SZIGMA

Matematikai-közgazdasági folyóirat

A Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai-Közgazdasági Szakosztályának lapja

*

E szám szerzői:

HALABUK LÁSZLÓ, a KSH Ökonometriai Laboratóriumának volt vezetője, az OT nyugdíjas csoportvezetője, KŐRÖSI GÁBOR, az MTA Közgazdaságtudományi Intézet tudományos munkatársa, MÁTYÁS LÁSZLÓ, az Agrárgazdasági Kutató Intézet tudományos segédmunkatársa, dr. MEDVEGYEV PÉTER, az Országos Vezetőképző Központ oktató-kutatója, RAY REES, University College Cardiff és J. L. Kellogg Graduate School of Management, Northwestern University, SIMONOVITS ANDRÁS kandidátus, az MTA Közgazdaságtudományi Intézet tudományos munkatársa, SZÉKELY ISTVÁN, az MKKE Népgazdasági Tervezési Intézet tanársegédje, TARJÁN TAMÁS, az MTA Közgazdaságtudományi Intézet tudományos munkatársa, VÖRÖS JÓZSEF, a pécsi Janus Pannonius Tudományegyetem tanársegédje

Szerkesztőség: Budapest XI., Budaörsi út 43—45.

Levélcím: 1502 Budapest, Pf. 262.

Terjeszti a Magyar Posta. Előfizethető bármely hírlapkézbesítő postahivatalnál, a Posta hírlapüzleteiben és a Hírlapelőfizetési és Lapellátási Irodánál (HELIR) Budapest V., József nádor tér 1., 1900, közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a HELIR 215-96 162 pénzforgalmi jelzőszámra.

Előfizetés bejelenthető az AKADÉMIAI KIADÓ-nál (**1363 Budapest, Alkotmány u. 21.** Telefon: 111-010). Pénzforgalmi jelzőszámunk: 2151—1848 **és az** AKADÉMIAI KIADÓ STÚDIUM KÖNYVESBOLT-jában, (1052 Budapest Gerlóczy u. 7. Tel: 188—633). Előfizetési díj egy évre: 104,— Ft

Külföldön terjeszti a KULTURA Külkereskedelmi **Vállalat, H-1389 Budapest, Pf. 149**

Medvegyev Péter

A féligvégtelen lineáris programozás és a matematikai közgazdaságtan

A matematikai közgazdaságtannal való első felületes ismerkedés során is nyilvánvalóvá válik, hogy a tételek túlnyomó többsége valamely lineáris tér konvex részhalmazainak tulajdonságain alapszik. Matematikai-technikai oldalról megközelítve a matematikai-közgazdasági irodalom jelentős hányada: a konvex analízis egy speciális alkalmazási területe. Némi túlzással azt is mondhatnánk, hogy miként a klasszikus mechanika a másodrendű közönséges differenciálegyenletek elméletének fizikai alkalmazása, ugyanúgy a matematikai közgazdaságtan a konvex analízis közgazdasági alkalmazása. A konvex analízis és a matematikai közgazdaságtan mélyreható összefonódása elsősorban a közgazdaságtant alapjaiban átható egyensúlyi gondolkodás eredménye. Az egyensúlyelmélet az egyensúly és a hatékonyság fogalmaira és ezen fogalmak viszonyára, kapcsolatára épül. Az egyensúly-hatékonyság párosnak a konvex analízis oldaláról a fixpont tulajdonság, illetve a szeparációs tételre épülő dualitási tételek felelnek meg. Valamely közgazdasági modell egyensúlyi megoldásának létezését tárgyaló dolgozat megírásakor egyszerű szabályt kell követni: használd a Kakutani-fixponttételt! A szeparációs tétel szerteágazó alkalmazásait vizsgálva a kép összetettebb. A szeparációs tétel különböző alakjai mellett nagyszámú, eltérő szemléletű dualitási tétellel találkozhatunk. Tovább kuszálja a képet, hogy az irodalom a poliedrikus esetet, amikor a modellekben szereplő halmazok lineáris egyenlőtlenségekkel vannak megadva, az általános esettől függetlenül és eltérően tárgyalja, és így kimondva kimondatlanul szembeállítja őket egymással. A jelen dolgozat célja, hogy néhány alkalmazáson keresztül bemutassa, miként használható az ún. féligvégtelen lineáris programozási feladat matematikai-közgazdasági tételek bizonyítására. A végtelen sok feltételt tartalmazó lineáris programozási feladat használatát egyszerűsége mellett elsősorban didaktikai okok indokolják. A matematikai közgazdaságtan világába bebocsátást kereső hallgató útja az egyetemi képzés során a lineáris algebra, lineáris programozás tárgyakon keresztül vezet. Mivel a lineáris programozás és az LP dualitási tétel tradicionálisan központi eleme a képzésnek, célszerű a haladottabb tételeket olyan eszközre alapozni, amely szemléletében közvetlen általánosítása a már alaposan megismert és besulykolt technikának.

A dolgozat első részében röviden bemutatjuk a féligvégtelen (szemi-végtelen) lineáris programozási feladatot és a dualitási tétel bizonyítását. A dolgozat következő részében három alkalmazást fogunk tárgyalni: a Gale-modell egzisztencia tételét, a M. Morishima által a marxi közgazdaságtan alaptételének nevezett tétel általánosítását, és végül az ún. nem helyettesítési tételt.

A Gale-modell egyensúlyi megoldásának létezését a megfelelő véges Neumann-modell esetére „működő" bizonyítások mintájára próbáljuk majd kimutatni. A bizonyításból egyértelműen látható, hogy a féligvégtelen LP feladat duálisában szereplő lezárás jel igen fontos esetekben nem hagyható el, és éppen e lezárás elhagyhatósága mögött meghúzódó regularitási feltételek megléte, illetve hiánya különbözteti meg a véges poliedrikus feladatokat a végtelen, nem poliedrikus esettől.

A marxi közgazdaságtan Morishima-féle alaptételére adott általánosítás, ismereteim szerint, eltér az irodalomban találhatóktól. Morishima eredeti tételét Neumann-modellek esetére fogalmazta meg. A tételt J. E. ROEMER általánosította [18], [19] konvex termelési halmazokkal megadott gazdaságokra. Modelljében a pozitív profit létezésének feltételeit vizsgálja, szemben az eredeti Morishima-féle állásponttal, amely a pozitív profitráta létezésére koncentrál. A végtelen lineáris programozási feladat második alkalmazásaként tárgyalt tétel megpróbálja áthidalni a két megközelítés közti szakadékot. Be fogjuk látni, hogy ha a szükséges munkát Morishimahoz és Roemerhez hasonlóan a munkaerő újratermeléséhez minimálisan szükséges munkával definiáljuk, a pozitív profitráta létezésének szükséges és elegendő feltétele: a munkaerő kizsákmányolhatósága.

Az utoljára tárgyalt nemhelyettesítési tétel bizonyítását hasonlóan a másik két tételhez a féligvégtelen lineáris programozás dualitási tételére alapoztuk. Az irodalomban található bizonyítások vagy a szeparációs tételre, vagy más, véleményem szerint, a féligvégtelen lineáris programozási feladat dualitási tételnél nehezebb állításokra épülnek.

1. A féligvégtelen lineáris programozási feladat

1.1. *A feladat megfogalmazása*

Mielőtt rátérnénk a közgazdasági alkalmazások bemutatására röviden foglaljuk össze a féligvégtelen *LP* feladatokkal kapcsolatos legfontosabb tudnivalókat [5], [6], [3].[1]

A féligvégtelen lineáris programozási feladatot a következőképpen definiáljuk: Legyen Γ egy tetszőleges indexhalmaz, a_γ $(\gamma \in \Gamma)$ R^n-beli vektorok és β_γ $(\gamma \in \Gamma)$ valós számok egy összessége. Tekintsük a következő feltételes szélsőérték feladatot:

$$(P)\qquad \begin{gathered} cx \to \sup \\ a_\gamma x \leq \beta_\gamma, \quad (\gamma \in \Gamma), \end{gathered}$$

ahol c az ún. célfüggvényvektor. Hangsúlyozni kell, hogy a véges *LP* feladatokkal szemben a fenti feladatban a szupremum általában nem éretik el és így nem írható a szupremum helyébe maximum. A féligvégtelen lineáris programozás elnevezést az indokolja, hogy míg a Γ halmaz számossága esetleg végtelen, addig a változók száma véges. Ha az a_γ vektorok az R^n elemei, akkor az x vektor is n elemű, és így a feladat csak „félig" végtelen. A duál feladatot a következőképpen fogalmazhatjuk meg:

$$(D)\qquad \begin{gathered} \delta \to \min \\ (c, \delta) \in \overline{\operatorname{con}} \{(a_\gamma, \beta_\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\}. \end{gathered}$$

[1] Ebben a pontban nagyban támaszkodom *Dancs István* jegyzeteire. A tételek bizonyítása tőle származik.

Érdemes megfigyelni, hogy a (P) feladattal szemben a (D) feladatban a szélsőérték fel is vevődik, vagyis nem infimumot, hanem minimumot kell keresni. A (D) feladatnak látszólag semmi köze sincs a véges LP megszokott duál párjához. Tételezzük fel azonban egy pillanatra, hogy a $C = \text{con}\{(a_\gamma, \beta_\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\}$ kúp zárt, másképpen hogy a duál feladatban a lezárás jel elhagyható. Ekkor a kúp burok definíciója alapján a (c, δ) előállítható $\sum_{j=1}^{s} (a_{\gamma_j}, \beta_{\gamma_j}) u_j$ alakban, vagyis $c = \sum_{j=1}^{s} a_{\gamma_j} u_j$ és $\delta = \sum_{j=1}^{s} \beta_{\gamma_j} u_j$, és a (D) feladat az alábbi a közönséges lineáris programozásra már emlékeztető alakba írható:

$$\sum_j \beta_{\gamma_j} u_j \to \min$$

$$u_j \geq 0$$

$$\sum_j a_{\gamma_j} u_j = c.$$

A (P), illetve a (D) feladatot megoldhatónak mondjuk, ha a megfelelő feladatnak létezik véges optimuma. A (P) illetve a (D) feladatot lehetségesnek mondjuk, ha a megfelelő feladatnak létezik lehetséges megoldása. (Az x vektor lehetséges megoldása a (P)-nek, ha $a_\gamma x \leq \beta_\gamma$ minden $\gamma \in \Gamma$ esetén. A duál feladat lehetséges, ha létezik olyan véges δ szám, amelyre a (c, δ) eleme a $\overline{\text{con}}\{(a_\gamma, \beta_\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\}$ kúpnak.)

Dualitási tétel

(*i*) Ha mindkét feladat lehetséges, akkor mindkettő megoldható és az értékük megegyezik.

(*ii*) Ha az egyik feladat megoldható, akkor a másik lehetséges.

A következő pontban a teljesség kedvéért részletesen bemutatjuk a tétel bizonyítását. Amennyiben az olvasót csak a közgazdasági alkalmazások érdeklik, az alábbi pontot átugorhatja.

1.2. *A dualitási tétel bizonyítása*

A dualitási tétel bizonyítása a legegyszerűbben a végtelen egyenlőtlenségi rendszerekre vonatkozó úgynevezett megoldhatósági és következmény tételek segítségével végezhető el, amelyeket bizonyításukkal együtt a dualitási tétel bizonyítását megelőzően ismertetünk.

1. *lemma*: Ha az $S \neq \emptyset$ tetszőleges halmaz, $K \neq \emptyset$ egy kompakt konvex halmaz az R^n térben, akkor az

(1) $$Sx \leq 0, \quad Kx > 0$$

egyenlőtlenség rendszernek pontosan akkor létezik megoldása, ha a K halmaz és az $\overline{\text{con}}\,(S)$ zárt kúp metszete üres.

Bizonyítás: Az (1) rendszer megoldhatóságához a $K \cap \overline{\mathrm{con}}\,(S) = \emptyset$ reláció teljesülése nyilván szükséges, hiszen az $Sx \leq 0$ egyenlőtlenség miatt $\overline{\mathrm{con}}\,(S)x \leq 0$. A feltétel azonban elégséges is, mert fennállása esetén a szeparációs tétel alapján van olyan $x \in R^n$ és $\beta \in R$, hogy $\overline{\mathrm{con}}\,(S)x < \beta$ és $Kx > \beta$. Mivel $0 \in \overline{\mathrm{con}}\,(S)$ azért $\beta \geq 0$, és mivel $\lambda\,\overline{\mathrm{con}}\,(S) \subseteq \overline{\mathrm{con}}\,(S)$ minden pozitív λ-ra, ezért $\mathrm{con}\,(S)x < \dfrac{\beta}{\lambda}$, hacsak $\lambda > 0$, amiből $\mathrm{con}\,(S)x \leq 0$ és $Kx > 0$. Tehát x megoldása az (1) rendszernek.

Következmény (megoldhatósági tétel): Legyenek $a_\gamma \in R^n$, $\beta_\gamma \in R$ $(\gamma \in \Gamma)$. Az

$$a_\gamma x \leq \beta_\gamma \quad (\gamma \in \Gamma)$$

egyenlőtlenség rendszer pontosan akkor megoldható, ha a $\overline{\mathrm{con}}\,\{(a_\gamma, \beta_\gamma) | \gamma \in \Gamma\}$ kúp nem tartalmazza a $(0, -1)$ vektort.

Bizonyítás: Az $a_\gamma x \leq \beta_\gamma$ $(\gamma \in \Gamma)$ rendszer pontosan akkor megoldható, ha megoldható az $(a_\gamma, \beta_\gamma)(x, x_{n+1}) \leq 0$, $-x_{n+1} = (0, -1)(x, x_{n+1}) > 0$ egyenlőtlenség, aminek az előző lemma alapján szükséges és elegendő feltétele a $(0, -1) \notin \overline{\mathrm{con}}\{(a_\gamma, \beta_\gamma) | \gamma \in \Gamma\}$ reláció teljesülése.

2. *lemma*: Ha az S tetszőleges nem-üres halmaz, az s_0 pedig egy pont az R^n térben, továbbá az

$$Sx \leq 0, \quad s_0 x > 0 \tag{2}$$

rendszer megoldható, akkor a

$$bx \leq 0 \tag{3}$$

egyenlőtlenség pontosan akkor következménye a (2)-nek, ha

$$b \in \overline{\mathrm{con}}\,(S) - \bigcup_{\mu \geq 0} \mu s_0.$$

Bizonyítás: A (2)-nek pontosan akkor következménye a (3), ha nincs megoldása az $Sx \leq 0$, $s_0 x > 0$, $bx > 0$ rendszernek. Definiáljuk a $K = \{x | x = \lambda b + (1 - \lambda)s_0;\ 0 \leq \lambda \leq 1\}$ szakaszt. Azonnal látható, hogy az utóbbi három egyenlőtlenség $Sx \leq 0$, $Kx > 0$ alakba írható. Mivel a K szakasz kompakt konvex halmaz, felhasználhatjuk az előző lemmát, amely alapján az $Sx \leq 0$ $Kx > 0$ rendszer pontosan akkor nem megoldható, ha a $K \cap \overline{\mathrm{con}}\,(S)$ metszet nem üres, másképpen ha létezik $0 \leq \lambda \leq 1$, amelyre $\lambda b + (1 - \lambda)s_0 \in \overline{\mathrm{con}}\,(S)$. A b vektort kifejezve, a keresett $b \in \overline{\mathrm{con}}\,(S) - \dfrac{1-\lambda}{\lambda} s_0 \subset \overline{\mathrm{con}}\,(S) - \bigcup_{\mu \geq 0} \mu s_0$ tartalmazáshoz jutunk. (A λ együttható nem lehet nulla, mivel ellenkező esetben $s_0 \in \overline{\mathrm{con}}(S)$, ami az előző lemma alapján ellentmond a kiinduló feltételeknek.

2. *következmény* (következmény tétel): Ha az $a_\gamma \in R^n$, $\beta_\gamma \in R$ $(\gamma \in \Gamma)$ esetén az

$$a_\gamma x \leq \beta_\gamma \quad (\gamma \in \Gamma) \tag{4}$$

egyenlőtlenség rendszernek van megoldása, akkor a

$$bx \leq \beta$$

egyenlőtlenség pontosan akkor következménye a (4)-nek, ha van olyan δ szám, amelyre

$$\delta \leq \beta \text{ és } (b, \delta) \in \overline{\text{con}}\,\{(a_\gamma, \beta_\gamma) | \gamma \in \Gamma\}. \tag{5}$$

Bizonyítás: Az $a_\gamma x \leq \beta_\gamma$ $(\gamma \in \Gamma)$ rendszernek pontosan akkor következménye az $bx \leq \beta$ egyenlőtlenség, ha az

$$(a_\gamma, \beta_\gamma)\,(x, x_{n+1}) \leq 0, \quad -x_{n+1} = (0, -1)\,(x, x_{n+1}) > 0$$

egyenlőtlenségrendszernek következménye a

$$(b, \beta)\,(x, x_{n+1}) \leq 0$$

egyenlőtlenség. Alkalmazva a második lemmát az $S = \{(a_\gamma, \beta_\gamma) | \gamma \in \Gamma\}$ és $s_0 = (0, -1)$ választással, a

$$(b, \beta) \in \overline{\text{con}}\,\{(a_\gamma, \beta_\gamma) | \gamma \in \Gamma\} + \bigcup_{\mu \geq 0} \mu\,(0, 1)$$

tartalmazáshoz jutunk, amiből alkalmas $\mu \geq 0$ szám esetén a keresett $(b, \delta) = (b, \beta - \mu) \in \overline{\text{con}}\,\{(a_\gamma, \beta_\gamma) | \gamma \in \Gamma\}$ tartalmazás következik. Most már minden készen áll a dualitási tétel bizonyításához.

(i) Tegyük fel, hogy mindkét feladatnak van lehetséges megoldása. Definíció szerint a (D) feladat megoldhatósága alapján létezik δ szám, amelyre $(c, \delta) \in \overline{\text{con}}\,\{(a_\gamma, \beta_\gamma) | \gamma \in \Gamma\}$. Ez viszont, mivel a primál feladat is lehetséges, a következmény tétel szerint azt jelenti, hogy valamely $cx \leq \delta'$, $\delta \leq \delta'$ egyenlőtlenség következménye az $a_\gamma x \leq \beta_\gamma (\gamma \in \Gamma)$ végtelen egyenlőtlenségi rendszernek. Másképpen valahányszor x kielégíti az $a_\gamma x \leq \beta_\gamma (\gamma \in \Gamma)$ rendszert mindannyiszor $cx \leq \delta'$, vagyis a (P) feladat célfüggvénye korlátos, és így létezik szupremuma, amit δ_0-val jelölünk. Meg kell mutatni, hogy a (D) feladat minimuma éppen δ_0. Mivel a szupremum definíciója alapján a $cx \leq \delta_0$ egyenlőtlenség következménye, viszont minden $\varepsilon > 0$ szám esetén a $cx \leq \delta_0 - \varepsilon$ már nem következménye a primál feltételi egyenlőtlenségi rendszernek, ezért ismételten a következmény-tétel alapján a legkisebb δ szám, amelyre $(c, \delta) \in \overline{\text{con}}\,\{(a_\gamma, \beta_\gamma) | \gamma \in \Gamma\}$, éppen δ_0.

(ii) Tegyük fel, hogy a primál feladatnak létezik optimális megoldása δ_0. Ez a bizonyítás első részéhez hasonlóan azt jelenti, hogy a $cx \leq \delta_0$ egyenlőtlenség következménye az $a_\gamma x \leq \beta_\gamma (\gamma \in \Gamma)$ rendszernek, ami a következmény-tétel alapján éppen a duál feladat lehetségességét jelenti.

Tegyük most fel, hogy a duál feladat megoldható, de a primál feladat nem lehetséges. A megoldhatósági tétel alapján $(0, -1) \in \overline{\text{con}}\,\{(a_\gamma, \beta_\gamma) | \gamma \in \Gamma\}$. Ebből a kúp tulajdonságot felhasználva minden pozitív λ esetén $(c, \delta - \lambda) \in \overline{\text{con}}\,\{(a_\gamma, \beta_\gamma) | \gamma \in \Gamma\}$, ami ellentmond a (D) feladat megoldhatóságának.

Megjegyzés: A tétel bizonyítása a megelőző két lemma elemi és egyszerű következménye. A lemmák bizonyításából viszont látható, hogy valójában mindkettő a szeparációs tétel direkt folyománya. Másképpen: a végtelen *LP* dualitási tétel tulajdonképpen a szeparációs tétel egy alkalmas – és esetenként igen „kézrejövő" – alakja. Egy matematikai állítás értékét elsősorban használhatósága határozza meg. Megítélésem szerint a fenti dualitási tétel számos esetben használhatóbb megfogalmazása a „dualitási–hatékonysági" elvnek, mint az eredeti „ősforrás", az elválasztási tételek. A következő három pontban a dualitási tétel néhány lehetséges alkalmazását mutatjuk be.

2. A gazdasági növekedés Neumann—Gale-modellje

Jelölje $K \subset R_+^{2n}$ a lehetséges input-output párok halmazát. A K halmazról a következő szokásos feltételeket tesszük:

Feltevések

F1. K zárt konvex kúp.
F2. Ha az x input vektor nulla, akkor az y output vektor is nulla.
F3. Minden jószág termelhető, vagyis létezik $(x, y) \in K$, amelyre $y > 0$.

Ha A és B egy Neumann-modell input és output mátrixai, akkor $K = \{(x, y) | x = Au, y = Bu, u \geq 0\}$. Ebben az esetben a K poliedrikus kúp, és így zárt. Az F2 és F3 feltételek a Neumann-modellek irodalmában rendszeresen használt Kemény–Morgenstern–Thompson feltételekkel egyeznek meg.

A Neumann—Gale-modell egyenleteit a Neumann-modell egyenleteinek analógiájára a következőképpen definiáljuk:

$$(NN) \qquad \alpha, \beta > 0; \; p, x^*, y^* \geq 0$$

$$(P) \qquad \alpha x^* \leq y^*$$

$$(PKF) \qquad \alpha p x^* = p y^*$$

$$(D) \qquad \beta p x \geq p y \quad (\forall (x, y) \in K)$$

$$(DKF) \qquad \beta p x^* = p y^*$$

$$(PD) \qquad p y^* > 0.$$

Az általánosabb Neumann–Gale-, és az eredeti Neumann-modell közti legfontosabb különbség, hogy az általános esetben az (NN)–(PD) rendszer nem feltétlenül oldható meg. A feltételek között a „fekete bárány" a (P)—(PKF) primál és a (D)–(DKF) duál oldalakat összekapcsoló (PD) egyenlőtlenség. Az irodalomban található ellenpéldák közül a legismertebb az 1972-ben Hülsmann és Steinmetz által publikált. További ellenpélda található például Makarov és Rubinov könyvében.

Próbáljuk meg a véges esetben „működő" J. Łós-tól származó bizonyítást az általános esetre „ráhúzni". A Neumann-modell bizonyítása során követett módon, az F1–F3 feltételek segítségével, egyszerűen belátható, hogy az $\alpha_c = \max \{\alpha | \alpha x \leq y, \; x \geq 0, \; (x, y) \in K\}$ maximális növekedési ütem létezik, véges és pozitív. Az $\alpha_c x \leq y$ egyenlőtlenséget kielégítő (x, y) párok között létezik olyan $(\bar{x}, \bar{y})$, amely esetén az output vektornak a legtöbb pozitív komponense van. (A K kúp és ezért ha az $\alpha_c x_1 \leq y_1$ és $\alpha_c x_2 \leq y_2$ egyenlőtlenségek teljesülnek, akkor fennáll az $\alpha_c(x_1 + x_2) \leq y_1 + y_2$ mérlegegyenlőtlenség is.) Tekintsük a

$$(*) \qquad \begin{aligned} &p \geq 0 \\ &p(y - \alpha_c x) \leq 0 \quad (\forall (x, y) \in K) \\ &p\bar{y} \to \sup \end{aligned}$$

féligvégtelen LP feladatot. A duál feladat $(\bar{y}, \delta) \in C$, ahol

$$\begin{aligned} C &= \overline{\text{con}}\,[(y - \alpha_c x, 0) \mid (x, y) \in K\} \cup \{(-e_i, 0) \mid i = 1, \ldots n\}] = \\ &= \overline{\{(z, 0) \mid z = y - \alpha_c x - u,\ u \geq 0,\ (x, y) \in K\}} = \bar{Z} \times \{0\}. \end{aligned}$$

A $p = 0$ a primál feladat lehetséges megoldása. Amennyiben a duál feladat is lehetséges, akkor a minimuma nyilván nulla, tehát a dualitási tétel alapján a $p\bar{y}$ szuprémuma is nulla és így a (PD) feltétel nem teljesülhet. Ha a duál feladat *nem lehetséges*, a primál feladat célfüggvénye nem korlátos, és így pozitív értéket is felvesz, tehát az $(NN)-(PD)$ rendszer megoldható.

Milyen feltételek mellett nincs lehetséges megoldása a duál feladatnak, vagyis milyen feltételek mellett nincs az $\bar{y}$ vektor a $\bar{Z}$ halmazban?

Feltevés: A $Z = \{z \mid y - \alpha_c x - u, (x, y) \in K, u \geq 0\}$ kúp zárt.[2]

Ekkor a duál feladat nem lehetséges. Ha ugyanis a szemipozitív $\bar{y}$ vektor eleme a $\bar{Z} = Z$ halmaznak, akkor $\bar{y} = y - \alpha_c x - u$, amiből egyrészt $y \geq \alpha_c x$ másrészt az $\bar{y}$ definíciója alapján valahányszor y_i pozitív, az egyenlőtlenség szigorú. (Az $\bar{y}$ szemipozitivitása miatt az $(x, y) = (0, 0)$ eset lehetetlen.) Ez azonban ellentmond az α_c feltételezett maximalitásának. Ha azonban a Z nem zárt, akkor az $\bar{y} \in Z$ eset az imént tárgyalthoz hasonlóan kizárható, de semmilyen garancia sincs arra, hogy az $\bar{y}$ nem határpontja a Z halmaznak, és csak további feltételek segítségével biztosítható, hogy a duál feladat ne legyen megoldható, és így az eredeti Gale-modell megoldható legyen [20].

Megjegyzés: Ha eltekintünk a (PD) feltételtől az egyensúly létezését egyszerűen beláthatjuk. Tekintsük a $(*)$ szemivégtelen lineáris programozási feladatot, de $\bar{y}$-nak ne a maximális pozitív komponenssel rendelkező kibocsájtási vektort válasszuk, hanem $\bar{y}$ legyen egy tetszőleges, de határozottan pozitív vektor. A duál feladat pontosan akkor lehetséges, ha $\bar{y} \in \bar{Z}$. Mivel az $\bar{y}$ pozitív, a Z is tartalmaz szigorúan pozitív elemet, — ami ellentmond az α_c maximalitásának. Tehát a duál feladat nem megoldható, és így a $(*)$ optimális megoldása végtelen. Következésképpen a $(*)$-nak létezik szemipozitív lehetséges megoldása, amely az α_c definíciója alapján az $\alpha = \beta = \alpha_c$ választás mellett megoldása a $(P)-$ $-(DKF)$ egyenlőtlenségnek.

[2] A Neumann-modell esetén Z a $D = \{(B - \alpha_c A)\, u \mid u \geq 0\}$ poliedrikus kúp és az ugyancsak poliedrikus R^n_- kúpok összege, és így zárt halmaz.

3. A marxi közgazdaságtan Morishima-féle alaptétele

A Neumann-típusú modellek egzisztenciatételei általában csak a pozitív növekedési tényező és a pozitív kamattényező létezését garantálják, de megengedik, hogy e két tényező valamelyike esetleg egynél kisebb legyen. Egyszerűbben fogalmazva az egzisztenciatételek csak az arányos növekedést biztosító megoldások létezésével foglalkoznak, de nem vizsgálják, hogy az egyensúlyban az újratermelés bővített-e vagy sem. A M. Morishima által belátott és általa a „marxi közgazdaságtan alaptételének" nevezett tétel szerint alkalmasan választott Neumann-modellekben a gazdaság növekedési üteme pontosan akkor nagyobb egynél, ha az egységnyi munkaerő újratermeléséhez minimálisan szükséges munka kevesebb, mint az általa kifejtett munka mennyisége, és ez utóbbi viszont szükséges és elegendő feltétele a profitráta pozitivitásának. [15], [16] Tudomásom szerint Morishima eredménye az egyetlen olyan tétel, amely Neumann-modell esetén a bővített újratermelés létezésének kérdését érdemben tárgyalja. Morishima eredményeihez kapcsolódva J. E. Roemer [18], [19] vizsgálta a marxi közgazdaságtan alaptételét konvex termelési halmazokkal rendelkező gazdaságokra. Megmutatta, hogy az általa definiált, és az Arrow—Debreu-modell szemléletéhez közelálló, gazdaságban a pozitív profit létezésének szükséges és elegendő feltétele a munkaerő kizsákmányolhatósága. Vegyük észre, hogy bár Morishima és Roemer eredménye igen hasonló, de mégis eltérő problémát feszeget. Amíg Morishima *pozitív profitrátát* tud garantálni, addig Roemer csak *pozitív profit* létezéséről beszél. Nyilván ha a profitráta pozitív a profittömeg is pozitív lesz, de abból, hogy a profit pozitív még nem következik, hogy a profitráta is pozitív lesz. Roemer dolgozatának részletes bemutatása túlságosan nagy kitérőt jelentene, és így eltekintünk tőle. Az érdeklődő olvasó forduljon az irodalomjegyzékben felsorolt művekhez. Annyit azonban érdemes megjegyezni, hogy a pozitív profitráta és a pozitív profit létezése közti különbség gyökere a két szerző eltérő egyensúly fogalmában van. Véleményem szerint Marx eredeti gondolatmenetéhez a Morishima-féle megközelítés áll közelebb. Marx szerint a gazdaság egyensúlyának egyik feltétele, hogy minden szektorban azonos legyen a profitráta. Véleménye szerint, ha az egységnyi tőke hozadéka a különböző szektorokban eltérő, ez a kiegyenlítődés irányába ható tőkemozgást implikál, így a pozitív profitráta létezése a gazdaság működőképességének feltétele.

Ebben a pontban megmutatjuk, hogy a Morishima által belátott tétel egyszerűen átvihető konvex termelési halmazok esetére is. A bizonyítás magja ismét a féligvégtelen lineáris programozási feladat dualitási tétele. A figyelmes olvasó könnyen észreveheti, hogy az érvelés számos ponton az eredeti, Morishima-féle, indoklás által kijelölt úton halad, bizonyítva, hogy megfelelő technikai felkészültség esetén, a véges *LP* feladatok segítségével belátott állítások lényegesen szélesebb modellkörben is hatékonyan működnek.

3.1. *Alapfogalmak és a tétel kimondása*

Az előző fejezetben tárgyalt Gale-modellhez hasonlóan tegyük fel, hogy a gazdaságban n jószágot termelnek, amelyeket egyúttal inputként is felhasználnak. Továbbá a gazdaság működése során egyetlen külső erőforrást használ fel a munkát. Ha a nemnegatív x jelöli a közönséges jószágokból alkotott input vektort, y pedig az output vektort, és ha az $x \mapsto y$ transzformáció munkaigénye

δ, akkor a termelési folyamatot az $(x, y, \delta) \in R_+^{2n+1}$ hármassal reprezentáljuk. A gazdaság által megvalósítható termelési eljárások összességét jelölje P. A P termelési halmazról a következő feltételeket tesszük:

Feltevések

F1. A $P \subset R_+^{2n+1}$ halmaz konvex és tartalmazza az origót. (nem növekvő hozadék, és a tétlenség lehetségessége)

F2. Tetszőleges $z \in R_+^n$ vektorhoz létezik olyan $(x, y, \delta) \in P$ termelési eljárás, amelyre $y \geq x + z$. (produktivitás)

F3. Létezik olyan $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\delta}) \in P$, amelyben a munkaráfordítás pozitív. (Létezik nem automatizált termelési eljárás.)

Ahhoz, hogy belássuk az egyensúlyi növekedési ütem és a garantált profitráta pozitivitásának ekvivalenciáját szükségünk lesz az F3 feltételt implikáló alábbi szigorúbb megkötésre:

F4. Bármely $(x, y, \delta) \in P$ és $g > 0$ szám esetén, ha $(1 + g)x \leq y$, és y szemipozitív, akkor a δ munkaráfordítás pozitív. (Munka nélkül nincs növekedés.)

Morishima és Roemer definícióját követve egy b vektor által reprezentált jószágegyüttes értékét az újratermeléséhez minimálisan szükséges munkával határozzuk meg, tehát

$$\text{(1)} \qquad \text{l.v.}(b) \triangleq \inf \{\delta \mid y \geq x + b, (x, y, \delta) \in P\}.$$

Legyen c az egységnyi munkaerő újratermeléséhez szükséges fogyasztói kosár. Mivel $\bar{\delta}$ egységnyi munkaerő újratermeléséhez $\bar{\delta}c$ jószág szükséges, ezért a munkaerő értékének definíciója alapján a $\bar{\delta}$ munkaerő értéke $\text{l.v.}(\bar{\delta}c) = \inf \{\delta \mid y \geq x + \bar{\delta}c, (x, y, \delta) \in P\}$. (A munkaerő értéke az újratermeléséhez szükséges javak értékével azonos.)

Definíció: Azt mondjuk, hogy az $(x, y, \delta) \in P$ pontban a munkaerő kizsákmányolható, ha $\delta > \text{l.v.}(\delta c)$, vagyis ha a kifejtett munka nagyobb, mint a munkaerő értéke.

Megjegyzések:

(i) Ha a P halmaz nem kúp, előfordulhat, hogy bizonyos δ ráfordítás mellett a munkaerő kizsákmányolható, de más δ munkaráfordítások mellett nem.

(ii) Az általunk tett (F1) – (F4) feltételek teljesülése mellett nem garantálható, hogy az (1) egyenletben szereplő infimum el is éretik, vagyis, hogy a munkaerő értéke, mint a legkisebb munkaráfordítás definiálható. (ROEMER dolgozatában [18, 2.1. Proposition] azonban az olvasó egy megfelelő enyhe, ámbár az általunk tett feltételeknél erősebb feltétellel találkozhat, amely már garantálja, hogy az (1)-ben az infinum helyébe minimumot írjunk.)

Térjünk rá a garantált profitráta definíciójára. A p termelési ár vektort, és a π^w garantált profitrátát az alábbi szélsőérték feladat segítségével adjuk meg:

$$\text{(2)} \qquad \pi^w = \min \{\pi \mid \exists p \geq 0, \text{ hogy } \forall (x, y, \delta) \in P \text{ esetén } (1 + \pi)p(x + \delta c) \geq py\}.$$

Az F2 produktivitási feltétel szerint létezik olyan $(x, y, \delta) \in P$ termelési eljárás, amelyben az y output vektor pozitív. Következésképpen (2)-ben minden π

lehetséges megoldás nagyobb, mint -1. Egyszerű kompaktsági megfontolásokkal belátható, hogy ha a (2)-nek van lehetséges megoldása, úgy egyúttal van optimális megoldása is. Ha (2)-nek nincs lehetséges megoldása, akkor definíció szerint π^w legyen plusz végtelen. A π^w közgazdasági tartalma világos. A π^w az összes számbajöhető profitráták közül a legkisebb, és így a π^w pozitivitása implikálja (garantálja) a gazdaságban uralkodó tényleges profitráta pozitivitását. Általában a valóságos profitrátáról nem tudunk semmit, csak annyit, hogy nagyobb mint a garantált.

Végezetül térjünk rá a gazdaság növekedési képességét jellemző g_c maximális növekedési ütem meghatározására.

(3) $$g_c \triangleq \sup \{g \mid \exists (x, y, \delta) \in P, \text{ amelyre } y \geq (1+g)(x+\delta c),\ x+\delta c \geq 0\}.$$

Ismételten hangsúlyozni kell, hogy a (3) feladatban sem a g_c végessége, sem az, hogy ténylegesen eléretik nem garantálható, — még akkor sem, ha a P halmaz zárt. (A P-ről nem tettük fel, hogy zárt halmaz!) Ha a P *zárt konvex kúp*, amely teljesíti az F4 feltételt, továbbá ha a c szemipozitív, akkor, miként az egyszerűen belátható, a $\tilde{P} = \{(z, y) \mid z = x + \delta c, (x, y, \delta) \in P\}$ kúp is zárt halmaz, továbbá ha a z kibővített input vektor nulla, akkor az y output is nulla lesz. Ebben az esetben a $\tilde{P}$ kielégíti a Gale-tétel feltételeit és ez alapján a maximális g_c létezik, és egyúttal véges is [8], [17].

Az imént definiált fogalmak segítségével a marxi közgazdaságtan alaptételét az alábbi módon általánosítjuk:

TÉTEL: Az F1—F3 feltételek teljesülésekor a következő két állítás ekvivalens:

(i) A π^w garantált profitráta pozitív (esetleg plusz végtelen).

(ii) Létezik olyan $(x, y, \delta) \in P$ termelési eljárás, amelyben a munkaerőt kizsákmányolják, vagyis amely esetén $\delta >$ l.v.(δc).

Ha az F3 mellett az F4 teljesülését is megköveteljük, akkor az alábbi (iii) ekvivalens lesz a fenti (i), (ii) állításokkal.

(iii) A g_c maximális növekedési üteme pozitív (esetleg plusz végtelen).

3.2. *A tétel bizonyítása*

A tétel bizonyítása során többször hivatkozni fogunk az alábbi féligvégtelen LP feladatra:

(4) $$\begin{gathered} p \geq 0 \\ py \leq px + \delta, \quad (\forall (x, y, \delta) \in P) \\ pc \to \sup. \end{gathered}$$

A (4) duálisa a következő:

(5) $$\begin{gathered} (c, \delta) \in C \\ \delta \to \min, \end{gathered}$$

ahol

$$\begin{aligned} C &= \overline{\text{con}}\left(\{(y-x, \delta) \mid (x, y, \delta) \in P\} \cup \{(-e_i, 0) \mid i = 1, 2, \ldots n\}\right) = \\ &= \overline{\text{con}}\ \{(z, \delta) \mid z = y - x - u, (x, y, \delta) \in P, u \geq 0\} = \\ &= \overline{\text{con}}\ \{(z, \delta) \mid y \geq x + z, (x, y, \delta) \in P\}. \end{aligned}$$

A marxi közgazdaságtan alaptétele a következő lemma egyszerű következménye. A lemma a (4)–(5) *LP* feladat tulajdonságait írja le.

Lemma: Az F1–F3 feltételek teljesülése esetén a (4)–(5) féligvégtelen *LP* feladatnak létezik optimális megoldása, és az optimális megoldás a (4)-ben felvétetik. Ha a (4)–(5) közös optimális megoldása kisebb mint egy, akkor létezik olyan $(x^*, y^*, \delta^*) \in P$, amelyre $\delta^* > \text{l.v.}(\delta^* c)$.

A lemma bizonyítása: Mivel az F2 miatt az (5)-nek létezik lehetséges megoldása, és a $p = 0$ kielégíti a (4) feltételi rendszerét, ezért a dualitási tétel alapján a (4)–(5) pár megoldható. Megmutatjuk, hogy a (4)-ben az optimális célfüggvényérték eléretik. Ennek belátásához elegendő bebizonyítani, hogy a primál feltételi halmaz $X = \{p \geq 0 \mid py \leq px + \delta, (x, y, \delta) \in P\}$ kompakt, mivel akkor a folytonos cx célfüggvény felveszi a maximumát rajta. Mivel az X nyilván zárt, elegendő belátni, hogy az X korlátos. Mivel azonban az F2 alapján létezik olyan $(x, y, \delta) \in P$, amelyre az $y - x$ különbség pozitív, ezért a nemnegatív vektorokból álló X halmaz szükségszerűen korlátos kell hogy legyen.

Tegyük fel most, hogy az optimális célfüggvényérték δ_0 kisebb mint egy. Először megmutatjuk, hogy a $\{(c, \alpha) \mid \alpha \in R\}$ egyenes belemetsz a C kúp belsejébe. Ha ez nem lenne így, a (c, R) és C konvex halmazokat el lehetne szeparálni egy hipersíkkal, vagyis létezne egy olyan $(q, \tau) \in R^{n+1}$ vektor, amelyre

$$(*) \qquad qc + \tau\alpha \geq q(y - x - u) + \tau\delta,$$

valahányszor $u \geq 0$, $\alpha \in R$ és $(x, y, \delta) \in P$. Mivel α tetszőleges, ezért a τ szükségszerűen nulla, és így a $(*)$ az alábbi módon egyszerűsödik:

$$qc \geq q(y - x - u),$$

valahányszor $(x, y, \delta) \in P$ és $u \geq 0$. Ez azonban lehetetlen, hiszen az $\{z \mid z = y - x - u, (x, y, \delta) \in P, u \geq 0\}$ halmaz az F2 miatt tartalmazza (és így megegyezik vele) az $R^n_+ - R^n_+ = R^n$ teret.

Az imént kapott ellentmondás alapján létezik tehát olyan α_0 szám, amelyre $(c, \alpha_0) \in \text{int}\,(C)$. Mivel a C konvex halmaz, minden $0 < \lambda < 1$ szám esetén a $(c, \delta_\lambda) = \lambda(c, \alpha_0) + (1 - \lambda)(c, \delta_0)$ is a C belsejébe esik. Mivel a δ_0 a kiinduló feltételek szerint kisebb mint egy, ezért alkalmas λ számra a δ_λ is egynél kisebb lesz. Mivel

$$\text{int}\,(C) \subseteq \bigcup_{\mu>0} \mu\{(z, \delta) \mid z = x - y - u, (x, y, \delta) \in P, u \geq 0\},$$

ezért létezik olyan $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\delta}) \in P$ termelési eljárás és $\mu > 0$ szám, amelyekre

$$(6) \qquad \mu\tilde{y} \geq \mu\tilde{x} + c \text{ és } \mu\tilde{\delta} = \delta_\lambda < 1.$$

Legyen $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\delta}) \in P$ az F3 feltételben szereplő termelési folyamat. Tegyük fel először, hogy $\mu\hat{\delta} \leq 1$. Az F1 feltételből következik, hogy az $(x, y, \delta) \triangleq (1 - \mu\hat{\delta})0 + \mu\hat{\delta}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\delta})$ is eleme a (P)-nek, és a (6) alapján $y \geq x + \hat{\delta}c$, és $\delta < \hat{\delta}$. Tehát az $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{\delta})$ pontban a munkaerő kizsákmányolható. Végezetül induljunk ki abból az esetből, amikor $\mu\hat{\delta}$ nagyobb mint egy. Ekkor nyilván a $\delta^* \triangleq 1/\mu$ kisebb mint $\hat{\delta}$. Ismételten felhasználva az F1 feltételt, léteznek olyan $x^*, y^* \in R^n_+$

vektorok, amelyekre $(x^*, y^*, \delta^*) \in P$. A δ^* definíciója alapján $\tilde{y} \geq \tilde{x} + \delta^* c$, és $\delta^* > \tilde{\delta}$. Ez utóbbiból azonban a $\delta^* > \tilde{\delta} \geq$ l.v.$(\delta^* c)$ egyenlőtlenséghez jutunk. Tehát az (x^*, y^*, δ^*) pontban a munkaerő kizsákmányolható, és ez éppen az, amit be akartunk látni.

Itt az idő, hogy rátérjünk a tétel bizonyítására.

A tétel bizonyítása: A tétel bizonyítása négy egyszerű észrevételből tevődik össze: (ii) $\Rightarrow$ (i), (i) $\Rightarrow$ (ii), (iii) $\Rightarrow$ (ii) és (i) $\Rightarrow$ (iii).

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Tegyük fel, hogy $\pi^w \leq 0$. Definíció szerint létezik olyan szemipozitív p vektor, amelyre

$$p(x + \delta c) \geq py, \tag{7}$$

valahányszor $(x, y, \delta) \in P$. A (7)-ben a pc szorzat pozitív, ellenkező esetben (7) a $px \geq py$ alakúvá egyszerűsödik, ami azonban lehetetlen, hiszen az F2 alapján létezik olyan $(x, y, \delta) \in P$, amelyre $y > x$. Be fogjuk bizonyítani, hogy minden $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\delta}) \in P$ termelési eljárás esetén $\bar{\delta} \leq$ l.v.$(\bar{\delta} c)$.

Legyen $(x, y, \delta) \in P$ az (1) egy lehetséges megoldása $(b = \bar{\delta} c)$. Az $y \geq x + \delta c$ egyenlőtlenségből $py \geq px + \delta pc$. Összevetve ezt a (7)-tel a $(pc)\bar{\delta} \geq (pc)\delta$ relációhoz jutunk, amiből — kihasználva, hogy a pc pozitív — a kívánt $\delta \geq \bar{\delta}$ egyenlőtlenség adódik.

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Tegyük fel, hogy a π^w pozitív, és tekintsük a (4) LP feladatot. A lemma alapján elegendő belátni, hogy a $p_0 c = \delta_0$ optimális megoldás kisebb egynél. Induljunk ki az ellenkező esetből, és tegyük fel, hogy a $\delta_0 = p_0 c$ nagyobb vagy egyenlő mint egy. A p vektor nyilván nem lehet nulla, és így szemipozitív. A (4) alapján

$$p_0 y \leq p_0 x + \delta \leq p_0 x + (p_0 c)\delta = p_0(x + \delta c),$$

valahányszor $(x, y, \delta) \in P$. Ebből azonban következik, hogy a

$$\pi^w = \min\{\pi \mid (1 + \pi)p(x + \delta c) \geq py, \forall (x, y, \delta) \in P, p \geq 0\}$$

érték nem lehet pozitív. Ez azonban ellentmond a kiinduló feltételeknek.

(iii) $\Rightarrow$ (ii)

Tegyük fel, hogy a g_c pozitív. Ekkor léteznek olyan pozitív g és $(x, y, \delta) \in P$ elemek, amelyekre

$$\begin{gathered} x + \delta c > 0 \\ y \geq (1 + g)(x + \delta c). \end{gathered} \tag{8}$$

A lemma alapján elegendő belátni, hogy a (4)-es optimális megoldása $p_0 c = \delta_0$ kisebb mint egy. A (8) és a (4) egybevetéséből $p_0 x + \delta \geq p_0 y \geq (1 + g)\big(p_0 x + \delta(p_0 c)\big) = (1 + g)(p_0 x + \delta\delta_0)$, amiből egyszerű átrendezéssel a $0 \leq g(p_0 x) \leq \delta\big(1 - (1 + g)\delta_0\big)$ egyenlőtlenséget kapjuk. Mivel az $x + \delta c$ input vektor szemipozitív, és a g pozitív, az F4 alapján a δ munkaráfordítás is pozitív kell hogy legyen. Következésképpen az $\big(1 - (1 + g)\delta_0\big)$ kifejezés nemnegatív, ami csak úgy lehetséges, ha a δ_0 optimális célfüggvényérték nem nagyobb, mint $1/(1 + g)$, tehát kisebb mint egy.

(i) $\Rightarrow$ (iii)

Elegendő belátni, hogy a π^w nem nagyobb, mint a g_c. Ha a g_c végtelen, akkor nincs mit bizonyítani. Ha a g_c véges, akkor az előző rész végén található megjegyzéshez hasonlóan belátható, hogy létezik szemipozitív p vektor, amelyre $py \leq (1 + g_c)(x + \delta c)$ valahányszor $(x, y, \delta) \in P$, és így mivel π^w a minimális kamatláb $\pi^w \leq g_c$.

Az ismétlések elkerülése végett a bizonyítás pontos kidolgozását az olvasóra bízzuk.

4. A nem helyettesítési tétel

A nem helyettesítési tételt (nonsubstitution theorem) eredeti formájában — hagyományos differenciálható termelési függvényekre — SAMUELSON [11] mondta ki. A tételt később többen általánosították tetszőleges konvex halmazok esetére: ARROW [1], MIRRLEES [14], KOOPMANS [12], GEORGESCU—ROEGEN [10]. A tétel klasszikusnak mondható, több könyvben szereplő bizonyítása a szeparációs tételen alapszik és eléggé hosszadalmas (pl. NIKAIDO [17, 187—194. old.], CORNWALL [2, 133—137]). Az általános esetre vonatkozó másik — az alább bemutatásra kerülő bizonyításhoz közelálló — bizonyítást talált *Diewert* 1975-ben. Diewert bizonyítása (CORNWALL [2]) a Fenchel-féle dualitási tételre épül. Diewert gondolatmenete egyszerű és könnyen áttekinthető, de megítélésem szerint a bizonyítás alapjául szolgáló tétel miatt az eredeti bizonyításhoz hasonlóan nehezen emészthető. Más oldalról az általánosnál egyszerűbb Neumann—Leontief-modellek esetén a bizonyítás a lineáris programozás dualitási tételével röviden elintézhető (ASMANOV [22]). Az alábbi bizonyítás lényege, hogy a véges esetben követett eljárást „ráhúzzuk" a végtelen esetre is, és az LP dualitási tétel helyett a szemi-végtelen LP-re vonatkozó megfelelő dualitási tételt használjuk.

A nem helyettesíthetőségi tételben szereplő gazdaságban n közönséges jószágot termelnek egyetlen erőforrás segítségével. Az erőforrást az egyszerűség kedvéért nevezzük munkának. A gazdaság legfontosabb tulajdonsága, hogy egyetlen rendelkezésre álló eljárás sem termel ikerterméket. Az ikertermelés kizárása mellett azonban megengedjük, hogy az egyes jószágok alternatív módon is előállíthatók legyenek. A j-dik jószágot előállító termelési folyamatok összességét jelölje T_j. Mivel nincs ikertermelés a T_j halmazok száma egyenlő a jószágok számával. A termelési eljárásokat állapot (stock) szemléletben ábrázoljuk. A szokásoknak megfelelően a $t \in T_j$ vektort (x, y, δ) alakban írjuk fel, ahol $x \geq 0$ a közönséges jószágokból álló input vektor, $y \geq 0$ az output vektor és $\delta \geq 0$ a munkaráfordítás mértékét fejezi ki. A teljes gazdaság termelési lehetőségeit a $T = \sum_{j=1}^{n} T_j$ halmaz írja le, és a nemnegatív nettó termelési lehetőségek halmazát a

$$T_+ = \{(z, \delta) \mid z = y - x,\ y \geq x,\ (x, y, \delta) \in T\}$$

egyenlőséggel definiáljuk. Jelölje T_+^e a T_+ hatékony pontjainak összességét. (Definíció szerint $(z, \delta) \in T_+^e$, ha valahányszor $(u, \mu) \in T_+$ és $(u, -\mu) \geq (z, -\delta)$, akkor $(z, \delta) = (u, \mu)$.)

A nem helyettesítési tétel bizonyításához az alábbi feltételekre lesz szükségünk:

Feltevések

F1. Nincs ikertermelés: ha $(x, y, \delta) \in T_j$ egy termelési folyamat, akkor az y output vektor i-dik komponense y_i nulla, ha $i \neq j$.

F2. A munka szükséges a termeléshez, ha $(x, y, \delta) \in T_j$, és a δ munkaráfordítás nulla, akkor y is nulla.

F3. $T_+ \subset R_+^{n+1}$ konvex zárt kúp, és a T_j konvex kúp.

F4. A T technológiai halmaz produktív, vagyis létezik $(x, y, \delta) \in T$, amelyre $y > x$.

Megjegyzés: Az F3 feltétel túl erősnek tűnik. Bebizonyítható (pl. NIKAIDO [17]), hogyha a T_j halmazok mindegyike konvex zárt kúp, akkor az F2 már implikálja a T_+ halmaz zártságát. Mivel ennek bizonyításához hosszadalmas, rutinszerű és a jelen dolgozat tárgyához nem kapcsolódó megfontolások szükségesek, ezért az egyszerűség kedvéért eltekintünk tőle.

TÉTEL (nem helyettesítési tétel): Az F1–F4 feltételek teljesülése esetén léteznek olyan $(x_j, y_j, \delta_j) \in T_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ eljárások, amelyekre

$$T_+^e = \left\{(z, \delta) \geq 0 \,|\, (z, \delta) = \sum_{j=1}^{n} (y_j - x_j, \delta_j)u_j,\ u_j \geq 0\right\} =$$
$$= \operatorname{con}\{(y_j - x_j, \delta_j) \,|\, j = 1, 2, \ldots, n\} \cap R_+^{n+1}.$$

Bizonyítás: A bizonyítás alapjául az az igen egyszerű észrevétel szolgál, amely szerint a T_+ halmazban – az ikertermék hiánya, és a munka szükségessége miatt – a hatékony és a munkaráfordítást minimalizáló megoldások egybeesnek. Pontosabban fogalmazva legyen $(z_0, \delta_0) \in T_+$. A (z_0, δ_0) pár akkor és csakis akkor hatékony eleme a T_+ nettó termelési halmaznak, ha

$$\delta_0 = \min\{\delta \,|\, (z, \delta) \in T_+ \, z \geq z_0\} = \min\left\{\delta \,|\, (z_0, \delta) \in T_+ - R_+^n \times \{0\}\right\}. \tag{1}$$

Valóban, ha (z_0, δ_0) hatékony, az (1) nyilván teljesül. Induljunk ki most az ellenkező állításból, és legyen $(z, \delta) \in T_+$ olyan vektor, amelyre $(z, -\delta) \geq$ $\geq (z_0, -\delta_0)$. A minimalitási tulajdonság miatt $\delta = \delta_0$. Tegyük fel, hogy valamely j indexre $z_j > z_{0j}$. Nyilván $(z, \delta) = (z' + z_j, \delta' + \delta_j)$, ahol $z_j = y_j - x_j$ és $(x_j, y_j, \delta_j) \in T_j$ és $(z', \delta') = \sum_{i \neq j} (y_i - x_i, \delta_i)$.

Az F1 feltétel alapján a j-diket kivéve az y_j minden komponense nulla. Mivel az y_j nem nulla, az F2 alapján a δ_j pozitív. Elegendően kicsi, de még pozitív λ esetén $z'' = z' + (1 - \lambda)(y_j - x_j) \geq z' + (1 - \lambda)y_j - x_j \geq z_0$, és $(z'', \delta'') =$ $= (z'', \delta' + (1 - \lambda)\delta_j) \in T_+$, ami ellentmond az (1) egyenlőségnek. Következésképpen $z = z_0$, tehát (z_0, δ_0) valóban a T_+ hatékony eleme.

Tekintsük a

$$\begin{gathered} p \geq 0 \\ pz \leq \delta, \quad (\forall (z, \delta) \in T_+) \\ pz_0 \to \sup \end{gathered} \tag{2}$$

féligvégtelen lineáris programozási feladatot. Belátjuk, hogy (1) éppen a (2) duálisa. A (2) duálisa

$$\begin{gathered} \delta \to \min \\ (z_0, \delta) \in C, \end{gathered}$$

ahol $C = \overline{\text{con}}\left(\{(z,\delta)\,|\,(z,\delta)\in T_+\}\cup\{(-e_i,0)\,|\,i=1,2,\ldots n\}\right) = \overline{T_+ - R_+^n\times\{0\}}$.

Az utóbbi állítás bizonyításához elegendő megmutatni, hogy a lezárás jel felesleges, vagyis, hogy a $T_+ - R_+^n\times\{0\}$ kúp zárt. Tegyük fel, hogy

$$(v_k,\,\delta_k)\in T_+ - R_+^n\times\{0\},\ \lim_n\,(v_n,\,\delta_n) = (v_\infty,\,\delta_\infty).$$

Definíció szerint $v_n = z_n - u_n$, ahol $(z_n,\,\delta_n)\in T_+$ és az u_n nemnegatív. Megmutatjuk, hogy a z_n sorozat korlátos. Ha nem, akkor a $\{z_n\}$ egy alkalmas $\{z_{n_k}\}$ részsorozatára $||z_{n_k}||\to\infty$. Mivel a T_+ kúp, ezért $\dfrac{1}{||z_{n_k}||}(z_n,\,\delta_n)\in T_+$. Mivel a $\dfrac{z_{n_k}}{||z_{n_k}||}$ sorozat korlátos, így létezik torlódási pontja: $(z^*,\,\delta^*)$. Mivel $||z_{n_k}||\to\infty$, ezért a δ^* nyilván nulla. Az $\left\|\dfrac{z_{n_k}}{||z_{n_k}||}\right\| = 1$, $z_{n_k}\geq 0$ alapján a z^* szemipozitív. A T_+ F3 szerint zárt, így tartalmazza a $(z^*,\,0)$ vektort, ami azonban az F2 alapján lehetetlen. Tehát a $\{z_n\}$ korlátos, és ezért létezik konvergens részsorozata. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy már az eredeti sorozat is konvergens. Mivel a $v_n = z_n - u_n$ sorozat is konvergens, ezért az u_n sorozat is konvergál. Ismételten felhasználva a T_+ zártságát a $(v_\infty,\,\delta_\infty) = \lim_n\,(v_n,\,\delta_n) = \lim_n\,(z_n,\,\delta_n) - \lim_n\,(u_n,\,0)\in T_+ - R_+^n\times\{0\}$ tartalmazáshoz jutunk, ami éppen a $T_+ - R_+^n\times\times\{0\}$ kúp zártságát jelenti.

A nem helyettesítési tétel bizonyítása az (1)–(2) duális pár alábbi három egyszerű tulajdonságán múlik:

(i) A (2) primál feladat feltételi halmaza nemüres kompakt halmaz, hiszen a $p = 0$ lehetséges megoldása (2)-nek, és az F4 feltétel alapján létezik olyan $(x,y,\delta)\in T$, amelyre az $(y-x,\delta)\in T_+$ pozitív, és így a feltételi halmaz korlátos. (A zártság nyilvánvaló, hiszen zárt félterek metszete.) Legyen $z_0 = y - x > 0$ tetszőleges. A (2) primál feltételi halmaz kompaktsága miatt az (1)–(2) párnak létezik optimális megoldása.

(ii) Legyen először $(\tilde z,\,\delta_0)$ a duál feladat optimális megoldása. Definíció szerint léteznek $(x_j,\,y_j,\,\delta_j)\in T_j$ $(j = 1,2,\ldots,n)$ vektorok, amelyekre $\sum\limits_{j=1}^n (y_j - x_j) = \tilde z \geq z_0$, és $\delta_0 = \sum\limits_{j=1}^n \delta_j$. A z_0 pozitivitása, és az ikertermelés hiányát kimondó F1 feltétel alapján egyetlen y_j vektor sem nulla, tehát ha y_{jj} jelöli az y_j vektor j-dik komponensét, akkor $y_{jj} > 0$. Jelölje w az y_{jj} számokból alkotott n dimenziós vektort. Definiáljuk az $A = \left(\dfrac{1}{y_{jj}}\,x_j\right)_{j-1}^n$ mátrixot. Nyilván $0 < \tilde z = w - Aw$, következésképpen az A mátrix produktív és így az $(E-A)^{-1}$ inverz mátrix létezik és nemnegatív [1], [17].

(iii) Jelölje $\tilde p$ a (2) optimális megoldását. Ekkor

$$(*)\qquad \sum_{j=1}^n \delta_j = \delta_0 = \tilde p z_0 \leq \tilde p\tilde z = \sum_{j=1}^n \tilde p(y_j - x_j).$$

Mivel a $\tilde z$ pozitív és a T_j kúp, ezért alkalmas λ-ra a $\lambda\tilde z + y_j - x_j$ nemnegatív és ezért $(\lambda\tilde z + y_j - x_j,\,\lambda\delta_0 + \delta_j)\in T_+$. A (P) definíciója alapján $\lambda\tilde p\tilde z + \tilde p(y_j - x_j)\leq$

$\leq \lambda\delta_0 + \delta_j$. A ($*$) egyenlőtlenséggel összevetve a rendkívül fontos $\tilde{p}(y_j - x_j) = \delta_j$ komplementaritási feltételhez jutunk.

Ennyi előkészület után a tétel bizonyítása már egyszerű. Tegyük fel először, hogy a (z^e, δ^e) a T_+ hatékony eleme. Mivel az $(E - A)^{-1}$ létezik és nemnegatív, ezért a $v = (E - A)^{-1} z^e$ is nemnegatív. Nyilván

$$z^e = (E - A)v = \sum_{j=1}^{n} (y_j - x_j) \frac{v_j}{y_{jj}} = \sum_{j=1}^{n} (y_j - x_j)u_j.$$

Meg kell mutatni, hogy egyúttal a $\delta^e = \sum_{j=1}^{n} \delta_j u_j$ is teljesül. Mivel a (z^e, δ^e) hatékony, ezért $\delta^e = \min\{\delta \mid (z, \delta) \in T_+, z \geq z^e\} = \max\{pz^e \mid pz \leq \delta, (z, \delta) \in T_+, p \geq 0\} \geq \tilde{p}z^e = \tilde{p} \sum_{j=1}^{n} (y_j - x_j)u_j = \sum_{j=1}^{n} \delta_j u_j$. Ebből a $\delta^e = \sum_{j=1}^{n} \delta_j u_j$ egyenlőség nyilvánvaló.

Megfordítva tegyük fel, hogy a nemnegatív $(\hat{z}, \hat{\delta})$ pár felírható $\sum_{j=1}^{n} (y_j - x_j, \delta_j)u_j$ alakban. Tekintsük az alábbi becsléseket, amelyekből a bizonyítás elején tett megjegyzés alapján a $(\hat{z}, \hat{\delta})$ hatékonysága már következik.

$$\min\{\delta \mid z \geq \hat{z}, (z, \delta) \in T_+\} = \max\{p\hat{z} \mid pz \leq \delta, (z, \delta) \in$$
$$\in T_+, p \geq 0\} \geq \tilde{p}\hat{z} = \tilde{p} \sum_{j=1}^{n} (y_j - x_j)u_j = \sum_{j=1}^{n} \delta_j u_j = \hat{\delta}.$$

(Beérkezett: 1984. dec. 22-én.)

IRODALOM

1. ARROW, K. J.: „Alternative Proof of the Substitution Theorem for Leontief Models in the General Case" [11]-ben.
2. CORNWALL, R. R.: *Introduction to the Use of General Equilibrium Analysis.* North Holland, Amsterdam 1984.
3. DANCS, I.: *Végtelen egyenlőtlenségek* (Kézirat) 1970.
4. DIEWERT, W. E.: „The Samuelson nonsubstitution theorem and the computation of equilibrium prices", *Econometrica,* 43 (1975) 57—64. o.
5. DUFFIN, J. R.: „Infinite programs" [13]-ban
6. FAN, K.: „On Infinite Systems of Linear Inequalities" *Journal of Math. Anal. and Appl.* 21, (1968) 457—478. o.
7. FUJIMORI, Y.: *Modern Analysis of Value Theory* Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Springer-Verlag, Berlin 1982.
8. GALE, D.: „The closed linear model of production" [13]-ban
9. GALE, D.: *The Theory of Linear Economic Models.* Mc Graw-Hill, New York 1960.
10. GEORGESCU-ROEGEN, N.: „Some properties of a Generalized Leontief Model" [11]-ben
11. KOOPMANS, T. C. (szerk.): *Activity Analysis of Production and Allocation.* Wiley, New York 1951.
12. KOOPMANS, T. C.: „Alternative Proof of the Substitution Theorem of Leontief Models in the Case of Three Industries" [11]-ben
13. KUHN, H. W.—TUCKER, A. (szerk.): *Linear inequalities and related systems.* Princeton University Press, Princeton 1956.
14. MIRRLESS, J. A.: „The Dynamic Nonsubstitution Theorem" *Review of Economic Studies,* 36 (1969) 67—79. o.
15. MORISHIMA, M.: „Marx in the Light of Modern Economic Theory." *Econometrica,* 42 (1974) 611—633. o.

16. MORISHIMA, M.—CATEPHORES, G.: *Value, exploitation and growth.* McGraw-Hill, London 1978.
17. NIKAIDO, H.: *Convex Structures and Economic Theory.* Academic Press, New York 1968.
18. ROEMER, J. E.: „A General Equilibrium Approach to Marxian Economics" *Econometrica,* 48 (1980) 505—531. o.
19. ROEMER, J. E.: *Analitical foundation of Marxian economic theory* Cambridge University Press, Cambridge 1981.
20. SOYSTER, A. L.: „The Existence of Optimal Price Vectors in the General Balanced-Growth Model of Gale" *Econometrica,* 42 (1974) 197—199. o.
21. STEINMETZ, V.—HÜLSMANN, J.: „A Note on the Nonexistence of Optimal Price Vectors in the General Balanced-Growth Model of Gale" *Econometrica,* 40 (1972) 387—390. o.
22. Атманов, С. А.: *Математические модели и методы в экономике.* Издательство Московского Университета, Москва 1980.

SEMI-INFINITE LINEAR PROGRAMMING AND MATHEMATICAL ECONOMICS

The paper discusses some applications of the semi-infinite linear programming. It presents the growth model of Gale, a generalization of the so-called Fundamental Marxian Theorem of Morishima and Samuelson's non-substitution theorem.

ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

В статье рассматриваются некоторые случаи применения полубесконечного линейного программирования. Показывается модель роста Гейла, обобщение т. н. основной марксисткой теоремы Моришимы и теорема незаменяемости Самуэльсона.

Simonovits András

A kínálat dinamikus alkalmazkodása vevői kényszerhelyettesítés mellett

1. Bevezetés

A közgazdaság uralkodó paradigmája szerint a kereslet és a kínálat közti bármely eltérést megszüntet(het) egy rugalmas ármechanizmus. E folyamat úttörő matematikai modellezése Samuelson (1947) érdeme. Ismert azonban, hogy minden létező gazdaságban vannak fontos szektorok, ahol a bérek nem eléggé rugalmasak, hogy eltüntessék a munkanélküliséget és az árak túl merevek ahhoz, hogy felszámolják a hiányokat. A hetvenes évek elejétől kezdve a *disequilibrium* és a *hiány* fogalma egyre nagyobb figyelmet kapott. Lásd: Barro—Grossmann (1971), Benassy (1982) és Kornai (1971), (1980). Ez utóbbira a következőkben címével: *A hiány* hivatkozom.

A jelen dolgozat az imént említett kutatási irányzathoz kapcsolódik: *a kínálat dinamikus alkalmazkodását* tanulmányozzuk, feltéve, hogy *a vevők kényszerhelyettesítést végeznek*. Az elemzéshez egy egyszerű több-termékes modellt használunk. Feltesszük, hogy az áruk helyettesítik egymást (pl. sonka, szalámi és kolbász), e termékek raktározhatók és áruk rögzített.

Először meg kell magyaráznunk, hogy mit értünk *kényszerhelyettesítésen*. Ha a vevő téliszalámiból eredetileg többet szeretne vásárolni, mint a kínálat, akkor kielégítetlen keresletét megpróbálja sonkával kárpótolni; tehát sonkából hajlandó többet vásárolni, mint amennyit eredetileg kívánt (lásd *A hiány* 5.4. alfejezet). Ilyenkor *kényszerhelyettesítésről* beszélünk, ellentétben a walrasi elméletben az ár hatására végzett önkéntes helyettesítéssel.

Kiemeljük, hogy a disequilibrium-elméletben szereplő *túlcsordulási* hatás (pl. lásd Benassy (1982) 4.5. alfejezet) itt is megjelenik. Például tegyük föl, hogy a sonkakínálat nagyobb volt mint az eredeti sonkakereslet, de a téliszalámi hiány miatt olyan nagy másodlagos sonkakereslet keletkezik, hogy a sonka is eltűnik a boltokból: a téliszalámi hiány a sonka túlkínálatot sonka hiányba fordítja át; a *hiány továbbgyűrűzik.* (*A hiány*, 109. o.)

S ezzel el is érkeztünk dolgozatunk alapkérdéséhez: Milyen alkalmazkodási szabály és milyen szétosztási (illetve kényszerhelyettesítési) séma biztosítja a hiány fokozatos megszüntetését?

A disequilibrium-elmélet kérdésünkre több ok miatt nem ad megoldást. Eltekint a kényszerhelyettesítéstől és általában statikus megközelítést használ, s a kivételesen dinamikus, készletekre támaszkodó modelljei is egy-termékes makromodellek (Benassy (1982) 4.4. alfejezet és 12. fejezet és Honkapohja—Ito (1980)).

A hiány leíró-magyarázó elméletéből kell kiindulnunk. *A hiány* 8. fejezete és B. függeléke (ez utóbbinak társszerzője voltam) már vizsgálta az általunk fölvetett problémát, de *statikus* megközelítésben. Hasonló kérdést tanulmányozott Kornai—Weibull (1978) és *A hiány* A. függeléke (társszerző: Weibull), méghozzá dinamikus modellel. Modelljük részben általánosabb (pl. több vevő), részben speciálisabb (pl. két termék) és részben más (sorbanállás) mint a jelen modell. Az eltérő megközelítés miatt a két modell eredményei nem hasonlíthatók össze.

Mielőtt eredményeink ismertetését elkezdenénk, figyelmeztetjük az olvasót, hogy írásunkkal nem akarjuk azt sugallni, hogy milyen könnyen megszüntethető a hiány. Ellenkezőleg, arra akarunk rámutatni, hogy milyen sok akadálya van a hiány felszámolásának.

Dolgozatunk eleve figyelmen kívül hagyja azokat a technológiai és érdekeltségi okokat, amelyek miatt a kínálat gyakran a kereslet alatt marad. (Pl. technikai merevség és eladók piaca.) Másik erős megszorító feltevésünk, hogy a tanulmányozott piacon globális túlkínálat van. Ez a feltevés nyilvánvalóan nem teljesül a hiánygazdaságok jó részében; sőt, a globális túlkínálattal dicsekedő részpiacok is állandó fenyegetettségben élnek, hogy mikor szívják tőlük el a „feleslegeket" a globális túlkereslettől szenvedő szektorok.

Úgy érezzük, hogy az említett megszorító feltevések ellenére sem holmi felesleges ujjgyakorlatról van szó. Elemzésünk központjában a hiány *információs* vonatkozása áll, amely minden gazdaságban jelen van, bár alig választható el az általunk figyelmen kívül hagyott érdekeltségi viszonyoktól. Hasonlóan figyelmet érdemelnek a globális túlkínálatot felmutató részpiacok, amelyek viszonylag el vannak szigetelve a hiánypiacoktól.

Modellünk célja nem az, hogy ténylegesen használható algoritmust szolgáltasson a strukturális hiányok felszámolására. Célunk ennél sokkalta szerényebb: szeretnénk kiegészíteni a fent említett elméleti elemzéseket, felhívni a figyelmet a hiánygazdaságok bizonyos jellegzetességére.

Bevezetésünk végéhez érve röviden ismertetjük a dolgozat felépítését és fő eredményeit. A 2. fejezet *A hiány* 8. fejezetében vizsgált modellt, illetve annak dinamizált változatát taglalja. A 3. fejezetben feltesszük, hogy a kereslet időben állandó. Egy egyszerű alkalmazkodási szabályt adunk meg, amely a hiányt felszámolja.

A 4. fejezetben a kereslet sztochasztikusan ingadozik egyik időszakról a másikra. Ekkor rendkívül erős feltevések mellett lehet csak bizonyítani a hiány felszámolását: a) léteznie kell legalább egy olyan rögzített kínálati vektornak, amely a kereslet *bármilyen* megengedett realizációját kielégíti és b) a vevő kényszerhelyettesítésénél a *hiány nem gyűrűzhet át.*

Az 5. fejezet visszatér a 3. fejezethez, de a kényszerhelyettesítés helyett sorbanállást feltételez: a hiány ismét felszámolható.

Köszönetnyilvánítás. Első helyen említem *Kornai János* segítségét, amely nélkül nem született volna meg a dolgozat. Munkám nem csak hogy szorosan kapcsolódik *A hiány*-ban kifejtett elméletéhez, különösen a 8. fejezethez, hanem egy korábbi publikálatlan közös tanulmányunk, KORNAI–SIMONOVITS (1977) egyes részein alapul. Az említett fejezet 5. lábjegyzete pl. utal az eladó dinamikus tanulóeljárására. Köszönetemet fejezem ki Kornai Jánosnak és Martos Bélának a dolgozat korábbi változatával kapcsolatos hasznos észrevételeikért. Természetesen egyikük sem felelős a dolgozatban foglaltakért.

2. A modell

A modell kerete

Olyan piacot írunk le, amelyben egyetlen vevő és egyetlen eladó van. A piac egy termékcsoport forgalmát bonyolítja le: a csoport összesen m-féle termékből áll. Ezek a termékek bizonyos fokig helyettesítik egymást, ha másban nem, hát mint a kényszerű pénzköltés ellenértékei. A termékek raktározhatók.

Adottak az árak és időben állandóak. Az egyes termékek mennyiségét eleve pénzben mérjük, így e mennyiségek közvetlenül összeadhatók.

Bár modellünk dinamikus, a jelölési egyszerűség kedvéért, ahol lehet, elhagyjuk a t időindexet ($t = 0, 1, 2, \ldots$).

Jelölések: d_i = az i-edik termék kereslete, s_i = (eladói) készlet az i-edik termékből (nyitókészlet), x_i = az i-edik termék vétele-eladása, y_i = az i-edik termék eladói beszerzése. Az aggregált mennyiségeket a megfelelő változó nagy betűjével jelöljük. Tehát

$$D = \sum_{i=1}^{m} d_i = \text{összkereslet} \tag{2.1}$$

$$S = \sum_{i=1}^{m} s_i = \text{összkészlet} \tag{2.2}$$

$$X = \sum_{i=1}^{m} x_i = \text{összvétel-összeladás} \tag{2.3}$$

$$Y = \sum_{i=1}^{m} y_i = \text{összbeszerzés.} \tag{2.4}$$

Vektormennyiségeket a megfelelő változó indexnélküli kis betűs alakjával jelöljük. Pl. $x = (x_1, \ldots x_m)$ a vétel-eladás m-dimenziós vektora.

Szükségünk lesz a következő definíciószerű összefüggésekre:

$$s(t+1) = s(t) - x(t) + y(t) \tag{2.5}$$

$$d \geq 0,\ s \geq 0,\ x \geq 0,\ y \geq 0. \tag{2.6}$$

Megjegyzés: Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy az eladó a t-1-edik időszak végén adja fel rendelését a termelőnek, aki azonnal teljesíti a rendelést. Az eladó a következő időszak nyitókészletét akarja az általa kívánt $s^*(t)$ szintre hozni, s ez általában lehetséges is a beszerzés megfelelő és késleltetés nélküli megválasztásával: $y(t) = s^*(t) - s(t-1) + x(t-1)$. Egyetlen nehézség adódhat, ha nagyobb a kívánt készletcsökkentés, mint az eladás: $s_i(t-1) - s_i^*(t) > x_i(t-1)$, amikor is negatív beszerzésre lenne szükség a kívánt készlet eléréséhez. A továbbiakban ettől a bonyodalomtól eltekintünk.

A vevő magatartása — általános feltevések

Az alábbiakban összefoglaljuk azokat a feltevéseket, amelyeket modellünk valamennyi változatában érvényesítünk. (Kivéve az 5. fejezetet, ahol a 2A és 2E feltevéseket ellentétükkel helyettesítjük.)

2A) A kielégítetlen kereslet nem vihető át a következő időszakra. A vevő nem vár: vagy megveszi a keresett terméket, vagy mást vesz helyette.

2B) A vevő egyetlen vételi kísérletet tesz. Nincs „keresés", nincs „utánajárás".

2C) Az összkereslet időben állandó:

$$D(t) = D \quad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.7}$$

2D) Az összkereslet globálisan kielégül:

$$X = D. \tag{2.8}$$

2E) A vevő lehetőleg megveszi azt, amiből kereslete kielégíthető. Utána pedig elkölti a megmaradó pénzét, valamilyen kényszerhelyettesítési séma szerint.

Ezzel kapcsolatban vezessük be a következő jelöléseket és változókat:

A termékek indexeinek $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmazát két részre osztjuk:

$$\begin{aligned} I^+ &= \{i\colon d_i \leq s_i\} = \textit{a nem-hiánycikkek indexei},\\ I^- &= \{i\colon d_i > s_i\} = \textit{a hiánycikkek indexei}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

A két indexhalmaz általában változik az idővel.

A vevő kielégítetlenségének mérésére szolgál az i-edik termékből tapasztalt *hiány*:

$$h_i = (d_i - s_i)_+, \tag{2.10}$$

ahol a_+ az a mennyiség pozitív része: $a_+ = a$, ha $a \geq 0$ és nulla egyébként.

Ha a vevő közömbös a kényszerhelyettesítés struktúrájával szemben, akkor globális kielégítetlenségének mérésére szolgálhat a *H hiányindikátor*;

$$H = \sum_{i=1}^{m} h_i. \tag{2.11}$$

Nyilvánvaló, hogy ekkor a hiányindikátor az optimalizáló vevő veszteségfüggvénye: $H \to \min$.

Az eladó magatartása — általános feltevések

2F) Az összkészlet időben állandó:

$$S(t) = S \quad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.12}$$

2G) Az összkészlet nagyobb, mint az összkereslet:

$$S > D, \quad S = (1 + \lambda)D, \tag{2.13}$$

ahol $\lambda > 0$ a slack-együttható.

2H) Az eladó nem érdekelt a hiány fenntartásában. Az eladó minden időszakban igyekszik minél teljesebben kielégíteni a vevő keresletét, a hiánycikkek készleteit növeli, a többit pedig csökkenti.

2J) Az eladó képes a kínálatát rugalmasan változtatni.

Elosztási szabály

A kereslet a vevő, a beszerzés az eladó szabályozási változója. A tényleges adás-vételt pedig „közös" elhatározásuk dönti el. Modellünkben a tényleges eladást egy *elosztási szabály* határozza meg (melynek angol megfelelője: „rationing scheme").

Definíció: Adott s készlet és adott d kereslet esetén az x vektor *elosztás*, ha (i) a hiánycikkek vétele-eladása azonos a készlettel:

(2.14) $$x_i = s_i, \text{ ha } i \in I^-;$$

(ii) a nem-hiánycikkek vétele legalább akkora, mint a kereslete:

(2.15) $$x_i \geqq d_i, \text{ ha } i \in I^+.$$

Természetesen ebben az esetben sem lehet a vétel-eladás nagyobb, mint a készlet:

(2.16) $$x_i \leqq s_i, \text{ ha } i \in I^+.$$

(iii) A kereslet globálisan kielégül: (2.8).

A bizonyítást későbbre hagyva kimondjuk:

1. tétel A (2.13) feltevés mellett létezik legalább egy elosztás.

Megjegyzések

1. Nemcsak hogy nem alkalmazzuk a disequilibrium-elmélet hatékony keresletét, de egyenest elvetjük a rövidebb oldal elvét. A fő hangsúly a kényszerhelyettesítésre kerül.

2. Az elosztási szabályt részben meghatározzák a vevő magatartására tett feltevéseink, de marad némi szabadságunk is.

3. A rendszer dinamikája meglehetősen egyszerű: a t-edik időszak elején adott $s(t)$, a t-edik időszak folyamán kiderül $d(t)$, s ketten az elosztási szabállyal együtt meghatározzák $x(t)$-t. A három adat birtokában az eladó a t-edik időszak végén kiszámítja $y(t)$ beszerzését, s a $t+1$-edik időszak elejére kialakul $s(t+1)$.

A következő részben ismertetjük a legegyszerűbb elosztási szabályt.

Definíció: *Egyenletes szétterítésnek* nevezzük azt az elosztási szabályt, amelynél a kényszerhelyettesítés és a túlkínálat hányadosa minden nem-hiánycikknél azonos:

(2.17) $$\frac{x_i - d_i}{s_i - d_i} = \alpha \quad \text{minden } i \in I^+\text{-ra, feltéve, hogy } s_i \neq d_i.$$

Segédtétel: *Minden (s, d) párra van egyenletes szétterítésű elosztás.*

Bizonyítás:
Legyen

(2.18) $$x_i = \begin{cases} \alpha s_i + (1-\alpha) d_i, & \text{ha } i \in I^+ \\ s_i, & \text{ha } i \in I^-. \end{cases}$$

Ekkor (2.17) nyilvánvalóan teljesül, (2.14)–(2.16) feltevések úgyszintén. A (2.8)-beli $X = D$ feltételt viszont kielégíti a

(2.19) $$\alpha = H/(S - D + H)$$

választás.

Megjegyzés: A Segédtételből következik az 1. tétel.

3. Időben állandó kereslet

Eddig főleg egy időszakra szorítkozva fejtettük ki a modell összefüggéseit. Most viszont kiterjesztjük az elemzést több időszakra: Hogyan ismerheti meg az eladó a keresletet és hogyan igazíthatja saját kínálatát a keresletehez az egymást követő időszakok sorozatában?

Hiánycikk és lehetséges hiánycikk

A fő problémát a kényszerhelyettesítés okozza. Elosztási szabályunk — amelyet gyakran nem ismer az eladó — megakadályozza a kereslet közvetlen megfigyelését. Nemcsak a hiánycikkeknél tér el a kereslet a vétel-eladástól, hanem a többi terméknél is. A különbség mindössze annyi, hogy az első csoportnál a kereslet nagyobb a vételnél, a második csoportnál viszont fordítva.

További bonyodalom, hogy az eladó általában még azt sem tudja, hogy az adott időszakban melyek a hiánycikkek, s mely termékek azok, amelyek csak a kényszerhelyettesítés miatt tűnnek el az eladó polcairól. Az imént elmondottak értelmében be kell vezetni a termékeknek egy olyan kettéosztását, amelyet az eladó is képes alkalmazni:

(3.1) $$J^- = \{i;\ x_i = s_i\} = \textit{a lehetséges hiánycikkek halmaza},$$

és

(3.2) $$J^+ = \{i\colon x_i < s_i\} = \textit{a nyilvánvalóan nem-hiánycikkek halmaza.}$$

Példa: Tegyük föl, hogy a lakosság adott mennyiségű összeget költ 1) szalámira, 2) sonkára és 3) egyéb felvágottra. Tegyük föl, hogy a sonka és az egyéb felvágottak kínálata minden időszakban nagyobb, mint a keresletük, szalámiból viszont tartós túlkereslet van. Ez utóbbi hiány miatt sokkal több sonkát vesznek, mint amennyit eredetileg akartak volna, s e kényszerhelyettesítés miatt az összes sonka elkel a piacon. Esetünkben $I^- = \{1\}$, $I^+ = \{2, 3\}$ és $J^- = \{1, 2\}$, $J^+ = \{3\}$. Azaz a sonka nem hiánycikk, de lehetséges hiánycikk.

Időben állandó kereslet

Első megközelítésben érdemes feltenni, hogy a kereslet időben változatlan; hiszen ebben az esetben az alkalmazkodási-megismerési folyamat sokkal egyszerűbb, mint változó kereslet esetén.

3A) *A kereslet időben változatlan*:

(3.3) $$d(t) = d, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots$$

Ésszerű alkalmazkodási szabály

Olyan alkalmazkodási szabályt keresünk, amely előbb-utóbb felszámolja a hiányokat. Egy ésszerű alkalmazkodási szabálynak növelnie kell a lehetséges hiánycikkek mindegyikének a készletét, miközben csökkenti a nyilvánvalóan nem-hiánycikkek készletét. Eközben azonban óvatosan kell eljárni, nehogy az eladó túllőjön a célon: nehogy olyan mértékben csökkentse valamelyik nyilvánvalóan nem-hiánycikk készletét, hogy az hiánycikké váljék. (Nem lehet viszont elkerülni, hogy egy nyilvánvalóan nem-hiánycikk lehetséges hiánycikké váljék, hiszen a megváltozott kínálat megváltoztathatja a fogyasztói kényszerhelyettesítést is.)

Rátérünk alkalmazkodási szabályunk ismertetésére: Legyen $\varkappa$ egy valós szám: $0 < \varkappa < 1$. Egy nyilvánvalóan nem-hiánycikk új készlete legyen az előző időszak készletének és eladásának konvex kombinációja $\varkappa$ és $1 - \varkappa$ súlyokkal (feltéve, hogy 1) ez pozitív beszerzéssel megvalósítható és 2) vannak még hiánycikkek), továbbá növeljük arányosan a lehetséges hiánycikkek készletét. Képletben:

$$s_i(t) = \varkappa s_i(t-1) + (1-\varkappa)x_i(t-1), \text{ ha } i \in J^+(t-1) \text{ nem teljes halmaz.} \tag{3.4}$$

$$s_i(t) = \mu(t)s_i(t-1), \text{ ha } i \in J^-(t-1) \text{ nem üres halmaz.} \tag{3.5}$$

A $\mu(t)$ együttható az $S = (1+\lambda)D$ feltételből egyértelműen meghatározható; $\mu(t) > 1$.

Ha nincs hiány, a készleteket nem változtatjuk.

2. tétel a) A (3.4)–(3.5) alkalmazkodási szabály esetén a hiánycikkek halmaza időszakról időszakra vagy változatlan marad vagy szűkül.

b) Az egyes termékekből fennálló hiány és az összhiány minden időszakban csökken — egészen addig, amíg el nem tűnik.

Bizonyítás: a) Minden nyilvánvalóan nem-hiánycikk kereslete legfeljebb akkora, mint az eladása. Mivel az új készlet nagyobb marad, mint az eladás, az új készlet továbbra is meghaladja a keresletet. Egy nyilvánvalóan nem-hiánycikk tehát nem lesz hiánycikk. (Itt említjük meg, hogy amennyiben teljesül az $s < 2d$ feltétel, akkor a kívánt készletcsökkentés pozitív beszerzéssel megvalósítható. Ugyanis egy nyilvánvalóan nem-hiánycikk zárókészlete $= s_i(t-1) - x_i(t-1)$ legfeljebb $s_i(t-1) - d_i$, s ez feltevésünk szerint kisebb, mint d_i, tehát pozitív beszerzés lesz szükséges ahhoz, hogy a (3.4)-ben szereplő készlet megvalósuljon.) Egyetlen egy lehetséges, de nem igazi hiánycikk sem lesz hiánycikk, mert készlete növekszik, míg kereslete állandó marad. *Nem-hiánycikkből tehát nem lesz hiánycikk.*

b) Minden lehetséges hiánycikk készletét egyenletesen növeljük, tehát a hiány minden hiánycikknél csökken. A λD készlettöbblet definíció szerint a nyilvánvalóan nem-hiánycikkekre összpontosul, ezért a készletcsökkenések összege, akárcsak a készletnövekedések összege $(1-\varkappa)\lambda D$.

Ha az 1. termék a t-1-edik időszakban hiánycikk volt, akkor a tétel a) része értelmében az összes korábbi időszakban is hiánycikk volt. A készletnövelések tehát t-1-szer érintették már az 1. terméket. Mivel a lehetséges hiánycikkek összkészlete legfeljebb D, a $\mu(t)$ készletbővülési tényező legalább

$\nu = (1 - \varkappa)\lambda + 1$; azaz $s_1(t) \geq s_1(0)\nu^t$, s ez nyilván csak véges sokszor állhat fönn. Durva becslésünk szerint $T = \frac{1}{\nu} \max\limits_{1 \leq i \leq m} \log [d_i/s_i(0)]$ időszakon belül eltűnik minden hiány.

Megjegyzések: 1) Míg a hiánycikkek halmaza általában szűkül (esetleg változatlan marad), addig a lehetséges hiánycikkek halmaza tágulhat is, legalábbis időnként.

2) A hiány eltüntetésének tényleges sebessége nagyban függ $\varkappa$ értékétől. Egyfelől minél nagyobb $\varkappa$ értéke, annál lassabb az egyszeri készletigazodás. Másfelől, minél kisebb $\varkappa$ értéke, annál nagyobb valószínűséggel teszünk nyilvánvalóan nem-hiánycikket lehetséges hiánycikké. Pl. a $\varkappa = 0$, $1 \in J^+(0)$ és $x_1(1) = x_1(0)$ esetben $s_1(1) = x_1(1)$ értelmében $1 \in J^-(1)$.

3) Javítható az alkalmazkodási folyamat, ha jobban felhasználjuk korábbi megfigyeléseinket. Előző példánknál maradva, mivel az 1. termék a 0. időszakban már nyilvánvalóan nem-hiánycikk volt, ne zavartassuk magunkat azzal, hogy az 1. időszakban lehetséges hiánycikké vált, hiszen *biztosan* tudjuk, hogy termékünk nem hiánycikk.

Nevezzük *biztosan nem-hiánycikknek* azokat a termékeket, melyek a (3.4)—(3.5) tanuló eljárásunk mellett a t-edik időszakban vagy valamikor korábban legalább egyszer nyilvánvalóan nem-hiánycikk volt. Képletben:

$$K^+(t) = \bigcup_{u=0}^{t} J^+(u). \tag{3.6}$$

Kiegészítő halmaza pedig legyen $K^-(t)$. Írjunk (3.4)-ben J^+ helyére K^+-t, (3.5)-ben J^- helyére K^--t; ekkor a készletnövekedést a $J^-(t\text{-}1)$-beli termékekről a szűkebb $K^-(t\text{-}1)$-beli termékekre korlátozzuk, tehát az alkalmazkodás gyorsabb lesz.

4) A nem-walrasi elmélet szelleméhez híven kiemeljük, hogy modellünkben a hiány nem-árjellegű információk alapján tűnik el. Bár nem tagadjuk, hogy a hiányt nagyon gyakran a túlzottan alacsony ár okozza; nem feledkezhetünk meg arról sem, hogy egyensúlyi ár mellett is lehet hiány, ha a kínálat nem alkalmazkodik a kereslethez.

5) Említést érdemel, hogy dinamikus modellünkben teljesen figyelmen kívül hagytuk a kereslet előrejelzését, amely olyan nagy szerepet játszott a megfelelő statikus modellben. *A hiány* 8.3 alfejezete (8.12) egyenletében például a következő kapcsolatot feltételezi az s_i készlet és a d_i^{pred} előrejelzett kereslet között:

$$s_i = (1 + \lambda)d_i^{\text{pred}}, \text{ feltéve, hogy } (1 + \lambda)d_i^{\text{pred}} < D. \tag{3.7}$$

E képlet nyomán mi is visszaszámíthatjuk, hogy a (3.4)—(3.5) alkalmazkodási folyamat milyen kereslet-előrejelzést rejt magában:

$$d_i^{\text{pred}}(t) = \frac{\varkappa s_i(t-1) + (1-\varkappa)x_i(t-1)}{1+\lambda}, \quad \text{ha } i \in J^+(t-1); \tag{3.8}$$

$$d_i^{\text{pred}}(t) = \frac{\mu(t)x_i(t-1)}{1+\lambda}, \quad \text{ha } i \in J^-(t-1). \tag{3.9}$$

A képletek közgazdasági jelentése egyszerűen értelmezhető. Számunkra azonban csupán az fontos, hogy implicit előrejelzéseink minőségileg mások a nyilvánvalóan nem-hiánycikkekre mint a lehetséges hiánycikkekre. Ez a megkülönböztetés viszont teljesen hiányzik a statikus modellnél.

Eredményeinkből az következik, hogy az előrejelzés nem független, hanem származtatott fogalom, s használata elkerülhető.

4. Sztochasztikusan változó kereslet

Alternatív feltevések

A 3. fejezetben az alkalmazkodási folyamatot időben állandó kereslet feltevése mellett vizsgáltuk, s viszonylag enyhe feltevések mellett bebizonyítottuk, hogy egy alkalmasan meghatározott alkalmazkodási folyamat a hiányt záros időn belül eltünteti. Ebben a fejezetben feloldjuk a szóban forgó feltevést, s megengedjük, hogy a kereslet valószínűségi törvények szerint ingadozzék.

4A) A kereslet n-dimenziós $d(t)$ vektorai azonos eloszlású, időszakonként egymástól teljesen független *valószínűségi* változók.

Mint *A hiány* B függelékéből is kiderül, sztochasztikus keresletnél a hiány bizonyos valószínűséggel megmarad, hacsak a kereslet szórását nem ellensúlyozza a készlettöbblet.

Dinamikus vizsgálatunkban el akarjuk kerülni ezt a bonyodalmat, éppen ezért feltesszük, hogy alkalmasan megválasztott kínálati struktúra mellett a hiány kizárható.

4B) *A hiány megszüntethető*: Létezik olyan $\bar{s}$ készletvektor, amely összhangban van az adott $1 + \lambda$ készletegyütthatóval, s amely mellett a termékenkénti maximális d^M keresletnél minden termék nyilvánvalóan nem-hiánycikk:

$$\bar{s}_i > d_i^M \quad i = 1, \ldots m\text{-re.} \tag{4.1}$$

Megjegyzés: A 4B)-ben szereplő $\bar{s}$ értékét az eladó nem ismeri, feladata éppen egy ilyen $\bar{s}$ vektor megtalálása.

Szükségünk lesz még egy további feltevésre. Az előző fejezetben már említettük azt a bonyodalmat, hogy egyes nem-hiánycikkeket az eladó hiánycikkeknek vélhet: $d_i \leq s_i = x_i$.

Ha kikötnénk, hogy $d_i < s_i$ esetén $x_i < s_i$, akkor csak a teljesen érdektelen $d_i = s_i$ határesetben lenne egy nem-hiánycikk lehetséges hiánycikk.

Valójában egy még erősebb feltevésre van szükség, de a feltevés kimondása előtt bevezetjük a standard elosztási szabály fogalmát.

Definíció: Az elosztási szabály *standard*, ha van olyan α szám, $0 \leq \alpha < 1$, amely mindig legalább akkora, mint a kényszerhelyettesítés és a túlkínálat hányadosa:

$$\frac{x_i(t) - d_i(t)}{s_i(t) - d_i(t)} \leq \alpha < 1 \text{ minden } i \in J^+(t)\text{-re és minden } t\text{-re.} \tag{4.2}$$

4C) *Az elosztási szabály standard.*

Megjegyzések: 1. A 2. fejezetben bevezetett *egyenletes szétterítés* elnevezésű elosztási szabály nyilvánvalóan kielégíti a 4C) feltevést mindenegyes időszakra külön-külön. Valóban, (2.19) szerint $\alpha = H/(\lambda D + H)$, amely nem-negatív, és $\lambda > 0$ miatt kisebb, mint 1. Továbbá, ha minden áru kínálatának súlya az összkínálatban minden időszakban határozottan pozitív; azaz ha van olyan $\varepsilon > 0$, amelyre $s_i(t)/D \geq \varepsilon$ minden i-re és t-re, akkor $H \leq (1 - m\varepsilon)D$, azaz $\alpha(t) \leq (1 - m\varepsilon)/(\lambda + 1 - m\varepsilon) < 1$. Azaz az egyenletes szétterítés ilyen esetben standard.

2. Emlékeztetjük az olvasót arra, hogy a 3. fejezet eredményei igazak voltak anélkül, hogy az elosztás standard voltát kikötöttük volna. Ezért a mostani fejezet eredményei csak részben általánosabbak, mint az előzőé (változó kereslet az állandó helyett); részben viszont speciálisabbak (standard elosztási szabály az általánossal szemben).

Módosított alkalmazkodási folyamat

Alapjában véve megtartjuk a 3. fejezetben leírt alkalmazkodási szabályt, de némi módosításra lesz szükségünk. Mielőtt a módosítást ismertetnénk, rámutatunk arra, miért nem célravezető ragaszkodni az eredeti folyamathoz. Változatlan keresletnél igaz az, hogy egy nyilvánvalóan nem-hiánycikk kereslete legfeljebb akkora, mint *akármelyik* időszak vétele-eladása. Elegendő tehát arra vigyázni, hogy a készletek ne süllyedjenek az előzőleg tapasztalt eladási szint alá, s a nem-hiánycikkek nem válnak hiánycikkekké. Bonyolultabb a helyzet a változó keresletnél: ha az új időszak kereslete jóval nagyobb, mint a régié, akkor az eredetileg nem-hiánycikk hiánycikké válhat, mégha a készlet változatlan marad is.

Le kell mondanunk tehát a folyamat monotonitásáról. Be kell érnünk a maximális kereslet alsó becslésével, amely azonban határértékben eléri a kereslet maximumát (vagy felső határát).

A t-edik időszakban a maximális keresletet a következőképpen becsüljük alulról:

$$d_i^M(t) = \begin{cases} \max\{x_i(u), \text{ ha } i \in J^-(u) \text{ vagy } J^-(u) \text{ üres, } 1 \leq u \leq t\}, \\ 0 \text{ egyébként.} \end{cases} \tag{4.3}$$

Belátható, hogy $d_i^M(t)$ alsó becslése d_i^M-nek:

$$d_i^M(t) \leq d_i^M. \tag{4.4}$$

Bizonyításként megjegyezzük, hogy ha $i \in J^-(u)$ valamilyen u-ra, $(1 \leq u \leq t)$, akkor az $I^-(u)$ definíciója miatt $d_i(u) > x_i(u)$ és az elosztás standard volta miatt $d_i(u) = x_i(u)$, ha $i \in J^-(u) \setminus I^-(u)$. Ha $J^-(u)$ üres, akkor viszont $d(u) = x(u)$.

Összegezve, $d_i(u) = x_i(u)$ $i \in J^-(u)$ esetén, azaz $d_i^M \geq \max\limits_{1 \leq u \leq t} x_i(u)$. A $d_i^M(t) = 0$ eset triviális.

Nyilvánvaló, hogy alsó becslésünk időben nem romlik;

$$d_i^M(t) \leq d_i^M(t+1), \quad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.5}$$

hiszen a (4.3)-ban szereplő változók körének bővülése nem csökkenti a maximumot.

A becslési szabály elemzése után vezessük be a következő jelölést:

(4.6) $\tilde{d}_i^M(t) = d_i^M(t)$, ha $d_i^M(t) > 0$ és $\tilde{d}_i^M(t) = x_i(t)$, ha $d_i^M(t) = 0$.

Ezek után rátérhetünk az alkalmazkodási szabály leírására:

(4.7) $s_i(t) = \varkappa s_i(t-1) + (1-\varkappa)\tilde{d}_i^M(t-1)$, ha $i \in J^+(t-1)$ nem teljes halmaz,

(4.8) $s_i(t) = \mu(t) s_i(t-1)$, ha $i \in J^-(t-1)$ nem üres halmaz;

(4.9) $s(t) = s(t-1)$, ha $J^-(t-1)$ az üres halmaz.

3. tétel A 4A), 4B) és 4C) feltevések mellett a (4.7)–(4.9) alkalmazkodási folyamat egy idő után végleg felszámolja a hiányt:

(4.10) Van olyan T, amelynél nagyobb t-re

$$s(t) = s(T) > d(t).$$

Megjegyzések: 1) Ellentétben az előző fejezettel, az eladó most sohasem tudhatja, hogy végleg célbaért. Előfordul, hogy akár a kezdő időszakban hiánymentes volt a rendszer, de később megjelenik a hiány.

2) A 4B) feltevés nélkül a 3. tétel ki sem mondható. A 4C) feltevésre pedig azért volt szükség, hogy megszabaduljunk a lehetséges, de nem tényleges hiánycikkek okozta bonyodalmaktól, 4C) nélkül a tétel általában nem igaz.

A bizonyítás vázlata: A bizonyítás túl bonyolult és meglehetősen érdektelen. A teljes bizonyítás helyett (amelyet KORNAI–SIMONOVITS (1977) tartalmaz) megelégszünk itt egy nagyon egyszerű bizonyításvázlattal.

1) A nyilvánvalóan nem-hiánycikkek készlete minden időszakban csökken.

2) A $d_i^M(t)$ alsó becslés egy bizonyos időszak után már értelmezve van.

3) Egy adott nyilvánvalóan nem-hiánycikk korlátos számú készletcsökkentés után vagy lehetséges hiánycikké válik, vagy eltűnik a hiány.

4) Egy adott lehetséges hiánycikk korlátos számú készletnövelés után nyilvánvalóan nem-hiánycikké válik.

5) Korlátos számú 3. és 4. típusú váltás után végleg eltűnik a hiány.

6) A váltások közötti időtartam nem korlátos, de korlátos várható értékű.

5. Nincs kényszerhelyettesítés — van sorbanállás

Dolgozatunk végére érve érdekes lesz megvizsgálni, mi történik a modellünkkel, ha a 2A) (nincs sorbanállás) és a 2E) (teljes kényszerhelyettesítés) feltevéspárt a másik véglettel váltjuk fel:

2$\bar{\text{A}}$) A kielégítetlen kereslet teljes egészében hozzáadódik az új kereslethez.
2$\bar{\text{E}}$) Egyáltalán nincs kényszerhelyettesítés.

Ekkor kimondhatjuk:

***4. tétel**: Tegyük föl, hogy nincs kényszerhelyettesítés, és minden kielégítetlen kereslet hozzáadódik az új időszak időben változatlan keresletéhez. A (3.4)–(3.5) készletalkalmazkodási szabálya véges időszakon belül eltünteti a hiányt.*

Bizonyítás: Kiindulásul írjuk föl az új elosztási szabályt:

$$x_i(t) = \begin{cases} d_i(t), & \text{ha } i \in I^+(t) \\ s_i(t), & \text{ha } i \in I^-(t); \end{cases} \tag{5.1}$$

valamint az új kereslet-dinamikát:

$$d_i(t+1) = d_i + [d_i(t) - s_i(t)]_+. \tag{5.2}$$

A 3. fejezet alkalmazkodási szabálya most egyszerűsödik, hiszen a kényszerhelyettesítés által létrehozott lehetséges hiánycikkek körére zsugorodik, no meg az érdektelen és valószínűtlen $d_i = s_i$ esetre.

Esetünkben érdemes a $\varkappa = 0$ választással élni, azaz minden időszak nyilvánvalóan nem-hiánycikkeinek készleteit a pontosan megismert kereslet szintjére csökkenteni, és úgy hagyni a továbbiakban.

Belátjuk, hogy az 1. időszak összhiánya legalább a λD slack-kel kevesebb, mint a 0. időszak összhiánya: $H(1) \leq [H(0) - \lambda D]_+$.

Ekkor figyelmen kívül hagyhatjuk ezeket a termékeket a későbbiekben. A megmaradó termékekre vonatkozó aggregált mennyiségeket ezentúl $'$-vel különböztetjük meg az eredeti teljes termékhalmazra vonatkozó aggregátumoktól.

Valóban, $S'(1) = S(1) - [D - D'(0)] = D'(0) + \lambda D$ és $D'(1) = D'(0) + H(0)$. Mivel a készletalkalmazkodás következtében az 1. időszak megmaradó hiánycikkjei már a 0. időszakban is hiánycikkek voltak, $H(1) \leq D'(1) - S'(1)$. Behelyettesítve a fenti összefüggéseket, a bizonyítandó egyenlőtlenséghez jutunk.

(Beérkezett: 1985. jan. 7-én.)

IRODALOM

1. Barro, R. J.—Grossman, H. I.: (1971) „A General Disequilibrium Model of Income and Employment", *American Economic Review*, 61. évf. 82—93. o.
2. Benassy, J.-P. (1974) „Disequilibrium-elmélet", *Szigma*, 7. évf. 135—163. és 241—270. o.
3. Benassy, J.-P. (1982) *The Economics of Market Disequilibrium*, Academic Press, New York.
4. Honkapohja, S.—Ito, T. (1980) „Inventory Dynamics in a Simple Disequilibrium Macroeconomic Model", *Scandinavian Journal of Economics*, 84. évf. 184—198. o.
5. Kornai, J. (1971) *Anti-equilibrium*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.
6. Kornai, J. és Simonovits, A. (1977) *Piaci modell*, kézirat. Közgazdaságtudományi Intézet, Budapest.
7. Kornai, J.—Weibull, J. W. (1978) „A piac normál állapota a hiánygazdaságban: egy sorbanállási modell", *Szigma*, 11. évf. 1—32. o.
8. Kornai, J. (1980) *A hiány*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.
9. Samuelson, P. A. (1947) *Foundations of Economic Analysis*, Harvard University Press, Cambridge.

THE DYNAMIC ADJUSTMENT OF SUPPLY WITH BUYERS' FORCED SUBSTITUTION

The present model is a dynamic version of the one in Chapter 8 of Kornai (1980). A multi-product market is examined, where, under conditions of general excess supply, at times there is excess demand for some products. It is assumed that the products can be stored and the buyer purcheses of non-shortage goods more than he originally intended to (he makes forced substitution) and thus satisfies his demand in global terms.

The paper examines the adjustment process of the seller and establishes alternative assumptions about supply, demand and the rule of forced substitution, such that shortage disappears in a finite time.

ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРИСПОСОБЛЕНИЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ В УСЛОВИЯХ ВЫНУЖДЕННЫХ ЗАМЕН

Рассматриваемая в статье модель представляет собой динамический вариант статичной модели, представленной в 8-ой главе работы Я. Корнаи (8). Анализируется многотоварный рынок, на котором при глобальном сверхпредложения время от времени возникает сверхспроса на тот или иной товар. Предположим, что товары могут складироваться и покупатель покупает больше недефицитных товаров, чем первоначально намеревался (вынужденная замена), и тем самым спрос глобально удовлетворяется.

В статье анализируется процесс приспособления продавца, и формулируются такие альтернативные предположения относительно предложения, спроса и режим вынужденных замен, при которых дефицит ликвидируется в конечный срок.

Tarján Tamás

Orrnehéz és farnehéz beruházási megoszlások

1. Bevezetés

A Közgazdaságtudományi Intézetben hosszú idő óta folynak kutatások a szocialista gazdaságban jelentkező beruházási ciklusok jellegzetességeinek feltárására. A különböző kutatók különböző aspektusokból vizsgálták a kérdést és különböző módszert alkalmaztak vizsgálataikban. Hagyományos közgazdasági elemzéssel dolgozott pl. Bauer Tamás [10] és Tényi György [11]. Matematikai módszereket és modelleket alkalmazott Bródy András [12], [13], Kornai János [14], Lackó Mária [15], Kovács János—Virág Ildikó [16], Tarján Tamás—Tényi György [1], Kovács János és Tarján Tamás [2]. Ezekhez a kutatásokhoz csatlakozik az Országos Tervhivatalban végzett számos vizsgálat is, pl. Augusztinovics Mária [8], Berend Iván [17] és Faur Tivadar [8] kutatásai.

E kutatások részben a ciklus lefolyására, időtartamára és hatására vonatkoznak, részben keletkezésük okainak feltárására. Ez a cikk azokhoz a vizsgálatokhoz csatlakozik, amelyek a ciklusok létrejöttének okait és a beruházási ingadozásoknak a népgazdaságra való hatását vizsgálják. A vizsgálati módszer első gyökereit alighanem Bródy András [18] 1972-es baseli előadásában találhatjuk meg, majd ennek nyomdokain, de más felfogásban Tarján—Tényi [1] cikkében.

E cikk a beruházási folyamatot leíró pálya stabilitásának két szükséges feltételével foglalkozik, majd a két feltétel valószínűségszámítási, fizikai és közgazdasági interpretációját adja.

A fizikai értelmezés segítségével bebizonyítja, hogy a Tarján—Tényi [1] cikkében tárgyalt „orrnehéz" megoszlások nem feltétlen stabilizálóak, míg a „farnehéz" megoszlások szükségszerűen destabilizálóak.

A cikk a közgazdasági értelmezést az átlagos tőkelekötési idő fogalmának segítségével adja. Bebizonyítja, hogyha a beruházási megoszlásokhoz tartozó átlagos tőkelekötési idő rövidebb mint a beruházási idő fele ($T/2$) akkor a beruházás instabil pályán megy végbe. A cikk végül matematikai statisztikai eszközökkel elég általános feltételek mellett bebizonyítja, hogy a két feltétel egyenként az „összes lehetséges" beruházási megoszlás 50%-ára, együtt pedig több mint 70%-ára képes eldönteni, hogy azok instabil beruházási pályához vezetnek.

2. Diszkrét rendszerek stabilitásának szükséges feltételei

Mint Tarján—Tényi [1] és Kovács—Tarján [2]-ben tettük jelöljük a beruházások megvalósítási arányszámait $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(T)}$-vel $\left(\sum_{k=1}^{T} \alpha^{(k)} = 1\right)$, és tekintsük őket állandóaknak. Jelentse $B(t)$ a t időpontban induló beruházások összvolumenét. Így a beruházásokra fordítható t évi $K(t)$ keretet a következő összeg adja:

$$K(t) = \sum_{k=1}^{T} \alpha^{(k)} B(t-k+1).$$

Tegyük fel, hogy a t évben beruházásokra fordított $K(t)$ keret γ rátával nő egyenletesen, azaz

$$K(t) = K_0 \cdot \gamma^t.$$

Ekkor a t évi $B(t)$ beruházás-indításokra az alábbi diszkrét időpontokra felírt

$$\sum_{k=1}^{T} \alpha^{(k)} B(t-k+1) = K_0 \gamma^t \tag{0}$$

állandó együtthatós inhomogén differenciaegyenletet kapjuk. Ennek megoldását (lásd pl. [19]-et) a differenciaegyenletek elméletében szokásos módon a

$$\sum_{k=1}^{T} a_k z^{T-k} = 0 \quad \left(a_k = \frac{\alpha^{(k)}}{\gamma^{k-1}},\ k = 1, 2, \ldots T\right)$$

karakterisztikus polinom gyökeinek a segítségével kapjuk.

Míg a folytonos időparaméter alapján felírt lineáris differenciálegyenletek megoldásai pontosan akkor stabilak, ha a hozzájuk tartozó

$$G(w) = \sum_{k=1}^{T} b_k w^{T-k} = 0 \quad (b_1 > 0) \tag{1}$$

karakterisztikus egyenlet minden gyökének valós része negatív, addig a beruházási folyamatot diszkrét időpontokban leíró differenciaegyenletek megoldásai akkor és csak akkor stabilak, ha a hozzájuk tartozó

$$F(z) = \sum_{j=1}^{T} a_j z^{t-j} = 0 \quad (a_1 > 0) \tag{2}$$

karakterisztikus egyenlet minden gyöke abszolút értékben kisebb mint 1.

Az előző negativitási feltétel teljesüléséhez az algebrából jól ismert Hurwitz tételt[1] kellene alkalmaznunk, amely az (1) karakterisztikus polinom együtthatóiból képzett determináns sorozat előjeleiből mondja meg pontosan, hogy mikor hány gyök esik a negatív valós részű komplex számok alkotta félsíkba.

Jegyezzük meg, hogy a folytonos paraméterű rendszer stabilitásának fontos szükséges feltétele, hogy (1) minden együtthatója pozitív legyen, azaz

$$b_k > 0, \text{ ha } 1 \leq k \leq T. \tag{3}$$

Ez az algebra alaptételének és a negativitási feltételnek közvetlen következménye, ui. a valós együtthatójú $G(w)$ polinom első és másodfokú valós polinomok szorzatára bomlik, amelyek a gyökök valós részének negativitása miatt mind pozitív együtthatójúak, így szükségképpen szorzatuk is az.

[1] Lásd pl. Kuros [3], Gantmacher [4].

Ismert, hogy

$$z = \frac{w+1}{w-1} \tag{4}$$

bilineáris leképzés segítségével a negatív valós részű $Re(w) < 0$ komplex félsík kölcsönösen egyértelműen leképezhető a $|z| < 1$ komplex egységsugarú körlemezre.

Így a Hurwitz kritériumnak megfelelő szükséges és elégséges kritérium adható a diszkrét paraméterű rendszer stabilitására is (Lásd MARDEN [5], JURY [6]).

Annak ellenére, hogy az automata- és vezérléselméleti alkalmazások következtében az 50- és 60-as évekre a diszkrét rendszerek stabilitására vonatkozó kritériumok lényegesen leegyszerűsödtek, megfogalmazásukra könnyen kezelhető algoritmusok születtek (JURY [6]), a stabilitás szükséges és elégséges feltételeinek közgazdasági értelmezése, interpretációja lehetetlen. Ezért itt megelégszünk azzal, hogy két szükséges feltétel közgazdasági interpretációját adjuk meg és matematikai statisztikai eszközökkel megvizsgáljuk, hogy e két szükséges feltétel a beruházási megoszlások hány „százalékára" képes eldönteni, hogy azok instabil beruházási pályához vezetnek.

A (4) bilineáris leképezés a (2)-beli a_j együtthatók és az (1)-beli b_k együtthatók között az alábbi képlettel számolható kapcsolatot létesíti (lásd JURY [6] 83. oldal):

$$b_k = \sum_{j=1}^{T} a_j \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l \binom{j-1}{l} \binom{T-j}{k-1-l} \; (1 \leq k \leq T). \tag{5}$$

Az (5) képlet alapján tehát b_1, b_2 és b_T értékei a következők:

$$b_1 = \sum_{j=1}^{T} a_j = F(1) \tag{6}$$

$$b_2 = \sum_{j=1}^{T} a_j(T - 2j + 1) = 2 \cdot F'(1) - (T-1) \cdot F(1) \tag{7}$$

$$b_T = \sum_{j=1}^{T} a_j(-1)^{j-1} = (-1)^{T-1} F(-1). \tag{8}$$

Mivel az [1] és [2]-ben bemutatott közgazdasági alkalmazásokban a karakterisztikus egyenlet a_j együtthatói nem negatívok és $a_1 > 0$, ezért a (3) feltétel $k = 1$ esetén értelemszerűen mindig teljesül. Így az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy

$$\sum_{j=1}^{T} a_j = 1. \tag{9}$$

A (3) szükséges feltételt az (7)-beli b_2-re alkalmazva kapjuk, hogy

$$\sum_{j=1}^{T} a_j(T - 2j + 1) > 0, \tag{10}$$

azaz átrendezéssel és (9) felhasználásával az

(i) $$\sum_{j=1}^{T} ja_j < \frac{T+1}{2}$$

szükséges feltételt kapjuk.

A (3) szükséges feltételt az (8)-beli b_T-re alkalmazva kapjuk, hogy

$$\sum_{j=1}^{T} a_j(-1)^{j-1} > 0, \tag{11}$$

azaz (9) és (11) összeadásával a

(ii) $$\sum_{l=1}^{\left[\frac{T}{2}\right]} a_{2l-1} > \frac{1}{2}$$

$\left(\left[\frac{T}{2}\right]\right.$ a felső egész rész$\left.\right)$ szükséges feltételt kapjuk.

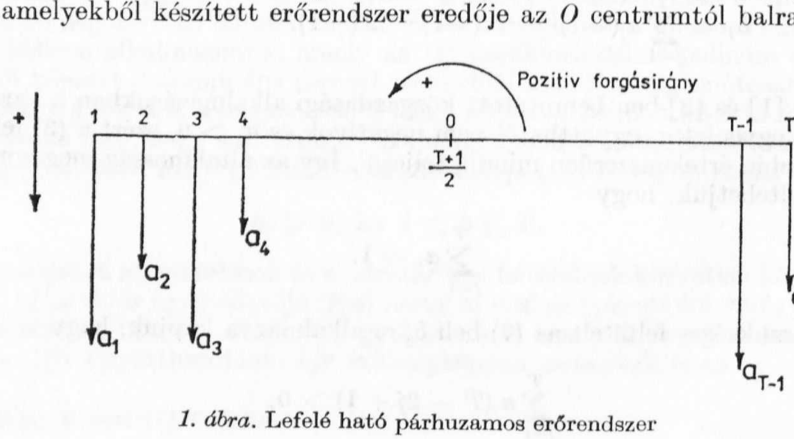
3. A két szükséges feltétel közgazdasági interpretálása

Az (i) feltétel valószínűségszámítási értelmezése kézenfekvő, hiszen az [1]-ben és [2]-ben ismertetett modelleknél az $a_1, a_2, \ldots, a_T$ beruházási megoszlás egyben valószínűségi megoszlás is (lásd a (9) feltételt), ezért az (i) feltétel bal oldala az eloszlás várható értéke. Az (i) feltétel azt követeli, hogy a beruházási eloszlás várható értéke kisebb legyen az 1 és T számtani közepénél. Ha tehát a beruházási megoszlással súlyozott átlag eléri vagy meghaladja az egyenlő súlyokkal súlyozott közepet, akkor a hozzá tartozó beruházási pálya instabil.

Adhatunk az (i) feltételnek fizikai értelmezést is. (1. ábra)

Vegyünk egy $T - 1$ méter hosszúságú vízszintes tartót. Balról számítva $k - 1$ méter távolságban $(1 \leq k \leq T)$ hasson egy a_k nagyságú erő lefelé. A fizikából tudjuk, hogy a (6)-beli b_1 az erőrendszer eredője, míg a (7)-beli b_2 az erőrendszer 0 centrumára számított nyomatékának 2-szerese.

Nevezzük tehát *orrnehéz megvalósítási megoszlásoknak* azokat a megoszlásokat, amelyekből készített erőrendszer eredője az O centrumtól balra támad,



1. ábra. Lefelé ható párhuzamos erőrendszer *farnehezeknek* pedig azokat, amelyeknél az eredő a centrumban vagy tőle jobbra támad.

Ez a definíció, a vízszintes tartó analógiából természetesnek adódik. Már a TARJÁN–TÉNYI [1] cikk írásakor is használtuk az elnevezést, azonban ott pontos definíciót a fogalomra nem adtunk, tételt sem mondtunk ki rá. Az így definiált farnehéz megoszlásokra a következő tétel igaz az (i) feltétel alapján:

1. tétel. A farnehéz megvalósítási megoszlások esetén a beruházás instabil pályán megy végbe.

Az orrnehéz megoszlásokra volt [1]-ben egy sejtésünk, nevezetesen az, hogy azok stabil pályát eredményeznek. Ez azonban nem bizonyult igaznak. Az orrnehézség csak szükséges feltétele a stabilitásnak.

Orrnehéz eloszlásoknak nevezhetnénk azokat a beruházási eloszlásokat, amelyeknél a $\left(\frac{T+1}{2}\right)$ félidőig már több mint a fele beruházás megvalósul; farnehezeknek pedig azokat, amelyekre ez a feltétel nem igaz. Valószínűségszámítási fogalmakkal ezt úgy mondhatnánk, hogy az eloszlás orrnehéz vagy farnehéz, ha a hozzátartozó medián kisebb vagy nagyobb az első és utolsó érték számtani közepénél, $\left(\frac{T+1}{2}\right)$-nél. Ez sokkal egyszerűbben definiálható osztályozás lenne, azonban erre nem lenne igaz az előző vagy hozzá hasonló tétel. Ennek illusztrálására tekintsük a következő példát.

Példa: $T = 4$; $a_1 = 0{,}1$, $a_2 = 0{,}5$, $a_3 = 0{,}1$, $a_4 = 0{,}3$

A várható értékhez kapcsolódó definíciónk értelmében ez az eloszlás farnehéz, tehát az 1. tétel értelmében instabil pályát eredményez. A mediánhoz kapcsolódó definíció értelmében azonban orrnehéz lenne.

A matematikai statisztikából tudjuk, hogy a két fogalom szimmetrikus eloszlások esetén egybeesik. Nem szimmetrikus eloszlások esetén (épp azoknál, amelyeket mi akarunk vizsgálni) azonban különválnak. *Pearson* az aszimmetria jellegének és mértékének mérésére épp a kettő különbségét használja (lásd pl. CALOT [7]):

$$\text{Második Pearson koefficiens} = \frac{3\ (\text{várható érték-medián})}{\text{szórás}},$$

amely negatív, *O* vagy pozitív, ha az eloszlás rendre balra elterülő, szimmetrikus vagy jobbra elterülő.

A példánkban szereplő eloszlásra a várható érték $= 2{,}6$, a medián $= 2$; ezért az eloszlás Pearson definíciója szerint jobbra elterülő, a mi definíciónk szerint pedig farnehéz.

Végül egy közgazdasági érv definíciónk jogosságára.

A beruházásoknál a lekötött tőke mennyisége után az átlagos tőkelekötési idő a legfontosabb szempont (lásd AUGUSZTINOVICS [8]), amelyet a

$$\text{átl. tőkelek. idő} = \sum_{j=1}^{T}\left(T - j + \frac{1}{2}\right)a_j, \tag{12}$$

képlettel számíthatnánk, hiszen az utolsó évben ráfordított tőke fél évet, az utolsó előttiben ráfordított tőke másfél évet stb. volt átlagosan lekötve. Az (i) feltétel a következőképpen fogalmazható meg az átlagos tőkelekötéssel:

$$\sum_{j=1}^{T}\left(T+\frac{1}{2}-j\right)a_j=\left(T+\frac{1}{2}\right)\sum_{j=1}^{T}a_j-\sum_{j=1}^{T}ja_j>T+\frac{1}{2}-\frac{T+1}{2}=\frac{T}{2}, \tag{13}$$

azaz

$$\text{(i')}\qquad \sum_{j=1}^{T}\left(T-j+\frac{1}{2}\right)\cdot a_j>\frac{T}{2}.$$

Kimondhatjuk a következő tételt:

2. tétel. Ha az átlagos tőkelekötési idő nem nagyobb mint a beruházási idő fele ($T/2$), akkor a beruházás instabil pályán megy végbe.

A (ii) feltétel közgazdasági értelmezését a következő tétel adja.

3. tétel. Ha a páratlan évekbeli 1, 3, 5 stb. beruházási ráfordítások nem haladják meg az összes ráfordítások felét, akkor a beruházás instabil pályán megy végbe.

4. A két szükséges feltétel statisztikai vizsgálata

Mivel nincs empirikus ismeretünk a beruházási megoszlásokat illetően, ezért a két szükséges feltétel hatókörének vizsgálatánál az $a_1, a_2, \ldots, a_T$ megoszlás megvalósítási hányadait véletlen számoknak tekintjük. A vizsgálat eredménye természetesen függ attól, hogy azokat milyen konstrukcióval állítjuk elő. Két konstrukciót fogunk a továbbiakban tárgyalni:

I. az elsőben a $[0, 1]$ intervallum elválasztó pontjai a független valószínűségi változók, míg

II. a másodikban maguk a megvalósítási hányadok a független nem negatív eloszlású valószínűségi változók.

I. Tekintsünk egy tetszőleges $F(x)$ eloszlás függvényt, amely $a = 0{,}5$-re szimmetrikus, azaz minden x-re

$$F(a-x)=1-F(a+x+0), \tag{14}$$

(Lásd pl. Rényi [9] 200. old.) és amelyre

$$F(0)=0. \tag{15}$$

Tekintsük a teljesen független X_1, $X_2 \ldots X_{T-1}$ valószínűségi változókat, amelyek a 0,5-re szimmetrikus fenti eloszlást követik, amelyek értékei tehát 1 valószínűséggel 0 és 1 közé esnek.

Az $X_1, X_2, \ldots X_{T-1}$ valószínűségi változókat rendezzük nagyság szerint, és legyen X_k^* az X_j valószínűségi változók közül nagyság szerint a k-adik. Ekkor természetesen $X_1^* \leq X_2^* \leq \ldots \leq X_{T-1}^*$. Ezt rendezett mintának szokás nevezni a statisztikában, továbbá legyen $X_0^* = 0$ és $X_T^* = 1$.

Ekkor az első konstrukcióban a beruházási megoszlás $a_1, a_2, \dots a_T$ megvalósítási hányadai álljanak elő a következő módon:

$$a_1 = X_1^* - X_0^*,\ a_2 = X_2^* - X_1^* \dots a_{T-1} = X_{T-1}^* - X_{T-2}^*,\ a_T = X_T^* - X_{T-1}^*.$$

Az (i) feltétel statisztikai vizsgálatánál arra a kérdésre kell válaszolnunk, hogy mi annak a *valószínűsége*, hogy az (i) szükséges feltétel nem teljesül (a beruházási eloszlás instabil megoldást ad):

$$P\big((\mathrm{i})\ \text{nem teljesül}\big) = P\left(\sum_{k=1}^{T} k(X_k^* - X_{k-1}^*) \geq \frac{T+1}{2}\right) = ?$$

Először tekintsük az alábbi átalakítást:

$$\sum_{k=1}^{T} k(X_k^* - X_{k-1}^*) = \sum_{k=1}^{T} kX_k^* - \sum_{k=0}^{T-1} (k+1)X_k^* = T - \sum_{k=1}^{T-1} X_k^* - 0 = T - \sum_{k=1}^{T-1} X_k.$$

Tehát

$$P\left(\sum_{k=1}^{T} k(X_k^* - X_{k-1}^*) \geq \frac{T+1}{2}\right) = P\left(\sum_{k=1}^{T-1} X_k \geq \frac{T-1}{2}\right) = 0{,}5.$$

Ui. mivel $X_k - k$ az $a = 0{,}5$-re szimmetrikusak és függetlenek, ezért a $T-1$ változó összege $0{,}5 \cdot (T-1)$-re lesz szimmetrikus. Ezért a fenti valószínűség értéke 0,5.

Az (ii) feltétel statisztikai vizsgálatánál pedig az alábbi valószínűségre vagyunk kíváncsiak:

$$P\big((\mathrm{ii})\ \text{nem teljesül}\big) = P\left(\sum_{l=1}^{\left[\frac{T}{2}\right]} X_{2l-1}^* - X_{2l-2}^* \leq \frac{1}{2}\right) = ?$$

A függetlenség és a 0,5-re való szimmetria miatt:

$$P(X_1 < x_1,\ X_2 < x_2, \dots X_{T-1} < x_{T-1}) = \prod_{j=1}^{T-1} P(X_j < x_j) =$$

$$= \prod_{j=1}^{T-1} P(1 - X_{T-j} < x_j) = P(1 - X_{T-1} < x_1, 1 - X_{T-2} < x_2, \dots, 1 - X_1 < x_{T-1}).$$

Így a rendezett mintájukra is fennáll a

$$P(X_1^* < x_1, X_2^* < x_2, X_{T-1}^* < x_{T-1}) = P(1 - X_{T-1}^* < x_1, 1 - X_{T-2}^* < \\ < x_2, \dots, 1 - X_1^* < x_{T-1})$$

egyenlőség. Vezessük be az

$$X^* = \sum_{l=1}^{\left[\frac{T}{2}\right]} X_{2l-1}^* - X_{2l-2}^*$$

jelölést. Ekkor, ha T páros

$$1 - X^* = \sum_{l=1}^{\frac{T}{2}} X_{T-2l-1}^* - X_{T-2l-1}^* = \sum_{l=1}^{\frac{T}{2}} (1 - X_{T-2l-1}^*) - (1 - X_{T-2l-2}^*),$$

azaz

$$P(X^* < x) = P(1 - X^* < x),$$

tehát X^* 0,5-re szimmetrikus, vagyis $P(X^* < 0{,}5) = 0{,}5$ *ha T páros.* Ha T páratlan, akkor a pontos értéket nem tudjuk kiszámítani.

Foglalkozzunk most a második konstrukcióval:

II. Tekintsünk egy tetszőleges $G(x)$ eloszlásfüggvényt, amelyre

$$G(0) = 0. \tag{16}$$

Tekintsük a teljesen független $Y_1, Y_2, \dots Y_T$ valószínűségi változókat, amelyek a fenti eloszlást követik, értékeik tehát 1 valószínűséggel nem negatívak.

Vezessük be az

$$Y = \sum_{j=1}^{T} Y_j \text{ jelölést.} \tag{17}$$

Ekkor a második konstrukcióban a beruházási megoszlás $a_1, a_2, \dots a_T$ megvalósítási hányadai a következő módon álljanak elő:

$$a_1 = \frac{Y_1}{Y},\ a_2 = \frac{Y_2}{Y},\ \dots,\ a_T = \frac{Y_T}{Y}.$$

Jelen konstrukciónál az (i) feltétel statisztikai vizsgálata a következőben áll:

$$P\big((\text{i}) \text{ nem teljesül}\big) = P\left(\sum_{k=1}^{T} kY_k \geq \frac{T+1}{2} \sum_{k=1}^{T} Y_k\right) = ?$$

Gondoljuk meg az alábbiakat:

a) két 1 valószínűséggel nemnegatív eloszlású teljesen független valószínűségi változó különbsége $a = 0$-ra szimmetrikus eloszlást követ.

b) véges sok, $a = 0$-ra szimmetrikus teljesen független elosztás összege is $a = 0$-ra szimmetrikus.

$$c)\qquad \sum_{k=1}^{T}\left(k - \frac{T+1}{2}\right) Y_k = \sum_{k=1}^{\left[\frac{T}{2}\right]}\left(k - \frac{T+1}{2}\right)(Y_k - Y_{T-k}). \tag{18}$$

Tehát a (18) összeg $a = 0$-ra szimmetrikus. Így

$$P\big((\text{i}) \text{ nem teljesül}\big) = P\left(\sum_{k=1}^{T}\left(k - \frac{T+1}{2}\right) Y_k \geq 0\right) = 0{,}5.$$

Az (ii) feltétel statisztikai vizsgálata pedig a következő:

$$P\big((\text{ii}) \text{ nem teljesül}\big) = P\left(\sum_{l=1}^{\left[\frac{T}{2}\right]} Y_{2l-1} \geq 0{,}5 \sum_{k=1}^{T} Y_k\right) = ?$$

Ha T páros, akkor

$$\sum_{l=1}^{\frac{T}{2}} Y_{2l-1} - 0{,}5 \sum_{k=1}^{T} Y_k = 0{,}5 \sum_{l=1}^{\frac{T}{2}} (Y_{2l-1} - Y_{2l}). \tag{19}$$

A (19) összeg is az $a = 0$-ra szimmetrikus az *a)* és *b)* pontok alapján. Tehát ha T páros, akkor

$$P(\text{(ii) nem teljesül}) = P\left(\sum_{l=1}^{\frac{T}{2}} Y_{2l-1} - 0{,}5 \sum_{k=1}^{T} Y_k \geq 0\right) = 0{,}5.$$

Az (i) és (ii) feltétel együttes szimulációs vizsgálata

A két szükséges feltétel együttes vizsgálatát a második konstrukcióban és pszeudo-véletlen számokkal végeztük.

Az eredményeket az alábbi táblázatban foglaltuk össze. Minden esetben $T = 10$. $G(x)$ eloszlás két féle

α) [0, 1] intervallumban egyenletes,

β) $\lambda = 1$ paraméterű exponenciális eloszlás.

A kísérletek száma legyen N, ennek függvényében

r(i), r(ii) és r(i, ii) jelentse rendre annak a relatív gyakoriságát, hogy az (i) feltétel, a (ii) feltétel és mind a kettő teljesül.

1. táblázat

T = 10	Egyenletes eloszlás			Exponenciális eloszlás		
N	r(i)	r(ii)	r(i,ii)	r(i)	r(ii)	r(i,ii)
20	0,7	0,55	0,3	0,7	0,65	0,35
50	0,58	0,5	0,28	0,58	0,58	0,36
100	0,52	0,49	0,28	0,54	0,52	0,31
500	0,5	0,48	0,27	0,508	0,496	0,288
1000	0,501	0,506	0,287	0,503	0,513	0,296
10000	0,4961	0.5103	0.281	0.491	0.5116	0.2797
∞	0,5	0,5	≈0,28	0,5	0,5	≈0,28

Az 1. táblázatból tehát azt olvashatjuk ki, hogy annak a relatív gyakorisága, hogy

— az (i) feltétel nem teljesül, tart 0,5-höz.

— az (ii) feltétel nem teljesül, tart 0,5-höz.

— az (i) vagy az (ii) feltétel nem teljesül, tart 0,72-höz.

A szimulációs vizsgálatot csak a második konstrukcióban végeztük el, de mindkét konstrukcióban tudjuk elvileg, hogy a fenti első két relatív gyakoriságnak 0,5-höz kell tartania. A szimulációs vizsgálatot azért volt célszerű elvégezni, mert a két szükséges feltétel együttes vizsgálata olyan általános eloszlásokkal, mint azt az (i) és (ii) feltétel esetében tettük, sokkal bonyolultabb bizonyításokat és meggondolásokat igényelne, s a szimuláció mégis ad valami képet.

A fenti harmadik relatív gyakoriság az egyenletes és exponenciális pszeudo-véletlen számok esetében is 0,72-höz tart; így elmondhatjuk, hogy

$$P(\text{(i) nem teljesül vagy (ii) nem teljesül}) \approx 0{,}72,$$

azaz a két szükséges feltétel az összes beruházási megoszlások több mint 70 százalékára képes kimutatni, hogy azok instabil beruházási pályához vezetnek.

(Beérkezett: 1985. febr. 14-én.)

IRODALOM

1. TARJÁN, T.—TÉNYI, Gy.: Kísérlet a beruházási folyamat modellezésére, *Szigma*, 10, 1—2 (1977) 11—24.
2. KOVÁCS, J.—TARJÁN, T.: Ciklus és pótlás, *Közgazdasági Szemle*, 33, 1. (1986) 24—40.
3. KUROS, A. G.: *Felsőbb algebra*, Tankönyvkiadó, Budapest, (1966) 278.
4. GANTMACHER, F. R.: *Mátrixelmélet* (orosz nyelven) Moszkva, (1967) 483—488.
5. MARDEN, M.: *The Geometry of the Zeros of a Polynomial in a Complex Variable*, New York (1949) 152—157.
6. JURY, E. J.: *Theory and application of the z-transform method*, Wiley, (1964) 79—138.
7. CALOT, G.: *Cours de Statistique descriptive*, Dunod (1975)
8. AUGUSTINOVICS, M.: *Népgazdasági modellek a hosszú távú tervezésben*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest. (1979)
9. RÉNYI, A.: *Valószínűség-számítás*, Tankönyvkiadó. Budapest (1968)
10. BAUER, T.: *Tervgazdaság, beruházás, ciklusok*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest. (1979)
11. TÉNYI, Gy.: *Beruházási egyenetlenségek a magyar népgazdaságban*. Budapest, Kézirat. MTA Közgazdaságtudományi Intézete (1976)
12. BRÓDY, A.: *Ciklus és szabályozás*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, (Budapest. (1980)
13. BRÓDY, A.: A beruházási ciklus elmélete és szabályozása, *Gazdaság*, 17, 3. (1983), 57—71.
14. KORNAI, J.: *Növekedés, hiány és hatékonyság*. Budapest, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, (1982)
15. LACKÓ, M.: Feszültségek felhalmozása és leépítése. *Közgazdasági Szemle*, 27. 7—8 (1980) 923—940.
16. KOVÁCS, J.—VIRÁG, I.: Szakaszos vagy egyenletes növekedés, *Közgazdasági Szemle*, 28, 6 (1981) 675—686.
17. BEREND, I.: *Eszközigényesség és fejlesztési politika*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, (1979)
18. BRÓDY, A.: *A beruházási ciklusok belső struktúrája*, Német nyelvű kézirat egy Baselben tartott előadáshoz (1972)
19. GELFOND, A. O.: *Differenciaszámítás*. Akadémiai Kiadó. Budapest, 1954.

STEM-HEAVY AND STERN-HEAVY INVESTMENT DISTRIBUTIONS

The article establishes two necessary conditions of the stability of the investment process modelled in an article by Tarján—Tényi and then gives an interpretation of the two conditions from the aspect of probability theory, physics and economics. With the aid of the physical interpretation it is proved that the stem-heavy distributions are not necessarily stabilizing while the stern-heavy ones are necessarily destabilizing.

The economic interpretation is based on the notion of average time of capital demobilization. It is proved that if the average capital demobilization time belonging to the investment distribution is shorter than half of the investment gestation period then the investment takes place along an unstable path.

Finally, the article proves with mathematical-statistical tools and under rather general conditions that each of the conditions can decide for 50 percent of „all possible" investment distributions and the two combined for more than 70 percent whether they lead to unstable investment paths.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КАПИТАЛОВЛОЖЕНИЙ С «НОСОВЫМИ» И «КОРМОВЫМИ» ПЕРЕГРУЗКАМИ

В статье называются два необходимых условия стабилизации процесса капиталовложений, смоделированных в статье Тарьяна и Теньи (I), а затем эти два условия определяются в аспекте теории вероятности, физики и экономической науки. С помощью физического толкования доказывается, что распределения с «носовыми» перегрузками не обязательно являются стабилизирующими, а с «кормовыми» — не обязательно дестабилизирующими.

Экономическое толкование дается в статье с помощью понятия среднего срока отвлечения капитала. Доказывается, что если средний срок овлечения капитала при данном распределении капиталовложений меньше половины срока капиталовложений, то капиталовложения идут по неустойчивому пути.

И наконец, в статье с помощью средств математической статистики при достаточно общих условиях доказывается, что эти два условия способны каждое в отдельности в случае 50 процентов «всех возможных» распределений капиталовложений, а вместе — в случае 70% способны решить, ведут ли они к неустойчивому пути капиталовложений.

VÖRÖS JÓZSEF

Degeneráció és szingularitás a pénzbefektetéses analízisben

Bevezetés

A pénzbefektetés analízis beruházója b nagyságú tőkéjét n helyre fektetheti be. A tervperiódus elején az i-edik helyre invesztált összeg nagyságát jelölje x_i, $i = 1, \ldots, n$, mely a peródus végén $\xi_i x_i$ nagyságú hozamot biztosít, és ξ_i-k egy ismert típusú együttes valószínűség-eloszlásfüggvénnyel rendelkeznek. A beruházó úgy választja meg az x_i értékeket, hogy azok maximalizálják $u(\boldsymbol{\xi}'\mathbf{x})$ hasznosságfüggvényét (a vonás transzponáltat jelöl és $\boldsymbol{\xi}' = [\xi_1, \ldots \xi_n]$, $\mathbf{x} = [x_1, \ldots x_n]$). Feltesszük, hogy $u \in U$, ahol U a nem csökkenő, folytonosan differenciálható konkáv hasznosságfüggvények osztálya; másként megfogalmazva ez azt jelenti, hogy beruházónk kockázatérzékeny.

Beruházónk problémáját az alábbi módon fogalmazhatjuk meg:

$$E_\xi\{u(\boldsymbol{\xi}'\mathbf{x})\} \to \max \tag{1a}$$

$$\mathbf{1}'\mathbf{x} = b \tag{1b}$$

$$\mathbf{x} \in K, \tag{1c}$$

ahol E_ξ várható értéket jelöl a $\boldsymbol{\xi}$ valószínűségi vektorra vonatkozóan, K pedig az x_i változókra egy további feltételeket megfogalmazó konvex halmaz. (Az $\mathbf{1}$ vektor az ún. összegző vektor, azaz $\mathbf{1}' = [1, \ldots, 1]$.)

A $\boldsymbol{\xi}'\mathbf{x}$ várható értékét jelölje C, varianciáját pedig Z^2. TOBIN [4]-ban megmutatta, hogy a fenti kitételeknek eleget tevő hasznossági függvények közömbösségi görbéi a (C, Z) síkban monoton növekvőek és konkávak; emellett, ha a ξ_i-k együttes eloszlása normális, akkor az (1) feladatot az alábbi módon lehet megoldani:

— meg kell állapítani a valószínűségeloszlás paramétereit,

— elő kell állítani a hatékony (adott C-hez a legkisebb Z-t adó) befektetési kombinációk halmazát,

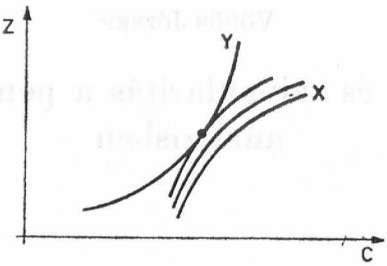
— a beruházó közömbösségi görbéjének megfelelően ki kell választani a maximalizáló kombinációt.

(Lásd az 1. ábrát, ahol X a közömbösségi görbesereget, Y pedig a hatékony kombinációk (C, Z) értékeit jelöli.)

A hatékony kombinációk halmazát *Merton* az alábbi feladat explicit megoldásával állította elő:

$$\begin{aligned} \mathbf{1}'\mathbf{x} &= b \\ \mathbf{a}'\mathbf{x} &= C \\ \mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x} &\to \min, \end{aligned} \tag{2}$$

ahol $E(\xi_i) = a_i$; és $v_{ij} = \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j)$, továbbá $\mathbf{a}' = [a_1, \ldots a_n]$ és $\mathbf{V} = [v_{ij}]$.



1. ábra. A döntés

A változókra vonatkozó nemnegativitási feltételt (2)-höz csatolva [5] tanulmány szintén explicit megoldást közöl. Az eljárás különösen hatékony azon esetekben, amikor létezik (2)-ben C-nek olyan $(C_0; C_1)$ nyílt intervalluma, melyben az optimális megoldás valamennyi komponense pozitív. A tanulmány bizonyítja, hogy a C_0 pontban zéróvá váló változó a $C \leq C_0$ intervallumban végig zéró marad, következésképpen ebben az intervallumban a rendszerből elhagyható. Ha a C_0 pontban több változó válik zérussá, a tanulmány más eljárásokhoz hasonlóan perturbációt javasol. A következő fejezet azt bizonyítja, hogy ha ebben a C_0 pontban több változó válik zérussá, ezek mindegyike a $C \leq C_0$ intervallumban zéró.

A pénzbefektetés-elméletben állandósult feltevés, hogy a kovariancia-variancia mátrix nem szinguláris. Ez fontos kitétel volt mind a [2] mind az [5] tanulmányban. A cikk utolsó fejezete ezen kitételt oldja fel és explicit megoldását adja a (2) feladatnak, amikor a kovariancia-variancia mátrix szinguláris (pozitív szemidefinit).

1. A degeneráció kezelése

Legyen tehát adott az alábbi n változós $(n > 2)$, C-ben paraméteres kvadratikus programozási feladat:

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{o} \tag{3a}$$

$$\mathbf{1}'\mathbf{x} = b \tag{3b}$$

$$\mathbf{a}'\mathbf{x} = C \tag{3c}$$

$$-\frac{1}{2} Z_+^2(C) \equiv \max\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x}\right\}. \tag{3d}$$

Legyen m olyan index, melyre $1 < m < n$, továbbá legyen $M = \{i \mid 1 \leq \leq i \leq m\}$; $N = \{i \mid m+1 \leq i \leq n\}$ és $\mathbf{E}$ olyan mátrix, mely $\mathbf{E} = \left[\begin{array}{c}\mathbf{O} \\ \hline \mathbf{I}\end{array}\right]$, ahol $\mathbf{O}$ egy $m \times (n-m)$-es zéró mátrix, az $\mathbf{I}$ pedig egy $(n-m)\times(n-m)$-es egységmátrix.

1. *tétel*: A (3) feladatban a kovariancia-variancia mátrix legyen pozitív definit, a $C_0 < C < C_1$ intervallumban pedig az optimális megoldás valamennyi komponense pozitív értékű. A C_0 pontban legyen $x_i = 0$, $i \in N$; $x_i > 0$, $i \in M$,

valamint az $\mathbf{a}$ vektor első m komponense között legyenek különbözőek. Ekkor a $C \leq C_0$ intervallumban a (3) feladat megoldását az

$$\begin{gathered} \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{1}'\mathbf{x} = b \\ \mathbf{a}'\mathbf{x} = C \\ \mathbf{E}'\mathbf{x} = \mathbf{0} \\ -\frac{1}{2} Z_+^2(C) = \max\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x}\right\} \end{gathered} \tag{4}$$

feladat megoldása adja.

A tétel megfogalmazásához néhány megjegyzést fűzünk: a feltételek szerint a (3) feladat optimális megoldása azzal az előnyös tulajdonsággal rendelkezik, hogy a $(C_0; C_1)$ intervallumban valamennyi komponense pozitív. Ebben az intervallumban a (3) feladat tehát ekvivalens a (2) feladattal, következésképpen *Lagrange*-problémaként is felfogható. Ezen Lagrange-megoldás utolsó $(n - m)$ komponense zéróvá válik a C_0 pontban, így a (3) feladat és a (4) feladat ebben a pontban ekvivalens. A (4) feladat m változós problémaként is kezelhető, mely szintén rendelkezik azon tulajdonsággal, hogy létezik olyan C, például a C_0, amelyben az optimális megoldás valamennyi komponense pozitív. Így, ha tételünket bizonyítjuk, a (3) feladat megoldását — a kimondott feltételek mellett — olyan előjelkötetlen feladatok megoldásának sorozataként állítjuk elő, melyek mérete minden iterációs lépésben csökken.

Bizonyítás: A 3. feladathoz a

$$\Phi(x, u) = -\frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x} + u_1(b - \mathbf{1}'\mathbf{x}) + u_2(C - \mathbf{a}'\mathbf{x})$$

Lagrange-függvény tartozik, a *KT* feltételeket pedig az alábbi rendszer fogja össze:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} = -\mathbf{V}\mathbf{x} - \mathbf{1}u_1 - \mathbf{a}u_2 \leq \mathbf{0}; \tag{5a}$$

$$\mathbf{1}'\mathbf{x} = b \tag{5b}$$

$$\mathbf{a}'\mathbf{x} = C \tag{5c}$$

$$\mathbf{x}'\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} = 0 \tag{5d}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \tag{5e}$$

Ezután tekintsük a

$$\begin{gathered} \mathbf{1}'\mathbf{x} = b \\ \mathbf{a}'\mathbf{x} = C \\ \mathbf{E}'\mathbf{x} = \mathbf{0} \\ -\frac{1}{2} Z^2(C) = \max\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x}\right\} \end{gathered} \tag{6}$$

feladatot. Az 1. tételben kimondott feltételek mellett a változók folytonossága miatt a C_0-nak biztosan létezik olyan környezete, melyben a (6) feladat ekvivalens a (4) feladattal. Most megmutatjuk, hogy a C_0-nak létezik olyan bal oldali környezete, melyben a (6) feladat optimális megoldása kielégíti a (3) feladat (5) alatti *KT* feltételeit.

A (6) feladathoz tartozó Lagrange-függvény az alábbi:

$$\Phi(x, u) = -\frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x} + u_1(b - \mathbf{1}'\mathbf{x}) + u_2(C - \mathbf{a}'\mathbf{x}) - \mathbf{x}'\mathbf{E}\mathbf{u}_3,$$

ahol az $\mathbf{u}_3$ vektor $(n - m)$ Lagrange szorzót tartalmaz.

A (6) feladathoz csatolandó elsőrendű feltételeket az alábbi egyenlőségek fogják össze:

$$-\mathbf{V}\mathbf{x} - \mathbf{1}u_1 - \mathbf{a}u_2 - \mathbf{E}\mathbf{u}_3 = \mathbf{0} \tag{7a}$$

$$\mathbf{1}'\mathbf{x} = b \tag{7b}$$

$$\mathbf{a}'\mathbf{x} = C \tag{7c}$$

$$\mathbf{E}'\mathbf{x} = \mathbf{0}. \tag{7d}$$

(7a)-ból $\mathbf{V}$ pozitív definit volta miatt

$$\mathbf{x} = -\mathbf{V}^{-1}\mathbf{1}u_1 - \mathbf{V}^{-1}\mathbf{a}u_2 - \mathbf{V}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{u}_3. \tag{8}$$

Legyen $\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{M}$, $f = \mathbf{1}'\mathbf{M}\mathbf{1}$; $d = \mathbf{a}'\mathbf{M}\mathbf{1}$; $e = \mathbf{a}'\mathbf{M}\mathbf{a}$, és az $\mathbf{M}$ mátrixot particionáljuk az alábbi módon:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{M}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix},$$

ahol az $\mathbf{M}_{11}$ mátrix $m \times m$-es, és $\mathbf{M}$ particionálásának megfelelően $\mathbf{a}' = [\mathbf{a}_1'; \mathbf{a}_2']$, ahol $\mathbf{a}_1$ m elemű vektor.

(8)-ból:

$$\begin{aligned} b &= \mathbf{1}'\mathbf{x} = -fu_1 - du_2 - \mathbf{1}'\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix}\mathbf{u}_3 \\ C &= \mathbf{a}'\mathbf{x} = -du_1 - eu_2 - \mathbf{a}'\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_2^2 \end{bmatrix}\mathbf{u}_3, \end{aligned} \tag{9}$$

és mivel az $\mathbf{x}$ vektor utolsó $(n - m)$ komponense zéró, szintén (8) felhasználásával:

$$\mathbf{0} = -\mathbf{M}_2\mathbf{1}u_1 - \mathbf{M}_2\mathbf{a}u_2 - \mathbf{M}_{22}\mathbf{u}_3,$$

melyből $\mathbf{V}$ pozitív definit volta miatt

$$\mathbf{u}_3 = -\mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{M}_2\mathbf{1}u_1 - \mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{M}_2\mathbf{a}u_2. \tag{10}$$

$\mathbf{u}_3$ értékét (9)-ben felhasználva

$$\begin{aligned} b &= -u_1(f - \hat{f}) - u_2(d - \hat{d}) \\ C &= -u_1(d - \hat{d}) - u_2(e - \hat{e}), \end{aligned} \tag{11}$$

ahol

$$\hat{f} = \mathbf{l}' \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{M}_2\mathbf{l}; \quad \hat{e} = \mathbf{a}' \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{M}_2\mathbf{a};$$

$$\hat{d} = \mathbf{l}' \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{M}_2\mathbf{a}.$$

Felhasználva az

$$f - \hat{f} = \tilde{f}; \quad d - \hat{d} = \tilde{d}; \quad e - \hat{e} = \tilde{e}$$

egyszerűsítő jelölést (11) az alábbi formában írható fel:

$$\begin{aligned} b &= -u_1\tilde{f} - u_2\tilde{d} \\ C &= -u_1\tilde{d} - u_2\tilde{e}. \end{aligned} \tag{12}$$

Az $\hat{e}$, $\hat{f}$, $\hat{d}$ meghatározásánál szerepet játszó mátrixoknál a kijelölt műveletet elvégezve kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{12}\mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix},$$

melynek felhasználásával:

$$\tilde{f} = \mathbf{l}' \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} - \mathbf{M}_{12}\mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{M}_{21} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{l} = \mathbf{l}'\mathbf{G}\mathbf{l},$$

$$\tilde{e} = \mathbf{a}'\mathbf{G}\mathbf{a}, \text{ és } \tilde{d} = \mathbf{a}'\mathbf{G}\mathbf{l}.$$

Tekintsük ezek után a

$$\varphi(\lambda) = (\mathbf{a} - \lambda\mathbf{l})'\mathbf{G}(\mathbf{a} - \lambda\mathbf{l}) = \tilde{f}\lambda^2 - 2\tilde{d}\lambda + \tilde{e}$$

másodfokú függvényt, melynek diszkriminánsa

$$\tilde{d}^2 - \tilde{e}\tilde{f}.$$

Az $\mathbf{M}_{11} - \mathbf{M}_{12}\mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{M}_{21} = \mathbf{V}_{11}^{-1}$ blokk pozitív definit volta miatt a $\varphi(\lambda)$ ezért csak akkor zéró, ha $\mathbf{a}_1 = \lambda\mathbf{l}$; feltételünk szerint azonban az $\mathbf{a}$ vektor első m komponense között különbözőek is vannak, melyből következik, hogy $\tilde{e}\tilde{f} - \tilde{d}^2 > 0$. Az $\tilde{e}\tilde{f} - \tilde{d}^2$ egyúttal determinánsa is a (12) egyenletrendszernek, melyből következően (12)-nek az $\mathbf{a}_1 \neq \lambda\mathbf{l}$ kikötés mellett egyértelmű megoldása van u_1, u_2-re:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{\tilde{e}b - \tilde{d}C}{\tilde{e}\tilde{f} - \tilde{d}^2} \\ u_2 &= -\frac{\tilde{f}C - \tilde{d}b}{\tilde{e}\tilde{f} - \tilde{d}^2}. \end{aligned} \tag{13}$$

(10)-ben felhasználva ezen eredményt

$$(\tilde{e}\tilde{f} - \tilde{d}^2)\mathbf{u}_3 = (\tilde{f}\mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{M}_2\mathbf{a} - \tilde{d}\mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{M}_2\mathbf{l})C + (\tilde{e}\mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{M}_2\mathbf{l} - \tilde{d}\mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{M}_2\mathbf{a})b,$$

tehát $\mathbf{u}_3$ valamennyi komponense C-nek lineáris függvénye. A $C = C_0$ helyen $\mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$, mivel az (5a) feltételek egyenlőség formájában teljesülnek, és C_0 jobb oldali környezetében $\mathbf{u}_3$ valamennyi komponense pozitív, hiszen ha azok között akár egy is negatív lenne, azt eredményezné, hogy C_0 jobb oldali környezetében (3)-nak létezik olyan optimális megoldása, melyben egy változó értéke zéró, míg a többi pozitív. Ez azonban ellentmond annak, hogy (3)-nak ezen környezetben minden változója pozitív. Következésképpen: C_0 bal oldali környezetében $\mathbf{u}_3$ valamennyi komponense negatív, ami annyit jelent, hogy $i \in N$-re x_i-k zéróra állítása a KT feltételeket kielégíti; továbbá C_0-nak létezik olyan bal oldali környezete, melyben $x_i > 0\ \forall i \in M$-re, szintén a változók folytonossága miatt. A változók ezen státusa — hogy $x_i > 0\ \forall i \in M$-re és $x_i = 0\ \forall i \in N$-re — mindaddig kielégíti a KT feltételeket, míg az M indexhalmaz újabb elemeihez tartozó változók zéróvá nem válnak. Ezen C_{-1}-ben $\mathbf{u}_3$ valamennyi komponense ugyanúgy negatív mint C_{-1} jobb oldali környezetében, tehát a (3) feladat megoldását a $C \leq C_0$ intervallumban a (4) feladat megadja, melyből az utolsó $n - m$ változót elhagyva, a visszamaradó feladat szintén azzal a tulajdonsággal bír, hogy létezik C-nek olyan intervalluma, melyben minden változó pozitív. Eredeti feladatunkat így visszavezettük egy méretében redukált feladatra.

Beruházónknak legyenek az alábbi tulajdonsággal bíró befektetési helyei:

$$b = 1; \quad \mathbf{a}' = [1;\ 1;\ 2;\ 3], \text{ és}$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & & & \\ & 0{,}2 & & \\ & & 0{,}2 & \\ & & & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

Mint ismeretes,

$$\mathbf{x} = -\mathbf{V}^{-1}\mathbf{1}u_1 - \mathbf{V}^{-1}\mathbf{a}u_2,$$

ahol (12)-höz hasonlóan

$$u_1 = -\frac{eb - dC}{ef - d^2}$$

$$u_2 = \frac{fC - db}{ef - d^2},$$

valamint

$$Z^2(C) = \frac{fC^2 - 2dbC + eb^2}{ef - d^2}.$$

Az alábbi értékekre van tehát szükségünk:

$$\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 10 & & & \\ & 5 & & \\ & & 5 & \\ & & & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M1} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Ma} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 10 \\ 6 \end{bmatrix};$$

$$f = 22; \quad d = 31; \quad e = 53; \quad ef - d^2 = 205.$$

Ezek felhasználásával:

$$x_1 = (-90C + 220)/205$$
$$x_2 = (-45C + 110)/205$$
$$x_3 = (\ 65C - \ 45)/205$$
$$x_4 = (\ 70C - \ 80)/205$$

A kifejezések alapján az $\mathbf{x} \geq \mathbf{o}$ egyenlőtlenségrendszert C-re megoldva kapjuk:

$$C \leq 220/90 = 2{,}44$$
$$C \leq 110/45 = 2{,}44$$
$$C \geq \ 45/65 = 0{,}69$$
$$C \geq \ 80/70 = 1{,}14,$$

tehát $C_0 = 1{,}14$; $C_1 = 2{,}44$ és így a $C_0 < C < C_1$ intervallumban valamennyi változó pozitív, a C_1-ben pedig az x_1 és x_2 változók válnak zéróvá. A $C \geq C_1$ intervallumban ezeket elhagyva, a redukált feladat inputjai:

$$\mathbf{a}' = [2;\ 3]; \qquad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0{,}2 & \\ & 0{,}5 \end{bmatrix},$$

és mivel csak két változónk van, ezek a $2 < C < 3$ intervallumban biztosan pozitív értékűek.

Egyébként: $f = 7$; $d = 16$; $e = 38$ és $ef - d^2 = 10$.

A $C = 1{,}14$ pontban $x_4 = 0$, ezért $C \leq 1{,}14$-ben a negyedik alternatívát törölve feladatunk inputjai:

$$\mathbf{a}' = [1;\ 1;\ 2]; \quad b = 1; \text{ és}$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & & \\ & 0{,}2 & \\ & & 0{,}2 \end{bmatrix}.$$

Ezekből

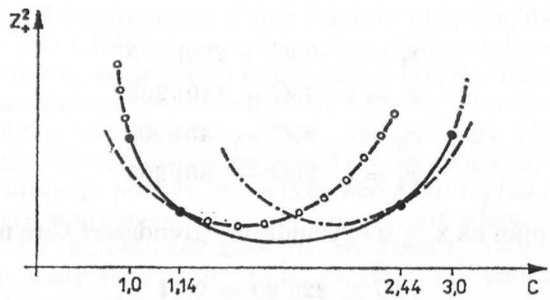
$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 10 & & \\ & 5 & \\ & & 5 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Ml} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Ma} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix},$$

és $f = 20$; $d = 25$; $e = 35$ valamint $ef - d^2 = 75$.

$$x_1 = (-50C + 100)/75$$
$$x_2 = (-25C + \ 50)/75$$
$$x_3 = (\ 75C - \ 75)/75,$$

melyből

$$C \leq 2$$
$$C \leq 2$$
$$C \geq 1.$$



2. ábra

Számításainkat az alábbi táblázat foglalja össze:

Intervallum	Változók értékei			
	x_1	x_2	x_3	x_4
C = 1	2/3	1/3	0	0
1 < C < 1,14	(−2C+4)/3	(−C+2)/3	C−1	0
1,14 ≤ C < 2,44	(−18C+44)/41	(−9C+22)/41	(13C−9)/41	(14C−16)/41
2,44 ≤ C < 3	0	0	−C+3	C−2
C = 3	0	0	0	1

Az egyes intervallumokhoz tartozó parabola ívek egyenlete, illetve az egyes pontokhoz tartozó értékek az alábbiak:

$$1/15$$
$$(4C^2 - 10C + 7)/15$$
$$(22C^2 - 62C + 53)/205$$
$$(7C^2 - 32C + 38)/10$$
$$0{,}5$$

Ezen leképezéseket a 2. ábra foglalja össze.

A táblázatnak megfelelően az (1,14; 2,44) intervallumban mind a négy változó pozitív, a $C = 2{,}44$ pontban az első két változó zéróvá válik és egy olyan parabola ív simul az előzőhöz, melyet két változó — az x_3 és x_4 — feszít ki. Kiemelendő még, hogy a Z_+^2 függvény folytonosan differenciálható, ugyanis a parabolaívek nem metszik egymást. (A 2. ábrán a Z_+^2 függvényt a folytonos vonal jelöli.)

2. Az általános szingularitás

A szinguláris eset a kockázat nélküli letét köntösében már régóta jelen van a pénzbefektetés-elméletben. Legyen ugyanis n kockázatos befektetési helye egy beruházónak oly módon, hogy a hozzátartozó kovariancia-variancia mátrix nem-szinguláris (pozitív definit). Ha most a befektetési helyek számát a kockázat nélküli letéttel vagy hitelfelvétellel bővítjük, az eset úgy is felfogható, hogy a $\mathbf{V}$ kovariancia-variancia mátrixot zéró oszlop és sorvektorral bővítjük, ezzel mátrixunk szinguláris – és így pozitív szemidefinit lesz. A TOBIN, SHARPE, LINTNER ([4], [3], [1]) vonal nyomán ismeretes, hogy ebben az esetben a $Z(C)$ függvény lineáris, MERTON [2]-ben pedig megadta ennek egyenletét előjelkötetlen esetre. [5] alapján ismert $Z_+(C)$ formája előjelkötött esetre. Mivel az általános (többszörös) szingularitás összefüggései előjelkötetlen esetre sem ismertek, a $Z^2(C)$ függvény meghatározását ezzel az esettel kezdjük.

Legyen adott az alábbi n változós feladat:

$$\begin{aligned} \mathbf{1}'\mathbf{x} &= b \\ \mathbf{a}'\mathbf{x} &= C \\ -\frac{1}{2}Z^2(C) &\equiv \max\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x}\right\}, \end{aligned} \tag{13}$$

ahol a $\mathbf{V} = [v_{ij}]$ mátrix $n\times n$-es és rangja m. Ennek megfelelően particionálva a mátrixot:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12} \\ \mathbf{V}_{21} & \mathbf{V}_{22} \end{bmatrix},$$

ahol $\mathbf{V}_{11}$ $m\times m$-es nem-szinguláris blokk, és ennek megfelelően $\mathbf{a}' = [\mathbf{a}_1'; \mathbf{a}_2']$. Legyen

$$\boldsymbol{\alpha}' = \mathbf{1}' - \mathbf{1}'\mathbf{V}_{11}^{-1}\mathbf{V}_{12}$$

$$\boldsymbol{\beta}' = \mathbf{a}_2' - \mathbf{a}_1'\mathbf{V}_{11}^{-1}\mathbf{V}_{12},$$

$$f = \mathbf{1}'\mathbf{V}_{11}^{-1}\mathbf{1}; \quad e = \mathbf{a}_1'\mathbf{V}_{11}^{-1}\mathbf{a}_1; \quad d = \mathbf{a}_1'\mathbf{V}_{11}^{-1}\mathbf{1}.$$

2. *tétel*: A (13) feladatban

$$Z^2(C) = \begin{cases} 0, \text{ ha } \boldsymbol{\alpha} \text{ és } \boldsymbol{\beta} \text{ függetlenek, vagy ha } a_i = a_j \\ \quad \forall i, j \in M \text{ és } \lambda\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} \text{ oly módon, hogy } \mathbf{a}_1 = \lambda\mathbf{1}; \\ \dfrac{(C-\lambda b)^2}{f\lambda^2 - 2d\lambda + e}, \text{ ha } \lambda\mathbf{a} = \boldsymbol{\beta} \text{ és } \boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}; \\ b^2/f, \text{ ha } \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \text{ és } \boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}; \\ \dfrac{fC^2 - 2dbC + eb^2}{ef - d^2}, \text{ ha } \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0} \text{ és nem áll fenn,} \\ \quad \text{hogy } a_i = a_j \ \forall i, j \in M\text{-re.} \end{cases}$$

Bizonyítás: A (13) feladat és (3) feladat Lagrange-függvénye megegyezik, és a hozzátartozó elsőrendű feltételek az alábbiak:

$$\mathbf{V}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{V}_{12}\mathbf{x}_2 = -\mathbf{1}u_1 - \mathbf{a}_1u_2 \tag{14a}$$

$$\mathbf{V}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{V}_{22}\mathbf{x}_2 = -\mathbf{1}u_1 - \mathbf{a}_2u_2 \tag{14b}$$

$$\mathbf{1}'\mathbf{x} = b \tag{14c}$$

$$\mathbf{a}'\mathbf{x} = C. \tag{14d}$$

(14a)-ból

$$\mathbf{x}_1 = -\mathbf{V}_{11}^{-1}\mathbf{1}u_1 - \mathbf{V}_{11}^{-1}\mathbf{a}_1u_2 - \mathbf{V}_{11}^{-1}\mathbf{V}_{12}\mathbf{x}_2, \tag{15}$$

melyet (14b)-ben helyettesítve, és felhasználva a szingularitás miatti

$$\mathbf{V}_{22} - \mathbf{V}_{21}\mathbf{V}_{11}^{-1}\mathbf{V}_{12} = \mathbf{0}$$

összefüggést, adódik, hogy

$$\boldsymbol{\alpha}u_1 + \boldsymbol{\beta}u_2 = \mathbf{0}. \tag{16a}$$

(15) felhasználásával

$$\mathbf{1}'\mathbf{x} = -fu_1 - du_2 + \boldsymbol{\alpha}'\mathbf{x}_2 = b \tag{16b}$$

$$\mathbf{a}'\mathbf{x} = -du_1 - eu_2 + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{x}_2 = C, \tag{16c}$$

a (14a–b) egyenletrendszert pedig szorozva az $\mathbf{x}'$ vektorral:

$$Z^2(C) = \mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x} = -bu_1 - Cu_2. \tag{17}$$

Ha az $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ vektorrendszer független, (16a)-nak csak az $u_1 = u_2 = 0$ a megoldása, melyből (17)-re

$$Z^2(C) = 0,$$

(14b–c)-re pedig

$$\boldsymbol{\alpha}'\mathbf{x}_2 = b \tag{18a}$$

$$\boldsymbol{\beta}'\mathbf{x}_2 = C \tag{18b}$$

adódik. Így (15) és (18) felhasználásával C függvényeként $\mathbf{x}$ értéke is megállapítható.

Ha most $\lambda\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$ és $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, (16a) felhasználásával

$$u_1 = -\lambda u_2, \tag{19}$$

és (16b)-ben mindkét oldalt λ-val szorozva majd (16c)-ből kivonva adódik, hogy

$$-u_2(f\lambda^2 - 2d\lambda + e) = C - \lambda b. \tag{20}$$

u_2 együtthatóját másként is megfogalmazhatjuk:

$$f\lambda^2 - 2d\lambda + e = (\mathbf{a}_1 - \lambda\mathbf{1})'\mathbf{V}_{11}^{-1}(\mathbf{a}_1 - \lambda\mathbf{1}).$$

Tehát: ha az $\mathbf{a}_1$ vektor komponensei azonosak és emellett λ értéke megegyezik ezen komponensekkel (azaz $a_1 = \lambda\mathbf{1}$) $\mathbf{V}_{11}^{-1}$ pozitív definit volta miatt u_2 együtthatója ekkor zéró, egyébként pozitív. Ha $f\lambda^2 - 2d\lambda + e = 0$, akkor C csak a λb értéket veheti fel, azaz $f(C)$ csak egy pontból áll. (17)-ben elvégezve a $C = \lambda b$ helyettesítést, és tekintettel a (19) alatti összefüggésre: $Z(\lambda b) = 0$.

Ha $f\lambda^2 - 2d\lambda + e \neq 0$, (20)-ból:

$$u_2 = -\frac{C - \lambda b}{f\lambda^2 - 2d + e}, \tag{21a}$$

és (19) felhasználásával

$$u_1 = \lambda\frac{C - \lambda b}{f\lambda^2 - 2d + e}. \tag{21b}$$

u_1 és u_2 értékeit (17)-ben helyettesítve célhoz érkeztünk:

$$Z^2(C) = \frac{(C - \lambda b)^2}{f\lambda^2 - 2d\lambda + e}. \tag{22}$$

Érdemes megjegyezni, hogy a pénzbefektetéselmélet jól ismert „kockázat nélküli letét" teljes ága (22) speciális eseteként tekinthető, amikor is λ értéke a kamatláb nagyságát reprezentálja.

A változók értékeinek meghatározására (15) és (16c) használandó fel.

Tovább vizsgálva a lehetséges eseteket, legyen most $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ és $\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$. (16a)-ból ekkor $u_2 = 0$ következik, melyet (16b)-ben felhasználva:

$$u_1 = -b/f.$$

Ekkor (17) a C tengellyel párhuzamos egyenes;

$$Z^2(C) = b^2/f.$$

Ha $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ mellett most még a $\boldsymbol{\beta}$ vektor is zéró, (16)-nak u_1- és u_2-re egyértelmű megoldása akkor lesz, ha az a_i-k között lesznek különbözők ($i \in M$). Ebben az esetben (16)-ból, (12) megoldásához hasonlóan:

$$u_1 = \frac{eb - dC}{ef - d^2}$$

$$u_2 = -\frac{fC - db}{ef - d^2},$$

azaz

$$Z^2(C) = \frac{fC^2 - 2db + eb^2}{ef - d^2}.$$

Ismét érdekes a nemnegativitási kikötéssel keletkező probléma. Hasonlóan az előjelkötetlen esethez, sok kimenet lehetséges, de célszerű itt is az előjelkötetlen esetből kiindulni, mégpedig oly módon, hogy megvizsgáljuk, van-e C-nek olyan intervalluma, melyben valamennyi változó nem-negatív. Ha létezik ilyen intervallum, megállapítjuk ennek maximális kiterjedését, melyet jelöljön ismét C_0 és C_1. Az első tétel gondolatmenetéhez hasonlóan ismét bizonyítható, hogy a határpontokban zéróvá váló változók a későbbi vizsgálatból kizárhatók.

Ha C-nek nem létezik az említett tulajdonsággal rendelkező intervalluma, a feladat ismét megoldható, ha képezzük az eredeti n változós feladatból előállított $(n - 1)$ változós feladatokat, feltéve, hogy ezen feladatnak létezik olyan C-beni intervalluma, melyben mind az $(n - 1)$ változó pozitív és a változóknak ezen státusa (tudniillik, hogy az n-edik zéró, míg a többi pozitív) kielégíti a KT feltételeket. Az eljárás inkább a feladat szerkezetének feltárására alkalmas, nagyobb méretű problémák megoldására bizonyára célszerűbb valamilyen numerikus technika alkalmazása, noha ezek nem adnak explicit megoldást.

Az elmondottak illusztrációját szolgálja az alábbi feladat, melynek inputjai:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0{,}4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}16 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 & 0{,}16 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{a}' = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad b = 1.$$

Ezekből

$$\mathbf{V}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\alpha}' = [0{,}6;\ 0{,}6]; \quad \boldsymbol{\beta}' = [0{,}4;\ -0{,}2],$$

tehát függetlenek. Olyan x_3 és x_4 értékeket keresünk, melyek egyrészt kielégítik az

$$\boldsymbol{\alpha}'\mathbf{x}_2 = 1,$$
$$\boldsymbol{\beta}'\mathbf{x}_2 = C$$

paraméteres egyenletrendszert (ahol most $\mathbf{x}_2' = [x_3;\ x_4]$), másrészt biztosítják, hogy x_1 és x_2 is nem negatív. (15) alapján tehát az

$$\mathbf{x}_1 + \mathbf{V}_{11}^{-1}\mathbf{V}_{12}\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$$
$$\boldsymbol{\alpha}'\mathbf{x}_2 = 1$$
$$\boldsymbol{\beta}'\mathbf{x}_2 = C$$

kanonikus forma nemnegatív megoldásait keressük, ahol C paraméter. A numerikus forma az alábbi:

	x_3	x_4	C	konst.
x_1	0,4	0	0	0
x_2	0	0,4	0	0
v_1^*	$\boxed{0{,}6}$	0,6	0	1
v_2^*	0,4	−0,2	1	0

Ebből kiindulva a bázistranszformációs lépések:

	x_4	C	konst.
x_1	−0,4	0	−0,67
x_2	0,4	0	0
x_3	1	0	1,67
v_2^*	$\boxed{-0{,}6}$	1	−0,67

	C	konst.
x_1	−0,67	−0,22 $\mapsto C \leq -0{,}33$
x_2	0,67	−0,45 $\mapsto C \geq 0{,}67$
x_3	1,67	0,55 $\mapsto C \geq 0{,}33$
x_4	−1,67	1,12 $\mapsto C \leq 0{,}67$

A számításokból kiderül tehát, hogy C-nek nincs olyan intervalluma, melyben valamennyi változó pozitív lenne, ezért C-nek olyan intervallumai létezhetnek ezek után, melyek legfeljebb három pozitív változóval rendelkeznek.

Tekintsük most az eredeti feladatból képzett azt a feladatot, mely nem tartalmazza az utolsó befektetési lehetőséget. Az inputok ekkor:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0{,}4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}16 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ismét

$$\mathbf{V}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

így $\alpha = 0{,}6$; $\beta = 0{,}4$; azaz a két vektor összefüggő és $\lambda = 0{,}667$, valamint $f = 2$; $d = 7$; $e = 25$ és így

$$f\lambda^2 - 2d\lambda + e = 16{,}556.$$

Az értékeket (21a) és (21b)-ben felhasználva, a (15) és (16c) által meghatározott kanonikus forma numerikus alakja:

	x_3	C	konst.
x_1	0,4	0,201	−0,134
x_2	0	0,141	−0,094
v^*	$\boxed{0{,}4}$	−0,228	0,819

Az egyetlen iterációt elvégezve táblánk formája:

	C	konst.
x_1	0,43	−0,953 → C $\geqq$ 2,22
x_2	0,141	−0,094 → C $\geqq$ 0,666
x_3	−0,571	2,047 → C $\leqq$ 3,58

A $2{,}22 < C < 3{,}58$ intervallumban az első három változó pozitív és $x_4 = 0$, ami egyébként a *KT* feltételeket kielégíti. Ebben az intervallumban a változók értékei tehát:

$$x_1 = 0{,}43C - 0{,}953$$

$$x_2 = 0{,}141C - 0{,}094$$

$$x_3 = -0{,}571 + 2{,}047$$

$$x_4 = 0.$$

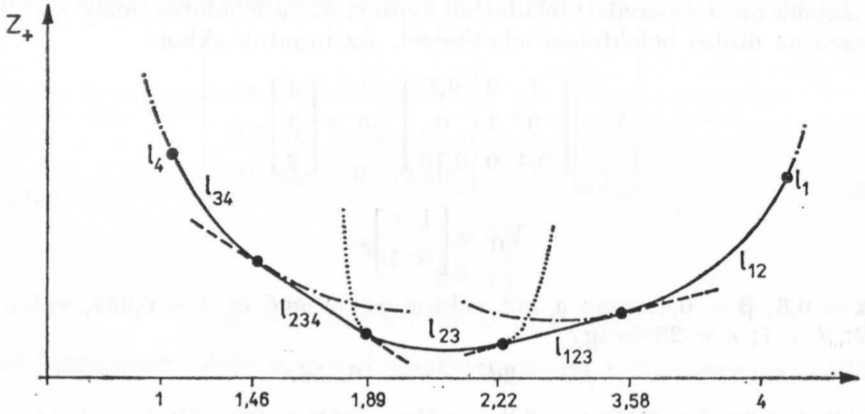
Ha most az eredeti feladatból az első alternatívát hagyjuk el, az $1{,}457 < C < 1{,}887$ intervallumban az utolsó három változó pozitív, a pontos értékek pedig:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0{,}372C - 0{,}54$$

$$x_3 = 0{,}317C + 0{,}125$$

$$x_4 = -0{,}75C + 1{,}415.$$



3. ábra

A $C = 2{,}22$ pontban az x_1 változó válik zérussá, tehát a $C \leq 2{,}22$ intervallumban létezik olyan megoldás, melyben x_2 és x_3 pozitív, míg $x_1 = x_4 = 0$. A $C = 1{,}89$ pontban az x_4 változó válik zérussá, tehát a $C \geq 1{,}89$ intervallumban létezik olyan megoldás, melyben x_2 és x_3 pozitív és $x_1 = x_4 = 0$. Mivel $a_1 = 4$ és $a_4 = 1$, ezért az eredeti feladatra a $1{,}89 \leq C \leq 2{,}22$ intervallumban $x_1 = x_4 = 0$ és x_2, x_3 pozitív. A számításokat a 3. ábra fogja össze, ahol az $l_{i_1, i_2, \dots, i_k}$ jelölés azt reprezentálja, hogy a jelzett intervallumban az $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ változók pozitívak.

(Beérkezett: 1984. július 13-án.)

IRODALOM

1. LINTNER, J.: Security Prices, Risk and Maximal Gains from Diversification. *The J. of Finance*, 20 (4), 587—615. o. 1968. March.
2. MERTON, R. C.: An Analytic Derivation of the Efficient Frontier,. *Journal of Finance and Quantitative Analysis*, 1972. Sept., 1851—1872. o.
3. SHARPE, W. F.: Capital Asset Prices, *The J. of Finance*, Sept. 1964., 19 (3), 425—442. o.
4. TOBIN, J.: Liquidity Preferences as Behavior Toward Risk, *Rev. of Economic Studies*. Febr. 1958.
5. VÖRÖS, J.: Pénzbefektetés-kombinációk vizsgálata, *Szigma*, 1983. 1—2. 94—117. o.

DEGENERATION AND SINGULARITY IN THE DERIVATION OF PORTFOLIO EFFICIENT FRONTIER

In an earlier paper the author discussed the explicit derivation of portfolio efficient frontiers and showed some properties of the mean-variance function. This comprised two important constraints: one of them was that the covariance-variance matrix is non-singular and the other that if short sales are allowed, only one of the variables becomes zero. The present paper removes these two constraints and gives a procedure for producing portfolio efficient frontiers and also shows that in this generalized case the shape of the mean-variance function does not change either, that is, it remains continuously differentiable and convex even if short sales are not allowed.

ДЕГЕНЕРАТИВНОСТЬ И СИНГУЛЯРНОСТЬ (ОСОБЕННОСТЬ) В АНАЛИЗЕ ПОМЕЩЕНИЯ КАПИТАЛА

Автор в одной из своих предыдущих статей рассматривал проблему эксплицитного представления комбинаций эффективного помещения капитала и показал некоторые особенности функции, определяющей взаимосвязь прибыль-риск. В ней имели место два важных ограничения: первое — то, что матрица коварианция-вариантция не является сингулярной (особенной), второе — то, что в случае свободного знака всегда лишь одна переменная становится нулевой. В настоящей статье разрешаются эти два прежних условия и дается метод получения эффективных комбинаций, а также показывается, что в этом обобщенном случае также не изменяется форма функции прибыль-риск, то есть по-прежнему сохраняется непрерывно диффеоенцируемая выпуклость и в случае свободного знака.

IDEGEN TOLLAK

Ray Rees

A megbízó és az ügyvivő elmélete*

1. rész

Bevezetés

A közgazdasági problémáknak tág és érdekes osztályát alkotják az átruházott döntések. Ezek lényege: valaki bizonyos ellenszolgáltatásért elvállalja, hogy más (vagy mások) érdekében hozzon döntéseket. Jó példa erre a menedzser, aki a részvényesek érdekeinek megfelelően irányítja a vállalatot, a munkavállaló, aki a munkaadónak dolgozik, a könyvszakértő, aki ügyfele adóügyeivel foglalkozik, az ingatlanügynök, aki másnak a házát értékesíti, a befektetési szakértő, aki kezeli a rábízott alapokat és részvényköteget, de ilyen munkát végez a közéleti politikus is és még sokan mások. A fenti szituáció modellezése során kiderül, hogy formális struktúrája a problémáknak egy még szélesebb körére alkalmazható, ahol explicit módon semmiféle formális döntésátruházásról nincs szó. Így például a tűz-, betörés- vagy balesetbiztosítást kötő egyén dönt bizonyos tevékenységek mértékéről, amelyek csökkentik azon események valószínűségét, amelyek ellen biztosította magát és ez kihat a biztosító társaság várható jövedelmére; avagy ugyanígy a veszélyes vegyianyagokkal dolgozó üzem döntései is hatással vannak egy esetleges baleset által másoknak okozott kár valószínűségére és nagyságára. A megbízó és az ügyvivő elmélete minden olyan esetre alkalmazható, amely az alábbi struktúrával rendelkezik: az ügyvivőnek nevezett és A-val jelölt egyén a tevékenységek adott $\{\mathrm{a}\}$ halmazából kiválasztja az a tevékenységét. Az ehhez a választáshoz tartozó x kimenet függ attól is, hogy a $\{\theta\}$-val jelölt állapothalmaznak, melyik eleme érvényesül az adott időpontban, tehát a bizonytalanság a szituáció természetéből fakad. Az x kimenet bizonyos hasznosságot hoz létre a P-vel jelölt megbízó számára. Definiálandó egy szerződés, melynek értelmében P y nagyságú kifizetést teljesít A részére. A hasznossága részben ettől az y-tól, részben pedig az a akció értékétől függ. A megbízó-ügyvivő elmélet fő célja, hogy meghatározza ezeknek a szerződéseknek optimális jellemzőit, különböző feltevésekkel élve P, illetve A meglévő és megszerezhető információira vonatkozóan, és hogy ezáltal remélhetőleg meg tudja magyarázni a ténylegesen megfigyelhető szerződések jellemzőit. Hangsúlyozni kell, hogy a „szerződés" szót igen tágan értelmezzük. Ez vonatkozhat akár formális dokumentumra, például biztosítási vagy részesbérleti szerződésre, akár implicit megegyezésre, ami például az alkalmazotti kapcsolatot jellemzi. De ide sorolhatók a büntető-jutalmazó rendszerek is,

* Ray Rees: The Theory of Principal and Agent, *Bulletin of Economic Research* 37: 1, 1985. Fordította: *Király Júlia*. A „principal-agent" elméletet „megbízó-ügyvivő" problémaként magyarítottuk. („*Ügyvivő*: fn, *rég*: Megbízott, meghatalmazott". Magyar értelmező kéziszótár) A matematikai leírás során meghagytuk az angol eredetire utaló P (= principal) és A (agent) jelöléseket. (Ford.)

amelyeket egyáltalán nem rögzítenek formális szerződésekben, így például azok a szabályok, amelyek alapján a mérgező vegyianyagok szivárgása okozta károkért a felelősséget megállapítják. Mint a közgazdaságtanban megszoktuk: egy konkrét példa által előhívott formális struktúra szélesebb körben is alkalmazható.

Ebben a tanulmányban a megbízó-ügyvivő elmélet szakirodalmát tekintem át a következő értelemben. Felvázolom a szakirodalomban meghatározott problémának a modelljét, és bemutatom az eddig elért főbb eredményeket. Ezt tartalmazza az első rész. A második részben megvizsgálom az elmélet főbb alkalmazási területeit. Természetesen a kifejtés során mindig hivatkozom az elemzést és az eredményeket kidolgozó tanulmányokra. Ugyanakkor egyáltalán nem áll szándékomban explicit módon egyes cikkek elemzése avagy értékelése —, azaz ez az áttekintés nem „ki mondta, mit mondott, mikor mondta (és igaza volt-e)?" típusú. A tanulmány fő célja, hogy világos áttekintést adjon az elméletről, bemutassa a tényleges és a potenciális alkalmazási területeket és hogy az elmélettel csak most ismerkedő közgazdának felvillantsa a benne rejlő érdekes és lényeges közgazdasági gondolatokat.

1. rész: Az elmélet

1. A formális modell

Ismertetésünket a tanulmány hátralevő részében is használandó modell felvázolásával kezdjük. P megbízó egy *Neumann—Morgenstern* (N—M) típusú $u\ (x - y)$ alakú hasznossági függvénnyel rendelkezik, amely közvetlenül nem függ a környezet θ állapotától, korlátos és akárhányszor folytonosan differenciálható. Ezen belül $u' > 0$ és $u'' < 0$, így kizárjuk a kockázatot kedvelő magatartást. Hasonlóképpen az A ügyvivő $v(y, a)$ hasznossági függvénye is $N—M$ típusú, továbbá $v_y > 0$, $v_{yy} \leq 0$, $v_a < 0$, $v_{aa} > 0$, így A szintén vagy közömbös ($v_{yy} = 0$) vagy averziót mutat ($v_{yy} < 0$) a kockázattal szemben. Azt a feltevést fogadtuk el, hogy a csökkenti A hasznosságát, mivel a legtöbb alkalmazásnál **a**-t erőfeszítésként avagy kiadásként értelmezik, amely A részéről P érdekében merül fel. Vegyük észre, hogy P közömbös az A választotta **a**-val, mint olyannal szemben, őt csak a kimeneti érték érdekli, levonva ebből az A-nak fizetendő összeget. Ebből erőteljes konfliktus ered A és P között.[1] Ha — mint azt feltételeztük — A saját érdekei szerint cselekszik, akkor a szerződés megtervezésekor fel kell ismerni, hogy az **a**-ból származó hasznosság-csökkenés A-t esetleg arra viszi, hogy ne tartsa maximálisan szem előtt P érdekeit. Természetesen erről a problémáról a későbbiekben még sok mondanivalónk lesz.

[1] Ross két tanulmánya (1973, 1974), amely a megbízó-ügyvivő probléma tanulmányozásának elindítója lett, valójában azt teszi fel, hogy az A hasznossági függvénye nem tartalmazza **a**-t. Érdekkonfliktus így akkor lép fel, ha a két hasznossági függvény lényegileg különbözik, azaz *nem létezik* olyan $\alpha > 0$, és β, hogy $v = \alpha u + \beta$ (ne felejtsük el, hogy az N—M hasznossági függvény érzéketlen a pozitív lineáris transzformációra). Ha azonban **a**-t kizárjuk v-ből, akkor a probléma pusztán a kockázat-viselését osztja meg és nem terjed ki az érdekeltségre és a morális-kockázatra, amelyek pedig centrális kérdéseknek tekinthetők a megbízó és az ügyvivő kapcsolata szempontjából. A következő fejezetek feladata e kérdés jobb megvilágítása.

Az általánosság nagyobb megsértése nélkül feltételezhetjük, hogy a $\{\theta\}$ állapothalmazt jól reprezentálja a $[0, 1]$ zárt intervallum. Lényeges az a feltevés, hogy P és A azonos valószínűségi elképzelésekkel rendelkezik a környezet állapotaira vonatkozóan, azaz azonos az $f(\theta)$ sűrűségfüggvényük. Ez már lényegi megszorítás, mivel azt gondolhatnánk, hogy a megbízó és az ügyvivő kapcsolatának fontos aspektusa, hogy A bővebb információval rendelkezik nemcsak a lehetséges állapotok előfordulásáról, de maguknak az állapotoknak a mibenlétéről is, mint P. A következőkben néhány ponton majd jelezzük az eltérő valószínűségi megítélések várható következményeit, de a szakirodalom egésze az azonos valószínűségeloszlás feltételezésén alapszik és teljes általánosítással eddig nem találkoztunk.

Adott lévén az A választotta **a** még *mielőtt* a környezet állapota ismertté vált volna, az x kimenet értéke θ-tól függ, így írhatjuk, hogy $x = x(a, \theta)$. Feltételezzük, hogy x . . . tetszőlegesen folytonosan differenciálható, $x_a \geq 0$, $x_{aa} \leq 0$ és az egyszerűség kedvéért $x_\theta \geq 0$, tehát θ nagyobb értékei valamilyen, értelemben kedvezőbb állapotokat reprezentálnak. x_a-t úgy értelmezhetjük, mint a határtermékét, amiről feltesszük, hogy mindig pozitív és nem növekvő.

Ezeket a jelöléseket használva a következőképpen írhatjuk fel a megbízó-ügyvivő alapproblémát. P-nek egy olyan kifizetési sémát kell választania, amely legáltalánosabb formájában x-től θ-tól, a-tól és más egyéb z változóktól[2] függő, y nagyságú fizetséget biztosít A-nak, azaz $y = y(x, \theta, a, z)$. z-t úgy értelmezhetjük, mint ami valamifajta (általában tökéletlen) információt nyújt **a**-ról vagy θ-ról éspedig ingyenesen. A megbízó-ügyvivő elmélet centrális feltevése, ami megkülönbözteti az „érdekeltségek illeszthetősége" elmélet irodalmától* (erre vonatkozóan lásd HAMMOND (1979) művét és a szimpoziumon elhangzott további előadásokat) arra vonatkozik, hogy a kifizetési séma csak olyan tényezőktől függ, melyeket *mindkét* fél képes megfigyelni. Továbbá feltesszük, hogy A ismeri **a**-t (csakúgy, mint $u(.)$-t), és meg tudja figyelni x-et és θ-t. Ily módon különböző variációk csak a P számára hozzáférhető információkkal kapcsolatban merülnek fel. Mindig feltesszük, hogy P ismeri $x(a, \theta)$-t (csakúgy, mint $v(. , .)$-t) és mindig meg tudja figyelni x-et. Ebből következően, ha meg tudja figyelni **a** és θ közül valamelyiket, akkor a másikra már következtethet *ex post* az $x(a, \theta)$-ból. Tehát két esetet érdemes elkülöníteni:

i) P meg tudja figyelni **a**-t (vagy θ-t) és ezáltal θ-t (illetve **a**-t) is. Ebben az esetben nincs szüksége z-re, mivel minden további (tökéletlen) információ redundáns.[3] Ekkor a kifizetési függvény is úgy tekinthető, mint ami kizárólag θ-tól függ, tehát P oly módon határozza meg a kifizetési sémát és A számára **a** értékét, hogy maximalizálja várható hasznosságát, kielégítve azt a megszorítást, hogy A legalább egy minimális várható hasznosságot, $\bar{v}^\circ$, érjen el, amire

[2] Fölösleges mondanunk, hogy a legáltalánosabb tárgyalásmódban x, **a** és z bármelyike vagy akár mindegyike vektor is lehet, nemcsak skalár. Azonban semmi lényegeset nem hagyunk figyelmen kívül, ha az itt vizsgált egyszerűbb esetre korlátozzuk magunkat.

* Az „incentive compatibility" elmélet csak igen nyakatekerten magyarítható az „érdekeltség illeszthetősége" problémájává, de jobb megoldást nem találtunk. (Ford.)

[3] HARRIS és RAVIV (1978) a tétel szigorú bizonyítását közlik és számos egyéb olyan állítást, amit itt elfogadunk. Azt is megmutatják, hogy a tanulmányukban arra az esetre közölt eredmény, amikor **a**-t még azelőtt választják meg, mielőtt a környezet állapota ismertté válna, könnyen kiterjeszthető arra az esetre, mikor **a**-t θ ismeretében választják.

a továbbiakban *visszatartott hasznosságként* (reservation utility) fogunk hivatkozni.[4] Mint azt a következő két fejezetben megmutatjuk, ebben az esetben lehetséges egy első-legjobb (first-best) optimális kockázat-megosztó szerződés, miközben a morális-kockázati (moral hazard) vagy az érdekeltségi probléma *kényszerítő szerződéssel* oldódik meg. Ez az eredmény érvényes abban az esetben is, ha a csak bizonyos véletlen hibával figyelhető meg, bizonyos korlátossági feltételek mellett.

ii) A második esetben P sem **a**-t sem θ-t nem tudja megfigyelni. Ekkor egy tényleges morális-kockázati problémával állunk szemben. P-nek fel kell ismernie, hogy adott kifizetési séma mellett A úgy választja meg **a**-t, hogy saját várható hasznosságát maximalizálja és ez általában más **a**-t fog eredményezni, mint ami a kifizetési függvényt optimalizálja. Ha **a** illetve θ nem megfigyelhető, akkor P nem is tudja őket közvetlenül kontrollálni és ily módon P optimalizációs feladatában a visszatartott hasznosság korlátját egy újabb, úgynevezett *érdekeltségi* korláttal kell kiegészítenünk.[5] Más szavakkal: P-nek figyelembe kell vennie, hogy az általa meghatározott kifizetési függvény A optimalizáló eljárásán keresztül meghatározza **a**-t és ily módon befolyásolja a végső egyensúlyt. Ez általában eltéréshez vezet az optimális kockázat-megosztó megoldástól: átváltás (trade-off) keletkezik a kockázat-megosztásból eredő nyereség és a között, hogy ösztönözni kell, hogyan válassza ki A az **a**-t, ami az érdekeltség bevezetését kívánja. Az is megmutatható, hogy amennyiben létezik az **a**-ról — noha csak „zajos" információt nyújtó z változó, amely θ-tól függ, akkor, kivéve azt az esetet, mikor A kockázat-közömbös, az optimum eléréséhez z-t be kell vonni a szerződésbe és y-t tőle függővé tenni, noha ez az eredmény bizonyára módosul, ha z megszerzése költséges.

A következő öt fejezetben ezeket az eseteket fogjuk elemezni. Az elemzés sokat merít Holmström (1979) és Shavell (1979) írásaiból és minden amit itt egyszerűen csak állítunk erőteljesen támaszkodik Harris és Raviv (1978) szigorú bizonyításaira. A valódi megbízó-ügyvivő probléma tulajdonképpen az ii) eset, de kiindulásként érdemes az i) esetet is áttekinteni.

2. *Optimális kockázat-megosztás*

Mivel a megbízó-ügyvivő elmélet alapfeladata olyan kifizetési séma meghatározása, amely optimális átváltást eredményez a kockázat-megosztásból származó haszon és az ügyvivőt ösztönző fizetség között, célszerű a kockázat-megosztást izoláltan is megvizsgálni. Ez úgy valósítható meg, hogy kiindulópontul az általános modellt választjuk, és az ügynök akciójának értékét önkényesen

[4] Ezt a visszatartott hasznosságot sosem vizsgálták meg alaposabban a szakirodalomban. Általában a „piac által meghatározottnak" tekintik, és ennyiben is hagyják a kérdést. Azonban ez mégis csak fontos probléma, mivel a legtöbb modell megoldásakor A csak $\bar{v}^{\circ}$ nagyságot kap, miközben P kisajátítja az ügyletből származó teljes hasznot. (Grosman—Mart (1983) tanulmánya az egyetlen, amely valóban — a 3. tételben — explicit módon megvizsgálja, vajon lehetséges-e az egyensúlyban $v > \bar{v}^{\circ}$.) Nyilvánvalóan a megbízó és az ügyvivő közti piaci kapcsolatok elméletére van szükség, olyan további kutatásra, melyet Ross (1973) már a kezdet kezdetén indítványozott, de amelyet azóta sem végeztek el.

[5] Ez a pótlólagos feltevés ekkor az (i) esetben megfogalmazott problémához képest második-legjobbnak tekinthető feladathoz vezet. Struktúrája lényegében igen hasonló azokéhoz a problémákéhoz, amelyeket a „második-legjobb" elmélet tanulmányozása során vizsgáltak meg, lásd például Lipsey—Lancaster (1956) és Davis—Whinston (1965).

rögzítjük: a = a°. Ekkor feltesszük, hogy a vagy θ költségmentesen megfigyelhető, tehát y úgy tekinthető, mint ami csak θ-tól függ. Kockázat-megosztó optimum alatt ekkor olyan $y^*(\theta)$ kifizetést (P fizeti A-nak) értünk, amely Pareto-hatékony, azaz maximalizálja P várható hasznosságát A adott minimális $\bar{v}^\circ$ hasznossági szintje mellett. Azaz az alábbi probléma megoldását keressük:[6]

$$\max_{y(\theta)} \int_0^1 u\big(x(a^\circ, \theta) - y(\theta)\big)f(\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$\text{feltéve:} \int_0^1 v\big(a^\circ, y(\theta)\big)f(\theta)\mathrm{d}\theta \geq \bar{v}^\circ. \qquad (R)$$

Az $y^*(\theta)$ megoldást,[7] amely megadja minden θ-ra, hogy P mennyit fizessen A-nak, az alábbi feltétellel jellemezhetjük:[8]

$$-u'(x - y^*) + \lambda v_y = 0, \; \forall\theta \in [0, 1], \qquad (1)$$

ahol λ a hagyományos Lagrange multiplikátor, amely – ezt feltétlenül ki kell emelnünk – *nem* függ θ-tól.

Mivel (1)-ből azt kapjuk, hogy $\lambda = u'/v_y$, azaz bármely θ mellett P és A jövedelmének határhasznossági arányával egyezik meg, arra jutunk, hogy P jövedelem-telítetlensége esetén $\lambda > 0$. Tehát az (R) korlátnak egyenlőségként kell teljesülnie – A csak visszatartott hasznosságát kapja meg ($\bar{v}^\circ$-t).

Ha két különböző $\theta_1 \neq \theta_2$ állapotot tekintünk, akkor (1)-ből az alábbiak következnek (értelemszerű jelölésekkel):

$$\frac{u'(\theta_1)}{v_y(\theta_1)} = \frac{u'(\theta_2)}{v_y(\theta_2)} \Rightarrow \frac{u'(\theta_1)}{u'(\theta_2)} = \frac{v_y(\theta_1)}{v_y(\theta_2)}. \qquad (2)$$

Tehát az optimális kockázat-megosztás következménye, hogy P és A jövedelmének bármely két állapot közötti határ-aránya egyenlő. A fenti eredmény tökéletesen konvencionális jellege azonnal kitűnik, ahogy egy pillantást vetünk a helyzetet leíró 1. ábrára, ahol egy Edgeworth–Bowley „dobozt" ábrázoltunk. A vízszintes távolságot $x(a^\circ, \theta_1)$ adja meg, a függőlegest pedig $x(a^\circ, \theta_2)$, azaz a θ_1 és θ_2 állapotokban adott jövedelemnagyságok.

P közömbösségi görbéit, azaz konstans várható hasznosságú helyeit az O_P ponthoz, mint origóhoz viszonyítva rajzoltuk fel, míg A esetében az O_A pont jelöli az origót. Az origókból induló 45°-os egyenesek a teljes bizonyosság egyenesei: így például az O_PC egyenes mentén P tökéletesen biztos jövedelmet élvez.

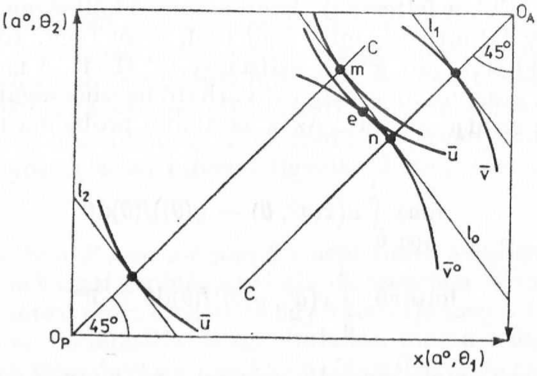
[6] Szigorúan véve a feladatra ki kellene rónunk a

$$y(\theta) \in [y^0, x(a^0, \theta)], \forall\theta$$

feltételt is, ahol $y^0 \lesseqgtr 0$ A-nak valamely alsó jövedelmi korlátja, de az egyszerűség kedvéért olyan megoldást tételezünk, amelyik belső pont: minden állapotban P is és A is pozitív hányadot kap az x kimenetből.

[7] Ezt úgy kapjuk, ha előállítjuk az $\{u + \lambda(v - v^\circ)\} \cdot f(\theta)$ függvényt és megkeressük y-ra vonatkozó maximumát minden θ-ra, azaz pontonkénti maximalizálást végzünk.

[8] Ezt a megoldást elsőként Borch (1962) mutatta meg.



1. ábra. Optimális kockázat-megosztás

Az l_0, l_1, l_2 egyenesek[9] meredekségét az $f(\theta_1)/f(\theta)_2$ valószínűségi arány határozza meg és mivel feltettük, hogy a valószínűségi elképzeléseik azonosak, az egyenesek meredeksége megegyezik P-re és A-ra. A $\bar{v}^\circ$ közömbösségi görbe A visszatartott hasznosságát adja meg, így az (1) feltétellel konzisztens egyik egyensúlyi pontot e példázza. Nyilvánvaló, hogy ez a Pareto-hatékonyság szabványos feltétele a fogyasztás allokációjára, ahol az állapotfüggő $y(\theta)$ és $x(\theta) - y(\theta)$ jövedelmeket közönséges áruknak tekintik.

A megbízó-ügyvivő elmélet két további érdekes eredménye is leolvasható az ábráról. Tegyük fel, hogy P közömbös a kockázattal szemben. Ekkor közömbösségi görbéi éppen egybeesnek az l_0, l_1, l_2 egyenesekkel.[10] Ismételten, az azonos valószínűségi elképzelések feltevéséből következően az egyetlen pont, ahol ezek merőlegesek A visszatartott közömbösségi görbéjére ($\bar{v}^\circ$-ra) az O_AC teljes bizonyossági egyenes mentén helyezkedik el: n-ben. Azaz, ha P közömbös, A pedig averziót mutat a kockázattal szemben, az optimális kockázat-megosztás azt jelenti, hogy P „tökéletesen biztosítja" A-t, olyan jövedelmet ad neki, amely θ-tól független, azaz *biztos* jövedelemhez juttatja, és P vállalja a teljes kockázatot. Éppen az ellenkezője fordul elő, ha A közömbös, és P mutat averziót a kockázattal szemben — az ábrán az egyensúly az m pontban jön létre — ekkor P jut garantált jövedelemhez és A viseli az összes kockázatot. Ha pedig mindketten közömbösek, akkor az l_0 egyenes mentén valamennyi pont egyensúlyi pont.

[9] Nem véletlen, hogy a konvex közömbösségi görbék éppen az O_PC és O_AC bizonyossági egyenesek mentén merőlegesek ezekre az egyenesekre. Így például, mivel a *várható hasznosság* konstans egy közömbösségi görbe mentén, azt kell, hogy kapjuk:

$$\frac{dy(\theta_2)}{dy(\theta_1)} = \frac{-f(\theta_1)v_y(\theta_1)}{f(\theta_2)v_y(\theta_2)}.$$

De ahol $y(\theta_1) = y(\theta_2)$ ott $v_y(\theta_1) = v_y(\theta_2)$ és így az állapot-függő jövedelmek helyettesítési határaránya megegyezik az e ponthoz tartozó valószínűségi arányokkal.

[10] Tehát a (9) lábjegyzetben $v_y(\theta_1) = v_y(\theta_2)$ vehető minden y-ra, mivel a kockázatközömbösségből következik, hogy A jövedelmének határhaszna független a jövedelemtől. Ekkor $dy_2/dy_1 = -f(\theta_1)/f(\theta_2)$ minden y-ra. Nyilvánvaló, hogy ugyanez fennáll P helyettesítési határarányára is.

Ezeket a megjegyzéseket általánosíthatjuk is, ha alaposabban szemügyre vesszük az (1) feltétel által implicit módon meghatározott kifizetési függvény lehetséges alakjait. Ezekről úgy kaphatunk bővebb információt, ha a feltételt θ szerint deriváljuk, nem elfelejtve, hogy $\lambda = u'/v_y$ valamennyi θ-ra konstans. Ekkor kapjuk, hogy:

$$-u''\left(\frac{\partial x}{\partial \theta} - \frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}\theta}\right) + \lambda v_{yy}\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}\theta} = 0. \tag{3}$$

Bevezetjük az abszolút kockázati-averzió *Pratt—Arrow*-féle indexét, melynek definíciója:

$$r_P \equiv \frac{-u''}{u'}, \quad r_A \equiv \frac{-v_{yy}}{v_y}.$$

Ekkor λ-t behelyettesítve (3)-ba, átrendezés után kapjuk, hogy:

$$\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}\theta} = \frac{r_P}{r_P + r_A}\frac{\partial x}{\partial \theta}. \tag{4}$$

Feltéve, hogy mindkét fél kockázat-averziót mutat, azaz $r_P > 0$ $r_A > 0$, és így (4)-ből az következik, hogyha θ nő, úgy x is nő (mint már korábban feltettük), akkor beláthatjuk, hogy y is nő, csak lassabban. Ekkor *lineáris*, azaz $y = \alpha x + \beta$ alakú kifizetési függvény létezésének elégséges feltétele nyilvánvalóan az, hogy A és P egyaránt konstans abszolút kockázati averziót mutassanak, mivel ebben az esetben $r_P/(r_P + r_A)$ konstans, és (4)-et integrálva θ szerint ezt kapjuk:

$$y^*(\theta) = \alpha x(a^0, \theta) + \beta, \ \alpha = \frac{r_P}{r_P + r_A}, \tag{5}$$

ahol β az integrációs konstans. Továbbá, ha $r_P = 0$, azaz P kockázat-közömbös, akkor azonnal észrevehetjük, hogy

$$y^*(\theta) = \beta \tag{6}$$

kell, hogy teljesüljön, amiből következik, hogy P vállalja a teljes kockázatot, mint azt az 1. ábra elemzésekor láttuk. Ha A kockázat-közömbös, azaz $r_A = 0$, akkor a kifizetési függvény alakja:

$$y^*(\theta) = x(a^0, \theta) - \gamma, \tag{7}$$

azaz A rögzített γ nagyságot fizet P-nek és övé a maradék jövedelem.

Noha rendkívül vonzó ezeknek a speciális eseteknek az egyszerűsége, azonban általában a konstans kockázat-averzió, nem is beszélve a zéró kockázati-averzióról, igencsak speciális eseteknek tekinthetők. Ha — és ez egy szokásosabb feltevés — r_P és r_A a jövedelemnek csökkenő függvényei, akkor $y(\theta)$ alakja a kockázati-averziók relatív megváltozásától és $x(a^0, \theta)$ alakjától egyaránt függ, így $y(\theta)$ lehet nem-lineáris, konvex vagy konkáv, vagy egyik sem.[11] Kétségtele-

[11] Így (4)-et θ szerint deriválva azt kapjuk, hogy mégha $d^2x/d\theta^2$ előjelét ismerjük is, és mindkét hasznossági függvényre csökkenő kockázati-averzió jellemző, akkor sem tudjuk megmondani minden esetben $\mathrm{d}^2y^*/\mathrm{d}\theta^2$ előjelét — ez attól függ, milyen A, illetve P kockázati-averzió csökkenésének aránya.

nül elképzelhető az esetek taxonómiája, ám ez most rendkívül messze vinne bennünket kitűzött célunktól. Az egyszerű kockázat-megosztás csak kezdeti lépés a megbízó-ügyvivő modell elemzésében, így térjünk ehhez vissza és vizsgáljuk meg mi lesz annak következménye, ha **a** — változását is megengedjük.[12]

3. Az érdekeltségi probléma

Megmutatjuk, hogy abban az esetben, ha a megfigyelhető, „első-legjobb" Pareto-optimum is elérhető, ahol ez az optimum egyaránt vonatkozik a kockázat-megosztásra és **a**-megválasztásra is A által. Tehát P meg tudja oldani az alábbi problémát:

$$\max_{a,y(\theta)} \int_0^1 u\big(x(a,\theta) - y(\theta)\big)f(\theta)\mathrm{d}\theta$$
$$\text{feltéve: } \int_0^1 v\big(a, y(\theta)\big)f(\theta)\mathrm{d}\theta \geq \bar{v}^0, \qquad (FB)$$

ahol most mind y mind **a** változók. Vegyük észre, hogy **a**-t azelőtt kell megválasztani, mielőtt a környezet állapota ismertté válna, így **a** nem függ θ-tól. Ekkor az első legjobb Pareto-optimumot A számára egy optimális **a*** cselekvés és egy ennek megfelelő optimális $y^*(\theta)$ kifizető függvény adja. A P és A közötti szerződés specifikálja ezt a kifizetési sémát, annak ellenében, hogy A megválasztja **a***-ot. Mint később látni fogjuk, A abban érdekelt, hogy kijátssza a szerződést, és *feltéve,* hogy $y^*(\theta)$ összeget fog kapni egy $\hat{\mathbf{a}} \neq \mathbf{a}^*$ cselekvést válasszon. Azonban ha P költségmentesen meg tudja figyelni **a**-t, akkor a szerződés tartalmazhat egy ún. „kényszerítő záradékot", amely kimondja: ha *ex post* $\hat{\mathbf{a}} < \mathbf{a}^*$, akkor csak egy bizonyos $\hat{y}(\theta) < y^*(\theta)$ összeg kerül kifizetésre és természetesen $\hat{y}(\theta)$ elég kicsi lehet ahhoz, hogy A-t rákényszerítse **a*** választására (ne felejtsük el, hogy P ismeri $v(y, a)$-t). Vizsgáljuk meg tehát az érdekeltségi probléma mellőzésével az első-legjobb megoldást!

FB megoldását az alábbi feltételek jellemzik:

$$-u' + \lambda v_y = 0 \qquad (8)$$

$$E[u'x_a + \lambda v_a] = 0, \qquad (9)$$

ahol az E várakozási operátor váltotta fel az integrál-jelölést. Megintcsak áll a Lagrange-szorzóra, hogy $\lambda > 0$, ha $u' > 0$. Tehát A csak $\bar{v}^0$ összeget kap.

[12] Röviden kimutathatjuk P és A eltérő valószínűségi meggondolásainak hatását.Ebben az esetben (1) az

$$-u'f(\theta) + \lambda v_y g(\theta) = 0 \qquad (1')$$

alakot ölti, ahol $g(\theta) \not\equiv f(\theta)$ A-nak a θ-ra vonatkozó sűrűségfüggvénye. Ekkor (4) helyett ezt írhatjuk:

$$\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}\theta} = \left(\frac{r_P}{r_P + r_A}\right)\frac{\partial x}{\partial \theta} + \left(\frac{1}{r_P + r_A}\right)\left\{\frac{g'}{g} - \frac{f'}{f}\right\}. \qquad (4')$$

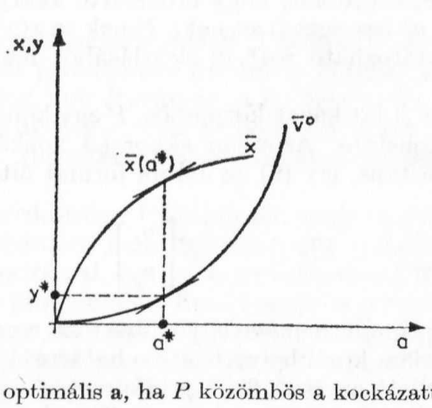
Tehát ekkor y^*-nak x vagy θ szerinti változása P és A valószínűségi megfontolásaitól is függ és a konstans abszolút kockázati-averzió feltevése már korántsem elegendő lineáris optimális kifizetési séma meglétéhez, és P vagy A kockázat-közömbösségéből ekkor nem következik az előzőekben leírt egyszerű „teljes biztosítási" eredmény.

Vegyük észre, hogy mivel **a**-t optimálisan választották, a (8) feltétel megfelel az (1)-nek és ugyanúgy az optimális kockázat-megosztáshoz jutunk, mint az előbb: *ha adott* **a** választása akkor P és A Pareto-hatékonyan osztják meg az x eloszlásából származó kockázatot. Az új elemet a (9) feltétel jelenti, amely **a** optimális megválasztására vonatkozik, és közvetlenül értelmezhető. A környezet bármely állapota mellett $u'\,x_a$ úgy interpretálható, mint **a** határterméke P hasznosságában, illetve „u-haszonegységekben" mérve, azaz:

$$\frac{du}{da} = \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial a}\,.$$

Ekkor λv_a úgy értelmezhető, mint **a** határköltsége „u-haszonegységekben" mérve. Az optimumban, ahol $\lambda = u'/v_y$, λ megadja hány „u-haszonegységet" kell P-nek feláldoznia, hogy A-nak egy „v-haszonegység" jusson; miközben v_a megadja mennyi „v-haszonegységet" követel A fizetségként **a** egyetlen határdarabkájáért (ne felejtsük el: $v_a < 0$). Így tehát $(u'x_a + \lambda v_a)$ nem más, mint **a** határtermék-értéke „u-haszonegységben" mérve.[13] Ha **a** állapot-függő lenne, akkor P úgy választaná meg **a**-t, hogy ezt a netto határtermék értéket zéróvá tegye (azaz a határtermékérték megegyezzen a határköltséggel) bármely állapot esetén. De mivel **a**-t még azelőtt kell megválasztani, hogy a környezet állapota ismertté vált volna, a határtermék és a határköltség csak várható értékükben egyeznek meg — a környezeti állapotok eloszlásán értelmezve.

Mivel korábban a kockázat-megosztó szerződés formáját tetszőlegesen választott **a** mellett elemeztük, az így kapott eredmények érvényesek maradnak az optimális **a*** mellett is. A lényeges az, hogy már **a** megfigyelhetőségéből is következik, hogy lehetséges Pareto-optimális kockázat-megosztás. Ismétcsak érdekes a két speciális eset, P illetve A kockázat-közömbössége. Tegyük fel, hogy



2. ábra. Az optimális **a**, ha P közömbös a kockázattal szemben

[13] Tehát λ dimenziója:

$$\frac{u\text{-haszonegység}/\$}{v\text{-haszonegység}/\$} = u\text{-haszonegység}/v\text{-haszonegység},$$

míg v_a dimenziója:

$$\frac{u\text{-haszonegység}}{v\text{-haszonegység}} \cdot \frac{v\text{-haszonegység}}{\mathbf{a}\text{-egység}} = u\text{-haszonegység}/\mathbf{a}\text{-egység}.$$

P kockázat-közömbös, azaz u konstans. A korábbi elemzésekből tudjuk, hogy ekkor y^* is konstans, és így, mivel **a** független θ-tól, azt kapjuk, hogy minden állapotra $v(y^*, a^*) = \bar{v}^\circ$. A szokásos feltevések mellett, y-t biztosnak tekintve, a 2. ábrán felvázolhatjuk A-nak ezt a hasznossági függvényét, $\bar{v}^\circ$-ként. Ha u-t (9)-ben konstansnak tekintjük, λ-t helyettesítjük és szem előtt tartjuk, hogy v_a és v_y függetlenek θ-tól, azt kapjuk, hogy:

$$E[x_a] = \frac{-v_a}{v_y}, \tag{10}$$

vagyis, hogy az optimumban a várható határterméke egyenlő A-nak **a** és a jövedelem közti egyetlen helyettesítési határrátájával. Ekkor értelmezzük az alábbi függvényt:

$$\bar{x}(a) = \int_0^1 x(a, \theta) f(\theta) \mathrm{d}\theta, \tag{11}$$

ami θ értelmezési tartományán megadja x várható értékét minden **a**-ra. Ezt a függvényt ábrázoltuk $\bar{x}$ görbeként a 2. ábrán. Ekkor a rajzon a kockázat-közömbös P optimumát a^* jelöli, mivel ebben a pontban egyezik meg $\bar{x}(a)$ meredeksége $\bar{v}^\circ$ meredekségével, v_a/v_y-nal. Ennek is létezik közvetlen értelmezése: P, hogy érdekeltté tegye A-t adott **a** kiválasztásában, a $\bar{v}^\circ$ görbére eső rögzített fizetséget fog kínálni. (Ez efficiens kockázat-megosztás és mivel $\lambda > 0$, tehát A csak a visszatartott hasznossághoz jut hozzá.) Így $\bar{v}^\circ$ lényegében egy „bruttó költség-görbe" P számára.[14] Mivel P kockázat-közömbös, az $x(a, \theta)$ kimeneti eloszlást várható értékén értékelhetjük, így a 2. ábrán a két görbe közti függőleges távolság úgy értelmezhető, mint P „várható nettó jövedelme". P ennek maximumát keresi, beleértve azt, hogy érdekeltté akarja tenni A-t **a*** kiválasztásában és cserébe y^* összeget fizet neki. P-nek az $x(a^*, \theta) - y^*$ jövedelem-eloszlása ekkor meghatározható $x(a^*, \theta)$ eloszlásából, melynek várható értéke éppen $\bar{x}^*$.

Abban az esetben ha A kockázat-közömbös, P egy konstans γ fizetséget tart vissza, így u' ismét konstans. Azonban ekkor (A kockázat-közömbösségéből következően) v_y is konstans, így (9) az alábbi formát ölti:

$$E[x_a] = -E\left[\frac{v_a}{v_y}\right]. \tag{12}$$

Ebben az esetben az optimális **a** éppen egyenlővé teszi a várható határterméket A-nak az **a** és a jövedelem közti helyettesítése határrátájának várható értékével, amely **a** = **a*** mellett az $x(a^*, \theta) - \gamma$ kifejezéssel együtt változik.

Tehát amikor P költségmentesen képes megfigyelni **a**-t vagy θ-t, az első-legjobb megoldás elérhető. Ha egyiket sem képes megfigyelni, akkor a következő típusú morális-kockázati vagy érdekeltségi probléma merül fel. Mivel θ

[14] GROSSMAN és HART (1983) A-t **a** kiválasztására ösztönző költségek elvét számos érdekes eredmény levezetésére alkalmazta a megbízó-ügyvivő elméletnek abban a speciális esetében, amikor A hasznossági függvényének alakja $v(y, a) = G(a) + K(a)V(y)$. Ez magában foglalja mind az additív ($K(a) \equiv 1$) mind a multiplikatív ($G(a) \equiv 0$) szeparábilitást. Itt az **a** akció sokkal jobban befolyásolja a kimenetek egy rögzített véges halmazának valószínűségét, mint magát az egyes kimenetek értékét.

nem megfigyelhető a kifizetést x-től kell függővé tenni. Ha P ekkor naivan azt a megoldást próbálja meg elérni, amit ebben a fejezetben bemutattunk, akkor találhatna egy $x = x(a^*, \theta)$ értéket, és A-nak fizethetne az $y^*[x(a^*, \theta)]$ kifizetési függvény szerint; azaz így A-t egy megfigyelt x előfordulása szerint jutalmazza, miközben felteszi, hogy $\mathbf{a} = \mathbf{a}^*$, és hogy a megfigyelt x az $x(a^*, \theta)$ eloszlásból származik. Ha A individuálisan racionális, akkor az alábbi problémát oldja meg:

$$\max_a \int_0^1 v\big(y^*[x(a, \theta)], a\big)f(\theta)\mathrm{d}\theta, \tag{AR}$$

azaz jövedelemeloszlásának megfelelően olyan $\mathbf{a}$-t fog választani, amely az $y^*(x)$ kifizetési függvény mellett elérhető. Azonban általában semmi garancia arra, hogy (AR) megoldása, amelyet $\hat{\mathbf{a}}$-val jelölünk éppen egybeesne $\mathbf{a}^*$-gal, azaz (FB) megoldásával. Így például ha P kockázat-közömbös, akkor $y^*(x) = \beta$. Ám ezt behelyettesítve az (AR)-beli v-be, azt kapjuk,[15] hogy $\hat{\mathbf{a}} = 0$: mert miért is vállalna A *bármekkora* negatív hasznosságot, ha úgyis megfizetik? Általánosabban (AR) megoldása az alábbi feltételt kell, hogy kielégítse:

$$E\left[v_y\left(\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}x}x_a + \frac{v_a}{v_y}\right)\right] = 0. \tag{13}$$

Ez összehasonlítható $\mathbf{a}^*$ meghatározásának feltételével, ami (8) és (9) alapján:

$$E\left[u'\left(x_a + \frac{v_a}{v_y}\right)\right] = 0. \tag{14}$$

Jövedelemben kifejezve a határterméke A számára $(\mathrm{d}y^*/\mathrm{d}x)x_a$, mivel x megváltozásának az ő saját jövedelmére gyakorolt hatását a kifizetési függvényen keresztül határozza meg, míg P számára a határterméke éppen x_a, *adott* y mellett. Mivel (4) alapján $\mathrm{d}y^*/\mathrm{d}x < 1$ az $\mathbf{a}^*$ pontban, a két fél eltér a határtermékének megítélésében, függetlenül a jövedelmeik határhasznosságában lévő különbségtől.

Intuitív módon a kérdést úgy tehetjük fel, hogy mivel adott $y^*(x)$ kifizetési függvény mellett A számára nem optimális a P választotta $\mathbf{a}$, A javíthatja helyzetét $\mathbf{a} \neq \mathbf{a}^*$ választással, ha ezt észrevétlenül és büntetlenül megteheti. Ez a morális-kockázat problémája. Mielőtt megvizsgálnánk, hogy P-nek miként kell kezelnie ezt az esetet, két olyan helyzetet nézünk meg közelebbről, amikor nem merül fel az érdekeltségi probléma. Az első az, amikor A kockázat-közömbös. Ekkor lényegében elérhető az első-legjobb megoldás, mivel amikor P az első-legjobb kifizetési sémát ajánlja föl A-nak, akkor A úgy választja $\mathbf{a}$-t, hogy optimális választása éppen a első-legjobb szintjére esik, így valójában az érdekeltségi korlát nem effektív. A második eset az, amikor $\mathbf{a}$ ugyan nem figyelhető meg tökéletesen, de megfigyelhető *θ-tól függetlenül* kis véletlen hibával. Ebben az esetben a kényszerítő szerződés eszközével ismét elérhető az első-legjobb megoldás.

[15] Ebben az esetben szigorúan véve AR-t ki kellene egészíteni az $\mathbf{a} \geq 0$ nemnegativitási követelménnyel, különben $v_a < 0$ esetén $\hat{\mathbf{a}} \to \infty$.

A kockázattal szemben közömbös A

HARRIS–RAVIV (1978) és SHAVELL (1979) megmutatják: ha A kockázat-közömbös, azaz v_y konstans, akkor P elérheti az első-legjobb allokációt és mégse merül fel az érdekeltségi probléma. Ezt abban a tételben fogalmazhatjuk meg, miszerint ha A kockázat-közömbös, akkor y-t *pusztán* x-től függőnek tekintő szerződés legalább annyira jó, mint egy olyan, amelyik **a**-tól θ-tól és x-től egyaránt függővé teszi y-t. Tehát az **a**-ra vagy θ-ra vonatkozó információnak nincs értéke, vagy másképpen fogalmazva nem számít, hogy **a**-t és θ-t meg tudják-e figyelni. Most csak röviden áttekintjük a tételt, kiemelve főbb elemeit.

Emlékezzünk vissza, hogy A kockázat-közömbössége esetén az első-legjobb kockázat-megosztás azt kívánta meg, hogy P egy rögzített γ összeget visszatartson és A a fennmaradó bizonytalan $x(a, \theta) - \gamma$ összeghez jusson. (12) alapján az első-legjobb optimális a választás:

$$E[x_a] = -\frac{E[v_a]}{v_y}.$$

Ha a jelen esetben **a** nem is figyelhető meg és P *ugyanazt* a kifizetési sémát ajánlja A-nak (azaz ugyanazt a rögzített összeget kéri), akkor A az alábbi feladat megoldása alapján választja **a**-t:

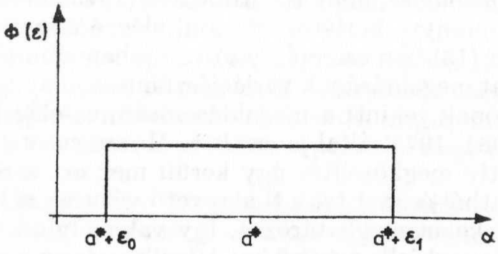
$$\max_a \int_0^1 v(x(a, \theta) - \gamma, a) f(\theta) d\theta, \qquad (ARN)$$

amely, ha v_y konstans, éppen a (12) feltételt eredményezi. Tehát ebben az esetben A-nak **a**-ra vonatkozó választása *nem* különbözik P választásától az adott kifizetési séma mellett. A természetesen el fogja fogadni az $x(a, \theta) - \gamma$ kifizetési függvényt, mivel γ az első-legjobb probléma megoldásából származik és kielégíti a visszatartott hasznosság korlátját. Ekkor lényegében a korábban leírt érdekeltségi korlát nem effektív P optimumhelyén.

4. *Tökéletlenül megfigyelhető* **a**

HARRIS és RAVIV (1976, 1978)[16] tettek javaslatot arra, hogyan kellene lazítani azt az erős következményekkel járó feltevést, hogy **a** nem megfigyelhető. Tegyük fel, hogy P egy $\alpha = \mathbf{a} + \varepsilon$ véletlen változót meg tud figyelni, ahol ε várható értéke zérus, valószínűsége pedig: $\Phi(\varepsilon) > 0$ valamely $[\varepsilon_0, \varepsilon_1]$ intervallumon, és nulla azon kívül. Tehát P-nek az **a**-ra vonatkozó megfigyelésében mérési hiba van. A lényeg az, hogy ε független θ-tól, a környezet állapotától. Ekkor könnyű megmutatni, hogy P képes alkalmazni olyan kényszerítő szerződést, melynek segítségével elérheti az első-legjobb megoldást, és így valójában nem merül fel a morális kockáztatás problémája. Tegyük fel például, hogy ε egyenletesen oszlik el az $[\varepsilon_0, \varepsilon_1]$ intervallumon, mint az a 3. ábrán látszik, ahol a^* ismét P első-legjobb **a** értéke.

[16] Lásd SHAVELL (1978) megjegyzéseit, a 4 lábjegyzetet és HOMLSTRÖM (1978) munkáját.



3. ábra. $\alpha = \mathbf{a} + \varepsilon$ megfigyelhető

Természetesen feltesszük, hogy P ismeri a $\Phi(\varepsilon)$ függvényt. Ekkor P-nek csak egy elegendően alacsony y értékkel kell fenyegetőznie,[17] arra az esetre, ha $\alpha < \mathbf{a}^* + \varepsilon_0$ értéket figyel meg, mivel ez csak akkor fordulhat elő, ha $\mathbf{a} < \mathbf{a}^*$. Mivel A adott kifizetési séma mellett úgyse választ $\mathbf{a} > \mathbf{a}^*$ értéket, tehát így $\mathbf{a}^*$-ot fogja választani.

Ha $\Phi(\varepsilon)$ nemcsak egy intervallumon lenne pozitív, azaz ha a valós számegyenesen mindenütt pozitív lenne (például ha Φ a normális eloszlás), akkor P a hipotézis-vizsgálat problémájába ütközik. Legegyszerűbb esetben ekkor úgy kellene egy kritikus α^* értéket megválasztania, hogy $\alpha < \alpha^*$ megfigyelése esetén következtetni tudjon $\mathbf{a} < \mathbf{a}^*$ fennállására, még akkor is, ha van bizonyos pozitív valószínűsége, hogy $\mathbf{a} = \mathbf{a}^*$. Ily módon P-nek α^* megválasztásakor mérlegelnie kellene az „első-" és a „másod-fajú" hibából eredő veszteségeket, azaz azt, hogy $\mathbf{a} = \mathbf{a}^*$ téves elvetése vagy téves elfogadása okoz-e számára nagyobb kárt. Ez a probléma talán azért nem keltett kifejezett figyelmet a szakirodalomban, mert így felvázolva kevésbé érdekesnek találhatták, mint azt az esetet, mikor P nem egyetlen torzított értéket figyel meg, hanem egy z változót, amely *egyaránt* függ $\mathbf{a}$-tól és θ-tól. Egy ilyen megfigyelési lehetőség következményeit a 6. szakaszban taglaljuk majd. Először azonban vegyük szemügyre a kombinált kockázat-megosztó és érdekeltségi probléma megoldását.

5. A megbízó-ügyvivő probléma megoldásai

Feltételezzük, hogy P most csak az x kimenetet tudja megfigyelni, anélkül, hogy bármi információja lenne $\mathbf{a}$-ról vagy θ-ról. Ekkor a várható hasznosságát maximalizáló $y^*(x)$ kifizetési függvény megválasztását tekinthetjük feladatának, mégpedig figyelembe véve, hogy A-nak meg kell kapnia legalább visszatartott hasznosságát és bármely adott $y(x)$ mellett olyan $\mathbf{a}$-t fog választani, hogy saját várható hasznosságát maximalizálja.

A feladat formális megközelítésekor vennénk az FB problémát, kiegészítenénk a (13) korlátozó feltétellel, és ezáltal P-nek $y(x)$-re vonatkozó választása most A maximalizálási feltételén *keresztül* veszi figyelembe a hatást, amit az A-ra $\mathbf{a}$-választásában gyakorol. Lényegében ezt az utat követték HARRIS–RAVIV (1976), ROSA (1973) és SPENCE–ZECKHAUSER (1971). Azonban kiderül, hogy ez rosszul kondicionált feladat. Hacsak nem korlátozzuk $y(x)$-et egy véges tartományra minden x-re, akkor nagyon is előfordulhat, hogy a feladatnak nem

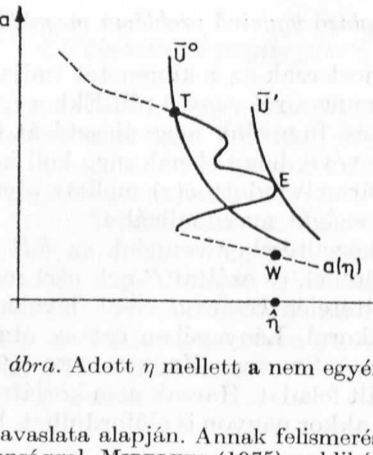
[17] Ilyen például a „sztálini" megoldás (elkapná A-t és agyonlőné).

létezik optimális megoldása, mint azt MIRRLEES (1975) megmutatta. Ha viszont $y(x)$-et véges tartományra korlátozzuk, ami eléggé ésszerű feltevés, akkor elképzelhető, hogy a (13)-ban szereplő $y(x)$ valójában nem létezik minden pontban. Mivel a feladat megoldásának variációszámításon nyugvó módszere $y(x)$-et szabályozó változónak tekinti a megoldás során, ez elég baj.

A MIRRLEES (1964, 1975) által javasolt és HOLMSTRÖM (1978) által továbbfejlesztett alternatív megközelítés úgy kerüli meg ezt a nehézséget, hogy θ-t eliminálja a feladatból és x-et tekinti alapvető véletlen változónak, amely szerint a várható értékeket meghatározza. Így valamely adott **a** mellett minden $f(\theta)$ sűrűségfüggvénnyel jellemzett θ-hoz létezik x, és az $x(a, \theta)$ függvény, valamint az $f(\theta)$ sűrűségfüggvény együttesen határozzák meg x valószínűség-eloszlását. **a** növekedése esetén ez az eloszlás jobbra mozdul el, azzal a technikai indíttatású kikötéssel, hogy az eloszlás felső és alsó korlátai (legyenek ezek $x_1 \equiv x(a, 1)$ és $x_0 \equiv x(a, 0)$) invariánsak **a** változására. Ez annyit jelent: bármekkora **a**-t is választ az ügyvivő, a legkedvezőbb ($\theta = 1$) és a legkevésbé kedvező ($\theta = 0$) esetekben ennek nincs hatása az x kimenetre.

Azonban kiderül, hogy ez a megközelítés nem garantálja a (13) feltétel megoldásának unicitását, azaz A többféle választással is megoldhatja várható hasznosságának maximalizálását *adott* $y(x)$ kifizető függvény mellett, amiből az is következhet, hogy a megbízó-ügyvivő probléma *Mirrlees–Holmström* eljárással levezetett megoldásai valójában nem az optimumot határozzák meg. Jól jellemzi ezt a helyzetet GROSSMANN–HART (1983) diagramja,[18] amelyet a 4. ábrán reprodukálunk.

A rajzon η jellemzi a kifizetési rendszert (*nem y* egy értéke), amelyet P preferenciája szerint balról-jobbra (folytonosan) rendeztünk, **a** pedig ismét A egy akciója. Annak lehetőségét, hogy adott η kifizetési rendszer mellett A többféle **a**-t is választhat, a rajzon az $a(\eta)$ görbe alakja mutatja. Azonban bármely adott η mellett A a szaggatott görbén lévő **a**-k közül fog választani, mivel előnyben részesíti a kisebb **a**-kat a nagyobbakkal szemben, így ezek a pontok dominálják a többit. P közömbösségi görbéit leolvashatjuk az ábráról (noha ennek **a** nem direkt változója, de indirekt módon, x-en keresztül befolyásolja). Ekkor a *Mirrlees–Holmström* eljárás az E pontban határozza meg P optimumát, mivel



4. ábra. Adott η mellett **a** nem egyértelmű

[18] *Andreu Mas-Collel* javaslata alapján. Annak felismerése, hogy a probléma nem rendelkezik unicitási tulajdonsággal, MIRRLEES (1975) publikálatlan tanulmányának köszönhető.

ez van a legmagasabban mindazon pontok közül, amelyek kielégítik A elsőrendű feltételét, (13)-at; ám valójában T az igazi optimum, mivel P számára ez a legkedvezőbb mindazon pontok közül, amelyekben A-t érdekeltté tudja tenni — $\hat{\eta}$ rögzítése a W pont és nem az E választását ösztönzi. Sajnálatos[19], hogy fennáll ez a lehetőség, mivel mint *Holmström* megmutatja, az általa alkalmazott eljárás a megbízó-ügyvivő probléma optimális megoldásának viszonylag egyszerű jellemzéséhez vezet.

E megfontolások alapján úgy tűnik csak két út áll előttünk. Az egyiken haladva a struktúra többé-kevésbé drasztikus egyszerűsítésével jól kezelhető problémát tudunk garantálni.[20] A másik úton fel lehetne tenni, hogy nem létezik az unicitás problémája és így lehetne élvezni az ebből következő eredmény szépségét. Bizonyos értelemben a probléma tisztán elméleti jelentőségű: ha P ismeri $v(y, a)$-t és $x(a, \theta)$-t akkor ismeri egy tetszőleges kifizetési rendszer és A választása közötti kapcsolatot is, és ily módon, legalábbis elméletileg mindig tud találni globális optimumot.

Így például a 4. ábrán, ha P ismeri az $a(\eta)$ görbét, akkor miért lenne olyan ostoba, hogy az E pontot válassza? Azonban figyelembe véve analitikus szempontjainkat, ez mégiscsak tartalmi kérdés: a szokásos eljárások segítségével szeretnénk jellemezni az optimális megoldást, és így komolyan kell vennünk azt a kockázatot, hogy ezek az eljárások nem működnek minden esetben megfelelően.

Az alábbiakban a *Holmström—Mirrlees* megközelítést ismertetjük, mivel áttekintve a szakirodalom egészét úgy tűnik, ez az eljárás ötvözi a legáltalánosabb feladat-struktúrát az eredmények legegyszerűbb megfogalmazásával, és világos bepillantást enged az érdekeltségi korlát bevezetése által kiváltott hatásokba. Tehát:

i) $v(y, a) \equiv v_1(y) - v_2(a)$, ez nem más, mint az additív szeparábilitás feltevése.

ii) Tekintsük x-et véletlen változónak, amelynek sűrűségfüggvénye $x(a, \theta)$ és $f(\theta)$ alapján meghatározható, jelölje: $\theta(x, a)$. Változatlanul fennáll, hogy a

[19] Nem nehéz megállapítani, hogy a probléma megoldása nem egyértelmű. Ahhoz, hogy garantálni tudjuk a

$$\max J(a) \equiv \int_0 v(y[x(a, \theta)], a) f(\theta) \mathrm{d}\theta$$

probléma megoldásának globális unicitását, meg kell követelni, hogy J szigorúan konkáv legyen **a**-ban, minden **a**-ra, de:

$$J''(a) = \int_0^1 \left\{ y' x_a \left[v_{yy} y' x_a + 2 v_{ya} + \frac{v_{aa}}{y' x_a} \right] + v_y x_a^2 y'' + v_y y' x_{aa} \right\} f(\theta) \mathrm{d}\theta,$$

aminek előjelét általában nem tudjuk, mivel y'' előjele ismeretlen. Biztos, hogy több lokális optimum lehetőségét nem zárhatjuk ki, és *Mirrlees* példája megmutatja, hogy előfordulásuk nagyon is reális.

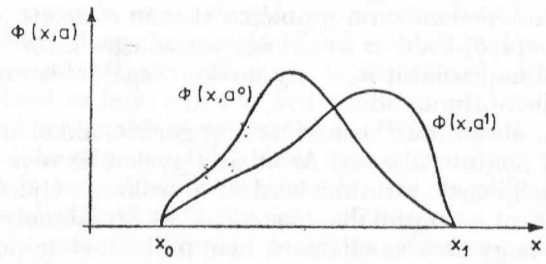
[20] Így például *Grossman* és *Hart* a v-függvény speciális alakját veszik, felteszik, hogy P kockázat-közömbös (noha legtöbb eredményük ennek általánosítása), a kimeneteknek **a**-tól független véges $\{x_1, \ldots, x_n\}$ halmazát tekintik és ehhez kapcsolják az **a**-tól függő $\{f_1, \ldots, f_n\}$ sűrűség-függvényeket. *Holmström* feltételezi, hogy a v-függvény additív módon szeparális y-ban és **a**-ban és x rögzített intervallumát tekinti, amely fölött a valószínűségeloszlás **a**-tól függ, noha, mint arra már utaltunk, ez még mindig nem elegendő az unicitás garantálásához.

kifizetési sémát a megfigyelhető x változó függvényében fejezzük ki, azonban x most invariáns **a**-ra, mivel lényegében most x az állapotváltozó.

iii) Φ fontos tulajdonsága, hogy $x \notin [x_0, x_1]$ esetén $\Phi(x, a) \equiv 0$ minden **a**-ra és $\Phi(x, a) > 0$, ha $x \in [x_0, x_1]$.

Az 5. ábráról leolvasható, Φ hogyan viselkedik **a** változásakor. Magasabb **a** értéknél az egész eloszlás elmozdul jobbra, de változatlanul marad az $[x_0, x_1]$ tartó. Vegyük figyelembe, hogy adott x mellett, feltesszük még a következőket:

iv) A Φ_a és Φ_{aa} deriváltak jól-meghatározottak, és $\Phi_a \gtrless 0$, mint az a rajzon is látszik. Tehát egy nagyobb **a** csökkenti x kisebb értékeinek és növeli x nagyobb értékeinek valószínűségét.



5. ábra. $\Phi(x,$ **a**$)$ változása **a** növekedésével

v) Az **a** nagyobb értékéhez tartozó eloszlás P számára mindig kedvezőbb, mint egy alacsonyabb **a** értékhez tartozó eloszlás. Tehát **a** növekedése x „jobb" eloszlásához vezet.

Az érdekeltségi korlát most nem más, mint A-nak az **a**-ra vonatkozó maximumfeladatához tartozó elsőrendű feltétel, azaz:

$$\max_{a} \int_{x_0}^{x_1} v_1[\hat{y}(x)]\Phi(x, a)\mathrm{d}x - v_2(a), \tag{A}$$

amiből következik:[21]

$$\int_{x_0}^{x_1} v_1[\hat{y}(x)]\Phi_a(x, a)\mathrm{d}x - v_2'(a) = 0, \tag{15}$$

ahol $y(x)$ tetszőleges adott kifizetési függvény. Ha adott (15), akkor P-nek olyan $y(x)$ függvényt kell találnia, hogy megoldja az alábbi feladatot:

$$\max_{y(x), a} \int_{x_0}^{x_1} u(x - y(x))\Phi(x, a)\mathrm{d}x$$

$$\left.\begin{aligned} \text{feltéve:} \quad & \int_{x_0}^{x_1} v_1[y(x)]\Phi(x, a)\mathrm{d}x - v_2(a) \geq \bar{v}^0 \\ & v_2'(a) = \int_{x_0}^{x_1} v_1[y(x)]\Phi_a(x, a)\mathrm{d}x, \end{aligned}\right. \tag{PA}$$

[21] A v-re kirótt szeparábilitási feltétel hasznosságát a (15) feltétel egyszerűségében mérhetjük le.

ahol az első korlát ismét A visszatartott hasznossága, míg a második a (15)-ből származó érdekeltségi korlát. Ne felejtsük el, hogy x most *nem* optimalizációs változó – ugyanazt a szerepet játssza, mint θ a korábbi feladatban. Ekkor az (x-től független) λ és μ változókat kapcsolva a megfelelő korlátokhoz, az alábbi feltételekhez jutunk:[22]

$$\{-u' + \lambda v_1'\}\Phi(x, a) + \mu v_1'\Phi_a(x, a) = 0 \tag{16}$$

$$\int_{x_0}^{x_1} u\Phi_a \mathrm{d}x + \lambda\Big[\int_{x_0}^{x_1} v_1\Phi_a \mathrm{d}x - v_2'\Big] + \mu\Big\{\int_{x_0}^{x_1} v_1\Phi_{aa}\mathrm{d}x - v_2''\Big\} = 0. \tag{17}$$

Először is vegyük észre, hogy a szögletes zárójelben szereplő középső tényező az érdekeltségi korlátból következően zérus. Ekkor a feltételt így írhatjuk:

$$\frac{u'}{v_1'} = \lambda + \mu\Phi_a/\Phi \tag{18}$$

$$E[u\Phi_a] = -\mu E[\mathrm{d}^2v/\mathrm{d}a^2], \tag{19}$$

ahol úgy képeztük az

$$E[\mathrm{d}^2v/\mathrm{d}a^2] = \int_{x_0}^{x_1} v_1\Phi_{aa}\mathrm{d}x - v_2''$$

jelölést, hogy kiemelje az érdekeltségi korlát $E[\mathrm{d}v/\mathrm{d}a] = 0$ alak megfogalmazását és így (17)-ben a harmadik tag nem más, mint ennek a szerinti deriváltja. Belátható (vö. HOLMSTRÖM, 90. oldal), hogy $\mu > 0$, tehát az érdekeltségi feltétel P számára effektív korlát.[23] (18) ekkor arra utal, hogy a kockázatmegosztás nem Pareto-hatékony (vesd össze az (1) feltétellel), méghozzá azért nem, mivel

[22] Szigorú értelemben figyelembe kellene vennünk azt a korlátot, hogy $y(x)$ minden x-re korlátos tartományba esik, azaz $0 \leq y \leq x$. Az egyszerűség kedvéért itt feltételezem, hogy a megoldás mindig egy ilyen tartomány belső pontja. A feltételekhez minden x-re y szerint való deriválással, illetve minden x-re **a** szerinti deriválással jutunk (mivel **a**-t azelőtt választjuk mielőtt x ismertté válna, y-t pedig utána).

[23] A Holmström-modell esetében könnyű ellenőrizni, hogy mint azt már korábban láttuk ha P megoldja első-legjobb feladatát, akkor általában az érdekeltségi korlát nem teljesül. Tehát a jelen esetben ahhoz jutnánk:

$$\max_{y(x),a} \int_{x_0}^{x_1} u(x - y(x))\Phi(x, a)\mathrm{d}x$$

feltéve:

$$\int_{x_0}^{x_1} v_1[y(x)]\Phi(x, a)\mathrm{d}x - v_2(a) \geq \bar{v}^0,$$

amiből következik, hogy:

$$u'/v_1' = \lambda \text{ és } E[u\Phi_a] + \lambda\{E[v_1\Phi_a] - v_2'\} = 0,$$

ahol a második feltétel nyilvánvalóan különbözik az érdekeltségi korláttól. Azonban a $\mu > 0$ erősebb állítás, mint a $\mu \neq 0$ és *Holmström* bizonyítása során azt tételezi fel, hogy az (A) feladat másodrendű feltételei teljesülnek, azaz valami olyasmit, ami általában nem igaz. Vegyük azt is észre: ha A kockázat-közömbös, akkor valójában $\mu = 0$, mivel az érdekeltségi korlát nem effektív.

figyelembe kell venni az A-ra gyakorolt érdekeltségi hatásokat, azaz adott x mellett y megválasztásának a (A által történő) kiválasztására, azaz x valószínűségére, Φ_a-ra gyakorolt hatását. Elvész a kockázat-megosztó szerződés formájára nyert korábbi eredmény egyszerűsége is: a szerződés formája most nem határozható meg pusztán a kockázathoz való viszony alapján, hanem attól is függ, miképpen változik Φ_a és Φ, x szerint, azaz függ-e változást megalapozó $f(\theta)$ és $x(a, \theta)$ függvényektől.[24]

Azonban *Holmström* mégis fel tud vonultatni néhány érdekes eredményt arról, hogyan változik a kifizetési séma az érdekeltségi korlát függvényében, sőt ezeket az eredményeket a feladat csekély újrafogalmazása árán igen egyszerűen le lehet írni. λ most *ne* a visszatartott hasznossági korláthoz kapcsolódó multiplikátor legyen, hanem egyszerűen A várható hasznosságához[25] adott *rögzített súly* az alábbi maximum-feladatban:

$$\max_{y(x),a} \int_{x_0}^{x_1} u\Phi \mathrm{d}x + \lambda \int_{x_0}^{x_1} \{v_1 - v_2\}\Phi \mathrm{d}x \qquad (PA)$$

feltéve:

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}a}\Phi \mathrm{d}x = 0.$$

A feladat megoldása formailag nyilvánvalóan (18)—(19)-cel azonos feltételekhez vezet, de megvan az a pótlólagos előnyünk, hogy λ most konstans (és bizonyára nem zéró, — *Holmström* elemzéséből nem nyilvánvaló, hogy általában $\lambda \neq 0$ mivel az, hogy az érdekeltségi korlátot ki kell elégíteni, ahhoz vezethetne, hogy A többet kap, mint $\bar{v}°$). Vizsgáljuk meg a (18) feltételt, és vegyük észre, hogy a csökkenő határhasznosság miatt $u'(x - y)/v_1'(y)$ y-ban növekvő adott x mellett. Tegyük fel, hogy adott x mellett az *első-legjobb* $y^*(x)$ olyan, hogy:

$$\frac{u'(x - y^*(x))}{v_1'(y^*(x))} = \lambda. \qquad (20)$$

x értéknek két halmaza érdekes különösképpen, az $X^+ = \{x \mid \Phi_a(x, a) > 0\}$ illetve az $X^- = \{x \mid \Phi_a(x, a) < 0\}$ halmazok (lásd ismét az 5. ábrát). Ekkor, ha annak érdekében, hogy (18)-hoz jussunk, a konstans λ-t figyelembe véve (20)-at kiegészítjük $\mu\Phi_a/\Phi$ taggal, akkor megfigyelhetjük, hogy u'/v_1' nő, ha $\Phi_a > 0$ és csökken, ha $\Phi_a < 0$, mivel $\mu > 0$. Azaz, $y(x) > y^*(x)$, ha $x \in X^+$ és

[24] Ily módon (18)-at differenciálva kapjuk:

$$\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}x} = \frac{r_P}{(r_P + r_A)} \frac{u'}{v_1'} + \frac{\mu}{r_A + r_P} \left\{ \frac{\Phi_{ax}}{\Phi} - \frac{\Phi_a \Phi_x}{\Phi^2} \right\}.$$

Tehát $\mu > 0$ esetén $r_P = 0$-ból nem következik, hogy $\mathrm{d}y^*/\mathrm{d}x = 0$, hacsak nem korlátozzuk Φ-t. Ez a kifejezés talán magyarázatot ad arra, miért gondolták *Grossman* és *Hart*, hogy lehetetlen még olyan egyszerű tulajdonságokat is megállapítani, mint $y(x)$ monotonitása.

[25] Más szavakkal: egyszerűen az érdekeltségi korlátra vonatkozó Pareto-optimumot keressük, ahol λ meghatározza a végső allokáció hasznosság-eloszlását. Ez a végső allokáció nem feltétlenül esik egybe $\bar{v}°$-lal A esetében. A feladatot úgy is értelmezhetjük, mint P és A hatékony szerződés-alkuját és P így nem feltétlenül szerzi meg az ügyletből eredő teljes hasznot.

$y(x) < y^*$, ha $x \in X^-$. Tehát az érdekeltségi hatás olyan módon téríti el a megoldást az optimális kockázat-megosztástól, hogy A fizetségét növeli azokban az állapotokban, melyeknek **a** növekedése növeli valószínűségét és A részesedését csökkenti azokban az állapotokban, melyeknek **a** növekedése csökkenti valószínűségét. Ennek egyik következménye, hogy a kockázat-közömbös P most nem ajánl rögzített fizetséget A-nak.

A második-legjobb megoldás *határozottan* rosszabb P és A számára egyaránt, mint az első-legjobb, amiből következik, hogy hatékonyság-nyereséghez jutnak abból, ha P az **a**-t meg tudja figyelni.[26] Ekkor viszont felmerül a kérdés: tegyük fel, hogy P költségmentesen hozzájuthat z-hez, ami bizonyos információt szolgáltat **a**-ról. Vajon be kell-e ezt építeni a szerződésbe abban az értelemben, hogy A fizetsége z-függő legyen, úgy, hogy adott x mellett y különböző z-kre eltérő legyen? Mint azt a következő fejezetből látni fogjuk, a válasz általában igen, még akkor is, ha z csak nagyon tökéletlen információt szolgáltat **a**-ról.

6. Az **a**-*ra vonatkozó tökéletlen információ felhasználása*

Tegyük fel, hogy **a** és θ közvetlenül nem figyelhetők meg, de létezik olyan z változó, amely **a**-ról információt szolgáltat az alábbi értelemben. z értéke **a**-tól és θ-tól függ, azaz írhatjuk, hogy $z = z(a, \theta)$, úgy, hogy **a** megváltozása z egész eloszlását elmozdítja. Mivel $x(a, \theta)$-t ismerjük: adott **a**-ra meghatározható x és z közös valószínűség-eloszlása. Feltesszük, hogy P költségmentesen tudja megfigyelni z-t és ugyancsak ismeri a közös sűrűségfüggvényt, amit jelöljön $\Phi(x,z,a)$. A kérdés ekkor az, hogy bizonyos adott x kimenet esetén megéri-e P-nek z realizációját felhasználni az A fizetségének megállapításánál.

Első pillantásra egyáltalán nem nyilvánvaló, hogy egy ilyen típusú információt feltétlenül be kell vonni a szerződésbe, ezáltal y-t x-től és z-től egyaránt függővé tenni. Mint *Harris* és *Raviv* rámutattak, noha az **a** valószínű értékére vonatkozó információnövekmény tiszta haszon, de van annyi „költsége", hogy az információ bizonytalan, így elképzelhető, hogy ha mind A, mind P kockázataverziót mutat, akkor nem célszerű z-nek belefoglalása a szerződésbe. Azonban *Harris* és *Raviv*, *Shavell*, valamint *Holmström* egyaránt rámutatnak, hogy *mindig* célszerű egy ilyen információt a szerződésbe foglalni, ha **a** és θ nem megfigyelhetők (kivéve azt az esetet, mint arra már utaltunk, mikor A kockázatközömbös) oly módon, hogy a többletinformációból származó haszon a többletbizonytalanságból származó bármekkora többletköltséget ellensúlyozni tudjon. (Ekkor igazán lényeges z költségmentessége.)

A tétel bizonyítását az olvasó megtalálhatja SHAVELL-nél (1979, függelék, 69. old). Itt *Holmström* egyszerűbb és szemléletesebb megközelítését mutatjuk be, melynek során z-t közvetlenül beépíti P optimum-feladatába, és megmutatja, hogy a (18) feltétel miként módosul.

Ekkor a feladatot úgy fogalmazhatjuk, hogy: határozzunk meg egy $y(x, z)$ kifizetési függvényt, ahol z-t akárcsak x-et formálisan állapot-változónak te-

[26] Vegyük észre, hogy A is nyerne az első-legjobb feladatra való áttéréssel. Felmerül a kérdés: vajon miért nem egyezik bele A abba, hogy P-t informálja milyen **a**-t választott? A válasz megegyezik azzal, amit az „érdekeltség összeegyeztethetősége" feladatból ismerünk: ha a szerződést A-nak **a**-ra vonatkozó *jelentésére* alapozzák, akkor A abban érdekelt hogy saját érdekei szerint manipulálja ezt az információt.

kintjük. A $\theta(x, z, a)$ függvény megadja x és z együttes valószínűségét adott a mellett. P feladata ekkor az alábbi formában írható:

$$\max_{y(x,z),a} \int_{x_0}^{x_1}\int_{z_0}^{z_1} u(x - y(x,z))\Phi(x,z,a)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$\int_{x_0}^{x_1}\int_{z_0}^{z_1} v_1(y)\Phi(x,z,a)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x - v(a) \geq \bar{v}^0 \qquad (PAZ)$$

$$\int_{x_0}^{x_1}\int_{z_0}^{z_1} v_1(y)\Phi_a(x,z,a)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x - v'(a) = 0.$$

Ez csak abban különbözik az előző (PA) feladattól, hogy most a várható értéket x és z együttes eloszlása szerint kell venni. Mivel y szerint maximalizálunk minden (x, z) párra, (18)-hoz hasonló feltételeket kapunk:

$$\frac{u'}{v_1'} = \lambda + \mu \frac{\Phi_a(x,z,a)}{\Phi(x,z,a)}. \qquad (21)$$

Tehát, ha Φ_a/Φ z-vel együtt változik, akkor az a fizetség, amit P az x megfigyelése alapján teljesít A-nak, most z megfigyelt értékétől függően fog módosulni. Így például, ha Φ_a z-vel ellentétesen mozog, akkor adott x mellett a P által A-nak teljesített kifizetés alacsonyabb lesz, ha a szerződés z-t is tartalmazza, mint egyébként. z szerződésbe foglalása nem annyira azért lényeges, mivel z többletinformációt szolgáltat a-ról — végül is adott kifizetési séma mellett P pontosan tudja mire számíthat —, hanem sokkal inkább azért, mivel ezáltal élesebben lehet A-t érdekeltté tenni a értékének növelésében. Vagy, ami ezzel ekvivalens, ekkor csökkennek az A érdekeltségét biztosító költségek. Intuitív módon ezt a következőképpen fogalmazhatjuk meg. Ha a szerződés kizárólag csak x-től függ, akkor adott $\Phi(x, a)$ eloszlás mellett x magas értéke, és ennek megfelelően A magas fizetsége figyelhető meg még akkor is, ha a viszonylag alacsony. Hasonlóképpen alacsony x és ennek megfelelően alacsony kifizetés figyelhető meg esetleg még akkor is, ha A nagy a-t választ. Ezek a lehetőségek egyáltalán nem kívánatosak, ha figyelembe vesszük, hogy P célja A-t érdekeltté tenni, minél magasabb a kiválasztásában. Ha valamilyen z változó megfigyelhető, melynek értéke a-val és θ-val együtt nő, akkor kevésbé valószínű, hogy x és z *egyaránt* alacsony értéket vesz fel, ha a tényleg magas. Tehát z befoglalása a szerződésbe csökkenti az alacsony a téves jutalmazását illetve a magas a téves büntetését. Ezáltal javul a szerződés ösztönző jellege.[27]

[27] Így például tegyük fel, hogy A az $\{1, 2, 3\}$ halmazból választhatja a-t és x-re és z-re az alábbi valószínűségeloszlás jellemző:

a =	1	2	3
$x = 0$	0,8	0,5	0,2
$x = 1$	0,2	0,5	0,8
$z = 0$	0,9	0,5	0,1
$z = 1$	0,1	0,5	0,9

(*folyt.* →)

7. *Az I. rész összefoglalása*

A tanulmánynak ebben a részében felvázoltuk az „alapvetőnek" tekinthető megbízó-ügyvivő modellt és a szerződésekre vonatkozóan a levezethető főbb eredményeket. Ha **a** közvetlenül, vagy pedig egy korlátozott véletlen hiba erejéig megfigyelhető, akkor lehetséges az első-legjobb kockázat-megosztó szerződés, amely olyan büntető klauzulát tartalmaz, miszerint A-t büntetik az optimális szintnél alacsonyabb **a** választás esetén. Ebben az esetben, ha A kockázatközömbös, P egy rögzített összeget tart vissza és A viseli a teljes kockázatot; ha viszont P kockázat-közömbös, akkor A kap rögzített összeget és P viseli az összes kockázatot. Valójában, ha A kockázat-közömbös, akkor P elérheti az első-legjobb megoldást még akkor is, ha nem tudja megfigyelni **a**-t, mivel A saját érdekében cselekszik és **a**-nak az első-legjobb értékét fogja választani, feltéve, hogy P az első-legjobbnak tekinthető rögzített összeget ajánlja neki. A tényleges érdekeltségi probléma akkor merül fel, ha A kockázat-közömbös és sem **a**, sem θ nem megfigyelhető. Ekkor egy valódi „második-legjobb" feladattal állunk szemben. Az optimális szerződésben ekkor figyelembe kell venni, hogy A-t érdekeltté kell tenni **a** kiválasztásában — ez az érdekeltségi követelmény — és ily módon az optimális kockázat-megosztásra jellemzőtől eltérő kifizetési sémához jutunk. Így például a kockázat-közömbös P ekkor *nem* rögzített összeget fog A-nak fizetni. Általában az érdekeltségi követelmény értelmében magasabb x esetén A-nak magasabb, viszonylag alacsonyabb x esetén alacsonyabb fizetséget kell nyújtani, hogy így érdekeltté tegyük A-t abban, hogy **a**-t feljebb emelje az optimálisnál alacsonyabb szintről, amit máskülönben — **a**-val szembeni averziója miatt — választana. Végül, ha költségmentesen elérhető egy olyan z változó, melynek eloszlásától **a** függ, akkor a második-legjobb szerződés mindig tartalmazza ezt a változót, ezáltal A kifizetését x-től és z-től egyaránt függővé teszi, lényegében azért, hogy csökkentse az alacsony **a** választásának téves jutalmazását, illetve a magas **a** választásának téves büntetését, azaz javítsa a szerződés ösztönző jellegét.

Az „alap" modell számos érdekes kiterjesztése található a közelmúlt szakirodalmában a folyóiratok hasábjain, és van még mód számos, eddig meg sem vizsgált kiterjesztésre. Azonban célszerűnek tűnik ezekre majd csak a tanulmány végén kitérni, miután megvizsgáltuk az „alap" modell néhány lehetséges alkalmazását. Ez lesz a II. rész tárgya.

IRODALOM

1. BORCH, K.: (1962) 'Equilibrium in a Reinsurance Market', *Econometrica*, Vol. 30, No. 3, pp. 424—44.
2. DAVIS, O. A. and WHINSTON, A. B.: (1962) Welfare Economics and the Theory of the Second Best', *Review of Economic Studies*.
3. GROSSMAN, S. J. and HART, O. D.: (1983) 'An Analysis of the Principal-Agent Problem', *Econometrica*, Vol. 51, No. 1, pp. 7—45.

ahol x akárcsak z csak a 0 és 1 értékeket veheti fel. Ekkor egy kizárólag x-re alapozott szerződés esetében A-t „nagy" erőfeszítésért jutalmaznák $a = 1$ választásáért 0,2 valószínűséggel, azonban ha a szerződés z-t is tartalmazza ez a valószínűség már 0,02re csökken. Hasonlóképpen A büntethető lenne x alacsony értékéért 0,2 valószínűséggel még akkor is, ha **a** = 3 lenne a választása, míg ez a valószínűség 0,02-re csökken, ha z-t is magába foglalja a szerződés. Tehát z bevonása a szerződés jobb kialakítását teszi lehetővé.

4. HAMMOND, P.: (1979) 'Straightforward Individual Incentive Compatibility in Large Economies', *Review of Economic Studies*, Vol. 46, pp. 263—82.
5. HARRIS, M. and RAVIV, A.: (1976) 'Optimal Incentive Contracts With Imperfect Information', Carnegie Mellon University, mimeo.
6. HARRIS, M. and RAVIV, A.: (1979) 'Optimal Incentive Contracts With Imperfect, Information', *Journal of Economic Theory*, Vol. 20, pp. 231—59.
7. HOLMSTRÖM, B.: (1979) 'Moral Hazard and Observability', *Bell Journal of Economics*, Vol. 10, pp. 74—91.
8. LIPSEY, R. G. and LANCASTER, K.: (1956/7) 'The General Theory of the Second Best, *Review of Economic Studies*, pp. 11—32.
9. MIRRLEES, J.: (1974) 'Notes on Welfare Economics, Information and Uncertainty', in: BALCH, MCFADDEN and WU (eds.): *Essays in Economic Behavior Under Uncertainty*, Amsterdam, North Holland Publishing Co.
10. MIRRLEES, J. A.: (1975). 'The Theory of Moral Hazard and Unobservable Behaviour-Part I', Nuffield College, Oxford, mimeo.
11. ROSS, S.: (1973) 'The Exonomic Theory of Agency: The Principal's Problem', *American Economic Review*, Vol. 63, pp. 134—9.
12. ROSS, S.: (1974) 'On the Economic Theory of Agency and the Principle of Similarity', in: BALCH, MCFADDEN and WU (eds.): *Essays in Economic Behavior Under Uncertainty*, Amsterdam, North Holland Publishing Co.
13. SHAVELL, S.: (1979) 'Risk-sharing and Incentives in the Principal-Agent Relationship', *Bell Journal of Economics*, Vol. 10, pp. 55—73.
14. SPENCE, M. and ZECKHAUSER, R.: (1971) 'Insurance, Information and Individual Action', *American Economic Review*, Vol. 61, pp. 380—7.

TUDOMÁNYOS ÉLET

HALABUK LÁSZLÓ

Statisztikai módszerek a megismerés — és a tévedések — szolgálatában*

Varga István egyetemi statisztikai előadásai során ezt a figyelmeztetést intézte hallgatóihoz:

„Ahhoz, hogy Önök statisztikussá váljanak, rá kell jönni arra, hogy a különböző statisztikai eljárásokkal összefüggésben egyrészt mikor mit szabad alkalmazni, másrészt mikor mit nem szabad alkalmazni. Utóbbi majdnem fontosabb, mint az előbbi, mert ha az előbbit nem tudják, legfeljebb nem fognak egyszer helyesen következtetni. A nagyobbik hiba az, amikor valaki azt hiszi, hogy ért a statisztikához és eredményeivel becsapja önmagát és másokat is."[1]

A téves következtetésekre vonatkozóan pedig hadd fűzzünk ide egy konkrét példát:

„Egy valóban bizarr ötlet alapján elektronikus számológép segítségével pontossági vizsgálatnak vetettek alá két karórát. Az egyik törött volt, s nem járt, a másik naponként egy másodpercet késett. A megfelelő adatok betáplálása után az elektronikus számológép azt válaszolta, hogy az az óra rossz, amelyik naponta egy másodpercet késik, mert csak 120 évenként egyszer mutatja a pontos időt, ellentétben a törött órával, amelyik minden 24 órában kétszer mutatja a pontos időt."[2]

Ez a tanulmány a címben és az előző idézetekkel jelzett problémával kapcsolatban néhány gondolatot kíván felvetni. Kezdjük egy szembeállítással.

1. A statisztika — hosszú története során — a megismerés robusztus, hatékony eszközének bizonyult. (Ha statisztikáról beszélünk, ezen a tevékenységet és a módszerek összességét egyaránt értjük.) Kezdve az első összeírásoktól, az államtudományi szerepen keresztül a modern természettudományi megismerésig a statisztika az emberi tudásnak egyik döntő forrása volt. Ezt az emberi tudás története, az egyes tudományok ismeretanyaga egyértelműen igazolja.

2. „Háromféle hazugság van, az egyszerű hazugság, a rosszindulatú hazugság és a statisztika." — „A hazugság válfajai az egyszerű hazugság, a szükséghelyzetben való hazugság és a statisztika." Változatok egy témára, amely egyesek szerint *Benjamin Disraelitől*, mások szerint *Lord Palmerstontól* származik. A változatoknál és az eredetnél figyelemre méltóbb, hogy a nevezetes negatív értékelést a múlt század óta nem szűntek meg idézni.

Mi rejlik e mögött az ellentmondás mögött? Ha hozzá nem értő, fölényes szellemességre hivatkozunk, ez nem elégséges a teljes indokoláshoz. Az ellentmondás magyarázatához mindenképpen hozzátartozik az is, hogy a statisztika mint módszer és mint hivatkozási információs alap védtelen a rossz felhasználásokkal szemben. Ahogyan nő a módszerek által kínált megismerési kapacitás, oly módon nő a rossz felhasználás lehetősége (és többé-kevésbé ténye) is.[3] Ezt a megállapítást próbáljuk ebben a tanulmányban illusztrálni.

A statisztikai kézikönyvek bőven szolgáltatják a vidám, anekdotaszerű példákat a statisztikai visszaélésre. Ezek a példák

* Megjelent a „Változások, váltások és válságok a gazdaságban. Tanulmányok Varga István emlékezetére" című, Schmidt Ádám és Kemenes Egon szerkesztette kötetben. Közgazdasági és Jogi Kiadó, Budapest 1982. 281—290. old.

[1] *Varga István*: A statisztika elmélete és módszertana. A Pázmány Péter Tudományegyetem Jog- és Közigazgatástudományi karán az 1948/49. tanév első felében tartott előadásairól készült gyorsírói feljegyzés. Kézirat gyanánt. MEFESZ Jogászkör kiadása. 1949.

[2] Az idézet *Kovács István*: Illúziók és borulátás nélkül című cikkéből való. Népszabadság, 1968. január 12.

[3] *O. W. Haseloff—H. J. Hoffmann*: Kleines Lehrbuch der Statistik. Walter de Gruyter Co., Berlin, 1968.

főleg a korrelációszámítás területéről merítenek.[4] A korrelációszámítás eredményeinek hibás felhasználásait még rendszerezni is szokták. Egyik csoportba sorolják a helytálló, de semmitmondó statisztikai összefüggést, amikor például egymás komplementumainak minősíthető változók korrelációs koefficiense −1. Ilyenek az egymást 100-ra kiegészítő százalékszámok. Például ha a dohányzók százalékos aránya változik, a nem dohányzók százalékos aránya −1 értékű korrelációs koefficienssel kapcsolódik az előzőhöz. Egy másik csoportba sorolják a „közös harmadik tényező" fennállásának esetét. („Ha Magyarországon fagy, Svájcban több tüzelőanyagot vásárolnak.") Végül mit szóljunk a véletlen kapcsolatok vagy értelmetlen következtetések humorba torkolló, vidám példáihoz:

„Egy zenerajongó floridai fiatalember lakása három helyiségében szobai növényeinek különféle zenedarabokat szokott játszani, és úgy találta, hogy abban a szobában fejlődnek legjobban a növények, ahol beatzenét játszik."

„Aránytalanul több ember hal meg az ágyban, mint az utcán, a tengerben vagy a lebujokban. Az ágy tehát bizonyíthatóan a legveszélyesebb tartózkodási hely."

„Az Egyesült Államokban, ahol az egyetemek is hirdetik, reklámozzák magukat, az egyik egyetem buzdításul közölte, hogy az utolsó évben végzett nőhallgatók 50%-át az egyetem professzora vette nőül." (Két nőhallgatója volt.)

Az előző példák statisztikai tankönyvekből, kézikönyvekből származnak. Az a helyzet azonban, hogy az ilyen riasztó példák inkább szórakoztatásra alkalmasak; a kézikönyvek, tankönyvek sajnos nem tekintik feladatuknak, hogy a statisztikai módszerek rendszeres bemutatása során a módszerek képességeinek korlátaival, a téves felhasználás, a hibás interpretáció körvonalazásával is foglalkozzanak.

A statisztikai módszertan eszköztára egymás mellett élő, egymással párhuzamosan és egymással összefüggésben (részben azonban egymástól függetlenül) fejlődő témakörökből áll. Ezeket tartalmazzák a statisztikai kézikönyvek,[5] tankönyvek, így a középértékek és szóródás vizsgálatát, a korreláció- és trendszámítás módszereit, az indexszámítás és idősorelemzés, a mintavétel, a becsléselmélet, a hipotézisellenőrzés kérdéseit stb. A modern vizsgálódásokban azonban egyre nagyobb szerephez jutnak az olyan komplex vizsgálatok, elemzések, amelyek a statisztikai módszertan mind több részét kombinálják és egyesítik a valóság valamely részének sokoldalú felderítése, megismerése céljából. Ezek a komplex jellegű vizsgálatok vezetnek el a matematikai megfogalmazású, különféle (de főleg statisztikai) információs bázisból kiinduló, a (matematikai) statisztikai inferencia eszközeivel operáló diszciplínákhoz, mint az ökonometria, biometria, szociometria stb. Ezeknek a komplex módszertanoknak, diszciplínáknak gyakorlati megjelenési formái a többváltozós, többrelációs modellek.[6]

Kézenfekvő, hogy ezek a komplex módszerek és modellek a megismerésnek nagy lehetőséget nyitó, robusztus eszközei. Természetes az is, hogy kumuláltan produkálják a tévedés, félreismerés lehetőségeit is. A következőkben főleg e területek problémái foglalkoztatnak.[7]

A tévedések néhány típusa

E tanulmány keretei nem elégségesek ahhoz, hogy a teljesség igényével tekintsük át a hibákat, amelyek a statisztikai eszközök segítségével történő valóságmegismerést tévútra vezetik. Ha mégis — a teljes rendszerre való törekvés nélkül — pragmatikusan tipizálni kívánjuk a legfontosabb hibákat, a következő csoportosulásokat fogalmazhatjuk meg:

— a fétisek felelőssége,
— a rossz specifikáció hatása,
— a kovariancia—kauzalitás fogalmainak összekeverése.

a) A „*fétisek felelősségét*" abban látjuk, hogy egy-egy kiragadott szempont, cél, módszer túlzott jelentőséget kap, az elengedhetetlen mellérendelt tényezők elhanyagolásával.

— Az „illeszkedés" fétise. Amikor egy-egy (egy- vagy többtényezős) összefüggést vagy összefüggésrendszert megfogalmaznak, gyakran a legjobb illeszkedés a cél. Lehet törekedni az a priori ismeretek, a plauzibilitás alapján reálisnak tűnő specifikációra, de törekedni lehet az összefüggések szorosságának jelzésére rutinszerűen

[4] *H. Swoboda*: Knaurs Buch der modernen Statistik, 1971.
[5] *K. A. Yeomans*: Statistics for the social scientist. Bristol, 1968.
[6] *Halabuk László*: Ökonometriai modellek és módszerek kutatása és alkalmazása Magyarországon. Statisztikai Szemle, 1975/8—9.
[7] *Halabuk László*: Some experiences with econometric model building. European Meeting of the Econometric Society, Budapest, 1972.

használt mutatók legmagasabb értékének biztosítására is. Ennek az utóbbi célnak érdekében, a becslési eredmények feljavítására gyakran folyamodnak megengedhetetlen eszközökhöz is, mint amilyen a változók számának, a késleltetések számának gátlástalan növelése, a mesterséges változók (dummy variables) könnyed alkalmazása. Ezek az eljárások esetenként a sztochasztikus kapcsolatok determinisztikussá való degradálásához közelítenek. Ehhez a kérdéskomplexumhoz tartozik annak a megállapítása is, hogy a gyakorlati szempontból nagy jelentőségű előrejelzésnél a mintaidőszakhoz való tökéletes közelítésnél nagyobb jelentősége van a mintaidőszak és az előrejelzési időszak paraméterrendszere közötti eltérés helyes felmérésének.

— A pontbecslés uralkodó szerepe. Elsősorban az előrejelzésnél észlelhető, hogy a pontbecslés mellett az intervallumbecslés szerepe háttérbe szorul. Ez pedig egyenértékű annak a lehetőségnek az elhanyagolásával, amit a sztochasztika azáltal nyújt, hogy minden megállapítás mellé valószínűségi eloszlást rendel.

— A mennyiségi közelítés prioritása a minőségivel szemben. Az előrebecslés szokásos sémája szerint az időskálához egy mennyiségi alakulást feltüntető függvényt rendelnek. Az előrejelzések számos kudarca sem volt elég ahhoz, hogy e kvantitatív közelítés mellett megfelelő elismerésben részesüljön a kvalitatív közelítés. Arról van szó, hogy az aprólékos számszerű determináció helyett ígéretesebb és tartalmasabb lehetne a tendenciák, a fordulópontok, a struktúraváltozások előrejelzése. Az irodalmi eredmények mellett az ilyen irányú gyakorlati alkalmazás alig kapott még szerepet.

— A méretek fétise.[8] Ennek a bűvöletnek talán a legprimerebb típusa a teljes körű statisztikai felvétel iránti tisztelet. A teljes körű felvétel különösen fontos esetènél, a népszámlálásnál sem szabad azonban figyelmen kívül hagyni, hogy ennek pontossága sem abszolút, sőt az elért pontosság is csupán egy eszmei pillanatra érvényes. Amint ezen a pillanaton túllépünk, a legteljesebb körű felvétel is már csak extrapolációs alapnak tekinthető, és — különösen erősen növekvő népességszám esetén — a vizsgált sokaságnak már csak egy részét — éspedig cserélődő részét — képviseli.

Az ökonometriai modellek esetében nagy jelentőségű a közgazdasági változókat reprezentáló idősorok hosszúsága. A becsléselmélet annál megbízhatóbbnak tekinti az információs bázist, minél nagyobb a minta, idősorok esetében minél hosszabbak a megfigyelt idősorok. Nem szokták azonban hangsúlyozni a paraméterbecsléshez felhasznált idősorok homogenitásának fontosságát. Ha viszont a megfigyelési minta nagysága — az idősorok hossza — a heterogenitás növekedésével jár együtt, akkor nagyon körültekintően meghatározott kompromisszum indokolt. (Ez a kérdés elvezet a *Bortkiewicz* által megfogalmazott ún. kis számok törvényéhez.)

Hasonló túlértékelésben részesülhet egy összefüggésrendszer specifikálása esetén a változók és a relációk számának nagysága. Igazolható, hogy adott esetekben a változók vagy relációk számának csökkentése nem jár információveszteséggel, legfeljebb munkamegtakarítással.

— Megemlíthetjük a pontosság fétisét is. Nem lehetne klasszikusabban fogalmazni, mint *Oskar Anderson:* „1. Nincs gyakorlati értelme egy szekér szénát kémiai precíziósmérleggel mérni. 2. Nem ér semmit, ha két város távolságát kb. ezer lépésekben lemérjük, és ehhez hozzáadjuk a városkapu milliméterben mért vastagságát."

b) Az előzőkben módszertani megközelítési hibákat említettem. A következő néhány hibapélda a szakmai adottságok, ismeretek hiányára, elhanyagolására, valamely releváns körülmény figyelmen kívül hagyására vezethető vissza. Nevezhetjük e példákat a *rossz specifikáció* eseteinek. Ilyenek például:

— Az összehasonlítási bázis problémája. Magyarországon az ásványolaj termelése 1938-ban, a rotációspapír termelése 1929-ben még kísérleti stádiumban volt. Ha tehát 1929-et vagy 1938-at tekintjük bázisnak, a következő évek termelése robbanásszerű fejlődést tükröz.[9] Ez a helyzet minden új termék vagy gyártási ág megindulásakor. Ha ezzel kapcsolatban utalunk arra, hogy Magyarországon 1929 konjunkturális csúcs volt, és a következő években általános volt a hanyatlás, illetőleg pangás, akkor az a látszat születik, mintha a rotációspapír-termelés konjunktúramentes ágazat lett volna.

— Egy ország népsűrűsége úgy adható meg, mint a népesség és a terület hányadosa. De ha például a terület jelentős része (50—70—90%-a) emberi lakhatásra alkalmatlan, akkor nyilvánvalóvá válik az ún. nyers arányszámokkal szemben a tiszta arányszámok jelentősége, például a nép-

[8] *Halabuk László—Hulyák Katalin*: Az időjárás és a mezőgazdasági termelési eredmények. Ökonometriai Füzetek, 10. sz. KSH, 1968.

[9] Ezek egyébként a gazdaságtörténet, illetve a gazdaságstatisztika szokásos bázisévei.

sűrűség esetében az ország össznépességének (nem a teljes, hanem) a lakhatásra, művelésre alkalmas területtel képezett hányadosa.

— Igen fontos, hogy egy ország nemzeti jövedelméből mekkora részt fordít bizonyos célokra, például katonai, illetőleg jóléti vagy egészségügyi kiadásokra. Ez a kérdés a politikai publicisztikának is kedvelt, gyakori témája. Amikor azonban az említett célokra fordított kiadásokat nem a nemzeti jövedelem (vagy valamely rokon kategória) szintjén nézik, hanem az állami költségvetés síkján, erősen torzított, félrevezető kép adódik, hiszen az egészségügyi, jóléti kiadások országonként eltérően oszlanak meg az állami („federális") költségvetés és a helyi kormányzati egységek költségvetése között.

Az előző három példa az elemi statisztikai tankönyvek, kézikönyvek szférájába tartozik. A hibás specifikáció igazi „érvényesülési területe" azonban az a vizsgálati szféra, amelyet az előzőekben a komplex, alkalmazott módszerekhez kapcsoltam, amely végső fokon a „modellek" fogalomkörébe torkollik. Vegyünk e hatalmas komplexumból példákat a rossz specifikációra.[10]

— Az ökonometriai modellek logikai sémáját tekintve interdependens és rekurzív modelleket szoktak megkülönböztetni.[11] Az interdependens modellek olyan rendszert tükröznek, amelyben a változóknak — legalábbis a rendszer endogén változóinak — egymásra való hatása (elvben) kölcsönös, és a modell számszerűsítése során határozzák meg ezen egyedi összefüggések erősségét, fontosságát. (Ebben a kvantifikálásban a 0 értékű koefficiens is helyet kaphat.) Amellett, hogy az ökonometrikusok túlnyomó többsége ismeri és elismeri ennek az összefüggésrendszernek az interdependenciáját, vannak, akik a rekurzív specifikáció hívei. Ez utóbbi rendszerben az összefüggések, hatások egyirányúak. Ebben a specifikációban az összefüggések paraméterei meghatározásával kapcsolatos módszertani nehézségek áthidalása érdekében a közgazdasági valóság megfogalmazása szenved súlyos, alapvető sérelmet.[12] Ilyen hiányosság jelentkezik például akkor, amikor a termelés (kínálat, kapacitás) hatását a fogyasztásra (keresletre) megfogalmazzák ugyan, de a fordított irányú hatást (visszacsatolás, feedback) nem dolgozzák ki.[13]

— Némileg rokon ezzel a problémával a következő. Szokásos a termelés színvonalát kapacitásbeli (kínálati) vagy pedig igény szerinti (keresleti) tényezőkkel meghatározni. Előfordul a termelés szintjének meghatározására keresleti és kínálati tényezők vegyes alkalmazása is. A (leegyszerűsített) valóság azonban az, hogy olyan helyzetben, amikor az igény (kereslet) meghaladja a kapacitást, a termelés színvonalát a kapacitás határozza meg, és a kapacitást meghaladó többletigényeknek az alakulása a folyó termelés szempontjából irreleváns. Amikor az igények nem érik el a termelési kapacitást, a termelés színvonalát az igények határozzák meg, és a termelési kapacitásoknak a termelés meghatározásában játszott szerepe legalábbis csökken. A termelési színvonal meghatározásában tehát a szűk keresztmetszetet képviselő tényezőrendszer szerepe a döntő, vagy legalábbis elsődleges. A világszerte nagy számban készülő ökonometriai modellek specifikációja nem tükrözi ennek a ténynek a felismerését.[14]

c) A tévedések egy jelentős része a *kovariancia—korreláció—kauzalitás* helytelen felfogásából, a mutatószámok téves értelmezéséből és hibás következtetésekből adódik. Anélkül, hogy a korreláció- és regressziószámítás nélkülözhetetlen és kitűnő módszertanának szakmai tárgyalásába bocsátkoznánk, a következőket emelhetjük ki:

A kovariancia két vagy több jelenség („változó") alakulása közötti statisztikai összefüggésre, a kauzalitás viszont a változók közötti okozati kapcsolatra utal. Nehéz, szakmai tájékozottságot és józan gondolkodást igénylő feladat annak elbírálása, hogy statisztikai összefüggés menynyiben utal funkcionális, kauzális kapcsolatra, és ha ezt létezőnek tekintik, a kauza-

[10] *Ph. J. Dhrymes—Ph. Howrey—S. H. Hymans—J. Kmenta—E. E. Leamer—R. E. Quandt—J. B. Ramsey—H. T. Shapiro—V. Zarnowitz*: Criteria for Evaluation of Econometric Models. Annals of Economic and Social Measurement, 1/3. 1972.

[11] *H. T. Shapiro*: Is verification possible? The evaluation of large econometric models. American Journal of Agricultural Economics, 15/2. 1973. május.

[12] *Halabuk László*: Kérdésfeltevés és módszerek viszonya az ökonometriai modellekben. A magyar statisztikai felsőoktatás kétszáz éve c. KSH, 1979. kiadványban.

[13] *H. T. Shapiro—Halabuk L.*: Macroeconometric model building in socialist and nonsocialist countries: A comparative study. International Economic Review 17/3. 1976.

[14] *Halabuk László*: A népgazdaság ökonometriai modellezésének néhány időszerű kérdése. Szigma, 1977. 4.

litás milyen jellegű.[15] Itt elkerülhetetlenül némi ismétlésbe kell bocsátkoznunk, ha a problémakört vázolni akarjuk. Olyankor, amikor két változó között statisztikai összefüggés észlelhető, a korreláció típusai — a kauzalitás szempontjából — a következők lehetnek:

— egyirányú kapcsolat, például a csapadék és a mezőgazdasági termésátlagok között:

— interdependens, kölcsönös kapcsolat, például a bérek és termelékenység között. Konkrét ismeretek szükségesek annak elbírálásához, hogy az elvben kölcsönös kapcsolaton belül adott esetben melyik irány a lényegesebb;

— közös meghatározó tényező, például a kukorica és a cukorrépa átlagtermésének alakulása nagyfokú kapcsolatot mutat; a két változó azonban nem egymás befolyása alatt áll, hanem mindkettőre közös (meteorológiai és egyéb) tényezők hatnak. Ide tartozik az a fontos eset is, amikor egy gazdaság erős általános növekedés fázisában van. Ilyenkor úgyszólván bármely gazdasági változók között megállapítható az erős statisztikai összefüggés („a változók kollineárisak"), ezt azonban „közös harmadik" tényező idézi elő. Az említett esetben a változók kapcsolatának vizsgálatánál a trendjellegű fejlődési tényezőt ki is szokták szűrni;

— már utaltunk arra a tautológia jellegű kapcsolatra, amely valamely egész komplementáris részei között létezik;

— vég nélkül lehetne sorolni a véletlenszerű statisztikai kapcsolatokat.

Nyilvánvaló, hogy a különféle típusú kauzalitást (vagy függetlenséget) takaró statisztikai összefüggések gyakran tévútra csábítják az óvatlan elemzőt. Utalunk ezenkívül arra is, hogy a döntést, következtetést további tényezők bonyolíthatják. Mindenekelőtt az, ha nem két-, hanem többváltozós kapcsolatról van szó. Megfontolásra int az is, hogy a változók kapcsolata döntően megváltozhat, ha közöttük időbeli késleltetést alkalmazunk. Végül szinte csüggesztő lehet, hogy egy („szerencsésen specifikált") összefüggésben a magyarázó változók kicserélése hasonlóan szoros összefüggéshez vezethet.

Két szempont azonban nagyon fontos. Először az elemi összefüggések mellett[16] óriási a szerepük a sokaságok közötti összefüggéseknek. Egy közeledő esőfelhő esetében minden egyes vízmolekula helyzetének és pályájának tanulmányozása helyett megelégszünk annak megállapításával, hogy az okok halmaza (esőfelhő stb.) erős valószínűséggel esőt jósol.

Másodszor egy közgazdasági összefüggésből (modellből) nem zárható ki a direkt, közvetlen kauzalitások léte már csak azért sem, mert ez a gazdaságirányítás, szabályozás funkcióját zárja ki a modellből.

Ismeretelméleti meggondolások

Az előzőkben vázoltuk és némileg tipizáltuk a statisztikai módszerek felhasználásával végrehajtott téves eljárásokat, következtetéseket, törekvéseket. Most megkíséreljük annak vázlatos megmutatását, hogy eme tévedések mögé sokszor egy ismeretelméleti háttér rendelhető.

A tudományos ismereteket sokféleképpen osztályozzák. Egy bizonyos szempont alapján a tudományos ismereteket nomografikus és idiografikus ismeretekre oszthatjuk.[17] A nomografikus kutatás során a közvetlenül tapasztalt kölcsönösen összefüggő jelenségek sorozatos felbontása révén a környező világban uralkodó „elemi okok" és „elemi következmények" összefüggésének megállapítására törekszünk. Az idiografikus típusú megismerés folyamán a

[15] *S. H. Hymans*: On the use of leading indicators to predict cyclical turning points. Brookings Papers on Economic Activity, 2. 1972.

[16] Az emberi tudásnak az elemi összefüggések teljes birtoklására alapozott ideálját fogalmazta meg *Laplace*: „Une intelligence qui pour un instant donné connaitrat toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si le d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'anayse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome: rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir comme le passé serait présent à ses yeux." (*P. S. Laplace*: Essay philosophique sur les Probabilités. 1814.)

Ez a gondolat — hogy ti. egy olyan elme, amely adott pillanatban a természetet mozgató összes erőket és a természetet alkotó lények helyzetét is ismerné, s ha emellett ez az elme elég hatalmas lenne, hogy mindezeket az adatokat elemzés alá vegye és ugyanabba a formulába foglalná a világmindenség legnagyobb testeinek és legkisebb atomjainak mozgását, akkor számára semmi sem lenne bizonytalan, mert mind a jövő, mind a múlt jelen lenne előtte — valamennyi tudomány számára érdekes lehet.

[17] *Oskar N. Anderson*: Einführung in die matematische Statistik. Verlag Springer, Wien, 1935.

kutató elme elemeknek valóságos térbeli és időbeli megoszlásának, megjelenésének ismeretére, leírására törekszik.[18]

Mivel a statisztika a megfigyelt jelenségek leírásában nem tud tértől és időtől elvonatkoztatni, alapvető jellege idiografikus. Másrészt módszertani oldalról, a valószínűségszámítás, a matematikai statisztikai inferencia alkalmazásán keresztül fokozatosan nőtt a szerepe egy nomografikus elemnek is. A konfliktusnak — amely az ökonometriai modellezésben a legélesebb — gyökere ez: lehet-e a térben és időben meghatározott, egyszeri, megismételhetetlen jelenségek elemzésére tértől és időtől elvonatkoztatott, igen nagy vagy végtelen sokaságok vizsgálatára alkalmas matematikai statisztikai módszereket alkalmazni? Tekinthető-e egy időben és térben izolált eseményhalmaz egy magasabb rendű sokaság, halmaz mintájának? Első megközelítésben úgy tűnik, hogy összeegyeztethetetlen dolgokról van szó. A probléma a sztochasztikus ökonometriai modellek esetében azért különösen éles, mert kezelésükhöz, elsősorban a paraméterbecsléshez elengedhetetlen a megfigyelt adathalmaznak mintaként való kezelése.

Mégis létrehozható a *történeti jellegű minta* („idiográfia") és a *matematikai statisztikai inferencia* („nomográfia") közötti *kompromisszum*. Ennek döntően fontos elméleti alapja és ugyanilyen fontos előfeltétele van. Az elsőt, az áthidaló eszközt a kis minták elmélete nyújtja, amely lehetővé teszi a statisztikai inferencia alkalmazását a tömegjelenségek fogalomköréhez képest elenyészően kis mintákra, 10—20—30 éves idősorokra is. Ennek az áthidalásnak a megteremtésében elévülhetetlen érdeme van *R. A. Fishernek*, a 20. század kiemelkedő statisztikusának.[19] A statisztikai inferenciának a kis mintákra való alkalmazása feltételként nyomatékosan igényli azonban az inferencia korlátoltságának minden rendelkezésre álló külső, szakmai információval való ellensúlyozását. A történeti jellegű kis minták és a sztochasztika szintézise századunk egyik nagy vívmánya, ez az alkalmazókra kötelezettségeket is ró.

Ezzel eljutunk a módszer és a vizsgálat tárgyának kettősségéhez. A módszer neutrális, közömbös, a tárgynak viszont saját arculata van.

— A módszer passzív. Hagyja magát felhasználni okosan és oktalanul. Rövid eszmefuttatásunkhoz elsősorban közgazdasági összefüggésrendszerek adják a hátteret. Ezeknek az összefüggésrendszereknek a paraméterbecslése engedelmesen tűri a matematikai optimalizálást akkor is, ha a külső, a priori, nem is vitatott összefüggések szerepét figyelmen kívül hagyják, és ezáltal szabadon engedik az esetleges, véletlenszerű, abszurd összefüggések megállapításának lehetőségeit.

— A vizsgálat tárgyának saját karakterisztikumai, strukturális adottságai, okozati összefüggései, funkcionális törvényei vannak. Ezekről a vállalt, konkrét vizsgálat megkezdése előtt is vannak a priori ismereteink. Az a priori ismeretanyagnak a mellőzése gyengíti a megállapítások erejét, megbízhatóságát. A tárgy sajátosságainak mellőzhetetlen voltára utal az ökonometria, szociometria, biometria diszciplínáinak önállósulása is, ugyanakkor, amikor a statisztikai inferencia és a matematikai kezelés mindnyájuk közös vonása.

*

Korábban utaltunk arra, hogy az újabb, potenciálisan erőteljes módszerek a téves alkalmazások lehetőségét is megteremtik. Ennek a tanulmánynak azonban nem az a célja, hogy — egy korlátozott területen — a megismerés és a tévedés küzdelmének reménytelenségét konstatálja. Az ismeretek szédítő kibővülésének keretében a józan ítélet fontosságát kívántam hangsúlyozni. Mert a legragyogóbb módszerek birtoklása sem menti fel az embert — a statisztikust és a statisztika alkalmazóját sem — a gondolkozás szükségességétől.

[18] Ennek az osztályozásnak kialakításában kiemelkedő szerepet játszott *Csuprov, Couturat, Windelband, Kries, Rickert, Cournot.* Az itt használt terminusok mellett a „nomotetikus", „nomologikus", „ontológiai", „törvénytudományok", illetőleg „eseménytudományok", „történeti tudományok" kifejezés is szerepel. Kiemelkedő hozzájárulás e problémakörhöz például: *L. Bortkiewicz*: Die Iterationen, ein Beitrag zur Wahrscheinlichkeitstheorie. Berlin, 1917.; *L. Bortkiewicz*: Homogenität und Stabilität in der Statistik. Skandinavisk Aktuarietidskrift, H. 1/2. Uppsala, 1918.; *A. A. Csuprov*: Statistik als Wissenschaft. Archiv für Sozialwissenschaft und Sozialpolitik, Bd. 23., 1906.; *A. A. Csuprov*: Das Gesetz der grossen Zahlen und der stochastisch-statistische Standpunkt in der modernen Wissenschaft. Nordisk Statistik Tidskrift, I/1., 1922.

[19] *R. A. Fisher*: Statistical Methods for Research Workers. London, 1932.

KŐRÖSI GÁBOR—MÁTYÁS LÁSZLÓ—SZÉKELY ISTVÁN

Ökonometriai alkalmazások — némi hiányosságokkal

(Avagy: kigyógyulunk-e a gyermekbetegségekből?)[1]

Közgazdasági folyóiratainkban ma már viszonylag rendszeresen jelennek meg ökonometriai elemzések.[2] Mivel az ökonometria a gazdaságelemzés és a közgazdasági elmélet verifikálásának egyik hasznos eszköze, ezért fontosnak tartjuk, hogy továbbra is minél több alkalmazott ökonometriai tanulmány lásson napvilágot. Vannak azonban az alkalmazott ökonometriai munkáknak olyan *formai-módszertani* követelményei, amelyek teljesítése szükséges ahhoz, hogy az elemzést meg lehessen ítélni, fel lehessen használni. Véleményünk szerint a következő feltételeknek *minden* ökonometriai módszereket alkalmazó publikációnak meg kell felelnie:[3]

1. Ismertesse a felhasznált adatokat, azok forrását; definiálja pontosan az elemzett változókat.
2. Ismertesse a felhasznált módszereket, és azokat korrekt módon alkalmazza.
3. Közölje a számszerűsített modellt, és legalább azokat a statisztikákat, amelyek az általánosan elfogadott vélemény szerint feltétlenül szükségesek a modell megítéléséhez.
4. A modellből csak valamilyen (előre megadott) valószínűségi szinten szignifikánsnak tekinthető következtetéseket vonjon le; ne tartalmazzon olyan következtetéseket, amelyre az empirikus eredmények nem nyújtanak alapot.

Az első három pontban felsoroltak teljesítése nélkül a tanulmányban közölt empirikus eredmények használhatatlanok, értelmezhetetlenek, a negyedik pont teljesítése nélkül viszont elfogadhatatlanok a belőlük levont következtetések.

Még az ökonometriai elemzéseket többkevesebb rendszerességgel közlő folyóiratok utolsó néhány évfolyamában is meglehetősen sok olyan, ökonometriai módszereket alkalmazó cikk található, amely ezeknek a követelményeknek nem felel meg. E munkák színvonala változó, van köztük olyan, amelyik az olvasó számára nagyon érdekes és tanulságos lehetne. Az elemzések minőségi megítélésére azonban semmiképp sem vállalkozhatnánk, már csak azért sem, mert éppen a fentiek miatt a hivatkozott cikkek egyike sem ítélhető meg megalapozottan, mivel nem elégítik ki teljesen a fenti követelményeket. Így nem állapítható meg egyértelműen, milyen mértékben támasztják alá az elméleti hipotéziseket az empirikus eredmények. Úgy tűnik, nem alakult még ki az ökonometriai publikációknak megfelelő hagyománya. Ebben a közgazdasági folyóiratok szerkesztőségei legalább annyira hibásak, mint a szerzők, akik, ha emlékeztetik őket ezekre a hiányosságokra, nyilván szívesen pótolták volna, annál is inkább, mivel gyakran viszonylag egyszerűen teljesíthető követelményekről van szó.

A következőkben pontról pontra kifejtjük, miért tartjuk a fenti követelmények teljesítését fontosnak, és példákkal bizonyítjuk, hogy teljesítésük még nem általános kívánalma a publikálásnak.

1. Úgy gondoljuk, hogy empirikus vizsgálatoknál nem lehet eltekinteni a felhasz-

[1] Ezúton is szeretnénk köszönetet mondani mindazoknak, akik írásunk korábbi változatát olvasva nem hallgatták el számunkra nagyon értékes kritikai észrevételeiket.

[2] A hivatkozott cikkek szerzői között bizonyára vannak olyanok, akik nem tekintik magukat ökonometrikusoknak, tanulmányukat ökonometriai munkának, de az elnevezéstől függetlenül, ha valaki sztochasztikus (gazdasági) modellek becslésével, elemzésével foglalkozik, azokból von le következtetéseket, akkor az ökonometria alkalmazásával kapcsolatos követelményeket nem hagyhatja figyelmen kívül. Így az egyszerűség kedvéért mindegyik itt hivatkozott cikket alkalmazott ökonometriai munkának tekintjük.

[3] Természetesen nem csak ökonometriai publikációkra lehetnek érvényesek az itt megfogalmazottak, de mi most vizsgálódásunkat erre a körre szűkítjük.

nált adatok azonosíthatóságától, a változók pontos definíciójától. Az adatbázis ismerete nem (csak) azért fontos, hogy az elemzés reprodukálható legyen, hanem, mert a különböző adatforrásokban azonos, vagy nagyon hasonló megnevezés alatt esetleg mást találunk. Az empirikus vizsgálatoknál mindig fenyegető esetlegességek jelentős része már az adatbázis kiválasztásánál jelentkezik. Így a felhasznált adatbázis ismerete alapvető információ lehet az eredmények értelmezésénél; az eredmények továbbgondolásához, további felhasználásához pedig általában elengedhetetlen.

Hasonlóan fontos az elemzett változók pontos definíciója. Nem mindegy például, hogy egy termelési függvényben nettó vagy bruttó állóeszközállomány szerepel-e, milyen korrekciókat végeztek rajta, változatlan áras idősor esetén mi az árbázis stb. Szerencsés esetben az adatbázis egy fél mondattal, rövid lábjegyzettel stb. egyértelműen megadható. Gyakran azonban nem ilyen egyszerű a helyzet. Két lényeges esetben az adatbázis megadása nem lehetséges, amikor:

— Az adatok, vagy azok egy része, nem publikus, például vállalati adatok, vagy minősített statisztikai adatforrások esetében.
— Az adatbázis összeállítása önmagában is hosszú, bonyolult eljárás volt, és ennek ismertetése túl hosszú lenne a a cikk terjedelméhez képest.

E két esetben is utalni kell az adatok jellegére, és a változók tartalmát pontosan definiálni kell. Követendőnek tartjuk a *Journal of Econometrics* szerkesztőségi gyakorlatát, amely az empirikus tanulmányokat publikálni kívánó szerzőktől megköveteli, hogy a cikkhez mellékeljék a felhasznált adatokat és számítási eljárásokat részleteiben ismertető függeléket. A szerkesztőség dönti el — a szerzővel egyetértésben —, hogy a függelékből mi kerüljön be a cikkbe. A publikált cikkből — terjedelmi okokból — gyakran kimarad ez a függelék, vagy csak erősen lerövidítve kerül bele, de közismert, hogy ilyen leírás készült, és azt szükség esetén bárki elkérheti a szerzőtől vagy a szerkesztőségtől. Ismereteink szerint hasonló követelményt egyetlen hazai közgazdasági folyóirat sem támaszt az empirikus elemzések szerzőivel szemben.

Az adatbázis, illetve adatforrás tisztázatlansága különösen zavaró például LACKÓ [22], SIMON [31], TOMPA—SZAKONYI—SZABÓ—HERMANN [35] cikkében.

2. A különböző ökonometriai módszerek, becslési ejárások mást és mást tételeznek fel az elemzett adatokról, változókról, modellekről; alkalmazhatóságuk ezek teljesülésének függvénye. A különböző becslések tulajdonságai eltérnek egymástól, ezért a kapott eredmények értelmezése, értelmezhetősége is a választott módszer függvénye. A különböző eljárások eltérő hipotézisei más-más próbák elvégzését követelhetik meg. Ezért fontos, hogy a felhasznált módszer egyértelműen azonosítható legyen a cikkből. Erre gyakran megfelel a módszer neve, ha az általánosan ismertnek tekinthető; például: klasszikus (közönséges) legkisebb négyzetek módszere vagy OLS, stepwise regresszió, teljes információs maximum likelihood vagy FIML stb. Hasonlóképpen elegendő egy közismert matematikai statisztikai, ökonometriai programcsomag (például BMDP, SAS, SPSS, TSP) megfelelő eljárására utalni. Amennyiben ezek egyikére sincs mód, akkor természetesen pontosan hivatkozni kell a forrásra.

Sajnos sok példa található arra, hogy az alkalmazott módszer megadása hiányzik — például: KISS [18], NAGY [25], SIMON [31], SIMON—KŐRÖSI [32] —, de gyakran „csak" pontatlan, túl általános, ködös a megadás, mint például: „Az F mátrix elemeinek meghatározására ökonometriai függvények szolgáltak." (DJOGNI [2], 615. o.); „Az adatokkal trendelemzést és regressziós elemzést végeztem." (HELLER [6], 250. o.); „. . . a csoportokhoz külön-külön regressziós függvényt illesztettünk." (JÁNOSI—KEPECS—PÁL [11], 266. o.).[4] Szeretnénk felhívni a figyelmet arra is, hogy akkor sem egyértelmű a felhasznált módszer megadása, ha legkisebb négyzetek módszerével, vagy elve alapján készült becslés szerepel (vö. pl. TOMPA—SZAKONYI—SZABÓ—HERMANN [35]), mivel a legkisebb négyzetek elve alapján nagyon sok módszert kidolgoztak — például: klasszikus (közönséges), általánosított, indirekt, két- és háromfokozatú legkisebb négyzetek módszere — és ezek tulajdonságai alapvetően különböznek egymástól.

Több cikkben szerepelnek nem-lineáris függvények becslései úgy, hogy a szerző a becslési módszerről hiányos információt közöl, vagy egyáltalán nem közöl semmilyent, mint pl. MÉSZÁROS [23]. Egy nemlineáris becsléseket is tartalmazó cikk az alkalmazott becslési módszerről a következőt tudatja: „A számításokat *e* alapú logaritmus segítségével végeztük el." (NAGY

[4] A szöveg ortogonális regressziós becslést sugall, a becsült paraméterek értelmezése azonban ezzel ellentétes; a *Jánosiné—Pálné* [12] cikkel hasonló a helyzet.

[25], 178. o.). Gyakori, hogy csak lineáris modell becslésére alkalmas módszert találunk nem-lineáris függvények becslési eljárásaként, például RÉDEY—SIPOS [27] és [28], VASTAG [37]. Általában ugyan valószínűsíthető, hogy a szerzők linearizálták függvényeiket (gyakran exponenciális függvényeket, pl. Cobb—Douglas termelési függvényeket becsültek). Ezek a „sejthető" becslések azonban közismerten torzítottak, és ezzel a szerzők nem foglalkoznak, vagy ha igen, ez a cikkből nem derül ki.

Esetenként találhatók összetett, több lépésben elvégzett becslések — például JÓZSEF [14] (eloszlások becsült paramétereire illeszt lineáris regressziót), RIMLER [29] (a hiányzó adatokat lineáris interpolációval becsli, majd ezeket, mint tényadatokat kezeli) —, amelyeknek a tulajdonságait a szerzők egyáltalán nem vizsgálják, úgy tekintik, mintha csak az utolsó lépésben alkalmazott módszer lenne érdekes. Az ilyen összetett, több lépéses becslések tulajdonságai elég „furcsák" lehetnek, és statisztikai jellemzőik nagyon eltérhetnek a szokásostól, így más hipotéziseket kell vizsgálni, eltérő statisztikai mutatókat szükséges használni. Emellett elemezni kell a becslési eljárásból adódó torzítás mértékét is.

Nagyon általánosnak tűnik a klasszikus legkisebb négyzetek módszerének (OLS) alkalmazása.[5] Az OLS alkalmazásának szigorú matematikai-statisztikai feltételei vannak, melyek teljesülése gyakran nem látszik biztosítottnak, és ezért az esetek egy részében valószínűleg torzított becslést kaptak. Ezt azonban nagyon ritkán lehet tetten érni a közölt eredmények, statisztikai mutatók alapján. Az ökonometria elmélet különböző esetekre sok eltérő tulajdonságú esztimátort dolgozott ki. Ennek tárgyalása azonban részben túlmegy írásunk keretein, és ebben a kérdésben a nemzetközi gyakorlat sem egyértelmű, így az OLS alkalmazásának problémáit itt nem tárgyaljuk.

3. Talán az eredmények és a modell megítéléséhez szükséges különböző statisztikák közlésénél a legfeltűnőbbek a hiányosságok. Van olyan szerző is,-aki még a becsült paraméterek áttekinthető közlését sem tartja fontosnak, csak a szöveg (a becsült modellből levont következtetések) között közöl néhány becsült paramétert is, mint például HARSÁNYI [7], JÁNOSI—KEPECS—PÁL [11], TOMPA—SZAKONYI—SZABÓ—HERMANN [35]. Más a becsült paramétereknek csak egy részét közli: „. . . a függvény konstans tagját az áttekinthetőség érdekében elhagytuk" (NAGY [25], 175. o.). Hasonlóan jár el pl. KAPITÁNY—KORNAI—SZABÓ [17] is.

Hogy milyen hipotézisek teljesülését kell egy adott ökonometriai elemzés során vizsgálni és milyen statisztikai mutatókat kell kiszámítani, elemezni, az természetesen a konkrét modelltől és az alkalmazott módszerektől függ. Alapelvként leszögezhető, hogy minden olyan (statisztikai) hipotézis ellenőrzésére szükség van (lenne), amelyeket a modell felírása, becslése során kihasználtunk, és emellett szükség van bizonyos, a modell illeszkedésének jóságát, a modell erejét mutató statisztikákra. Ezeket a statisztikákat célszerű közölni is, hiszen a szerző mindig meghatározott valószínűségi szinten vizsgálja a hipotézisek teljesülését, és az olvasó elvárásai eltérhetnek a szerzőétől. Ezért nem tartjuk szerencsésnek, ha egy próbáról csak annyit közölnek, hogy pozitív vagy negatív eredménnyel járt. (Vö. pl. RÉDEY—SIPOS [27] 610. o. és [28] 443. o., TOMPA—SZAKONYI—SZABÓ—HERMANN [35] 575. o.) Amennyiben a modell felállítása, vagy becslése során kihasznált bármelyik hipotézisünk nem teljesül, eredményeink torzítottakká, hibásakká, félrevezetőkké válhatnak, a levont következtetések hamisak lehetnek. Természetesen vannak olyan hipotézisek, amelyek nagyon nehezen ellenőrizhetőek (ilyen például a reziduumok normalitása, amit szinte minden statisztikai próba kihasznál, de a szokásos idősoros elemzéseknél felhasznált minta általában túl kicsi a normalitás ellenőrzésére), de lehetőség szerint törekedni kell arra, hogy minél több hipotézis teljesülését ellenőrizzük.

Sajnos a hivatkozott cikkek többségében nagyon szegényes a statisztikák közlése. Esetenként azonosíthatatlan, milyen mutatót takar a megnevezés: például „illeszkedés" (vö. HELLER [8], 252. o.), vagy „covariancia" (vö. RIMLER [30], 67., 69., 75. o.). Általában a hivatkozott cikkek csak az együtthatók szórását vagy t hányadosát, determinációs indexét (R^2) és — jó esetben — a Durbin—Watson (d) statisztikát közlik. Gyakori azonban, hogy még ezek az alapstatisztikák is hiányoznak (különösen a Durbin—Watson statisztika hiánya gyakori). A korábban említteken kívül (akik még a becsült együtthatókat sem közlik) ilyenek például: FERENCZI [4], HELLER [8], KOVÁCS—TARJÁN [21], MÉSZÁROS [23], MOLNÁR—MÓRICZ [24], NYÁRY [26], RIM-

[5] A továbbiakban feltételezzük, hogy mindazok, akik nem, vagy nem elég pontosan adták meg a felhasznált becslési módszert, OLS-t (klasszikus legkisebb négyzetek módszerét) használtak.

LER [29] és [30], SZÁSZ [33], VALKOVICS [36], VASTAG [37]. Legtöbbször csak nagyon keveset tudhatunk meg a modellek reziduumainak tulajdonságairól. A legtöbb cikk szerzője még a reziduális szórás becslését sem közli, ami különösen akkor zavaró, ha a modellt előrejelzésre (is) kívánja használni (például: JÓZSEF [14], KOVÁCS—TARJÁN [21], MÉSZÁROS [23]).

A fentebb alapstatisztikáknak nevezett néhány mutatón kívül mást szinte alig találni a hivatkozott cikkekben. Kizárólag a „pécsi iskolához"[6] tartozó modellezők utalnak például arra, hogy vizsgálták a multikollinearitás veszélyét, gyakran azonban ők sem közlik a próbák értékét. A multikollinearitás pedig az ökonometriai modellek talán legközismertebb torzító tényezője. Érthetetlen, hogy ennyire figyelmen kívül hagyják a modellezők.

Nagyon sok becslési módszer tételezi fel, hogy a különböző megfigyelésekhez tartozó hibatagok egymástól függetlenek. Ez a hipotézis ilyen általánosságban nem vizsgálható. Idősorok felhasználásával becsült modellek esetében ezt a hipotézist azonban úgy szokták átfogalmazni, hogy a reziduumok autokorrelelálatlanok, fehér zaj jellegű sztochasztikus folyamatot alkotnak. Megfelelő elemszám esetén a hipotézis spektrálanalízissel jól vizsgálható, általában azonban a modellek időtávja ehhez túl rövid. Helyette azt szokás vizsgálni, hogy a reziduumok elsőrendű autokorrelációja szignifikáns-e. Erre egy-egyenletes modellnél általában a Durbin—Watson (d) mutató használható, illetve, ha a magyarázó változók között késleltetett endogén változó is van, a Durbin (h) statisztika. Idősoros adatokon alapuló modellek esetén e két statisztika közül a megfelelő közlése alapkövetelménynek tekinthető. Sok cikk közli is a Durbin—Watson (d) mutatót, noha távolról sem mindegyik azok közül, ahol ez fontos lenne. Sajnos azonban a hivatkozott cikkek közt egy sincs, amelyik a Durbin (h) értékét közölné arra az esetre, amikor a Durbin—Watson (d) torzított, mint például HULYÁK [9], KORNAI G. [19] cikkében.

A reziduumok autokorrelációjára vonatkozó statisztika közlése szükséges, önmagában azonban még nem elégséges. A hagyományos becslési módszerek alkalmazásakor autokorrelált reziduumok esetében az együtthatók szórásának becslése, és így a paraméterek szignifikanciájának megítélésére használt hagyományos t-statisztika is torzított, alkalmazása félrevezető lehet. Az ilyen modellekkel végzett előrejelzések is, konfidencia tartományaik is torzítottak lesznek. Ezért ilyen esetekben — ha a modell újraspecifikálására nincs mód — célszerű az autokorrelált reziduumok esetére kidolgozott becslési eljárásokat alkalmazni. (Például megfelelő maximum likelihood becslést, a Cochrane—Orcutt vagy a Hilderith—Lu eljárást.) Sajnos több hivatkozott cikk közöl szignifikáns autokorrelációt mutató Durbin—Watson statisztikájú becsléseket minden további megjegyzés, becslés nélkül, például: KOTÁSZ [20], LACKÓ [22].

Az alkalmazott becslési módszerek bizonyos alaphipotéziseit a hivatkozott szerzők egyike sem ellenőrzi. A klasszikus paraméterbecslési módszerek például a hibatag függetlensége mellett annak homoszkedaszticitását is felteszik, azaz, hogy a különböző megfigyelésekhez tartozó hibatagok eloszlása azonos. Ez a hipotézis ilyen általánosságban ugyan nem vizsgálható, az idősoros elemzéseknél leggyakoribb esetet, az időben — fokozatosan vagy hirtelen — változó eloszlást (például növekvő reziduális szórást) azonban az ökonometria elmélete részletesen tárgyalja, és más esetekre is dolgoztak ki próbákat. Emellett kidolgoztak becslési módszereket arra az esetre, amikor ez a hipotézis nem teljesül — a megfigyelések megfelelő súlyozása a legegyszerűbb megoldás —, de amennyire ez megállapítható, ezeket a módszereket a hivatkozott cikkek szerzői közül senki sem használta.

Arra, hogy heteroszkedaszticitás léphet fel, egyetlen cikk utal: MÉSZÁROS [23] azért nem végez keresztmetszeti elemzéseket, mert „. . . egyszerű (nem súlyozott) regressziószámítási programokkal dolgoztunk . . ."[7] ([23], 1227. o.), azt azonban nem vizsgálja, hogy az alkalmazott idősoros elemzésnél nem lép-e fel heteroszkedaszticitás.

Azokkal a modellekkel szemben, amelyeket előrejelzésre (is) kívánnak használni, még fontosabb követelmény, hogy a reziduumra vonatkozó statisztikai információkat tárják fel és közöljék, és emellett az előrejelzések statisztikai tulajdonságait, hibáját, illetve egy adott valószínűségi szinthez tartozó konfidencia-intervallumát is közöljék. Célszerű a modellel ex-post előrejelzéseket végezni az ex-ante előrejelzések előtt, és így megvizsgálni a modell előrejelző erejét. Ahhoz, hogy megbízható

[6] Pécsi iskolán nem kizárólag a Pécsett dolgozó kutatókat értjük, hanem azokat is, akik nyomdokaikon haladnak (pl. VASTAG [37]).

[7] Azt már nem közli a szerző, hogy melyek voltak ezek a programok. Az alkalmazott becslési módszerről ez az egyetlen rendelkezésünkre álló információ.

előrejelzéseket kapjunk, ugyanúgy teljesülniük kell az ökonometriai modellek szokásos hipotéziseinek, mint ahogy a megfigyelési időszakra vonatkozó elemzések esetében szokásos. Nem tudunk egyetérteni például azzal a véleménnyel, hogy „A multikollinearitás rontja a becslés pontosságát ... Ha viszont előrejelzésre akarjuk felhasználni, akkor alkalmazásával nem követünk el nagy hibát, ha feltételezzük, hogy a multikollinearitás nagysága és intenzitása a jövőben nem változik." (HAJDÚ—KERTÉSZ—SIPOS [6], 391. o.) Semmi alapunk sincs feltételezni, hogy a modell magyarázó változói között egy (nem modellezett, elemzett) lineáris kapcsolat fennmarad. Ha pedig az egzogénnek tekintett változók között fel nem tárt lineáris kapcsolat van, akkor alakulásukat a modellező feltehetően egymástól függetlenül jelzi előre, és így épp ő gondoskodik arról, hogy változzon (megszűnjön) a multikollinearitás. A multikollinearitás növeli a paraméterbecslés szórását, és bizonytalan együtthatókkal az előrejelzés sem lehet megbízható.

Esetenként sajnos találkozhatunk statisztikai, ökonometriai fogalmak, mutatók pontatlan, félrevezető használatával is. Még a modell illeszkedésének legáltalánosabban használt jósági kritériumát, a determinációs együtthatót (R^2) sem értelmezi mindenki helyesen: „Ez a szám azt mutatta, hogy a kiválasztott magyarázó változók együttesen hány százalékban magyarázzák az eredményváltozót." (MOLNÁR—MÓRICZ [24], 1122. o.) Úgy tűnik, a hivatkozott cikkek szerzői közül nem mindenki számára világos, hogy ha a becsült függvény nemlineáris, vagy lineáris, de nem tartalmaz konstans tagot, vagy az OLS-től eltérő becslési technikát (például valamilyen instrumentális változókat felhasználó becslési módszert) alkalmazunk, az R^2 általában nem, vagy legalábbis csak a szokásostól eltérő módon értelmezhető.

4. Empirikus vizsgálatoknál általában számos bizonytalansági tényezővel kell számolni akkor is, ha minden eredmény egyértelműen jónak, megbízhatónak tűnik. Különösen így van ez, ha az eredmények nem teljesen egyértelműek; ekkor mindenképpen tartózkodni kell „bátor", „merész" következtetések levonásától. Néhány szerző az ökonometriai módszereket olyan következtetések alátámasztására használja, amelyekre az alkalmazott módszerek, a számszerűsített modellek egyáltalán nem nyújtanak alapot, ami az alkalmazott módszerek hitelét is rontja. Néhány kirívó példa:

— Nem szignifikáns paraméterek, összefüggések közvetlen, direkt értelmezés: „Az üzembe helyezett beruházások 1 százalékos növekedése ... 0,020 százalékkal növelte a GDP volumenét." Adott esetben a paraméter szórása 0,052, az egyenlet korrigált determinációs együtthatója 0,007. Azaz nem csak a paraméternek, magának az összefüggésnek sincs semmilyen magyarázó ereje. (NAGY [25], 178. o.) Hasonlóan nem-szignifikáns paraméterek tömegét tartalmazó egyenleteket értelmez KISS [18] is.[8]

— Viszonylag rövid idősorra illesztett modellből idősorok előrejelzése nagy távlatokra (természetesen az előrejelzés hibájának közlése nélkül):[9] túlzásnak tartjuk például 11 elemű (éves) idősorból 26 évre előrejelezni. Ez történik az Egyesült Államok tojásfogyasztására egy keresleti függvény alapján, amelynek egyetlen (exogén) magyarázó változójára, a lakossági jövedelemre lineáris növekedést tételez fel a szerző. (MÉSZÁROS [23], 1227—29. o.) Nem különbözik ettől az sem, ha egy 18 éves idősorra illesztett trend alapján 22 évre jeleznek előre; ráadásul a trend illeszkedéséről rendelkezésünkre álló egyetlen információ, a trend illeszkedésének ábrája világosan mutatja, hogy a reziduum autokorrelált, így az előrejelzés még akkor is torzított lenne, ha olyan távra történne, amelyre még elfogadhatóan alacsony az előrejelzés szórása. (Vö. KOVÁCS—TARJÁN [21], 39—40. o.)[10]

Még azokban a cikkekben is, amelyek ilyen durva hibákat nem tartalmaznak, az eredmények értelmezésénél egyes szerzők

[8] Az, hogy a GDP volumene (log) lineárisan nem függ az üzembe helyezett beruházásoktól, önmagában érdekes eredmény lehet; nem a becsült egyenlet közlését kifogásoljuk, hanem annak inkorrekt interpretációját.

[9] Hasonló kifogás természetesen már előrejelzésekkel szemben is felvethető. Például DOBOZI [3] prognózisairól akár azt is feltételezhetnénk, hogy ökonometriai modellekkel készültek, hiszen semmilyen utalás nincs a módszerre; viszonylag hosszú távú előrejelzéseket ad anélkül, hogy azok várható hibájáról, az előrejelzés során figyelembe vett összefüggésekről, így végül is a prognózisok megbízhatóságáról informálná az olvasót.

[10] A hivatkozott cikkekben sajnos általában nem ábrázolják a függvények illeszkedését, pedig, ha a terjedelmi korlátok nem teszik lehetetlenné, célszerű lenne a becslés illeszkedésének vagy a reziduumnak az ábráját közölni. Ez nagyon sokat elárulhat a becslés lehetséges hibáiról (autokorrelált reziduum, heteroszkedaszticitás), illetve a modell jósá-

hajlamosak elfeledkezni arról, hogy sztochasztikus modellekkel dolgoznak, és eredményeiket determinisztikusan kezelik. Különösen a becsült paraméterek elemzésénél felejtik el, hogy ezek a legjobb esetben is csak várható értékei egy valószínűségi változónak, melynek adott esetben meglehetősen nagy szórása lehet. A legtöbb cikkben, amikor a szerzők értelmezik az eredményeiket, olyan kijelentéseket találunk, mint: X-nek egy egységnyi (egy százalékos) növekedése Y-nak α-nyi (α százalékos) növekedését eredményezi, lásd például: RÉDEY—SIPOS [27] és [28] cikkeket.

Lehet, hogy néhány olvasó túlzottnak találja az írásunkban az empirikus ökonometriai elemzésekkel szemben támasztott követelményeket. Ezért szeretnénk felhívni a figyelmet egy viszonylag széles körben ismert ökonometria tankönyv (INTRILIGATOR [10]) függelékére, amelyben a szerző tizenkét pontban adja meg, milyennek kell lennie egy ökonometriai módszereket alkalmazó cikknek. A tizenkét pontban ugyan olyanok is vannak, amelyek minden tudományos igényű publikációtól megkövetelendők, mint például az, hogy legyen a cikkhez irodalomjegyzék, és reflektáljon az adott témában korábban megjelent tanulmányokra. De a pusztán ökonometriai modellezéshez kapcsolódó formai-módszertani kívánságok is túlmennek az itt megfogalmazottakon, ebből idézünk három alpontot. Az ökonometriai elemzéssel foglalkozó cikknek „. . . tartalmaznia kell a következőket: . . .

e) A modellt leíró részt, amely tartalmazza minden egyes változó definícióját és értelmezését, annak megállapítását, hogy ezek közül melyek egzogének, és melyek endogének; a strukturális, a redukált és a végső forma megfogalmazását; az együtthatók előjelére vonatkozó várakozásokat; a modell komparatív statikáját; a modell identifikálhatóságának vizsgálatát. Ebben a részben egyértelműen meg kell fogalmazni a modellre vonatkozó sztochasztikus és egyéb hipotéziseket és ezek megsértésének várható következményeit.

f) Az adatokkal foglalkozó részt, amely tartalmazza az összes felhasznált adatot táblázatos formában, és jellegük, forrásaik, különböző korrekciók, finomítások és lehetséges torzítások, problémák teljes leírását.

g) A becsült modellt bemutató részt, amely tartalmazza a redukált és a strukturális forma becsléseit; az ezekhez tartozó statisztikákat, mint az együtthatók szórását és t statisztikáját, annak tárgyalásával, hogy mely együtthatók szignifikánsak 5, illetve 1 százalékos valószínűségi szinten; R^2-et a redukált forma minden egyenletére; ha releváns, akkor az elsőrendű autokorrelációra vonatkozó Durbin—Watson próba értékét, a lehetséges autokorreláció tárgyalását és ennek korrekcióját; homoszkedaszticitásra vonatkozó próbát, a heteroszkedaszticitás előfordulása lehetőségének és orvoslásának tárgyalását; a multikollinearitás lehetőségének és a szükséges korrekció tárgyalását."

Emellett elemezni kell az együtthatók előjelét és nagyságát, a fontosabb multiplikátorokat és elaszticitásokat, az előrejelzéseket stb. (Vö. INTRILIGATOR [10], 567—568. o.)

Sajnos, a hazai ökonometriai publikációkban döntő többségben vannak az egy egyenletes modellek, amelyeknek redukált, illetve végső formájára vonatkozó követelmények nyilván értelmetlenek.

A hazai ökonometriai publikációk szerzőit és olvasóit egyaránt zavarhatja az ökonometriában használt fogalmak tisztázatlansága. Ez valószínűleg annak a következménye, hogy nincs egyetlen olyan magyar nyelvű „alapmű" sem, mely összefoglaló jellegéből és az ökonometria elmélet kellően széles körét átfogó tartalmából adódóan a fogalom-használat és értelmezés referenciájául szolgálhatna. Jelen írásunkban igyekeztünk az angol nyelvű nemzetközi szakirodalomban általánosan elfogadott terminológiát használni. A felhasznált fogalmak szinte bármelyik nemzetközileg szélesebb körben (el)ismert tankönyvben, kézikönyvben megtalálhatók, mint például DHRYMES [1], GOLDBERGER [5], INTRILIGATOR [10], JOHNSTON [13], JUDGE & al. tankönyve [16] és kézikönyve [15] THEIL [34] és WONNACOTT—WONNACOTT [38].

Írásunk célja az, hogy a szakmai közvélemény figyelmét felhívjuk egy olyan igénytelen, „pongyola" publikációs gyakorlatra, mely az ökonometriai elemzések felhasználhatóságát erősen korlátozza. A hivatkozásul szolgáló cikkek mind jellegükben, mind tartalmukban, mind igényességükben nagyon eltérőek; csak az adott konkrét hiányosságok megléte közös, ez indokolja „egy kalap alá" vonásukat.

---

gáról, erejéről. A hivatkozott cikkek között kettő is van, amely semmilyen, a becslés jóságára vonatkozó statisztikát nem közöl, de közlik a függvény illeszkedésének ábráját: KOVÁCS—TARJÁN [21] és SZÁSZ [33]. Az ábrák alapján nyilvánvaló, hogy a specifikációk hibásak, a becslések torzítottak.

IRODALOM

1. DHRYMES, P.: *Introductory Econometrics;* Springer, New York—Heidelberg—Berlin, 1978.
2. DJOGNI, A.: A benini dinamikus input-output modell; *Statisztikai Szemle,* 1984. június, pp. 609—620.
3. DOBOZI, I.: Az alapvető ásványi nyersanyagok és energiahordozók világpiaci helyzetének várható alakulása; *Közgazdasági Szemle,* 1982 október, pp. 1230—1245.
4. FERENCZI, T.: Béremelés és műszaki fejlesztés a mezőgazdasági vállalatokban; *Közgazdasági Szemle,* 1980. január, pp. 42—56.
5. GOLDBERGER, A. S.: *Econometric Theory;* Wiley, New York—London—Sydney, 1966.
6. Hajdú, O.—KERTÉSZ, L.—SIPOS, B.: A munkabérek regressziós elemzése és koncentrációs vizsgálata I.; *Statisztikai Szemle,* 1984. április, pp. 389—397.
7. HARSÁNYI, L.: A fizikai dolgozók bérének összetevői és arányai; *Statisztikai Szemle,* 1980. június, pp. 588—606.
8. HELLER, K.: A hírközlési szolgáltatások igénybevétele; *Statisztikai Szemle,* 1982. március, pp. 248—263.
9. HULYÁK, K.: Egyensúlyhiányok a lakossági fogyasztásban I., II.; *Statisztikai Szemle,* 1983. március, április, pp. 229—243., pp. 369—379.
10. INTRILIGATOR, M. D.: *Econometric Models, Techniques and Applications;* North-Holland, Amsterdam—Oxford, 1978.
11. JÁNOSI, A.—KEPECS, G.—PÁL, G.: A nagyberuházások költségütemezésének vizsgálata; *Statisztikai Szemle,* 1980. március, pp. 261—275.
12. JÁNOSI, A.—PÁL, G.: Az 1970-es évek 150 beruházásának költségütemezése; *Statisztikai Szemle,* 1983. március, pp. 244—260.
13. JOHNSTON, J.: *Econometric Methods;* McGraw-Hill, New York, 1972.
14. JÓZSEF, S.: A termésátlag-eloszlás alakulásának leírása és előrejelzése; *Statisztikai Szemle,* 1981. október, pp. 1015—1025.
15. JUDGE, G. G.—GRIFFITHS, W. E.—HILL, R. C.—LEE, T. C.: *The Theory and Practice of Econometrics;* Wiley, New York—Chichester—Brisbane—Oxford, 1980.
16. JUDGE, G. G.—GRIFFITHS, W. E.—HILL, R. C.—LÜTKEPOHL, H.: *Introduction to the Theory and Practice of Econometrics;* Wiley, New York—Chichester—Brisbane—Oxford, 1982.
17. KAPITÁNY, Zs.—KORNAI, J.—SZABÓ, J.: A hiány újratermelése a magyar autópiacon; *Közgazdasági Szemle,* 1982. március, pp. 300—324.
18. KISSNÉ LADÁNYI, E.: Kísérlet a globális és strukturális munkanélküliség alakulására ható tényezők ökonometriai vizsgálatára; *Közgazdasági Szemle,* 1983. november, pp. 1325—1333.
19. KORNAI, G.: Megszűnt-e a sertésciklus? *Közgazdasági Szemle,* 1981. március, pp. 316—332.
20. KOTÁSZ, Gy.: A magyar külkereskedelem alakulására ható tényezők vizsgálata; *Statisztikai Szemle,* 1982. július, pp. 708—729.
21. KOVÁCS, J.—TARJÁN, T.: A kutatás fejlesztésben foglalkoztatott létszám várható alakulása az ezredfordulóig; *Gazdaság,* 1981. 2. sz. pp. 27—43.
22. LACKÓ, M.: A hátrány megőrzése; *Közgazdasági Szemle,* 1984. március, pp. 305—320.
23. MÉSZÁROS, S.: A világ gabonatermelésének és műtrágyafelhasználásának előrejelzése; *Statisztikai Szemle,* 1981. december, pp. 1221—1234.
24. MOLNÁR, I.—MÓRICZ, P.: A hatékonyság vizsgálata a mezőgazdaságban; *Statisztikai Szemle,* 1983. november, pp. 1117—1130.
25. NAGY, S.: A gazdasági növekedés elemzése technikai haladás függvénnyel; *Statisztikai Szemle,* 1982. február, pp. 169—180.
26. NYÁRY, Zs.: Gazdasági összefüggések hosszú idősorok alapján; *Statisztikai Szemle,* 1983. február, pp. 182—193.
27. RÉDEY, K.—SIPOS, B.: A termelési függvények és a vállalati prognózisok II.; *Statisztikai Szemle,* 1981. június, pp. 606—625.
28. RÉDEY, K.—SIPOS, B.: Termelési függvények alkalmazása az iparban; *Közgazdasági Szemle,* 1983. április, pp. 435—446.
29. RIMLER, J.: A termelési kapacitások kihasználása Hollandiában és Magyarországon; *Közgazdasági Szemle,* 1982. szeptember, pp. 1043—1055.
30. RIMLER, J.: Túlélési függvények — selejtezési tulajdonságok; *Szigma,* 1983. 1—2. sz. pp. 61—83.
31. SIMON, A.: A magyarországi beruházások ciklusainak egy modellje; *Közgazdasági Szemle,* 1981. március, pp. 293—302.

32. SIMON, Gy.—KŐRÖSI, G.: Bányászati növekedési funkcionál; *Szigma*, 1983. 4. sz., pp. 295—312.
33. SZÁSZ, K.: A termésátlagok várható alakulása; *Statisztikai Szemle*, 1982. február, pp. 134—142.
34. THEIL, H.: *Principles of Econometrics;* North-Holland, Amsterdam—London, 1971.
35. TOMPA, B.—SZAKONYI, L.—SZABÓNÉ MEDGYESI, F.—HERMANN, I.: A vállalati differenciáltság vizsgálatának módszerei és eredményei a mezőgazdaságban; *Közgazdasági Szemle*, 1983. május, pp. 573—584.
36. VALKOVICS, E.: Az általános korspecifikus termékenységi arányszámok indirekt modellezése; *Statisztikai Szemle*, 1984. augusztus—szeptember, pp. 905—915.
37. VASTAG, Gy.: Prognózisok és termelési függvények egy állami építőipari vállalatnál; *Statisztikai Szemle*, 1981. július, pp. 740—748.
38. WONNACOTT, T. H.—WONNACOTT, R. J.: *Econometrics;* Wiley, New York—London—Sydney, 1970.

A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó és Nyomda igazgatója
Műszaki szerkesztő: Sándor István
A kézirat nyomdába érkezett: 1985. október 15. – Terjedelem: 8,4 (A/5) ív
86.14994 Akadémiai Kiadó és Nyomda, Budapest – Felelős vezető: Hazai György

CONTENTS

BORROWED QUILLS

SCIENTIFIC LIFE

СОДЕРЖАНИЕ

СО СТРАНИЦ ЗАРУБЕЖНЫХ ЖУРНАЛОВ

НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ

Ára: 26,— Ft
Előfizetés egy évre: 104,— Ft

ISSN 0039—8128

TARTALOM

IDEGEN TOLLAK

TUDOMÁNYOS ÉLET

1828

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST