SZIGMA

Matematikai közgazdasági folyóirat

A Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai-Közgazdasági Szakosztályának lapja

*

E szám szerzői:

Barancsi Éva, a Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem tanársegédje, Dániel Zsuzsa kandidátus, az OT Tervgazdasági Intézet főmunkatársa, Medvegyev Péter, az Országos Vezetőképző Központ oktató-kutatója, Mellár Tamás, a pécsi Janus Pannonius Tudományegyetem tanársegédje, Neményi Judit, az OT főelőadója, Paizs János, a Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem adjunktusa, Dr. Pongrácz Tibor, a Pénzügyminisztérium Számítóközpontjának főosztályvezetője, Rimler Judit kandidátus, az MTA Közgazdaságtudományi Intézet tudományos főmunkatársa, Simonovits András kandidátus, az MTA Közgazdaságtudományi Intézet tudományos főmunkatársa, Szilágyiné Szemkeő Judit, a SZÁMALK tudományos munkatársa, Vellai Györgyi, az OT Tervgazdasági Intézet főelőadója, Vörös József, a pécsi Janus Pannonius Tudományegyetem tanársegédje.

Szerkesztőség: Budapest XI., Budaörsi út 43—45.

Levélcím: 1502 Budapest, Pf. 262.

Terjeszti a Magyar Posta. Előfizethető bármely postahivatalnál, a kézbesítőknél a Posta hírlapüzleteiben és a Posta Központi Hírlap Irodáknál (PKHI 1900 Budapest, József nádor tér 1.) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a PKHI 215—96 162 pénzforgalmi jelzőszámára. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76 sz. alatti hírlapboltban

Előfizethető és példányonként megvásárolható: az AKADÉMIAI KIADÓ-nál, 1363 Budapest, Alkotmány u. 21. Telefon 111-010. Pénzforgalmi jelzőszámunk: 215—11488, és az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLT-ban, 1368 Budapest, Váci u. 22. Telefon: 185-612. Előfizetés díj egy évre: 80,—Ft

Külföldön terjeszti a KULTURA Külkereskedelmi Vállalat, H-1389 Budapest. Pf. 149

Mellár Tamás

A transzformációs probléma megoldásának egy útja

A tőke első két kötetében *Marx* főként az értékkel és az értékbeni számbavétellel foglalkozott. Amennyiben árakról beszélt, azokat úgy tekintette, mint az értékek megjelenési formáját. Ezek az árak ugyan változhattak a piac keresleti-kínálati viszonyainak hatására, de mozgásukon az értéktörvény uralkodott. Marx felismerte, hogy kora kapitalizmusában az érték nem lehet árcentrum, mert az értékarányos árak léte szemben állna a tőke-jövedelmezőség kiegyenlítődésének elvével. A III. kötetet ezen ellentmondás feloldásával, a termelési ár és a profitráta tárgyalásával kezdte. Bemutatta egyrészt, hogy az értéktöbblet hogyan alakul át profittá és hogy milyen kapcsolat van az értéktöbbletráta és a profitráta között, másrészt, hogy az átlagprofitráta kialakulásával hogyan váltja fel az érték- árcentrumot a termelési ár- árcentrum. Ezt az átalakulási folyamatot nevezhetjük — a polgári közgazdászok elnevezése nyomán — transzformációs problémának.

Nem sokkal a III. kötet megjelenése után azonban már éles bírálatok érték a marxi megoldást. A sort *Böhm—Bawerk* nyitotta meg ,,híres-hírhedt" bírálatával, amelynek nyomán egy hosszan tartó vita alakult ki, s ez a vita még napjainkban sem ért a nyugvópontjára. A transzformációs vita több párhuzamos szálon futott. Az egyik szál az ún. történeti transzformációs probléma, amely azt vizsgálja, hogy a prekapitalista érték- árcentrum hogyan alakul át a kapitalizmusban termelési ár-árcentrummá. Ettől némileg eltérőnek tekinthető az a közelítésmód amely Marx egész gondolatrendszerébe próbálja beilleszteni a transzformációs problémát és így elemezni Marx ,,igazi" szándékát. Harmadik szálnak tekinthető az érték- és a termelési árrendszer közötti logikai kapcsolat vizsgálata, függetlenül ennek történeti és elmélettörténeti aspektusától. A logikai transzformációra való leszűkítés lehetővé teszi, sőt megköveteli a probléma matematikai elemzését. Ebben a cikkben — elismerve az első két közelítésmód létjogosultságát — csak a harmadik közelítésmóddal foglalkozunk. Nem célunk, s terjedelmi okok miatt nem is lehet a célunk az, hogy a transzformációs probléma 80 éve tartó vitáját bemutassuk. Ehelyett a következő kérdésekre próbálunk választ adni:

1. Milyen problémákat vet fel a marxi transzformációs eljárás?
2. Hogyan biztosítható az értékek és a termelési árak összehasonlíthatósága?
3. A ,,helyesbített" transzformációs eljárás mennyiben igazolja a marxi transzformáció eredményeit?

Marx transzformációs eljárása

Az értékek termelési árakba való átalakulásának marxi megoldása jól ismert, ezért csak röviden ismertetjük. Az értéktöbbletráták kiegyenlítődése miatt az egyes iparágakban lekötött tőkékre különböző nagyságú értéktöbblet (profit) jut, ha iparáganként különbözik a tőkék szerves összetétele. A tőkéknek az iparágak közötti szabad áramlása azonban azt eredményezi, hogy kialakul az átlagprofitráta, és így az összértéktöbblet a lekötött tőkék arányában realizálódik. Ennek eredményeként az értéktől különböző árcentrum alakul ki: a termelési ár. Az i-edik ágazat termelési árát a $c_i + v_i + \acute{a}p'(c_i + v_i)$ összefüggés adja meg, ahol az $\acute{a}p' = \sum_{i=1}^{n} m_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} (c_i + v_i)$. (Ebben a megfogalmazásban a megtérülést egységnyinek, a lekötött és felhasznált tőkét pedig azonosnak vettük.) A marxi transzformációs eljárás eredményeként a következő összefüggések állnak fenn:

(i) „A társadalomban — valamennyi termelési ág összességét tekintve — a termelt áruk termelési árainak összege egyenlő értékeik összegével" (III. 156. old.)

(ii) Az összértéktöbblet és az összprofit nagysága megegyezik.

(iii) Az átlagos szerves összetételnél magasabb (alacsonyabb) összetételű ágazatokban a termelési ár magasabb (alacsonyabb) lesz, mint a termelt áruk értéke. „Csak azokban a termelési ágakban, ahol a tőke összetétele véletlenül egybeesik a társadalmi átlaggal, lesz az érték és a termelési ár egyenlő." (III. 160. old.)

(iv) Az átlagprofitráta nagysága az értéktöbbletráta és a társadalmi össztőke szerves összetételének nagyságától függ.

A fentiekből kitűnik, hogy Marx a $c_i + v_i$ költségárat értéken vette számba és az átlagprofitrátát is értékelemekkel (m_i, c_i és v_i) határozta meg. Ez az eljárás azonban helytelen, mert ha feltételezzük, hogy az értékek helyett a termelési árak játszák az árcentrum szerepét, akkor ennek az egész gazdaságra érvényesnek kell lennie. Nem helytálló ugyanis input oldalon azzal a feltevéssel élni, hogy a termelési árak megegyeznek az értékekkel és output oldalon arra a következtetésre jutni, hogy a termelési árak eltérnek az értékektől. A marxi eljárás tehát korrekcióra szorul: input oldalon is az értékektől eltérő termelési árakat kell figyelembe venni.

Bortkiewicz [1] felismerte Marx eljárásának hiányosságát, és olyan három szektoros modellt dolgozott ki, amelyben a költségárakat is termelési áron vette számba. Az így kialakított modell feltételei között nem állt fenn egyidejűleg a marxi (i) és (ii) összefüggés és a profitráta (iv) definíciója is módosításra szorult. Bortkiewicz modelljét többen is bírálták, mert a modell az egyszerű újratermelés feltevésén alapult és önkényes árnormalizálást alkalmazott.[1] Mindemellett Bortkiewicz érdeme, hogy felvillantotta a probléma szigorú matematikai kezelésének lehetőségét.

[1] Winternitz [14], May [5], és Sweezy [13]. A bírálóknak csak az önkényes árnormalizálás felvetésében adhatunk igazat, az egyszerű újratermelés feltételezése nem érvényteleníti Bortkiewicz fő következtetéseit.

A módosított transzformáció

Az újratermelés körfolyamata három aspektusból vizsgálható:
1. a javak fizikai (használati értékbeni) körfolyamata,
2. az értékek körfolyamata és
3. a termelés árakon kifejezett (pénzbeli)[2] körfolyamat.

Ez a három körfolyamat A tőke különböző részeiben is fellelhető.

Fogalmazzuk át matematikai formába a statikus Leontief-modell[3] segítségével ezt a három körfolyamatot! Alapfeltevéseink a következők:

a) Egy terméket egy ágazat állít elő, egyetlen termelési eljárással és rögzített technikai koefficiensekkel.

b) Tiszta árutermelő gazdaságot tekintünk, újratermelhető javakkal és külkereskedelem nélkül.

c) A felhasznált élőmunka termelőképessége és újratermelésének ráfordításigénye szempontjából homogén.

d) Csak a termelésben felhasznált termékmennyiségeket vesszük számításba. Az állóeszközök tehát egy időszak alatt átadják értéküket és még ebben az időszakban pótolják őket.

Vegyük először az érték körfolyamatot és az értékbeni elszámolást. Legyen t_i az i-dik áru egységének értéke, a_{ji} az i-dik termék egységéhez felhasznált j-dik termék mennyisége és L_i az i-dik termék egységéhez felhasznált élőmunka mennyisége (pl. munkaórában). Ekkor az értékmeghatározó egyenleteink a

$$t_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} t_j + L_i \qquad i = 1, \ldots, n \tag{1}$$

formában írhatók fel. A *c)* feltevés lehetővé teszi, hogy a munkaerő újratermeléséhez szükséges fogyasztási javak körét (nevezhetjük ezt fogyasztói kosárnak, vagy reálbérrátának) egységesen definiáljuk. Jelölje b_i az egységnyi munkaerő újratermeléséhez szükséges i-dik fogyasztási cikk mennyiségét. Természetesen $b_i = 0$, ha az i-dik termék termelési eszköz vagy luxuscikk. A munkaerő egységének értékét $\overline{w}$-t, ekkor így határozhatjuk meg:

$$\overline{w} = \sum_{i=1}^{n} t_i b_i. \tag{2}$$

Értéktöbblet csak akkor keletkezhet, ha az egységnyi homogén munkaerő értéke kisebb, mint az általa létrehozott egységnyi érték, vagyis ha $\overline{w} < 1$. Az értéktöbbletrátát ezek után az

$$m' = \frac{1 - \overline{w}}{\overline{w}} = \frac{1 - \sum_{i=1}^{n} t_i b_i}{\sum_{i=1}^{n} t_i b_i} \tag{3}$$

[2] Természetesen az értékbeni körfolyamat is kifejezhető pénzben. Marx gyakran élt is ezzel a fogással. Az ilyenfajta pénzbeli kifejezés azonban értékárakat vagy értékarányos árakat jelent és nem termelési árakat.

[3] A statikus és dinamikus Leontief-modellek felhasználása igen gyümölcsözőnek bizonyult a marxi gondolatok újraértelmezésében. Kiemelkedő ebben a témakörben pl. Bródy [3], Morishima [7], Okishio [9] és Seton [11] munkája.

egyenlet definiálja. Ebből a megfogalmazásból kitűnik, hogy az értéktöbbletráta nagysága két dologtól függ: egyrészt a munkások rendelkezésére álló fogyasztói kosár, a b vektor nagyságától, másrészt ezeknek a bérjavaknak az értékétől. Fontos megjegyeznünk, hogy az értéktöbbletráta nagysága nem függ azon javak értékétől, amelyek nem vesznek részt közvetlenül vagy közvetve a bérjavak termelésében. Az egyes szektorokban csak akkor keletkezhet pozitív értéktöbblet, ha a

$$t_i > \sum_{j=1}^{n} a_{ji}t_j + \overline{w}L_i \qquad i = 1, \ldots, n \tag{4}$$

összefüggés fennáll. Ha létezik az (1)-nek közgazdaságilag értelmes megoldása,[4] akkor a (4) csak úgy állhat fenn, hogy $\overline{w} < 1$, vagyis az értéktöbbletráta pozitív. A (4)-et átalakíthatjuk úgy, hogy a bL^* diadikus szorzatot D-vel, az $A + D$-t pedig M-mel jelöljük, ekkor

$$t^* > t^*A + t^*D = t^*M \tag{4'}$$

ahol M a bővített (a munkaerő újratermeléséhez szükséges javakkal kibővített) input-koefficiensek mátrixa.

Vegyük most a fizikai mennyiségeket! A fizikai mennyiségek összefüggése az értékmeghatározás duálisának tekinthető. Legyen x a bruttó kibocsájtások vektora. A terméktöbblet létezésének feltétele ekkor az

$$x - Mx > 0 \tag{5}$$

egyenlőtlenség fennállása. Ha a (4') fennáll, akkor a dualitás tétele ([15] 11. old.) alapján az (5) is teljesül. Terméktöbblet tehát csak akkor létezhet a gazdaságban, ha van értéktöbblet.

A termelési árak egyenlete a következőképpen írható fel:

$$q_i = (1 + \pi)\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji}q_j + wL_i\right) \qquad i = 1, \ldots, n \tag{6}$$

$$w = \sum_{i=1}^{n} q_i b_i,$$

ahol q_i az i-dik áru termelési ára, π az átlagprofitráta és w a munkaerő egységére jutó bérráta termelési áron kifejezve. A már előbb alkalmazott $M = A + D$ és $bL^* = D$ jelöléssel a (6) így írható fel:

$$q^* = (1 + \pi)qM. \tag{6'}$$

Az egységes π profitráta csak akkor lehet pozitív, ha a

$$q^* > q^*M \tag{7}$$

egyenlőtlenség fennáll. Nyilvánvaló, hogy a (7) az (5) duálisa, tehát ha az utóbbi teljesül, akkor az előbbi is.[5] Ebből viszont az előbb leírtak alapján az

[4] Az (1)-nek akkor létezik nem-negatív megoldása t_i-kre az $L_i \geq 0$ feltétel mellett, ha a *Simon—Hawkins* feltétel teljesül, vagyis az $(E - A)$ mátrix mindegyik főminorja pozitív. Lásd WOODS [15]. 7. old.

[5] A (6') feladat megoldása létezésének feltételeit a Frobenius tétel fogalmazza meg. A profitráta akkor lesz pozitív, ha az M irreducibilis és domináns sajátértéke kisebb, mint 1. Ekkor az ehhez tartozó q sajátvektor is pozitív lesz. Az M domináns sajátértéke pedig, akkor kisebb, mint 1, ha az $(E - M)$ főminorjai pozitívak, amely viszont az (5) teljesülésének a feltétele.

következik, hogy *a profitráta csak akkor pozitív, ha az értéktöbbletráta is pozitív, vagy másként fogalmazva a profit forrása az értéktöbblet, a munkások kizsákmányolása.* Jól látható ez a (3) és (6) egyenletek összevetéséből. Mitől függ a profitráta és ezen keresztül a termelési árak nagysága? Az a_{ij}, L_i koefficiensektől — vagyis az értékektől — és a b_j $(j = 1, \ldots, n)$ reálbérrátától. De ugyanezek a tényezők határozzák meg az értéktöbbletráta nagyságát is. Létezik tehát kapcsolat egyrészt az értéktöbbletráta és a profitráta között, másrészt az értékek és a termelési árak között. Az értékek és a termelési árak valamint az értéktöbbletráta és a profitráta ebben a módosított eljárásban *közvetlenül* nem kapcsolódnak egymáshoz, ahogy azt a marxi eljárásnál láttuk. Marx a költségárakat és a profitrátát értékelemekkel határozta meg és így a két elszámolási rendszer közötti kapcsolat definiálása minden nehézség nélkül elvégezhető volt. Ahhoz, hogy ezt mi is megtehessük, először a termelési árakat normalizálni kell, hogy összehasonlíthatóak legyenek az értékekkel. Csak ezután vizsgálhatjuk meg, hogy a módosított eljárás keretei között teljesül-e a marxi (i)—(iv) összefüggés.

Az értékek és a termelési árak kapcsolata

Az érték és a termelési ár minőségileg különböző kategória, ezért összehasonlításuk csak akkor lehetséges, ha azonos dimenzióban vannak, vagyis ha ugyanazzal a mértékegységgel vannak mérve. Az előző részben bemutatott érték- és termelési árrendszernél azonban a dimenziós azonosság nem valósul meg automatikusan. Az értékek legkézenfekvőbb dimenziója a munkamennyiségbeni kifejezés, de kifejezhetőek pénzben is. Marx gyakran alkalmazta ez utóbbi módszert. A pénzbeli kifejezés belső értékkel rendelkező pénzt feltételez, amely értékmérő funkciójával megméri az árukban lévő munkamennyiséget. A termelési áraknál azonban a dimenzionálás kérdése nyitva marad. Jól mutatja ezt a tényt a termelési árak (6)-beli definíciója, amely csak a termelési ár-arányokat határozza meg, de az árszintet nem. Numeraire-t kell tehát választanunk mégpedig olyat, amely lehetővé teszi az értékekkel való összehasonlítást. Ha az i-dik áru értékét és termelési árát választjuk egységnyinek, akkor az értékek és a termelési árak az i-edik áru egységében lesznek kifejezve.[6] Az összehasonlítás *látszólag* korrekt. Hangsúlyozzuk, hogy csak látszólag, mert nincs semmi biztosítékunk arra, hogy azonos mércével mérjük-e az értékeket és a termelési árakat. Ha ugyanis az i-edik szektor nem átlagos szerves összetételű, akkor az itt termelt áru értéke és termelési ára eltér egymástól. Az ilyen numeraire választás torzítást okoz az agregált nagyságokban. Pl. ha a kérdéses szektor az átlagosnál alacsonyabb szerves összetételű, akkor a gazdaság egészére értelmezett termelési árak összege felülmúlja az értékek összegét, mert az értéknél kisebb termelési árat használtunk az árak normalizálására. *Csak olyan árut választhatunk normalizálásra, amelyek értéke és termelési ára megegyezik.* Az ilyen áru pedig csak annak az iparágnak a terméke lehet, amelyben a termelés „technológia összetétele" megegyezik az egész gazdaság technológiai összetételével. Definiáljunk egy olyan k ágazatot, amelyben az

[6] Bortkiewitcz [1] is ezt tette amikor az arany egységében fejezte ki az értékeket és a termelési árakat.

input-felhasználások struktúrája megegyezik a gazdaság egészének input struktúrájával:

$$M_k = \beta M x \tag{8}$$

ahol M_k az M kibővített inputkoefficiens mátrix k-adik oszlopa, x a termelés vektora és β arányossági tényező. Nevezzük ezt az ágazatot „átlagos input összetételű" ágazatnak. A k-adik ágazat tehát ugyanolyan arányban használja fel a termelési eszközöket és a munkafelhasználáson keresztül a bérjavakat, mint az egész gazdaság. Az „átlagos input összetételű" ágazat az egész gazdaság termelési feltételeit tükrözi vissza, s ezen tulajdonsága alapján alkalmas arra, hogy az értékek és a termelési árak helyes mércéje legyen.[7] A termelési árak szintjét most úgy rögzítjük, hogy a k-adik áru termelési árát egyenlővé tesszük az értékével: $q_k = t_k$. Normalizálásunk helyességének ellenőrzésére nézzük meg, hogy a $q_k = t_k$ feltétel mellett az összérték megegyezik-e az össztermelési árral! Az értékmeghatározó egyenlet értelmében

$$t^* = t^* M + m' t^* D \tag{1'}$$

és

$$t_k = t^* M_k + m' t^* D_k.$$

A (8) alapján M_k és D_k helyébe βMx-et és βDx-et beírva kapjuk, hogy

$$t_k = \beta(t^* M x + m' t^* D x).$$

Az (1')-et jobbról megszorozzuk az x vektorral

$$t^* x = t^* M x + m' t^* D x.$$

Az utóbbi két egyenlet összevetéséből következik, hogy $t_k = \beta t^* x$. A (8) fennállása miatt $t^* M_k = \beta t^* M x$ és így

$$\frac{t_k}{t^* x} = \frac{t^* M_k}{t^* M x}. \tag{9}$$

A termelési árakat meghatározó (6)-os egyenletből következik, hogy

$$\frac{q^* M_k}{q_k} = \frac{q^* M x}{q^* x} \quad \text{minden } k\text{-ra}. \tag{10}$$

Ezt átrendezve kapjuk, hogy

$$\frac{q_k}{q^* x} = \frac{q^* M_k}{q^* M x}. \tag{10'}$$

A (9) és (10') jobb oldala megegyezik a (8) fennállása miatt, így a bal oldalaknak is meg kell egyezniük. S mivel a normalizálás értelmében $q_k = t_k$, így

$$t^* x = q^* x. \tag{11}$$

[7] Az átlagos input összetételű ágazat és a Sraffa-féle standard áru definíciója között felfedezhető bizonyos hasonlóság. A két kategória azonban nem ekvivalens egymással. A standard áru is felhasználható az értékek és a termelési árak mércéjéül. Lásd MEDIO [6].

Következtetésünk tehát az, hogy ha az „átlagos input összetételű" ágazat termékét választjuk numeriare-nek, akkor az összérték egyenlő lesz az össztermelési árral, vagyis a marxi (i) összefüggés fennáll. Olyan árnormalizálás véleményünk szerint nem elfogadható, amelynek eredményeként az összérték és az össztermelési ár egyenlősége nem áll fenn.[8] Az árnormalizálás lényege ugyanis éppen az, hogy lehetővé váljon az értékek és termelési árak összehasonlítása. Az összérték és az össztermelési ár egyezősége pedig éppen ezt támasztja alá: a gazdaságban egységnyi értékre egységnyi termelési ár-nagyság jut. Ha ez nem áll fenn, akkor parttalanná válik az összehasonlítás és értelmetlenné válik minden további vizsgálat.

Az eddigi gondolatmenetünket éppen ezért meg is fordíthatjuk és azt mondhatjuk: ha az összérték egyenlő az össztermelési árral, akkor az árnormalizálás helyes volt. Így feladatunkat lerövidíthetjük, nem kell olyan ágazatot keresnünk (ha egyáltalán van ilyen a valóságban), amely eleget tesz a (8) feltételnek, hanem egyszerűen a (11) azonosságot követeljük meg. A (11) fenntartása nem önkényes, hiszen segítségével az értékek és a termelési árak összehasonlítása válik lehetővé. Ezzel tehát igazoltnak tekintjük az (i) marxi összefüggést és a továbbiakban támaszkodunk rá.

Ezek után már megvizsgálhatjuk, hogy az (i) teljesülése mellett az (ii) marxi összefüggés fennáll-e. Az „összértéktöbblet egyenlő összprofit" feltétel így írható fel:

$$t^*(x - Mx) = q^*(x - Mx), \tag{12}$$

vagyis a gazdaságban megtermelt terméktöbblet értéken számbavéve megegyezik ugyanezen terméktöbblet termelési áron számbavett nagyságával. Milyen esetben teljesül a (12) a (11) feltétel mellett? Két fő esetet tekintsünk:[9]

1. Ha az értékek és a termelési árak egybeesnek. Ez akkor következik be, ha a tőke szerves összetétele minden egyes ágazatban megegyezik.
2. Ha a $\lambda x = Mx$, $(0 < \lambda < 1)$ egyenlőség fennáll, vagyis ha a gazdaság a Neumann-féle egyensúlyi növekedési pályán van.

Nézzük először az első esetet. A különböző iparágakban működő tőkék szerves összetételének egyenlősége a

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ji} t_j}{\bar{w} L_i} = k \qquad \text{minden } i\text{-re}, \tag{13}$$

vagy a

$$t^*A = kt^*D \tag{13'}$$

egyenlőségek fennállását jelenti. Mivel az értéktöbbletráta kiegyenlített a gazdaságban, az $m't^*D$ értéktöbblet vektor nemcsak a munkaerő értékének vek-

[8] Morishima [8] és Okishio [9] béregységbeni árnormalizálást javasolt: $q_w = q/w$ Szerintük ekkor a termelési árak munkamennyiségekben vannak kifejezve. Az így adódó q_w árak azonban azt mutatják meg, hogy az áruk mennyi élőmunkára cserélhetők, és nem azt, hogy mennyi munkamennyiséget tartalmaznak. Ha van kizsákmányolás (vagyis ha a bérek kisebbek mint a hozzáadott érték) akkor a béregységekkel normalizált árak szisztematikusan magasabbak lesznek, mint az értékek. Ez az árnormalizálás nagyon hasonlít *Smith* II. értékelméletére, mely szerint az áru annyit ér, amennyi élőmunkára kicserélhető.

[9] Matematikailag természetesen más esetekben is teljesülhet (12), de ezek közgazdaságilag nem lényegesek.

torával, hanem a termelési eszközök értékének vektorával, illetve a kettő összegével is arányos lesz. Az (1) értékmeghatározó egyenletet átalakítva

$$t^* = t^*M + m't^*D, \qquad (1')$$

és figyelembe véve, hogy a (13') értelemben a t^*M arányos az $m't^*D$-vel azt kapjuk, hogy

$$t^* = t^*M + \frac{m'}{k+1} t^*M.$$

Jelöljük a $\dfrac{k+1}{k+1+m'}$ — t λ_1-el. Ekkor a következő formát kapjuk:

$$t^*M = \lambda_1 t^*. \qquad (14)$$

A (6') termelési ár definícióban az $\dfrac{1}{1+\pi}$-t jelöljük λ_2-vel, így a

$$q^*M = \lambda_2 q^* \qquad (6'')$$

összefüggés adódik. Jól látható, hogy a (14) és a (6'') egy-egy sajátérték feladatot határoz meg. Mégpedig ugyanazon mátrix bal oldali domináns sajátértékéhez tartozó sajátvektort kell meghatároznunk. Nyilvánvaló, hogy $\lambda_1 = \lambda_2$, valamint t érték- és q termelési ár-vektor is megegyezik — legalábbis arányaikat tekintve. De mivel a (11) fennáll, így a két vektor abszolút nagyságban sem tér el egymástól, vagyis $t = q$.

A második eset vizsgálatát kezdjük azzal, hogy a (11)-et átrendezzük:

$$(t - q)^*x = 0. \qquad (11')$$

A (11') felírásból kitűnik, hogy a $t - q$ különbségek ortogonálisak az x-re. A $t - q$ különbségeknek tehát az x-re merőleges hipersíkban kell elhelyezkedniük.

Hasonlóan a (12)-t is átalakíthatjuk, felhasználva, hogy $t^*x = q^*x$

$$(t - q)^*Mx = 0. \qquad (12')$$

Az előző gondolatmenet alapján a $t - q$ különbségeknek az Mx-re merőleges hipersíkban kell lenniük. A (11) fennállása csak akkor vonja maga után a (12) teljesülését, ha az Mx vektor az x vektorral arányos, mert csak akkor esik egybe a két hipersík. Ez a feltétel így fogalmazható meg:

$$Mx = \lambda x. \qquad (15)$$

A (15) nem más mint a jól ismert Neumann pálya egyenlete.[10] Ha a (12) nem áll fenn, akkor a (8)-at és a (9)-et egyszerre kielégítő $t - q$ vektorok csak a két hipersík metszetét alkotó $m - 2$ dimenziós altér elemei lehetnek. Tehát végtelen sok olyan $t - q$ vektor van, amelyre a (11) teljesül, de a (12) nem.

Az összértéktöbblet tehát csak bizonyos megszorító feltételek mellett egyenlő az összprofittal. Nyilvánvaló, hogy a tőkék szerves összetételének

[10] A (15) megfeleltethető a Sraffa-féle standard rendszernek is, mert a termékeket olyan arányban használják fel, amilyen arányban termelték azokat.

egyenlősége vagy a Neumann pálya melletti növekedés nem tételezhető fel egy általános modell keretei között. Konklúziónk ezért az, hogy a marxi (ii) összefüggés, vagyis az összértéktöbblet egyenlő összprofit általában nem teljesül. Következik-e ebből az hogy az értéktöbblet és a kizsákmányolás marxi elmélete érvényét vesztette? Semmiképpen sem. Továbbra is érvényben marad — mint azt már az előző részben kifejtettük — hogy *profitot csak akkor lehet realizálni ha a gazdaságban van értéktöbblet*, vagyis ha a munkások több új értéket hoznak létre, mint amennyi saját létfenntartásukhoz szükséges. A profit anyagi alapja a többlettermék, ez pedig csak akkor keletkezik, ha az értéktöbbletráta pozitív, ha a munkásokat kizsákmányolják. Felmerülhet a kérdés, hogy ha az összprofit nagyobb, mint az összértéktöbblet, akkor honnan veszik, vagy fordított esetben hová teszik ezt a különbséget. *Világosan kell látni, hogy a munkások nem az értéktöbbletet termelték meg, hanem a terméktöbbletet, az értéktöbblet csak ennek a munkatartalmát jelöli. Ha az érték elszámolásból áttérünk a termelési ár-elszámolásra, akkor ettől még a terméktöbblet nagysága nem változik meg, csak az azt kifejező termelési ár-összeg (az összprofit) fog eltérni az összértéktöbblettől.* Pl. ha a többlettermékben a magas szerves összetételű ágazatok termékei túlsúlyban vannak, akkor termelési áron értékelve ez több munkamennyiséget jelent, mint az értékelszámolás esetén. A másik oldalon viszont ebben az esetben a szükséges termék (Mx) termelési áron kevesebb munkamennyiséget jelent, mint értéken számba véve.

A következőkben a (iii) marxi összefüggés érvényességét vizsgáljuk meg. A (iii) értelmében valamely áru termelési ára csak akkor egyezik meg értékével, ha az árut átlagos szerves összetételű ágazatban termelték. Azt, hogy az i-edik szektor átlagos szerves összetételű a következőképpen fejezhetjük ki:

$$\frac{t^*A_i}{t^*D_i} = \frac{t^*Ax}{t^*Dx}, \tag{16}$$

ahol A_i és D_i az A és D mátrixok i-edik oszlopát jelölik. A (16)-ot olyan alakra hozhatjuk, amilyent az „átlagos input összetételű'' ágazat esetén kaptunk

$$\frac{t^*M_i}{t_i} = \frac{t^*Mx}{t^*x}, \tag{9'}$$

vagy

$$t_i = \frac{t^*M_i}{t^*Mx} t^*x.$$

A (12′) termelési ár definícióból pedig az következik, hogy

$$q_i = \frac{q^*M_i}{q^*Mx} q^*x. \tag{12''}$$

A helyes árnormalizálás értelmében $t^*x = q^*x$, ezért t_i és q_i megegyezésének az a feltétele, hogy

$$\frac{t^*M_i}{t^*Mx} = \frac{q^*M_i}{q^*Mx}. \tag{17}$$

A (17) fennállása azonban nem következik a (16)-ból vagy az ezzel azonos (9′)-ből. Számtalan olyan M_i és Mx vektor található, amelyre a (9′) fennáll, de a (17) nem. A (17) fennállásához elégséges, ha az i iparágra teljesül az $M_i = \beta Mx$ feltétel. Az iparág átlagos szerves összetételének feltétele tehát nem elégséges az érték és a termelési ár egyenlőségéhez. Ez utóbbiak egyenlőségéhez az ,,átlagos input összetétel'' feltétel is szükséges.

A fentiekből következik, hogy az ,,átlagos input összetételű'' iparág feltétel erősebb, mint az átlagos szerves összetételű iparág feltétel. Ha egy iparág ,,átlagos input összetételű'' iparág, akkor átlagos szerves összetételű is, mert a (8) maga után vonja a (16) és a (9') teljesülését. De fordítva ez nem áll fenn. Próbáljuk meg közgazdaságilag is megmagyarázni, hogy miért nem elegendő az érték és a termelési ár azonosságához az átlagos szerves összetétel feltétele. Az átlagos szerves összetételű ágazatban a felhasznált termelési eszközök értékének aránya a felhasznált bérjavak értékéhez megegyezik a gazdaság egészére érvényes aránnyal. Termelési áron számba véve ugyanezek az arányok már eltérhetnek egymástól. Az eltérés oka az, hogy az átlagos szerves összetételű ágazatban a belépő input termékek az értékeik helyett most (az értékektől eltérő) termelési árakon kerülnek elszámolásra. S így termelési árakon számba véve inthető átlmár nem tekagos szerves összetételűnek az i-edik szektor. Ebből következően az ágazat termékének értéke és termelési ára is el fog térni egymástól. Pl. ha az ágazat termeléséhez zömében alacsony szerves összetételű ágazatok termékeit használták fel, akkor a termelési ár az érték alatt fog maradni. Hogyan biztosítható — áttérve a termelési ár elszámolásra —, hogy az i-edik szektorban a termelési eszközök és a bérjavak költség aránya megegyezzen az átlagos aránnyal? Két módon érhetjük ezt el:

a) Az átlagos szerves összetételű ágazat termelésébe csak átlagos szerves összetételű ágazatok termékei épülnek be, amelyeket szintén csak átlagos szerves összetételű ágazatok termékeiből állítanak elő, . . . stb.

b) Az átlagos szerves összetételű ágazatba különböző szerves összetételű ágazatok termékei épülnek be, de olyan arányban, amilyen arányban az egész gazdaság felhasználja azokat (vagyis az ágazat ,,átlagos input összetételű''). Az *a)* vagy a *b)* eset pótlólagos megkövetelése biztosítja, hogy az átlagos szerves összetételű ágazatban az áru értéke és termelési ára megegyezzen.

Az átlagos szerves összetétel fogalmat ki kell tehát egészítenünk az *a)*, vagy a *b)* feltétellel és így igazolhatóvá válik a (iii) marxi összefüggés egyik része.[11] Az átlagnál magasabb illetve alacsonyabb szerves összetételű ágazatok érték- és termelési árarányok ,,valószínűleg'' a (iii) szerint fognak alakulni.

Adósak vagyunk még a profitráta (iv) marxi összefüggésének vizsgálatával. Már utaltunk rá, hogy Marx a profitrátát értékelemekkel határozta meg. A profitráta azonban a termelési ár-elszámoláshoz tartozik, ezért nagyságát termelési árelemekkel, az összprofittal és az összönköltséggel kell meghatározni. Ha a (11) és (12) összefüggés együttesen teljesül, akkor az összértéktöbblet egyenlő az összprofittal és a marxi összköltségár ($c + v$) egyenlő az összönköltséggel. Ebben az esetben érvényes marad a (iv) profitráta definíció. Az előzőekben bemutattuk, hogy ez az eset csak akkor fordulhat elő, ha az egyes szektorok szerves összetétele megegyezik, vagy ha a gazdaság a Neumann-féle egyensúlyi növekedési pályán van. A szerves összetételek azonossága esetén a (11)

[11] Seton bizonyította a teljes (iii) összefüggés érvényességét egy háromszektoros (I. termelési eszközök, II. bérjavak, III. luxusjavak) modell keretei között. Mivel csak egy-egy szektor állítja elő a termelési eszközöket és a bérjavakat, így itt az előbbiekben vázolt arány-eltérési probléma fel sem merülhet. Ezért ezt a bizonyítást nem fogadhatjuk el általános érvényűnek.

és a (6″) összefüggésben szereplő λ_1 és λ_2 megegyezik. Ebből már egyenesen következik, hogy

$$\lambda_1 = \frac{k+1}{k+1+m'} = \lambda_2 = \frac{1}{1+\pi}$$

és

$$\pi = \frac{m'}{k+1},$$

amely megfelel a marxi definíciónak, mert $m' = \Sigma m/\Sigma v$ és $k = \Sigma c/\Sigma v$.

Írjuk fel a profit értékbeni és termelési áron vett rátáját:

$$p' = \frac{t^*(x - Mx)}{t^*Mx} = \frac{t^*\left(\frac{1}{\lambda}Mx - Mx\right)}{t^*Mx} = \frac{1}{\lambda} - 1,$$

$$\pi = \frac{q^*(x - Mx)}{q^*Mx} = \frac{q^*\left(\frac{1}{\lambda}Mx - Mx\right)}{q^*Mx} = \frac{1}{\lambda} - 1.$$

Az átalakítást azért tehettük meg, mert a Neumann-pályán a $\lambda x = Mx$. Az $(1/\lambda - 1)$ a gazdaság egyensúlyi növekedési üteme, amely megegyezik a profitráta értékbeni és termelési árbeli nagyságával. Ki kell emelnünk, hogy ez az összefüggés akkor is fennáll, ha a (11) és a (12) feltétel nem teljesül, ezt pusztán a Neumann-pálya tulajdonsága biztosítja.[12] Másként fogalmazva az egyensúlyi növekedési pályán haladó gazdaságra a marxi profitráta meghatározás érvényes, de ebből még nem következik, hogy a (11) és a (12) fennáll, vagyis hogy az összérték egyenlő az összes termelési árral és az összprofit egyenlő az összértéktöbblettel. Megfordítva viszont a (11) és a (12) fennállása maga után vonja a marxi profitráta definíció érvényességét is.

A fenti két esettől eltekintve az értékbeni (p') profitráta eltér a termelési árbeli (π) profitrátától. A marxi (iv) definíció tehát általános esetben nem érvényes. Van azonban egy lényeges összefüggés, amely továbbra is érvényes marad; az értéktöbbletráta és a profitráta kapcsolata. Az érték- és termelési árkörfolyamat elemzésénél már láttuk, hogy mindkét ráta ugyanazon elemek különböző kombinációjából épül fel (technológiai koefficiensek, munkainput koefficiensek és a reálbérráta). Továbbá azt is láttuk, hogy a profitráta csak akkor lehet pozitív, ha az értéktöbbletráta pozitív, valamint az értéktöbbletráta növekedésével a profitráta is növekszik.[13] Ugyenez az összefüggés kiolvasható a profitráta marxi definíciójából is. S véleményünk szerint *ez az összefüggés tekinthető a marxi profitelmélet lényegének.* Marx célja ugyanis az volt, hogy olyan profitelméletet adjon, amelyben a profit kizárólagos forrása a többletmunka, a munkások kizsákmányolása. A módosított transzformációs eljárásunk igazolta ezen cél teljesülését.

[12] A marxi profitráta meghatározás érvényességét egyensúlyi növekedési út mellett először MORISHIMA [7] bizonyította be.

[13] Ebből következően a profitrátára is érvényes amit az értéktöbbletrátánál már leszögeztünk: nagysága független azon javak értékétől, amelyek közvetlenül vagy közvetve nem lépnek be a munkásosztály fogyasztásába.

Összegzésként megállapíthatjuk, hogy a módosított transzformációs eljárás keretei között az (i)—(iv) marxi összefüggés csak akkor állhat fenn maradéktalanul, ha a gazdaságban az iparági tőkék szerves összetétele kiegyenlített, vagy ha a gazdaság a Neumann-típusú egyensúlyi növekedési pályán van. Az első feltétel fennállását nem egyeztethetjük össze Marx gondolatrendszerével, hiszen a termelési ár probléma éppen azért merült fel, mert az iparági tőkék szerves összetétele különböző.

A második feltétel sem illeszthető be Marx gondolatrendszerébe. A marxi kapitalizmus-kép nem a kiegyensúlyozott, egyenletesen növekvő gazdaság, hanem az egyre mélyülő ciklikus válságok és az előbb-utóbb bekövetkező teljes összeomlás. A két feltétel elvetése esetén nem igazolható az értékek és a termelési árak kapcsolatát definiáló (ii)—(iv) marxi összefüggés.

Végezetül meg kell említenünk, hogy következtetéseink nyilvánvalóan csak az adott modell keretei között érvényesek. Ha feloldjuk alapfeltevéseinket, akkor a kapott eredményeink is megváltozhatnak. A legnagyobb problémát az „egy termelési eljárás — egy termék" és az „állóeszközök egy időszak alatti megtérülése" feltételek feloldása jelenti. STEEDMAN [12] kimutatta, hogy együttes termelés esetén az értéktöbblet negatív is lehet miközben a profitráta pozitív, vagyis a pozitív profitráta létezésének nem szükséges feltétele az értéktöbblet (ráta) pozitivitása. A Steedman által alkalmazott értékfogalom azonban nem felel meg a marxi értékfogalomnak, ezért megállapítását nem tekinthetjük perdöntőnek.[14] Érvelését Steedman így folytatta: „. . . az áruk előállításához szükséges munkaidő mennyiségeit csak akkor határozhatjuk meg, ha a termelési eljárások megválasztása már ismeretes. Ezt a választást azonban a profitráta maximalizálása határozza meg. Így a profitráta és a termelési árak meghatározása logikai előzménye az áruk érték-megállapításának." ([12], 202. old.) Ezzel az állítással egyetértünk. Cikkünkben éppen azt próbáltuk bizonyítani, hogy az érték- és a termelési árelszámolás egymástól elkülönült, közvetlen kapcsolat nincs köztük.[15] A numeraire definiálása pedig azt a célt szolgálja, hogy kapocs legyen a két elszámolási mód között. A közvetlen kapcsolat hiányát és lehetetlenségét támasztja alá az is hogy a Marx által posztulált érték- termelésiár összefüggések általános esetben nem állhatnak fenn. Helytálló továbbá az is, hogy az értéknagyságok meghatározásához a termelési árakból kell kiindulni. De ez véleményünk szerint nem áll szemben a marxi szemléletmóddal. Ha ugyanis elfogadjuk, hogy a kapitalizmus viszonyai között az érték absztrakt, logikai kategória, akkor az érték nagyságát csak ex post határozhatjuk meg, a konkrét valóság tényeiből kiinduló absztrakciós eljárás során. *Az értékelmélet lényege nem az, hogy árelmélet legyen és meghatározza a termelési árak és profitok nagyságát, hanem az, hogy minősítse a végbement gazdasági folyamatokat és megmagyarázza a profit eredetét.*

(Beérkezett: 1982. június 2-án.)

[14] Meg kell azonban említenünk, hogy a marxista irodalomban ma sincs megnyugtatóan rendezve az együttes termelés esetén az értéknagyság meghatározása. MORISHIMA ugyan megcáfolta STEEDMANT, de az ő igazi (true) érték definíciója sem elfogadható, mert a minimális és nem az átlagos munkamennyiség alapján határozza meg az értékeket.

[15] STEEDMAN [12] előtt már SAMUELSON [10] is felvetette, hogy az értékelszámolás csak szükségtelen kerülőút, hiszen a termelési árak és profitok közvetlenül meghatározhatóak a fizikai koefficiensekből és a bérrátából.

IRODALOM

1. Bortkiewicz, L. von: *On the Correction of Marx's Fundamental Theoretical Construction in the Third Volume of Capital*, a (13)-ban.
2. Böhm-Bawerk, E. von: *Karl Marx and the Close of His System*, a (13)-ban.
3. Bródy, A.: *Érték és újratermelés*, Budapest, 1969. Közgazdasági és Jogi Kiadó.
4. Marx, K.: *A tőke* I—III. Budapest, 1978. Kossuth Kiadó.
5. May, K.: Value and Price of Production: A Note on Winternitz's Solution, *Econ. Journal*, Dec. 1948.
6. Medio, A.: Profits and Surplus Value: Appearance and Reality in Capitalist Production, in Hunt E.—Schwartz J. (eds): *A Critique of Economic Theory*. Harmondsworth: Penguin Books, 1972.
7. Morishima, M.—Catephores G.: Is there an ,,Historical Transformation Problem"? *Econ. Journal*, June 1975.
8. Morishima, M.: *Marx's Economics*, Cambridge University Press, 1973.
9. Okishio, N.: A Mathematical Note on Marxian Theorems, *Weltwirtschaftlich Archiv*, 1963.
10. Samuelson, P.: Understanding the Marxian Exploitation: A Summary of the So-Called Transformation Problem between Marxian Values and Competitive Prices, *Journal of Economic Literature*, June 1971.
11. Seton, F.: The Transformation Problem, *Review of Economic Studies*, June 1957.
12. Steedman, I.: *Marx after Sraffa*, NLB. 1977. London.
13. Sweezy, P. (ed.): *Karl Marx and the Close of His System*, Augustus M. Kelley, 1949.
14. Winternitz, J.: Values and Prices: A Solution of the So-Called Transformation problem, *Econ. Journal*, June 1948.
15. Woods, J.: *Mathematical Economics*, Longman, London, 1978.

A WAY FOR SOLVING THE TRANSFORMATION PROBLEM

The study discusses a distinguished problem of Marxist political economy, the transformation of value into the price of production. Not long after the publication of Volume III of the Capital sharp criticism was directed at the Marxian solution by burgeois economists and then a long debate followed. This debate inspired the author to trying and provide a feasible solution to the problem.

The starting point of the solution is that the accounting of value and of the price of production are distinct from each other and thus their comparability has to be ensured. This can only be done by selecting a correct numeraire. In a Leontief-type economy the correct numeraire is the product of a branch of "average input composition", that is, the input proportions of which agree with those of the whole economy. In a model satisfying the correct norming of prices the equality of the total of values and the total of prices of production, assumed by Marx, is satisfied, but the total of surplus values is not equal to the total of profits, nor is the rate of profit calculated by value equal to that calculated by the price of production. The latter two equalities only hold if special conditions are prescribed, e.g. if the organic composition of capital is identical in the individual branches, or if the economy moves along a Neumann-type growth path. These results modify the Marxian solution to the transformation problem, but do not render the theory of value superfluous. Namely, it is not essential for the theory of value to serve as a price theory and determine the prices of production and of profits but to qualify and explain the origin of profit.

ОДИН ИЗ ПУТЕЙ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ ПРЕВРАЩЕНИЯ

Статья посвящена одной из известных спорных проблем марксистской политической экономии — превращению стоимости в цену производства. Вскоре после выхода в свет 3-го тома «Капитала» положения Маркса были подвергнуты резкой критике со стороны буржуазных экономистов, а затем возникла длительная дискуссия. Эта дискуссия побудила автора статьи попытаться дать возможное решение проблемы превращения.

Отправным моментом решения является то, что исчисление стоимости и цены производства происходит в отрыве друг от друга, поэтому необходимо обеспечить их сравниваемость. А этого можно достигь лишь с помощью правильно выбранного нумератора. В экономике, описанной Леонтьевым, правильный нумератор — продукт отрасли со «средним

составом затрат», то есть такой, в которой пропорция вложенных затрат совпадает с пропорциями затрат во всей экономике. В модели, удовлетворяющей требованию правильной нормализации цен, предполагаемое Марксом равенство общей стоимости — общего производства имеет место, однако не имеет места равенство общей прибавочной стоимости и общей прибыли, а также равенство нормы прибыли, расчитанной по стоимости и цене производства. Два последних равенства достигаются лишь при наличии специальных условий, например: отдельные отрасли имеют тождественный органический состав или же экономический рост идет по траектории равновесия типа Неймана. Эти результаты меняют решение проблемы превращения, данное Марксом, однако не исключают саму теорию стоимости. Сущность теории стоимости заключается не в том, что она представляет собой теорию цены и определяет величину производственных цен и норм прибыли, а в том, что она определяет и объясняет происхождение прибыли.

Simonovits András

Ütköző készletek és naiv várakozások egy nem-walrasi dinamikus makromodellben: stabilitás, ciklus és káosz*

1. Bevezetés

Az olvasó már többször találkozhatott a Szigma oldalain is nem-walrasi (azaz disequilibrium-elméleti) modellekkel, sőt az egyik legfontosabb idevágó cikk Benassy (1974) először éppen e folyóirat hasábjain jelent meg. A legutóbbi években a téma jelentősége egyre nőtt; Barro és Grossmann (1971), Malinvaud (1977) stb. klasszikus munkáinak egyre több követője akad a világon. Ez az elmélet szembefordul a walrasi elmélettel: nem az ár- hanem a volumenváltozásokat tekinti rövidtávon meghatározónak. Ez a megközelítés lehetővé teszi, hogy a walrasi egyensúlyt általánosítva *munkanélküliségi* és *inflációs egyensúlyról* beszélhessünk. Sajnos a disequilibrium-modellek számottevő része *statikus* marad, ezért is helyesebb nem-walrasi elméletről beszélni. De még a *dinamikus* disequilibrium-modellek jelentős része is csak korlátozott értelemben dinamikus. Például Malinvaud (1977) függelék, Muellbauer és Portes (1978), valamint Benassy (1980) a *készlet-dinamika* bevezetését *előre adott várakozásokkal* kapcsolta össze, azaz pl. a második időszak eladási várakozása *független* volt az első időszak készletétől és eladásától. Szemléletesen mutatja e megközelítés további korlátját, hogy e szerzők *két* időszakra korlátozták vizsgálatukat és, *nulla* kezdő és záró készletet feltételezve, *átmenetinek* tekintették a készleteket. Dehez és Gabszewicz (1977) viszont az állami kiadások bevezetésével küszöbölte ki a termékkészleteket, ellenben dinamikusan vizsgálta a *megtakarítások*, ill. a pénzkészletek alakulását.

Ilyen előzmények után látott napvilágot Honkapohja és Ito (röviden: H—I) (1980) dolgozata, amelyben a készletdinamika *tetszőleges* számú időszakra vonatkozott, és az eladási *várakozás függött* az előző időszak készletétől. Jellegében hasonló: Green és Laffont (1981) és Malinvaud (1980). Kiindulópontul Lovell (1962) modellje szolgált, azonban a szerzők kiterjesztették e modell hatókörét a *keynesi munkanélküliségről* (áru- és munkaerő-túlkínálatról) az *elégtelen fogyasztásra* (árutúlkínálat és munkaerő-túlkereslet kombinációja) valamint a *visszaszorított inflációra* (áru- és munkaerő-túlkeresletre).

* Köszönetemet fejezem ki *Kornai Jánosnak*, aki dolgozatom több változatát is elolvasta és fontos tanácsokkal látott el. Megköszönöm *Seppo Honkapohja* önzetlen segítségét, s külön kiemelem a kaotikus viselkedésről szóló megjegyzéseit, melyet dolgozatom korábbi változatával kapcsolatban adott, ahol még nem szerepelt az instabilitásról szóló rész. Köszönöm a *Szigma* névtelen lektorainak hasznos megjegyzéseit, valamint *J.-P. Benassy*, *Bródy András*, *A. R. Doina*, *Körösi Gábor* és *Vince János* megjegyzéseit. Természetesen minden megmaradó hibáért egyedül engem terhel a felelősség.

[1] J.-P. Benassy figyelmeztetett arra, hogy modellemben a *klasszikus munkanélküliség* fogalma ellentétbe kerülhet a hagyományos fogalommal, amely szerint csak a túl magas reálbér okozhat klasszikus munkanélküliséget. Egy finomabb osztályozás található Benassy (1982) 12. fejezetében.

Dolgozatomban H—I modelljének több fontos feltevését módosítom: (i) H—I-val ellentétben az eladási várakozások *pontatlanságából* és folytonos korrekciójából indulok ki. (ii) A keynesi viselkedési szabály *kiterjesztését* más tartományokra csak akkor fogadom el, ha a rendszer csak *időnként* van a keynesi tartományon kívül. (iii) A készletdinamika mellett tanulmányozom a *kényszermegtakarítások* dinamikáját is.

Honkapohja és Ito eredményeinek egy része érvényben marad a módosított modellben is, más része nem. Lábjegyzetekben térek ki néhány apróságral amely H—I dolgozatában helyesbítésre szorul. Teljesen új viszont az instabi, szabályozásnál fellépő *kaotikus* viselkedésről szóló rész.

A dolgozat a Bevezetésen kívül négy fejezetből és egy függelékből áll. A 2. fejezetben röviden ismertetjük a *modellt*, a 3. fejezetben definiáljuk a különböző *tartományokat* és az *egyensúlyi* helyzetet tanulmányozzuk. A 4. fejezet a *dinamikával* foglalkozik: stabilitás, ciklus és káosz. Az 5. fejezetben *összehasonlítjuk* a két modellt és szólunk Lovell modelljéről is. A függelék a bonyolultabb *bizonyításokat* tartalmazza.

A dolgozat nem tételezi föl H—I cikkének ismeretét!

2. A módosított modell

Ebben a fejezetben röviden összefoglaljuk Honkapohja és Ito modelljének egyenleteit, de ezeket már a módosított feltevések szerint írjuk föl. Két piac van: árupiac és munkaerőpiac. A t-edik időszakban a munkaerő iránti kereslet L_t^d, a munkaerő kínálata L_t^s, az áru iránti kereslet Y_t^d és az áru kínálata Y_t^s. A disequilibrium-elmélet *rövidebb oldal szabályát* követve a tényleges cserét mindkét piacon a kisebbik mennyiség határozza meg:

$$Y_t = \min(Y_t^d, Y_t^s) \tag{2.1}$$

és

$$L_t = \min(L_t^d, L_t^s). \tag{2.2}$$

A termék kínálatának és eladásának[2] különbsége adja az időszak *zárókészletét*:

$$I_t = Y_t^s - Y_t. \tag{2.3}$$

Föltesszük, hogy a vállalatok kizárólag munkaráfordításokkal hozzák létre a terméket. Sőt mi több, a megfelelő termelési függvényről föltételezzük, hogy homogén lineáris: $Q = \delta L$. Definíció szerint az árukínálat egyenlő a kezdőkészlettel és a termeléssel:

$$Y_t^s = I_{t-1} + \delta L_t, \text{ ahol } \delta > 0. \tag{2.4}$$

Ezen a ponton vezetjük be a *kényszermegtakarítások*[3] *állományát*, melyet M_t-vel jelölünk, és ez definíció szerint egyenlő az árukereslet és az eladás

[2] H—I (4.3) képletében Y_t^d *kereslet* szerepelt Y_t *eladás* helyett; (4.5)-ben már a helyes képlet szerepel.

[3] A szándékolt- és a kényszermegtakarítás megkülönböztetését ugyanúgy be kellene vezetnünk, mint a szándékolt és a nemszándékolt készletfelhalmozást, ezzel azonban tovább bonyolítanánk modellünket.

különbségével:

$$M_t = Y_t^d - Y_t. \tag{2.5}$$

Most az árukeresletet a kényszermegtakarítás-állomány adott ϑ hányadának és a folyó jövedelemnek az összegével definiáljuk, ahol a folyó jövedelem két részből áll: a népesség szavatolt jövedelméből (a) és a munkanélküliségi, valamint a biztosítási hozzájárulás feletti munkajövedelmekből:[4]

$$Y_t^d = \vartheta M_{t-1} + a + bL_t, \text{ ahol } 0 \leq \vartheta \leq 1 \text{ és } a > 0;\ b \geq 0. \tag{2.6}$$

Föltesszük, hogy a termelés nyereséges: $\delta > b$.

Következő feltevésünk szerint a munkaerő kínálat adott:

$$L_t^s = d. \tag{2.7}$$

Lovellt követve föltesszük, hogy a kívánt készlet arányos a várt árukereslettel:

$$I_t^* = \beta \bar{Y}_t^d \quad \text{ahol} \quad \beta \geq 0. \tag{2.8}$$

Vegyük észre, hogy $\bar{Y}_t^d$-nek már a t-edik időszak elején ismertnek kell lennie, amikor a vállalatok meghatározzák lehetséges árukínálatukat: $I_t^* + \bar{Y}_t^d$-t. (H—I-t követve föltesszük, hogy a vállalatok nem részben, hanem teljesen igazodnak várakozásaikhoz, ezzel elkerüljük a magasabbrendű differencia egyenletek használatát.) (2.4) és (2.8) szerint a munkaerő-kereslet

$$L_t^d = \frac{1}{\delta}\left[(\beta + 1)\bar{Y}_t^d - I_{t-1}\right]_+, \tag{2.9}$$

ahol $x_+ = \max(0, x)$.

Most már bevezethetjük az árukeresletre vonatkozó *naív várakozást*:

$$\bar{Y}_t^d = \vartheta M_{t-1} + a + bL_{t-1}. \tag{2.10}$$

Megjegyzések[5]. (2.3) és (2.5) értelmében nem lehet $I_t > 0$ és $M_t > 0$. Ha $I_{t-1} > 0$ és $M_t > 0$ vagy fordítva, akkor a $t-1$-edik és t-edik időszak között *váltás* történt.

Már a Bevezetésben említettük, hogy modellünk *rekurzív*. Most már a változók meghatározásának a sorrendjét is megadhatjuk:

$$\bar{Y}_t^d \to L_t^d \begin{smallmatrix}\nearrow L_t \searrow \\ \searrow Y_t^s \nearrow\end{smallmatrix} Y_t \begin{smallmatrix}\nearrow I_t \\ \searrow M_t\end{smallmatrix}.$$

[4] Honkapohja és Ito valójában még egy sztochasztikus zavart is hozzáadott (2.1) egyenlete jobb oldalához, s ez az általánosítás indokolta, hogy tökéletes előrelátás helyett csak ésszerű várakozásról beszéljenek. Ez az általánosítás azonban nem érinti az eredményeket; sőt, a szerzők maguk is figyelmen kívül hagyják a zavarokat, amikor az állapotokat osztályozzák. Mi egyszerűen kizárjuk ezt a bonyodalmat. Következésképp H—I α-ja nulla minden képletünkben és mint additív tag kiesik.

[5] Egyszerűség kedvéért nem vesszük át H—I megkülönböztetését a kereslet és a kínálat *névleges* és *effektív* értéke közt. Matematikailag ez az jelenti, hogy H—I e, γ és c paraméterei mind nullák képleteinkben. Egyébként H—I-nál is csak c jut szerephez és csak az R-tartományban.

3. Állapot-típusok és egyensúly

A disequilibrium-elmélet hagyományainak megfelelően először definiáljuk a *munkanélküliséget* ($L_t^d < d$) és a *teljes foglalkoztatást* ($L_t^d \geq d$). Nyilvánvaló, hogy más alakú a készlet- és a megtakarítás-egyenlet az első esetben mint a másodikban. Szükségünk lesz még a termékkínálat és a termékkereslet különbségére, B_t-re:

$$B_t = Y_t^s - Y_t^d = I_t - M_t = B_t^+ - B_t^-, \tag{3.1}$$

ahol a második egyenlőségnél a (2.3) és a (2.5) egyenletre támaszkodtunk.

L_t^d-t egyszerűbben felírhatjuk, ha (2.10)-et behelyettesítjük (2.9)-be:

$$L_t^d = \frac{1}{\delta}\left[(\beta+1)bL_{t-1} - B_{t-1}^+ + (\beta+1)\vartheta B_{t-1}^- + (\beta+1)a\right]_+ \tag{3.2}$$

Új jelölésünkkel tömörebben felírhatjuk az árupiac dinamikáját is, három esetet különböztetve meg:

$$B_t = B_{t-1}^+ - \vartheta B_{t-1}^- - a, \text{ ha } L_t^d = 0 \tag{3.3}$$

$$B_t = \frac{\delta - b}{\delta}(\beta+1)bL_{t-1} + \frac{b}{\delta}B_{t-1}^+ - \frac{\sigma}{\delta}\vartheta B_{t-1}^- - \frac{\sigma}{\delta}a, \text{ ha } 0 < L_t^d < d \tag{3.4}$$

$$B_t = B_{t-1}^+ - \vartheta B_{t-1}^- + g, \text{ ha } L_t^d \geq d, \tag{3.5}$$

ahol

$$g = (\delta - b)d - a \text{ és } \sigma = (\beta+1)b - \beta\delta. \tag{3.6}$$

g a rendszer kulcsfontosságú paramétere; jelentése: a folyó termelés és jövedelem különbsége teljes foglalkoztatásnál.

Föltesszük, hogy $g > 0$.

A (3.2)–(3.5) egyenletek egyértelműen leírják a rendszer mozgását. Az elemzést viszont megnehezíti, hogy más és más képletek érvényesek a különböző esetekben.

Követve tehát MUELBAUER és PORTES (1978) eljárását, mind a munkanélküliségi, mind a teljes foglalkoztatási tartományon belül további két résztartományt különböztetünk meg aszerint, hogy a termékkereslet kisebb-e vagy nagyobb mint a termékkínálat. Összesen tehát négy tartományunk van;

A) *Keynesi munkanélküliség* (K): $L_t^d < L_t^s$ és $Y_t^d < Y_t^s$,
B) *Klasszikus munkanélküliség* (C): $L_t^d < L_t^s$ és $Y_t^d > Y_t^s$,
C) *Elégtelen fogyasztás* (U): $L_t^d \geq L_t^s$ és $Y_t^d \leq Y_t^s$,
D) *Visszaszorított infláció* (R): $L_t^d \geq L_t^s$ és $Y_t^d > Y_t^s$.

Hosszadalmas, de érdektelen munkával meghatározhatnánk azoknak a tartományoknak a határait, amelyekből a rendszer a fenti négy tartomány valamelyikébe ugrik. Erre azonban nem nagyon van szükségünk. Inkább rátérünk az *egyensúlyi* állapotok vizsgálatára.

Az (L, B) párt *egyensúlyi állapotnak* nevezzük, ha belőle indítva a rendszert a rendszer mozdulatlan marad. Másképp szólva, egyensúlynál $L_t = L_{t-1}$ és $B_t = B_{t-1}$.

1. *tétel. Egy és csak egy egyensúlyi állapot van, s ez keynesi egyensúly*:

$$L^K = \frac{a}{\delta - b}, \qquad I^K = \frac{\beta a \delta}{\delta - b} \text{ és } M^K = 0; \tag{3.7}$$

Megjegyzések: A keynesi egyensúly (3.7) képlete lényegében véve megegyezik H–I (4.3) képletével. Az egybeesés nem meglepő, mert egyensúlyban a naiv várakozás egybeesik az ésszerű várakozással: $\overline{Y}_t = Y_{t-1} = Y_t$.

Bizonyítás. Először azokkal a tartományokkal foglalkozunk, amelyekben nem lehet egyensúlyi pont. Ilyen például a K-tartománynak az a K° résztartománya, amelyben $L_t^d = 0$. Ekkor (3.2) értelmében $I_{t-1} > 0$, azaz (3.3) szerint $I_t = I_{t-1} - a < I_{t-1} \neq I_t$.

A klasszikus munkanélküliség esetén sem létezhet egyensúly, mert a klasszikus munkanélküliséget modellünkben éppen olyan előrebecslési tévedések okozzák, amelyek a foglakoztatás *növekedéséből* fakadnak. (Éppen az ésszerű várakozás feltevése zárta ki a klasszikus munkanélküliséget H–I modelljéből.)

Hasonló még a helyzet az elégtelen fogyasztással és a visszaszorított inflációval, amikoris $g > 0$ miatt B_t nő. (Ha H–I-hez hasonlóan megengednénk $g < 0$-t is, akkor létezne egyensúly R-ben is.)

A megmaradó K^+-tartozmányt ($K^+ = K \backslash K^0$) vizsgáljuk. Egyensúly esetén pozitív készletek vannak, (3.2) és (3.4) tehát a következő alakot öltik:

$$L_t = \frac{1}{\delta}(\beta + 1)bL_{t-1} - \frac{1}{\delta}I_{t-1} + \frac{\beta + 1}{\delta}a \tag{3.8}$$

és

$$I_t = \frac{\delta - b}{\delta}(\beta + 1)bL_{t-1} + \frac{b}{\delta}I_{t-1} - \frac{\sigma}{\delta}a \tag{3.9}$$

(3.7) egyszerű számolással adódik (3.8)–(3.9)-ből. A $g > 0$ feltétel annak szükséges és elégséges feltétele, hogy $0 < L^K < d$ teljesüljön.

4. Stabilitás, ciklus és káosz

Egy szabályozási rendszer vizsgálata nem áll meg az egyensúlyi pont meghatározásánál; ellenkezőleg, tulajdonképpen itt kezdődik. A szabályozásról tudjuk, hogy *működőképes* állapotból működőképesbe megy ($0 \leq L_t \leq d$; $t = 0, 1, 2, \ldots$). Nem tudjuk viszont még, hogy *stabilis-e* a rendszer. Ha a rendszer nem az egyensúlyi állapotából indul el, mit csinál a rendszer: tetszőlegesen megközelíti-e az egyensúlyt vagy nem? A választ két lépésben adjuk meg: 1. először az egyensúly közeléből induló rendszereket vizsgálunk *(lokális* stabilitás), 2. majd tetszőleges távolságból induló rendszerekre is kiterjesztjük eredményeinket *(globális stabilitás)*. A fokozatos megközelítést a rendszer nem-lineáris volta követeli meg, s *több-dimenziója* teszi bonyolulttá.[6] Az instabil pálya viszont lehet *ciklikus* és lehet *kaotikus*.

2. *tétel. A keynesi egyensúly akkor és csak akkor lokálisan stabilis, ha $g > 0$ mellett a*

$$(\beta + 1)b < \delta \tag{4.1}$$

feltétel is teljesül.

Bizonyítás. A (3.8)—(3.9) egyenletrendszer együtthatómátrixának karakterisztikus polinomja

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \frac{b}{\delta}(\beta + 2)\lambda + \frac{b}{\delta}(\beta + 1).$$

A lokális stabilitás szükséges és elégséges feltétele az, hogy a polinom mindkét gyökének abszolút értéke kisebb legyen mint 1. A másodfokú egyenlet diszkriminánsa esetünkben mindig negatív, tehát a két gyök egymás komplex konjugáltja, azaz szorzatuk a abszolút-érték négyzete. A gyökök és együtthatók összefüggése szerint tehát (4.1) valóban a lokális stabilitás szükséges és elégséges feltétele.

Megjegyzések. A K^+ tartományban a rendszer egy *elliptikus spirálison* mozog úgy, hogy két egymásutáni pontját az egyensúlyi ponttal összekötő egyenesek által bezárt szög állandó.

A bizonyításokban a fő nehézséget azonban nem annyira a szakaszosság okozza, hanem a különböző mozgástörvények hatása a különböző tartományokban. Bár azt *sejtjük*, hogy rendszerünk *globális* stabilitása következik *lokális* stabilitásából, az ekvivalenciánál jóval gyengébb eredményt tudunk csak igazolni.

3. *tétel. A keynesi egyensúly globálisan stabilis, ha a 2. tétel feltevései mellett teljesül még a következő két feltétel közül legalább az egyik:*

$$0 \leq \vartheta \leq \frac{1}{\beta + 1} \tag{4.2}$$

vagy

$$\beta \geq \frac{b}{\delta - b} \tag{4.3}$$

Megjegyzés: Ellentétben a (4.1) feltevéssel, sem a (4.2) sem a (4.3) feltevés nem szükséges, csak elégséges. A (4.2)-beli felső határra a bizonyításban van szükségünk, amikor a $K^+ \to C \to K^+$ átmeneteket vizsgáljuk. E feltétel csak

[6] H—I esetében annyira egyszerű volt a kétféle stabilitás viszonya, hogy a szerzők meg sem említették a jelzőket. Sem H—I-nél, sem a jelen modellben nem válik szét a *globális és a lokális stabilitás*. Milyen feltételek mellett igaz az ekvivalencia? SIMONOVITS (1981) olyan példát ismertet a két fogalom szétválására, amelyben a korlátok nélküli rendszer lineáris és stabilis, a korlátos rendszer azonban csak lokálisan stabilis, globálisan nem.

$\beta = 0$-nál nem megszorító, β növelésével viszont egyre szigorúbbá válik. Jellemző módon a (4.3) feltevés viszont viszonylag nagy β mellett *tetszőleges* ϑ-ra biztosítja a globális stabilitást, egyszerűen kizárva a $K^+ \to C$ átmenetet; minél kisebb b; annál kisebb β-kra teljesül (4.3). (Ebben az esetben a reálbér csökkentése csökkenti a klasszikus munkanélküliség valószínűségét, v. ö. 1. lbj.)

A *ciklikus* eset vizsgálatára rátérve figyelembe kell vennünk, hogy egy *folytonos idejű ciklikus rendszer* szabályos időközökben történő megfigyelése is csak akkor vezet *diszkrét időben is folytonos rendszerhez,* ha a periódus idő egészszámú többszöröse a megfigyelési időköznek. Hasznos lesz azonban *pszeudo ciklikusságról* beszélni, ha a szóbanforgó feltétel nem teljesül. Ekkor érvényes:

4. *tétel. A rendszer mozgása lokálisan pszeudó ciklikus, ha*

$$(\beta + 1)b = \delta. \tag{4.4}$$

Anélkül, hogy a részletekbe bocsátkoznánk, bevezetjük a *pszeudo határciklus* fogalmát olyan diszkrét rendszereknél, amelyek *határciklussal* rendelkező folytonos rendszerekből származnak. (A matematikai részletek iránt érdeklődőnek CODDINGTON és LEVINSON (1955) könyvét ajánljuk.) Ekkor a következő tételhez jutunk.

5. *tétel. Mindazoknak a rendszereknek, amelyek legalább egy korlátba beleütköznek, közös pszeudo határciklusuk van, feltéve, hogy a* (4.2) *vagy* a (4.3) *feltétel mellett teljesül még* (4.4) *is.*

A szóbanforgó pszeudo határciklus nem más, mint az az ellipszis, amelynek közös pontja van a korlátok valamelyikével.

A még fenn maradó $(\beta + 1)b > \delta$ esetben nincs szükségünk a (4.2) ill. a (4.3) feltételekre. A 2. és a 4. tételből világosan következik, hogy a rendszerünk ekkor *lokálisan instabil.* De mi történik az egyensúlytól távoli pályákkal? Kiderül, hogy e pályák nagyon furcsán viselkednek. Vegyünk például két olyan pályát, amely indulási pontja nagyon közel esik egymáshoz. Bizonyos idő múlva a két pálya messze kerül egymástól, bár mindkettő egy korlátos halmazban marad mindvégig. Később megint közel kerülnek egymáshoz, majd megint távol és ez ismétlődik — minden szabályosság nélkül. Bár *determinisztikus* rendszerrel van dolgunk, mégis úgy viselkedik, mintha *sztochasztikus* volna. Az ilyen rendszereket a matematikában *kaotikusnak* nevezik. A közgazdaságtanban még alig néhány olyan cikk született, amely káosszal foglalkozik, de minden bizonnyal számuk hamarosan meghatványozódik, akárcsak a fizikában. MAY (1976) általános cikke mellett két közgazdasági alkalmazást említünk meg: POHJOLA (1981) és MONTRUCCHIO (1982).

6. *tétel. A rendszer kaotikus ha*

$$(\beta + 1)b > \delta. \tag{4.5}$$

Bizonyítás-vázlat. Mint a 3. tételnél elmondottakból kiderül, (4.5) mellett az elliptikus spirál sugara nem csökken, hanem nő, exponenciálisan. A korlátok azonban megakadályozzák, hogy a rendszer sokáig az elliptikus spirálon maradjon. Az ütközés után a rendszer meglehetősen gyorsan halad az egyensúly irányába. Például teljes foglalkoztatásnál a készletszint minden időszakban g-vel nő, egészen addig, amíg a készletszint meg nem haladja az 5. tételben szereplő ellipszisét. Ekkor a rendszer újból egy elliptikus spirálra tér rá, majd újra korlátba ütközik. Számelméleti okokból azonban valószínűtlen bármilyen határciklus kialakulása.

5. A modellek összehasonlítása

A Bevezetésben már említettük, hogy modellünk H—I modelljének módosított változata, és távirati stílusban utaltunk is módosításainkra. A tárgyalás során pedig lábjegyzetekben térünk ki néhány apróbb eltérésre. Ebben a fejezetben részletesen ismertetjük a két modell viszonyát, azonban ezt megelőzően szólunk közös előfutárukról, LOVELL (1962) modelljéről, ill. Lovellt bíráló cikkemről, SIMONOVITS (1979)-ről.

Ez a kitérő annál is inkább helyénvaló, mert Lovellel H—I nem foglalkozik érdemben. (i) H—I állításával ellentétben Lovell modellje *nem aggregált*, hanem a dolgozat címéhez híven *sokszektoros*. (ii) Lovell modellje *nyílt*, H—I-jé *zárt:* Lovellnél a fogyasztás független a foglalkoztatástól, H—I-nél függ. (iii) Lovellnél vannak *inputkészletek* (bár Lovell nem használja a kifejezést), és „nincs foglalkoztatás"; H—I-nél nincs raktározható input, de van foglalkoztatás. (iv) H—I modelljében a munkaerő beszerzése a *folyó* termeléssel arányos, viszont Lovellnél a raktározható inputok beszerzése a *következő* időszak termelésével arányos, s ez a feltevés keresztezheti a termelési szabályt, amely azonos mindkét modellben. SIMONOVITS (1979) dolgozatomban részletesen foglalkoztam Lovell beszerzési feltevésével (lásd még: FOSTER (1963)), s a beszerzést a *következő időszak várható* termelésével tettem arányossá.

Mind Lovell, mind én háromféle várakozást vizsgáltunk: a jelen dolgozatban szereplő *naiv várakozást*, a H—I dolgozatában szereplő *ésszerű várakozást* és az ún. *statikus várakozást*.

A) *Az ésszerű várakozás* feltevése napjainkban nagyon divatossá vált különösen a monetarista közgazdászok körében. A mi modellünkben ez a feltevés a tényleges és a várt kereslet azonosságát mondja ki. Képletben:

$$\bar{\bar{Y}}_t^d = Y_t^d. \tag{5.1}$$

Mivel $\bar{\bar{Y}}_t^d$ függ L_t-től és L_t függ $\bar{\bar{Y}}_t^d$-től, a modell nem rekurzív. Szigorúan véve a modell logikáját, az értelmezhetőség megköveteli a foglalkoztatási és az eladási döntés előzetes összehangolását, félretolva a várakozás elvét.

Ha viszont megengedjük a foglalkoztatás és az eladás összehangolását, akkor az igazán ésszerű eljárás az volna, hogy egy lépésben megteremtsük az egyensúlyt. Valóban, a (2.9) termelési szabályban $(\beta + 1)\bar{\bar{Y}}_t^d$ helyett I^K-t írva az egyensúlyt egy lépésben elérhetjük — legalábbis nem túl nagy kezdeti egyensúlytalanság mellett.

Egyébként Lovell is csak elméleti *alternatívaként* vizsgálta az ésszerű várakozást (vagy ahogyan ő hívta: a tökéletes előrelátást). Érdeklődése középpontjában a termelők *tanulási folyamatát* tükröző *naiv várakozás* állt, ahol minden dőszak eladási várakozása az előző időszak tényleges eladásával azonos.

Lovell *paradoxonja* szerint az *ésszerű várakozás instabilitást okoz*, a *naiv várakozás* viszont megfelelően kicsiny készletegyütthatónál stabilitást biztosít.

Az ésszerű várakozással szemben azonban nemcsak az hozható fel, hogy *életidegen* feltevés, hanem az is, hogy több szempontból is *ésszerűtlenebb* mint a naiv várakozás.

Először is (4.4) esetén a rövidtávú keynesi egyensúly *nem értelmezhető* az ésszerű várakozás mellett. (Hasonló szingularitás lépett fel SIMONOVITS (1979)-ben az ésszerű várakozás mellett; Lovell viszont minden paraméterre értelmezni tudta az ésszerű várakozást, talán éppen a már bírált beszerzési szabálya miatt.)

Másodszor, H—I kizárta a (4.5) esetet (amikor a naiv várakozás kaotikus viselkedéshez vezet) azon a címen, hogy ebben az esetben a rövidtávú keynesi egyensúly *negatívvá* válik az ésszerű várakozás mellett. Ez az állítás *téves:* H—I (3.1)-beli törtje nemcsak a számláló és a nevező pozitivitása esetén pozitív, hanem azok egyidejű negativitása esetén is, azaz ha (4.5) teljesül és $I_{t-1} > (\beta + 1)a = \hat{I}$. Más kérdés, hogy ebben az esetben H—I rendszere meglehetősen furcsán viselkedik; a nulla foglalkoztatás nem az $\hat{I}$-nál nagyobb, hanem az $\hat{I}$-nál kisebb készletek mellett valósul meg; pozitív foglalkoztatás pedig nem csökkenő, hanem növekvő függvénye a készleteknek. A (4.1) feltevést a H—I modellben tehát nem a pozitivitás, hanem monotonitási követelmények indokolják, ha indokolják. Végül megemlítjük hogy $g > 0$ mellett a kizárt esetben a hosszútávú keynesi egyensúly *instabil* az ésszerű várakozások esetén.

Harmadik hátrányos következménye az ésszerű várakozásnak az, hogy olyankor is instabilitást okoz, amikor a naiv várakozás stabilizál. Valóban, H—I stabiitási feltétele

$$(2\beta + 1)b < \delta \tag{5.2}$$

szigorúbb mint a mi (4.1) feltételünk. A H—I modellben tehát valóban érvényes Lovell paradoxona; *Pontatlanabb előrelátás jobb szabályozást biztosít.*

Megjegyzés. Figyelmeztetjük az Olvasót, hogy 1979-es cikkemben egy lényegében azonos modellben éppen az ellenkező állítást bizonyítottam: *Pontosabb előrelátás jobb szabályozást biztosít.* Kiábrándító, hogy olyan mellékes körülmények, mint a Lovell és H—I modellje közti eltérések, minőségileg ellentétes következtetéshez vezetnek. Nem szabad túl komolyan venni az így adódó következtetéseket!

Végül idézzük POHJOLA (1981) megjegyzését a káosz és a tökéletes várakozás ellentétéről, amelyet ő egy más modell elemzése kapcsán írt le: „A káosznak érdekes következménye van az ésszerű várakozás irodalmára nézve. Ha a gazdaság kaotikusan viselkedik, akkor a gazdaság szereplői képtelenek determinisztikusan előrejelezni a gazdaság viselkedését, még ha tökéletesen ismerik is a gazdaság működését."

B) Mint minden nem-walrasi modellben, H—I modelljében is elválik egymástól a kereslet és a kínálat. Túlkínálat esetén *készlet* képződik, túlkeresletnél viszont *kényszermegtakarítás*. H—I úttörő érdeme a készletdinamika ábrázolása a disequilibrium-elmélet keretében, ugyanakkor *figyelmen kívül hagyták* a kényszermegtakarítások dinamikáját. (Mintha hallgatólagosan feltették volna, hogy a külvilág felszívja e kényszermegtakarításokat.) Dolgozatomban a mérleg mindkét oldala egyenrangú szerepet játszik, általánosítva H—I modelljét.

C) Szeretnék szólni még a modell *érvényességi köréről*. A disequilibrium-elmélet hagyományait követve H—I egységes keretben próbálta leírni a stabil keynesi és a stabil visszaszorított inflációs rendszer működését. A különbség g előjelétől függött: a keynesi rendszer $g > 0$ esetén lehetett stabil, a visszaszorított infláció pedig az $g < 0$ esetén.

Véleményem szerint H—I modellje csak a $g > 0$ esetben értelmezhető kifogástalanul. Most kifejtendő gondolatunk KORNAI (1980) 21. 10. alfejezetének azt az érvelését konkretizálja a H—I és a jelen modellre, hogy a *visszaszorított infláció* inkább *átmeneti* állapotként értelmezhető, amikor a gazdaság szereplői még nem szoktak hozzá a *tartós hiányhoz*. A tartós hiány elmélete nem redukálható a keynesi elmélet tükörképére.

Hajlandó vagyok elfogadni, hogy amennyiben a gazdaság csak *átmenetileg* hagyja el a keynesi tartományt, feltehető, hogy a keynesi típusú viselkedési szabály a nem keynesi típusú állapotoknál is érvényben marad. Nem fogadom viszont el azt a feltevést, hogy a termelő akkor is pozitív zárókészletre törekszik, amikor *tartós hiány* áll fenn. Mind elméleti mind tapasztalati alapon ilyenkor „negatív'' készletre törekszik a termelő: *sorbanállás* (KORNAI és WEIBULL (1978)), ill. *rendelésre való termelés* (KORNAI és SIMONOVITS (1975)) nyer tért még akkor is, ha ez technológiailag indokolatlan: több éves várakozás autóra, lakásra stb. akkor, amikor tömegtermékről van szó (v.ö. KORNAI (1980)).

Jó lenne egy olyan modellt is kidolgozni, amely a tartós hiányt írná le olyan egyszerűen, ahogy H—I nyomán a jelen dolgozat a stabil keynesi rendszert írta le.

D) *Egy másik megközelítés.* A folyóirat olvasói számára bizonyára nem ismeretlen az az irányzat, melynek első cikke, KORNAI és MARTOS (1971) éppen e folyóiratban jelent meg. Ezt több módosító dolgozat és a készletjelzéses szabályozás gondolatkörén túlmenő cikk követte, pl. KORNAI és SIMONOVITS (1975), KORNAI és WEIBULL (1978), továbbá három könyv: KORNAI (1980) és (1982), KORNAI és MARTOS (szerk.) (1981). E megközelítés *szabályozáselméleti* alapokon nyugszik, szemléletmódja *dinamikus*, és kitüntetett szerepet játszik benne a *készletjelzéses szabályozás*.

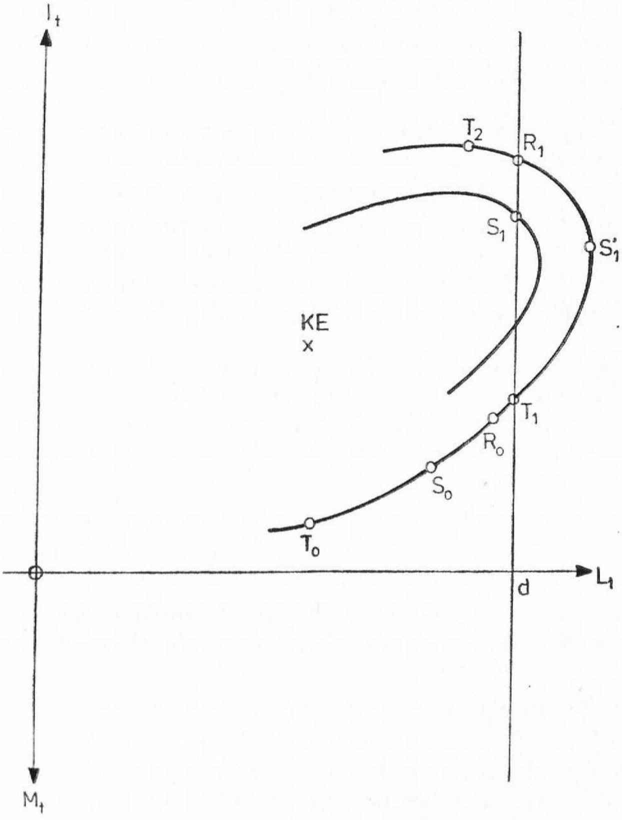
Mint a Bevezetésben említettük, a disequilibrium-elméletre általában nem jellemző ez a hozzáállás. H—I dolgozatát úgy is tekinthetjük, mint a két megközelítést összekapcsoló út egyik első szakaszát — természetesen a disequilibrium-elmélet oldaláról. (Felfogásunkban a disequilibrium-elmélet megkülönböztető jegye a rövidebb oldal elve, amely H—I dolgozatában is jelen van.) Időszerűnek látszik további útszakaszok megépítése, természetesen mindkét oldalról.

6. Függelék

Bizonyítás. A keynesi-egyensúly globális stabilitása

Több-változós nem-lineáris rendszerek globális stabilitását általában *Ljapunov-függvények* segítségével szokták vizsgálni. Esetünk annyiban szokatlan, hogy rendszerünk a tartomány-határoknál nem-differenciálható függvények szerint változik. A szabványos megoldás az lenne, hogy meghatároznánk a lineáris K^+ szabály kvadratikus Ljapunov-függvényét, amelyre $x_t'Vx_t <$

$< x'_{t-1}Vx_{t-1}$, $[x_t = (L_t - L^K, I_t - I^K) \neq 0]$ teljesül a K^+-tartományon. Hosszadalmas számításokkal bizonyára igazolhatnánk egyenlőtlenségünket a K^+-tartományon kívül is.



1. ábra

Ehelyett inkább geometriai megoldásokkal próbálunk boldogulni és csak végső esetben folyamodunk számoláshoz. Lényegében három váltást kell elemeznünk: a $K^+ \to U$ átmenetet, a $K^+ \to K^0$ átmenetet és a $K^+ \to C$ átmenetet, nem beszélve még a visszamenetekről.

A $K^+ \to U$ átmenet

Tegyük föl, hogy a rendszer beleütközik a teljes foglalkoztatásba. Tudjuk, hogy ha a munkaerő kínálata teljesen rugalmas lenne, akkor a rendszer folytatná útját a K^+-szabály szerint. Mivel a pálya elliptikus spirálon elhelyezkedő diszkrét pontokból áll, elképzelhető, hogy bár a spirál metszi az $L_t = d$ egyenest, méghozzá kétszer: T_1-ben és R_1-ben, az elliptikus íven mégsincs pont, azaz nincs $K^+ \to U$ átmenet. Esetünkben azonban van átmenet, tehát az S_0 pont az S'_1 pont helyett — amely a K^+-szabály szerint íven van — a $\overline{T_1R_1}$ szakaszon fekvő S_1 pontba kerül. Azt szeretnénk belátni, hogy az S_1 pont egy *beljebb lévő* elliptikus íven fekszik mint S'_1.

Tegyük először föl, hogy T_1-nek a K^+-képe (T_2) ismét a K^+-tartományban fekszik. Legyen T_0 az a pont, amelyből a rendszer a T_1 pontba megy át. Végül legyen R_0 az a pont, amelyből a rendszer az R_1 pontba megy át. Feltevéseink szerint e pontok egy elliptikus spirálison helyezkednek el a következő sorrendben: T_0, S_0, R_0, T_1, S_1', R_1, T_2. Nyilvánvalóan a $\widehat{T_0R_0}$ ív U-képe a $\overline{T_1R_1}$ szakasz lesz, mely tartalmazza S_0-nek az U-képét, S_1-et. Mivel elliptikus ívünk *konvex*, S_1 tényleg beljebb van mint T_1 és R_1, ill. ami lényeges, S_0.

Most pedig térjünk rá annak az esetnek a vizsgálatára, amikor T_2 nem a K^+-tartományban fekszik, hanem az U-tartományban. Természetesen ekkor az R_0 pont is ott fekszik, következésképpen a teljes $\widehat{T_0T_1}$ ív U-képe a $\overline{\tilde{T}_1R_1}$ szakaszon található. Tegyük föl, hogy e szakaszon helyezkedik el az S_1, S_2, . . ., S_{k-1} állapot, ahol az egymásutáni állapotok készlete g-vel nő. Tegyük föl, hogy az S_{k-1}-ből induló elliptikus ív már olyan rövid, hogy S_{k-1} rajta fekvő K^+-képe ismét a K^+-tartományban fekszik, tehát $S_k = S_k'$. Végül is S_k beljebb van mint S_0.

Mivel az elliptikus spirál távolsága központjától exponenciálisan csökken, a $K^+ \to U \to K^+$ átmenet csak véges sokszor fordulhat elő. Sőt, az induló állapottól független korlát adható, amelynél nagyobb sorszámú időszakban a rendszer végig a K^+-tartományban marad, s ott rendben konvergál a keynesi-egyensúlyhoz.

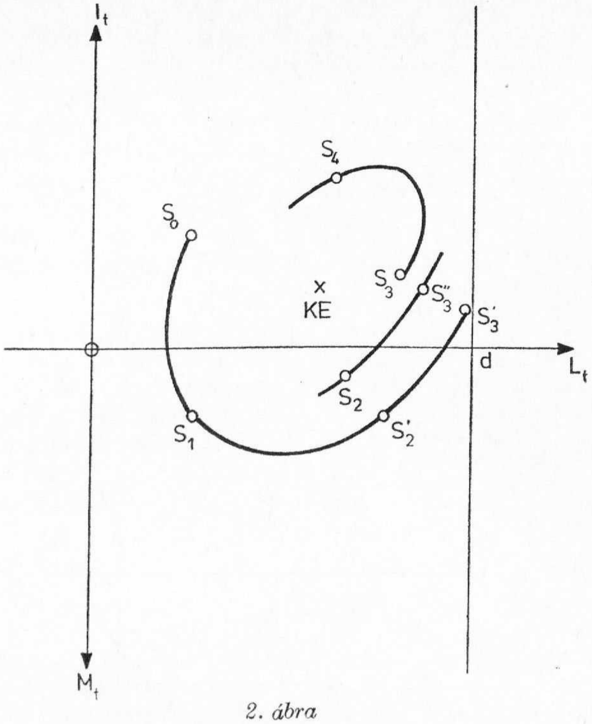
A $K^+ \to K^0 \to K^+$ eset teljesen hasonló a most vizsgált esethez.

A $K^+ \to C$ átmenet

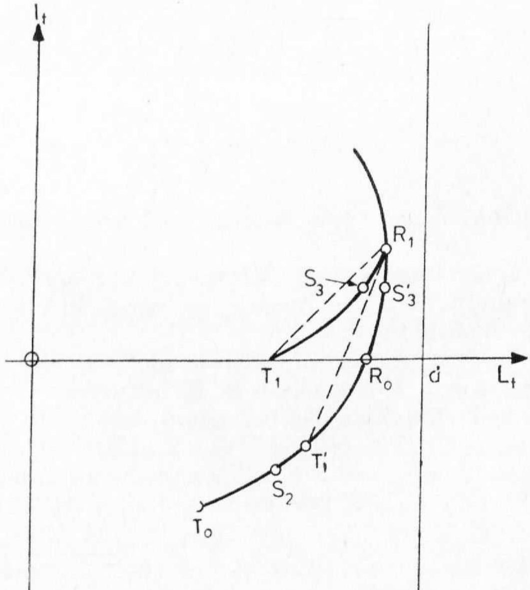
Ennek az esetnek a vizsgálata már némi számolást is igényel. Először belátjuk, hogy a $K^+ \to C$ átmenet akkor és csak akkor lehetséges, ha (4.3) *nem* teljesül.

Ez az egyetlen pontja a bizonyításnak, ahol szükségünk lesz azoknak a tartományoknak a részleges meghatározására, *amelyekből* a rendszer a K^+-, ill. a C-tartományba megy át. H—I jelöléséhez hasonlóan $\bar{\bar{I}}(L_{t-1})$-gyel jelöljük azt a készletet, amelynél kisebb készlettel indulva a t-edik időszakban hiány keletkezik, s amelynél nagyobb készlettel indulva maradnak készletek — feltéve, hogy munkanélküliség lesz a t-edik időszakban. $\bar{\bar{I}}(L_{t-1})$ nyilvánvalóan a (3.10) egyenlet $I_t = 0$ specifikációjából adódik: $\bar{\bar{I}}(L_{t-1}) = (b - \delta)(\beta + 1) \times \times L_{t-1} + \dfrac{\sigma}{b} a$, feltéve, hogy pozitív. Mivel $g > 0$, $\delta < b$, tehát $I(\bar{\bar{L}}_{t-1})$ csökkenő függvény. Azaz $\bar{\bar{I}}(L_{t-1})$ akkor és csak akkor lehet pozitív, ha $\bar{\bar{I}}(0) > 0$, azaz ha $\sigma > 0$.

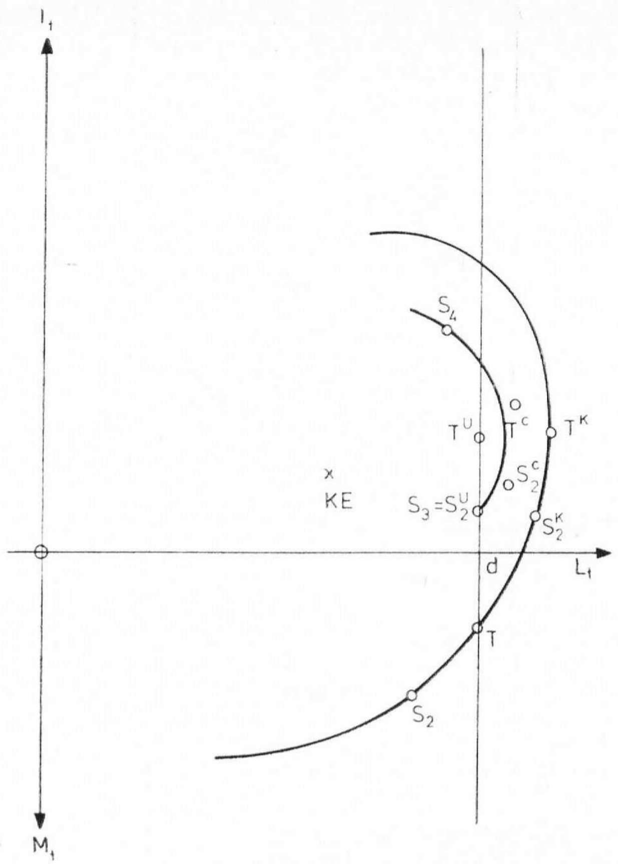
Szükséges viszont még az is, hogy alkalmas $L_{t-1} \geq 0$ mellett tényleg munkanélküliség legyen a t-edik időszakban. $\bar{I}(L_{t-1})$-gyel jelölve azt a készletet, amely választóvonal a munkanélküliség és a teljes foglalkoztatás között, a (3.8)-ban szereplő L_t-nek d-vel kell egyenlőnek lennie $I_{t-1} = \bar{I}(L_{t-1})$-nél. Innen $\bar{I}(L_{t-1}) = (\beta + 1)(a + bL_{t-1}) - \delta d$. A klasszikus munkanélküliség akkor és csak akkor jöhet létre keynesi munkanélküliségből, ha $\bar{I}(L_{t-1})_+ < \bar{\bar{I}}(L_{t-1})$ teljesül valamilyen L_{t-1}-re. Mivel $\bar{I}(L_{t-1})$ növekvő függvény, elegendő $L_{t-1} = 0$ esetén mérlegelni az egyenlőtlenséget, mely ekkor valóban (4.3) tagadásához vezet.



2. ábra



3. ábra



4. ábra

Végül megemlítjük, hogy (4.3) tagadásából következik $\sigma > 0$, feltéve, hogy $g > 0$.

Rátérünk az átmenet vizsgálatára. Megemlítjük, hogy $\beta = 0$ és $\vartheta = 1$ mellett a rendszer mozgástörvénye lineáris az egész $K^+ + C$ tartományban. Ekkor felesleges a további vizsgálat.

A 3. tétel (4.2) feltevését viszont éppen úgy választottuk meg, hogy a C-pálya bizonyíthatóan a K-ellipszisen belül haladjon.

Az egyszerűség kedvéért tekintsük a 2. ábrán látható helyzetet. A 0. és a 3. időszakban a rendszer K^+-állapotú, az 1. és a 2. időszakban viszont C-állapotú. Az S_1' és S_2' virtuális állapot az S_0S_1 elliptikus ív folytatásán található, míg az S_3'' virtuális állapot az S_2 tényleges állapotból keletkező virtuális állapot.

(3.2)-ből és (3.4)-ből leolvasható, hogy $L_{t-1} < L_t \leq L_t'$ és $M_t \leq M_t'$ teljesül, sőt, további számolással az is igazolható, hogy az $\overline{S_1S_2}$ szakasz előjeles iránytényezője kisebb mint az $\overline{S_1S_2'}$-é, s ugyanez a helyzet az $\overline{S_2S_3}$ és $\overline{S_2S_3'}$ szakaszpárral.

Egyszerű geometriai okoskodással levezethető tehát, hogy a C-pálya a K^+-pályán belül húzódik, legalábbis a hiány-térfélen.

Az egyensúly vizsgálatánál már említettük, hogy a C-tartományt korlátos időn belül elhagyja a rendszer. Két kiútja van: vagy a K^+-tartományba megy vissza vagy a U + C-tartományba.

Tekintsük először a *$C \rightarrow K^+$ visszatérést*. Ha $\vartheta = 0$, akkor nincs nehézség: $S_3 = S_3''$. Geometriai okoskodással azonban általánosan belátható, hogy a (4.2) feltevés mellett a rendszer továbbra is az elliptikus íven belül marad.

Legyen T_0 az elliptikus ívnek az a pontja, amelyet a C-törvény a $B = 0$ egyeneshez tartozó T_1 pontba visz, és amelyet a K^+-törvény a T_1' pontba vinne. Legyen R_0 az elliptikus ív és a $B = 0$ egyenes metszéspontja és legyen R_1 az a pont, melybe, mind a C- mind a K-törvény az R_0 pontot átvinné. Ekkor az S_2 pont a $\widehat{T_0R_0}$ íven található, S_3' a $\widehat{T_1'R_1}$ íven és S_3 a $\widehat{T_1R_1}$ íven. Mivel mind a K^+, mind a C-transzformáció *lineáris*, az elliptikus ívek elliptikus ívekbe mennek át, a szakaszok pedig szakaszokba. Belátható, hogy S_3 a $T_1R_1R_0$ háromszögben fekszik, tehát az eredeti, S_2-höz tartozó elliptikus íven belül.

A $C \rightarrow U + R$ átmenet viszont a $C \rightarrow K^+$ és a $K^+ \rightarrow U$ átmenet kombinációja. A 4. ábrán ennek megfelelően az S_2 pont K^+, C- és U-transzformáltjait rendre, S_2^K, S_2^C és S_2^U szimbolummal jelöltük.

(Beérkezett: 1982. január 15-én)

IRODALOM

BARRO, R. J. és GROSSMAN, H. I. (1971): „A General Disequilibrium Model of Income and Employment", *American Economic Review*, 61. évf. 82—93. o.

BEMASSY, J. P. (1974): „Disequilibrium-elmélet", *Szigma*, 7. évf. 4. sz. 241—269. o.

BENASSY, J. P. (1982): *The Economics of Market Disequilibrium*, megjelenik New York, Academic Press.

DEHEZ, P. és GABSZEWICZ, J. J. (1977): „Savings Behaviour and Disequilibrium Analysis", *Colloques Internationaux au C.N.R.S.*

FOSTER, E. (1963): „Sales Forecast and the Inventory Cycle", *Econometrica*, 31. évf. 400—421. o.

GREEN J. és LAFFONT, J. J. (1981): Disequilibrium Dynamics with Inventories and Anticipatory Price-Setting *European Economic Review*, 16. évf. 199—221. o.

HONKAPOHJA, S. és ITO, T. (1980): Inventory Dynamics in a Simple Macroeconomic Model", *Scandinavian Journal of Economics*, 82. évf. 184—198. o.

KORNAI, J. (1980): *A hiány*, Budapest, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.

KORNAI J. (1982): *Növekedés, hiány és hatékonyság*, Budapest, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.

KORNAI J. és MARTOS B. (szerk.) (1981): *Szabályozás árjelzések nélkül*, Budapest, Akadémiai Könyvkiadó.

KORNAI, J. és MARTOS, B. (1971): „Gazdasági rendszer vegetatív működése", *Szigma* 4. évf. 34—50. o.

KORNAI, J. és SIMONOVITS, A. (1975): „Rendelésjelzésen alapuló szabályozás egy Neumann gazdaságban", *Szigma*, 8. évf. 81—99. o.

KORNAI, J. és WEIBULL, J. (1978):A piac normál állapota hiánygazdaságokban: egy sorbanállási modell", *Szigma*, 11. évf. 1—32. o.

LOVELL, M. (1962): „Buffer Stocks, Sales Expectations, and Stability: A Multi-Sector Analysis of the Inventory Cycle", *Econometrica*, 30. évf. 267—296. o.

MALINVAUD, E. (1977): *The Theory of Unemployment Reconsidered*, Basil Blackwell Publisher.

MALINVAUD, E. (1980): *Profitability and Unemployment*, Cambridge University Press.

MUELLBAUER, J. és PORTES, R. (1978): „Macroeconomic Models with Quantity Rationing", *Economic Journal* 83. évf. 788—821. o.

SIMONOVITS A. (1979): „Normák, várakozások és stabilitás egy lineáris dinamikus modellben", és „Mégegyszer a várakozásokról", *Szigma*, 12. évf. 31—56. és 245—248. o.

SIMONOVITS A. (1981): „Korlátos szabályozás és destabilizálás" Kornai és Martos (1981) szerk. 255—289. o.

BUFFER STOCKS AND NAIVE EXPECTATIONS IN A NON-WALRASIAN DYNAMIC MACROMODEL: STABILITY, CYCLICITY AND CHAOS

In their pioneering work Honkapohja and Ito (1980) constructed a non-Walrasian macromodel with inventory dynamics. Some of their assumptions are modified in this paper, e.g. the expected demand for goods is defined by previous rather than actual demand. The modified model yields results which are both similar and dissimilar to those of Honkapohja and Ito. For example, the Keynesian unemployment equilibrium remains invariant but the corresponding stability condition becomes milder. The chaotic behavior of the unstable systems is also analyzed.

БУФЕРНЫЕ ЗАПАСЫ И НАИВНОЕ ОЖИДАНИЕ В ДИНАМИЧЕСКОЙ НЕРАВНОВЕСНОЙ МОДЕЛИ: УСТОЙЧИВОСТЬ, ЦИКЛИЧНОСТЬ И ХАОС

Хонкапохя и Ито в своей пионерской работе (1980) составили макромодель, принципиально отличаюшуюся от модели Валраса, в которой динашика запасов также получила место. В статье модифицируется ряд их предсположений: так, например, *ожидаемый спрос товаров* отождествляется с *фактическим спросом предыдущего*, а не *текущего* периода.

Модифицированная модель дает в частности сходные, а в частности несходныс результаты по сравнению с моделью Хонкапохя и Ито. Так например, кейнсианское равновесие безработицы остается неизменным, однако соответствующее условие устойчивости является менее строгим.

Новым результатом исследования является анализ *хаотичного* поведения неустойчивой системы.

Dániel Zsuzsa

Modell a lakásváltozási szándékok és lehetőségek elemzésére

I. Bevezetés*

A lakáspolitika kialakítása bonyolult és szerteágazó feladat. A „lakáskérdésnek" van termelési és elosztási vonatkozása, szorosan vett gazdasági-gazdaságpolitikai és szélesen értelmezett társadalmi-társadalompolitikai vetülete. A bonyolultság egyik magyarázata, hogy a lakás mind a termelés, mind pedig a fogyasztás oldaláról nézve speciális tulajdonságokkal rendelkező termék. *Termelését* az jellemzi, hogy előállításának fajlagos költsége igen magas és hogy meglehetősen hosszú életű tőkejószág, amely földrajzilag kötött. A növekmény, még folyamatos új építés esetén is, a teljes lakásállománynak csupán kis részét teszi ki. Egy viszonylag hosszabb időszakot tekintve is, a régi, vagyis az induló lakásállomány (a stock) — annak nagysága, összetétele és minősége — határozza meg elsősorban a lakáskínálatot, miközben a nettó növekménynek (a flow-nak) csak marginális szerepe lehet a lakásellátásban. *Fogyasztását* az jellemzi, hogy alapvető, kiemelkedő fontosságú fogyasztási jószág. Birtoklása, vagy hiánya, minősége és ára, valamint a hozzájutás lehetősége meghatározó jelentőségű a háztartások életszínvonala, életkörülményei, társadalmi helyzete és közérzete szempontjából.

A feladat bonyolultsága nemcsak indokolja, de szükségessé is teszi, hogy *ne egyetlen modell-típussal*, egyetlen matematikai formalizmussal írjuk le a gazdasági-társadalmi összefüggéseket. Az ismertetendő modell sem törekszik a probléma általános vizsgálatára, hanem egyetlen kérdéscsoportra koncentrál. Arra keres választ, hogy a lakásállomány jelenlegi szerkezete — figyelembe véve a jelenlegi vagy közeljövőben várható állományváltozásokat — miként felel meg ***rövidtávon*** a lakossági igények szerkezetének ***hosszútávon*** pedig, — a tényleges vagy a tervezett változások eredményeként — miféle állományszerkezettel lehet, illetve kell számolnunk.

* A jelen cikk alapján képező „Dinamikus modell a lakásállomány szerkezeti változásának elemzésére" c tanulmány [10] része annak a többéves kutatásnak, melynek körvonalait „A lakáselosztás elemzése és modellezése" c. korábbi munkám [8] vázolta fel.
A dinamikus lakásmodell kidolgozása során sok segítséget kaptam *Dancs Istvántól* és *László Lajostól*. Dancs István tanácsokkal segített a modell megszerkesztésében matematikai tulajdonságainak tisztázásában, az illesztési technikák kiválasztásában. László Lajos végezte el az illesztések és előrebecslések számítógépi realizálását és részt vett a matematikai problémák vizsgálatában. Köszönetet mondok mindkettőjüknek az értékes közreműködésért.

2. Előzmény: egy demográfiai stock-flow modell

A hatvanas évek végén *R. Stone* [14], [15], [16] kidolgozott egy társadalmi-demográfiai adatokra épülő, input-output keretben ábrázolt stock-flow modell-rendszert. A modell keretei meglehetősen általánosak, meghatározott feltevések mellett alkalmasak az emberek magatartását leíró társadalmi folyamatok elemzésére, prognosztizálására. A modell megkülönbözteti a „külvilágot", ahonnan a rendszerbe belépő egyedek jönnek és ahová távoznak (születés, bevándorlás, halál, kivándorlás) és a „belvilágot", vagyis a „rendszert", ahol az események lezajlanak.

Az általános keretet — a további tárgyalás megkönnyítése céljából — egy témánk körébe tartozó, de még a Stone modell szellemét tükröző, részben konstruált példán keresztül mutatjuk be.

2.1. táblázat

A háztartások áramlásának stock-flow mátrixa 1970—1973 között

Me: Ezer db

1970. jan. 1. / 1973. jani. 1.	Új belépés	Egy- (szobás lakással rendelkező háztartás)	Két- (szobás lakással rendelkező háztartás)	Három- (szobás lakással rendelkező háztartás)	Záróállomány (1973)
Megszűnés	—	288	0	0	—
Egy- szobás lakással	100	809	281	74	1264
Két- rendelkező háztartás	169	241	1050	70	1530
Három-	204	114	30	193	541
Nyitóállomány (1970)	—	1452	1361	337	—

A *2.1. táblázat* a magyar háztartások számának és lakásismérv szerinti helyzetének változását írja le 1970 január 1. és az 1973 január 1. között. A háztartások többféle lakásismérv szerint jellemezhetők: így a lakástulajdon jellege (bér vagy magán), a lakás mérete, minősége, területi elhelyezkedése, stb. alapján. Mi most csak egyetlen ismérv, a lakás szobaszáma szerint aggregáljuk a háztartásokat és leírjuk, mi történt velük a vizsgált időszakban.

A *nyitóállomány* (stock), vagyis az 1970 január 1-én megszámlált, egy-, két-, illetve háromszobás lakásban lakó háztartások száma jelzi az *induló állapotot*. 1970 január 1. és 1973 január 1. között többféle áramlást (flow) figyelhetünk meg. Háztartások *megszűnnek* (outflow) és új háztartások *lépnek be*, válnak lakástulajdonossá (inflow). A megszűnt háztartások természetesen még szerepelnek a nyitóállományban, de nem találhatók a záróállományban, míg az új belépők *csakis* a záróállományban jelennek meg. Most nézzük meg mi történt azokkal a háztartásokkal, amelyek az időszak folyamán mindvégig jelen vannak, vagyis a nyitó és záróállományban egyaránt megtalálhatók. Egyesek megmaradtak eredeti lakásaikban, vagyis ismérveik nem változtak (ezek a háztartások jelennek meg a mátrix főátlójában), míg mások az induló állapothoz képest kisebb vagy nagyobb lakásba költöztek (interflow). A fenti áramlások az időszak végén összegezhetők. Sokirányú összegük a *záró-állapotot*, az egy-, két-, háromszobás lakással rendelkező háztartások *záróállományá* adja meg.

A belső áramlások (költözések) koefficiens mátrix formájában felírhatók. Az *átmeneti mátrix* koefficiensei (melyet úgy kapunk hogy a belső költözéseket leíró mátrix elemeit oszloponkén telosztjuk az induló állomány vektor megfelelő elemével) megmondják, hogy például az időszak elején egyszobás lakással rendelkező háztartások 55,7 százaléka maradt eredeti lakásában, 16,6 százaléka kétszobás és 7,9 százaléka háromszobás lakásba költözött.

Az átmeneti mátrix másként is értelmezhető. Feltételezve, hogy egy adott időpontban, azaz állapotban minden egyén számára azonos a mozgás lehetősége, az átmeneti koefficiensek átmeneti *valószínűségként* is felfoghatók. Ez úgy interpretálható, hogy az induló állapotban egyszobás lakásban lakó háztartások 55,7 százalékos valószínűségel maradnak eredeti lakásaikban, 16,6 százalékos valószínűséggel költöznek kétszobásba és így tovább.

Az átmeneti mátrixok e kétféle értelmezése, meghatározott feltevések mellett módot ad kétféle, egymással rokon matematikai apparátus alkalmazására. Stone bebizonyította,[1] hogy a stock-flow modell átmeneti mátrixával elemzett folyamatok felfoghatók egy elnyelő *Markov-láncként* (absorbing Markov chain), amely szoros rokonságot mutat a nyilt *input-output* modellekkel. A modell ilyen értelmezése lehetőséget kínál hosszútávú előrebecslések, elemzések elvégzésére.

3. A Stone modell és a gazdasági rendszer jellege

A Stone modell hazai alkalmazási lehetőségeit vizsgálva eleinte úgy tűnt, hogy az alapmodell szinte eredeti formájában alkalmas lesz a lakáskereslet hosszú távú elemzésére. Csak később, a modell „gondolatmenetét" jobban megismerve tudatosodott bennünk, hogy eltérő tulajdonságokkal rendelkező gazdasági rendszereket modellezünk, elkerülhetetlenül különböznünk kell tehát a gazdaságok specifikus tulajdonságait jelző modell-feltevéseknek is. A probléma átgondolásához segítséget nyújtottak *Kornai Jánosnak* a hiány-jelenséggel, a keresletkorlátos és erőforráskorlátos gazdasági rendszerek szembeállításával és összehasonlításával foglalkozó elméleti munkái [12, 13].

A gondolat megvilágítása érdekében megkülönböztetést teszünk a Stone modell feltevéseiben. Azokat a feltevéseket, amelyek a Stone modellben megfogalmazást nyertek, nevezzük a modell *explicit* feltevéseinek. Ezek többnyire matematikai természetű feltevések olyan közgazdasági tartalommal, amelyek minden gazdaságban érvényesnek tekinthetők. Mint a modelleknek általában, Stone modelljének is vannak *implicit* feltevései is. E feltevések kimondására nincsen szükség, hiszen egy jó modell automatikusan kifejezi az általa leírandó gazdasági folyamatok jellegét.

Milyen implicit feltevések jellemzik a Stone modellt, milyen típusú gazdaságot feltételez a szerző?

Piaci gazdaságot, amelynek szerves része a szabad lakáspiac. A piacot — az adott ár- és jövedelemviszonyok mellett — a kereslet-kínálat törvényei szabályozzák. A lakáspiacot az jellemzi, hogy mindig vannak szabad lakások és van elegendő lakásépítési kapacitás.[2]

[1] A bizonyítást lásd *Stone* [14], [15] munkáiban.

[2] Itt nem arról beszélünk, hogy milyen a valóságos angol lakáspiac, és hogyan működik. (Pl. igaz-e, hogy mindenki, aki lakáshoz akar jutni, *azonnal* hozzájut-e az általa igényelt lakáshoz.) A valóság és egy modell absztrakciói között mindig van különbség. A kérdés az, hogy a modell *lényegét tekintve* jól írja-e le a vizsgált jelenségeket, vagy sem. Úgy véljük a Stone modell az általa vizsgált piaci gazdaságot jó megközelítéssel jellemzi, feltevései az adott körülmények között lényegében helytállóak.

A lakáskeresletet — annak mennyiségét és összetételét — a háztartások száma és nagysága (demográfiai tényezők), a háztartások jövedelmi szintje, ízlése és igénye határozza meg. A kínálat késleltetéssel és kisebb zökkenőkkel, de alkalmazkodik a kereslethez: aki lakást akar venni, vagy lakást kíván változtatni, előbb-utóbb megtalálja a kívánt tulajdonságokkal rendelkező szabad lakást. Mivel a lakások iránti fizetőképes kereslet mindig kielégül, a háztartások megfigyelt viselkedése, a megvalósult költözések a tényleges keresletet, a szükségletek tényleges változását fejezik ki.

A Stone modellben a lakás *nem* jelenik meg. *A modell kereteit, a demográfiai változások és a háztartások által támasztott lakáskereslet szabja meg, a lakásokra csupán közvetve, a rendszerben megfigyelt háztartások lakásismérvei alapján következtethetünk.* A szerző feltételezi, hogy az újonnan létesült háztartások belépésük pillanatában megtalálják a számukra megfelelő szabad lakást; a lakáscseréket semmi sem korlátozza, vagyis a költözések az áraktól és a jövedelmektől függő igények szerint valósulnak meg, miközben a megszűnt háztartások felszabaduló lakásai a kínálatot bővítik. *A lakáskínálat közvetlen vizsgálata kívül esik e modell keretein.*

A fent leírt implicit feltevésekre épül az a Markov-folyamatként megfogalmazott prognózis, amely a *tényidőszakbeli demográfiai változások és megvalósult költözések alapján következtet a lakások iránti igények szerkezetének hosszútávú alakulására.*

Jellemezhető-e hasonlóképpen a magyar „lakáspiac", alkalmas-e a fenti gondolatmenet a hazai lakásigények változásának elemzésére, előrejelzésére? Nyilvánvalóan nem.

A magyar lakásviszonyokat krónikus lakáshiány és építési kapacitáshiány jellemzi. A háztartások mennyiségi és minőségi kereslete számottevően meghaladja a mennyiségi és minőségi lakáskínálatot. Ez érvényes a múltra és feltételezhetően érvényes lesz még a jövőben is.

Leegyszerűsítve a magyar lakásellátás jellemzését, azt mondhatjuk, hogy párhuzamosan két „piac" működik: a *magántulajdonú* és a *bérlakások* piaca.

A magántulajdonú lakások piacán többé-kevésbé az ár és a jövedelemviszonyok a meghatározóak. A piacot jellemző magas lakásárak és fenntartási költségek, valamint az építéshez nyújtott viszonylag alacsony összegű állami hitelek a magánlakás iránti keresletet a jövedelem oldaláról effektíve korlátozzák. Mégis, az építési-kapacitás és építőanyag hiány még ilyen körülmények között is fékezi a magánlakásépítési tevékenységet, a reálkínálat még a jövedelem oldalról megengedett mennyiségi és minőségi keresletet sem képes mindig kielégíteni.

A *bérlakások* esetében a hiány mértéke még jelentősebb. A kereslet az alacsony lakáshoz jutási díj és a jóval az önköltség szintje alatt megállapított lakbérek mellett jövedelem oldalról szinte nem is korlátozott, így jóformán kielégíthetetlennek tűnik. Ezzel szemben a kínálat mind az állami költségvetés oldaláról, mind pedig az építési kapacitás és az építőanyag hiány által erősen korlátozott.

A mennyiségi lakáskínálat tehát tartósan és mindkét piacon a kereslet szintje alatt marad, struktúrája pedig eltér az igényelt struktúrától. A tartós lakáshiány, valamint a pénzügyi és jogi szabályozás jelenlegi rendszere nem csak az önálló lakással nem rendelkező családok lakáshoz jutását, de a lakásváltoztatási lehetőségeket is szűk korlátok közé szorítja. Azok, akik már rendelkeznek lakással, de azt valamilyen okból (méret, minőségi vagy területi igényváltozás miatt) el kívánják cserélni, csak korlátozott mértékben tudják megvalósítani szándékaikat.

Mindezek alapján megállapíthatjuk, hogy a lakáskínálat (a lakásállomány mennyisége és összetétele) olyan külső korlát a magyar háztartás számára, amelyhez kénytelen alkalmazkodni. Az alkalmazkodás családok kényszerű együttélésében, a nem kielégítő lakáskörülmények tartós elviselésében jut kifejezésre. *A lakáshoz jutás vagy változtatás tényleges folyamatát nem a háztartások költözési szándéka, kereslete, hanem a lakáskínálat, mégpedig elsősorban az induló állomány mennyisége és minősége határozza meg.*

Ha pedig ezek után azt vizsgáljuk, hogy a tényidőszakban megfigyelhető valóságos mozgások (új lakásba költözések, lakáscserék) a mi körülményeink között tartalmilag hogyan is értelmezhetők, észre kell vennünk, hogy ezek a *megfigyelések nem a szándékokat, a kezdeti keresletet, hanem annak csak egy részét, a kínálat által kielégített, vagyis a megvalósult keresletet írják le. A mi feltételeink között a szándék és a megvalósulás sem mennyiségét sem pedig összetételét tekintve nem esik egybe, miközben Stone a kettő között teljes azonosságot tételezhet fel.*

Ha tehát az ismertetett stock-flow modellt a hazai körülmények között alkalmazzuk, nem fogadhatjuk el a Stone-i gondolatrendszer implicit feltevéseit.

Az elmondottak alapján — úgy véljük — meggyőzőnek tűnik az a következtetés, hogy az eredeti modell módosításra szorul. Modellünknek (i) a hazai viszonyokat tükröző explicit és implicit közgazdasági feltevés-rendszerre kell épülnie; (ii) a matematikai apparátusnak összhangban kell lennie a közgazdasági feltevésekkel; (iii) a modell követelményeinek megfelelő — a Stone modelljétől eltérő tartalmú — hazai adatbázisra kell építeni. A lakásszerkezet dinamikus modellje a fenti követelmények figyelembevételével készült.

4. A lakásszerkezet dinamikus modellje

4.1. *A modell közgazdasági tartalma*

Az LSD modell a *lakások* és a *lakásokban lakó háztartások* egymást követő állapotait (stock) és állapotváltozásait (flow) írja le. A modell keretét két egymást követő időpont lakásállománya és annak összetétele adja, vagyis a tényleges *lakáskínálatból* indulunk ki. Két egymást követő állapot közötti időszakot vizsgálva, azok a lakások, amelyek akár a nyitóállományban, akár a záróállományban (vagy mindkettőben) nyilvántartásba kerültek, a rendszeren belül levőnek tekintendők. Feltételezésünk szerint a rendszeren kívül *nincsen* lakás.

A *lakások* többféle ismérvvel jellemezhetők: a lakástulajdon jellegével, a lakás méretével, a komfort-fokozattal, a területi elhelyezkedéssel, az építkezés formájával és így tovább. Ha modellünkben például magántulajdonú és bérlakás; egyszobás, kétszobás és három- (vagy több) szobás; komfortos és komfort nélküli; budapesti, városi és községi lakás szerinti megkülönböztetést alkalmaznánk, a lakásállományt az állapotok számával megegyező számú 36 elemű vektorral írnánk le ($2\times3\times2\times3 = 36$).

A lakás főbérlője a *háztartás*, amelyet modellünkben a következő képpen definiálunk. *Háztartás alatt önálló főbérleti jogú lakásban önként vagy kényszer-*

ből együttélő egy vagy több családegységet értünk. (A családegység tagjainak száma ≥ 1.) Tehát magában foglalja a társbérletet, az önkéntes vagy kényszerű többgenerációs együttélést, a főbérlőből plusz albérlőből létesült háztartást: vagyis egy háztartásnak minősülnek, a lakásokat bármilyen jogcímen közösen használó családegységek.[3]

Modellünkben a lakások és háztartások száma megegyezik, így a háztartások a definíció szerint a vizsgált rendszeren belül vannak. A háztartások ismérvei megegyeznek a lakások ismérveivel. A háztartások t-edik időpontban megfigyelhető állapotát, a t-edik időpont lakásállapotával megegyező, 36 elemű vektorral jellemezzük.

Feltételezésünk szerint tehát a rendszerben *nincsen üres lakás* és *nincsen lakás nélküli háztartás*.

A háztartás definíciójából következik, hogy több családegység van, mint ahány háztartás. A lakáshiány következtében a családegységek egy része nem önként, hanem *kényszerűségből* él együtt.

Az egy adott időpontban más családegységgel közös háztartásban élő, de önálló lakáshoz jutás esetén önálló háztartást alapítani szándékozó családegységeket nevezzük a továbbiakban *lakásigénylő családegységnek*. Feltételezzük, hogy a lakásigénylők a „külvilágban" várnak arra, hogy — lakáshoz jutván — belépjenek a „rendszerbe". Ennek megfelelően *a lakásigénylő családegységek, ha önálló lakáshoz jutnak, per definitionem háztartássá válnak és a külvilágból a vizsgált rendszerbe lépnek be.*

Ezen a ponton el is jutottunk az *állapotváltozás* LSD modellbeli értelmezésének kérdéséhez.

Első lépésben a lakások vagy háztartások belépését (inflow) és kilépését (outflow) tárgyaljuk, majd áttérünk a költözési (interflow) folyamat modellünkbeli értelmezésének kérdésére.

A lakások állományának változását a lakásépítés és a lakásmegszűnés (szanálás) mennyisége és összetétele határozza meg. A modell nyelvén az *építés* a külvilágból a rendszerbe *belépést* (inflow), a *megszűnés* a rendszerből a külvilágba *távozást* (outflow) jelzi. A modellben az építés és megszűnés nagysága és összetétele kívülről adott. A lakások és a háztartások számának egyezőségére vonatkozó alapfeltevésből következik, hogy a háztartások nettó állományváltozását a lakásépítés és lakásmegszűnés egyenlegéből vezetjük le.

Természetesen az új háztartások keletkezését és a régi háztartások megszűnését nem a lakásállományban bekövetkezett változások, hanem demográfiai körülmények is magyarázhatják. Egyszemélyes háztartásokban bekövetkezett halál miatt, vagy más okból megüresedett lakások új háztartások keletkezését teszik lehetővé. Modellünkben ez a változás is a kilépések, illetve a belépések között szerepel azzal a különbséggel, hogy a folyamat a rendszer-

[3] A háztartás-statisztika a háztartás fogalmát az alábbiak szerint definiálja:
„A kiválasztás alapegysége a lakás, a megfigyelés egysége pedig a háztartás, azaz a legkisebb jövedelmi, fogyasztói, illetve gazdálkodási egység. A *háztartás* olyan személyek közössége, akik — függetlenül a rokoni kapcsolatoktól — egy jövedelmi illetve fogyasztói közösséget képviselnek, létfenntartási költségeiket részben vagy egészében közösen viselik. A háztartás fogalma tehát nem azonos a családdal, fogalma nem annyira jogi, mint inkább gazdasági tartalmú."
Modellünk eltér ettől a definíciótól, amennyiben kizárja, hogy egy lakáson belül több háztartás is működjék. Ilyen felfogásban a modellben szereplő családegység tekinthető azonosnak a statisztikai gyakorlatban háztartásként használt fogalommal.

ben található összes háztartások számát nem érinti, miközben a lakásigénylő családegységek számát csökkenti.

Az előzőekben a lakáskínálatot reprezentáló stock vektor, valamint a változást leíró outflow és inflow vektorok tartalmáról szóltunk. Az elmondottakhoz egy kiegészítő megjegyzést tennénk a vektorok adatforrására vonatkozóan. *A lakás stock, az outflow és az inflow jellegű információk tényadatok,* vagyis a fizikai lakáskínálat és annak időbeli változása modellünkben *ex post* kategóriaként jelenik meg.

Az állapotvektorok közötti átmenetet (interflow), az úgynevezett *költözési mátrix* írja le. A mátrix a *háztartások* költözésére, a lakások iránti csere-kereslet struktúrájára vonatkozó információkat tartalmazza.

Az LSD modellben — a költözések értelmezésétől függően — a mátrix három változatát különböztetjük meg. A valóságos lakáspiaci viszonyok reálisabb leírása érdekében különbséget teszünk a háztartások *költözési szándéka*, az *elfogadható költözések* és a *megvalósult* költözések között.

Vegyük sorra mármost a különböző mátrixok tartalmát. (Logikai kapcsolataikat a 4.1. *táblázat* és a 4.1. *ábra* segítségével tekintjük át. Az ábra az egyszerűség kedvéért kétdimenzióban szemléltet egy valójában sokdimenziós rendszert.)

A szándékolt költözési mátrix a kezdeti keresletet, a háztartások lakásváltoztatási szándékait, lakások iránti aspirációikat írja le. A szándékot több tényező befolyásolja. Függ a háztartás méretétől, jövedelmi szintjétől és igényeitől, a lakások árától és fenntartási költségeitől, a kínálatnak a költözni akarók

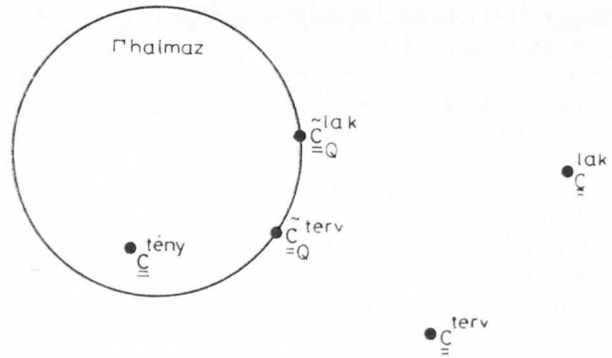
4.1. táblázat

A modellben alkalmazott kategóriák jellegzetes vonásai

A kategória megnevezése	Valóságos vagy hipotetikus	Ex ante vagy ex post	Szubjektív vagy objektív
Háztartások (lakások) egymást követő állapotvektorai **r**, **y**	valóságos	ex post	objektív
Összes lehetséges költözési mátrixok halmaza (Γ), általános eleme: a **C** költözési mátrix, $\mathbf{C} \in \Gamma$.	hipotetikus	—	—
Kitüntetett költözési mátrixok			
Megvalósult költözési mátrix $\mathbf{C}^{tény}$	valóságos	ex post	objektív
Szándékolt költözési mátrixok $\mathbf{C}^{lak}$, $\mathbf{C}^{terv}$, rendszerint $\notin \Gamma$	valóságos	ex ante	szubjektív
Elfogadható költözési mátrixok $\tilde{\mathbf{C}}^{lak}_{Q}, \tilde{\mathbf{C}}^{lak}_{I}, \tilde{\mathbf{C}}^{terv}_{Q}, \tilde{\mathbf{C}}^{terv}_{I} \in \Gamma$	hipotetikus		szubjektív

A modellben szereplő adatok eredete (a **C** költözési mátrix példáján)

tényleges	$\mathbf{C}^{tény}$	a tényelegeshez illesztett $\tilde{\mathbf{C}}^{tény}$
lakossági, szándékolt	$\mathbf{C}^{lak}$	lakossági szándékolthoz illesztett $\tilde{\mathbf{C}}^{lak}$
tervezői szándékolt	$\mathbf{C}^{terv}$	tervezői szándékolthoz illesztett $\tilde{\mathbf{C}}^{terv}$



4.1. ábra

A kitüntetett költözési mátrixok logikai kapcsolata

részéről feltételezett struktúrájától, a lakás megszerzésével kapcsolatos előrelátható nehézségektől és így tovább. *A szándék egyéni igényekre és lehetőségekre, valamint a piacról, a kínálatról feltételezett ismeretekre támaszkodik. Ex ante* kategória, amely adatforrását tekintve a háztartások kikérdezésére épül. A háztartásnak feltett kérdés például így hangzik: a jelenlegi jövedelme, továbbá a lakáskínálat és lakáshozjutási feltételek ismeretében, szándékában van-e lakást változtatni, vagy sem? Ha igen, milyen lakásba akar költözni?

A szándékolt költözési mátrix átlójában jelennek meg azok a háztartások, amelyek eredeti lakásukban kívánnak maradni. Az átló felett — előző példánk szerint — a jelenleginél kisebb, az átló alatt a jelenleginél nagyobb lakásba költözni szándékozók találhatók. A szándékok megvalósíthatóságáról azonban a felmérés időpontjában még semmit nem tudunk. Lehet, hogy a szándékok együttesen elvileg teljesülhetnek, mivel a lakáskínálat változása és a szándékolt cserék egymást kiegyenlítő hatása együttvéve lehetővé teszi a háztartások aspirációinak teljesülését. Az is lehet azonban, hogy a szándékok együttvéve irreálisak, eltérnek a kínálat adta lehetőségektől.

Elfogadható költözési mátrixoknak nevezzük modellünkben azokat az átmeneti mátrixokat, amelyek két egymást követő lakásállományvektor közötti lehetséges átmeneti mátrixok halmazából — valamilyen matematikailag definiált, közgazdaságilag értelmezhető távolság mérték szerint — kiválasztva, „legközelebb" esnek a szándékolt költözések matrixához.[4]

A definíció alapján megállapítható, hogy az elfogadható költözési mátrix egy olyan speciális tulajdonságokkal rendelkező átmeneti mátrix, amely a t-edik időszak lakáskínálatából kiindulva *lehetséges átmenetet biztosít* a $(t+1)$-edik időszak lakáskínálatába, (vagyis a *kínálat szempontjából megvalósítható* költözéseket ír le), miközben struktúrája egy adott távolságmérték szerint „közel" esik a szándékolt költözési mátrixban megfogalmazott lakossági aspirációk struktúrájához, a költözési igényekhez. Az elfogadható költözési mátrixokat ún. „illesztési technikák" segítségével határozzuk meg. Az illesztési technikák (részletesen lásd később) éppen az *ex ante keresleti elvárások* és a ténylegesen már létező, *ex post kínálat közötti kompromisszumot keresik.*

[4] A szándékolt költözések az elfogadható költözések meghatározásánál alkalmazott „allokációs szabályként" is felfoghatók.

A megvalósult költözési mátrix ex post megfigyelt tényadatokra épül, a módosult keresletet, a valóságban lezajlott költözéseket írja le. A megvalósult költözések struktúrája a mai lakáskörülmények között jelentősen eltérhet akár a szándékolt, akár pedig az elfogadható költözési mátrixok struktúrájától. Könnyen belátható, hogy lakáshiány esetén, egy-egy kategórián belül a háztartások nagyobb hányada marad ténylegesen (ex post) eredeti lakásában, mint amekkora hányada önként, eredeti szándéka szerint (ex ante) ott akarna maradni, míg más háztartások kényszerhelyettesítésként gyengébb minőségű, vagy kisebb lakásba költöznek.

A szándékolt, az elfogadható és megvalósult költözések struktúrája közötti eltérések elemzése az LSD modell egyik alapvető célkitűzése, speciális tulajdonsága.

4.2. *A keret-modell*

A keret modell a nyílt input-output modell formájában megfogalmazott Stone modell és a zárt input-output jellegű LSD modell közös keretéül szolgál. A keret-modell feltevései között szerepelnek az LSD modellre is érvényes (a Stone modellből átvett) explicit feltevések (így a 3, 4, 6, 7, 8), valamint az LSD modell specifikus feltevései is (lásd 1, 2, 5).

A konkrét modellek egyrészt a keret-modellt specifikálják kiegészítő feltevések segítségével, másrészt annak egyes elemeit különbözőképpen interpretálják. A nyílt modell eredeti feltevései (9, 10) a zárt modellre is érvényesek.

A változók és tartalmuk

t — egészszámú változó, az időszak sorszáma,

i — sorindex: ,,hova ment''
- $i = 0$ nem rendelkezik többé lakással
- $i = 1, 2, 3$ egyszobás, kétszobás, háromszobás lakásba ment

j — oszlopindex: ,,honnét jött''
- $j = 0$ nem volt lakása
- $j = 1, 2, 3$ egyszobás, kétszobás, háromszobás lakásból jött.

A 0 *értelmezése:* A külvilágot jelzi, *ahonnan* a rendszerbe belépők jönnek, illetve *ahová* a rendszerből kilépők távoznak.

$x_{ij}(t)$ — a t-edik időszak folyamán i-típusú lakásba j-típusú lakásból költöző háztartások száma. Röviden: *költözési változó*

A háztartások költözését a **4.1.** *táblázat* írja le.

Az $x_{ij}(t)$-ről megjegyezzük, bizonyos elemei *stock* és míg más elemei *flow* változók:
- a t időszak kezdetén j állapot (stock)
- a t időszak folyamán j-ből i-be menő áramlás (flow)
- a t időszak végén i állapot (stock)

$y_h(t)$ — h típusú lakások *állománya* a t időszak kezdetén ($h = 1, 2, 3$). Összes lakás: $L(t)$

$z_h(t)$ — h típusú lakások *építése* a t időszak folyamán ($h = 1, 2, 3$)

$s_h(t)$ — h típusú lakások *megszűnése* (lebontása) a t időszak folyamán ($h = 1, 2, 3$)

$r_i(t)$ — az i típusú háztartások állománya a t időszak kezdetén ($i = 0, 1, 2, 3$).

4.2. táblázat

Költözési táblázat

Hová \ Honnét	0	1	2	3	Sorösszeg
0	$x_{00}(t)$	$x_{01}(t)$	$x_{02}(t)$	$x_{03}(t)$	$x_{0.}(t)$
1	$x_{10}(t)$	$x_{11}(t)$	$x_{12}(t)$	$x_{13}(t)$	$x_{1.}(t)$
2	$x_{20}(t)$	$x_{21}(t)$	$x_{22}(t)$	$x_{23}(t)$	$x_{2.}(t)$
3	$x_{30}(t)$	$x_{31}(t)$	$x_{32}(t)$	$x_{33}(t)$	$x_{3.}(t)$
Oszlopösszeg:	$x_{.0}(t)$	$x_{.1}(t)$	$x_{.2}(t)$	$x_{.3}(t)$	$\sum_{j=0}^{3} x_{.j}(t) = \sum_{j=0}^{3} x_{i.}(t)$

Megjegyzés: $x_{00}(t) = 0$ minden t-re. Tartalma: sem a nyitóállományban, sem a záróállományban nem szerepel. A t-edik időszak folyamán belépett, de még a t-edik időszakban ki is lépett a rendszerből.

Definíciók:

Háztartás az önálló főbérleti jogú lakásban önként vagy kényszerűségből együttélő egy vagy több családegység. Családegység tagjainak száma: ≥ 1. A modellben a háztartások per definitionem a vizsgált rendszeren belül vannak. Az összes háztartások száma $H(t)$.

Lakásigénylő családegység a pillanatnyilag más családegységgel közös háztartásban élő, önálló, főbérleti jogú lakáshozjutás esetén önálló háztartást alapítani szándékozó családegység. A lakásigénylő családegységek, *ha önálló lakáshoz jutnak, háztartássá válnak* és a külvilágból a vizsgált rendszerbe lépnek. Összes lakásigénylő családegység: $G(t)$.

Egyenletek

Záróállapot és nyitóállapot azonossága

A változók között értelemszerűen fennáll a következő összefüggés:

$$x_{i.}(t) \equiv x_{.j}(t+1) \qquad i, j = 0, 1, 2, 3 \tag{4.1}$$

$$\begin{bmatrix} t \text{ végén az } i \text{ lakásban} \\ \text{lakók száma bárhon-} \\ \text{nan jöttek } t \text{ folyamán} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} (t+1) \text{ kezdetén a } j \\ \text{lakásban lakók száma} \\ \text{bárhová mennek} \\ (t+1) \text{ folyamán} \end{bmatrix}$$

A (4.1) összefüggés per definitionem igaz, nem igényel bizonyítást, nem tartalmaz egyszerűsítő feltevést.

A lakásszám — háztartás szám közötti megfeleltetés

1. *FELTEVÉS*. Összes lakás = összes háztartás

$$L(t) = H(t).$$

A lakások száma határozza meg a háztartások számát. Az oksági kapcsolat iránya:

$$L(t) \to H(t).$$

Magyarázat az 1. feltevéshez: Feltételezzük, hogy nincs tartósan üres lakás $L \leq H$; nincsen hajléktalan háztartás $H \leq L$; a belépő háztartások elfoglalják a megüresedett vagy újonnan épült lakásokat, viszont senki nem alszik a híd alatt, valamilyen jogcímen (főbérlő, társbérlő, albérlő, ágybérlő) lakik valahol.

Az 1. feltevés formálisan a következő két egyenlőség fennállását jelenti:

$$y_j(t) = \sum_{i=0}^{3} x_{ij}(t) \qquad j = 1, 2, 3 \tag{4.2}$$

$$\begin{bmatrix}\text{j-típusú lakások nyitó}\\ \text{állománya}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{j-típusú lakásból jövő}\\ \text{háztartások száma}\end{bmatrix}$$

$$y_i(t+1) = \sum_{j=0}^{3} x_{ij}(t) \qquad i = 1, 2, 3 \tag{4.3}$$

$$\begin{bmatrix}\text{i-típusú lakások záró}\\ \text{állománya}\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}\text{i-típusú lakásba köl-}\\ \text{töző háztartások záró}\\ \text{állománya}\end{bmatrix}$$

Lakásmérleg

2. *FELTEVÉS*. A lakásállomány és változása (bővülése vagy csökkenése) exogén.

3. *FELTEVÉS*. A lakástípuson belüli eltéréstől eltekintünk: egy-egy típus homogén csoportot alkot.

$$y_h(t+1) = y_h(t) + z_h(t) - s_h(t) \tag{4.4}$$

$$\begin{bmatrix}\text{$(t+1)$ idő-}\\ \text{szak nyitó}\\ \text{állománya}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{t időszak}\\ \text{nyitó állo-}\\ \text{mánya}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{építés a t}\\ \text{időszak}\\ \text{folyamán}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{megszűnés a}\\ \text{t időszak}\\ \text{folyamán}\end{bmatrix}$$

Belépés — kilépés mérlegek

4. *FELTEVÉS*. Az összes megszűnő háztartások száma exogén.

5. *FELTEVÉS*. Az összes lakásigénylő családegységeg $G(t)$ száma exogén. Mindig létezik legalább annyi kielégítetlen lakásigénylő családegység, amenynyinek belépése fedezi a lakásllomány nettó növekményének mértékét.

Magyarázat az 5. feltevéshez: Feltételezzük, hogy a lakáspiacon a hiányjelenség a vizsgált időszakban még fennmarad. Hiánynak tekintjük mind a mennyiségi, mind pedig a minőségi lakáshiányt.

$$z_h(t) - s_h(t) = x_{h.}(t+1) - x_{.h}(t) \qquad h = 1, 2, 3 \tag{4.5a}$$

$$\begin{bmatrix}\text{a lakásállomány}\\ \text{nettó növekménye}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{háztartások nettó}\\ \text{növekménye}\end{bmatrix}$$

$$\sum_{h=1}^{3}\left(z_h(t) - s_h(t)\right) = \sum_{h=1}^{3}\left(x_{h0}(t) - x_{0h}(t)\right). \tag{4.5b}$$

6. *FELTEVÉS*. Nincsenek figyelembe véve a t időszak folyamán belépő, de még a t időszakban kilépő lakások (háztartások): $x_{00} = 0$ minden t-re.

Magyarázat a 6. feltevéshez: csakis azokkal a lakásokkal (háztartásokkal) foglalkozunk, amelyek vagy a t-ik vagy a $(t + 1)$-ik időszak nyitó állományában, vagy mindkettőben megjelennek.

7. *FELTEVÉS*. A $(t + 1)$-edik állapot kizárólag a t-edik állapottól függ.

Magyarázat a feltevéshez: Nincs késleltetés, nincs „memória". A $(t) \to (t + 1)$-be való átmenet független a $(t - 1) \to t$-be, a $(t - 2) \to (t - 1)$-be stb.-től.

A háztartások mozgását leíró teljes költözési mátrixon belül az alábbi blokkokat különböztetjük meg:

- 0 az x_{00} elemet tartalmazó blokk, a t-edik időszakban belépő, de ugyanakkor ki is lépő háztartásokat tartalmazza;
- **a** vektor az x_{0j} elemeket, a t-edik időszakban kilépő háztartásokat (outflow) foglalja magába;
- **b** vektor az x_{i0} elemeket, vagyis a t-edik időszakban belépő háztartásokat (inflow) foglalja magába;
- $\bar{X}$ mátrix, amelynek x_{ij} elemei a háztartások belső költözését (interflow) írják le. A belső költözési mátrixban $i, j = 1, 2, 3$.

A fentiek alapján felírható, hogy:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{a} \\ \mathbf{b} & \bar{X} \end{bmatrix}. \tag{4.6}$$

A (4.5a) és (4.5b) egyenletekben már foglalkoztunk a lakások és háztartások nettó állományváltozásával, most szeretnénk néhány további megjegyzést fűzni az **a** és **b** vektorok tartalmához.

Az inflow és outflowvektorok a külvilág és belvilág közötti *bruttó* áramlást követik nyomon. *Kétféle akciót* ötvöznek egybe: a *lakások lebontása* és *építése* következtében végbemenő mozgást, valamint a *demográfiai* jellegű változást.

Az 1. *akció* lakások megszűnésével és építésével kapcsolatos. Az akcióban résztvevő háztartások két csoportra bonthatók: Az egyik csoportot az jellemzi, hogy az időszak elején és végén is rendelkezett lakással, *de nem azonos lakással*. Időszak eleji lakása megszűnt és helyette újonnan épült lakásba költözött. Ezek a háztartások mind a kilépők mind pedig a belépők között nyilvántartásba kerülnek. A másik csoportot az újonnan épült lakásba költöző, a t-edik odőszak folyamán önállósult családok, az új lakásban létesült új háztartások képezik. Értelemszerűen csak a belépők között szerepelnek.

A két csoport elvileg különül el, együttes adataik az **s** (lakásmegszűnés), illetve z (lakásépítés) vektorokból vezethetők le.

A 2. *akció* demográfiai eseményekkel (pl. halál, elvándorlás) kapcsolatos. A lakás az időszak elején és végén is megvolt, csak a benne lakó háztartások változnak. Az M háztartás kilép az egyszobás, budapesti stb. lakásból és az N háztartás belép a helyébe. A kilépők és belépők egyaránt szerepelnek az inflow, illetve outflow vektorokban. Adataik a **g** vektorban kívülről adva vannak.

Az 1. akció növelheti (csökkentheti) a lakásállományt és a háztartásállományt a 2. akció viszont magát az állományt nem módosítja. Szerkezeti változást is csak az 1. típusú akció eredményezhet. A lakásigénylő családegységek számát viszont mind az 1. mind a 2. *akció* csökkentheti.

Ezek után meghatározhatjuk az **a** és **b** vektorok tartalmát:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{s}(t) + \mathbf{g}(t) \tag{4.7}$$

$$\begin{bmatrix}\text{háztartások}\\ \text{kilépése}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{lakások meg-}\\ \text{szűnése}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{meglevő laká-}\\ \text{sokban lakó}\\ \text{háztartások}\\ \text{megszűnése}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}(t) = \mathbf{z}(t) + \mathbf{g}(t) \tag{4.8}$$

$$\begin{bmatrix}\text{háztartások}\\ \text{belépése}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{lakások}\\ \text{építése}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{megüresedett}\\ \text{lakásba költöző}\\ \text{háztartások}\\ \text{belépése}\end{bmatrix}$$

Amennyiben a **X** mátrix által ábrázolt költözési folyamatot koefficiensek formájában írjuk le, költözési hányadokról, *költözési koefficiensekről* beszélhetünk. A költözési koefficiensek **C** mátrixa a j-ik lakástípusból az i-ik lakástípusba költözők részarányait mutatja meg.

8. *FELTEVÉS*. A **C** költözési mátrix oszlop-sztochasztikus, oszlopelemeinek összege = 1.

$$c_{ij}(t) = x_{ij}(t)/x_{.j}(t) \qquad i, j = 0, 1, 2, 3 \tag{4.9}$$

A definíció kiterjed az $i = 0$, $j = 0$ esetre is. A nyílt és zárt modell abban különbözik majd, hogy miként kezeljük a c_{i0}, illetve a c_{0j} koefficienseket. Ennek megfelelően *teljes* és *belső* költözési koefficiens mátrixról **C**, $\overline{\mathbf{C}}$ beszélünk.

A továbbiakban a kétféle konkrét modellről szólunk: a *nyílt input-output* modell formájában megfogalmazott kiinduló modellről és a *zárt input-output* modellként felírt LSD modellről.

A nyílt modell

A **C** teljes költözési mátrixból képezzük a $\overline{\mathbf{C}}$ belső költözési mátrixot.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & \overline{\mathbf{C}} \end{bmatrix}. \tag{4.10}$$

A $\overline{\mathbf{C}}$ mátrix elemei: $\bar{c}_{ij}$, ahol $i, j = 1, 2, 3$.

9. *FELTEVÉS*. A rendszeren belüli belső költözési (interflow) koefficiensek az időben állandóak:

$$\bar{c}_{ij}(t) = \bar{c}_{ij}. \tag{4.11}$$

Emlékeztetünk itt arra, hogy a 8. FELTEVÉS alapján a **C** mátrix oszlop elemeinek összege = 1, tehát a $\overline{\mathbf{C}}$ belső költözési mátrix oszlop elemeinek összege automatikusan $C \leq 1$, amennyiben az **a** outflow vektor megfelelő C_{0j} eleme >0. Ebből következik az az implicit feltevés is, hogy $c_{0j}(t) = c_{0j}$ minden t-re, vagyis az outflow részaránya konstans.

10. *FELTEVÉS.* A kívülről belépő háztartások lakásípusonkénti növekménye az időben állandó.

$$x_{i0}(t) = x_{i0}, \tag{4.12}$$

azaz

$$\mathbf{b}(t) = \mathbf{b} \quad \text{minden } t\text{-re.}$$

A kiinduló nyílt input-output modell általános alakja:

$$\bar{\mathbf{r}}(t+1) = \bar{\mathbf{C}}\,\bar{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{b} \qquad (\bar{\mathbf{r}} \text{ elemei: } \bar{\mathbf{r}}_i,\ i = 1, 2, 3). \tag{4.13}$$

Az összefüggésből ismertek a $\bar{\mathbf{C}}$, $\mathbf{b}$, $\bar{\mathbf{r}}(t)$ mátrix, illetve vektorok adatai.

A 4.13 egyenletet értelmezhetjük az LSD modell fogalmi apparátusával s, ahol;

$\bar{\mathbf{r}}(t)$ a t időszakban a háztartások nyitó állománya. A (4.2) és (4.3) összefüggés alapján $\mathbf{y}(t)$-ból $\bar{\mathbf{r}}(t)$ meghatározható.

$\bar{\mathbf{C}}$ a háztartások belső költözési koefficiens mátrixa, a költözések különféle közgazdasági értelmezése szerint: elfogadható, megvalósult költözési koefficiens mátrix.

$\mathbf{b}$ a háztartások állományának növekménye. Önálló háztartássá váló lakásigénylő családegységek lakáshoz jutása. Az oksági kapcsolat iránya:

$$\Delta L \to \Delta H.$$

A zárt modell

„Nyissa ki az ablakot, hadd legyen becsukva.
Nem értem . . .
Nem érti? Akkor ez egy aforizma"

Karinthy F. „Így írtok ti"

A zárt modellben visszatérünk a $\mathbf{C}$ *teljes* költözési mátrixhoz, vagyis a $\bar{\mathbf{C}}$ belső költözési mátrixot kiegészítjük a kívülről belépők oszlop-vektorának és a külvilágba távozók sorvektorának koefficienseivel.

A 8., 9. és 10. FELTEVÉSEK alapján már megfogalmaztuk, hogy mind az újonnan belépő és kilépő háztartások, mind pedig a belső költözések arányai az időben változatlanok:

$$c_{ij}(t) = c_{ij}. \qquad i, j = 0, 1, 2, 3 \tag{4.14}$$

A zárt input-output modell általános alakja;

$$\begin{bmatrix} f(t+1) \\ \bar{\mathbf{r}}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} & \bar{\mathbf{C}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(t) \\ \bar{\mathbf{r}}(t) \end{bmatrix}. \tag{4.15}$$

Az állapotvektorokat is struktúrák formájában felírva az alábbi összefüggést kapjuk:

$$(4.16)\qquad \begin{bmatrix} \varphi(t+1) \\ \boldsymbol{\rho}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} & \overline{\mathbf{C}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \boldsymbol{\rho}(t) \end{bmatrix},$$

ahol a $\begin{bmatrix} \varphi \\ \boldsymbol{\rho} \end{bmatrix}$ struktúra a háztatásállomány változás összegének (0. sor, illetve 0. oszlop összege) és a lakástípusonkénti háztartásoknak a részaránya az állományváltozás értékével növelt háztartások összegében.

*Az LSD modell általános formájaként a zárt input-output modellnek a (*4.16*) egyenletben megfogalmazott változatát tekintjük.* A (4.16) összefüggésből ismertnek tételezzük fel az induló és záróállapot lakás (háztartás) struktúráját leíró $\boldsymbol{\rho}(t)$, $\boldsymbol{\rho}(t+1)$; valamint a lakásépítés és megszűnés struktúráját reprezentáló $\boldsymbol{\alpha}(t)$ és $\boldsymbol{\beta}(t)$ vektorokat; azaz a lakáskínálat két egymást követő állapotát és a köztük lezajló fizikai változás elemeit. Ismeretlen viszont a modellben a tényleges keresletet leíró $\overline{\mathbf{C}}$ átmeneti mátrix. Ez utóbbit helyettesíti egy olyan hipotetikus, a modellbe közvetlenül még nem illeszthető, szándékolt költözési mátrix, amely a lakások iránti kezdeti keresletet jelzi.

Az LSD modell jellegzetes tulajdonsága éppen a *kezdeti kereslet* és a lakáskínálat által kielégíthető, *megvalósítható kereslet* közötti eltérések elemzése. A szándékolt és megvalósítható kereslet közötti kapcsolatot az ún. „illesztési technikák" segítségével teremtjük meg.

5. Adatok és illesztési technikák

Amint az LSD modellt ismertető 4. fejezetben már jeleztük, modellünkben ex post jellegű objektív tényadatok és ex ante jellegű, egyedi kikérdezésből származó „szubjektív" adatok egyaránt előfordulnak. A tényadatok lehetnek teljes körű vagy reprezentatív mintavétel eredményei, az egyéni kikérdezés viszont többnyire mintavételező. Modellünkben az illesztési technikák kettős funkciót töltenek be. Egyfelől a szubjektív költözési szándékok és az objektív kínálati lehetőségek struktúrája közötti „kompromisszum" keresésének eszközei, másfelől viszont paraméter becslési eljárások, amelyek lehetővé teszik, hogy reprezentatív felvételből származó adatokból a teljes körű viselkedésre következtethessünk, vagyis a részleges és a teljes körű megfigyelés adatait kombináljuk modellünkben.

5.1. *Az adatokról*

a) *Az állapotvektorok:* $\mathbf{y}(t)$, $\mathbf{r}(t)$. Az állapotvektorok együttesét a lakások (és a lakások számával megegyező számú háztartások) volumenét és struktúráját leíró, tényadatokon alapuló idősor adja meg. Általában — de nem feltétlenül — teljes körű felmérésből származnak.

b) *A kilépés és belépés vektorok:* $\mathbf{a}(t)$, $\mathbf{b}(t)$, $\mathbf{g}(t)$. Kétféle adatforrásból származnak.

A *lakásállomány* (háztartásállomány) növekedésére és csökkenésére vonatkozó építési és megszűnési adatok az a) pontban említett, rendszeres időközönként megfigyelt, többnyire teljes körű felvételből nyerhetők.

A *demográfiai* változásokat leíró ki-, illetve belépések a szokásos statisztikában nem szerepelnek, tehát a modellszámítások igényeinek megfelelő külön megfigyeléseket igényelnek.

Itt jegyezzük meg, hogy mind az a), mind pedig a b) pont alatt említett tényadatokat azonos tartalmú *tervadatok* is helyettesíthetik. Az utóbbiak értelemszerűen a lakáskínálat és demográfiai változások tervezett alakulását mutatják meg.

c) *A belső költözési mátrixok:* $\bar{\mathbf{C}}(t)$.

A *megvalósult költözések mátrixa* teljes körű vagy reprezentatív ex post jellegű felmérés eredménye. Megvalósult lakáscseréket ír le, azokat a költözéseket, amelyek a tárgyidőszakban fennálló feltételek (árak, jövedelmek, lakáskínálat, igények, jogi, pénzügyi és adminisztratív szabályozás, utánjárás, várakozási idő, stb.) mellett ténylegesen lezajlottak. A mátrix elemei *objektív* jellegű mutatók. Ilyen típusú adatokkal jelenleg nem rendelkezünk.

Kétféle megközelítésű *szándékolt költözési mátrixról* szólunk a továbbiakban. Közös vonásuk, hogy szubjektív jellegű aspirációkat, ex ante szándékokat fejeznek ki. Különböznek viszont aszerint, hogy az egyedi háztartások, vagyis a *lakosság szándékait*, avagy a tervezők jövőre vonatkozó elképzeléseit, a *tervezői szándékokat* írják-e le. Az előbbit lakossági, az utóbbit tervezői szándék mátrixnak nevezzük.

A lakossági szándék mátrix értelmezéséhez még a következőket kell hozzáfűznünk. A valóságban egy-egy háztartás költözési szándéka — minden egyéb körülményt, jövedelmeket, a kínálatról kialakított feltételezéseket stb. adottnak véve — a költözés végrehajtásához szükséges kiadások függvénye.

A gondolatot egy erősen leegyszerűsített példa segítségével fejtjük ki. Tekintsünk a lakosságnak arra a csoportjára, amelyik jelenleg egyszobás lakásban lakik de szívesen költözne kétszobásba. Van aki még akkor sem mozdulna, ha a cserére többletköltség nélkül kerülhetne sor: ragaszkodik megszokott kis lakásához, vagy nem tudja bebútorozni a többletszobát, nem képes takarítani azt stb. Nézzük tehát csak azokat, akik szívesen költöznének kétszobásba, ha ezt minden többletköltség nélkül megtehetik, vagy akik még hajlandók anyagi áldozatot is hozni a lakáscsere érdekében. Tegyük fel, hogy együttes számuk 700 ezer háztartás.

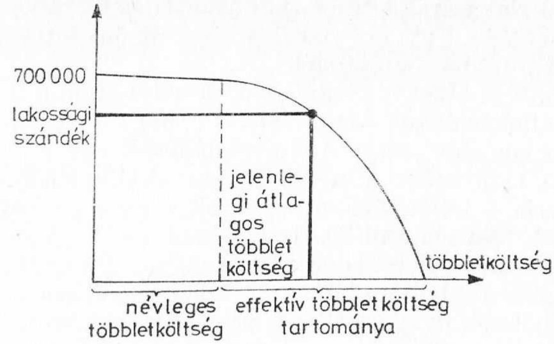
A modell eddigi feltevéseivel összhangban jogosult homogénnek tekinteni ezt a csoportot, a kiinduló helyzetet illetően. Mivel amúgy is elhanyagoltuk az egyszobás lakások közti minőségi stb. különbségeket, tekintsük az eddigi lakáshasználat költségeit egyöntetűen.

A kétszobás lakásba való átmenet *többlet*költsége a valóságban két tételből adódhat össze: egy egyszeri kiadásból (pl. „lelépési díj") és egy állandó, folyamatos kiadásból (pl. lakbértöbblet). A számítás egyszerűsítésére összeadjuk az egyszeri kiadást és 10 évi folyamatos többletkiadást és ezt tekintjük a *költözés többletköltségének*.

A szándék és a többletköltség közötti összefüggéseket az 5.1. *ábrán* szemléltetjük.

Az ábra vízszintes tengelyén a költözni kívánók által fizetendő többletköltséget tüntettük fel, a függőleges tengelyen pedig azoknak a háztartásoknak a számát, akik hajlandóak ingyen vagy többletköltség fejében elköltözni.

A vízszintes tengely 0 pontjához tartozik — definíciónkból következően a 700 000-es érték, vagyis mindazok, akik szívesen elköltöznének, ha ezért nem kellene többletet fizetni.



5.1. ábra

A görbe először közel halad a vízszinteshez: 100 forintot, vagy akár 1000 forintot gyakorlatilag mindenki képes lenne erre a célra előteremteni. Ameddig a görbe vízszintes, vagy majdnem vízszintes, csak elhanyagolható mértékben csökken, addig a *névleges* többletköltségek tartományában vagyunk. Utána azonban, a szaggatott vonallal jelölt értéktől kezdve szemmel láthatóan csökkenni kezd azok részaránya, kik ezt az árat meg tudják, illetve meg akarják adni. Ez már az *effektív* többletköltségek tartománya. A görbe egyre meredekebben csökken. Végül eljutunk egy kritikus többletköltséghez, amelynél többet már senki sem hajlandó megadni egyetlen töblet-szobáért. Itt éri el a görbe a vízszintes tengelyt.

Ábránk egy speciális „*keresleti görbét*" ábrázol: az egyszobás lakásból kétszobás lakásba költözni kívánók keresleti görbéjét, a fizetendő többletköltség, mint speciális „vételár" függvényében.

Jó lenne, ha kutatásunk előbb-utóbb eljutna abba a fázisba, amelyben képesek vagyunk ilyen keresleti függvényeket meghatározni és azokat a matematikai modellbe formálisan is beépíteni. Egyelőre még nem tartunk itt. Sem a szükséges információ nem áll rendelkezésre, sem a jelenlegi modell egyszerű matematikai formája nem ad lehetőséget e függvények beépítésére. Ezért lényeges egyszerűsítéshez kell folyamodnunk. Ahelyett, hogy a keresleti *függvény* szerepelne a modellben, kiemeljük annak egyetlen pontját: a jelenleg érvényes többletköltséghez tartozó pontot. Az ábránkon feltüntettük ezt a pontot. A függvénynek ezt az értékét nevezzük „lakossági szándéknak" és az ennek megfelelő adatot szerepeltetjük — a modell szerkezetének megfelelő formára átalakítva — a „szándékolt költözések" mátrixában.

Ez a szándék kipuhatolható kikérdezések segítségével. Ugyancsak kikérdezés segítségével lehet majd — a kutatás későbbi szakaszában — a jelenlegi lakbérektől, lakásáraktól, költözési többletköltségektől eltérő feltételek melletti szándékot is tisztázni, azaz becslést adni a keresleti függvény egészére.

A „tervezői szándékokról" célszerű mindjárt többesszámban szólni. Tegyük fel, hogy képesek vagyunk a tervezők elgondolásait lefordítani a mi modellünk „nyelvére", azaz megtestesíteni költözési mátrixok formájában. Indokolt lenne, hogy a tervelemzések céljaira ne egy, hanem több ilyen mátrixot dolgozzunk ki. Ezek eltérnének egymástól, a következő tényezők hatására:

— Milyen lakbérek, lakásárak érvényesülését tételezi fel a tervező? A jelenleg érvényben lévőket vagy azoktól eltérőeket?

— Ha a lakbérek, lakásárak eltérnének a jelenlegiektől, milyen elvek szerint kívánnák alakítani őket? Úgy, hogy azok a lakosság önkéntes költözését a tervezők által kívánt irányba ösztönözzék?

— Egyáltalán milyen elveket kívánnának érvényesíteni a tervezők a lakásallokációban és reallokációban? Azt szeretnék-e, hogy a nagyobb jövedelműek jussanak nagyobb lakáshoz, vagy a nagycsaládosok stb.

Mint látjuk, itt igen széles körű elemzésre adódik lehetőség. Különösen érdekesnek ígérkezik a különböző szempontok szerint összeállított „tervezői szándék" mátrixok összehasonlítása egymással és a „lakossági szándék" mátrixszal (vagy: lakossági szándék mátrixokkal). Mennyiben vannak ezek összhangban egymással, hol mutatkoznak ellentmondások. Az ilyen összehasonlító elemzésből sok gyakorlati gazdaságpolitikai következtetés adódhat.

5.2. *Illesztési technikák*[5]

Induljunk ki a (4.16) homogén differencia-egyenletből:

$$\begin{bmatrix}\varphi(t+1)\\ \bar{\boldsymbol{\rho}}(t+1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\beta} & \bar{\mathbf{C}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi(t)\\ \bar{\boldsymbol{\rho}}(t)\end{bmatrix}$$

Az összefüggésből ismertek a $\begin{bmatrix}\varphi(1)\\ \bar{\boldsymbol{\rho}}(1)\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}\varphi(2)\\ \bar{\boldsymbol{\rho}}(2)\end{bmatrix}$ vektorok, valamint a két vektor közötti átmenetet megvalósító $\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\beta} & \bar{\mathbf{C}}\end{bmatrix}$ átmeneti mátrixból a 0-adik sort és a 0-adik oszlopot jelző $\boldsymbol{\alpha}$ és $\boldsymbol{\beta}$ vektorok, de nem ismerjük a $\bar{\mathbf{C}}$ belső költözési mátrixot. A $\bar{\mathbf{C}}$ mátrixot ún. *illesztési technikák segítségével határozzuk meg az ismert adatokból független forrásból származó „hipotetikus" belső költözési mátrix (a továbbiakban* **P** *mátrix) alapján.*

Az illesztési feladatot tehát úgy fogalmazhatjuk meg, hogy olyan $\tilde{\bar{\mathbf{C}}}$ (illesztett) nem-negatív mátrixot keresünk, amely kielégíti az alábbi egyenletet;

(5.1) $$\begin{bmatrix}\varphi(2)\\ \bar{\boldsymbol{\rho}}(2)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\beta} & \bar{\mathbf{C}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi(1)\\ \bar{\boldsymbol{\rho}}(1)\end{bmatrix},$$

(5.2) $$\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\beta} & \tilde{\bar{\mathbf{C}}}\end{bmatrix} \text{ oszlop-sztochasztikus, és}$$

(5.3) $$d(\tilde{\bar{\mathbf{C}}}, \mathbf{P}) \to \min,$$

vagyis a két mátrix struktúrája közötti távolság minimális.

A hipotetikus és illesztett mátrixok közötti távolságot kétféle „távolság mérték", azaz metrika szerint értelmezzük.[6]

1. Kvadratikus metrika,
2. I-divergencia metrika.

[5] Az 5.2. alfejezetet *Dancs István* írta.

[6] Több számítást végeztünk az ún. Kantorovics metrika segítségével is, de ezek ismetetésére e cikk keretében nem térünk ki.

1. *Kvadratikus távolság*

A legkisebb négyzetek módszerére épülő kvadratikus távolság ismert és jól bevált távolság-fogalom. Az (5.3) feladat szerint távolság itt az alábbiakban fogalmazható meg:

$$\left(\sum_{i,j}(\tilde{c}_{ij}-p_{ij})^2\right)^{\frac{1}{2}} = Q(\tilde{\tilde{\mathbf{C}}}, \mathbf{P}). \qquad i, j = 1, 2, 3 \tag{5.4}$$

A fenti összefüggés egy speciális kvadratikus programozási feladatként fogható fel. Megjegyezzük, hogy helyette célszerűbb a relatív kvadratikus különbségekkel számolni. Ekkor a következő kifejezés minimalizálandó:

$$\left(\sum_{i,j}\frac{(\tilde{c}_{ij}-p_{ij})^2}{\tilde{c}_{ij}}\right)^{\frac{1}{2}} = Q'(\tilde{\tilde{\mathbf{C}}}, \mathbf{P}). \tag{5.5}$$

2. *Az I divergencia távolság*

Mielőtt leírnánk az I divergenciával mért illesztési feladatot, néhány szót szólunk a metrika valószínűségelméleti tartalmáról. (Az itt használt jelölés nem kompatibilis eddigi jelölésrendszerünkkel.)

Legyen az $\mathbf{l}$ és $\mathbf{m}$ két n dimenziós valószínűségi vektor (struktúra), ami egy rendszer két valószínűségi állapotaként fogható fel. Az I divergencia a következő formula szerint írható fel:

$$I(\mathbf{l}:\mathbf{m}) = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{l}_i \log\frac{\mathbf{l}_i}{\mathbf{m}_i}.$$

Az összefüggés információ elméleti tartalma a következő: azt az információ nyereséget mérjük, amit az $\mathbf{l}$ valószínűségi állapotvektor az $\mathbf{m}$ álapotvektorhoz képest ad.[7]

Fogalmazzuk meg ezután az LSD modell szerinti feladatot:

Keressük azt a $\tilde{\tilde{C}}$ mátrixot, amelyre

$$e\tilde{\tilde{\mathbf{C}}} = e - \alpha \tag{5.6}$$

$$\tilde{\tilde{\mathbf{C}}}\boldsymbol{\rho}(1) = \boldsymbol{\rho}(2) - \varphi\boldsymbol{\beta} \tag{5.7}$$

$$\tilde{\tilde{\mathbf{C}}} \geq 0 \tag{5.8}$$

és minimális a következő célfüggvény

$$I(\tilde{\tilde{\mathbf{C}}}:\mathbf{P}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\log\frac{\tilde{c}_{ij}}{p_{ij}}. \tag{5.9}$$

Vagyis a lehetséges átmeneti mátrixok halmazából olyan $\tilde{\tilde{\mathbf{C}}}$ mátrixot keresünk, amely egy lépésben kielégíti a $\bar{\boldsymbol{\rho}}(1)$ és $\bar{\boldsymbol{\rho}}(2)$ közötti (5.6), (5.7) átmeneti egyenleteket, ugyanakkor a „legkisebb meglepetést" okozza a $\mathbf{P}$ hipotetikus mátrixhoz képest.

[7] Részletesen lásd erről *H. Theil* [17] munkáját.

A fentiek szerinti feladat primális megoldásához a következő duális összefüggés rendelhető.

Keresendők olyan $\mathbf{u}_i$, $\mathbf{v}_j$, $(i, j = 1, 2, 3, \ldots, n)$ pozitív számok, amelyekhez

$$\sum_{i,j} p_{ij} u_i v_j \bar{\varrho}_j(1) \leq 1 \tag{5.10}$$

$$\sum_i (1 - \alpha_i) u_i + \sum_j (\varrho_j(2) - \varphi\beta_j) v_j \to \text{maximum}. \tag{5.11}$$

Noha biztató kísérletek folytak a duális vektorok közgazdasági értelmezésére, még korainak érezzük kész eredményként ismertetni azokat. Annyit mégis megjegyeznénk, úgy tűnik, hogy az **u** és **v** duális vektorok a primális megoldáson felül is jelentős többlet tájékoztatást nyújthatnak a költözési szándékok és a lakáskínálat strukturális eltéréseinek elemzéséhez, értékeléséhez.

5.3. *Az objektív és szubjektív jellegű mutatók felhasználásáról*

A szociológusok, és napjainkban a közgazdászok is, különbséget tesznek kemény és puha mutatók, vagy más néven objektív és szubjektív megközelítésű mutatószámok között. Az objektív és szubjektív mutatók szerepe, összekapcsolásuk szükségessége különleges hangsúlyt kap a társadalmi-gazdsági körülményeket értékelő társadalmi jelzőszámrendszerrel foglalkozó hazai és nemzetközi kutatásokban.[8]

Objektív jellegű mutatónak nevezi az irodalom a statisztikailag ex post megfigyelt, vagy megfigyelhető tényadatokat. Ide sorolhatók témánk köréből a ténylegesen meglévő, fizikailag is számba vehető lakások mennyiségi és minőségi ismérvei (méret, karbantartás foka, az építkezés jellege, stb.),a háztartások állománya, állományváltozása és a megvalósult költözések adatai, de ugyancsak objektív mutató az állami bérlakások és a magántulajdonú lakások ára, lakbére vagy fenntartási költsége is.

A *szubjektív mutatók* egyéni kikérdezésen alapuló, szubjektív megközelítésű vizsgálatok eredményei. Általában a megfigyelt egyének (háztartások) elégedettségét, aspirációit, értékrendjét mérik. Szubjektív mutatók lehetnek a piackutatás körébe tartozó felmérések is. Ismét szűkebb témánk példáinál maradva, szubjektív mutatónak tekintjük a háztartások megkérdezése alapján a lakással való elégedettségre, a jövőbeli költözési szándékokra vonatkozó információkat is. Ide sorolhatók a lakossági megkérdezésre épített ún. hipotetikus lakásárak és lakbérek is, amelyek azt a „felajánlott", a háztartások részéről még „elfogadható" összeget jelzik, amit a fogyasztók hajlandóak lennének fizetni az általuk igényelt méretű és minőségű lakásért, ha a lakás az igényelt időpontban valóban rendelkezésre is állna.

Az objektív és szubjektív mutatószámok összekapcsolása modellünk egyik speciális tulajdonsága. Az objektív folyamatokat leíró statisztikai mutatókkal párhuzamos szubjektív mutatók beépítése mögött az az elgondolás húzódik meg, hogy a múltbeli eredmények értékelése, a jövőbeni célok megítélése nemcsak az objektív körülmények alakulásától függ, hanem attól is, hogy az objektív eredmények és tervek találkoznak-e az állampolgárok, a fogyasztó elvárásai-

[8] Lásd a témáról bővebben: *Allardt, E.* [1], [2], *Andorka R.—Illés J.* [3], *Andorka R.—Kulcsár R.* [4], *Cantaril, H.* [6], *Dániel Zs.* [7], *Hankiss E.—Manchin R.—Füstös L.* [11] munkáit.

val, szándékaival. Célszerű folyamatosan figyelemmel kísérni, hogyan látja az egyén az objektív folyamatokat, célokat és mit tételez fel jövőbeni alakulásukról. A központi célok egybeesnek-e az egyéni elvárásokkal; az állampolgárok a tényleges ár és költségviszonyoktól eltérően mit és mennyire értékelnek. A szubjektív mérés az objektív mutatókkal összhangban hasznosítható igazán. Együttes elemzésük fontos támpontot ad a tervezés számára, hiszen az objektív mérést kiegészíti a fogyasztó magatartására, igényeire vonatkozó hasznos ismeretekkel.

6. Illusztráció a rövidtávú elemzéshez

A továbbiakban néhány számítás segítségével jelezzük az elemzési lehetőségeket. A számítások tényszámokra és konstruált adatokra épülnek, ezért csupán illusztrációnak tekinthetők.

Tételezzük fel, hogy ex post megfigyelések alapján ismertek a 6.1 *és* 6.2. *táblázat*, és ex ante kikérdezés eredményeképpen a 6.3. *táblázat* adatai.

A táblázat adatai jelen formájukban önkényes becslések. Tényleges alkalmazás esetén ezeket az adatokat reprezentatív felvételre építjük, amikor is a háztartásokat megkérdezzük, hogy pl. a jelenlegi ár- és jövedelemviszonyok

6.1. táblázat

A lakásállomány alakulása 1970–1973 között

Me.: ezer db

	Egyszobás	Kétszobás	Háromszobás és nagyobb	Összesen
Lakások száma 1970. I. 1.	1452	1361	337	3150
Építés 1970–1973	0	169	204	373
Megszűnés 1970–1973	188	0	0	188
Lakások száma 1973. I. 1.	1264	1530	541	3335

6.2. táblázat

Háztartások megszűnése[9] 1970–1973 között

Me.: ezer db

Egyszobás lakásban	Kétszobás lakásban	Háromszobás lakásban
100	0	0

[9] Emlékeztetünk itt a 4. fejezetben elmondottakra, miszerint a háztartások megszűnése és a helyükbe költöző háztartások belépése megegyezik majd. Az egy szobás lakásban lakó 100 ezer háztartás megszűnése gyakorlatilag ekvivalens 100 ezer db egyszobás lakás „belépésével" illetve ennek megfelelő számú családegység önálló „háztartássá" válásával. Vö. a *2.1.* táblázat kilépés-belépés adataival.

és az adott kínálati feltételek mellett elégedettek-e jelenlegi lakásukkal vagy sem? Ha változtatni akarnak lakáskörülményeiken, milyen jellegű változást igényelnek? A táblázatból leolvasható, hogy az egy-, illetve kétszobás lakásban lakók mintegy negyedrésze, a háromszobás lakásban lakóknak viszont több mint háromnegyed része nem akar változtatni lakáshelyzetén. A megkérdezettek közül többen szeretnének induló helyzetükhöz képest nagyobb lakást, mint amilyen arányban a jelenleg nagyobb lakásban lakók hajlandók kisebb lakásba költözni.

A 6.3. táblázatban található szándékolt költözési mátrix alapján a 6.1. és 6.2. táblázatok szerinti tényleges kínálathoz a kvadratikus és *I* divergencia szerinti távolságmértékek szerint elfogadható költözési mátrixokat illesztettünk.

A 6.4. *táblázat* a szándékolt költözési mátrix és a kétféle távolságmérték szerint illesztett elfogadható, teljes költözési mátrixokat mutatja be. A 4×4-es mátrixok 0-ik oszlopai, illetve sorai a konstans állomány-változási koefficienseket, az 1—3. sorok és oszlopok a belső költözési koefficienseket írják le.

A 6.4. táblázatból látható, hogy a lakossági szándékok együttese (kis lakástulajdonosok nagy lakás iránti igénye és a nagy lakások tulajdonosainak kisebb lakás iránti cserehajlandósága) a fizikai lakáskínálat struktúrájának változása mellett *nem teszi lehetővé* a lakossági aspirációk maradéktalan teljesülését.

6.3. táblázat

A lakossági kikérdezésen alapuló szándékolt költözések mátrixa

Me.: százalék

		Honnét		
		Egyszobás	Kétszobás	Háromszobás
		lakásból		
Hová:	Egyszobásba	0,215	0,155	0,055
	Kétszobásba	0.490	0,250	0,145
	Háromszobásba	0,295	0,595	0,800

6.4. táblázat

A lakossági aspirációkat tükröző szándékolt és elfogadható teljes költözési koefficiens mátrixok

M.e.: százalék

		Szándékolt költözések koefficiens mátrixa $\mathbf{C}^{\mathrm{lak}}$				Kvadratikus távolság szerint illesztett elfogadható költözések koefficiens mátrixa $\mathbf{C}^{\mathrm{lak}}_{\mathrm{Q}}$				I divergencia távolság szerint illesztett elfogadható költözések koefficiens mátrixa $\mathbf{C}^{\mathrm{lak}}_{\mathrm{I}}$			
		Honnét				Honnét				Honnét			
		0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
	0	—	0,198	0	0	—	0,198	0	0	—	0,198	0	0
Hová	1	0,211	0,172	0,155	0,055	0,211	0,328	0,473	0,133	0,211	0,337	0,471	0,103
	2	0,357	0,393	0,250	0,145	0,357	0,447	0,447	0,194	0,357	0,450	0,461	0,237
	3	0,432	0,237	0,595	0,800	0,432	0,037	0,080	0,673	0,432	0,015	0,068	0,660

A fizikai kínálat változásával összhangban álló, illesztett mátrixok, vagyis az elfogadható költözések struktúrája jelentősen eltér a szándékolt költözési mátrix struktúrájától. Csökkenti a kis lakásból nagy lakásba költözők arányát az összes költözésen belül, és a nagy lakás elhagyására „kényszerít" olyanokat, akiknek nincsen szándékuk kisebb lakásba költözni. Együtt véve azonban az illesztett mátrixok olyan struktúrát mutatnak be, amelyek kielégítik a fizikai kínálat-változás adta lehetőségeket, miközben „allokációs szabályként" figyelembe veszik a lakossági aspirációk strukturális jellegzetességeit is.

A táblázathoz csupán két további megjegyzést szeretnénk hozzáfűzni. Először is óvni szeretnénk az olvasót bármiféle elhamarkodott ítélettől vagy előítélettől. A konstruált példák alapján bemutatott számítások talán olyan képzeteket kelthetnek, mintha komputer segítségével akarnánk meghatározni, hogy a jövőben ki hová költözzék, és úgy vélnénk, hogy egy sikeres illesztéssel, vagy egy alkalmas „optimális költözési programmal" meg tudjuk oldani a strukturális lakáshiányt. A végeredmény ezek után már csak azon múlik, hogy sikerül-e bürokratikus úton megvalósítani a javasolt elrendezést vagy sem. Ez a gondolat távol áll tőlünk, a modellt nem ilyenfajta funkciók ellátására szánjuk, hanem éppen ellenkezőleg.

A modell segítségével a különféle piaci feltételeknek (lakásárak, lakbérek, lakáskínálat) a költözési struktúrára gyakorolt hatását elemezzük, következtetéseket kívánunk levonni a kívánatos struktúrák eléréséhez alkalmas, „ösztönző" lakásárak és lakbérek nagyságrendjére.

A másik megjegyzésünk egy számítástechnikai jellegű „megnyugtatás". Programjaink lehetővé teszik, hogy az illesztett struktúrák egyes elemeire kikötésekkel éljünk. A lineáris programozási modellekbe beépített alsó és felső korlátok működéséhez hasonló módon kiküszöbölhetők modellünkből a valóság szempontjából „irreális"nak minősülő átmeneti koefficiensek: például kiköthető, hogy a lakásból senkit sem lehet „erőszakkal" kimozdítani; azaz alsó korlátot szabhatunk az átlóban elhelyezkedő koefficiensek kötelező értékére.

A későbbiekben tehát tervezünk olyan számítást is, amelyben eleve korlátozzuk a megengedett költözéseket, nemcsak a fizikai kínálat oldaláról, hanem a háztartások kiköltözési hajlandósága oldaláról is. Azaz előírjuk: senkit sem lehet rákényszeríteni lakása elhagyására. Tanulságos lesz ezeknek a számításoknak az összehasonlítása azokkal a számításokkal, amelyek ettől a korláttól eltekintenek. Fontosnak ígérkezik ebből a szempontból mind a primális, mind a duális megoldások tanulmányozása.

A továbbiakban tervezői szándékokat leíró mátrixokról szólunk. Tételezzük fel, hogy megkérdeztük az Országos Tervhivatal lakáselosztással foglalkozó munkatársait: hogyan értékelik a központi elvárások és a tervezői szándékok szempontjából a lakáscseréket. Milyen átrendeződést tartanának szükségesnek például a jelenlegi lakásárak és jövedelmek, demográfiai követelmények és lakáskínálati feltételek mellett.

A 6.5. *táblázat* a tervezői aspirációkat tükröző szándékolt és az ahhoz illesztett elfogadható teljes költözési koefficiens mátrixokat mutatja be.

A számpélda megszerkesztésénél feltettük, hogy a tervezők jobb információkkal rendelkeznek a fizikai kínálatról és cserelehetőségekről, mint a lakosság. Ez magyarázza, hogy a tervezői aspirációkat kifejező szándékolt és az illesztett mátrixok struktúrája a puszta ránézés alapján is „közelebbinek" tűnik, mint a 6.4. táblázatban található lakossági szándék mátrix és az elfogadható mátrixok megfelelő struktúrái.

6.5. táblázat

A tervezői aspirációkat tükröző szándékolt és elfogadható teljes költözési koefficiens mátrixok

M.e.: százalék

		Szándékolt költözések koefficiens mátrixa C^{terv}				Kvadratikus távolság szerint illesztett költözések koefficiens mátrixa C_Q^{terv}				I divergencia távolság szerint illesztett költözések koefficiens mátrixa C_Q^{terv}			
		Honnét				Honnét				Honnét			
		0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
	0	—	0,198	0	0	—	0,198	0	0	—	0,198	0	0
Hová	1	0,211	0,365	0,195	0,205	0,211	0,475	0,292	0,229	0,211	0,475	0,284	0,257
	2	0,357	0,281	0,545	0,195	0,357	0,327	0,600	0,209	0,357	0,287	0,636	0,232
	3	0,432	0,156	0,260	0,600	0,432	0	0,108	0,562	0,432	0,040	0,080	0,511

6.6. táblázat

A költözési struktúrák aggregált távolságai

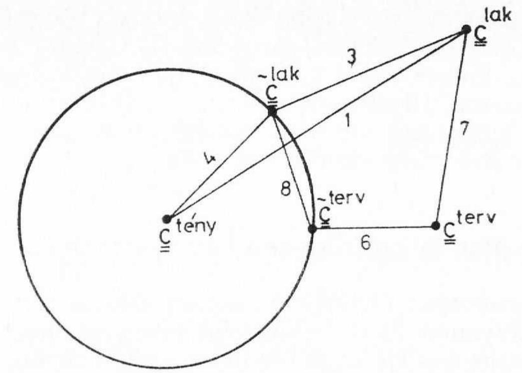
	A távolság mértéke	
	kvdaratikus	I divergencia
1. Megvalósult költözés és lakossági szándék	0,954	1,467
2. Lakossági szándék és kvadratikus szerint illesztett lakossági elfogadható	0.529	0,805
3. Lakossági szándék és I div. szerint illesztett lakossági elfogadható	0,547	0,780
4. Megvalósult költözés és I div. szerint illesztett lakossági elfogadható	0,406	0,321
5. Tervezői szándék és kvadratikus szerint illesztett tervezői elfogadható	0,076	0,081
6. Tervezői szándék és I div. szerint illesztett tervezői elfogadható	0,089	0,029
7. Lakossági szándék és tervezői szándék	0,322	0,524
8. I div. szerint illesztett tervezői elfogadható és I div. szerint illesztett lakossági elfogadható	0,158	0,249

A megvalósult költözés címén a 2.1 táblázat adatait használtuk fel.

A mátrix struktúrák egymástól való távolságát egzakt módon az aggregált kvadratikus és *I* divergencia mutatók segítségével[10] mérhetjük. A 6.6. *táblázatban* a különböző megközelítésű költözési struktúrákat hasonlítjuk össze. Mindkét aggregált távolság mutatót közöljük. Ezzel is érzékeltetjük, noha a kétféle távolságmérték szerinti struktúrák és maguk a mutatók is tartalmilag eltérnek egymástól (amit a mutatók abszolút értékei is kifejeznek), a struktú-

[10] Az aggregált kvadratikus távolság: $\sqrt{\sum_{i,j} (x_{ij} - c_{ij})^2}$

Az aggregált *I* divergencia távolság: $\sum_{i,j} x_{ij} \log x_{ij}/c_{ij}$.



6.1. ábra

rák eltérését értékelő relatív arányok megegyeznek, bármely mutatószámmal mérjük is a vizsgált jelenségeket.

A mutatók értelmezéséhez visszaidézzük a 4.1. ábrát, amelyet most — kiegészítve — 6.1. *ábraként* újra közlünk. A mutatók sokdimenziós távolságokat adnak meg; mi azonban, természetesen csupán a síkon ábrázolható távolsággal operálhatunk szemléltető ábránkon. Az egyszerűség kedvéért csupán az I-divergencia kritériummal illesztett mátrixokhoz tartozó távolságokkal foglalkozunk, de analóg módon értelmezhetők a kvadratikus kritérium szerinti mutatók is. Az ábrán látható számok a 6.6. táblázat sorszámaira utalnak.

A költözési struktúrák aggregált távolságai

Mind az 1., mind pedig a 3. és 4. mutató a lakosság által érzékelt *lakáshiány* egy-egy speciális mérőszáma. Az 1. mutató a szándék és a megvalósulás közti eltérés *egészét* adja meg, tekintet nélkül arra, hogy maga a szándék — az adott fizikai kínálati feltételek mellett — reális volt-e. *A 3. mutató azt fejezi ki, szintétikus formában, milyen mértékben volt irreális maga a szándék.* Sokféle tényező magyarázhatja a szándék megfogalmazódásában jelentkező irrealitást: a piac áttekinthetetlensége, téves információk, rosszul orientáló lakbérek és lakásárak stb. *A 4. mutató viszont a ténylegesen megvalósuló allokációban mutatkozó súrlódást és inefficienciát tükrözi.* Ebben közrejátszhat hibás vagy hiányos információ, de okozhatja tehetetlenség, lassúság, bürokratikus átcsoportosítás, rossz ösztönzés is. A ténylegesen érvényesülő allokációs mechanizmus nem szolgálja eléggé hatékonyan a lakosság igényeinek megvalósulását. Mód lenne ugyanis — és éppen ezt méri a 4. mutató — az adott fizikai kínálat adta határokon belül is jóval közelebb kerülni a lakossági szándékhoz.

A 6. mutató analóg a 3. mutatóval, azzal az eltéréssel, hogy ez most a tervezői szándék „irrealitásának", megvalósíthatatlansági fokának mérőszáma.

Figyelemreméltó a 7. és 8. mutató is. Előbbi azt méri: mennyire messze esik *a lakossági és a tervezői szándék* — tekintet nélkül arra, hogy bármelyikük milyen közel vagy messze van a megvalósíthatóságtól. Utóbbi már a józan megvalósíthatóság érdekében korrigált szándékokat állítja szembe. Más szóval azt fejezi ki a 8. mutató: milyen messze esik a lakossági szándékokhoz közel eső és a fizikai kínálatból teljesíthető költözési mátrix a tervezői szándékokhoz közel eső, ugyanabból a fizikai kínálatból ugyancsak megvalósítható mátrixhoz.

Nézetem szerint a kutatás ezen a ponton túlmutat közvetlen témánkon, a lakáselosztás elemzésén. Olyan mutatószámrendszert írtunk le, amely *általában* alkalmazható különböző szándékok és különböző megvalósítási lehetőségek által alakított *struktúrák* eltéréseinek elemzésére.

7. A Markov modellek és a hosszútávú elemzés

Amennyiben input-output modelljeink sztochasztikus értelmezést kapnak, a leírt stock-flow folyamat Markov lánceként interpretálható.[11]

A nyílt input-output modell az alábbi inhomogén differencia-egyenletrendszer formájában írható fel:

$$x_{.j}(t+1) = \sum_{j=1}^{3} c_{ij} x_{.j}(t) + x_{i0}. \qquad i = 1, 2, 3 \tag{4.13}$$

A zárt input-output modell pedig átfogalmazható a következő homogén differencia-egyenletrendszerré:

$$x_{.j}(t+1) = \sum_{j=0}^{3} c_{ij} x_{.j}(t). \qquad i = 0, 1, 2, 3 \quad j = 0, 1, 2, 3 \tag{4.16}$$

A Markov feltevés szerint az egyik állapotból a másik állapotba való eljutás valószínűsége független az állapot eléréséhez megtett útvonaltól. Az állapotvektorok sorozata — a mátrix „előnyös" tulajdonságai mellett — tart egy stabil (ergodikus) állapotvektorhoz.

Mármost visszatérve a korábbi mátrix jelöléshez a (4.13) szerinti lineáris inhomogén egyenletrendszernek, $\mathbf{r}(t+1) = \mathbf{C}\mathbf{r}(t) + \mathbf{b}$, ismertek az alábbi tulajdonságai:

1. *tulajdonság:* Tetszőleges $\bar{\mathbf{r}}(1)$-ből elindulva egyértelműen meghatározott az $\bar{\mathbf{r}}(2), \bar{\mathbf{r}}(3), \ldots,$ idősor.

2. *tulajdonság:* Az $\bar{\mathbf{r}}(1), \bar{\mathbf{r}}(2), \bar{\mathbf{r}}(3), \ldots,$ idősornak létezik egy stabil végállapota; ha $t \to \infty$, $\bar{\mathbf{r}}(t) \to (\mathbf{E} - \bar{\mathbf{C}})^{-1}\mathbf{b} = \bar{\mathbf{r}}^*$.

3. *tulajdonság:* A $\bar{\mathbf{r}}^*$ stabil végállapot kielégíti a következő egyenletet: $\bar{\mathbf{r}}^* = \overline{\mathbf{C}\mathbf{r}}^* + \mathbf{b}$. Az egyenlet formálisan ekvivalens egy nyílt input-output modellt leíró szimultán egyenletrendszerrel.

Visszatérve a korábbi (4.16) szerinti jelöléshez, a homogén diffreencia-egyenletrendszerről ugyancsak bizonyíthatóak az alábbi tulajdonságok:

$$\begin{bmatrix} \varphi(t+1) \\ \rho(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & \bar{\mathbf{C}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \rho(t) \end{bmatrix}$$

[11] A nyílt input—output modell valószínűségszámítási értelmezéséről lásd *Stone* már idézett [14], [15] műveit, a zárt input-output modell általánosításáról lásd *Bródy* „Érték és újratermelés" c. munkájának [5] 2.33 fejezetét.

1. *tulajdonság:* Tetszőleges $\begin{bmatrix}\varphi(1)\\ \rho(1)\end{bmatrix}$ struktúrából elindulva egyértelműen meghatározott a $\begin{bmatrix}\varphi(2)\\ \rho(2)\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\varphi(3)\\ \rho(3)\end{bmatrix}, \ldots,$ idősor.

2. *tulajdonság:* A $\begin{bmatrix}\varphi(1)\\ \rho(1)\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\varphi(2)\\ \rho(2)\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\varphi(3)\\ \rho(3)\end{bmatrix}, \ldots,$ idősornak létezik egy stabil végállapota; $t \to \infty$: $\begin{bmatrix}\varphi\\ \rho\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}\varphi^*\\ \rho^*\end{bmatrix}$.

3. *tulajdonság:* A $\begin{bmatrix}\varphi^*\\ \rho^*\end{bmatrix}$ stabil végállapota kielégíti a következő egyenletet:

$$\begin{bmatrix}\varphi^*\\ \rho^*\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & \alpha\\ \beta & C\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\varphi^*\\ \rho^*\end{bmatrix}.$$

Dancs István bebizonyította, hogy a nyílt és a zárt modell Markov folyamatként értelmezett stabil végállapota azonos struktúrát eredményez.[12]

A nyílt és zárt modell stabil végállapota szerinti struktúrák azonossága meggyőző bizonyítékot szolgáltat arra, hogy az LSD modell — a Stone modellhez hasonlóan — alkalmas hosszútávú prognózis készítésére, miközben rendelkezik azzal az előnnyel is, hogy segítségével elemezhetővé válnak a lakások iránti szándékolt és megvalósítható kereslet összefüggései.

Befejezésül még röviden utalni szeretnénk azokra a *hosszútávú elemzési* lehetőségekre, amelyek a modell „Markov jellegéből" következnek, de amelyek egyben felhasználják a különféle megközelítésű költözési mátrixokban megtestesülő, *rövidtávúnak nevezhető elemzések* eredményeit is.

A 7.1. *táblázat* a Markov folyamat stabil végállapota szerinti jövőben struktúrákat hasonlítja össze. A táblázat fejrovatai a kiinduló költözési mátrixok tartalmára utalnak.

A táblázat tartalmi értékelésétől eltekintünk, hiszen az eltérések az adatbecslést végző személy különböző hipotéziseit és nem a tényleges különbségeket jelzik. Mégis, talán ez az egyszerű példa is érzékelteti, hogy érdekesnek ígérkező elemzési lehetőségek nyílnak meg előttünk a javasolt modell és metodika alapján.

A modell jelenlegi formájában is további elemzési lehetőségeket nyújthatott volna. Úgy éreztük azonban, abbahagyhatjuk a kísérletezést, a munkát ezek után — a már folyamatban lévő — valóságos felmérések alapján célszerű folytatni.

7.1. táblázat

A lakások iránti kereslet várható szerkezete az ezredforduló előttévekben

M.e.: százalék

	Megvalósult költözések alapján	Lakossági aspirációk alapján		Tervezői aspirációk alapján	
	—	Q	I	Q	I
Egyszobás	34,3	36,6	36,5	36,2	36,5
Kétszobás	49,9	43,1	44,0	45,5	46,6
Háromszobás	15,8	20,3	19,5	18,3	16,9
Összes kereslet	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0

[12] A bizonyítást a Függelék tartalmazza.

Függelék

A nyílt és zárt modell közötti kapcsotat

A. FELTEVÉS: A belső költözési hányadok azonosak;

$$\check{\bar{c}}_{ij} = \hat{\bar{c}}_{ij}. \qquad i, j = 1, 2, 3$$

B. FELTEVÉS: Azonos az induló lakásállomány struktúrája;

$$\check{\bar{\xi}}_h(t) = \hat{\bar{\xi}}_h(t), \qquad d = 1, 2, 3$$

Ezzel ekvivalens feltevés, hogy azonos a háztartások nyitóállományának struktúrája;

$$\check{\bar{\rho}}_i(t) = \hat{\bar{\rho}}_i(t). \qquad i = 1, 2, 3$$

C. FELTEVÉS: Azonos a záró háztartásállomány struktúrája;

$$\check{\bar{\rho}}_h(t+1) = \hat{\bar{\rho}}_h(t+1). \qquad d = 1, 2, 3$$

Bizonyítható a nyílt és a zárt modell stabil végállapota közötti kapcsolat. Emlékeztetünk arra, hogy

$$\beta = \begin{bmatrix} C_{10} \\ C_{20} \\ C_{30} \end{bmatrix} \qquad \alpha = [C_{01}\, C_{02}\, C_{03}].$$

A (4.14) összefüggésből kiindulva tudjuk, hogy az egyenletrendszer stabil végállapota kielégíti a

(4.19) $$\bar{\mathbf{r}}^* = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{r}}^* + \mathbf{b}$$

egyenletet, amiből eljutunk a

(4.20) $$\bar{\mathbf{r}}^* = (\mathbf{E} - \mathbf{C})^{-1}\mathbf{b}$$

megoldáshoz.

A zárt modell stabil állapotvektorát a (4.18) egyenletből kiindulva;

(4.21) $$\begin{bmatrix} \varphi^* \\ \bar{\rho}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & \bar{\mathbf{C}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi^* \\ \bar{\rho}^* \end{bmatrix}.$$

Ez blokkszemléletű írásmódban

(4.22) $$\alpha \cdot \bar{\rho}^* = \varphi^*$$

(4.23) $$\varphi\beta = \bar{\mathbf{C}}\bar{\rho}^* = \bar{\rho}^*.$$

A (4.23) egyenletből adódik, hogy

(4.24) $$\bar{\rho}^* = \varphi^*(\mathbf{E} - \bar{\mathbf{C}})^{-1}\beta.$$

Figyelembe véve a (4.22)-t, végül is azt látjuk, hogy

(4.25) $$\bar{\rho}^* = (\alpha\bar{\rho}^*)(\mathbf{E} - \bar{\mathbf{C}})^{-1}\beta.$$

A nyílt és zárt modell stabil állapotának a kapcsolata a (4.20) és (4.25) egyenletek alapján fogalmazható meg. Eszerint az $\bar{\mathbf{r}}^*$ és $\bar{\rho}^*$ vektorok *mint struktúrák megegyeznek.* mégpedig a zárt modell $\bar{\rho}^*$ vektora a nyílt modell $\bar{\mathbf{r}}^*$ vektorából képzett struktúra $(\alpha\bar{\rho}^*)$-szorosa.

(Beérkezett: 1982. február 5-én)

IRODALOM

1. ALLARDT, E. [1973]: *About Dimensions of Welfare.* University of Helsinki. Helsinki, 1973.
2. ALLARDT, E. [1974]: *On the Relationship between Objective and Subjective Predicaments,* Research Report, University of Helsinki.
3. ANDORKA R.—ILLÉS J. 1974. A társadalomstatisztikai rendszer kidolgozásának kérdései. *Statisztikai Szemle.* 1974. évi 1. sz.
4. ANDORKA R.—KULCSÁR R. [1975]: Egy társadalmi jelzőszámrendszer körvonalai. *Statisztikai Szemle* 1975. évi 5. sz., 6. sz.
5. BRÓDY A. [1969]: *Érték és újratermelés.* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.
6. CANTRIL, H. [1966]: *The Pattern of Human Concern.* Rutgers Univ. Press. New Brunswick.
7. DÁNIEL Zs. [1977]: Gondolatok az életszínvonal és a társadalmi jólét méréséhez. *Statisztikai Szemle.* 1977. 8—9. sz.
8. DÁNIEL Zs. [1978]: *A lakáselosztás elemzése és modellezése* (Első részbeszámoló a kutatás állásáról és néhány problémájáról.) Tervgazdasági Intézet. Sokszorosítvány.
9. DÁNIEL Zs. [1980]: „Igazságos" vagy „igazságtalan" lakáselosztás. *Valóság,* 1980. 4. sz.
10. DÁNIEL Zs. [1980]: *Dinamikus modell a lakásállomány szerkezeti változásának elemzésére.* Tervgazdasági Intézet 1980. Sokszorosítvány.
11. HANKISS E.—MANCHIN R.—FÜSTÖS L. [1978]: *Országos életminőség vizsgálat,* Munkaközi jelentés. Magyar Tudományos Akadémia — Népművelési Intézet, Sokszorosítvány
12. KORNAI J. [1978]: A hiány újratermelése. *Közgazdasági Szemle.* 1978. szeptember.
13. KORNAI J. [1980]: *A hiány,* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
14. STONE, R. [1971]: *Demographic Accounting and Model Building,* OECD, Technical Report, Paris, 1971.
15. STONE, R. [1972]: The Fundamental Matrix of the Active Sequence, *Input-Output Techniques* Eds. A. Bródy and A. P. Carter, North Holland Publishing Company.
16. STONE, R. [1974]: *Random Walks Through Social Sciences, Input-Output and Markov Models in Social Research,* Cambridge.
17. THEIL, H. [1970]: Közgazdaságtan és információelmélet. Budapest, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.

A MODEL FOR THE ANALYSIS OF INTENTIONS AND POSSIBILITIES FOR DWELLING SHIFTS

The dynamic model of the dwelling structure is a system of linear homogeneous equations as regards its mathematical form, that may be conceived as a Markoff-chain. The model shows great similarity to R. Stone's social-demographical stock-flow model, at the same time it deviates from it in relevant features. Differences between the two models are explained by the deviation of the modelled economies.

Stone's model examines the effect of past demographical processes and actual dwelling shifts on future demand at a more or less balanced housing market. In Hungary there is a permanent housing shortage and the actual process of changing the dwellings is determined primarily not by demographical processes, nor by the aspiration of households, but by the supply, i.e. the quantitative and qualitative structure of the existing stock.

Our model describes subsequent states of flats and households dwelling in these flats (stock) and changes in these states (flow). The transition between state vectors is described by the so called, "matrix of changes" describing the structure of the demand of households for dwelling shifts.

For the sake of giving a realistic description of actual Hungarian housing conditions three variants of the transition matrix are distinguished depending on the interpretation of shifts. Distinction is made between *intended* movings describing initial demand, *admissible* movings complying with supply and actually *implemented* ones. The analysis of the structure of matrices, the quantification and assessment of their relationship to each other and to the structure of actual dwelling supply are the major economic characteristics of the model. Statistical data and so called "subjective" indicators resulting from sample surveys can be both found in the model. From the deviation of ex ante aspirations and ex post realization conclusions can be made concerning the measure of structural shortage. The Markoff-properties of the model enable the analysis of long-term processes computed on the basis of alternative demand-supply and price income assumptions, resulting in different structures.

Finally, numerical illustrations and analyses are presented.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НАМЕРЕНИЙ И ВОЗМОЖНОСТЕЙ ПЕРЕМЕНЫ КВАРТИРЫ

Динамическая модель жилищной структуры по своей математической основе является системой линейных однородных уравнений, которую можно трактовать как цепь Маркова. Модель показывает тесное родство с общественно-демографической моделью состояний и изменений (stock-flow) Р. Стоуна, однако, в то же время в некоторых существенных своих чертах отличается от последнего. Расхождения в моделях обуславливаются расхождениями в моделируемых экономиках.

Модель Стоуна рассматривает влияние прошедших демографических процессов и фактических переселений на жилищный спрос в будущем, в условиях более-менее уравновешенного жилищного рынка. В Венгрии же хронический дефицит квартир, таким образом, фактический процесс перемены квартиры обуславливается в первую очередь не демографическими процессами и не намерениями отдельных семей, а возможностями предложения, т. е. количеством и качественной структурой. существующего жилищного фонда.

Наша модель описывает разные состояния (stock) и изменения (flow) имеющихся квартир и проживающих в этих квартирах семей. Переход между отдельными векторами состояния описывается так называемой «матрицей переселений», содержащей информации о структуре спроса на обмен квартир со стороны отдельных семей.

В целях реального описания фактических условий на жилищном рынке Венгрии различается три варианта переходной матрицы. Различаем по первоначальному спросу переселения *намеренные*, по предложению *приемлемые* и также фактически *реализованные*. Анализ структуры матриц, их соотношений друг к другу и к структуре фактического предложения является главной экономической характеристикой модели. В моделе фигурируют как статические данные, так и т. наз. «субъективные показатели», полученные на основе репрезентативного опроса. Исходя из различий между первоначальными намерениями и фактическими реализациями делаем выводы о размере структурного дефицита. Свойства модели, тождественные со свойствами цепи Маркова дают возможность проанализировать долговременные, приводящие к формированию различных структур процессы, вычисляемые на основе альтернативных предположений о спросе и предложении, о ценах и о доходах.

Статья наконец показывает подсчеты илюстративного характера и также различные возможности анализа.

RIMLER JUDIT

Túlélési függvények — selejtezési tulajdonságok*

A túlélési függvények fogalma és fajtái

Minden gép[1] fajtájától és használati módjától függően hosszabb-rövidebb ideig él, üzemképes. Ha a gépet a $t = 0$ évben helyezik üzembe és $t = \nu$ évre használódik el: maximális élettartama ν év. A maximális élettartam elérése előtt a gép kiselejtezhető, de tovább — a feltételezések szerint — nem tartható üzemben.

A gépek nemcsak maximális élettartamukat, de termelésből való *kilépésük időbeli lefutását* tekintve is különböznek egymástól. Vannak olyan gépek, amelyek változatlanul, teljes születési terjedelmükben vesznek részt a termelésben egész életük során, következésképpen teljes terjedelmükben lépnek ki a t_ν-edik évben. Más gépeknél a kihalás fokozatos: az üzemelés során egyes részek előbb, mások később válnak használhatatlanná, kerülnek kiselejtezésre. A termelésből való kilépés lehet teljesen szabálytalan, de szabályos is.

A kilépés módozatai egyben azt is meghatározzák, hogy a t_0 évben termelésbe lépő gép teljes születési terjedelmének mekkora része dolgozik még az üzembehelyezést követő első, második, . . ., t_ν-edik évben. A *túlélési függvény* fejezi ki ezeket a részarányokat.

A túlélési függvény, $Z(t)$ tehát, azt mutatja, hogy a nulladik évben üzembe helyezett gépek közül mennyi a t-edik évben még üzemben lévő gép. Adott selejtezési függvény $S(t)$ mellett a t-edik évet túlélő rész az egész üzembehelyezett és a t évig kiselejtezett mennyiség különbsége. Azaz,

$$Z(t) = \int_{t_0}^{t_\nu} S(t)dt - \int_{t_0}^{t} S(t)dt = \int_{t}^{t_\nu} S(t)dt. \tag{1}$$

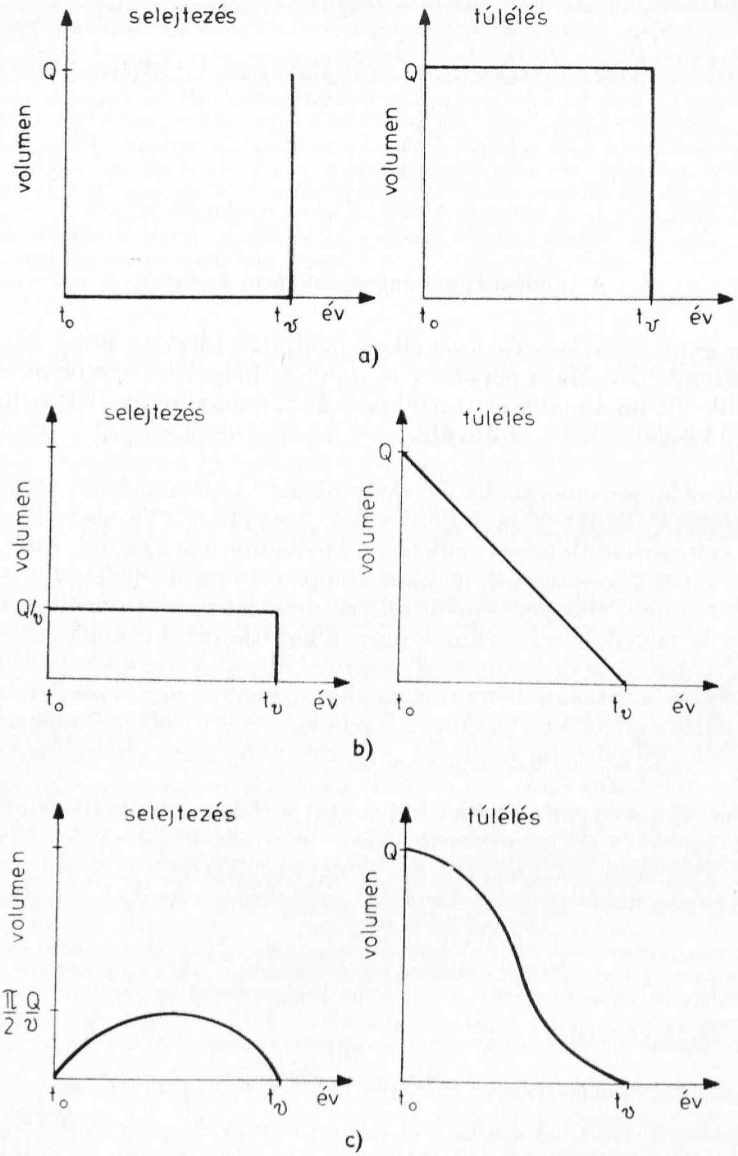
Ebből a selejtezési függvény

$$S(t) = -Z'(t). \tag{2}$$

A következő, 1a, b és c ábrákon három egyszerű selejtezési és a hozzájuk tartozó túlélési függvény található.

* Az e tanulmányban ismertetett vizsgálat az 1980—1981-es hollandiai tartozkodásom alatt folyt. A kutatás elvégzését meghívásával az Eindhoveni Műszaki Egyetem Filozófiai és Társadalomtudományi Főosztálya tette lehetővé. Munkámat kritikai észrevételekkel és tanácsokkal *J. Wemelsfelder* és *H. den Hartog* lendítette előre. A gépi számítások *D. Rabinowits* vezetésével készültek. Mondandóm világosabb megfogalmazását *Simonovits A.* és két ismeretlen lektor megjegyzései könnyítették. Kollegáimnak ezúttal is köszönetet mondok segítségükért.

[1] Gépeken a továbbiakban gépeket, felszereléseket, berendezéseket, járműveket értünk. Túlélési függvényeket nemcsak a gépekre, de az összes állóeszközre (gép + épület) is meg szoktak határozni. Jelen vizsgálatban azonban csak a gépi állóeszközök szerepelnek.



1. ábra

Az 1a. ábrán bemutatott gép *teljes születési terjedelmében* (Q) vesz részt a termelésben egész élete során, addig, amíg el nem éri legmagasabb életkorát, a t- évet, amikoris ugyancsak teljes terjedelmében egyszerre kilép a termelésből. Ehhez a selejtezési viselkedéshez tartozó túlélési függvény derékszögű.

Az 1b. ábra egy másik egyszerű selejtezési viselkedést mutat be. A selejtezésre itt az jellemző, hogy az üzembe helyezéstől a kilépésig minden évben azonos Q/ν mennyiségű. A túlélési függvény ennek megfelelően lineáris.

Az 1c. ábrán a selejtezés a kezdeti alacsony érékről fokozatosan fut fel az időszak közepi maximumra, majd innen ismét fokozatosan csökken a kilépési életkor eléréséig. Ezt a selejtezési viselkedést egy sinus félhullámmal lehet leírni. A hozzá tartozó túlélési függvény (a pozitív térnegyedbe tolt és a maximumát az y tengelyen felvevő) cosinus félhullám. E függvény részletesebb ismertetésére hamarosan sor kerül.

Technikai jellemzők alapján az esetek többségében megállapítható, hogy az egyes gépek viselkedését melyik selejtezési, illetve túlélési görbe írja le a legjobban. Közgazdasági elemzésekben azonban ritkán fordul elő, hogy egyes gépekkel foglalkozunk. Nagyobb gépcsoportok — legyenek azok akár egy-egy üzem, vállalat vagy ágazat gépei — aggregált selejtezési és túlélési formáira azonban nem lehet csupán műszaki alapon következtetni.

Az aggregált túlélési függvények kialakításánál eddig leginkább azt a stratégiát követték, hogy elméleti megfontolások alapján különböző selejtezési viselkedést tételeztek fel, majd meghatározták az ehhez tartozó túlélési függvényeket.[2]

A leggyakrabban alkalmazott feltételezés szerint a gép-aggregátumok selejtezésére az jellemző, hogy az üzembe helyezést közvetlenül követő első és a leghosszabb ideig üzembe tartható gép által meghatározott maximális élettartamot megelőző utolsó életharmadban kevesebb gép lép ki a termelésből, mint a középsőben. A középidőszakban kulmináló selejtezés jól kezelhető, formában írható le az 1c. ábrán bemutatott selejtezési és túlélési függvényekkel. A túlélési függvény, amit a továbbiakban *egyszerű cosinus*nak nevezünk:

$$Z_t^{(S)} = \frac{1}{2}\left[1 + \cos\frac{\pi}{t_v}\cdot t\right]. \tag{3}$$

A hozzá tartozó selejtezési függvény pedig a (2) összefüggés alapján:

$$S_t^{(S)} = \frac{\pi}{2t_v}\sin\left(\frac{\pi}{t_v}\cdot t\right). \qquad (t < t_v) \tag{4}$$

Az egyszerű cosinus függvény módosított változatával kísérleteztek egy holland számításban.[3] Kiindulva abból a feltételezésből, hogy az első hat évben egyáltalán nincs selejtezés, mert kevéssé valószínű az, érveltek, hogy a vadonatúj gépeket technikai okokból ki kell selejtezni, az egyszerű cosinus függvény *összetolt* változatához jutottak. Azért nevezem összetoltnak ezt a függvényt, mert ugyanazon maximális gépélettartam mellett azáltal, hogy az első hat évben szünetel a selejtezés a későbbiekben intenzívebbé kell válnia, s ezért szinte összébb tolódik.

Az összetolt cosinus függvényt $Z^{(C)}$-vel jelölöm. A holland számításban szereplő függvény lefutása csak nagyjából felel meg az egyszerű cosinusénak az összenyomás és a kerekítések miatt. A túlélési részarányok meghatározásakor explicit függvény-formula nem állt rendelkezésre.

Mindkét eddig ismertetett függvény feltételezi, hogy a selejtezés lefolyása az aggregáltsági foktól független. Kérdés, jogos-e ez a feltételezés. Vajon ugyanazon selejtezési tulajdonságok jellemzők a kisebb (esetleg homogén)

[2] Lásd például Redfern [1955], Ward [1976] és Hartog—Tjan [1976] munkáit.
[3] Lásd Den Hartog és Tjan i. m.

gépcsoportokra, mint a nagy aggregátumokra, amelyek sok különböző fajta, és különböző élettartamú gépekből, gépcsoportokból állnak össze? A válaszadáshoz, az előbbieknél általánosabb, a nagyobb aggregátumok különböző élettartamú csoportokból való összetevődését (struktúráját) is figyelembe vevő túlélési függvény bevezetésére volt szükség. Ezt a függvényt a továbbiakban *súlyozott cosinus* függvénynek nevezem és $Z^{(W)}$-vel jelölöm.

A súlyozott cosinus függvény a következő módon és egyszerűsítéseket elfogadva képezhető: 1. A gépeket várható élettartamuk szerint csoportokba rendezzük; 2. Feltételezzük, hogy minden csoport túlélési függvénye egyszerű cosinus. 3. Kiszámítjuk a maximális élettartamtól függő, és ezért csoportonként különböző meredekségű túlélési függvényeket. 4. Az egész állományra vonatkozó aggregált túlélési görbét a csoport-függvények megoszlási viszonyszámaival súlyozott átlagként állítjuk elő. Formálisan:

$$Z_t^{(W)} = \sum_{i=1}^{m} w_i \left[\frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi}{t_{v_i}} t \right) \right], \qquad (v_i \leq v) \tag{5}$$

ahol

w_i = az i-edik egyed vagy csoport súlyát kifejező megoszlási viszonyszám,
t_{v_i} = az i-edik egyed vagy csoport maximális élettartama,
m = az egyedek, illetve a csoportok száma.

A $S^{(W)}$ selejtezési függvény pedig

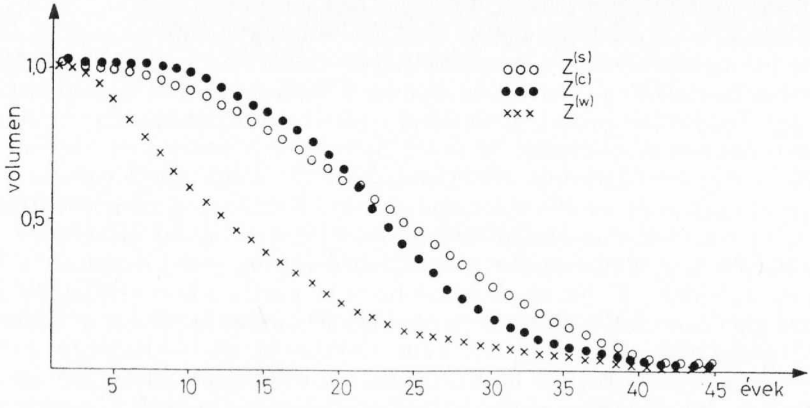
$$S_t^{(W)} = \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^{m} \max \left\{ 0; \frac{w_i}{t_{v_i}} \sin \frac{\pi}{t_{v_i}} t \right\}. \tag{6}$$

A súlyozott cosinus függvény tehát az egyszerűnek általánosított formája. A két függvény akkor egyezik meg egymással, ha az egész állomány egyetlenegy csoportból áll. Egynél több csoport esetén legalább egy olyan csoport van, ahol a maximális élettartam kisebb, mint v és ezért a csoport, és következésképpen az egész aggregátum, túlélési függvénye meredekebb lesz, mint a nem súlyozott, egyszerű változatnál.

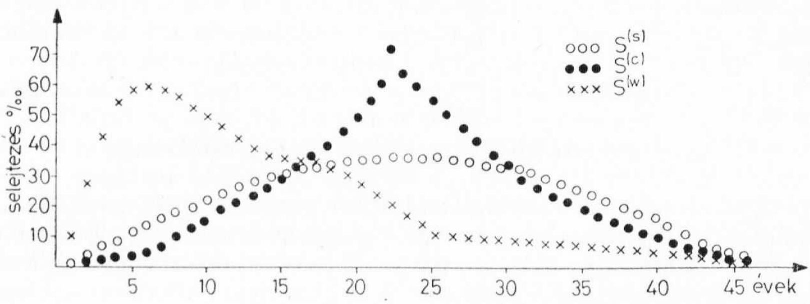
Ez azt jelenti, hogy míg az egyszerű függvénynél félidőben a születési terjedelemnek pont a fele van még életben, a súlyozott változatnál kevesebb, mint a fele. Hogy mennyivel kevesebb, az attól függ, hogy mekkora a különbség a legrövidebb és leghosszabb élettartamok között és milyen a súlya a rövidebb élettartamú csoportoknak.

Mindhárom függvény túlélési és selejtezési részarányait az elsőtől a negyvenötödik évig a 2. és a 3. ábra mutatja. A $Z^{(W)}$ függvény, eltérően a másik kettőtől, nem tiszta elméleti konstrukció. Félig elméleti, mert a csoportfüggvények egyszerű cosinus függvények, és félig empirikus, mert a maximális élettartamok és a csoportok részarányai tényleges adatok. Az ábrákon szereplő $Z^{(W)}$ és $S^{(W)}$ függvényeket a teljes magyar iparra jellemző maximális élettartamok és megoszlások alapján számítottuk ki.

A 3. ábrából látszik különösen jól, hogy az elemzett függvényváltozatok három különböző selejtezési magatartást testesítenek meg. Ezeket a továbbiakban *centrális*, *túlzottan centrális* és *korai* selejtezési típusoknak nevezzük. Fő vonásaikat az 1. táblázatban foglaljuk össze.



2. ábra. Túlélési függvények



3. ábra. Selejtezési függvények

1. táblázat

Selejtezési típusok és jellegzetességeik

A függvény szimbóluma	Selejtezési típus megnevezése	A selejtezés jellegzetességei					Standard életkor, év	Selejtezés standard korban, ezrelék
		selejtezés			legnagyobb selejtezés			
		0–15	15–30	30–45				
		évek között az összes százalékban			éve (i)	mértéke ezrelék		
$S^{(S)}$	centrális	25	50	25	22; 23	35	23,5	35
$S^{(C)}$	túlzottan centrális	19	66	15	22	70	22,6	65
$S^{(W)}$	korai	65	28	7	6; 7	58	11,9	40

A centrális selejtezést előíró $Z^{(S)}$ túlélési függvénynél a selejtezések fele esik az élettartam középső harmadára, a másik fele egyenletesen oszlik meg az első és a harmadik között. Az üzembehelyezéstől a standard életkor[4] eléréséig a selejtezés lassuló ütemben nő, a standard életkornál eléri csúcspontját (itt a legmagasabb a selejtezési részarány), majd gyorsuló ütemben csökken a maximális élettartam eléréséig.

A túlzottan centrális selejtezést kimutató $Z^{(C)}$ túlélési görbénél a selejtezés késleltetve, csak 6 év eltelte után indul meg. Ezután meredeken fut fel míg el nem éri a maximális selejtezési részarányt a 22. év tájékán. Mivel a selejtezés később indult meg, a maximális selejtezési részarány jóval nagyobb, mintegy kétszerese az előzőnek. Ez az eloszlás ebben az esetben is centrális, méghozzá túlzottan az, hiszen az összes selejtezés kétharmadára kerül sor az élettartam középső szakaszában.

A $Z^{(W)}$ súlyozott túlélési függvény korai selejtezést feltételez: az összes selejtezésnek közel kétharmada az első élet-harmadra esik. Legnagyobb a selejtezés mértéke a 6. és 7. években. Ezután a selejtezési százalék a 26. év eléréséig közepes, majd innen a teljes kihalásig lassú ütemben csökken.

Nemcsak a selejtezés időbeli megoszlásában, de a standard életkor tekintetében is jelentősek a különbségek a túlélési függvények között. A standard életkor durván kétszer olyan magas a centrális eloszlású selejtezésnél, mint a korainál. Ez egyben azt is jelenti, hogy a korai típusnál az első félidőben kétszer olyan gyorsan selejteznek, mint a centrálisoknál.

Módszer a túlélési függvények közötti választásra

Empirikus vizsgálatok esetén, az elméleti megfontolások mellett, segíthet a különböző túlélési függvények közötti választásban a gyakorlati próba, hiszen nyilvánvaló, hogy mindig azt a selejtezési-túlélési függvényt célszerű alkalmazni, amely a lehető legjobban fejezi ki a vizsgálatban szereplő gépcsoport tényleges selejtezési tulajdonságait.

A függvények „kipróbálásának" egyik lehetséges módja, — ha rendelkezésre állnak a beruházási adatok mellett az állomány alakulását kifejező idősorok is, — a következő lehet: a 7. formula segítségével egy adott időpontban már meglévő kezdőállományból kiindulva, és az egymást követő beruházásokat figyelembe véve, a számításba jöhető túlélési függvényekkel megbecsüljük a gépállományt.

$$\hat{K}_t = K_0(1 - s_0)^t + I_0 Z_{t-1} + I_1 Z_{t-2} + \ldots + I_k Z_{t-(k+1)} + \ldots + I_{t-2} Z_1 + I_{t-1} Z_0, \tag{7}$$

ahol

$\hat{K}_t$ = a becsült gépállomány a t-edik évben,
K_0 = a kezdőállomnáy,
s_0 = a kezdőállomány selejtezési aránya, %-ban,
I_t = beruházás a t-edik évben,
Z_t = túlélési részarány a t-edik évben.

[4] Standard életkornak nevezzük azt az életkort, amit a beruházott állománynak épp a fele ér meg.

A formula jobb oldalán levő első tag azt fejezi ki, hogy mennyi gép maradt a t-edik évre a kezdőállományból, K_0-ból azonos s_0 ütemű selejtezést feltételezve. A második tag az induló évi beruházásnak (I_0), a harmadik az első évi beruházásnak (I_1), s.i.t. a t-edik évben még életben lévő részét mutatja. A beruházások késleltetve vannak: a t évi beruházás a következő, $t+1$-edik évben jelenik meg először, méghozzá teljes terjedelmében.

Az állomány becsült és tényleges értékeinek összehasonlításából következtethetünk arra, hogy melyik függvény írja le jobban a valóságos selejtezést. Minél kisebb a két adatsor közötti u.n. mini-quad módszerrel meghatározott eltérés, amit itt a hasonlóság alapján covarianciának nevezünk, annál jobb a függvény.

A módszer alkalmazásánál általában nehézséget okoz az, hogy a kezdőállomány évjáratonkénti összetétele nem ismeretes. Míg tehát az állomány növekményének termelésből való kilépésére a túlélési függvények receptet adnak, a kezdőállomány selejtezésénél feltételezésekkel kell élni. A (7) formulában a sok közül az egyik lehetséges megoldást választottuk. Feltételeztük, hogy a kezdőállomány selejtezésének üteme, s_0 állandó. Magát az ütemet vagy más források alapján becsüljük, „kívülről visszük be" a modellbe, vagy endogén változónak tekintve kiszámoljuk. Az utóbbi esetben a (7) képlet segítségével, K_0, I és Z előre megadott értékei mellett azt az s_0 selejtezési ütemet keressük, amelynél a tényleges és a becsült gépállomány közötti eltérést kifejező covariancia minimális.

A selejtezési ütem meghatározásával egyidőben megkapjuk azokat a covariancia értékeket is, amelyek alapján a túlélési függvények rangsorolása elkészíthető. A rangsorolás alapjául szolgáló tényleges és becsült értékek közötti eltéréseket azonban ebben az esetben s_0 választott értéke is befolyásolja. Előfordulhat, hogy egyik vagy másik túlélési függvény nem azért bizonyul jobbnak mint a többi, mert az általa előírt selejtezési séma a valóságot jobban megközelíti, hanem azért, mert a program az eltérések minimalizálása érdekében irreálisan alacsony vagy magas selejtezési százalékot választ a kezdőállomány leírására. Ez a viselkedés csak akkor okoz komoly zavart a rangsorolásban, ha a kezdőállomány súlya az egész időszakban nagy (vagy azért, mert a vizsgált időszak rövid, vagy azért, mert a beruházások színvonala alacsony, vagy mindkét ok egyidejű fellépése miatt) és a selejtezési ütemek jelentősen eltérnek egymástól. Az előző két jelenség egyidejű fennállása esetén célszerű a számítás megkezdése előtt s_0-ra a reális lehetőségeket figyelembe vevő, tól—ig határokat megadni.

Az eredmények értékelésénél figyelembe kell venni, hogy a túlélési függvényekkel a beruházásokból csak akkor becsülhető száz százalékos pontossággal az állomány, ha a gépek élettartam-struktúrája az időben nem változik. Ennek szigorú feltétele, hogy minden évben ugyanolyan legyen az üzembe helyezések élettartam-struktúrája. Kicsi a valószínűsége annak, hogy ez a feltétel maradéktalanul teljesül. Ezért mutatkozhatnak kisebb-nagyobb eltérések a tényleges és becsült adatok között. Abban az esetben, ha az élettartam-struktúra nem változik tendenciózusan, az alul és felülbecslések éves szinten kis mértékűek és hosszabb idő átlagában kiegyenlítik egymást.

Empirikus vizsgálat az ipar selejtezési és túlélési függvényeinek meghatározására

A magyar ipar aggregált selejtezési és túlélési függvényeinek empirikus vizsgálatáról számolok be a most következő részben.

Az elvégzett számításokból módszertani és gyakorlati eredményekre lehetett jutni. A módszertani kísérlet a különböző típusú függvények alkalmasságára, a gyakorlati eredmények, az ipari gép-aggregátumok selejtezési és túlélési jellemzőire vetnek fényt.

A vizsgálat köre és az átfogott időszak

Az ipari gépállomány selejtezési és túlélési viselkedését az 1950—75 közötti időszak adatai alapján tanulmányoztam.

Az ipar, a feldolgozóipar és ágazatai szerepelnek a vizsgálatban. A feldolgozóipar ágazati bontása: kohászat, építőanyagipar, gépipar, vegyipar, könnyűipar, élelmiszeripar.

Az adatok

A vizsgálat elvégzéséhez a számítás lépéseinek a sorrendjében a következő adatokra volt szükség; a gépek élettartam-struktúrája; a várható maximális élettartamok; a gépállomány idősora; a beruházások idősora.

A gépállomány összetevődését különböző várható élettartamú csoportokból (az élettartam struktúrát) és az egyes csoportokhoz tartozó maximális élettartamokat a gépek leírási kulcsai alapján lehet meghatározni. A Központi Statisztikai Hivatal 1968-as állóeszköz felmérésének eredményeit összefoglaló kiadvány[5] 20. *Az állóeszközök bruttó értéke leírási kulcsok szerint* c. táblája tartalmazza a szükséges adatokat. E táblában a berendezések, felszerelések és járművek leírási kulcsaik szerint vannak csoportokba sorolva. Az eredeti felmérés 9 csoportot különböztet meg, amelyet hattá vontam össze.[6] Minden csoporthoz megvannak a tól—ig leírási kulcsok. A maximális élettartam a definíció szerint a kisebbik leírási kulcs reciproka.

A gépállományt és a beruházásokat becsülni kellett az időszak első, 1950-től 1959-ig terjedő felére. Az 1960-as gépállomány adatból kiindulva a termelő állóeszközök volumenindexével (az index a gépekre nem állt rendelkezésre) képeztem az 1950—1959-es adatokat.[7] A beruházásokat pedig az állományváltozásból becsültem az 1960—65-ös átlagos, de ágazatonként differenciált selejtezési százalékokat figyelembe véve. (Pl. az 1950-es beruházás egyenlő az 1951-es állomány és a kiselejtezéssel csökkentett 1950-es állomány különbsége.) E becslési mód következtében a számításokban az *üzembe helyezett* és nem az összes beruházás szerepel. Ezzel összhangban a további évek beruházási adatait az állóeszköz mérlegek üzembe helyezési sorából kellett venni.[8] Az állomány adatok természetesen szintén innen származnak. A mindenkori gépállomány az állóeszköz mérlegek január 1-i nyitóállománya.

[5] A vállalatok és szövetkezetek [1970].

[6] A három leghosszabb és a két legrövidebb élettartamú gépcsoport súlya igen kicsi. E számításnál nem indokolt külön-külön kezelni őket.

[7] Az adatok forrása: az állami ipar termelési függvényszámításai [1971].

[8] Az adatok forrása: Népgazdasági Mérlegek [1971] és A nemzeti vagyon [1979].

Minden az állományt és változást kifejező adat 1968-as áron van megadva, azon az áron, amit az a KSH felmérés alkalmazott, ahonnan az előbb említett élettartam struktúrák is származnak.

A „legjobb" túlélési függvény

Különböző túlélési függvényekkel ugyanazokból a beruházási adatokból különböző gépállomány sorok becsülhetők, „építhetők fel". A becslések közül amint már kifejtettem, az a legjobb, amellyel a tényleges, a statisztikákban szereplő adatsorokat a legjobban lehet megközelíteni.

Az ipari gépállomány becslésére három (az egyszerű, az összetolt és a súlyozott cosinus) függvényt használtam fel.

A számítások azt mutatták, hogy a becslésnek a tényadatoktól való eltérése a súlyozott cosinus függvénynél a legkisebb. A másik két esetben a becslési hiba az előző érték többszöröse. Az eredményeket a 2. táblázat foglalja össze.

2. táblázat

A túlélési függvények sorrendje a becslés pontossága alapján

A túlélési függvény		Covariancia	Sorrend a becslés pontossága alapján
Jele	Megnevezése		
$Z^{(S)}$	egyszerű	0,3039	2.
$Z^{(C)}$	összetolt	1,2329	3.
$Z^{(W)}$	súlyozott	0,0132	1.

Mivel a viszonylag alacsony covariancia is takarhat esetenként nagy vagy szisztematikus eltéréseket, nemcsak az összevont mutatót, de a becsült és a tényleges adatok közötti évenkénti különbségeket is célszerű megvizsgálni.

A 3. táblázatból és a 4. ábrából jól látszik, hogy a becslés mindhárom függvénynél szisztematikusan tér el a tényleges adatoktól. Az egyszerű és az összetolt cosinus függvények az időszak elejének gépállományát a ténylegesnél alacsonyabbra, az időszak végi állományt pedig magasabbra becsülik. A súlyozott függvénynél az ellenkező tendencia érvényesül: a becsült érték az időszak elején magasabb, később alacsonyabb, mint a tényleges. Előjelváltó szisztematikus eltérésnek nevezhetjük az ilyen tulajdonságokkal bíró becsléseket, megkülönböztetésül azoktól, amelyeknél minden adatot vagy felül- vagy alulbecsülünk.

Nyilvánvaló, hogy ha a becslés az egész időszakban meghaladja a statisztikai adatokat, a túlélési függvény a valóságosnál kevesebbet selejtez. A statisztikai állománytól rendszeresen elmaradó becslés pedig a ténylegesnél magasabb függvény szerint selejtezésre utal.

Hogyan értelmezhető azonban az előjel váltás. Hogyan lehet az, hogy a függvény először túl sokat, majd túl keveset (vagy fordítva) selejtez? Az előjel váltásra kétféle magyarázat adódik. Az egyik szerint, a vizsgált időszakban megváltoznak a selejtezési tulajdonságok és a túlélési függvény ezt a változást nem tudja követni. A másik lehetőség az, hogy az előjel váltást nem a valóság és a függvény közötti eltérés okozza, hanem valamilyen más, külső zavaró tényező.

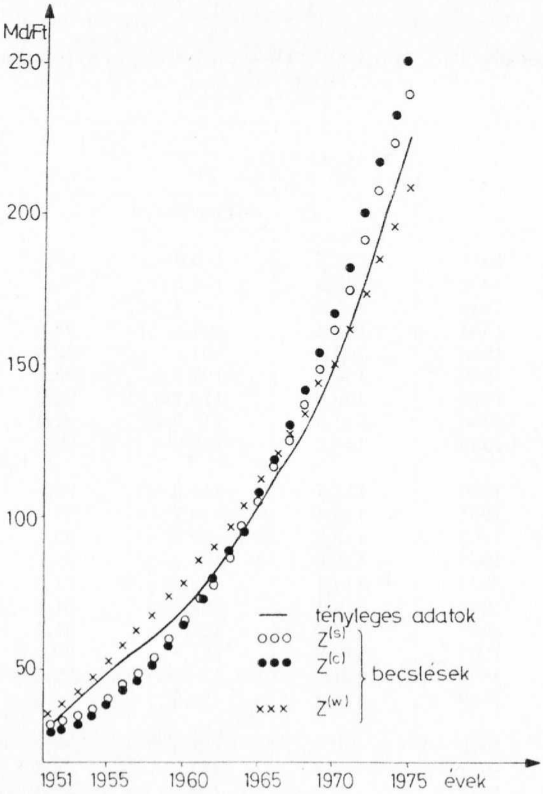
3. táblázat

A gépállomány legjobb becsült értékei a tényleges érték százalékában
(Ipar összesen)

Év	Becslés a		
	$Z^{(S)}$	$Z^{(C)}$	$Z^{(W)}$
	túlélési függvénnyel		
1951	94,7	92,6	104,1
1952	89,7	86,4	106,2
1953	84,0	80,6	105,1
1954	83,0	78,8	106,2
1955	82,2	78,2	106,5
1956	83,0	79,3	107,6
1957	86,9	83,7	111,5
1958	90,0	87,2	113,5
1959	91,8	89,8	113,6
1960	93,1	91,6	112,2
1961	94,8	94,2	111,2
1962	95,6	95,7	109,5
1963	97,2	97,9	108,2
1964	99,3	100,6	107,6
1965	101,5	103,4	107,1
1966	103,0	105,5	106,0
1967	104,3	107,2	104,7
1968	108,0	111,5	106,0
1969	107,6	111,5	103,3
1970	107,2	111,4	100,7
1971	106,9	111,4	98,5
1972	106,7	111,2	96,6
1973	106,0	110,6	94,3
1974	106,0	110,7	92,8
1975	105,4	110,0	90,7

Az első esetben az előjelváltó szisztematikus eltérések azt jelzik, hogy a túlélési függvény nem képes a valóságban végbemenő selejtezést jól leírni. A második esetben a függvény alkalmasságát nem kell megkérdőjelezni, de megfelelő magyarázatot kell adni az eltérések alakulására.

Belátható, hogy jelen esetben az előjel-váltás a kezdőállománnyal, illetve azzal a feltételezéssel hozható összefüggésbe, hogy a kezdőállományra más selejtezési szabályt fogadtunk el, mint a későbbi üzembehelyezésekre. Ha a kezdőállomány átlagos selejtezési üteme nem egyezik meg a függvény szerintivel mindaddig, amíg az új állomány nem kerül túlsúlyba, az egész állomány (a kezdő plusz növekmény) selejtezése szükségszerűen tér el a függvény által előírttól. Amikor a kezdőállományt gyorsabban selejtezik, mint az újakat, az eltérés pozitív lesz, ami azt jelenti, hogy az időszak elején a selejtezés gyorsabb, mint később. A kezdőállomány lassabb selejtezése esetén az eredmény fordított: ekkor a kezdeti alacsonyabb ütemet magasabb váltja fel. A kezdőállománynak betudható zavarás annál nagyobb, minél nagyobb a különbség a kezdőállomány selejtezési üteme és a túlélési függvény szerinti átlagos selejtezés között, és akkor tart sokáig, ha lassú a beruházás, s így a kezdőállomány az egészben hosszú ideig jelentős súlyt képvisel.



4. ábra. A gépállomány tényleges és becsült értékei (Ipar összesen)

A kezdőállomány zavaró szerepéről az adatok is árulkodnak: (1) igen nagy a különbség a kezdőállomány választott és a túlélési függvények átlagos selejtezési százaléka között (lásd a 4. táblázatot); (2) ha a kezdőállományt is a függ-

4. táblázat

A kezdőállomány és a túlélési függvények átlagos selejtezési százaléka

A túlélési függvény jele	A túlélési függvény megnevezése	A kezdőállomány választott[1] selejtezési %-a	A túlélési függvényekhez tartozó átlagos[2] selejtezési %
$Z^{(S)}$	Egyszerű	10,5	2,0
$Z^{(C)}$	Összetolt	12,7	1,5
$Z^{(W)}$	Súlyozott	0,3	5,0

Megjegyzések a táblázathoz:

1. A program a már ismertetett módon úgy választja meg a kezdőállomány selejtezési százalékát, hogy a becsült és a tényleges adatok közötti különbség minimális legyen.

2. A túlélési függvényekhez tartozó átlagos selejtezési százalék a függvény formájától és az állomány kor szerinti összetételétől függ. Ebben az oszlopban szereplő százalék-adatokat az 1950. évi ipari gépállományból kindulva, a beruházási adatokat felhasználva a megfelelő túlélési függvényekkel végzett becslés alapján számítottuk ki. A kezdőállomány zavaró hatását kiküszöbölendő csak az utolsó 5 év (1970–1975) selejtezési százalékainak átlagát vettük.

5. táblázat

A gépállomány átlagos becsült értékei a tényleges érték százalékában
(Ipar összesen)

Év	Becslés a		
	$Z^{(S)}$	$Z^{(C)}$	$Z^{(W)}$
	túlélési függvénnyel		
1951	102,7	103,0	99,7
1952	103,5	104,3	98,4
1953	101,5	102,7	94,7
1954	102,4	104,0	93,8
1955	103,2	104,8	92,9
1956	104,9	107,1	93,1
1957	109,6	112,2	95,9
1958	113,0	116,0	97,0
1959	114,5	117,9	96,8
1960	114,7	118,6	95,5
1961	115,4	119,7	94,8
1962	115,6	120,2	93,1
1963	116,0	121,0	92,2
1964	117,1	122,4	91,9
1965	118,1	123,8	91,9
1966	118,6	124,3	91,5
1967	118,9	124,9	90,8
1968	121,8	128,2	92,2
1969	120,4	126,9	90,2
1970	119,0	125,7	88,2
1971	117,8	124,3	86,8
1972	116,5	123,0	85,7
1973	114,9	121,4	84,1
1974	114,3	120,6	83,1
1975	112,9	119,1	81,6

Megjegyzés: Az átlagos becsült értékek meghatározásakor a kezdőállomány a megfelelő függvényhez tartozó átlagos selejtezési százalékkal (rendre 2,0, 1,5 és 5) íródik le.

vények által javasolt ütemben vonják ki a termelésből az előjelváltás megszűnik, az egyszerű és az összetolt cosinus függvények az egész időszakban nagyobb, a súlyozott alacsonyabb állományt becsül a ténylegesnél. (Lásd az 5. táblázatot.)

Figyelemre méltó, hogy milyen lényeges eltérés van a kezdőállomány selejtezésére adott javaslatok között. Az egyszerű és összetolt függvények 10–12%-os selejtezési üteme a valósághoz mérve irreális, hiszen az átlagos selejtezés a megfigyelések szerint nem több 2–3%-nál. (Lásd a 6. táblázatot.)

A súlyozott túlélési függvénynél a becslés akkor a legjobb, ha a kezdőállományt 0,3%-os ütemben selejtezik ki. Első pillanatra úgy tűnhet, hogy ez meg túl lassú selejtezés. De ha figyelembe vesszük, hogy ennek az állománynak a nagy része minden valószínűség szerint igen tartós (a háborút átvészelő és felújításra érdemes) hosszú életű gépekből áll, már reálisabbnak tűnik az eredmény. Statisztikai evidenciák is megerősítik ezt a sejtést. Rácz Jenő

6. táblázat

Selejtezési százalékok
(Ipar összesen)
(1960–1975)

Év	Kiselejtezett gépek az összes állomány %-ában
1960	2,1
1961	2,1
1962	2,1
1963	2,2
1964	2,2
1965	2,3
1966	2,3
1967	3,7
1968	1,1
1969	1,2
1970	2,2
1971	2,2
1972	1,9
1973	2,4
1974	2,3
1975	2,1

Forrás: Népgazdasági Mérlegek (1971). A nemzeti vagyon (1979).

1965-re 24%-osnak becsülte az 1950 előtti állomány részesedését az összes állóeszközben.[9]

A gépek egy csoportjára, a vas és fémmegmunkáló gépekre vonatkozó becslés még magasabb, 40%-os. A súlyozott termelési függvénynél 0,3%-os selejtezés mellett 1965-ben a kezdőállomány az összes 27%-a, tehát közel áll az előbbi becsléshez. A másik két függvény által feltételezett 10–12%-os selejtezés irrealitását pedig az is mutatja, hogy mellettük az 1965-ös állománynak az 1950 előtti csupán 6, ill. 4 százaléka lenne.

Az előzőekből következik, hogy az előjel-váltás a kezdőállomány selejtezésére tett feltevéseknek és *nem* a túlélési függvények és a valóság közötti eltérő selejtezési gyakorlatnak tulajdonítható. Továbbra is nyitott kérdés azonban, hogy a becsült és a statisztikában szereplő adatok miért térnek el egymástól. Itt is kétféle magyarázat adódik: az egyik szerint, a túlélési függvények műszaki tulajdonságok által meghatározott selejtezési százaléktól eltérő (a súlyozott túlélési föggvénynél az előbbit meghaladó, a másik kettőnél azt el nem érő) ütemet írnak elő. A másik magyarázat az eltérést azzal hozza összefüggésbe, hogy a valóságban nem annyit: vagy többet vagy kevesebbet selejteznek ki, mint amennyi műszaki alapon indokolt. Az első esetben az eltérések a túlélési függvényben lévő hibára hívják fel a figyelmet, a másodikban maga a függvény vétlen, a becslés megfelelő lenne az elméleti elvárások és a gyakorlati megvalósítás összhangja esetén.

Mindenekelőtt azt kell tehát tisztázni, hogy mi a helyzet a valóságban: a selejtezés a gazdasági és műszaki avulást kifejezni hivatott értékcsökkenési

[9] Rácz (1966) 163–174. o.

leírási kulcs előírásai szerint alakul-e vagy sem. A szakirodalomban tükröződő általános megítélés szerint a tényleges selejtezés *elmarad* az elméletileg indokolttól.[10] Az elmaradás mértékét és okait a szakemberek különbözőnek tartják.[11] A rendszeres alulselejtezés miatt a nullára leírt, de ki nem selejtezett állomány volumene évről-évre nő. Míg 1970-ben a nullára leírt állomány csupán 5%-át tette ki az összesnek, öt év alatt ez a részarány több mint két és félszeresére nőtt. 1975-ben az ipari gépállomány 13%-a volt nullára leírva.

A jelenlegi gyakorlat szerint a nullára leírt, de ki nem selejtezett állomány a bruttó gépérték részét képezi. Következésképpen, a statisztikai gépállomány a selejtezések elmaradása esetén és annak mértékében, meghaladja az elméletileg üzemképesnek tartott állományt.[12]

A túlélési függvények segítségével végzett állománybecslésnél abból a feltevésből indultunk ki, hogy az értékcsökkenési leírási kulcsok által kifejezett gép-élettartamok jól közelítik a tényleges működési időt. E feltevés másképpen azt jelenti, hogy a leírt gépek a termelésben már nem használhatók, következésképpen állományba tartozásuk sem indokolt. A túlélési függvények a leírt állományt ezért teljes mértékben selejtezésre javasolják.

A valóságra jellemző *részleges* és a túlélési függvények szerinti *teljes* selejtezés közötti különbség magyarázatul szolgálhat arra, hogy a túlélési függvénnyel becsült állomány miért *alacsonyabb*, mint a tényleges. A súlyozott túlélési függvény becslési hibája tehát a tényleges alul-selejtezéssel lehet kapcsolatban. Indokolt ezért feltételezni, hogy ez a függvény — az állomány szisztematikus alulbecslése ellenére — alkalmas a selejtezési viselkedés leírására.

Az egyszerű és az összetolt túlélési függvények még a nullára leírt, de ki nem selejtezett gépréssel növelt tényleges állománynál is magasabb értéket becsülnek. A túlbecslésre mentséget nem találván fel kell tételezni, hogy ezek a függvények formájuknál fogva nem jól írják le a selejtezést.

Az előzőeket összefoglalva megállapítható, hogy a vizsgált három túlélési függvény közül az ipari gépállomány selejtezési-túlélési tulajdonságainak leírására a súlyozott formula a legmegfelelőbb, mert (1) a súlyozott cosinus függvénnyel becsült állomány-értékeknek a tényleges adataitól való eltérése a legkisebb; (2) az 1950 előtti állomány selejtezési ütemére adott becslés a legreálisabb; (3) a becsléseknek a tényleges adatokból való elmaradása nem a függvény formájából ered, hanem a valóságos selejtezési gyakorlat következménye.

A teljes gépállomány becslésével egyidőben készültek el a feldolgozóipar egyes ágazataira vonatkozó számítások is. Az eredmények megegyeztek az ipariakkal. Egyetlen kivételtől, a kohászattól eltekintve a súlyozott túlélési függvényekkel lehetett a legkisebb hibával becsülni a statisztikai állományt. (Lásd a 7. táblázatot.) A táblázatban az egyszerű túlélés függvénynél minden vonatkozásban kedvezőtlenebbnek bizonyult összetolt cosinus függvénnyel nyert adatot már nem szerepeltettük.

[10] Benyácz [1980]; Berend [1979]; Dániel [1976]; Randótzi [1976]; Tompa [1978].

[11] Berend Iván [1979] szerint a nullára leírt ipari gépeknek és berendezéseknek csupán a felét selejtezték ki 1969 és 1974 között. Radnótzi János [1976] a selejtezési százalék és az értékcsökkenési leírási kulcs közötti összefüggéseket elemezve a selejtezések elmaradását az 1970—1975-ös periódusra jóval alacsonyabbra (az összes állóeszköznél kb. 10%-ra) becsüli.

[12] A gyakorlatban a nullára leírt gépek sokféle ok miatt még üzemképesek lehetnek. Például azért, mert eredetileg nem jól állapították meg a várható élettartamot, mert a gépeket időközben felújították, sőt.

7. táblázat

Az ágazati becslések pontossága

Ágazatok	A covariancia értéke az egyszerű túlélési függvénnyel végzett becslésnél	A covariancia értéke a súlyozott túlélési függvénnyel végzett becslésnél
Kohászat	$3{,}33 \cdot 10^{-6}$	$7{,}27 \cdot 10^{-6}$
Gépipar	$1{,}75 \cdot 10^{-2}$	$3{,}18 \cdot 10^{-4}$
Építőanyagipar	$3{,}93 \cdot 10^{-5}$	$1{,}04 \cdot 10^{-5}$
Vegyipar	$5{,}72 \cdot 10^{-2}$	$1{,}88 \cdot 10^{-5}$
Könnyűipar	$4{,}45 \cdot 10^{-6}$	$3{,}44 \cdot 10^{-6}$
Élelmiszeripar	$7{,}23 \cdot 10^{-6}$	$5{,}35 \cdot 10^{-8}$
Feldolgozóipar összesen	$4{,}64 \cdot 10^{-5}$	$5{,}88 \cdot 10^{-6}$

8. táblázat

Az alul-becslés átlagos értéke az ágazatokban

Ágazat	Becsült érték a tényleges érték %-ában			
	1951–75	1951–59	1960–69	1970–75
Kohászat	85	94	85	76
Gépipar	81	86	83	75
Építőanyagipar	94	100	94	88
Vegyipar	87	87	87	96
Könnyűipar	85	83	88	85
Élelmiszeripar	93	89	89	100
Feldolgozóipar összesen	87	92	86	82

A 2. és a 7. táblázatban közölt eredmények összehasonlítása azt mutatja, hogy az ágazatoknál a becslés több nagyságrenddel pontosabb, mint az ipari átlagnál. Az aggregáció fokában meglévő különbséggel magyarázható a tapasztalt eltérés. Nyilvánvaló, hogy minél részletesebb a bontás, s ennek következtében minél homogénebb a géppark, annál nagyobb az esély arra, hogy az aggregátumhoz tartozó gépek többségére hasonló – a túlélési függvény által előírt közös – selejtezési viselkedés jellemző, s ezáltal javul a becslés pontossága.

A feldolgozóiparban és ágazataiban, éppúgy mint az ipar összesennél, a súlyozott túlélési függvényekkel becsült gépállomány általában alacsonyabb a statisztikákban szereplőknél. A becslés pontossága ágazatonként és időszakonként, amint azt a 8. táblázat mutatja, változik.

Az egész vizsgált időszakban, 1951–1975 között az átlagos alul-becslés a gépiparban a legnagyobb, majdnem 20%-os, az építőanyag- és az élelmiszeriparban a legkisebb, 6–7%-os. A többi ágazat közepes, 13–15%-os értékkel szerepel.

Az alacsonyabb becsült érték megjelenése itt is azzal magyarázható, hogy a tényleges selejtezések elmaradnak a függvények által előírttól. (Lásd a 9. táblázatot.) Ahol a lemaradás nagy mértékű és tartós, mint például a gép- és

9. táblázat

Különbségek a selejtezési százalékokban

Ágazat	Tényleges selejtezési százalék a túlélési függvény szerinti százalékban	
	1960—1969	1970—1975
Kohászat	42	29
Gépipar	26	26
Építőanyagipar	49	60
Vegyipar	32	33
Künnyűipar	60	53
Élelmiszeripar	42	71
Feldolgozóipar össz.	38	40

Forrás: Népgazdasági Mérlegek (1971), A nemzeti vagyon (1979).
Magyarázat: A túlélési függvény átlagos selejtezési százalékának számítási módja a 4. táblázat 2. magyarázatában található.

a vegyiparban, vagy ahol a különbség a tényleges és a függvény szerinti selejtezési százalék között nő, ilyen a kohászat és a könnyűipar, az alul-becslés mértéke nagyobb és időben növekvő. Ugyanis mindkét esetben halmozódnak, illetve nőnek a tényleges és a becsült érték közötti eltérések.

A nullára leírt állomány változásából a túlélési függvényekkel nyert állomány-becslésnek a statisztikától való növekvő eltérésére kaphatunk magyarázatot. A gépiparban és a kohászatban, ahol az időszakvégi eltérések a legnagyobbak, a selejtezésre ítélt állomány 1970 és 1975 között az átlagosnál gyorsabban nőtt és 1975-re meghaladta az egész állomány 15%-át. Azokban az ágazatokban ahol az eltérések a legkisebbek, az építőanyag- és az élelmiszeriparban, a nullára leírt állomány viszonylag lassan nőtt a vizsgált időszakban. A vegyipar mindkét jellemzőt tekintve középen helyezkedik el. A könnyűipar pedig az 1960-as évek szokatlanul magas selejtezése miatt igen alacsony kiselejtezésre ítélt állománnyal indul 1970-ben. Az állomány növekedése itt is gyors, az 1975-ös részarány azonban az alacsony kezdőérték miatt elmarad a többitől.

Bár a becsült és a tényleges adatok közötti eltérés alapjában véve a nem kielégítő mértékű selejtezésnek tulajdonítható, ez még nem jelenti azt, hogy minden mozgás párhuzamos. Az élelmiszeriparban az utolsó néhány évben,

10. táblázat

Az alulselejtezés mértéke az ágazatokban

Ágazat	A nullára leírt gépállomány az összes %-ában	
	1970	1975
Kohászat	4	16
Gépipar	6	17
Építőanyagipar	6	11
Vegyipar	5	14
Könnyűipar	3	8
Élelmiszeripar	5	12

például a túlélési függvénnyel túlbecsüljük a tényleges adatokat a nullára leírt állomány egyidejű növekedése mellett. Néhány ágazatban, illetve időszakban a selejtezés-ütembeli különbségekhez képest az alul-becslés túl nagynak, vagy éppen ellenkezőleg, túl alacsonynak tűnhet. Több tényező, mindenekelőtt a statisztikai és a becsült állomány szerkezeti eltérése — amely a nullára leírt és a kiselejtezésre kerülő állomány élettartam-struktúrájának eltéréséből származik — a halmozódások, és bizonyos számításbeli egyszerűsítések is vezethetnek ezekhez az egyébként súlyúkat tekintve nem igazán jelentős anomáliákhoz.

A becslési hibák fenti elemzéséből egyértelműen levonható az a következtetés, hogy az ipari gépek túlélési-selejtezési viselkedését a konkrét élettartam-struktúrákat figyelembe vevő ún. súlyozott túlélési függvényekkel lehet a legjobban leírni. Az ipari gépek aggregált és ágazati selejtezési tulajdonságait ezért a következőkben e függvények segítségével vizsgáljuk.

Selejtezés az iparban és ágazataiban

A tényleges élettartamstruktúrákat figyelembe vevő súlyozott túlélési függvények alapján az ipari gépek selejtezésére a következők jellemzők:

1. Egy-egy évjárat (egyazon évben üzembe helyezett beruházás) selejtezése hosszabb, körülbelül 45 évet átfogó időszak alatt bonyolódik le.

2. A selejtezés üteme az idő folyamán változik. Az üzembe helyezést közvetlenül követő egy-két évben az alacsonyról induló ütem igen gyorsan nő, míg igen korán, a 6. év táján el nem éri maximumát. Ezután az ütem fokozatosan csökken a 25. évig, majd alacsony szinten stabilizálódik, illetve nagyon lassan csökken, mindaddig, amíg az utolsó gépet ki nem vonták a termelésből.

3. A selejtezési ütem fenti változása azt jelenti, hogy a selejtezések volumenének időbeli megoszlása egyenlőtlen. Az egész időszakot tekintve, aránytalanul sokat selejteznek ki az időszak elején: az első 15 évben az évjárat gépeinek közel kétharmadát. A második életharmadban, a 15 és 30 év között további 30 százalék lép ki a termelésből. A korai évek magas selejtezési aránya miatt az utolsó időszakot már csak igen kevés gép éri meg.

A súlyozott függvényekhez tartozó túlélési részarányokat az 1-től a 45. évig a 13. táblázat mutatja. Az ipar túlélési és selejtezési görbéi a 2. és a 3. ábrákon az X-szel jelöltek. A selejtezés legfontosabb jellemzői a 11. táblázatban vannak felsorolva. E táblázatban az ipar összesenre jellemző információk mellett szerepelnek a feldolgozóipar adatai is. A feldolgozóipari gépek selejtezésére

11. táblázat

Selejtezési jellemzők az iparban és feldolgozóiparban

A selejtezés jellemzői		Ipar	Feldolgozó-ipar
A selejtezés megoszlása	0–15	65	67
	15–30 években	28	27
	30–45	7	6
A legnagyobb selejtezés éve(i)		6; 7	7
mértéke ‰		58	60

az átfogott kör különbségéből eredő csekély eltérésektől eltekintve ugyanazok a vonások érvényesek, mint az iparra általában.

Az egyes ágazatokban, az ipari átlaghoz hasonlóan, a selejtezés zöme az időszak első felére esik. Jelentős különbségek vannak azonban az egyes ágazatok között a selejtezési ütemek alakulásában és ennek függvényeként a selejtezés időbeli megoszlásában.

A vizsgálatban szereplő hat feldolgozóipari ágazat a selejtezési jellemzők alapján három csoportba sorolható. Az első csoportba a gép- és a vegyipar, a másodikba a kohászat és a könnyűipar, a harmadikba az építőanyag- és az

12. táblázat

Az ágazati selejtezési görbék főbb jellemzői

Ágazat	A gépek átlagos élettartama	A selejtezés jellegzetességei					
		standard életkor év	a maximális selejtezés		első	második	harmadik
			éve (i)	ezrelékben	élettharmadban selejtezésre kerülő állomány az összes %-ában		
Gépipar	15	9	6	76	77	21	2
Vegyipar	16	9	5	75	74	22	4
Kohászat	19	12	7–10	52	64	31	5
Könnyűipar	20	13	9–11	51	61	33	6
Építőanyagipar	25	13	5	50	56	28	16*
Élelmiszeripar	23	13	6–7	51	56	32	12*

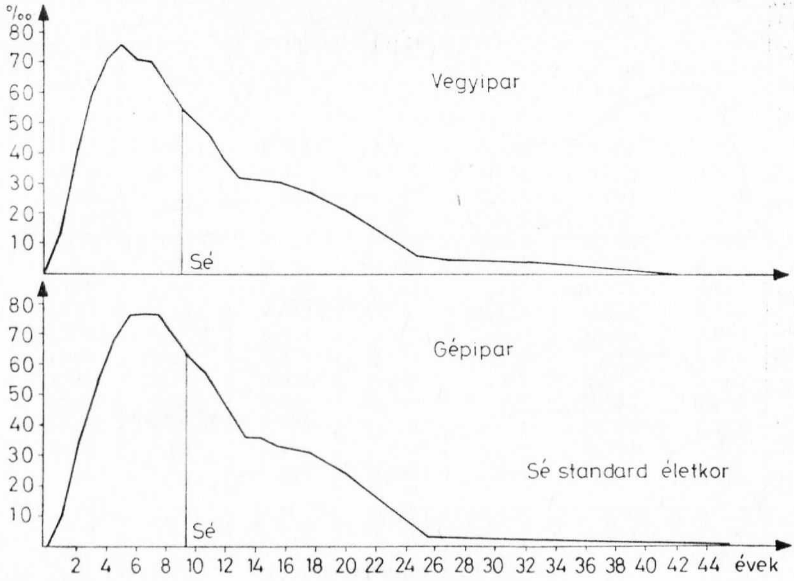
* Ezekben az ágazatokban nem kerül az egész állomány kiselejtezésre a 45. év elérése után. Az itt szereplő selejtezési részarány tartalmazza a 45. év után kiselejtezett állományt is.

élelmiszeripar tartozik. Az ágazatok selejtezési görbéit az 5–7. ábrákon, a selejtezés fontosabb jellemzőit a 12. táblázatban mutatjuk be.

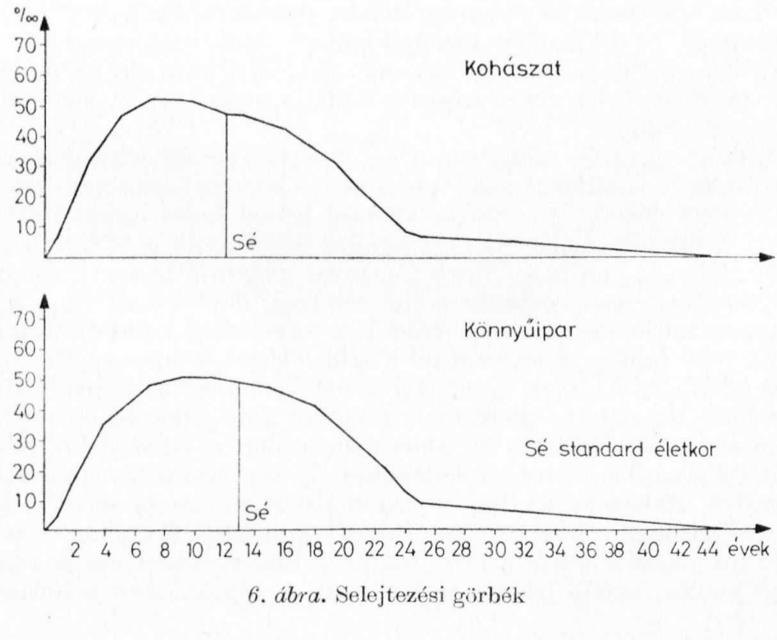
A gép- és a vegyipar selejtezésének menete, mint azt az 5. ábra mutatja, igen hasonlít egymáshoz. E két ágazatban a selejtezés az átlagosnál is jobban koncentrálódik az üzembe helyezést követő évekre. A gép- és vegyipari gépek fele a 10. és háromnegyede a 15. életév elérése előtt kiselejtezésre kerül. Mivel további 70 százalékot selejteznek ki a 15 és 30 év között, az utolsó időszakra alig marad gép.

A kohászat és könnyűipar selejtezési görbéje kvázi-szimmetrikus, azaz ezekben az ágazatokban az állomány 90%-a majdnem normális eloszlás szerint kerül kiselejtezésre. Ez azt jelenti, hogy a 25 éves rövidített szakasz középső harmadára esik a selejtezések közel fele, a második fél pedig megoszlik az első és harmadik harmad között. Kvázi szimmetrikus a görbe, mert az első rövid harmadra valamivel több selejtezés jut, mint a másik kettőre. A standard élettartam ezekben az ágazatokban magasabb. A gépállomány fele 12–13 évig üzemeltethető, további 40%-a pedig a 24–25. év eléréséig. A maximális selejtezés nem egy-egy évre koncentrálódik, mint a gép- és vegyiparnál, hanem több éven keresztül tart. Ennek megfelelően a maximális ütem alacsonyabb.

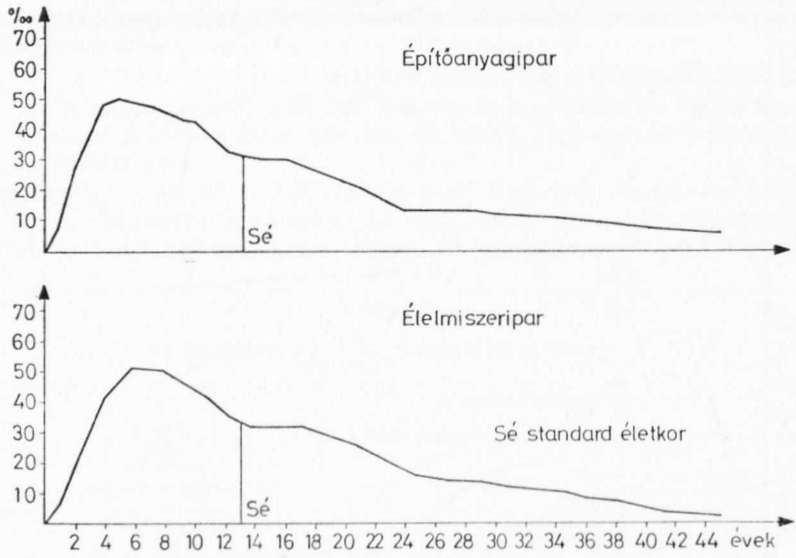
A harmadik csoportba tartozó építőanyag- és élelmiszeripari gépek selejtezésének megkülönböztető vonása, hogy az időszak eleji selejtezési csúcsot,



5. ábra. Selejtezési görbék



6. ábra. Selejtezési görbék



7. *ábra.* Selejtezési görbék

amely az átlagosnál alacsonyabb, az ütem igen lassú csökkenése követi. Ennek eredményeképpen a selejtezés ezekben az ágazatokban hosszan, az egész 45 éves élettartamon, egyes esetekben még azon túl is, elnyúlik. Az első életharmadban az ipari átlagnál jóval kevesebb, a középső szakaszban az átlagnak megfelelő, és az utolsó 15 évben az átlagnál jóval több építőanyag- és élelmiszeripari gép kerül kiselejtezésre.

Felvetődik az a kérdés, hogy mivel magyarázhatók az ágazatok közötti selejtezési különbségek. Az átlagosnál miért gyorsabb a gépcsere a gép- és a vegyiparban, és miért húzódik el az építőanyag- és élelmiszeriparban.

Megítélésem szerint a különbségek nemcsak és nem is elsősorban a gépek fizikai tartósságával, hanem a műszaki fejlődés ütemében meglévő eltérésekkel magyarázhatók.

A selejtezést ugyanis végső soron az értékcsökkenési leírás vezérli (még akkor is, ha ez a vezérlés a valóságban nem tökéletes, azaz nem selejteznek ki minden leírt gépet). Az értékcsökkenési leírási kulcs megállapításánál a gép fizikai tartóssága mellett a műszaki-gazdasági avulást is figyelembe kell venni. (Megint más kérdés az, hogy a magyar gyakorlatban az indokolt mértékben számolnak-e az avulással a kulcsok megállapításánál vagy sem.) Az avulás per definitionem műszaki eredetű: a meglévőnél korszerűbb technikát alkalmazó, jobb minőségű termékeket előállító gépek kifejlesztésének eredménye. A műszaki fejlődésnek gazdasági következményei is vannak, általában nemcsak jobb termékeket gyártanak a korszerűbb gépeken, de ugyanolyan ráfordításmennyiséggel többet is. Amennyiben nincs műszaki fejlődés, a gépeket mindaddig nem érdemes kiselejtezni, amíg üzemszerű tevékenységet tudnak folytatni. Ebben az esetben a maximális élettartamot és ezzel a leírási kulcs nagyságát a gép fizikai tartóssága határozza meg. E tényező másodlagos szerephez jut amint belép a technikai fejlődés következményeként a műszaki-gazdasági avulás, amely jelentősen lerövidíti a gépek hasznos élettartamát.

13. táblázat

Túlélési részarányok

Évek	Kohászat	Gépipar	Építő-anyagipar	Vegyipar	Könnyűipar	Élelmiszer-ipar	Feldolgozó-ipar összesen	Ipar összesen
1	0,993	0,988	0,991	0,987	0,994	0,993	0,991	0,990
2	0,979	0,953	0,964	0,948	0,977	0,973	0,964	0,963
3	0,942	0,900	0,925	0,890	0,950	0,941	0,923	0,921
4	0,903	0,833	0,877	0,820	0,915	0,900	0,871	0,868
5	0,857	0,758	0,827	0,745	0,875	0,853	0,813	0,811
6	0,808	0,682	0,779	0,674	0,831	0,802	0,754	0,753
7	0,756	0,607	0,730	0,604	0,783	0,751	0,694	0,695
8	0,703	0,538	0,684	0,541	0,734	0,701	0,637	0,640
9	0,652	0,477	0,641	0,485	0,683	0,654	0,583	0,589
10	0,600	0,420	0,599	0,434	0,632	0,610	0,532	0,540
11	0,549	0,370	0,561	0,388	0,581	0,569	0,485	0,495
12	0,500	0,329	0,528	0,350	0,531	0,533	0,442	0,454
13	0,453	0,294	0,497	0,318	0,483	0,500	0,403	0,417
14	0,406	0,259	0,467	0,287	0,435	0,469	0,365	0,381
15	0,361	0,226	0,437	0,256	0,388	0,436	0,328	0,346
16	0,317	0,194	0,407	0,226	0,343	0,404	0,292	0,311
17	0,275	0,163	0,379	0,198	0,300	0,372	0,257	0,278
18	0,236	0,153	0,351	0,171	0,259	0,342	0,225	0,246
19	0,201	0,110	0,325	0,147	0,222	0,314	0,195	0,217
20	0,169	0,088	0,301	0,125	0,190	0,287	0,169	0,191
21	0,142	0,070	0,279	0,106	0,161	0,262	0,146	0,168
22	0,120	0,055	0,259	0,091	0,137	0,240	0,126	0,148
23	0,103	0,044	0,242	0,078	0,118	0,220	0,111	0,132
24	0,091	0,037	0,227	0,069	0,105	0,203	0,100	0,119
25	0,083	0,034	0,215	0,063	0,096	0,188	0,092	0,110
26	0,076	0,031	0,203	0,058	0,088	0,173	0,085	0,100
27	0,070	0,028	0,190	0,052	0,079	0,159	0,078	0,092
28	0,063	0,025	0,179	0,047	0,071	0,145	0,071	0,083
29	0,056	0,023	0,167	0,042	0,064	0,131	0,064	0,075
30	0,050	0,020	0,156	0,037	0,056	0,118	0,057	0,067
31	0,044	0,018	0,145	0,032	0,049	0,106	0,051	0,059
32	0,039	0,015	0,134	0,027	0,042	0,094	0,045	0,052
33	0,033	0,013	0,124	0,023	0,036	0,083	0,040	0,045
34	0,028	0,011	0,114	0,019	0,030	0,072	0,034	0,039
35	0,024	0,009	0,105	0,016	0,025	0,062	0,029	0,033
36	0,020	0,007	0,096	0,012	0,020	0,054	0,025	0,027
37	0,016	0,006	0,088	0,010	0,016	0,046	0,021	0,023
38	0,013	0,005	0,081	0,007	0,012	0,038	0,018	00,18
39	0,010	0,003	0,074	0,005	0,009	0,032	0,015	0,015
40	0,008	0,002	0,068	0,003	0,006	0,027	0,012	0,012
41	0,006	0,001	0,062	0,002	0,004	0,023	0,010	0,009
42	0,004		0,057	0,001	0,002	0,020	0,008	0,006
43	0,003		0,052		0,001	0,018	0,006	0,003
44	0,002		0,047			0,016	0,004	0,002
45	0,001		0,043			0,015	0,002	0,001

A technikai fejlődés ütemének ágazati eltérései ily módon magyarázatul szolgálhatnak a különböző túlélési-selejtezési viselkedésekre. A műszaki fejlődés világszerte a gép- és a vegyiparban volt a leggyorsabb az elmúlt évtizedekben. Nem véletlen ezért, hogy nálunk is ezekben az ágazatokban a legjelentősebb a műszaki avulás, s következésképpen legrövidebbek a gép-élettartamok.

A feldolgozóipar többi, „hagyományos" ágazataiban a technikai fejlődés általában közepes mértékű volt. A gépélettartamok, s így a selejtezés is, a kohászatban és a könnyűiparban ennek az átlagos műszaki avulásnak a hatását tükrözik. A gépcserék elhúzódása pedig az építőanyag- és élelmiszeriparokban annak tulajdonítható, hogy e két ágazat fejlesztését sokáig elhanyagoltuk, s így az egyébként átlagos technikai fejlődés hatása sem tudott teljes mértékben kibontakozni. A hetvenes évek elejétől, mindkét ágazatban — az építőanyagiparban fokozottabban — felgyorsuló beruházási tevékenység várhatóan a gépélettartamok rövidüléséhez fog vezetni.

A technikai fejlődés ütemének jövőbeli alakulásától függ tehát végsősoron, hogy a tanulmányban bemutatott, az ipari gépek túlélését és selejtezését leíró görbék mennyire időállóak. Az ágazati ütemkülönbségek mérséklődésével a selejtezések időbeli alakulása is kevésbé fog eltérni egymástól. Nagyon valószínű, hogy legalább egy irányból, az építőanyag- és az élelmiszeripari gépélettartamok megrövidülésével megindul ez az uniformizálódási folyamat.

A túlélési-selejtezési görbék változóképessége természetesen inkább a módszer előnyére mint a hátrányára válik. A gépélettartamok és az élettartamstruktúra tényleges változását rugalmasan követni képes súlyozott túlélési és selejtezési függvények éppen e tulajdonságuk miatt alkalmasabbak az elemzésre, mint az irodalomban eddig javasolt és felhasznált egyszerű változatuk, amely a túlélési-selejtezési viselkedésben sem időbeli, sem ágazati különbségeket nem enged meg.

(Beérkezett: 1982. január 21-én.)

IRODALOM

Az állami ipar termelési függvény számításainak tapasztalatai OAÁH és Infelor, Budapest, 1971.

BEREND, I.: *Eszközigényesség és fejlesztési politika* KJK, Budapest, 1979.

BENYÁCZ, I.: A gyorsított leírás kérdéséhez *Pénzügyi Szemle,* 1980. 6. sz. 435—444. o.

DÁNIEL, T.: A beruházott vagyon amortizációja *Közgazdasági Szemle,* 1976. 2. sz. 129—137. o.

HARTOG den H. and TJAN, H. S.: A Clay-Clay Vintage Model Approach for Sectors of Industry in the Netherlands. *De Economist* 128, NR; 2. 1980. 129—188. pp.

A nemzeti vagyon és az állóeszközállomány 1970—1978 KSH, Budapest, 1979.

Népgazdasági Mérlegek 1960—1970 KSH, Budapest, 1971.

RÁCZ, J.: *Az állóalapok és a termelés összefüggése a magyar iparban* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1966.

RADNÓTZI, J.: Az állóeszköz-állomány korszerűsítésének egyes kérdései *Pénzügyi Szemle,* 1976. 11. sz. 831—843. o.

REDFERN, P.: Net Investment in Fixed Assets in the United Kingdom, 1938—1953. *Journal of the Royal Statistical Society,* Series A. Part II. 1955. 141—191. pp.

TOMPA, M.: Amortizáció és dinamikus szinttartás *Pénzügyi Szemle,* 1978. 2. sz. 115—121. o. *A vállalatok és a szövetkezetek újraértékelt állóeszközállománya 1968 január 1-én* KSH Időszaki Közlemények, KSH, Budapest, 1970.

WARD, M.: *The Measurement of Capital.* OECD, Paris, 1976.

SURVIVAL CURVES AND SCRAPPINGS

Survival curves show what proportions of machines and equipments are scrapped in year 1, 2, . . ., n following their installation. Among the survival curves the simple cosine function (assuming approximately normal distribution of scrap over time) and weighted cosine functions (taking also the life-span structure of stocks into consideration) were examined. In order to determine which type of function is better suited for the description of stocks of machine and equipments the following method was applied. To the initial stocks new installations were added and scraps prescribed by the function deducted. The time series obtained in this way were compared with statistical data. That function was accepted as the better one for which (1) the deviation of estimated data from actual ones was smaller and (in the case of a systematic deviation between the two), (2) a rational explanation could be given for the deviation. According to results of the empirical examination the scrapping of machines and equipments in Hungarian manufacturing industry is more precisely described by the weighted function.

The bulk of scraps takes place, deviating from the approximately normal one, not in the middle, but already in the first half of the period. Sectoral differences are considerable in scrappings. Scraps are mostly concentrated on the early years in the engineering and chemical industries. In light industry and metallurgy the distribution is almost normal, while scraps are least concentrated in building material and food industries. Sectoral differences may be explained by deviating rates of technological obsolescence.

ФУНКЦИИ ПЕРЕЖИТИЯ, СВОЙСТВА БРАКОВКИ

Функции пережития показывают, какая часть машин и оборудований бракуется в первом, во втором и т. д. годах после ввода в эксплуатацию. Среди функций пережития расматривались функции простого косинуса, предполагающие примерно нормальное распределение, и функции взвешенного косинуса, принимающие во внимание также структуру парка по продолжительности службы. Для того, чтобы определить, какой тип функций является наиболее приемлемым для описания парка машин и оборудования, применялся следующий способ. К первоначальному парку причислялись по очереди новые введения в эксплуатацию и отчислялись браковки, установленные функцией. Полученный временной ряд мы сопоставили со статистическими данными, и считали правильной ту функцию, у которой (1) отклонения оценочных данных от фактических меньше, а если между оценочными и фактическими данными наблюдается систематическое отклонение, тогда функцию, у которой (2) отклонения рационально объяснимы. По результатам эмпирического расследования браковка машин и оборудования в венгерской обрабатывающей промышленности точнее описывается взвешенной функцией.

Подавляющая часть браковки, в отличие от примерно нормального распределения производства не в середине периода, а в его первой половине. В машиностроении и в химической промышленности браковка сосредоточивается сильнее, в других отраслях в годы следующие после ввода в эксплуатацию, браковка же в легкой промышленности и в металлургии показывает почти нормальное распределение, а в производстве строительных материалов и продовольственных товаров браковка представляется наименее концентрированной. Различия по отраслям объясняются различными темпами технического-технологического устарения.

Szilágyiné Szemkeő Judit

Egy többcélú ütemezési probléma megoldása (esettanulmány)

Bevezetés

A cikkben egy speciális többcélú gyártásütemezési feladattal foglalkozunk. Olyan vállalatnál merült fel, ahol a termékeket kis szériában, a vásárlók igénye szerinti összetételben gyártják. A probléma az volt, hogy a változó igényeknek megfelelő gyártás egyes gyártóhelyeken a szűk kapacitás miatt akadozott. Az ütemezendő műveletek az alkatrészgyártás műveletei; az esetenként szűk kapacitásúnak bizonyuló gyártóhely az alkatrészgyártó gyáregység egyik üzeme. Itt nagyteljesítményű numerikus vezérlésű forgácsoló gépek vannak. Az alkatrészek igény szerinti gyártását úgy kell megoldani, hogy emellett az NC gépeket – amelyeken a gyártási folyamat fontos műveleteit végzik – a lehető legjobban használják ki. Az NC gépekkel történő megmunkálás előtt jelentős előgyártás van, méghozzá más üzemekben, ezért az NC gépek megfelelő kihasználásához valójában több üzem összehangolt működésére lenne szükség. Az NC gépek folyamatos üzemeltetésének ára azonban semmiképpen sem lehet a műveletközi készletek növelésre. Így merült fel olyan számítógépes program elkészítésének az igénye, amely az NC gépek minél jobb kihasználásának előtérbe helyezésével, egyéb szempontokat is figyelembe véve, műszakokra ütemezi az alkatrészgyártás műveleteit.

Minthogy az adott időszak alkatrészeinek gyártási átfutási idejét az állásidők növelik, az elhúzódó gyártás pedig növeli a pufferkészleteket és a befejezetlen állományt, kapacitást köt le: cél a teljes gyártási átfutási idő minimalizálása is.

Az ütemezett alkatrészgyártás fő feladata a szereldék ellátása. A különböző késztermékeket más-más műhelyben szerelik. Fontos cél a szereldék folyamatos működése is. Ezt a célt úgy is meg lehet fogalmazni, hogy az azonos késztermékhez tartozó alkatrészek befejezési időpontjai között a lehető legkisebb legyen az eltérés.

Az NC gépek jó kihasználását segíti az átállítási idők szempontjából jó terméksorrend meghatározása is.

Az NC gépeken elég sokfajta alkatrész megmunkálására van lehetőség. Beállításuk előtt többféle forgácsoló gépen, természetesen jóval alacsonyabb hatékonysággal végezték azt a munkát, amit ma az NC gépeken végeznek. Ez a hagyományos technológia még ma is él, a régebbi típusú gépek működnek. Ezért mód van arra, hogy ha egy-egy tervidőszakban nem lehet a tervben előírt összes alkatrészt NC gépen megmunkálni, bizonyos termékekre előírhatjuk a hagyományos technológiát. Ilyen esetekben megtakarítás érhető el azáltal, hogy a hagyományos technológiát azokra a termékekre írjuk elő, amelyeknél az NC-technológia kevéssé hatékony a hagyományos technológiához képest.

Az NC gépek ütemezésénél figyelembe kell venni bizonyos műszaki kényszerfeltételeket is. Az alkatrészeket meghatározott felfogókészülékkel kell a gépekre rögzíteni. Mindegyik típusú felfogókészülékből csak egy van, ezért az azonos felfogókészüléket igénylő alkatrészek nem gyárthatók párhuzamosan.

Az ütemezésnél időnként figyelembe kell venni egyes alkatrészek sürgősségét és egyes gépek kiemelt szerepét is.

A feladat megfogalmazása

A probléma matematikai leírásához vezessük be a következő jelöléseket; Legyen $I_N = 1, 2, \ldots, N$ a gyártandó alkatrészek halmaza, p_i az $i \in I_N$ alkatrészből gyártandó sorozat gyártási ideje az NC-n; az i és j közötti átállítási időt jelölje a_{ij} $(i, j \in I_N)$; a_{0j} legyen a j sorozathoz tartozó beállítási idő.

Legyen továbbá e_i az i alkatrész sorozatának NC előtti átfutási ideje, u_i pedig az NC utáni átfutási ideje. A k-adik gépen felhasználható gépórák számát jelöljük T_k-val. ($k = 1, 2, \ldots, K$; K az NC gépek száma.) Legyen végül J a késztermékek száma, és a j késztermékhez tartozó alkatrészek halmaza P_j, azaz $I_N = \bigcup\limits_{j=1}^{J} P_j$.

Feladatunk: határozzuk meg
az i alkatrész gyártásának kezdési időpontját E_i-t,
az i alkatrész gyártásának befejezési időpontját U_i-t,
az i alkatrész NC megmunkálásának kezdési időpontját t_{ie}-t,
az i alkatrész NC megmunkálásának befejezési időpontját t_{ib}-t.

Az ütemezési időszak hossza (napokban) az összes NC gépre azonos, de a meghibásodások, új gyártási programok kipróbálására fordított idők miatt a statisztikák alapján az egyes gépeknél általában más-más hasznos időalappal számolunk. A meghatározandó időadatokat órákban számoljuk, de a gyakorlati megvalósítás lehetőségeit figyelembe véve, a kezdési és befejezési időpontokat végül nem órákban, hanem munkanapokban adjuk meg, megjelölve a műszakot is.

A bevezetett jelölések segítségével a célokat a következőképpen írhatjuk le:

1. A teljes gyártási átfutási idő minimalizálása;

$$\min_{i,j \in I_N} \left| \max_{i \in I_N} U_i - \min_{j \in I_N} E_j \right|$$

2. Az azonos késztermékhez tartozó alkatrészek együtt-tartása:

$$\min_{j=1, 2 \ldots J} \left| \max_{i_1, i_2 \in P_j} (U_{i_1} - U_{i_2}) \right|$$

3. Az átállítási idők minimalizálása:

$$\min_{L(k)} \sum_{k=1}^{K} \sum_{k[i],\, k[i+1] \in L(k)} a_{k[i],\, k[i+1]},$$

ahol

$$L(k) = \{k[1], k[2], \ldots, k[n]\}$$

a k géphez rendelt alkatrészek megmunkálási sorrendje. Az összes lehetséges permutáció közül csak azok a $L(k)$ sorrendek fogadhatók el, amelyek a gépek terhelését a megadott időkorlátokon belül hagyják, azaz teljesül, hogy:

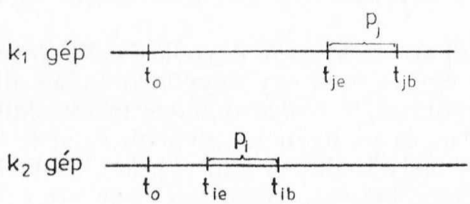
$$F_k = \sum_{k[i]\in L[k]} p_{t[i]} + \sum_{k[i],\,k[i+1]\in L(k)} a_{k[i],k[i+1]} \leq T_k\,.$$

A bevezetésben említett további célok is megfogalmazhatók matematikailag, azonban lényegesen egyszerűbbek az eddigieknél. Például az, hogy műszaki kényszerfeltételek miatt bizonyos alkatrészek nem gyárthatók párhuzamosan, az I_N halmaz egy felosztását jelenti:

$$I_N = \bigcup_{m=1}^{M} S_m.$$

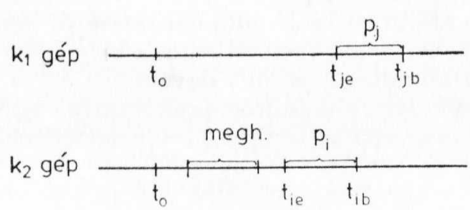
Ez a szempont a 3. cél elérését segíti. Azok között a munkadarabok között, amelyekhez azonos felfogókészüléket használnak, az átállítási idő igen kicsi, tehát, ha ezeket az alkatrészeket az NC gépeken egymás után gyártják, az átállítási idők csökkentését segítik. A párhuzamosságot kizáró feltételt nem is érdemes másképpen megfogni, mint úgy, hogy az ilyen alkatrészeket egymás után soroljuk. Ennek az az oka, hogy a gépek párhuzamosan működnek, és ezért valamelyik meghibásodása előre nem tervezett párhuzamos gyártást okozhat.

előírt gyártási terv:



1a. ábra. $t_{ib} \leq t_{je}$

megvalósulás:



1b. ábra. $t_{ib} > t_{je}$

Ha a problémát meg lehetne oldani többcélú matematikai programozási feladatként exakt módszerekkel, akkor részletes vizsgálati eredményeket közölhetnénk a célfüggvények közti kapcsolatokról. Annak, hogy a heurisztikus megoldás mellett döntöttünk, egyik oka éppen az, hogy a különböző célok közt az összefüggések mérése bonyolult és ugyanakkor megbízhatatlan. Megállapítható például, hogy az átállási idők minimalizálását általában elősegíti az, hogy bizonyos alkatrészeket egymás után kell gyártani, de az is tény, hogy ez a követelmény nem engedi meg az átállási idők szempontjából legjobb sorrend kiválasztását. A teljes gyártási átfutási idő és az átállítási idők minimalizálása között még nehezebben mérhető az összefüggés.

Igen lényegesen befolyásolta az algoritmust az a tényező, hogy különböző gyártási időszakokban más-más súllyal szerepelnek a különböző célok. Azt állapítottuk meg, hogy a probléma megoldásához a többcélú megközelítés helyett jobb, ha a célokat rangsoroljuk és időszakonként a megrendelő igényeinek figyelembevételével határozzuk meg (paraméterek segítségével) a célok prioritását.

Megjegyzések

1. Ismert ütemezési problémának feleltethető meg az első cél, ha az elő és utógyártást úgy képzeljük el, mintha egy-egy ideális gépen folyna a gyártás és az NC gépeket is egyetlen gépnek képzeljük. Ilyen feltételezések mellett azzal a három gépes flow-shop problémával állunk szemben, amelynek célja a teljes átfutási idő minimalizálása. Minthogy teljesül, hogy $\min e_i > \max u_i$ (sőt $\min u_i > \max p_i$ is), ezért a problémát a két gépes Johnson-elv általánosítása [1] alapján lehetne megoldani, ha ez lenne az ütemezés egyetlen célja.

2. Az ütemezés harmadik célfüggvényével kifejezett feladat az irodalomban az „utazó ügynök probléma" megfogalmazásban szerepel általában. Az ütemezési feladatot a következőképp fogalmazhatjuk át utazó ügynök problémává:

Van N város (az alkatrészek) és K ügynök (az NC gépek). Minden városba el kell, hogy jusson egy és csak egy ügynök (minden alkatrészt valamelyik gépen gyártani kell), aki a j városban p_j ideig tartózkodik. Az i és j városok között az utazási idő a_{ij} és a k ügynök legfeljebb T_k ideig lehet úton. Az utazó ügynök problémának nagy irodalma van [1], [2], többféle közelítő eljárás is született a probléma megoldására. Kiemelten tehát erre a problémára is lehetne már kidolgozott megoldási módszert találni, igaz, hogy az exakt megoldások igen lassúak lennének.

A mi esetünkben ennek a részfeladatnak az exakt megoldásával azért sem érdemes kiemelten foglalkozni, mert a $p_i \gg a_{ij}$ (minden i, j-re) jellemzi az adatainkat, azaz az átállítási idők minimalizálásától nem várható túl nagy nyereség. E cél érdekében tehát nem érdemes a megoldási algoritmust nagyon bonyolulttá tenni, a számítógépes időt növelni.

A több célfüggvény miatt, a számítógépes tervezés rugalmassága érdekében, heurisztikus algoritmust készítettünk a probléma megoldására.

Az algoritmus ismertetése

Az algoritmus a következő fontosabb lépésekből áll:

1. Az $A = \{a_{ij}\}$ átállítási mátrix minden sorában megkeresi a legkisebb nem nulla és a legnagyobb értéket. Legyenek ezek x_i illetve y_i $(i \in I_N)$.

2. Ha $\sum\limits_{i \in I_N} (p_i + y_i) > \sum\limits_{k=1}^{K} T_k$, akkor elvégzi az alkatrészek gazdaságosság szerinti csoportosítását. Azok közül a termékek közül irányít az algoritmus a

hagyományos technológiára, amelyeken az NC megmunkálás a legkisebb hasznot eredményezi a hagyományos technológiához képest. (A gazdaságosság szerinti csoportosítás a kétféle technológia időadatai alapján végezhető.)

3. Kijelöli a technológiai előírások szerint egymás után gyártandó alkatrészek S_m halmazait. Az NC gépekre ütemezés szempontjából az S_m halmazok elemeit összevonja egy ideális alkatrésszé. Egy ilyen ideális alkatrész gyártási ideje az összegzett gyártási idő, azaz $q_m = \sum_{j \in S_m} p_j$, mivel az ilyen alkatrészek közötti átállítási idő 0-nak tekinthető. Az S_m halmazok különböző elemei és a többi $k \notin S_m$ alkatrész közti átállítási idők megegyeznek, ezért az S_m halmazokon belüli sorrend a többi ütemezési szempontnak megfelelően alakítható ki. Az egyéb szempontok prioritása a futtatások során paraméterrel adható meg. Mivel az S_m halmazok elemszáma kicsi, (≤ 6), a sorrend az összes lehetséges változat közül a legjobb lehetőség kiválasztásával határozható meg.

4. Az összevont alkatrészek (S_m halmazok) ütemezésénél a gépek közel azonos terhelését, valamint a teljes átfutási idő minimalizálását tekinti célnak az algoritmus.

A gépek közel azonos terhelésének problémája a következő feladatként fogalmazható meg:

Adott T_k ($y = 1, 2, \ldots, K$) hosszúságú szakaszokat adott q_m ($m = 1, 2, \ldots, M$) hosszú diszjunkt szakaszokkal kell lefedni úgy, hogy a le nem fedett szakaszok hossza ne különbözzön lényegesen egymástól, azaz $\max_{h,l} |d_h - d_l|$ minimális legyen, ahol

$$d_k = T_k - \sum_{S_m \subset L'(k)} q_m ,$$

és $L'(k)$ jelöli azt az indexhalmazt, amelybe tartozó q_m hosszúságú szakaszokkal fedjük le a T_k szakaszt.

Az S_m halmazok kijelölése (p_j hosszú szakaszok helyett q_m hosszú szakaszokkal történő lefedés) a felhasználandó szakaszok számát legalább a harmadára csökkenti, ezért a lehetséges lefedések száma — az összevonás nélküli lehetőségekhez képest — lényegesen csökken.

Maga a lefedési algoritmus a következőképpen működik: A q_m értékeket nagyság szerint csökkenő sorrendbe rendezi. Az $L'(k)$ indexhalmazokat úgy alakítja ki, hogy a leghosszabb q_m szakaszt hozzárendeli a T_1 szakaszhoz, az ezután következőkkel mindig azt a legalacsonyabb indexű T_k szakaszt fedi le, amelyből még csak a legrövidebb rész van lefedve a már kiválasztott q_m hosszúságú szakaszokkal. Ha az így kapott $L'(k)$ indexhalmazokkal meghatározott lefedés nem elfogadható, akkor a leghosszabbaktól kezdve páronként felcseréli a q_m szakaszokat a rendezett állományban, figyelembe véve az előző lefedés tapasztalatait, addig, ameddig nem kap egy elfogadható lefedést, illetve ameddig az összes lehetőséget végig nem próbálta. A tapasztalat szerint már legkésőbb a harmadik próbálkozásra elfogadható lefedést kapunk.

5. Az $L'(k)$ halmazok kijelölése még nem jelent sorrendet, csak hozzárendelést. A sorrend az átállítási mátrix alapján határozható meg, ahol ez lényegesnek nevezhető időmegtakarítást eredményez. Az átállítási mátrix minden sorára megnézi, hogy az $y_i > 2x_i$ egyenlőtlenség teljesül-e. Ha egy i-re teljesül ez az egyenlőtlenség és az i, valamint x_i-t realizáló alkatrész ugyanannak az $L'(k)$ indexhalmaznak eleme, a gyártási idejüknek megfelelő hosszúságú szakaszok egymás után kerülnek, ha még nincs rájuk sorrendi előírás. Ha a már

meghatározott sorrendet kellene megváltoztatni, megnézi, hogy érdemes-e végrehajtani a cserét, azaz a csere hatására jobban csökken-e az átállítási idők összege, mint amennyit ront a csere a T_k hosszúságú szakaszok lefedésén. (A $\max_k |d_k - T_k|$ növekszik-e?)

Ha az i és az i után a legkisebb átállítási idővel gyártható alkatrész nem tartozik azonos $L'(k)$ halmazhoz, és egymás után sorolásukkal lényeges idő megtakarítás érhető el, akkor megpróbálja cserékkel azonos $L'(k)$ halmazhoz rendelni őket.

Azokat az elemeket, amelyekre az átállítási idők alapján még nincs kijelölve sorrend, az egyéb paraméterekkel meghatározott prioritási sorba rendezett ütemezési célok alapján sorolja.

A számítógépes megvalósítás tapasztalatai

Az ismertetett algortmus alapján készített programrendszer batch üzemmódban működik, két havonta üzemeltetjük. Egy két hónapos periódus alatt 60—90 féle terméket kell megmunkálni az NC gépeken. A múlt évben egy-egy tervezésnél 3, vagy 4 NC gép folyamatos működésére lehetett számítani. Egy-egy S_m halmaz átlagos elemszáma 3, maximális elemszáma 6 volt.

A rendszer rugalmasságát a már ismertetett paraméterezési lehetőségen kívül (a célok prioritása változtatható) más paraméterek megadásának lehetősége is segíti. Meg lehet adni különleges prioritásokat is: kiemelt fontosságú alkatrészeket, gépeket minden tervidőszakban meg lehet jelölni. Ugyancsak a rugalmasságot növeli, hogy az ütemezés részletes kiírása előtt a rendszer egy vonalas tervet (Gantt diagramot) rajzol az NC gépek terheléséről valamint az alkatrészek teljes gyártási tervéről. Ezek a tervek könnyen, gyorsan áttekinthetők, az esetleges változtatások szükségessége leolvasható róluk. A programok ICL System-4 típusú gépen futottak, a teljes futási időnek, amely 20—25 perc, az algoritmus működése csak kis része; 5—10 perc. A paraméterek módosítása után csak az algoritmust kell újra futtatni, ez nem igényel sok gépidőt. Csak a jóváhagyott vonalas terveknek megfelelő részletes ütemezéseket íratjuk ki. Az eddigi futtatások során legfeljebb két változatban kellett futtatni az algoritmust.

A külső és belső körülmények egyaránt nagyfokú gyártási rugalmasságot követelnek az üzemektől. Éppen ezért nagy fontossága van a gyors döntés-előkészítésnek. Elkezdtük az algoritmus kisgépes, interaktív változatának kidolgozását.

(Beérkezett: 1982. március 18-án.)

IRODALOM

1. Conway—Maxwell—Miller: *Theory of Scheduling* 1967. Addison — Wesley Publishing Company
2. Hammer—Johnson—Korte: *Discrete Optimization* 1979. North-Holland Publishing Company

A MULTI-OBJECTIVE SCHEDULING PROBLEM

In this paper a model and a heuristic algorithm are given for a multi-objective dynamic scheduling problem. The constraints found in this problem are:

— there are limits on the capacity of equipments to manufacture certain parts,

— there are technological restrictions on the sequence in which tasks can be performed on these machines.

The scheduling algorithm is expected to minimize the processing time and the sequence-dependent setup times and to enable the smooth running of the assembly shops where the parts go.

МНОГОЦЕЛОВАЯ ПРОБЛЕМА ПЛАНИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВА

В заметке описаны модель и гевристический альгоритм разработанные для решения многоцелевой динамической проблемы планирования производства деталов.

Самыми важными требованиями планирования являются:

— минимизация пролётного времени производства деталов,

— минимизация времени на переналадку,

— способствовать непрерывной действительности цехов монтировании работающих из деталов, производство которых было планировано альгоритмом.

Vörös József

Pénzbefektetés-kombinációk vizsgálata

I. Bevezetés

Tekintsünk a gazdaságban egy beruházót, kinek n pénzbefektetési helye van. Egységnyi tőke után az i-edik ($i = 1, \ldots, n$) helyről ξ_i nagyságú hozama származik. ξ_i valószínűségi változó a_i várható értékkel ($M(\xi_i) = a_i$; $a_i > 1$).

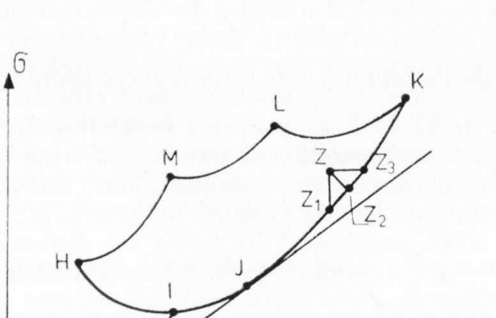
Legyen cov $(\xi_i, \xi_j) = v_{ij}$ és jelentse B a beruházó saját tőkéjét a tervperiódus elején, melyből a periódus végére η nagyságú hozamot szeretne elérni. A pénztömeg bármelyik helyre bármilyen arányban befektethető, ennek egy konkrét megvalósulását nevezzük pénzbefektetés-kombinációnak. Az η tőkeerő varianciáját jelölje σ^2, várható értékét pedig C. A pénzbefektetés-elmélet általában felteszi, hogy a beruházó csak ezen két utóbbi paraméter alapján cselekszik, tehát az alábbi típusú hasznossági függvénnyel rendelkezik:

$$U = f(C, \sigma).$$

mégpedig a beruházó előnyben részesíti azt a kombinációt, mely nagyobb tőkeerőt (hozamot) biztosít, $dU/dC > 0$, de ugyanakkor a beruházó kockázatérzékeny, így $dU/d\sigma < 0$.

A modell úgy tekinti tehát a beruházót, mint aki a rendelkezésre álló pénzbefektetés-kombinációk közül azokat választja ki, melyek maximalizálják hasznossági függvényét.

Egységnyi tőkét tekintve ($B = 1$), egy befektetés-kombinációnak a C, σ síkban egy pont feleltethető meg. Feltéve, hogy minden befektetési hely kockázatos ($v_{ii} > 0$!), a kombinációknak megfeleltethető pontok az 1. ábrán a HIJK vonalon és a fölött helyezkednek el [11].



1. ábra

A beruházó akkor és csak akkor tekint hatékonynak egy pénzbefektetés-kombinációt, ha nincs másik alternativa

— ugyanakkora C-vel és kisebb σ-val,
— ugyanakkora σ-val és nagyobb C-vel,
— magasabb C-vel és kisebb σ-val.

Az 1. ábrán a Z nem hatékony, mert többek között a Z_1, Z_2, Z_3 pontoknak megfelelő kombinációk dominálják. A hatékony kombinációk így a HIJK íven foglalnak helyet.

Tobin [14]-ben megmutatta, hogy ebben az esetben a beruházó hasznosságfüggvényének megfelelő indifferens görbék a (C, σ) síkban konkávok. Markowitz [7]-ben az optimális kombináció kiválasztására ez alapján az alábbi menetet javasolja:

— meg kell állapítani az egyes pénzbefektetési helyek valószínűségi paramétereit,
— meg kell határozni a hatékony kombinációk halmazát,
— ebből ki kell választani a beruházó hasznossági függvényét maximalizáló kombinációt.

E tanulmány ezen hármas tagolás második lépcsőjében megfogalmazott problémával foglalkozik, melyet pénzbefektetés-kombináció analízisnek is neveznek (portfolio analysis). Feltételezve, hogy a ξ_i-k normális eloszlásúak, *Markowitz* a hatékony kombinációk előállítására az alábbi kvadratikus programozási feladatot vezette be:

$$\Phi = \{\lambda C - \sum_i \sum_j v_{ij} x_i x_j\} \to MAX$$

$$\sum x_i = 1$$

$$\sum a_i x_i = C \tag{1}$$

$$x_i \geq 0; \; i = 1, \ldots, n,$$

hol

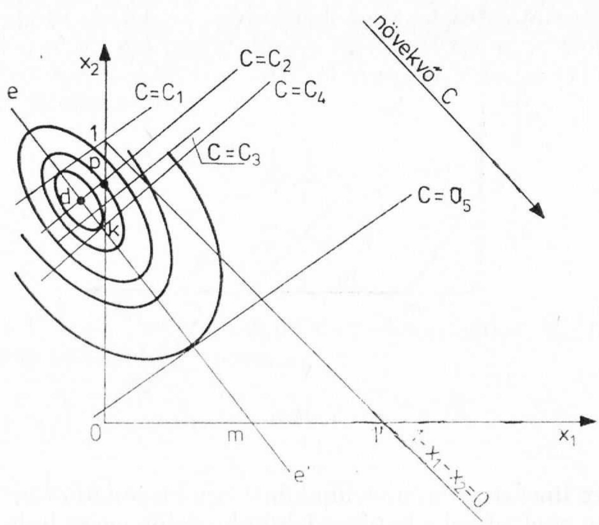
λ : paraméter,
x_i: az i-edik helyre befektetett pénzmennyiség aránya az egész tőkéhez.

Legyen most $n = 3$. Az $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ feltételből $x_3 = 1 - x_2 - x_1$, így az x_1, x_2 síkban a lehetséges megoldások halmazát a tengelyek és az $1 - x_2 - x_1 = 0$ egyenes által közbezárt háromszög belső és határ pontjai adják. Az η varianciáját az alábbi három módon fejezhetjük ki:

$$\sigma^2 = \sum_i \sum_j v_{ij} x_i x_j = v_{11} x_1^2 + v_{22} x_2^2 + v_{33} x_3^2 + 2v_{12} x_1 x_2 + 2v_{13} x_1 x_3 + 2v_{23} x_2 x_3.$$

Alkalmazva az $x_3 = 1 - x_2 - x_1$ helyettesítést, átrendezés után kapjuk, hogy

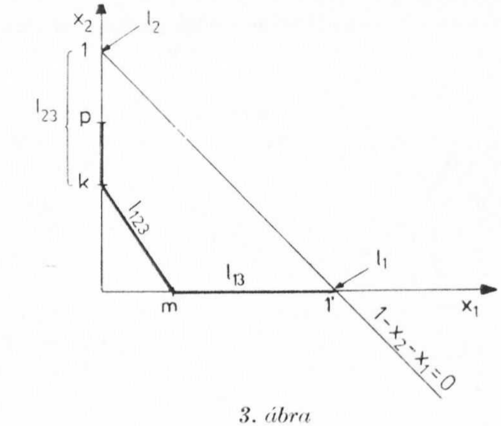
$$\sigma^2 = x_1^2(v_{11} - 2v_{13} + v_{33}) + x_2^2(v_{22} - 2v_{23} + v_{33}) + 2x_1x_2(v_{12} - v_{13} - v_{23} + v_{33}) + \\ + 2x_1(v_{13} - v_{33}) + 2x_2(v_{23} - v_{33}) + v_{33}. \tag{2}$$



2. ábra

Adott σ^2 szinteket véve a kovariancia-variancia mátrix pozitív definit volta mellett (2) az x_1x_2 síkban ellipszisek egyenlete. A 2. ábra egy lehetséges esetet reprezentál, ahol az 101' háromszög és belső határpontjai a lehetséges megoldásokat adják.

A minimális varianciával rendelkező kombináció nem megengedett tartományban van (ezt a d pontnak megfelelő koordináták adják). Az x_2 tengelyt $[1, k]$ intervallumban metsző C által adott megoldások nem hatékonyak, mivel ugyanakkora σ^2 értékhez a $C = C_4$ egyenesektől az x_1 tengely irányában magasabb C szintek tartoznak. Az első hatékony — és egyúttal minimális σ^2 nagysággal rendelkező-kombinációt a k pont adja. Ebben a pontban $x_2 > 0$, $x_3 > 0$, $x_1 = 0$, és természetesen fennáll, hogy $x_2 + x_3 = 1$. Az x_2 tengely mentén a k pontig kell haladni, ugyanis a C_2 és C_4 egyenesek között elhelyezkedő egyenesek nem megengedett tartományban érintik az ellipsziseket és a $[p, k]$ szakaszt metsző ellipszisek adják a legkisebb varianciát. A haladási irány a k pontban megváltozik, mivel az érintési pontok megengedett tartományba kerülnek, és adott C szintekhez ezek mutatják a minimális varianciát. Az ee' egyenest *Markowitz* kritikus vonalnak nevezte el, s módszere innen kapta a „kritikus vonal módszere" elnevezést. A kritikus vonalon az m pontig haladhatunk, a haladási irányban itt ismét törés áll be mert az érintési pontok ismét nem megengedett tartományba kerülnek. Az optimális megoldáshoz tartozó szakaszokat a 3. ábra mutatja. Az x_2 tengely 1 pontjában $x_2 = 1$, és $x_1 = x_3 = 0$, s jelöljük ezt az esetet l_2-vel, arra utalva, hogy most csak a második változó pozitív. Ha l-nek csak egy indexe van, az mindig egy pontot jelenthet az $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ kikötés miatt. Az x_2 tengely $[1, k]$ szakaszának belső pontjaiban $x_2 > 0$, $x_3 > 0$ és $x_1 = 0$, s jelöljük ezt az esetet l_{23}-mal, mivel a második és harmadik változó pozitív, és természetesen $x_2 + x_3 = 1$. A $[k, m]$ szakasz belső pontjaihoz l_{123} tartozik, az $[m, 1']$ szakasz belső pontjaihoz l_{13}, míg az 1' ponthoz l_1. Látható tehát, hogy az egyes szakaszok belső hatékony pontjait elő lehet állítani a szakasz végpontjainak („sarok kombi-



3. ábra

nációk") konvex lineáris kombinációjaként. Így elegendő ezen „sarok kombinációk" ismerete, melyekkel a hatékony kombinációk egész halmaza lefedhető. Két szomszédos sarok kombináció ezek szerint mindig egy változó pozitivitásátban különbözik.

Markowitz kritikus vonal algoritmusát nagyméretű feladatok esetén nem tekintik hatékonynak, de eddig az (1) alatti alapprobléma bizonyos irányú specializálásával sikerült csak hatékonyabb eljárást kidolgozni. Ezek közül kiemelkedik SHARPE [10]-ben közölt eljárása, mely „diagonális" vagy „index" modell néven vált ismertté. Az indexmodell feltételezi, hogy valamennyi befektetési hely hozama egy általános index — mint pl. GNP vagy valamely árindex, stb. — függvényeként írható fel. Tehát:

$$a_i = A_i + B_i I + C_i,$$

ahol

A_i és B_i paraméterek,
C_i: valószínűségi változó zéró várható értékkel,
I : egy bizonyos indexnek a szintje.

ELTON—GRUBER—PADBERG [4]-ben a hozamok között konstans korrelációt feltételezve mutatnak be egy hatékony eljárást. E tanulmány az (1) alatt megfogalmazott alapprobléma megoldására mutat be egy új módszert. Ez az eljárás akkor tekinthető hatékonynak, ha az alapfeladatra egy bizonyos feltétel fennáll. Belátható, hogy ezen feltételnek a problémák széles köre eleget tesz. Az eljárás explicit módon megadja a változók optimális értékeit, valamint a $C \to \min \sigma^2$ függvénykapcsolatot a sarok kombinációk között. A függvénykapcsolatból megállapítható, hogy a $\sigma^2(C)$ szakaszonként differenciálható konvex függvény.

A pénzbefektetés-elmélet megmutatta, hogy a tőkepiac nem csak kockázatérzékeny beruházókból áll; következésképp szükséges a teljes $\{C, \sigma^2(C)\}$ halmaz feltérképezése. BAWA [1]-ben megmutatta, hogy ez a min $\sigma^2(C)$ függvényből (1. ábrán HIJK ív), egyetlen helyre befektetett „kombinációkból", és legfeljebb két helyre befektetett kombinációkból áll (1. ábrán a KLMN ívek).

A fedezet nélküli eladások fogalmának bevezetése (a fogalom meghatározását lásd Samuelson: Közgazdaságtan (KJK 1976) c. könyvében) lehetővé tette az x_i változók előjelkötetlenségét. Merton [8]-ban az (1) alatti problémának az alábbit feleltette meg:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 = \frac{1}{2}\sum_i \sum_j v_{ij}x_ix_j \to \text{MIN}$$

$$\sum a_ix_i = C \tag{3}$$

$$\sum x_i = 1.$$

Feltéve, hogy a $\mathbf{V} = [v_{ij}]$ mátrix szigorúan pozitív definit, Merton megmutatta, hogy a hatékony befektetések halmazát a

$$\min \sigma^2 = \frac{C^2F - 2CD + E}{EF - D^2} \tag{4}$$

függvény adja, ahol

$$\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{M} = [m_{ij}],\ F = \mathbf{1}^*\mathbf{M}\mathbf{1}\ , \quad \mathbf{a}^* = [a_1, \ldots, a_n]$$

$$E = \mathbf{a}^*\mathbf{M}\mathbf{a},\ D = \mathbf{1}^*\mathbf{M}\mathbf{a}. \tag{5}$$

Mivel gazdaságunknak nem jellemzője a fedezet nélküli eladások esete, modellünk definiálásában a változók előjelére megkötést kell tennünk. Megmutatható, hogy a (4) függvény az $x_i \geq 0$ $(i = 1 \ldots n)$ kikötés mellett szakaszonként érvényben marad az optimális megoldásban pozitív változók rendszerére.

A pénzbefektetés-elmélet egy másik széles körben alkalmazott feltevése, hogy a beruházó korlátozás és kockázatviselés nélkül azonos kamatláb mellett kölcsönt adhat és kölcsönt vehet. Tobin [14]-ben megmutatta, hogy a döntési folyamat ekkor két lépcsőből áll:

- elő kell állítani a hatékony kombinációk halmazát,
- ebből mindig egyértelműen kiválasztható egy optimális kombináció.

Tekintsük ugyanis újra az 1. ábrát. A beruházó r nagyságú fajlagos hozamot kockázatviselés nélkül elérhet $[r = 1 + (\text{kamatláb})/100)]$, ha tőkéjét fix kamatozású letétbe helyezi. Ha hozamát növelni akarja, pénzének egy részét kockázattal járó helyre, illetve kombinációba kell fektetnie, mert csak ezek után jár magasabb hozam. Tegyük fel, hogy beruházónk az I pontnak megfelelő kombinációba fekteti pénzösszegének egy részét, és akkor az rI egyenesen mozog; ez viszont nem lehet optimális hely számára, ugyanis létezik egy jobb befektetés: ha nem elégszik meg az r hozammal, a J pontnak megfelelő kombinációba kell fektetnie pénzének egy bizonyos részét, ugyanis az rI egyenesen levő pontok valamennyi más pontot dominálnak (pl. az I pont által adott C értéket kisebb kockázat mellett állítja elő az rJ egyenes által meghatározott pont). A beruházó optimumát az a pont határozza meg, amelyben preferencia függvénye érinti az rJ egyenest. Ha ez a J pontban van, a beruházó teljes vagyonát a J pontot deifináló kombinációnak megfelelően fekteti be. Ha a beruházó a J pontnak megfelelő C hozamtól még magasabb szintet akar elérni, hitelt kell felvennie, de természetesen pénzét ugyanolyan arányban fekteti be mint ahogy azt a J pontban tette. Merton [8]-ban analitikusan is bizonyítja ezt az összefüggést és megadja az rJ egyenes egyenletét;

$$|C - r| = \sigma \sqrt{Fr^2 - 2Dr + E}. \tag{6}$$

Megmutatható, hogy ez az összefüggés a nem-negativitási kikötés mellett is érvényben marad a pozitív változók rendszerére, ha a beruházó tervét a felvehető hitel korlátja nem akadályozza. Ha a beruházó a teljes hitelkeretet kimeríti, akkor a hatékony kombinációk halmazát ismét parabolikus összefüggés írja le.

Egy újabb feltétel bevezetésével, amikoris feltesszük, hogy a tőkepiacon valamennyi beruházó egyformának ítéli az egyes pénzbefektetési helyek valószínűségi paramétereit, a SHARPE [11], LINTNER [6], MOSSIN [9]-féle tőkeár modellekhez jutunk, melyek függvényszerű összefüggést állapítanak meg a befektetési hely hozama és kockázati szintje között. Ezen összefüggéseket a pénzbefektetés-elmélet legnagyobb eredményének tartják. Megmutatható, hogy a MOSSIN által adott egyenlet azonos tartalmú a MERTON által [8]-ban adott egyenlettel.

Megemlítendő, hogy a pénzbefektetés-elméletben fontos szerepet játszanak a „kölcsönös pénzalap"-okkal kapcsolatos tételek. (Lásd [3] és [8]-ban.)

Hogy az egyes pénzbefektetési helyek hozamai normális eloszlásúak, az irodalomban sokan vitatják, pl. BAWA és CHAKRIN [2]. Ők lognormális eloszlásra határozzák meg a hatékony kombinációkat leíró függvényt, valamint a változók optimális értékét. A változókra adott nemnegativitási kikötés mellett a normális eloszlásra kapott eredmények könnyen adaptálhatók a lognormális esetere is.

II. A hatékony kombinációk halmaza, amikor valamennyi befektetési hely kockázatos

A modell megfogalmazásánál az alábbi feltételezésekkel élünk:

F1: A beruházó U hasznossági függvényének tulajdonsága, hogy $dU/dC > 0$, és $dU/d\sigma < 0$, a beruházó tehát kockázatérzékeny.

F2; A befektetési helyek hozamai normális eloszlásúak a_i várható értékkel és $v_{ii}(> 0!)$ szórással.

F3: A kovariancia-variancia (szimmetrikus) mátrix nemszinguláris, ezért pozitív definit.

F4: A vizsgált gazdaságban fedezetlen eladások nem lehetségesek: a befektetés nagyságát mutató változó nem lehet negatív.

F5: A beruházó tőkéje tetszőlegesen felosztható a befektetési helyek között.

Ekkor a hatékony kombinációk halmazát a következő, B-ben és C-ben paraméteres kvadratikus programozási feladat optimális megoldása adja:

$$x_i \geq 0; \qquad i = 1, \ldots, n \tag{7a}$$

$$\sum x_i = B \tag{7b}$$

$$\sum a_i x_i = C \tag{7c}$$

$$-\frac{1}{2}\sigma^2 = -\left\{\frac{1}{2}\sum\sum v_{ij} x_i x_j\right\} \to MAX \tag{7d}$$

ahol

B : a befektetni szánt saját tőke nagysága,
C : a befektetésből a tervperiódus végére várt hozam nagysága,
v_{ij}: az i-edik és j-edik befektetési helyek fajlagos hozamai közötti kovariancia,
x_i : az i-edik helyre befektetendő pénzmennyiség,
a_i : az i-edik befektetési hely fajlagos hozamának várható értéke,
$\sum\sum v_{ij}x_ix_j$: a befektetett pénztőkéből várt hozam varianciája.

Legyen

$$I^+ = \{i \mid F\sum_j m_{ij}a_j - D\sum_j m_{ij} > 0\},$$

$$I^- = \{i \mid F\sum_j m_{ij}a_j - D\sum_j m < 0\},$$

$$I^0 = \{i \mid F\sum_j m_{ij}a_j - D\sum_j m_{ij} = 0\} = \overline{I^- \cup I^+},$$

valamint a továbbiakban: $\sum_j m_{ij} = g_i$, $\sum_j a_j m_{ij} = h_i$,

ahol $\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{M} = [m_{ij}]$ és (5)-nek megfelelően $F = \sum g_i$, $D = \sum h_i$, $E = \sum h_i a_i$.

1. *tétel*: Legyenek érvényesek az F1—F5 kikötések, továbbá, hogy $\mathbf{a} \neq \lambda \mathbf{1}$. A (7) feladatnak rögzített B mellett akkor és csak akkor létezik olyan (C_0, C_1) nyílt intervalluma, melyben minden változó pozitív, ha fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek:

$$g_p h_q < h_p g_q \text{ minden } p \in I^-\text{- és } q \in I^+\text{-re,} \tag{8a}$$

$$Dh_i - Eg_i < 0 \text{ minden } i \in I^0\text{-re.} \tag{8b}$$

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy ha rögzített B mellett létezik olyan C ($B \cdot \max\{a_i\} > C > B \cdot \min\{a_i\}$) melyben minden változó pozitív, akkor (8) fennáll.

Tekintsük a (7) feladathoz tartozó

$$\Phi(x_i, u_j) = -\frac{1}{2}\sum\sum v_{ij}x_ix_j + u_2(B - \sum x_i) + u_3(C - \sum a_ix_i) \tag{9}$$

Lagrange függvényt és ennek megfelelően [13], illetve [5] alapján a Kuhn—Tucker (továbbiakban KT) feltételeket:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_i} = -\sum_j v_{ij}x_j - u_2 - a_iu_3 \leq 0; \quad i = 1, \ldots, n \tag{10a}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u_2} = B - \sum x_i = 0 \tag{10b}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u_3} = C - \sum a_ix_i = 0 \tag{10c}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_i} \cdot x_i = 0; \; i = 1, \ldots, n \tag{10d}$$

$$x_i \geq 0; \quad i = 1, \ldots, n. \tag{10e}$$

Legyen most C olyan pont, amelyben valamennyi változó pozitív; (10d) feltételek miatt ekkor a (10a) feltételek egyenlőség formájában teljesülnek. Mivel F3 alapján $\mathbf{V}$ mátrix nem szinguláris, a (10b)-nak megfelelő

$$-\mathbf{V}\mathbf{x} - \mathbf{1}u_2 - \mathbf{a}u_3 = 0 \tag{11}$$

egyenletrendszerből — ahol $\mathbf{x}^* = [x_1, \ldots, x_n]$, $\mathbf{a}^* = [a_1, \ldots, a_n]$ —, a $\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{M} = [m_{ij}]$ mátrixszal történő szorzás után kapjuk, hogy

$$x_i = -u_2 g_i - u_3 h_i; \; i = 1, \ldots, n. \tag{12}$$

Ezek felhasználásával adódik, hogy

$$\sum x_i = -u_2 \sum g_i - u_3 \sum h_i, \quad \text{és}$$

$$\sum a_i x_i = -u_2 \sum h_i - u_3 \sum h_i a_i,$$

melyeket az (5)-ben bevezetett jelölések felhasználásával az alábbi formában írhatjuk:

$$\sum x_i = -u_2 F - u_3 D$$

$$\sum a_i x_i = -u_2 D - u_3 E. \tag{13}$$

Ezeket a (10b—c) feltételekbe helyettesítve adódik, hogy

$$B + u_2 F + u_3 D = 0 \tag{14}$$

$$C + u_2 D + u_3 E = 0. \tag{15}$$

Az F pozitív mivel $\mathbf{V}$ pozitív definit és így $\mathbf{M}$ is. (14)-ből ezért

$$u_2 = -\frac{B + u_3 D}{F}.$$

Ezt (15)-be helyettesítve és rendezve kapjuk:

$$u_3(EF - D^2) = -(FC - DB). \tag{16}$$

Megmutatható, hogy a $(D^2 - EF)$ kifejezés az

$$f(\lambda) = (\mathbf{a} + \lambda\mathbf{1})^* \mathbf{M}(\mathbf{a} + \lambda\mathbf{1}) = F\lambda^2 + 2\lambda D + E$$

másodfokú függvény diszkriminánsa. Ebből következik, hogy az $\mathbf{M}$ pozitív definit volta miatt a $(D^2 - EF)$ akkor és csak akkor zéró, ha $\mathbf{a} = -\lambda\mathbf{1}$, egyébként

$$EF - D^2 > 0.$$

Feltevésünk mellett (hogy $\mathbf{a} \neq \lambda\mathbf{1}$) (14—15)-nek tehát egyértelmű megoldása van, mégpedig

$$u_3 = -\frac{FC - DB}{EF - D^2} \tag{17}$$

$$u_2 = -\frac{EB - DC}{EF - D^2}. \tag{18}$$

Ezeket (12)-be visszahelyettesítve a változók optimális értékeit kapjuk:

$$x_i = \frac{EB - DC}{EF - D^2} g_i + \frac{FC - DB}{EF - D^2} h_i; \quad i = 1, \ldots, n. \tag{19}$$

Mivel minden változó pozitív, továbbá $(EF - D^2) > 0$, (19)-ből következik, hogy

$$(EB - DC)g_i + (FC - DB)h_i > 0; \; i = 1, \ldots, n. \tag{20}$$

Ezeket rendezve kapjuk, hogy

$$C(Fh_i - Dg_j) > B(Dh_i - Eg_i); \quad i = 1, \ldots, n. \tag{21}$$

Egyrészt ha most $i \in I^0$, minden ilyen i-re fennáll, hogy $(B > 0)$

$$Dh_i - Eg_i < 0,$$

másrészt a $q \in I^+$ és $p \in I^-$ indexekre a

$$B \frac{Dh_q - Eg_q}{Fh_q - Dh_q} < C < B \frac{Dh_p - Eg_p}{Dh_p - Dg_p} \tag{22}$$

egyenlőtlenség áll fenn, melyből a nevezőkkel történő átszorzás után adódik, hogy

$$(D^2 - EF)g_p h_q > (D^2 - EF)h_p g_q, \tag{22a}$$

s ebből — tekintve, hogy $(EF - D^2) > 0$ — adódik a kívánt eredmény.

Abból, hogy a (19—22a) egyenlőtlenségek ekvivalensek következik, hogy a (8) feltételek elégségesek is.

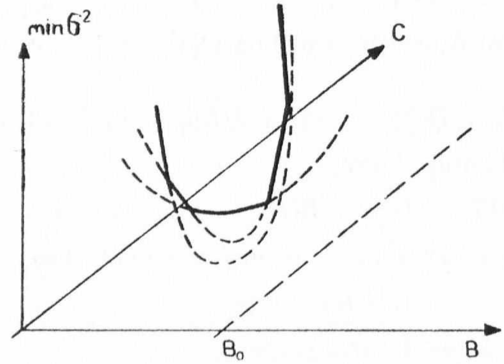
(22) alapján belátható, hogy a maximális intervallumot, melyben valamennyi változó pozitív, az alábbi előírások adják:

$$\begin{aligned} C_1 &= \min_{p \in I^-} \left\{ B \frac{Dh_p - Eg_p}{Fh_p - Dg_p} \right\} \\ C_0 &= \max_{q \in I^+} \left\{ B \frac{Dh_q - Eg_q}{Fh_q - Dg_q} \right\}. \end{aligned} \tag{23}$$

Ebben az intervallumban a $C \to \min \sigma^2$ leképezést is megadhatjuk; szorozzuk meg ugyanis (11) mindkét oldalát az $\mathbf{x}^*$ vektorral, valamint alkalmazva u_2- és u_3-ra a (17—18)-ban kapott értékeket adódik, hogy

$$\min \sigma^2 = \min \mathbf{x}^* \mathbf{V} \mathbf{x} = \frac{EB^2 - 2DBC + FC^2}{EF - D^2}. \tag{24}$$

B-t is változónak tekintve (24) elliptikus paraboloid és a hatékony kombinációk halmazának egy részhalmazát határozza meg, ugyanis az összefüggés addig érvényes, míg valamennyi változó pozitív. A pozitív változók rendszerére azonban (24) mindig érvényes és így adott $B > 0$ értékeket véve a hatékony kombinációkat meghatározó $\min \sigma^2(C)$ függvény szakaszonként konvex és egy-egy ívét (24) írja le (4. ábra). Ha a nemnegativitási feltételtől eltekintünk, akkor (24) minden B- és C-re a hatékony kombinációkat írná le; ebből viszont következik, hogy adott $B > 0$ értéket véve a nemnegativitási feltétel mellett a hatékony kombinációkat leíró $\min \sigma^2(C)$ függvény szakaszonként differenciálható konvex függvény.



4. ábra

Adott $C = C^0 > 0$ esetén a (24) függvény B-ben ugyanúgy viselkedik mint C-ben ($E > 0$), tehát a $\min \sigma^2(C^0, B)$ függvény is konvex és parabola ívekből tevődik össze. Ebből két dolog következik:

— a (7) alatti problémát $B = 1$ feltétel mellett is lehet általános esetként kezelni, mivel a $\min \sigma^2(C^0, B)$ függvény minimum pontja — legyen ez B_0 — az egyedüli hatékony alternativa, tekintve, hogy $B > B_0$ és $B < B_0$ esetben $\min \sigma^2(C^0, B) > \min \sigma^2(C^0, B_0)$. (24)-ben B helyére egyet írva Merton (4) alatti összefüggését kapjuk, mely nemnegativitási feltétel hiányában minden C-re érvényes;

— a $\min \sigma^2(C, B)$ függvény konvex és elliptikus paraboloid darabokból tevődik össze.

Térjünk most vissza (16)-hoz és tegyük fel, hogy $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{1}$. Ekkor $EF - D^2 = 0$, és a feladatnak csak akkor lesz megoldása, ha $(DB - FC) = 0$. D és F (5) alatti definíciója alapján ez csak akkor áll fenn, ha

$$a \cdot B = C, \tag{25}$$

ahol $\lambda = a = a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

u_3 így meghatározatlan és (14)-ből

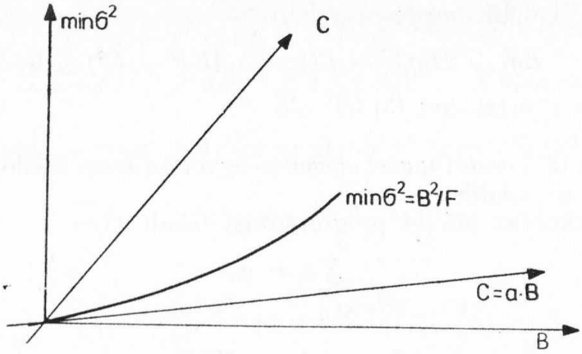
$$u_2 = -\frac{B + u_3 D}{F}.$$

Ezek felhasználásával adódik, hogy

$$x_i = g_i B/F;\ i = 1, \ldots, n \text{ és}$$

$$\min \sigma^2 = B^2/F. \tag{26}$$

(26)-ból következik, hogy az optimális megoldásban az „aktív" változókhoz tartozó inverzmátrix-sor összege nem lehet negatív; az optimális megoldás szerkezete C-től és B-től független; a hatékony kombinációkat egy konvex parabola írja le (5. ábra).



5. *ábra*

Annak szemléltetésére, hogy egyenlő hozamok esetén sem triviális a döntési probléma, tekintsük a következő pénzbefektetési feladatot; legyen $a_1 = a_2 = 2$; $B = 1$ és ezért $C = 2$, valamint

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; \text{ melyből } \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix},$$

M eleget tesz tehát a (26)-ból eredő feltételnek (nincs negatív sorösszege).

A programozási feladat formája;

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0,$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$2x_1 + 2x_2 = 2$$

$$\{x_1^2 + 2x_2^2\} \to MIN.$$

Az optimális megoldás (26) alapján ($F = 1{,}5$):

$$x_1 = 1(1/1{,}5) = 0{,}67; \; x_2 = 0{,}5(1/1{,}5) = 0{,}33;$$

$$\min \sigma^2 = 1/1{,}5 = 0{,}67.$$

Tetszőleges $B > 0$ esetén az optimális megoldás:

$$x_1 = 0{,}67B; \; x_2 = 0{,}33B; \; \min \sigma^2 = B^2/1{,}5.$$

Tekintsük ismét az $\mathbf{a} \neq \lambda\mathbf{1}$ esetet és tegyük fel, hogy rögzített B esetén mind a C_0-t mind C_1-et egyetlen index adja, azaz mind C_0-ban mind C_1-ben csak egy változó válik zérussá. Ez nem jelent gyakorlatilag megszorítást, mivel inszignifikáns szinten — ha pl. két ilyen változó van — egyik változó értéke megváltoztatható. Legyen ez a két index q_0 illetve p_0. A változók folytonossága miatt a $C < C_0$ és a $C > C_1$ intervallumoknak mindig van tehát olyan C_1-gyel kezdődő, illetve C_0-lal végződő intervalluma, melyekben a (9) alatti Lagrange függvény úgy veszi fel szélső értékét, hogy abban $x_{q_0} < 0$, illetve $x_{p_0} < 0$, míg a többi változó értéke pozitív.

Segédtétel: Ha $\mathbf{M} = [m_{ij}]$ $n \times n$-es szimmetrikus pozitív definit mátrix, és az n elemű $\mathbf{a}$ vektor komponensei nem mind azonosak ($\mathbf{a} \neq \lambda\mathbf{1}$), akkor minden

$i = 1, \ldots, n$-re fennáll, hogy;

$$Eg_i^2 - 2Dg_ih_i + Fh_i^2 - m_{ii}(EF - D^2) \leq 0; \tag{27}$$

ahol az E, D és F értékeket (5) írja elő.

Bizonyítás: A (27) összefüggést elegendő egyetlen sorra (oszlopra) megmutatni, s legyen ez az n-edik sor.

Tekintsük ekkor az alábbi programozási feladatot:

$$\begin{gathered} \sum x_i = g_n \\ \sum a_ix_i = h_n \\ \sigma_n^2 = \mathbf{x}^*\mathbf{V}\mathbf{x} \to MIN; \end{gathered} \tag{28}$$

$$(\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{M} = [m_{ij}];\ g_n = \sum m_{nj};\ h_n = \sum m_{nj}a_j).$$

A (28) feladat csak a (7a) előjelmegkötésben különbözik a (7) feladattól, ezért az optimális célfüggvényértéket adó (24) összefüggés mindig érvényes (28)-ra. Ennek megfelelően;

$$\min \sigma_n^2 = \frac{Eg_n^2 - 2Dg_nh_n + Fh_n^2}{EF - D^2}. \tag{29}$$

(28)-nak az $x_i^0 = m_{ni}$, $i = 1, \ldots, n$, lehetséges megoldása, a hozzátartozó célfüggvényérték pedig $m_{nn} \cdot (\mathbf{x}^{0*}\mathbf{V}\mathbf{x}^0 = \mathbf{e}_n^*\mathbf{x}^0 = m_{nn})$. Ezért

$$\frac{Eg_n^2 - 2Dg_nh_n + Fh_n^2}{EF - D^2} \leq m_{nn},$$

majd $(EF - D^2)$-tel szorozva mindkét oldalt, nullára redukálás után $i = n$-re a (27) alatti összefüggés adódik.

2. *tétel*: A (7) feladatra teljesüljenek a (8) alatti feltételek, továbbá n legyen az az egyedüli index, melyre

$$C_0 = B\frac{Dh_n - Eg_n}{Fh_n - Dg_n} > B \cdot \min\{a_i\}.$$

Ekkor a $C \leq C_0$ intervallumban a (7) feladat optimális megoldásában $x_n = 0$.

Bizonyítás: Azt kell megmutatni, hogy van olyan $(C_{-1}, C_0]$ intervallum melyben a

$$\begin{gathered} \sum x_i = B \\ \sum a_ix_i = C \\ x_n = 0 \\ -\frac{1}{2}\mathbf{x}^*\mathbf{V}\mathbf{x} \to MAX \end{gathered} \tag{30}$$

feladat optimális megoldása kielégíti a (10) alatti KT feltételeket, mégpedig úgy, hogy $x_i > 0$; $i = 1, \ldots, n - 1$. A (30) feladathoz a

$$\Phi = -\frac{1}{2} \sum \sum v_{ij} x_i x_j + u_2(B - \sum x_i) + u_3(C - \sum a_i x_i) + u_4(-x_n)$$

Lagrange függvény tartozik, melyhez az alábbi elsőrendű feltételek tartoznak:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = -\sum_j v_{ij} x_j - u_2 - u_3 a_i = 0; \quad i = 1, \ldots (n-1), \tag{31a}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_n} = -\sum_j v_{nj} x_j - u_2 - u_3 a_n - u_4 = 0, \tag{31b}$$

$$\sum x_i = B \tag{31c}$$

$$\sum a_i x_i = C \tag{31d}$$

$$x_n = 0. \tag{31e}$$

A (7) feladat megoldásmenetéhez hasonlóan (31a—b)-ből

$$x_i = -u_2 g_i - u_3 h_i - u_4 m_{in}; \; i = 1, \ldots, n. \tag{32}$$

(31e) feltétel miatt (32) alapján

$$-u_2 g_n - u_3 h_n - u m_{nn} = 0,$$

melyből **M** pozitív definit volta miatt

$$u_4 = \frac{-u_2 g_n - u_3 h_n}{m_{nn}}. \tag{33}$$

(31b)-ből látható, hogy a (31) egyenletrendszer adta megoldás kielégíti a (10) alatti KT feltételeket, ha $u_4 \leq 0$ és $x_i > 0$, $i = 1, \ldots, n - 1$. C_0-ban $x_i > 0$, $i = 1, \ldots, n - 1$, és csak $x_n = 0$, a változók folytonossága miatt ezért elegendő belátni, hogy u_4 nem pozitív.

(32)-ből kapjuk, hogy

$$B = \sum x_i = -u_2 F - u_3 D - \frac{g_n}{m_{nn}}(-u_2 g_n - u_3 h_n), \tag{34}$$

$$C = \sum a_i x_i = -u_2 D - u_3 E - \frac{h_n}{m_{nn}}(-u_2 g_n - u_3 g h_n). \tag{35}$$

(34)-ből kapjuk, hogy

$$u_2 \left(\frac{g_n^2}{m_{nn}} - F \right) = B + u_3 D - \frac{g_n h_n}{m_{nn}} u_3. \tag{36}$$

Mivel tudjuk, hogy a (30) feladatnak létezik egyértelmű megoldása (pl. a $C_0 > B \cdot \min \{a_i\}$ pontban) ezért:

$$u_2 = \left(B + u_3 D - u_3 \frac{g_n h_n}{m_{nn}} \right) : \left(\frac{g_n^2}{m_{nn}} - F \right),$$

melyet (35)-be helyettesítve kapjuk, hogy:

$$u_3 = \frac{FC - DB - \dfrac{g_n^2}{m_{nn}} C + \dfrac{g_n h_n}{m_{nn}} B}{D^2 - EF + E \dfrac{g_n^2}{m_{nn}} - 2D \dfrac{g_n h_n}{m_{nn}} + F \dfrac{h_n^2}{m_{nn}}},$$

illetve

$$u_2 = \frac{EB - DC + \dfrac{g_n h_n}{m_{nn}} C - \dfrac{h_n^2}{m_{nn}} B}{D^2 - EF + E \dfrac{g_n^2}{m_{nn}} - 2D \dfrac{g_n h_n}{m_{nn}} + F \dfrac{h_n^2}{m_{nn}}}.$$

Ezeket az értékeket (33)-ba helyettesítve

$$u_4 = \frac{(EB - DC) g_n + (FC - DB) h_n}{(EF - D^2) m_{nn} - E g_n^2 + 2D g_n h_n - F h_n^2} m_{nn}. \tag{37}$$

A segédtételből és az egyértelműségből következik, hogy a nevező pozitív; — az m_{nn} szintén. (37) számlálója nem más mint az x_n változó számlálója, melyről tudjuk, hogy C_0-ban zéró és $C < C_0$-ra negatív, tehát u_4 csak C_0-ban zéró, $C < C_0$-ra negatív, azaz teljesülnek a KT feltételek.

Adott B érték mellett az algoritmus menete így tehát az alábbi:

— eldöntjük, hogy van-e C-re megoldása a (20) alatti egyenlőtlenségrendszernek. Ha van, jelöljük ezt az intervallumot (C_0, C_1)-gyel. Ha nincs, algoritmusunknak nincs előnye a Markowitz algoritmussal szemben;

— azt az alternatívát melyhez tartozó változó a C_0-ban zéró, a rendszerből elhagyjuk. A problémát így visszavezettük az alapproblémára, s megkeressük azt a C_{-1} értéket, melyre a $(C_{-1}, C_0]$ intervallumban a visszamaradt változók mindegyike pozitív. C_{-1}-ben újabb változó lesz zéró, azt ismét elhagyjuk, s az eljárást addig folytatjuk, míg a $C = \min\{a_i\} \cdot B$ pontba nem érünk;

— visszatérünk a C_1 ponthoz, melyben valamelyik változó zéró. Ezt a rendszerből elhagyjuk és az előbbi pontnak megfelelően megkeressük a $C_2, C_3, \ldots$ értékeket. Ezt addig folytatjuk, míg a $C = \max\{a_i\} \cdot B$ ponthoz nem érünk.

Illusztrációként tekintsük MARKOWITZ [7]-ben definiált feladatát. Ennek megfelelően legyen $B = 1$,
$\mathbf{a}^* = [0{,}062;\ 0{,}146;\ 0{,}128]$, valamint

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0{,}0146 & 0{,}0187 & 0{,}0145 \\ 0{,}0187 & 0{,}0854 & 0{,}0104 \\ 0{,}0145 & 0{,}0104 & 0{,}0289 \end{bmatrix}.$$

Ezekből

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 196{,}119 & -32{,}38 & 86{,}75 \\ -32{,}38 & 17{,}59 & 9{,}92 \\ 86{,}75 & 9{,}92 & 74{,}56 \end{bmatrix},$$

$g_1 = 250{,}49$ $\quad h_1 = 18{,}54$
$g_2 = -4{,}87$ $\quad h_2 = 1{,}83$
$g_3 = 171{,}22$ $\quad h_3 = 16{,}37.$

továbbá $F = 416{,}84$; $D = 36{,}735$; $E = 3{,}51$.

A (20)-nak megfelelő egyenlőtlenségrendszerhez szükséges kifejezések értékei:

$$\begin{aligned} Fh_1 - Dg_1 &= -1475{,}25; & Dh_1 - Eg_1 &= -198{,}3 \\ Fh_2 - Dg_2 &= 941{,}73; & Dh_2 - Eg_2 &= 84{,}32 \\ Fh_3 - Dg_3 &= 533{,}79; & Dh_3 - Eg_3 &= 0{,}36. \end{aligned}$$

Ezekből:

$$\begin{gathered} C < 0{,}1344 \\ C > 0{,}0895 \\ C > 0{,}00067. \end{gathered}$$

A (0,089536; 0,13442) intervallumban mindhárom változó pozitív, az algoritmus alkalmazható tehát a Markowitz-féle feladatra. Ebben az intervallumban a változók optimális értékei:

$$x_1 = -1475{,}25C + 198{,}3; \; x_2 = 941{,}73C - 84{,}32; \; x_3 = 533{,}79C - 0{,}36.$$

valamint (24) alapján:

$$\min \sigma^2_{l_{1,2,3}} = 0{,}03 - 0{,}643C + 3{,}64C^2.$$

A $C_0 = 0{,}089536$ pontban $x_2 = 0$. Ha a $C < C_0$ intervallumban nem az x_2 változót állítjuk zéróra, hanem pl. x_3-t, akkor a

$$\min \sigma^2_{l_{1,3}} < \min \sigma^2_{l_{1,2}}$$

reláció mindig fennáll a $C < C_0$ intervallumban ugyanis az l_{12} eset nem elégíti ki a KT feltételeket. Következésképpen az x_2-nek a $C \leq C_0$ intervallumban zéró értéke kell legyen.

Hagyjuk el a rendszerből a második alternativát, ekkor $\mathbf{a}^* = [0{,}062; 0{,}128]$, és

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0{,}0146 & 0{,}0145 \\ 0{,}0145 & 0{,}0289 \end{bmatrix}.$$

Ezekből

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 134{,}29 & -66{,}25 \\ -66{,}25 & 66{,}71 \end{bmatrix},$$

és $F = 68{,}49$; $E = 0{,}5575$; $D = 4{,}277$.

(24) alapján:

$$\min \sigma^2_{l_{13}} = 0{,}028 - 0{,}4298C + 3{,}44C^2,$$

és mivel két változónk van, a (20)-nak megfelelő egyenlőtlenségrendszer megoldása nélkül is tudjuk, hogy

$$C_{-1} = 0{,}062 = \min \{a_i\},$$

így az eljárást a $C > C_1$ intervallumban kell folytatni. A $C_1 = 0{,}13442$ pontban $x_1 = 0$, ezért az első befektetési alternativát a rendszerből elhagyjuk.

Ennek megfelelően $\mathbf{a}^* = [0{,}146;\ 0{,}128]$,

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0{,}0854 & 0{,}0104 \\ 0{,}0104 & 0{,}0289 \end{bmatrix}.$$

Ezekből

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 12{,}25 & -4{,}4 \\ -4{,}4 & 36{,}18 \end{bmatrix},$$

$F = 39{,}63;\ D = 5{,}21;\ E = 0{,}6893.$

$$Fh_2 - Dg_2 = 7{,}61;\ Dh_2 - Eg_2 = 0{,}976$$
$$Fh_3 - Dg_3 = -7{,}65;\ Dh_3 - Eg_3 = -1{,}1125.$$

Ezek alapján természetesen (mivel csak két változó van)

$$C > 0{,}128$$
$$C < 9{,}146.$$

Így a $[0{,}13442;\ 0{,}146]$ intervallumban

$$\min \sigma^2_{l_{23}} = 5{,}255 - 79{,}6C + 302{,}5C^2,$$

a változók optimális értékei pedig:

$$x_1 = 0;\ x_2 = 7{,}62C - 0{,}976;\ x_3 = -7{,}656C + 1{,}1125.$$

Számításainkat az alábbi táblában foglalhatjuk össze;

	Változók pozitivitása	Optimális célfüggvény
$C = 0{,}062$	l_1	$0{,}028 - 0{,}43\,C + 3{,}44\,C^2$
$0{,}062 < C \leq 0{,}0859$	l_{13}	
$0{,}0859 < C < 0{,}1344$	l_{123}	$0{,}031 - 0{,}64\,C + 3{,}56\,C^2$
$0{,}1344 \leq C < 0{,}146$	l_{23}	$5{,}255 - 79{,}6\,C + 302{,}5\,C^2$
$C = 0{,}146$	l_2	

Megjegyzendő, hogy az

$$Fh_q - Dg_q > 0 \text{ és } Fh_p - Dh_p < 0$$

tényből, ha mind g_p mind g_q pozitív, a (8) alatti feltételek mindig következnek (természetesen még más esetben is). Ehhez tekintsük még az alábbi pénzbefektetési problémát: $\mathbf{a}^* = [1;\ 1{,}1;\ 3]$, $B = 1$, és

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 1 & 0 \\ 1 & 2010 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ ebből } \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 10{,}05 & -0{,}05 & 0 \\ -0{,}005 & 0{,}0005 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ezekből $F = 20{,}045;\ D = 40{,}04;\ E = 100{,}94$. Az értékek ismeretében a (20) egyenlőtlenségrendszert megoldva adódik, hogy a $(2{,}99236;\ 3)$ intervallumban mindhárom változó optimális értéke pozitív, annak ellenére, hogy a második alternatíva varianciája több mint húszezer szerese az elsőének és hozama csak 10%-kal nagyobb.

III. A hatékony kombinációk halmaza, amikor egy befektetési hely kockázat nélküli

Gazdaságunkban mindig létezik ilyen hely: ez a fix kamatozású letét, tágabb értelemben a hitelfelvétel is. A pénzbefektetés-elmélet felteszi, hogy a beruházó azonos kamatláb mellett bármilyen összeget letétbe helyezhet és felvehet. *Merton* a fedezet nélküli eladás lehetőségét felhasználva a (6) alatti eredményhez jutott. A hazai gyakorlatot figyelembe véve az F1—F5 feltételek mellé vezessük be még a következő feltételeket:

F6: A beruházó korlátozás nélkül letétbe helyezheti pénzeszközeit, ugyanakkor legfeljebb A összegű hitelt vehet fel.

A letéti kamatláb a hitelkamatlábnál kisebb. Ennek következményeként a beruházó nem tesz letétbe pénzeszközt ha hitelt vesz fel, ellenkező esetben ugyanis vesztesége van.

A letéti eset és hitelfelvét eset így külön vizsgálható. Figyelembe véve, hogy letétbe bármilyen összeget helyezhet a beruházó, *Merton* (6) eredményét a nemnegativitási kikötéssel kiegészítve alkalmazhatjuk. Tekintsük ezért elsőként a hitelfelvét esetét.

Az F1—F6 alapján ezt az alábbi A-, B- és C-ben parametrikus kvadratikus programozási feladat fogalmazza meg:

$$z \geq 0,\ x_i \geq 0,\ i = 1\ldots, n \tag{38a}$$

$$z \leq A \tag{38b}$$

$$\sum x_i - z = B \tag{38c}$$

$$\sum a_i x_i - rz = C \tag{38d}$$

$$-\frac{1}{2}\sum\sum v_{ij}x_i x_j \to MAX, \tag{38e}$$

ahol az ismert változók és paraméterek mellett

z a felveendő hitel nagysága
A a maximálisan felhasználható hitelkeret
r a hitelkamatláb nagysága.

A feladathoz tartozó Lagrange függvény:

$$\Phi(x_i, z, u_j) = -\frac{1}{2}\sum\sum v_{ij}x_i x_j + u_1(A - z) + u_2(B + z - \sum x_i) +$$

$$+ u_3(C + rz - \sum a_i x_i),$$

melyhez a következő KT feltételek tartoznak:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_i} = -\sum_j v_{ij}x_j - u_2 - u_3 a_i \leq 0;\ i = 1, \ldots, n \tag{39a}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = -u_1 + u_2 + u_3 r \leq 0 \tag{39b}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_1} = A - z \geqq 0 \tag{39c}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_2} = B + z - \sum x_i = 0 \tag{39d}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_3} = C + rz - \sum a_i x_i = 0 \tag{39e}$$

$$\sum \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} x_i + \frac{\partial \Phi}{\partial z} z = 0 \tag{39f}$$

$$z \geqq 0;\ x_i \geqq 0;\ i = 1, \ldots, n \tag{39g}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_1} u_1 \geqq 0;\ u_1 \geqq 0. \tag{39h}$$

Ismét tegyük fel, hogy a (38) feladatnak létezik olyan optimális megoldása, melyben minden változó pozitív. Ekkor ezen paraméterekre — mivel (39a) formailag azonos (10a)-val —,

$$x_i = -u_2 g_i - u_3 h_i;\ i = 1, \ldots, n, \tag{40}$$

továbbá ha (39d)- és (39e)-ben a $B + z = P$, illetve $C + rz = R$ helyettesítést alkalmazzuk, ezek formája azonos (10b—c)-vel. Következésképpen

$$u_2 = \frac{DR - EP}{EF - D^2},\quad u_3 = \frac{DP - FR}{RF - D^2},$$

ha az a_i-k között vannak különbözők.

Tegyük fel még e mellé, hogy $z = A$. Ekkor P és R konstansok, ezért

$$x_i = \frac{EP - DR}{EF - D^2} g_i + \frac{FR - DP}{EF - D^2} h_i;\ i = 1, \ldots, n. \tag{41}$$

Mivel A-ról megszorítás nélkül feltehető, hogy pozitív így $z = A$ esetben z is pozitív. Ezért (39f) miatt (39b) egyenlőség formájában áll fenn, melyből:

$$u_2 + u_3 r = \frac{DR - EP}{EF - D^2} + \frac{DP - FR}{EF - D^2} r = u_1 \geqq 0.$$

Ebből következik, hogy fenn kell álljon az

$$(DR - EP) + (DP - FR) r \geqq 0 \tag{42}$$

egyenlőtlenség.

Azon tartományokban melyre (42) fennáll és melyekben (41) minden i-re pozitív, a hatékony kombinációkat a

$$\min \sigma^2 = \frac{EP^2 - 2DPR + FR^2}{EF - D^2} \tag{43}$$

függvény határozza meg, mely a $(P, R) \rightarrow \min \sigma^2$ térben elliptikus paraboloid darab.

Legyen egy beruházónak 100 egységnyi tőkéje és $A = 40$ egységnyi hitelkerete 10%-os hitelkamatláb mellett ($r = 1{,}1$), továbbá három kockázatos befektetési lehetősége, melynek jellemzőit az **a** vektor és a **V** mátrix mutatja; $\mathbf{a}^* = [1{,}1;\ 1{,}3;\ 1{,}4]$,

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}.$$

Ezekből

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad F = 17;\ D = 20{,}3;\ E = 24{,}47.$$

$P = 140$ esetben (**41**) minden i-re pozitív, ha

$$158 < R < 187{,}5,$$

mégpedig $R = 158$ esetben $x_3 = 0$, és $R = 186{,}5$ esetben $x_1 = 0$. (**43**) minimumát az

$$R_{\min} = \frac{DP}{F} = \frac{20{,}3 \cdot 140}{17} = 167{,}18$$

pontban veszi fel, ezért a hatékony kombinációk csak az $R \geq R_{\min}$ tartományban helyezkedhetnek el. Az optimális megoldást a 6. ábra szemlélteti.

A (42) feltétel értelmében azonban:

$$R(D - rF) \geq P(E - rD),$$

$$R \geq 187{,}25.$$

Az l_{123} eset éppen $R = 187{,}25$-ig áll fenn, melyben $x_1 = 0$. Töröljük ezért a lehetőségek közül az első alternatívát. Ekkor $E = 12{,}37$; $D = 9{,}3$; $F = 7$, s ezek felhasználásával újra az adódik (42)-be történő behelyettesítés után, hogy

$$R \geq 187{,}25.$$

Az l_{23} eset pedig $R = 140 \cdot 1{,}4 = 196$-ig áll fenn, ezért az esetnek megfelelő hatékony kombinációkat a 6. ábra l_{23}-mal jelölt íve mutatja.

Tegyük most fel, hogy $z < A$! Ekkor P és R a z változó függvényei és (39f) miatt (39b) egyenlőség formájában teljesül, továbbá (39h) miatt $u_1 = 0$. Így fennáll, hogy

$$u_2 + u_3 r = u_1 = 0.$$

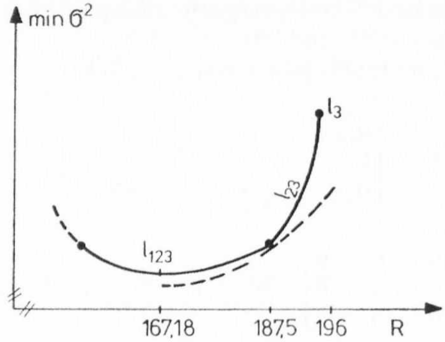
Ebbe az u_2 és u_3 értékeket helyettesítve kapjuk, hogy

$$\frac{D(C + rz) - E(B + z)}{EF - D^2} + r\,\frac{D(B + z) - F(C + rz)}{EF - D^2} = 0,$$

melyből

$$z = \frac{C(D - rF) - B(E - rD)}{r^2F - 2rD + E}, \tag{44}$$

ugyanis az $(r^2F - 2rD + E)$ kifejezés minden r-re pozitív mivel $(EF - D^2) >$ > 0.



6. ábra

A z értékét u_2- és u_3-ba beírva, majd ezen u-kat x_i-kben felhasználva adódik, hogy

$$x_i = \frac{(C - rB)(h_i - rg_i)}{r^2F - 2rD + E}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

és a változók nemnegativitására tekintettel fenn kell, hogy álljon a

$$(C - rB)(h_i - rg_i) \geq 0; \tag{45}$$

egyenlőtlenség minden $i = 1, \ldots, n$-re. A z nem negatív, ezért (44) alapján

$$C(D - rF) - B(E - rD) \geq 0.$$

(43) alapján, mivel $P = B + z$ és $R = C + rz$, most

$$\min \sigma^2 = \frac{E(B + z)^2 - 2D(B + z)(C + rz) + F(C + rz)^2}{EF - D^2},$$

és z helyére a (44) eredményt írva, a számításokat elvégezve kapjuk:

$$\min \sigma^2 = \frac{(C - rB)^2}{r^2F - 2rD + E}, \tag{47}$$

és ebből

$$\min \sigma = \frac{|C - rB|}{\sqrt{r^2F - 2rD + E}}. \tag{48}$$

A várható hozam szórása lineáris függvénye tehát C-nek, és $B = 1$-et véve (48) azonos Merton (6) alatti eredményével. Az x_i-re adott képlet (lásd (45)) azt mutatja, hogy az optimális kombináció szerkezete C változtatására érzéketlen; következésképp (48) felfedéséhez elegendő egyetlen kombináció ismerete. Tekintsük ezért ismét a (24) alatti képletet, melyből

$$\min \sigma = \frac{\sqrt{EB^2 - 2DBC + FC^2}}{\sqrt{EF - D^2}}. \tag{49}$$

3. *tétel:* Álljanak fenn az F1 – F6 feltételek, továbbá legyen $u_1 = 0$. Ekkor ha $r < D/F$, akkor (48) hatékony felületen érinti a (49) függvényt; ha $r = D/F$, akkor (48) asszimptótája (49)-nek; ha pedig $r > D/F$, akkor (48) nem hatékony felületen érinti a (49) fügvényt.

Bizonyítás: A (49) felületnek a

$$(\min \sigma - \sigma_0) = \beta_1(B - B_0) + \beta_2(C - C_0)$$

egyenlet definiálta sík a (B_0, C_0, σ_0) pontjához tartozó érintősík, ahol

$$\beta_1 = \frac{EB_0 - DC_0}{\sqrt{EF - D^2}\sqrt{EB_0 - 2DB_0C_0 + FC_0^2}};$$

$$\beta_2 = \frac{FC_0 - DB_0}{\sqrt{EF - D^2}\sqrt{EB_0 - 2DB_0C_0 + FC_0^2}}.$$

Ha létezik olyan (B_0, C_0, σ_0), hogy a

$$\frac{|C - rB|}{r^2F - 2rD + E} = \beta_1(B - B_0) + \beta_2(C - C_0) + \sigma_0$$

egyenlőség minden (B, C)-re fennáll, akkor (48) érintősíkja (49)-nek. (48) hatékony felületét véve

$$\frac{C - rB}{r^2F - 2rD + E} = \beta_1 B + \beta_2 C - (\beta_1 B_0 + \beta_2 C_0 - \sigma_0),$$

mely minedn (B, C)-re akkor áll fenn, ha

$$\frac{EB_0 - DC_0}{\sqrt{EF - D^2}\sqrt{EB_0^2 - 2DB_0C_0 + FC_0^2}} = \frac{-r}{r^2F - 2rD + E} \tag{50a}$$

$$\frac{FC_0 - DB_0}{\sqrt{EF - D^2}\sqrt{EB_0^2 - 2DB_0C_0 + FC_0^2}} = \frac{1}{r^2F - 2rD + E} \tag{50b}$$

$$\sigma_0 = \beta_1 B_0 + \beta_2 C_0. \tag{50c}$$

(50c) fennáll. (50a)-t osztva (50b)-vel kapjuk, hogy

$$\frac{EB_0 - DC_0}{FC_0 - DB_0} = -r,$$

melyből ha $r \neq D/F$, akkor

$$C_0 = B_0 \frac{E - rD}{D - rF}. \tag{51}$$

Ezt (50a – b)-be visszahelyettesítve azonosságot kapunk így (48) a

$$C = B \frac{E - rD}{D - rF}$$

egyenes mentén érinti a (49) felületet. (48) nem hatékony felületét véve ugyanezt az eredményt kapjuk.

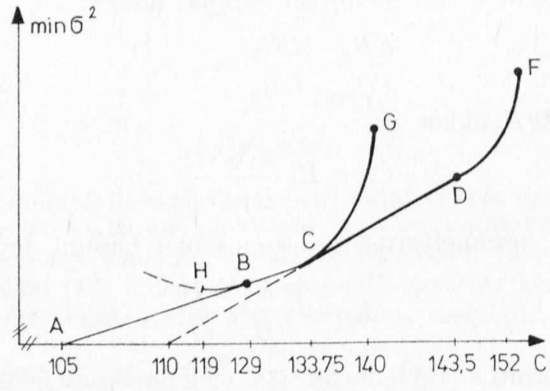
Ezekután könnyen belátható, hogy

— ha $r = D/F$, (48) asszimptótája (49)-nek,
— ha $r > D/F$, (48) nem hatékony felületen érinti (49)-et,
— ha $r < D/F$, (48) hatékony felületen érinti (49)-et,
— ha fennáll, (46) zéróval egyenlő.

Ezekután a beruházó számára elérhető összes hatékony kombinációt tartalmazó függvénykapcsolatot is fölfedhetjük. Ehhez tekintsük ismét az előző példát! $B = 100$ és $A = 0$ esetre az optimális megoldást az alábbi táblázat mutatja, ennek szemléltetését pedig a 7. ábra adja.

	Változók pozitivitása	F	D	E
		értéke		
$C = 110$	l_1			
$110 < C \leq 112{,}86$	l_{12}	15	17,5	20,55
$112{,}86 < C < 133{,}75$	l_{123}	17	20,3	24,47
$133{,}75 \leq C < 140$	l_{23}	7	9,3	12,37
$C = 140$	l_3			

Az l_{123} esetben a parabola minimumát a $C = 119$ érték adja, ezért a hatékony kombinációkat a $119 \leq C$ intervallum tartalmazza. Ha a beruházónak nem lenne hitelfelvételi lehetősége, a $HBCG$ íven mozogna. Hitelfelvétel esetén (51) felhasználásával adódik, hogy $C_0 = 133{,}75$; melyben már $x_1 = 0$, de a változók eleget tesznek a (45) és (20) alatti feltételeknek. Így a hatékony kombinációkat a 3. tétel értelmében megkapjuk, ha a 110 pontból (10%-os a hitelkamatláb!) kiindulva a min σ (133,75) ponthoz érintőt húzunk. A 7. ábrán ez a CD szakasz. D-ben $z = 40$, s ettől a ponttól kezdve a problémát felsőkorlátos esetként kell kezelni. Az előző feladat eredményeit felhasználva tudjuk, hogy az l_{23} ív a $187{,}5 \leq R < 196$ (lásd 6. ábra) intervallumban létezik. C-t megkapjuk, ha ezen intervallumot meghatározó két számból levonunk $40 + 0{,}1 \cdot 40 = 44$-et. Ekkor $143{,}5 \leq C < 152$. Ha nem tekintjük a fix kamatozású letéti lehetőséget, a beruházó mozgási terét tehát a $HBCDF$ vonal adja.



7. ábra

Tegyük fel, hogy a beruházónak lehetősége van arra, hogy tőkéjét korlátlanul letétbe helyezheti, s a kamatláb 5%-os ($r = 1{,}05$). Ismét (51) felhasználásával adódik, hogy $C_0 = 129$. A beruházó hatékony pénzbefektetési kombinációit így az $ABCDF$ vonal határozza meg. [Tegyük fel ugyanis, hogy $z < 0$ letétet jelent, és a letéti illetve hitel kamatláb azonos, azaz 5%-os. z előjelének kötetlensége nem befolyásolja az (51) alatti összefüggést, s az így adódó C_0 felhasználásával ($C_0 = 129$) értelemszerűen a $C < C_0$ intervallumot választjuk.]

Nézzük most azt, amikor $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$. Esetünkben (16)-nak az

$$u_3(EF - D^2) = DP - FR \tag{52}$$

egyenlőség felel meg, ahol most is $P = B + z$ és $R = C + rz$. Mivel $EF - D^2 = 0$, a feladatnak csak akkor lesz megoldása, ha $DF - FR = 0$, azaz fennáll, hogy

$$aP = R,$$

mely azonos az

$$a(B + z) = C + rz$$

egyenlőséggel.

Az u_3 így meghatározatlan, és

$$u_2 = -\frac{P + u_3 D}{F},$$

melyek felhasználásával adódik, hogy

$$x_i = g_i P/F;\ i = 1, \ldots, n, \text{ és}$$

$$\min \sigma^2 = P^2/F.$$

A fenti eredmények csak akkor érvényesek ha a $a > r$, más esetben a hitelfelvétel értelmetlen. Ha $a > r$, (39b)-ből az következik, hogy a felveendő hitel nagysága tetszőleges de nem nagyobb mint A.

Végül még egy összefüggés felírható (45) felhasználásával. Tekintsünk ugyanis egy pénzbefektetési kombinációt a CD szakaszon. Ekkor

$$\min \sigma_k^2 = \sum_i v_{ki} x_i = \sum_i v_{ki} \frac{C - rB}{r^2F - 2rD + E}(h_i - rg_i) =$$

$$= (C - rB)(a_k - r)/(r^2F - 2rD + E)$$

$$\min \sigma^2 = \sum_k x_k \sigma_k^2 = \sum_k x_k (C - rB)(a_k - r)/(r^2F - 2rD + E).$$

Ezekből

$$(C - rB)\frac{\min \sigma_k^2}{\min \sigma^2} = a_k - r, \tag{53}$$

melyben B helyére 1-et írva a pénzbefektetés-elmélet jólismert összefüggését kapjuk, melyet tőkeár modellnek neveztek el (capital asset pricing model). E kutatási irány egyik megalapozója MOSSIN, kinek [9]-ben közölt eredménye tartalmát tekintve azonos (53)-mal.

(Mossin megmutatta, hogy minden j-re fennáll a

$$\lambda = \frac{a_j - p_j/q}{\sum_k v_{jk} x_k} \cdot \sqrt{\sum \sum v_{ij} x_i x_j} \tag{54}$$

összefüggés, ahol λ konstans, p_j a tőke egységnyi ára, $q = 1/r$ és x_j a j-edik befektetési hely részesedési aránya az össztőkén belül. Mivel (54) minden j-re fennáll következik, hogy

$$\frac{a_j - p_j/q}{\sum_k v_{jk} x_k} = \frac{a_i - p_i/q}{\sum_k v_{ik} x_k}$$

minden i- és j-re. Ezekből:

$$\frac{x_1(a_1 - p_1/q)}{x_1 \sum v_{1k} x_k} = \frac{x_2(a_2 - p_2/q)}{x_2 \sum v_{2k} x_k} = \ldots = \frac{x_n(a_n - p_n/q)}{x_n \sum v_{nk} x_k}$$

Alkalmazva az $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2}$ azonosságot adódik, hogy

$$\lambda = \frac{\sum x_j (a_j - p_j/q)}{\sum_j x_j \sum_k v_{jk} x_k} \cdot \sqrt{\sum \sum v_{ij} x_i x_j},$$

ami azonos a

$$\lambda = \frac{C - rB}{\sqrt{\sum \sum v_{ij} x_i x_j}} \tag{55}$$

kifejezéssel. (54)- és (55)-ből kapjuk, hogy

$$\frac{a_j - r}{\sum_k v_{jk} x_k} \sqrt{\sum \sum v_{ij} x_i x_j} = \frac{C - rB}{\sqrt{\sum \sum v_{ij} x_i x_j}},$$

melyből az (53) összefüggés közvetlenül adódik.)

E helyen is köszönöm kollégám, dr. Komlósi Sándor önzetlen segítségét, mellyel elősegítette a dolgozatban kimondott 2. tétel pontosítását.

(Beérkezett: 1982. május 7-én.)

IRODALOM

1. BAWA, V. S.: Admissible Portfolios for All Individuals, *The J. of Finance*, 1976. Sept. 31 (4); 1169—1183.
2. BAWA and CHAKRIN: Optimal Portfolio Choice and Equilibrium in a Lognormal Securities Market, *TIMS Studies in the Management Science*, 11, 1979, North-H.
3. BLACK, F.: Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing, *The J. of Business*, 45 (3), 1972, 445—455.
4. ELTON—GRUBER—PADBERG: Simple Criteria for Optimal Portfolio Selection with Upper Bounds, *Op. Res.* 25 (6), 952—967.
5. KREKÓ B.: *Optimumszámítás*, KJK, Bp. 1973.

6. LINTNER, J.: Security Prices, Risk, and Maximal Gains from Diversification, *The J. of Finance*, 20 (4), 587—615, 1968, March.
7. MARKOWITZ, H. M.: *Portfolio Selection*, John Wiley, N. Y. 1970.
8. MERTON, R. C.: An Analytic Derivation of the Efficient Frontier, *Journal of Finance and Quantitative Analysis*, 1972 Sept, 1851—1872.
9. MOSSIN, J.: Equilibrium in a Capital Asset Market, *Econometrica*, 34 (4), Oct. 1966.
10. SHARPE, W. F.: A Simplified Model for Portfolio Analysis, *Management Science*, 1963 Jan, 277—293.
11. SHARPE, W. F.: Capital Asset Prices, *The J. of Finance*, sept. 1964, 19 (3), 425—442.
12. SHARPE, W. F.: *Portfolio Theory and Capital Markets*, McGraw-Hill, 1970.
13. SZÉP J.: *Analízis*, KJK, Bp., 1966.
14. TOBIN, J.: Liquidity Preferences as Behaviour Toward Risk, *Review of Economic Studies*, Febr. 1958.

PORTFOLIO SELECTION

Chapter One of the paper gives a brief summary of previous results.

In Chapter Two the case is analyzed when short sales are not possible in the economy and, as a consequence, the variables of the parametric quadratic programming formulation of the economic problem must not take negative values. The first theorem gives an existence condition for such an interval of the parameters where all variables are positive. The well-known Markowitz-problem satisfies this constraint. Starting from this interval the efficient frontier functions may easily be found on the basis of the second theorem. Therefore, the paper is practically a generalization of Merton's result. The lemma to the second theorem draws attention to a matrix-algebraic relationship.

With the introduction of credits and deposits the fundamental problem is modified in Chapter Three in such a way that the available credit is limited from above. Using the algorithm developed in Chapter Two the efficient frontier function of the investor may be determined in any acceptable interval of the parameter values. Results are illustrated with numerical examples.

АНАЛИЗ КОМБИНАЦИЙ ВКЛАДА ДЕНЕГ

Первая глава статьи дает краткий итог предыдущих результатов.

Вторая глава анализирует тот случай, когда в экономике продажи без покрытия невозможны, а следовательно, переменные задачи параметрического квадратичного программирования данной экономической проблемы не могут принимать отрицательные значения. Первая теорема дает условия, при которых существует такой интервал параметров задачи, в котором все переменные положительные числа. Известная из литературы задача Марковица удовлетворяет этим условиям. Исходя из этого интервала, основываясь на второй теореме, легко обнаруживаются функции, описывающие эффективные комбинации. Поэтому статья по существу является обобщением результата Мертона. Вспомогательная теорема, принадлежащая ко второй теореме, обращает внимание на одну зависимость алгебры матриц.

В третьей главе основная проблема модифицируется путем введения кредитования и депозита, таким образом, что размеры кредита сверху ограничены. Во второй главе, с использованием разработанного расчетного способа функцию, определяющую эффективные комбинации для инвеститора можем написать во всех учитываемых интервалах.

Результаты иллюстрируются конкретными примерами.

FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK

PAIZS JÁNOS

Gazdasági elemzés szimultán, dinamikus, lineáris, ökonometriai modellel

Az ökonometriai modellek a klasszikus döntési folyamat minden szakaszában szerepet játszhatnak és gyakorlati alkalmazásuk a különböző szakaszokban *szerves egység*et képez, mégis módszertani szempontból jól elkülöníthetők a *statisztikai* irányú, múltra vonatkozó alkalmazások (a gazdaság működésének leírása és elemzése) a *tervezésre* orientált, jövőre vonatkozó alkalmazásoktól (gazdasági előrejelzés, gazdaságpolitikai szimuláció). Az ökonometriai modellek statisztikai irányú alkalmazásai alapvetőek, minden további alkalmazás előzményét képezik, és ezekben az alkalmazásokban az ökonometriai modellek a gazdaság működése leírásának és elemzésének komplex statisztikai eszközei.

Jelen tanulmány célja, hogy bemutassa az ökonometriai modellek alkalmazásának lehetőségeit és mikéntjét a gazdaság működésének leírásában és elemzésében. A tanulmány három részből áll. Az I. részben kialakítjuk a leíró-elemző ökonometriai modellnek egy szigorúan kauzális alapon álló, konzisztens és komplett fogalomrendszerét,[1] amely logikai-tartalmi szempontból megalapozza a II. részben a gazdaság működésének leírását és az ettől el nem választható gazdasági elemzést, amelynek alapkérdéseit a III. rész tárgyalja.

I. Fogalmak

A gazdaság működésének leírását és elemzését valamely múltbeli, több részidőszakból álló időszakra, *az ún. megfigyelési időszakra* végezzük, amelyet a továbbiakban $[1, \ldots, T]$-vel vagy $t = 1, \ldots, T$-vel jelölünk.

[1] A leíró-elemző ökonometriai modell fogalmai az ökonometriaelmélet fejlődésének viszonylag korai szakaszában kialakultak és a klasszikus ökonometria képviselői — többé-kevésebb következetességgel — törekedtek mind a fogalmak kauzális megalapozására, mind a modell által leírt gazdaság összefüggéseinek kauzális magyarázatára pl. [9] vagy [15]. Jelen tanulmány szerzőjét a rendkívül értékes [10] monográfia ösztönözte egy szigorúan kauzális alapon álló konzisztens és komplett fogalomrendszer kidolgozására, amely az ökonometriai modellek és valamennyi gyakorlati alkalmazásuk eredményének egzakt kauzális értelmezésére nyújt lehetőséget. A [10] monográfia és a jelen tanulmány kapcsolatáról meg kell jegyezni, hogy egyrészt az több szempontból általánosabb (pl. a nem-lineáris ökonometriai modelleket is tárgyalja), másrészt (sem nem-lineáris, sem lineáris ökonometriai modellre) nem ad kauzálisan megalapozott komplett fogalomrendszert.

A modell

A modell a gazdaság működésére vonatkozó, a folyó empirikus vizsgálattól független ismeretek *formalizált* megfogalmazása. Ezek az ismeretek az *ún. a priori információk.*

Az a priori információk arról tájékoztatnak, hogy

(a) *melyek a gazdaság folyamatainak* a folyó empirikus ökonometriai vizsgálat szempontjából lényeges és időben állandó vagy csak lassan változó *(stabil vagy kvázistabil) kauzális összefüggései*;

(b) *milyen szerepet játszanak az egyes folyamatok ezekben a kauzális összefüggésekben*, részletesebben

(ba) az egyes kauzális összefüggésekben mely folyamat játssza az okozat és mely folyamatok játsszák az okok szerepét;

(bb) az egyes okozatok létrehozásában mely okok szerepe alapvető és mely okok szerepe jelentéktelen;

(bc) az alapvető okok hatása az okozatokra egyidejű vagy időeltolódással (késéssel) érvényesül-e;

(bd) hogyan jellemezhető az egyes okozatok létrehozásában külön-külön jelentéktelen szerepet játszó változók együttes hatása;

(c) *milyen matematikai összefüggésekkel írhatók le az egyes kauzális összefüggések.*

Az a priori információk forrása lehet *valamely közgazdasági elmélet, korábbi empirikus ökonometriai vizsgálatok eredményei és munkahipotézisek.*[2] Az a priori információk csaknem kizárólag a gazdaság folyamatainak *közvetlen kauzális összefüggéseire* vonatkoznak és csaknem kizárólag *kvalitatív jellegűek.*

A strukturális egyenletrendszer

A gazdaság folyamatainak *közvetlen kauzális összefüggéseit* a strukturális egyenletrendszer írja le. Egy-egy strukturális egyenlet egy-egy gazdasági folyamat kauzális magyarázatát adja, ezért a strukturális egyenletrendszernek annyi független és ellentmondástól mentes egyenletből kell állnia, ahány gazdasági folyamat kauzális magyarázata a gazdaság működésének leírásához szükséges. Ha ez a feltétel teljesül, a modell komplett.

Az a priori információk alapján közvetlenül a strukturális egyenletrendszer fogalmazható meg, ezért szerepe kitüntetett: az *a modell egyenletrendszerének alapformája*, szemben a gazdaság folyamatainak közvetett összefüggéseit is ábrázoló származtatott formáival, a redukált és a végső egyenletrendszerrel szemben (Lásd II. rész!).

A strukturális egyenletek *tartalmi szempontból* lehetnek

(a) *magatartási egyenletek*, amelyek a gazdasági alanyok (döntési egységek) tevékenységét ábrázolják vagy

[2] Az, hogy valamely empirikus vizsgálat során a modell megfogalmazásakor az ökonométer milyen közgazdasági elmélet(ek)ből indul ki, illetve milyen munkahipotézisekkel él, tudományos meggyőződésétől, illetve a modellezett gazdaság működésére vonatkozó empirikus tapasztalataitól vagy gondolati elképzeléseitől függ. Ennyiben tehát az empirikus ökonométer a modellalkotás *aktív* szereplője. Lényeges azonban tudatosítanunk, hogy alkotása, a számszerűsített empirikus modell az alapjául szolgáló közgazdasági elmélet(ek), illetve munkahipotézisek bizonyítását nem nyújtja.

(b) *kísérő egyenletek*, amelyek a gazdasági alanyok tevékenységének természeti, technikai és jogi-institúcionális feltételeit írják le, végül

(c) *azonosságok* (definíciók vagy egyensúlyi feltételek).

A továbbiakban eltekintünk az utolsó típustól, amely a tárgyalást bonyolító több tulajdonsággal rendelkezik, de a gazdaság működésének leírása szempontjából új információt nem hordoz.

A strukturális egyenletek *formai szempontból* — analitikus alakjuk szerint — lehetnek *lineárisak vagy nem-lineárisak*. Ha a strukturális egyenletrendszer minden egyenlete lineáris, akkor a modell lineáris, ellenkező esetben nemlineáris. További vizsgálódásunkat lineáris ökonometriai modellre korlátozzuk.

A modell további alkotóelemei

A gazdaság időben változó folyamatait a modell *változói* képviselik, e folyamatok időben állandó vagy csak lassan változó kauzális összefüggéseit a modell *állandói* jellemzik.

Változók

Az *egy-egy strukturális egyenletben* játszott kauzális szerepük szerint a változók lehetnek az okozatot képviselő *eredményváltozók* és az okokat képviselő *magyarázó változók*.

Egy-egy gazdasági folyamat (okozat) alakulásában általában nagyszámú folyamat (ok) játszik közvetlen szerepet, amelyek mindegyikének külön figyelembevétele a gazdaság működésének leírásánál nem lehetséges, de nem is szükséges. Egy-egy strukturális egyenletben az okozaton (eredményváltozón) kívül csak az okozat létrehozásában alapvető néhány okot (magyarázó változót) képviselnek *explicit változók*, a többit nem *(implicit változók)*.

Az explicit változók mérhetők és statisztikai úton közvetlenül *megfigyelhetők*. Statisztikai megfigyeléseik eredményei idősorok formájában állnak rendelkezésre.

Abban az esetben, ha az implicit változók hatása a strukturális egyenletrendszerben semmilyen módon nem jelenik meg, *a modell determinisztikus*, amely az elméleti közgazdasági vizsgálatok eszköze: kvalitatív jellegű premisszák alapján kvalitatív jlleegű következtetések levonására ad lehetőséget.

Egy-egy strukturális egyenletben a benne egyenként lényegtelen vagy nemszisztematikus szerepet játszó implicit változók együttes hatását figyelembe vehetjük egy-egy *látens változó*val. A látens változók mérhetők, de — mivel külön nem is specifikált nagyszámú implicit változót foglalnak össze — *statisztikai úton nem figyelhetők meg*.

Minthogy a látens változók nagyszámú, véletlenszerűen alakuló implicit változó együttesét képviselik, *valószínűségi változók*. Ennek megfelelően, ha a strukturális egyenletekben a bennük szerepet játszó implicit változókat egy-egy látens változóval figyelembe vesszük, *a modell sztochasztikus:* a strukturális egyenletek sztochasztikus egyenletek.

További gondolatmenetünkben segítségünkre lehet két egyszerű, kizárólag illusztratív célú példa. Mindkét példánkat tőkés ország gyakorlatából vesszük: a modellezett „gazdaság" valamely termék szabadversenyes piaca, amelyen a termelést (kínálatot) forgalmi adó terheli.

1. *példa.* Ökonomméterünk — közgazdasági ismeretei alapján — feltételezi, hogy a forgalom volumene (q_t) is, a termék egységára (p_t) is a piac belső folyamataként alakul (és a forgalom volumenében a kereslet és a kínálat időről-időre egyensúlyba kerül), úgy, hogy a forgalom volumenét keresleti oldalról *alapvetően* a termék egységára, kínálati oldalról *alapvetően* a termék egységárának és a termékegységre jutó forgalmi adónak (s_t) a különbsége határozza meg. Ezeket a közgazdasági feltevéseit kiegészítve azzal a matematikai hipotézissel, hogy a kereslet, kínálat és meghatározó tényezőik kapcsolatai lineáris függvényekkel közelíthetők, a következő strukturális egyenletrendszerben formalizálhatja:

$$q_t = \alpha_0 + \alpha_1 p_t + u_{1t} \qquad \alpha_1 < 0 \qquad (\text{„keresleti függvény"}) \qquad (1.1)$$

$$q_t = \beta_0 + \beta_1 (p - s)_t + u_{2t} \qquad \beta_1 > 0 \qquad (\text{„kínálati függvény"}) \qquad (1.2).$$

Itt u_{1t} és u_{2t} a „keresletre", illetve a „kínálatra" ható egyéb tényezőket képviselő látens változók, α_0, α_1, β_0 és α_1 pedig a „kereslet", illetve a „kínálat" és alapvető meghatározóik kapcsolatát jellemző állandók.

Alakítsuk most át az (1.1)—(1.2) strukturális egyenletrendszert úgy, hogy az (1.1) egyenletből fejezzük ki p_t-t! Az eredmény a

$$p_t = \alpha_0' + \alpha_1' q_t + u_{1t} \qquad \alpha_1' < 0 \qquad (1.1.a)$$

$$q_t = \beta_0 + \beta_1 (p - s)_t + u_{2t} \qquad \beta_1 > 0 \qquad (1.2)$$

strukturális egyenletrendszer

Az (1.1.a)—(1.2) strukturális egyenletrendszer alapján látható, hogy az explicit változóknak egy-egy strukturális egyenletben játszott kauzális szerepük szerinti osztályozása nem ad képet ezeknek a strukturális egyenletrendszer egészében játszott kauzális funkciójáról: az (1.1.a) egyenletben p_t eredményváltozó, q_t magyarázó változó, ugyanakkor az (1.2) egyenletben q_t eredményváltozó, p_t pedig magyarázó változó!

A strukturális egyenletrendszer egészében és a megfigyelési időszak egészében játszott kauzális szerepük szerint az explicit változók körében megkülönböztetünk *endogén változókat,* amelyek mind az ok, mind az okozat szerepét betölthetik és közöttük kölcsönös összefüggések is lehetnek és *exogén változókat,* amelyek csak az okok éspedig egymástól független okok szerepét játsszák.

Az endogén változók gazdasági folyamatokat, az exogén változók részben gazdasági, részben nem gazdasági folyamatokat képviselnek. Az endogén változók által képviselt gazdasági folyamatok a vizsgált gazdaság *belső* folyamatai, az exogén változók által képviselt gazdasági folyamatok a vizsgált gazdaságon *kívüli* folyamatok. Az exogén változók között kitüntetett szerepet játszanak a *gazdaságpolitikai változók,* amelyek központi gazdaságirányítási szervek közvetlen befolyása alatt állnak. 1. példánkban q_t és p_t endogén változók, s_t exogén változó, éspedig gazdaságpolitikai változó.

Megjegyezzük, hogy *a látens változók kauzális funkciója* megegyezik az exogén változókéval: a modell egészében és a megfigyelési időszak egészében csak az okok, éspedig egymástól és az exogén változóktól független okok szerepét játsszák.

A strukturális egyenletrendszerben ábrázolt *közvetlen* kauzális összefüggésekben valamely oknak az okozatra kifejtett hatása lehet egyidejű vagy időeltolódással (késéssel) érvényesülő.

Egy ok hatása *egyidejű*, ha változása és az okozat ebből következő változása a megfigyelési időszak ugyanazon részidőszakában játszódik le. Egyidejű hatás esetén a strukturális egyenletben az okozatot képviselő endogén változónak és az okot képviselő endogén vagy exogén változónak a megfigyelési időszak ugyanazon t részidőszakára vonatkozó, egyidejű értékei szerepelnek. (Vegyük észre, hogy 1. példánk strukturális egyenletrendszere egyidejű kauzális összefüggéseket ábrázol!)

Egy ok hatása *időeltolódással (késéssel) érvényesülő*, ha az oknak a megfigyelési időszak valamely t részidőszakában végbemenő változását az okozat ebből következő változása a megfigyelési időszak valameny későbbi $t+\tau$ ($\tau > 0$ és diszkrét) részidőszakban követi. Időeltolódással (késéssel) érvényesülő hatás esetén a strukturális egyenletben az okozatot képviselő endogén változónak a megfigyelési időszak t-edik időszakához tartozó, egyidejű értékével szemben az okot képviselő endogén vagy exogén változónak a megfigyelési időszak megfelelő korábbi $(t-\tau)$-adik részidőszakára vonatkozó késleltetett értéke áll ($\tau > 0$ és diszkrét). A τ *neve: késés.*

Attól függően, hogy egy-egy strukturális egyenletben valamely endogén vagy exogén változó t vagy $t-\tau$ ($\tau > 0$ és diszkrét) időszakhoz tartozó értéke szerepel-e, megkülönböztetünk *egyidejű és késleltetett endogén, illetve exogén változók*at.

Abban az esetben, ha az egyidejű endogén változók mind az ok mind az okozat szerepét betöltik és közöttük kölcsönös kauzális összefüggések is vannak, *a modell szimultán.*

1. példánk strukturális egyenletrendszerének (1.1.a)—(1.2) alakja alapján nyilvánvaló, hogy szimultán modell strukturális egyenletrendszere: a p_t és a q_t egyidejű endogén változók kauzális összefüggése kölcsönös.

Ha a strukturális egyenletrendszerben csak egyidejű endogén és (egyidejű vagy késleltetett) exogén változók szerepelnek, *a modell statikus*, amelynek strukturális egyenletrendszere az egyidejű endogén változókban *inhomogén lineáris egyenletrendszer*. (Vegyük észre, hogy 1. példánkban statikus modell strukturális egyenletrendszere szerepel!)

2. *példa*. Tulajdonképpen 1. példánk módosítása, „továbbfejlesztése". Feltevés szerint a forgalom volumenét keresleti oldalról *alapvetően* most is a termék egységárának egyidejű értéke, kínálati oldalról viszont más-más mértékben a termék egységára és a termékegységre jutó forgalmi adó különbségének egyidejű és egy időszakkal korábbi értéke határozza meg. Ezek a közgazdasági feltevések — kiegészítve azzal, hogy a kínálat és meghatározó tényezőik kapcsolatai lineáris függvényekkel közelíthetők — a következő strukturális egyenletrendszerben formalizálhatók:

$$q_t = \alpha_0 + \alpha_1 p_t + u_{1t} \qquad \alpha_1 < 0 \tag{1.3}$$

$$q_t = \beta_0 + \beta_1(p-s)_t + \beta_2(p-s)_{t-1} + u_{2t} \qquad \beta_1, \beta_2 > 0. \tag{1.4}$$

A szimbólumok jelentése megegyezik az 1. példában alkalmazottakéval.

Az (1.3) egyenletet az (1.1.a) analógiájára átrendezve könnyen belátható, hogy az (1.3)—(1.4) is szimultán modell strukturális egyenletrendszere.

Ha a strukturális egyenletrendszerben az egyidejű endogén változók és az (egyidejű vagy késleltetett) exogén változók mellett késleltetett endogén változók is szerepelnek, vagyis a késleltetett endogén változók az okok szerepében megjelennek, *a modell dinamikus*, amelynek strukturális egyenletrendszere az endogén változókban *inhomogén lineáris differencia-egyenletrendszer*. (Vegyük észre, hogy a 2. példánkban dinamikus modell strukturális egyenletrendszere szerepel!)

Az egyidejű endogén változókat y_{mt}-vel, a késleltetett endogén változókat — egy részidőszakos késést feltételezve — $y_{m,t-1}$-gyel, az exogén változókat z_{kt}-vel, a látens változókat u_{mt}-vel, a változók közvetlen összefüggéseit jellemző állandókat $\alpha_{m'm}$-mel, $\beta'_{m'm}$-mel és β_{km}-mel jelölve felírhatjuk a szimultán statikus és szimultán dinamikus modell „*elméleti*", konkrét közgazdasági tartalommal nem rendelkező változatát, éspedig
szimultán *statikus* modellre az

$$y_{1t} = \alpha_{21}y_{2t} + \beta_{11}z_{1t} + \beta_{31} + u_{1t} \tag{1.5}$$

$$y_{2t} = \alpha_{12}y_{1t} + \beta_{22}z_{2t} + \beta_{32} + u_{2t}, \tag{1.6}$$

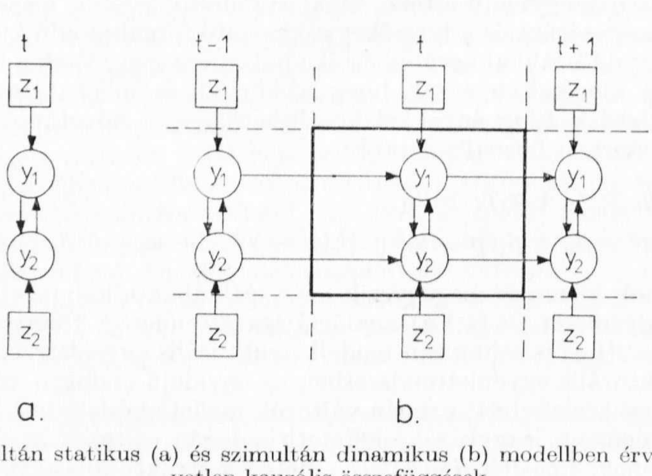
szimultán *dinamikus* modellre pedig az

$$y_{1t} = \alpha_{21}y_{2t} + \beta'_{11}y_{1,t-1} + \beta_{11}z_{1t} + \beta_{31} + u_{1t} \tag{1.7}$$

$$y_{2t} = \alpha_{12}y_{1t} + \beta'_{22}y_{2,t-1} + \beta_{22}z_{2t} + \beta_{32} + u_{2t} \tag{1.8}$$

formában, amelyekben ezen modelltípusok általános tulajdonságai tisztán vizsgálhatók. Az egyes modelltípusokban érvényesülő közvetlen kauzális összefüggések jól szemléltethetők az ún. Tinbergen-féle nyílsémával (1. ábra) a megfigyelési időszaknak statikus modell esetében egy, dinamikus modell esetében három részidőszaka alapján. (Az ábrázolásnál — az egyszerűség kedvéért — a „szabad konstansok"-tól és a látens változóktól eltekintünk.)

Az endogén és exogén változókat megkülönböztettük az explicit változóknak a modell egészében és *a megfigyelési időszak egészében* játszott kauzális szerepük szerint. A szimultán dinamikus modell strukturális egyenletrendszere és nyílsémája alapján nyilvánvaló, hogy a strukturális egyenletrendszer egészében, de *a megfigyelési időszak egy-egy t részidőszakában* az egyidejű endogén változókkal szemben a késleltetett endogén változók kauzális szerepe meg-



1. ábra. Szimultán statikus (a) és szimultán dinamikus (b) modellben érvényesülő közvetlen kauzális összefüggések egyezik az (egyidejű vagy késleltetett) endogén változókéval, így az utóbbiakkal együtt az (egyidejű) *endogén változókkal* szemben a *predeterminált változók* csoportját alkotják.[3]

Állandók, I

Az explicit változók közvetlen kauzális összefüggéseit jellemző állandók: a strukturális paraméterek és a késések. Közös jellemzőjük az explicit változókkal szemben, hogy bár mérhetők, statisztikai úton nem megfigyelhetők és a modell megfogalmazásakor általában ismeretlenek.

A strukturális paraméterek azt a *közvetlen* hatást mérik, amelyet az endogén vagy predeterminált jellegű magyarázó változók egységnyi növekedése az endogén jellegű eredményváltozókra egy-egy strukturális egyenletben a megfigyelési időszak egy-egy t részidőszakában kifejt.

Az általában ismeretlen strukturális paraméterek közül *a priori ismertek* az egyes strukturális egyenletekben (a) az okozat szerepét játszó endogén változóké; értékük 1; (b) okként nem szereplő endogén és predeterminált változóké; értékük 0.

A strukturális egyenletekben szereplő *késések* azt mérik, hogy a bennük ábrázolt közvetlen hatások *egyidejűleg vagy időeltolódással érvényesülnek-e*, s ha igen, milyen mértékű késéssel ($\tau \geq 0$).

Konkrét és ,,elméleti'' modelljeinkben feltételeztük, hogy a késések időegységnyiek és egyszeresek. Ettől a tárgyalást egyszerűsítő feltételezéstől eltérő esetek is előfordulnak, ugyanakkor egyszerűsítő feltételezésünk az általánosság csökkentése nélkül megengedhető — s ennek megfelelően a további gondolatmenetünkben is követjük —, mivel a bonyolultabb esetek a változók ,,időtranszformáció''-jával mindig visszavezethetők erre az egyszerű esetre![4]

Az a priori ismeretlen strukturális paraméterek és késések értékét *a modell számszerűsítése* során határozzuk meg.

Lényeges tudatosítanunk, hogy a strukturális paraméterek zérus vagy zérustól különböző voltára és a késések mértékére vonatkozó feltevésekben *a modell közgazdasági hipotézisei* öltenek testet.

Közvetett kauzális összefüggések — a modell származtatott formái

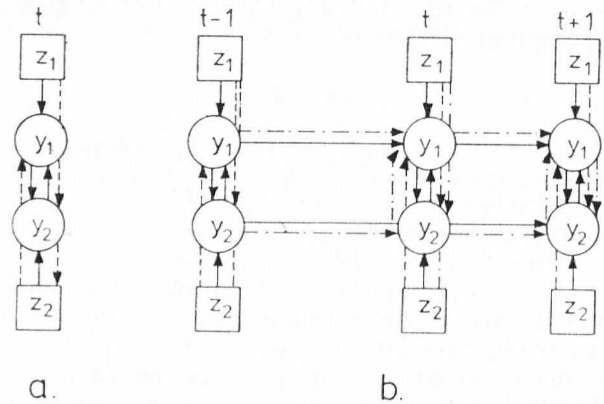
Az endogén változók a modell egészében és a megfigyelési időszak egészében mind az ok, mind az okozat szerepét betölthetik és amennyiben egyidejű vagy késleltetett értékeik ezt a kettős funkciót *be is töltik*, úgy *oksági hatásokat közvetítenek:* az okozat funkciójában ,,felvett'' hatások egy részét (többszörösét) az ok funkciójában más (a többi) endogén változókra ,,továbbítják''. Ennek megfelelően a modellben a közvetlen hatások mellett *közvetett hatások* is érvényesülhetnek, éspedig

(a) *szimultán modellben* az okok funkcióját betöltő egyidejű endogén változó közvetítésével *közvetett egyidejű hatások*;

(b) *dinamikus modellben* az okok funkcióját betöltő késleltetett endogén változók közvetítésével *közvetett késleltetett hatások*.

[3] A továbbiakban endogén változókon mindig egyidejű endogén változókat értünk és csak kivételesen — mondanivalónk pontos megértése érdekében — használjuk az ,,egyidejű'' jelzőt.

[4] Bizonyítását lásd pl. [11]-ben vagy [14]-ben!



2. ábra. Szimultán statikus (a) és szimultán dinamikus (b) modellben érvényesülő közvetett kauzális összefüggések. (Jelölés: → közvetlen (egyidejű és késleltetett), - -→ közvetett egyidejű, - - -→ közvetett késleltetett hatások.)

A további vizsgálódásaink tárgyát képező szimultán dinamikus modellben értelemszerűen a közvetett hatások mindkét típusa jelen van.

A modellben érvényesülő közvetett hatások a közvetlen hatásokat leíró strukturális egyenletrendszerben (a strukturális formában) nem jelennek meg: explicitté csak a modell származtatott formáinak, *redukált és végső formájának* előállításával válnak. A modellben érvényesülő közvetett hatások is jól szemléltethetők az ún. Tinbergen-féle nyílsémával (2. ábra).

A gazdaság működésének leírása

Ezt a későbbi gondolatmenetünkben központi jelentőségű fogalmat közelítsük meg a determinisztikus modellből kiindulva.

A modellben azokat a gazdasági folyamatokat, amelyek kauzális magyarázata a gazdaság működésének leírásához szükséges, *az* (egyidejű) *endogén változók* képviselik. *Determinisztikus modellben* ezeknek a megfigyelési időszak egy-egy részidőszakára vonatkozó *értékegyüttese* a gazdaság egy-egy állapotát jellemzi.

A gazdaság működésének leírása: az (egyidejű) endogén változók alakulásának kauzális magyarázata a modellben kauzálisan nem magyarázott, de statisztikai úton megfigyelhető *ún. változó adottságok* függvényében. Ezek az endogén változók alakulása szempontjából a modell egészében és a megfigyelési időszak egészében okok, éspedig *ún. végső okok*.

A strukturális egyenletrendszerben az okozatként szereplő endogén változók nemcsak a végső okok függvényében jelennek meg: benne szimultán statikus modell esetében egyidejű endogén változók is, szimultán dinamikus modell esetében egyidejű és késleltetett endogén változók is szerepelnek okként, amelyek ugyanakkor más strukturális egyenletekben vagy a megfigyelési időszak valamely korábbi részidőszakában maguk is okozatok. Így a strukturális egyenletrendszer a gazdaság működésének leírására önmagában nem elégséges, származtatott formáinak: a redukált és a végső egyenletrendszernek az előállítására is szükség van.

Megjegyezzük, hogy az (egyidejű) endogén változók alakulása szempontjából adottságok a változó adottságok változásának az egyidejű endogén változókra kifejtett hatását jellemző állandók is, ezek az *ún. állandó adottságok*, amelyek a strukturális egyenletrendszer állandóiból, a strukturális paraméterekből és a késésekből, a származtatott formák előállításával meghatározhatók. *Sztochasztikus modellben* az (egyidejű) endogén változók alakulása szempontjából a statisztikai úton nem megfigyelhető *látens változók is változó adottságok*.

Minthogy a látens változók valószínűségi változók, *az endogén változók is* — a látens változók függvényei lévén — *valószínűségi változók*. Az, hogy *az exogén változókat is valószínűségi változóknak tekintjük, konvenció*, amely anynyiban megalapozott, hogy az exogén változók (többsége) valamely más modellben endogén és így valóban valószínűségi változó.

A látens változóknak, mint változó adottságoknak a jelenléte miatt a sztochasztikus modellben a megfigyelhető változó adottságok egy-egy értékegyüttese az (egyidejű) endogén változóknak nem egy-egy értékegyüttesét, hanem egy-egy — a megfigyelhető változó adottságok egy-egy együttesére mint feltételre vonatkozó — *együttes feltételes eloszlását* határozza meg. Az endogén változóknak ezek az együttes feltételes eloszlásai az eloszlás típusával és momentumaival jellemezhetők, amihez nyilvánvalóan szükséges a látens változók együttes eloszlása típusának és momentumainak ismerete.

Változatlanul igaz, hogy a strukturális egyenletrendszerben az (egyidejű) endogén változók nemcsak végső okok függvényében jelennek meg; ennek megfelelően az endogén változók egy-egy együttes feltételes eloszlását, amely a gazdaság egy-egy állapotát jellemzi, a származtatott formákból határozzuk meg.

Állandók, II

Az előzőekből következik, hogy a strukturális egyenletrendszer állandóinak harmadik csoportját *a strukturális egyenletrendszer látens változói együttes eloszlásának momentumai képezik*: a várható érték vektora és a kovariancia mátrixa, amelyek — a strukturális paraméterekhez és a késésekhez hasonlóan — általában *ismeretlenek*.

Megjegyezzük, hogy származtatott formákban a látens változók együttes eloszlásának momentumai, amelyek az endogén változók együttes feltételes eloszlásának jellemzéséhez szükségesek, meghatározhatók a származtatott formák előállításával, a strukturális egyenletrendszer látens változói együttes eloszlásának momentumaiból.

A statisztikai következtetés

A sztochasztikus modell — a determinisztikus modellel szemben — *kvantitatív* következtetések eszköze. Ezek a következtetések *részben induktív, részben deduktív jellegűek*. A strukturális forma most is kvalitatív jellegű premisszákat formalizál. Ezek a premisszák a strukturális forma számszerűsítésével — állandói számszerű értékének a változók megfigyelésein alapuló becslésével — válnak kvantitatív jellegűvé. A strukturális forma számszerűsítése induktív következtetés útján történik, ez az indukció pedig *statisztikai indukció*: a strukturális formában megjelenő kvantitatív állítások — a statisztikai indukció konklúziói és további következtetések premisszái — csak meghatározott valószínűségi szinten érvényesek. A számszerűsített strukturális formából a modell származtatott formáinak előállítása *deduktív* következtetések útján történik, amelyek ugyancsak *statisztikai jellegűek:* a kvantitatív konklúziók — kvantitatív premisszáikhoz hasonlóan — csak meghatározott valószínűségi szinten igazak.

A struktúra

A struktúra a strukturális egyenletek olyan rendszere, amely elégséges információt tartalmaz az endogén változók együttes feltételes elosztásának — azaz a gazdaság működésének — *kvantitatív* jellemzéséhez.

A modell megfogalmazza a strukturális egyenletek egy (komplett) rendszerét, ez azonban nem nyújt elégséges információt az endogén változók együttes feltételes eloszlása kvantitatív jellemzéséhez, hiszen ismeretlenek benne az állandók egy részének, a strukturális paramétereknek, a késéseknek és a strukturális egyenletek látens változói együttes eloszlása momentumainak konkrét számszerű értékei.

Ennek alapján nyilvánvaló, hogy a struktúra *a számszerűsített modell: a strukturális egyenletrendszer, együtt a strukturális paramétereknek, a késéseknek és a látens változók együttes eloszlása momentumainak konkrét számszerű értékével.*

II. A gazdaság működésének leírása: az egyes modellformák tartalma

Az előző pontban bevezetett fogalmak felhasználásával megfogalmazzuk a modell alapformáját, a strukturális formát, majd előállítjuk a modell származtatott formáit: a redukált formát és a végső formát. Az egyes modellformák matematikai tulajdonságainak vizsgálatával közgazdasági tartalmukat kutatjuk, hogy megadhassuk közgazdasági, illetve kauzális értelmezésüket, megmutathassuk a gazdaság működésének leírásában betöltött szerepüket, feltárhassuk azokat a kvantitatív információkat, amelyeket — számszerűsítés után[5] — a gazdaság működéséről nyújtanak.

1. A strukturális forma

A modell hipotézisei

A modellt hét hipotézissel fogalmazzuk meg, amelyek a strukturális formára vonatkoznak. Ezek a következők:

M-I. hipotézis. A modell M számú endogén, N számú predeterminált és a strukturális forma M számú látens változójának *közvetlen* (egyidejű vagy késleltetett) kauzális összefüggéseit leíró *strukturális egyenletrendszer*, az $[1, \ldots, T]$

[5] Az ökonometriai modell alkalmazása a gazdaság működésének leírásában és elemzésében gyakorlatilag azért érdekes, mert ezekről a kérdésekről kvantitatív információt nyújt. Ebben és a következő részben ezt a körülményt mindig hangsúlyozva, az állandók (paraméterek) ismeretlen elméleti értékeivel dolgozunk. Az így nyert eredmények számszerűsített modellben is érvényesek. Az érdeklődő Olvasó a szimultán dinamikus modell paraméterbecslési módszereiről tájékozódhat pl. [11] alapján.

megfigyelési időszakban M számú sztochasztikus egyenletből álló *lineáris egyenletrendszer*.

Ennek megfelelően a strukturális egyenletrendszer általános alakja a változók egyetlen együttes megfigyelése alapján az

$$\mathbf{y}_t'\mathbf{A} + \mathbf{x}_t'\mathbf{B} + \mathbf{u}_t' = \mathbf{0}' \qquad t = 1, \ldots, T \tag{1.1}$$

formában írható, ahol

$\mathbf{y}_t' = [y_m]_t$ az endogén változók t-edik együttes megfigyelésének M-elemű sorvektora ($m = 1, \ldots, M$);

$\mathbf{x}_t' = [x_n]_t$ a predeterminált változók t-edik együttes megfigyelésének N-elemű sorvektora ($n = 1, \ldots, N$);

$\mathbf{u}_t' = [u_m]_t$ a strukturális forma látens változói t-edik — nem megfigyelt! — realizációjának M-elemű sorvektora ($m = 1, \ldots, M$);

$\mathbf{A} = [\alpha_{m'm}]$ az endogén változók strukturális paramétereinek $M \times M$ típusú (kvadratikus) mátrixa, amelynek egy sora egy endogén változóra, egy oszlopa egy strukturális egyenletre vonatkozik;

$\mathbf{B} = [\beta_{nm}]$ a predeterminált változók strukturális paramétereinek $N \times M$ típusú mátrixa, amelynek egy sora egy predeterminált változóra, egy oszlopa egy strukturális egyenletre vonatkozik.

Megjegyzések

(a) A predeterminált változók között szerepel egy olyan, tételezzük fel, hogy az N-edik, amelynek megfigyeléseire $x_{Nt} = 1$ ($t = 1, \ldots, T$) teljesül. Az x_{Nt}-hez tartozó β_{Nm}($m = 1, \ldots, M$) strukturális paraméterek a strukturális egyenletek *ún. szabad konstansai*.

(b) Minden strukturális egyenletben szerepel egy olyan endogén változó, tételezzük fel, hogy az m-edik egyenletben az m'-edik endogén változó, amelynek strukturális paraméterére $\alpha_{m'm} = -1$ ($m' = m$, $m = 1, \ldots, M$) teljesül. Ez *az ún. normalizálási szabály*. Felhasználásával egyszerűen előállítható *a strukturális egyenletrendszer normalizált alakja*, amelynek egyenletei az eredményváltozók alakulását a magyarázó változók (köztük a látens változók) függvényében ábrázolják. (Az I. részben szereplő strukturális egyenletrendszerek normalizált alakban vannak!)

(c) Az $\mathbf{A}$ és a $\mathbf{B}$ mátrixok tartalmaznak *a priori zérus elemeket*, amelyek — $\mathbf{A}$-t és $\mathbf{B}$-t oszlopaik szerint szemlélve — a megfelelő strukturális egyenletekben (okként) *nem szereplő* endogén és predeterminált változók strukturális paraméterei.

(d) Az (1.1) egyenletrendszer lehet statikus vagy dinamikus modell strukturális egyenletrendszere. Particionáljuk az (1.1) egyenletrendszert a késleltetett endogén változók és az exogén változók megkülönböztetésével!

Eredményül — időegységnyi késést feltételezve — az

$$\mathbf{y}_t'\mathbf{A} + \mathbf{y}_{t-1}'\mathbf{B}_{\mathrm{I}} + \mathbf{z}_t'\mathbf{B}_{\mathrm{II}} + \mathbf{u}_t' = \mathbf{0}' \qquad t = 1, \ldots, T \tag{1.2}$$

egyenletrendszert nyerjük, amelyben

$\mathbf{y}_{t-1}'$ a késleltetett endogén változók egyetlen együttes megfigyelését tartalmazó M-elemű sorvektor;

$\mathbf{z}_t'$ az exogén változók egyetlen együttes megfigyelését tartalmazó K-elemű sorvektor ($K = N - M$);

$\mathbf{B}_{\mathrm{I}} = [\beta_{m'm}]$ és $\mathbf{B}_{\mathrm{II}} = [\beta_{km}]$ a késleltetett endogén változók és az exogén változók strukturális paramétereinek $M \times M$ és $K \times M$ típusú mátrixai.

Abban az esetben, ha a modell *statikus*, $\mathbf{B}_{\mathrm{I}} = 0$, ha viszont a modell *dinamikus* $\mathbf{B}_{\mathrm{I}} \neq 0$, de tartalmazhat zérus elemeket.

M-II. hipotézis. A strukturális forma $\mathbf{u}_t$ látens változóinak együttes eloszlása M-dimenziós *normális* eloszlás[6]

$$E(\mathbf{u})_t = \mathbf{0} \qquad t = 1, \ldots, T \tag{1.3}$$

várható érték vektorral és

$$E(\mathbf{u}_t \mathbf{u}'_{t'}) = \begin{cases} \Sigma \ \textit{(pozitív definit)}, & \text{ha } t = t' \qquad (1.4.a) \\ \mathbf{0}, & \text{ha } t \neq t' \qquad (1.4.b) \end{cases} \qquad t, t' = 1, \ldots, T$$

egyidejű és késleltetett kovariancia mátrixokkal. Ezt

$$f(\mathbf{u}_t) \sim N(\mathbf{0}; \Sigma) \tag{1.5}$$

formában szimbolizálhatjuk.

M-III. hipotézis. A strukturális paraméterek **A** és **B** mátrixainak elemei és a strukturális forma $\mathbf{u}_t$ látens változói együttes eloszlásának (1.3)—(1.4) momentumai az $[1, \ldots, T]$ megfigyelési időszakban t-től függetlenek, vagyis *a struktúra a megfigyelési időszakban időben állandó (stabil).*

M-IV. hipotézis. Az $\mathbf{x}_t$ predeterminált változók és a strukturális forma $\mathbf{u}_t$ látens változói *sztochasztikusan függetlenek* (vagy legalábbis egyidejűleg korrelálatlanok), amiből *következik* hogy egyidejű kovariancia mátrixuk zérusmátrix, azaz

$$E(\mathbf{x}_t \mathbf{u}'_{t'}) = \mathbf{0} \qquad t = t', \ t = 1, \ldots, T \tag{1.6}$$

teljesül.

M-V. hipotézis. Az x_t predeterminált változók *lineárisan független valószínűségi változók*, azaz

$$E(\mathbf{x}_t \mathbf{x}'_{t'}) = \Xi \qquad t = t', \ t = 1, \ldots, T \tag{1.7}$$

egyidejű kovariancia mátrixuk *pozitív definit.*[7]

M-VI. hipotézis. Az endogén változók strukturális paramétereinek **A** mátrixa nem-szinguláris, azaz $|\mathbf{A}| \neq 0$. Ha ez a feltétel teljesül, *a modell komplett.*

M-VII. hipotézis. A strukturális paraméterek **A** és **B** mátrixainak és a strukturális forma $\mathbf{u}'_t$ látens változói momentumainak a priori ismeretlen elemei az endogén és a predeterminált változók $\mathbf{y}'_t$ és $\mathbf{x}'_t$ megfigyelései alapján — statisztikai indukció útján — *egyértelműen* meghatározhatók. Ha ez a feltétel teljesül, *a struktúra identifikálható.*

A modell egyes hipotéziseinek tartalma és funkciója

Hipotéziseinek egy része a modell elemeinek matematikai definícióját adja, vagyis a matematika nyelvén fogalmazza meg az I. részben adott verbális definíciókat.

Az *M-III.* a modell időben változó és időben állandó elemeit különbözteti meg: kimondja, hogy a modell változóinak közvetlen kapcsolatait a megfigyelési időszakban stabil struktúra jellemzi.

[6] Megjegyezzük, hogy a strukturális forma látens változói együttes *normális* eloszlásának feltételezése a gyakorlatban nem szükséges, helyettesíthető enyhébb feltevéssel is, jelen tanulmány lényegi mindanivalójának kifejtését azonban megkönnyíti.

[7] Valószínűségi változók lineáris függetlenségéről lásd [6, 87. o.]!

A predeterminált változókat *az M-V. és az M-IV.* együtt definiálja. Azt, hogy a megfigyelési időszak t-edik részidőszakában a predeterminált és az endogén változók kapcsolata egyirányú (a predeterminált változók *csak okok*), az M-V. fogalmazza meg, ugyanis ha a látens változóktól sztochasztikusan függő endogén változók visszahatnának a predeterminált változókra, ez a hipotézis nem teljesülne. Azt viszont, hogy a predeterminált változók *egymástól független okok*, az M-IV. mondja ki: közöttük mint valószínűségi változók között egzakt lineáris függőség nem lehet.

A látens változók tulajdonságait az *M-V. és az M-II.* együtt fogalmazza meg. Azt, hogy a látens és az endogén változók kapcsolata egyirányú (a látens változók *csak okok*), az M-V. mondja ki, ugyanis, ha a predeterminált változóktól sztochasztikusan függő endogén változók visszahatnának a látens változókra, ez a hipotézis nem teljesülne. A látens változók további tulajdonságai az M-II.-ben jutnak kifejezésre: a látens változók (1.4.a) szerint *egymástól független okokat*, éspedig (1.3) és (1.4.b) szerint *lényegtelen és nem-szisztematikus okok*at képviselnek. (Az (1.4.a) szerint Σ pozitív definit: a látens változók — a predeterminált változókhoz hasonlóan — lineárisan független valószínűségi változók!)

Azt, hogy a predeterminált változók és a látens változók, mint az okok két csoportja, *egymástól is független okok*at tartalmaz, szintén *az M-IV.* mondja ki.

Az, hogy a predeterminált változók *lényeges vagy szisztematikus okok*at képviselnek, a modell megfogalmazásában csak *implicit formában* jut kifejezésre: velük kapcsolatban *nem* tételeztük fel sem azt, hogy várhatóérték vektoruk zérusvektor, sem azt, hogy késleltetett kovariancia mátrixaik zérusmátrixok.

A modellben induktív és deduktív statisztikai következtetéseket végzünk. Az induktív következtetés célja — az endogén és a predeterminált változók megfigyelései alapján — a struktúra meghatározása, a deduktív következtetések pedig — a becsült struktúra ismeretében — a gazdaságban érvényesülő mélyebb, közvetett kauzális összefüggések feltárására, a modell származtatott formáinak előállítására, a közvetett kauzális összefüggéseket jellemző paraméterek meghatározására irányulnak. *Az induktív következtetés csak akkor egyértelmű, ha M-VII. teljesül, hasonlóan a deduktív következtetések egyértelműségének feltétele az M-VI. teljesülése.* E két hipotézis tehát a modellből levont következtetéseket egyértelművé teszi.

A strukturális forma szerepe és tartalma

A strukturális forma a gazdaság működésének leírásában kitüntetett szerepet játszik: *a strukturális egyenletrendszer az, amelyben a gazdaság működésére vonatkozó közgazdasági hipotéziseinket formalizálni tudjuk és amelyben* — a struktúra meghatározása után — *ezeket a hipotéziseket a valósággal szembesítjük.* Abban az esetben, ha ez a verifikáció pozitív kimenetelű, *a strukturális egyenletrendszer a gazdaság működéséről közgazdaságilag értelmezhető adekvát képet nyújt.*

Ugyanakkor a strukturális forma a gazdaság működését folyamatainak *legfelszínibb* kauzális összefüggései alapján ábrázolja: paraméterei a változók *közvetlen* (egyidejű és késleltetett) kauzális összefüggéseit jellemzik. Szimultán dinamikus modellben azonban *közvetett* (egyidejű és késleltetett) kauzális összefüggések is érvényesülnek, amelyek feltárása a gazdaság működésének *teljes* leírásához nélkülözhetetlen. Éppen ezért, a közvetett (egyidejű és késleltetett) kauzális összefüggések explicitté tétele végett kell előállítani a strukturális formából, mint alapformából, a modell származtatott formáit.

A származtatott modellformák tartalmának pontos megértése érdekében fogalmazzuk meg a strukturális forma paramétermátrixainak tartalmát! Tekintsük ehhez a strukturális egyenletrendszer (1.2) particionált alakját! Tudjuk — normalizálási szabály! —, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix diagonális elemei az egyes strukturális egyenletek eredményváltozóinak paraméterei és (-1)-gyel egyenlők. Az $\mathbf{A}$ mátrix $\alpha_{m'm}$ $(m' \neq m)$, illetve a $\mathbf{B}_{\mathrm{II}}$ mátrix β_{km} eleme azt a közvetlen egyidejű hatást méri, amelyet az m'-edik endogén változó, illetve a k-adik exogén változó egységnyi növekedése az m-edik endogén változóra *egyetlen strukturális egyenletben* kifejt. Hasonlóan a $\mathbf{B}_{\mathrm{I}}$ mátrix $\beta_{m'm}$ eleme azt a közvetlen késleltetett hatást jellemzi, amelyet az m'-edik késleltetett endogén változó az m-edik (egyidejű)endogén változóra egy időegységnyi késéssel *egyetlen strukturális egyenletben* gyakorol.

2. A redukált forma

A redukált forma tulajdonságai

Az M-VI. hipotézis teljesülése esetén *létezik* a modell redukált formája *és egyértelműen meghatározott.* A redukált forma négy tulajdonsága, amely a strukturális forma hipotéziseiből következik és így szintén feltételes jellegű, a következő:

R-1. *tulajdonság.* Az endogén, a predeterminált és a látens változók *teljes egyidejű és közvetlen késleltetett* kauzális összefüggéseit leíró *redukált egyenletrendszer* M számú sztochasztikus egyenletből álló *lineáris egyenletrendszer.* Mivel a redukált egyenletrendszert úgy állítjuk elő, hogy a strukturális egyenletrendszert megoldjuk mint az egyidejű endogén változókban inhomogén lineáris egyenletrendszert, az R-1. közvetlenül következik az M-I-ből.

Ennek megfelelően *a redukált egyenletrendszer* a változók egyetlen együttes megfigyelése alapján az

$$\mathbf{y}_t' = \mathbf{x}_t'(-\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}) + \mathbf{u}_t'(-\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{x}_t'\mathbf{\Pi} + \mathbf{v}_t' \qquad t = 1, \ldots, T \qquad (2.1)$$

formában írható, ahol

$\mathbf{\Pi} = -\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} = [\pi_{nm}]$, a redukált paraméterek $N \times M$ típusú mátrixa, amelynek egy sora egy predeterminált változóra, egy oszlopa egy redukált egyenletre vonatkozik;

$\mathbf{v}_t' = \mathbf{u}_t'(-\mathbf{A}^{-1}) = [v_m]_t$ a redukált forma látens változói t-edik — nem megfigyelt! — realizációjának M-elemű sorvektora.

A (2.1) egyenletrendszer egyaránt lehet statikus és dinamikus modell redukált egyenletrendszere. Particionáljuk a (2.1) egyenletrendszert a késleltetett endogén és az exogén változók megkülönböztetésével! Eredményül — időegységnyi késést feltételezve — az

$$\mathbf{y}_t' = \mathbf{y}_{t-1}'\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}} + \mathbf{z}_t'\mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}} + \mathbf{v}_t' \qquad t = 1, \ldots, T \qquad (2.2)$$

egyenletrendszert nyerjük, amelyben $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}} = -\mathbf{B}_{\mathrm{I}}\mathbf{A}^{-1} = [\pi_{m'm}]$ és $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}} = -\mathbf{B}_{\mathrm{II}}\mathbf{A}^{-1} = [\pi_{km}]$ a késleltetett endogén változók és az exogén változók redukált paramétereinek $M \times M$ és $K \times M$ típusú mátrixai. Abban az esetben, ha a modell *statikus*, $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}} = \mathbf{0}$, ha viszont a modell *dinamikus* $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}} \neq \mathbf{0}$, de tartalmazhat zéruselemeket. Figyeljük meg, hogy dinamikus modell esetében a redukált egyenletrendszer az endogén változókban inhomogén lineáris differencia egyenletrendszer.

R-2. *tulajdonság.* A redukált forma $\mathbf{v}_t$ látens változóinak együttes eloszlása M-dimenziós *normális* eloszlás

$$E(\mathbf{v}_t) = E(-\mathbf{A}'^{-1}\mathbf{u}_t) = \mathbf{A}'^{-1}E(\mathbf{u}_t) = \mathbf{0} \qquad t = 1, \ldots, T \quad (2.3)$$

várható érték vektorral és

$$E(\mathbf{v}_t\mathbf{v}_{t'}') = E(-\mathbf{A}'^{-1})\mathbf{u}_t\mathbf{u}_{t'}'(-\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}'^{-1}E(\mathbf{u}_t\mathbf{u}_{t'})\mathbf{A}^{-1} =$$

$$= \begin{cases} \mathbf{A}'^{-1}E(\mathbf{u}_t\mathbf{u}_{t'}')\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{\Omega} \ \ \textit{(pozitív definit)} & \text{ha } t = t' \quad (2.4.\text{a}) \\ \mathbf{0} & \text{ha } t \neq t' \quad (2.4.\text{b}) \end{cases}$$

$$t = 1, \ldots, T$$

egyidejű és késleltetett kovariancia mátrixokkal. Ezt

$$f(\mathbf{v}_t) \sim N(\mathbf{0}; \mathbf{\Omega}) \quad (2.5)$$

formában szimbolizálhatjuk.

R-2 közvetlenül következik M-II.-ből. A $\mathbf{v}_t$ definíciója alapján ugyanis az $\mathbf{u}_t$-ben $\mathbf{v}_t = (-\mathbf{A}'^{-1})\mathbf{u}_t$ szerint lineáris forma, ahol a $(-\mathbf{A}'^{-1})$ nem szinguláris konstans mátrix.

R-3. *tulajdonság.* A redukált paraméterek $\mathbf{\Pi}$ mátrixának elemei és a redukált forma $\mathbf{v}_t$ látens változói együttes eloszlásának momentumai az $[1, \ldots, T]$ megfigyelési időszakban t-től *függetlenek, vagyis időben állandók.*

Az R-3. a $\mathbf{\Pi}$ és a $\mathbf{v}_t$ definíciója alapján M-III.-ból közvetlenül következik.

R-4. *tulajdonság.* Az $\mathbf{x}_t$ predeterminált változók és a redukált forma $\mathbf{v}_t$ látens változói *sztochasztikusan függetlenek* (vagy legalábbis egyidejűleg korrelálatlanok), amiből *következik*, hogy egyidejű kovariancia mátrixuk zérusmátrix, azaz:

$$E(\mathbf{x}_t\mathbf{v}_{t'}') = E[\mathbf{x}_t\mathbf{u}_t'(-\mathbf{A}^{-1})] = E(\mathbf{x}_t\mathbf{u}_{t'}')(-\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{0} \qquad t = t',\ t = 1, \ldots, T. \quad (2.6)$$

Sztochasztikus függetlenség esetén a redukált forma látens változóinak a predeterminált változókra vonatkozó feltételes eloszlása megegyezik feltétel nélküli eloszlásukkal!

Az R-4. a $\mathbf{v}_t$ definíciója alapján M-IV.-ből közvetlenül következik.

A redukált forma szerepe és tartalma

A redukált forma szerepe. A redukált formából nyerhető információk — *szimultán* dinamikus modellben — kiegészítik a strukturális formából nyerhető információkat, nélkülözhetetlenek a gazdaság működésének mélyebb megismeréséhez. A redukált forma lehetőséget ad az endogén és az (egyidejű) exogén változók *teljes egyidejű* kauzális kapcsolatainak kvantitatív jellemzésére. Ugyanakkor a redukált egyenletek nem adják a gazdaságnak olyan közgazdaságilag értelmezhető leírását, mint a strukturális egyenletek.

Az endogén változók együttes feltételes eloszlása. A redukált formából meghatározható az endogén változóknak a predeterminált változókra — pontosabban azok egy-egy $\mathbf{x}_t$ realizációjára — vonatkozó együttes feltételes eloszlása. Ez az eloszlás M-dimenziós *normális* eloszlás

$$E(\mathbf{y}_t'|\mathbf{x}_t') = E(\mathbf{x}_t'\mathbf{\Pi}_t + \mathbf{v}_t'|\mathbf{x}_t') = E(\mathbf{x}_t'\mathbf{\Pi} + \mathbf{v}_t') = \mathbf{x}_t'\mathbf{\Pi} \tag{2.7}$$

várható érték vektorral és

$$E\{[\mathbf{y}_t' - E(\mathbf{y}_t'|\mathbf{x}_t')]'[\mathbf{y}_t' - E(\mathbf{y}_t'|\mathbf{x}_t')]|\mathbf{x}_t'\} = E(\mathbf{v}_t\mathbf{v}_t'|\mathbf{x}_t') = E(\mathbf{v}_t\mathbf{v}_t') = \mathbf{\Omega} \tag{2.8}$$

(egyidejű) kovariancia mátrixszal. Ezt

$$f(\mathbf{y}_t'|\mathbf{x}_t') \sim N(\mathbf{x}_t'\mathbf{\Pi}; \mathbf{\Omega}) \tag{2.9}$$

formában szimbolizálhatjuk.

A redukált paraméterek mint paciális deriváltak. Az egyes redukált paraméterek — erről a (2.7)-ben végzett parciális deriválással meggyőződhetünk — az egyes endogén változók feltételes várható értékének az egyes predeterminált változók szerinti parciális deriváltjai, azaz

$$\pi_{nm} = \partial E(\mathbf{y}_{mt}|\mathbf{x}_t)/\partial x_{nt}. \tag{2.10}$$

Ebből az interpretációból következik egyébként a redukált paraméterek értelmezésénél hangsúlyozandó *ceteris paribus* (c.p.) *elv*.

A redukált paraméterek tartalma. Tekintsük a (2.2) redukált egyenletrendszer particionált alakját. A redukált paraméterek általános tartalmát (2.10) alatti matematikai interpretációjukat is figyelembe véve, a következőkben adhatjuk meg:

A $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}}$ mátrix egyes elemei azt a *teljes egyidejű hatást* mérik, amelyet az egyes exogén változók egységnyi növekedése az egyes endogén változók feltételes várható értékére *(a modell egészében)* c.p. kifejt. Ez a teljes egyidejű hatás a közvetlen egyidejű hatás mellett *a közvetett egyidejű hatást* is tartalmazza, amelyet explicit formában a $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}} - \mathbf{B}_{\mathrm{II}}$ különbségmátrix elemei jellemeznek.

A $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}$ mátrix egyes elemei azt *a közvetlen késleltetett hatást* mérik, amelyet az egyes késleltetett endogén változók egységnyi növekedése az egyes endogén változók feltételes várható értékére egy időegységnyi késéssel *(a modell egészében)* c.p. kifejt.

Vegyük észre a késleltetett endogén változóknak a redukált formában és a strukturális formában megjelenő közvetlen késleltetett hatása közötti különbséget ($\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}} \neq \mathbf{B}_{\mathrm{I}}$). Ez a különbség a közvetlen késleltetett hatás érvényesülésének módjában lévő eltéréssel magyarázható: ez a hatás a strukturális formában *egy-egy egyenletben*, a redukált formában *a modell egészében* jut érvényre (vö. $\mathbf{B}_{\mathrm{I}}$ értelmezése!).

A $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}}$ mátrix elemei mint egyidejű multiplikátorok

A $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}}$ paramétermátrix elemeit, amelyek az exogén változók egységnyi növekedésének az endogén változókra kifejtett teljes egyidejű hatását, így a közvetlen egyidejű hatások mellett a magyarázó változóként szereplő egyidejű endogén változók közvetítésével érvényesülő közvetett egyidejű hatását is mérik, *egyidejű multiplikátorokként* értelmezzük. Ez az értelmezés a Keynes-i multiplikátorfogalom *statikus* általánosítása, amelynek lényege, hogy nemcsak egyetlen exogén változónak — a Keynes-i elméletben az autonóm beruházásoknak —, hanem valamennyinek van multiplikátor hatása.[8]

3. A végső forma[9]

A végső forma tulajdonságai

Abban az esetben, ha a redukált egyenletrendszer (2.2) particionált alakjában szereplő $\mathbf{\Pi}_\mathrm{I}$ mátrix kvadratikus, *létezik* a modell végső formája *és egyértelműen meghatározott.*[10]

A végső forma négy tulajdonsága, amely a redukált forma tulajdonságaiból következik és így szintén hipotetikus jellegű, a következő:

V-1. *tulajdonság.* Az endogén, a predeterminált és a látens változók *teljes egyidejű, közvetlen késleltetett és közvetett késleltetett* kauzális összefüggéseit leíró *végső egyenletrendszer a paraméterekben exponenciális egyenletrendszer*, amely *M* számú sztochasztikus egyenletből áll.

Mivel a végső egyenletrendszert úgy nyerjük, hogy előállítjuk a (2.2) redukált egyenletrendszernek mint az endogén változókban inhomogén lineáris differencia egyenletrendszernek az általános megoldását, V-1. az R-1.-ből közvetlenül következik.

Ennek megfelelően *a végső egyenletrendszer* a változók egyetlen együttes megfigyelése alapján[11]

$$\mathbf{y}'_t = \mathbf{y}'_0\mathbf{\Pi}^t_\mathrm{I} + \sum_{\tau=0}^{t-1} \mathbf{z}'_{t-\tau}\mathbf{\Pi}_{11}\mathbf{\Pi}^\tau_\mathrm{I} + \mathbf{w}'_t \qquad t = 1, \ldots, T \quad (3.1)$$

[8] A multiplikátorforgalom jelen és a továbbiakban még tárgyalandó általánosításával más-más néven és eltérő tartalommal az ökonometriaelmélet fejlődésének már viszonylag korai szakaszában kísérleteztek, pl. [7], [15] és ez az általánosítás a későbbiekben is folytatódott: [5], [6] és [14]. A tartalmi különbségeket megszüntetendő jelen tanulmányban *a multiplikátor fogalom általánosításai tartalmilag konzisztens rendszerének kialakítására törekszünk és ennek keretében a multiplikátor fogalom újabb általánosításait is értelmezzük.* Tesszük ezt a következő szempontok alapján: (a) multiplikátorként csak olyan paramétermátrixok elemeit tekintjük, amelyek *közvetett* egyidejű és késleltetett hatásokat (is) mérnek; (b) multiplikátorhatást *csak az exogén változóknak* tulajdonítunk; (c) multiplikátorok *összegét* is multiplikátorként értelmezzük.

[9] A végső forma modern értelmezését a [14] szerzői adták meg és végső egyenletrendszeren az

$$\mathbf{y}'_t = \sum_{\tau=0}^{\infty} \mathbf{z}'_{t-\tau}\mathbf{\Pi}_{11}\mathbf{\Pi}^\tau_\mathrm{I} + \sum_{\tau=0}^{\infty} \mathbf{w}'_{t-\tau}\mathbf{\Pi}^\tau_\mathrm{I}$$

egyenletrendszert értették. Minthogy ez az értelmezés feltételezi a $\mathbf{\Pi}_\mathrm{I}$ mátrix aszimptotikus nilpotenciáját, ami a gyakorlatban nem mindig teljesül, jelen tanulmányban ettől az értelmezéstől eltérünk, azzal a céllal, hogy a végső forma a gazdaság működése leírására és elemzésére általánosabb esetben is használható legyen.

[10] Az, hogy a $\mathbf{\Pi}_\mathrm{I}$ mátrix kvadratikus, implikálja, hogy valamennyi endogén változó szerepel a modellben késéssel is, ami a gyakorlatban általában nem teljesül. A végső forma egzisztenciafeltételét azonban triviális módon biztosíthatjuk úgy, hogy (az egyébként nem kvadratikus) mátrixot annyi **0** sorvektorral egészítjük ki, ahány endogén változó nem szerepel a modellben késéssel.

[11] Levezetése megtalálható pl. [11]-ben, elméleti háttere az [1], [2] vagy a [3] munkákban.

formában írható,[11] ahol

$\mathbf{y}'_0 = [y_m]_0$ az endogén változók kezdeti értékeinek M-elemű sorvektora;

$\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^t = [\pi_{m'm}]_t$ és $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}}\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^\tau = [\pi_{km}]_\tau$ a végső paraméterek $M\times M$ és $K\times M$ típusú mátrixai, amelyek egy sora egy endogén változó kezdeti értékére, illetve egy exogén változó egyidejű vagy késleltetett értékére, egy oszlopa egy végső egyenletre vonatkozik;

$\mathbf{w}'_t = \sum_{\tau=0}^{t-1} \mathbf{v}'_{t-\tau}\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^\tau = [w_m]_t$ a végső forma látens változói t-edik — nem — megfigyelt! — realizációjának M-elemű sorvektora.

V-2. tulajdonság. A végső forma $\mathbf{w}_t$ látens változóinak együttes eloszlása *normális*, amelynek dimenzióját a $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}$ mátrix rangja határozza meg,[12]

$$E(\mathbf{w}_t) = \mathbf{0} \qquad t = 1, \ldots, T \tag{3.2}$$

várhatóérték vektorral és

$$E(\mathbf{w}_t\mathbf{w}'_{t'}) = \begin{cases} \sum_{\tau=0}^{t-1} \mathbf{\Pi}'^{\tau}_{\mathrm{I}}\mathbf{\Omega}\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^\tau = \mathbf{\Theta}_\tau & \text{pozitív szemidefinit, ha } t = t' \qquad (3.3.a) \\ \sum_{\tau=\nu}^{t-1} \mathbf{\Pi}'^{\tau}_{\mathrm{I}}\mathbf{\Omega}\mathbf{\Pi}^{\tau-\nu} = \mathbf{\Theta}_\nu & \text{ha } t \neq t',\ \nu = |t'-t| \qquad (3.3.b) \end{cases}$$

$$(t = 1, \ldots, T)$$

egyidejű és késleltetett kovariancia mátrixokkal. Ezt

$$f(\mathbf{w}_t) \sim N(\mathbf{0}; \mathbf{\Theta}_\tau)$$

formában szimbolizálhatjuk.

V-2. levezetését R-2.-ből itt mellőzzük.[13]

V-3. tulajdonság. A végső paraméterek $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^t$ és $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}}\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^t$ mátrixai és a végső egyenletrendszer $\mathbf{w}_t$ látens változóinak egyidejű és késleltetett kovariancia mátrixai az $[1, \ldots, T]$ megfigyelés időszakban *időben nem állandók:* részben t, részben τ szerint *az idő függvényei.*

A V-3. érvényessége a V-1. és a V-2. alapján könnyen belátható.

V-4. tulajdonság. A predeterminált változók (itt az endogén változók $\mathbf{y}'_0$ kezdeti értékegyüttese és az exogén változók $\mathbf{z}'_{t-\tau}(\tau \geq 0)$ időbeli pályája és a végső forma $\mathbf{w}'_t$ látens változói *sztochasztikusan függetlenek* (vagy legalábbis egyidejűleg korrelálatlanok).

V-4. levezetését R-4.-ből itt nem végezzük el. Sztochasztikus függetlenség esetén a végső forma látens változóinak a predeterminált változókra vonatkozó feltételes eloszlása megegyezik feltétel nélküli eloszlásukkal!

A végső forma szerepe és tartalma

A végső forma szerepe. A végső formából nyerhető információk — szimultán *dinamikus* modellben — kiegészítik a strukturális és a redukált formából nyert információkat, nélkülözhetetlenek a gazdaság működésének teljes megismeréséhez. A végső forma lehetőséget ad az endogén és az exogén változók *közvetett*

[12] Az elfajult együttes normális eloszlásról lásd pl. [3. 368—369. pp.] vagy [4, 142. p.].
[13] Levezetését lásd pl. [11]-ben!

késleltetett kauzális kapcsolatainak kvantitatív jellemzésére. Ugyanakkor a végső egyenletek — a redukált egyenletekhez hasonlóan — nem adják a gazdaság működésének olyan közgazdaságilag értelmezhető leírását, mint a strukturális egyenletek.

Az endogén változók együttes feltételes eloszlása. A végső formából is meghatározható az endogén változóknak a predeterminált változókra (itt az endogén változók $\mathbf{y}_0'$ kezdeti érték együttesére és az exogén változók $\mathbf{z}_{t-\tau}'(\tau \geq 0)$ időbeli pályájára) — pontosabban azok egy-egy realizációjára — vonatkozó együttes feltételes eloszlása. Ez az eloszlás *normális*, amelynek dimenzióját a $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}$ mátrix rangja határozza meg,

$$E(\mathbf{y}_t'|\mathbf{y}_0',\mathbf{z}_{t-\tau}') = E(\mathbf{y}_0'\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^t + \sum_{\tau=0}^{t-1} \mathbf{z}_{t-\tau}'\mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}}\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^\tau + \mathbf{w}_t'|\mathbf{y}_0',\mathbf{z}_{t-\tau}') =$$

$$= E(\mathbf{y}_0'\mathbf{\Pi}_t' + \sum_{\tau=0}^{t-1} \mathbf{z}_{t-\tau}'\mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}}\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^\tau + \mathbf{w}_t') = \mathbf{y}_0'\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^t + \sum_{\tau=0}^{t-1} \mathbf{z}_{t-\tau}'\mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}}\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^\tau \tag{3.5}$$

várható érték vektorral és

$$E\{[\mathbf{y}_t' - E(\mathbf{y}_t'|\mathbf{y}_0',\mathbf{z}_{t-\tau}')]'[\mathbf{y}_t' - E(\mathbf{y}_t'|\mathbf{y}_0',\mathbf{z}_{t-\tau}')]|\mathbf{y}_0',\mathbf{z}_{t-\tau}'\} =$$

$$= E(\mathbf{w}_t\mathbf{w}_t'|\mathbf{y}_0',\mathbf{z}_{t-\tau}') = E(\mathbf{w}_t\mathbf{w}_{t-\tau}') = \sum_{\tau=0}^{t-1} \mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}'^\tau\mathbf{\Omega}\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^\tau = \mathbf{\Theta}_\tau \tag{3.6}$$

(egyidejű) kovariancia mátrixszal. Ezt az

$$f(\mathbf{y}_t'|\mathbf{y}_0',\mathbf{z}_{t-\tau}') \sim N(\mathbf{y}_0'\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^t + \sum_{\tau=0}^{t-1} \mathbf{z}_{t-\tau}'\mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}}\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^\tau;\mathbf{\Theta}_\tau) \tag{3.7}$$

formában szimbolizálhatjuk.

A végső paraméterek mint parciális deriváltak. Az egyes végső paraméterek — erről a (3.5)-ben végzett parciális deriválással meggyőződhetünk — az egyes endogén változók feltételes várható értékének az egyes endogén változók kezdeti értékei, illetve az egyes exogén változók különböző időszakokhoz tartozó értékei szerinti parciális deriváltjai, azaz

$$[\pi_{m'm}]_t = \partial E(y_{m't}|\mathbf{y}_0',\mathbf{z}_{t-\tau}')/\partial y_{m0}, \tag{3.8}$$

illetve

$$[\pi_{km}]_\tau = \partial E(y_{mt}|\mathbf{y}_0',\mathbf{z}_{t-\tau}')/\partial z_{k,t-\tau} \tag{3.9}$$

Ebből az interpretációból következik a végső paraméterek értelmezésénél is hangsúlyozandó *ceteris paribus* elv.

A végső paraméterek tartalma. Tekintsük a (3.1) végső egyenletrendszert! A végső paraméterek általános tartalmát — (3.8) és (3.9)-beli matematikai interpretációjukat is figyelembe véve — a következőkben fogalmazhatjuk meg:

A $\mathbf{\Pi}_t^{\mathrm{I}}$ mátrix egyes elemei azt *a közvetlen késleltetett hatást* mérik, amelyet az egyes endogén változók kezdeti értékeinek „egységnyi növekedése" az egyes endogén változók feltételes várható értékére a modell egészében a megfigyelési időszak t-edik részidőszakában, azaz *t időegységnyi késéssel* c.p. kifejt.

A $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}}\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^\tau$ mátrixok egyes elemei

$\tau = 0$ esetén az egyes exogén változók egységnyi növekedésének az egyes endogén változók feltételes várható értékére kifejtett *teljes egyidejű hatását* mérik, c.p.;

$\tau > 0$ esetén az egyes exogén változók egyszeri egységnyi növekedésének *közvetett késleltetett hatását* mérik az egyes endogén változók feltételes várható értékére *τ időegységnyi késéssel*, c.p.

Figyeljük meg, hogy a $\mathbf{\Pi}_{II}\mathbf{\Pi}_{I}^{\tau}$ mátrix elemei ($\tau > 0$) az exogén változók *egyszeri* egységnyi növekedésének τ részidőszakkal később érvényesülő közvetett késleltetett hatását mérik; ebben az esetben az egyes exogén változók a megfigyelési időszak valamely részidőszakában egy egységgel nőnek, a következő részidőszakokban viszont ismét a régi szintjükön alakulnak (a gazdaságot *egyetlen külső impulzus* éri). A gyakorlatban ez az eset — jóllehet előfordul — inkább kivételnek számít. Jellemzőbb az az eset, amelyben az exogén változók a megfigyelési időszak valamely részidőszakában egy egységgel nőnek és az azt követő részidőszakok egy sorában az új szintjükön alakulnak. Ekkor az exogén változók *fenntartott* egységnyi növekedéséről beszélünk (a gazdaságot érő *külső impulzus a megfigyelési időszak több egymást követő részidőszakában megismétlődik*). A kétféle változás különbségét a 3.A. ábra szemlélteti.

Kérdés: hogyan tudjuk mérni azt a közvetett késleltetett hatást, amelyet az egyes exogén változók fenntartott egységnyi változása az egyes endogén változók feltételes várható értékére τ részidőszakkal később, c.p. kifejt? Azt a paramétermátrixot, amelynek elemei ezt a hatást mérik, könnyen meghatározhatjuk. A szóban forgó változás időszakában ($\tau = 0$) ennek (teljes egyidejű) hatását a $\mathbf{\Pi}_{II}$ mátrix elemei, egy időszakkal később ($\tau = 1$) a $\mathbf{\Pi}_{II}\mathbf{\Pi}_{I} + \mathbf{\Pi}_{II}$, vagyis az előző időszakban bekövetkezett változás közvetett késleltetett hatását és a folyó időszakban is érvényesülő (fenntartott) változás teljes egyidejű hatását jellemző paramétermátrixok összegének elemei mérik. Ezt a gondolatmenetet tovább folytatva felírhatjuk az általános képletet $\sum_{\nu=0}^{\tau} \mathbf{\Pi}_{II}\mathbf{\Pi}_{I}$ formában. Ennek a mátrixnak az elemei mérik tehát az egyes exogén változók fenntartott egységnyi növekedésének az egyes endogén változók feltételes várható értékére kifejtett közvetett késleltetett hatását τ részidőszakkal később, c.p.[14]

A $\mathbf{\Pi}_{II}\mathbf{\Pi}_{I}^{\tau}$ és a $\sum_{\nu=0}^{\tau} \mathbf{\Pi}_{II}\mathbf{\Pi}_{I}^{\nu}$ paramétermátrixok mint késleltetett multiplikátorok.

A $\mathbf{\Pi}_{II}\mathbf{\Pi}_{I}^{\tau}$, illetve $\sum_{\nu=0}^{\tau} \mathbf{\Pi}_{II}\mathbf{\Pi}_{I}^{\nu}$ paramétermátrixok elemei az egyes exogén változó-egyszeri egységnyi, illetve fenntartott egységnyi növekedésének az egyes endogén változók feltételes várható értékére τ időegységnyi késéssel kifejtett közvetett késleltetett hatását mérik, tehát *késleltetett multiplikátorok*ként értelmezhetők. Ez a Keynes-i multiplikátor fogalom egy újabb, *dinamikus* általánosítása.

[14] Természetesen a gyakorlatban a különböző exogén változók egyszeri és fenntartott változása *együttesen* is előfordul(hat). Az itt definiált paraméter-mátrixok az egyik vagy a másik változás közvetett késleltetett hatását mérik és definíciójuk az exogén változók *vektorára* vonatkozik. Abban az esetben, ha egyes exogén változókra az egyik, másokra a másik változástípus érvényes, úgy mindkét paramétermátrixot meghatározzuk és a változás jellegétől függően a változás hatását az egyik, vagy a másik paramétermátrix megfelelő elemével jellemezzük.

A multiplikátorfogalom további általánosításai

Kumulált multiplikátorok. A gyakorlatban érdekes kérdés, hogy az egyes exogén változók egyszeri egységnyi, illetve fenntartott egységnyi növekedése milyen hatást eredményez az egyes endogén változók feltételes várható értékére, c.p. több, mondjuk η részidőszak alatt összesen. Az erre a kérdésre választ adó paramétermátrixokat könnyen felírhatjuk, ha a megfelelő változás teljes egyidejű és közvetett késleltetett hatásait jellemző paramétermátrixokat összegezzük $\sum_{\tau=0}^{\eta-1} \mathbf{\Pi}_{II}\mathbf{\Pi}_{I}^{\tau}$, illetve $\sum_{\tau=0}^{\eta-1} \sum_{\nu=0}^{\tau} \mathbf{\Pi}_{II}\mathbf{\Pi}_{I}^{\nu}$ formában. Ezen paramétermátrixok elemei — multiplikátorok összegei lévén — maguk is multiplikátorokként, éspedig *kumulált multiplikátorok*ként értelmezhetők.

Totális vagy egyensúlyi multiplikátorok. A kumulált multiplikátorok meghatározásánál az időhorizont — η — megválasztása mindig tartalmaz önkényességet, így ezek csak részleges képet adnak az exogén változók változásának a gazdaságra gyakorolt teljes hatásáról. Célszerű ezért az időhorizontot végtelenre választani. Ennek lehetősége értelemszerűen csak az exogén változók *egyszeri* egységnyi növekedésével összefüggésben adott és a

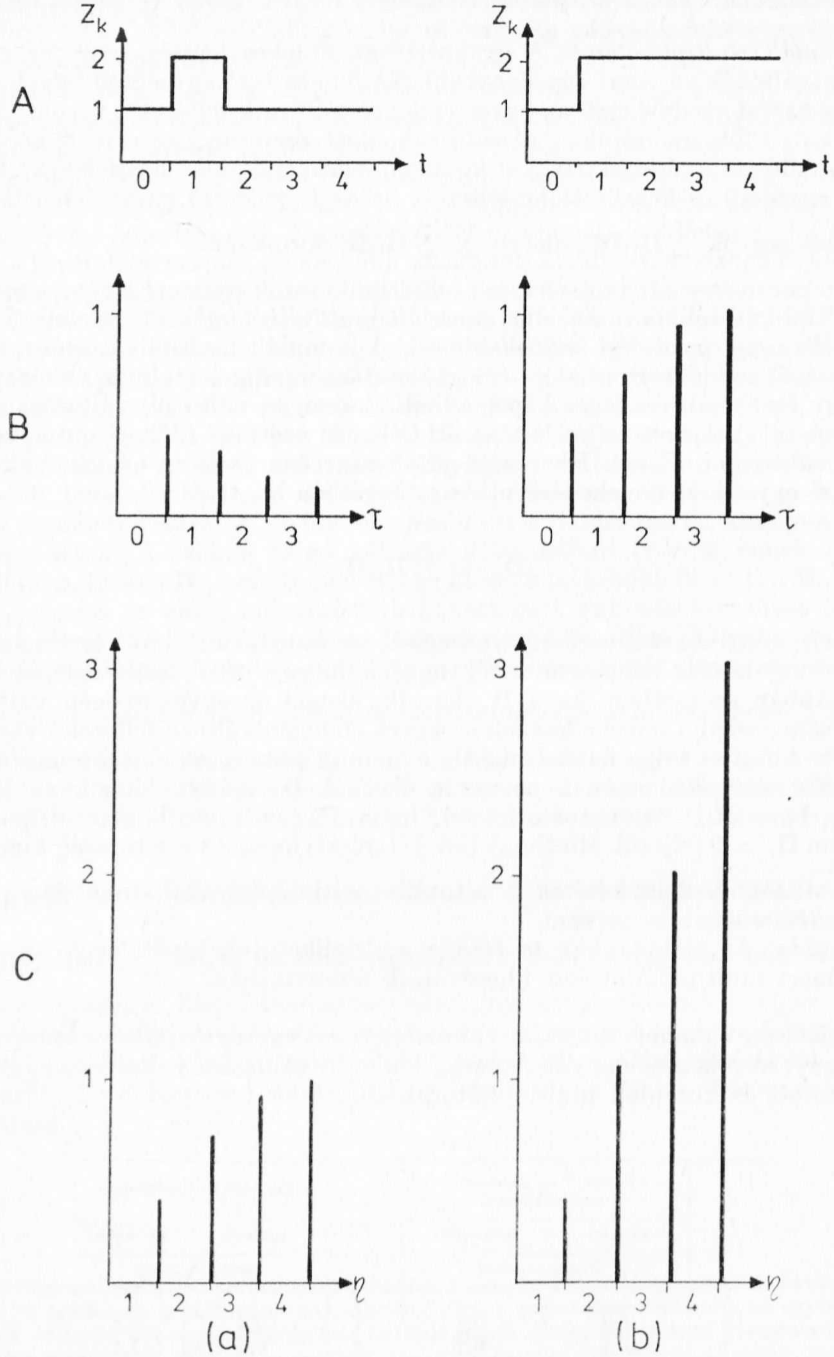
$$\mathbf{D}_{\infty} = \sum_{\tau=0}^{\infty} \mathbf{\Pi}_{II}\mathbf{\Pi}_{I}^{\tau} \tag{3.10}$$

végtelen mátrixhatványsorral értelmezett paramétermátrixot eredményezi, amely vagy létezik vagy nem, attól függően, hogy a (3.10) konvergens-e vagy sem. Abban az esetben, ha a $\mathbf{D}_{\infty}$ létezik, elemei az egyes exogén változók egyszeri egységnyi növekedésének az egyes endogén változó feltételes várható értékére kifejtett teljes hatását mérik, c.p., multiplikátorokként értelmezhetők és *totális multiplikátorok*nak nevezzük őket. A $\mathbf{D}_{\infty}$ mátrix létezik és $\mathbf{D}_{\infty} = (\mathbf{\Pi}_{II}(\mathbf{I}_M - \mathbf{\Pi}_{I})^{-1}$ formában írható, ha a $\mathbf{\Pi}_{I}$ aszimptotikusan nilpotens, azaz $\lim_{t\to\infty} \mathbf{\Pi}_{I} = \mathbf{0}$ teljesül. Minthogy (vö. III. rész!) ugyanez a gazdaság kiegyensúlyozott fejlődésének feltétele is, a totális multiplikátorokat szokás *egyensúlyi multiplikátorok*nak is nevezni.

3. *példa.* Az alábbiakban (a totális multiplikátorok kivételével) az eddig megismert multiplikátorokat illusztráljuk numerikusan.

1. *táblázat:* Valamely z_k exogén változó egyszeri egységnyi, illetve fenntartott egységnyi növekedésének valamely y_m endogén változóra vonatkozó egyidejű, késleltetett és kumulált multiplikátorai.

τ	Egyidejű és késleltetett multiplikátorok		η	Kumulált multiplikátorok	
	egyszeri	fenntartott		egyszeri	fenntartott
	növekedés esetén			növekedés esetén	
0	0,4	0,4	1	0,4	0,4
1	0,3	0,7	2	0,7	1,1
2	0,2	0,9	3	0,9	2,0
3	0,1	1,0	4	1,0	3,0



3. ábra. A. Az exogén változók (a) egyszeri egységnyi, (b) fenntartott egységnyi növekedése. B. Egyidejű és késleltetett multiplikátorok. C. Kumulált multiplikátorok

Vegyük észre, hogy az 1. táblázat 2. oszlopában szereplő számok a $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}}\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^{\tau}$ mátrixsorozat ($\tau = 0, 1, 2, 3$) tagjai k-adik sorának m-edik elemei. Ha tehát ezeket a multiplikátorokat ismerjük és a különböző multiplikátorok kapcsolatát megértettük, úgy ezekből a többi elemi számolással meghatározható. Az 1. táblázatban szereplő multiplikátorokat grafikusan a 3. ábra B. és C. része szemlélteti.

III. A gazdaság működésének elemzése

A gazdaság működésének leírása és elemzése szorosan összekapcsolódó munkafolyamatok: a gazdaság működése leírásának folyamata belenyúlik az elemzés folyamatába, bár nem meríti ki azt. Így az ökonometriai modellel végzett elemzések két nagyobb témakörbe sorolhatók.

1. Struktúra- és multiplikátorelemzés

Magától értetődő, hogy a modell alapján végzett gazdasági elemzés — a modell számszerűsítése után — a struktúra vizsgálatával, a közgazdaságilag is értelmezhető *strukturális paraméterek elemzésével*, a belőlük a gazdaság működésére levonható következtetések megfogalmazásával kezdődik. Ezután — és értelemszerűen ugyancsak a modell számszerűsítese után — kerül sor a gazdaság működésének mélyebb — közvetett — összefüggéseit is feltáró *multiplikátorok elemzésére*. Mindezek a vizsgálatok együttesen adnak képet — kvantitatív információkat — a gazdaságban érvényesülő közvetlen és közvetett kauzális összefüggésekről.

2. Egyensúlyvizsgálat

Gazdasági egyensúly — kiegyensúlyozott fejlődés

Gazdasági egyensúly esetén a gazdasági alanyok magatartásukon nem változtatnak. A gazdaság egy egyensúlyi állapota — ha létezik — az adottságok változásához való alkalmazkodás útján jön létre és az adottságok változása következtében bomlik meg: az adottságok változása a gazdasági alanyokat magatartásuk változtatására készteti és ez az alkalmazkodási folyamat a gazdaság egy másik állapotának kialakulásához vezet, amely vagy szintén egyensúlyi állapot vagy nem. Ha a gazdaság (egyensúlyi állapotából kitérítve) egyensúlyi állapot felé halad, *fejlődése kiegyensúlyozott.*

Fordítsuk le mindezt a „modell nyelvére"!

A modellben a megfigyelhető adottságokat az exogén (predeterminált) változók egy-egy értékegyüttese képviseli, a gazdaság egy-egy állapotát az endogén változóknak az exogén (predeterminált) változókra vonatkozó egy-egy együttes feltételes eloszlása jellemzi. Ennek megfelelően:

a gazdaság egyensúlyi állapotban van, ha az endogén változók együttes feltételes eloszlása nem változik, hacsak az exogén (predeterminált) változók értékegyüttese nem változik;

a gazdaság fejlődése kiegyensúlyozott, ha az endogén változók együttes feltételes eloszlásainak sorozata olyan együttes feltételes eloszlásukhoz konvergál, amely nem változik, hacsak az exogén (predeterminált) változók értékegyüttese nem változik.

Az egyensúlyvizsgálat alapkérdései. Az egyensúlyvizsgálat alapvetően három kérdésre keres választ:

(a) létezik-e az adott gazdaságban egyensúlyi állapot vagy sem?

(b) hogyan jellemezhető ez az egyensúlyi állapot kvantitatíve, ha létezik?

(c) milyen jellegű pályán jut el a gazdaság egyik egyensúlyi állapotból a másikba, ha fejlődése kiegyensúlyozott, illetve milyen jellegű pályán halad, ha fejlődése nem kiegyensúlyozott?

Ezen kérdések közül statikus modellben csak az első kettő válaszolható meg (komparatív statikus elemzés), dinamikus modellben mind a három (dinamikus elemzés), de az első két kérdésre adott válasz is különböző statikus és dinamikus modellben!

Komparatív statikus elemzés

Statikus modellben, az endogén változók alakulását a redukált egyenletrendszer írja le a változó adottságok (végső okok) függvényében, ezért a komparatív statikus elemzés *eszköze: a statikus modell redukált formája.*

Tekintsük a statikus modell

$$\mathbf{y}_t' = \mathbf{z}_t'\mathbf{\Pi}_{II} + \mathbf{v}_t' \tag{2.1}$$

redukált egyenletrendszerét, amelyben a $\mathbf{v}_t$ látens változók együttes eloszlása a (II.2.5) alatt adott! Ebből az endogén változóknak az exogén változók valamely rögzített $\bar{\mathbf{z}}'$ értékegyüttesére vonatkozó együttes feltételes eloszlása meghatározható. Ez az eloszlás M-dimenziós *normális* eloszlás,

$$E(\mathbf{y}_t'|\bar{\mathbf{z}}') = E(\bar{\mathbf{z}}'\mathbf{\Pi}_{II} + \mathbf{v}_t'|\bar{\mathbf{z}}') = E(\bar{\mathbf{z}}'\mathbf{\Pi}_{II} + \mathbf{v}_t') = \bar{\mathbf{z}}'\mathbf{\Pi}_{II} \tag{2.2}$$

várható érték vektorral és

$$E\{[\mathbf{y}_t' - E(\mathbf{y}_t'|\bar{\mathbf{z}}')]'[\mathbf{y}_t' - E(\mathbf{y}_t'|\bar{\mathbf{z}}')]|\bar{\mathbf{z}}'\} = E(\mathbf{v}_t\mathbf{v}_t'|\bar{\mathbf{z}}') = E(\mathbf{v}_t\mathbf{v}_t') = \mathbf{\Omega} \tag{2.3}$$

kovariancia mátrixszal. Eredményünket az

$$f(\mathbf{y}_t'|\bar{\mathbf{z}}') \sim N(\bar{\mathbf{z}}'\mathbf{\Pi}_{II}; \mathbf{\Omega}) \tag{2.4}$$

formában szimbolizálhatjuk.

Válaszaink most már az egyensúlyvizsgálat kérdéseire:

(a) A (2.2) feltételes várhatóérték vektor akkor és csak akkor változik, ha az exogén változók értékegyüttese változik, ennek megfelelően *egysúlyiérték vektor*nak tekinthető, a (2.3) feltételes kovariancia mátrix pedig az exogén változók értékegyüttesétől független (és időben állandó). Ugyanakkor statikus modellben *az exogén változók bármely értékegyüttese egyensúlyi állapotot határoz meg:* az exogén változók értékegyüttesének megváltozása a gazdaságot egyik egyensúlyi állapotából kitérítve egy másik egyensúlyi állapotba juttatja.

(b) *A gazdaság egy-egy egyensúlyi állapota kvantitatíve* — a $\mathbf{\Pi}_{II}$ és a $\mathbf{\Omega}$ becslésének ismeretében — *a* (2.4) *feltételes eloszlás felhasználásával* — a konfidenciaintervallumokhoz (tartományokhoz) hasonló — *lehetőségi intervallummal (tartománnyal) jellemezhető.* Ebben az exogén változók adott értékegyüttese mellett — egyensúlyi állapotban — egy-egy endogén változó vagy az összes endogén változó előre meghatározott valószínűséggel realizálódik.

4. *példa.* Célszerű a lehetőségi tartomány szerkesztését grafikusan is illuszrálnunk. Tekintsük ehhez a I. (1.5)—(1.6) strukturális egyenletrendszert és — egyszerűség kedvéért — hagyjuk figyelmen kívül a szabad konstansokat! Az I. (1.5)—(1.6) strukturális egyenletrendszerből egyszerűen előállítható az

$$y_{1t} = \pi_{11}z_{1t} + \pi_{21}z_{2t} + v_{1t}$$

$$y_{2t} = \pi_{12}z_{1t} + \pi_{22}z_{2t} + v_{2t}$$

redukált egyenletrendszer, amelyben $E(v_{1t}^2) = \omega_{11}$, $E(v_{2t}^2) = \omega_{22}$ $E(v_{1t}v_{1t'}) = \omega_{12}(t = t')$ és $r = \omega_{12}/\sqrt{\omega_{11}\omega_{22}}$. Az exogén változók valamely rögzített z_1, z_2 értékére — a korrelációs együttható felhasználásával — felírhatjuk az endogén változók normális együttes feltételes eloszlásának sűrűségfüggvényét

$$f(y_{1t}, y_{2t}|\bar{z}_1, \bar{z}_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\omega_{11}\omega_{22}(1-r^2)}} \exp\left\{\frac{-1}{2(1-r^2)}\left[\frac{y_{1t} - E[y_{1t}|\bar{z}_1, \bar{z}_2])}{\omega_{11}}\right]^2 - \right.$$

$$\left. - 2r\left(\frac{y_{1t} - E(y_{1t}|\bar{z}_1, \bar{z}_2)}{\sqrt{\omega_{11}}}\right)\left(\frac{y_{2t} - E(y_{2t}|\bar{z}_1, \bar{z}_2)}{\sqrt{\omega_{22}}}\right) + \frac{(y_{2t} - E[y_{2t}|\bar{z}_1, \bar{z}_2]^2}{\omega_{22}}\right\}$$

formában.[15] Az endogén változóknak ez a kétdimenziós normális együttes feltételes eloszlása az $E(y_{1t}, y_{2t}|\bar{z}_1, \bar{z}_2)$ együttes feltételes várhatóérték mint középpont, körül az (y_{1t}, y_{2t}) síkon a kétdimenziós normális eloszlással kapcsolatban jól ismert (aszimmetrikus) ,,harangtestet'' határoz meg, amelynek az (y_{1t}, y_{2t}) síkkal párhzamos metszetei az

$$\frac{(y_{1t} - E[y_{1t}|\bar{z}_1, \bar{z}_2])^2}{\omega_{11}} - 2r\left(\frac{y_{1t} - E[y_{1t}|\bar{z}_1, \bar{z}_2]}{\sqrt{\omega_{11}}}\right)\left(\frac{y_{2t} - E[y_{2t}|\bar{z}_1, \bar{z}_2]}{\sqrt{\omega_{22}}}\right) +$$

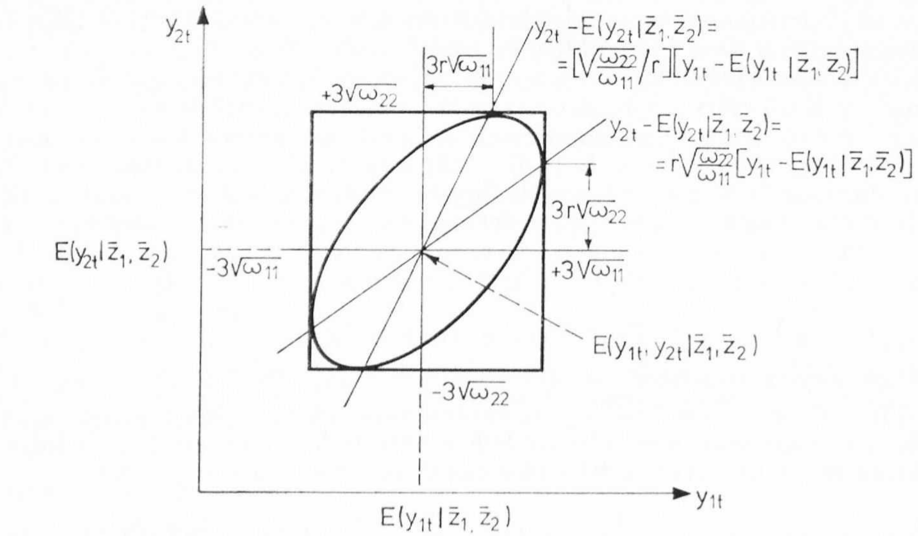
$$+ \frac{(y_{2t} - E[y_{2t}|\bar{z}_1, \bar{z}_2])^2}{\omega_{22}} = k$$

egyenlettel leírható ellipszissereget alkotnak, k az ellipszissereg paramétere. Eddigi eredményeink alapján az (y_{1t}, y_{2t}) együttes feltételes eloszlását egyensúlyi állapotban jellemző lehetőségi tartományt a 4. ábra szemlélteti.

Az y_{1t}, illetve az y_{2t} — egyensúlyi állapotban — külön-külön 99,3%-os valószínűséggel az $E(y_{1t}|\bar{z}_1, \bar{z}_2) \pm 3\sqrt{\omega_{11}}$, illetve az $E(y_{2t}|\bar{z}_1, \bar{z}_2) \pm 3\sqrt{\omega_{22}}$ lehetőségi intervallumokban (a 4. ábrán a téglalap oldalai) realizálódnak. (y_{1t}, y_{2t}) együttes realizációit — egyensúlyi állapotban — ugyanilyen valószínűségi szinten a 4. ábrán látható ellipszis mint lehetőségi tartomány tartalmazza $3r\sqrt{\omega_{11}}$ és $3r\sqrt{\omega_{22}}$ paraméterekkel.

Minthogy a statikus modell nem nyújt információt arról, hogy milyen *jellegű* pályán jut el a gazdaság egyik egyensúlyi állapotából a másikba, csak

[15] Lásd [13, 227. p.]!



4. ábra. Lehetőségi tartomány két endogén változóra

komparatív statikus elemzésre ad lehetőséget: a gazdaság két vagy több kvantitative jellemzett egyensúlyi állapotának összehasonlítására.[16]

Dinamikus elemzés

Dinamikus modellben az endogén változók alakulását a végső egyenletrendszer írja le a változó adottságok (végső okok) függvényében, ezért a dinamikus elemzés *eszköze: a dinamikus modell végső formája.*

(a) *Kiegyensúlyozott-e a gazdaság fejlődése vagy sem?*

A komparatív statikus elemzésnél megállapítottuk, hogy az exogén változók minden értékegyüttese egyensúlyi állapotot határoz meg, amely kvantitative az endogén változóknak az exogén változókra vonatkozó együttes feltételes eloszlása alapján szerkesztett lehetőségi intervallumokkal vagy tartománnyal jellemezhető. Vizsgáljuk most meg, hogy a komparatív statikus elemzésnek ez a megállapítása érvényes-e, ez az eljárása alkalmazható-e dinamikus elemzésnél!

Tekintsük a dinamikus modell (II.3.1) végső egyenletrendszerét, amelyben a $\mathbf{w}_t$ látens változók együttes eloszlása (II.3.4) alatt adott! Ebből az endogén változóknak az exogén változók valamely $\bar{\mathbf{z}}'$ rögzített értékegyüttesére (és az endogén változók definíciószerűen konstans $\mathbf{y}_0'$ kezdeti értékegyüttesére)

[16] Az ökonometriai modellek számszerűsítéséhez az endogén és az exogén (predeterminált) változók *diszkrét* megfigyelései állnak rendelkezésünkre. Ez a körülmény motiválja az egyensúlyi állapotnak és a kiegyensúlyozott fejlődésnek jelen tanulmányban adott — de az ökonometriaelméletben általánosan is elfogadott — értelmezését. A valóságban az exogén (predterminált) változók többsége folytonos, így az endogén változók együttes feltételes eloszlásának momentumai is állandóan változnak, az exogén (predeterminált) változók egy-egy diszkrét (konstans!) megfigyelése mellett azonban állandók (állandókhoz konvergálnak).

vonatkozó együttes feltételes eloszlása meghatározható. Ez az eloszlás *normális*; dimenzióját a $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}$ rangja határozza meg, és az eloszlásnak

$$E(\mathbf{y}_t'|\mathbf{y}_0', \bar{\mathbf{z}}') = \mathbf{y}_0'\mathbf{\Pi}_t^{\mathrm{I}} + \sum_{\tau=0}^{t-1} \bar{\mathbf{z}}'\mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}}\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^{\tau} \tag{2.5}$$

a várható érték vektora és

$$E\{[\mathbf{y}_t' - E(\mathbf{y}_t'|\mathbf{y}_0', \bar{\mathbf{z}}')]'[\mathbf{y}_t' - E(\mathbf{y}_t'|\mathbf{y}_0', \bar{\mathbf{z}}']|\mathbf{y}_0', \bar{\mathbf{z}}'\} = \sum_{\tau=0}^{t-1} \mathbf{\Pi}'^{\tau}\mathbf{\Omega}\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^{\tau} = \mathbf{\Theta}_{\tau} \tag{2.6}$$

a kovariancia mátrixa (vö.: (II.3.5–3.6)!). Eredményünket

$$f(\mathbf{y}_t'|\mathbf{y}_0', \bar{\mathbf{z}}') \sim N(\mathbf{y}_0'\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^t + \sum_{\tau=0}^{t-1} \bar{\mathbf{z}}'\mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}}\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^{\tau}; \mathbf{\Theta}_{\tau}) \tag{2.7}$$

formában szimbolizálhatjuk.

A (2.5)–(2.7) alapján megállapíthatjuk, hogy

(i) A (2.5) várhatóérték vektor akkor is változik, ha az exogén változók nem változnak; ugyanez igaz a (2.6) feltételes kovariancia mátrixra is. Dinamikus modellben tehát *az exogén változók egy-egy értékegyüttese nem egyensúlyi állapotot határoz meg*, így a (2.7) együttes feltételes eloszlás nem a gazdaság egy egyensúlyi állapotát jellemzi, hanem a gazdaság állapotát a megfigyelési időszak t-edik részidőszakában;

(ii) *A gazdaság fejlődése akkor és csak akkor kiegyensúlyozott, $t \to \infty$ esetén akkor és csak akkor tart egyensúlyi állapot felé, ha a $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}$ mátrix aszimptotikusan nilpotens*, azaz $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^t = \mathbf{0}$. Ebben az esetben a (2.7) feltételes eloszlások sorozata normális *határ*eloszláshoz konvergál

$$\lim_{t\to\infty} E(\mathbf{y}_t'|\mathbf{y}_0', \bar{\mathbf{z}}') = \sum_{\tau=0}^{\infty} \bar{\mathbf{z}}'\mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}}\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^{\tau} = \bar{\mathbf{z}}'\mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}} \sum_{\tau=0}^{\infty} \mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^{\tau} = \bar{\mathbf{z}}'\mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}}(\mathbf{I}_M - \mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}})^{-1} \tag{2.8}$$

aszimptotikus várható érték vektorral és

$$\lim_{t\to\infty} E\{[\mathbf{y}_t' - E(\mathbf{y}_t'|\mathbf{y}_0', \bar{\mathbf{z}}')]'[\mathbf{y}_t' - E(\mathbf{y}_t'|\mathbf{y}_0', \bar{\mathbf{z}}')]|\mathbf{y}_0', \bar{\mathbf{z}}'\} =$$

$$= \sum_{\tau=0}^{\infty} \mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^{\tau\prime}\mathbf{\Omega} \sum_{\tau=0}^{\infty} \mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^{t} = (\mathbf{I}_M - \mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}')^{-1}\mathbf{\Omega}(\mathbf{I}_M - \mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}})^{-1} \tag{2.9}$$

aszimptotikus kovariancia mátrixszal. Eredményünket

$$f(y_t'|\bar{\mathbf{z}}') \approx N[\bar{\mathbf{z}}'\mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}}(\mathbf{I}_M - \mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}})^{-1}(\mathbf{I}_M - \mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}})^{-1}\mathbf{\Omega}(\mathbf{I}_M - \mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}})^{-1}] \tag{2.10}$$

formában szimbolizálhatjuk.

Láthatjuk, hogy a (2.8) aszimptotikus várható érték vektor akkor és csak akkor változik, ha az exogén változók értékegyüttese változik, ennek megfelelően *egyensúlyérték vektor*nak tekinthető; a (2.9) aszimptotikus kovariancia mátrix pedig az exogén változók értékegyüttesétől független és időben állandó.

(b) *Hogyan jellemezhető kvantitative a gazdaság egyensúlyi állapota, ha létezik, dinamikus modellben?*

A gazdaság egyensúlyi állapotát kvantitative jellemezhetjük – a $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}$, a $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}}$ és az $\mathbf{\Omega}$ mátrixok becslésének ismeretében – dinamikus modellben is ún.

lehetőségi intervallumokkal vagy tartománnyal, ezek (ennek) szerkesztése azonban a (2.10) *feltételes határeloszláson alapul.*[17]

(c) *Az endogén változók időbeli pályájának vizsgálata*

Az endogén változók időbeli pályájának vizsgálata az egyensúlyvizsgálat 3. alapkérdésére ad választ: milyen *jellegű* pályán jut el a gazdaság egyik egyensúlyi állapotából a másikba, ha fejlődése kiegyensúlyozott, illetve milyen *jellegű* pályán halad, ha fejlődése nem kiegyensúlyozott. Hangsúlyozzuk, hogy e kérdés feltevésénél *nem* az endogén változók *konkrét* időbeli alakulására, realizációira vagyunk kíváncsiak, *hanem* azok *állandó, karakterisztikus* jellemzőire: *a gazdaság karakterisztikus dinamikus tulajdonságaira.* Figyelmünket először az általánosabb esetre irányítjuk: nem tételezzük fel, hogy a gazdaság fejlődése kiegyensúlyozott. Látni fogjuk, hogy ezen vizsgálat eredményei — értelemszerűen — kiegyensúlyozott fejlődés esetén is érvényesek.

A gazdaság önmozgása

Tekintsük az endogén változók (2.7) alatti együttes feltételes eloszlását, amely a gazdaság egy (nem egyensúlyi) állapotát jellemzi és első közelítésben tételezzük fel, hogy a gazdaságot a megfigyelési időszakban nem érik külső (exogén) hatások ($\bar{\mathbf{z}}' = \mathbf{0}$)! Ekkor az endogén változók feltételes várhatóérték vektora kizárólag az endogén változók kezdeti értékvektorának függvényében változik

$$E(\mathbf{y}_t' \mid \mathbf{y}_0) = \mathbf{y}_0' \mathbf{\Pi}_\mathrm{I}^t \tag{2.11}$$

szerint, ahol a változást a $\mathbf{\Pi}_\mathrm{I}^t$ mátrix jellemzi. Ezt a változást, amely dinamikus modellben a gazdaságot érő külső (exogén) hatások nélkül is lejátszódik, a gazdaság önmozgásának nevezzük.

Vizsgáljuk meg, *mitől és hogyan* függ a gazdaság önmozgásának jellege!

A kvardatikus $\mathbf{\Pi}_\mathrm{I}$ mátrix diagonalizálható

$$\mathbf{\Pi}_\mathrm{I} = \mathbf{P\Lambda Q}. \tag{2.12}$$

szerint, ahol $\mathbf{\Lambda} = \langle \lambda_1, \ldots, \lambda_M \rangle$ a $\mathbf{\Pi}_\mathrm{I}$ mátrix sajátértékeit tartalmazó diagonális mátrix, P és Q ortogonális mátrixok ($\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1}$) feltéve, hogy a $\mathbf{\Pi}_\mathrm{I}$ mátrix *valamennyi* sajátértéke egyszeres.[18] A $\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1}$ összefüggés felhasználásával

$$\mathbf{\Pi}_\mathrm{I}^2 = \mathbf{P\Lambda QP\Lambda Q} = \mathbf{P\Lambda}^2\mathbf{Q}, \tag{2.13}$$

hasonlóan

$$\mathbf{\Pi}_\mathrm{I}^t = \mathbf{P\Lambda}^t\mathbf{Q} \tag{2.14}$$

teljesül. Minthogy $\mathbf{\Lambda}^t = \langle \lambda_1^t, \ldots, \lambda_M^t \rangle$, abban az esetben, ha a $\mathbf{\Pi}_\mathrm{I}$ mátrix *minden nem-zérus* sajátértéke egyszeres, a (2.12)

$$\mathbf{\Pi}_\mathrm{I}^t = \sum_{m=1}^{M'} \lambda_m^t \mathbf{R}_m \quad M' \leq M; \; M' = r(\mathbf{\Pi}_\mathrm{I}), \tag{2.15}$$

[17] Vö. a 16. jegyzettel!

[18] Lásd [8]!

a (2.11) pedig az

$$E(\mathbf{y}_t' \mid \mathbf{y}_0') = \mathbf{y}_0' \sum_{m=1}^{M'} \lambda_m^t \mathbf{R}_m \tag{2.16}$$

alakban írható, ahol $\mathbf{R}_m = \mathbf{p}_m \mathbf{q}_m'$, azaz a $\mathbf{P}$ m-edik oszlopvektorának és a $\mathbf{Q}$ m-edik sorvektorának szorzatából keletkező diád.[19]

A (2.16)-ban az $\mathbf{y}_0'$ vektor és az $\mathbf{R}_m$ mátrixok *konstansok*, kizárólag a λ_m-ek *változnak t-ben*. Így belátható hogy, a gazdaság önmozgása az endogén változók kezdetiérték vektorából kiinduló mozgások eredőjeként (szuperpozíciójaként) alakul és az összetevő mozgások *jellegét* a $\mathbf{\Pi}_\mathrm{I}$ mátrix λ_m sajátértékeinek jellege határozza meg az alábbiak szerint:

(α) – ha λ_m = pozitív valós szám, akkor ez egyirányú *(monoton)* komponenst;
– ha λ_m = negatív valós szám, akkor ez *oszcilláló* komponenst;
– ha $\lambda_m = a(\cos b \pm i \sin b)$ konjugált komplex számpár, akkor ez *periodikus* komponenst visz a gazdaság önmozgásába (az endogén változók pályájába) a^t amplitúdóval és $2\pi/b$ periódushosszal;

(β) – ha $|\lambda_m| < 1$, a kérdéses komponens *konvergens* (ciklikus komponens esetén *csillapuló*) mozgást;
– ha $|\lambda_m| = 1$, a kérdéses komponens *önmagát ismétlő* mozgást;
– ha $|\lambda_m| > 1$, a kérdéses komponens *divergens* (ciklikus komponens esetén *explozív*) mozgást képvisel.[20]

(γ) valamennyi λ_m sajátérték valamennyi endogén változó pályája *jellegé*nek meghatározásában szerepet játszik; közülük alapvető az abszolút értékben legnagyobb, *ún. domináns sajátérték* hatása;

(δ) az $\mathbf{y}_0'$ és az $\mathbf{R}_m$ konstans vektor és mátrixok csak a sajátértékek által meghatározott jellegű mozgások *mértékét* befolyásolják.

Abban az esetben, ha a domináns sajátértékre $|\lambda_m| < 1$ teljesül, akkor $\lim_{t\to\infty} \mathbf{\Pi}_\mathrm{I}^t = \lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^t\mathbf{Q} = \mathbf{0}$, vagyis a $\mathbf{\Pi}_\mathrm{I}$ mátrix aszimptotikusan nilpotens és a gazdaság önmozgása ($t \to \infty$ esetén) elhal. A dinamikus elemzés (b) pontjában beláttuk, hogy a gazdaság kiegyensúlyozott fejlődésének feltétele a $\mathbf{\Pi}_\mathrm{I}$ aszimptotikus nilpotenciája. Jelen eredményünk ahhoz nyújt eszközt, hogy megvizsgáljuk, vajon ez a feltétel teljesül-e vagy sem.

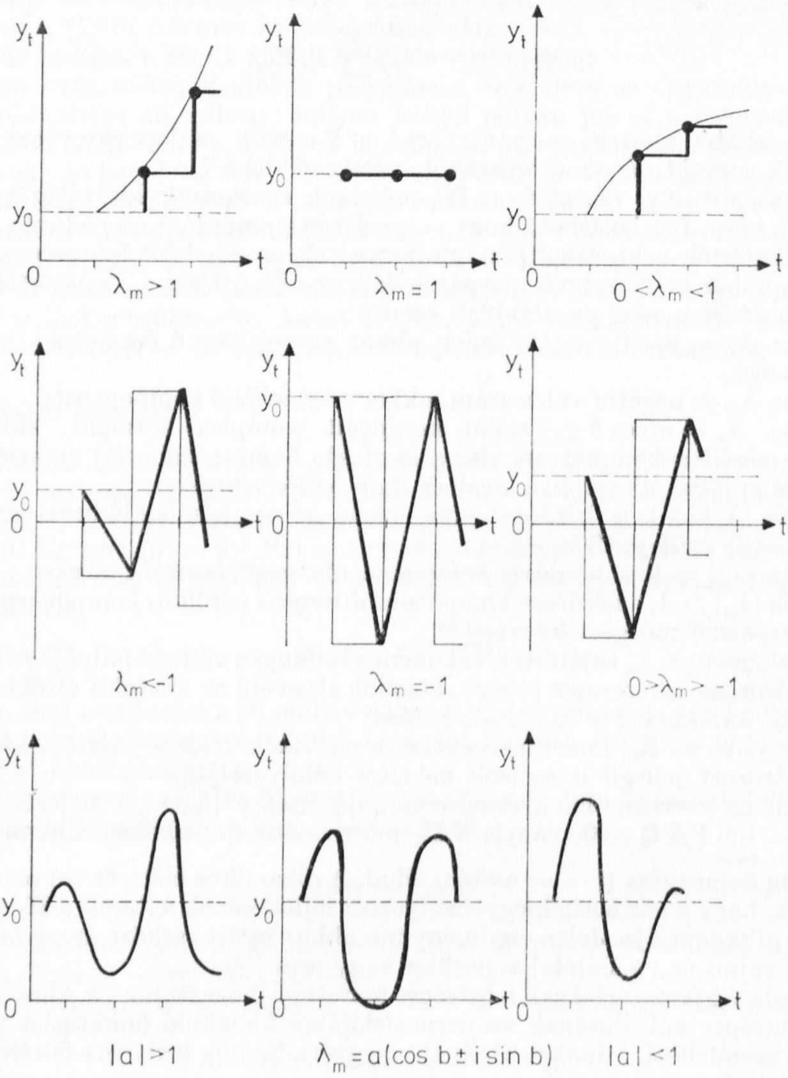
A gazdaság önmozgásának lehetséges összetevő mozgásait az 5. ábra az ezek két lehetséges változatának szuperpozíciójából kialakuló önmozgást pedig a 6. ábra szemlélteti. Mindkét ábránál az egyértelműség kedvéért feltételeztük, hogy $\mathbf{y}_0' > \mathbf{0}$.

A külső (exogén) hatások figyelembevétele

A fent megfogalmazott következtetéseink akkor is érvényesek, ha egyszerűsítő feltevésünket feloldjuk: vizsgálatunkba bekapcsoljuk az exogén változók $\bar{\mathbf{z}}'$ értékegyüttesének hatását is, hiszen a (2.11)–(2.16) gondolatmenetét követve (2.5) felírható az

$$E(\mathbf{y}_t' \mid \mathbf{y}_0', \bar{\mathbf{z}}') = \mathbf{y}_0' \sum_{m=1}^{M'} \lambda_m^t \mathbf{R}_m + \bar{\mathbf{z}}' \mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}} \sum_{\tau=0}^{t-1} \sum_{m=1}^{M'} \lambda_m^\tau \mathbf{R}_m \tag{2.17}$$

[19] Lásd [16, 181. p.]!
[20] Lásd [1, 197–201. pp.]!

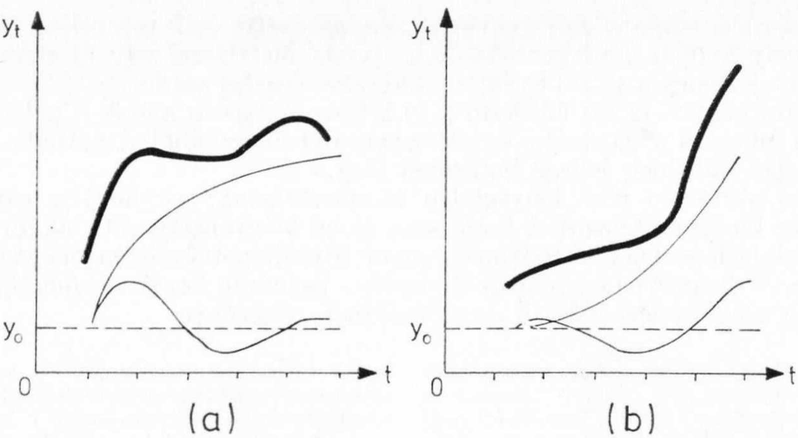


5. ábra. A gazdaság önmozgását összetevő mozgások jellege

felbontásban. Ennek megfelelően

(α) a külső (exogén) hatások az endogén változók pályájában ugyanolyan jellegű mozgásokat indukálnak, mint az endogén változók kezdeti értékei: ezen összetevő mozgások *jellegét* a mátrix $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}$ sajátértékeinek jellege határozza meg;

(β) a konstans $\bar{\mathbf{z}}'$, $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}}$ és $\mathbf{R}_m$ vektor és mátrixok ezen összetevő mozgásoknak csak a *mértékét* befolyásolják.



6 ábra. Monoton és ciklikus komponens szuperpozíciójából adódó önmozgás (a) kiegyensúlyozott, (b) nem kiegyensúlyozott fejlődés esetén

Befejezésül tételezzük fel, hogy a dinamikus modellben ábrázolt gazdaság egyensúlyi állapotban van, és az egyensúlyi állapot a (2.10) együttes feltételes eloszlással jellemezhető! Jelöljük a (2.8) egyensúlyi érték vektort $\bar{\mathbf{y}}'$-sal, amely az

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{y}}' &= \sum_{\tau=0}^{\infty} \bar{\mathbf{z}}' \mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}} \mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^{\tau} = \sum_{\tau=0}^{t-1} \bar{\mathbf{z}}' \mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}} \mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^{\tau} + \sum_{\tau=t}^{\infty} \bar{\mathbf{z}}' \mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}} \mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^{\tau} = \\ &= \sum_{\tau=1}^{t-1} \bar{\mathbf{z}}' \mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}} \mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^{\tau} + \sum_{\tau=0}^{\infty} \bar{\mathbf{z}}' \mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}} \mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^{\tau} \mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^{t} = \sum_{\tau=0}^{t-1} \bar{\mathbf{z}}' \mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}} \mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^{\tau} + \bar{\mathbf{y}} \mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^{t}\end{aligned} \tag{2.18}$$

alternatív formában írható. Ugyancsak tételezzük fel, hogy a gazdaságot külső impulzus éri, az exogénváltozók értékegyüttese $\bar{\mathbf{z}}'$-ról $\bar{\bar{\mathbf{z}}}'$-ra változik ($\bar{\bar{\mathbf{z}}}' = \bar{\mathbf{z}}' + \mathbf{\Delta}\bar{\mathbf{z}}'$). Ez a külső impulzus a (2.10) által jellemzett egyensúlyi állapotot nyilvánvalóan megbontja és a t-edik részidőszakra a gazdaságnak az

$$\mathbf{y}_t^{*\prime} = \mathbf{y}_0^{*\prime} \mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^{t} + \sum_{\tau=0}^{t-1} \mathbf{z}^{*\prime} \mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}} \mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^{\tau} \tag{2.19}$$

várhatóérték vektor és a (2.6) kovariancia mátrix által jellemzett állapotát határozza meg, ahol $\mathbf{y}^{*\prime} = \mathbf{y}' - \bar{\mathbf{y}}$ és $\mathbf{z}^{*\prime} = \bar{\bar{\mathbf{z}}}' - \bar{\mathbf{z}}'$. A (2.19) és a (2.6) által jellemzett állapot – mint tudjuk – *nem* egyensúlyi állapot!

Gondolatmenetünk elején feltételeztük, hogy a dinamikus modellben ábrázolt gazdaság egyensúlyban van. Annak feltétele, hogy ez az egyensúlyi állapot létrejöjjön, – korábbi eredményeink alapján tudjuk – a $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}$ mátrix aszimptotikus nilpotenciája, azaz hogy a $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}$ domináns sajátértékére $|\lambda_m| < 1$ teljesül.

Mi *következik* ebből?

(α) Ha a $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}$ domináns sajátértékére $|\lambda_m| < 1$ teljesül, a (2.19) felírható várhatóérték vektorok sorozata az

$$\bar{\mathbf{y}}^{*\prime} = \lim_{t\to\infty} \mathbf{y}_t^{*\prime} = \mathbf{z}^{*\prime} \mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}} (\mathbf{I}_M - \mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}})^{-1} \tag{2.20}$$

aszimptotikus várhatóérték vektorhoz, az *egyensúlyi érték* vektorhoz, konvergál, amely a (2.9) aszimptotikus kovariancia mátrixszal egy új egyensúlyi állapotot jellemez a (2.10) együttes feltételes eloszlás szerint.

(β) Minthogy a (2.19) felírható a (2.17) analógiájára, annak a pályának a jellegét amelyen a gazdaság egyik egyensúlyi állapotából a másikba eljut, a $\mathbf{\Pi}_{\text{I}}$ sajátértékeinek jellege határozza meg.

Utolsó, de talán nem lényegtelen ***következtetésünk***: az, hogy a gazdaság fejlődése kiegyensúlyozott-e, vagy sem, és ha kiegyensúlyozott, akkor egyik egyensúlyi állapotból kitérítve másik egyensúlyi állapotát milyen jellegű pályán éri el, a — dinamikus modellben ábrázolt — gazdaság *immanens tulajdonsága*, amely a megfigyelési időszak struktúrájának függvénye.

(Beérkezett: 1981. december 15-én.)

IRODALOM

1. BAUMOL, W.: *Economic Dynamics*, New York, 1959. Macmillan.
2. DHRYMES, PH. J.: *Econometrics*, New York—London, 1970. Harper and Row.
3. DHRYMES, PH. J.: *Introductory Econometrics*, New York (Heidelberg) Berlin, 1978 Springer.
4. FISZ, M.: *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematische Statistik*, Berlin, 1971. VEB, Deutscher Verlag der Wissenschaften.
5. GOLDBERGER, A. S.: *Impact Multipliers and Dynamic Properties of the Klein—Goldberger Model*. Amsterdam, 1959. North-Holland.
6. GOLDBERGER, A. S.: *Econometric Theory*, New York. 1964. John Wiley and Sons.
7. KLEIN, L. R.: *The Keynesien Revolution*, New York, 1947.
8. KREKÓ, B.: *Lineáris algebra* Budapest, 1976. KJK.
9. KOOPMANS, T. J.—W. M. C. HOOD: „The Estimation of Simultaneous Linear Relationships." In: Hood, W. M. C.—T. J. Koopmans, Eds: *Studies in Econometric Method*, New York — John Wiley and Sons, 92—112. pp.
10. KUHN, H.: *Die Struktur quantitativer Modelle: zur wirtschaftstheorietischen Grundlegung der Ökonometrie*. Tübingen, 1968. J. C. B. Mohr.
11. PAIZS, J.: *Ökometriaelmélet*, Budapest, MKKE Népgazdasági Tervezési Intézet Tervezésmódszertani Osztály, 1980. (Sokszorosított egyetemi tananyag.)
12. PAPANDREOU, A. G.: *Economics as a Science*. Chicago 1958.
13. PRÉKOPA A.: *Valószínűségelmélet*. Budapest, 1972. Műszaki Kk.
14. THEIL, H.—J. C. G. BOOT: The Final Form of Economic Equation Systems, *Econometrica*, 1962. pp. 136—152.
15. TINBERGEN, J.: *Ökonometria*, Budapest, 1957. KJK.
16. ZURMÜHL, R.: *Matrizen*, Berlin, 1958. Springer.

KÖNYVEKRŐL

Kmenta, J.—Ramsey, J. B. (szerk.): *Large Scale Macroeconometric Models. Theory and Practice*. Amsterdam—New York—Oxford, 1981. North-Holland P. Co. 462 o.

A könyv az 1978-ban *Ann Arborban* megrendezett *ökonometriai konferencia* anyagát tartalmazza, ahol túlnyomó többségben az Egyesült Államok modellezői vettek részt, közöttük számos nemzetközi hírnévnek örvendő szaktekintély.

A szerkesztők bevezetője ismerteti a konferencia fő céljait. Az elmúlt néhány évtizedben gyorsan fejlődött a nagy méretű, makro-ökonometriai modellek alkalmazása. Időközben az elméleti ökonometriában is jelentős eredmények születtek, amelyek azonban csak ritkán váltak a gyakorlat hasznos segédeszközévé. Az elelmélet és a gyakorlati megvalósítás között keletkezett szakadék a modellek sokrétű bírálatát váltotta ki. Szükségessé vált olyan szakértői találkozó megszervezése, ahol a modellek készítői és bírálói megvitatták nézetkülönbségeiket, s az álláspontok tisztázásával segítették elő az elmélet és a gyakorlat közeledését.

A könyv első részében a szerkesztők általános áttekintést adnak a konferencián megvitatott témakörökről, a további részek a konferencia négy szekciójának megfelelő szerkezetben tartalmazzák az elhangzott előadásokat és a felkért hozzászólásokat. Az utolsó részben a szerkesztők az általános vitákon elhangzottakat foglalják össze, témakörök szerint csoportosítva.

Az előadások az ökonometriai modellezés nehézségeinek feltárására törekszenek, ugyanakkor az elvi állásfoglalások illusztrációjaképpen több konkrét modellt és módszert is bemutatnak. Nyilvánvaló, hogy teljes képet nyújtani egy rövid ismertetésben lehetetlen, ezért a bevezető előadás fonalán haladva próbáljuk meg érzékeltetni a vita súlyponti kérdéseit.

A bevezető előadás *E. P. Howrey, L. R. Klein, M. D. McCarthy* és *G. R. Schink* közös műve, szinte minden előadó és hozzászóló ehhez kapcsolódik valamilyen formában. Vezető modellkészítők körében végzett kérdőíves felmérés eredményeit ismertetik, melyet a modellező munka gyakorlati tapasztalatainak feltérképezésére készítettek. A kérdőív három része felöleli a modellezés egyes fázisaiban — az általános elméleti specifikáció, a becslés és verifikálás, valamint az előrejelzés és hatáselemzés területén — felmerülő döntési problémákat. A válaszokat részletesen ismertetik és összefoglalják a főbb következtetéseket.

Általában jellemző a *modellméret* növekedése, amely egyrészt a felhasználói nyomás és a gyakorlatilag korlátlan számítástechnikai lehetőségek következménye, másrészt azonban a modell közgazdasági tartalmával áll szoros összefüggésben. A modellek specifikációjánál a legtöbb modellező valamilyen közgazdasági elméletre épít. A felmérés szerint a legtöbb probléma a makro- és mikroszemléletű elméletek inkonzisztenciájából fakad. A mai modellek sokkal több mikroszemléletű egyenletet tartalmaznak, mint a régebben készültek, s ezzel kapcsolatban többen kiemelték, hogy az aggregáció kérdését nem szabad mechanikusan értelmezni. A modell mérete és a kívánt információ részletezettsége között lineáris kapcsolat van, de igen lényeges az aggregátumok összetételére vonatkozó hipotézis. Ugyanis ha feltételezhető az összetétel kis mértékű változása, vagy változatlansága, akkor kisebb méretű, aggregáltabb modell is megfelelő.

A *közgazdasági elméletek* és *a modellméret* kapcsolatával külön szekció foglalkozott. *O. Eckstein* az ökonometriai modellek és a közgazdasági elméletek között kölcsönhatást feltételez, ezt egy modell példáján illusztrálja. Bemutatja a modell mikroszintű megalapozását, majd pedig sorra veszi, hogy a modell viselkedési egyenleteinek vizsgálata milyen többlet információt nyújt egyes elméleti témák alaposabb megismeréséhez.

J. B. Taylor a modell célkitűzéseinek tulajdonít döntő szerepet a méret meghatározásában. Az elmélet szerinte csak a célok tisztázása után válik fontossá. A megfelelő modellméret kérdése a kerekasztal viták során is az egyik központi kérdés maradt, mivel a méret erősen befolyásolja a szimultán rendszerbecslések kiszámíthatóságát és tulajdonságait. *A. Zellner* szerint a méretet nem szabad mechanikusan (az egyenletek számával) mérni, hiszen az egyenletek és a modell-szerkezet bonyolultsága lényeges módosító tényező. A blokkrekurzív szerkezetet, mint méretcsökkentő eljárást figyelhetjük meg. Helyesli és követendőnek tartja ezt *G. S. Maddala*, aki a mérettel kapcsolatos becsléselméleti meggondolások áttekintését nyújtja, s végső következtetéseiben támadja a *Howrey*-ék felmérése alapján is szembetűnő általános gyakorlatot: az OLS (egyszerű legkisebb négyzetek) módszer uralkodását.

Az *egy egyenlet kontra rendszerbecslés* döntési probléma éles vitát váltott ki. Az OLS módszer mellett számos praktikus megfontolás szól. *M. R. Darby* kimutatta, hogy nagy méretű modelleknél a predeterminált változók nagy száma miatt a többfokozatú módszerek és az OLS módszer eredményei gyakorlatilag egybeesnek. *A. Zellner* optimális esztimátorok kidolgozására tesz javaslatot, amelyek az OLS és valamely megfelelő statisztikai jellemzőkkel rendelkező becslési eljárás eredményeinek súlyozott átlagaként adódnak. *F. Modigliani* az autoregresszív transzformációval kombinált OLS módszert megfelelőbbnek tartja az exogén változók közötti „szubjektív'' válogatáson alapuló kétfokozatú módszereknél. A bonyolultabb becslési eljárásokat (pl. a maximum likelihood) általában nem tartják megfelelőnek, illetve kivitelezhetőnek a gyakorlatban.

A modellezés célja és szerepe kérdéskörben sokszálú vita bontakozott ki. *H. T. Shapiro* és *D. M. Garman* előadása időrendi áttekintést ad a prognosztika amerikai fejlődéséről. A szimultán ökonometriai modellek jelentőségéről megoszlanak ugyan a vélemények, de az biztos, hogy egy modell elbírálásához nem elegendő előrejelzéseinek pontosságát figyelembe venni, hanem a célokat és eredményeket összevető, a szerkezetet és hatásmechanizmust egyaránt szem előtt tartó vizsgálatra van szükség.

Az általános vitából is kiderül, hogy a *modellezés célját* illetően különbözőek a nézetek. Egyesek szembeállítják egymással az előrejelzés céllal készített és a hatáselemző vizsgálatokra alkalmas modelleket. A szerkesztők ezt látszat-ellentétnek tartják; véleményük szerint a két funkció egymással szoros összefüggésben áll. Hiszen mindaddig, amíg megbízható elméleti háttér nem áll mögöttük, a viselkedési egyenletekben kimutatott összefüggések önkényeseknek tekintendők. Így az előrejelző és hatáselemző funkció közötti választás helytelen szemléletből fakad.

Létezik azonban egy lényegibb és valós indíttatású ellentét az elméleti és a megrendelésre készülő modellek között. Mindkét tábor képviselői megbízhatóságról, rendszerelemzésről beszélnek. Az idő- és költségkorlátok, valamint a felhasználóknak az előrejelzés pontosságával kapcsolatos elvárásai beszűkítik a megrendelésre modellezők lehetőségeit. Az elmélet képviselői pedig eljárásaik és új modelltípusaik kialakításánál nem tartják szem előtt a gyakorlat reális korlátait.

Ehhez kapcsolódnak *a modellek értékelésében* mutatkozó nézetkülönbségek. Az elmélet képviselői mereven ragaszkodnak az ex-post alapon történő teszteléshez. A gyakorlati szakemberek szerint — akik véleményét *L. R. Klein* képviselte legerőteljesebben — az ex-ante becslések utólagos szembesítése a tényekkel a modell elbírálásának megfelelő kritériuma. Ez még akkor is bizonyíték a jó specifikáció mellett, ha a modell kevésbé fényesen működik az ex-post elemzés területén. A két ellentétes véleményű tábor között a becsült paraméterek utólagos szubjektív módosításának (add-factoring) kérdésében csúcsosodott ki a vita. A gyakorlat képviselői szerint a struktúra stabilitására vonatkozó feltevések — melyekre a legtöbb statisztikai eljárás épül — idegenek a valóságtól, s a szubjektív módosítás a struktúraváltozás követésének gyakorlatban bevált módszere. A legtöbben a pótlólagos információk figyelembevételének, s így az előrejelzések pontosításának eszközeként támogatják a módszert. *R. C. Fair* a szubjektív módosításnál megfelelőbbnek tartja a modellek alávetését mechanikus statisztikai eljárásoknak, s így a tendenciózus torzítások kiszűrését. Számításai szerint a szubjektív módosítást tartalmazó modellek előrejelzési eredményei nem jobbak a mechanikusan módosított modellekénél. Az elmélet képviselői természetesen a szubjektív módosítás módszerét ellenzik, de a szerkesztők szerint a konferencián nyilvánvalóvá vált, hogy alkalmazása általános, s ezért elkerülhetetlen, hogy elméleti síkon is foglalkozzanak vele.

A konferencián nagy hangsúlyt kapott a viszonylag régóta éleződő *ellentét: az egyszerű idősoros modellek és a szimultán ökonometriai modellek* közötti választás kérdése. Az idősoros modellek hiveit *C. W. J.*

Granger képviselte a legerőteljesebben. Érvelésének lényege, hogy az ökonometriai modell erős elméletfüggősége sokszor megakadályozza az adatokban rejlő információk kihasználását. Az idősoros modellező különböző statisztikai mutatók alapján specifikál, úgymond „hagyja az adatokat beszélni", míg az ökonométer a megalapozó közgazdasági elmélet béklyójában sok változóval kényszerül dolgozni, s végül olyan statisztikai módszereket használ, melyek elméleti feltételeit közel sem tudja teljesíteni. *Granger* éles hangon elutasítja az ökonométerek fő kritikáját, miszerint az idősoros modell csak előrejelez és nem alkalmas hatáselemzésre. Véleménye szerint a hatáselemzésre a rosszul specifikált ökonometriai modell is alkalmatlan. A jelenleg létező ökonometriai modellekben az előrejelzések pontosságának javítására bevezetett nagy számú „vakváltozó" arra utal, hogy a modellek specifikációja nem kielégítő.

Az idősoros modellezőket *C. A. Sims* képviselte még, aki az USA-ra készített autoregresszív index-modelljén új, idősoros módszerek előnyeit mutatta be. Ezzel kapcsolatban *A. Ando* a makroökonometriai modellek elméleti és empirikus alapjairól szóló előadásában számos cáfolatot közöl a *Granger* és *Sims* által tett javaslatokkal szemben. *Ando* előadása a felkért hozzászólók helyeslését is kiváltotta, mivel meggyőzően vette védelmébe az ökonometriai megközelítést.

Az általános vitán dominált az a vélemény, és a szerkesztők is ezt az álláspontot képviselik, hogy nem célszerű tovább élezni az idősoros és a szimultán modellek közötti ellentétet. A gyakorlat azt mutatja, hogy nagyon hasznosnak bizonyult az ökonometriai modellek kombinálása idősoros módszerekkel, különösen dinamikai szempontból. Maga *Granger* is beszámolt olyan törekvésekről, melyek során a magyarázó változók körét idősoros modelleknél is kiterjesztik. A szerkesztők fontosnak tartják, hogy a két modelltípus közötti választásnál a leírandó folyamat jellege motiválja a döntést. Egyszerű, egyenletes fejlődés leírásánál sem elméletileg, sem ráfordításigényét tekintve nem éri meg ökonometriai modellt alkalmazni. Alternatív hipotézisek tesztelésekor viszont a szimultán ökonometriai modell nem helyettesíthető mással.

Az utolsó nagyobb témakör, a makromodellek előrejelzéseinek értékelése és összehasonlítása volt. *G. Fromm* és *L. R. Klein* előadása 12 amerikai modellt hasonlít össze az optimális nagyság és az előrejelzések pontossága alapján. *S. K. McNees* áttekintést ad az összehasonlítás lehetséges módszereiről. Az összehasonlítást nehezíti az időszakok különböző hossza és az eltérő szerkezet. Statisztikailag megalapozott állítások csak ex-post elemzésre épülhetnek, mivel az exogén változók előrejelzései az ex-ante összehasonlításba nagy bizonytalansági tényezőt visznek be.

Az előadásokat többnyire bőséges irodalomjegyzék egészíti ki. Remélhetőleg sikerült érzékeltetnünk, hogy a könyv magas színvonalú, sokrétű vita összefoglalása, mely felöleli az ökonometriai modellezés problémáinak széles skáláját és ismerteti a megoldásukra az USA-ban tett kísérleteket. Így a könyv elsősorban azok számára érdekfeszítő olvasmány, akik a hazai ökonometriai modellezői gyakorlatban lépten-nyomon szembesülnek a könyvben tárgyalt döntési problémákkal.

NEMÉNYI JUDIT

CHIKÁN ATTILA (szerk.): *The Economics and Management of Inventories*. Akadémiai Kiadó—Elsevier, 1981.

A Magyar Tudományos Akadémia 1980. szeptember 1—5 között rendezte meg Budapesten az I. Nemzetközi Készletgazdálkodási Szimpoziumot. A szimpoziumon 23 ország közel 100 szakembere vett részt, s több mint 80 előadás hangzott el. Három szekcióban tartottak előadásokat. Az első szekcióban a készletek népgazdasági vonatkozásait tárgyaló előadások, a második szekcióban a vállalati készletezéshez kapcsolódó, a harmadik szekcióban a készletmodellezési kutatások legújabb eredményeiről beszámoló előadások hangzottak el.

Közismert, hogy a készletezési problémák mind az ökonometria, mind pedig az operációkutatás számára fontos vizsgálati területek. Ez tükröződött a szimpozium előadásaiban is. Természetesen nincs módunk arra, hogy a kötetben megjelent valamennyi előadást részletesen ismertessük: célunk elsősorban a tematikai változatosság bemutatása. Ismertetőnket eleve csak a matematikai eszközöket nagyobb súllyal felhasználó előadásokra korlátozzuk. Megjegyezzük, még, hogy az előadásokból magyar nyelven is készült válogatás: Chikán A.—Barancsi É. (szerk.): Készletek a népgazdaságban és a vállalati gazdálkodásban, Szocialista Vállalat OTTKF, Bp. 1981.

A népgazdasági készletek szekciójában elsősorban az aggregált készletek viselkedését elemző modellek kerültek bemutatásra. A magyar népgazdaság készletalakulásának modellezését tárgyalja *Ábel István* és *Riecke Werner* előadása. A készletek alkalmazkodására egy kétéves késleltetésű modellt állítanak fel, amelybe a külkereskedelmi mérleg egyenlegét és a felesleges készleteket kezelő tényezőket iktatnak be. A készletalakulást nem-lineáris iteratív legkisebb négyzetek módszerével becslik. A népgazdasági tartalékok, az árak és a támogatási programok egymásrahatását tárgyalja *D. Bigman* (Izrael) szimulációs modellje. A készletberuházásokat és keresletet vizsgálja nemegyensúlyi gazdasági közegben *R. Fiorito* (Olaszország) modellje. A profit-maximalizáló vállalatok inputjára (köztük a készletekre) rövid távon a nemegyensúlyi állapot jellemző. A vállalatok expanziós törekvéseiknek megfelelően ítélik meg készleteiket. Az egyensúlyi készletre irányuló kiegyenlítési folyamat nagyon lassú, a vállalati tevékenységen túl külső strukturális tényezők függvénye.

A nem-ár jelzésű szabályozási modellek egy változatát tárgyalja *Kapitány Zsuzsa* szimulációs modellje. A készlet- és rendelésjelzéses mechanizmust vizsgálja abból a szempontból, hogy véletlen zavarok esetén melyik tudja biztonságosabban ellátni a reálszféra szabályozását. Matematikai oldalról ez a modell működési biztonságának értékelését jelenti. A szimulációs kísérletsorozat alapján megállapítja, hogy az ütközőkészlet-normákat növelve a működési biztonság egy ideig növekszik. Az ütközőkészlet-normák adott határon túli növelése azonban csökkenti a működési biztonságot. A szerző a két gazdaság közül a rendelésjelzésest találta előnyösebbnek. A készletciklusok elemzését végzi el n-szektoros dinamikus input-output modelljével *M. Lovell* (USA). A szerző szerint az aggregált statisztikai adatokkal dolgozó modellek esetén a vállalati magatartás nem vizsgálható adekvát módon: a gazdaság alanyainak aggregálása során az információnak jórésze elvész. A vállalati termelést az anticipált eladás, a késleltetett termelés és a tényleges eladás függvényeként fejezi ki. A modell az iparágak termelésének alakulását generálja; képes szinuszoid, fűrészfog alakú ciklusok, valamint monoton outputalakulás vizsgálatára. Tárgyalja az ún. „hiányzó ciklusokat", amelyek az egyes iparágak többszörösen egymásra tevődő ciklikus mozgásainak eredményeképp eltűnnek az aggregátumokban.

A készletek szektorok közötti megoszlásának változását elemzi *D. Stojanovic* (Jugoszlávia) növekedési mátrixok segítségével. A mátrix elemei a szektoronkénti relatív készletváltozások. Az i-edik szektor készletváltozását az n szektor készletnagyságának lineáris függvényeként írja fel, ahol a készletnövekedési mátrix elemei szerepelnek szorzótényezőkként. Eltekint a külső tényezőktől és az egyes szektorok növekedésénél fellépő késleltetésektől. Bemutatja a modell bővítését a termelési, beruházási és export növekedési mátrixokkal. Végül számpéldával illusztrálja a modell alkalmazását.

A vállalatok készletezési viselkedésének és a gazdaság stabilitásának kapcsolatát elemzi *F. Manzetti* (Olaszország). Lineáris kapcsolatokat tételez fel. A vállalatok viselkedését a készlet-akcelerátorral, az output-akcelerátorral és a vállalat tanulási vagy reagálási együtthatójával jellemzi. A fonalgyártási, a pamutipari, az autó- és teherjárműgyártási vállalatok adatai alapján vizsgálja az egyes iparágakra jellemző gazdasági ciklusokat.

Egymással kapcsolatban álló nyersanyagok és feldolgozott termékek termelési és export döntését modellezi *G. R. Prastacos*, és *M. Xafa* (USA) egy kis ország esetére. A modell exogén változói: az alapanyag és a feldolgozott termék világpiaci ára, a cserearány, az alapanyag összkínálata. A modell a két termék belföldi keresletét log-lineáris függvénnyel írja le, a feldolgozott termék költségét kvadratikus költségfüggvénnyel. A modell az összes ipari profitot a külkereskedelem hatását figyelembe véve maximalizálja. A szerzők meghatározzák, hogyan hat a döntési változókra a modell exogén változóinak módosulása, bemutatják a cserearány meghatározó szerepét, végül a kis országra tett feltételezést (a termékek export kereslete végtelen rugalmasságú) feloldva megállapítják, hogy hasonló struktúrájú megoldást kapnak.

A vállalati készletgazdálkodás szekciójában ismert matematikai módszerek alkalmazását bemutató dolgozatok is szerepeltek. Egy többszakaszos összeszerelési folyamat készletezési pontjaira határozza meg a tételnagyságot *J. D. Blackburn* és *R. A. Millen* (USA) dolgozata. Olyan heurisztikus módszert keresnek, amely kis számításigénye miatt könnyen beépíthető az MRP néven ismert szükséglet-tervezési rendszerbe. *Hodgson, T. J.—Lowe, T. J.* (USA) dolgozata egy automatizált raktár termékeit modellezi. Az egyedi termékek termelési és raktározási költségén túl a valamennyi terméktől függő készletezési költséggel egészítik ki a modell költség függvényét. Többraktáros készletezési rendszerek centralizált és decentralizált gazdálkodását szimulációs módszerrel hasonlítja össze *H. M. Horsman—F. Wharton* (Anglia) dolgozata. Kísérleti futtatásaik szerint a centralizált raktározási mód bizonyult hatékonyabbnak.

A kiskereskedelemben alkalmazható adatfeldolgozási és ezen alapuló modellezési rendszert mutat be *L. Marchi* (Olaszország). A szerző szerint az általános készlet-helyzetet jellemző információkon túl, elsősorban keresleti jelentések készítésére, a kritikus értékű változók jelzésére kellene a számítógépes készletezési rendszert használni. Számítógépes készletezési rendszeren alapuló, többtermékes, többraktáras, (s, q) készletezési mechanizmusra épülő modellt tárgyal *Megyeri E.* dolgozata is. A döntési problémát kvantitatív és kvalitatív változók írják le és döntési táblázatok alapján határozható meg a szükséges beavatkozás. A termelési szükségleteken és a piaci igényeken alapuló készletezést vizsgálja *T. Reichmann* (NSZK). A rádiósmagnók keresletét befolyásoló tényezőket korrelációszámítással elemzi, ezekből regressziószámítás alapján határozza meg a jövőbeni kereslet alsó és felső határát.

A *matematikai készletmodellek* szekciójában főként új modellek bemutatására került sor, több alkalmazási példát is láthattunk, néhány előadó áttekintő-jellegű dolgozattal lépett fel. „A szocialista vállalat" kutatási főirány héttagú kutatócsoportja (*Barancsi É.*, *Bánki G.*, *Borlói R.*, *Chikán A.*, *Kelle P.*, *Kulcsár T.*, *Meszéna Gy.*) a készletmodellek elemzési módszerét, s az erre épülő modellcsoportosítást mutatta be. 336 modell tulajdonságait egy kódrendszer alapján kvantitatív módon értékelik, s sokváltozós statisztikai módszereket használnak fel a készletmodellek csoportosítási változatainak kidolgozására. A dolgozat foglalkozik a modellrendszer és a számítógépes készletezési rendszer összekapcsolási lehetőségével is.

Helyettesítő termékek modellezésével foglalkozik *E. V. Bulinskaya* (Szovjetunió) dolgozata. A termékek helyettesítési lehetőségét egy gráf adja meg, a helyettesítés költségeit mátrix tartalmazza. A készlettartás, a hiány, a beszerzés és a termékhelyettesítési költségét *n* perióduson át minimalizáló készletfeltöltési módot határoz meg. Két termék esetére mutatja be a módszer alkalmazását. Egy „többszörös-S" típusú diszkrét idős készletezési modellt tárgyal *S. Bylka* (Lengyelország) dolgozata. A kereslet véletlen változó, eloszlásfüggvénye változatlan a tárgyalt n időszakon keresztül, a kereslet véges és pozitív várható értékű. A modell az s_i rendelési pont függvényében választja ki a növekvő S_i sorozatból a feltöltési szintet. A szerző igazolja az optimális politika létezését.

A készlettervezés időhorizontjának meghatározását vizsgálja *Carlson, R. C.* és *D. H. Kropp* (USA). A termelésindítási és készletezési költségek összegét minimalizálja N időszakon keresztül a Wagner—Whithin algoritmus alkalmazásával, ill. gördülő programozással. A két költség arányát használja a döntések értékelésére. A természetes rendelési vagy termelési ciklus és az előrejelzési időhorizont függvényében vizsgálja a költségarányokat.

A folytonos felülvizsgálati és sztochasztikus késési idejű modellek egy csoportját vizsgálja *U. M. I. Dirickx* és *D. Koevoets* (Hollandia) a keresleti folyamatra és a késésidőre tett különböző feltételezések mellett. Megbízhatósági típusú készletmodell alkalmazását mutatja be *Gerencsér L.*, *Gyepesi Gy.* és *Urbánszki F.* dolgozata egy alkatrésztartalékolási eseten; az eredeti készletezési politikához képest jelentős javulást értek el. A megbízhatósági modellek olyan változatát tárgyalja *H. J. Girlich* és *H. U. Küenle* (NDK), amelyben a döntéshozó a $z_1, z_2 \dots z_n$ rendelési mennyiségeket határozza meg. Az első modell feltételrendszere: periódusonkénti véletlen kereslet, hiány esetén a kielégítendő kereslet vár, *n* egyenlő tételben érkezik be a szállítmány; a modell a megbízhatósági kritériumot kielégítő nyitókészletszintet keresi. A másik modellváltozatban a z_0 első beérkező tétel és a kezdőkészletszint adott, a megbízhatósági kritérium kielégítését biztosító z vektort kívánja meghatározni.

Több termék együttes rendelési gyakoriságának meghatározására ad algoritmust *S. K. Goyal* (Anglia) dolgozata. A készletezés és a termelésközi készletek költségeinek meghatározását pontosítja *R. W. Grubbström* és *A. Thorstenson* (Svédország), oly módon, hogy a bevételek és a költségek időbeli alakulását figyelembe veszi. Két adott struktúrájú termelési láncra (adott kapcsolódású termelési szakaszok és készletezési pontok) szimulációs kísérletekkel határozza meg a különböző időpontban fellépő befizetések, ill. a költségek együttes hatását.

A megbízhatósági típusú készletmodellek egy általánosítását adja meg *Kelle Péter* dolgozata. A bemutatott készletmodellben mind az igényfolyamat, mind a beszállítási folyamat véletlenszerű. A be- és kiáramlási folyamat alakulására tett feltételezések mellett a nyitókészlet számítására kapunk közelítő formulát. (A beszállítás azonos tételnagyságú, egyenletesen véletlen időpontokban történik, az igényfolyamat normális eloszlású, stb.) A modell kiterjeszthető *m* számú termékre (a termékek iránti igények nem függetlenek egymástól), korlátozó tényezőkkel (pl. pénzügyi korlát), költségfüggvényekkel. A dolgozat beszámol a modell gyakorlati alkalmazásairól is. A rendelés feladásának időpontja jelenti a legerősebb korlátot *H. Klemm* (NDK) által bemutatott készletezési rendszerekben. Három egymást követő évre tekinti a készletalakulást, az első év terv és tényadata, valamint a második (folyó) év készletadatai alapján kívánja meghatározni a következő év t_k időpontjaiban rendelendő z_k mennyiségeket. Az eltérő tulajdonságú termékekre másmás rendelési gyakoriságot javasol. Az így meghatározott rendelésfeladási időpontok és tervadatok alapján megbízhatósági készletmodellt épít fel a rendelendő termékmennyiségek meghatározására.

Determinisztikus keresletű, egytételes beérkezésű, folyamatos készletfelülvizsgálati idejű (s, q) modellt mutat be *Kulcsár Tamás*. A modell a késésidőt M várható értékű és D szórású valószínűségi változóként kezeli. A szerző a költségoptimalizáláson túl bemutatja a modell kapcsolatát a megbízhatósági típusú készletmodellekkel. Költségoptimalizáló, (s, S) típusú modellt vizsgál *J. A. Müller* (NDK). A rendelési időszakon belül két tételben véletlenszerű kereslet jelentkezik, ezek független valószínűségi változók. Az optimális paraméter értékek meghatározására különböző módszereket javasol: szimulációt, véletlen számok generálásán alapuló adaptív próbálgatás módszerét, a valószínűségi függvények transzformálásán alapuló módszert.

Termelési-készletezési rendszert vizsgált *E. Naddor* (USA) 8-féle terméket 16-féle szerelvényből és alkatrészből állítanak össze, a termékstruktúra és a termék összeszerelési folyamata adott. Az igényfolyamat determinisztikus: a külső rendelések alapján számított szükséglet. A modell olyan termelésütemezést keres, hogy a termelési és készletezési költségek összege minimális legyen. A problémára két algoritmust mutat be, hatékonyságukat értékeli, összehasonlítja. Romlandó áruk készletezését modellezi *S. Nahmias* (USA). Bemutatja, hogy a sorbanállási és romlandó termékek készletezési modelljei analóg módon kezelhetők. Egy központi vérbank problémájára költségoptimalizáló modellt épít fel. A hatékony termelésütemezés feltételezi, hogy a termelési folyamat bizonyos pontjain megfelelő nagyságú termelésközi készlet áll rendelkezésre. Ezt a problémakört vizsgálja *P. J. O'Grady* és *M. C. Bonney* (Nagy-Britannia). A termelési, készletezési és szállítási rendszert együtt kezelik. A termelésközi készletek nagysága becsülhető a termelési folyamat alapján. Erre azonban véletlen tényezők is hatnak, ezért a folyamat bizonyos pontjain elvégzett mérések alapján is meghatároznak egy becsült értéket. Szabályozáselméleti megközelítést alkalmaznak a nemstacionárius rendszerben a két becslés optimális kombinálására, a hibás információkból adódó költségek csökkentésére. Egy kórház gyógyszerkészletezését modellezi *C. C. Pegels* (USA).

A megbízhatósági készletmodellek alapvető típusait mutatja be *Prékopa András* (Magyarország). Az alapmodell a felhasználási folyamat egyenletes intenzitását tételezi fel, a beszállítási folyamat véletlenszerű, n-számú egyenlő nagyságú tétel, egyenletes eloszlású szállítási időpontokkal. A modell általánosított változata a beérkezést is véletlen folyamatként kezeli. A modellek a nyitókészlet meghatározására adnak közelítő formulát. A szerző beszámol a modellek alkalmazásairól is.

Többtermékes termelési-készletezési modellt vizsgál *R. Rempata* (Lengyelország). Ismert kereslet mellett a termelési és készletezési költség minimumát biztosító termelésütemezést keresi. Különböző struktúrájú költségértékek mellett vizsgálja a modellt. Kapacitáskorlátos, determinisztikus modellel foglalkozik *K. Richter* (NDK) dolgozata. A korlát nélküli modell feltételrendszere egy zárt konvex poliédert határoz meg, a költségfüggvény minimumát valamelyik extremális pont adja meg. A szerző az alapmodellt korlátozó tényezőkkel bővíti, s bemutatja, hogy a korlátokkal bővített modell ekvivalens az eredeti modellel. A megoldásra a legrövidebb út módszerének módosított változatát alkalmazza. Alkatrészkészletezés modellezését vizsgálja *E. Ritchie* (Nagy-Britannia).Az alkatrész keresletének időbeli alakulása három részre osztható: az első szakaszban a kereslet növekvő, a középső szakaszban konstans, a harmadik szakasz kereslete csökkenő. Mindhárom szakaszban más-más készletezési politikát kell alkalmazni.

Adott kiszolgálási szintet biztosító (s, S) modellt elemez *H. Schneider* (NSZK). Megadja a kiszolgálási szint lehetséges értelmezéseit, s azt az esetet vizsgálja, amikor az átlagos kereslet β százalékát elégítik ki. A szerző az s újrarendelési pont meghatározásának három változatát elemzi. A készletbank rendszer szimulációs vizsgálatát mutatja be *K. Siegel* (NDK). A modellkísérletek programjaira részletes blokkdiagramot ad, elemzi az eredményeket. Tárgyalja a szimulációs módszer szóráscsökkentő eljárásait.

Több termék együttes rendelését elemzi *A. E. Silver* és *N. E. Massard* (Kanada). A rendelési és a készletezési költség minimumát biztosító optimális paraméterértékeket kívánnak meghatározni. A készletmodell (S, c, s) mechanizmus szerint működik. A készletszint és a kiszolgálási szint együttes optimalizálásával foglalkozik *Ch. Teplitz* (Kanada). A probléma megoldására algoritmust ad, s számpéldán mutatja be a módszer alkalmazását. Többtermékes készletezési rendszerekben vizsgálja a forgási sebességet *L. Unčovszký* (Csehszlovákia). A forgási sebesség elemzését összekapcsolja a biztonsági készlet, készletezési befektetések és a rendelési gyakoriság vizsgálatával.

Többlépcsős készletezési rendszereket elemez *P. Vrat* és *S. Babu* (India) dolgozata. A vizsgált termékek olyan alkatrészeket vagy részegységeket tartalmaznak, amelyek elromlásuk esetén cserélhetők és javíthatók. A modell meghatározza, hogy az egyes készletezési pontokon hány alkatrészt készletezzenek, hogy a készletezési és a javítási összköltség minimális legyen. A vizsgálatra szimulációs módszert alkalmaznak.

A készletgazdálkodás és a termeléstervezés további kutatási területeit vázolja fel *H. M. Wagner* (USA). Kiemeli, hogy a készletezés egészét kell figyelembe venni a rendszertervezés során, s célszerű lenne az egyes készletezési stratégiák összehasonlító modelljeivel rendelkezni. Foglalkozik a készletezési paraméterek előrejelzésének problémáival. Külön vizsgálati problémaként veti fel a vállalati felső vezetés számára végzett kutatásokat: az alulról felfelé felépített modelleket felcseréljék-e a felső vezetés problémáit saját törvényszerűségeinek megfelelően kezelő modellekkel. Egy általános készletezési modellt épít fel *K. H. Waldman* (NSZK). A modell használhatóságát ismert készletmodellekre való alkalmazásával mutatja be.

*

1982. augusztus 23—27 között hasonló szervezésben tartották meg a II. Nemzetközi Készletgazdálkodási Szimpoziumot.

BARANCSI ÉVA

TUDOMÁNYOS ÉLET

Operációkutatás a Kínai Népköztársaságban*

A Kínai Népköztársaságban az operációkutatás (továbbiakban OR) helyzete az elmúlt évtizedekben igen hullámzóan alakult, „történelmileg" az OR fejlődése az országban *öt* szakaszra bontható 1956-tól napjainkig.

A bevezető szakaszban (1956—57) *Xu Guo Zhi* professzor egy OR osztályt szervezett a Kínai Tudományos Akadémia Mechanikai Intézetében. Az Intézet munkatársai igyekeztek széles körben megismertetni a módszertani alapokat — lineáris programozást, a sorbanállási elméletet, a dinamikus programozást (?) stb. Több gyakorlati problémát oldottak meg a szállítási ágazatban, a textil iparban, a duzzasztó gátak tervezésénél és más területeken. Ez volt tehát az alapok lefektetésének időszaka.

A népszerűsítés időszaka (1958—60) egybeesik a „nagy ugrás" időszakának kezdetével. Kínában korábban a hagyományos, tiszta matematikai ágakat művelték — ezeknek nem sok kapcsolatuk volt a gyakorlattal —, most a Kormány arra buzdította a matematikusokat, hogy az ipar és a mezőgazdaság előtt álló nagy feladatok teljesítése érdekében integrálják gyakorlati eredményekbe az elméletet. Ez a felhívás nem volt egykönnyen teljesíthető; talán a lineáris programozás alkalmazásával sikerült némi eredményeket elérni. Az LP ebben az időszakban ünnepelt módszerré vált, jelentőségét túlértékelték egyes körzetekben, például Santung tartományban egymillióan hallgattak LP előadásokat, ami a legtöbb főiskolán és egyetemen is kötelező ismeretanyag volt. A bonyolultabb eljárásokról szintén számos előadás hangzott el szerényebb létszámú hallgatóság előtt.

Az első OR konferenciát 1960-ban Jinan-ban tartották 600 fő részvételével az OR különböző módszereiről és a gyakorlati alkalmazásokról. A konferencia népszerűsítette az új tudományt és számos további matematikus fordult ebbe az irányba. Az Akadémia Matematikai Intézetében — a Mechanikai Intézet operációkutatóival együtt — megalakult az Operációkutatási Osztály.

Az eltúlzott tervek és a természeti csapások következtében beállott gazdasági problémák miatt *1961—66-ban* az OR területén is megkezdődött a *kiigazítás időszaka.* A Kormány felülvizsgáltatta a munkamódszereket a vállalatoknál, a normál ütemhez való visszatérést kívánta meg a vezetéstől. Kiderült, hogy az OR képzésben és munkában résztvevők szakmai alapjai nem voltak elég szilárdak, sokan a matematikusok közül is visszatértek eredeti tudományterületeikhez. Az OR-rel foglalkozók száma egy szűkebb magra csökkent, ők azonban jelentős elméleti munkát végeztek, folytatták az oktatást — beleértve a matematikai közgazdaságtan ismeretanyagát is — és néhányan szorgalmasan kutattak az OR-rel megoldadnó feladatok után a gyárakban. A Kulturális Forradalom ezt a megalapozottan újraindított munkát, a többi kulturális tevékenységhez hasonlóan 7 évre befagyasztotta.

A helyreállítási szakasz 1972—77 közé esik. A Kulturális Forradalom után alaposan megváltozott a helyzet, sokan különböző okokból elhagyták az OR-rel foglalkozók körét, mások számítógép-tudományokkal kezdtek foglalkozni. A megmaradt OR tábor az elmúlt évek kiesett ismeretanyagának beszerzésével, pótlásával volt elfoglalva. Az egyetemi oktatásban ismét szerepet kapott az OR, ismét az elmélet és gyakorlat kapcsolatát keresték elsősorban. A figyelem az optimális tervezésre, az optimum keresés módszereire irányult, amiben különösen *Hua Loo Keng* professzor és csoportja játszott fontos szerepet. Ők az optimális programozás módszereinek alkalmazását az ország számos területén szorgalmazták és segítették, nem csekély sikereket érve el ezzel az ipar területén.

* Yue Min Yi (a Kínai Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének munkatársa) előadása alapján, melyet 1981 júniusában Hamburgban a 9. Nemzetközi IFORS Konferencián tartott.

A fejlődés időszakát 1978-tól számítja a szerző, amikor a kormányzat rátért a „négy modernizálás politikájára". A „modernizálás"-ba természetesen beleértik a management korszerűsítését is és így számos kérdést tesznek fel az OR szakembereknek a gazdaság minden területéről. Sok főiskolán és egyetemen alakultak OR, rendszerelemzői és vezetéstudományi tanszékek, az oktatás műszaki területen is megindult. Az OR-t Kínában ma ismét fontos alkalmazott tudománynak tekintik.

Az előadó részletesen foglalkozott az alkalmazás területeivel, amelyek között a legtöbb igazgatási és termelési ágazatot megtaláljuk. Külön kiemelte, hogy az OR alkalmazásában specifikus kínai eljárások is voltak és ennek keretében ismertette *Hua* professzor módszerét. A professzor először kiválasztott néhány hatékony módszert, majd ezeket úgy leegyszerűsítette, hogy széles tömegek, néhány elemit végzett emberek számára is érthetővé váltak. Ezután egyes körzetekben a helyi vezetők segítségével előadásokat szervezett, ahol megismertette az emberekkel ezeket az eljárásokat. Volt olyan előadás, ahol a hallgatóság 100 000 fő volt. A konkrét munkát ő és munkatársai ágazati szakértők bevonásával kezdték, majd kimentek egy gyárba és a tapasztalatokkal ezt kiegészítették. Az így kialakult modell alkalmazásával kiterjesztették munkájukat több gyárra vagy például az egész kereskedelemre, stb. A munka során természetesen folyamatosan figyelembe vették a gyakorlati szakemberek észrevételeit, kritikáját, a módszer gazdagodott. Az elmondott módon számos OR módszert vezettek be a szénbányászatba, a könnyűiparba, a gépiparba, a mezőgazdaságba stb. A gazdasági előnyök nagyok voltak. Például az „általános tervezési és optimum kutatási módszer" Jiangsu tartományban öt hónap alatt az iparban 100 millió yuan nyereségnövekedésre vezetett a termelés növekedése és a költségek fajlagos csökkenése következtében. A rizstermelésben az OR alkalmazás eredménye 1—2% növekedés volt. Néhány tartományban a termelési program részeként a módszerek elsajátítását lehetővé tették a munkások számára is.

Az elméleti kutatások fő területi napjainkban a matematikai programozás, a valószínűségszámítás, a gráfelmélet és a kombinatorikus optimalizáció. A kutatók számos szimpoziont tartanak szűkebb témákban. Sok neves külföldi kutató tartott előadásokat, rövid szemináriumokat, konzultációkat az országban. *Berge*, *Charnes*, *Dantzig*, *Goodeve*, *Iri*, *Jensen*, *Ladson*, *Matzuda*, *Moriguchi*, *Morimura*, *Morse*, *Rosen*, *Tutte* látogatása nagy lökést adott az OR munkának. A kínai szakemberek tudják, hogy ezen a területen ma még nagy az elmaradásuk a fejlett ipari országoktól. Úgy vélik, még nincsenek felkészülve nagyméretű, igazán összetett feladatok OR-rel való megoldására, ami egy modern államban szerintük nélkülözhetetlen.

1980-ban a Kínai Matematikai Társaság egyik ágazataként megalakult a Kínai Operációkutatási Társaság, az ORSC (Operations Research Society of China). Hamarosan létrehozták az ORSC területi szerveit is a nagy közigazgatási központokban.

1982-re várták, hogy megjelenik az első kínai OR folyóirat. Az ORSC nagyban segíti az oktatást és az alkalmazást is. A kutatók már az 1970-es évek elején felvették a kapcsolatot az IFORS-szal, részt vettek az 5. és 6. nemzetközi konferencián és később sok segítséget kaptak az ORSC-nek az IFORS-hoz való csatlakozásához.

Pongrácz Tibor

Kornai János akadémikus

Állami díj 1983

„a matematikai közgazdaságtan területén kifejtett sokoldalú tevékenységéért, eredményeiért”

Fotó Nádas Ilona

A XII. Magyar Operációkutatási Konferenciáról

1982. szeptember 6–10. között Kőszegen, a Jurisich várban rendezték meg a XII. Magyar Operációkutatási Konferenciát. A konferencia főrendezője a Bólyai János Matematikai Társulat Alkalmazott Matematikai Szakosztálya volt.

Az évenként megrendezett konferenciát mindig nagyfokú érdeklődés kísérte, amely ezúttal még fokozódott is. A résztvevők nagy száma és a két szekcióban elhangzott számos előadás is ezt a fokozott érdeklődést mutatta. A két szekció közül az *A*-ban inkább a módszertanról, a *B*-ben elsősorban elkalmazásokról hangzottak el előadások. Ezért az *A* szekcióban inkább a matematikusok részvétele dominált, a *B*-ben a közgazdasági, tervezési problémákkal foglalkozók voltak túlsúlyban.

Mindkét szekció munkájára érvényes, hogy általában érdekes, színvonalas előadásokat hallottunk. A konferencia programja is jól tükrözi a matemtaikai közgazdasági kutatásban az elmúlt években tapasztalt és ma is tartó strukturális változásokat. E változások egyik legfontosabb eleme a determinisztikus modellekkel szemben a sztochasztikus modellek szerepének növekedése. A konferencián is feltűnően nagy volt a sztochasztikus módszerek és modellek aránya. A determinisztikus modellezésben ugyanakkor az igényesebb matematikai eszköztárat felhasználó nemlineáris modellek számának növekedése figyelhető meg. Figyelemre méltó volt általában az előadók matematikai felkészültsége, az előadásokban tapasztalt módszertani igényesség. Nem tudjuk biztosan megítélni, hogy a konferencián tapasztalt módszertani elmélyülés jól reprezentálja-e a magyar operációkutatási társadalom átalakulását, vagy csak annak tulajdonítható, hogy ezúttal a főrendező a Matematikai Társulat volt.

A konferencia negatívumaként említhető meg, hogy a szekcióülések programja sokszor feszített, túlzsúfolt volt, ami akadályozta az érdemi vita kibontakozását. Hiányzott az utóbbi konferenciákon bevált és sikert aratott kerekasztal megbeszélés is. Mindez ismételten felveti annak szükségességét, hogy a Programbizottságok hazai konferenciákon is törekedjenek jobban az előadások előzetes szelekciójára, témák szerinti csoportosítására, a program aktív alakítására. Úgy véljük, hogy ez az *A* szekció programjának kialakításában jobban sikerült, a *B* szekció munkáját nehezítette a szekcióülések heterogenitása, összetartozó előadások szétszórása más-más szekcióülésekre.

Az *A* szekcióban elhangzott előadások elméleti és gyakorlati szempontból érdekes és fontos kérdéseket vizsgáltak. Az előadók zöme az operációkutatás módszertani, elméleti kérdéseivel foglalkozott. Az előadások széles skálán mozogtak, kezdve a számítástechnikai-algoritmikus kérdésekkel egészen az elméleti-matematikai érdekességre számottartó tételekig. Például egy teljes szekcióülés foglalkozott a mátrixinvertálás problematikájával – *Kéri Gerzson:* Újrainvertálási stratégiák dinamikusan súlyozott érdemszámok alapján, *Dobosy Antal:* Szorzatalakú mátrixinverzek pontosságának vizsgálata és az invertálás minősítése, *Édes János:* Ritka mátrixok invertálásának meggyorsítása. Több szekcióülésen vizsgálták a sztochasztikus programozás elméletét és algoritmikus problémáit – *Strazicky Beáta:* A kétlépcsős sztochasztikus programozási probléma megoldási módjairól, *C. Fodor János:* A sztochasztikus programozás E- és P-modellje, *Komáromi Éva:* Logaritmikusan konkáv eloszlásfüggvénnyel korlátozott lineáris programozási feladat megoldásának duális megközelítése, *Pintér János:* Sztochasztikus optimalizálási módszerek konvergencia tulajdonságai. Elméleti és gyakorlati szempontból is érdekes volt *Prékopa András* előadása a véletlen eloszlású lineáris programozási feladatok határeloszlásáról. Kifejezetten elméleti érdekesség is volt *Csernátony Csaba* előadása az Arrow-féle lehetetlenségi tétel általánosításáról fuzzy rendezések esetére.

A szekció munkáját a hallgatóság végig fogyelemmel kísérte, esetenként élénk vita is kialakult.

A B szekció, az alkalmazások szekciója iránt igen nagy érdeklődés nyilvánult meg. Az itt elhangzott előadások általában valamilyen gyakorlati probléma matematikai, számítástechnikai eszközökkel történő megoldását, vizsgálatát mutatták be. A szekció munkájában fontos szerepet kaptak a népgazdaság tervezésének korszerűsítését szolgáló matematikai modellezési, számítástechnikai kutatások. A számítástechnikában az adatbankok és software eszközök egységes, integrált rendszerének megteremtésére törekszenek. Ezt jól példázza az a munka, amelyről az Országos Tervhivatal Számítástechnikai Központjának munkatársai számoltak be. „A tervezőmunka korszerűsítése" munkaprogram keretében kidolgozott MESTER (Makromérlegek Egységes Számítógépes Tervezési Rendszere) célja a tervkoordináció gépesítése, a megoldás rugalmasságának, hatékonyságának növelése érdekében. Az előadók bemutatták az első változat főbb jellemzőit, egyes részeit, így az alkalmazott közgazdasági fogalmi hivatkozásokat, az input rendszer párbeszédes táblakezelő programrendszerét (TINI), a központi adattárat és a koordinációs számítások és elemzések eszközeit. Munkájuk kapcsolódik ahhoz a Tervhivatalban széleskörűen folyó tevékenységhez, amelynek célja a tervezés információs hátterének kialakítása, számítógépes adatkezelési rendszerek kidolgozása. Hasonló kísérletek folynak a MÉM STAGEK-ban. A MÉM tervezési rendszere is a különböző időtartamú tervek megalapozását szolgáló információs háttérnek, a modelleknek és más elemzési eszközöknek a szerves egysége. A számítógépes tervezés sokrétű felhasználási lehetőségét jól példázza az a két előadás, amelyek mikroszintű problémák — balatoni szennyvíztisztító rendszerek beruházása, útburkolaterősítés és korszerűsítési munkálatok — tervezésére kidolgozott interaktív programrendszert mutattak be. Az adatbankok és alkalmazási rendszerek összekapcsolása makro és mikroszinten egyaránt közvetlen kapcsolatban van a tervezési és döntési gyakorlattal és végső célja általában az, hogy a számítástechnikához kevésbé értők is könnyen alkalmazhassák.

A tervezést szolgáló matematikai programozási modellek egy új irányzatát jelentik azok a kutatások, amelyek az általános egyensúlyelmélet matematikai eszköztárát próbálják alkalmazni. Az új módszertani megközelítés lehetővé teszi, hogy a már gyakori lineáris programozási feladatokon túl bonyolult nemlineáris modelleket is felhasználjanak. E témakörben több előadás is elhangzott. A *Pór—Sivák—Zalai* szerzőhármas megmutatta, hogy a legtöbb nemlineáris közgazdasági modell egy sajátos programozási feladatnak tekinthető és egzaktul megoldható. Rámutattak, hogy a folytatásos vagy homotópia módszer alkalmazásával lehetőség nyílik az iterációs eljárás közgazdasági értelmezésére is. Egy másik előadás a gyakorlati alkalmazás számára eddig még fehér foltként tekintett, ugyanakkor nem érdektelen Neumann modellel, annak Morishima-féle általánosításával foglalkozott. Az egzisztenciatételeket a Kakutani tételre támaszkodva bizonyítja és így a modell tárgyalása nagyban leegyszerűsödik. A nemlineáris egyensúlyi megközelítés alapesetének tekinthető a nemlineáris ÁKM, amelyről *Bod Péter* tartott előadást. Bár az *A* szekcióba került, módszertanilag ehhez a témakörhöz tartozik az egyensúlyi programozás és a többcélú optimalizáció egy újszerű felhasználását bemutató *Asztalos—Pór* előadás is.

Hagyományos lineáris programozási feladatok is szerepeltek az előadások között. Az egyik legérdekesebbet, az energetika hosszútávú fejlesztésének vegyes-egészértékű llineáris programozási modelljét az OT Tervgazdasági Intézetében dolgozták ki az Ipari Főcsoport Energetikai Osztályával együttműködve. A modell módszertani érdekességét a rendkívül ritka együttható mátrix jelenti.

A szekció programjának mintegy felét sztochasztikus módszerek és modellépítési előadások alkották.

Az MKKE MSZI munkatársai a clusteranalízis alkalmazásáról számoltak be különféle proolémákra: készletmodellek osztályozása, iparszerkezet területi különbségei, iparvállalatok mérlegadatainak struktúrája. Módszertanilag hozzájuk kapcsolódik a Pénzügyminisztérium munkatársainak előadása a mérlegstruktúra és a vállalattípusok elemzéséről. Iparvállalatok mérlegadatainak matematikai-statisztikai vizsgálataival még két előadás foglalkozott. Igen érdekes lett volna a többoldalú — faktoranalízises, clusteranalízises és ökonometriai — megközelítésnek, a szerzők következtetéseinek összevetése egy szekcióülésen belül. Sajnos a program erre nem nyújtott lehetőséget. Módszertanát tekintve csak részben tartozik ebbe a csoportba az aggregáció kérdéskörével foglalkozó előadás. A szerző az aggregáció hatásának mérésére információelmeleti mérőszámot alkalmazott, kereste a minimális információveszteséggel járó aggregációs utakat, bemutatta, hogy ezek gyakorlati meghatározásához a clusteranalízis egyes módszerei hatékonyan alkalmazhatók.

Az ökonometriai tárgyú előadások e tudományterület széles skáláján helyezkednek el. Új módszertani kísérletektől konkrét modellek ismertetéséig mindenfajta előadás elhangzott. Ismét felszínre kerültek a hazai ökonometriai kutatás körüli problémák, vitatott kérdések, anélkül azonban, hogy ezek korrekt, tudományos megvitatására mód nyílott volna.*

Egy módszertani kísérletről, a dinamikus faktoranalízis mátrixfolyamatokra történő általánosításáról és ennek alkalmazásáról tartott előadás több résztvevő érdeklődését felkeltette. A kutatás az OT Tervgazdasági Intézetben és a Számítástechnikai Központban folyt európai tőkés országok közgazdasági makrokategóriák 1953–1979 évi idősorainak felhasználásával.

Az ökonometriai modellek paramétereinek idősoros és keresztmetszeti adatok összekapcsolásával történő becslése igen érdekes kísérlet, számos területen hatékonyan alkalmazható. Az ilyen tárgyú előadásokban megfogalmazódott negatív következtetések arra utalnak, hogy még számos módszertani kérdést tisztázni kell.

Az ökonometriai modellépítés hagyományos útját követte *Subicz Péter* egy rövidtávú modell megalkotásánál, de törekedve ugyanakkor arra, hogy a modell jóságának matematikai-statisztikai kritériumát is biztosítsa. Érdekes a reál és pénzügyi szféra összekapcsolása, egyes gazdasági szabályozók szerepeltetése. Ez lehetővé teszi, hogy a modellt gazdaságpolitikai szimulációra és egyéb tervezési célokra is felhasználják.

Dinamikus gazdasági rendszerek vezérlésének gyakorlati alkalmazásától még távol vagyunk. Nem véletlen, tehát, hogy e témakörben két elméleti – módszertani előadás hangzott el, az egyik az optimális konkáv vezérlőfüggvényekről, a másik általános nemlineáris vezérlési problémák megoldásáról. E két előadásnak inkább az *A* szekcióban lett volna helye. Színesítette a *B* szekció folklórját *Nagy Ferenc–Seebauer Imre:* Bolyai János dialektikája és dialektikus rendszerszemléletének alkalmazása . . . című előadása. A szerzők Bólyai szellemi hagyatékának megőrzésére és alkalmazására szólították fel a hallgatóságot.

Végezetül szeretnénk megjegyezni, hogy a festői környezet ellenére a konferencia munkafeltételei nem voltak minden szempontból kielégítőek. A *B* szekció ülései például a városi tűzoltózenekar szűk szertárában zajlottak, ami ugyan lehetővé tette az előadok és a hallgatóság közti közvetlen kontaktust, de megnehezítette az odafigyelést, a nagyszámú hallgatóság elmélyült részvételét a szekció munkájában.

MEDVEGYEV PÉTER–VELLAI GYÖRGYI

* Az ökonometriai tárgyú szekcióülések folytatásának tekinthető bizonyos értelemben az a kerekasztal megbeszélés, amelyet októberben a Közgazdasági Társaság Alkalmazott Matematikai Szakosztálya rendezett a Kossuth Klubban, és amely jó alkalomnak bizonyult az eltérő nézőpontok ütköztetésére, a félreértések tisztázására.

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója
Műszaki szerkesztő: Sándor István
A kézirat nyomdába érkezett: 1983. III. 31. – Terjedelem: 14.35 (A/5) ív
83.11920 Akadémiai Nyomda, Budapest – Felelős vezető: Bernát György

CONTENTS

CONCEPTS AND METHODS

BOOK REVIEWS

SCIENTIFIC LIFE

СОДЕРЖАНИЕ

ПОНЯТИЯ И МЕТОДЫ

О КНИГАХ

НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ

Ára: 40 Ft

Előfizetés egy évre: 80 Ft

INDEX: 26 793

ISSN 0039—8128

TARTALOM

FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK

KÖNYVEKRŐL

TUDOMÁNYOS ÉLET

1828

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST