. Más szavakkal: az egyensúlyt az árak, a hatékony kereslet és kínálat változatlansága jellemzi. Az egyensúly másik vonatkozása: a várakozások teljesülnek abban az értelemben, hogy minden jelzés (ár és nem-ár jelzés) olyan viselkedési rátákat származtat, amelyek olyan állapotot (állomány-vektort) szolgáltatnak, hogy az eredeti jelzés reprodukálódik.

Ha a lakáspiac külső hatásai időben változatlanok az adott T időintervallumban, azaz mindegyik a_i, b_i, c_i és f_i viselkedési függvény időben változatlan, akkor az (1) differenciálegyenlet-rendszer *autonóm*, és az x állapot akkor és csak akkor egyensúlyi pont, ha $\dot{x} = 0$.[7] Az állandó külső hatások szóbanforgó

[6] Egy $F_i\colon R \to R$ függvényt *előjeltartónak* nevezünk, ha $F_i(\alpha) \gtreqless 0$, ha $\alpha \gtreqless 0$.

[7] Az a_i, b_i, c_i és f_i függvényeket *időben változatlannak* nevezzük, ha $a_i(x, t) = a_i(x, s)$ $\forall x \in X$ és $\forall s, t \in T$ mellett, s hasonlóan b_i-re, c_i-re és f_i-re.

esetében elhagyhatjuk az idő-változót, és az egyensúlyi feltételeket a következő alakban írhatjuk fel:

$$a_i(x) = b_i(x) = c_i(x) \text{ és } f_i(x) = 0 \quad \forall i\text{-re.} \tag{3}$$

Más szavakkal: semmilyen allokációs csatornában nem lehet ármozgás, és minden csatornában a nettó hatékony keresleti rátának meg kell egyeznie a csere-rátával, amelynek viszont a nettó hatékony kínálati rátával kell megegyeznie.

A következő elemzésben az időben változatlan viselkedési függvényekre szorítkozunk.

A walrasi és a nem-walrasi egyensúly szokásos neoklasszikus modelljeiben az eladók és a vevők késés nélkül találkoznak, s további feltevés szerint minden piac rövid oldalán a szereplők azonnal végrehajthatják kívánt tranzakcióikat (vö. *Dréze* (1975) és *Benassy* (1975)).[8] Modellünkben azonban, ahol a walrasi kikiáltó szerepét egy időben lezajló találkozási folyamat veszi át, ez a ,,rövid-oldal elve'' általában nem érvényes.

Pontosabban: a *rövid-oldal elve* a következőképpen írható fel:

$$u_i v_i = 0 \quad \forall i\text{-re.} \tag{4}$$

Ha x olyan állapot, amelyben valamilyen csere történik, azaz $b_i(x) > 0$ valamilyen i-re, akkor $A2$ szerint minden u_i, mind v_i pozitív. Következésképpen modellünkben a rövid-oldal elve nem érvényes semmilyen nem-triviális egyensúlyban. Ekkor érdekes a következő kérdés: ha a cserével járó súrlódás nullához tart, megközelítjük-e a rövid-oldal elvét?

E kérdést megválaszolandó a H lakáspiacot formálisan az $\{a_i, b_i, c_i, f_i\}_{i=1}^n$ függvény-együttessel ábrázolom, melyek kielégítik az $A1$–$A4$ feltevéseket. Ebben az esetben a *minimális tranzakciós sebesség*et a következő nemnegatív szám definiálja:

$$\hat{\beta} = \sup\{\beta \in R_+;\ b_i(x) \geq \beta u_i v_i \quad \forall i, x\text{-re}\}.$$

Más szavakkal: a $\hat{\beta}$ együttható olyan, hogy minden csatornában a csere nagyobb, mint a hatékony kereslet és kínálat egységei közt lehetséges találkozások számának és az együtthatónak a szorzata. Így minél gyorsabbak a tranzakciós folyamatok (a lehetséges találkozások számához viszonyítva), annál nagyobb $\hat{\beta}$. De beszélhetünk $1/\hat{\beta}$-ről, mint a lakáspiac *cserével járó maximális súrlódásáról.*

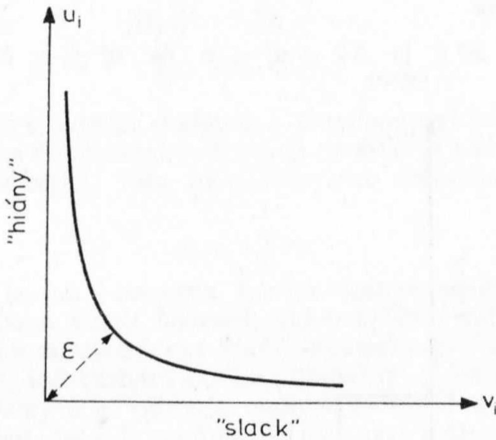
Most tekintsük a lakáspiacok $H_1, H_2, \ldots, H_k, \ldots$ végtelen sorozatát, melynek elemei csak $b_i^1, b_i^2, \ldots, b_i^k, \ldots$ csere-függvényeikben különböznek egymástól ($i = 1, 2, \ldots, n$). Minden k-ra $\hat{\beta}_k$ legyen a H_k-beli minimális tranzakciós sebesség, és X_k^* legyen a H-beli egyensúlyi állapotok (esetleg üres) halmaza. Végül tegyük föl, hogy a közös c_i kínálati függvények korlátosak és a $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \ldots, \hat{\beta}_k, \ldots$ sorozat monoton tart $+\infty$-hez. Más szavakkal: a cserével járó súrlódások nullához tartanak, amint a lakáspiacok $\{H_k\}_{k=1}^{\infty}$ sorozatán haladunk előre.

[8] Egy mostani kivétel *Benassy* (1982), aki a nem-walrasi egyensúlyt a súrlódásmentesség feltevése nélkül elemzi.

2. állítás: Legyen $\{H_k\}_{k=1}^{\infty}$ a fent leírt lakáspiac-sorozat. Minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik egy pozitív egész szám, $k(\varepsilon)$, amelyre

$$x^* \in \bigcup_{k \geq k(\varepsilon)} X_k^* \Leftrightarrow u_i^* v_i^* \leq \varepsilon \quad \forall i.$$

Bizonyítás: β_k definíciója szerint $\widehat{\beta}_k u_i v_i / 2 \leq b_i^k(x)$ $\forall$ i, k és $x \in X$. A v_i szerinti stacionaritás miatt $b_i^k(x)^* \leq \gamma$ $\forall$ i és $x^* \in X_k^*$, ahol γ közös felső korlátja $\{c_i\}_1^n$-nek. Így $u_i^* v_i^* \leq 2\gamma / \widehat{\beta}_k$ $\forall$ i, k és $x^* \in X_k^*$, s a következő $k(\varepsilon) = \min \{k; 2\gamma / \widehat{\beta}_k \leq \varepsilon\}$ választással élhetünk. Q.E.D.



1. ábra. A 2. állítás szemléltetése. (Vö. *Kornai* 1980, 8.9. ábra)

A 2. állítás pontos értelmet ad *Kornai* (1980) 8.9. ábrájának: míg a rövid-oldal elve előírja, hogy az (u_i^*, v_i^*) pontnak legalább az egyik tengelyen kell feküdnie (1. ábra), a 2. állítás szerint e pontnak a hiperbola alatt kell elhelyezkednie, feltéve, hogy a cserével járó súrlódások megfelelően kicsik.

A walrasi modellben mindkét oldal azonnal képes megvalósítani kívánt egyensúlyi tranzakcióit. Ennek megfelelően modellünkben egy x^* egyensúlyi állapotot *walrasi*nak nevezünk, ha

$$u_i^* = v_i^* = 0 \quad \forall i\text{-re.} \tag{5}$$

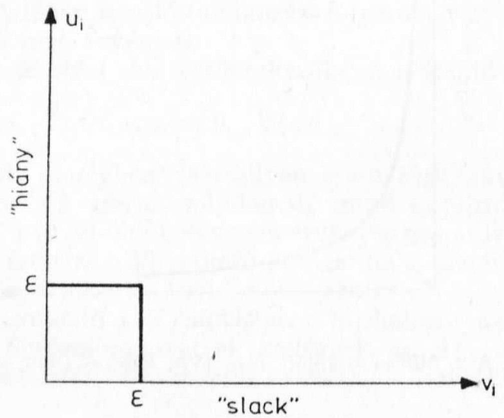
Figyeljük meg, hogy egy ilyen walrasi egyensúlyi állapotban kizárólag árjelzések vannak és a (3) egyensúlyi feltételek azt kívánják meg, hogy minden csatornán az ár olyan legyen, hogy a (nettó) névleges keresleti ráta egyenlő legyen a (nettó) névleges kínálati rátával.

Már hangsúlyoztuk, hogy a rövid-oldal elve (4) nem teljesül a nem-triviális egyensúlyban. Következésképpen semmilyen nem-triviális egyensúly nem lehet walrasi egyensúly. Következő kérdés vetődik fel: milyen feltételek mellett tartanak az egyensúlyi állapotok a walrasi egyensúlyi állapotokhoz, ha a cserével járó súrlódások nullához tartanak?

E kérdést megválaszolandó az árrugalmasság következő definíciójára lesz szükségünk. Legyen $f^{-1}(0)$ azoknak az állapotoknak a halmaza, amelyekben nincs ármozgás, azaz, $f^{-1}(0) = \{x \in X;\ f_i(x) = 0\ \forall i\text{-re}\}$. Az árakat *rugalmasaknak* nevezzük, ha létezik olyan λ_i és $\bar{\lambda}_i$ valós számpár, melyre $0 < \lambda_i \leq \bar{\lambda}_i$ és $\lambda_i u_i \leq v_i \leq \bar{\lambda}_i u_i$ minden i-re és minden $x \in f^{-1}(0)$-ra. Ez a rugalmassági feltétel nyilvánvalóan teljesül, ha minden árat a (2) egyenlet szerint endogén módon határoznak meg, viszont nem teljesül, ha az árak közül csak egyesek határozódnak meg így, más árakat pedig egzogén módon rögzítenek (azaz $f_i(x) \equiv 0$ néhány i-re).

3. *állítás*: *Legyen* $\{H_k\}_{k=1}^{\infty}$ *a lakáspiacok olyan sorozata, amely kielégíti a 2. állítás feltevéseit. Ha minden ár rugalmas, akkor minden* $\varepsilon > 0$*-hoz létezik olyan* $k(\varepsilon)$*, amelyre*

$$x^* \in \bigcup_{k \geq k(\varepsilon)} X_k^* \Rightarrow u_i^* \leq \varepsilon \quad \text{és} \quad v_i^* \leq \varepsilon \quad \forall\ i.$$



2. ábra. A 3. állítás szemléltetése. (Vö. *Kornai*, 1980, 8.6. ábra)

Bizonyítás. Legyen $\lambda = \min\{\lambda_i\}$ és $\bar{\lambda} = \max\{\bar{\lambda}_i\}$. Mivel $\bigcup_{k \geq 1} X_k^* \subset f^{-1}(0)$, igazolható, hogy $\lambda u_i^* \leq v_i^* \leq \bar{\lambda} u_i^*\ \forall\ i$ és $x^* \in \bigcup X_k^*$, következésképp $(u_i^*)^2 \leq u_i^* v_i^* / \lambda$ és $(v_i^*)^2 \leq \bar{\lambda} u_i^* v_i^*\ \forall\ i$ és $x^* \in \bigcup_{k \geq 1} X_k^*$. A 2. állítás szerint létezik olyan $k(\varepsilon)$ szám, hogy $u_i^* v_i^* \leq \varepsilon^2 \min\{1/\lambda, \bar{\lambda}\}\ \forall\ i$ és $x^* \in \bigcup_{k \geq k(\varepsilon)} X_k^*$. Q.E.D.

A 3. állítás pontos jelentést ad *Kornai* (1980) 8.6. ábrájának; míg a walrasi egyensúly a 2. ábra origójában van, az állítás szerint minden egyensúlyi pontot tartalmaz az origónál levő kocka, ha a cserével járó súrlódások elég kicsinyek.

4. Tiszta piaci ármegállapítás

Itt modellünknek egy speciális esetét vizsgáljuk, ahol minden árat endogén módon határoznak meg a piaci feltételek, bárminemű árszabályozás nélkül. Az egyensúly és a dinamika rövidtávú vonatkozásaira összpontosítjuk elemzésünket, és stacionárius környezetre szorítkozunk. Nevezetesen feltesszük, hogy minden lakástípus állománya időben változatlan a vizsgált időszakban, a demográfiai tényezőket háttérbe szorítjuk, a keresletnek és árnak az alakulását hangsúlyozzuk.[9] Az alábbi specifikálás csak egy a lehetőségek közül. Különböző valódi piacokra való alkalmazáskor más specifikációk alkalmasabbak lehetnek.

Pontosabban szólva a következő egyenletek fennállását feltételezzük minden $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$-re és minden $(x, t) \in X \times T$-re:

$$a_i(x, t) = (\alpha + \Sigma_j \gamma_j u_j)\varphi_i(p, q) - \gamma_i u_i$$

$$b_i(x, t) = \beta_i u_i v_i$$

$$c_i(x, t) = \varepsilon_i(\sigma_i - v_i)$$

$$f_i(x, t) = \varkappa_i z_i p_i,$$

ahol α, β_i, γ_i, ε_i, $\varkappa_i$ és σ_i pozitív skalárok, q_i a pillanatnyi *keresési idő* az i-csatornában, amelyet az i-típusú lakások iránti kereslet és a szóbanforgó lakások iránti pillanatnyi keresleti ráta hányadosaként definiálunk: $q_i = u_i/\beta_i u_i v_i$, azaz

$$q_i = 1/\beta_i v_i.$$

Más szavakkal: ha az i-csatorna minden igénye azonos valószínűséggel találkozik egy eladásra kínált lakással, akkor $q_i^{-1}dt$ a valószínűsége annak, hogy egy adott igény találkozik egy kínált lakással a következő dt időegységben, és q_i a keresési idő várható értéke pillanatnyi u_i és v_i értékek mellett.

Figyeljük meg, hogy a q_i változók endogénné teszik a vevők választásai közti externalitásokat: ha sok vevő keresi ugyanazt a típusú lakást, akkor a hatékony kínálati állomány, v_i kicsi lesz és a keresési idő hosszú.

A z_i egyenlegeket ugyanúgy definiáljuk mint a 2. szakaszban, a φ_i függvényeket pedig a következő képletek adják:

$$\varphi_i(p, q) = \frac{\psi_i(p_i, q_i)}{1 + \Sigma_j \psi_j(p_j, q_j)},$$

ahol minden

$$\psi_i : (0, +\infty)^2 \to (0, +\infty)$$

függvényről föltesszük, hogy folytonosan differenciálható, csökkenő az első változója szerint és nem-növekvő a második változója szerint. Végül felteszszük,[10] hogy

$$\lim_{p_i \to 0} \psi_i(p_i, q_i) = +\infty \text{ és } \lim_{p_i \to \infty} \psi_i(p_i, q_i) = 0 \quad \forall\, q_i \geq 0.$$

Közvetlenül igazolható, hogy az a_i, b_i, c_i és f_i viselkedési függvények kielégítik az $A1$—$A4$ feltevéseket.

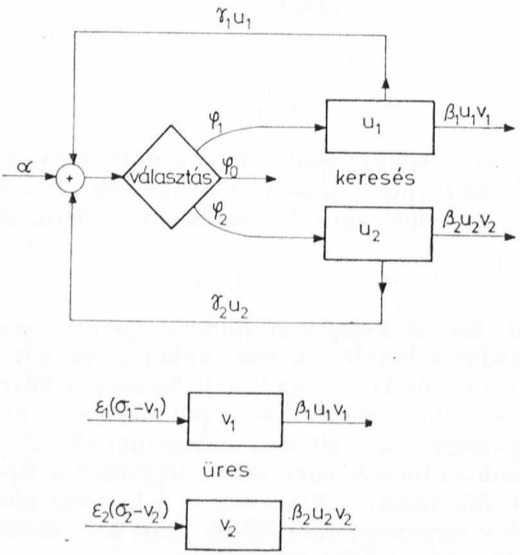
[9] A fizikai lakásállomány alkalmazkodása viszonylag lassú folyamat a kereslet és a kínálat alakulásához képest. Éppen ezért megengedhetőnek tűnik a lakásállomány változását kizárni a rövidtávú elemzésből.

[10] A két feltevés közül az első analitikusan kényelmes, de szükségtelenül megszorító, vö. a 4. állítás bizonyításával.

Szavakban kifejezve, ez a speciális eset a következőképpen írható le. (Vö. a 3. ábrával.)

Először is létezik a vevők egzogén α beáramlása a lakáspiacra.[11] Ezen háztartások mindegyike preferenciái alapján kiválasztja a megfelelő lakáscsatornát (az i alsó indexet a φ_i-n), ahol a pillanatnyi ár p_i és a keresési idő q_i. A választási magatartást egy logit modellel írjuk le, s az egyik választás a lakáspiactól való távolmaradás.[12]

A lakáspiacra való belépés hajlandósága, $\Sigma_i \varphi_i(p, q)$ csökkenő függvénye a pillanatnyi áraknak és nem-növekvő függvénye a pillanatnyi keresési idő-



3. ábra. Folyamatábra a tiszta piaci ármegállapítás speciális esetére, $n = 2$

nek. Miután a háztartás belépett az egyik csatornába, minden időpontban legalább egy csatornában aktívan keres. A kereső háztartás azonban bármikor felülvizsgálhatja csatorna-választását, vö. a γ_i paraméterekkel. Ezért, míg a valóságban számos háztartás egyidejűleg több csatornában is keres, a modellben minden adott időpontban csak egy csatornában képesek cserélni, bár tetszőleges gyorsan csatornát válthatnak.[13] Ennek megfelelően a hatékony keresleti állomány, u_i egyszerűen az i-csatornában kereső háztartások száma.

Másodszor, az i-típusú lakások száma időben változatlan és egyenlő σ_i-vel. Minden pillanatban bármely lakás vagy üres (eladó) vagy foglalt (nem eladó). Következésképpen a hatékony kínálati állomány (v_i) egyszerűen az üresen

[11] Nem foglalkozunk azzal a kérdéssel, hogy e háztartásoknak van-e már vagy nincs lakásuk.

[12] A logit választási modell neoklasszikus mikroökonomiai magyarázatára pl. *McFadden* (1974).

[13] Ha megengedünk egyidejű keresést több csatornán, akkor döntési szabályt is kell adni, hogy mikor fogadunk el egy ajánlatot és mikor nem, vö. a kereső viselkedésről szóló irodalommal.

álló lakások száma. A foglalt lakások egzogén módon meghatározott intenzitás szerint válnak üressé, a lakásonkénti rátát ε_i-vel jelöljük. (A valóságban ezek az intenzitások a szóbanforgó lakás árától és más endogén tényezőktől függnek. Éppen ezért érdekes kiterjesztése lenne a jelen tanulmánynak a szóbanforgó intenzitások endogénné tétele.)

Harmadszor, az i-csatornában a kereső háztartások találkozása az üres lakásokkal arányos sebességű a lehetséges találkozások számával, $u_i v_i$-vel. Az arányossági tényező, β_i az i-csatorna *tranzakciós sebességi együtthatója.* Minél nagyobb β_i, annál gyorsabb a tényleges találkozás, amelynek a rátáját a rendelkezésre álló lehetséges találkozások számához viszonyítjuk, vö. a cseréjével járó súrlódás elemzésével, amelyet a 3. szakaszban adtunk.[14]

Végül az árváltozásról feltesszük, hogy minden csatornában arányos a százalékos áremelkedés a hatékony keresleti állomány és a hatékony kínálati állomány különbségével.

4. *állítás: Tegyük fel, hogy $\Sigma_i \varepsilon_i \sigma_i \leq \alpha$. Ekkor egyetlen egy x^* egyensúly létezik, amelyet a* (6)–(8) *egyenletek adnak.*

$$u_i^* = (\sqrt{1 + 4\beta_i \sigma_i / \varepsilon_i} - 1)\frac{\varepsilon_i}{2\beta_i} \tag{6}$$

$$v_i^* = u_i^* \tag{7}$$

$$\psi_i(p_i^*, q_i^*) = \frac{\gamma_i u_i^* + \varepsilon_i(\sigma_i - u_i^*)}{\alpha - \Sigma_j \varepsilon_j(\sigma_j - u_j^*)} \tag{8}$$

Bizonyítás: Világos, hogy $[\dot{p}_i = 0] \Leftrightarrow [u_i = v_i]$, és $[\dot{p}_i = \dot{v}_i = 0] \Leftrightarrow [u_i = v_i \;\&\; \varepsilon_i(\sigma_i - u_i) = \beta_i u_i^2] \Leftrightarrow [u_i = v_i \;\&\; u_i = 1/2(\sqrt{1 + 4\beta_i\sigma_i/\varepsilon_i} - 1)\varepsilon_i/\beta_i] \Leftrightarrow [u_i = u_i^* \;\&\; v_i = v_i^*]$. Ezért $q_i^* = 1/\beta_i v_i^*$, $[\dot{x} = 0] \Leftrightarrow [u = u^* \;\&\; v = v^* \;\& (\alpha + \Sigma\gamma_j u_j^*)\varphi_i(p, q^*) = \beta_i u_i^* v_i^* + \gamma_i u_i^* \;\forall\, i] \Leftrightarrow [u = u^* \;\&\; v = v^* \;\&\; \psi_i(p_i, q_i^*) = (\gamma_i u_i^* + \varepsilon_i(\sigma_i - u_i^*))/(\alpha - \Sigma_j \varepsilon_j(\sigma_j - u_j^*)) \;\forall\, i]$. Q.E.D.

A $\Sigma_i \varepsilon_i \sigma_i \leq \alpha$ feltevés megköveteli hogy az összegzett hatékony kínálati ráta egzogén módon adott felső korlátja ne legyen nagyobb az összegzett hatékony keresleti ráta adott felső korlátjánál. A (7) egyenlet szerint mindegyik csatorna egyensúlyban van: $z_i^* = 0$. Más szavakkal: mindegyik súrlódásos üresen álló lakásállomány, v_i^* egyenlő a kereső háztartások megfelelő súrlódásos mennyiségével, u_i^*-gal; és a súrlódásos keresési idő $q_i^* = 1/\beta_i v_i^*$ minden piac mindkét oldalán egyenlő. Az árakat valóban egyértelműen meghatározza a (8) egyenlet a $\Sigma_i \varepsilon_i \sigma_i \leq \alpha$ feltevés következtében és a ψ_i függvények feltett tulajdonságai miatt. A (6)–(8) egyenletekből következik néhány komparatív-statikus tulajdonság.

4.1. *következmény: Minden p_i^* növekvő függvénye α-nak és csökkenő függvénye $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$-nek. Minden i-re u_i^* és q_i^* csökkenő függvénye β_i-nek, továbbá* $\lim\limits_{\beta_i \to \infty} u_i^* = \lim\limits_{\beta_i \to \infty} q_i^* = 0$.

[14] Valójában a 4. állítás nemcsak e kvadratikus találkozási folyamatra érvényes, hanem minden olyan b_i csere-függvényre, amely folytonos és növekvő függvénye u_i-nek és v_i-nek, és kielégíti az *A*2 feltevést. Ebben az általánosabb esetben q_i-t az $u_i/b_i(u_i, v_i)$ kifejezéssel definiáljuk és a (6) egyeletet a $b_i(u^*_i, u^*_i) = \varepsilon_i(\sigma_i - u^*_i)$ egyenlettel pótoljuk. A különböző találkozási folyamatok elemzését lásd *Diamond—Maskin* (1981) és *Diamond* (1982).

Bizonyítás: Bizonyítandó, hogy $p_i^* \downarrow \sigma_i$, vegyük észre, hogy $\varepsilon_i(\sigma_i - u_i^*) = \beta_i(u_i^*)^2$, és tekintsük a (6) és (9) egyenleteket. Q. E. D.

Más szavakkal: a p^* egyensúlyi árrendszer növekvő függvénye a háztartások egzogén módon adott α beáramlási rátájának és csökkenő függvénye az adott lakásállománynak $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$-nek. Továbbmenve, amint a cserével járó súrlódás csökken, ugyanez történik az összes súrlódásos hiánnyal, slackkel és keresési idővel. Ebben az értelemben az x^* egyensúly ekkor tart a walrasi egyensúlyhoz, vö. a 3. állítással.

Miután igazoltuk az egyensúly létezését és egyértelműségét, következő kérdésünk a stabilitás. Nem ismertetünk analitikus eredményeket a stabilitásról, helyette a számítógépes szimuláció néhány eredményéről számolunk be. Nagyszámú szimulációs kísérletet végeztünk két allokációs csatornával és a paraméter értékek alternatív együttesével. Mind ez ideig eredményeink globális stabilitást mutatnak, azaz bármely induló állapotból az egyensúlyhoz tart a rendszer. A szimuláció azt mutatja, hogy a γ felülvizsgálati paraméter csökkentésével az egyensúly stabilitása gyengül. Mindazonáltal még $\gamma = 0$-ra is globális stabilitást kaptunk.

5. Részleges árszabályozás

Az előző szakaszban tanulmányozott modellben minden árat a fennálló piaci feltételek — endogén módon — határoztak meg, mindennemű árszabályozás nélkül. Most az árszabályozás hatásait elemezzük: feltesszük, hogy ugyanabban a modellben az n-csatornában az árat egzogén módon rögzítették: azaz $\varkappa_n = 0$, következésképpen $p_n(t) = p_n(0)$ minden $t \geq 0$-ra. Ennek megfelelően az n-csatornát ezentúl ***közületi lakás csatornának*** fogjuk nevezni.

5. *állítás: Tegyük föl, hogy $\Sigma_i \varepsilon_i \sigma_i \leq \alpha$. Ekkor egyetlen x^* egyensúly létezik. Legyen $\{u_i^*, v_i^*, q_i^*\}_1^{n-1}$ ugyanúgy a* (6) *és* (7) *egyenlet által meghatározva, mint korábban; legyen q^* a* (9) *egyenlet egyetlen megoldása. Végül u_n^* és v_n^* a* (10) *és* (11) *egyenlet szerint határozható meg, $\{p^*\}_1^{n-1}$ pedig a* (12) *egyenlet szerint.*

$$\psi_n(p_n, q_n^*) = \frac{\varepsilon_n \gamma_n(\sigma_n q_n^* - 1/\beta_n) + \varepsilon_n(\sigma_n - (\beta_n q_n^*)^{-1})}{\alpha - \sum_1^{n-1} \varepsilon_j(\sigma_j - u_j^*) - \varepsilon_n(\sigma_n - (\beta_n q_n^*)^{-1})} \tag{9}$$

$$u_n^* = \varepsilon_n(\sigma_n q_n^* - 1/\beta_n) \tag{10}$$

$$v_n^* = (\beta_n q_n^*)^{-1} \tag{11}$$

$$\psi_i(p_i^*, q_i^*) = \frac{\gamma_i u_i^* + \varepsilon_i(\sigma_i - u_i^*)}{\alpha - \sum_1^{n-1} \varepsilon_j(\sigma_j - u_j^*) - \varepsilon_n(\sigma_n - (\beta_n q_n^*)^{-1})} \quad \forall\, i < n. \tag{12}$$

A (9) egyenletnek valóban egyetlen megoldása van, q_n^*, hiszen a bal oldal folytonos és nem-növekvő függvénye q_n^*-nek (feltevés szerint), és a jobb oldal folytonos és növekvő (-1)-től $+\infty$-ig, ahogyan q_n^* fut 0-tól $+\infty$-ig. Vegyük észre, hogy $\{u_i^*, v_i^*, q_i^*\}_1^{n-1}$az áraktól és a közületi lakás csatorna feltételeitől függetlenül van meghatározva, míg a piaci csatornák egyensúlyi árai függnek a közületi lakás csatorna feltételeitől.

Az 5. állítás bizonyítása: Mint a 4. állítás bizonyításában, most is

$[\dot{p}_i = \dot{v}_i = 0] \Leftrightarrow [u_i = u_i^* \ \&\ v_i = v_i^*] \ \forall\ i < n$. Továbbá

$[\dot{u}_i = 0] \Leftrightarrow [\psi_i(p_i, q_i) = (\gamma_i u_i + \beta_i u_i v_i)/(\alpha - \Sigma_j \beta_j u_j v_j)] \ \forall\ i,$

$\dot{v}_i = 0] \Leftrightarrow [\beta_i u_i v_i = \varepsilon_i(\sigma_i - v_i)] \ \forall\ i < n$, és

$[\dot{v}_n = 0] \Leftrightarrow [\beta_n u_n v_n = \varepsilon_n(\sigma_n - (\beta_n q_n)^{-1})]$. Figyeljük meg, hogy

$\dot{x} = 0] \Rightarrow [\alpha - \Sigma_j \beta_j u_j v_j > \alpha - \Sigma_j \varepsilon_j \sigma_j \geq 0]$ feltéve, hogy $\Sigma_i \varepsilon_i \sigma_i \leq \alpha$.

Összegezve:

$$[\dot{x} = 0] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u_i = u_i^* \ \&\ v_i = v_i^*, \ \forall\ i < n, \ \& \\ \psi_i(p_i, q_i) = \begin{cases} \dfrac{\gamma_i u_i^* + \varepsilon_i(\sigma_i - u_i^*)}{\alpha - \sum\limits_1^{n-1} \varepsilon_j(\sigma_j - u_j^*) - \varepsilon_n(\sigma_n - (\beta_n q_n)^{-1})}, & \text{ha } i < n \\ \dfrac{\varepsilon_n \gamma_n(\sigma_n q_n - 1/\beta_n) + \varepsilon_n(\sigma_n - (\beta_n q_n)^{-1}}{\alpha - \sum\limits_1^{n-1} \varepsilon_j(\sigma_j - u_j^*) - \varepsilon_n(\sigma_n - (\beta_n q_n)^{-1})}, & \text{ha } i = n. \end{cases} \end{array}\right.$$

Q.E.D.

Az 5. állítás lehetővé teszi, hogy az egyensúly komparatív-statikai tulajdonságait tanulmányozzuk. Érdekes vonás az egyensúly függése az egzogén módon meghatározott p_n ártól és a σ_n állománytól (melyek a közületi lakás csatornán érvényesek).

5.1. *következmény*: *q_n^* csökkenő függvénye p_n-nek és σ_n-nek. Minden i-re p_i^* növekvő függvénye p_n-nek és csökkenő függvénye σ_n-nek.*

Bizonyítás: Az első állítás közvetlenül adódik (9)-ből és a második (12)-ből, illetve abból, hogy $\psi(p_n, q_n^*) \uparrow \sigma_n$, következésképpen $(\sigma_n - (\beta_n q_n^*)^{-1}) \uparrow \sigma_n$, ismét (9) miatt. Q.E.D.

Más szavakkal: a közületi lakás csatorna egyensúlyi sorbanállási ideje csökkenthető az ár emelésével vagy az állomány bővítésével. Sőt, a közületi lakásárak emelése növeli a többi allokációs csatornában érvényesülő egyensúlyi árakat, míg a közületi lakásállomány bővítése — egyáltalán nem meglepő módon — csökkenti a többi csatorna egyensúlyi árait. Következésképpen a közületi csatorna kínálati illetve árpolitikájának egymással ellentétes hatása van a magánlakásberuházás ösztönzésére, éppen az egyensúlyi árrendszeren keresztül.

Ha a cserével járó súrlódások nullára csökkennek, akkor az összes keresési idő nullához tart. Következésképpen határértékben mindegyik piaci csatornán a keresési idő nulla, míg a közületi csatornán a sorbanállási idő pozitív lehet; de ennek oka az ár merevsége, nem pedig a súrlódás.

5.2. *következmény*: *Minden $i < n$-re q_i^* csökkenő függvénye β_i-nek, továbbá* $\lim_{\beta_i \to \infty} q_i^* = 0$. *$q_n^*$ csökkenő függvénye β_n-nek, továbbá*

$$\lim_{\beta_n \to \infty} q_n^* \begin{cases} > 0, \text{ ha } (\alpha - \sum_1^n \varepsilon_i \sigma_i + \sum_1^{n-1} \varepsilon_j u_j^*) \psi_n(p_n, 0) > \varepsilon_n \sigma_n \\ = 0 \text{ egyébként.} \end{cases}$$

Bizonyítás: A q_n^*-re vonatkozó határérték levezetéséhez vegyük figyelembe, hogy a (9) egyenlet jobb oldala q_n szerint pontonként konvergál a következő kifejezéshez:

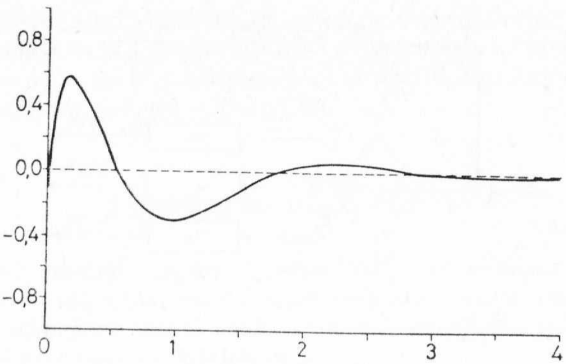
$$\frac{\varepsilon_n \sigma_n (\gamma_n q_n^* + 1)}{\alpha - \sum_1^n \varepsilon_i \sigma_i + \sum_1^{n-1} \varepsilon_j u_i^*} \quad \forall\, q_n^* > 0. \qquad \text{Q.E.D.}$$

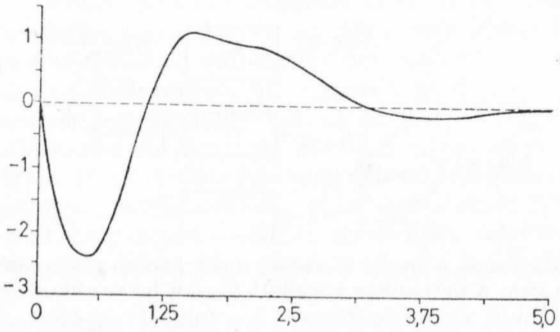
Az az egyenlőtlenség, amely eldönti, hogy q_n^* nulla-e vagy sem határértékben, egy bizonyos viszonyt fejez ki a közületi csatorna p_n ára és σ_n kínálata között. Lazán fogalmazva, ha a kínálat kisebb mint egy p_n-től függő névleges keresleti mennyiség, akkor a közületi lakáspiacon a sor nemcsak súrlódásos, és nem tűnik el a súrlódások nullává válásakor. Másrészt, ha ez a keresleti-kínálati feltétel nem teljesül, akkor a sor csak súrlódásos, és határértékben eltűnik. Közvetlenül adódik az 5.2. következmény bizonyításából, hogy a q_n^* egyensúlyi sorbanállási időnek a súrlódásnélküli része, $q_n^0 = \lim_{\beta_n \to \infty} q_n^*$ egyértelmű megoldása a következő egyenletnek:

$$\psi(p_n, q_n^0) = \frac{\varepsilon_n \sigma_n (\gamma_n q_n^0 + 1)}{\alpha - \sum_1^n \varepsilon_i \sigma_i + \sum_1^{n-1} \varepsilon_j u_j^*}.$$

Miután megvizsgáltuk a részleges árszabályozás egyensúlyának létezését, egyértelműségét és komparatív-statikus tulajdonságát, végül tanulmányozzuk a dinamikus tulajdonságokat. Ebből a célból számos szimulációs kísérletet végeztünk majdnem azzal a modell-specifikációval, mint az előző szakaszban, azzal az eltéréssel mindössze, hogy a második allokációs csatornán az árat nem rögzítettük túl alacsonyan. Mint várható volt, az összes kísérlet lényegében ugyanolyan fajta globális stabilitást mutatott, mint az előző esetben, ahol nem volt árszabályozás — az egyetlen eltérés talán a most némileg gyorsabb konvergencia volt. Továbbá tanulmányoztam a modell dinamikus válaszát néhány politikai változóban bekövetkező hirtelen eltolódásra.

Az összes kísérletben a lakáspiac kezdetben olyan egyensúlyi állapotban volt, amely a közületi lakáspiac rögzített árának felelt meg. Az egyik kísérletben a közületi lakásárat azonnal megdupláztuk. Ez az ár-sokk a piaci csatornán először túlkeresletet idézett elő (4. ábra). A p_1 piaci ár éles emelkedéssel válaszolt, majd megállapodott egy új, alig magasabb egyensúlyi szinten. A közületi lakáspiacon a sorbanállási idő monoton csökkent egy lényegesen alacsonyabb szintre. Egy másik kísérletben az üres közületi lakások állományát bővítettük azonnal. Következményeként a sorbanállási idő először szinte nullára esett, majd egy új, alacsonyabb egyensúlyi szintre emelkedett.





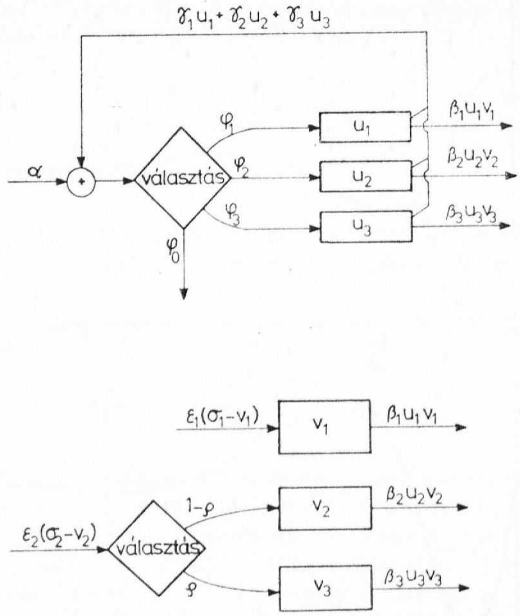
4. ábra. A piaci csatorna $z_i(t)$ mérlegének reakciója arra, ha a $t = 0$ pillanatban (felső ábra) megduplázódik a közületi lakás ára, (alsó ábra) 20%-kal megugrik a közületi lakásállomány

A piaci csatornán először túlkínálat mutatkozott (vö. a 4. ábrával), melyet a piaci ár meredek kezdeti zuhanása kísért; az ár hamarosan emelkedni kezdett, majd megállapodott az új, korábbinál alacsonyabb egyensúlyi szintjén.

6. A feketepiac

Egy valóságos lakáspiacon a lakbérszabályozás hatására minden bizonnyal feketepiac keletkezik a közületi lakásoknál. Olyan háztartások, amelyek valamikor a közületi lakás csatornán jutottak lakáshoz, később közvetlenül átadhatják a szerződésüket egy másik háztartásnak, ahelyett, hogy visszaadnák a lakásukat a közületi lakás hatóságnak. Általában piaci ára lesz az ilyen törvénytelen vagy félig törvényes tranzakcióknak. Tanulmányunk befejező részében az előző szakasz szimulációs modelljét úgy terjesztjük ki, hogy magában foglalja ezt a lehetőséget is.

Ennek megfelelően most három allokációs csatorna létezik: egy törvényes csatorna a magánlakások számára endogén ármegállapítással, egy közületi lakás csatorna egzogén módon rögzített alacsony árral, és a háztartások között cserélt közületi lakások feketepiaca endogén módon meghatározott árakkal, lásd az 5. ábrát. Az a_i, b_i és f_i függvényeket ugyanúgy határozzuk meg, mint korábban, $\varkappa_2 = 0$ ($p_2 =$ rögzített); az egyetlen különbség a következő:



5. ábra. Folyamatábra arra a speciális esetre, amelyben az első csatornán piaci ármegállapítás van, a másodikon rögzített ár, s a harmadikon feketepiac

ha egy olyan közületi lakás válik üressé, amelyet eredetileg a közületi lakáspiac csatornáján keresztül vagy a feketepiacon szereztek, választani kell, hogy visszaadják-e a lakást a közületi csatornának vagy elcseréljék a feketepiacon. Ezért a c_1 függvényt ugyanúgy határozzuk meg mint előzőleg, míg

$$c_2(x, t) = (1 - \varrho(p_2, p_3))\varepsilon_2(\sigma_2 - v_2 - v_3)$$

$$c_3(x, t) = \varrho(p_2, p_3)\varepsilon_2(\sigma_2 - v_2 - v_3),$$

ahol a $\varrho(p_2, p_3)$ választási hajlandóság (a feketepiac irányában) folytonosan differenciálható és növekvő függvénye a feketepiaci és a hivatalos ár különbségének.[15] Mivel a vevő kockázatot vállal a feketepiacon való vásárlással, a φ_i választási hajlandóságokat módosítjuk: a ψ_1 és a ψ_2 függvényt ugyanúgy specifikáljuk mint korábban, míg ψ_3-at módosítjuk egy paraméterrel, amely tükrözi a vevők hozzáállását a feketepiaci választáshoz.[16]

Miután bevezettük ily módon a feketepiaci csatornát, néhány szimulációs kísérletet végeztünk, melyek mindegyike egy egyértelmű és globálisan stabilis egyensúly létezését jelezte. A közületi lakáspiac árában illetve kínálatában bekövetkező hirtelen változásokra adott dinamikus válaszok hasonlóak voltak a feketepiac nélkülihez. Végső kísérletként a feketepiacra irányuló két válasz-

[15] Vegyük észre, hogy a feketepiacon eladó háztartás általában a $p_3 - p_2$ pénzbel· értéket kapja meg, míg p_2 a közületi lakás hatóságnak jut.

[16] A következő függvényalakokat használtuk: $\varrho(p_2, p_3) = \max\{0, 1 - \exp(-\lambda(p_3 - p_2)^2)\}$ bizonyos $\lambda \geq 0$-ra és $\psi_3(p_3, q_3) = (p_3/\mu)^{-1} \exp(-q_3^2)$ bizonyos $\mu \geq 0$-ra.

tási paraméter hirtelen csökkentésének a hatását vizsgáltam, amelyet pl. egy szigorúbb jogi ellenőrzés idézne elő. A hatás a feketepiaci ár hirtelen csökkenése volt, a szabályos piaci ár alig változott és drasztikusan csökkent a közületi lakáspiac csatornán az átlagos sorbanállási idő.

7. További kutatások irányai

A most tárgyalt modell csupán előzetes közelítése néhány egyensúlytalansági problémának, miközben eltekintünk számos fontos vonatkozástól. Az elhanyagolt vonatkozások közül csak néhányat említünk, melyek vizsgálata a további kutatások irányait kijelölheti:

(a) Várakozási (előrelátási) és spekulációs motívumok. Ennek a kérdésnek a vizsgálata valószínűleg megköveteli az állapottér olyan bővítését, amely magában foglalja a dinamikus várakozási változókat.

(b) Más típusú árszabályozások, pl. egzogén módon meghatározott felső korlátok. Ez a módosítás megszüntetheti az árváltozás folytonosságát.

(c) Másfajta találkozási folyamatok, amelyek figyelembe veszik a keresési képességek korlátait. (Ez a módosítás nem okoz technikai nehézséget.)

(d) A lakástulajdonosok választásai, pl. a korlátozott bérű lakóterületek átalakítása hivatali helyiségekké. Ez a módosítás ugyanúgy elvégezhető, mint a 4—6. szakaszok háztartási választásai, vö. a feketepiaci választást a 6. szakaszban.

(e) Építés és beruházás, különösen e tevékenységek függése az áraktól. Ez a módosítás hosszútávú mérlegeléseket tol előtérbe és kétségessé teszi az egyensúly relevanciáját, hiszen a fizikai lakásállomány alkalmazkodási ideje nagyon hosszú.

(Beérkezett: 1983. április 25-én)

IRODALOM

BENASSY, J. P.: Neo-Keynesian disequilibrium theory in a monetary economy, *Review of Economic Studies* 42, 503—523, 1975.

BENASSY, J. P.: *The Economics of Disequilibrium*, Academic Press, 1982.

DÁNIEL ZS., J. KORNAI and J. W. WEIBULL: A model framework for analysis and simulation of housing markets, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, TRITA-MAT-1981-40 (sokszoros.), 1981.

DRÈZE, J. H.: Existence of an exchange equilibrium under price rigidities, *International Economic Review* 16, No. 2, 301—320, 1975.

DIAMOND P. and E. MASKIN: An equilibrium analysis of search and breach of contract, I: Steady states, *Bell Journal of Economics* 10, No. 1, 282—316, 1979.

DIAMOND P. and E. MASKIN: An equilibrium analysis of search and breach of contract, II: A non-steady state example, *Journal of Economic Theory* 25, 165—195, 1981.

DIAMOND P.: Money in search equilibrium, Department of Economics, M.I.T., WP-297--2-82 (sokszoros.), 1982.

HALE, J.: *Ordinary Differential Equations*, John Wiley, 1969.

HONKAPOHJA S. and T. ITO: Inventory Dynamics in a Simple Disequilibrium Macroeconomic Model, *Scandinavian Journal of Economics* 82, 184—198, 1980.

KORNAI J. and B. MARTOS: Autonomous Functioning of the Economic System, *Econometrica* 41, 509—528, 1973 (magyarul: Vegetatív szabályozás: az első lépés KM (1981) 51—72.)

Kornai J. and J. W. Weibull: The normal state of the market in a shortage economy; a queue model, *Scandinavian Journal of Economics*, No. 4, 375—398, 1978. (magyarul: A piac normál állapota hiánygazdaságban: egy sorbanállási modell, *Szigma*, 11. évf. 1—32.)

Kornai J.: *A hiány*, Budapest, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 1980.

Kornai J. és Martos B., szerk.: *Szabályozás árjelzések nélkül* Budapest, Akadémiai Kiadó, 1981. (KM)

McFadden, D.: Conditional logit analysis of qualitative choice behaviour, in: P. Zaremka (ed.) *Frontiers in Econometrics*, pp. 105—142, Academic Press, 1974.

Snickars F.: A dynamic stock-flow model of a regulated housing market, in Karlqvist, A. et al., eds. *Spatial Interaction Theory and Planning Models*, Amsterdam, North-Holland, 1978.

Varian, H. R.: On persistent disequilbrium, *Journal of Economic Theory* 10, 218—228, 1975.

Weibull, J. W.: A stock-flow approach to general equilibrium *Journal of Applied Mathematics and Computation*, (megjelenés alatt) 1983.

A DYNAMIC MODEL OF TRADE FRICTIONS AND DISEQUILIBRIUM IN THE HOUSING MARKET

A dynamic stock-flow model is developed for analysis and simulation of housing markets with partial rent control, trade frictions and spillovers. A notion of equilibrium is suggested and related to Walrasian equilibrium. Existence, uniqueness and comparative-statics properties of equilibria are analyzed in some examples of housing markets with and without price control. Stability properties and dynamic responses to demand and supply shocks are studied by means of computer simulations. In a final simulation experiment, a black market for rent-controlled dwelling units is introduced.

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И НЕРАВНОВЕСИЕ ЖИЛИЩНОГО РЫНКА. ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Автор разработал динамическую модель обращения запасов (stock-flow) для анализа и симуляции жилищного рынка с учетом частичного регулирования квартирной платы, неустойчивости и дальнейшего воздействия этого. Вводится понятие равновесия, которое соотносится с вальрасовским равновесием. На некоторых примерах жилищных рынков с регулированием и без регулирования стоимости жилищ анализируется наличие состояний равновесия, их однозначность и сравнительные статистические особенности. Динамичные ответы на перепады спроса и предложения и их стабильные особенности анализировались с помощью машинной симуляции. Последний пример симуляции анализирует черный рынок коммунальных (сдаваемых в аренду) жилищ.

KOVÁCS MARGIT—VÁRLAKI PÉTER

A kompetitív piaci mechanizmus érvényesülési fokának becslése fuzzy mértékkel a szállításban*

1. Bevezetés

Tanulmányunkban a kompetitív fuvarpiaci mechanizmus érvényesülésének „mérési" és „becslési" kérdéseivel foglalkozunk a szállításban. A piaci mechanizmus érvényesülési fokának becslését a szállítási vállalatokra jellemző költségvetési korlátok és a fuvarpiacra jellemző ún. versenyzési korlátok keménységének, illetve puhaságának figyelembevételével végezzük el, messzemenően felhasználva a *Kornai János* által kidolgozott disequilibrium típusú vizsgálati módszert [1, 2].

Általánosságban megállapítható, hogy az áruszállításban a vállalatokat kevéssé kemény költségvetési korlát jellemzi, vagyis — az újabb közgazdasági szabályozók ellenére — a közlekedési vállalatok inkább az áralakító, mint az árelfogadó viselkedést mutatják, továbbá hitelfeltételeik csak az utóbbi időben váltak részben keményebbé, ezenkívül önfinanszírozó jellegük, ha eltérő mértékben is, de most is korlátozott.

Az áruszállítási feladatok teljesítésének esetleges színvonalbeli hiányosságai nem okoznak olyan mértékű veszteségeket, hogy az a szállítási vállalatok piaci helyzetét jelentősen befolyásolná, sőt a késedelmes teljesítés vagy a fuvar visszautasítása nem jár a versenyhelyzet erősebb romlásával. Ennek elsődleges oka a versenyzési korlátok keménysége, vagyis az a tény, hogy a szállítási piacon a versenyképtelenné válás kockázata még azokban az alágazatokban is kicsi, ahol számottevő versenyről van szó.[1]

Az elmondottak alapján a szállítási piac erőforráskorlátos jellegűnek is nevezhető, vagyis az „eladók piaca" szituáció érvényesül [1]. Ennek ellentéte a keresletkorlátos áruszállítási piac, ahol a szállítási vállalatok számára az áruszállításban (szigorú és következetesen normatív szabályozás mellett) tökéletesen kemény költségvetési korlát és teljesen puha versenyzési korlát

* A XII. Magyar Operációkutatási Konferencián (Kőszeg, 1982. szept. 6—10 között) elhangzott előadás szövege.

[1] A piaci mechanizmusnak és a kompetitív tarifa alakulásának, azaz általában a versenynek a közlekedésben értelmezett fogalmát vizsgálva, eléggé elterjedt hiba a közlekedési munkamegosztás és a szállítási verseny fogalmának összekeverése. Például amikor azt mondjuk a közlekedési munkamegosztással kapcsolatban, hogy a vasút versenyez a közúttal, akkor a szállításgazdasági értelemben nem versenyről van szó, hanem munkamegosztásról, melyet rövid távon az határoz meg, hogy a ténylegesen versenyző fuvarozók és a szállítmányozók az adott költségek és lehetőségek figyelembevételével milyen arányban veszik igénybe fuvarszervezéseik és azok lebonyolítása során a „közúti pályákat", illet e „vasúti síneket". Tehát kompetitív esetben a fuvaroztatók nem alágazati monopóliumokkal állnak szemben, hanem versenyző, fuvarozó, illetve szállítmányozó vállalatokkal. Ezen utóbbi vállalatok „aggregált" működése, kompetitív esetben meghatározza az optimális közlekedési munkamegosztást [8].

van érvényben. Itt a szállítási vállalatokra az árelfogadó szerep a jellemző, a hitelfeltételek szigorúak és az önfinanszírozás ,,tisztán" érvényesül. A szolgáltatási színvonal és a gazdaságosság alapvetően meghatározza a versenyképességet és igen jelentős a kockázat a versenyképtelenné válásra, vagyis a kiszorulásra a piacról.

Mindezek a gyakorlatban természetesen nem érvényesülnek ,,sterilen", vagyis a tények az ,,átmeneti állapotoknak" felelnek meg, a szocialista és a tőkés országok szállítási piacain egyaránt.

Magyarországon napjainkban a közlekedéspolitika intenzíven támogatja a versenyhelyzet kialakulását a fuvarpiacon, továbbá olyan szállítási technológiák elterjesztését szorgalmazza új vállalkozások és a szállítmányozási tevékenység útján is, amelyek az egyes alágazatok optimális rendszerkapcsolatait segítik elő.

2. Az egyensúly fogalmának értelmezése a fuvarpiacon

2.1 *A walrasi egyensúly feltételei*

A közgazdasági elmélet a gazdaság (piac) walrasi egyensúlyáról akkor beszél, ha az összes kínálat kielégíti az összes keresletet [3]. Ez csak a vállalatok kemény költségvetési és puha versenyzési korlátja mellett, tökéletesen súrlódás mentes alkalmazkodás esetén valósulhat meg.

A kemény költségvetési korlát [1] elégséges feltétele, hogy az alábbi kritériumok teljesüljenek:

K1: a (szállítási) vállalat teljesen árelfogadó, képtelen befolyásolni az árakat;

K2: az adózási rendszerben a normativitás teljesen érvényesül, az adózási elvek exogén módon, minden vállalatra egyformán, objektív kritériumokkal meghatározottak, és egyformán érvényesülnek;

K3: a (szállítási) vállalat teljesen önfinanszírozó, semmilyen szubvenciót, ingyenes beruházási hozzájárulást nem élvez;

K4: a hitelfelvételek feltételeinél semmilyen kedvezmény nincs, sem kamat, sem visszafizetési mód tekintetében;

K5: a vállalat külső pénzbefektetéssel kapcsolatosan is normatív elbírálás alá esik, a külső pénzforrás csak fejlesztésre és nem a pénzügyi nehézségek leküzdésére használható, a külső befektetést nem ösztönzik központilag, azt a nyereség, illetve a haszon orientálja.

A fenti öt kritérium [1]-ben részben a majdnem kemény költségvetési korlátot írja le. Következményeiben — esetünkben — ezek ugyanolyanok, mint ott a (tiszta) tökéletesen kemény költségvetési korlát kritériumai.

Megjegyezzük, hogy a teljesen puha költségvetési korlát a tökéletesen centralizált (hadi típusú) gazdaságirányítási rendszernek felel meg.

A fenti feltételek általában a piaci mechanizmus érvényesülésének fokát jellemzik, de nem adnak információt az adott iparág, piac kompetitivitásának mértékéről (pl. lehet szó oligopolista versenyről). Ezen utóbbit a verseny korlátozásának puhaságával vagy keménységével jellemezhetjük.

A puha versenyzési korlátot [4] meghatározó elégséges feltételrendszer a következő:

V1: a fuvarpiacon nagyszámú (szállítási) vállalat versenyez szolgáltatásainak (termékeinek) értékesítéséért;

V2: a vállalati teljesítmények és szolgáltatások jellegét tekintve a szállítási kereslet homogénnek tekinthető, nincs jellegénél fogva kielégíthetetlen kereslet;

V3: a fuvarpiacról való kilépés és a piacra való belépés nem korlátozott, vállalatok szűnhetnek meg és jöhetnek létre;

V4: az egyes vállalatok döntéseiket a piaci információk és belső helyzetük ismeretében egymástól függetlenül hozzák;

V5: a versenyhelyzetet közvetlenül nem befolyásolják a fuvarpiacon kívüli átalakító tényezők.

Természetesen a fenti feltételek nem axiomatikus felépítésű, független feltételek és kialakításuk is többféleképpen képzelhető el.

Megjegyezzük, továbbá, hogy a K1. . .K5 feltétel elemzése önmagában csak a piaci mechanizmus létének (és nem feltétlenül kompetitivitásának) vizsgálatát, illetve érvényesülésének számszerű jellemzését adhatja, a V1 . . . V5 feltételek külön vizsgálata pedig a működő piaci mechanizmus kompetitivitási mértékének meghatározását.

2.2 *A walrasi egyensúlyi feltételek gyakorlati érvényesüléséről*

Nyilvánvaló, hogy a felsoroltak egy adott fuvarpiac (ágazat) izolált, szélsőségesen zavartalan kompetitív egyensúlyi működését körvonalazzák, ami a gyakorlatban természetesen nem érvényesülhet. Magyarországon a szállítási vállalatok nagy többsége — legalábbis az inputok és outputok egy részére vonatkozóan — ármeghatározó, az árak nagyságát legfeljebb a tranzakciós partnerek ellenállása, végső soron az összes szállítási kereslet korlátozott volta szabályozza. Különösen az outputok (a szállítási teljesítmények) árainál érvényesül a költségvetési korlát felpuhulása, a szállítási vállalatok egy része képes költségeinek emelkedését a tarifa emelésével a fuvaroztatóra áthárítani.

Az adózási rendszerre vonatkozó feltétel sem teljesül mindig tiszta formában, a szállítási vállalatok képesek az adózási előírásokat befolyásolni, a kivetett adókra kedvezményt kaphatnak. A szállítási vállalatok önfinanszírozó jellege, ha eltérő mértékben is, de korlátozott. Ilyenkor belép a dotáció, a állami ártámogatás stb. [1].

A szállítási-kínálati viszonyok alakulása ma még az ideálist jól közelítő versenyhelyzetet — a közúti fuvarozás bizonyos területeit kivéve — általában nem teremt a közlekedésben. A központilag meghatározott vagy maximált tarifák a versenyhelyzetet kedvezőtlenül befolyásolják. Főhatósági, tröszti tervegyeztetések a független döntések számát is csökkentik.

3. A kompetitív piaci mechanizmus érvényesülési fokának értelmezése

3.1 *A matematikai modell*

Az előző pontban elmondottak arra utalnak, hogy a költségvetési és versenyzési korlátok adott feltételei egy konkrét fuvarpiacon az egyes szállítási vállalatok viszonylatában különböző mértékben teljesülnek. Ez a mérték számszerűsített formában alkalmas lehet a különböző szállítási vállalatok egységes kezelésére.

Jelölje H az adott kompetitív piacon kínálattal jelentkező vállalatok halmazát, és minden K_j feltételhez legyen adva egy $\mu_{K_j}: H \to [0, 1]$ leképzés, ahol
$\mu_{K_j}(h)$ – a költségvetési korlát keménységére vonatkozó j. feltétel kielégítését mennyiségileg jellemző érték a $h \in H$ vállalatra vonatkozóan. $\mu_{K_j}(h) = 1$, ha a feltétel tisztán teljesül és $\mu_{K_j}(h) = 0$, ha a feltétel egyáltalán nem teljesül, egyénként $0 < \mu_{K_j}(h) < 1$.

Ekkor

$$\mu_{H_{K_j}} = \{(h, \mu_{K_j}(h)) : h \in H, \mu_{K_j}: H \to [0, 1]\}$$

a vállalatoknak a K_j feltételnek megfelelő fuzzy halmaza és $\mu_{K_j}(h)$ a fuzzy halmaz tartalmazási függvénye [5]. Pl. $\mu_{H_{K_1}}$ az árelfogadó vállalatok fuzzy halmaza.

A kemény költségvetési korláttal rendelkező vállalatok fuzzy halmazát az öt feltétel együttes teljesülése határozza meg, azaz a megfelelő fuzzy halmazok metszete adja:

(1) $$\mu_{H_K} = \bigwedge_j \mu_{H_{K_j}}.$$

Dolgozatunkban a fuzzy halmazok metszetét mindenütt a

$$\mu_{A \wedge B}(h) = \min(\mu_A(h), \mu_B(h))$$

tartalmazási függvénnyel értelmezzük. (1)-ben a metszet fuzzy halmaz $\mu_K(h)$ tartalmazási függvényére $\mu_K(h) = 1$ a teljesen kemény és $\mu_K(h) = 0$ a teljesen puha költségvetési korláttal rendelkező vállalatok esetén.

Hasonló megfontolásokkal, legyen minden V_j feltételhez adott a H halmaznak egy $\mu_{V_j}: H \to [0, 1]$ leképzése, ahol
$\mu_{V_j}(h) =$ a versenyzési korlát puhaságára vonatkozó j. feltétel kielégítését jellemző mérték a $h \in H$ vállalatra vonatkozóan. Itt is igaz kell legyen, hogy $\mu_{V_j}(h) = 1$ akkor és csak akkor, ha a j. feltétel a $h \in H$ vállalatra tisztán teljesül és $\mu_{V_j}(h) = 0$ akkor és csak akkor, ha a j. feltétel egyáltalán nem teljesül.

Ez a függvény is tekinthető egy fuzzy halmaz, nevezetesen a vállalatoknak a V_j feltétel szerinti $\mu_{H_{V_j}}$ fuzzy halmazának a tartalmazási függvényének.

A puha versenyzési korláttal rendelkező vállalatok fuzzy halmazát a

(2) $$\mu_{H_V} = \bigwedge_j \mu_{H_{V_j}}$$

képlettel írjuk le. Itt is igaz, hogy $\mu_V(h) = 1$ a teljesen puha és $\mu_V(h) = 0$ a kemény versenyzési korláttal rendelkező vállalatokra, ahol $\mu_V(h)$ a μ_{H_V} fuzzy tartalmazási függvénye.

Az iparági (piaci) vállalatoknak a kompetitív piaci mechanizmus érvényesülését tükröző fuzzy halmazát a μ_{H_K} és μ_{H_V} fuzzy halmazok metszete adja, azaz

$$\mu_H = \mu_{H_K} \bigwedge_j \mu_{H_V},$$

és jelölje $\mu(h)$ a μ_H fuzzy halmaz tartalmazási függvényét.

A kompetitív piaci egyensúly érvényesülési fokát a valóságos piaci állapotnak az ideális (walrasi) egyensúlytól való eltérésével jellemezhetjük. A csupán kvalitatív vizsgálat során az eltérés mértékét egy $0 \leq q \leq 1$ paraméterrel írjuk le, melyre igaz, hogy $q = 1$ akkor és csak akkor ha a piac az ideális egyesúly állapotában van: továbbá, ha a piac közeledik a walrasi egyensúly állapotához, akkor $q \to 1$-hez tart. A piaci mechanizmus s érvényesülési fokának valódi értéke a gyakorlatban nem ismert, csak becsülhető. A fuzzy technikával a q értékét a

$$\bar{q}_H = \frac{\sum\limits_{h \in H} P(h)\mu(h)}{\sum\limits_{h \in H} P(h)}$$

értékkel becsülhetjük, ahol $P(h)$ a $h \in H$ vállalat termelési értéke, ezzel reprezentáljuk a vállalat „súlyát" az adott fuvarpiacon. Súlyozótényezőként a termelési érték helyett más, például a vállalati nettó bevétel is tekinthető.

Megjegyezzük, hogy míg a tiszta piaci mechanizmus szerint működő vállalatok klasszikus halmaza üres, mivel a walrasi egyensúly feltételei ideális formában sohasem valósulnak meg, és a K_j, V_j feltételek bármelyikének nem teljesülése kizárja a vállalatot a további vizsgálódás köréből, addig a fuzzy halmazokat alkalmazó megközelítéssel a $\mu(h)$ tartalmazási mérték erejéig minden szállítási vállalat figyelembe vehető a kompetitív fuvarpiaci mechanizmus érvényesülésének meghatározásához.

A piaci mechanizmus q érvényesülési fokának valamely becsült $\bar{q}$ értékét konzisztensnek mondjuk, ha a valódi egyensúlynak az ideálishoz való konvergenciájával a megfelelő becslések is tartanak az ideális állapotnak megfelelő 1 értékhez az alábbi értelemben

$$|\bar{q} - q| \to 0, \text{ ha } q \to 1.$$

A becslés konzisztenciájának ellenőrzése rendkívül fontos, mivel a gyakorlatban csak a becsült értékek 1-től való eltérése mérhető. A $\bar{q}_H$ becslés konstrukciójából nyilvánvaló, hogy az konzisztens becslése a piaci mechanizmus q érvényesülési fokának.

Mindeddig csupán *egy termék* keresletére-kínálatára értelmezték a piaci mechanizmus érvényesülési fokát leíró mértéket. Ha egy *alágazatra*, vagy a piacok adott *halmazára* nézzük a fenti $q_1, q_2, \ldots, q_M$ becsléseket, akkor az adott gazdaságra jellemző kompetitív piaci mechanizmus érvényesülését, azaz a valós és ideális egyensúly helyzet közötti távolságot a $q = (q_1, \ldots, q_M)$ vektorral jellemezhetjük.

3.2 *A μ_{K_j} és μ_{V_j} tartalmazási függvények meghatározása (becslése)*

A fuzzy halmazok tartalmazási függvényeinek „becslésére" egyértelműen meghatározott módszer nincs, mindig a konkrét feladatból kell kiindulni. [1] a költségvetési korlát teljesülésére vonatkozó mutatókat az „atomisztikus" fogyasztói és vállalati viselkedés (pl. várakozó sorok hossza, feleslegek, készletek nagysága, ún. kényszerhelyettesítések száma stb.) részletes elemzésével, statisztikai vizsgálatok alapján javasolja meghatározni. Mivel a gazdasági életben szubjektív tényezők is jelentős mértékben hatnak az egyes feltételek teljesülésére (melyek klasszikus valószínűségi mértékkel nem írhatók le), gyakran jól használhatók a szubjektív valószínűségi módszerek, különösen az *a posteriori* szubjektív valószínűségeloszlások alkalmazása.

A μ_{K_j} és μ_{V_j} fuzzy tartalmazási függvények megadására kétféle módszert ismertetünk. Ezek mindegyike hordoz bizonyos valószínűségi elemet is, de teret ad a feltételek érvényesülésére ható szubjektív döntések figyelembevételének is.

I. módszer:

Ez a módszer a vállalati (ágazati stb.) statisztikák és szakértői becslések együttes figyelembevételén alapul. A vállalati szakemberek által a vállalati szolgáltatások struktúrájáról, a bevételek és kiadások összegéről, a fizetési módozatokról stb. adott információkat veszi figyelembe.

Egyszerű példaként tekinthetők a következő összefüggések:

$$\mu_{K_1}(h) = \frac{\text{a szállítási teljesítménynek az a része, amelyben a vállalat árelfogadó}}{\text{a szállítási teljesítmény}}$$

$$\mu_{K_2}(h) = 1 - \frac{\text{az adóösszegnek az a része, amelynek feltételeinek kialakításába a vállalat beleszólása érvényesült}}{\text{a teljes adóösszeg}};$$

$\mu_{K_3}(h) = 1 -$ a finanszírozásban az állami támogatás hányada;

$$\mu_{K_4}(h) = 1 - \frac{\text{a kedvezményezett hitelösszeg}}{\text{összes hitel}};$$

$\mu_{K_5}(h) = 1 -$ a külső befektetésből a vállalat pénzügyi helyzetének javítására fordított hányad.

Hasonlóan értelmezhetünk tartalmazási mértékeket a versenyzési feltételekkel kapcsolatban. Például:

$$\mu_{V_1}(h) = 1 - \frac{\text{a vállalat szállítási kapacitása}}{\text{az adott piacon jelentkező vállalatok összkapacitása}};$$

$$\mu_{V_2}(h) = 1 - \frac{\text{a kereslet hiányában nem realizálódott szállítási teljesítmények összértéke}}{\text{a vállalat szállítási kapacitása}};$$

$\mu_{V_3}(h) =$ a fuvarpiacon realizálódó szállítási teljesítmény összetételében bekövetkezett változás mértéke;

$\mu_{V_4}(h) = 1 -$ a termelési értéknek (szállítási teljesítménynek) tervegyeztetés útján létrejött hányada;

$\mu_{V_5}(h) = 1 -$ a termelési értéknek (a realizálódott bevételnek) a külső áralakító tényezőktől befolyásolt hányada.

Megjegyezzük, hogy az itt adott $\mu_{V_2}(h)$ mérték a homogenitás kritériumát még nem fedi le teljesen, mivel az nagymértékben függ a többi vállalat helyzetétől is.

II. módszer

Ez a módszer akkor alkalmazható, ha valamilyen (pl. szakértők által becsült) rendezési sorrend ismert (az adott fuvarpiacon) a szállítási vállalatok között az előző feltételek teljesülését illetően. Jelöljön $\succ$ egy részben rendezést a következő értelemben:

$$h_i^{K_j} \succ h_k^{K_j},$$

ha az i-edik vállalat költségvetési korlátjának j. feltétele erősebben teljesül (keményebb), mint a k-adik vállalat esetében. Hasonlóan

$$h_i^{V_j} \succ h_k^{V_j},$$

ha az i-edik vállalat versenyzési korlátjának j. feltétele erősebben teljesül (puhább), mint a k-adik vállalatnál. Itt az „erősebb" csak mint reláció jelenik meg, mennyiségi ismérvet nem hordoz. Ha a két vállalat között valamelyik feltétel szerint nem tehető különbség, akkor az $\approx$ jelet használjuk: $h_i^{K_j} \approx h_k^{K_j}$ vagy $h_i^{V_j} \approx h_k^{V_j}$. A $\succeq$ teljes rendezés.

Tekintsük a következő mátrixokat:

$$\mu^{K_j} = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \cdots\cdots \mu_{ik}^{K_j} \cdots\cdots \\ \vdots \end{array}\right] & i \\ k & \end{array} \quad \text{és} \quad \mu^{V_j} = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \cdots\cdots \mu_{ik}^{V_j} \cdots\cdots \\ \vdots \end{array}\right] & i \\ k & \end{array}$$

A μ^{K_j} (μ^{V_j}) mátrix $\mu_{ik}^{K_j}$ ($\mu_{ik}^{V_j}$) eleme azt mutatja, hogy a K_j (V_j) feltétel az i-edik vállalatnál erősebben vagy gyengébben teljesül, mint a k-adik vállalatnál, azaz

$$\mu_{ik}^{K_j} = \begin{cases} 1, & \text{ha } h_i^{K_j} \succeq h_k^{K_j} \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

és

$$\mu_{ik}^{V_j} = \begin{cases} 1, & \text{ha } h_i^{V_j} \succeq h_k^{V_j} \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A fenti mátrixok elemeit választhatnánk 0 és 1 közé eső számoknak is, ezzel hangsúlyozva a reláció teljesülésének erősségét is, azonban az így bevezetett paraméterek gyakorlati megadása újabb problémákat vetne fel.

A μ^{K_j} és μ^{V_j} mátrixok segítségével a K_j, illetve V_j feltételeknek megfelelő fuzzy halmazok tartalmazási függvénye a következőképpen definiálható:

$$\text{(3)} \qquad \mu_{K_j}(h_i) = \begin{cases} \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \mu_{ik}^{K_j}, & \text{ha létezik legalább egy } h_k \text{ vállalat, melyre } h_i^{K_j} \succ h_k^{K_j} \\ 0, & \text{egyébként,} \end{cases}$$

illetve

$$\text{(4)} \qquad \mu_{V_j}(\mu_i) = \begin{cases} \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{k=1} \mu_{ik}^{V_j}, & \text{ha létezik legalább egy } h_k \text{ vállalat, melyre } h_i^{V_j} \succ h_k^{V_j} \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ha a vállalatok termelési értéke nagyságrendben eltér, célszerű itt is a tartalmazási mértéket a termelési érték súlyozásával figyelembe venni, azaz

$$(5)\qquad \bar{\mu}_{K_j}(h_i) = \begin{cases} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{N} \mu_{ik}^{K_j} P(h_k)}{\sum\limits_{k=1}^{N} P(h_k)}, & \text{ha létezik } h_k\colon h_i^{K_j} \succ h_k^{K_j} \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

$$(6)\qquad \bar{\mu}_{V_j}(h_i) = \begin{cases} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{N} \mu_{ik}^{V_j} P(h_k)}{\sum\limits_{k=1}^{N} P(h_k)}, & \text{ha létezik } h_k\colon h_k^{V_j} \succ h_i^{V_j} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A fenti vizsgálattal a kemény költségvetési korláttal rendelkező vállalatok fuzzy halmazának és a puha versenyzési korláttal rendelkező vállalatok fuzzy halmazának tartalmazási függvénye is közvetlenül becsülhető, ha a költségvetési korlát keménységére, illetve a versenyzési korlát puhaságára vonatkozóan rendelkezésünkre áll a vállalatok rendezése. Ez egyúttal kontrollként is használható az *a priori* rendezésekre vonatkozóan, mivel a (3) vagy az (5) és (1) formulával kapott $\mu_K(h)$, jellegét tekintve hasonló kell legyen a közvetlenül becsült $\mu_K(h)$ függvényhez (pl. szélsőértékeit közel ugyanott kell, hogy felvegye).

A 3. pontban bemutatott módszer lehetőséget ad arra, hogy jellemezzük a konkrét piacok, illetve „iparágak" esetén az ideális (walrasi) egyensúlytól való eltérés irányát és mértékét. Így a részleteiben nehezen modellezhető valós egyensúlyi helyzeteket az ideális (walrasi) egyensúlyi helyzethez való viszonyuk, „irányuk" és „távolságuk" szerint (ez már könnyebben modellezhető) idetifikálhatjuk.

4. A fuzzy piaci egyensúlyi modellek vizsgálata

4.1 *A fuzzy egyensúlyi modell általános értelmezése és stabilitása*

Eddig nem-kvantitatív módon mértük a megvalósult, tényleges egyensúlyi állapotnak az eltérését az ideális egyensúlytól. Ezután természetesnek tűnik, hogy a piaci mechanizmus érvényesülési fokának becsült értékeit az egyensúlyi helyzet meghatározására használjuk fel.

A feladatot általánosan, több piaccal rendelkező szállítási ágazatra vizsgáljuk.

Mozogjon az adott szállítási ágazat (iparág) kereslet-kínálat „vonalán" M számú szállítási szolgáltatás (termék). E „termékek" mindegyikére megadható egy $T^*_{D_i}$ $(r_1, \ldots, r_M)$, $i = \overline{1, M}$ aggregált optimális (ideális) szállítási keresleti függvény, mely maximalizálja a „fuvaroztatók" nyereségét, és a szállítási teljesítmény (volumen) beállításával kölcsönhatásban függ a fuvarpiacon mozgó szolgáltatás árától.

Analóg módon megadhatók a $T^*_{S_i}(r_1, \ldots, r_M)$ aggregált optimális kínálati függvények. Az (iparági) „gazdaság" akkor van az ún. „általános egyensúly" állapotában, ha minden szállítási módban a kínálat egyenlő a kereslettel, azaz a „termékek" mozgása olyan r_i^*, $i = \overline{1, M}$ optimális árakon valósul meg, melyekkel fennállnak a

$$T^*_{D_i}(r_1^*, \ldots, r_M^*) = T^*_{S_i}(r_1^*, \ldots, r_M^*), \quad i = \overline{1, M},$$

egyenlőségek. Innen a kompetitív szállítási árakat, az egyensúlyi árrendszer egzisztenciáját feltételezve, az egyenletrendszer megoldásával kapjuk. A további stabilitási vizsgálatok kedvéért megjegyezzük, hogy az r_i megoldások nem feltétlenül egyértelműen meghatározottak. Ekkor r_i^* gyanánt általában a legkisebbet fogadjuk el. Ilyen tulajdonságú megoldást kaphatunk az

$$\inf_{R^M{}_+} \left(\sum_{i=1}^{M} T_{D_i}(r_1, \ldots, r_M) - T_{S_i}(r_1, \ldots, r_M) + \alpha \sum_{i=1}^{M} r_i^2 \right), \; R_+ = [0, \infty)$$

segédfeladat $r_i(\alpha)$ megoldásából az $r^*_i = \lim_{\alpha \to +0} r_i(\alpha)$ összefüggéssel [6].

Az így kialakított r_i^* árak és a $T_i^* = T^*_{D_i} = T^*_{S_i}$ szállítási teljesítmények a társadalom számára a legnagyobb gazdasági hatékonyságot biztosító áraknak és realizált teljesítményeknek tekinthetők [3]. Ez az egyensúly tulajdonképpen az adott gazdaság walrasi egyensúlyi állapota. Mint már a korábbiakban említettük, ez az egyensúly reális gazdasági helyzetben sohasem áll fenn.

A költségvetési korlát puhasága, illetve a versenyzési korlát keménysége miatt a keresleti és a kínálati függvények alakulása eltér az optimális esettől. Másrészt a költségvetési korlát nem elég keménysége ill. a versenyzési korlát nem elég puhasága a priori korlátokat is jelenthet a kialakuló árakra.

Feltételezzük, hogy a keresleti és kínálati függvényeknek a piaci mechanizmus érvényesülési fokától való függése ismert és a q vektorral adott. Ebben az esetben az általános egyensúlyt illusztráló egyenletrendszer a következő alakban adható meg:

$$(7) \qquad T_{D_i}(r_1, \ldots, r_M; q_1, \ldots, q_M) = T_{S_i}(r_1, \ldots, r_M; q_1, \ldots, q_M).$$

ahol $q = (q_1, \ldots, q_M)$ a piaci mechanizmus érvényesülési foka az adott „termékek" vonatkozásában. A (7) egyenletrendszerrel megadott egyensúlyi helyzetet nevezzük a továbbiakban *fuzzy egyensúlyi állapotnak*. A piaci mechanizmus érvényesülési fokának rögzített, aktuális értéke mellett a (7) egyenletrendszer a

$$(8) \qquad \tilde{T}_{D_i}(r_1, \ldots, r_M) = \tilde{T}_{S_i}(r_1, \ldots, r_M), \quad i = \overline{1, M}$$

alakot ölti, ahol a $\tilde{T}_{D_i}(r_1, \ldots, r_M)$ már a reális a hiányokat, feleslegeket,' sorbanállást stb. is figyelembe vevő aggregált keresleti függvény, a kínálati oldalon pedig egy nem optimális, a slacket (kedvezőtlen feleslegeket) is figyelembe vevő reális aggregált kínálati függvény helyezkedik el.

A (7) egyenletrendszer kapcsán felvetődik a kérdés, hogy ha $q \to \mathbf{1}$ (ahol $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$), vajon a (7) vagy (8) egyenletrendszerből kapott $r_1^{(q)}, \ldots, r_M^{(q)}$ árak is tartanak-e az $r_1^*, \ldots, r_M^*$ ideális egyensúlyi árakhoz. (Itt és a továbbiakban vektorok konvergenciáján az euklideszi normában való konvergenciát értjük, azaz $\sum_{i=1}^{n} (q_i - 1)^2 \to 0$).

A fenti kérdést másképpen megközelítve, ha $\alpha \to \mathbf{1}$, akkor valóban tart-e a (7), illetve (8) valós egyensúlyi helyzet az ideális (walrasi) egyensúlyi állapothoz, azaz megteremthető-e a kapcsolat a dolgozat első részében ismertetett nemkvantitatív (az egyensúlyi állapot feltételeit minősítő) disequilibirum elemzés és a kvantitatív (keresleti és kínálati görbékkel meghatározott) egyensúlyi vizsgálat között.

Az lenne a várható, hogy ha $q \to \mathbf{1}$, akkor a (7) vagy (8) egyenletrendszerből kiszámított árak tartanak az ideális [a (6) egyenletrendszerből kapott] egyensúlyi árakhoz. Sajnos ez teljes általánosságban nem igaz. Azonban a keresleti-kínálati függvények elég széles osztálya esetén a Tyihonov regularizációs technikával az eredeti feladathoz hozzárendelt

$$\inf_{R^M_+} \left(\sum_{i=1}^{M} |T_{D_i}(r_1, \ldots, r_M; q_1, \ldots, q_M) - T_{S_i}(r_1, \ldots, r_M; q_1, \ldots, q_M)| + \alpha \sum r_i^2 \right)$$

segédfeladat $\tilde{r}(\alpha, q) = (\tilde{r}_1(\alpha, q), \ldots, \tilde{r}_M(\alpha, q))$ megoldására már igaz, hogy ha a q vektor a δ skalár paraméteren keresztül tart az $\mathbf{1}$ vektorhoz, azaz $q(\delta) \to \mathbf{1}$, ha $\delta \to 0$, akkor

$$\lim_{\substack{\delta \to 0 \\ \alpha \to 0 \\ \delta/\alpha \to 0}} \lim_{q(\delta) \to \mathbf{1}} \tilde{r}(\alpha, q(\delta)) = r^*,$$

ahol — több megoldás esetén — r^* a minimális normájú egyensúlypont [6]. Vagyis a regularizációs technika segítségével biztosítható, hogy ha az ideális egyensúlytól való eltérést jellemző mértékek 1-hez tartanak, akkor a megfelelő fuzzy egyensúlysorozat megközelíthető legyen egy olyan sorozattal, amely az ideális egyensúlyhoz tart. Ily módon ténylegesen sikerült megteremtenünk az értelemszerű kapcsolatot a nemkvantitatív és a kvantitatív disequilibrium vizsgálatok között.

4.2 *Az ideális egyensúlyi helyzet és az „algebrai hiány" becslése fuzzy módszerekkel*

További fontos feladatnak látszik a nemkvantitatív elemzés, a valódi (megfigyelt) egyensúlyi helyzet, valamint kiegészítő szakértői becslések alapján megbecsülni az ideális egyensúly feltételezhető „helyét", helyzetét [8]. Feltételezzük, hogy rendelkezünk bizonyos *a priori* információval egy fuzzy mérték (lehetőségsűrűség függvény [7]) formájában az ideális r_0 egyensúlyi árak értékeiről. Ha $r = (r_1, \ldots, r_M)$ és $R_+ = [0, \infty)$, akkor ez az *a priori*nak tekinthető információ megadható olyan fuzzy halmazként, melynek $\mu_R(r)$ tartalmazási függvénye azt mutatja, hogy milyen mértékben tartható r az ideális egyensúlyi árnak. Ezen alapvető *a priori* jellegű információ megléte esetén az „ideális" egyensúlyi helyzet kvantitatív becslését a következő három alapvető esetben végezhetjük el.

1. Ismert a valódi egyensúly, továbbá a valódi és ideális egyensúly „távolságát" jellemző q mérték;
2. Csak a valódi egyensúlyi helyzet ismert;
3. Egyik fenti információval sem rendelkezünk, de további szakértői becslésekre támaszkodhatunk.

Tekintsük át az ideális egyensúlyi helyzet becslését a fenti három eset mindegyikére.

1. *eset*

Legyen $\bar{q}$ a piaci mechanizmus becsült érvényesülési foka, feltételezve, hogy a becslés konzisztens, azaz $q \to 1$ esetén $\bar{q} \to 1$. Legyen továbbá adott a μ_R korlátozó fuzzy feltétel az egyensúlyi árakra vonatkozóan. (Ennek tartalmazási függvénye pl. lehet a normális sűrűségfüggvénynek megfelelő normális lehetőség sűrűségfüggvény [7].)

Mivel ebben az esetben az r_0 megfigyelt egyensúlyi ár adott, az ártartományon megadható egy μ_0 fuzzy halmaz, melynek tartalmazási függvényét a $\mu_R(r)$ tartalmazási függvénynek az r_0 pontra való eltolásával kapjuk. Vagyis

$$\mu_0^R(r) = \mu_R(r - c)$$

ahol a c eltolási értéket a

$$\mu_R(r_0 - c) = \bar{q}$$

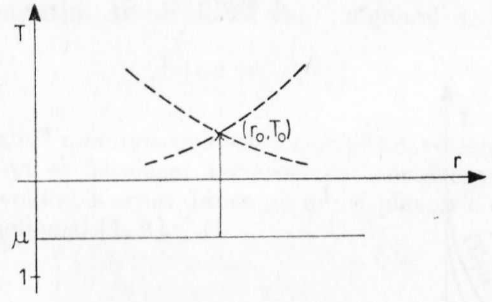
összefüggésből határozhatjuk meg (ld. 1—3. ábrák).

Az ideális egyensúlyt jellemző egyenletrendszer megoldásából kapott r^* árnak tekinthetjük azt a μ_R^* fuzzy halmazt, melyet a μ_0^R és μ_R fuzzy halmazok metszeteként kapunk:

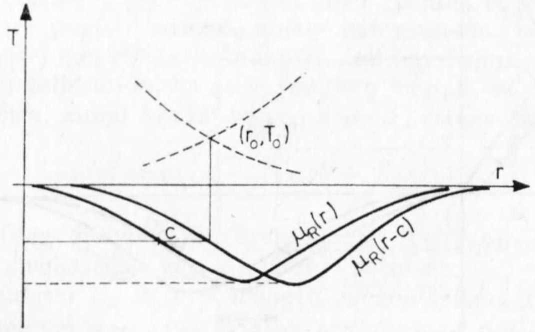
$$\mu_R^* = \mu_0^R \wedge \mu_R.$$

Az ideális egyensúlyi árakat becslő ár a μ_R^* fuzzy megoldásnak olyan eleme, amelyre a tartalmazási függvény maximális, azaz

$$r_R^* \in \arg\sup_r \mu_R^*(r).$$



1. ábra

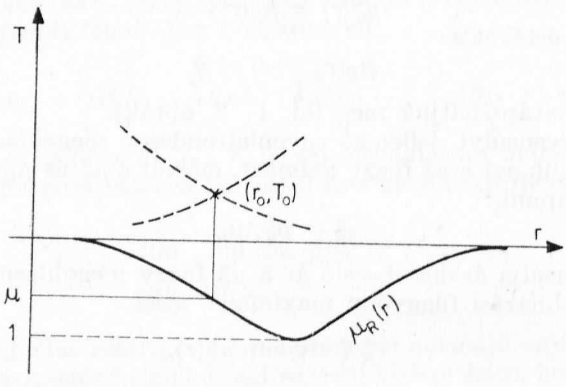


2. ábra

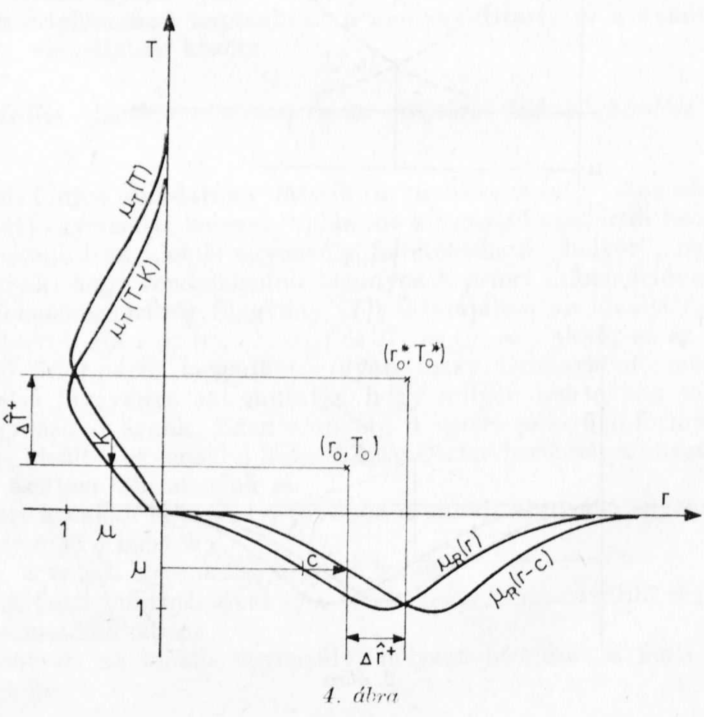
A megoldást egy piac esetén a 4. ábra illusztrálja. Megjegyezzük, hogy eléggé általános feltételek között r_0^* egyértelműen meghatározott vektor.

A $\mu_R^*(r)$ függvény gyakorlatilag függ a $\bar{q}$ becsült „távolság" mértékétől. Ha a valódi egyensúly tart az ideálishoz, azaz $q \to \mathbf{1}$, a fenti szélsőérték feladat megoldása instabil lehet. Azonban a regularizációs technikával kapott

$$\sup_{R^M_+} (\mu_R^*(r) - \alpha \|r\|^2), \; \|r\|^2 = \sum_{i=1}^{M} r_1^2,$$



3. ábra



4. ábra

segédfeladat $r^*(q, \alpha)$ megoldására a tartalmazási függvények elég széles osztályán [9] már igaz, hogy

$$\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \alpha\to 0\\ \delta/\alpha\to 0}} \lim_{q(\delta)\to 1} r^*(q(\delta), \alpha) = r^*.$$

A fentiekkel teljesen analóg eljárással becsülhetjük az ideális szállítási teljesítményt, illetve áruvolument az *a priori* (szakértői becsléssel kapott) μ_T fuzzy halmaz, — melynek $\mu_T(T)$ tartalmazási függvénye azt mutatja, hogy milyen mértékben tartható T az ideális egyensúlyi áruvolumennek — és a T_0 valódi egyensúlyi pontok figyelembevételével.

E szerint

$$T_0^* \in \arg\sup_T \mu_T^*(T),$$

ahol

$$\mu_T^* = \mu_0^T \wedge \mu_T;$$

és

$$\mu_0^T(T) = \mu_T(T - K),$$

ahol a K eltolást a $\mu_T(T_0 - K) = \bar{q}$ összefüggésből határozhatjuk meg.

A $\Delta T_0^+ = |T_0 - T_0^*|$ mennyiség pedig a hiány vagy a felesleg (algebrai hiány) nagyságát mutatja. Az ideálistól való „algebrai árrést" pedig a

$$\Delta r_0^+ = |r_0 - r_0^*|$$

formula adja.

Az előbbi „naturális" mennyiségek segítségével közvetlen kapcsolat teremthető azokkal a hiányt és felesleget természetes mértékegységekben kifejező, módszerekkel, amelyekkel Kornai János az adott piacon a walrasi egyensúlytól való távolságot jellemzi [1, 2].

2. *eset*

Ekkor nem ismerjük a valódi (megfigyelt) egyensúlyi helyzethez tartozó q mértékeket. Ez esetben a (8) egyenletrendszer minden egyenletéhez hozzárendelhető egy $\mu_{T_i}(r)$ (segéd) mérték, amely azt mutatja, mennyire teljesül az egyenlőség. A $\mu_{T_i}(r)$ megválasztásánál arra kell ügyelnünk, hogy $\mu_{T_i}(r) = 1$ akkor és csak akkor teljesüljön, ha az egyenlőség fennáll, és minél nagyobb a két oldal közti eltérés, annál kisebb legyen a $\mu_{T_i}(r)$ értéke. Pl. választható a

$$\mu_{T_i}(r) = \exp\left(-|\tilde{T}_{D_i}(r) - \tilde{T}_{S_i}(r)|\right)$$

függvény. A $\mu_{T_i}(r)$ függvénnyel, mint tartalmazási függvénnyel a (8) egyenlet minden egyenlete meghatároz egy μ_{T_i} fuzzy halmazt.

A (8) egyenletrendszer μ_R feltétel melletti megoldásának tekinthetjük azt a fuzzy halmazt, amelyet a μ_{T_i}, $i = \overline{1, M}$ és a μ_R fuzzy halmazok $\tilde{\mu}$ metszeteként kapunk. Jelölje $\tilde{\mu}(h)$ e fuzzy halmaz tartalmazási függvényét.

A fuzzy egyensúlyt realizáló ár a fuzzy megoldáshalmaznak olyan eleme, amelyre a tartalmazási függvény maximális, azaz

$$\tilde{r}^* \in \arg\sup_{r} \tilde{\mu}(r).$$

A számítás menetét egy piac esetén az 5. ábra illusztrálja. Gyakorlatilag $\tilde{r}^*$ függ a piaci mechanizmus q érvényesülési fokától, azaz $\tilde{r}^*(q)$. Minthogy az általános egyensúlyi állapot a $q = \mathbf{1}$ érvényesülési fokhoz tartozik, itt is felmerül a kérdés, vajon igaz-e, hogy

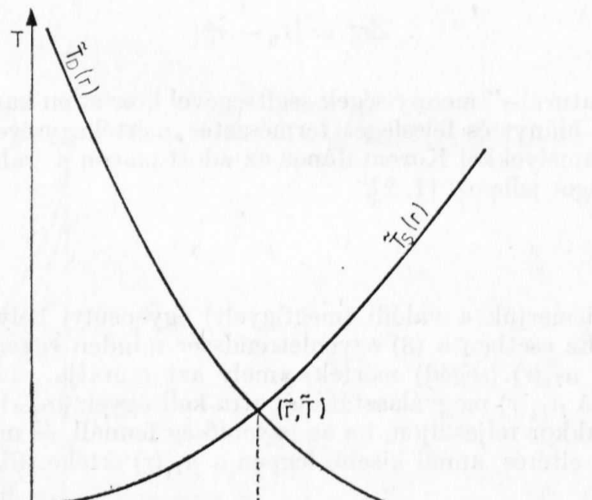
$$\lim_{q \to \mathbf{1}} \tilde{r}^*(q) = r^*.$$

Sajnos általánosságban nem, de a regularizálási technikával meghatározott

$$\sup_{R^{M_+}} (\tilde{\mu}(r) - \alpha\|r\|^2)$$

segédfeladat $\tilde{r}(q, \alpha)$ megoldására a $\tilde{\mu}(r)$ tartalmazási függvényre tett kiegészítő feltételek mellett [9]

$$\lim_{\substack{\delta \to 0 \\ \alpha \to 0 \\ \delta/\alpha \to 0}} \lim_{q(\delta) \to \mathbf{1}} \tilde{r}(q(\delta), \alpha) = r^*,$$



5. ábra

azaz az ideális egyensúly megközelíthető egy stabil, a reális egyensúlysorozatot az ideális egyensúly közelében jól approximáló fuzzy egyensúlyi ársorozattal.

3. *eset*

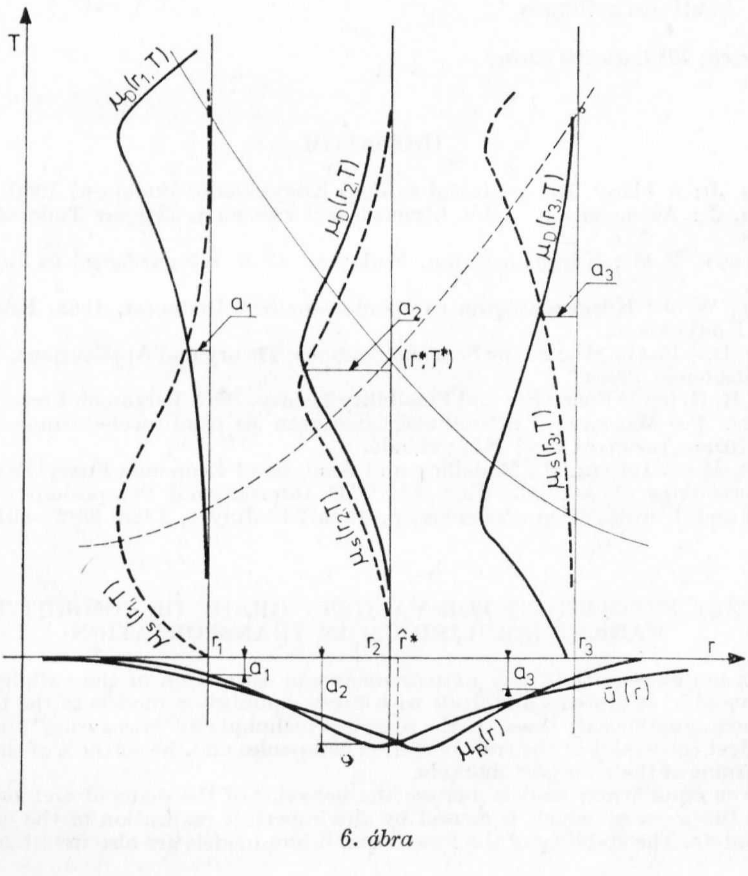
A gyakorlatban gyakran sem a keresleti és kínálati függvényeknek a piaci mechanizmus érvényesülési fokától való függése, sem a tényleges egyensúlyi helyzet nem ismert. Helyette azonban szakértői becslések alapján megadható, hogy a piaci mechanizmus adott érvényesülési szintjénél rögzített áraknál a keresleti, illetve a kínálati függvény melyik értéket milyen mértékig vehet fel. Azaz megadhatók a

$$\mu_{\overline{T}_{Di}}(r, T_{D_i}) \quad \text{és} \quad \mu_{T_{S_i}}(r, T_{S_i})$$

fuzzy függvények, illetve a nekik megfelelő μ_{D_i} és μ_{S_i} fuzzy halmazok az $R^M \times R^1$-en.

A kereslet-kínálat egyenlőségét leíró fuzzy függvény a

$$\mu(r, T) = \min_i \min [\mu_{D_i}(r, T), \mu_{S_i}(r, T)]$$



6. ábra

tartalmazási függvénnyel adható meg. Ez az árhalmazon meghatároz egy preferált egyensúlyi fuzzy halmazt

$$\bar{\mu}(r) = \max_T \mu(r, T)$$

tartalmazási függvénnyel.

A fuzzy egyensúlyi árhalmaz ekkor a

$$\hat{\mu} = \bar{\mu} \wedge \mu_R$$

formulával írható le, ahonnét a realizálható fuzzy egyensúlyi ár az

$$\hat{r}^* \in \arg\sup_r \hat{\mu}(r),$$

és a hozzó tartozó egyensúlyi kereslet-kínálati függvényérték a

$$\hat{T}^* \in \arg\sup_T \mu(\hat{r}, T)$$

értékkel valósul meg [6. ábra].

Az $\hat{r}$ és $\hat{T}$ egyensúlyi becslések stabilitásvizsgálata további kutatást igényel. Ugyancsak további vizsgálatok tárgyát képezi az egyensúlyi árak r_0^*, $\bar{r}^*$, $\hat{r}^*$ becslései közti összefüggés.

(Beérkezett: 1983. április 25-én)

IRODALOM

1. Kornai, J.: A hiány. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. Budapest, 1980.
2. Kornai, J.: Az egyensúly, mint közgazdasági kategória. Magyar Tudomány, 1982, N° 8—9.
3. Samuelson, P. A.: Közgazdaságtan. Budapest, 1976. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
4. Baumol, W. J.: Közgazdaságtan és operációanalízis. Budapest, 1968. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
5. Dubois, D.—Prade, H.: Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications. New York, 1980. Academic Press.
7. Yager, R. R. (ed.): Fuzzy Set and Possibility Theory. 1982. Pergamon Press, New York
8. Várlaki, P.—Magyar, J.: Szállításgazdaságtan és piaci mechanizmus. Budapest, 1983. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
9. Kovács, M.—Várlaki, P.: Modelling and Analysis of Economic Fuzzy Equilibriums, In: Proceedings of ACI 83, First IASTED International Symposium on Applied Control and Identification, Copenhagen, June 28—July 1, 1983, 23/27—31.

FUZZY ESTIMATIONS FOR VALIDITY GRADE OF COMPETITIVE MARKET EQUILIBRIUM IN TRANSPORTATION

The paper discusses the fuzzy measurement and estimation of the validity grade of competitive market systems and deals with fuzzy equilibrium models of the transportation. The examinations are based on the fuzzy set technique by "measuring" the hardness of the budget constraint of the transportation companies and the softness of the competition constraint of the transport markets.

The given equilibrium models analyse the behavior of the demand and supply functions, the fuzziness of which is caused by the imperfect realization of the competitive market system. The stability of the fuzzy equilibrium models are also investigated.

НЕЧЕТКИЕ ОЦЕНКИ СТЕПЕНИ РЕАЛИЗАЦИИ РЫНОЧНОГО РАВНОВЕСИЯ В ТРАНСПОРТЕ

В данной работе исследуется мера степени реализации сопернической рыночной системы и ее оценки и кроме того разрабатываются некоторые модели нечеткого равновесия. Исследования базируются на нечетких множествах, нечеткости которых вызвана несовершенной жесткостью бюджетного лимита транспортных агенств и несовершенной жесткостью бюджетного лимита транспортных агенств и несовершенной мяхкостью сопернического лимита транспортного рынка. Модели нечеткого равновесия рынка анализируют поведения функций спроса и предложения, которые являются нечеткими функциями из-за неполной реализации сопернической рыночной системы. Исследуется также и устойчивость моделей нечеткого равновесия.

KÖNYVEKRŐL

N. P. Fedorenko (Szerk.): *Az optimális tervezési modellek rendszere.* Budapest, 1979. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. 372. o.

A könyv szerzői — a SzUTA Központi Gazdaságmatematikai Intézetének munkatársai — az optimalizálási modellrendszer kidolgozásának elméleti és gyakorlati problémáival foglalkoznak. A népgazdasági tervezés modellrendszerének elméleti kidolgozása a Szovjetunióban a 60-as évek közepén kezdődött meg, de a modellek gyakorlati alkalmazására a népgazdaságfejlesztés 1976—1990 évi távlati tervének kidolgozásakor nyílt széleskörű lehetőség, mind a hosszú távú, mind az ötéves tervezési szakasz munkái során. A szerzők ezzel kapcsolatos gyakorlati feladatainak, valamint elméleti és kísérleti kutatásainak tapasztalatait tartalmazza a könyv.

A könyv két részből áll, az első rész (az 1—8. fejezet) a többfokozatú modellrendszer kialakításának elméleti alapjait, elveit, a kísérleti számítások eredményeit, a távlati tervek kidolgozásával kapcsolatos szervezési kérdéseket, a különböző szintű modelleket ismerteti, valamint foglalkozik programozástechnikai kérdésekkel. A második részben (a 9—11. fejezetben) a modell rendszer kiterjesztésére irányuló kutatások eredményeit mutatják be a szerzők.

Az első fejezetben a többfokozatú optimális tervezési rendszer elméleti alapjait foglalják össze, amelynek kulcskérdése a népgazdasági és a lokális optimumkritérium. A népgazdasági optimumkritériumnak az időtényező figyelembevételével a társadalmi szükségletek valamennyi fajtáját össze kell mérni, a jelenlegi és jövőbeli szükségletek kielégítettségének valamiféle egységes mércéjeként kell funkcionálnia. Elméletileg ez valamennyi jószágfajta összemérését igényelné, a gyakorlatban azonban a fogyasztási javak összemérése a legkidolgozottabb, a fogyasztási célfüggvény segítségével. A lokális optimumkritériumok meghatározására azért van szükség, hogy ennek megfelelően minden egyes gazdasági egység értékelhesse tevékenységét a gazdaság állandóan változó működési feltételei közepette.

A gazdasági irányítás többfokozatú struktúrája többfokozatú optimalizálást tesz szükségessé, és ez az információk aggregálásának problémáját veti fel. A második fejezetben a többfokozatú optimalizációs modellrendszer felépítésének alapelveit fogalmazzák meg. A többfokozatú népgazdasági tervezési rendszernek meg kell határoznia mit, hogyan és hol kell megtermelni, tehát strukturális, technológiai, területi és időbeli kérdésekre kell válaszolnia. A rendszer két alapvető szintje: az ágazati és a népgazdasági szint. A népgazdasági modell olyan kvázistatikus modell, amely magában foglalja az ágazatok valamennyi fejlesztési variánsait és népgazdasági optimumkritérium alapján kapjuk az optimális tervvariánst. Az optimumkritérium gyakorlati meghatározására szolgál a variációs optimalizálás elve és az approximációs séma. A népgazdasági szintű terv területi lebontására szolgál a területi kapcsolódások modellje.

A harmadik fejezetben a kísérleti többfokozatú modellt mutatják be a szerzők, amely háromszintű — vállalati, ágazati, népgazdasági — modell. A modell optimalizálási folyamata magában foglalja egyrészt a globális optimumkeresést, másrészt a lokális optimumkritérium paramétereinek fokozatos meghatározását approximációs módszerrel. Az approximációs séma konvergenviája különböző alakú lokális kritériumok esetében eltérő. Legjobbnak a kvadratikus alakú függvény mutatkozott, ekkor a konvergencia sebessége nagy és a rendszer az abszolút optimumpontba jut el.

A negyedik fejezet a hosszú távú népgazdasági terv több fokozatú modellrendszere kidolgozásának feltételeivel, főbb kérdéseivel foglalkozik. A terv időtávja 1990-ig tart, a megalapozási szakaszban használt makromodellek nagy aggregátumokban tartalmazzák a növekedés lehetséges variánsait. Itt összekapcsolják a fogyasztói kereslet, az ágazati kapcsolatok mérlege, a termelés fejlesztésének és területi telepítésének optimalizációs modelljeit.

A többfokozatú összekapcsolás során első lépésként az ágazati számítások készülnek el, ötéves időszakonkénti bontásban, majd az ágazati variánsokat az ágazatközi komplexum növekedési variánsaivá vonják össze, amelyeket az ágazatközi optimalizációs modellbe építenek be. Az ágazatközi modellbe explicit formában kerülnek be a beruházásokra és munkaerőforrásokra vonatkozó népgazdasági korlátok, ezek figyelembevételével az ágazatok fejlesztési variánsaira optimalizál a modell, a végtermék-kibocsátás maximalizálási kritériuma alapján. A kapott népgazdasági tervet az ötéves tervezés során lebontják az ágazati döntések szintjére, a lebontott értékeket az ágazati modellekbe bevíve megismétlik az ágazati optimalizálást, majd az ágazati értékeket az ágazatközi modellben felhasználva kialakulnak az ötéves terv számai.

Az ágazatközi modell felépítését és megoldási eljárását a könyv hetedik fejezete tartalmazza.

A hosszú távú terv előkészítésére használt makromodellek közé tartozik az ötödik fejezetben bemutatott, a termelés bővítésének és területi telepítésének egységes ágazati optimalizációs modellje. A modellcsaládot a klasszikus, egytermékes rögzített kapacitásválasztékú szállítási feladatból fejlesztették ki többtermékes, a megtermelt mennyiségeket változóként tartalmazó, feladattá: a ráfordítás-kibocsátás kapcsolatokat nemlineáris formában leíró feltételek bevezetésével. A megoldás során párhuzamosan határozódik meg a telephely, a megvalósítandó technológia-fajta, valamint az előállítandó termékek köre és mennyisége. Az általános szállítási feladat — amelynek együtthatórendszere szállítási és technológiai blokkra bontható — nemlineáris feltételeket is tartalmazó alakja matematikai meggondolások segítségével, valamint egyszerűsítő feltételezések bevezetésével linearizálható és jelenlegi számítástechnikai eszközökkel megoldható. Gyakorlati felhasználásra a modellcsalád kisebb modelljei kerültek, az általános, teljeskörű feladat kipróbálása kísérleti stádiumban van.

Az irányítás többfokozatú rendszerének közbülső lépcsőfoka a többágazatos komplexum, a rájuk vonatkozó optimalizálási modelleket találjuk a hatodik fejezetben. A többágazatos komplexum szintjén való tervezés nagy előnye, hogy nemcsak az ágazaton belüli, hanem ágazatok közötti kapcsolatokat is figyelembe vesz. A tervezés általános modellcsaládját úgy építik fel, hogy belőle az egyes, konkrét többágazatos komplexumok modellje levezethető legyen. Az általános modell legtöbb feltétele a termelés és felhasználás mérlegegyenlete, amelynek alapját a modell szállítási blokkja alkotja, a termelés és felhasználás közötti lehetséges szállítási kapcsolatokkal. A fejlesztés optimalizálását a modell technológiai blokkja segítségével végzik, erre a célra kialakított, részletesen ismertetett approximációs eljárással.

A nyolcadik fejezet a szélsőérték-feladatok megoldásánál alapvető jelentőségű Lagrange-függvény módosított alakjával és felhasználásával foglalkozik. A módosított Lagrange-függvény rendelkezik a klasszikus függvény tulajdonságával: az eredeti feladat megoldása helyettesíthető a hozzá tartozó módosított Lagrange-függvény nyeregpontjának megkeresésével; a klasszikushoz képest olyan előnyökkel rendelkezik, mint az iterációk meggyorsítása, valamint jól használható árakat is kap a felhasználó a modellek megoldásakor. A fejezet a függvény tulajdonságainak ismertetése mellett a nyeregpontok megkeresésére vonatkozó gradiens módszert is tartalmazza.

A könyv második részébe tartozó kilencedik fejezet a modellrendszer továbbfejlesztésével és alkalmazásával foglalkozik. Az eddigi lépésekben a többfokozatú rendszernek egyes elemeit alkalmazták, a teljes rendszerre csak kísérleti számítások állnak rendelkezésre. A komplex gyakorlati bevezetés első lépése lehetne a modellrendszer alkalmazása a távlati tervezésben. A szerző felsorolja mindazokat a nehézségeket és problémákat, amelyek a konkrét megvalósítás során felmerülhetnek.

A tizedik fejezet a dinamikus ágazatközi modellel és az ágazati árszintek meghatározásának problémáival foglalkozik. A modellek alapja az ágazati kapcsolatok mérlegének dinamikus alakja, amelyekhez esetenként különböző feltételek kapcsolódnak. A vizsgálat fő iránya a termékek optimális értékelése, az árak meghatározása, az ágazati kapcsolatok mérlegéhez kapcsolódó különböző pótlólagos feltételek segítségével.

A tizenegyedik fejezetben a területi tervezés jelenlegi modelljeit ismerteti a könyv, valamint a továbbfejlesztés lehetséges útjait. A jelenlegi modellek az ágazatközi modellekhez hasonló alapelvű, szimulációs jellegűek. A többkörzetes modellbe a szokásos mérlegfeltételek mellett szállítási feltételek is belépnek.

Nagyon alapos és részletes tárgyalásmódja, valamint az érintett témák érdekessége miatt ajánlhatjuk a könyvet a matematikai modellezéssel foglalkozó elméleti és gyakorlati szakembereknek. A modelleknek, a tervezésben felmerülő problémáknak, valamint a megoldási algoritmusoknak alapos és világos bemutatása mellett hiányzik a könyvből a gyakorlati alkalmazásról való részletes beszámoló, ami a gyakorlati szakemberek számára is megkönnyíthetné az eligazodást a rendszerben.

A magyar fordítás jó, a témában jártas magyar olvasó számára érthető, de sajnos a könyvből nem derül ki, hogy kinek a munkáját dicsérhetjük, mert nem tüntették fel a fordító nevét.

Simon Judit

Chikán Attila (szerk.): *Készletezési modellek.* Budapest 1983. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. 539 o.

A készletgazdálkodási rendszerek modellezése egyike az operációkutatás legjobban kidolgozott területeinek. A század eleji első modellek kidolgozása óta több százra tehető a különböző publikációkban megjelent matematikai készletmodellek száma, s ez a szám gyorsuló ütemben nő. Az eddig megjelent áttekintő jellegű munkák inkább szerzőik saját gondolatainak bemutatására helyezték a súlyt, s korántsem fogták át a készletmodellek egészét.

Chikán Attila és munkatársai arra vállalkoztak, hogy a szakirodalomból kiválasztott és feldolgozott 336 modell elemzése alapján tükröt tartanak a modellalkotók és felhasználó elé. Véleményem szerint ez a munka több szempontból is úttörő jellegűnek számít:

(1) A szerzők nem saját feltevéseikből (legyenek azok bármily megalapozottak is), hanem statisztikai adatbázisból kiindulva próbálják megadni a készletmodellek egy új osztályozását.

(2) A jelentősebb modellek szempontjából majdnem teljes körű feldolgozás felszínre hozhatja azokat a területeket, azokat a fehér foltokat, amelyek eddig a kutatás szempontjából elhanyagoltak voltak. Így a szerzők az általuk végzett munkára támaszkodva megalapozottabban jelölhetik ki a kutatások jövőbeni fő irányait.

(3) A szerzők egyik deklarált célja a gyakorlati alkalmazás elősegítése, a felhasználói igények figyelembevétele. Ezt a célt számítógépes modellkönyvtár létrehozásával kívánták elérni, amelyből a felhasználó az adott feltételrendszernek leginkább megfelelő modellt tudja kiválasztani.

E feladatok megoldása azonban nem képzelhető el olyan mutatószámrendszer (vagy kódrendszer) kialakítása nélkül, amelynek segítségével a különböző modellek jellemzőit mérni lehet, s így az összegyűjtött modellek kvantitatív elemzését el lehet végezni. Tudomásom szerint ez a könyv az első, amelyben a készletmodellek osztályozásának alapját a kidolgozott kódrendszer, illetve az ennek megfelelően végzett vizsgálatok adták.

A könyv két nagy részből áll. Az első, arányában kisebb rész elemző jellegű. Az első fejezet a készletmodellek, a modellezés hátterét tárgyalja. A második fejezet a termékszintű készletezési rendszer elemzését adja meg. A szerzők, szándékuk szerint, azt a láncszemet szerették volna megragadni, amely a valóságos problémákat, és a modelleket összeköti. Véleményem szerint ennek a feladatnak csak az első felét oldották meg, — de azt brilliáns módon.

A harmadik fejezet a készletmodellek fejlődésének történeti áttekintése. A negyedik fejezet tartalmazza a modellek elemzési módszerét, a statisztikai feldolgozásokhoz felhasznált kódrendszert. Ennek a kódrendszernek a kialakítása korántsem egyértelmű (nem is lehet az), de jelentőségét — úttörő volta mellett — az adja, hogy segítségével a modellek struktúrájáról többé-kevésbé ugyanazt az információt lehet nyerni, mint bármely más reálisan szóbajöhető kódrendszer változattal. Az ötödik fejezet a kódrendszer alapján a 336 modell átfogó statisztikai jellemzését adja meg. A hatodik fejezet célja a modellek gyakorlati felhasználásának számítástechnikai elősegítése.

A könyv második része a feldolgozott modellek tömör leírását tartalmazza, a kialakított osztályozás szerint csoportosításban. A munka nehézségéből és nagyságából adódóan az előzőekben felsorolt három feladat közül leginkább a mutatószámrendszer és az osztályozás tekinthető befejezettnek, míg a (2) és a (3) feladatnak az (1)-höz hasonló szintű megoldása még nem található meg a könyvben.

De enélkül is gondolatébresztő, új kutatási utakat kereső és azokon számos eredményt felmutató könyvet jelentetett meg a Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. Nemcsak a magyar szakirodalomban, hanem — a könyv iránti érdeklődésből ítélve — nemzetközileg is űrt töltött be, és remélhetőleg további kutatásoknak képezi az alapját.

Vastag Gyula

Köszönet a kötet lektorainak

A Szigma 1983. évfolyamához benyújtott cikkeket – a Szerkesztőség állandó munkatársain kívül – a következő külső munkatársak lektorálták:

Andorka Rudolf	Hunyadi László
Ábel István	Hüttl Antónia
Bárány Imre	Kádas Sándor
Berend Iván	Kelle Péter
Bródy András	Kozma Ferenc
Bugnics Richárd	Ligeti István
Chikán Attila	Mészáros Sándor
Cseh-Szombathy László	Nagy Csaba
Fényes Tamás	Patyi Károly
Forgó Ferenc	Rimler Judit
Füstös László	Simonovits András
Gerencsér László	Szalai Gyula
Getherné Simon Erzsébet	Virág Ildikó
Halabuk László	Ziermann Margit

Áldozatkész munkájukért ezúton is köszönetet mond a Szerkesztőség.

A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó és Nyomda főigazgatója
Műszaki szerkesztő: Sándor István
A kézirat a nyomdába érkezett: 1983. IX. 1. — Terjedelem: 8,4 (A/5) ív
84.12425. Akadémiai Kiadó és Nyomda, Budapest. — Felelős vezető: Hazai György

CONTENTS

BOOK REVIEWS

СОДЕРЖАНИЕ

О КНИГАХ

Ára: 20 Ft
Előfizetés egy évre: 80 Ft

INDEX: 26793
ISSN 0039—8128

TARTALOM

KÖNYVEKRŐL

1826

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST