SZIGMA

Matematikai közgazdasági folyóirat

A Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai-Közgazdasági Szakosztályának lapja

*

E szám szerzői:

BOD PÉTER, a közgazdaságtudományok doktora, az MTA Matematikai Kutató Intézet tudományos tanácsadója, FÜSTÖS LÁSZLÓ, az MTA Szociológiai Kutató Intézet tudományos munkatársa, HUNYADI LÁSZLÓ, az Országos Tervhivatal Tervgazdasági Intézete főelőadója, KELETI ANDRÁS, a Központi Statisztikai Hivatal főelőadója, KORNAI JÁNOS akadémikus, az MTA Közgazdaságtudományi Intézet tudományos tanácsadója, MESZÉNA GYÖRGY docens, az MKKE Matematikai és Számítástudományi Intézet osztályvezetője, MIHÁLYFFY LÁSZLÓ, az MTA KTI Ökonometriai Laboratóriuma tudományos munkatársa, dr. MOLNÁR SÁNDOR, a Központi Bányászati Fejlesztési Intézet osztályvezetője, dr. PONGRÁCZ TIBOR, a Pénzügyi Számítástechnikai Intézet főosztályvezetője, SIMONNÉ MOSOLYGÓ NÓRA, az Országos Tervhivatal Tervgazdasági Intézet főelőadója, SIMONOVITS ANDRÁS kandidátus, az MTA Közgazdaságtudományi Intézet tudományos munkatársa, A. E. STEENGE, Groeningen, Hollandia, dr. SZENTELEKI KÁROLY, a Kertészeti Egyetem adjunktusa, dr. SZIDAROVSZKY FERENC kandidátus, a Kertészeti Egyetem docense, dr. TÓTH JÓZSEF, a közgazdaságtudományok doktora, a debreceni Agrártudományi Egyetem rektora, VITA LÁSZLÓ, az Országos Tervhivatal Tervgazdasági Intézet főelőadója, JÖRGEN W. WEIBULL, Royal Institute of Technology, Stockholm

Szerkesztőség: Budapest XI., Budaörsi út 43–45.

Levélcím: 1502 Budapest, Pf. 262.

Terjeszti a Magyar Posta. Előfizethető bármely postahivatalnál, a kézbesítőknél a Posta hírlapüzleteiben és a Posta Központi Hírlap Irodáknál (PKHI 1900 Budapest, József nádor tér 1.) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a PKHI 215–96 162 pénzforgalmi jelzőszámára. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76 sz. alatti hírlapboltban

Előfizethető és példányonként megvásárolható: az AKADÉMIAI KIADÓ-nál, 1363 Budapest, Alkotmány u. 21. Telefon 111-010. Pénzforgalmi jelzőszámunk: 215–11488, és az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLT-ban, 1368 Budapest, Váci u. 22. Telefon: 185-612. Előfizetés díj egy évre: 80,–Ft

Külföldön terjeszti a KULTURA Külkereskedelmi Vállalat, H-1389 Budapest. Pf. 149

Mihályffy László—Simonovits András

A dinamikus input-output modell vezérelhetőségéről*

1. Bevezetés

Ebben a rövid dolgozatban egy elvi kérdést tisztázunk a dinamikus input-output modellel kapcsolatban, nevezetesen a modell vezérelhetőségének kérdését. Eredményünk érdekessége mindenekelőtt abban áll, hogy helyreigazít egy téves állítást, amely egy jónevű szerző alapműnek számító monográfiájában szerepel. Bár megfontolásaink csupa jólismert fogalomra épülnek, a teljesség kedvéért kiindulópontként felírjuk a dinamikus Leontief-modellt, és kimondjuk a vezérelhetőség definícióját; ezek birtokában már megfogalmazható dolgozatunk mondanivalója, miszerint a dinamikus input-output modell — bizonyos korlátozó feltételek hiányában — mindig vezérelhető.

Dolgozatunkban az időt diszkrét változónak fogjuk tekinteni; megjegyezzük azonban, hogy következtetéseink nagy része, s így mindenekelőtt a teljes vezérelhetőséggel kapcsolatos megállapításunk, minden nehézség nélkül átvihető arra az esetre, amikor az idő folytonos változó. Feltételezésünk — tehát diszkrét idő — mellett a dinamikus input-output modellt a következőképpen lehet felírni ([4], 145—151. oldal):

$$x_t = Ax_t + B(x_{t+1} - x_t) + c_t, \quad t = 0, 1, \ldots, T-1. \tag{1}$$

Itt a jelölések értelmezése a következő.

x_t az ágazatok bruttó kibocsátásának vektora a t időpontban; ha a népgazdaságnak n termelő ágazata van, akkor x_t n-dimenziós;

c_t a végső felhasználás n-dimenziós vektora a t időpontban, a beruházási célú kibocsátás nélkül);[1]

$A = (a_{ij})$ és $B = (b_{ij})$ a közvetlen ráfordítások, illetve a beruházások fajlagosainak $n \times n$-es mátrixa; a modell szempontjából ezeket időben állandóknak tekintjük.

Tekintsük mármost a következő dinamikus rendszert:

$$z_{t+1} - z_t = f(t, z_t, u_t), \quad t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

ahol t minden szóba jövő értéke mellett z_t és u_t valamely n-, illetve m-dimenziós euklideszi tér eleme, f pedig a teljes $(m + n + 1)$-dimenziós euklideszi téren

* A tanulmány korábbi változata előadásként hangzott el a X. Magyar Operációkutatási Konferencián, Debrecenben, 1980. szeptemberében.

[1] A továbbiakban a „végső felhasználás" kifejezést mindig ebben az értelemben fogjuk használni.

értelmezett és folytonos függvény. A (2) rendszer szempontjából a z_t és u_t vektorokat *állapotváltozónak*, illetve *vezérlő* (v. *szabályozó*) változónak nevezzük.

Definíció ([1], 70–78. oldal). A (2) rendszert *teljesen vezérelhetőnek* mondjuk, ha bármely z_0 *kezdeti állapothoz* és bármely $\bar{z}$ *végállapothoz* megadható olyan T természetes szám, valamint a vezérlő változók olyan $u_0, u_1, \ldots, u_{T-1}$ sorozata, amelyre (2) alapján $z_T = \bar{z}$.

Az (1) dinamikus input-output modellt, illetve ennek folytonos analogonját többen vizsgálták ([2], [3], [5], [6] stb.) szabályozáselméleti keretek között, amikoris a modell a szabályozni kívánt rendszer állapotegyenletének a szerepét játszotta; értelemszerűen az ágazati bruttó kibocsátások x_t vektora reprezentálta az állapotváltozót, a végső felhasználás c_t vektora pedig a szabályozó változót.[2] Az effajta vizsgálatokban természetesen vetődik fel a *vezérelhetőség* kérdése; a helyzetet látszólag az teszi bonyolulttá, hogy a definícióban szereplő (2) dinamikus rendszerrel szemben az (1) dinamikus input-output modell nem explicit, hanem implicit elsőrendű differenciaegyenlet-rendszer. *Masanao Aoki* amerikai professzor úgy találta ([1], 87. oldal), hogy amennyiben (1)-ből az $x_{t+1} - x_t$ növekményt nem lehet explicit módon kifejezni, más szóval: amikor a B beruházási mátrix *szinguláris*, akkor a dinamikus input-output modell nem vezérelhető. Mint arra már dolgozatunk elején is utaltunk, ez a megállapítás nem helytálló; a következőkben ezt fogjuk kimutatni.

2. A dinamikus input-output modell vezérlése

Az előzőekben felvetett problémával kapcsolatban első eredményünk a következő.

1. *Tétel.* Ha a dinamikus input-output modellben sem az x_t bruttó kibocsátás, sem a c_t végső felhasználás időbeli alakulásával kapcsolatban nincs semmi megszorítás, akkor a modell teljesen vezérelhető (természetesen továbbra is az x_t vektort tekintjük állapot-, a c_t vektort pedig szabályozó változónak).

Bizonyítás. Adott x_0 kezdeti- és $\bar{x}$ végállapot mellett válasszuk meg a $T \geqq 1$ természetes szám értékét tetszőlegesen, és ezután válasszuk az

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_T = \bar{x}$$

sorozat elemeit a végpontoktól eltekintve tetszőlegesen. Ekkor a szabályozó változók

$$c_t = x_t - Ax_t - B(x_{t+1} - x_t), \qquad t = 0, 1, \ldots, T-1 \tag{1}$$

összefüggéssel definiált sorozata a rendszert az adott kezdőpontból az adott végpontba viszi át, és ezzel állításunkat (valamint M. Aoki idézett megállapításának téves voltát) bizonyítottuk.

Eredményünk egyrészt majdnem triviális, másrészt tartalmi szempontból – az x_t trajektória valamint a szabályozó változó nagyfokú tetszőlegessége miatt

[2] Dolgozatunk keretein túlmutatna annak taglalása, hogy ez a felfogás helytálló-e vagy sem.

– nem sokatmondó. Ebben a vonatkozásban azonban eredményünk jelentős mértékben javítható, éspedig a következőképpen.

Vezessük be először a következő fogalmakat, illetve jelöléseket.

(a) Legyen $\bar{c}(\geqq 0)$ olyan adott n-dimenziós vektor, amelynél a c_t végső felhasználás a vezérlés folyamán soha sem vehet fel kisebb értéket (tehát $t = 0, 1, 2, \ldots$ esetén $c_t \geqq \bar{c}$);

(b) Legyen S azoknak a pozitív komponensű n-dimenziós x vektoroknak a halmaza, amelyekre $x > Ax + \bar{c}$.

Tetszőleges $x \in S$ vektort *megengedett* termelésnek fogunk nevezni; ez azt fejezi ki, hogy a termelés önfogyasztásának és a végső felhasználás minimumának biztosítása mellett van még lehetőség többletfogyasztásra, az export volumenének növelésére vagy felhalmozásra.

2. *Tétel.* Tegyük fel, hogy mind az x_0 kezdeti állapot, mind az $\bar{x}$ végállapot megengedett ($x_0, \bar{x} \in S$). Akkor van olyan T természetes szám, és van olyan $c_0 \geq \bar{c}, c_1 \geq \bar{c}, \ldots, c_{T-1} \geq \bar{c}$ vezérlés, amely az (1) modellt x_0-ból $\bar{x}$-ba átviszi, és emellett az x_t trajektória bármely t-re megengedett.

Bizonyítás. $x_0, \bar{x} \in S$ miatt választhatjuk T értékét úgy, hogy

$$x_0 - Ax_0 - \frac{1}{T} B(\bar{x} - x_0) \geq \bar{c} \text{ és } \bar{x} - A\bar{x} - \frac{1}{T} B(\bar{x} - x_0) \geq \bar{c} \tag{3}$$

teljesüljön. Rögzítsük T értékét, és legyen $t = 1, 2, \ldots, T$ mellett

$$x_t = x_0 + \frac{t}{T}(\bar{x} - x_0).$$

Ekkor egyrészt $x_T = \bar{x}$ és

$$x_{t+1} - x_t = \frac{1}{T}(\bar{x} - x_0)$$

minden (T – 1)-nél nem nagyobb t-re, másrészt, mivel bármely x_t a kezdő- és a végállapot konvex kombinációja, (3)-ból következik az

$$x_t - Ax_t - B(x_{t+1} - x_t) = x_t - Ax_t - \frac{1}{T} B(\bar{x} - x_0) \geq \bar{c} \tag{4}$$

egyenlőtlenség teljesülése is t minden szóba jövő értékére. Ily módon x_t minden t-re megengedett, és a (4) egyenlőség bal oldalával értelmezett c_t vezérlés kielégíti a $c_t \geq \bar{c}$ követelményt. Állításunkat ezzel igazoltuk.

Korollárium. A 2. tétel alapján egyszerű (bár számításigényes) eljárás adódik az alábbi diszkrét időoptimum-feladat megoldására:

$$x_t = Ax_t + B(x_{t+1} - x_t) + c_t, \tag{5a}$$

$$x_t \in S,\ t = 1, 2, \ldots, t^*, \tag{5b}$$

$$x_0 \text{ és } \bar{x} \text{ adott, } x_0, \bar{x} \in S, \text{ és } x_{t^*} = \bar{x}, \tag{5c}$$

$$c_t \geq \bar{c},\ t = 1, 2, \ldots, t^* - 1, \tag{5d}$$

$$t^* = \min!$$

Nyilvánvaló, hogy a 2. tétel bizonyításában szereplő T a t^* érték felső korlátja. t^* értékét 1-nek választva, el kell dönteni, hogy van-e az (5a)–(5d) feltételrendszernek megengedett megoldása. Ha igen, akkor az optimumfeladat megoldását a következő alakban kapjuk:

$$t^* = 1;\ x_1 = \bar{x},\ c_0 = x_0 - Ax_0 - B(x_1 - x_0);$$

ha nem, akkor t^* értékét növelni kell 1-gyel, és újból meg kell vizsgálni, hogy van-e (5a)–(5d)-nek megengedett megoldása. Vagy optimális megoldást kapunk $t^* = 2$ mellett, vagy újból növelnünk kell t^* értékét; ily módon a tekintett optimumfeladatot legfeljebb T számú LP feladat megoldására lehet visszavezetni.

(Beérkezett: 1981. március 3-án.)

IRODALOM

1. Aoki, M.: *Optimal control and system theory in dynamic economic analysis*, New York, 1976. North Holland Publishing Co.
2. Бекларян, Л. А.—Петров, А. А.—Тер-Крикоров, А. М.: Об одной линейной динамической модели производства. Экономика и математические методы, 14 (1978), 312—325.
3. Bródy, A.: The optimal and time-optimal path of economic growth. *Contributions to input-output techniques I.* Ed.: A. P. Carter, A. Bródy. Amsterdam—London, 1970. North Holland Publishing Co.
4. Leontief, W.: *Input-output economics.* New York, 1966. Oxford Univ. Press.
5. Szepesi Gy.—Székely B.: Optimális pályák egy szabályozott gazdasági rendszerben. *Szigma*, 4 (1971) 137—151.
6. Zsellér Gy.: Rögzítetlen végpontú lineáris „időoptimum" vezérlési probléma megoldása a Pontrjagin-féle maximumelv alapján. *Információ — Elektronika* 9 (1974) 210—216.

ON THE CONTROLLABILITY OF DYNAMIC INPUT-OUTPUT MODEL

If dynamic input-output model is conceived as a state equation of some control problem and sectoral gross outputs are considered as state variables, furthermore sectoral final consumption less investment are regarded as control variables, then the *model is completely controllable*, independently of whether the investment coefficient matrix is regular or singular. This result disproves a false statement by M. Aoki. In a control problem based on the dynamic input-output model values of both the state and the control variables may be selected in such a way that interpretable economic results are obtained.

ОБ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДИНАМИЧНОЙ МОДЕЛИ БАЛАНСА МЕЖОТРАСЛЕВЫХ СВЯЗЕЙ

Если динамичную модель баланса межотраслевых связей рассматриваем как уравнение состояния какой-либо контрольной задачи, переменными состояния возьмём валовые выпуски разных отраслей, а относящиеся к определённым отраслям величины конечного использования, уменьшенные величиной инвестиции, примем за переменные регулирования то *модель полностью управляема*, независимо от того, что матрица коэффициентов инвестиции регулярна или сингулярна. Этот результат опровергает одно ошибочное утверждение М. Аоки. В регулирования задаче, которую можно сконструировать на основе динамичной модели баланса межотраслевых связей, величины как переменных состояния, так и переменных регулирования можно выбрать таким образом, чтобы прийти к экономически обоснованному результату.

Kornai János — Jörgen W. Weibull

Paternalizmus, vevők piaca, eladók piaca[1,2]

1. Bevezetés

A nyugati irodalomban növekvő az érdeklődés a gazdaság nem-walrasi állapotai iránt. Az ehhez fűződő kutatásokat gyakran a „disequilibrium elmélet" névvel illetik. [Lásd pl.: *Clower* (1965), *Drèze* (1975), *Malinvaud* (1977), *Grandmont* (1977).] Kelet-Európában is fellépett egy ezekhez hasonló érdeklődési irány. [Lásd pl.: *Kornai* (1971, 1980).] A nyugati elemzők érdeklődésüket a túlkínálatra és a munkanélküliségre összpontosítják, keleti kollégáik pedig a túlkeresletre és a krónikus hiányhelyzetekre. A külön végzett munka csaknem két évtizede után sokan érzik úgy, hogy egy közös elméleti, fogalmi és formalizmusbeli keretre lenne szükség a két nézetrendszer tanulmányozásához és összehasonlító elemzéséhez. Cikkünk egy ilyen elemzési keret kialakítását szeretné elősegíteni.

A kifejtés során folyamatosan és a cikk utolsó részében külön is összevetjük nézeteinket a korábbi irodalommal, modellünk két fő vonására azonban már itt, a bevezetőben fel akarjuk hívni az olvasó figyelmét.

Először — legalábbis egy lépéssel — túl szeretnénk jutni az olyan szokásos gazdasági változók, mint a ráfordítás, kibocsátás, kereslet, kínálat, ár stb. formális kezelésén. Bevonunk az elemzésbe néhány, az *intézményi* szférába tartozó *jelenséget* is. Nevezetesen formalizálni szándékszunk az állam és a vállalat *paternalisztikus kapcsolatát*. A tőkés piacgazdaságban ez megjelenhet az államnak az állami és magánvállalatokkal való kapcsolatában. Az állam segítő módon beavatkozik, pl. támogatást adhat a pénzügyi nehézséggel küszködő vállalatoknak. Az ilyen viszony még intenzívebb egy tervgazdaság szocialista állama és állami tulajdonú vállalatai között. A paternalizmus sokrétű, komplex társadalmi viszony: itt csak egy oldalát ragadhatjuk meg, nevezetesen a vállalatoknak nyújtott állami támogatást.

Megközelítésünk másik alapvető jellemzője a gazdasági események *sztochasztikus* leírása. A ráfordítást szolgáló javak hozzáférhetőségét és a kibocsátás iránti keresletet rögzített eloszlású valószínűségi változónak tekintjük. Ezen eloszlások megfelelő specifikálásával jellemezhetjük, hogy milyen mértékben az eladók

[1] A cikk egy előzetes változatát a szerzők előadták Párizsban a disequilibrium elméletről és alkalmazásáról tartott francia—magyar szemináriumon. A szemináriumot a CEPREMAP, a Maison des Sciences de l'Homme és a Párizsi Egyetem I. szervezte 1982-ben. A cikket az angol nyelvű eredetiből *Szabó Judit* fordította.

[2] Mindkét szerző hálás az MTA Közgazdaságtudományi Intézetének, Jörgen W. Weibull pedig ezen kívül a Swedish Council for Research in the Humanities and Social Sciences szervezetének, a nekik nyújtott támogatásért. Értékes megjegyzéseikért köszönetüket fejezik ki *Lars-Göran Mattsson*-nak, *Lars-Gunnar Svensson*-nak és *Simonovits András*nak.

vagy a vevők piaca a vállalat környezete. Hasonlóképpen az állami támogatásokat is valószínűségi változókként kezeljük. Ezek eloszlása a paternalizmus fokát mutatja.

A kifejtés szerkezete a következő. Először bemutatjuk a sztochasztikus környezetben működő vállalat egyszerű modelljét. A 3. részben a vállalat eladási-, profit- és túlélési kilátásait a tiszta piac és a tiszta tervgazdaság szélsőséges eseteire elemezzük. A 4. rész tárgyalja a ,,vegyes'' gazdaságok egyfajta meghatározását és ennek geometriai illusztrációját. Míg a 3. és 4. részben az elemzés a vállalati (effektív) kereslet fogalmához kapcsolódik, az 5. rész a megelégedési kritérium fogalmával vezeti le a kereslet meghatározódását, és elemzi a paternalizmus hatását a vállalat keresleti viselkedésére. Végül, a 6. részben a modellt összehasonlítjuk a disequilibrium jelenségek néhány korábbi megközelítésével.

2. A modell

Egy adott környezetben működő vállalat egyszerű modelljét dolgozzuk ki. A vállalat ráfordításként egyetlen jószágot vásárol, és egyetlen jószágot termel kibocsátásul. Rendelkezhet kiinduló ráfordítás-, kibocsátás- és pénzkészletekkel. Tevékenységét egy adott időszakra tekintjük át, ily módon a modell statikus. A környezet sztochasztikus, és meghatározza a vállalat lehetőségeit a ráfordítási jószág vásárlására, a kibocsátás eladására, valamint arra, hogy támogatást kapjon.

Mindez a következőképpen zajlik le. Először a vállalat jelzi x^d *(effektív) keresletét* a ráfordítási jószágra. E jószágot — kívülről rögzített w áron — vagy a piacon lehet megkapni, vagy egy kiutaló szervnél. A vállalat x mennyiséget kap a jószágból, mely x a keresett mennyiségtől függő eloszlású valószínűségi változó. Másodszor, a vállalat meghatározza kibocsátásának minőségét, amelyet q-val jelölünk. A jobb minőségű kibocsátás növeli az eladás esélyeit, de egy adott mennyiség előállításához több ráfordítás kell, mint ha a rosszabb minőségűt bocsátaná ki. A kibocsátás mennyiségét így x és q határozza meg, a vállalat termelési függvényének megfelelően. Az $y^s = f(x, q)$ mennyiségű kibocsátást megtermelvén, ezt a vállalat a p (nem feltétlenül kívülről rögzített) egységáron adja el.[3] Az *összes eladást* az y valószínűségi változóval jellemezzük, amelynek valószínűségeloszlása az y^s, p és q változóktól függ. Az ebből származó *bruttó nyereséget* a $\pi = py - wx$ véletlen változó definiálja. (Az induló ráfordítás-, kibocsátás-, ill. pénzkészletekhez tehát már nem fűződnek bevételek vagy kiadások.) A vizsgált időszakban a harmadik, és egyben utolsó lépés a vállalat erőfeszítése arra, hogy támogatást kapjon. Itt is sztochasztikus leírást alkalmazunk: a kapott támogatás összegét a bruttó nyereségtől függő r valószínűségi változó képviseli. Így jutunk azután a *nettó nyereség* $\tilde{\pi} = \pi + r$ valószínűségi változójához.

Ezután a fenti verbális áttekintés formalizálása van soron. A formalizálás középpontjában álló mechanizmus a *rövidebb oldal elvének* (vagy ahogyan néha nevezik: a min-feltételnek) *egy sztochasztikus, mikroszintű változata* lesz. Ezt az

[3] Egyenértékű ezzel, ha y^s-et is és q-t is kibocsátási változónak tekintjük, és ennek megfelelően az $(y^s, q) \in T(x)$-et írjuk fel, ahol $T(x)$ az x mennyiséghez kapcsolt termelési lehetőségek transzformációs görbéje. A fenti formalizmus azonban kényelmesebbnek tűnt számunkra.

analitikusan leegyszerűsítő mechanizmust alkalmazzuk mind a három esetben, amikor a vállalat és környezete egymással – sztochasztikus módon – kapcsolatba lép. Hasznosnak bizonyulhat tehát, ha először általános módon – modellünktől függetlenül – mutatjuk be ezt a mechanizmust.

Tekintsünk ezért meg egy boltot, ahol egyetlen árufajta eladása zajlik, az ω napon. Kora reggel szállítás van, a bolt $y(\omega)$ árukészlettel nyit. Az eladás addig folyik, amíg a készlet tart, vagy az üzlet be nem zár éjszakára. Legyen $x(\omega)$ a vevők által igényelt összes mennyiség, $z(\omega)$ pedig az eladott mennyiség. Így tehát $z(\omega) = \min \{x(\omega), y(\omega)\}$, valamennyi ω-ra. Másképpen szólva: a rövidebb oldal elve determinisztikusan érvényesül szubmikro szinten (t. i. az egyes napokon), miközben mikroszinten nem érvényes (t. i. az egyes napok átlagát véve). Az átlagos eladás általában alatta van mind az átlagos keresletnek, mind az átlagos kínálatnak:[4] $E(z) \leqq \min \{E(x), E(y)\}$.

A sztochasztikus mikroszintű rövidebb oldal szabályát ismerve, most már fel tudjuk állítani modellünket.

Először is legyenek P és Q a nem-negatív valós számok R_+ halmazának részhalmazai, és legyen $p \in P$, $q \in Q$ és x^d, $w \in R_+$. Legyen f: $R_+^2 \to R_+$ kétszer differenciálható függvény. Tovább menve: legyen (Ω, M, μ) egy valószínűségi tér, amelyen definiálva vannak az $\bar{x}$, $\bar{y}$ és $\bar{r}$ nem-negatív kiterjesztett értékű valószínűségi változók, melyek eloszlási függvényei F, G és H. E három valószínűségi változó játssza majd az input-vásárlás, az output eladás és a támogatások *sztochasztikus adagolási változó*jának szerepét.[5]

Másodszor, minden $\omega \in \Omega$ esetben legyen

$$x(\omega) = \min \{x^d, \bar{x}(\omega)\}, \tag{1}$$

$$y^s(\omega) = f(x(\omega), q), \tag{2}$$

$$y(\omega) = \min\{\bar{y}(\omega), y^s(\omega)\}, \tag{3}$$

$$\pi(\omega) = py(\omega) - wx(\omega), \tag{4}$$

$$r(\omega) = \min\{\pi_-(\omega), \bar{r}(\omega)\}, \tag{5}$$

$$\tilde{\pi}(\omega) = \pi(\omega) + r(\omega), \tag{6}$$

ahol π_- a π negatív része, azaz $\pi_-(\omega) = \max\{0, -\pi(\omega)\}$, $\forall \omega \in \Omega$.[6]

Ezen egyenletek közül csak az (5)-ről nem beszéltünk korábban. Ez azt mondja ki a támogatásokról, hogy nem-negatívak (azaz nincsenek adók), csak veszteség esetén kaphatók ($\pi(\omega) < 0$), és sohasem haladják meg a veszteség mértékét.

[4] Az itt alkalmazott sztochasztikus rövidebb oldal szabályát használta *Fair* és *Jaffee* (1972) a makro szintre. *Muellbauer* (1980) lényegében ugyanezt a makroszintű mechanizmust alkalmazza, *Kooiman* és *Kloek* (1980) pedig az ökonometriai becslés módszereit tárgyalja.

[5] Azaz $\bar{x}$, $\bar{y}$ és $\bar{r}$ M-mérhető leképezések Ω-ból $\bar{R}_+ = [0, +\infty]$-be úgy, hogy $\mu(\{\bar{x} \leq \alpha\}) = F(\alpha) \forall \alpha \in \bar{R}_+$ és így tovább. Ebből következik, hogy F, G és H nem-csökkenő, jobbról folytonos leképezései az $\bar{R}_+$-nek a $[0,1]$ szakaszba, $F(\infty) = G(\infty) = H(\infty) = 1$ mellett.

[6] Innen következik, hogy az adott valószínűségi térben valamennyi változó jól definiált valószínűségi változó (emlékeztetünk rá, hogy f feltételezésünk szerint kétszer differenciálható, tehát szükségképpen folytonos).

Ezen a ponton összehasonlítást tehetünk néhány létező modellel. Nyilvánvaló, hogy a tökéletes verseny körülményei között működő vállalat szokásos determinisztikus, neoklasszikus modellje speciális esetként adódik, amelyben p kívülről rögzített, $\bar{x}(\omega) = \bar{y}(\omega) = +\infty$ és $\bar{r}(\omega) = 0$, $\forall\omega\in\Omega$ esetén. Továbbá, abban a speciális esetben, amikor $\bar{x}$ konstans, az (1) egyenlet a szokásos determinisztikus kiutalási modellek elosztási szabályává egyszerűsödik, lásd: *Drèze* (1975) és *Benassy* (1975). Végül megjegyezhető, hogy a *Svensson* (1980)-ban szereplő sztochasztikus kiutalási séma ama speciális esetként azonosítható, amelyben $\bar{x}$ értékkészlete csak két pontot tartalmaz: egy valós számot és a végtelent.

A következő elemzésben feltételezzük, hogy f és G kielégítik az alábbi két feltételt:[7]

A1. $f'_x > 0, f''_x > 0, f'_q < 0$, és $\lim_{x\to\infty} f'_x = 0$,

A2. G-nek p és q a paraméterei, és G pontszerűen nem-csökkenő p-ben, nem-növekvő q-ban.

Más szóval, a termelési függvény a ráfordítás mennyiségének növekvő, a kibocsátás minőségének pedig csökkenő függvénye. A ráfordítások határtermelékenysége csökkenő és 0-hoz tart, ha a ráfordítás mennyisége a végtelenhez tart. Az árcsökkenés vagy a minőség javulása növeli vagy változatlanul hagyja az eladási esélyeket. Vegyük észre, hogy a kiinduló ráfordítási és kibocsátási készletek az f tulajdonságaiban már benne foglaltatnak.[8]

A modell formális leírásával elkészülve, most már eljuthatunk a vállalati teljesítmény-mutatók, x, y, π és $\tilde{\pi}$ valószínűségeloszlásának kifejezéséhez. Legyenek Φ_x, Φ_y, Φ_π és $\Phi_{\tilde{\pi}}$ a megfelelő eloszlásfüggvények jelölései, ekkor:[9]

$$\Phi_x(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha), & \text{ha} \quad \alpha < x^d \\ 1, & \text{ha} \quad \alpha \geqq x^d \end{cases} \tag{7}$$

$$\Phi_y(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha) + (1 - G(\alpha))F(f_q^{-1}(\alpha)), & \text{ha} \quad \alpha < f(x^d, q) \\ 1, & \text{ha} \quad \alpha \geqq f(x^d, q), \end{cases} \tag{8}$$

ahol f_q^{-1} jelöli a termelési függvény inverzét egy adott minőség mellett (azaz $f(f_q^{-1}(\beta), q) = \beta, \forall\beta$). Továbbá

$$\Phi_\pi(\alpha) = \mu(\{pf(x, q) - wx \leqq \alpha\}) + \int_{[0, x^d]} I_{\{pf(u,q) - wu > \alpha\}}\, G\left(\frac{wu + \alpha}{p}\right) dF(u) +$$

$$+ \begin{cases} G\left(\dfrac{wx^d + \alpha}{p}\right)(1 - F(x^d)), & \text{ha } \alpha < pf(x^d, q) - wx^d \\ 0, & \text{ha } \alpha \geqq pf(x^d, q) - wx^d \end{cases} \tag{9}$$

[7] f'_x és f'_q az f első parciális deriváltjait jelölik, x és q szerint f''_x pedig f második parciális deriváltja x szerint.

[8] Legyenek x_0 és y^s_0 a kiinduló ráfordítási és kibocsátási készletek, és tegyük fel, hogy $y^s = y^s_0 + g(x_0 + x, q)$ valamely „szokásos" g termelési függvény mellett, ahol $g(0, q) = 0$. Ezután definiáljuk az $f(x, q) = y^s_0 + g(x_0 + x, q)$ függvényt.

[9] A levezetések a cikk végén lévő Függelékben találhatók meg.

és

$$\Phi_{\tilde{\pi}}(\alpha) = \begin{cases} \int\limits_0^\infty \Phi_\pi(\alpha - u)dH(u), & \text{ha } \alpha < 0 \\ \Phi_\pi(\alpha), & \text{ha } \alpha \geqq 0, \end{cases} \tag{10}$$

ahol I_A szolgál egy A halmaz indikátor függvényének jelöléséül, (azaz $I_A = 1$ az A halmazon, és 0 A-n kívül).

A következőkben tanulmányozni fogjuk a vállalat különböző környezetek melletti kilátásait. Ebből a célból kényelmes az *E környezetet* az (F, G, H, P, w) ötösként definiálni. Ennek megfelelően azt mondjuk, hogy egy vállalat *erőforrás korlátja (kereslet korlátja) keményebb* az E_1 környezetben mint az E_2-ben, ha $F_1 > F_2$, $(G_1 > G_2)$. Hasonlóan a *paternalizmus foka* E_1-ben nagyobb, mint E_2-ben, ha $H_1 < H_2$.[10]

Végül megjegyezzük, hogy az F, G és H eloszlásfüggvények bizonyos mértékig a makro környezetet jelentik a vállalat működéséhez. Ebben az értelemben modellünk közvetlen kapcsolatot létesít a mikro-elemzés és a makroszint között.

3. Tiszta piacgazdaság és tiszta tervgazdaság[11]

Cikkünk e részét két olyan környezettípusnak szenteljük, amelyek a fent bemutatott modell határesetei. Az első környezettípusban a vállalatok nehézségek nélkül vásárolhatnak ráfordítási javakat az adott w áron, ugyanakkor nincs mód arra, hogy támogatást kapjanak. A másik környezettípusban a vállalat nehézségek nélkül el tudja adni kibocsátását a kívülről rögzített p áron és esetleges veszteségeit támogatásokkal mindig kiegyenlítik. A környezetek e két típusát két valódi gazdasági környezetnek, a piacgazdaság (állami védelem nélküli) magánszektorának, valamint a hagyományos, reform előtti tervgazdaság állami tulajdonú szektorának absztrakt leírásaként tekinthetjük.

Pontosabban, az E környezetet *M1-környezet*nek nevezzük, ha $P = R_+$, $F = 0$ R_+-on, és $H = 1$. Ezeket az F-re és H-ra vonatkozó feltételeket más ekvivalens módon is megadhatjuk: $x = x^d$ (majdnem mindenütt [m. m.]) és $\bar{r} = 0$ (m. m.).

Megjegyezhetjük, hogy az $M1$-környezet ezen definíciója speciális esetként magában foglalja a kibocsátásának valamennyi minősége mellett tökéletes verseny-piacon működő vállalat standard, determinisztikus modelljét. Ennek belátásához megjegyezzük, hogy a verseny feltevése egy olyan egyensúlyi piaci ár — $p^*(q)$ — létezését hozza magával valamennyi $q \in Q$ minőségre, amelynél magasabb áron semennyi sem adható el a q minőségű termékből, ugyanakkor a $p^*(q)$-t meg nem haladó áron bármennyi eladható belőle. Modellünk fogalmaival:

$$G = \begin{cases} 1 \; R_+\text{-on}, & \text{ha } (p, q) > (p^*(q), q) \\ 0 \; R_+\text{-on}, & \text{ha } (p, q) \leqq (p^*(q), q) \end{cases}$$

[10] A javasolt rendezések nyilvánvalóan csak parciálisak; sok esetben sem $F_1 > F_2$, sem $F_1 < F_2$ nem áll fenn stb.

[11] Ebben és a következő részben eltekintünk néhány szemponttól, amelyek pedig sok esetben lényeges mozgatórugói a közösségi szektornak. Ilyenek: az elosztási hatások, a közösségi javak szolgáltatása és a vevők védelme az eladók manipulációival szemben.

Ennek megfelelően a vállalat adottnak veszi a p^* árrendszert, és egy x^d és q választás $\pi = p^*(q)f(x^d, q) - wx^d$ (m. m.) bruttó nyereséget eredményez. Ily módon a tökéletes verseny környezete az $M1$-környezet egy speciális fajtája, amelyet parametrikusan szakadásos G eloszlási függvény jellemez az általános G eloszlásfüggvény helyett.[12]

Visszatérve az $M1$-környezet sokkal általánosabb esetéhez, az eladások és a (nettó) nyereség eloszlásfüggvényeire az alábbi kifejezéseket nyerhetjük (vö. a (8) és (9) egyenlőségekkel):

$$\Phi_y(\alpha) = \begin{cases} G(\alpha), & \text{ha} \quad \alpha < f(x^d, q) \\ 1, & \text{ha} \quad \alpha \geq f(x^d, q) \end{cases} \tag{11}$$

$$\Phi_{\tilde{\pi}}(\alpha) = \begin{cases} G\left(\dfrac{\alpha + wx^d}{p}\right), & \text{ha} \quad \alpha < pf(x^d, q) - wx^d \\ 1, & \text{ha} \quad \alpha \geq pf(x^d, q) - wx^d. \end{cases} \tag{12}$$

Mielőtt megtárgyalnánk ezen egyenletek közgazdasági tartalmát, definiáljuk a tiszta tervgazdaságot vagy $P1$-*környezetet*. Ez olyan E környezet, amelyben $\dim P = 1, G \equiv 0$ az R_+ halmazon $\forall q \in Q$ esetén, és $H \equiv 0$ az R_+-on. Másképpen kifejezve: $P = \{p\}$ valamely $p \in R_+$-ra, $y = y^s$ (m. m.) és $r = \pi_-$ (m. m.). Tipikus, hogy a p árat egy állami szerv (az „árhivatal") határozza meg, a vállalatok hatókörén kívül.[13]

A (8)–(10) egyenlőségekből azonnal láthatjuk, hogy

$$\Phi_y(\alpha) = \begin{cases} F(f_q^{-1}(\alpha)), & \text{ha} \quad \alpha < f(x^d, q) \\ 1, & \text{ha} \quad \alpha \geq f(x^d, q) \end{cases} \tag{13}$$

$$\Phi_{\tilde{\pi}}(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{ha } \alpha < 0 \\ \int\limits_{[0, x^d]} I_{\{pf(u,q) - wu \leq \alpha\}} \, dF(u), & \text{ha } 0 \leq \alpha < pf(x^d, q) - wx^d \\ \int\limits_{[0, x^d]} I_{\{pf(u,q) - wu \leq \alpha\}} \, dF(u) + 1 - F(x^d) & \text{ha } \alpha \geq pf(x^d, q) - wx^d. \end{cases} \tag{14}$$

Definiálván az $M1$- és $P1$-környezeteket, most már hozzáláthatunk ahhoz, hogy elemezzük a vállalat x^d, q, valamint p választásának hatását az eladási kilátásokra és a nettó nyereségre (emlékeztetünk rá, hogy a P-környezetben a vállalatnak p-t tekintve csak egy „választása" van).

Ebből a célból kényelmesnek látszik azt mondani, hogy az eladási (vagy nettó nyereség) kilátások *egyöntetűen javulók vagy rosszabbodók* egy adott döntési változóra nézve, ha Φ_y (vagy Φ_π) pontszerűen nem-növekvő (vagy nem-csökkenő) az illető döntési változóban. Ha valamely kilátás valamely döntési változóra nézve egyöntetűen javuló vagy rosszabbodó, akkor arról azt mondjuk, hogy az illető változóban *monoton*.

[12] Ebből (és csakis ebből) a szempontból modellünk hasonlít a hasznosság valószinüségi modelljeihez, amelyek feloldják a hasznosságok szakadásos jellegét a standard neoklasszikus fogyasztási modellben.

[13] Ezzel szemben a valóságos tervgazdaságban egyes állami vállalatok természetesen befolyással lehetnek áraik meghatározására.

1. észrevétel: Az eladási kilátások mindkét definiált környezetben x^d-ben egyöntetűen javulók. Az $M1$-környezetben p-ben egyöntetűen rosszabbodók, q-ban pedig nem szükségképpen monoton viselkedésűek. A $P1$-környezetben q-ban egyöntetűen rosszabbodók.

(Ezeknek és a további észrevételeknek a bizonyítása a Függelékben található.) Ezek után tekintsük a (nettó) nyereség kilátásokat. Jelölje $\hat{x}(p,q)$ az x-nek azt az egyetlen értékét, amelyben a $v(x) = pf(x,q) - wx$ potenciális nyereség-függvény p és q adott értéke mellett eléri a maximumát.[14]

2. észrevétel: Az $M1$-környezetben a (nettó) nyereség-kilátások nem viselkednek szükségképp monoton módon x^d-ben, ha $x^d < \hat{x}(p, q)$, viszont $x^d > \hat{x}(p, q)$ esetén egyöntetűen romlók. Nem szükségképpen monotonok továbbá p-ben és q-ban sem. $P1$-környezetben $x^d < \hat{x}(p,q)$ esetén a nettó nyereség-kilátások x^d-ben egyöntetűen javulók, $x^d > \hat{x}(p,q)$ esetén x^d-ben egyöntetűen romlók, q-ban pedig mindvégig egyöntetűen romlók.

Mit mondhatunk a túlélési esélyekről a két környezetben? A valódi piacgazdaságokat és tervgazdaságokat nézve éles különbség mutatkozik: miközben a piacgazdaság magánszektorában sok vállalat túlélése bizonytalan, a tervgazdaság állami szektorában többé-kevésbé biztosított a vállalatok túlélése.[15] Egy vállalat (vagy legalábbis annak vezetése) számára a túlélés általában sok tényezőtől függ, ide tartoznak termelési teljesítménye, eladásai és (nettó) nyeresége. Az alábbiakban egy egyszerű túlélési kritériumot tanulmányozunk modellünk keretein belül. Ez a kritérium megköveteli, hogy a vállalat se *eladási kudarcot, se nettó nyereség kudarcot ne szenvedjen*, abban az értelemben, hogy y és $\tilde{\pi}$ meg kell, hogy haladják a δ_1 és δ_2 előre megadott küszöbértékeket. A vállalat *túlélése* akkor és csak akkor *biztosított*, ha mindkét feltételt teljesíti.

Vegyük észre, hogy δ_1 magában foglal egy indirekt követelményt a termelésre nézve is, és, hogy ez $P1$-környezetben az y^s termelésre vonatkozó követelményre egyszerűsödik. Hasonlóképpen a (nettó) nyereségfeltétel úgy is tekinthető, mint a záró pénzkészletre vonatkozó feltétel, hiszen, ha az induló pénzkészlet m_0, akkor a záró $\tilde{\pi} + m_0$.

Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy $\delta_2 \leqq 0$ és a túlélés két oldalát külön vizsgáljuk:

3. észrevétel: Mindkét környezetben bizonyos az olyan (x^d, q) eladási kudarca, amelyre $f(x^d, q) \leqq \delta_1$. Az (x^d, q) többi választásánál az eladási kudarc valószínűsége független x^d-től és $M1$-környezetben ($P1$-környezetben) q-ban nem-növekvő (nem-csökkenő). $M1$-környezetben bizonyos az olyan (x^d, q) nyereségének kudarca, amelyre $pf(x^d, q) - wx^d \leqq \delta_2$. Az (x^d, q) többi választásánál x^d-ben nem-csökkenő, és q-ban nem-növekvő. $P1$-környezetben nem fordulhat elő (nettó) nyereség kudarc.

Ily módon a túlélési törekvés $M1$-környezetben a ráfordítási javak iránti mérsékelt keresletet és a kibocsátás jó minőségét sugallja. A másik oldalon, $P1$-környezetben ugyanez a törekvés a ráfordítási kereslet számára csak egy alsó korlátot, a kibocsátás számára pedig rossz minőséget sugall. $P1$-környezetben tehát a túlélési törekvés nem fékezi le az „expanziós kényszert" és ennélfogva a ráfordítási javak iránti kereslet majdnem kielégíthetetlen lesz.[16]

[14] Az A1. feltevés szerint a $v : R_+ \to R$ függvény folytonos és szigorúan konkáv.
[15] Lásd: *Kornai* (1980), 13. és 22. fejezet.
[16] Vesd össze *Kornai* (1980) 3., 4. és 9. fejezetével.

1. táblázat

	x^d		q	
	M1–	*P1–*	*M1–*	*P1–*
	környezet			
eladások	javuló	javuló	bizonytalan	romló
nettó nyereség	bizonytalan/romló	javuló/romló	bizonytalan	romló
túlélés	romló	javuló	javuló	romló

Az 1. táblázatban összefoglaljuk az $M1$ és $P1$-környezetekről tehető kvalitatív észrevételeket. Az „egyöntetűen javuló kilátások"-at itt a „javuló" jelzővel illetjük, az „egyöntetűen romló kilátások" helyett a „romló" kifejezés áll, a „nem szükségképpen monoton" helyett pedig a „bizonytalan". A második sorban az elválasztójelek az $x^d \leq \hat{x}(p, q)$ és $x^d > \hat{x}(p, q)$ tartományokat választják el.

Végezetül rövid megjegyzést teszünk arról, a vállalat kilátásai hogyan függenek exogén jellemzőitől. Modellünkben a vállalatot pusztán a termelési függvényével jellemeztük (amely magában foglalta induló árukészletét is), és a (11)–(14) egyenlőségekből azonnal látszik, hogy valamennyi kilátás, a túlélést is beleértve, mindkét típusú környezetben f-ben egyöntetűen javuló (az f függvények kanonikus rendezését tekintve). Ugyanakkor a valódi tervgazdaságokban alapvető jelentőségűek a személyes kapcsolatok a vállalat és az állami szervek között. Így egy olyan vállalat, amely jó kapcsolatokkal rendelkezik a ráfordítási javakat elosztó csatornában, kedvező F eloszlásfüggvénnyel fog rendelkezni, egy olyan vállalat pedig, amelynek a támogatásokat elosztó szervvel vannak kapcsolatai, kedvező H eloszlásfüggvénnyel.[17]

4. „Vegyes" gazdasági rendszerek

Az előző részben két olyan gazdasági környezetet tárgyaltunk bizonyos részletességgel, amelyek határesetek, és amelyek hivatkozási alapul szolgálhatnak a piacgazdaságok (az állami védelmen kívül eső) magánszektorának és a tervgazdaságok állami szektorának összehasonlításakor. Az alábbiakban a tárgyalást kiterjesztjük e kétfajta gazdaság más szektoraira is, mégpedig egy osztályozási séma és egy geometriai ábrázolás segítségével.

Piacgazdaságokra a környezet négy típusát különböztetjük meg. A négynek közös vonása, hogy a ráfordítási jószág megvásárlása az adott w áron nem ütközik nehézségbe, azaz $F = 0$ az R_+ halmazon. A *védelmen kívüli magánszektor*ban ($=$ $M1$-környezet) a vállalatnak nincs lehetősége arra, hogy támogatást kapjon ($H = 1$), míg a *védett magánszektor*ban van ilyen lehetőség ($0 < H < 1$). *Johnston* (1975), valamint *Bacon–Eltis* (1976) műveit követve hasznos lehet a közösségi szektort is szétosztani, egyik része az, amely piaci javakat termel (piaci áron), a másik pedig nem-piaci javakat (kívülről rögzített, alacsony áron).[18] Mindkét alszektorban adnak támogatást ($H = 0$ az R_+-on), a különb-

[17] Pontosan fölírva: $F_1(H_1)$ kedvezőbb, mint $F_2(H_2)$, ha $F_1 < F_2$, $(H_1 < H_2)$.

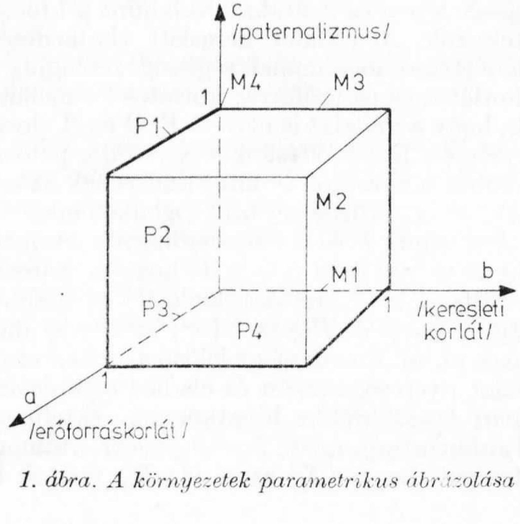
[18] Valójában *Johnston* és *Bacon-Eltis* az egész gazdaságot osztják szét két részre: az egyik az, amelyik piaci javakat termel (ide sorolják a magánszektort és a közösségi szektor egyes részeit), és a másik, amely nem piaci javakat (a közösségi szektor egy része).

ség abban áll, hogy a *piaci közösségi* szektorban az eladási feltételek hasonlóak a magánvállalatokéhoz, míg a *nem-piaci közösségi* szektorban az eladási feltételek hasonlóak a P-környezet vállalataiéhoz: $G = 0$ valamennyi $q \in Q$-ra az adott p ár mellett.

Ugyanígy a tervgazdasági környezeteket is négy csoportra oszthatjuk. Az első háromban, azaz az *állami tulajdonú szektor*ban ($= P1$-környezet), a *szövetkezeti szektor*ban és a *szabályozott magánszektor*ban, az összes kibocsátást el lehet adni az adminisztratív módon szabályozott áron: $G = 0$ az R_+ halmazon, valamennyi $q \in Q$ esetén. A támogatásban részesül az állami tulajdonú szektor mindig ($H = 0$ az R_+-on), esetenként a szövetkezeti szektor ($0 < H < 1$), míg gyakorlatilag sohasem jutnak hozzá a magánvállalatok ($H = 1$). A negyedik szektorban, a *szabályozáson kívüli magánszektor*ban az árak többé-kevésbé szabadok, az elosztás feltételei és a támogatások lehetőségei pedig hasonlóak a piacgazdaság védelmen kívüli magánszektoráéhoz.

Ezután geometriai illusztrációt adunk a környezet három oldalára, F-re, G-re és H-ra, egy olyan vállalat szemszögéből, amely már megválasztotta kibocsátásának p árát és q minőségét. Pontosabban, tekintjük az (F_a, G_b, H_c) hármasok egy családját, ahol mindhárom paraméter az egységintervallumban vesz fel értékeket. Feltételezzük, hogy F_a a-ban egyöntetűen növekvő, miközben $F_0 = 0$ az R_+-on és $F_1 = 1$. Az a paramétert ezért *erőforráskorlát paraméter*nek nevezzük. Hasonlóan, G_b b-ben egyöntetűen növekvő, miközben $G_0 = 0$ az R_+-on és $G_1 = 1$; b-t hívjuk ezért *keresleti korlát paraméter*nek. Végül H_c c-ben egyöntetűen növekvő, miközben $H_0 = 1$ és $H_1 = 0$ az R_+-on, c-re a *paternalizmus paraméter*eként hivatkozunk majd. Összegezve: a családhoz tartozó valamelyik környezetet a háromdimenziós egységkocka egy (a, b, c) pontjaként ábrázolhatjuk, (lásd az 1. ábrát.)

A 2. táblázat jelölési rendszeréből nyilvánvaló módon leolvasható, hogy a környezetek négy típusa, $M1$, $M3$, $P1$ és $P3$ a kocka egy-egy éle. Továbbá, az $M2$ és $P2$ típusú környezetek az $M1$ és $M3$, illetve a $P1$ és $P3$ által kifeszített sík pontjai. Az $M4$-környezet a $P1$ és $M3$ élek metszésében levő sarok, és végül a $P4$ típusú környezetek az $M1$ és $P3$ által kifeszített alsó lapon levő pontok.



1. ábra. A környezetek parametrikus ábrázolása

2. táblázat

A környezetek nyolc típusa

	F	G	H	ár
P i a c g a z d a s á g :				
védelmen kívüli magán (M1)	0		1	rugalmas
védett magán (M2)	0		(0,1)	rugalmas
piaci kibocsátású közösségi (M3)	0		0	rugalmas
nem-piaci kibocsátású közösségi (M4)	0	0	0	rögzített
T e r v g a z d a s á g :				
állami tulajdonú (P1)		0	0	rögzített
szövetkezeti (P2)		0	(0,1)	rögzített
szabályozott magán (P3)		0	1	rögzített
szabályozáson kívüli magán (P4)			1	rugalmas

Koordináta rendszerünk origója a tökéletes verseny hagyományos, determinisztikus környezete: itt a vállalat előtt nem áll sem vásárlói, sem eladási korlát, és támogatás sincs.

A megelőző részben tanulmányoztuk a vállalati kilátások néhány vonását az $M1$ és $P1$ éleken, és kimondtuk a közöttük észlelhető minőségi különbségeket. A vállalatok viselkedésében vannak tehát minőségi különbségek. Izgalmas kérdés, hogy milyen hatással van a paternalizmus foka a vállalatok viselkedésére, különösképpen az, hogy milyen hatást gyakorol a vállalatok x^d effektív keresletére. Világos azonban, hogy az ilyen és az ehhez hasonló kérdések elemzése megköveteli, hogy viselkedési hipotézist vezessünk be a vállalati döntésekre.

5. Paternalizmus és a keresleti viselkedés

Az alábbiakban azt nézzük meg, hogy milyen hatást gyakorol a paternalizmus a vállalatnak a ráfordításul szolgáló termék iránti x^d effektív keresletére. Ebben az összefüggésben a p és w árakat, valamint a kibocsátás q minőségét rögzítettnek feltételezzük. A vállalat keresleti viselkedését a megelégedési kritérium (vö. :*Simon* (1959)) fogalmának segítségével fogjuk leírni, két környezet – a keresleti korlátos és az erőforrás korlátos – mellett. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy a vállalat ismeri – F, G és H eloszlásfüggvényekkel jellemzett – környezetét. Érdeklődésünket egyedül a paternalizmus hatására összpontosítjuk, a többi tényezőtől – mint amilyenek az árak, a vásárlási és eladási feltételek stb. – való függéssel nem foglalkozunk.

Pontosabban szólva, adott F és G eloszlásfüggvények mellett feltételezzük, hogy létezik olyan α, $\beta \geqq 0$ és $0 \leqq \varepsilon \leqq 1$, hogy a paternalizmus bármely H foka mellett a vállalat x^d választása kielégíti az alábbi három feltételt: $E(\pi_+ \mid x^d) \geqq \alpha$, $E(y \mid x^d) \geqq \beta$ és $P(\tilde{\pi} \geqq 0 \mid x^d) \geqq 1 - \varepsilon$, ahol π_+ a π pozitív része, azaz $\pi_+ = \max(0, \pi)$. Ennek megfelelően az α és β viselkedési paraméterekre, mint a vállalat nyereségszerzési és eladási *aspirációs szint*jére, az ε-ra pedig, mint *kockázati küszöbértékére* hivatkozunk. Értelmezésünkben $P(\tilde{\pi} \geqq 0 \mid x^d)$ a *túlélési valószínűség*, mivel $\tilde{\pi} < 0$ jelenti a támogatások ellenére is bekövetkező veszteséget. Legyen X^d azon $x^d \in R_+$ pontok halmaza, amelyek kielégítik a három megelégedési feltételt. Feltételezésünk szerint α, β és ε olyanok, hogy X^d nem üres.

Ami a környezeteket illeti, az 1. ábra parametrikus kockájának „M" és „P" oldalán lévők érdekelnek bennünket. Mivel elemzésünk nem kívánja meg a paraméterekkel való jellemzést, általánosságban definiáljuk az *M-környezetet*, mint olyant, amelyben $F = 0$ az R_+-on (nincs erőforráskorlát). Az $M1$, $M2$, $M3$ és $M4$ környezetek nyilvánvaló példák az M-környezetre. Szimmetrikus módon definiáljuk a *P-környezetet*, mint amelyben $G = 0$ az R_+-on (nincs keresleti korlát). $P1$, $P2$ és $P3$ nyilvánvaló példák a P-környezetre, miközben $P4$ nem tartozik sem az M- sem a P-környezetek közé. A kifejtés világossága kedvéért elemzésünket a folytonos F, G és H eloszlásfüggvényekre korlátozzuk.

Mint az előzőekben, $\hat{x}$ jelölje most is az x-nek azt az egyetlen értékét, amely mellett a potenciális nyereség függvénye $v(x) = pf(x, q) - wx$ eléri maximumát, és legyen $x_0 = \sup \{ x \geqq 0;\ v(x) \geqq 0 \}$. Ily módon $\hat{x}$ a szokásos walrasi kereslet, és $A1$ szerint $0 \leqq \hat{x} < x_0 < +\infty$.

Tekintsük először az M-környezet esetét. A (12) egyenlőségből azonnal következik

$$E(\pi_+ \mid x^d) = \int_0^\infty [1 - \Phi_\pi(u)]du = \int_0^{pf(x^d,q)-wx^d} \left[1 - G\left(\frac{u + wx^d}{p}\right)\right] du \qquad (15)$$

$x^d < x_0$ esetén; és $E(\pi_+ \mid x^d) = 0$, $x^d \geqq x_0$ esetén. Nyilvánvaló, hogy $E(\pi_+ \mid x^d)$ az x^d folytonos függvénye, amelyet $v(\hat{x})$ határol, és amely a maximumát valahol a $[0, \hat{x}]$ intervallumban fölveszi és $(\hat{x}, x_0)$-on csökkenő. Hasonló módon a (11) egyenlőségből

$$E(y \mid x^d) = \int_0^\infty [1 - \Phi_y(u)]du = \int_0^{f(x^d,q)} [1 - G(u)]du. \qquad (16)$$

$E(y \mid x^d)$ nyilvánvalóan folytonos és nem-csökkenő függvénye x^d-nek. Végül a (10) és (12) egyenlőségek segítségével az $x^d < x_0$ esetre:

$$P(\tilde{\pi} \geqq 0 \mid x^d) = 1 - \int_0^\infty G\left(\frac{wx^d - u}{p}\right) dH(u). \qquad (17)$$

Ily módon $P(\tilde{\pi} \geqq 0 \mid x^d)$ folytonos és nem-csökkenő függvénye x^d-nek, $P(\tilde{\pi} \geqq 0 \mid 0) = 1$ mellett.

Legyen ξ^d_M a H-t x^d-be leképező *effektív-keresleti megfeleltetés*. Egy magától értetődő jelölést alkalmazva azonnal adódik.[19]

4. észrevétel: Az effektív-keresleti megfeleltetés egy M-környezetben a paternalizmus fokának nem-csökkenő függvénye, azaz $H_1 > H_2 \Rightarrow \xi^d_M(H_1) \leqq \xi^d_M(H_2)$.

Vegyük észre, hogy abban a speciális esetben, amikor a kibocsátási jószág piacán tökéletes verseny uralkodik ($G = 0$ az R_+-on) és a nyereségszerzési aspirációk maximálisak ($\alpha = v(\hat{x})$, $\beta = 0$ és $\varepsilon > 0$), valamennyi H eloszlásfüggvény mellett fennáll $\xi^d_M(H) = \{\hat{x}\}$, azaz a vállalat effektív-keresleti megfeleltetése egybeesik a szokásos neoklasszikus keresleti függvénnyel. Másképpen

[19] Mint eddig, most is $H_1 > H_2$, ha $H_1(\alpha) > H_2(\alpha) \forall \alpha \in (0, \infty)$ esetén. Továbbá két $A, B \subset R$ halmazra, akkor írjuk, hogy $A \leq B$, ha van olyan $a \in A$ és $b \in B$, hogy a $a \leq B$ és $b \geq A$.

kifejezve: ha nincs keresleti korlát, akkor a tisztán nyereségre-törekvő vállalat a paternalizmus bármely foka mellett pontosan ugyanúgy viselkedik, mint a walrasi modell standard vállalata.

Rátérve a P-környezet esetére, először megjegyezzük, hogy az $E(\pi_+ \mid x^d)$ a $v(\hat{x})$ által korlátozott folytonos függvény, és fölveszi maximumát az $x^d = \hat{x}$ helyen. Ez az észrevétel intuitív módon is világos, hisz ha a vállalat eladásainak nincs keresleti korlátja, és a kiutalási séma a szubmikro szinten nem befolyásolható, akkor nem kifizetődő $\hat{x}$-nél többre törekedni.[20] Az eladások várható értékét tekintve megjegyezzük, hogy

$$E(y \mid x^d) = \int_0^\infty [1 - \Phi_y(u)]du = \int_0^{f(x^d,q)} [1 - F(f_q^{-1}(u))]du \quad \forall x \geqq 0 \tag{18}$$

a (13) egyenlőség szerint. Nyilvánvaló, hogy $E(y \mid x^d)$ az x-nek folytonos és nem-csökkenő függvénye.

Végül

$$P(\tilde{\pi} \geqq 0 \mid x^d) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \leqq x_0 \\ 1 - \int\limits_0^{wx^d - f(x^d,q)} [1 - F(v^{-1}(-u))]dH(u), & \text{ha } x > x_0, \end{cases} \tag{19}$$

ahol $v^{-1} : (-\infty, 0) \to (x_0; \infty)$ a potenciális nyereség függvényének (korlátozott) inverze. Nyilvánvaló, hogy $P(\tilde{\pi} \geqq 0 \mid x^d)$ az x^d folytonos és nem-növekvő függvénye. Tehát:

5. észrevétel: P-környezetben az effektív-keresleti megfeleltetés a paternalizmus fokának nem-csökkenő függvénye,[21] azaz $H_1 > H_2 \Rightarrow \xi_p^d(H_1) \leqq \xi_p^d(H_2)$.

Az M-környezet esetével szimmetrikus módon világos, hogy megint egy szokásos walrasi keresleti függvényhez jutottunk, arra a speciális esetre, amikor nincs erőforrás-korlát ($F = 0$ az R_+-on) és a nyereségszerzési aspirációk maximálisak ($\alpha = v(\hat{x})$, $\beta = 0$ és $\varepsilon > 0$).

A paternalizmus és a vállalati viselkedés vizsgálatának befejezéseként összehasonlítást teszünk a keynesi és a klasszikus munkanélküliségnek *Malinvaud* (1977) könyvben található tárgyalásával.

Ebből a célból tekintsük a kiutalást tetszőleges környezetben. A vállalatnak kiutalják a ráfordítási jószágot, ha $\bar{x} < x^d$, és kiutalás van az eladásoknál, ha $\bar{y} < y^s$. Ennek megfelelően, a munkaráfordítást tekintve, elmondhatjuk, hogy a vállalat *keynesi munkanélküliség* mellett működik, ha $x^d < x$ és $\bar{y} < y^s$; *klasszikus* munkanélküliség mellett, ha $x^d < \bar{x}$ és $\bar{y} \geqq y^s$. Annak valószínűsége, hogy e kétfajta munkanélküliség valamelyike fennáll nyilvánvalóan $1 - F(x^d)$, annak valószínűsége pedig, hogy keynesi munkanélküliség van $(1 - F(x^d)) \times$ $\times G(f(x^d, q))$, mivel G folytonos. Ennek megfelelően, a keynesi munkanélküliség feltételes valószínűsége $G(f(x^d, q))$.

Érdekes kérdés, hogy milyen hatással van a paternalizmus foka ezekre a valószínűségekre, milyen a hatás, amelyet H közvetve, a vállalat x^d, q és p

[20] A „befolyásolható" és „nem-befolyásolható" kiutalási sémák definícióját és kifejtését lásd: *Benassy* (1982). Sztochasztikus kiutalásban részesülő fogyasztó esetére hasonló megközelítés: *Benassy* (1982, B. Függelék).

[21] Vö.: *Kornai* [1980] 3., 6. és 9. fejezete.

választásán keresztül, gyakorol rájuk. Például, ha feltesszük — mint ahogyan ezt a megelőző elemzés sugallja —, hogy a paternalizmus magasabb foka nagyobb x^d effektív kereslethez vezet, akkor a paternalizmus magasabb foka — ceteris paribus — a keynesi munkanélküliség feltételes valószínűségének növekedését jelenti. Ha azonban a paternalizmus magasabb foka megnöveli a többi vállalat keresletét vállalatunk kibocsátása iránt, akkor ez a klasszikus munkanélküliségtől a keynesi felé vivő tendenciának legalábbis egy részét bizonyosan ellensúlyozza, de az összhatás kétes marad.

6. Összehasonlítás a standard fogalmi kerettel

Elemzésünk végére érve rövid összehasonlítást teszünk a jól ismert standard neoklasszikus elmélet és a disequilibrium elméletek fogalmi keretével. A modellek e családjának absztrakt prototípusát tartjuk szem előtt, és nem egyik vagy másik speciális változatukat.

1. A legfontosabb különbség: A walrasi egyensúlytól való krónikus eltérések magyarázatára modellünkbe nemcsak a szokásos gazdasági változókat, ár, ill. bér stb. kívántuk beépíteni, hanem intézményi tényezőket is. E törekvés példája a paternalizmus foka, mint magyarázó változó. Minél inkább remélheti a vállalat, hogy a kormány kisegíti őt tartós bajaiban, annál inkább hajlamos az expanzióra, és ennek következményeként csaknem kielégíthetetlen keresletet mutat. A modern jóléti állam léte, és még inkább a szocialista állam, mint a nagyvállalatok tulajdonosa, új feltételeket teremt a vállalati viselkedés számára. A paternalizmus természetesen csak egy példája az általánosabb törekvésnek, hogy kifejezzük az intézményi tényezők hatását a formális társadalmi—gazdasági modellekben. Az ilyen tényezők a legtöbb standard modellből hiányoznak, ezek az egyensúlytalanságot főként a „gazdasági politika" és az árakban megmutatkozó merevség hatásával magyarázzák.

2. A vállalati viselkedés jellemzésére általánosabb fogalmi keretet kívántunk felállítani, mint a szokásos nyereségmaximalizálás. Sok más közgazdásszal és szociológussal osztjuk azt a véleményt, hogy minden szervezet több (gyakran ellentétes) célt követ, a vállalatokat is beleértve. Hármat építettünk be modellünkbe: a mennyiségi növekedést, a nyereséget és — mint végső célt — a túlélést. A különböző társadalmi környezetben működő vállalatokat ezen (és más) törekvések együttesével jellemezhetjük. Ezenkívül *Simon* (1959) felfogását követve alkalmaztuk a döntéshozás megelégedésre törekvő modelljét. Ez a megközelítés általánosabbnak és valósághűbbnek látszik, modellünkben a nyereségmaximalizálás az általánosabb minta speciális esete.

3. A walrasi iskola és a disequilibrista iskola legtöbb műve a rendszerek determinisztikus leírását alkalmazza. A standard disequilibrium modell determinisztikus „rövidebb oldal szabálya" feltételezi, hogy a vállalatot vagy korlátozza a ráfordítási oldal, vagy nem, és ezt az „igen—nem" sémát alkalmazzák a kibocsátási oldalra is. Mi úgy gondoljuk, hogy ez nem „igen—nem" kérdés, hanem fokozatok kérdése.[22] A vállalat környezete nagyobb vagy kisebb intenzitással lehet vevők piaca vagy eladók piaca, és ennek megfelelően erősebb vagy gyengébb hatást gyakorol a vállalat döntéseire, cselekvésére.

[22] A rövidebb oldal szabályának másfajta sztochasztikus változataira utalt cikkünk 4. lábjegyzete.

A cikkünkben alkalmazott sztochasztikus megközelítés leírhatóvá teszi a külső makroviszonyok intenzitását és hatását a mikro-egységre, azaz a vállalat tevékenységére.[23]

Ugyanez az érvelés igaz az állami támogatások sztochasztikus jellemzésére is. A paternalizmus megint csak lehet többé vagy kevésbé intenzív, és formalizmusunk kifejezheti a vállalatok bizonyosabb vagy kevésbé bizonyos reményeit az állam paternalisztikus beavatkozására.

4. A legtöbb standard modell csak a kibocsátás mennyiségének szabályozásával foglakozik. Mi szükségesnek láttuk a minőség szabályozását is bevonni az elemzésbe. Annál is inkább, hiszen a krónikus hiányhelyzetek egyik legsúlyosabb következménye a minőség elhanyagolása az erőltetett növekedés, a mennyiségi hajsza érdekében. Cikkünk még messze van attól, hogy kimerítse a minőség mint endogén változó lehetőségeit, de legalább megmutatja, hogy az elemzésnek itt további tere van.

Tudatában vagyunk annak, hogy a fentiekben kifejtett célok ambiciózusak és az elért eredmények meglehetősen szerények. Tanulmányunk elsődleges célja az volt, hogy *kérdések* egy bizonyos csoportját tegyük fel, és hogy *fogalmi keretet* adjunk a kérdések elemzéséhez. Nincsenek újdonságok *válaszainkban*: elégedettek vagyunk látván, hogy ebben az új keretben képesek voltunk az irodalomból ismert elméleti tételeket reprodukálni.

Számos útja van a további kiterjesztésnek. A legfontosabb talán a több vállalatból álló rendszerek tanulmányozása. Minden vállalat részét képezvén a többiek környezetének, jogos a kérdés, hogy a viselkedések és a környezet összeegyeztethetők-e. Egy másik, az érdeklődést felcsigázó, de bonyolult kérdés a túlélés és a „természetes szelekció" a vállalatok, vagy a vállalati döntési szabályok körében [vö.: *Winter* (1964)].

Függelék

1. *A (8)–(10) egyenlőségek levezetése:*

$$\Phi_y(\alpha) = \mu(y \leqq \alpha) = E[\mu(y \leqq \alpha|x)] =$$
$$= E[\mu(\min\{\bar{y}, y^s\} \leqq \alpha|x)] = E[1_{\{y_s \leqq \alpha\}} + 1_{\{y_s > \alpha\}} G(\alpha)] =$$
$$= \mu(f(x,q) \leqq \alpha) + \mu(f(x,q) > \alpha) G(\alpha)$$

$$\Phi_\pi(\alpha) = \mu(\pi \leqq \alpha) = E\left[\mu\left(y \leqq \frac{wx+\alpha}{p} \,\Big|\, x\right)\right] =$$
$$= E\left[1_{\{f(x,q) \leqq (wx+\alpha)/p\}} + 1_{\{f(x,q) > (wu+\alpha)/p\}} G\left(\frac{wx+\alpha}{p}\right)\right] =$$
$$= \mu\left(f(x,q) \leqq \frac{wx+\alpha}{p}\right) + \int_{[0,x^d]} 1_{\{f(u,q) > (wu+\alpha)/p\}} G\left(\frac{wu+\alpha}{p}\right) dF(u) +$$
$$+ 1_{\{f(x^d,q) > (wx^d+\alpha)/p\}} G\left(\frac{wx^d+\alpha}{p}\right)(1 - F(x^d))$$

$$\Phi_{\tilde{\pi}}(\alpha) = \mu(\tilde{\pi} \leqq \alpha) = \mu(\pi \leqq \alpha - \bar{r}), \text{ ha } \alpha < 0,$$

[23] Vö. az aggregált piacok egyensúlytalansági vagy „feszültségi" fokának sztochasztikus megközelítésével a *Malinvaud* (1981) műben.

mivel ekkor $[\hat{\pi} \leqq \alpha] \Leftrightarrow [\pi + \min(\pi_{-}, \bar{r}) \leqq \alpha] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow [\pi \leqq 0 \text{ és } \min(0, \bar{r} + \pi) \leqq \alpha] \Leftrightarrow [\pi \leqq 0 \text{ és } \bar{r} + \pi \leqq \alpha] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [\pi \leqq 0 \text{ és } \pi \leqq \alpha - \bar{r}] \Leftrightarrow [\pi \leqq \alpha - \bar{r}].$$

2. *Az 1–5. észrevételek bizonyítása*

1. észrevétel: Alkalmazzuk az $A1$ és $A2$ feltevést a (11) és (13) egyenlőségekre.

2. észrevétel: Az $M1$-környezet esetében alkalmazzuk $A1$-et és $A2$-t a (12) egyenlőségre. A $P1$-környezet esetében vegyük észre, hogy $\alpha > 0$ esetén $\Phi_{\tilde{\pi}}(\alpha) = \mu(v(x) \leqq \alpha)$. Mivel v konkáv, $v(0) = 0$ és $v(\infty) < 0$, van olyan $x_1(\alpha)$, $x_2(\alpha)$, hogy $0 < x_1(\alpha) \leqq \hat{x}(p, q) \leqq x_2(\alpha) < \infty$, és $[v(x) \leqq \alpha] \Leftrightarrow [x \leqq x_1(\alpha)$ vagy $x \geqq x_2(\alpha)]$. Így a (7) alkalmazásával

$$\Phi\,(\alpha) = \mu(x \leqq x_1(\alpha) \text{ vagy } x \geqq x_2(\alpha)) =$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{ha } x^d \leqq x_1(\alpha) \\ F(x_1(\alpha)) & \text{ha } x_1(\alpha) < x^d < x_2(\alpha) \\ F(x_1(\alpha)) + 1 - F(x_2(\alpha)), & \text{ha } x^d \geqq x_2(\alpha). \end{cases}$$

Világos, hogy $x_1(\alpha)$ növekvő, $x_2(\alpha)$ csökkenő α-ban.

3. észrevétel: A (11)-ből (14) útján következik.

4. észrevétel: Legyen $X_1^d = \{x \geqq 0;\, E(\pi_+ \mid x) \geqq \alpha\}$, $X_2^d = \{x \geqq 0;\, E(y \mid x) \geqq \geqq \beta\}$, $X_3^d = \{x \geqq 0;\, P(\tilde{\pi} \geqq 0 \mid x) \geqq \varepsilon\}$. Ekkor $X^d = \bigcap_{i=1}^{3} X_i^d$. Világos, hogy X_1^d és X_2^d H-tól funkcionálisan függetlenek, míg $X_3^d = [0, x(H)]$, ahol $x(H_1) \leqq x(H_2)$.

5. észrevétel: A (19) egyenlőség felállításához megjegyezzük, hogy $\Phi_{\tilde{\pi}}(0) = \int_0^\infty \Phi_\pi(-u)dH(u)$ a (10) miatt, valamint $x > x_0$ és $u \geqq 0$ esetén

$$\Phi_\pi(-u) = \begin{cases} 1 - F(v^{-1}(-u)) & \text{ha } u \leqq -pf(x^d, q) + wx^d \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Ugyanúgy, mint a 4. észrevétel bizonyításában: X_1^d és X_2^d H-tól funkcionálisan függetlenek, míg $X_3^d = [0, x(H)]$, ahol $x(H_1) \leqq x(H_2)$.

(Beérkezett: 1983. március 2-án.)

IRODALOM

R. Bacon—W. Eltis (1976): *Britain's Economic Problem: Too Few Producers*, MacMillan.

J.-P. Benassy (1975): Neo-Keynesian disequilibrium theory in a monetary economy, *Review of Economic Studies* 42, 503—523. o.

J.-P. Benassy (1982): *The Economics of Disequilibrium*. Academic Press.

R. W. Clower (1965): The Keynesian counterrevolution: a theoretical appraisal, in: F. H. Hahn—F. T. R. Brechling, szerk. *The Theory of Interest Rates*. MacMillan.

J. H. Drèze (1975): Existence of an exchange equilibrium under price rigidities. *International Economic Review* 16, 301—320. o.
R. C. Fair—K. M. Jaffee (1972): Methods for estimation of markets in disequilibrium: a further study. *Econometrica* 42, 177—190. o.
J.-M. Grandmont (1977): The logic of the fix-price method. *Scandinavian Journal of Economics* 79, 169—186. o.
J. Johnston (1975): A macro-model of inflation. *Economic Journal* 85.
P. Kooiman—I. Kloek (1980): An aggregate two-market disequilibrium model with foreign trade. Rotterdam University, sokszorosított.
Kornai J. (1971): *Anti-equilibrium.* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
Kornai J. (1980): *A hiány.* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
E. Malinvaud (1977): *The Theory of Unemployment Reconsidered.* Basil-Blackwell.
E. Malinvaud (1981): *Econometric implications of macro-disequilibrium theory.* I. N. S. E. E. Paris, sokszorosított.
J. Muellbauer (1978): *Macrotheory vs macroeconometrics: the treatment of disequilibrium in macro models,* Birbeck College, sokszorosított.
H. Simon (1959): Theories of decision-making in economics and behavioural science, *American Economic Review* XLIX 253—283. o.
L. E. O. Svensson (1980): Effective demand and stochastic rationing, *Review of Economic Studies* XLVII 339—355. o.
S. Winter (1964): Economic 'natural selection' and the theory of the firm, *Yale Economic Essays* 4, No 1, 225—272. o.

PATERNALISM, BUYERS' AND SELLERS' MARKET

In the field of modelling of *shortage phenomena* which are known both in East and West though of opposite nature (commodity shortage versus overproduction and excess demand for labour versus unemployment) we tried to go beyond traditional economic analysis. Taking also *institutional* aspects into consideration the relationship between buyers and sellers and especially the paternalistic relationship between the state and the firms are formalized. Only one aspect of this complicated relationship is pointed out, namely, subventions granted to firms by the state.

The paper submits a model on the firms' behaviour in stochastic setting. Sales, profits and survival chances of the enterprise are analyzed. Starting from the basic cases of pure market and pure planned economies we arrive at „mixed" economies in the course of the study.

Finally the present model is related to some customary approaches to disequilibrium phenomena.

ПАТЕРНАЛИЗМ, РЫНОК ПОКУПАТЕЛЕЙ, РЫНОК ПРОДАВЦОВ

Явления недостатка известны как на Востоке, так и на Западе, хотя с противоположным характером (недостаток товаров против сверхпроизводства и сверхспрос рабочей силы против безработицы). В области моделлирования этих явлений мы стараемся переступить рамки традиционного экономического анализа. Отнощение продавца и покупателя мы рассматриваем, принимая во внимание и *институциальные* точки зрения, формализируем *патерналистическое* отношение государства и предприятия. Из этой сложной связи мы рассматриваем только один вопрос, а именно доставленные предприятиям государственные субвенции.

Статья описывает модель поведения предприятия в стохастических условиях. С помощью этой модели анализируем возможности, шансы предприятий в продаже, в получении прибыли, в пережитии. В ходе исследования, исходя из чистого рынка и чистого планированного хозяйства, мы приходим к понятию «смешанных» хозяйств.

В конце статьи полученную модель сопоставляем с некоторыми явлениями дисэквилибриума.

Tóth József—Szenteleki Károly

Mezőgazdasági vállalati célok elemzése kompromisszumprogramozás segítségével

Mezőgazdasági vállalataink gyorsan változó technikai—technológiai—közgazdasági közegben, a termelést és feldolgozást is magába foglaló üzemi vertikumok kialakításával egyre bonyolultabb tevékenységet folytatnak. Ezen bonyolult feltétel- és kapcsolatrendszer áttekintése, a vállalat alapvető érdekeinek megfelelő termelési irányok kijelölése matematikai modellek felhasználása nélkül ma már nehezen elképzelhető [3], [6], [11]. Termelő vállalataink jogos igénye a matematikai modellekkel szemben, hogy többirányú céljaiknak is megfeleljenek.

Ilyen cél lehet, miként a vállalati példákban látni fogjuk, a maximális bruttó jövedelem és egyidejűleg minél alacsonyabb termelési költség. Más esetben szőlőtermesztő gazdaságok rekonstrukciós döntéseit a maximális bruttó jövedelemre törekvés mellett a fagykár kockázat csökkentése, továbbá a szüreti időszakban az élőmunkaerő egyenletes leterhelése egyaránt befolyásolják. E döntési problémák elemzése a több kritériumú döntéshozatal témakörébe tartozik. Erről éppen az alkalmazás oldaláról jelentkező igény hatására mind a nemzetközi [1], [2], [7], [9], mind a hazai irodalomban [4], [5], [8], [10], [12] egyre több publikáció jelenik meg. E tanulmányokban az elemzés spektruma rendkívül széles, játékelméleti módszerek éppúgy megtalálhatók, mint az efficiens (Pareto-optimális) megoldásokat szolgáltató algoritmusok, vagy a speciális interaktív eljárások.

A bevezetőben említett döntési problémáinkat, a mezőgazdasági gyakorlatban leginkább alkalmazott lineáris programozás keretei közt maradva, több célfüggvény segítségével a következő formában fogalmazhatjuk meg:

$$\begin{gathered} x \geq 0 \\ \underline{A\,x \gtreqless b} \\ c_i^T x \to \max \quad i = 1, 2, \ldots, n. \end{gathered} \tag{1}$$

A feladat megoldására több módszert javasol a szakirodalom. A legkézenfekvőbb megoldás az, ha az n darab célfüggvényt különböző súlyszámok segítségével egyetlen célfüggvénybe sűrítjük, a lineáris kombináció elve alapján. Ismerve a középtávú vállalatfejlesztési tervek leggyakrabban szóba jövő célfüggvényeinek képzési metodikáját, ez az út nem mindig járható. Számos esetben már dimenziókra vonatkozó azonosság minimális kritériuma sem teljesül, s akkor még nem beszéltünk a dimenziók megegyezésén túl, az érdekeltségi viszonyok reális kifejezésének szükségességéről, ami a gazdasági szakemberek számára nem könnyen tisztázható probléma.

Amennyiben célfüggvényeink között preferencia-sorrendet tudunk megadni, úgy modellünket először a legfontosabb célfüggvény szerint optimalizálhatjuk. Ezután a lehetséges megoldások halmazát leszűkítjük az első célfüggvény szerinti optimális megoldások halmazára és újból optimalizálunk, most már a második célfüggvény szerint. Az eljárást az n-edik célfüggvényig megismételjük, így gazdasági elvárásainkkal összhangban levő eredményt kaphatunk. Komplex vállalatfejlesztési modelljeink azonban nem mindig szolgáltatnak alternatív optimumokat, miáltal a második és az utána következő célfüggvényekben megfogalmazott törekvések nem jutnak kifejezésre.

Ez az ellentmondás bizonyos mértékig feloldható úgy, hogy további célfüggvényeket építünk be a modellbe [5]. Ekkor a modellt optimalizáljuk a $2, 3 \ldots, n$-edik célfüggvény szerint, és az optimális $Z_2, Z_3, \ldots, Z_n$ célfüggvényértékek segítségével az i-edik célfüggvény számára a következő feltételt szabjuk:

$$c_i^T x \geq \alpha_i Z_i \quad (0 \leq \alpha_i \leq 1, \quad i = 2, \ldots, n) \tag{1}$$

és e feltételek mellett optimalizáljuk az első célfüggvényt.

A módszer alkalmazása két szempontból lehet kérdéses. Egyrészt az így meghatározott korlátok realitásáról nem rendelkezünk kellő ismeretekkel. Ezen információk megszerzése, kiszámítása körülményes, csak mélyebb elemző munkával vagy előzetes modellszámítás révén lehetséges. Ugyanis nem biztos, hogy a célfüggvények előre meghatározott súlyok szerinti kielégítése ellentmondásmentesen megoldható. Másrészt, ha az α_i-értékeket az ellentmondásosság elkerülése érdekében alacsony szinten rögzítjük, ez a gazdaság lehetőségeinek indokolatlan leszűkítését jelentheti a feltételrendszerbe épített célfüggnyekre nézve.

Ehhez az eljáráshoz hasonló az úgynevezett szuboptimális programozási módszer, melynél az első célfüggvény értékének csak a közelítő maximumára 85–90%-ára törekednek, s e korlát mellett maximálják a másodlagos célfüggvényeket [7].

További lehetőség a lineáris programozás területén könnyen kezelhető efficiens programok meghatározása számítógép segítségével.

A matematikai modell szokásos alakja a következő:

$$\begin{array}{c} x \geq 0 \\ A\,x \gtreqless b \\ \underline{C\,x \geq C x_0} \\ 1^T C x \to \max, \end{array} \tag{2}$$

ahol x_0 az (1) feladat egy lehetséges megoldása, míg C a célfüggvényegyütthatók mátrixát jelenti. A kapott x^* program efficiens (Pareto-optimális), ha $1^T C x^* = 1^T C x_0$. Ha nem, úgy x_0 helyébe x^*-ot írva eljárásunkat mindaddig ismételjük (véges lépés szükséges), míg az előírt egyenlőség be nem következik. Lineáris vektormaximum problémák efficiens pontjainak létezéséről [8] alatt szerezhetünk bővebb ismereteket. Mind a külföldi, mind hazai vonatkozásban több sikeres alkalmazásra tekinthet vissza a célprogramozás (goal-programming) módszere, [1] [4]. Az eljárás lényege, hogy a döntéshozók által kijelölt, vagy valamilyen előzetes számítás útján meghatározott ideális pont, célkitűzés $c^* = (c_i^*)$ lehető legjobb megközelítésére törekszik.

A céltérben az ideális pont és a ténylegesen elérhető eredmény vektorok távolságának méréséhez különböző metrikák bevezetése szükséges. A formális megfogalmazás a következő:

$$\begin{array}{c} x \geq 0 \\ A\,x \gtreqless b \\ \hline \varrho(c^*,\ Cx) \to \min. \end{array} \tag{3}$$

Az egyik leggyakrabban használt távolságfüggvény minimalizálása a $\varrho_\infty = \max_i \mid c_i^* - c_i^T x \mid \to \min$ formába írható, így (3) feladatunk az alábbi lineáris programozási feladat megoldását igényli:

$$\begin{array}{c} x \geq 0 \\ A\,x \gtreqless \mathrm{b} \\ c_i^T x \geq c_i^* - d \ \ (\forall_i\text{-re}) \\ c_i^T x \leq c_i^* + d \ \ (\forall_i\text{-re}) \\ \hline d \to \min. \end{array} \tag{4}$$

Más esetben a $\varrho_1 = \Sigma \mid c_i^* - c_i^T x \mid = \Sigma d_i$ metrika esetén a formális megfogalmazás a következő:

$$\begin{array}{cc} x \geq 0 & \\ A\,x \gtreqless b & \\ c_i^T\,x \geq c_i^* - d_i & (\forall_i\text{-re}) \\ c_i^T\,x \leq c_i^* + d_i & (\forall_i\text{-re}) \\ \hline \Sigma\, d_i \to \min. & \end{array} \tag{5}$$

A gyakorlati alkalmazás során a fenti két eljárással, s ugyanígy az efficiens programokat szolgáltató programmal szemben is az a kifogás merülhet fel, hogy a célfüggvények egymással egyenrangúak, ilyen formában nem tudjuk a preferált célok jelentőségét kifejezni. Ha e metrikákat mégis súlyozzuk, s erre van lehetőség, kevés támpont áll rendelkezésünkre a súlyszámok reális kialakításához.

A fenti elemzés alapján nyilvánvaló, hogy a vállalatfejlesztési döntések megalapozására olyan módszert kerestünk, amely

— lehetővé teszi, hogy különböző dimenziójú és közgazdasági tartalmú célfüggvényeket egyetlen célfüggvénybe összesűrítsünk;

— a közös célfüggvényben a különböző célfüggvényeket előre eldöntött értékek szerint súlyozza és így az optimális megoldásban a különböző célok súlyarányosan érvényesülnek.

— a lineáris programozás keretét nem lépi túl, s a több célnak megfelelő optimális megoldás meghatározásához a célfüggvények egymáshoz viszonyított súlyszámainak megállapításán kívül más szubjektív paraméter becslését lehetőleg nem igényli.

E céloknak a kompromisszum-programozás módszere felelt meg leginkább, melyet az alábbiakban röviden összefoglalunk. Adott egy gazdaság tevékenységét modellező feltételrendszer és a vállalat által kijelölt, n db célfüggvényben megfogalmazott törekvési irány (1) szerint.

Oldjuk meg először az n db célfüggvényre az

$$\begin{array}{c} x \geq 0 \\ A\,x \gtreqless b \\ \hline c_i^T\,x \rightarrow \max \end{array} \tag{6}$$

feladatot és jelöljük az így kapott optimális célfüggvényértékeket M_i-vel. Ezután oldjuk meg a feladatot ismét n-szer

$$\begin{array}{c} x \geq 0 \\ A\,x \gtreqless b \\ \hline c_i^T\,x \rightarrow \min \end{array} \tag{7}$$

szerint, s jelöljük ezen célfüggvényértékeket m_i-vel, ahol $i = 1, 2, \ldots, n$ értékeken fut végig.

Ezen megoldások eredményei – eltekintve egyelőre attól, hogy a kompromisszum célfüggvényünk kialakításához nélkülözhetetlen részeredmények –, már önmagukban is jelentős információk hordozói. Általuk betekintést nyerhetünk az adott vállalat gazdálkodásának különböző célok szerinti kereteibe, így például megtudhatjuk, hogy milyen maximális és minimális nettó jövedelemre tehetnek szert a termelés technikájának, technológiájának, struktúrájának megválasztásától függően, vagy például milyen maximális, illetve minimális beruházási igénnyel lehet számolni.

A gazdaság természetesen minden célját maximálisan szeretné teljesíteni, vagyis minden célfüggvény értéke a lehető legjobban közelítse meg az elméleti optimumot, tehát a

$$c_i^T x - m_i \tag{8}$$

kifejezés minél jobban közelítse meg a $M_i - m_i$ értéket. Ha (8) kifejezés helyett a

$$\frac{c_i^T x - m_i}{M_i - m_i} \tag{9}$$

formulára térünk át, akkor ennek értéke a $[0, 1]$ intervallumban helyezkedik el. A kifejezés értéke nulla, ha az adott célfüggvény szerinti legrosszabb termelési szerkezet jött létre, s az 1 értéket veszi fel, ha a célfüggvény szempontjából optimális a vállalat tevékenysége. A célfüggvények ilyen jellegű normálása egyrészt a különböző dimenziókat tünteti el, vagyis minden célfüggvény dimenzió nélküli puszta számmá alakul, másrészt az egymáshoz viszonyított súlyozás lehetőségét is megteremti, a célfüggvényeknek a normálással megvalósított egyenértékűsége alapján. A célfüggvényeknek az általunk szükségesnek ítélt, egymáshoz viszonyított súlyát reprezentáló $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ értékek segítségével (1) feladatunk most már a következő formában fogalmazható meg:

$$\begin{array}{c} x \geq 0 \\ A\,x \gtreqless b \\ \hline \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \dfrac{c_i^T\,x - m_i}{M_i - m_i} \rightarrow \max. \end{array} \tag{10}$$

A kompromisszum programozás is a célprogramozás speciális esetének tekinthető, ugyanis (10) célfüggvénye mint arról bárki könnyen meggyőződhet, az optimalizálás szempontjából egyenértékű a

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{M_i - c_i^T x}{M_i - m_i} \to \min \tag{11}$$

célfüggvénnyel, ami formálisan az ideális $M^* = \left(\frac{\alpha_i M_i}{M_i - m_i}\right)$ pont lehető legjobb megközelítésére törekszik a

$$\varrho_1 = \sum_{i=1}^{n} \left(M_i^* - \frac{\alpha_i c_i^T}{M_i - m_i} x\right) \tag{12}$$

metrika szerint. Talán a (10) célfüggvényében valamivel szemléletesebb az α_i súlyvektorok jelentése.

Ez az eljárás természetesen nem alkalmazható, ha valamelyik célfüggvényre $M_i = m_i$. Ebben az esetben az adott célfüggvény figyelmen kívül hagyható, s $n - 1$ db célfüggvénnyel kompromisszum-célfüggvényünket előállíthatjuk. Nézzük meg ezek után a módszer két alkalmazását:

1. *Példa*

A szántóföldi növénytermesztés szerkezetét optimalizáló modellünkben az őszi búza, kukorica, hibrid kukorica, cukorrépa, napraforgó és a lucerna ágazatok jövedelmezőségi és költségviszonyainak elemzéséhez használtuk fel a kompromisszum programozás módszerét. A modellbe 18 erőforrás-változót építettünk be. Vállalatunk két alapvető célt fogalmazott meg:

— törekvés maximális bruttó jövedelemre,
— törekvés minimális költség-ráfordításra.

Gazdaságunk 5000 ha termőterülettel rendelkezik, ezen kívül az egyes ágazatok viszonylag szűkös határok között változtathatják termőterületüket.

Így:	őszibúza	500—2000 ha között
	kukorica	500—2000 ha között
	hibrid kukorica	50— 200 ha között
	cukorrépa	200— 500 ha között
	napraforgó	200— 600 ha között
	lucerna	100— 300 ha között

Az egyes ágazatokban a következők a célfüggvény-koefficiensek:

Célfüggvény	Őszibúza	Kukorica	Hibrid kukorica	Cukorrépa	Napraforgó	Lucerna
Bruttó jövedelem ezer Ft/100ha	1122	1248	2832	2277	1368	1955
Összköltség ezer Ft/100ha	709	1353	1624	1708	867	2366

Sem a bruttó jövedelem, sem az összköltség ágazati együtthatói nem tartalmazzák az erőgépek fix költségeit. A fix költségeket a műszakfelhasználás arányában terhelik az egyes ágazatokra, ez a modell feltételrendszerében külön csoportot alkot.
A termelési szerkezet változásait az alábbi táblázat tartalmazza

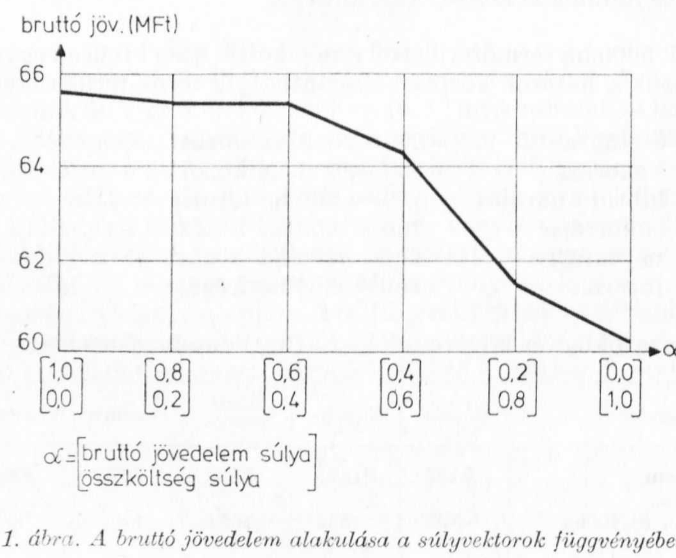
Súlyszámok (α_i)		Ágazatok területe ha					
Bruttó jövedelem max.	Összköltség min.	Őszibúza	Kukorica	Hibrid kukorica	Cukorrépa	Napraforgó	Lucerna
1,0	0,0	1400	2000	200	500	600	300
0,8	0,2	2000	1400	200	500	600	300
0,6	0,4	2000	1400	200	500	600	300
0,4	0,6	2000	1600	200	500	600	100
0,2	0,8	2000	1900	200	200	600	100
0,0	1,0	2000	2000	100	200	600	100

A táblázatból kitűnik, hogy a felsorolt ágazatok közül területegységre vetítve a búza hozza a legkevesebb bruttó jövedelmet. A költségcsökkentés fokozatos előtérbe helyezésével a búza szerepét a kukorica veszi át.

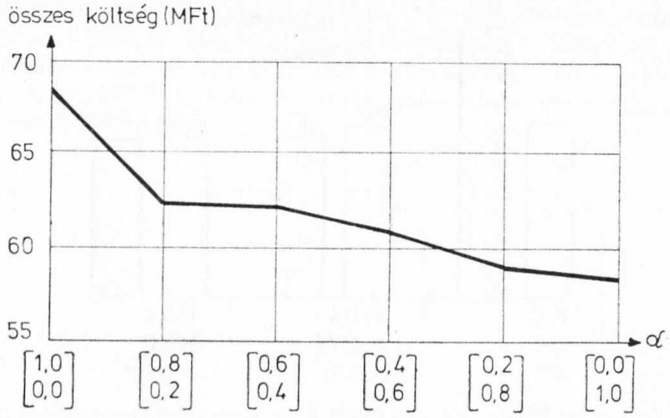
A költségcsökkentés jelentőségének további növelésével a búza mellett a kukorica is egyre nagyobb területen termeszthető, míg költségigényességük révén először a lucerna, azután a cukorrépa, végül a hibrid kukorica területe szűkül le. A napraforgó mind a bruttó jövedelem, mind a költségigénytelenség szempontjából kedvező növénynek mutatkozott.

A táblázatban szembetűnő, hogy a változó súlyszámokat nem követi folyamatosan a termelési szerkezet változása. Ez ugyanis nemcsak az új célfüggvénytől, hanem a lehetséges megoldások poliédrikus halmazától is függ. A bruttó jövedelem és a költségszint alakulását az első és második ábrán közöljük.

A költség jelentősebb csökkenése kezdetben csak kismérvű bruttó jövedelem csökkenéssel járt együtt, a folyamat végén viszont ennek ellenkezője tapasztal-



1. ábra. A bruttó jövedelem alakulása a súlyvektorok függvényében



2. ábra. Költségszint alakulása a súlyvektorok függvényében

ható; kismérvű költségmegtakarítás erőteljes bruttójövedelem visszaesést eredményez. A két érdek optimális egyeztetése az $\alpha' = \begin{bmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}2 \end{bmatrix}$ és $\alpha'' = \begin{bmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \end{bmatrix}$ intervallumban valósul meg.

A nettó jövedelem és a költségráfordítás viszonyának vizsgálatakor az előbbiekhez hasonló eredményre jutottunk, azzal a különbséggel, hogy a nettó jövedelem szempontjából a kukorica ágazat a búzáénál kevésbé hatékony.

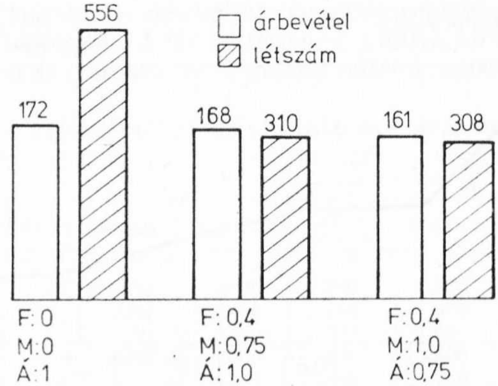
Meg kell jegyezni, hogy a minimum értékek bizonyos mértékig függnek a modellszerkesztés esetlegességétől. Így a modellt kidolgozó szakembereknek a modell feltételrendszerének megfogalmazásakor sokkal körültekintőbben kell eljárniuk, mint egyetlen célfüggvény alkalmazása esetén.

2. *Példa*

A kertészeti ágazatban a kompromisszum programozás nagyon jól alkalmazható a jövedelmezőségnek és más speciális céloknak az egyeztetésére. Így például a szőlőtermesztés és feldolgozás területén az árbevétel vagy a bruttó jövedelem maximumára törekvés mellett lehetőség szerint csökkenteni kell a fagykár kockázatát, a szüretelési időszakban pedig a munkaerő egyenletes leterhelése is jogos követelmény.

A Soroksári Tangazdaság szőlőterületének rekonstrukciós és fejlesztési döntéseit ilyen matematikai-programozási modell kiértékelésével alapoztuk meg. A fagykár csökkentését (F), a munkaerő egyenletes felhasználását (M) és a maximális árbevétel ($\acute{A}$) elérését reprezentáló célfüggvények súlyozását és a súlyozás eredményét a 3. ábra tartalmazza.

A modell mintegy 250 feltételt és 350 változót tartalmazott a fent említett három célfüggvény mellett. Mivel a modell egyszeri futtatása 6—8 órát vett igénybe, nem tudtunk annyi változatot kiszámítani, mint a jóval kisebb szántóföldi modellünk esetében, de már két kompromisszum-célfüggvénnyel történő futtatás (a 3. ábrán második és harmadik változat) elfogadható eredményeket szolgáltatott.



3. ábra. Az árbevétel ▭ *és a létszám* ▨ *a súlyviszonyok függvényében* (MFt, ill. fő)

Az egyenletes munkaerő-felhasználást a súlyarányok változtatásával, a munkacsúcsok lefaragásával, az árbevétel viszonylag kismérvű csökkentése révén sikerült megvalósítani. Ez a megoldás a vállalat többirányú célkitűzésének is megfelel. A létszám további minimális csökkentése viszonylag nagymérvű árbevétel kiesést indukál, így a vállalat számára mindenképpen a második változat a legkedvezőbb.

A fagykár-kockázat a különböző súlyozások folyamán elfogadható szinten maradt és lényegesen nem változott.

E módszer gyakorlati alkalmazása, hasonlóképpen a korábban vázolt módszerekhez, szintén nem problémamentes. A nehézségek a vállalatfejlesztési modelleknek a különböző célfüggvények szerinti minimalizálásakor jelentkeznek. Az erőforrás-kapacitásokat optimalizáló modelljeinkben nem szoktuk rögzíteni, hanem változókat építünk be az optimális mennyiség meghatározására. E változók célfüggvényértékei az erőforrások évi fix költségeit hordozzák, például a maximális nettó jövedelmet képviselő célfüggvény esetében. A modell minimalizálásakor ezen változók miatt a feladat általában nem korlátos. Az ilyen és ehhez hasonló problémák nem mindig oldhatók meg teljes egzaktsággal, gyakran kell különböző közelítésekkel élnünk.

Optimalizáló modellünk leegyszerűsített formában a 4. ábrán látható. A feltételrendszerből kiemeltük az erőforrásokra vonatkozókat, míg a célfüggvényünkből a maximális bruttó vagy nettó jövedelemre törekvést fogalmaztuk meg, az egyszerűség kedvéért csak előjeles formában.

Az erőforrásokra vonatkozó feltételrendszerben az első blokkban szereplő $a_{ij}(i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, r)$ együtthatók értéke pozitív vagy 0, attól függően, hogy az i-edik erőforrás a j-edik ágazat számára egy adott hónapban hány műszaknapot teljesít az adott 100 hektáron. E modell-konstrukcióban minden erőforrás számára csak abban a hónapban adtunk meg mérlegfeltételt, amelyikben a legtöbb műszakfelhasználás várható.

A feltételrendszer harmadik blokkjában szereplő $d_{i,k}(i = 1, \ldots, m, k = 1, \ldots, m)$ együtthatók értéke negatív, ha $i = k$ és 0, ha $i \neq k$. A negatív értékek az adott erőforrás által az adott hónapban ledolgozható műszaknapok számát jelentik. Ezek az egyenlőtlenségek írják elő, hogy a szükséges számú műszaknap minden erőforrásból rendelkezésre álljon.

Célfüggvényünk első blokkját az ágazatok bruttó jövedelmi hozzájárulásait hordozó értékek alkotják 100 hektárra kivetítve, az erőforrások fix költségei nélkül. Az erőforrások évi fix költségei a célfüggvény harmadik blokkjában találhatók és a modell feltételrendszerének közvetítésével csökkentik a bruttó jövedelem számított értékét.

Feltételek	Ágazati változók 1, 2, ... r	Egyéb változók	Erőforrás változók 1, 2, ... m	Rel.	b
. . .					
1. erőforrás 2. erőforrás . . m. erőforrás	A_1		D_1	$\leq$ $\leq$ $\leq$	0 0 . . 0
.					
Célf. Bruttó jöv.	+ + ...+		− ......−		max

4. ábra. Mezőgazdasági vállalatok termelési szerkezetét optimalizáló modell felépítése

Lényegében ilyen modell felhasználásával vizsgáltuk az 1. példánkban a bruttó jövedelem és az önköltség együttes alakulását. A modell számítógépes kiértékelése során a minimumok meghatározása problémamentes volt, mivel az erőforrás mérlegekre vonatkozó $\leq$ relációkat $\geq$ relációkra cserélve a modell korlátos maradt. Ha az egyéb változók között az erőforrásváltozókhoz hasonló további változók szerepelnek, alkalmas relációk felírásával ezek is korlátossá tehetők.

Nehézségek akkor jelentkeznek, ha az erőforrásokra vonatkozó mérlegfeltételeinket nemcsak a csúcsidőszakra írjuk elő, hanem mindazokra a hónapokra, amelyekben egyáltalán tevékenykedhetnek. Ezt a tettük 2. példában szereplő feladat modelljének megszerkesztésekor is.

A modell ekkor az 5. ábrán látható struktúrával rendelkezik. Természetesen nem mindig 12 hónapra részletezzük a modellt. Az A_i mátrix együtthatóinak jelentése megegyezik az előzőekben felírtakkal. A D_i mátrix együtthatói az i-edik oszlop kivételével 0 értéket vesznek fel. Az i-edik oszlop értékeinek jelentése a korábbi nem-nulla d_{ik} értékekkel azonos, s a célfüggvény-együtthatók is megtartották korábbi jelentésüket.

A bruttó jövedelem szerinti minimalizáláskor most nem fordíthatjuk meg az erőforrásokra vonatkozó egyenlőtlenségek irányát, mert ezzel az adott erőforrás darabszámát azon a legalsó szinten állapítanánk meg, mely darabszám a legkevesebb műszaknapot igénylő hónapban szükséges. Ez a gazdasági szakemberek számára nyilván elfogadhatatlan.

Egy másik, jóval pontosabb, közelítés érdekében az 5. ábrán látható modellünket tovább részletezzük az erőforrás változók szétbontásával. Minden erőforrás változóból annyi új változót képezünk, ahány hónapban az erőforrást használják. Ezzel feladatunkat lényegében visszavezettük a 4. ábrán látható

Feltételek		Ágazati változók 1 2 ..... r	Egyéb változók	Erőforrás változók 1 2 ...... m	Rel.	b
⋮						
1. erőforrás	I.				$\leq$	0
	II.				$\leq$	0
	.	A_1		D_1	.	.
	.				.	.
	.				.	.
	XII.				$\leq$	0
2. erőforrás	I.				$\leq$	0
	II.				$\leq$	0
	IV.	A_2		D_2	.	.
	VI.				.	.
	IX.				$\leq$	0
⋮						
m. erőforrás	VI.				$\leq$	0
	VII.	A_m		D_m	$\leq$	0
	VIII.				.	.
	IX.				.	.
					.	.
					$\leq$	0
⋮						
Célf. Bruttó jöv.		+ + ... +		– – .... –		max

5. ábra. A modell felépítése részletes erőforrásfelhasználással

strukturához, azzal a különbséggel, hogy tisztázni kell az új változók célfüggvény-együtthatóinak tartalmát. Ide nem kerülhetnek most az erőforrások évi fix költségei, mert ugyanazon erőgép szerepel egy másik hónapban is, így a ténylegesnél többször csökkentenénk egyazon gép fix költségével a bruttó jövedelmet. Ha kiszámítjuk, hogy az adott vállalatnál egy műszaknapra átlagosan mekkora fix költség jut, majd ezt megszorozzuk az adott gép által az adott hónapban ledolgozható műszaknapok számával, ezek az értékek, feltételezve, hogy a gépek műszakteljesítése lényegesen nem változik, a célfüggvényünkbe a megfelelő helyre már beírhatók.

A létszám és a fagykár-kockázat maximális, illetve minimális értékei esetén a fentihez hasonló közelítésekre nem volt szükség, ezeket a paramétereket pontosan meg lehetett határozni.

A modell viszonylag egyszerű szerkeszthetősége és kezelhetősége, továbbá a szántóföldi növénytermesztésben és a kertészeti ágazatokban kapott, a gyakorlati tervezés számára rendkívül hasznos eredmények alapján e módszer más mezőgazdasági problémák vizsgálatára is javasolható. Jelentősége túlnő a vállalati gazdálkodás keretein, s népgazdasági szinten is fontos segédeszköz lehet olyan konfliktushelyzetek elemzéséhez, ahol a döntések különböző érdekek egyeztetésének jegyében születnek.

(Beérkezett: 1982. július 5-én.)

IRODALOM

1. Bell, D. E.—Keeney, R. L.—Raiffa, M.: *Conflicting objectives in decisions.* Luxemburg, 1977.
2. Cochran, J. L.—M. Zeleny: *Multiple criteria decision making,* Columbia, 1973. University of South Carolina Press
3. Csáki Cs.—Mészáros S.: *Számítógép a mezőgazdasági vállalatok irányításában.* Budapest 1976. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó
4. Csete L.—Harnos Zs.—Láng J.: Magyarország agrárökológiai potenciáljának várható alakulása 2000-ig. *Gazdálkodás* 1981/I.
5. Krekó B.: *Optimumszámítás.* Budapest, 1974. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
6. Pillis P.: *Mezőgazdasági modellek.* Budapest, 1978. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
7. Powell, R. A.—Hardaker, J. B.: Suboptimal programming methods for practical farm planning. *Rev. of Marketing and Agric. Econ.* Vol. 37. No. 2. 1969.
8. Stahl J.: Lineáris vektormaximum problémák efficiens pontjainak létezéséről. *Szigma* 1981. 2—3. szám
9. Szidarovszky, F., Yakovitz, S.: *Principles and procedures in numerical analysis.* New-York 1978. Plenum Press.
10. Szabadkai A.—Szidarovszky F.: *Döntéselőkészítési módszerek alkalmazása.* Budapest, 1983. Mezőgazdasági Kiadó.
11. Tóth J.: *Mezőgazdasági vállalatok automatizált tervezése.* Budapest, 1981. Mezőgazdasági Könyvkiadó.
12. Udovecz G.: *A harmonikus fejlődés főbb kérdései az élelmiszertermelésben.* Budapest, 1982. Akadémiai Kiadó.

ANALYSIS OF AGRICULTURAL ENTERPRISE GOALS BY MEANS OF COMPROMISE PROGRAMMING

For the foundation of development decisions of agricultural enterprises such method was looked for that

— enables the condensation of objective functions of different dimension and economic contents into one,

— in the joint objective function predetermined weights should be given to the various goals,

— the linear programming framework should not be exceeded and for determining the optimum of several objectives possibly no more subjective parameter should be estimated than the relative weights of the objective functions.

The method of compromise programming suited best these goals but the practical application of this method is not free of problems. Difficulties arise with optimization to minima according to various objective functions. It occurs that only approximative values of these minima can be determined but the accuracy of these approximations has met the practical requirements according to experience obtained so far.

The model is relatively simple to construct and to work with. The results obtained for field crops and in horticulture proved useful for practical planning. Hence this model may be proposed also for the examination of other agricultural problems. It may become an important tool also at national economic level with the analysis of such situations where decisions are made with the reconciliation of conflicting interests.

АНАЛИЗ ЦЕЛЕЙ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ С ПОМОЩЬЮ КОМПРОМИССНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

К обоснованию решений, способствующих развитию сельскохозяйственных предприятий, мы искали такой способ, который отвечает следующим критериям:

— дает возможность сместить целевые функции разных размерностей и разного экономического содержания в одну общую целевую функцию;

— в общей целевой функции разные функции должны осуществляться по заранее определённым весовым значениям;

— необходимо остаться в рамках линейного программирования, при определении многоцелевой оптимальной функции кроме установления весовых отношений разных функций нельзя принимать во внимание никакие субъективные параметры.

Всем этим целям наиболее соответствует способ копромиссного программирования, но при его практическом использовании возникают проблемы. Затруднения появляются при оптимализации минимумов разных целевых функций. Иногда величины минимумов определяются только приблизительно, но точность этих приближений до сих пор всегда отвечала требованиям практики.

Ввиду сравнительно простой конструкции и удобства использования модели, а также учитывая полезные для практического планирования результаты, полученные в полеводстве и садоводстве, этот способ можем рекомендовать и для исследования других сельскохозяйственных проблем. Этот способ может быть хорошим вспомогательным средством и на уровне народного хозяйства, где решения получаются в результате согласования разных интересов.

Molnár Sándor — Szidarovszky Ferenc

Többkritériumú értékfüggvényekről

1. Bevezetés

A gazdasági és műszaki élet számos területén találkozunk olyan feladatokkal, amikor véges vagy végtelen sok alternatíva közül kell egy vagy több legmegfelelőbbet kiválasztani. Ez a kiválasztás általában valamilyen optimalizációs elv alapján történik: valamilyen alkalmas feltételrendszer fennállása mellett egy célfüggvényt kell optimalizálni és az optimumhelyek határozzák meg a legmegfelelőbbnek ítélt alternatívát, vagy alternatívákat.

Bonyolultabb feladatok esetén nem elegendő egyetlen célfüggvény vizsgálata. Például a gazdasági haszon és környezeti ártalom nem azonos dimenziójú mennyiségek, így nem adhatók egyszerűen össze egyetlen célfüggvénnyé. Ilyenkor valamilyen több célú programozási módszert kell választani, és a több célú programozási feladat optimumhelyei határozzák meg a kiválasztandó döntési alternatívát.

Mind a két előző esetben — akár egy, akár több célú programozási feladatról is van szó — minden lehetséges alternatívához hozzá van rendelve egy vagy több célfüggvény értéke, azaz a döntés következménye számszerűen mérhető. Egyetlen célfüggvény esetén nyilvánvalóan az az alternatíva a kedvezőbb, amelyik kedvezőbb (nagyobb, vagy kisebb) célfüggvényértéket ad. Több célfüggvény esetén már nem ilyen egyszerű eldönteni, hogy melyik alternatíva a kedvezőbb. Tekintsünk például két maximalizálandó célfüggvényt és két alternatívát. Tegyük fel, hogy az egyes alternatívákhoz tartozó célfüggvényértékek:

$$\varphi_1(a_1) = 1, \varphi_1(a_2) = 2, \varphi_2(a_1) = 2, \varphi_2(a_2) = 1.$$

Az első célfüggvény szempontjából a második alternatíva a kedvezőbb, viszont a második célfüggvény szempontjából az első alternatíva. Minthogy a két alternatíva összehasonlítása a két célfüggvény esetében ellentmondó, pusztán a célfüggvényértékek alapján nem dönthetjük el, hogy melyikük az egyértelműen kedvezőbb.

Több célú programozási feladatok leggyakrabban alkalmazott megoldási módszere az, amikor valamilyen koncepció alapján a többféle célfüggvényt egyetlen célfüggvénnyé kapcsolják össze. A súlyozásos módszernél az eredeti célfüggvények lineáris kombinációját optimalizálják, a korlátok módszerénél pedig a legfontosabbnak ítélt célfüggvényt optimalizálják, a többire pedig korlátozó feltételeket tesznek. A szekvenciális optimalizálás módszerénél először a legfontosabbnak ítélt célfüggvényt optimalizálják, majd az optimális megoldások halmazán optimalizálják a második célfüggvényt, és így tovább. Minden lépésben csak egyetlen célfüggvény optimalizálására kerül sor. A célprogramozási és kompromisszumprogramozási módszerek esetében a célfüggvényértékekből adott vektornak egy ún. ideális ponttól való távolságát minimalizálják. Az ideális pont és a távolságfüggvény különféle megválasztásával adódnak a különböző konkrét módszerek. A [13] dolgozat és a [8], [9], [15], [16] könyvek igen jó összefoglalását adják ezeknek a módszereknek. Az eredményeknek az efficiens megoldásokhoz való kapcsolatát mutatja be a [7], [13] dolgozat. Az efficiens megoldások halmazából legmegfelelőbbnek ítélt megoldások kiválasztására a gyakorlati alkalmazások során leggyakrabban az ELECTRE módszer [1], [3] valamilyen változatát használják. E módszerek a lehetséges megoldásoknak egy félig-rendezését adják meg, az ELECTRE típusú módszerek eleve a félig-rendezést szolgáltatják, a szekvenciális optimalizálásnak a lexikografikus rendezés felel meg, a többi módszernél pedig a több célfüggvényből származtatott egyetlen célfüggvény kedvezőbb, vagy kedvezőtlenebb értéke adja a rendezést.

A döntéselmélet és az alkalmazások során gyakran felmerül a fordított kérdés, miszerint az alternatívák, vagy azok következményeinek (azaz több célfüggvény esetén a kifizető vektoroknak) a halmazán egy félig-rendezés adott, és azt vizsgálják, vajon milyen feltételek esetén írható le ez a félig-rendezés egyetlen célfüggvénnyel. Ez a kérdés matematikailag az ún. értékfüggvények létezésének problémáját jelenti. Ha a következmények tere sztochasztikus, akkor alkalmas linearitási feltételek mellett az értékfüggvényeket hasznossági függvényeknek nevezzük. Az értékfüggvények és hasznossági függvények létezésének kérdésköre és a függvények konkrét megkonstruálásának módszerei megtalálhatók például a [4], [14] cikkekben és az [5], [10] könyvekben.

Többtényezős hasznossági függvényekkel foglalkozik többek között a [6] dolgozat. Azzal a kérdéssel foglalkozik, hogyha az alternatívák következményeinek tere $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k$ direkt szorzat alakú és minden X_i $(1 \leq i \leq k)$ halmazon egy-egy U_i hasznossági függvény adott, akkor alkalmas feltételek fennállása esetén az X halmazon értelmezett U hasznossági függvény szükségképpen

$$U(\mathbf{x}) = \alpha_1 U_1(x_1) + \ldots + \alpha_k U_k(x_k), \tag{1.1}$$

vagy

$$1 + \alpha U(\mathbf{x}) = (1 + \alpha_1 U_1(x_1)) \ldots (1 + \alpha_k U_k(x_k)) \tag{1.2}$$

alakú. Az (1.1) és (1.2) alak levezetése megtalálható a [10] cikkben. Az (1.1) alakú hasznossági függvényeket lineárisnak, az (1.2) alakúakat pedig multiplikatívaknak nevezzük. Az (1.1) és (1.2) alakú hasznossági függvényeknek számos általánosítása és alkalmazása megtalálható a szakirodalomban.

Jelen dolgozatban multiplikatív értékfüggvényekkel foglalkozunk. Alkalmas feltételek fennállása esetén kimutatjuk, hogy direkt szorzat alakú következménytereken értelmezett értékfüggvények szükségképpen (1.2) alakúak.

2. A probléma megfogalmazása

Az X_i halmazokon értelmezett értékfüggvényeket v_i (x)-szel jelölve minden x alternatíva a $(v_1(\mathbf{x}), \ldots, v_k(\mathbf{x}))$ vektorral jellemezhető. Az $\mathbf{x}_1$ alternatívát az i-edik értékfüggvény szempontjából kedvezőbbnek mondjuk, mint az $\mathbf{x}_2$ alternatívát, ha $v_i(\mathbf{x}_1) > v_i(\mathbf{x}_2)$. Ha az alternatívák X halmazát leképezzük az értékfüggvények értékeiből alkotott k dimenziós vektorok halmazába, akkor az

$$E = \{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_k), \text{ létezik olyan } \mathbf{x} \in X, \text{ hogy}$$
$$v_i = v_i(\mathbf{x}), i = 1, \ldots, k \}$$

ún. értékteret kapjuk. Nyilvánvaló, hogy $E \subset R^k$, valamint tetszőleges $\mathbf{v} = (v_i) \in E$ esetén mindazon alternatívák, amelyekre $i = 1, \ldots, k$ esetén $v_i = v_i(\mathbf{x})$, az értékfüggvények szempontjából ekvivalensek. Tehát feltehetjük, hogy a több kritériumú döntési feladatot az E halmaz írja le. Célunk az, hogy az E halmazon megadjunk egy félig-rendezést és az azt leíró értékfüggvényt a koordinátákon értelmezett v_i értékfüggvények segítségével.

Abból a feltételezésből indulunk ki, hogy egy halmazon egy félig-rendezés megadása lényegesen bonyolultabb feladat, mint a döntéshozó által a legjobbnak vélt halmazelem kijelölése. Mint látni fogjuk, alkalmas feltételek mellett a legjobbnak tartott pontok a félig-rendezést már egyértelműen meghatározzák, és ez a félig-rendezés le is írható egy alkalmas (1.2) alakú értékfüggvénnyel.

Tegyük fel tehát, hogy az összes R^k-beli konvex, korlátos, zárt E halmazban a döntéshozó kijelöl egy-egy legjobbnak tartott $\mathbf{w}(E)$ pontot, amely eleget tesz a következő tulajdonságoknak:

1. $\mathbf{w}(E) \in E$;
2. $\mathbf{w}(E)$ efficiens pont E-ben, azaz nem létezik olyan $\mathbf{v} \in E$, amelyre $\mathbf{v} \geqq \mathbf{w}(E)$ és $\mathbf{v} \neq \mathbf{w}(E)$;
3. Ha E rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy $(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) \in E$ akkor és csak akkor, ha $(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k) \in E$, ahol i, j két rögzített index, akkor szükségképpen $\mathbf{w}(E)$ i-edik és j-edik koordinátája is megegyezik;
4. Ha $E_1 \subset E$ olyan konvex, korlátos, zárt halmaz, amelyre $\mathbf{w}(E) \in E_1$, valamint $i = 1, 2, \ldots, k$ esetén
$$\min \{ v_i \mid (v_1, \ldots, v_k) \in E \} = \min \{ v_i \mid (v_1, \ldots, v_k) \in E_1 \},$$
akkor szükségképpen $\mathbf{w}(E_1) = \mathbf{w}(E)$;
5. Ha t az R^k téren értelmezett olyan lineáris transzformáció, amelyre
$$t(v_1, \ldots, v_k) = (\alpha_1 v_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_k v_k + \beta_k)$$
($\alpha_i > 0$, β_i tetszőleges valós szám, $i = 1, \ldots, k$,) akkor szükségképpen
$$t(\mathbf{w}(E)) = \mathbf{w}(t(E)).$$

Az 1. és 2. tulajdonság azt fejezi ki, hogy a döntéshozó által E-ben legjobbnak tartott $\mathbf{w}(E)$ pont valóban E-beli és tovább nem javítható legyen. A 3. tulajdonság szemléletesen azt jelenti, hogyha egy E halmaz szimmetrikus az i és j koordinátáiban (azaz felcserélésükkel E nem változik), akkor a legjobb pont is szimmetrikus kell legyen ugyanezen koordinátákban. Más szavakkal ezt úgy is kifejezhetjük, hogyha egy döntési feladatban az i-edik és j-edik kritérium azonosként viselkedik, akkor a legjobb, optimális megoldásban sem teszünk különbséget köztük. A 4. tulajdonság a következőképpen értelmezhető. Ha az E lehetséges értékteret további feltételekkel úgy szűkítjük le, hogy a legjobb pontot nem vágjuk le és minden koordinátában a legrosszabb lehetőség sem változik meg, akkor a leszűkítéssel a legjobb pont se változzon meg. Az 5.

tulajdonság lényegében azt jelenti, hogy a mértékegységek megváltoztatásával a legjobb pontok ne változzanak.

Az axiómákkal kapcsolatban még két megjegyzést teszünk. A 4. axióma azt is mutatja, hogy a legjobb megoldás csak az egyes célfüggvények legrosszabb értékeitől függ, azaz most az „ideálisan legrosszabb" kifizetési vektorhoz, vagyis a célprogramozási eljárásokkal ellentétben nem az „ideálisan legjobb" kifizetési vektorhoz viszonyítjuk. A 3. és az 5. axióma együtt azzal a következménnyel is jár, miszerint az egyes célfüggvényeket azonos fontosságúaknak tekintjük. Amit esetünkben a 3. és az 5. axióma ilyen következménye mutat, azt az egyéb eljárások során azonos súlyok, a célvektor azonos komponensei, azonos alsó korlátok, stb. reprezentálnak.

A [12] dolgozatban bemutatott eljárás kis módosításával könnyű bebizonyítani a következő tételt.

1. *tétel.* A k dimenziós konvex, korlátos, zárt halmazokon pontosan egy $\mathbf{w}(E)$ leképezés adható meg, amely eleget tesz a fenti öt tulajdonságnak, továbbá $\mathbf{w}(E)$ egy nemlineáris programozási feladat megoldásával kapható meg a következőképpen. Legyen $I(E)$ azon indexek halmaza, amelyekre

$$w^*(E) = \min \{ v_i \mid (v_1, \ldots, v_k) \in E\} < \max \{v_i \mid (v_1, \ldots, v_k) \in E\},$$

ekkor $\mathbf{w}(E)$ koordinátáit a

$$(w_1, \ldots, w_k) \in E$$

$$g(\mathbf{w}) = \prod_{i \in I(E)} (w_i - w_i^*(E)) \to \max \tag{2.1}$$

feladat egyértelmű optimális megoldása szolgáltatja.

Érdemes megjegyeznünk, hogy a (2.1) optimumfeladat lehetséges megoldásainak halmaza konvex, korlátos, zárt és célfüggvénye kvázikonkáv, így numerikus megoldására a konvex programozás iterációs eljárásai jól alkalmazhatók.

Tekintsünk ezután egy rögzített $\mathbf{w}^* \in R^k$ vektort, és legyen

$$H = \{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in R^k, \mathbf{v} \geqq \mathbf{w}^* \}. \tag{2.2}$$

Egy ϱ bináris relációt adunk meg ezután a H halmazon. Ha $\mathbf{v}_1$ legalább egy koordinátában azonos $\mathbf{w}^*$-gal, valamint $\mathbf{v}_2$ minden koordinátában nagyobb, mint $\mathbf{w}^*$, akkor $\mathbf{v}_1 \,\varrho\, \mathbf{v}_2$. Legyen ezután $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ különböző és legyenek minden koordinátájukban nagyobbak, mint $\mathbf{w}^*$. Ekkor a $\mathbf{v}_1 \varrho \mathbf{v}_2$ reláció akkor és csak akkor áll fenn, ha létezik olyan korlátos, konvex, zárt E halmaz, amelyre

$$I(E) = \{ 1, 2, \ldots, k \}, \text{ valamint}$$

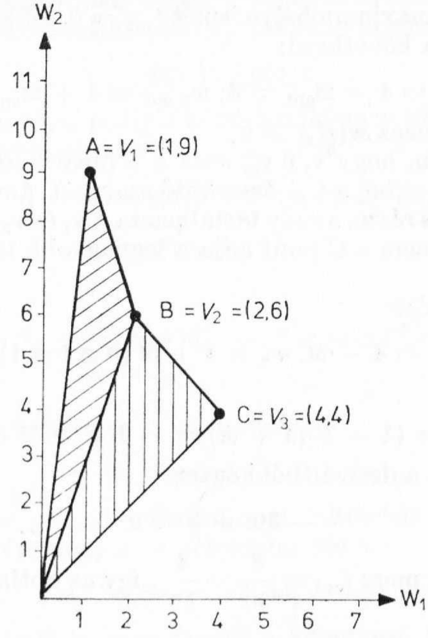
$$\text{a) } \mathbf{v}_2 = \mathbf{w}(E);$$

$$\text{b) } \mathbf{v}_1 \in E; \tag{2.3}$$

$$\text{c) } \mathbf{w}^*(E) = \mathbf{w}^*$$

Könnyű kimutatnunk, hogy a ϱ reláció általában nem ad közvetlenül féligrendezést a H halmazon, mint azt a következő példa illusztrálja.

1. *példa.* Legyen $k = 2$, $\mathbf{w}^* = \mathbf{0}$, $v_1 = (1, 9)$; $\mathbf{v}_2 = (2{,}6)$ és $\mathbf{v}_3 = (4{,}4)$. Kimutatjuk először, hogy $\mathbf{v}_1 \varrho \mathbf{v}_2$ és $\mathbf{v}_2 \varrho \mathbf{v}_3$. Tekintsük az 1. ábrát, és azon az AOB és



1. ábra

BOC háromszögeket. Legyen $E_1 = AOB\,\Delta$ és $E_2 = BOC\,\Delta$. Egyszerű számolással ki fogjuk mutatni, hogy

$$\mathbf{w}(E_1) = \mathbf{v}_2 \text{ és } \mathbf{w}(E_2) = \mathbf{v}_3,$$

vagyis $\mathbf{v}_1 \varrho \mathbf{v}_2$ és $\mathbf{v}_2 \varrho \mathbf{v}_3$. Vizsgáljuk meg először az AOB háromszöget. A $\mathbf{w}(E_1)$ pont efficiens pont kell legyen, így a BA szakaszon kell lennie, aminek egyenlete:

$$w_1 = 2 - t, w_2 = 6 + 3t \qquad (0 \leqq t \leqq 1).$$

Ekkor pedig a (2.1) célfüggvény értéke:

$$w_1 w_2 = (2 - t)(6 + 3t) = -3t^2 + 12,$$

amelynek egyetlen maximumhelye van: $t_{\text{opt}} = 0$, vagyis (2.1) maximumhelye az AB szakaszon a következő:

$$w_{1,\text{opt}} = 2 - t_{\text{opt}} = 2; \; w_{2,\text{opt}} = 6 + 3 \cdot t_{\text{opt}} = 6,$$

vagyis a $B = \mathbf{v}_2$ pont, azaz $\mathbf{w}(E_1) = \mathbf{v}_2$. Tekintsük ezután az OBC háromszöget. Ekkor a BC oldal egyenlete

$$w_1 = 4 - 2t, w_2 = 4 + 2t \; (0 \leqq t \leqq 1)$$

a (2.1) célfüggvény megfelelő értéke pedig

$$w_1 w_2 = (4 - 2t)(4 + 2t) = 16 - 4t^2,$$

amelynek egyértelmű maximumhelye ismét $t_{\text{opt}} = 0$. Ekkor pedig az optimális pont a BC szakaszon a következő:

$$w_{1,\text{opt}} = 4 - 2t_{\text{opt}} = 4;\ w_{2,\text{opt}} = 4 + 2t_{\text{opt}} = 4,$$

vagyis a $C = \mathbf{v}_3$ pont, azaz $\mathbf{w}(E_2) = \mathbf{v}_3$.

Azt látjuk be ezután, hogy $\mathbf{v}_1\, \bar{\varrho}\, \mathbf{v}_3$, azaz a ϱ bináris reláció nem feltétlenül tranzitív. Tekintsük e célból a CA összekötő szakaszt, amely tetszőleges olyan konvex E halmaznak is része, amely tartalmazza a $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_3$ pontot. Kimutatjuk, hogy a CA szakaszon nem a C pont adja a legnagyobb (2.1) függvényértéket, azaz $\mathbf{w}(E) \neq \mathbf{v}_3$.

A CA szakasz egyenlete

$$w_1 = 4 - 3t,\ w_2 = 4 + 5t\ (0 \leqq t \leqq 1),$$

ekkor pedig

$$w_1 w_2 = (4 - 3t)(4 + 5t) = -15t^2 + 8t + 16,$$

amely minimumhelyét a deriváltból képzett

$$-30t + 8 = 0$$

egyenletből kaphatjuk meg: $t_{\text{opt}} = \dfrac{8}{30} = \dfrac{4}{15}$, így az optimumhely a CA szakaszon a következő:

$$w_{1,\text{opt}} = 4 - 3 \cdot t_{\text{opt}} = \frac{16}{5};\ w_{2,\text{opt}} = 4 + 5 \cdot t_{\text{opt}} = \frac{16}{3},$$

amely valóban különbözik a $\mathbf{v}_3$ ponttól.

Vezessük be ezután a H halmazon a $\prec$ relációt a következőképpen. Legyen $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in H$, akkor azt mondjuk, hogy a $\mathbf{v}_1 \prec \mathbf{v}_2$ reláció fennáll, ha létezik oly véges sorozat:

$$\mathbf{v}_1', \mathbf{v}_2', \ldots, \mathbf{v}_{r(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)}', \text{ amelyre}$$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1';\ \mathbf{v}_1'\, \varrho\, \mathbf{v}_2';\ \mathbf{v}_2'\, \varrho\, \mathbf{v}_3';\ \ldots;\ \mathbf{v}_{r(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)-1}'\, \varrho\, \mathbf{v}_{r(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)}' = \mathbf{v}_2. \tag{2.4}$$

A következő paragrafusban kimutatjuk, hogy a $\prec$ reláció már valóban félig-rendezést szolgáltat és bebizonyítjuk, hogy ez a félig-rendezés egy alkalmas multiplikatív értékfüggvénnyel írható le.

3. A $\prec$ reláció vizsgálata

Bebizonyítjuk először a következő tételt.

2. *tétel.* A $\prec$ reláció rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

a) $\mathbf{v} \not\prec \mathbf{v}$;

b) $\mathbf{v}_1 \prec \mathbf{v}_2 \not\Rightarrow \mathbf{v}_2 \prec \mathbf{v}_1$;

c) $\mathbf{v}_1 \prec \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_2 \prec \mathbf{v}_3 \Rightarrow \mathbf{v}_1 \prec \mathbf{v}_3$,

azaz $\prec$ félig-rendezés a H halmazon.

Bizonyítás. Az a) és b) tulajdonság fennállása nyilvánvaló, hiszen az 1. tétel és a $\prec$ reláció definíciójának alapján $\mathbf{v}_1 \prec \mathbf{v}_2$ esetén a (2.1) célfüggvény értékére

$$g(\mathbf{v}_1) < g(\mathbf{v}_2). \tag{3.1}$$

A c) tulajdonság igazolása pedig a következőképpen történhet. Minthogy $\mathbf{v}_1 \prec \prec \mathbf{v}_2$ és $\mathbf{v}_2 \prec \mathbf{v}_3$, létezik olyan $\mathbf{v}'_1, \ldots, \mathbf{v}'_{r(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)}$ és $\mathbf{v}''_1, \ldots, \mathbf{v}''_{r(\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)}$ sorozat, hogy

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}'_1;\ \mathbf{v}'_1\ \varrho\ \mathbf{v}'_2;\ \ldots;\ \mathbf{v}'_{r(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)-1}\ \varrho\ \mathbf{v}'_{r(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)};$$

$$\mathbf{v}'_{r(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)} = \mathbf{v}_2,$$

valamint

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}''_1;\ \mathbf{v}''_1\ \varrho\ \mathbf{v}''_2;\ \ldots;\ \mathbf{v}''_{r(\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)-1}\ \varrho\ \mathbf{v}''_{r(\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)};$$

$$\mathbf{v}''_{r(\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)} = \mathbf{v}_3.$$

Ekkor pedig szükségképpen $\mathbf{v}_1 \prec \mathbf{v}_3$, hiszen a

$$\mathbf{v}'_1, \ldots, \mathbf{v}'_{r(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)}, \mathbf{v}''_2, \ldots, \mathbf{v}''_{r(\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)}$$

sorozat kielégíti a $\prec$ reláció definíciójának feltételeit.

Kimutatjuk ezután, hogy a $\prec$ félig-rendezés a

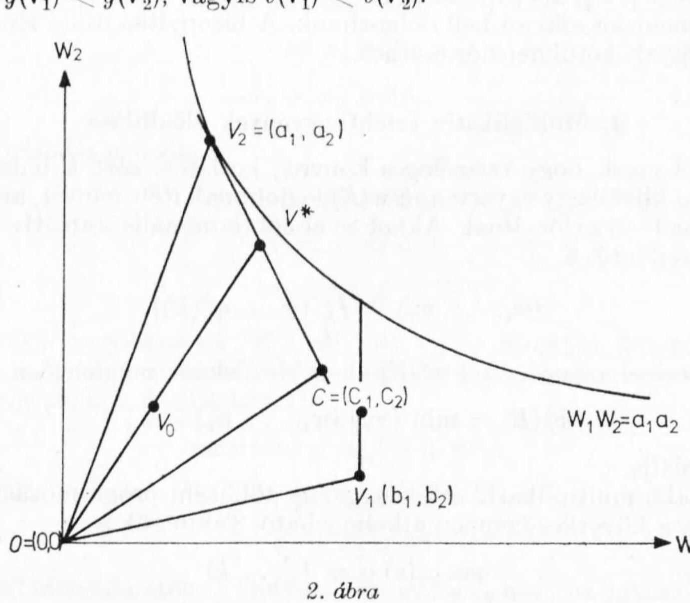
$$v(w_1, \ldots, w_k) = (w_1 - w_1^*)(w_2 - w_2^*) \ldots (w_k - w_k^*) \tag{3.2}$$

értékfüggvénnyel írható le, azaz fennáll a következő tétel.

3. *tétel.* $\mathbf{v}_1 \prec \mathbf{v}_2 \Leftrightarrow v(\mathbf{v}_1) < v(\mathbf{v}_2)$.

Bizonyítás

a) Tegyük fel először, hogy $\mathbf{v}_1 \prec \mathbf{v}_2$. Ekkor az előző tétel bizonyításában láttuk, hogy $g(\mathbf{v}_1) < g(\mathbf{v}_2)$, vagyis $v(\mathbf{v}_1) < v(\mathbf{v}_2)$.



2. ábra

b) Tegyük fel ezután, hogy $v(\mathbf{v}_1) < v(\mathbf{v}_2)$. Azt fogjuk kimutatni, hogy ekkor $\mathbf{v}_1 \prec \mathbf{v}_2$, vagyis létezik olyan véges $\mathbf{v}'_1, \ldots, \mathbf{v}'_{r(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)}$ sorozat, amely eleget tesz a (2.4) feltételeknek. Ezt az állítást először a $k = 2$ speciális esetben bizonyítjuk be és megmutatjuk ezután, hogyan általánosítható a bizonyítás az általános esetben. Legyen $\mathbf{v}_1 = (b_1, b_2)$ és $\mathbf{v}_2 = (a_1, a_2)$, valamint $\alpha = a_1a_2$ és $\beta = b_1b_2$. Tekintsük a $w_1w_2 = a_1a_2$ görbét (2. ábra). Kimutatjuk először, hogyha ehhez a görbéhez érintőt húzunk az (a_1, a_2) pontban, és (c_1, c_2) ennek az érintőnek egy tetszőleges pozitív koordinátákkal rendelkező pontja, akkor a $\mathbf{v}_2 0 \mathbf{c}$ háromszögben a v_2 pont adja a legnagyobb v függvényértéket. Ez az állítás azonnal adódik abból a tényből, hogy a $w_1w_2 = a_1a_2$ görbe konvex, az érintő a görbe alatt van, így az érintő bármely pozitív koordinátákkal rendelkező pontja kisebb v értéket ad, mint a görbéhez tartozó $v = a_1a_2$ érték. Ekkor pedig a $\mathbf{v}_2\, 0\, \mathbf{c}$ háromszögben is $\mathbf{v}_2$ adja a legnagyobb függvényértéket, hiszen, ha $\mathbf{v}_0$ a háromszög tetszőleges pontja, akkor az $0\, \mathbf{v}_0$ sugár mentén a $\mathbf{v}_0$-hoz tartozó függvényérték tovább növelhető az érintő egy pontjáig, amit az ábrán $\mathbf{v}^*$-gal jelöltünk.

Vegyük észre azután, hogy a $w_1w_2 = \gamma$ görbesereg jelenti a

$$w'_2 = -\frac{w_2}{w_1}$$

differenciálegyenlet megoldását, és ez a differenciálegyenlet eleget tesz az I intervallumon az Euler-módszer konvergencia-feltételeinek (ld. [17]). Tehát az I intervallumon a $w_1w_2 = a_1a_2$ görbe tetszőlegesen jól közelíthető érintőkből álló és az (a_1, a_2) kezdőponttal rendelkező véges poligonnal. Így elérhető, hogy a poligon (b_1 pontbeli) végpontjának ordinátája nagyobb legyen, mint b_2. Ekkor pedig a poligon csúcspontjai a (b_1, b_2) ponttal kiegészítve eleget tesznek a (2.4) relációknak.

Magasabb dimenzió esetén a bizonyítás ugyanígy megy, azzal a különbséggel, hogy ekkor a (w_1, w_2) koordinátasík helyett a $\mathbf{v}_2$, 0 és $\mathbf{v}_1$ pontok által meghatározott kétdimenziós síkban kell dolgoznunk. A bizonyítás többi lépése analóg az előbb tárgyalt kétdimenziós esethez.

4. Multiplikatív értékfüggvények előállítása

Tegyük fel most, hogy tetszőleges konvex, korlátos, zárt E halmaz esetén a döntéshozó kijelöl egy egyértelmű $\mathbf{w}(E)$ legjobbnak ítélt pontot, amely eleget tesz a 2. pont 1—5 axiómáinak. Akkor az ebből (minimális tranzitív bővítéssel) adódó félig-rendezés a

$$v(w_1, \ldots, w_k) = \prod_{i=1}^{k} (w_i - w_i^*(E)) \tag{4.1}$$

értékfüggvénnyel azonos, ahol $w_i^*(E)$-ot az előzőeknek megfelelően a

$$w_i^*(E) = \min \{w_i \mid (w_1, \ldots, w_k) \in E\} \tag{4.2}$$

reláció definiálja.

A (4.1) alakú multiplikatív értékfüggvény többcélú programozási feladatok megoldására a következőképpen alkalmazható. Tekintsük a

$$\max_{x \in X} \varphi_i(x) \quad (i = 1, \ldots, k) \tag{4.3}$$

többcélú programozási feladatot. Tegyük fel, hogy a döntéshozónak a célfüggvények fontosságát illető preferenciája a $v_i(\varphi_i)$ értékfüggvényekkel írható le. Ha az értéktéren definiált 1—5 axiómákat a döntéshozó elfogadja, akkor a többcélú programozási feladatot a következő algoritmussal oldjuk meg:

1. *lépés.* $i = 1, \ldots, k$ esetén oldjuk meg a

$$\min_{x \in X} v_i(\varphi_i(x))$$

feladatot, és jelölje w_i^* az optimális célfüggvényértéket.

2. *lépés.* Oldjuk meg ezután a

$$\max_{x \in X} \prod_{i=1}^{k} (v_i(\varphi_i(x)) - w_i^*)$$

egyetlen célfüggvénnyel rendelkező feladatot.

A dolgozat befejezéseként az itt bemutatott módszert illusztráljuk egy numerikus példán.

2. *példa.* Tekintsük a

$$\max 3x_1 + x_2 \text{ és } x_1 + 3x_2$$

$$x_1, x_2 \geqq 0$$

$$x_1 + x_2 \leqq 18$$

két célfüggvénnyel rendelkező lineáris programozási feladatot.

Az 1. lépésben először a

$$\min 3x_1 + x_2$$

$$x_1, x_2 \geqq 0$$

$$x_1 + x_2 \leqq 18$$

feladatot, másodszor pedig a

$$\min x_1 + 3x_2$$

$$x_1, x_2 \geqq 0$$

$$x_1 + x_2 \leqq 18$$

problémát kell megoldanunk. Nyilvánvaló, hogy mindkét feladat optimális megoldása: $x_1 = x_2 = 0$ és az optimális célfüggvényértékek egyaránt zérust adnak. Ekkor pedig a 2. lépésben a

$$\max (3x_1 + x_2)(x_1 + 3x_2)$$

$$x_1, x_2 \geqq 0$$

$$x_1 + x_2 \leqq 18$$

feladatot kell megoldanunk. Könnyen kimutatható, hogy az egyetlen optimális megoldást a $x_1 = x_2 = 9$ pont szolgáltatja, és a hozzá tartozó optimális célfüggvény értékek:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 36.$$

Megjegyezzük végül, hogy a [18] dolgozat egy hasonló alapelven működő, de a konkrét numerikus realizálás szempontjából ettől eltérő megoldási módszert javasol.

(Beérkezett: 1982. szeptember 19-én.)

IRODALOM

1. Abi-Ghanem, G.—L. Duckstein—L. Hekman (1978) *Multiobjective analysis of a vegetation management problem using ELECTRE II*. Working paper, 78—19, Systems and Ind. Eng. Dept., Univ. of Arizona, Tucson, USA.
2. Cohon, J. L.—D. Marks (1975) A review and evaluation of multiobjective programming techniques. *Water Resources Research*, 11 (2), 208—220. old.
3. Dávid L.—L. Duckstein (1976) Multi-criterion ranking of alternative long-range water resources systems. *Water Resources Bulletin*, 12 (4), 731—754. old.
4. Fishburn, P. C. (1967) Methods for estimating additive utilities. *Man. Sci.*, 13 (7) 435—453. old.
5. Fishburn, P. C. (1970) *Utility theory for decision making*. John Wiley, New York.
6. Fishburn, P. C. (1978) A survey of multiattribute/multicriterion evaluation theories. In S. Zionts (ed.) *Multiple criteria problem solving*, Proceedings, Buffalo, N. Y., USA.
7. Gershon, M. (1981) *Model choice in multiobjective decision making in natural resource systems*. PhD Dissertation, Systems and Ind. Eng. Dept., Univ. of Arizona, Tucson, USA.
8. Goicoechea, A.—D. Hansen—L.Duckstein (1982) *Introduction to multiobjective analysis with engineering and business applications*. John Wiley, New York.
9. Hwang, Ch. L.—A. S. Md. Masud (1979) *Multiple objective decision making— Methods and applications*. Springer, Berlin.
10. Keeney, R. L.—H. Raiffa (1976) *Decisions with multiple objectives preferences and value tradeoffs*. John Wiley, New York.
11. Szidarovszky F. (1977) *Játékelmélet*. Tankönyvkiadó, Budapest.
12. Szidarovszky F. (1977) A Nash-féle kooperatív megoldási koncepció általánosításáról. *SZIGMA*, 69—74. old.
13. Szidarovszky F. (1980) *Weak and strong dominance in multiobjective programming*. Working paper, 80—20, Systems and Ind. Eng. Dept., Univ. of Arizona, Tucson, USA.
14. Szidarovszky, F. (1980) *On the utility axioms of J. von Neumann, O. Morgenstern and P. Fishburn*. Working paper, 80—21, Systems and Ind. Eng. Dept., Univ. of Arizona, Tucson, USA.
15. Szidarovszky F.—Szabadkai A. (1983) *Döntéselőkészítési módszerek alkalmazása*. Mezőgazdasági Könyvkiadó, Budapest.
16. Szidarovszky F.—Molnár S. (1983) *Játékelméleti és többcélú programozási módszerek műszaki alkalmazásokkal*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, megjelenés alatt.
17. Szidarovszky F. (1974) *Bevezetés a numerikus módszerekbe*. Közg. és Jogi Könyvkiadó, Budapest.
18. Forgó F. (1981) Döntés több kritérium alapján, egy játékelméleti megközelítés. *SZIGMA*, 29—38. old.

MULTICRITERIA VALUE FUNCTIONS

The paper deals with the existence of multiplicative value and utility functions. The authors first prove that by designating the most preferred element a semi-order satisfying an adequate system of axioms may be directly defined on convex, bounded and closed sets instead of using pairwise comparisons. Furthermore, it is proved that this semi-order can be described by a multiplicative value function. These theoretical results may be well applied to the solution of multi-objective programming problems.

О ФУНКЦИЯХ СТОИМОСТИ С НЕСКОЛЬКИМИ КРИТЕРИЯМИ

Статья занимается вопросом существования мультипликативных функций стоимости и полезности. Авторы статьи сначала указывают на то, что полупорядочение, которое соответствует какой-нибудь подходящей системе аксиом, может быть дано непосредственно вместо по-парного сравнения путём определения наиболее предпочитаемого элемента из выпуклого, ограниченного, замкнутого множества. В дальнейшем авторы доказывают, что это полупорядочение можно описать мультипликативной функцией стоимости. Описанные теоретические результаты возможно применить для решения проблем многоцельного программирования.

FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK

Füstös László—Meszéna György—Simonné Mosolygó Nóra

A sokdimenziós skálázás egyes újabb módszerei II.

Bevezetés

Első cikkünk (1982. évi 3. szám, 193—212 o.) keretében foglalkoztunk a téma általános bevezetésével, majd a skálázás problémájának beilleszkedésével a sokváltozós statisztika egészébe. Ezután a nem metrikus, illetve metrikus módszerek közül áttekintettük a MINISSA és a MRSCAL eljárást. — Második cikkünk e gondolatkörnek az előzőekre épülő újabb módszereit mutatja be: az INDSCAL-t és változatait, a PROFIT és a PREFMAP eljárásokat.

Az ismertetés célja ismét e lehetőségeknek közelebb hozása a hazai gyakorlathoz, az eljárásokkal kapcsolatos nyitott kérdések felvetése. Őszintén reméljük, hogy így mind az újabb elméleti eredmények születését, mind pedig az alkalmazási tapasztalatok bővülését jelentősen elősegíthetjük.

1. Az INDSCAL eljárás és változatai (IDIOSCAL, PARAFAC-2 stb.)

(*Ind*ividual differences *scal*ing; Carroll—Chang, 1970)

Megfigyeléseink (az objektumok) a sokváltozós „állapottér" pontjainak tekinthetők. Az euklideszi távolságfogalom értelmében *egymáshoz közel eső pontok* a jellemzők között rendre fennálló kicsiny eltérések következtében ilyen helyzetűek. Megállapítható tehát: a jellemző változók összességét tekintve ezen objektumok fokozottan *hasonlóak* egymáshoz.

Félreértések elkerülése végett rögzítsünk most egy megállapodást. Az INDSCAL modell inputját és outputját a későbbiekben részletesen ismertetjük. Előljáróban azonban mondjuk ki — a leírás és megértés könnyítése érdekében —: *az input térben hasonlóságokról, az output térben távolságokról fogunk beszélni.* Ismét hangsúlyozzuk e fogalmazás problémáját, hiszen a távolságok is tekinthetők hasonlósági mértéknek s a hasonlóságok alkalmas távolság-definícióval távolságoknak. Ugyancsak használható volna bármelyik értelemben a különbözőségek kategóriája is. A valóság modellezésének különböző eseteiben a konkrét helyzetnek legjobban megfelelő fogalomalkotást részesítjük előnyben. Egy pillanatra sem feledkezve meg e lehetőségekről, tisztán technikai okokból alkalmazzuk a jelzett terminológiát.

Az INDSCAL modell célja is az, hogy az eredetileg rendelkezésre álló jellemzők (változók) sokdimenziós teréről (állapottér) áttérjen egy elvben tetszőleges, de alacsonyabb dimenziószámú térre, — gyakorlatilag rendszerint két dimenziós térre ! — ebben helyezve el az eredeti input tér „pontjait" (az objektumokat) olymódon, hogy a közöttük levő távolságok az eredeti hasonlóságokkal monoton függvénykapcsolatban álljanak. Az INDSCAL újdonsága, hogy e megfeleltetést az egyedek által képviselt más-más szemléletnek megfelelő hasonlóságok alapján is elvégzi. Végül eredő pont-ábrát ad az output térben. Ezt kiegészíti egy plusz közléssel, megmondva, hogy az egyedek részéről az output tengelyek milyen súlyozása következik az input adatokban implicite benne foglalt információkból.

A mondottak értelmében tehát:

$$\delta_{jk,i} \approx F(d_{jk,i}) \tag{1.1}$$

ahol: $d_{jk,i}$ a j edik és k-edik objektum output távolsága az i-edik egyed szemléletében,

F monoton függvény

$\delta_{jk,i}$ a megfelelő input hasonlóság (ill. különbözőség).

Koordinátákkal fejezve ki a távolságokat:

$$d_{jk,i} = \left(\sum_{t=1}^{r} (y_{jt,i} - y_{kt,i})^2 \right)^{1/2},$$

ahol r az eredő output tér dimenziószáma.

Ha a (később ismertetendő) egyedi súlyozást még nem tartalmazó koordinátákból indulunk ki, akkor ezek egyenkénti értelemszerű transzformálásával (az egyedekre és tengelyekre vonatkozó súlyokkal) ugyancsak előáll $d_{jk,i}$:

$$y_{jt,i} = \sqrt{w_{it}}\, x_{jt} \quad \text{és:}$$

$$d_{jk,i} = \left(\sum_{t=1}^{r} w_{it}(x_{jt} - x_{kt})^2 \right)^{1/2}$$

1.1. *Az INDSCAL eljárás*

Az input háromdimenziós adatmátrix. Egy kétdimenziós táblát ad az objektumok sokváltozós jellemzése:

	változók
objektumok	

s ha az egyedek részéről történő eltérő megítéléseket is figyelembe vesszük, létrejön a harmadik dimenzió. (Elhelyezve egymás fölé a különböző egyedek szemléletében adódó adattáblákat.)

Tartalmában azonos, formálisan más jellegű az alábbi input tábla:

		objektumok 1 2 . . . k . . . n
objektumok	1	
	2	
	. . .	
	j	δ_{jk}
	. . .	
	n	

Ekkor az objektumok egymáshoz viszonyított hasonlóságait ($\delta_{jk} = \delta_{kj}$) használjuk fel az induláshoz, természetesen figyelembe véve m egyed más-más szemléletét, itt is megkapjuk a harmadik dimenziót.

Az eljárás két eredménymátrixot ad. Az első az objektumok koordinátáit tartalmazza 1—2—3, esetleg több, de az eredeti jellemzők számánál általában kisebb dimenziójú térben. (Leggyakrabban két dimenzióban.) A dimenziószám-csökkentés alapgondolatát az előző cikkben részletesen kifejtettük, de a továbbiakban is követhető lesz. A második eredménymátrix az *egyedek* által adandó *eredő* súlyokat adja meg az *előző eredménymátrix tengelyeire!* Tehát a redukált tér eredő, leszármaztatott tengelyeire kalkulált eredő súlyokat kapjuk meg, melyek következnek az egyedek által az input három-dimenziós mátrixban rögzített, a változókra vonatkozó eltérő eredeti megítélésből! A módszer lényege, hogy a két eredménymátrix a később definiálandó értelemben az induló adatmátrix információtartalmának legjobb közelítését adja a rögzített alacsonyabb dimenziószám mellett. (Pl. két dimenzióban!)

Az output táblák jellege tehát:

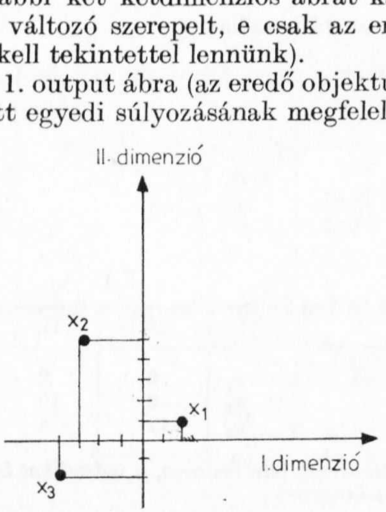
		dimenziók 1 2 . . . t . . . r
objektumok	1	
	2	
	. . .	
	j	x_{jt}
	. . .	
	n	

		dimenziók 1 2 . . . t . . . r
objektumok	1	
	2	
	. . .	
	i	w_{it}
	. . .	
	m	

Itt w_{it} méri az i-edik egyed szemszögéből az output pont t-edik dimenziójának (tengelyének) fontosságát. Felhívjuk a figyelmet, hogy w_{it} leszármaztatott eredmény, értéke az i-edik egyed számára is eleve ismeretlen adat, burkoltan van benne az input háromdimenziós adat-tömbjében (az i-edik egyed részéről az „egyedi hasonlóságokban" megnyilvánult szemléletben).

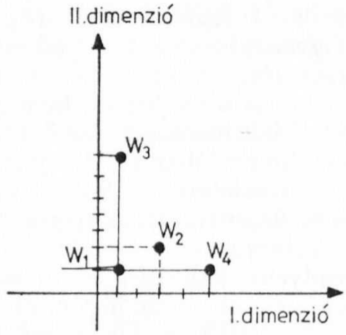
Mutassuk be az outputról elmondottakat egy fiktív példán. Tegyük fel, hogy 3 *objektumot* jellemzett az input adattömb 4 *egyed* szemléletében, s eredményül az alábbi két kétdimenziós ábrát kaptuk (arra, hogy az induló rendszerben hány változó szerepelt, e csak az eredményeket szemléltető fiktív példában nem kell tekintettel lennünk).

Az 1. output ábra (az eredő objektum tér) átértékelése a 4 egyed eredményül kapott egyedi súlyozásának megfelelően:



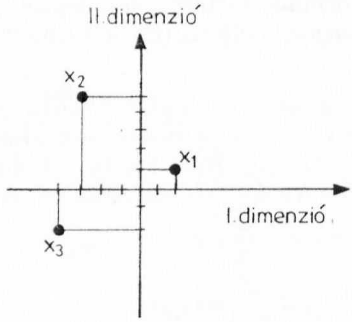
		Dimenziók	
		I.	II.
objektumok	x_1	2	1
	x_2	—3	5
	x_3	—4	—2

1. ábra. Eredő objektum tér



		Dimenziók	
		I.	II.
súlyok	w_1	1	1
	w_2	3	2
	w_3	1	6
	w_4	5	1

2. ábra. Eredő egyedi súlyok tere



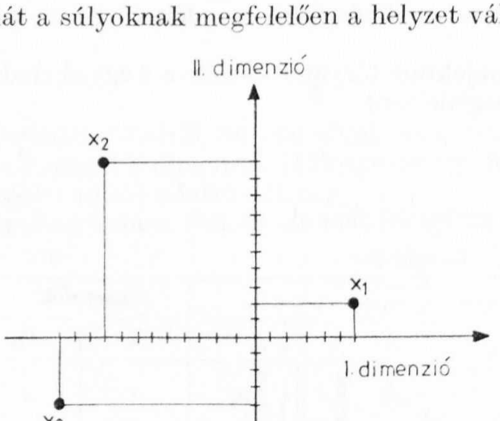
	I.	II.
x_1	2	1
x_2	−3	5
x_3	−4	−2

3. ábra. Az első egyed saját szemléletének megfelelő „privát" tere

A távolságok az első egyed privát terében: $d_{ik,1}$

	x_1	x_2	x_3
x_1	—		
x_2	6,40	—	
x_3	6,71	7,07	—

Itt tehát a súlyoknak megfelelően a helyzet változatlan.

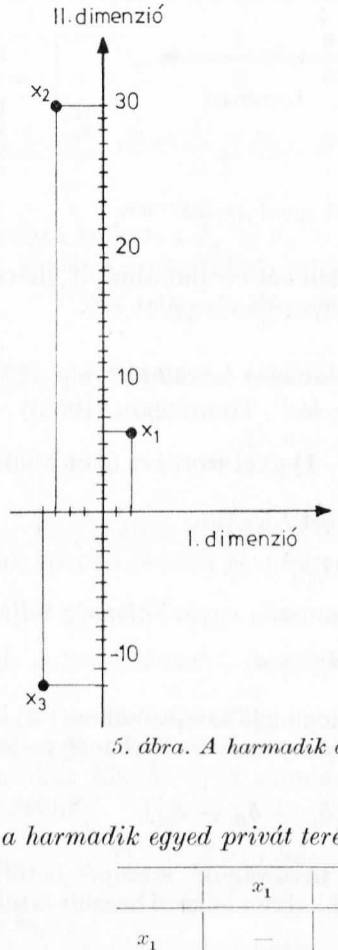


	I.	II.
x_1	6	2
x_2	−9	10
x_3	−12	−4

4. ábra. A második egyed „privát" tere (az első dimenziót háromszoros, a másodikat kétszeres súllyal véve tekintetbe)

A távolságok a második egyed privát terében: $d_{ik,\,2}$

	x_1	x_2	x_3
x_1	—	—	—
x_2	17,01	—	—
x_3	18,97	14,32	—



	I.	II.
x_1	2	6
x_2	—3	30
x_3	—4	—12

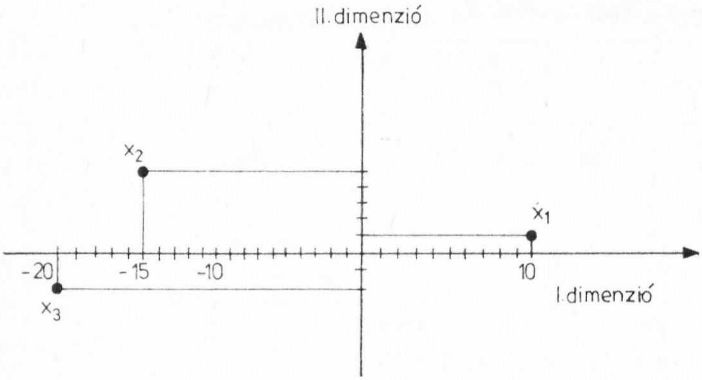
5. ábra. A harmadik egyed „privát" tere

A távolságok a harmadik egyed privát terében: $d_{ik,\,3}$

	x_1	x_2	x_3
x_1	—	—	—
x_2	24,52	—	—
x_3	18,97	42,01	—

A távolságok a negyedik egyed privát terében: $d_{ik,\,4}$

	x_1	x_2	x_3
x_1	—	—	—
x_2	25,32	—	—
x_3	30,15	8,60	—



	I.	II.
x_1	10	1
x_2	−15	5
x_3	−20	−2

6. ábra. A negyedik egyed „privát" tere

A következőkben az INDSCAL modell két output ábráját, illetve a hozzájuk tartozó mátrixok számítási menetét vesszük vizsgálat alá.

1.2. *A különbözőségek átalakítása becsült távolságokká.* („Additiv konstans becslés". Torgerson (1958))

Ha induló adataink hasonlóságok, (−1)-gyel szorozva őket különbözőségekké alakíthatók.

Alkalmazzuk a következő feltételezést:[1] legyen

$$\hat{d}_{jk,i} = \delta_{jk,i} + c_i. \tag{1.2}$$

A távolságokra megkívánjuk a háromszög egyenlőtlenség teljesülését:

$$d_{jl} \leqq d_{jk} + d_{kl}. \tag{1.3}$$

Behelyettesítve (1.2) jobb oldalának megfelelő kifejezéseket (1.3)-ba, átrendezés után kapjuk, hogy a c_i-k legkisebb értéke, mely mellett még teljesül az egyenlőtlenség:

$$c_{\min} = \max_{j,k,l} [\delta_{jl} - \delta_{jk} - \delta_{kl}].$$

A leírt egyszerű séma a „komparatív távolságok" szerepét betöltő különbözőségekből valódi távolság tulajdonságokkal rendelkező becsült értékeket állít elő.

1.3. *A becsült távolságok átalakítása becsült skaláris szorzatokká*

Legyen az r dimenziós output tér két vektora (pontja):

$$\mathbf{x}_j = [x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{jr}], \quad \mathbf{x}_k = [x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kr}]$$

ekkor a skalár szorzat: $\mathbf{x}_j\mathbf{x}_k = \sum_{t=1}^{r} x_{jt}x_{kt}$.

[1] Metrikus módszerről lévén szó, eleve feltételeztük, hogy a hasonlóságok és távolságok között zárt alakú monoton függvénykapcsolat áll fenn.

A skálázó módszerek szempontjából az origó helyzetére nem kellene tekintettel lennünk, de az aktuálisan felhasználásra kerülő szorzat az origó változtatásával szemben nem invariáns. Ezért az origót — a kialakult gyakorlatnak megfelelően — a pontok súlypontjában rögzítjük.

Ugyancsak TORGERSON 1958-ból származó eredménye szerint: az euklideszi távolságok az alábbi képletnek megfelelően átalakíthatók a súlypontba helyezett origótól induló vektorok skaláris szorzatává.

$$b_{jk} = -\frac{1}{2}(d_{jk}^2 - d_{.k}^2 - d_{j.}^2 + d_{..}^2) \tag{1.4}$$

ahol: $d_{.k}^2 = \frac{1}{n}\sum_j d_{jk}^2, \quad d_{j.}^2 = \frac{1}{n}\sum_k d_{jk}^2, \quad d_{..}^2 = \frac{1}{n}\sum_j\sum_k d_{jk}^2, \quad d_{jk}^2 = \sum_{t=1}^{r}(x_{jt} - x_{kt})^2.$

Ha a távolságok helyett a $\hat{d}_{jk} = \delta_{jk} + c_{\min}$ becsült távolságokkal dolgozunk, a $\hat{b}_{jk}$ becsült skaláris szorzatokat kapjuk. Bevezetjük a következő jelölést:

$$\hat{d}_{jk}^{*2} = \hat{d}_{jk}^2 - \hat{d}_{.k}^2 - \hat{d}_{j.}^2 + \hat{d}_{..}^2$$

és (1.4) mindkét oldalát mátrix alakba írjuk:

$$\hat{B} = -\frac{1}{2}\hat{D}^*. \tag{1.5}$$

Jelölje $\hat{X} = \{\hat{x}_{jt}\}$ mátrix a keresett output térbeli pontok becsült koordinátáit, [e pontok közötti becsült távolságokat adja meg $\hat{d}_{jk}$].

1.4. *A kanonikus dekompozíció eljárása* [*„CANDECOMP”*]

Elevenítsük föl az (1.1) összefüggés után leírtakat, illetve az 1.3 pont elején felírt összefüggéseket. Ugyanazokat a jelöléseket használva felírhatjuk a b_{jk} skalár szorzatokat külön-külön minden egyed szemléletében, amit az „i” indexben rögzítünk:

$$b_{jk,i} = \sum_t y_{jt,i}\, y_{kt,i} = \sum_t w_{it} x_{jt} x_{kt} \tag{1.6}$$

ahol: $y_{jt,i} = \sqrt{w_{it}}\, x_{jt}$

N dimenziós („utas”) tömbök (táblák) kanonikus dekompozíciós modellje $N = 3$ esetén:

$$z_{ijk} = \sum_t a_{it} \cdot b_{jt} \cdot c_{kt}. \tag{1.7}$$

(1.6) és (1.7) megfeleltetése alapján:

$$z_{ijk} = b_{jk,i}$$

$$a_{it} = w_{it}$$

$$b_{jt} = c_{jt} = x_{jt}$$

A további redukció érdekében vezessünk be újabb jelöléseket, legyen:

$$\hat{z}^*_{is} = \hat{z}_{ijk}$$

$$\hat{g}_{st} = \hat{b}_{jt}\hat{c}_{kt}.$$

Így (1.7.)-nek már a becslésekre felírt új alakja:

$$\hat{z}^*_{is} = \sum_{t_t} \hat{a}_{it}\, \hat{g}_{st},$$

vagy mátrix alakban:

$$\hat{Z}^* = \hat{A}\, \hat{G}' \tag{1.8}$$

Az $\hat{A}$ mátrix elemeit a legkisebb négyzetek módszerének segítségével becsülve, kapjuk:

$$\hat{A} = Z^*\hat{G}(\hat{G}'\, \hat{G})^{-1}. \tag{1.9}$$

Foglaljuk most össze, mi történt eddig az 1.4. pontban.

- Felismertük (1.6) és (1.7) azonos algebrai alakját, elvégeztük a megfeleltetéseket.
- Új jelölések bevezetésével előállítottuk a (1.8) formát.
- Első menetként ezután a „b" és „c" értékek rögzítésével a legkisebb négyzetek módszerével számolhatjuk a „a"-kat, (1.9) alapján.
- Ezután rögzített „a" és „c" értékekkel ugyanúgy számoljuk a „b"-t.
- Az iterációt a megkívánt mértékű konvergenciáig folytatjuk.

Tudni kell, hogy az eljárás nem biztosítja minden esetben a globális minimumot, de a gyakorlati számítások tapasztalatai igen jók, „majdnem mindig" a kívánt optimális eredményhez vezetnek.

A modellek alapján az eljárás végén mind az output pontábra $\hat{X}$ koordinátái, mindpedig a $\hat{W}$ egyedi súlyok rendelkezésre állnak.

CARROLL és CHANG (1970) a fenti metrikus eljárást a *Kruskal*-féle „monoton regresszió" felhasználásával kvázi-nem-metrikus eljárássá alakította át. A lépések ebben a felfogásban a következők:

1. Ismertek az induló különbözőségek egyedi bontásban: $\delta_{jk,i}$.
2. Meghatározzuk a c_i additiv konstansokat s így a különbözőségeket távolságokká alakítjuk: $\hat{d}_{jk,i}$.
3. A becsült távolságokat becsült skaláris szorzatokká alakítjuk: $\hat{b}_{jk,i}$.
4. A $\hat{b}$ értékekre alkalmazzuk a CANDECOMP eljárást egy lépésig s az eredményeket normalizáljuk; ekkor már rendelkezésünkre állnak e fázisnak megfelelő output pontábra koordináták és súlyok is.
5. Meghatározzuk minden i, j, k-ra az előzőek alapján adódó pontok súlyozott euklideszi távolságait.
6. A monoton regresszió elvét hasznosítva értékeljük az elért eredményeket; ha szükséges, most már az eredményül kapott távolságokkal dolgozva.
7. Ezután az iteráció visszamegy a 3. ponthoz és megismétli a továbbiakat.
8. Az illeszkedés jóságát különböző kritériumokkal mérhetjük:

$$\textit{Kruskal}\text{-féle:}\quad S = \left[\sum_i \frac{\sum\limits_j \sum\limits_k (d_{jk,i} - \hat{d}_{jk,i})^2}{\sum\limits_j \sum\limits_k d_{jk\,i} - \bar{d}_i^2} \right]^{1/2}.$$

Értéke az iterációk sorozatában nem monoton csökkenő.

Carroll és *Chang*-féle: $\text{Strain} = \left[\sum_i \frac{\sum_j \sum_k (b_{jk,i} - \hat{b}_{jk,i})^2}{\sum_j \sum_k b^2_{jk,i}} \right]^{1/2},$

ahol az előzőeknek megfelelően: $b_{jk,i} = \sum_i w_{it} x_{jt} x_{kt}$ és $\hat{b}_{jk,i}$ az (1.4) formula alapján állítható elő, a megfelelő becslések alkalmazásával.

1.5. *Egyértékűség az INDSCAL modellben*

Kimutatható, hogy a leírt megoldás egyértékű, ha teljesülnek az alábbi feltételek:

1. Az „eredő objektum tér" (ld. 1.1. pontban) dimenziói függetlenek.
2. Van legalább két egyed szemléletére kiterjedő adattömbünk, ($i = 1, 2$ legalább).
3. Nincs két dimenzió, melyekre teljesülne a súlyok „párhuzamos minta" (parallel pattern) tulajdonsága. [Akkor és csak akkor mutatnak a súlyok „párhuzamos mintát", ha minden $i-j$ egyedpárra igaz: $w_{is} \cdot w_{jt} = w_{it} \cdot w_{js}$. Az összefüggés geometriai jelentése: az eredő egyedi súlyok terének (ld. 1.1. pontban) az s-edik és t-edik dimenziók által kiválasztott kétdimenziós alterében az egyedek súlyai az origón átmenő egy egyenesen feküsznek.]

1.6. *Az IDIOSCAL modell.* [Caroll–Chang (1972)]
(*I*ndividual *D*ifferences *I*n *O*rientation *Sca*ling)

Háromdimenziós adatmátrixok elemzésére a legáltalánosabbnak tekinthető MDS eljárás. Az INDSCAL-tól mint a kategória alap-modelljétől az IDIOSCAL is és más elgondolások is elsősorban az alkalmazott távolságfogalom megválasztásában különböznek. Ha nem teszünk kikötést az output pontábra dimenzióinak (tengelyeinek) hajlásszögére, a távolságokat az általánosított euklideszi távolságfogalommal állíthatjuk elő:

$$d_{jk,i} = \left[\sum_{t=1}^{r} \sum_{t'=1}^{r} (x_{jt} - x_{kt}) c_{tt',i} (x_{jt'} - x_{kt'}), \right]^{1/2},$$

ahol $C_i = \{c_{tt',i}\}$, egy $r \times r$ típusú szimmetrikus definit vagy szemidefinit mátrix.

A modellben a skaláris szorzat alakja:

$$b_{jk,i} = \sum_t \sum_{t'} x_{jt} \, c_{tt'i} \, x_{kt'},$$

mátrix jelöléssel:

$$B_i = X \, C_i \, X' .$$

C_i dekompozíciójára két eljárást ismertetünk.

1. Carroll–Chang eljárása

$$C_i = I_i \beta_i I'_i,$$

ahol: I_i orthogonális mátrix

β_i diagonális mátrix.

Geometriailag ez az eredő (output) objektum tér orthogonális rotációját jelenti, mellyel az i-edik egyed privát terét (koordinátarendszerét) kapjuk meg, β_i súlyozás után.

2. Tucker és Harshman eljárása

$$C_i = D_i R_i D_i,$$

ahol: D_i diagonális mátrix
R_i szimmetrikus mátrix, diagonális elemei 1-gyel egyenlőek.

Az R_i mátrix értelmezése szerint a tengelyek közötti hajlásszögek cosinusait tartalmazza (korrelációs mátrix). A D_i mátrix diagonális elemei az egyes tengelyekre vonatkozó koordináták szórásai. C_i így kovariancia mátrixnak tekinthető. Ha a tengelyek orthogonálisak, R_i egységmátrix lesz, ekkor $C_i = D_i^2$ diagonális mátrix. Ha minden egyedre (i-re) ugyanaz a helyzet, akkor az IDIOSCAL modell speciális eseteként az INDSCAL modellt kapjuk vissza.

1.7. *PARAFAC–2 modell* [Harshman (1972)]
(*Para*llel *Fac*tors–2)

A PARAFAC–2 modell az IDIOSCAL modell speciális esete, amikor:

$$C_i = D_i R D_i,$$

ahol: *R minden egyedre azonos.* Értelmezése: a nem merőleges tengelyek közötti hajlásszögek cosinusait (a korrelációkat) tartalmazó mátrix,
D_i az újraskálázó súlyokat tartalmazó mátrix viszont egyedenkint különböző diagonális mátrix.

Tartalmazza az eredő (output) objektum tér pontjainak koordinátáit az X mátrix. E tér tengelyeit az egyedek általában eltérően súlyozzák, ezt fejezi ki az alábbi összefüggés:

$$X_i^* = X D_i .$$

Az X_i^*-gal meghatározott, az i-edik egyed szemléletének megfelelő pontábrát egy lineáris transzformációval át lehet vinni egy orthogonális koordináta rendszerbe [X_i°], ahol már közönséges euklideszi távolságokkal mérhetjük a pontok által képviselt objektumok különbözőségét:

$$X_i^\circ = X_i^* T = X D_i T.$$

A transzformáció T mátrixával, normalizálással R kifejezhető:

$$R = E T T' E,$$

ahol: $E = [\mathrm{diag}(T T')]^{1/2}$.

Látható, hogy ez a modellváltozat abban tér el – egyszerűsödik – az IDIOSCAL eljáráshoz képest, hogy R független az egyedektől (az i indextől).

1.8. További modell kísérletek

A faktor elemzés eljárásának felhasználásával alakította ki *Tucker* három szempontú skálázó modelljét. A tengelyek irányítottsága itt nem egyértelmű, az objektum tér és az egyedi tér dimenziószámának nem kell megegyeznie. Ha a két tér dimenziója egyenlő, akkor Tucker modellje az INDSCAL modellbe megy át. Tucker kidolgozta modelljének négydimenziós általánosítását is.

Ha az egyedek nem csak egyféle saját szemlélettel rendelkeznek, hanem egyedenkint több szemszögből nézve kapjuk az információkat, az induló adattömb négy vagy több (N) dimenziós lesz. E célra „többutas" MDS módszereket dolgoztak ki. Ilyen az INDSCAL modell 4 utas, illetve N-utas alakja. (A rendelkezésünkre álló program jelenlegi verziója $N \leqq 7$ esetén alkalmazható.)

A modellek általánosításának egy másik lehetősége az elég széles körben használt euklideszi távolságfogalom megváltoztatása és helyettesítése pl. Minkowszki metrikával. Bővebben olvashatunk erről *Carroll* és *Wish* műveiben, pl. [3]-ban.

Az ismertetett modellekben az eredő objektum tér lineáris transzformációi fordulnak elő. Voltak kísérletek nemlineáris transzformációk alkalmazására. Az egyik irányzatban minden koordináta tengelyen monoton transzformációt hajtunk végre. Egy másik kísérlet szerint az eredő privát tér pontjait az eredő objektum térből úgy származtatjuk, hogy minden egyed „ideális pontjától" mért távolság monoton növekvő függvénye szerint végezzük el a transzformációt. Az ilyen eljárásokat szokás „pszichofizikai" transzformációknak is nevezni.

Az utóbbi elgondolásnak egy földrajzi illusztrációját adja CARROLL—WISH (1974) egy new-yorki ember példáján. Emberünk azt gondolja, hogy Los Angeles és San Francisco nagyon közel vannak egymáshoz (mivel tőle mindkettő igen távoli), ugyanakkor New York és Boston sokkal távolabb vannak (feltehetően azért, mert mindkét utóbbi város közelebb van az ő „előnyös pontjához".)

2. A PROFIT eljárás

(*Pro*perty *Fit*ting. Lineáris modell: MILLER—SHEPARD—CHANG, 1964, Nem lineáris modell: CARROLL, 1964)

Tételezzük fel, hogy rendelkezésünkre áll az egyes egyedekre,[2] objektumokra vonatkozóan r számú jellemző (változó) értéke. Ennek alapján a vizsgált egyedek az r-dimenziós „állapottér" pontjainak tekinthetők. Ismertek továbbá bizonyos tulajdonságoknak az egyedekre vonatkozó értékei. A PROFIT eljárás célja, hogy minden tulajdonsághoz meghatározzon az r-dimenziós térben egy olyan vektort, amely maximálisan korrelál az adott tulajdonsággal. A feladat megoldása — az illesztés — regressziós problémaként kezelhető, a regressziós függvény típusától függően beszélünk lineáris, ill. nem lineáris modellről.

Megjegyezzük, hogy az egyedek r-dimenzióra vonatkozó koordinátái nemcsak a priori mérési eredmények vagy ezek aggregálásából nyert értékek lehetnek, hanem más sokváltozós módszerek eredményeként kapott ún. származta-

[2] A továbbiakban az egyedek és objektumok fogalmát azonos értelemben használjuk.

tott értékek is. Ilyen származtatott tér lehet például a faktoranalízis vagy a MINISSA eljárás kevés dimenziószámú megoldás tere. Az eredmények értelmezésénél ezt természetesen figyelembe kell venni.

Lineáris modell (tulajdonság illesztés lineáris regresszióval)
A PROFIT eljárás inputja két adatmátrix:

Alapmátrix

$X = \{x_{ij}\}$ a mátrix elemei n egyed (objektum) r változóra vonatkozó értékeit tartalmazza ($i = 1 \ldots n$, $j = 1 \ldots r$).

Tulajdonságmátrix

$P = \{p_{ik}\}$ n egyed (vagy ezek kategóriákba sorolt megfigyelési egysége) m tulajdonságra vonatkozó megfigyelési értékeit tartalmazza ($i = 1 \ldots n$, $k = 1 \ldots m$).
Jelölje: $p' = [p_i]$, ($i = 1 \ldots n$) valamely tulajdonságnak az n egyedre vonatkozó sorvektorát.
Az eljárás az r-dimenziós tér n pontjára a tulajdonságokhoz legjobban illeszkedő vektort határozza meg.

Jelölések:
$t = [t_j]$ a vektor koordinátái az illesztett vektor iránykoszinuszai[3] ($j = 1 \ldots r$).
$h' = [h_i]$ az n pontnak a t vektorra vonatkozó vetületeiből alkotott sorvektor ($i = 1, 2, \ldots n$).

2.1. *Az eljárás*

Meghatározzuk az iránykoszinuszok t, és a vetületek h vektorát, amelyekre

$$|p - h|^2 \to \min,$$

ahol $h = X\,t$.
Ez lineáris regressziós feladat, az illesztést a legkisebb négyzetek elve értelmében a következőképpen kapjuk:

$$t = (X'\,X)^{-1}\,X'\,p.$$

Ebből

$$h = X\,t = X\,(X'\,X)^{-1}\,X'\,p.$$

2.2. *Nem lineáris modell* (tulajdonság illesztés nem lineáris regresszióval)
Ebben az esetben az illesztést a nem lineáris korreláció értelmében végezzük. *Carroll* két változó közötti nem lineáris korreláció mérésére egy mérőszámot definiált:

$$K = \frac{1}{S^2} \sum_{i \neq j} w_{ij}(x_i - x_j)^2,$$

[3] Iránykoszinusznak egy adott vektor és a koordinátatengelyek által bezárt szögek koszinuszait nevezzük.

ahol p és x a két változó,

$$w_{ij} = f(|p_i - p_j|), \quad f \text{ monoton csökkenő függvény,}$$

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i}^{n} (x_i - \bar{x})^2.$$

A PROFIT eljárásban a független változó a tulajdonság vektor (p), a függő, becsült változó pedig az r-dimenziós térben az n pont vetülete az illesztett vektorra (h). Így a feladat megoldása ekvivalens K minimalizálásával.

Az eljárásban a w_{ij} súlyokat a következőképpen választjuk meg:

$$w_{ij} = \frac{1}{(p_i - p_j)^2} + C,$$

ahol

$$C = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j}^{n} (p_i - p_j)^2.$$

A konstans megadása számítástechnikai okokból szükséges. Az eljárás lépései:

1. Az X alapmátrixot ortonormált rendszerré transzformáljuk: $X'X = E$
2. Az illesztett vektor iránykoszinuszainak meghatározásához kiszámítjuk a szimmetrikus $X'AX$ mátrixot, ahol

$$A = \begin{cases} a_{ij} = -w_{ij} & \text{minden } i \neq j\text{-re,} \\ a_{ii} = \sum_{i \neq j}^{n} w_{ij}. \end{cases}$$

3. Meghatározzuk az $X'AX$ mátrixhoz tartozó karakterisztikus egyenlet legkisebb (nem nulla) gyökét, ez lesz K minimális értéke. A legkisebb sajátértékhez tartozó sajátvektor felel meg az iránykoszinuszok t vektorának.
4. Az iránykoszinuszok alapján kiszámítható az „n pont vetülete", a h vektor:

$$h = X\,t\,.$$

2.3. *Az eljárás outputja*

Eredménytáblák:

1. A tulajdonságok induló értékei és vetületei az illesztett vektorra.
2. A maximális korreláció értékei minden tulajdonság és az illesztett vektor között.
3. Az illesztett vektor iránykoszinuszai normált alakban.

Az eredménytáblák mellett a program egy pontábrát is megad. Ez a vizsgált egyedek, ill. ezek valamely megfigyelési egységeit illeszti a vizsgált változók származtatott terébe.

3. A PREFMAP eljárás és változatai

Az eljárás megfigyelési egységek „ideális" pontjait keresi egy adott dimenziójú térben, a tér pontjaira vonatkozó preferencia értékek alapján.

Az adott r-dimenziós térbeli koordináták – amint azt a PROFIT eljárásnál is feltételeztük – nemcsak közvetlen mérési eredmények lehetnek (ilyen esetben azt mondjuk: a megfigyelések mintateréből indulunk ki), hanem sokváltozós módszerek eredményeként kapott ún. származtatott értékek is (például faktoranalízis vagy MINISSA eljárás megoldás tere).

A PREFMAP eljárás négy különböző modell alapján illeszti a megfigyelt változókra vonatkozóan adott preferenciával rendelkező egyedeket az induló r-dimenziós térbe. A modellek az egyedeknek a változók terére tett feltételezéseiben (pl. dimenzió szám) különböznek.

A következőkben megadjuk az eljárás input rendszerét, majd sorra vesszük az egyes modelleket.

A PREFMAP eljárás inputja két adatmátrix:

Alapmátrix

$X = \{x_{it}\}$ a mátrix elemei n egyed (objektum) r változóra (jellemzőre) vonatkozó értékeit tartalmazza ($i = 1 \ldots n$, $t = 1 \ldots r$).

Preferencia mátrix

$S = \{s_{ij}\}$ n egyednek vagy kategóriákba sorolt megfigyelési egységeiknek m jellemzőre (változóra) vonatkozó megfigyelési értékei, amelyek valamilyen preferencia skálán vannak értelmezve. ($i = 1 \ldots n$, $j = 1 \ldots m$). Ha $s_{ij} > s_{ik}$, akkor az i-edik egyed a j-edik és a k-adik jellemző közül a j-ediket preferálja.

3. 1. *Általános távolság modell (I.)*

A modell feltételezi – ez a feltevés a II. és III. modellekre is fennáll – hogy a változók terének pontjai (x_{it}) és az ideális pont (y_{it}) közötti távolságok négyzete, valamint a preferencia értékek között lineáris összefüggés áll fenn.

$$s_{ij} = a_i d_{ij}^2 + b_i + e_{ij}, \tag{1}$$

ahol: a_i, b_i a lineáris függvény együtthatói ($a_i > 0$),
e_{ij} hibatag,
d_{ij} súlyozott távolság.

A távolság értelmezése:

$$d_{ij}^2 = \sum_{t=1}^{r} w_{it}(x_{jt}^* - y_{it}^*)^2, \tag{2}$$

ahol: $x_j^* = T_i x_j$, (x_j a j-edik egyed alapváltozókra vonatkozó koordinátái),
$y_i^* = T_i y_i$, (y_i az i-edik egyed ideális pontja),
T_i az ortogonális transzformáció mátrixa (r-ed rendű).

A I. modell általános jellege abban van, hogy minden egyed az induló r-dimenziós tér tengelyeit egyedileg különbözőképpen transzformálhatja (a T_i ortogonális mátrix szerint) és minden egyed különbözőképpen súlyozhatja az egyes tengelyeket.

A (2) egyenlet mátrix alakba írva:

$$d_{ij}^2 = (x_j^* - y_i^*)' \, W_i (x_j^* - y_i^*), \tag{3}$$

ahol $W_i = \{w_{it}\}$ diagonális mátrix, elemei a w_{it} súlyok.

(3)-t kifejtve:

$$d_{ij}^2 = (x_j^*)' \, W_i x_j^* - 2(y_i^*)' \, W_i \, x_j^* + (y_i^*)' \, W_i \, y_i^*. \tag{4}$$

(2) alapján a távolság az induló tér koordinátáival kifejezhető:

$$d_{ij}^2 = x_j' \, T_i' \, W_i \, T_i \, x_j - 2y_i' \, T_i' \, W_i \, T_i \, x_j + y_i' \, T_i' \, W_i \, T_i \, y_i. \tag{5}$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$R_i^* = T_i' \, W_i \, T_i;$$

ebben a felbontásban T_i az R_i^* sajátvektorait, W_i pedig a sajátértékeket tartalmazó mátrix. A sajátértékek – a súlyok – nem negatívak, ha R_i^* pozitív definit vagy szemidefinit.

$c_i^* = y_i' \, T_i' \, W_i \, T_i \, y_i =$ konstans (nem függ x_j-től).

Így az (5) egyenlet a következő egyszerűbb alakba írható:

$$d_{ij}^2 = x_j' \, R_i^* \, x_j - 2y_i' \, R_i^* \, x_j + c_i^*. \tag{6}$$

Helyettesítsük (6)-t az (1) alapegyenletbe (a hibatagot elhagyjuk):

$$s_{ij} \approx a_i (x_j' \, R_i^* \, x_j - 2y_i' \, R_i^* \, x_j + c_i^*) + b_i. \tag{7}$$

Tovább egyszerűsítve a jelöléseket:

$$R_i = a_i R_i^*$$

$$b_i' = -2a_i y_i' R_i^* = -2y_i' R_i$$

$$c_i = a_i c_i^* + b_i.$$

Ezek alapján (7) a következő alakú:

$$s_{ij} \approx x_j' \, R_i \, x_j + b_i' \, x_j + c_i, \tag{8}$$

az induló változók koordinátáinak (x_{jt}) másodfokú függvénye. Skalároaritmetikai jelölésekkel:

$$s_{ij} \approx \sum^r \sum^r r_{tt'i} (x_{jt} x_{jt'}) + \sum^r b_{it} \, x_{jt} + c_i. \tag{9}$$

Ez kvadratikus regressziós összefüggés az x_{jt} független változók és s_{ij} függő változók között. A regressziós feladat legegyszerűbben úgy oldható meg, ha visszavezetjük többváltozós lineáris problémára.

A regressziós együtthatók adják R_i és b_i elemeinek becslését. A becslésekből meghatározhatók az egyedek „ideális" pontjai, éspedig a $b_i' = -2y_i' R_i$ összefüggésből: $y_i' = -\frac{1}{2} b_i' R_1^{-1}$, (ha az R_i mátrix inverze létezik, ami mindig fennáll, ha R_i pozitív definit). Az egyedek „ideális" pontjai tehát az induló tér legjobban preferált helyei.

3.2. *Súlyozott távolság modell (II.)*

Ez a modell nem engedi meg az egyedek számára a tér tengelyeinek különböző transzformációját, de megengedi az eltérő súlyozást. A II. modell speciális esete az I. modellnek, mivel a transzformációs mátrix minden egyednél azonos: $T_i = E$.

Az induló egyenlet megfelel (1)-nek, de itt eltérő a távolság értelmezése:

$$s_{ij} = a_i d_{ij}^2 + b_i + e_{ij}, \tag{10}$$

ahol
$$d_{ij}^2 = \sum_{t=1}^{r} v_{it}(x_{jt} - y_{it})^2.$$

Az I. modellnél alkalmazott jelölések alapján, felhasználva a $T_i = E$ összefüggést, a (10) egyenlet az alábbi alakra hozható:

$$s_{ij} \approx x_j' W_i x_j + b_i' x_j + c_i, \tag{11}$$

ahol $W_i = \{w_{it}\}$ diagonális súlymátrix; elemei: $w_{it} = a_i v_{it}$.
Skalráraritmetikai jelölésekkel:

$$s_{ij} \approx \sum_{t=1}^{r} w_{it} x_{jt}^2 + \sum_{t=1}^{r} b_{it} x_{jt} + c_i. \tag{12}$$

A másodfokú regressziós feladat megoldásával a becsült paraméterekből meghatározhatók az egyedek ideális pontjai, és pedig a $b_i' = -2y_i' W_i$ összefüggésből:

$$y_i' = -\frac{1}{2} b_i' W_i^{-1}$$

$$y_{it} = -\frac{1}{2} \frac{b_{it}}{w_{it}}.$$

(W_i diagonális mátrix, így az inverz egyszerűen számítható.)

3.3. *Nem súlyozott távolság modell (III.)*

Mint már említettük, a I—II—III. modellek között a különbség a távolság (d_{ij}) eltérő értelmezésében van. Az induló egyenlet megfelel az I—II. modellben alkalmazottnak:

$$s_{ij} = a_i d_{ij}^2 + b_i + e_{ij}, \tag{13}$$

ahol $d_{ij}^2 = \sum_{t=1}^{r} u_t(x_{jt} - y_{it})^2,$

$u_t = \pm 1.$

Ez a modell lehetőséget ad az egyes (vagy akár az összes) tengelyek negatív súlyozására, de a súlyok minden egyedre vonatkozóan azonosak, a tengelyek transzformációja nem megengedett. A preferencia értékeket becslő regressziós egyenlet:

$$s_{ij} \approx a_i\, x'_j \langle u \rangle x_j + b'_i\, x_j + c_i, \tag{14}$$

vagy más formában:

$$s_{ij} \approx a_i \sum_{t=1}^{r} u_t\, x_{jt}^2 + \sum_{t=1}^{r} b_{it}\, x_{jt} + c_i. \tag{15}$$

A regressziós feladat megoldásával meghatározhatók az ideális pont koordinátái:

$$y_{it} = -\frac{1}{2}\frac{b_{it}}{a_i u_t}.$$

3.4. *Vektor modell (IV.)*

A vektor modellben az egyedek preferencia értékeit az induló változók lineáris függvényével becsüljük:

$$s_{ij} \approx b_i x_j + c_i, \tag{16}$$

vagy más alakban:

$$s_{ij} \approx \sum_{t=1}^{r} b_{it} x_{jt} + c_i. \tag{17}$$

(16) csak lineáris tagokat tartalmaz, speciális esete az általános modellnek. Legyen $b_i = a_i y_i$, ekkor (16) a következő alakú:

$$s_{ij} \approx a_i y'_i x_j + c_i, \tag{18}$$

ez pedig az előző három modell megfelelő egyenleteinek [(8), (11), (14)-nek] speciális esete, amelyben a kvadratikus tag együtthatója nulla. A regressziós feladat megoldásával a b_{it} regressziós paraméterek alapján az ideális pont koordinátái becsülhetők:

$$y_{it} = b_{it}\left(\sum_{t=1}^{r} b_{it}^2\right)^{-1/2}.$$

Ez a regressziós együtthatók egységnyi hosszúságúra normált alakja, ennek megfelelően az ideális pont koordinátái (y_{it}) az origó körüli egységsugarú körön vannak.

3.5. *Nem metrikus PREFMAP modell*

Az eddigi modellekben feltételeztük, hogy a preferencia értékek intervallum mérési szintű skálán vannak megadva. Kerestük az induló változók és az ideális pont között értelmezett távolság és a preferencia értékek között a legkisebb négyzetek elve értelmében legjobban illeszkedő lineáris függvényt: $s_{ij} = F_i(d_{ij}^2)$.

A gyakorlati alkalmazásokban sokszor előfordul, hogy a preferencia értékek csak mint rangszámok értelmezhetők. Induló egyenletünk ekkor a következő alakú:

$$\tilde{s}_{ij} = d_{ij}^2 + e_{ij}, \tag{19}$$

ahol $\tilde{s}_{ij} = M_i(s_{ij})$;
M_i monoton nem csökkenő függvény.

A modell iterációs eljárással oldható meg, az általános regresszió, ill. a Kruskal-féle monoton regressziós eljárás ismételt alkalmazásával.

Az iteráció lépései:

1. Regressziós összefüggés alapján becsüljük $\tilde{s}_{ij}^{(1)}$ értékeit az eredeti preferencia értékekből (s_{ij}) kiindulva.
2. A Kruskal-féle monoton regressziós eljárással becsüljük a különböző egyedek M_i függvényét, M_i alapján s_{ij} értékekből kiindulva becsülhetők az $\tilde{s}_{ij}^{(1)}$ értékek:

$$\hat{s}_{ij}^{(1)} = M_i^{(1)}(s_{ij}),$$

3. Az s_{ij}-ket helyettesítjük az $\hat{s}_{ij}^{(1)}$ értékekkel, így $\tilde{s}_{ij}^{(2)}$-re kapunk becsléseket.
4. Az új s_{ij} értékek alapján becsülhető az új $M_i^{(2)}$, ennek ismeretében pedig: $s_{ij}^{(2)}$.
5. Az előző lépések addig folytatódnak, amíg a regressziós együtthatókban és a monoton függvényben a változás mértéke egy adott korlát alatt marad (az eljárás konvergens).

3.6. *Az illesztés jóságának vizsgálata*

A PREFMAP modellek az egyedek preferencia értékeit lineáris (vagy kvadratikus) regressziós függvénnyel becsülik. Ezért a becslés jóságának vizsgálatához a többszörös korrelációs együtthatót használjuk. A többszörös korreláció szignifikanciáját F hányadossal mérhetjük:

$$F = \frac{R^2/(k-1)}{(1-R^2)/(n-k)}, \tag{20}$$

ahol: R a többszörös korrelációs együttható,
n az egyedek száma,
$(k-1)$ és $(n-k)$ a megfelelő szabadságfokok.

A PREFMAP eljárás I–IV. modelljei különböző feltételek mellett alkalmazhatók, a legáltalánosabb az I. modell, a legegyszerűbb a IV. modell, közöttük pedig az általánosítás szerinti hierarchikus kapcsolat van. Az általánosabb modellben a többszörös korreláció értéke általában magasabb. Kérdés, hogy az illeszkedés javulása szignifikánsnak tekinthető-e. Ennek eldöntése az F hányados alapján lehetséges:

$$F_{ab} = \frac{(R_a^2 - R_b^2)/(k_a - k_b)}{(1-R_a^2)/(n-k_b)}, \tag{21}$$

ahol: a, b a két összehasonlított modell (a az általánosabb)
R_a, R_b a két többszörös korrelációs együttható
k_a, k_b a becsült együtthatók száma
$(k_a - k_b)$ és $(n - k_b)$ a szabadságfokok.

3.7. *A PREFMAP modell outputja*

Eredménytáblák:

1. A preferencia értékek becslései.
2. Az eredeti változók és az „ideális" pontok távolságának négyzete.
3. A transzformáció mátrixa, ill. a súlymátrix (modellektől függően).
4. Az ideális pontnak az eredeti (és új, ha volt transzformáció) tengelyekre vonatkozó koordinátái.
5. Az illeszkedés jóságának mérőszámai: többszörös korreláció, F-hányados (egyedekre modellenként, és egyedekre modellpáronként).

Ábrák

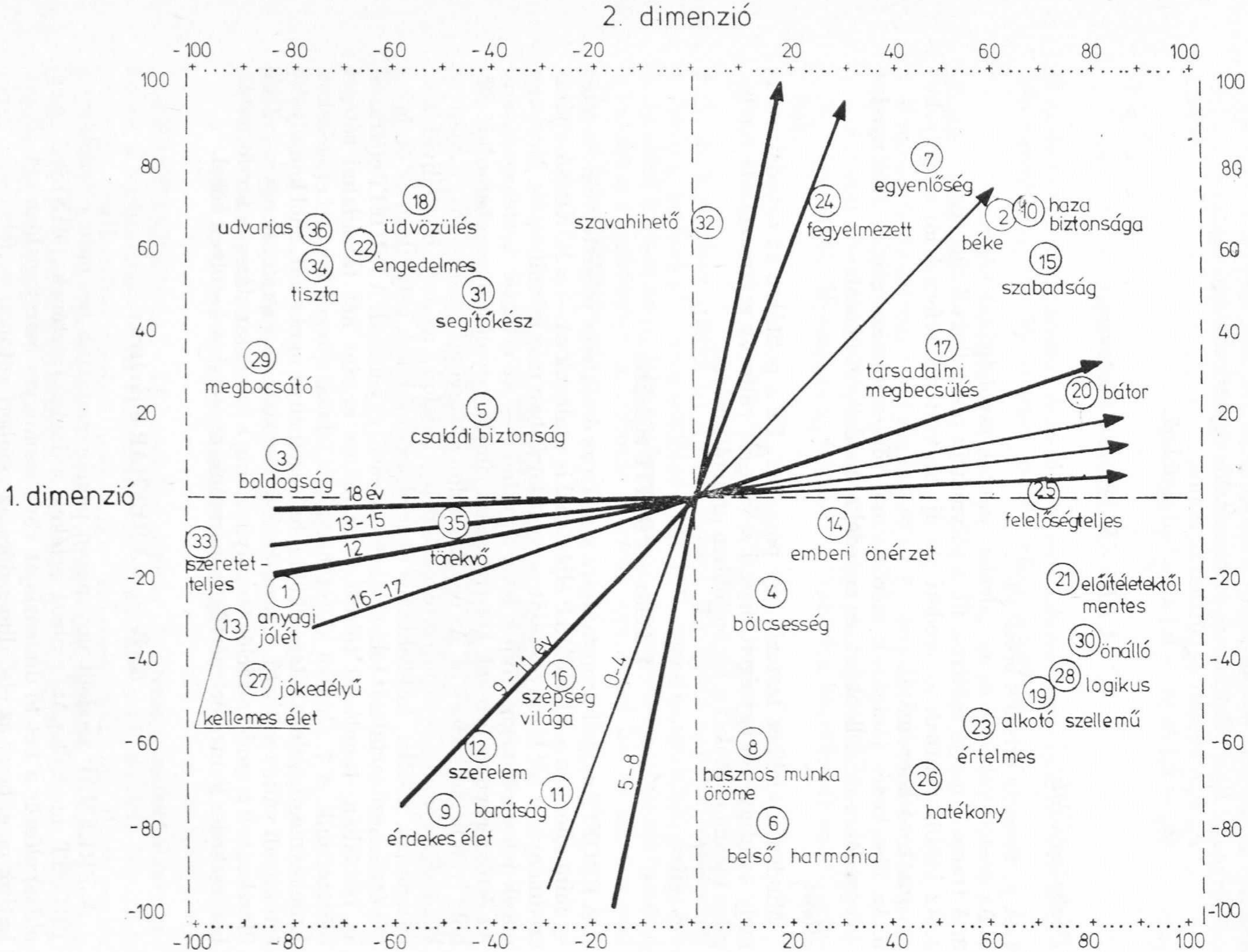
Minden modellhez tartozik egy pontábra. Ez a pontábra az egyedek valamely megfigyelési egységeit illeszti a vizsgált változók származtatott terébe, mint ideális pontokat a tér legjobban preferált helyén.

4. Példa a PROFIT eljárásra

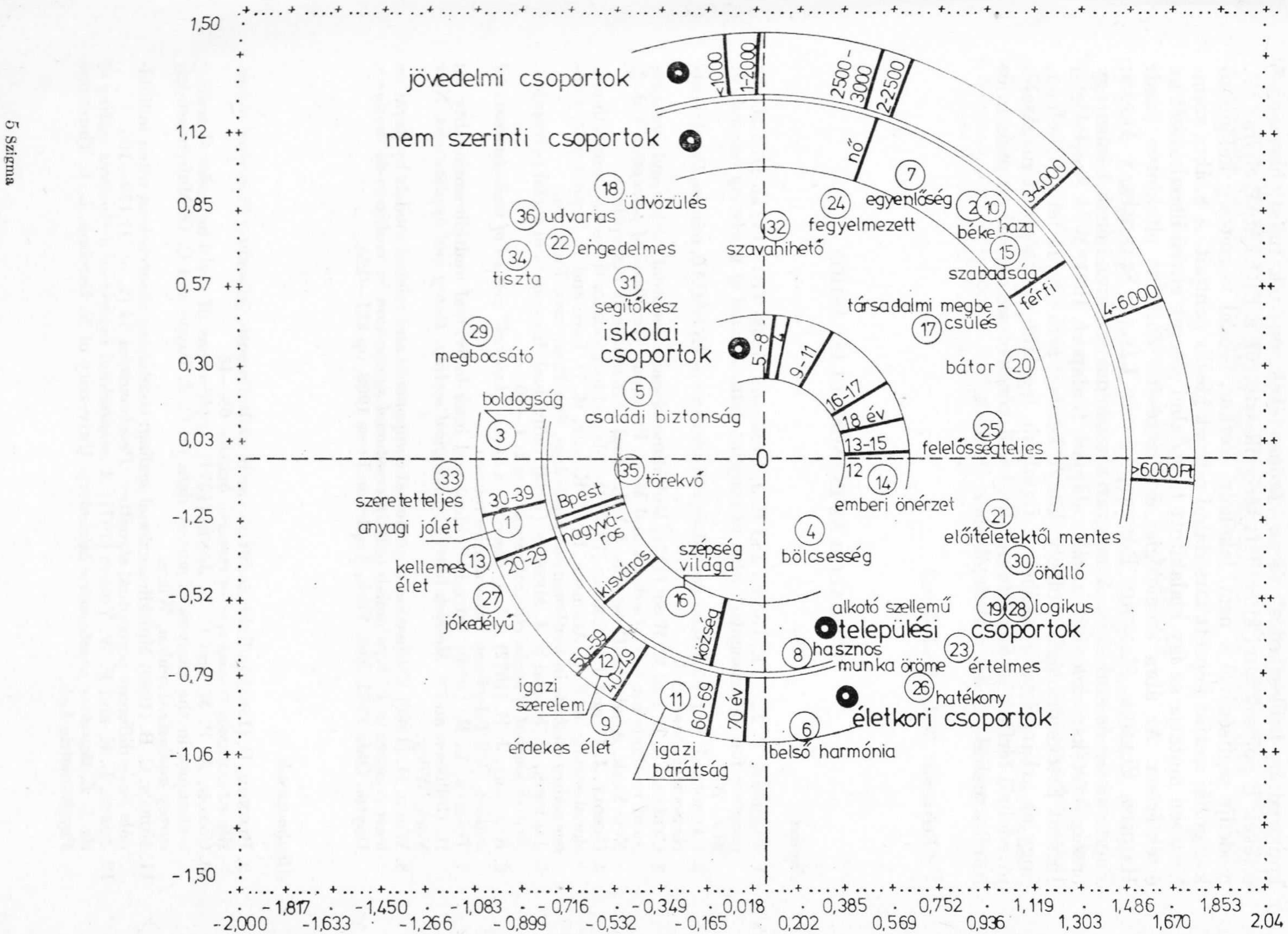
A PROFIT modell bemutatására szintén az értékteret választottuk. Ez a tér — mint ahogyan a PREFMAP eljárásnál is utaltunk rá — a MINISSA eljárás eredménye. A tér bizonyos sajátosságait korábban már felemlítettük. Most egy másik jellegzetességre hívjuk fel a figyelmet — az értéktér kettéhasadására. Az értéktérben az értékek két egymásra rímelő, egymással szembeforduló félhold ívén helyezkednek el. Az egyik oldalon a hagyományosabb (hagyományos közösségi, érzelmi és öröm) értékek, a másik oldalon a modernebb (individuális, autonómia, közélet, intellektuális és felelősség) értékek helyezkednek el, így a két értékmező tartalmát tekintve is szembenáll egymással. A PROFIT eljárással az iskolában, tanulással töltött évek száma szerint hét társadalmi réteget illesztettünk. A 7. ábrából kiolvashatjuk az iskolai rétegek közötti eltéréseket. Érdekes megfigyelni a rétegek különbözőségeiben az ugrásokat, ahol komolyabb értékrendi váltás sejthető. A tanulási idő növekedésével a rétegek egyre jobban illeszkednek a modernizációs tengelyhez, míg a kevés tanulással a konformitás, beilleszkedés kontra örömértékek, harmónia tengelyhez kerülnek közel.

5. Példa a PREFMAP eljárásra

A PREFMAP modellt ugyanazon példán mutatjuk be, mint előzőekben a PROFIT modellt. Az emberi értékek axiológiai terének (MINISSA megoldás) először a két fő dimenzióját véve szemügyre összefoglalóan azt állapíthatjuk meg, hogy az első dimenzióra az „emberi autonómia, felelősség, racionalitás, közélet" és a „kellemesség, jólét, érzelmek, hagyományos kisközösség, beilleszkedés" pólusok a jellemzők. A második dimenzió két pólusa az „eszmék,



7. *ábra. Társadalmi rétegek tengelyeinek illesztése a magyar értéktérbe: iskolai csoportok, profit eljárás, kétdimenziós megoldás*



8. ábra. Társadalmi rétegek ideális preferencia tengelyei a magyar értéktérben PREFMAP eljárás: kétdimenziós megoldás, (monoton illesztés).

konformitás, beilleszkedés" és az „örömértékek, önérték tudat, harmónia" értékei. E pólusok által kifeszített térbe illesztettük a PREFMAP eljárás IV. modellje segítségével a nem, lakóhely, életkor, iskolai végzettség különböző kategóriái szerint képzett társadalmi rétegek ideális pontjait. A 8. ábra szemléletesen mutatja az így kialakított társadalmi rétegek eltérő illeszkedését az értéktérben. Az ábra szociológiai értelmezésétől ehelyütt eltekintve (lásd: HANKISS ELEMÉR, MANCHIN RÓBERT, FÜSTÖS LÁSZLÓ, SZAKOLCZAY ÁRPÁD: Folytonosság és szakadás. A magyar társadalom értékrendjének leírása egy országos értékszociológiai vizsgálat alapján, Budapest, 1981, MTA Szociológiai Intézet Értékszociológiai Műhely, könyv kézirat) arra hívjuk fel a figyelmet, hogy az urbanizáltabb lakóhelyű, fiatalabb, legalább érettségizett magasabb jövedelmű férfiak ideális értékrendje kerül közelebb az emberi autonómia és intellektualitás modernebb értékeihez. [8. ábra.]

(Beérkezett: 1982. február 5-én.)

IRODALOM AZ INDSCAL ELJÁRÁSHOZ

Elmélet

1. CARMONE, F. J., P. E. GREEN and P. J. ROBINSON (1968) TRICON: an IBM 360/65 program for the triangularisation of conjoint data. *Journal of marketing research*, 5: 219—20.
2. CARROLL, J. D. (1974) *Some methodological advances in INDSCAL*, mimeo, Psychometric Society, Stanford.
3. CARROLL, J. D. and M. WISH (1974) Multidimensional perceptual models and measurement methods in: E. C. Carteret and M. P. Friedman *Handbook of perception* Vol. 2, New York, Academic Press (Ch. 5 Individual Differences in Perception).
4. CAROLL, J. D. and J. J. CHANG (1975) Models and methods for three way multidimensional scaling in: R. C. Atkinson, D. H. Krantz, R. D. Luce and P. Suppes (eds) *Contemporary methods in mathematical psychology*, San Francisco, Freeman.
5. JACKSON, D. N. and S. J. MESSICK (1963) Individual differences in social perception. *British journal of social clinical psychology* 2: 1—10.
6. KRUSKAL, J. B. (1972) *A brief description of the "classical" method of multidimensional scaling.* Bell Telephone Laboratories mimeo.
7. TUCKER, L. R. (1960) Intra-individual and inter-individual multidimensionality in: H. Gulliksen and S. Messick (eds) *Psychological scaling: theory and applications.* New York, Wiley.
8. WOLD, H. (1965) Estimation of principal components and related models by iterative least squares in P. Krishnaiah (ed) *International symposium on multivariate analysis.* Dayton Ohio 1965. New York, Academic Press 1966, pp 391—420.

Alkalmazások

9. BLOXOM, B. (1965) Individual differences in multidimensional scaling *Princeton university educational testing service research bulletin* 68—45.
10. COXON, A. P. M. and C. L. JONES (1974) Applications of multidimensional scaling techniques in the analysis of survey data in: C. J. Payne and C. O' Muircheartaigh *survey analysis.* London, Wiley.
11. HORAN, C. B. (1969) Multidimensional scaling: combining observations when individuals have different perceptual structure. *Psychometrica* 34 (2, pt. 1) 139—165.
12. JONES, L. E. and F. W. YOUNG (1971) *A longitudinal individual differences scaling of the L. L. thurstone psychometric laboratory.* University of N. Carolina, L. L. Thurstone Psychometric Lab.

13. Wish, M. and J. D. Carroll (1974) Applications of individual differences scaling to studies of human perception and judgment in: Carteret and Friedman *Handbook of perception* Vol. 2, *psychophysical judgment and measurement.* New York, Academic Press.

IRODALOM A PROFIT ELJÁRÁSHOZ

1. Chang, J.—Carroll, J.: *How to use PROFIT, a computer program for property fitting by optimizing nonlinear correlation.* Murray Hill, New Jersey, Bell Laboratories (1964)
2. Carroll, J.—Chang, J.: A general index of nonlinear correlation and its application to the program of relating physical and psychological dimensions. *American psychologist* 1964, 19, 540
3. Miller, J.—Shepard, R.—Chang, J.: An analysical approach to the interpretation of multidimensional scaling solutions. *American psychologist,* 1964, 19, 579—580
4. Neuman, J.: Distribution of the ratio of the mean square successive difference to the variance. *AM. MATH. Statist,* 1941, 12, 367—395

Keleti András

A loglineáris modell

A 70-es években a statisztika módszertanával foglalkozók érdeklődése középpontjába egy olyan többváltozós elemzési eljárás kidolgozása került, mely három vagy több kategória változó közötti kapcsolat rendszer szerkezetét volt hivatott leírni.

Ha megfigyeléseinket három vagy több kategória változó szerint csoportosítjuk, ezek egy több dimenziós kereszttábla formájában jelennek meg. Az ilyen táblák olyan sajátos elemzési és értelmezési problémákat vetnek fel, melyek a hagyományos több változós elemzési módszerek számára nem hozzáférhetők. Egy kereszttábla két változója közötti kapcsolat az alábbi módon értelmezhető: ha egy megfigyelés az egyik változó bizonyos kategóriájába esik, ez valószínűbbé teszi ugyanennek a megfigyelésnek a másik változó bizonyos kategóriáiba való esését. Az ilyen jellegű kapcsolatokat a két változó közötti interakciónak szokták nevezni. A több dimenziós kereszttáblák elemzésére használt korábbi technikák a tábla különböző két dimenziós szélösszegeit elemezték különkülön, ami azt jelentette, hogy *egyszerre* csak két változót tudtak vizsgálni. Bár ez a megközelítés gyakran enged betekintést a változók közötti kapcsolatba, lényeges korlátai vannak:

a) Összekeveri két változó marginális kapcsolatát[1] a többi változó jelenlétében érvényesülő kapcsolattal.
b) Nem teszi lehetővé a fenti páros kapcsolatok szimultán elemzését.
c) Figyelmen kívül hagyja azt a lehetőséget, hogy a változók között nem csak két, hanem három vagy több irányú interakciók is érvényesülhetnek.

E tanulmányban a keresztosztályozás (cross classification) statisztikai elemzésére nemrégiben kidolgozott módszert szeretnék bemutatni, mely loglineáris modellek segítségével elemzi a több dimenziós kereszttáblákat.[2] Ez a módszer kiküszöböli a fenti hiányosságokat. A modellek alapgondolata a következő: a több dimenziós kereszttábla változói közötti interakciók a becsült esetszámok keresztszorzat hányadosai (cross-product ratio) alapján definiálhatók. Ebből az következik, hogy minden várható esetszám logaritmusa kifejezhető a többi várható esetszám logaritmusai valamilyen lineáris kombinációjaként, úgy hogy a használt súlyok, illetve együtthatók összege nulla. Innen a loglineáris elnevezés.

[1] A két változó közötti interakciót a többi változó mentén összevont marginális táblában vizsgálják.

[2] Bishop, Fienberg, Holland (1975), Cox (1970), Haberman (1974), Lindsey (1973) és Placket (1974) a szóban forgó módszer részletes leírását adják.

Az általános modell három változó esetén

Legyen f_{ijk} egy három dimenziós kereszttábla i-edik sorában, j-edik oszlopában és k-adik rétegében található megfigyelt gyakoriság, és F_{ijk} legyen a modell alapján becsült megfelelő várható gyakoriság, azaz $F_{ijk} = E\{f_{ijk}\}$. A loglineáris modell általános alakja a következő:

$$\log F_{ijk} = u + u_{1(i)} + u_{2(j)} + u_{3(k)} + u_{12(ij)} + u_{13(ik)} + u_{23(jk)} + u_{123(ijk)}, \qquad (1)$$

ahol mint a variancia analízis modellben

$$\sum_i u_{1(i)} = \sum_j u_{2(j)} = \sum_k u_{3(k)} = 0,$$

$$\sum_i u_{12(ij)} = \sum_j u_{12(ij)} = \sum_i u_{13(ik)} = \sum_k u_{13(ik)} = \sum_j u_{23(jk)} = \sum_k u_{23(jk)} = 0$$

$$\sum_i u_{123(ijk)} = \sum_j u_{123(ijk)} = \sum_k u_{123(ijk)} = 0. \qquad (2)$$

Ez a modell minden hatást figyelembe vesz, melyek egy háromdimenziós táblában előfordulhatnak:

u — a főátlag, a várható gyakoriságok logaritmusai számtani átlaga;

$u_{1(i)}, u_{2(j)}, u_{3(k)}$ — főhatások, sor, oszlop és réteg hatások, a megfelelő sor, oszlop és réteg átlagok eltérései a főátlagtól;

$u_{12(ij)}, u_{13(ik)}, u_{23(jk)}$ — elsőrendű interakciók, a kétirányú kapcsolatok hatását kifejező paraméterek, a megfelelő alacsonyabb rendű paraméterektől való eltéréseket mérik;

$u_{123(ijk)}$ — a három irányú kapcsolat paramétere. (A fenti paraméterek jelentéséről később részletesen szó lesz.)

Nevezzük ezt a modellt telítettnek, mivel minden lehetséges hatást figyelembe vesz, ezért: $f_{ijk} = F_{ijk}$. A kutatót az elemzés során az érdekli, hogy a vizsgált jelenség leírható-e az általánosnál takarékosabb modellel. Más szóval: az összes lehetséges hatás közül azokat akarja kiválasztani, melyek valóban befolyásolják a vizsgált jelenséget. Ezt úgy érheti el, hogy az általános alakú loglineáris modellben bizonyos paramétereket 0-val tesz egyenlővé. Az így kapott modelleket illeszti a megfigyelt adatokhoz, majd valamilyen statisztika segítségével méri az illeszkedés jóságát.

A hipotézisek

Attól függően, hogy mely paramétereket tesszük 0-val egyenlővé, különböző hipotéziseket fogalmazhatunk meg a változók függetlenségéről. A három változó teljes függetlenségét feltételező loglineáris modell:

$$\log F_{ijk} = u + u_{1(i)} + u_{2(j)} + u_{3(k)},$$

tehát

$$u_{12(ij)} = u_{13(ik)} = u_{23(jk)} = u_{123(ijk)} = 0 \qquad (3)$$

Ha azt feltételezzük, hogy változóink nem függetlenek egymástól, négyfajta hipotézist fogalmazhatunk meg a három változó közötti kapcsolatok szerkezetéről:

(1) Van egy változónk, mely független a másik kettőtől. Ebben az esetben a három irányú interakcióról és a két irányú interakciók közül kettőről feltételezzük, hogy 0-val egyenlőek. E hipotézis fajtának három lehetséges verziója van, például az egyik:

$$u_{13(ik)} = u_{23(jk)} = u_{123(ijk)} = 0. \tag{4}$$

(2) Két változó független egymástól, ha a harmadik változó értéke adott. E hipotézisnek, mely két változó feltételes függetlenségét fejezi ki, szintén három változata van, például:

$$u_{13(ij)} = u_{123(ijk)} = 0. \tag{5}$$

(3) Páros kapcsolatok a három változó között, úgy hogy mindhárom két változós interakció független a harmadik változó értékétől:

$$u_{123(ijk)} = 0. \tag{6}$$

(4) Ez a hipotézis már a telített modellt (1) hozza vissza, mivel három irányú interakciót is feltételezünk, tehát bármely két változós interakció függ a harmadik változó értékétől.

A becslés

A következőkben a modellek alapján várható gyakoriságok maximum likelihood becsléséről lesz szó. Induljunk ki abból, hogy egy modell várható esetszámai becslésekor csak azokat az információkat vesszük figyelembe, melyeket a modellbe felvett paraméterekhez tartozó megfigyelt szélösszegek tartalmaznak. Eszerint például a változók teljes függetlenségét feltételező modell (3) várható esetszámait az alábbi képlet szerint számolhatjuk:

$$F_{ijk} = \frac{f_{i++} f_{+j+} f_{++k}}{N^2}, \tag{7}$$

ahol a + jelek összeadást jelölnek a megfelelő index mentén és N az összes esetszám.

A változók között egyetlen két irányú interakciót feltételező modell (4) várható gyakoriságainak maximum likelihood becslése a következő:

$$F_{ijk} = \frac{f_{ij+} f_{++k}}{N}. \tag{8}$$

A két változó feltételes függetlenségét feltételező modell (5) várható esetszámait az alábbi képlettel becsüljük:

$$F_{ijk} = \frac{f_{ij+} f_{+jk}}{f_{+j+}}. \tag{9}$$

A (6) $u + u_{1(i)} + u_{2(j)} + u_{3(k)} + u_{12(ij)} + u_{23(jk)} + u_{13(ik)}$ modell várható esetszámai maximum likelihood becslése nem lehetséges a fentiekhez hasonló direkt módon. E modell várható esetszámai a három dimenziós tábla megfigyelt adatainak összevonása útján nyert három két dimenziós $\{f_{ij+}\}$, $\{f_{+jk}\}$, $\{f_{i+k}\}$ marginális tábla függvényei. A várható gyakoriságok a DEMING és STEPHAN (1940) által kidolgozott iterációs illesztési eljárás segítségével becsülhetők.[3] Az iterációs algoritmus bemutatása előtt fogalmazzuk meg a modellek várható esetszámai becslésének általános szabályát:

(1) Minden változóra vonatkozóan keressük meg azt a modellbe felvett legmagasabb rendű paramétert, mely a szóban forgó változót magában foglalja.
(2) Számítsuk ki ezekhez a legmagasabb rendű paraméterekhez tartozó megfigyelt szélösszegeket, például az $\{u_{21(ij)} \mid i = 1, 2, \ldots, I; j = 1, 2, \ldots, J\}$ paraméternek az $\{f_{ij+} \mid i = 1, 2, \ldots, I; j = 1, 2, \ldots, J\}$ szélösszeg felel meg.
(3) A várható esetszámok becsléséhez csak a fenti megfigyelt szélösszegeket használjuk fel.

Az iteráció

Az $u_{123} = 0$ modell várható gyakoriságai becslésével kapcsolatban leszögeztük, hogy az F_{ijk}-k egyedül a $\{f_{ij+}\}$, $\{f_{i+k}\}$, $\{f_{+jk}\}$ szélösszegek függvényei. A maximum likelihood becslés módszerét alkalmazva az F_{ijk}-knak az alábbi egyenlőségeket kell kielégíteniük:

$$\begin{aligned} F_{ij+} &= f_{ij+}, & i &= 1, 2, \ldots, I & j &= 1, 2, \ldots, J \\ F_{i+k} &= f_{i+k}, & i &= 1, 2, \ldots, I & k &= 1, 2, \ldots, K \\ F_{+jk} &= f_{+jk}, & j &= 1, 2, \ldots, J & k &= 1, 2, \ldots, K. \end{aligned} \tag{10}$$

Annak ellenére, hogy a fenti egyenlőségek egyértelműen meghatározzák a modell alapján várható gyakoriságok halmazát, mégsem tudjuk ezeket zárt alakban kifejezni.

Először tegyük az összes F_{ijk}-t 1-gyel egyenlővé: $F_{ijk}^{(0)} = 1$; (a felső index mindig az iteráció megfelelő lépését jelöli), majd az iteráció első ciklusában a további három lépés következik:

$$F_{ijk}^{(1)} = \frac{F_{ijk}^{(0)} f_{ij+}}{F_{ij+}^{(0)}},$$

$$F_{ijk}^{(2)} = \frac{F_{ijk}^{(1)} f_{i+k}}{F_{i+k}^{(1)}},$$

$$F_{ijk}^{(3)} = \frac{F_{ijk}^{(2)} f_{+jk}}{F_{+jk}^{(2)}}.$$

Ezzel befejeződik az iteráció első ciklusa, a ciklusok addig ismétlődnek, míg a várható gyakoriságok változása egyik ciklusról a következőre megfelelően kicsi lesz. Az iteráció első lépésében az 1-esek vektorát vettük induló értékeknek.

[3] A Deming-Stephan algoritmus csak hierarchikus modellekre jó. (Az eljárás kihasználja hogy a peremösszegek teljes elégséges statisztikát adnak.)

Az $u_{123} = 0$ modell illesztéséhez az induló értékek bármely más vektora megfelelő lenne, de BISHOP, FIENBERG és HOLLAND (1975) kimutatták, hogy más induló értékek sem növelik lényegesen a konvergencia sebességét. Az 1-esek mellett az szól, hogy ezek alkalmasak más loglineáris modellek illesztésére is, és ezért megkönnyítik a számítógépes programok készítését.[4]

Az illeszkedés

Egy modell várható gyakoriságainak becslése után a következő lépés annak eldöntése, hogy a modellben megfogalmazott hipotézis elfogadható-e vagy nem. Erre a kérdésre az illeszkedés-vizsgálat adja meg a választ, mely azt teszteli, hogy a várható esetszámok elég jól, szorosan illeszkednek-e a megfigyelt esetszámokhoz. Az illeszkedés ,,jóságát'' az alábbi két statisztika segítségével vizsgáljuk:

$$X^2 = \sum \frac{(f-F)^2}{F} \tag{11}$$

$$G^2 = 2 \sum f \log \left(\frac{f}{F} \right), \tag{12}$$

ahol: f — a megfigyelt esetszám,
F — a modell alapján becsült esetszám.

Ha az illesztett modell hibátlan, és a minta elég nagy, akkor mindkét statisztika megközelítően X^2 eloszlású, az alábbi formula szerinti szabadságfokokkal:

$$s.f. = \# \text{ cellák} - \# \text{ illesztett paraméterek}. \tag{13}$$

Ezt a formulát alkalmazva a tárgyalt öt modell esetében az alábbi szabadságfokokat kapjuk egy $I \times J \times K$ méretű táblában.

1. táblázat

Modell	szükséges szélösszegek	illesztett paraméterek	szabadságfokok
$u+u_1+u_2+u_3$	(1) (2) (3)	$[1+(I-1)+(J-1)+(K-1)]$	$(IJK-I-J-K+2)$
$u+u_1+u_2+u_3+u_{12}$	(12) (3)	$[1+(I-1)+(J-1)+(K-1)+(I-1)(J-1)]$	$[(K-1)(IJ-1)]$
$u+u_1+u_2+u_3+u_{12}+u_{23}$	(12) (23)	$[1+(I-1)+(J-1)+(K-1)+(I-1)(J-1)+(J-1)(K-1)]$	$[J(I-1)(K-1)]$
$u+u_1+u_2+u_3+u_{12}+u_{23}+u_{13}$	(12) (23) (13)	$[1+(I-1)+(J-1)+(K-1)+(I-1)(J-1)+(J-1)(K-1)+(I-1)(K-1)]$	$[(I-1)(J-1)(K-1)]$
$u+u_1+u_2+u_3+u_{12}+u_{23}+u_{13}+u_{123}$	(123)	IJK	0

[4] Ma már a legtöbb hazai számítógép rendelkezik olyan könyvtári programokkal, amelyek alkalmasak az illesztés és a modell-kiválasztás elvégzésére. Ilyen például az MTA SZTAKI ,,BMDP programok rövid összefoglalása'' amelynek BMDP3D ésBMDP3F szakaszai éppen a jelen dolgozat témájával kapcsolatosak.

A X^2 és G^2 statisztikák aszimptotikusan egyenlők. Ez azt jelenti, hogy egyenlők akkor, ha a minta elég nagy (legalább a cellák számának tízszerese), és a null hipotézis igaz.

A paraméterek

Ha kiszámítottuk egy loglineáris modell várható gyakoriságait, és az illeszkedés vizsgálata alapján úgy találtuk, hogy a modellben megfogalmazott hipotézis elfogadható, felmerül az igény, hogy megbecsüljük a modellbe felvett hatások, paraméterek nagyságát, erejét. *A paramétereket a modell várható gyakoriságai felhasználásával becsüljük.* Egy $I \times J \times K$ méretű kereszttábla három változója legyen A, B és C, a modell alapján várható gyakoriságok logaritmusait jelöljük v_{ijk}-val ($\log F_{ijk} = v_{ijk}$). A loglineáris modell lehetséges paraméterei: u_i^A, u_j^B, u_k^C főhatások; u_{ij}^{AB}, u_{jk}^{BC}, u_{ik}^{AC} elsőrendű interakciók; u_{ijk}^{ABC} másodrendű interakció.

Már utaltunk arra, hogy a magasabb rendű u tagok a megfelelő alacsonyabb rendű u tagoktól való eltéréseket mérik, ennek megfelelően:

$$u_i^A = \frac{v_{i++}}{JK} - \frac{v_{+++}}{IJK}$$

$$u_{ij}^{AB} = \frac{v_{ij+}}{K} - \frac{v_{i++}}{JK} - \frac{v_{+j+}}{IK} + \frac{v_{+++}}{IJK} \tag{13}$$

$$u_{ijk}^{ABC} = v_{ijk} - \frac{v_{ij+}}{K} - \frac{v_{i+k}}{J} - \frac{v_{+jk}}{I} + \frac{v_{i++}}{JK} + \frac{v_{+j+}}{IK} + \frac{v_{++k}}{IJ} - \frac{v_{+++}}{IJK}.$$

A (13) formulában a loglineáris modell paramétereit a megfelelő szintű átlagok lineáris kombinációjaként fejeztük ki. Az u_j^B, u_k^C, u_{jk}^{BC}, u_{ik}^{AC} paraméterek is hasonló módon írhatók le.

A variancia analízis ANOVA modelljeivel az analógia nyilvánvaló, ez azonban ne tévessze meg az olvasót. A variancia analízist akkor használjuk, ha független változóknak egy függő változóra való hatását akarjuk megbecsülni. A kereszttáblák elemzésére használt ANOVA-szerű modellek azonban a tábla dimenzióinak megfelelő változók közötti kapcsolat szerkezetét hivatottak leírni. Megkönnyítjük a paraméterek értelmezését, ha bevezetjük a következő korlátozást: $I = J = K = 2$, és a (13) formulában elvégezzük a megfelelő behelyettesítéseket.
Ekkor:

$$2u_i^A = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} (v_{1jk} - v_{2jk}),\ u_1^A = u_i^A;\ u_2^A = -u_i^A. \tag{14}$$

A (14) formula bal oldala nem más mint az F_{1jk}/F_{2jk} esélyek logaritmusainak számtani átlaga.

A tanulmány elején már utaltunk arra, hogy a loglineáris modellben a változók közötti interakciók visszavezethetők az esélyhányadosokra (odds ratio).

Először tehát ezek jelentését kell tisztázni. Egy 2×2 méretű táblában az esély hányados képlete a következő:

$$O = \frac{f_{11}/f_{12}}{f_{21}/f_{22}}.$$

Ez azt fejezi ki, hogy hányszor nagyobb az első sorba tartozó megfigyelés esélye arra, hogy inkább található az első oszlopban mint a másodikban, mint a második sorba tartozó megfigyelés ugyanilyen esélye. Az esélyhányados a publikációkban általában az alábbi keresztszorzat-hányados (cross-product ratio) alakban szokott megjelenni:

$$O = \frac{f_{11}f_{22}}{f_{12}f_{21}}.$$

Egy $I = J = K = 2$ méretű három dimenziós kereszttáblát úgy képzelhetünk el, mint két 2×2-es kereszttáblát, ahol mindkét táblának egy-egy esélyhányados felel meg. Legyenek ezek $O_{AB.1}$ és $O_{AB.2}$, melyeket *feltételes* várható esélyhányadosoknak[5] tekinthetünk, mivel nagyságuk függ a harmadik C változó által felvett értéktől.

$$O_{AB.K} = \frac{F_{11k}\,F_{22k}}{F_{12k}\,F_{21k}}. \tag{15}$$

Vezessük be továbbá az A és B változók közötti *parciális* várható esélyhányados fogalmát, $O_{AB.C}$-t, mely $O_{AB.1}$ és $O_{AB.2}$ mértani átlaga, $O_{AB.C} = \sqrt{O_{AB.1}\,O_{AB.2}}$, tehát nagysága már nem függ C értékétől.

Ha most elvégezzük (13)-ba a megfelelő behelyettesítéseket, az alábbi alakhoz jutunk:

$$u_{11}^{AB} = \frac{1}{8}\,(v_{111} + v_{221} - v_{121} - v_{211} + v_{112} + v_{222} - v_{122} - v_{212}).$$

Tehát:

$$4u_{11}^{AB} = \frac{\log O_{AB.1} + \log O_{AB.2}}{2} = \log O_{AB.C} \tag{16}$$

$$u_{11}^{AB} = u_{22}^{AB} = u_{ij}^{AB}; \quad u_{12}^{AB} = u_{21}^{AB} = -\,u_{ij}^{AB}.$$

Tehát a loglineáris modell u_{ij}^{AB} paramétere a megfelelő esélyhányadosok logaritmusai számtani átlagának négyszerese. A másik két elsőrendű interakció is hasonlóképpen írható fel. Például:

$$4u_{jk}^{BC} = \frac{\log O_{BC.1} + \log O_{BC.2}}{2} = \log O_{BC.A}. \tag{17}$$

[5] Azért „várható", mert a loglineáris modell alapján becsült várható gyakoriságokból számoljuk őket.

Ha a (13) formula másodrendű interakció képletébe végezzük el a megfelelő behelyettesítéseket, az alábbi alakhoz jutunk:

$$u_{111}^{ABC} = \frac{1}{8}(v_{111} - v_{121} - v_{211} + v_{221} - v_{112} + v_{122} + v_{212} - v_{222}),$$

melyből további átrendezés után:

$$8u_{111}^{ABC} = \log O_{AB.1} - \log O_{AB.2} = \log \frac{O_{AB.1}}{O_{AB.2}} \tag{18}$$

$$u_{ijk}^{ABC} = u_{111}^{ABC} = u_{221}^{ABC} = u_{212}^{ABC} = u_{122}^{ABC} = -u_{211}^{ABC} = -u_{121}^{ABC} = -u_{112}^{ABC} = -u_{222}^{ABC}.$$

Tehát a loglineáris modell u_{ijk}^{ABC} három irányú interakciót kifejező paramétere arányos az A és B változókhoz tartozó két feltételes esélyhányados hányadosának logaritmusával.

Tekintsük most az $u_{ijk}^{ABC} = 0$ loglineáris modellt, mely szerint a változók közötti kétirányú interakciók függetlenek a harmadik változó értékétől. Ez a modell az esélyhányadosok nyelvén a következőt jelenti:

$$\frac{F_{111}F_{221}}{F_{121}F_{211}} = \frac{F_{112}F_{222}}{F_{122}F_{212}},$$

tehát:

$$4u_{ij}^{AB} = \log O_{AB.1} = \log O_{AB.2} = \log O_{AB.C},$$

és hasonlóképpen:

$$4u_{jk}^{BC} = \log O_{BC.1} = \log O_{BC.2} = \log O_{BC.A}$$

$$4u_{ik}^{AC} = \log O_{AC.1} = \log O_{AC.2} = \log O_{AC.B}.$$

Hierarchikus modellek

Az eddigiekben nem foglalkoztunk a loglineáris modell összes lehetséges változatával. Nem vizsgáltuk például ezt a modellt:

$$F_{ijk} = u + u_{1(i)} + u_{2(j)} + u_{3(k)} + u_{123(ijk)}. \tag{20}$$

Figyelmünket csak olyan modellekre korlátoztuk, melyek magasabb rendű u tagokat csak akkor foglalnak magukban, ha a megfelelő alacsonyabb rendű u tagokat is magukban foglalják. Így az u_{123} paraméter csak akkor lehet a modellben, ha az u_{12}, u_{23} és u_{13} paraméterek is szerepelnek benne. Az így felépített modelleket hierarchikus modelleknek nevezzük. A (20) modell nem hierarchikus, az ilyen modelleknél a fő problémát nem az illesztés jelenti — ennek módszerét Bloomfield (1974) és Haberman (1974) már kidolgozták[6] — hanem az értelmezés. Arról van szó, hogy egy nem hierarchikus modell paramétereit nem tudjuk az előző fejezetben leírt módon értelmezni: a megfelelő alacsonyabb rendű paraméterektől való eltérésekként.

[6] Ez az eljárás nagyon lassú, ezért a számítógépes programok nem számolnak nem hierarchikus modellt.

A modell kiválasztása

A nagyszámú paramétert magukban foglaló bonyolult modellek általában jobban illeszkednek, mint egy egyszerűbb modell, mely a bonyolultabbnak speciális esete. Mégis ha két elfogadhatóan illeszkedő modellünk van, nem a jobban illeszkedőt választjuk akkor, ha a másik rosszabbul illeszkedő, de egyszerűbb, takarékosabb modell várható gyakoriságai és a jobban illeszkedő modell várható gyakoriságai között az eltérés nem szignifikáns. A modellek közötti választás problémája nyilvánvalóan akkor merül fel, ha több elfogadhatóan illeszkedő modellünk van. Mivel az illeszkedés jóságát tesztelő statisztikák statisztikailag nem függetlenek, a modellek illeszkedésének jóságát nem vizsgálhatjuk külön-külön, mint ezt korábban tettük. Szükségünk van tehát egy módszerre, mely segítségünkre lesz a szignifikáns interakciók kiválasztásában. Sajnos a modell kiválasztásnak nincs egy minden célt kielégítő legjobb módszere. BISHOP (1969), BROWN (1976), FIENBERG (1970), GOODMAN (1970, 1971) és KU-KULLBACK (1968) mind más utakon közelítik meg a problémát. Az alábbi technika általános sémát nyújt két modell várható gyakoriságai összehasonlításához, ha az egyik modell a másiknak speciális esete:

$$2\sum f \log\left(\frac{F_1}{F_2}\right). \tag{21}$$

Ezt a statisztika arra ad választ, hogy a két modell várható gyakoriságai közötti különbség véletlen vagy szisztematikus. A statisztika X^2 eloszlású és szabadságfoka a két modell szabadságfokainak különbsége.

A modell kiválasztás menetére nézzünk most egy példát (ANDERSEN, 1980). Svéd közlekedési adatokat fogunk elemezni. Baleseti adatokat gyűjtöttek össze 18 héten át 1961-ben és 18 héten át 1962-ben. Mindkét évben 90 km/óra sebesség korlátozást vezettek be bizonyos napokon. A baleseteket feljegyezték mind az autópályákon, mind az egyéb utakon.[7] Így a megfigyelt balesetek három kritérium szerint osztályozhatók: (1) az út típusa melyen a baleset történt (autópályák, egyéb utak), (2) volt-e sebesség korlátozás a baleset napján vagy nem volt, (3) az év melyben a baleset történt. A három dimenziós kereszttábla megfigyelt adatait a 2. táblázat tartalmazza.

A 2. táblázat megfigyelt gyakoriságaihoz nyolc olyan hierarchikus modell illeszthető, melyek mind a három fő hatást tartalmazzák. Az illesztett modelleket H-val jelöljük és a H-kat aszerint különböztetjük meg, hogy mely inter-

[7] Ez a mintavételi eljárás jó példája a Poisson mintavételi modellnek. Keresztosztályozott adatok gyűjtésének három fő módja van:

(1) Poisson modell: egy előre meghatározott időtartam alatt végzik a megfigyelést, anélkül, hogy a minta nagyságát előre meghatároznák.
(2) Multinominális modell: egy előre meghatározott elemszámú mintát veszünk, és ennek elemeit keresztosztályozzuk aszerint, hogy a különböző változók mely kategóriáiba tartoznak.
(3) Product-Multinominális modell: előre meghatározzuk a sor változó minden kategóriájának elemszámát.

Mind a három mintavételi séma ugyanazokat a várható gyakoriságokat és ugyanazokat az illeszkedési statisztikákat eredményezi.

2. táblázat

Év	Sebesség korlátozás	Autópályák	Egyéb utak	Összesen
1961	90 km	8	42	50
	nincs	57	106	163
	összesen	65	148	213
1962	90 km	11	37	48
	nincs	45	69	114
	összesen	56	106	162
Összesen	90 km	19	79	98
	nincs	102	175	277
	összesen	121	254	375

akciókat hagyják figyelmen kívül. A modellek illeszkedését tesztelő G^2 statisztikák eredményeit a 3. táblázat mutatja be.

3. táblázat

Hipotézis	G^2	s. f.
H_{123}	0,19	1
H_{12}	11,36	2
H_{13}	1,34	2
H_{23}	2,44	2
$H_{13,23}$	3,13	3
$H_{12,23}$	13,16	3
$H_{12,13}$	12,05	3
$H_{12,13,23}$	13,85	4

A harmadik tábla alapján nyilvánvaló, hogy a szükséges paraméterek kiválasztása céljából a hipotézisek jóságát az alábbi rendben érdemes tesztelni: $H_{123} \rightarrow H_{13} \rightarrow H_{13,23} \rightarrow H_{12,13,23}$. Az eredményeket a 4. táblázat tartalmazza.

4. táblázat

Okozott variancia	Hipotézis	Teszt	Szabadságfok
másodrendű interakció	H_{123}	0,19	1
elsőrendű interakció (1, 3)	H_{13}	1,15	1
elsőrendű interakció (2, 3)	$H_{13,23}$	1,79	1
elsőrendű interakció (1, 2)	$H_{12,13,23}$	10,72	1

A paraméterek szignifikanciáját (21) alapján teszteljük. Például az (1, 3) interakció hozzájárulását a megfigyelt gyakoriságok varianciájához az alábbi módon mérjük:

$H_{13} - H_{123} = 1,34 - 0,19 = 1,15$, ahol s. f. $= 2-1 = 1$ és $H_{13}(u_{123} = u_{13} = 0)$, H_{123}-nak egy speciális esete. A két modell várható gyakoriságai között a különbség nem szignifikáns, tehát az (1,3) interakció felvétele a modellbe nem indokolt. Hasonló eredményre jutunk ha a (2,3) interakciót vizsgáljuk, ez sem járul hozzá szignifikáns mértékben a megfigyelt gyakoriságok varianciájához. A 4. táblázat azt mutatja, hogy a H_{123}, H_{13} és a $H_{13,23}$ hipotézisek elfogadhatók, tehát az (1,2) másképp u_{12} interakció kivételével minden interakció 0. Esetünkben ez a következőket jelenti: a balesetek megoszlása úttípus szerint egyforma 1961-ben és 1962-ben; a sebesség korlátozás esetén történt balesetek és a sebesség korlátozás hiánya esetén történt balesetek hányadosa ugyanannyi 1962-ben mint 1961-ben; viszont az utak típusa és a sebesség korlátozás léte vagy nem léte között van interakció, tehát a sebesség korlátozásának hatása más az autópályákon és más az egyéb utakon.

A modell kiválasztása során az $u + u_1 + u_2 + u_3 + u_{12}$ modellhez jutottunk, ez az a legegyszerűbb, legtakarékosabb modell, mellyel még kielégítően le tudjuk írni a vizsgált jelenséget. A modell paramétereinek becsült értékei az 5. táblázatban szerepelnek.

5. táblázat

$u_{12(ij)}$	$j = 1$	2
$i = 1$	$-0{,}22$	$+0{,}22$
2	$+0{,}22$	$-0{,}22$
	$i = 1$	2
$u_{1(i)}$	$-0{,}49$	$+0{,}49$
	$j = 1$	2
$u_{2(j)}$	$-0{,}62$	$+0{,}62$
	$k = 1$	2
$u_{3(k)}$	$+0{,}14$	$-0{,}14$
$u = 3{,}57$		

Az $u_{12(ij)}$ interakció becsült értékei azt mutatják, hogy a sebesség korlátozásának hatása nagyobb az autópályákon, mint az egyéb utakon. Általánosságban is megállapíthatjuk, hogy egy u paraméter pozitív értéke ($u > 0$) azt jelenti, hogy a megfelelő cella vagy szélösszeg megfigyelt értéke magasabb, mint a modell alapján várható értéke. Ennek megfelelően $u < 0$, ha a megfigyelt érték alacsonyabb, mint a várható. Az $u_{1(i)}$ és $u_{2(j)}$ főhatások becsléseit nehéz értelmezni, mivel nem ismerjük az autópályák és az egyéb utak teljes hosszát, sem a napok számát, melyeken volt, illetve nem volt sebesség korlátozás. Az $u_{3(k)}$ főhatás értelmezése könnyebb, mivel mindkét évben 18 héten át tartott a megfigyelés, és 1961-ben jelentősen több baleset történt, mint 1962-ben, függetlenül a sebesség korlátozásától.

Ha egy gyakorlott szemű statisztikus figyelmesen tanulmányozza a 2. táblázatot, minden bonyolultabb matematikai-statisztikai elemzési eszköz nélkül is ugyanazokra a következtetésekre fog jutni, mint amelyekre mi jutottunk a loglineáris modellek segítségével. Azonban nagyobb méretű három, négy vagy több dimenziós kereszttáblákban az összefüggések elemzése már megkívánja a loglineáris módszer igénybevételét. E tanulmányban csak a loglineáris modell három változós esetéről volt szó, azonban a különböző hipotézisek értelmezésére, a modellek illesztésére, a paraméterek jelentésére és a modell kiválasztásra vonatkozó minden megállapítás különösebb nehézség nélkül kiterjeszthető a négy vagy több változós esetekre is.

A loglineáris modellekkel kapcsolatban feltétlenül utalnunk kell a mobilitás vizsgálatára. Ez az a terület ugyanis, ahol ilyen modelleket eddig a legeredményesebben alkalmaztak. Az itt felmerült elemzési problémák megoldására tett erőfeszítések jelentős mértékben járultak hozzá a loglineáris módszer fejlődéséhez. A probléma a következő: ha különböző időszakokra, területekre vagy országokra vonatkozó azonos felépítésű kereszttáblákat hasonlítunk össze, azzal a kérdéssel találjuk szembe magunkat, hogy mi okozza a táblázatok között az eltéréseket: a széleloszlások változása-e, vagy a fej illetve oldal rovatban szereplő változók közötti kapcsolat szorosságának változása. A különböző időszakokra vagy régiókra vonatkozó mobilitás táblák esetében a fenti kérdés a következőképpen merül fel: mi okozza a mobilitás megfigyelt változásait az apák és fiaik foglalkozás szerinti megoszlásában, (más szóval: a társadalom foglalkozási struktúrájában) bekövetkező változások, vagy pedig az apa és fia társadalmi helyzete (más szóval: a származás és az elért helyzet) közötti interakció erejének változása. ANDORKA—CSICSMAN—KELETI a Statisztikai Szemle 1981 októberi számában megjelent ,,A magyar társadalom nyitottságának változásai'' című cikkükben a szóban forgó kérdés megválaszolásához az $u_{123} = 0$ loglineáris modellt hívja segítségül.

Ez a modell — ahol 1: az apa foglalkozása; 2: a fiú foglalkozása; 3: a születési kohorsz — azt feltételezi, hogy az apák és fiaik foglalkozás szerinti megoszlása a vizsgált időszakban kohorszról kohorszra változott, és van kapcsolat a származás és az elért helyzet között, de ez a kapcsolat ugyanolyan erejű minden kohorszban. A Statisztikai Szemlében megjelent tanulmány csak a férfiak mobilitásával foglalkozik. Az illeszkedés vizsgálata alapján az $u_{123} = 0$ modellben megfogalmazott nulla hipotézis nem bizonyult elfogadhatónak, ami azt jelenti, hogy szemben a nyugat-európai és az amerikai mobilitás vizsgálatok eredményeivel, Magyarországon az apa-fiú interakció a vizsgált időszakban változott. Időközben az 1973-as vizsgálatban összeírt nők mobilitását is elemeztük a loglineáris módszerrel, a férfiakra és nőkre vonatkozó adatok egy felvételből származnak, az elemzésben ugyanazt a nyolc foglalkozási kategóriát és ugyanazt a négy születési kohorszot használtuk a nők esetében, mint a férfiakéban. Így az eredmények összehasonlíthatók. A 6. táblázatban 6 loglineáris modell illeszkedés vizsgálatának eredményei szerepelnek, külön a férfiakra és külön a nőkre.

6. táblázat

modell		szabadság fokok	G^2	
			férfi	nő
első	1, 2, 3	238	4438,59	4353,38
második	13, 2	217	4144,41	3384,80
harmadik	23, 1	217	3714,36	4010,61
negyedik	12, 3	189	1171,30	1316,19
ötödik	13, 23	196	3420,15	3041,99
hatodik	12, 13, 23	147	236,29	175,34

A társadalom nyitottságának változását érintő szociológiai jelentése a hatodik modellnek van, és ebben a nők és a férfiak mobilitása némileg eltérő képet mutat. A három irányú interakciót 0-nak tételező hipotézist a férfiak esetében el kellett vetnünk, a nők esetében viszont ez a modell elfogadhatóan illeszkedik, tehát az apa-lány interakció a vizsgált időszakban nem változott szignifikáns mértékben. A 7. táblázatban az apa és lánya társadalmi helyzete közötti interakciónak a hatodik modell alapján becsült értékei szerepelnek.

7. táblázat

A (12) loglineáris paraméternek a hatodik modell alapján becsült értékei, osztva a paraméterek standard hibáival

apa foglalkozása	lány foglalkozása							
	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
1. Vezető	1,308	4,108	0,535	—0,155	0,317	—1,708	—0,684	—2,295
2. Értelmiségi	0,733	10,139	3,362	—0,556	—0,756	—1,087	—1,767	—3,157
3. Egyéb szellemi	0,754	3,974	6,973	—0,613	—1,458	—1,641	—2,195	—2,923
4. Kisiparos	—0,890	—1,884	—2,678	2,741	1,307	—0,182	—1,046	1,124
5. Szakmunkás	—0,418	—1,263	0,778	—0,093	3,383	1,911	0,303	—2,513
6. Betanított m.	—0,882	—2,148	—1,717	—0,412	—0,006	2,803	3,221	4,723
7. Segédmunkás	—0,099	—3,057	—2,212	—0,338	0,579	3,288	3,004	3,096
8. Mezőgazdasági fizikai	—1,390	—3,913	—6,555	0,100	—1,409	2,571	4,495	16,545

A táblázat főátlójában levő értékeket értelmezhetjük az adott rétegre jellemző státusz-öröklési mutatóként. A főátlón kívül eső paraméterek pedig a rétegek közötti társadalmi távolságról adnak információt.

IRODALOM

ANDERSEN (1980): *Discrete statistical models with social science applications.* North-Holland.

BISHOP (1969): Full contingency tables, logits, and split contingency tables. *Biometrics.*

BISHOP—FIENBERG—HOLLAND (1975): *Discrete multivariate analysis: theory and practice.* Cambridge, Mass., The MIT Press.

BLOOMFIELD (1974): Transformations for multivariate binary data. *Biometrics.*

BROWN (1976): Screening effects in multidimensional contingency tables. *Appl. Statist.*

COX (1970): *Analysis of Binary Data.* London, Methuen

LINDSEY (1973): *Inferences from Sociological Survey Data: A Unified Approach.* New York, Elsevier.

PLACKET (1974): *The Analysis of Categorical Data.* London, Griffin.

DARROCH—RATCLIFF (1972): Generalized iterative scaling for loglinear models. *Ann. Math. Statist.*

DEMING—STEPHAN (1940): On a least squares adjustment of sampled frequency table when the expected marginal totals are known.

DEMING—STEPHAN (1940): The sampling procedure of the 1940 population census. *J. Amer. Statist. Assoc.*

FIENBERG (1970): The analysis of multidimensional contingency tables. *Ecology.*

FIENBERG (1977): *The analysis of cross-classified categorical data.* MIT Press.

GOODMAN (1970): The multivariate analysis of qualitative data: interactions among multiple classifications. *J. Amer. Statist. Assoc.*

GOODMAN (1971): The analysis of multidimensional contingency tables: stepwise procedures and direct estimation methods for building models for multiple classifications. *Technometrics.*

GOODMAN (1972): A general model for the analysis of surveys. *Amer. J. Sociol.*

HABERMAN (1974): *The analysis of frequency data.* Univ. of Chicago Press.

KU-KULLBACK (1968): Interactions in multidimensional contingency tables: an information theoretic approach. *J. Res. Nat. Bur. Standards.*

KÖNYVEKRŐL

KÖVES PÁL: *Indexelmélet és közgazdasági valóság* Budapest, 1981. Akadémiai Kiadó. 212 o.

Igen kevés az olyan szintetizáló jellegű indexelméleti mű, mint Köves Pál könyve. Ellentétben ugyanis az olyan művekkel, melyek előre egyik vagy másik indexelméleti irányzat mellett kötelezik el magukat, ez eleve azzal a szándékkal íródott, hogy a sokféle megközelítést alkalmazó, szokatlanul gazdag indexelméleti irodalom közös nevezőre hozása útján próbáljon meg „végére járni" a szerinte már túlságosan hosszú ideje kutatott és vitatott formula-kérdésnek. Mivel úgy vélem, hogy a szerzőnek ez sikerült is, már a részletes ismertetés elébe bocsátom, hogy a művet — nemzetközi mércével mérve is — az indexelmélethez való igen jelentős hozzájárulásnak tartom. A könyv egyetlen hibájaként az igen gyakran túlzott tömörséget tudom megemlíteni, ami a gondolatmenet követését gyakran csak az egyes részterületek legszűkebb specialistái számára teszi teljesen problémamentessé. Ezért sajnos a mű minden bizonnyal csak viszonylag szűk magyar olvasóközönségre számíthat, amit az idegen nyelvű megjelentetésével (*Index Theory and Economic Reality*. Akadémiai Kiadó, 1983.) — mindenképpen indokolt volt kiterjeszteni.

A nyolc fejezetből álló művet bőséges irodalomjegyzék, az illusztrációként használt példák alapadatait és számítási eredményeit tartalmazó melléklet, az áttekintést megkönnyítő képletjegyzék, s függelékként az *I. Fisher* által összeállított „formulakatalógus" egészíti ki.

Az első fejezet részben a szerző témaválasztásának logikus, meggyőző alátámasztását tartalmazza, részben pedig a számszerű illusztrációként használt példaanyagot és a könyvben használandó jelölésrendszert mutatja be. Mint már említettem, a szerző a különböző indexelméleti irányzatok együttes áttekintését tűzi ki célul annak érdekében, hogy a gyakorlat számára útmutatást adjon a valamennyi elméleti, módszertani és gyakorlati szempontot együttesen mérlegelő legjobb kompromisszum megtalálása érdekében. Az indexelméletet az általa minél hívebben tükrözendő közgazdasági valóság általános érvényű vonásaival szisztematikusan szembesíti, ami ugyancsak helyeselhető.

A mindössze néhány oldal terjedelmű *második fejezet* a különféle indexelméleti irányzatokat jellemzi röviden. Egyedül a nálunk viszonylag kevéssé ismert funkcionális vagy közgazdasági megközelítést mutatja be viszonylag bővebben a fejezetben. A szerző már itt leszögezi, hogy nem helyesli a többféle irányzat egymással való szembeállítását és a statisztikai megközelítés oly gyakori lebecsülését.

A következő három fejezetben a *két időszak összehasonlítására* használható formulák rendszerezésével és részletes vizsgálatával foglalkozik a szerző. Mondanivalóját az *árindexformulákon* szemlélteti; a volumenindex formuláit csak az árindex-számításnak alárendelve használja. Ez az absztrakció azonban indokoltnak is tekinthető, mert lényegesen áttekinthetőbbé teszi az egész tárgyalást.

A harmadik fejezet lényegét az indexformulák családfájának ismertetése képezi, ami lényegesen megkönnyíti a nagyszámú indexformula áttekintését. E családfa nem más, mint az indexformulák fisheri rendszerének a szerző által lényegesen áttekinthetőbbé tett, racionalizált változata. Az alapgondolat az, hogy minden index a megfelelő egyedi indexek valamilyen átlagaként áll elő. A családfa három blokkból (egy additív blokk, egy multiplikatív blokk és a helyzeti középértékek blokkja), és minden blokk három generációból áll. Az additív blokk az indexek aggregát-, számtani- és harmonikus-átlag formáit foglalja össze, míg a multiplikatív blokk az egyedi indexek mértani átlagaként előálló formulákat. A helyzeti középértékek blokkja végül az egyedi indexek mediánjaként vagy móduszaként nyerhető indexeket tartalmazza. A multiplikatív blokkban létezik egy „másfeledik" generáció is. Az egyszerűbb indexformulákat a családfa első generációjába tartozó egyszerű vagy súlyozatlan formulák reprezentálják. A második generáció tagjai ezzel szemben már súlyozottak, míg a harmadik generációba tartozó formulák már az ún. időpróbás keresztezés eredményeképpen keletkeznek a második generációba tartozó alapformulákból. A szerző már e kezdeti fázisban szemléletesen bemutatja, hogy a különféle formulákkal kapott eredmények annál inkább megközelítik egymást, minél magasabb generációból származnak az alkalmazott formulák. E fejezet befejező részében a szerző a fisheri gondolatrendszer alapjaival kapcsolatos véleményét fejti ki röviden. Ennek kapcsán főleg az átlagfajtákra és a súlyokra vonatkozó torzítási tételt elemzi. Kimutatja, illetve utal rá, hogy a számtani és harmonikus átlag nemcsak az időpróba, hanem a tényezőpróba tükrében is torzít. E fejezet talán valamivel áttekinthetőbbé válhatott volna, ha a szerző az indexpróbákat már az első fejezetben definiálta volna, s az indexpróbák bevezetésével nem töri meg a tárgyalás gondolatmenetét a harmadik fejezetben.

A negyedik fejezet az additív felépítésű indexformulákat vizsgálja részletesen. A szerző legelőször azzal a helytelen nézettel szemben veszi fel a harcot, mely egy formulának attól függően tulajdonít közgazdasági tartalmat, hogy az adott formulákhoz fűzhető-e részletes interpretáció vagy sem. Mivel egy adott formula közgazdasági tartalmának megítélésekor gyakran azt is figyelembe veszik, hogy az adott célnak általánosságban elegettevő formulák menynyire eltérően reagálnak a vizsgált jelenség egyes részvonatkozásaira, a szerző részletes vizsgálat tárgyává teszi a különböző formulákkal kapott eredmények eltérését előidéző tényezőket. E vizsgálat eszköze a különböző súlyozott átlagok hányadosára vonatkozó Bortkievicz-féle tétel, melyet a szerző szisztematikusan alkalmaz a különböző indexformulákra. Ennek kapcsán — többek között — a Paasche és Laspeyres súlyozású indexek hányadosában (B) kimutatja egy átlagos árrugalmassági együttható jelenlétét. A szerző — Fisherrel szemben — a B-nek az egységtől való eltérését meghatározó egyedi ár- és volumenindexek közötti korrelációt alapvetően negatívnak tekinti, amit nemcsak empirikus módon, hanem közgazdaságilag is indokol. E fejezetben található meg a Fisher-féle „ideális" formula „aggregát"-formája is, melynek segítségével az egyedi indexek és az aggregátumokból számítható megoszlási viszonyszámok tökéletes összhangba hozhatók egymással. Ugyancsak itt található meg a szerző által kidolgozott kétfokozatú Fisher-formula is, ami biztosítja a részátlag—főátlag próba teljesülését. E fejezetben definiálja az R-rel jelölt tényező-hányados-indexet is, aminek bevezetése első látásra kissé öncélúnak tűnhet ugyan, de később igen hasznosnak bizonyul. A fejezet végül néhány aszimmetrikus volumen- és árindexformula bemutatásával és egy olyan általánosnak tűnő megállapítással zárul, hogy lehetséges ugyan az aszimmetria melletti érvelés, de az sohasem *egy adott* rendszert támaszt alá.

Az ötödik fejezet a multiplikatív felépítésű indexformulákat mutatja be részletesebben, s itt találhatók meg a különféle időpróbás keresztezésű mértani átlagformulák. Itt talán két dolog hiányolható: egyrészt a G_0 és G_1 formulák multiplikatív alapindexekként való megtartásának korábban ígért indoklása, másrészt pedig az, hogy az értékrészesedések logaritmikus szórásnégyzetének Theil-féle felbontását nem hozza a Bortkiewicz-féle elemzéssel a 81. oldalon említettnél közvetlenebb kapcsolatba.

A hatodik fejezet feloldja azt a megkötést, hogy csak két összehasonlítandó pozíció van adva, s mindenekelőtt az összehasonlítási és indexszámítási rendszerek fogalmát, valamint a definiálásukhoz és precíz jellemzésükhöz szükséges alapfogalmakat vezeti be. Ezután a nyílt típusú indexszámítási rendszereket részletezi, s a különféle formulákkal nyerhető eredményeket egymással igen szemléletesen hasonlítja össze. Külön kiemelést érdemel az additív, illetve multiplikatív felépítésű formulák láncolásának tárgyalása, amely jól előkészíti az infinitezimális gondolatmeneten alapuló Divisia-indexet. Erről a szerző kimutatja, hogy összekapcsolása a mennyiségi pénzelmélettel — ahogy az Divisia eredeti levezetésében szerepel — egyáltalán nem szükségszerű. A Divisia-index bemutatása után a szerző kitér annak néhány megközelítésére és fiktív változatára. Ezek közül talán a Vogt-féle természetes indexet érdemes kiemelni, mely a szerző szerint valójában fiktív Divisia-index és a Fisher-féle formulához való viszonya az R tényező-hányados index segítségével egyértelműen meghatározható. Ezután a zárt rendszereket tárgyalja, melyek általában valamilyen többpozíciós keresztezési eljárással javítják meg az indexszámítási eljárást. E rendszerek közül az ÉKS-formulát érdemes kiemelni, amit — többek között a szerző munkássága nyomán — ma már nagy előszeretettel alkalmaznak a nemzetközi összehasonlításokban. Ehhez — több előnyös tulajdonsága mellett — az is hozzájárulhat, hogy igen közeleső eredményt ad a jóval bonyolultabb, ugyancsak elsősorban nemzetközi összehasonlítási célokra kidolgozott egyik Van Yzeren-féle formulához. Ennek tárgyalásán kívül még a különféle aszimmetrikus rendszerekről, az aggregátumok mátrixának különféle közelítésein alapuló módszerekről, valamint az ÉKS-formula egyfajta becslési lehetőségéről olvashatunk e rendkívül gazdag tematikájú, igen hasznos fejezetben. Kár, hogy e fejezet nem tartalmazza az aszimmetrikus formulák gyakorlati alkalmazásához szükséges iterációs formulákat. Ugyancsak sajnálatos, hogy a túl tömör leírás miatt csak rendkívül nehezen érthető meg a Van Yzeren-féle formulához vezető gondolatmenet.

A hetedik fejezet az eloszlás-szemléletben való indexszámításról, az indexpróba-irányzatról és az indifferenciagörbéken alapuló közgazdasági irányzatról nyújt további érdekes részleteket. Az eloszlásszemléletben való indexszámítással kapcsolatban a szerző arra a megállapításra jut, hogy az egyáltalán nem áll szemben a közgazdasági megközelítéssel. Hasonló végkövetkeztetésre jut a próbaszemlélettel kapcsolatban is. Arra jut ugyanis, hogy a próbákról való lemondás egyben az indexszámítás alapgondolatáról való lemondás, mert a próbák éppen a közgazdasági valóságnak minél hívebb visszatükrözése követelményét fejezik ki. A szerző szerint az ismert indexpróbák közül, többpozíciós esetben, a minden lehetséges viszonylatra értelmezett tényező-, átlag- és körpróba veendő elsősorban figyelembe. A fejezet harmadik részében a szerző az indifferencia-görbéken alapuló közgazdasági irányzattal kapcsolatos nézeteket fejti ki. Arra a következtetésre jut, hogy a közgazdasági elméletből kiindulva ugyancsak a statisztikai irányzat legértékesebbnek tartott formuláihoz jutunk. Végül numerikus illusztrációkat mutat be a Divisia-indexre és a funkcionális indexekre. A Divisia-index (139—142 old.) számítása sajnos csak igen nehezen követhető. A megértést könnyítő egyes lépések leírása elmaradt (pl. a hasznossági függvény nincs megadva általánosan az idő függvényében; a 7. 4 tábla 5. oszlopában szereplő integrál konkretizálása hiányzik). A sok sajtóhiba is nehezíti a megértést.

A nyolcadik fejezet az integrált indexelmélet mielőbbi megteremtésének szükségességére hívja fel a figyelmet. Erre a szerző vizsgálata szerint az adja meg a lehetőséget, hogy a különböző irányzatok valódi, gyakorlatban is használható eredményei egyáltalán nem ellentétesek egymással, hanem inkább kölcsönösen alátámasztják egymást. A formulák tulajdonságai a szerző szerint csakis a közgazdasági valóság tulajdonságaival együtt vizsgálhatók. Ennek mintegy illusztrálásaként bemutatja a termékek nagyarányú cserélődése esetén is alkalmazható indexszámítási eljárást, amit a KSH kérésére dolgozott ki. A fejezet következő részében a formulák közötti választásra találhatunk igen hasznos tanácsokat. A gondolatmenetből különösen a 8. 3. 4. és 8. 3. 5. alpontokat tartom kiemelendőnek. A „Létezik-e tökéletes indexformula?" kérdést a szerző úgy válaszolja meg, hogy a Divisia-index, illetve az azt közelítő, optimális gráfon alapuló Divisia-szerű index — az optimális gráf előállításának részleteit a 8. 3. 3. alpontban találhatjuk meg — *feltételesen tökéletesnek* minősíthető. Azért feltételesen tökéletesnek, mert a szerző véleménye szerint az indexszámítás koncepciója a Divisia-index gondolatmeneténél nem közelíthető jobban a közgazdasági valósághoz. A szerzőnek ez a válasza, ha szó szerint nem is, de a lényeget tekintve egybeesik az 1956-ban megjelent, hasonló tárgyú könyvében ugyanc kérdésre adott válasszal. A régi és új válasz indoklását elolvasva azonban szembeötlő a mostani gondolatmenet lényeges gazdagodása a korábbihoz képest. Végül a 8. 3. 5. alpontban a szerző hangsúlyozza, hogy az ajánlások a formulák közötti választásra az elméleti megalapozásból és egy „használati" utasításból kell hogy álljanak, ami lényegében a gyakorlat szempontjainak figyelembe vételét javasolja.

Összefoglalva véleményemet: az indexelmélet világirodalma igen jelentős művel gazdagodott. A szerző bőségesen él mondanivalója numerikus és grafikus illusztrálásának lehetőségével. Az általam említett néhány apró észrevétel semmit sem von le a mű értékéből. Annál bosszantóbb viszont, hogy az olvasónak a helyenként túlzottan tömör tárgyalás miatt amúgy sem könnyű „munkáját" elég sok sajtóhiba és a belső hivatkozások pontatlansága is nehezíti.

VITA LÁSZLÓ

MUNDRUCZÓ GYÖRGY: *Alkalmazott regressziószámítás* Budapest, 1981. Akadémiai Kiadó. 258 o.

Már közhelynek számít egy megjelenő új munkáról azt mondani, hogy régi hiányt pótol, de azt hiszem, Mundruczó György könyve esetén mást aligha lehetne írni. Igaz, hogy az elmúlt évtizedben jelentek meg Magyarországon ökonometriaelméleti kézikönyvek — itt *Pawlowski* és *Malinvaud* munkáira gondolok. Az egyes konkrét modelleket leíró könyvek (A magyar népgazdaság M2 ökonometriai modellje, A rövidtávú tervezés ökonometriai modellje) is tartalmaztak viszonylag részletes módszertani fejezeteket. De az ökonometria elméletét tételesen és logikus keretben összefoglaló, kezdők számára is olvasható, ugyanakkor magasabb szinten is kézikönyvként használható munka (két egyetemi jegyzet kivételével) magyar nyelven ezideig nem jutott az olvasók kezébe. Nem kívánom itt részletezni a hazai ökonometriai könyvkiadásról kialakított véleményemet (ezt Theil könyvéről írt ismertetőmben, a Szigma 1976/1. számában már megtettem), de úgy tűnik, az ott említett nehézségek jó részét megoldja ez a könyv.

Az „Alkalmazott regressziószámítás" valóban jól sikerült munka, hiszen az ökonometria legfontosabb összefüggéseit, tételeit és modelltípusait az angolszász szakirodalomban évtizedek alatt kikristályosodott szerkezeti felépítésben és az ott meghonosodott szimbólumrendszer felhasználásával ismerteti, megteremtve ezzel azt a hidat, amelyen keresztül a további részletek iránt érdeklődők a megfelelő szakkönyveket, folyóiratcikkeket viszonylag könnyen használhatják. Ennek kapcsán legfeljebb az furcsálható némiképp, hogy a szerző következetes szeméremmel kerüli az „ökonometria" szó használatát — jóllehet erről szól a könyv — hiszen a hivatkozásoktól eltekintve a könyv legutolsó oldaláig mindenütt sikerül azt szinonimákkal pótolnia.

A könyv első fejezete az alapfogalmak bevezető jellegű tisztázása után a görbeillesztést, mint technikát mutatja be két- és háromváltozós esetre. Ebben a fejezetben újszerű, és véleményem szerint szerencsés az ortogonális regresszió tárgyalása, hiszen ezzel szemléletessé teszi azt a nyilvánvaló, de gyakran elfelejtett tényt, hogy a legkisebb négyzetek elve jószerivel csak konvenció. Ennek a fejezetnek a kapcsán kell kitérni az egész könyvön végigvonuló két problémára. Az egyik az, hogy a szerző nyilvánvaló didaktikai okokból sok és részletes számpéldát hoz, amivel általánosságban csak egyet lehet érteni, ezek során azonban néha olyan kérdésekre is kitér, amelyek nem tartoznak az ökonometria, vagy a regressziószámítás tárgykörébe (pl. lineáris egyenletrendszerek különféle megoldási módjai). A másik, ezzel szorosan összefüggő kérdés a számítástechnika alkalmazásával kapcsolatos. Jóllehet a szerző a bevezetésben utal a számítástechnika jelentőségére, a tárgyalás során ezt már mellőzi, holott az ismertetésre kerülő módszerek jó része csak számítógépen valósítható meg hatékonyan. Ehhez még hozzá kell tenni, hogy a megfelelő programok és programcsomagok már nálunk is hozzáférhetők, sőt egyre szélesebb körben használják azokat. Ezért a rájuk való utalás nagyban emelte volna a könyv gyakorlati használhatóságát, ugyanakkor feleslegessé tette volna az említett számítási módszerek részletezését.

A második fejezet a standard lineáris modellt mutatja be a legjobb hagyományokat követve. Részletesen, de a részletekben el nem vesző módon írja le a modell feltételrendszerét és hipotéziseit, az egyszerű legkisebb négyzetek fontosabb tulajdonságait, valamint a modell fő hibamutatóit és azok összefüggéseit. Ennek a fejezetnek külön érdeme, hogy nagy súlyt helyez a gyakorlati alkalmazások szempontjából leglényegesebb hibalehetőségnek, a multikollinearitásnak a részletes vizsgálatára és arra, hogy milyen módon lehet az esetlegesen fellépő multikollinearitás okozta veszélyeket kiküszöbölni.

A logikus felépítésű harmadik fejezet a modell különféle hipotéziseinek statisztikai tesztjeit mutatja be. Ennek a fejezetnek az a jelentősége, hogy bemutatja azokat az eljárásokat, amelyek az ökonometria rendszerén belül képesek a modell, illetve a becslési eljárás érvényességét, vagy hibás voltát valószínűsíteni. A szerző e fejezetben először az alaphipotézisekből levezeti a későbbi tárgyalás számára fontos próbafüggvényeket (elsősorban az F eloszlást), majd sorra megvizsgálja, hogy ez hogyan alkalmazható az egyes részhipotézisek tesztelésére. Kevéssé ismertnek és éppen ezért említésre méltónak tartom e fejezetben a regressziós együtthatók stabilitásának ellenőrzésére bemutatott próbát, amelyet a gyakorlati modellezők komoly sikerek reményében használhatnának. Ugyanakkor ennek kapcsán a könyvnek egy szerkesztési hibájára hívom fel a figyelmet. Mundruczó szakít a hivatkozások bevett gyakorlatával. Bár a könyv végén terjedelmes és nyilvánvalóan kimerítő irodalomjegyzék szerepel, hivatkozás e művekre nincs a szövegben. Így egy-egy módszer ismertésénél általában nem lehet tudni, hogy az honnan származik, hol lehet további részleteknek utánanézni. Sajnos ez az apró, de bosszantó szerkesztési hiba éppen a könyv referatív jellegét gyengíti.

A negyedik fejezet az automatikus, optimális regresszió meghatározásának módszereit tárgyalja. Bár ezeknek a módszereknek az értékéről szakmai körökben sok vita folyik, azért tartom szerencsésnek itteni részletes elemzésüket, mivel automatikus jellegükből kifolyólag jól gépesíthetők és így jelentőségük a számítástechnika fejlődésével növekvő. Az ötödik fejezet az általánosított regressziós modellt és annak becslési eljárásait mutatja be, az egész könyvnek talán ez a legjobb fejezete. A standard lineáris modellből kiindulva a nem-skalár típusú kovariancia mátrixszal rendelkező modelleken keresztül egészen a kevert becslési eljárások vizsgálatáig eljut, érintve egy sor, elméleti és gyakorlati szempontból kiemelkedően fontos problémát. Legfeljebb didaktikai oldalról tartom felvethetőnek azt a kérdést, hogy nem lett volna-e szerencsésebb az autokorrelált és a heteroszkedasztikus eset tárgyalási sorrendjét felcserélni, hiszen az előző általános, míg az utóbbi csupán diagonális kovariancia-mátrixok kezelését igényli. A Durbin—Watson teszt ismertetésénél jó lett volna hivatkozni arra a kevéssé ismert, de gyakorlati szempontból fontos tételre, amely szerint, ha a magyarázó változók közt sztochasztikus változók is vannak — és ilyen eseteket már rögtön a következő fejezet is tárgyal — akkor ez a tény a próba alkalmazhatóságát lényegesen befolyásolja (vö. Theil: Principles of Econometrics, 200. old.).

A regressziószámítás speciális problémáiról szóló hatodik fejezet a feltételek további folyamatos feloldásával jut el újabb modelltípusokig. Az osztott késleltetésű modellek közül (bár ezt a meglehetősen elfogadott elnevezést a szerző érthetetlen módon kerüli) a geometriai súlyozású modellt és annak Koyck-transzformáltját, valamint az Almon-féle polinomiális eloszlású modellt és becslését mutatja be röviden, de ennél részletesebb tárgyalásmód nem is lett volna célszerű e könyv keretein belül. Bemutat, inkább csak példaként, egy-egy problémát az „Error in variables" modellekből, valamint a szezonális kiigazítás szerteágazó problémaköréből. Újszerűnek és sokatígérőnek tűnik a minőségi változók ökonometriai kezelésének módja.

A hetedik fejezet a nemlineáris becslésekről szól, és talán ez az egyetlen hely, ahol a módszerek ismertetése során pontatlan a szerző. A transzformációkkal lineáris alakra hozható egyenletek becslésénél ugyanis feltétlenül meg kell említeni, hogy a transzformált alakra alkalmazott legkisebb négyzetek módszere nem ad legkisebb négyzetek értelmében optimális becslést az eredeti változókra. Bizonyos esetekben kifejezetten félrevezető eredmények is adódhatnak, úgyhogy ilyenkor más becslési eljáráshoz kell fordulni. Az eredeti alakból levezetett normálegyenletek ezekben az esetekben nem lineárisak, de szerencsére a számítástechnika a legbonyolultabb nemlineáris rendszerek megoldását is reális közelségbe hozza.

A szerző kutatási területét és egyetemi jegyzetét ismerve kellemes meglepetést okoz az, hogy a tárgy korábban összegyűjtött anyagát a többegyenletes modellek problémáiba betekintést nyújtó nyolcadik fejezettel egészítette ki. Igaz, ez a fejezet korántsem törekszik olyan teljeskörűségre és részletekbe menően precíz tárgyalásra, mint a korábbiak, de úgy vélem, nem is ez volt a szerző célja. Egy ilyen fejezet csak arra vállalkozhat, hogy exponálja a bonyolultabb modellek fontosabb kérdéseit és esetleg egyes részterületeken rádöbbentse az olvasót arra, hogy mennyi módszertani probléma sűrűsödhet össze ezeknek a modelleknek a kezelésekor. Így kimondatlanul is megfogalmazza az igényt egy részletes és már kizárólag ezeket a kérdéseket tárgyaló könyv iránt.

A fejezet utolsó része a gyakorlati modellekről ad talán túlságosan rövid és sommás áttekintést. Itt egyrészt azt hiányolom, hogy a magyar modellek közül csak igen keveset említ meg a szerző. Pedig az utóbbi öt évben több, főleg kisebb méretű, de az itt tárgyalt témák közül sokra érdekes gyakorlati alkalmazást adó modell készült hazánkban. Másrészt indokolatlannak tartom az Ártervezés Ökonometriai Modelljére itt hivatkozni, mivel az módszertanilag egészen más alapokon álló modellkomplexum.

Összefoglalva az elmondottakat az Alkalmazott Regressziószámítást igen jó ökonometria alapkönyvnek tartom, amely több célra is hasznosítható. A mű apróbb, elsősorban szerkesztési jellegű hiányosságait nem a szerzőnek, hanem inkább a névtelenség középkori homályába burkolódzó lektor nem kellően gondos munkájának tudom be. A könyv elolvasását minden matematika iránt érdeklődő közgazdásznak, részletes kézikönyvként való használatát pedig minden gyakorló ökonométernek javasolni tudom. Ezen túl nyilvánvalóan nagy szerepet fog játszani ez a könyv a tárgy egyetemi oktatásában is.

HUNYADI LÁSZLÓ

JOHN E. ROEMER: *Analytical foundations of Marxian economic theory* (A marxi közgazdaságtan analitikus alapjai), Cambridge University Press, 1981. 220 o.

John Roemer új könyvében központi szerepet játszik a szerző meggyőződése, hogy a XIX. századi marxista kategóriák (mint például az „osztály", a „kizsákmányolás", az „átalakítás") még napjainkban is relevánsak, a jelenkor problémáinak vizsgálatában is hasznosíthatók. Roemer szerint e lehetőségek teljes kiaknázását akadályozza, hogy még mindig hiányos a múlt századi eszmék és kategóriák lefordítása matematikai nyelvre. Mit lehet tenni? Ezt a gondolatmenetet követve azt válaszolhatjuk, hogy jobban megérthetjük a dolgokat precíz matematikai eszközök bevezetésével. A szerző szerint ezen kívül több figyelmet kell fordítani olyan kérdésekre, mint a marxi elmélet mikroalapjai és a hozzátartozó különböző egyensúlyi fogalmak.

Roemer azt állítja, hogy a marxisták a matematika alkalmazásától e század legnagyobb részében azért vonakodtak, mert — egyebek között — a matematika által veszélyeztetve érezték a felállított ideológia vezető szerepét. Szerinte ha a marxizmus az, amit állít magáról (azaz tudomány), akkor a matematika bizonyára segít a marxizmus alapvető érvelésének megértésében. Roemer elveti azt az elgondolást is, hogy a marxi gondolkodás lényeges elemeit lehetetlen matematizálni. Azt javasolja, hogy kezdjük el végre a marxi elmélet eddig elhanyagolt mikroalapjainak a vizsgálatát. Azzal érvel, hogy egy olyan jelenségnek, mint az osztály-kizsákmányolásnak a leírása az „atomizált gazdasági egységek" kombinált cselekedeteiként, elősegítheti e jelenségnek a megértését nem-marxisták részére. Itt — figyelmeztet a szerző — komoly értelmezési nehézségekbe ütközhetünk. Például a marxisták ellenvethetik, hogy „az osztály" a releváns egység a vizsgálatban, és az egyén viselkedését — legyen bár munkás vagy tőkés — az az osztály határozza meg, amelyikhez tartozik. Itt azonban Roemer örömmel talál magában Marxban egy szövetségest: Marx munkáinak egyik értelmezése szerint ő is úgy értette, hogy az a tény, hogy az egyének mint egy osztály tagjai cselekszenek, nem alapigazság, hanem *bizonyítandó tétel*. Roemer arra is figyelmeztet, hogy egy különös egyensúlyi keret választása a tőkés termelés marxista szemléletű modellezésében alkalmatlannak bizonyulhat. Például alkalmazhatjuk-e a jól bevált lineáris egyenletrendszereket egy olyan rendszer modellezésére, amelyet feltevés szerint „állandó ellentmondó mozgások" jellemeznek? Hasonlóan, a pozitív profitráta bevitele egy Cobb—Douglas féle állandó hozadékú gazdaságba ellentétes lehet azzal az „egyensúly-fogalommal", amelyet általában elképzelünk. Mindazonáltal — nem találván olyan modelleket, amelyek jobban illenének a feladathoz — Roemer a feladatnak a meglevő modellek segítségével lát neki.

A könyv négy részre osztható. Az első részben, amely az első három fejezetből áll, a kizsákmányolást, a profitráták kiegyenlítődését és a kamatláb marxi elméletét vizsgálja a szerző. A második rész (a 4., 5. és 6. fejezet) a süllyedő profitráta elméletével foglalkozik. A harmadik rész (a 7. és 8. fejezet) a transzformációs problémát taglalja. A negyedik rész (a 9. fejezet) különböző marxi (és nem-marxi) válságelméleteket tárgyal. Végül az utolsó fejezetben Roemer összefoglalja az elmondottakat és áttekinti az elvégzendő munkát.

Mindegyik fejezet a szóbanforgó probléma nem-matematikai bevezetésével kezdődik. Ezután kerül sor a szükséges fejtegetések bemutatására — matematikai modellek segítségével. Ez azonban nem mindig megy könnyen. A szerző előtt tornyosuló nehézségeket szemléltetjük az 5. fejezet fő kérdésével: süllyedő profitráta egy Neumann-modellben, ahol állótőke is létezik. Marx eredeti munkájában a süllyedő profitráta a technikai haladással függ össze. A technikai haladás emeli a tőke szerves összetételét, gépekkel helyettesítvén az embereket. Következésképpen, ha az értéktöbbletráta változatlan marad, a profitráta süllyedni fog. Így a tőketermelékenység valódi fékje maga a tőke, Marx egyik kedves megfigyelése. Nos, hogyan modellezzük ezt a jelenséget? A matematikai magyarázat egyik klasszikus kísérlete *Okishio* tétele, amely a hatvanas évek elején vált ismertté. A tétel alapötlete a következő: a technikai haladást a rendszer input-output mátrixa néhány elemének a csökkenésével kell modellezni. Ez a fajta modellezés azonban mindenképpen *emelkedő* profitrátát szül.

Hogyan kell ezt a paradoxont megoldani? Néhány közgazdász hamarosan megjegyezte, hogy Okishio rendszerében kizárólag forgótőke szerepel. E közgazdászok azt sugallták, hogy az állótőke figyelembevétele elfogadhatóbb eredményeket ad. Ezzel szemben mindazok a későbbi próbálkozások, amelyek az állótőke különböző fajtáit figyelembe vették, nem vezettek sokkal „jobb" eredményekhez. Roemer azzal járul hozzá e probléma megoldásához, hogy körültekintőbben vizsgálja a kérdés mikrogazdasági alapjait. Mindenesetre nyiltan megmondja, hogy az általa javasolt változásban sem süllyed a profitráta. Következtetése: a matematikai modellek jelenleg (még) nem képesek Marx gondolatmenetét visszatükrözni. Más szavakkal: további munkára van szükség.

Roemer új könyvének minden fejezete többé kevésbé az 5. fejezet mintáját követi. Az összes témát a legújabb eredmények bemutatásával indítja, majd közli saját új állításait. Mint ahogyan a szerző több helyen is elismeri, könyve nem igazán „befejezett" munka. Idézzük a szerzőt: ... „ezek a tanulmányok csupán a szóbanforgó elmélet alapjaihoz járulnak hozzá," és ... „valójában ... az elemzésünk még nem jutott el az alapok több kulcsfontosságú részéhez" (208. o.). Így a könyv nem tartalmaz valóban új eszméket. További könyvekre kell várnunk még. Ennek ellenére az olvasónak nem szabad csalódottan letennie a könyvet! A szerző sikerrel teljesítette kitűzött feladatát: megmutatta, hogy bonyolult matematikai eszközök alkalmazásával és a mikroalapok elemzésével az alapvető marxi kategóriák nagyban tisztázhatók. Ezenkívül a könyv világosan összefoglal számos régi kérdést, nem rejtve véka alá a szerző személyes véleményét.

Roemer írása gondolkozásra késztet, és bonyolult kérdéseket szemléletesen elmagyarázó képessége szintén vonzóvá teszi a könyvet. Mindent egybevetve a recenzens nagy élvezettel olvasta Roemer könyvét és úgy véli, hogy mindenkinek el kell olvasnia, akit érdekel a marxi közgazdaságtan fejlődése.

A. E. Steenge

J. P. BRANS (szerk.) *Operációkutatás '81* Az IFORS 9. Nemzetközi konferenciájának előadásai. Amsterdam, 1981. North-Holland Publishing Co., 984 p.

A címben megjelölt konferenciát az IFORS 1981. július 20—24 között tartotta Hamburgban. A konferencián 120 szekcióban 350 előadás hangzott el, amelyek közül nyolcvanat szerkesztett össze a könyvben J. P. Brans, a brüsszeli Free University professzora. A közölt előadások között szerepelnek a megnyitó és záró üléseken elhangzottak, 2—2 a konferencia legjellegzetesebb szekcióinak anyagából, az egyes nemzeti operációkutatási társaságok és az IFORS-szal együttműködő más tudományos társaságok kiküldötteinek ebben a minőségükben megtartott előadásai, a kerekasztal megbeszélésekről készült tájékoztatók és — véleményem szerint némi reklám kötelezettségként — a Zimmermann professzor által szervezett software kiállítás termékeinek jegyzéke. A hatalmas anyagot a könyv 15 fejezetre osztva tárja elénk. Ismertetésünkben természetesen nem térünk ki minden egyes előadásra,csak arra teszünk kísérletet, hogy néhány általunk érdekesnek vélt témára felhívjuk a figyelmet és elmondjuk néhány általános észrevételünket a könyv anyagával kapcsolatban.

A könyv első fejezete (3 előadás) az operációkutatás történetével, fejlődésével és jövőjével foglalkozik. Az IFORS elnöke R. H. COLCUTT megállapításai szerint az országok, a városok, a termelés és a szolgáltatások irányításának fejlődése nem tart lépést a hatalmas technikai fejlődéssel, a világon kialakuló gyors és olykor alapvető változásokkal. Azok az irányítási módszerek, amelyek a múltban több-kevesebb sikerrel működőképesek voltak, ma már nem megfelelőek, mert a múlt és a jövő várhatóan kevesebb analógiát mutat, majd mint korábban. Ebben a helyzetben nagy segítséget várhatunk az OR-tól, „vagy ahogyan ezt Bécsben nevezik, a rendszerelemzéstől". A matematika és a számítógépek fejlődése ebből a szempontból nagyon lényeges dolog, a meghatározó azonban az alkalmazások reális megfogalmazása, a modellekbe beépített elméletek helyessége, mivel a problémák OR megközelítésének lényege az alkalmazások megbízhatóságában rejlik. R. M. CYERT szerint a jövőben a kutatóknak nagyobb súlyt kell helyezniük a *stratégiai tervezés* és a *szervezet tervezés* kérdéseire. Ezeken a területeken a problémák rosszul struktúrálhatók, a bizonytalansági tényezők nagy szerepet játszanak. A szerző a két témakör alapproblémáit elemzi. J. LESOURNE tanulmányának címe *Operációkutatástól a rendszerelemzésig: szóhasználati változás vagy új koncepcionális keretek?*. A tanulmány áttekinti a két tudomány fejlődését, eredményeit és hibáit. Fontos tényként állapítja meg, hogy kezdetben az OR alkalmazóknak széles ismereteik voltak más diszciplinákban, a fejlődés — amelynek során az OR önálló tudománnyá alakult — azt eredményezte, hogy az OR zártabbá vált, az egyetemi oktatás és kutatás kissé akadémikus területévé alakult. Más szavakkal ez azt jelenti, hogy az oktatás standard feladatokra, standard modellekre és algoritmusokra épül, a gyakorlat pedig egyre kevésbé tűri el ezt a standardizálást. Hasonló jegyeket mutatnak a publikációk is. A rendszerelemzés ezzel szemben mintegy 50 százalékban a problémafeltárásra, a rendszerösszefüggésekre helyezi a súlyt, egyedi döntésekkel, stratégiai kérdésekkel foglalkozik. „Amikor 1970 körül az ipari országok felismerték, hogy új kihívásokkal kell szembenézniük, a rendszerelemzés tünt természetes válasznak. Hozzátehetjük most tíz évvel később, hogy a vitathatatlan fejlődés mellett a szakadék a realitások és az ambíciók között nagy." A két terület sok analógiát mutat, fejlődik. Sokak érdeke fűződik egyik vagy másik műveléséhez. A határok nem merevek, a jobb alkalmazási eredmények elérése érdekében mindkét megközelítésben javítani kell a kapcsolatokat egymással. Az érdekes tanulmány hasznos olvasmánya lehet a két tábor hazai harcosainak.

A következő fejezetben hét cikk az OR-nek a szervezetekben való alkalmazásával foglalkozik. Ezek közül néhány multinacionális vállalatok stratégiai tervezésével, pénzügyi problémáival kapcsolatos kérdéseket vizsgál. C. J. FRAGUIO a hierarchia kérdéseit vizsgálja igen érdekes módon. A hierarchiát egy olyan emberekből álló rendszernek tekinti, amelyben a résztvevők a leghatékonyabban tölthetik be funkcióikat, végezhetik feladataikat meghatározott szabályok alapján, a szervezet számára dinamikusan meghatározott célok folyamatos elérése érdekében. Ezt a hierarchiát minőségi és mennyiségi (feladat) feltételek határolják körül. A szerző keresi az optimális struktúrát és vizsgálja, hogy az időben fejlődő hierarchiában, a devianciákat is figyelembe véve, hogyan tervezhető az egyén pályafutásának alakulása. Érdekes írás, a modell azonban még sok finomításra szorulna, hogy életszerű legyen.

K. BOWEN a szervezeteken belüli és szervezetek közötti konfliktusok problémájával foglalkozik, nevezetesen azzal, hogy hogyan lehetne elősegíteni a döntéshozó csoportok közötti kapcsolatok kialakítását, az egyéni és közös érdekek összehangolását. A szerző rendszer-szemléletben közelíti meg a problémát, kiemelten foglalkozik a nyelv, a feladatkörök, a szabályozások és az előítéletek kérdéseivel. I. ROBERTS egy nálunk sokszor elhanyagolt kérdést boncolgat: Milyen hatása van a nem technikai jellegű tényezőknek az operációkutatás sikeres vagy sikertelen alkalmazására. A probléma megoldását a szerző szerint négy ,,dimenzióban'' kell vizsgálni, a technikaiban és a három nem technikaiban (intézményi, gazdasági, társadalmi környezet). A következtetés egyértelmű — a technikára koncentrálás nem elegendő. Véleménye szerint az sem helyes, ha a feladatot technikailag megoldjuk és csak az implementálás előtt fordítunk figyelmet a többi három tényezőre; a négy ,,dimenziót'' szimultán kell kezelni a hatékony OR alkalmazás érdekében. A szerző elemzése a négy tényező kapcsolatáról, a közölt esettanulmányok nagyon tanulságosak. ,,Az operációkutató szerepe a változó környezetben'' című norvég hivatalos (nemzeti társaság által benyújtott) előadás az operációkutatók és operációkutatás feladatának változásait vizsgálta, megkísérelve továbbvinni az 1978 évi torontói IFIP konferencián a tárgyban tartott kerekasztal beszélgetés konklúzióit. Összefoglalójukban a szerzők megállapítják: az optimum keresése iránti igény a komputerizáció következtében növekedni fog. Ugyanakkor növekedni fog a komplex feladatmegoldás iránti igény, a rendszerelemzésen alapuló kutatások nagyobb teret kell kapjanak. A sikeres alkalmazások érdekében javítani kell az együttműködésen és a kommunikáció módján a széles értelemben vett felhasználók és az OR csoportok között.

A könyv harmadik fejezetének címe: *Operációkutatás a fejlődő országokban.* A. A. ELIMAM, a Kuvaiti Tudományos Kutató Intézet munkatársa néhány esettanulmányon keresztül mutatta be a fejlődő országok — valószínűleg elsősorban Kuvait — operációkutatását, majd igen kultúráltan levonta a munkák helyzetéből származó általános tanulságokat. A cikk alapján elmondható, hogy a kuvaiti operációkutatás legalább olyan eredményeket tud felmutatni, mint a hazai. A további két tanulmány a fejlődő és fejlett országok közötti szervezési együttműködés kérdéseivel (Egyiptom), illetve a szudáni közlekedési tervezésben használatos módszerrel foglalkozik. Szorosan kapcsolódik ehhez a következő fejezet, ami Kína, Szingapur és Spanyolország operációkutatásának helyzetét tárgyalja. A sort R. E. MACHOL-nak a TIMS által hivatalosan bejelentett előadása zárja *OR/MS Európában — egy amerikai benyomásai* címmel. A cikk rendkívül felszínes, felületes, kissé csodálkozom, hogy ezt az anyagot a konferencia elfogadta. Csak egy szemelvény: a szerző nagy helyet szentel annak a ,,furcsaságnak'', hogy Európában sok nyelvet beszélnek — néha egy országon belül is többet. A magyar OR-ről kétes dicséretet találunk a cikkben, az alkalmazások vállalati finanszírozását egyszerűen bürokratikus elszámolási trükknek tekinti a szerző.

A közigazgatási alkalmazásokkal foglalkozó rész regiók közötti problémákat, ezek kezelését mutatja be. Több előadás az Európai Gazdasági Közösség jövőjét, pénzügyi és gazdasági összefüggéseit vizsgálja. P HERLIHY vegyes integer programozási feladatként az ír választási körzetek objektívebb meghatározására mutatott be egy — a gyakorlatban nem használt — modellt. A svéd Operációkutatási Társaság által benyújtott előadásban a szerzők regionális fűtési feladat optimális megoldásával foglalkoztak és ennek alkalmazásával a tervezés folyamatában. A számos tényezőt (igényeket, elosztási rendszereket, energiaforrásokat, műszaki és gazdasági elemzéseket) figyelembe vevő modell — amely főként hálótervezési technikát használ — számítógépes adatbázisra épül. M. DESPONTIN a belga gazdaságra dolgozott ki egy multiregionális dinamikus ökonometriai modellt, amely a Tinbergen féle mennyiségi közgazdasági elméletre épül. A fejezetben találunk még további példákat svájci és japán ellátási problémák megoldására több régióból álló rendszerek alapulvétele mellett.

Külön fejezetet szentelt a szerkesztő a döntéselemzés és a többcélú optimalizálás témakörének. A közölt nyolc előadás közül hét elméleti kérdésekkel, modellekkel, algoritmusokkal foglalkozik, csak a Kínai Népköztársaság hivatalos előadása — KU-CHI-FA — sorol fel alkalmazásokat a technológiai folyamatok, a műszaki tervezés, a hatóanyag arányok meghatározása, a vízgazdálkodás és a gazdaságirányítás területéről. P. VINCKE a preferencia modellekről ad rövid áttekintést, R. L. KEENY a telepítési problémák (erőmű, ipartelepek stb.) döntéselemzésének kérdéseit vizsgálja, egy mellékmondatban hivatkozva a Mexikó City repülőtere földrajzi helyének meghatározására Raiffával közösen készített esettanulmányukra. D. E. BELL a kockázattal szembeni ellenérzést és ennek a döntésekre való hatását elemzi, R. RHODE és R. WEBER egy többcélú kvadratikus-lineáris programozási algoritmust ismertet, T. J. STEWART pedig a többfeltételű döntések statisztikai megközelítési módszereiről ad áttekintést. Japán szerzők igen propagandisztikus címmel — *A decision support laboratory* — a döntéselemzés számítógépes támogatásáról, az erre a célra kialakított programcsomagokról adnak tájékoztatást, valójában árulják az általuk kidolgozott softwaret és szolgáltatásaikat.

A VII. fejezet igen terjedelmesen matematikai programozási és optimalizálási feladatokkal foglalkozik, a VIII. telepítési problémákkal, a IX. a szállítási és közlekedési problémákkal. Az előadások között sok alkalmazási beszámolót találunk, így iskolai kapacitások tervezését hosszú távon; gépipari termelési tervek készítését; a tűzoltóság, mentők és más rendkívüli szolgáltatások optimális telephelyének kiválasztását nagyvárosokban; különböző szállítási ágazatokat magába foglaló rendszerek optimális tervezését, ahol a költségek között a beruházás, a karbantartás, az idő és a balesetek költségei egyaránt figyelembe vannak véve; optimalizációs modelleket a városi tömegközlekedés útvonalainak, sűrűségének és eszközeinek kiválasztásához; polgári légiflotta szolgáltatásainak dinamikus tervezését; légi irányítási rendszerek ismertetését stb. Az előadások másik csoportja áttekintés jellegű, egy-egy terület eredményeinek összefoglalására tesz kísérletet. Így például S. SCHAIBLE a hiperbolikus programozásról ad összefoglalást, felsorolva ehhez 130 forrásművet, egy nagyobb szerző kollektíva pedig 50 matematikai programozási eljárás vizsgálatát kezdte meg a redundancia és ennek hatásai szempontjából. A szerzők munkájuk eddigi eredményeiről számolnak be, értékelő áttekintést adva a tárgykör irodalmáról is. Mindezeket kiegészíti néhány beszámoló egyes témaköröknél alkalmazható új matematikai módszertani eredményekről.

A gráfokkal, hálótervezéssel és játékelmélettel foglalkozó fejezet 5 előadás anyagát közli. Az előadások mind elméleti jellegűek, a tárgykör matematikai problémáival foglalkoznak, zömmel az elmúlt évek eredményeit tekintve át összefoglaló jelleggel. A XI. fejezetet a szerkesztő a termelésirányításnak szentelte. A bemutatott esettanulmányok tartalmilag nem túl érdekesek, készletgazdálkodási, leszabási problémákkal foglalkoznak, jelentős hangsúlyt helyezve a számítógépi realizációra. A következő, pénzügyi problémákkal foglalkozó fejezetben igen érdekes írást találunk F. J. RIDGWAY-től, aki a bankok szervezeteit és tervezési rendszerét elemzi kölcsönös összefüggéseikben, feltárva ezek jelentős ellentmondásait. Az elmúlt két évtizedben Nyugateurópában „Super Bank" hálózatok alakultak ki, amelyek központilag irányítják az üzleti tevékenység legkisebb részleteit, az elektronikus adatfeldolgozást, a karbantartási munkát, a személyzeti munkát stb. Ez különösen zavaró egy olyan bankrendszernél, ahol a „Super Bank" kialakulása során különböző profilú bankok egyesítése ment végbe. A számítógépek, különösen a mikroelektronika megjelenésével a területi egységek merev — központ által diktált — specializálása gátolja a maximális eredményességet. Ezen eszközök rendszerbe állítása ugyanis lehetővé teszi a széleskörű tranzakciós kapcsolatok kialakítását, a reálidős adat-karbantartási rendszer megteremtését a bankhálózat egészére. A szerző a jelenlegi bankrendszert a vasúthálózat és a hozzá tartozó építmények merev rendszeréhez hasonlítja, amelynek kereteit a motorizáció szétfeszítette, sok szolgáltatási területet elragadva a vasúttól. A bankrendszer, ennek szervezete és az itt folyó tervezési tevékenység alapvető változása valószínűleg az ipart érintő eddigi legnagyobb változást fogja eredményezni. Hasonló szellemben ír H. VAN GELDER és C. SCHRAUWERS a tervezési és szolgáltatási tevékenység várható alakulásáról a biztosítási ágazatban. Tudott, hogy a világon mintegy 10 000 biztosító működik, ma még többnyire a hagyományos — a szerzők által részletesen elemzett — bürokratikus stílusban. A modern elektronika és vezetéstudomány alkalmazása valószínűleg ebben a szektorban is a megosztott szervezet kialakításához fog vezetni, a központ számára kevés, főként intézménypolitikai és ellenőrzési feladatot hagyva meg. Mindez szakképzettebb személyzetet — az összes költség 75—90%-a a biztosító intézményeknél munkabér, vagy ehhez kapcsolódó kiadás — és jobb, rugalmasabb piaci munkát fog várhatóan eredményezni.

Az utolsó, előadásokkal foglalkozó fejezet (XIII) címe *Szimuláció, információ és modellezés*. I. A. CARRUTHERS *Operációkutatás, mikrotechnológia és kommunikáció*" címmel tartott előadást. Szerinte „a technológiai fejlődés komoly hajtóerőt gyakorol az OR és a társadalom megváltoztatása irányába". (Nem gondoltam volna, hogy ezt a két kategóriát ilyen egyszerűen egymás mellett lehet emlegetni!) A technológia azonban csak a „hogyan" csináljuk kérdésre ad választ, míg az OR szakembernek elemzések sorával azt kell meghatároznia, hogy „mit" csináljunk. Hasonlóan az előző fejezetből kiemelt pénzügyi témákhoz, a szerző itt is az OR és a mikroelektronika alkalmazási kölcsönhatásait elemzi, külön kiemelve a privacy kérdést és az elektronika gátlástalan alkalmazásának veszélyeit a társadalomra nézve. P. E. LOVE egy 30 éves vagy hosszabb időszakot átfogó sztochasztikus szimulációs modellt mutat be az energiagazdaság tervezésére. Az előadás valójában az energia kutatás-fejlesztés intézményeiben létrejött eredmények hasznosíthatóságának, értékelhetőségének kérdéseivel foglalkozik négy különböző típusú széntüzelésű generátor elemzésén keresztül. A fejezetben olvashatunk még nagy szimulációs rendszerek dekomponálásáról és egy számítógépen futó hibrid szimulációs rendszer alkalmazásáról.

A XIV. fejezet a 14 kerekasztal beszélgetésen elhangzottakat kísérli meg összefoglalni 23 oldalon. Ezek az összefoglalók tömörek, tanulságos véleményeket tartalmaznak egy-egy mondatban. Érdekessége a vitáknak, hogy mind a tizennégy konkrét OR alkalmazási kérdésekkel foglalkozott, kétharmad részben azonban körülbelül olyan címekkel vannak megjelölve, mint amilyeneket a könyv első tizenhárom fejezetében találunk. Ez lehet pozitívum, ha azt jelenti, hogy a szekcióülések hangulata szükségessé tette az ott elhangzottak és még el nem hangzottak oldott légkörű szakmai vitáját. A HORSE kiállítással (*H*amburg *O*perational *R*esearch *S*oftware *E*xhibition), a XV. fejezettel nem érdemes érdemben foglalkozni.

A könyv tehát igen széles témakörben mozog, és mint minden operációkutatási konferencia anyagából, ebből is megállapíthatjuk, hogy körülbelül hol áll az IFORS-ba tömörült országok operációkutatása, melyek azok a kérdések, amelyek az operációkutatókat leginkább foglalkoztatják. Egy sor cikkben visszatérő felvetés: mi az OR jelene, jövője, feladata, mi a kapcsolata a rendszerelemzéssel? Általában a szerzők nagyon közeli területeknek vagy szinonimáknak fogják fel a rendszerelemzést és az operációkutatást. Az operációkutatás társadalmi szerepét, az ebben a szemléletben végzett elemzés jelentőségét véleményem szerint néha el is túlozzák, ugyanakkor többhelyütt bizonytalansági érzés is kicseng a sorokból az OR és a kutatók jövőjével kapcsolatban. Az előadások zöme rendszerszemléletű, sőt ezt a szemléletet kifejezetten hangsúlyozzák. Az operációkutatás matematikai hátteréről a megszokottnál kevesebbet esik szó; a konferencián — vagy talán a válogatásnál — az alkalmazási eredmények dominálnak, néha eléggé szokatlan módon csak néhány soros utalásokat találunk a matematikai modellekre, algoritmusokra. A matematikai tárgyú előadások között több jó összefoglaló-áttekintő jellegű szerepel az egy-egy témakörben elért nemzetközi eredményekről. A komputerizációra, a számítógépek alkalmazására sok a hivatkozás, a könyv olvasása számítástechnikai ismereteket azonban egyáltalán nem igényel.

A könyv nem érdektelen olvasmány, a benne közölt előadások azonban kidolgozottság tekintetében általában alatta maradnak a szakfolyóirati cikkek színvonalának. A szakirodalmi hivatkozások hasznosak lehetnek az olvasó számára, ezek a szokásosnál jóval terjedelmesebbek, a legtöbb előadás után 30—140 forrásmunka felsorolását találjuk meg. A könyvet megvételre olyan intézmények könyvtárai számára ajánljuk, ahol több operációkutató gyűjt anyagot munkájához, mivel a legtöbb témakörben sok jó gondolatra lehet bukkanni ebben a közel ezer oldalas munkában.

PONGRÁCZ TIBOR

A XI. Matematikai Programozási Szimpózium

A Matematikai Programozási Társaság 1982. augusztus 23- és 27 között tartotta a XI. Nemzetközi Matematikai Programozási Szimpóziumot Bonnban. A szervezés feladatait a Bonni Egyetem Operációkutatási Intézetének kollektívája vállalta magára.

Kereken 33 év telt el azóta, hogy a matematikai programozás úttörői 1949-ben első tudományos konferenciájukat tartották Chicagoban, amelyet az azóta történelmi sorozatában nyilvántartott matematikai programozási szimpóziumok 0-ik sorszámú eseményének tekintenek. Ezek a konferenciák híven tükrözték a matematikai programozás fejlődését.

Sokan osztják *B. Korte* professzornak, a XI. Szimpózium program elnökének véleményét, amelyet a tanácskozást megnyitó beszédében a következők szerint fogalmazott meg: „Különös elégedettséggel állapíthatjuk meg, hogy a matematikai programozás az alkalmazott (vagy inkább alkalmazható) matematikán belül különleges szerepet tölt be. Jóllehet csak a negyvenes években alapozódott meg: a matematikai programozás ez idő alatt szélesen elterjedt és alkalmazásra került a mérnöki, a természet-, a közgazdasági és a biológiai tudományokban. Számítóközpontokban végzett vizsgálatok tanúsága szerint a matematikai programozási és különösen a lineáris programozási programtermékek a leggyakrabban felhasználtak közé tartoznak. A lineáris programozás segítségével elért megtakarítások és hatékonyságnövekedés óvatos becslései is általában hatalmas számokhoz vezetnek."

A konferencia maga kétségtelenül alátámasztotta ezt az értékelést, és azt tükrözte, hogy a matematikai programozás szférájához kapcsolódó elméleti matematikai, algoritmikus, számítástudományi és az alkalmazásokra irányuló kutatások minden vonatkozásban világszerte fejlődőben és kiterjedőben vannak.

A konferencián közel 900-an vettek részt, és több mint 600 előadás hangzott el. Ezzel a XI. Szimpózium túlszárnyalta az összes megelőző ilyen rendezvény méretét. A túlszárnyalás azonban nem csak mennyiségi volt. Mindenekelőtt szélesedett a tanácskozás nemzetközi jellege: 47 ország szakemberei jöttek össze.

A legnagyobb létszámmal szokásosan — közel 200 fővel — az USA-ból érkeztek. A vendéglátó ország kutatói a második helyen több, mint 100 résztvevővel szerepeltek. Utána Anglia, Belgium, Kanada, Franciaország, Olaszország és Hollandia következtek 30—50 fős képviselettel. Valamennyi európai szocialista ország szakemberei jelen voltak — kivéve Albániát; legnagyobb számban a Szovjetunióból és Magyarországról. Számban is jelentős volt a japán és a latinamerikai részvétel. Új vonásként említhetjük, hogy számos fejlődő országból is volt részvétel, mint pl. Algériából, a Kínai Népköztársaságból, Egyiptomból, Indiából, Dél Koreából, Kuwaitból, Lesothoból, Líbiából, Nigériából, Szaud Arábiából, Szingapurból, Tajvanról, Thaiföldről és Zimbabweból.

Nagy mértékben szélesedett a konferencia programja is. Ez egyfelől a matematikai programozás fejlődését és belső differenciálódását tükrözte; másfelől azt is, hogy a matematikai programozás a matematika és az alkalmazások újabb területeivel került szoros kölcsönhatásba.

A konferencia programfüzetét áttekintve: már a közel 200 szekció neve is azt mutatja, hogy a Nemzetközi Programbizottság a hatalmas számban felkínált témák körét nem igyekezett szűkíteni. Ez a politika kétségtelenül nagyon színessé tette a programot, de egyben áttekinthetetlenné és követhetetlenné is. Ezzel a veszéllyel feltehetően a konferencia szervezői is számoltak, és ezért huszonegynéhány egy-egy órás áttekintő előadást szerveztek a legújabb kutatásokról. A felkért és bejelentett előadások számára egyébként csak 20—20 perc ismertetési időt biztosított a program.

A konferenciáról kiadványkötet nem jelenik meg, de az áttekintő előadások anyagát a Mathematical Programming Studies sorozatban teljes terjedelemben közlik.

Az összefoglaló előadások elnevezése azt tükrözi, hogy a Nemzetközi Programbizottság szerint azok témái reprezentálják a ma aktuális kutatások csomópontjait. Álljon itt ezért elhangzásuk sorrendjében az említett előadások címe:

G. B. Dantzig: Visszaemlékezések a lineáris programozás kezdeteire
S. Smale: A lineáris programozás szimplex módszerének átlagos sebességéről
R. L. Graham: Az FKG egyenlőtlenség és rokonai
J. Stoer: Nagyméretű lineáris egyenletrendszerek megoldása konjugált gradiens típusú módszerekkel
A. Schrijver: Minima eredmények a kombinatorikus optimalizációban
R. Z. B. Wets: Sztochasztikus optimalizációs feladatok megoldási technikái és közelítő sémái
J. More: A „Trust region" módszerek algoritmusainak és softwarejainak újabb fejlesztéseiről
W. R. Pulleyblank: Poliédrikus kombinatorika
Lovász László: Szubmoduláris függvények és konvexitás
J. Edmonds: A lineáris programozás topológiája és a topológia lineáris programozása
B. B. Schnabel: Kónikus modellek a feltétel nélküli optimalizációban és tenzor modellek a nem lineáris egyenletekben
J. Rosenmüller: A degenerációmentesség kérdései a kooperatív játékok elméletében
R. T. Rockafellar: Szubdifferenciálhatóság a nem lineáris optimalizációban
R. G. Bland: Irányított matroidok és lineáris programozás
M. J. D. Powell: Változó metrikájú módszerek a feltételes optimalizációban
M. Iri: A matroid elmélet alkalmazásai
R. Fletcher: Büntetőfüggvények
E. L. Lawler: Újabb eredmények a „scheduling" elméletben
E. L. Algower—K. Georg: Fixpont algoritmusok: „szimpliciális" és „folytonos" módszerek
L. J. Billera: Poliéderelmélet és kommutatív algebra
K. O. Kortanek—S. A. Gustafson: Féligvégtelen programozás
N. Z. Shor: A nem differenciálható optimalizáció olyan általánosított gradiens módszerei, amelyek térkiterjesztést alkalmaznak
P. L. Hammer: Boole módszerek a kombinatorikában és az optimalizációban

Az áttekintő előadások sorában kifejezetten alkalmazásorientált előadás nem volt. Így a konferencia mindenekelőtt a matematikai programozás és közelálló határterületei elméletének állapotáról adott képet. A szekciók kb. 10%-át szentelték olyan előadásoknak, amelyek elsősorban alkalmazási tapasztalatokról számoltak be. A konferencia hatalmas méreteire való tekintettel ez még így is több, mint 50 előadást jelentett. Az alkalmazott technikákat tekintve: a nagy rendszerek, egészértékű és vegyes egészértékű feladatok, valamint nem lineáris programozási problémák kezelésére vonatkozó eredményekről lehetett elsősorban hallani. Az alkalmazási területek igen változatosak voltak, a gazdasági és mérnöki problémák széles körét érintették. A kérdéskör nagy nemzetközi jelentőségét mutatja, hogy külön szekció foglalkozott itt is az energiarendszerek optimalizálására irányuló kísérletekkel.

A XI. Szimpózium keretében került sor a már régebben alapított Fulkerson díj, valamint az első ízben adományozott Dantzig díj ünnepélyes kiosztására.

Fulkerson díjat kaptak: *Khacsián, Judin és Nemirovskij* az ellipszoid módszer kidolgozásáért; *Lovász, Grötschel és Schrijver* az ellipszoid módszerre támaszkodó újabb elvi jelentőségű eredményeikért a kombinatorikus optimalizáció területén, valamint *Jegoricsev* és *Falikman* a Van der Waerden sejtés bizonyításáért.

Dantzig díjat kapott: *Rockafellar* és *Powell:* mind a ketten a nem-lineáris programozás elmélete terén értek el nagyjelentőségű elméleti és algoritmikus jellegű eredményeket.

A tanácskozás során hozták nyilvánosságra a Matematikai Programozási Társaság levélszavazásának eredményeit. A Társaság tagsága *Alex Ordent*, a Chicagoi Egyetem professzorát, a Társaság egyik alapító tagját, választotta elnökéül. Az új elnök 1983-ban veszi át tisztjét *Jean Abadie*-tól.

A XII. Nemzetközi Matematikai Programozási Szimpózium 1985-ben lesz, előreláthatóan valahol az Egyesült Államokban.

Bod Péter

A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó és Nyomda főigazgatója
Műszaki szerkesztő: Sándor István
A kézirat nyomdába érkezett: 1983. VI. 15. – Terjedelem 8,4 (A/5) ív
84.12197 Akadémiai Kiadó és Nyomda, Budapest – Felelős vezető: Hazai György

CONTENTS

LÁSZLÓ MIHÁLYFFY—ANDRÁS SIMONOVITS: On the controllability of dynamic input-output model ... 165
JÁNOS KORNAI—JÖRGEN W. WEIBULL: Paternalism, buyers' and sellers' market ... 169
JÓZSEF TÓTH—KÁROLY SZENTELEKI: Analysis of agricultural enterprise goals by means of compromise programming ... 185
SÁNDOR MOLNÁR—FERENC SZIDAROVSZKY: Multicriteria value functions ... 197

CONCEPTS AND METHODS

LÁSZLÓ FÜSTÖS—GYÖRGY MESZÉNA—NÓRA SIMON-MOSOLYGÓ: New methods of multidimensional scaling II. ... 209
ANDRÁS KELETI: The loglinear model ... 233

BOOK REVIEWS

PÁL KÖVES: Index theory and economic reality *(László Vita)* ... 247
GYÖRGY MUNDRUCZÓ: Applied regression analysis *(László Hunyadi)* ... 249
JOHN E. ROEMER: Analytical foundations of Marxian economic theory *(A. E. Steenge)* ... 251
J. P. BRANS (Ed.): Operational research '81 *(Tibor Pongrácz)* ... 253

SCIENTIFIC LIFE

PÉTER BOD: The 11th Symposium on Mathematical Programming ... 257

СОДЕРЖАНИЕ

Ласло Михайффи—Андраш Шимонович: Об управляемости динамичной модели баланса межотраслевых связей ... 165
Янош Корнаи—Ерген В. Вейбулл: Патернализм, рынок покупателей, рынок продавцов ... 169
Йожеф Тот—Карой Сентелеки: Анализ целей сельскохозяйственных предприятий с помощью компромиссного программирования ... 185
Шандор Молнар—Ференц Сидаровски: О функциях стоимости с несколькими критериями ... 197

ПОНЯТИЯ И МЕТОДЫ

Ласло Фюштеш—Дьердь Месена—Нора Шимон-Мошойго: Несколько новых методов многомерного градуирования II ... 209
Андраш Келети: Логлинеарная модель ... 233

О КНИГАХ

Пал Кевеш: Теория индексов и экономическая реальность *(Ласло Вита)* ... 247
Дьердь Мундруцо: Прикладное вычисление регрессии *(Ласло Хуньяди)* ... 249
Джон Э. Ремер: Аналитические основы марксистской экономики *(А. Э. Стенге)* 251
Й. П. Бранс (ред.): Операционное исследование '81 *(Тибор Понграц)* ... 253

НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ

Петер Бод: XI-й Симпозиум по математическому программированию ... 257

Ára: 20 Ft
Előfizetés egy évre: 80 Ft

INDEX: 26793
ISSN 0039—8128

TARTALOM

MIHÁLYFFY LÁSZLÓ—SIMONOVITS ANDRÁS: A dinamikus input-output modell vezérelhetőségéről 165
KORNAI JÁNOS—JÖRGEN W. WEIBULL: Paternalizmus, vevők piaca, eladók piaca 169
TÓTH JÓZSEF—SZENTELEKI KÁROLY: Mezőgazdasági vállalati célok elemzése kompromisszum-programozás segítségével 185
MOLNÁR SÁNDOR—SZIDAROVSZKY FERENC: Többkritériumú értékfüggvényekről 197

FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK

FÜSTÖS LÁSZLÓ—MESZÉNA GYÖRGY—SIMONNÉ MOSOLYGÓ NÓRA: A sokdimenziós skálázás egyes újabb módszerei II. 209
KELETI ANDRÁS: A loglineáris modell 233

KÖNYVEKRŐL

KÖVES PÁL: Indexelmélet és közgazdasági valóság *(Vita László)* 247
MUNDRUCZÓ GYÖRGY: Alkalmazott regressziószámítás *(Hunyadi László)* 249
JOHN E. ROEMER: Analytical foundations of Marxian economic theory *(A. E. Steenge)* 251
J. P. BRANS (szerk.): Operational research '81 *(Pongrácz Tibor)* 253

TUDOMÁNYOS ÉLET

BOD PÉTER: A XI. Matematikai Programozási Szimpozium 257

1828

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST