SZIGMA
Matematikai-közgazdasági folyóirat

A Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai-Közgazdasági Szakosztályának lapja

Főszerkesztő:

MARTOS BÉLA

Szerkesztő:

KIRÁLY JÚLIA

Társszerkesztők:

BOD PÉTER, HUNYADI LÁSZLÓ, PONGRÁCZ TIBOR, SIMONNÉ MOSOLYGÓ NÓRA

Szerkesztőbizottság:

AUGUSZTINOVICS MÁRIA, ÁBEL ISTVÁN, BOD PÉTER, ÉLTETŐ ÖDÖN (elnök), FORGÓ FERENC, HUNYADI LÁSZLÓ, KIRÁLY JÚLIA, KOVÁCS ÁLMOS, LIGETI ISTVÁN, MARTOS BÉLA, MESZÉNA GYÖRGY, MIKÓ GYULA, ORMÓS ZSOLT, SIMON ANDRÁS, SIMONOVITS ANDRÁS, SZAKOLCZAI GYÖRGY, SZÉP JENŐ, VITA LÁSZLÓ, ZALAI ERNŐ, ZIERMANN MARGIT

*

E szám szerzői:

BRÓDY ANDRÁS, a közgazdaságtudomány doktora, az MTA Közgazdaságtudományi Intézet tanácsadója, DOBOS IMRE, a Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem Vállalatgazdaságtan Tanszékének tudományos segédmunkatársa, KLEMENCSICS MÁRTA, az OT Gazdaságirányítási és Pénzügyi Főcsoport főmunkatársa, dr. KOVÁCS ERZSÉBET, a Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem adjunktusa, MAKAI MIHÁLY, kandidátus, a KFKI/AEKI tudományos főmunkatársa, dr. PATRICK MOYES, az Université de Bordeaux I Közgazdaságtudományi Karának professzora, POVILAITIS SIGITAS, az OT Informatikai és Módszertani Intézet főmunkatársa, TÉTÉNYI TAMÁS, a Minisztertanács tanácsosa

Szerkesztőség: Budapest XI., Budaörsi út 43-45.
levélcím: 1502 Budapest, Pf. 262.

Terjeszti a Magyar Posta. Előfizethető bármely hírlapkézbesítő postahivatalnál, a Posta hírlapüzleteiben és a Hírlapelőfizetési Lapellátási Irodánál (HELIR) Budapest XIII., Lehel út 10/A, 1900, közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a HELIR 215-96 162 pénzforgalmi jelzőszámára.

Előfizethető és példányonként megvásárolható az Akadémiai Kiadó *Stúdium* (1368 Budapest, Váci utca 22., tel.: 185-881) és *Magiszter* (1052 Budapest, Városház utca 1., tel.: 382-440) könyvesboltjaiban.

Előfizetési díj egy évre: 104,- Ft. Egy szám ára: 26 Ft.

Külföldön terjeszti a KULTURA Külkereskedelmi Vállalat, H-1389 Budapest, Pf. 149.

Szigma, XX. (1987-88) 4. sz.

KLEMENCSICS MÁRTA – POVILAITIS SIGITAS

Egy optimális szabályozási modell és alkalmazása a gazdaságpolitikai elemzésben

1. Bevezetés

A közgazdasági, gazdaságpolitikai kutatásokban jól hasznosíthatók az optimális szabályozási modellek, amelyek a gazdaság reál- és szabályozási szféráját összefüggéseiben ábrázolják. Ezeknek a modelleknek két olyan fontos tulajdonsága van, amely különösen alkalmassá teszi őket gazdaságpolitikai, tervezési problémák vizsgálatára:

- *dinamikus* modellek, tehát folyamatokat ábrázolnak, és
- nem csupán leírják azokat, hanem lehetőséget nyújtanak a modellező számára a folyamatokba való *beavatkozásra* is.

Az optimális szabályozási modellek legegyszerűbb — és ezért legkönnyebben használható — típusa a lineáris–kvadratikus szabályozási feladat, amelyben a modell összefüggésrendszere lineáris, a célfüggvény pedig kvadratikus. Az ilyen feladatot tehát a következőképpen fogalmazhatjuk meg:

$$x_t = Ax_{t-1} + Bu_t + c \qquad (1.1.)$$

$$\min_{x,u} \sum_{t=1}^{T} [(x_t - \bar{x}_t)'R(x_t - \bar{x}_t) + (u_t - \bar{u}_t)'Q(u_t - \bar{u}_t)], \qquad (1.2.)$$

ahol

x_t az állapotváltozók t. évi értékeit tartalmazó n elemű vektor

x_0 adott n elemű vektor

u_t a szabályozóváltozók t. évi értékeit tartalmazó m elemű vektor

c konstans vektor

$\bar{x}_t$ és $\bar{u}_t$ az állapot-, illetve szabályozóváltozók előre megadott, valamilyen szempontból kívánatos, megvalósítandó pályái

A,B,R,Q megfelelő méretű együttható mátrixok, R-ről és Q-ról általában feltételezzük, hogy szimmetrikus, pozitív (szemi)definit mátrixok.

Az (1.2.) célfüggvényt úgy értelmezhetjük, hogy adott az állapot- és szabályozóváltozók valamilyen kívánt (pl. tervezett) pályája, és a feladat megoldása során az állapot- és szabályozóváltozóknak azokat az évenkénti értékeit hatŕozzuk meg, amelyek mellett együttesen a lehető „legközelebb" haladnak a kitűzött pályáikhoz, abban az értelemben, hogy az eltéréseknek az adott súlyokkal súlyozott négyzetösszege minimális.

A feladat megfogalmazásához néhány megjegyzést szeretnék fűzni:

a.) A modell feltételrendszerének (1.1.) formája eléggé általános, ugyanis mind az állapot-, mind pedig a szabályozóváltozóknál tetszőleges számú késleltetett értéket figyelembe vehetünk, a feladat ekkor is (1.1.) alakra transzformálható. Ebben az esetben az (1.1.) formulát a modell állapottér-reprezentációjának nevezzük.

b.) A kvadratikus célfüggvény alkalmazását többen bírálták. A fő ellenvetés ezzel szemben az, hogy szimmetrikus, tehát a kívánt pályáktól fölfelé és lefelé való eltéréseket egyformán kezeli, ami közgazdasági modelleknél nem fogadható el. A felvetés jogos, és történtek is próbálkozások e téren (ld. pl. FRIEDMAN [5] és SANDBLOOM [9]), amelyeknek lényege az, hogy szakaszosan kvadratikus célfüggvényeket használnak. Mi — munkánk jelenlegi első szakaszában — az egyszerűség kedvéért mégis a „sima" kvadratikus célfüggvényt alkalmaztuk, noha tudatában vagyunk ennek a problémának.

c.) Kifogásolni szokták a célfüggvényben szereplő súlymátrixok szubjektív voltát is. Erről a kérdésről, illetve a célfüggvény értelmezéséről a következő részben, a konkrét modell bemutatása kapcsán szólunk majd.

A lineáris-kvadratikus optimális szabályozási feladatnak a megoldására többféle módszer létezik. A legáltalánosabban használt CHOW módszere (ld. pl. CHOW [2], TURNOVSKY [10]), amely az optimális szabályozás meghatározását rekurzív módon, Riccati egyenletek sorozatának megoldásával végzi. Erre többféle numerikus eljárás létezik (ezekről ad jó összefoglalást pl. GYURKOVICS [6]). Közgazdasági alkalmazásoknál azonban problémát jelent az, hogy ahhoz, hogy értelmezhető megoldást kapjunk, a szabályozóváltozók értékeire alsó- és felső korlátokat kell megadnunk. Chow módszere ezt nem teszi lehetővé. Ezt a problémát kétféleképpen lehet megoldani. Az egyik lehetséges út a Lagrange-féle relaxációs módszer alkalmazása a Riccati egyenletekre (ld. SANDBLOOM [9]), a másik az, hogy a feladatot átalakítjuk programozási feladattá. A megoldáshoz ekkor felhasználható a Magyarországon is elérhető CONOPT nevű programcsomag (ismertetését ld. MIHÁLYFFY-BAGDY [8]). A CONOPT igen általános esetre van kidolgozva, így alkalmas nem lineáris összefüggésrendszerrel leírt feladat tetszőleges célfüggvény mellett történő megoldására. A lineáris-kvadratikus feladat ennél egyszerűbben oldható meg, figyelembe véve a feladat sajátosságait. A következő részben ezt az algoritmust mutatjuk be. Ezt követően röviden ismertetjük azt a modellt, amelyhez az eljárást kialakítottuk, és szólunk a számítások néhány fő tapasztalatáról is.

2. A lineáris–kvadratikus feladat megoldásának algoritmusa

Induljunk ki a következő feladatból:

$$\min_{x,u} \sum_{t=1}^{T} [(x_t - \bar{x}_t)'R(x_t - \bar{x}_t) + (u_t - \bar{u}_t)'Q(u_t - \bar{u}_t)] \tag{2.1.}$$

$$x_t = Ax_{t-1} + Bu_t + Ge_t + c \tag{2.2.}$$

$$UL_t \le u_t \le UP_t\,, \tag{2.3.}$$

ahol x_t az állapotváltozók t. évi értékeinek n elemű vektora

u_t a szabályozóváltozók t. évi értékeinek m elemű vektora

e_t a modell szempontjából külső hatásokat képviselő exogén változók k elemű vektora

UL_t és UP_t a szabályozóváltozók értékeire vonatkozó alsó és felső korlátok m elemű vektorai

A, R $m \times n$ méretű mátrixok

B $n \times m$ méretű mátrix

Q $m \times m$ méretű mátrix

G $n \times k$ méretű mátrix

c n elemű konstans vektor

$\bar{x}_t$ adott n elemű vektorok, az állapotváltozók megvalósítandó (tervezett) pályái

$\bar{u}_t$ adott m elemű vektorok, a szabályozóváltozók megvalósítandó pályái.

Feltesszük továbbá, hogy x_0 vektor adott, valamint hogy R és Q szimmetrikus pozitív szemidefinit mátrixok.

A feladat megoldása azt jelenti, hogy meghatározzuk azokat az x_t és u_t vektorokat, amelyek kielégítik a (2.2.) rendszerfeltételeket, valamint a (2.3.) korlátozó feltételeket, és amelyek mellett a (2.1.) célfüggvény értéke minimális.

Írjuk fel a (2.2.) rendszer általános megoldását:

$$x_t = A^t x_0 + \sum_{k=0}^{t-1} A^k Bu_{t-k} + \sum_{k=0}^{t-1} A^k Ge_{t-k} + \sum_{k=0}^{t-1} A^k c\,. \tag{2.4.}$$

Ezt most helyettesítsük be a (2.1.) célfüggvénybe! A megfelelő átalakításokat elvégezve azt kapjuk, hogy a (2.1.)–(2.3.) feladat ekvivalens a nála jóval egyszerűbb formában felírható

$$\min_v v'Fv + 2d'v + q \tag{2.5.}$$

$$v_L \leq v \leq v_p \tag{2.6.}$$

feladattal, ahol

$$v = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_T \end{pmatrix}; \quad v_L = \begin{pmatrix} UL_1 \\ UL_2 \\ \vdots \\ UL_T \end{pmatrix}; \quad v_p = \begin{pmatrix} UP_1 \\ UP_2 \\ \vdots \\ UP_T \end{pmatrix};$$

$$q = \sum_{i=1}^{T} r_i' R r_i + \sum_{i=1}^{T} \bar{u}_i' Q \bar{u}_i$$

$$d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0' RA^0 B + & r_1' RAB + r_2' RA^2 B + \ldots + & r_{T-1}' RA^{T-1} B - \bar{u}_1' Q \\ & r_1' RA^0 B + r_2' RAB + \ldots + & r_{T-1}' RA^{T-2} B - \bar{u}_2' Q \\ & & \vdots \\ & & r_{T-1}' RA^0 B - \bar{u}_T' Q \end{pmatrix},$$

amelyben a következő jelöléseket alkalmaztuk:

$A^0 = E$ egységmátrix

$r_0 = Ax_0 + Ge_1 + c - \bar{x}_1 = p_1 - \bar{x}_1$

$r_1 = Ap_1 + Ge_2 + c - \bar{x}_2 = p_2 - \bar{x}_2$

$\vdots$

$r_{T-1} = Ap_{T-1} + Ge_T + c - \bar{x}_T = p_T - \bar{x}_T.$

Mivel Q és R szimmetrikus mátrixok, a célfüggvényben szereplő F mátrix is szimmetrikus és az alábbi formában írható fel (itt csak a felső háromszög mátrixot írjuk fel):

$$F = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{T} B'A'^{i-1} RA^{i-1} B + Q; & \sum_{i=1}^{T-1} B'A'^{i} RA^{i-1} B; & \ldots & \sum_{i=1}^{T-(T-1)} B'A'^{i+(T-2)} RA^{i-1} B \\ & \sum_{i=1}^{T-(T-1} B'A'^{i-1} RA^{i-1} B + Q & \ldots & \sum_{i=1}^{T-(T-1)} B'A'^{i+(T-3)} RA^{i-1} B \\ & & & \vdots \\ & & & \sum_{i=1}^{T-(T-1)} B'A'^{i+T-(T+1)} RA^{i-1} B + Q \end{pmatrix}.$$

Adott x_0 mellett keressük tehát azt a v vektort, amelyre a (2.5.) célfüggvényérték minimális. A feladatban szereplő v változókra csak alsó- és felső korlátok vannak megadva, a programozási feladat feltételrendszere tehát igen leegyszerűsödött. A felírásból látható, hogy a módszer a szabályozók optimális értékeit a vizsgált időszak minden évére egyszerre, egy feltételrendszer keretein belül határozza meg, szemben Chow módszerével, ahol az optimális szabályozók évente kerülnek meghatározásra, a feladat újból és újból történő megoldásával.

Ez a módszer megnöveli a feladat méreteit: a (2.5.)–(2.6.) feladatban szereplő változók száma $T \times m$, a feltételrendszer viszont igen egyszerű, így végülis gyors, hatékony megoldási algoritmust sikerült kialakítani.

Oldjuk fel most azt a feltevésünket, hogy Q és R szimmetrikus mátrixok. Ebben az esetben természetesen az F mátrix sem lesz szimmetrikus. A (2.5.) célfüggvény viszont ugyanott veszi fel minimális értékét, mint a vele ekvivalens

$$\min \frac{1}{2} v'(F + F')v + 2d'v + q \tag{2.7.}$$

függvény, ahol az $(F + F')$ mátrix már szimmetrikus.

A (2.5.)–(2.6.), illetve (2.6.)–(2.7.) kvadratikus programozási feladatnak a megoldására FLETCHER R. és JACKSON M. P. módszerét használtuk fel (programkönyvtári leírását ld. [4]), amely az optimális pont meghatározására a gradiens módszert alkalmazza, de ennek során erősen kihasználja a feladatnak azokat a sajátosságait, hogy a változókra csak alsó- és felső korlátok vannak megadva, valamint hogy a (2.5.) célfüggvényben szereplő F mátrix szimmetrikus.

Az algoritmus hatékonyságát jellemzi, hogy számszerűsített modellünk (ld. következő részben) — amelyben a transzformált (2.5.)–(2.6.) feladat 42 változót tartalmazott — a számítógépben 40 K memóriát foglalt, egy futás 9 sec. CPU időt használt el.

3. A vegyes irányítás egy optimális szabályozási modellje[1]

Röviden ismertetjük azt a modellt, amelynek a megoldására az előzőekben leírt algoritmust kialakítottuk.

Célunk egy olyan modell kidolgozása volt, amely felhasználható a gazdaságpolitika mozgásterének feltárására, a különböző gazdaságpolitikai prioritások hatásának vizsgálatára. Ezért modellünket nagyon aggregáltan, a fő népgazdasági kategóriákra építve dolgoztuk ki.

Modellünk állapotváltozóinak körét a népgazdasági mérleg alábbi kategóriái alkotják :

1.) Bruttó nemzeti termelés (BT)
2.) Hazai eredetű anyagfelhasználás (AH)
3.) Anyagimport (AI)
4.) Állóeszközállomány (K)
5.) Lakossági fogyasztás (LF)

---

[1] A vegyes irányítás modellezésének gondolatát LIGETI ISTVÁN vetette fel. Az eredeti modell kidolgozása, ökonometriai becslése BERDE ÉVA nevéhez fűződik (ld. [1]). A modell megfogalmazásához, felépítéséhez rajtuk kívül az OT TGI és OT IMI munkatársai közül HULYÁK KATALIN, HUNYADI LÁSZLÓ, HÜTTL ANTÓNIA és NEMÉNYI JUDIT nyújtott segítséget.

6.) Közösségi fogyasztás (KF)
7.) Állami beruházás (ÁB)
8.) Vállalati beruházás (VB)
9.) Nem rubel export (ED)
10.) Nem rubel import (IDD)
11.) Rubel export (ER)
12.) Rubel import (IR)

A szabályozóváltozók kiválasztásánál abból a megfontolásból indultunk ki, hogy gazdaságunkban egyidejűleg, egymás mellett és sokszor egymás hatását keresztezve, gyengítve léteznek és működnek az indirekt és a direkt irányítás elemei is (innen származik a vegyes irányítás elnevezés). Ennek megfelelően modellünkben megkülönböztetjük a szabályozók két csoportját:

Az *indirekt szabályozás* elemeit képviseli

- a lakossági jövedelem (J)
- a lakossági hiteltöbblet (HL) és
- a nyereségági fejlesztési alap (NYF)[2] kategóriája.

Ezzel kapcsolatban megjegyezzük, hogy tulajdonképpen ezek a pénzügyi kategóriák nem szabályozók, maguk is többféle szabályozó (pl. adókulcsok, kamatlábak) hatására alakulnak. Akkor mégis miért ezeket kezeljük modellünkben szabályozóváltozókként? Erre több okunk van. Először is az „igazi" szabályozók mértéke, hatóköre, sőt a szabályozás elvei is gyakran változtak az elmúlt években, azért ezek felhasználásával idősorokon alapuló vizsgálatokat végezni szinte lehetetlen. Másodszor: a szabályozók és a gazdasági folyamatok szövevényes kapcsolatában az egyes szabályozók (gyakran egymás hatását módosító) működését elkülöníteni sokszor nem is lehet. Végül: az itt felsorolt három kategória viszonylag jól kézbentarthatónak bizonyult.

A *direkt irányítást* képviselik modellünkben a szabályozóváltozókként szereplő tervszámok. Itt azt a hatást próbáltuk megragadni, amit a nyilvánosságra hozott tervszámok gyakorolnak — az alsóbb szintű döntéseken keresztül — a gazdasági folyamatok alakulására. Ez természetesen igen áttételes, bonyolult hatásmechanizmus, amit modellünk jócskán leegyszerűsítve kezel. Ezért az eredmények értékelésénél igen óvatosnak kell lenni. Modellünkben három tervszám szerepel szabályozóként, ezek mind az importhoz kapcsolódnak:

- tervezett gépimport (PIG)
- tervezett anyagimport (PIA)
- tervezett rubel relációs import (PIR).

[2] Ez a kategória 1985 óta már nem létezik, a továbbiakban csak az egyszerűség kedvéért alkalmazzuk, és a nyereségből vállalati fejlesztésekre fordított összegeket értjük alatta.

Ezekre a kategóriákra — az import erősen központosított szabályozás miatt — fokozottan érvényes, hogy a nyilvánosságra kerülő tervszámok bizonyos várakozásokat, elvárásokat indukálnak, illetve eligazítást adnak a várható tendenciákról.

A nem rubel relációs külkereskedelmi kategóriák egyenleteinek becslésénél olyan változókat is be kellett vezetnünk, amelyek kívül esnek a modellünk vizsgálati körén: az import egyenletében egy dummy változót kellett szerepeltetnünk (DUM2), az exportéban pedig egyfajta külkereskedelmi árindexet (MNWA).[3]

A modell egyenleteit az egyes kategóriák 1970–83-as évekre vonatkozó folyóáras idősorai alapján az egyszerű legkisebb négyzetek módszerével számszerűsítettük, majd a becslést újra elvégeztük az egyenletrendszer egészére a legkisebb négyzetek kétfokozatú módszerével.[4]

Modellünk egyenletei a következők:[5]

1.) $BT_t = 1,1064(ED_{t-1} - IDD_{t-1}) + 0,807\, BT_{t-1} + 1,549\, AI_{t-1} + {}$
$+ 4,7749(J_t - J_{t-1})$

2.) $AH_t = 0,6905\, BT_t - 0,2021\, AI_t - 0,6905\, BT_{t-1} + 1,0345\, AH_{t-1} - 9582,316$

3.) $AI_t = 0,5562(IDD_t + IR_t) + 0,2611\, AI_{t-1}$

4.) $K_t = 0,9407\, K_{t-1} + 0,5171(VB_{t-1} + AB_{t-1})$

5.) $LF_t = 0,2609\, LF_{t-1} + 0,7285\, J_t - 0,9489\, HL_t$

6.) $KF_t = 0,05(IDD_t + IR_t) + 0,8534\, KF_{t-1}$

7.) $AB_t = 0,6848\, VB_{t-1} - 0,0921\, K_{t-1} + 0,3334\, PIA_t + 10319,17$

8.) $VB_t = -0,3279\, AB_{t-1} + 1,6078\, NYF_t + 0,8019\, PIG_t + 6105,951$

9.) $ED_t = 0,2458\, IDD_t + 0,04862\, BT_{t-1} + 55,3998\, MNWA_t$

10.) $IDD_t = 0.0498\, BT_t - 0,5127\, IDD_{t-1} + 1,41516\, PIG_t + 48583,43\, DUM2_t + {}$
$+ 11455,87$

11.) $ER_t = 0,4225\, ER_{t-1} + 0,5683\, PIR_t$

12.) $IR_t = 0,1564(VB_t + AB_t) - 0,1475\, IR_{t-1} + 0,7430\, PIA_t\,.$

Mint látható, modellünk 12 állapotváltozót és 6 szabályozóváltozót tartalmaz. Mivel a bruttó nemzeti termelés egyenletében a lakossági jövedelem késleltetett értéke is szerepel, fel kellett írnunk a modell állapottér–reprezentációját, amely 18 egyenletet tartalmaz.

A modellel végzett vizsgálatok során a (2.1.) formájú célfüggvényt használtuk. Számításainkban a kezdő (0.) évnek az 1984-es évet tekintettük, az optimalizálást a VII. ötéves tervidőszak végéig, vagyis 1990-ig végeztük. Megadtuk a vizsgált időszak minden évére az állapot- és szabályozóváltozók tervezett értékeit (a VII. ötéves tervben szereplő előirányzatokat tekintettük „kívánatos" pályáknak), és megpróbáltuk a változók alakulását ezekhez a pályákhoz közel terelni.

---

[3] A modell felépítése során figyelembe vett elméleti megfontolásokat és tapasztalati szempontokat BERDE É. [1] anyaga részletesen ismerteti, itt azokra nem térünk ki.

[4] A számítások az OT IMI HwB gépén a TSP 4.0 programmal készültek.

[5] Az egyenletek statisztikai jellemzőit számszerűen itt nem ismertetjük, azok [1]-ben megtalálhatók.

A célfüggvényben szereplő súlymátrixokat (Q és R) többféleképpen értelmezhetjük. Felfoghatjuk úgy, hogy egyes elemeik a hozzájuk tartozó változókra vonatkoztatva a kívánt pályáktól való eltérés „költségeit" reprezentálják. Tekinthetjük ezeket az elemeket „büntetésnek" is, amellyel az eltéréseket sújtjuk. Kifejezhetik a súlymátrixok ezenkívül a gazdaságpolitikai prioritásokat is. Ha pl. a gazdaságpolitika számára különösen fontos a külkereskedelmi egyenleg tervezett alakulásának biztosítása, a megfelelő változókhoz tartozó súlyt elég nagynak választva elérhetjük, hogy a külkereskedelmi egyenleg a kívánt pályán, vagy ahhoz elég közel haladjon, és megvizsgálhatjuk, hogy ez a követelmény milyen vonzatokkal jár a gazdasági folyamatok más területén. Mi vizsgálataink során ez utóbbi megközelítést alkalmaztuk. Kiinduló helyzetben úgy határoztuk meg a súlymátrixok elemeit, hogy figyelembe vettük azt, hogy az egyes változóknak különböző a szórásuk, ezért úgy tudunk egyenlő követelményeket támasztani az egyes változókkal szemben, ha a súlymátrixok diagonális elemeiként a megfelelő változók szórásának reciprokát szerepeltetjük. Mivel azonban a szórások nagyok, így gyakorlatilag minden elem zérus lett volna. Ezért, ehelyett az egyes változók relatív szórásainak reciprokai szerepeltek a súlymátrixok főátlójában. A gazdaságpolitikai prioritások vizsgálatánál azután eltértünk ezektől a súlyoktól.

Akárhogyan értelmezzük is a célfüggvényben szereplő súlymátrixokat, azok elemei szükségképpen szubjektív ítéleteket tükröznek, hiszen nem létezik olyan objektív mérce, amivel a kívánt pályáktól való eltérések költségeit, vagy a gazdaságpolitikusok prioritásait mérni tudnánk. Ezért a célfüggvény értékének szerintünk nincs reális közgazdasági tartalma, elemzéseinkben nem foglalkoztunk az optimális célfüggvényértékek vizsgálatával. CHOW [3] cikkében a szabályozóváltozók különböző értékei mellett kapott optimális célfüggvényértékeket az egyes gazdaságpolitikai alternatívák rangsorolására használja. Véleményünk szerint ez megalapozatlan, de a gazdaságpolitikai prioritások vizsgálatára a kvadratikus célfüggvény jól használható.

A modellel végzett számításokat [7] tanulmányunk részletesen ismerteti. Itt csupán a számítások néhány fő eredményét foglaljuk össze röviden.

4. A modellszámítások eredményeiről

A vizsgálatot három lépésben végeztük:

1.) a VII. ötéves terv konzisztenciájának vizsgálata;
2.) az optimális reál- és szabályozási pályák meghatározása;
3.) a gazdaságpolitikai prioritások vizsgálata.

Első lépésben kiszámítottuk az állapotváltozók pályáit az 1985–1990. időszakra, feltételezve, hogy a szabályozóváltozók minden évben a tervezett értéküket veszik fel.

Az így számított pályák néhány jellemző mutatóját — a tervvel összehasonlítva — az *1. táblázat* tartalmazza.

1. táblázat:
A VII. ötéves tervben meghatározott és a szabályozó változók tervezett értékeivel számított pálya

Pálya / Jellemző	Tervezett pálya	Számított pálya
Bruttó termelés 1990/85	1,36	1,35
Beruházás 1990/85	1,54	1,67
Nem rubel import 1990/85	1,35	1,43
Nem rubel export 1990/85	1,37	1,27
Rubel import 1990/85	1,30	1,48
Rubel export 1990/85	1,28	1,30
Lakossági fogy. 1990/85	1,38	1,40
Közösségi fogy. 1990/85	1,47	1,35
Kumulált nem rubel egyenleg md Ft 1986–90	107,2	44,8
Kumulált rubel egyenleg md Ft 1986–90	16,9	-79,1

(A mutatók értékelésénél figyelembe kell venni, hogy az 1985 évi bázisértékeket is a modellből számítjuk!)

Az eredményekből látható, hogy modellünk feltételrendszerében az állapot- és szabályozóváltozók tervezett pályáit egyidejűleg nem tudjuk megvalósítani. A szabályozók tervezett alakulása esetén modellünkben a bruttó termelés tervezettnél valamivel alacsonyabb növekedése a beruházások és mindkét relációs import erőteljes növekedésével jár, amit a nem rubel export nem tud követni. A lakossági fogyasztás a tervezett 38 % helyet 40 %-kal nő, míg a közösségi fogyasztás növekedése jelentősen elmarad a tervezett értéktől.

Második lépésben számítottuk ki modellünk optimális megoldását, amelyben nem ragaszkodunk a szabályozóváltozók tervezett értékeihez, hanem azt vizsgáljuk, hogy hogyan lesz a reál- és szabályozási folyamatoknak a tervezett pályáiktól való eltérése együttesen minimális.

Az optimális pálya fő mutatóit a *2. táblázatban* hasonlítjuk össze a tervezett mutatókkal.

2. táblázat:
A VII. ötéves tervben meghatározott és a modell által optimálisnak ítélt pálya

Pálya / Jellemző	Tervezett pálya	Optimális pálya
Bruttó termelés 1990/85	1,36	1,33
Beruházás 1990/85	1,54	1,48
Nem rubel import 1990/85	1,35	1,46
Nem rubel export 1990/85	1,37	1,27
Rubel import 1990/85	1,30	1,34
Rubel export 1990/85	1,28	1,28
Lakossági fogy. 1990/85	1,38	1,40
Közösségi fogy. 1990/85	1,47	1,32
Kumulált nem rubel egyenleg md Ft 1986–90	107,2	87,1
Kumulált rubel egyenleg md Ft 1986–90	16,9	13,0

Ebben a megoldásban a bruttó termelés növekedési üteme még jobban elmarad a tervezettől, 36 % helyett csupán 33 %, amit azonban a modell a beruházások jóval alacsonyabb növekedésével valósít meg: a tervezett 54 % helyett csak 48 %-kal nőnek a beruházások. Az import növekedése azonban — elsősorban nem rubel relációban — igen gyors, míg a nem rubel export bővülése alaposan elmarad a tervben számított mértéktől.

Az állapotváltozók pályái közelebb kerültek a tervezetthez, ennek viszont az az „ára", hogy a szabályozóváltozóknál el kell térnünk ezektől az értékektől. Az optimális megoldást az jellemzi, hogy a beruházásokhoz kapcsolódó szabályozók (nyereségági fejlesztési alap, tervezett gépimport) rendre jóval alacsonyabb értékeket vesznek fel, mint ami a tervben szerepel (ez érthető is, hiszen a beruházások optimális volumene is jóval alacsonyabb a tervezettnél), a lakossági jövedelem és a lakossági hiteltöbblet (ami a lakossági fogyasztást csökkentő tényező) viszont meghaladja tervezett értékeit.

Összességében megállapíthatjuk, hogy a VII. ötéves terv — a modellünkkel számított optimális pályákhoz képest — túlzott növekedést irányoz elő, ugyanakkor a külgazdasági kérdéseket túl optimistán kezeli.

Harmadik lépésben kerül sor a gazdaságpolitikai prioritások vizsgálatára. Ennek során feltételeztük, hogy a gazdaságpolitika irányítói valamely állapotváltozó tervezett alakulását akkor is biztosítani akarják, ha ez más változóknál a tervezett pályáktól való távolodást idéz elő. Erre vonatkozóan több pályát számítottunk ki. Feltételeztük, hogy az a változó, aminek prioritása van a többivel szemben

A: a nem rubel relációs külkereskedelmi egyenleg
B: a rubel relációs külkereskedelmi egyenleg
C: a bruttó termelés
D: a beruházás (állami+vállalati).

Ezeket a változatokat összefoglalóan a *3. táblázat* jellemzi.

3.táblázat:
Kiemelt prioritások mellett számított modellpályák

Pálya / Jellemző	Valamely változó prioritásával számított pálya					
	Tervezett pálya	Optimális pálya	A változat: nem rubel egyenleg	B változat: rubel egyenleg	C változat: bruttó termelés	D változat: beruházás
Bruttó termelés 1990/85	1,36	1,33	1,51	1,33	1,36	1,33
Beruházás 1990/85	1,54	1,48	1,36	1,49	1,44	1,54
Nem rubel import 1990/85	1,35	1,46	1,37	1,48	1,47	1,44
Nem rubel export 1990/85	1,37	1,27	1,32	1,27	1,29	1,27
Rubel import 1990/85	1,30	1,34	1,25	1,30	1,26	1,44
Rubel export 1990/85	1,28	1,28	1,28	1,28	1,28	1,28
Lakossági fogyasztás 1990/85	1,38	1,40	1,54	1,39	1,42	1,39
Közösségi fogyasztás 1990/85	1,47	1,32	1,32	1,32	1,33	1,34
Kumulált nem rubel egyenleg md Ft 1986–90	107,2	87,1	107,2	86,8	91,6	94,1
Kumulált rubel egyenleg md Ft 1986–90	16,9	13,0	−29,3	16,9	−22,9	−47,1

Az eredmények alapján a következő fő megállapításokat tehetjük:

- A nem rubel relációs külkereskedelmi egyenleg tervezett alakulásának biztosításához a tervezettnél és az optimálisnál is jóval dinamikusabb termelésbővülés szükséges, amit a tervezettnél kisebb volumenű beruházás mellett kell elérni.

- A rubel relációs külkereskedelmi egyenleg tervezett pályán tartása az optimális pályához közeli megoldást ad.

– A bruttó termelés alakulását a tervezettnél jóval alacsonyabb beruházási növekedési ütem mellett, de a nem rubel külkereskedelmi egyenleg kedvezőtlenebb alakulásával lehet a tervezett pályán tartani.

– Ha a beruházások az — optimálisnál gyorsabb — tervezett ütemben bővülnek, az optimálishoz közeli pályát kapunk. A szükséges többlettforrásokat a modell rubel importból fedezi, de szembetűnő, hogy a beruházások gyorsabb növekedése nem jár sem a termelés, sem az export, sem pedig a fogyasztás gyorsabb bővülésével, ami a beruházások igen alacsony hatékonyságára utal.

– A lakossági fogyasztás növekedési üteme minden pályán meghaladja a tervezettet.

– Ami az egyes pályákhoz tartozó szabályozókat illeti, számításaink két fő jellegzetességet mutatnak:

1.) A nyereségági fejlesztési alap értéke minden változatban — még abban is, amelyben a beruházások volumene a tervezett szerint alakul — jóval alacsonyabb a tervezettnél. Ugyanez érvényes, csak kisebb mértékben a beruházásokhoz kapcsolódó másik szabályozóra, a tervezett gépimportra is.

2.) A lakossági fogyasztás szabályozására, a modell minden változatban azt az utat választja, hogy a tervezettnél magasabb jövedelem mellett a megtakarítás is magas szintet ér el.

Eddigi munkánkat összefoglalva szeretnénk hangsúlyozni, hogy egy kutatás első lépéseinél tartunk, tudjuk, hogy konkrét modellünk sok vonatkozásban túlzottan leegyszerűsített, számos ponton tökéletesítésre szorul, és az itt leírt eredményekből nem is szeretnénk messzemenő gazdaságpolitikai következtetéseket levonni, azokat csupán illusztrációnak szántuk, hogy ezzel érzékeltessük, milyen típusú vizsgálatokra alkalmasak a lineáris–kvadratikus szabályozási modellek. Ezzel együtt talán sikerült bemutatnunk, hogy az ilyen típusú modellekkel érdemes foglalkozni, azok a tervezés számára hasznosítható információkat adhatnak.

(Beérkezett: 1988. december 20-án.)

Irodalom

1. BERDE ÉVA (1986): *A vegyes irányítás egy aggregált modellje.* (VIRAG), OT TGI, Budapest.
2. CHOW, G. C. (1970): Optimal Stochastic Control of Linear Economic Systems. *Journal of Money, Credit and Banking* 2.
3. CHOW, G. C. (1973): Problems of Economic Policy from the Viewpoint of Optimal Control *The American Economic Review* 1973 December
4. FLETCHER, R. – JACKSON, M. P.: Minimization of quadratic function of many variables subject only to lower and upper bounds. *AERE–T. P.* 528.
5. FRIEDMAN, B. M. (1972): Optimal Economic Stabilization Policy: An Extended Framework. *Journal of Political Economy* 5.
6. GYURKOVICS ÉVA (1984): *Diszkrét idejű lineáris–kvadratikus vezérlelési feladatok.* OT TGI, Budapest.

7. KLEMENCSICS MÁRTA – POVILAITIS SIGITAS (1987) : *Első számítások egy aggregált szabályozáselméleti modellel.* OT TGI, Budapest.
8. MIHÁLYFFY LÁSZLÓ – BAGDY GÁBOR (1986): Nagyméretű dinamikus nemlineáris ökonometriai modellek szabályozására alkalmas számítógépes programok. *Szigma* 3.
9. SANDBLOOM, D.–L. ('986): On the effects of smoothing optimal economic policies. (*Előadás az 5. IFAC/IFORS konferencián*, Budapest, 1986. junius).
10. TURNOVSKY, S. J. Optimal Control of Linear Systems with Stochastic Coefficients and Additive Disturbances.
Megjelent: PITCHFORD, J. D. and TURNOVSKY, S. J. (eds.): *Applications of Control Theory to Economic Analysis.* North-Holland Publishing Co. 1977.

An Optimal Control Model and Its Application in Economic Policy Analysis

Optimal control models which represent the real and control spheres of the economy in their interrelations can be well used in the study of economics, economic policy and planning. These models possess two important properties: they are dynamic models but they not only describe processes but also provide an opportunity for modellers to intervene.

We present the solution algorithm of a linear-quadratic optimal control problem and concrete model computations which illustrate the application possibilities of such models.

For the solution of linear-quadratic optimal control problems the Chow method is most generally used, which carries out the determination of optimal control in a recursive way, solving a series of Riccati equations. But in this case there is no way to set individual upper and lower bounds to the values of the control variables which, however, are necessary in economic applications. Therefore, in the course of solutions, the problem is transformed into a quadratic programming one, where, though the number of variables is a multiple of the original, the constraint system becomes highly simplified: it only comprises lower and upper bounds on the control variables. Thus we have finally succeeded in working out a rapid and efficient solution algorithm.

In the second part of the article the application of the method is presented. We have worked out an aggregated model, based merely on the main national economic categories, with which we have attempted to explore the scope of manoeuvring of economic policy and examine the impact of economic policy priorities. The model computations have been performed in three steps:

- consistency analysis of the 7th five-year plan,
- determination of optimal real and control paths,
- investigation of economic policy priorities.

The article gives a detailed review of the numerical results and the economic conclusions derived from them.

Szigma, XX. (1987-88) 4. sz.

MAKAI MIHÁLY

Gazdaságfizika

1. Bevezetés

A gazdaságban végbemenő folyamatok sok hasonlóságot mutatnak egyes fizikai rendszerekkel pl. egy edénybe zárt gázzal. A látható makrojelenségek mögött mindkét esetben nagyszámú elemi esemény áll, ezek statisztikus jellegűek. Mindkét esetben megfigyelhető az események fejlődésének iránya, azaz mind a termelési, mind a termodinamikai folyamatok irreverzibilisek. A nagyszámú, egyedileg véletlenszerű elemi folyamat mindkét esetben egy, a rendszer egészét leíró változók közti kapcsolattá áll össze. A gáz viselkedését állapotegyenlet írja le, ami entrópiája, belsőenergiája, térfogata és kémiai potenciálja közti összefüggésként adható meg [1]. Hasonló jellegű összefüggésekkel a közgazdaságtan vagy nem rendelkezik, vagy ott ilyen összefüggések használata idegen, még tankönyvekben sem utalnak rá [2].

A fenti analógia segítségével kísérletet teszünk a társadalomban zajló alapvető gazdasági folyamatok termodinamikával analóg leírására.

2. A gazdasági folyamatok leírása

A gazdaság a társadalom és a természet közötti anyagcsere tartománya ([12], 25.o), elsősorban a termelő munka jellemzi. A munka mindenek előtt olyan folyamat, amely ember és természet között megy végbe ([8], 168.o). A gazdasági folyamatok szövevényesen bonyolultak. A társadalom minden tagja idejének nagy részében javakat fogyaszt és termel újra, így a gazdasági folyamat elemeinek száma meglehetősen nagy. Példaként tekintsünk egy kis falusi piacteret, ahol csak termékek cseréje folyik. Itt gazdasági folyamatnak tekinthetünk egy adásvételt. Ezek száma még aprócska piacon is több ezer lehet. Hasonlóan természetes módon bontható fel a termelés és fogyasztás is folyamatokra. A gazdasági folyamatokat négy mennyiség segítségével írjuk le:

- a környezet (K), ami az embert körülvevő természetet méri;
- a munkaerő (M), ami a gazdasági folyamatokban kifejtett, a természet társadalmi kisajátítására irányuló, az emberben szunnyadó képességet méri;
- a termék (T), ami a gazdasági folyamatban létrehozott termék mennyiségét méri;
- az energia (E), mint sajátos termék.

Vizsgálatunk tárgya egy korlátos V térrész, ahol termelés folyik és amit határ vesz körül. Ez lehet egy ország az őt körülvevő országhatárral, de lehet egy gyár az őt körülvevő kerítéssel. A környezet (K) egyszerűen jelentheti a (V)-n belüli természeti adottságok felsorolását (pl. bányák, termőföldek), mértékéül vehetünk egy tetszés szerint a természeti adottságokhoz rendelt pozitív számot. A munkaerő (M) jelentheti a V-n belül található emberekhez rendelt nemnegatív mérőszámok összegét. A mérőszám függhet a személy életkorától, foglalkozásától, V-n belüli helyétől stb. A termék (T) mennyiségét mérhetjük annak természetes mérőszámában (a cipőt párban, a kénsavat hordóban, a vásznat méterben stb.) Az energiát (E) mérhetjük egy kiválasztott energiahordozó (pl olaj) mennyiségében.

Feltesszük, hogy a gazdasági folyamatok a fenti négy mennyiség megváltozásával leírhatóak, azaz a gazdasági folyamat kihatása leírható a természetben létrehozott változás (pl környezetszennyezés), a munkaerőben létrejövő változás, a rendelkezésünkre álló energia csökkenése vagy növekedése és a létrehozott termék mennyisége által.

Feltesszük továbbá, hogy (V)-n belül nagyszámú gazdasági folyamat zajlik le (egy adott időszak pl. egy év alatt) és nem áll módunkban minden egyes gazdasági folyamatba beavatkozni. Ezért a négy alapmennyiség értékét (V)-n makromennyiségnek tekintjük.

A következőkben megvizsgáljuk a gazdaságok közti kölcsönhatást.

3. A nulladik és az első főtétel

Tekintsünk két gazdaságot, amelyek közös határukon keresztül kölcsönhatásban léphetnek. Az előbbiek szerint a kölcsönhatás jelentheti

- termék (T);
- munkaerő (M);
- energia (E);

cseréjét. Békében országok közt környezet cseréje nem lehetséges, hiszen a környezet cseréje csak háborúval (határmódosítás) érhető el. Természetesen egy vállalat megváltoztatja környezetét úgy, hogy termékét másik környezetre „cseréli", ez a művelet azonban termékcsereként írható le. Egyelőre a bonyolultabb kölcsönhatásoktól pl. ki termék, be munkaerő) eltekintünk. A gazdaságok közti kölcsönhatást *cserének* fogjuk nevezni. Két kölcsönhatásban álló gazdaság nem feltétlenül fog cserélni, csak akkor ha az érdekükben áll. Ezt a következő képpen lehet megfogalmazi:

Feltételezzük, hogy minden gazdaságban létezik egy $G(T, M, E, K)$ függvény, ami az adott ország *gazdagságát* írja le, és minden gazdaság a G függvény növelésére törekszik. Ezen feltételezés alapja analógia. Az alább ismertetendő gondolatmenet FÉNYES IMRÉTŐL származik, ld. [1]. A gazdaságtanban vitatják a G függvény létezésének feltételeit, de amint alább látni fogjuk, segítségével ismert közgazdasági állítások is megkaphatóak.

Két gazdaság egyesítésével keletkező gazdaságban G, T, M, E és K összeadódik, azaz az előbbi mennyiségek *extenzív* mennyiségek. Tegyük fel, hogy a gazdaságok csak T terméket cserélhetnek. Milyen irányban fog a T termék a két gazdaság közt áramlani? Nyilván az a gazdaság, ahol T „olcsó", azaz járuléka G-hez kicsi, az fogja T-t eladni, ahol T „drága", azaz járuléka G-hez nagy az fogja megvenni. Nincs értelme T cseréjének, ha járuléka G-hez mindkét gazdaságban egyforma, azaz ha T mindkét gazdaságban egyformán „értékes".

A termodinamika terminológiájával élve minden kölcsönhatáshoz tartozik egy x *extenzív* mennyiség, aminek cseréje csak akkor jön létre, ha az x mennyiséghez tartozó *intenzív* paraméter, y, a két gazdaságban különböző és a kölcsönhatás (csere) az intenzív paraméterek kiegyenlítődése irányába hat. Ez a *nulladik főtétel.*

Valóban, a T termék „értékessége" állandó marad, ha két gazdaságot egyesítünk (feltéve, hogy értékessége ugyanaz mindkét gazdaságban). A T termék cseréjének eredményeként a gazdaságban beállt változás

$$dG = y_T dT\,, \tag{1}$$

ahol y_T jelenti a T termék értékességét, dT pedig a cserélt termék (előjeles) mennyisége (E, M és K nem változott). Hasonló okoskodással belátható, hogy általában egy kölcsöhatás (csere) eredményeként a gazdagságban beálló változás

$$dG = y_T dT + y_E dE + y_M dM\,, \tag{2}$$

ahol az y_i intenzív mennyiség megadja az i-edik extenzív mennyiség járulékát a gazdagsághoz, azaz az i-edik extenzív mennyiség értékességét. Ez az első főtétel.

4. A Gibbs–Duhem reláció

A gazdaságban homogén elsőfokú függvény, hiszen ha a (T, M, E, K)-val jellemzett gazdaság gazdagsága G, akkor n ilyen gazdaság egyesítésével kapott gazdaságra

$$G(nT, nM, nE, nK) = nG(T, M, E, K)$$

adódik. Ilyen tulajdonságú függvényt ad meg

$$G = y_T T + y_E E + y_M M + dy_K K \tag{3}$$

és az intenzív mennyiségek változásai egymást kompenzálják:

$$0 = dy_T T + dy_E E + dy_M M + dy_K K\,. \tag{4}$$

Az ország gazdagsága nyilvánvalóan az ország részeinek (területegységeinek, vállalatainak, állampolgárainak) gazdagságainak összege, mivel a gazdagság nemnegatív. A gazdasági folyamatok viszont egymást befolyásolják. Általában, ha az i-edik és j-edik gazdasági folyamat külön-külön dG_i és dG_j változást eredményez a gazdaságban, akkor az i-edik és j-edik folyamat által együttesen okozott dG_{ij} gazdaság változásra

$$dG_{ij} \neq dG_i + dG_j$$

áll fenn. A gazdasági folyamatok egymásrahatását egy W mátrixszal írhatjuk le:

$$dG_{ij} = W_{ij}dG_i + W_{ji}dG_j .$$

A W mátrix a kooperációt jellemzi, elemzése matematikai eszközökkel a játékelmélet alapján történhet.

Az intenzív mennyiségek kifejezhetőek az extenzív mennyiségek függvényeiként:

$$y_T = \frac{\partial G}{\partial T}; \quad y_E = \frac{\partial G}{\partial E}; \quad y_M = \frac{\partial G}{\partial M}; \quad y_K = \frac{\partial G}{\partial K}, \tag{5}$$

azaz az i-edik tényező ára megmutatja, hogy x_i növelése mennyivel növeli a G gazdagságot. Továbbá

$$y_i = y_i(E, T, M, K) \qquad i = T, E, M, K . \tag{6}$$

azaz az intenzív mennyiségek az extenzív mennyiségek (homogén nulladrendű) függvényei. Kérdés, hogy az így meghatározott y_i függvény egyértelműen meghatározott-e. Belátható, hogy minden kölcsönhatásban az extenzív mennyiség nemnegatív. Amennyiben y_i intenzív mennyiség, úgy $f(y_i)$ is az, ha f monoton növekvő függvény és az egyensúlyban lévő gazdaságok az $f(y_i)$ skála alkalmazása esetén is egyensúlyban vannak.

5. Az értékesség

A T termék termelésekor fogy a munkaerő, romlik a környezet és fogy az energia, viszont nő a termékmennyiség. (1)-ből a következőt kapjuk a termék értékességére:

$$y_T = \frac{dG}{dT} + y_M \frac{dM}{dT} + y_E \frac{dE}{dT} + y_K \frac{dK}{dT} . \tag{7}$$

A termelés során elhasznált javak értékességét örökli a termék, de ezen kívül új érték is megtestesülhet benne. A termék értékessége az egységnyi termék előállításához felhasznált javak értékességének összege (azaz az egységnyi termék előállításához felhasznált javak összes értékessége) plusz a termelés során megjelenő új érték (bővített újratermelés lehetősége). A fogyasztás során csökken a termék mennyisége, fogy az energia, romlik a természet viszont nőhet a munkaerő. (7)-hez hasonlóan

$$y_M = \frac{dG}{dM} + y_T \frac{dT}{dM} + y_E \frac{dE}{dM} + y_K \frac{dK}{dM} . \tag{8}$$

Amennyiben a munkaerő növekményének értéke meghaladja a közben elfogyasztott javak értékét, ugyanolyan gazdagodás megy végbe, mint a termelési folyamatban.

A Gibbs–Duhem relációból a következő adódik az értékesség változására:

$$dy_T = dy_M \frac{M}{T} + dy_E \frac{E}{T} + dy_K \frac{K}{T}, \tag{9}$$

azaz ha változik a termék előállítása közben elhasznált javak értékessége, ez a termék értékességében a termékben felhasznált javak arányában jelentkezik.

6. Értékesség és ár

Az eddig elmondottakból úgy tűnhet, hogy a gazdaság leírásában csupa objektív mennyiség szerepel. Ez azonban nem így van. Először is az általunk használt négy alapmennyiség mérőszámát önkényesen választhatjuk meg, másodsorban az intenzív mennyiségek skálája is önkényes. A termékek cseréje a gazdaságban az áron alapszik, a cserében a termékért kapott ellenérték ingadozik ugyan az egyes ügyletekben, de egy állandó felé közelít, akörül ingadozik. Ezt az állandót a közgazdaságtan értéknek nevezi [9]. A termodinamikai leírásban az érték az intenzív paraméterek történelmileg kialakult skáláját jelenti. A termelésben előállított áru értékét a marxista közgazdaságtan szerint a benne testet öltő munka szabja meg, a polgári közgazdászok a szubjektív elemeket tartalmazó határhaszon elvet vallják [10], nem mulasztva el egy–egy csípős megjegyzést ([11], 684.o): „A munkaérték–elmélet még a legtökéletesebb szocialista rendszerben is mind a munkaerő, mind a nem munkaerő ráfordítások helytelen és nem hatékony felhasználására vezetett.” Pedig (2) alapján sem állíthatunk mást mint a klasszikusok, legfeljebb az általunk választott független változóknak megfelelően a megfogalmazás árnyaltabb: az áru értéke két tényező összege:

- a termelés irreverzibilis folyamata során előállított értéktöbblet, amit a társadalom szubjektíven határozott meg az intenzív skálák lerögzítésével;
- a termelés irreverzibilis folyamata során felhasznált („a termékbe befagyasztott”) komponensek (anyagok, munkaerő stb) értéke.

Az új fogalmak működésének szemléltetésére vegyük a magányos szigeten hajótörést szenvedett Robinson [8] kunyhóját, mint terméket. (A „robinzonád” gondolatkísérletet alább részletesen kifejtjük.) Amennyiben a kunyhó fából készül, a természetet a gazdasági folyamat nem károsítja ($dK = 0$), energiát sem használ — talán a tüzet kivéve — így Robinson kunyhójában csak saját munkája ölt testet. Nem így a betonból épített ház, amiben a cement gyártására és szállítására fordított energia visszavonhatatlanul benne marad, csakúgy mint az a hegy (mint egyedi természeti érték), aminek helyén tátongó gödör mutatja egy cementgyár közelségét. Helyrehozható–e a cementgyár által megrongált természet? Gondol–e Robinson arra, hogy ha már nem lesz szüksége a házra sem ő, sem a természet nem tud mit kezdeni a betontömeggel?

7. Robinson Crusoe

A gazdaságtan egyik kedvelt gondolatkísérlete az egyedülálló, lakatlan szigetre vetődött Robinson esetén bemutatni a gazdasági modell működését [4]. A gondolatkísérlet lényege: a hajótörést szenvedett Robinson csekélyke eszközeivel megkísérli megteremteni a létfenntartásához szükséges javakat. Gazdasága így végletekig leegyszerűsített.

Tegyük fel, hogy Robinson csak a természet megújuló részét használja, így a természetben működő automatizmusok ([7], 48.o) pótolják mindazt amit elhasznál. Nincs nehéz dolga, hiszen ha nem égeti le az erdőt, ha vigyáz a forrás tisztaságára és nem irtja ki a szigeten élő állatokat, a természet bőségesen ellátja élelemmel, eszközzel, nyersanyaggal. Robinson esetében tehát olyan folyamatokról van szó, amelyben $dK = 0$. Feltehetjük, hogy energiát sem kell tárolnia, megteszi azt egy termék (pl. a rőzse), így $dE = 0$. Tevékenysége során munkaerejét alakíthatja át termékké és fordítva, termékeit munkaerővé (tudássá vagy izomerővé). Parányi gazdaságának állapotát a $G(M,T)$ függvény írja le. Ennek szokásos ábrázolását az *1. ábrán* mutatjuk be, amikor is az azonos G értékhez tartozó (M,T) párok alkotta görbéket ábrázoljuk. Először is, Robinson munkaereje felülről is korlátos (legfeljebb megismerheti a szigetet, megerősödhet stb), alulról is — amennyiben egy adott szint alá csökken többé nem képes magát ellátni. Ezért

$$m_0 < M < m_1 \,. \tag{10}$$

A rendelkezésre álló termékek mennyisége is véges, és megadható fennmaradásához szükséges minimum (amivel feltesszük, hogy a hajótöréskor rendelkezett):

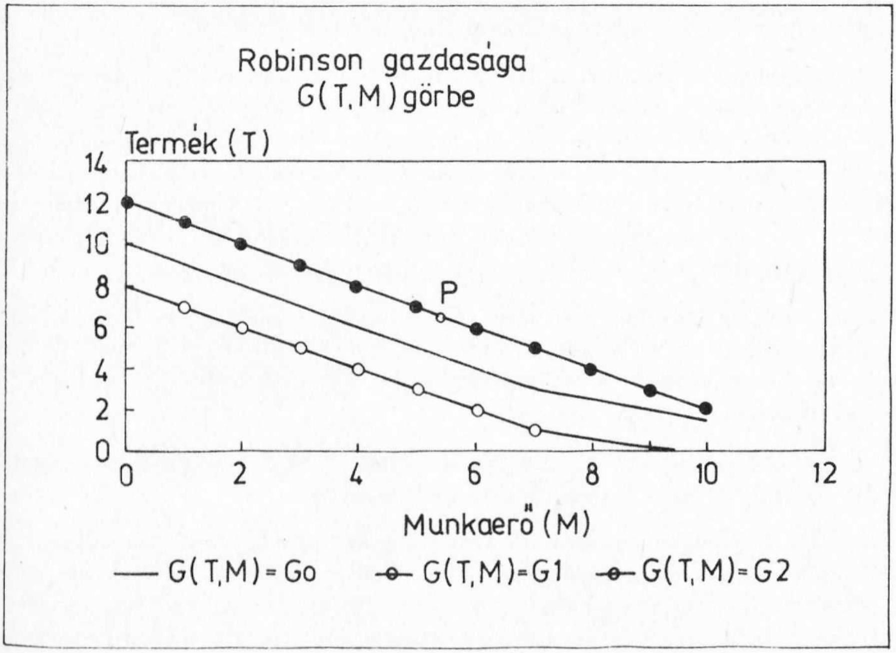
$$t_0 < T < t_1 \,. \tag{11}$$

Így Robinson életterét a (10)-(11) halmaz jelenti, gazdaságának minden pontban ezen a halmazon belül kell lennie.

Tegyük fel, hogy az *1. ábrán* P-vel jelölt pont írja le Robinson vagyonát a hajótöréskor, ami T_1 termékben és M_1 munkaerőben ölt testet, együttesen G_0 gazdaságot jelent. Robinson munkához lát, új termékeket állít elő. Ha a létrehozott termék csak arra elég, hogy reprodukálja munkában elfogyasztott munkaerejét, akkor gazdaságának állapotát mindig a G_0 görbe egy pontja adja meg (egyszerű árutermelés). Ha szükségleteinél többet termel, kialakul a bővített újratermelés lehetősége, míg ha termelése nem fedezi szükségleteit kialakul a szűkített újratermelés.

A második részben kifejtett gondolatmenetünkben az intenzív paraméterek (árak) társadalmiságát a határon átáramló termékek biztosították. Robinson zárt gazdaságában nincs termékforgalom a határon, így termékének árát csak saját munkabéréhez lehet viszonyítani. Írjuk le Robinson gazdaságát a

$$G' = \frac{G}{y_M} = y_T T + M \tag{12}$$



1. ábra. Robinson gazdaságának $G(T,M)$ görbéi

függvénnyel. A gazdaság állapotváltozásait ekkor

$$dG' = y_T dT + dM \tag{13}$$

írja le. Tekintsük a minden gazdaságban jelenlévő két folyamatot, a termelést és a fogyasztást. Termelésnél

$$dG'_t = y_T dT_t - dM_t \tag{14a}$$

míg fogyasztásnál

$$dG'_f = dM_f - y_T dT_f\,. \tag{14b}$$

Legyen $dM_t = dM_f$ és adjuk össze (14a)-t és (14b)-t:

$$dG'_t + dG'_f = \frac{y_T}{y_M}\left[dT_t - dT_f\right]. \tag{15}$$

Azaz, Robinson gazdasága gyarapszik, ha a termelt javak mennyisége nagyobb az elfogyasztott javak mennyiségénél. (14a)-ból $dG'_t = 0$ esetén megkapjuk a termék árát:

$$y_T = \frac{dM_t}{dT_t}\,,$$

azaz a termék árát az egységnyi mennyiségében foglalt munkaerő értéke adja meg egyszerű (nem bővített) termelés esetén.

8. Gazdasági folyamatok

Egy gazdasági folyamathoz kétféle mérleget is rendelhetünk. Az anyagi (materiális) mérleg megadja a folyamatban elfogyasztott ill. előállított anyagok mennyiségét, a pénzügyi (financiális) mérleg a folyamatban elfogyasztott (anyagi és nem anyagi) eszközök értékét állítja szembe az előállított eszközök értékével. Az első főtétel egy gazdasági folyamat pénzügyi mérlegét adja meg. A pénzügyi mérleg itt korlátozott értelemben szerepel, hiszen (1) felírásánál a tőkét nem vettük figyelembe azért, hogy a tőke és a termelés kapcsolata ne bonyolítsa az egyenletet.

Az alábbi vizsgálatokban hangsúlyozni kívánjuk a termékek egyenrangúságát, ezért az extenzív változókat x_i-vel, az intenzív változókat pedig y_i-vel fogjuk jelölni. A gazdasági folyamatokban N termék vesz részt, ezek jellemzőit egy vektorba (x ill. y) vonjuk össze.

A gazdaság állapotát egyértelműen jellemzi az extenzív mennyiségeket megadó x vektor. Kétféle folyamat mehet végbe a gazdaságban:

- csere: ekkor a cserében résztvevők bármelyikének szemszögéből egyenlő értékek cserélnek gazdát. Ha az i-edik terméket a j-edikre cseréljük az egyik résztvevő szemszögéből $dx_i > 0$ és $dx_j < 0$, a másik résztvevő szemszögéből $dx_i < 0$ és $dx_j > 0$, de a csere kezdetén és végén a cserében résztvevők birtokában lévő áruk összmennyisége (x_i és x_j) nem változik. Ebből következik, hogy a cseréhez $dG = 0$ tartozik. A csere során tehát a gazdaság állapota a G =konst. görbén marad.
- termelés és fogyasztás: ekkor bizonyos termékek fizikailag megsemmisülnek, más termékek pedig keletkeznek. Ebben a folyamatban előállhat $dG > 0$. A $dG = 0$-val jellemzett termelés tehát helyettesíthető termékcserével, ha a keresett áru kapható. A $dG \neq 0$-val jellemzett termelés során a gazdaság állapota a $G = c$ görbéről a $G = d > c$ görbére megy át.

A gazdaságot a *2-6 pontok* alapján extenzív és intenzív állapotjelzők segítségével lehet leírni. Egyik alapvető állapotfüggvény a $G(x)$, ami a gazdaság gazdaságát méri az extenzív változók függvényében. Az alábbi vizsgálatok célja megállapítani, hogyan reagál a gazdaság bizonyos változásokra. A „változást" a független változók megváltoztatásával írhatjuk le, tárgyalásunkban megváltozhat egy termék mennyisége (x_i) vagy ára, (y_i). A gazdaság reakciójaként elindulnak bizonyos folyamatok, amelyek megváltoztatják a $G(x)$ gazdaságot, egyúttal más termékek mennyiségét és árát is. Feltesszük, hogy a gazdaság racionális, azaz képes $dG > 0$-val jellemezhető folyamattal reagálni a változásra.

Az alábbiakban először a gazdaság állapotváltozásaihoz megfelelő extenzív függvényeket vezetjük be, majd megvizsgáljuk, mi történik, ha többletkereslet jelenik meg. Megmutatjuk, hogy a kereslet okozta árnövekedés a pénz elköltésére kirótt feltételektől függ. Az alábbiakban két eltérő elköltési módot külöböztetünk meg:

- amikor egy terméket vásárolhatunk a többi terméknek rögzített ára mellett;

– amikor egy terméket vásárolhatunk a többi termék rögzített mennyisége mellett.

Egy termék jellemzőjeként megadható annak a keresletnek a nagysága, ami egységnyi árnövekedést okoz.

a) A gazdaságot leíró extenzív függvények

A termékmennyiségek függvényében kifejezett $G(x)$ gazdaság olyan gazdasági folyamatok leírására előnyös, ahol minden termékmennyiség változik. Ha az i-edik termék mennyiségét lerögzítjük, annak ára még változhat, ezért célszerű G helyett a módosított Φ_i függvény megváltozásait használni:

$$d\Phi_i = \sum_{j=1}^{i-1} y_j dx_j + x_i dy_i + \sum_{j=i+1}^{N} y_j dx_j \,. \tag{16}$$

(5)-höz hasonlóan most

$$y_j = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}\,, \quad j \neq i\,; \quad x_i = \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_i} \tag{17}$$

adódik a deriváltakra. A gazdaság állapota leírható egy csak intenzív mennyiségektől (áraktól) függö extenzív mennyiséggel $F(y)$-nal is, ekkor a folyamatokat

$$dF = \sum_{i=1}^{N} x_i dy_i \tag{18}$$

írja le, és

$$x_i = \frac{\partial F}{\partial y_i}\,; \quad i = 1, \ldots, N\,. \tag{19}$$

Összefoglalva: bevezettünk két új extenzív függvényt, ami a gazdaság gazdagságát adja meg, akárcsak $G(x)$, csak más független változókkal. Ismét leszögezzük, hogy mind az árak, mind a termékmennyiségek pozitívak. Mielőtt továbbmennénk, néhány egyszerű összefüggésre hívjuk fel a figyelmet. A második deriváltak összefüggéseiből

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \tag{20a}$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \frac{\partial y_i}{\partial y_j} \tag{20b}$$

adódik, aminek jelentése a következő. Legyen az i-edik termék az acél, a j-edik termék a vanilia fagylalt. (20a) szerint, ha a gazdaságban megváltozik a vanilia fagylalt mennyisége, megváltozik az acél ára. Ez a változás pont akkora, mint a vanilia fagyi árának megváltozása a gazdaságban található acél mennyiségének növekedése hatására.

b) Árstabilitás

Tekintsük a gazdaságot leíró $F(y)$ függvényt. Tegyük fel, hogy a gazdasághoz dF gazdagságot adunk azzal a feltétellel, hogy minden termék ára rögzített, kivéve az i-ediket, y_i-t. Nyilvánvaló, hogy a kereslet növelni fogja y_i-t. Kis változások esetén

$$dF = c_i dy_i = c_i(y) dy_i \tag{21}$$

és $c_i > 0$. c_i azt a keresletet jelenti, ami az i-edik termék árát egységnyivel megnöveli. A kereslet lekötésének körülményeit másképpen is rögzíthetjük, pl. úgy, hogy a lezajló folyamatokban nem engedjük meg a termékmennyiségek (kivéve x_i-t) megváltozását. Hogyan változik most az i-edik termék ára? Ekkor a $d\Phi_i$ kereslet okozta árnövekedés

$$d\Phi_i = C_i dy_i = C_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_N) dy_i \tag{22}$$

lesz. C_i azt a kereslettömeget jelenti, aminek hatására az i-edik termék ára egységnyivel nő, a többi termék állandó mennyisége mellett. Vizsgáljuk meg c_i és C_i kapcsolatát. Az egyszerűség kedvéért tekintsünk egy két termékből álló gazdaságot. Ekkor a gazdasági folyamatot

$$d\Phi_1 = C_1 dy_1 + y_2 dx_2 \tag{23}$$

írja le, amiből Jacobi-mátrixok tulajdonságai [5], valamint (2) analógiája segítségével a következő eredményt kapjuk:

$$C_1 = \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1}\right]_{x_2} = y_1 \left[\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\right]_{x_2} = y_1 \frac{\partial[x_1, x_2]}{\partial[y_1, x_2]} =$$

$$= y_1 \frac{\frac{\partial[x_1, x_2]}{\partial[y_1, y_2]}}{\frac{\partial[y_1, x_2]}{\partial[y_1, y_2]}} = y_1 \frac{\left[\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\right]_{y_2} \left[\frac{\partial x_2}{\partial y_2}\right]_{y_1} - \left[\frac{\partial x_1}{\partial y_2}\right]_{y_1} \left[\frac{\partial x_2}{\partial y_1}\right]_{y_2}}{\left[\frac{\partial x_2}{\partial y_2}\right]_{y_1}} =$$

$$= y_1 \left[\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\right]_{y_2} - y_1 \frac{\left[\frac{\partial x_1}{\partial y_2}\right]_{y_1} \left[\frac{\partial x_2}{\partial y_1}\right]_{y_2}}{\left[\frac{\partial x_2}{\partial y_2}\right]_{y_1}} = c_1 - y_1 \frac{\left[\frac{\partial x_2}{\partial y_1}\right]_{y_2}^2}{\left[\frac{\partial x_2}{\partial y_2}\right]_{y_1}}.$$

A termelés adott, így x_2 csökkenése y_2 növekedésével jár, emiatt

$$C_1 - c_1 > 0. \tag{24}$$

Összefoglalva: adott termelési feltételek mellett a megjelenő (többlet) kereslet áremelkedést okoz, ennek mértéke a kereslet lekötésének módjától függ. Amennyiben egy adott termék árát engedjük változni az ár egységnyi növeléséhez szükséges kereslet c_1. Ennél nagyobb C_1 kereslet okoz egységnyi növekedést akkor, ha a többi terméknek nem az árát, hanem a mennyiségét rögzítjük.

9. Következtetések

A gazdaság leírására a termodinamika módszerét alkalmaztuk, az új nyelvezetet bemutattuk a legalapvetőbb gazdasági összefüggések leírására. Következtetéseinket az alábbiakban foglaljuk össze:

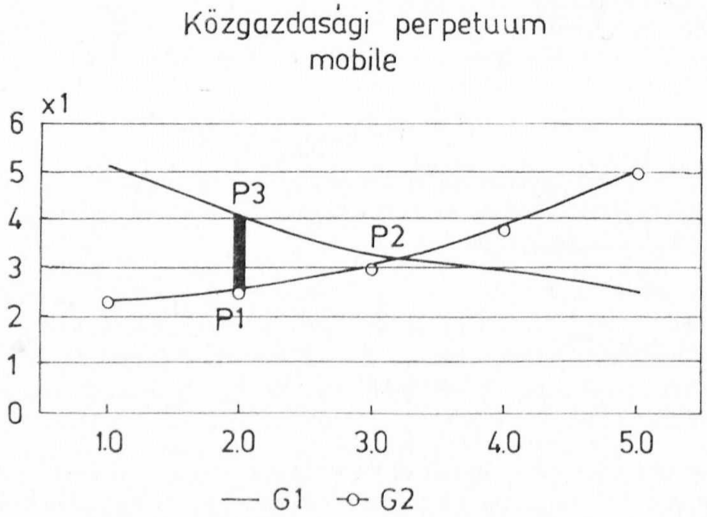
- a termék és a munkaerő ára a gazdasági egységek közti szabad termék és munkaerő áramlás következtében alakul ki. Következésképpen az áramlás akadályozása befagyaszthat egy tetszőleges nem egyensúlyi gazdasághoz tartozó árrendszert. Ennek jelentősége különösen önszabályozó rendszerek keresésénél lehet fontos [6].
- a gazdaság leírásánál figyelembe vettük a természet és a termelés kapcsolatát. A természeti kincseket megőrizni nem tudó gazdaság „once through" módon használja fel nyersanyagait és így természeti kincseit alakítja át (kétes értékű) vagyonná.

A gazdaság és a termodinamika közti párhuzam közel 100 éve izgalmas probléma. Azóta egy sor modell látott már napvilágot, lásd a [2, 7]-beli hivatkozásokat. A közelmúltban megjelent két tanulmány [2, 7] bőséges összefoglalót ad az analógia kihasználására irányuló munkákról. Az alábbiakban összehasonlítjuk a [2, 7]-ben kidolgozott modellt az itt leírtakkal és rámutatunk a lényeges különbségre.

Egy legfeljebb N féle kölcsönhatásban álló rendszer leírható extenzív paraméterrel. További független extenzív paraméterek nem léteznek. Az N paramétert kétféleképpen választhatjuk:

a) $N-1$ darab termék $x = (x_1, \ldots, x_{N-1})$, a pénz (M). Ekkor a gazdasági folyamatok közt fellép a hitelezés és a beruházás is. A gazdasági folyamatokat a $V(x, M)$ extenzív függvény írja le. Ebben a leírásban V nem állapotjelző, a gazdaságnak memóriája van, hiszen egy múltbéli infláció hatására az x jószágvektor értéke más és más. Be lehet vezetni viszont egy integráló osztót, f-et, és V/f már állapotjelző lesz, így adott jószágvektorhoz már egyértelműen csak egy V/f érték tartozik.

b) N darab termék mennyisége $x = (x_1,, \ldots, x_N)$ írja le a gazdaságot. Ekkor a „vagyon" (vagy gazdagság) már egyértelműen meghatározott. Ez indokolja a gazdaság megnevezést, hiszen itt nem az a) leírás vagyonáról van szó. Ennek megfelelően a leírásból a szokásos értelemben vett pénz hiányzik, a mérlegegyenletben csak az adott pillanatban érvényes árakkal számított növekedés–csökkenés kap helyet. Az N extenzív mennyiség (a jószágvektor) egyértelműen meghatározza a gazdaság állapotát (mintegy folyó árakon) anélkül, hogy abban múltbeli mennyiségek (előző időszakok árai) helyet kapnának. Ez a leírás összhangban van a termodinamikai leírással, hiszen például a víz energiája csak a mostani hőmérséklettől függ, a múltbelitől nem.



2. ábra. Gazdasági perpetuum mobile

A leírás közgazdasági példájaként tekintsünk egy két termékből álló gazdaságot. Itt az azonos gazdagság görbék (G_1 és G_2) nem metszhetik egymást, mert (x_1 és x_2) egyértelműen meghatározza G-t. Ennek bizonyítására tekintsük a 2. ábrát. Tegyük föl, hogy G_1 és G_2 metszi egymást, azaz létezk a gazdaság olyan (x_1, x_2)-vel jellemezhető állapota, amelyhez két gazdagságérték (G_1 és G_2) tartozik. Megmutatjuk, hogy ez ellentmondásra vezet. Legyen a gazdaság P_1 pontban, a G_1 görbén. Cserék segítségével eljuthatunk a P_2 pontba, ami a G_1 és a G_2 görbék metszéspontja. Innen szintén cserékkel eljuthatunk a P_3 pontba, ami a kiindulási P_1 ponttól csak az 1-es termék mennyiségében különbözik, annak ellenére, hogy csak cseréket hajtottunk végre. Ez nyilván ellentmondás. (Gazdasági perpetuum mobile).

A [2, 7]-ben hangsúlyt kapott az a kérdés: hogyan képezhetünk a vagyonból állapotjelzőt. Az itt közölt modellben a gazdagságot használtuk állapotjelzőnek, ezért alább azt vizsgáljuk meg, lehetséges-e olyan gazdaságmodell, amelyben dG-t nem (2) írja le. Látni fogjuk, hogy létezik ilyen modell, ekkor G nem lineáris a termékvektorban, egy további, perturbáció jellegű tagot is figyelembe kell venni.

Vizsgáljunk meg egy N részre felosztott gazdaságot, amelynek részei között árucsere és piaci kapcsolatok formájában gazdasági kapcsolat jöhet létre. Az egyes részek áruvektorát jelölje a szokásos x_i. Feltesszük továbbá, hogy az árakat a gazdaság egészére rögzíti egy piaci mechanizmus, ami felírható

$$F(X, Y) = 0 \tag{25}$$

alakban. Itt $Y = (y_i)$; $i = 1, \ldots, N$ az árvektor, és

$$\sum_i x_i = X .$$

Vizsgáljuk meg a $G(X)$ gazdaság és az F állapotfüggvény kapcsolatát. Az állapotfüggvényből az extenzív változók növekményei közt fennáll a

$$\frac{\partial F}{\partial X} dX + \frac{\partial F}{\partial Y} dY = 0 \tag{26}$$

összefüggés. A növekmények közti kapcsolatot tehát egy mátrix teremti meg:

$$dY = M dX = -\left[\frac{\partial F}{\partial Y}\right]^{-1} \frac{\partial F}{\partial X} dX . \tag{27}$$

A gazdaság egy folyamatban bekövetkező változását (2) adja meg, amit minden egyes részrendszerre felírhatunk. A folyamatban először az extenzív paraméterek változnak meg (az i-edik részrendszerben) dx_i-vel, majd az állapotegyenletnek megfelelően az intenzív paraméterek $dY = dy_i$-vel; $i = 1, \ldots, N$. Az i-edik részrendszer gazdagságának új értékét

$$G_i + dG_i = (x_i + dx_i)(y_i + dy_i) = x_i y_i + y_i dx_i + x_i dY + dx_i dY$$

adja. Ez akkor azonosság (első rendben) ha

$$x_i M dX = 0 \tag{28}$$

minden i-re. Másszóval az M mátrix oszlopvektorainak ortogonálisnak kell lenni, az x_i vektorokra, ami egy megszorítás az F állapotfüggvény alakjára. Ha az állapotfüggvény nem tesz eleget (28)-nak, akkor a gazdagság deriváltjára a következő összefüggést kapjuk:

$$\frac{dG_i}{dx_i} = y_i + x_i M \sum_k \frac{dx_k}{dx_i} . \tag{29}$$

Ekkor tehát a gazdagságfüggvény nemlineáris, a második tag jelenti a korrekciót, ami az egyes részgazdaságok áruvektorai közt fellépő korreláció mátrixával, az M mátrixszal és az áruvektorral arányos. Ekkor tehát a gazdasági folyamat következtében előálló árváltozások globális hatását is figyelembe kell venni a gazdagság kiértékelésénél. Azt, hogy a gazdaság állapotfüggvénye szükségessé teszi-e a korrekció alkalmazását csak egy adott modell keretében lehet eldönteni. Ha a gazdaság nagy és sok részből áll, akkor a részek piacra gyakorolt hatása elhagyható, így a korrekció is elhagyható, a gazdagságot (3) kielégítően leírja.

A leírási módunk komoly hátránya, hogy a pénz nehezen illeszthető a modellbe. A gondot az okozza, hogy a pénz elköltésének módja is befolyásolja a gazdasági folyamatokat, így meg kell különböztetni beruházásokat, termelési befektetéseket és csak a keresletet növelő szabad pénzt.

A [2, 7]-ben kidolgozott és az itt kidolgozott modell jól kiegészíti egymást. Mindkettőnek megvan a maga előnye is, hátránya is. Alapfeltevéseink igazolása azon múlik, létezhet-e a gazdaságban két olyan állapot, ahol az extenzív mennyiségek (termékmennyiség, termelési mód, termelőeszközök) megegyeznek, de az árak eltérnek (azaz van-e a gazdaságnak (29) segítségével le nem írható memóriája). És ha igen, létezik-e olyan gazdasági folyamat, ami a gazdaság eme két állapotát összeköti. A feltevések indirekt ellenőrzése a modellből levont következtetések segítségével (például a deriváltak közt fennálló (20) összefüggések érvényesek-e) lehetséges.

Nem világos, le lehet-e küzdeni a közös akadályokat a termodinamika eszköztárával, vagyis úgy tűnik, hogy a közgazdaságtanban a termodinamikai módszerek csak korlátozottan alkalmazhatóak.

Természetesen a leírási mód első kifejtése több okból sem alkalmas kimerítő elemzésekre, ezért felsorolásként álljon itt néhány kérdés, ami a felvázolt modell kereteiben tárgyalhatónak tűnik:

- a (2) egyenletben szereplő mennyiségek származtatása elsődleges adatokból (pl. munkaerő származtatása a lakosság- termelés kapcsolatból);
- a T termék vektorjellegének figyelembevétele, a pénz mint kiemelt termék kezelése;
- termelési arányok vizsgálata [11];
- gazdasági önszabályozó mechanizmusok vizsgálata [10];
- ármechanizmus, árfolyam, külkereskedelem vizsgálata;
- a gazdaság történetét végigkövetve vizsgálható a társadalmi rend és a megtermelt értéktöbblet, annak elosztása stb. közti kapcsolat, más szavakkal a termelőerők és a termelési viszonyok fejlődése.

Meglepő lenne, ha a fenti témák vizsgálata folyamán nem lehetne hasznosítani a fizikai folyamatok leírásánál használt modelleket, hiszen a gazdasági és fizikai folyamatokban minden látszólagos különbözőség ellenére az alapvető jelenségek sok közös vonást mutatnak. Nyilvánvaló, hogy a kifejtett modell lehetőségeit távolról sem merítettük ki.

(Beérkezett: 1988. december 23-án.)

Irodalom

1. BRÓDY, A. (1969): *Érték és újratermelés.* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. Budapest.
2. BRÓDY, A. - MARTINÁS, K. - SAJÓ, F. (1986): Gazdasági és termodinamikai mérés. *Közgazdasági Szemle*, 1.
3. FÉNYES, I. (szerk.) (1971): *Modern fizikai kisenciklopédia.* Gondolat, Budapest.
4. HALL, E.T. (1987): *Rejtett dimenziók.* Gondolat, Budapest.
5. KORN, G.A. - KORN. T.M. (1975): *Matematikai kézikönyv műszakiaknak.* Tankönyvkiadó, Budapest. 4 fejezet.
6. LISKA, T. (1988): *Ökonosztát.* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

7. MARTINÁS, K. (1986): Közgazdasági termodinamika. *Fizikai Szemle*, 11.
8. MARX, K. (1967): *A tőke, Marx–Engels művei 23. kötet.* Kossuth Könyvkiadó, Budapest.
9. MARX, K. (1973): *A tőke, I. kötet.* Kossuth Könyvkiadó, Budapest.
10. SAMUELSON, P.A. – NORDHAUS, W.R. (1961): *Közgazdaságtan.* II. kötet, 19. fejezet. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.
11. SAMUELSON, P.A. (1961): *Economics.* McGraw Hill, New York.
12. *Politikai gazdaságtan, 1. Közgaqzdasági alapvetések.* (1986) Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

Economic Physics

On the basis of similarity between the economy and thermodynamic systems an attempt is made at describing the economy with thermodynamic methods. Natural resources, labour and energy, peculiar good, as well as the produced goods are considered as independent variables. It is shown that the zero and first theorems of thermodynamics and the Gibbs–Duhem relations can be formulated also for the economy.

Szigma, XX. (1987–88) 4. sz.

TÉTÉNYI TAMÁS

A teljesítményösztönzés ökonometriája: modell és valóság[1]

1. Bevezetés

A cikkben a *nyolcvanas évek munkaerőgazdálkodásának népgazdasági folyamatát*, ezen belül a vállalati bérkifizetések alakulását elemzem. A gazdaság folyamatai ezernyi atomisztikus gazdálkodási folyamat szuperpozícióiként valósulnak meg, ezen elemi folyamatoknak a legalábbis hozzávetőleges ismerete és figyelembevétele nélkülözhetetlen a gazdasági elemzésben. Ennek jegyében a *vizsgálat alapvetően mikrogazdasági szemléletű*, a vállalatoknál megfigyelt rövidtávú működés szabályosságai alapján kísérelek meg egy vállalatcsoport egészére nézve következtetéseket levonni és számszerűsíteni. A jelen cikkemben nem vagy csak röviden tárgyalt kérdésekkel kapcsolatban az Olvasó további információkat találhat egy hosszabb tanulmányomban (TÉTÉNYI, 1987); a cikk tulajdonképpen e tanulmány egy részének kivonata.

A vállalatok a hierarchikus rendszerek tipikus példái. A hierarchikus rendszerek általában kvázi-fölbonthatóak, azaz az egyes alkotórészek viselkedése rövid távon megközelítőleg független, hosszú távon pedig csupán nagy általánosságban függ a többi alkotórész viselkedésétől (SIMON, pp. 101–108). Ezért emelhetek ki és vizsgálhatok rövid távon önmagában egy vállalati részrendszert: a munkaerőgazdálkodást.

A vállalatot nem mint egységes, céltudatosan cselekvő egyént ábrázolom, megpróbálok a realitásokat jobban figyelembe vevő képet alkotni. A *magatartási vállalatfogalom* szerint — és az általam használt kategória ehhez a felfogáshoz áll közelebb — „a vállalat kölcsöhatásban álló magatartások egybetorkolló folyamata" (MCGUIRE, 1971, p.39). A kialakítandó modell ebben az irányban tér el a közgazdaságtan klasszikus vállalatfogalmától, nem tételezek fel eleve mindentátfogó szintetikus vállalati célt (pl. nyereségmaximalizálást). Vállalatfelfogásom inkább CYERT és MARCH (ld. KOVÁCS (1981), KORNAI (1980), SIMON (1981)) behaviorista alapokon építkező elméleteivel és modelljeivel rokon.

A vállalat olyan gazdasági szervezet, amely viszonylag autonóm gazdálkodási-döntési egység. Csak az állami vállalatokat vizsgálom, nem elemzem például a kisvállalkozásokat vagy a korlátozott önállóságú (például leány-) vállalatokat. Annak érdekében, hogy az indukciótól eljuthassak a verifikációig, példaszerűen

---

[1] A cikk a szerzőnek az Országos Tervhivatal Tervgazdasági Intézetében, a Magyar Tudományos Akadémia tudományos továbbképzési ösztöndíjasaként, végzett kutatásain alapul. Angol nyelven előadta az Econometric Society 1988. évi Téli Szemináriumán (1988. január 6–10, Velence, Olaszország).

kiválasztottam egy vállalati kört, egy gazdasági szférát — jelesül *a kivitelező építőipart* —, ahol valós információkon és tényadatokon vizsgálhattam elméleti feltevéseimet.

Ennek a választásnak a következménye az, hogy olyan tényezőket kellett figyelembe vennem, amelyek a nem telepített, viszont területileg korlátozott hatókörű termelést folytató építőiparnál lényeges jellemzői a vállalatok (külső és belső) környezetének: a területi elhelyezkedést és koncentrációt, a szervezeti decentralizációt stb. A kivitelező építőipar (a legtöbb iparággal ellentétben) igen sok — területileg erősen tagolt részpiacokon működő — vállalatból áll. Ennek a helyzetnek a piaci verseny kialakulására gyakorolt hatása ugyan nem egyértelmű, ám statisztikai vizsgálataim szempontjából döntő fontosságú az a tény, hogy Magyarországon a nyolcvanas évek közepén sok, többé-kevésbé hasonló gazdálkodó szervezet létezett, hasonló gazdálkodási környezetben.

A vállalati modell a népgazdasági szintű, magasan aggregált modellekhez képest a gazdaság részletesebb leírása irányába tett minőségi ugrást jelent. Az aggregáció azonban itt is jelen van, hiszen vállalaton belül is különböző termékek áramlanak, eltérő személyiségű és képességű emberek dolgoznak eltérő munkakörökben. Általában sincs választás abban a kérdésben, hogy „teljesen dezaggregált" vizsgálatokat végzünk-e, valahol mindenképpen határvonalat kell húzni a még részleteiben modellezett és a már csak általánosságban kezelt objektumok aggregációs szintje között. Ennél a döntésnél a vizsgálandó probléma jellege, a valósághűség és a kezelhetőség szempontjai játsszák a főszerepet.

A *vállalaton belüli*, szisztematikus különbözőségektől így a továbbiakban eltekintek, feltételezem, hogy ezek kiegyenlítik egymást. Egytemékes, homogén munkaerőt alkalmazó vállalat gazdálkodásának modelljét készítem el. Az elvonatkoztatásokra elvi alapot is teremt a magyar adatszolgáltatás jelenlegi rendszere, amelyben a vállalati adatok részletesebb bontása és gyűjtése nem oldható meg — feltehetően e hipotézis közelítő érvényessége miatt.

A vállalati viselkedés vizsgálata hosszú múltra tekint vissza (vö. JACQUEMIN és de JONG, 1981). A rövid távú viselkedésről ugyanakkor nincsen annyi adatunk, mint a hosszú távú összefüggésekről: egy vállalatnak csak egy teljeskörű mérlegbeszámolója van egy évben, gyorsadatszolgáltatása sokkal kevésbé megbízható, értelmezhető és széleskörű. Sarkítva így fogalmazhatunk: a vállalati rövid távú viselkedésről évente csak egy adattal, ám igen sok egyéb információval rendelkezünk. Abból, hogy egy évben egy vállalatról csak egy adat(sor)unk van, ám az ágazatban igen sok, viszonylag hasonló vállalat található, egyértelműen következett, hogy a számszerűsítéskor alapvetően *keresztmetszeti statisztikákra* támaszkodhattam.

Csak pontosan mérhető és megfigyelhető folyamatokkal foglalkozom. Ez elég erős elvonatkoztatás, amit a hazánkban ellenőrzéssel foglalkozók nagy száma is csak részben igazol. Ám ez a lehatárolás különbözteti meg az elemzést a mérési hibák kiküszöbölésére és adatkorrekciók elvégzésére szolgáló módszerektől. Ez utóbbiaknak is megvan a maguk fontossága, és a velük kapcsolatos problémák még távolról sem tekinthetők megoldottaknak (vö. KÁLMÁN, 1981). Mi azonban szenteljük most figyelmünket a véletlen hibákkal fedett determinisztikus struktúrák identifikációja helyett — a lakossági jövedelemeloszlások közelítéséhez hasonlóan (ÉLTETŐ és VITA, 1982) — sztochasztikus struktúrák megismerésének! Ennek jegyében minden további vizsgálat nélkül azonosítom az egyes gazdasági változókat a rájuk vonatkozó számviteli kategóriák mérési eredményeivel. A vállalati külső és belső környezet egyes elemeit is számviteli adatok segíségével reprezentálom: a területi szétszórtságot a szállítási költségnek az összköltségen belüli arányával azonosítom stb.

A *linearitás*, ez az általánosan és a cikkben is többször használt matematikai jellegű feltételezés azon a tényen nyugszik, hogy tetszőleges folytonos függvény tetszőleges pontossággal közelíthető intervallumonként lineáris függvényekből összetett függvénnyel (spline). A linearitás hipotézise így csak korlátozott mértékű egyszerűsítést jelent adott intervallumon, bár az esetleges előrejelzés esetén már jelentkezhetnek problémái. Abban az esetben tehát, amikor nincsen pontos információnk az adott összefüggés egzakt alakját illetően, a linearitás feltételezése legalábbis nem zárható ki.

A következőkben a mérhető adatsorokat latin betűkkel és betűcsoportokkal, a (nem-megfigyelhető) paramétereket görög kisbetűkkel jelölöm. Az egyváltozós függvények argumentumait általában indexként jelölöm. A képletekre zárójelbe tett (folyamatosan számozott) arab, a szöveges feltevésekre zárójelbe tett római számokkal hivatkozom.

1. A korlátos teljesítménybérezés modellje

A rövid távú munkerő-gazdálkodás és ösztönzés statisztikailag is számszerűsíthető leíró modelljét egy, a mindennapos vállalati gyakorlatban rendszeresen visszatérő helyzet vizsgálata alapján alkotom meg. A *vizsgálat tárgya* az ún. korlátos vagy „plafonos" *teljesítménybérezés mechanizmusa*, ami — az üzemgazdaságilag kezelhetetlen egyenes darabbért kiszorítva — a hazánkban az építőiparban legelterjedtebb bérezési forma (TÉTÉNYI, 1986). A modellben a véletlent, a nem-szisztematikus elemet az jelenti, ahogyan a különböző teljesíményű és képességű munkások között a termelési programból adódó feladatokat elosztják. FALUSNÉ (1977) nyomán megkülönböztetem az input és az output munkát, ám ezek egymáshoz való viszonyát — a munkaerő vállalaton belüli allokációjának esetlegességéből adódóan — sztochasztikusnak tekintem.

Azt a helyzetet vizsgálom tehát, amikor egy adott időpontban, termelési szakaszban a munkások ígéretet kapnak arra, hogy újabb feladat teljesítése esetén további bérkifizetést biztosít számukra a vállalat. Ez tipikusan egyösszegű munkautalványozás formájában megy végbe, de ilyen szituációnak tekinthető a célprémium, a túlóra vagy a VGMK-szerződés is. Ezt a helyzetet a továbbiakban „ösztönzési szituációnak" nevezem. A fizetési ígéret személyekre vagy csoportokra lebontva jelenik meg, de ez utóbbi esetben is gyakori az — implicit vagy explicit — teljes lebontás.

Meg kell jegyezni, hogy a bér, a túlórapénz stb. forintban kifejezett kategória, míg a „teljesítmény", a „munkavégzés" nehezen megfogható és mérhető, mértékegységének megválasztásakor megengedett bizonyos önkényesség. (*i*)

A teljesítménybérezés kiindulópontja, hogy jövedelmük megszerzése érdekében a dolgozók — egyénileg különböző mértékben, de — rendszeresen hajlandóak új és új feladatok elvégzésére. (*ii*) Ez a munkavégzés azonban még az egyes dolgozók esetében is ingadozó. Bizonytalanság jelentkezik az egyéni — szándékolt — munkabefektetés (input munka) és a ténylegesen jelentkező hasznos munkavégzés (output munka) viszonyát illetően. Növekvő intenzitású munkavégzésnél anyag- és gépellátási nehézségek jelentkezhetnek, technológiai, munkavédelmi és kooperációs tényezők befolyásolhatják hátrányosan az egyéni teljesítményeket. Több szakmunkás egyidejű munkavégzésével zavarhatja egymást, a technológiai fegyelem megsértése, a sorrend meg nem tartása felesleges munkavégzést okozhat. Pozitív hatása is lehet az elvárt munkateljesítmény növekedésének: érdemessé válhat például nagy teljesítményű gépek munkába állítása, vagy nagy tömegben felhasznált speciális szerelvények előregyártása. Ez a *bizonytalanság* elsősorban a vállalati szinten tervezett többletteljesítés nagyságával kapcsolatos. (*iii*)

A vállalati munkafeladatok növekedésével járó bizonytalanság mindenkit másképpen érint. Szállítóeszközök vagy munkagépek koncentrálása egy munkaterületre például javíthatja az adott területen dolgozók teljesítménykifejtésének feltételeit; viszont csökkentheti a koncentrált gépek kihasználásának hatékonyságát, illetve a nem kedvezményezett munkaszámokon dolgozók ellátottságát. Ezek a hatások az egyes munkások szempontjából *véletlenszerűek*, hiszen nem a dolgozók teljesítményéhez igazodnak, hanem a különböző építési feladatokhoz kapcsolódó termelésirányítói döntések határozzák meg őket. (*iv*)

Csak több — legalább 20–30 — munkaszámon egyidőben dolgozó, több száz embert foglalkoztató vállalatokat vizsgálok. Ezekre igaz, hogy a dolgozók összteljesítményét egy-egy munkás kiemelkedően jó vagy gyenge napi teljesítménye alapvetően nem befolyásolja. Az összteljesítménnyel összehasonlítva az egyéni teljesítmények — és így ezek ingadozásai is — külön-külön elhanyagolhatóak, csak együttesen válhatnak jelentőssé (ezt a teljesítményplafon is biztosítja). (*v*)

A fentiekben leírt ösztönzési szituáció a vállalat működésében naponta ismétlődik. Minden dolgozó a rá jellemző módon reagál ezekre a szituációkra. A közvetlen termelésirányítás igyekszik a munkások számára — egyenként időben eltérő megoszlásban ugyan, de — összességében közel azonos munkavégzési feltételeket biztosítani. Nem lehet munkahelyi feszültségek kialakulása nélkül egyes dolgozókat mindig a „jobban fizető", a „könnyebb" feladatokra, másokat a kevésbé „látványos" munkákra állítani; a nem „kedvezményezett" dolgozók hamar otthagynák a vállalatot, illetve más módszerekkel harcolnák ki a munkavégzés feltételeinek, a munkák elosztásának „igazságosabb" rendjét. Ebből az „igazságosságból" adódóan ugyanaz a munkás — saját átlagos teljesítményéhez képest! — az egyik alkalommal viszonylag keveset, másszor lényegesen többet fog produkálni, saját elhatározásától és a többiek munkavégzésétől függetlenül is. (*vi*)

A fent vázolt képet kiegészíti az a — valóságban ritkán előforduló, de magától értetődő — tény, hogy ha a vállalat nem fizet(ne), dolgozói nem dolgoz(ná)nak. (*vii*)

A vállalat termelési tervének, illetve az ebben előirányzott munkafeladatoknak megfelelően készíti el ösztönzési tervét, bérezési normáit. Célja, hogy a munkásokból kikényszerítse a feladatok megvalósításához szükséges (output) teljesítményt. Tekintsünk el most a vállalat „gazdaságon kívüli" eszközeitől, a munkafegyelem adminisztratív előírásaitól, tegyük fel, hogy tisztán ösztönzéssel, a kialakított „játékszabályok" megtartásával — és megtartatásával — éri ezt el a vállalat. Tételezzünk fel továbbá egy minimális vállalati költségtakarékosságot: azt, hogy ha a tervelőirányzatokat a dolgozók teljesítették, akkor csak az ehhez szükséges — kialkudott — pénzt fizeti ki, de azt hiánytalanul. (*viii*)

Jelölje a vállalat — általános értelemben vett, tehát célprémiumokat, társadalombiztosítási járulékot stb. is tartalmazó — bérköltségét y, a kifejtett (az építőiparban joggal additívnak tekinthető) munkateljesítményeket (output munkát) v, a létszámot J. Ezeket a jelöléseket az egyes munkásokra lebontva (és j-vel indexelve) nyilván

$$v = \sum_{j=1}^{J} v_j , \qquad y = \sum_{j=1}^{J} y_j . \tag{1}$$

Az eddigiekben leírt ismétlődő szituáció feltételezett szabályosságai a vállalati béralakulásra vonatkozóan egy lényeges statisztikai törvényszerűség bizonyítását teszik lehetővé. Az (i)-($viii$) feltételek fennállása esetén *a vállalati bérköltség* (a teljesítményektől függő része) *inverz Gauss eloszlású valószínűségi változóval közelíthető.* Enyhe regularitási feltételek (ezeket a továbbiakban pontosítom) biztosítják, hogy a bérköltség sűrűségfüggvénye

$$f(y/v,\lambda) = \frac{v}{\sqrt{2\pi y^3}} \exp\left[-\frac{[v-\lambda y]^2}{2y}\right] \tag{2}$$

alakban állítható elő, ahol a v paraméter a vállalatnak a vállalati termelési tervben elhatározott vagy előírt, a dolgozókkal szemben érvényesített teljesítmény-követelménye, λ pedig a dolgozók ösztönözhetőségét jellemző teljesítmény/bér paraméter.

2. Az inverz Gauss eloszlás

A (2) képlettel leírt összefüggést igazoló gondolatmenetben az előző fejezet verbálisan megfogalmazott feltevéseit „fordítom le" matematikai nyelvre. (ii) formalizálása a linearitási feltevés figyelembevételével adja, hogy

$$E\left[v_j\left[y_{2j}\right] - v_j\left[y_{1j}\right]\right] = \lambda_j\left[y_{2j} - y_{1j}\right] , \tag{3}$$

ahol y_{1j} a j-edik munkás az adott ösztönzési szituáció kialakulásakor már biztosított jövedelmét, y_{2j} az ösztönzési szituáció eredményeként kialakuló jövedelmét (tehát különbségük az utalvány összegét, a célprémiumot), $v_j(y_{1j})$, $v_j(y_{2j})$ rendre az y_{1j}, y_{2j} jövedelemért nyújtott teljesítményt (különbségük tehát a prémiumfeladatot) jelöli, λ_j pedig a munkásra — egyénileg — jellemző állandó. Jelölje a vállalat dolgozóit együttesen jellemző, átlagos ösztönözhetőséget a λ paraméter (itt a súlyozástól a bevezetésben említett, az aggregációval kapcsolatos feltevés értelmében eltekintek). Az egyéni munkavégzés hasznosságával kapcsolatos bizonytalanság mérőszámaként a varianciát választva a (*iii*) feltétel egy ν_j arányossági paraméter bevezetésével, a linearitási feltevés mellett a következő alakban írható

$$var[v_j[y_{2j}] - v_j[y_{1j}]] = \nu_j E[v[y_2] - v[y_1]] = \nu_j \lambda [y_2 - y_1]\,. \tag{4}$$

A (*iv*) feltétel szerint a $(v_j(y_{2j} - v_j(y_{1j}))$ változók sztochasztikusan függetlenek egymástól (különböző j-kre). Az (*v*) feltétel formalizálása kissé bonyolultabb. Tekintsük ehhez azt a munkást, akinek adott ösztönzési szituációban a teljesítménye leginkább eltér szándékolt, szokásos átlagos teljesítményétől, azaz nála szuperponálódnak a kedvező vagy kedvezőtlen termelésirányítási és -szervezési döntések. Az (*v*) feltétel szerint az összteljesítményhez viszonyított teljesítményhullámzás még e munkás esetében is majdnem mindig kicsiny, azaz

$$P\left[\sup_{j<J} \| [v_j[y_{2j}] - v_j[y_{1j}]] - E[v_j[y_{2j}] - v_j[y_{1j}]] \| \geq \varepsilon [v[y_2] - v[y_1]]\right] \to 0\,. \tag{5}$$

Az (*v*) feltétel szerint továbbá releváns a $J \to \infty$ helyzet vizsgálata. Definiáljuk most a z_j változót a következő „normálással":

$$z_j := \frac{[v_j[y_{2j}] - v_j[y_{1j}]] - \lambda_j[y_{2j} - y_{1j}]}{\sqrt{\nu_j[y_2 - y_1]}}\,. \tag{6}$$

A (*ii*)-(*v*) feltételekből és a z_j definíciójából következik, hogy a z_j változók végtelenül kicsinyek (ld. GNYEGYENKO és KOLMOGOROV, 1951., p.130). Ekkor enyhe regularitási feltételek biztosítják, hogy létezik a

$$\frac{[v[y_2] - v[y_1]] - \lambda[y_2 - y_1]}{\sqrt{\nu[y_2 - y_1]}} \cong \sum_{j=1}^{J} z_j \tag{7}$$

változónak határeloszlása $J \to \infty$ esetén (GNYEGYENKO és KOLMOGOROV, id.m., 25.§.1–4.tétel, pp.119–127). A (7) képletben ν jelölje a $\lambda\nu_j$ paraméterek átlagát, olyan számot, amelyre közelítőleg érvényes az egyenlőség; a súlyozástól egyszerűsítő feltevéseim alapján ismét eltekintek. Ha pedig létezik a (7) képlettel definiált valószínűségi változónak határeloszlása, akkor ez GNYEGYENKO–KOLMOGOROV tétele (1951,26.§.1.tétel, p.130.) értelmében nem lehet más, mint a standard normális eloszlás.

Az (*i*) megállapításban jelzett bizonytalanság miatt az általánosság szűkítése nélkül feltehető, hogy $\nu = 1$. Ebből adódik, hogy a $v(y_2) - v(y_1)$ változó határeloszlása normális, $\lambda(y_2 - y_1)$ várható értékkel és $y_2 - y_1$ szórásnégyzettel.

A (vi) hipotézisből a fentiekhez hasonló módon levezethető, hogy ha

$$y_1 < y_2 \leq y_3 < y_4 \,, \tag{8}$$

akkor

$$\begin{aligned} [v[y_2] - v[y_1]] &\in \mathcal{N}[\lambda[y_2 - y_1]\,,\, y_2 - y_1]\,, \\ [v[y_4] - v[y_3]] &\in \mathcal{N}[\lambda[y_4 - y_3]\,,\, y_4 - y_3]\,, \end{aligned} \tag{9}$$

és $(v(y_2) - v(y_1))$, $(v(y_4) - v(y_3))$ egymástól sztochasztikusan független. Továbbá (vii) miatt $v(0) = 0$.

Az egyparaméteres $\{v(y),\ y \geq 0\}$ valószínűségiváltozó-család egy $y \in \mathbf{R}_+$ paraméterű sztochasztikus folyamat. A regularitás jegyében tegyük fel róla azt is, hogy folytonos az $y = 0$ pontban! Ekkor $\{v(y),\ y \geq 0\}$ egy $(\lambda, 1)$ együtthatójú sodródó Brown-folyamat (ld. KARLIN és TAYLOR, 1985., 4.1.definició, p.350).

A $(viii)$ közgazdasági feltételezésnek a következő matematikai megfogalmazás adható: adott v értékhez keressük azt a rendre legkisebb értéket felvevő y valószínűségi változót, amelyre $\{v(y)\,,\ y > 0\}$ eléri v-t, tehát amelyre $v(y) = v$. Ez a kérdésfeltevés éppen a fordítottja annak a kérdésnek, hogy rögzített y esetén mi $v(y)$ eloszlása. Ez utóbbi kérdésre a választ már megadtam a Gnyegyenko–Kolmogorov tétel alapján; ez az eloszlás éppen a normális eloszlás. Az első kérdésre viszont a válasz: adott v esetén y eloszlása inverz Gauss eloszlás (ld. KARLIN és TAYLOR, 1985,5.3.tétel, p.356.). A két eloszlást és a teljesítményösztönzést az *1. ábra* szemlélteti.

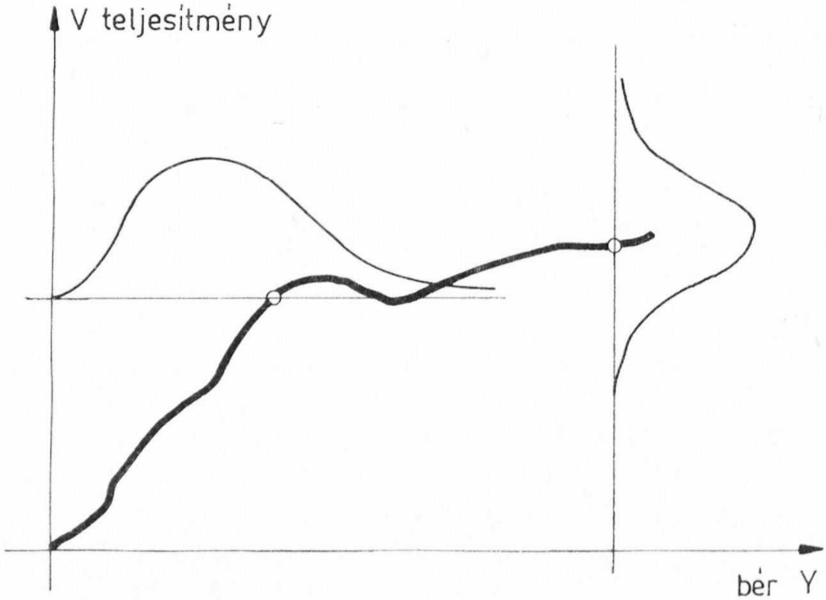
A fejezet elején, a modell bevezetésekor a könnyebb megfogalmazás és érthetőség kedvéért olyan korlátozó feltevésekkel éltem, amelyek a (2) képlet állításához nem szükségesek, az állítás tehát élesíthető:

(1) *Létszámváltozások.* Implicit módon feltételeztem, hogy J „nagy", de rögzített konstans. Ez a megszorítás szükségtelen. Ha a vállalati létszám *külső* okok (például globális vagy strukturális elhelyezkedési- vagy munkaerőgondok, demográfiai tényezők) miatt változik, J olyan, $(v_j(y_{2j}) - v_j(y_{1j}))$-től független valószínűségi változó, amelynek várható értéke „nagy". Ekkor Ascombe–tétele közvetlenül alkalmazható. De akkor is érvényes lehet a (2) képlet, ha *belső* okok miatt, például a munkaerő elvándorlásának megállítása érdekében hoznak belintézkedéseket. (A vonatkozó tételekkel kapcsolatban ld. pl. RÉNYI, 1960.)

(2) *Egyéntől függő bizonytalanság.* A (iii) hipotézis kimondja, hogy az egyéni teljesítmények a vállalat várható összteljesítményétől függnek. Ez erős elvonatkoztatás, hiszen lehetnek a bizonytalanságnak szakmától, beosztástól, élethelyzettől, kortól stb. függő összetevői is, amikor (4) a következő alakba írható:

$$var[v_j[y_{2j}] - v_j[y_{1j}]] = \nu_{1j}[v[y_2] - v[y_1]] + \nu_{2j}E[v_j[y_{2j}] - v_j[y_{1j}]] \,. \tag{10}$$

Ezen módosítás esetén is érvényben maradhat a (2) képlet.



1. ábra. A teljesítmények és bérek vállalati szintű alakulásának egy lehetséges realizációja, adott bérfizetéshez tartozó összteljesítmény és adott teljesítménykövetelmény eléréséhez szükséges minimális bérkifizetés sűrűségfüggvényei

3. Az általánosított lineáris modell és becslése

Legyen q a tervezett termelés nagysága a vállalatnál (például éves szinten)! Az építőipari technológiai előírások, az ÉKN és VKN normagyűjtemények ismeretében nem tűnik túlzottan merésznek az a feltevés, hogy (a linearitási hipotézissel összhangban) Leontief-típusú termelési függvény érvényesül a vizsgált vállalatoknál. Ekkor $v = q\tau$, ahol τ az ágazatra jellemző skalár konstans.

Jelölje továbbá u a munkaügyi tevékenység jellemzésére szolgáló merőszámok sorvektorát! A linearitási hipotézis mellett feltehető, hogy $\lambda = u\mu$, ahol μ a vállalatok homogén csoportjára jellemző konstans paramétervektor.

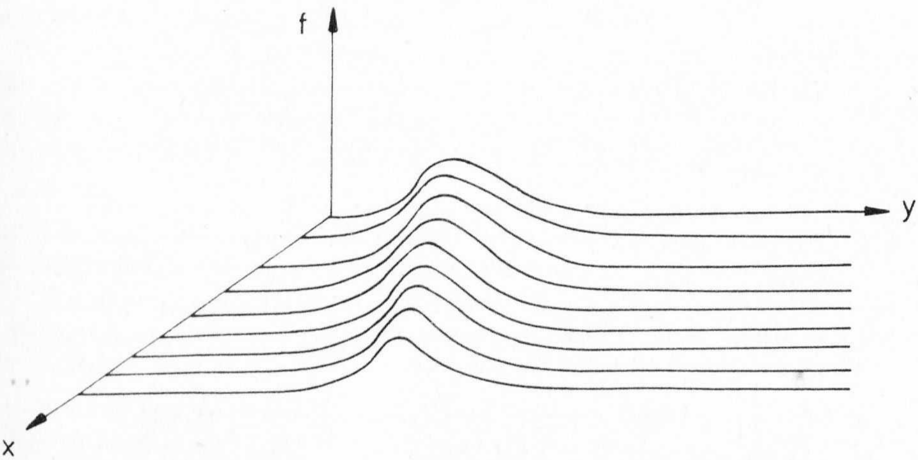
Ismert, hogy egy (2)-nek megfelelően paraméterezett inverz Gauss eloszlású valószínűségi változó várható értéke $\eta = v/\lambda$. Bevezetve az $\eta = x\alpha$ jelölést:

$$\eta = x\alpha, \quad \lambda = q\tau/\eta, \quad \langle\mu\rangle = \tau\langle\alpha\rangle^{-1}, \quad \langle x\rangle = q\langle u\rangle^{-1}, \tag{11}$$

ahol $\langle\cdot\rangle$ diagonális mátrixot jelöl, y sűrűségfüggvénye pedig

$$f[y/\eta, \tau, q] = \frac{q\tau}{\sqrt{2\pi y^3}} \exp\left[-\frac{[q\tau]^2\left[1-\frac{y}{\eta}\right]^2}{2y}\right]. \tag{12}$$

A (12) képlet segítségével általánosított lineáris modell (ld. NELDER és WEDDERBURN, 1972) definiálható: olyan regressziós jellegű modell, ahol egy T elemű minta minden egyes elemére vonatkozóan rendelkezésre áll egy sztochasztikus értelemben konstans q_t súly és x_t magyarázóváltozó-vektor és egy y_t valószínűségi változó (az egyszerűség kedvéért azonosan jelölt) egy realizációja. Az y_t valószínűségi változót az x_t-nek és egy ismeretlen, de a teljes mintán azonos α paramétervektornak a lineáris kombinációja mint várható érték, továbbá egy τ „zavaró" paraméter és q_t szorzata által együttesen egyértelműen meghatározott inverz Gauss eloszlás jellemzi.



2. *ábra.* Egy általánosított lineáris modell, ahol a vízszintes tengelyeken az (egyetlen) magyarázó és a függő változó, a függőleges tengelyen a likelihood (sűrűség-) függvény szerepel

Az *általánosított lineáris modell* becslési problémája az ismeretlen α paramétervektor és τ paraméter maximum likelihood becslése. Az α paramétervektornak ebben az esetben létezik egyenletesen minimális varianciájú torzítatlan esztimátora, a becslés $\sqrt{T}$-konzisztens (azaz a becslési hiba $\sqrt{T}$-szerese normális eloszlású, nulla várható értékkel és szigorúan pozitív definit variancia–kovariancia mátrixszal). A *maximum likelihood becslés tehát „értelmes"* (ld. bővebben: TÉTÉNYI, 1987). A becslő eljárás az ún. iteratíven újrasúlyozott legkisebb négyzetek (IRLS) módszere (ld. DOBSON, 1983). Az eljárás tehát a következő lépések iterációs alkalmazásából áll:

$$\alpha^{(p+1)} = \left[X'\langle var^{(p)}[y_t]\rangle^{-1}X\right]^{-1} X'\langle var^{(p)}[y_t]\rangle^{-1}y \tag{13}$$

$$\tau^{(p+1)} = \left[\sum_{t=1}^{T} \frac{q_t^2}{y_t}\left[1-\frac{y_t}{x_t\alpha^{(p+1)}}\right]^2 / T\right]^{-1/2} \tag{14}$$

$$var^{(p+1)}[y_t] = \frac{\left[x_t\alpha^{(p+1)}\right]^3}{\tau^{(p+1)^2} q_t^2}, \tag{15}$$

ahol X, y rendre az x_t vektorokból és az y_t skalárokból összeállított mátrixot, illetve vektort; $^{(p)}$ az iterációs lépés sorszámát, $\langle\cdot\rangle$ diagonális mátrixot, $'$ transzponáltat jelöl. Kezdőértéknek a $var^{(0)}(y_t) = 1$ értéket használtam, leállási szabályt a log-likelihood függvény iterációnkénti megváltozása adott. A paraméterek becslésének standard hibáját az információs mátrix inverzéből számítottam.

4. A vállalati bérköltség alakulása

A becsülni kívánt modell tehát homogén mintán jól becsülhető. Az azonos viselkedésűnek tekintett vállalati kör a kivitelező építőipar állami, minisztériumi alapítású vállalatait (szám szerint 69 céget) tartalmazta. A (t-vel azonosított, $t \leq T = 69$) megfigyelések korlátozott száma ellenére feltételezhető, hogy egy hat paramétert tartalmazó modell esetén is jó közelítésként lehet elfogadni a paraméterbecslés aszimptotikus tulajdonságait. A kategóriákat 1985-ös mérlegadataikkal mértem.[2]

A munkaerőgazdálkodás modelljének vizsgált valószínűségi változója a *bérköltség* (BJKTS_t). A lineáris determinisztikus rész magyarázó változóit a (11) képletnek megfelelően (Q_t a vállalati termelés) transzformáltam, az így kapott mutatók tehát a bérköltség várható értékét becsülték. Ezek a transzformált magyarázó változók is a vállalati belső környezet jellemzőit mérték.

A *vállalati decentralizáltság* ($\mathrm{DECENTR}_t$) és a bérköltség között fordított összefüggést tételeztem fel, elsősorban az improduktív (pl. adminisztrátori) létszám miatt. Ez az összefüggés természetesen nem egyértelmű, hiszen a vállalati adminisztrációt az üzemeknél is el kell végezni, ám a nagyobb telepi–üzemi önállóság jobb

[2] Vállalati alapadatok és mérleghivatkozásaik (index feltüntetése nélkül, : tól–ig szummázást jelöl)

BJKTS	Bér- és bérjellegű költségek és társadalombiztosítási járulék	III.(05+06+14).c
Q	Termelés	II.(09+41:55+57+58).j
DECENTR	Vállalati decentralizáltság	Q×ÖNKTS/FELNO
ÖNKTS	Tevékenységek szűkített önköltsége	II.09.c
FELNO	Fel nem osztott költségek	II.(10+11).e
TERÜLET	Területi szétszórtság	Q×SZKTS/AGKTS
SZKTS	Belföldi szállítások összes fuvardíja	III.28.c
AGKTS	Anyag- és anyagjellegű költségek	III.(04+13).c
PRODAR	Fizikai dolgozók aránya	Q×FLÉTS/SLÉTS
FLÉTS	Fizikai foglalkozásúak átlagos állományi létszáma	IV.59.c
SLÉTS	Nem fizikai foglalkozásúak átlagos állományi létszáma	IV.60.c
ÖSZTÖNZ	Többlettermelésen kívüli célok súlya	Q×PRÉM/BJKTS
PRÉM	Prémiumok, jutalmak, nyereségrészesedés	V.(9:11+13:17).c

helyi munkaszervezést, általában mozgékonyabb munkaerőpolitikát és a központban kisebb vízfejet tesz lehetővé.

Hasonlóan a *területi szétszórtság* (TERÜLET_t) esetében is feltételeztem, hogy annak növekedése esetén azonos munkateljesítményt kisebb bérköltséggel lehet elérni — a helyi munkaerő alkalmazásának nagyobb lehetősége, a munkakultúrában, intenzitásban hagyományosan területileg differenciált piacon való nagyobb mozgástér révén.

A vállalati *munkaerő összetételének* (PRODAR_t) jellemzésére a fizikai és szellemi dolgozók arányát használtam. Ennek elméleti és gyakorlati problémái közismertek, a bérköltségre gyakorolt hatására vonatkozóan nem is volt előzetes elképzelésem. A fizikai munkások arányának növekedése ugyanis, miközben az „eltartott fehérköpenyesek" relatív bérterhét csökkenti, a teljesítménykényszer, a szervezettség, a munkafegyelem csökkenése révén ezt a hatást akár meg is fordíthatja.

A több termelésen túlmenően, más feladatok (minőség, határidő stb.) kielégítő szintű teljesítését prémiumok, jutalmak stb. hivatottak biztosítani. Mivel ezek a kiegészítő feladatok nem szolgálják — közvetlenül — a nagyobb termelést, jelentőségük (ÖSZTÖNZ_t) növekedése feltehetően kedvezőtlenebb (nagyobb) bér/teljesítmény hányadoshoz vezet (miközben pl. stabilizálja a vállalat piaci részesedését).

A becslésnél — mivel az általánosított lineáris modellnél nem rendelkezünk olyan ismert és elfogadott illeszkedésmutatóval, mint a klasszikus esetben az R^2 — két alternatív „kontrollmodell" becslésével alapoztam meg a modell számszerűsítését. A „klasszikus", normális eloszlású modell mellett annak a keresztmetszeti modellezésben elterjedt módosítását is becsültem. Ez a módosítás a heteroszkedaszticitás egy egyszerű összefüggését tartalmazta: feltételeztem, hogy a hibatag szórásnégyzete nem azonos a teljes mintán, hanem a vállalat nagyságát reprezentáló termeléstől lineárisan függő változó:

$$\sigma_t^2 = \delta Q_t \,. \tag{16}$$

A becslésről előre kell bocsátani, hogy a klasszikus modell illeszkedése elfogadhatónak bizonyult, $R^2 = 0.949$. *Modellválasztási kritériumként a minta likelihood függvényének logaritmusát használtam.* Ez az érték (amelynek abszolút nagysága nem értelmezhető) non-nested modelleknél is közvetlenül összevethető akkor, ha (mint esetünkben, s ennek érdekében nem hagytam el a nullától nem szignifikánsan különböző együtthatójú változókat) a paraméterek száma megegyezik. A három modell becslése a következő eredményre vezetett (a szokásossal analóg feírással, zárójelben a becsült t–statisztikák szerepelnek):

Inverz Gauss eloszlású modell

BJKTS = -0.035 DECENTR -0.145 TERÜLET +0.033 PRODAR +0.170 ÖSZTÖNÖZ +18.722
(-12.21) (-1.43) (11.36) (14.91) (5.39)

log-likelihood érték = -338.28 $\tau = 0.096$

Klasszikus normális modell

BJKTS = 0.031 DECENTR -0.203 TERÜLET +0.024 PRODAR +0.186 ÖSZTÖNÖZ +26.289
(5.92) (-1.22) (5.20) (9.45) (3.26)

log-likelihood érték = -341.17 $\sigma^2 = 151.361$

Heterokedasztikus normális eloszlás

BJKTS = -0.031 DECENTR -0.236 TERÜLET +0.025 PRODAR +0.187 ÖSZTÖNÖZ +20.151
(-50.79) (-8.23) (58.85) (80.70) (26.97)

log-likelihood érték = -338.34 $\tau = 1.083$

(17)

A különböző becsléseket összehasonlítva néhány érdekes különbségre érdemes felhívni a figyelmet. A területi koncentráció (két modell szerint) nem gyakorol szignifikáns hatást a béralakulásra, a heteroszkedasztikus modell azonban ezt nem szűri ki. A szervezeti decentralizáció hatását vizsgálva viszont a klasszikus modell vezet furcsa, előzetes várakozásunkkal ellentétes eredményre: a paraméter pozitiív előjele közgazdaságilag nehezen indokolható.

Mindhárom modell egységes azonban a fizikai és szellemi munkások arányának hatását illetően. A bérköltséget a fizikaiak aránya növeli, azaz az építőipari cégeknél vannak a munkaszervezésben, a technológiai és munkafegyelemben nem-fizikai dolgozók alkalmazásával kihasználható tartalékok.

Érdemes végül rámutatni, hogy a modellválasztási kritérium az inverz Gauss eloszlású modellt mutatta ki legjobbnak. A modell használata mellett elsősorban jobb elméleti megalapozottsága és az szól, hogy nem vezet „furcsa" eredményekre, mint a két másik modell. Ugyanakkor a statisztikai modellválasztási kritérium is összhangban van ezzel az értékítélettel.

(Beérkezett: 1988. július 1-én.)

Irodalom

DOBSDON, A.J. (1983): *An introduction to statistical modelling.* Chapman & Hall, London, New York.

ÉLTETŐ Ö. és VITA L. (1981): Jövedelemeloszlások közelítése és prognosztizálása. *Szigma,* XV., pp. 15–39.

FALUSNÉ SZIKRA K. (1977): A munka szerinti elosztás értelmezésének néhány kérdése. *Közgazdasági Szemle,* XXIV. pp. 1–11.

GNYEGYENKO, B.V. és KOMOGOROV, A.N. (1951): *Független valószínűségi változók összegeinek határeloszlásai.* Akadémiai Könyvkiadó, Budapest.

JACQUEMIN, A.P. és de JONG, H.W. (1981): *Európai ipari szervezet.* Közgazdasági és Jogi Könyvkidó, Budapest.

KALMAN, R.E. (1981): System identification of noisy data. *Conference Paper, International Symposium on Dynamical Systems,* 25.02.1981.

KARLIN, S. és TAYLOR, H.M. (1985): *Sztochasztikus folyamatok.* Gondolat Könyvkiadó, Budapest.

KORNAI J. (1980): *A hiány.* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

KOVÁCS S. (1981): Szervezettípusok. *Fejezetek a szervezetelemzés és szervezetfejlesztés témaköréből.* Szerkesztő: MÁRIÁS A. Kézirat. Tankönyvkiadó, Budapest.

MCGUIRE, J.W. (1971): *A vállalkozási magatartás elméletei.* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

NELDER, J.A. és WEDDERBURN, R.W.M. (1972): Generalized linear models. *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. A,* 135, 370–384.

RÉNYI A. (1960): On the central limit theorem for the sum of a random number of independent random variables. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae,* 11, 97–102.

SIMON, H.E. (1981): *Korlátozott racionalitás. Válogatott tanulmányok.* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

TÉTÉNYI T. (1986): Vállalati szervezet és működés az építőiparban. Esettanulmány-tervezet. *Kézirat.* Országos Tervhivatal Tervgazdasági Intézete, Budapest, 1885/XVIII/87.

TÉTÉNYI T. (1987): A vállalati működés ökonometriai modellje. *Munkaanyag.* Országos Tervhivatal Tervgazdasági Intézete, Budapest, 11922/XVIII/87.

Econometrics of the Incentive Pay: Model and Reality

In this article the author examines the Hungarian firms' management of the labour force, especially its effect on the wage bill. The analysis starts from a microeconomic point of view, trying to deduce and quantify short-term consequences of the firms' behaviour. The statistically observable and estimable model of labour force management is based on the task wage system, common amongst Hungarian construction firms. A statistical relation can be formulated, showing that the distribution of the company's wage bill, conditional on variables describing the firm's environment, can only be inverse Gaussian. This model is transformed into a Generalized Linear Model and unknown parameters are estimated using iteratively reweighted least squares' method over data of Hungarian construction firms. The theoretical background and the statistical evidence both support the model thus developed.

Szigma, XX. (1987-88) 4. sz.

DOBOS IMRE

A nyílt, dinamikus Leontief-modell szingularitási problémája[1]

1. Bevezetés

A Leontief-féle dinamikus input-output modell a termelés és a termelő felhasználás kapcsolatát az

$$x(t) = Ax(t) + B[x(t+1) - x(t)] + d(t) \tag{1}$$

elsőrendű differenciaegyenlet-rendszerrel írja le, ahol $x(t)$ a bruttó kibocsátások, $d(t)$ a (beruházás nélküli) végső felhasználás n-dimenziós nemnegatív vektora, A a folyó ráfordítások, B a tőkelekötési koefficiensek nemnegatív $n \times n$-es mátrixa. Az A és B mátrixok időben állandóak. Az (1) rendszert a $t = 0, 1, \ldots, T-1$ időperiódusban vizsgálva a végső felhasználások egy meghatározott halmazán a teljes kibocsátások idősorát az $\{x(t)\}_{t=0}^{T}$ megoldást az (1) egyenletrendszer trajektóriájának nevezzük.

A Leontief-modell trajektóriája rekurzívan kifejezhető, ha a B-mátrix nemszinguláris, vagyis invertálható. A B tőkelekötési mátrix azonban az esetek nagy részében nem invertálható. A B-mátrix értelmezésénél két egymástól eltérő felfogást különböztethetünk meg. Az első ([1], [4], [5], [6]) a tőkelekötések mátrixát *beruházási* mátrixnak tekinti. Ez esetben a gazdaságban lesznek olyan szektorok, amelyek nem állítanak elő beruházási javakat, vagyis a beruházási mátrixnak lesznek 0 elemekből álló sorvektorai. A másik értelmezés esetén ([2]) a B mátrix az egységnyi termelésnövekedéshez szükséges *készletlekötést* jelzi, tehát készletmátrixnak nevezhetjük. A B mátrixnak ez utóbbi értélmezése nyilván bővebb, mintha beruházási mátrixnak tekintenénk, azonban most sem zárható ki, hogy a B mátrix szinguláris legyen.

A szinguláris tőkemátrixú Leontief-modelleket más-más szerzők külöböző pótlólagos feltételek bevezetésével teszik rekurzívvá. Írásomban ezen eljárásokat tekintem át, és bizonyítom, hogy az említett írásokban felhasznált látszólag külöböző feltételek ekvivalensek. Az általam használt megközelítés a mátrixseregek kanonikus alakjára támszkodva alkalmat ad arra is, hogy az input-output modell irányítási problémáit közvetlen módon tárgyaljam. Mindkét kérdés (rekurzívvá tétel és irányíthatóság) tárgyalásához a reguláris mátrixseregek elméletét használom fel.

---

[1] A cikk az MTA-Soros Alapítvány által támogatott, 1986. május 25-27. között Sopronban megrendezett II. Fiatal Matematikus-közgazdászok Találkozóján elhangzott előadás alapján készült.

Definició: A C és D kvadratikus mátrixok reguláris mátrixsereget határoznak meg, ha létezik olyan λ valós szám, hogy a $\lambda C + D$ mátrix nemszinguláris.

A vizsgált modell esetében ez annyit jelent, hogy ha az A folyó ráfordítási mátrixnak létezik Leontief-inverze, akkor a dinamikus input-output modell B és $(E - A + B)$ mátrixai reguláris mátrixsereget határoznak meg. Ugyanis a

$$\lambda B - (E - A + B) = (\lambda - 1)B - (E - A)$$

azonosságból következik, hogy ha a $\lambda = 1$ teljesül, akkor a Leontief-féle inverz létezése miatt említett mátrixaink valóban reguláris mátrixsereget határoznak meg.

E fogalom segítségével rekurzívvá téve az (1) modellt, az így adódó trajektóriáról megmutatjuk, hogy az input-output modell teljesen vezérelhető, ha a felhasználások vektorait vesszük szabályozó változóknak.

2. A Leontief-modell $\{B, (E - A + B)\}$ mátrixainak kanonikus alakja

A bevezetésben megmutattuk, hogy a Leontief-modell B és $(E - A + B)$ mátrixai reguláris mátrixsereget alkotnak. Ennek ismeretében meghatározzuk a rendszert mátrixainak általánosított sajátértékét és jobb-, illetve baloldali sajátvektorait. (Az átalakítások megegyeznek a [3]-ban és [8]-ban szereplőkkel).

Az első lépésben a $\lambda B - (E - A + B)$ alakból indulunk ki. Ezen mátrixon hajtunk végre néhány átalakítást:

$$\lambda B - (E - A + B) = (\lambda - 1)B - (E - A) = (E - A)[(\lambda - 1)(E - A)^{-1}B - E]. \quad (2)$$

Az (1) egyenlőségben az $(E - A)$ mátrixot azért emelhettük ki, mert a Leontief-modell A mátrixáról feltételezzük, hogy produktív, vagyis domináns sajátértéke 1-nél kisebb, tehát invertálható. Meg kell jegyeznünk, hogy az $(E - A)$ mátrixot jobbra is kiemelhettük volna, azonban ez a további átalakításokat nem befolyásolja.

A második lépésben az $(E - A)^{-1}B$ mátrix nulla és nemnulla sajátértékeit különítjük el hasonlósági transzformációval. Ezzel az (1)-et folytatva a következőket kapjuk:

$$(E - A)\left[(\lambda - 1)(E - A)^{-1}B - E\right] = (E - A)U^{-1}\left[(\lambda - 1)\begin{pmatrix} H_p - E & 0 \\ 0 & H_{n-p} - E \end{pmatrix}\right]U =$$

$$= (E - A)U^{-1}\begin{pmatrix} (\lambda - 1)H_p - E & 0 \\ 0 & (\lambda - 1)H_{n-p} - E \end{pmatrix}U, \quad (3)$$

ahol a H_p mátrix a 0 sajátértékhez tartozó $p \times p$-s Jordan–blokkot, míg a H_{n-p} az $(E-A)^{-1}B$ mátrix nemnulla sajátértékeihez tartozó $(n-p) \times (n-p)$-s Jordan-blokkot jelöli. Az U mátrix az $(E-A)^{-1}B$ mátrix baloldali, az U^{-1} a jobboldali sajátvektorait tartalmazó hasonlósági transzformáció mátrixa és teljesül az

$$U(E-A)^{-1}BU^{-1} = \begin{pmatrix} H_p & 0 \\ 0 & H_{n-p} \end{pmatrix} \tag{4}$$

azonosság is.

A következő lépésben azt az észrevételt használjuk ki, hogy a $(H_p + E)$ és a H_{n-p} mátrixok nemszingulárisak, így invertálhatóak. Ezzel a megfigyeléssel a (2) azonosságot a

$$\begin{aligned} &(E-A)U^{-1}\begin{pmatrix} \lambda H_p - (H_p+E) & 0 \\ 0 & \lambda H_{n-p} - (H_{n-p}+E) \end{pmatrix} U = \\ &= (E-A)U^{-1}\begin{pmatrix} H_p+E & 0 \\ 0 & H_{n-p} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda(H_p+E)^{-1}H_p - E & 0 \\ 0 & \lambda E - (E+H_{n-p}^{-1}) \end{pmatrix} U \end{aligned} \tag{5}$$

formában írhatjuk fel.

Az utolsó lépésben a $(H_p + E)^{-1}H_p$ maga is nilpotens mátrix, így

$$(H_p + E)^{-1}H_p = V_p\langle N_{\alpha_i}\rangle V_p^{-1} ,$$

ahol V_p az említett hasonlósági transzformáció, és $\langle N_{\alpha_i}\rangle$ olyan nilpotens mátrix, amelynek „átlóbeli" blokkjai N_{α_i} Jordan–féle mátrixok $(\Sigma_i \alpha_i = p)$. Az $(E + H_{n-p}^{-1})$ mátrixot a V_{n-p} hasonlósági transzformációval az

$$(E + H_{n-p}^{-1}) = V_{n-p} < \langle \lambda_j E_{\beta_j} + N_{\beta_j}\rangle V_{n-p}^{-1}$$

alakra hozhatjuk, ahol $\langle \lambda_j E_{\beta_j} + N_{\beta_j}\rangle$ mátrix átlóbeli elemei a $\lambda_j E_{\beta_j} + N_{\beta_j}$ mátrixok $(\Sigma_j \beta_j = (n-p))$. Ennek ismeretében a (4) egyenlőséget írhatjuk

$$\begin{aligned} &\lambda B - (E - A + B) = (E-A)U^{-1}\begin{pmatrix} H_p + E & 0 \\ 0 & H_{n-p} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_p & 0 \\ 0 & V_{n-p} \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \langle \lambda N_{\alpha_i} - E_{\alpha_i}\rangle & 0 \\ 0 & \langle(\lambda - \lambda_j)E_{\beta_j} - N_{\beta_j}\rangle \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_p^{-1} & 0 \\ 0 & V_{n-p}^{-1} \end{pmatrix} U \end{aligned} \tag{6}$$

alakban is. Ezzel sikerült a Leontief-modell $[B, (E - A + B)]$ mátrixait kanonikus alakra hoznunk.

Ha bevezetünk néhány új jelölést, akkor az (5) kifejezés áttekinthetőbbé válik:

$$P = (E - A)U^{-1} \begin{pmatrix} H_p + E & 0 \\ 0 & H_{n-p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_p & 0 \\ 0 & V_{n-p} \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} V_p^{-1} & 0 \\ 0 & V_{n-p}^{-1} \end{pmatrix} U,$$

valamint

$$N = \langle N_{\alpha_i} \rangle,$$

$$\Lambda = \langle \lambda_j E_{\beta_j} + N_{\beta_j} \rangle.$$

Ekkor az (5) legegyszerűbb alakja a

$$\lambda B - (E - A + B) = P \left[\lambda \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix} \right] Q \tag{7}$$

formává egyszerűsödik.

Az általánosított sajátértékeket a Λ mátrix diagonális elemei tartalmazzák, ugyanis ha $\lambda = \lambda_j$ helyettesítéssel élünk, akkor a $\lambda B - (E - A + B)$ mátrix szinguláris, így a

$$\{\lambda B - (E - A + B)\} x = 0 \tag{8}$$

általánosított sajátérték-feladatnak létezik megoldása. (Természetesen a P és Q mátrixaink nemszingulárisak, így a (7) egyenletrendszer megoldhatósága csak a (6) jobboldalán álló kifejezés középső mátrixától függ.)

A (6) és (7) kifejezések összevetéséből világossá válik, hogy a (7) sajátérték feladat megoldásainak száma nem lehet egyenlő a B és az $(E - A + B)$ kvadratikus mátrixok méretével, hanem annál kisebb. Ez azt jelenti, hogy a (7) egyenletrendszerből származtatott

$$(\lambda - 1)(E - A)^{-1} B x = x \tag{9}$$

sajátértékegyenletnek nem lehet n darab szokásosan az

$$\frac{1}{\lambda - 1} x = (E - A)^{-1} B x \tag{10}$$

egyenletből számított megoldása, hanem annál csak kevesebb. Ennek az a következménye, hogy a (7) sajátértékfeladat (9)-re történő redukálása csak hibával történhet, ugyanis a (9) egyenlet sajátvektorai a (2) azonosságban alkalmazott U és U^{-1} mátrixszal egyeznek meg.

Végül néhány olyan átalakítást teszünk, amelyekre a továbbiakban támaszkodunk. A (6)-ból következik:

$$\begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} = P^{-1}BQ^{-1}, \quad \text{és} \tag{11}$$

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix} = P^{-1}(E - A + B)Q^{-1}. \tag{12}$$

Tegyük fel, hogy ismerjük az N nilpotens mátrix nilpotenciafokát: $\tau = \min\{t | N^T = 0\}$.

3. A reguláris mátrixseregek segítségével nyert megoldás hatóköre

A Leontief-modell mátrixainak reguláris mátrixseregként történő értelmezésével a rendszer mátrixai kanonikus alakra hozhatók. Ennek segítségével a

$$\begin{aligned} &Bx(t+1) = (E - A + B)x(t) - d(t), \quad t = 0, 1, ..., T-1 \\ &x(0) \in \mathbf{R}_n^+ \end{aligned} \tag{13}$$

lineáris differenciaegyenlet-rendszer rekurzívvá tehető. Azt is megmutatjuk, hogy a B mátrix konkrét alakjától függetlenül mindig előállítható az $\{x(t)\}_{t=0}^T$ trajektória, amennyiben a végső felhasználások vektorait a $(T + \tau - 1)$ időperiódusban ismerjük, vagyis ha a $\{d(t)\}_{t=0}^{T+\tau-1}$ idősor adott. Kimutatom továbbá, hogy a τ érték az $(E - A)^{-1}B$ mátrix 0 sajátértékének minimálpolinombeli multiplicitása.

Végül néhány speciális esetet mutatok be. Először a végső felhasználást időben állandónak tekintem, vagyis feltételezem, hogy a $d(t) = d > 0$ egyenlőség teljesül a vizsgált $t = 0, \ldots, T + \tau - 1$ időhorizonton. Majd egy olyan esetet vizsgálok, ahol a τ érték éppen eggyel egyenlő. Ebben az esetben megmutatom, hogy a dinamikus input-output modell tőkelekötési mátrixának beruházási mátrixként való értelmezése, és egy speciális regularitási feltétel felállítása szükséges a rekurzivitás biztosításához.

3.1. A differenciaegyenlet-rendszer megoldása

A (2) differenciaegyenlet-rendszer megoldásához a (11) és a (12) összefüggéseit fogjuk felhasználni. Ezzel a differenciaegyenlet-rendszer a következő formát veszi fel:

$$P^{-1}BQ^{-1}[Qx(t+1)] = P^{-1}(E - A + B)Q^{-1}[Qx(t)] - P^{-1}d(t), \tag{14}$$

amit írhatunk az

$$\begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} [Qx(t+1)] = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix} [Qx(t)] - P^{-1}d(t) \tag{15}$$

formában is.

A $Qx(t)$ vektort particionáljuk úgy, hogy a mátrixokkal történő szorzás elvégezhető legyen:

$$Qx(t) = \begin{pmatrix} (Qx(t))_1 \\ (Qx(t))_2 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Ugyanígy bontsuk szét a $P^{-1}d(t)$ vektort is:

$$P^{-1}d(t) = \begin{pmatrix} (P^{-1}d(t))_1 \\ (P^{-1}d(t))_2 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

A (16) és (17) azonosság segítségével két egymástól független egyenletrendszerre esik szét a (15) rendszer:

$$\begin{aligned} N(Qx(t+1))_1 &= (Qx(t))_1 - (P^{-1}d(t))_1 \\ (Qx(t+1))_2 &= \Lambda(Qx(t))_2 - (P^{-1}d(t))_2 . \end{aligned} \tag{18}$$

A (18) rendszer első típusú egyenletrendszerének megoldásához felhasználhatjuk, hogy az N mátrix τ nilpotenciafokú nilpotens mátrix. A megoldást időben „visszafelé" haladva állítjuk elő a következőképpen:

$$\begin{aligned} 0 &= N^{\tau}(Qx(t+\tau))_1 = N^{\tau-1}[N(Qx(t+\tau))_1] = \\ &= N^{\tau-1}\left[(Qx(t+\tau-1))_1 - (P^{-1}d(t+\tau-1))_1\right] = \\ &= N^{\tau-1}(Qx(t+\tau-1))_1 - N^{\tau-1}(P^{-1}d(t+\tau-1))_1 = \ldots \\ \ldots &= (Qx(t))_1 - \sum_{i=0}^{\tau-1} N^i(P^{-1}d(t+i))_1 , \end{aligned}$$

ami azt jelenti, hogy

$$(Qx(t))_1 = \sum_{i=0}^{\tau-1} N^i(P^{-1}d(t+i))_1 . \tag{19}$$

A (19) megoldása a (18) rendszer első egyenletrendszerének azt mutatja, hogy az (1) egyenletrendszernek *akkor és csakis akkor* lehet előállítani a megoldását, ha végső felhasználások vektorait a vizsgált időszakot követő periódusban ismerjük. A (13) megoldása ennek ismeretében:

$$\begin{aligned} Qx(t+1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix} Qx(t) + \sum_{i=0}^{\tau-1} \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^i P^{-1}d(t+1+i) - \\ - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} P^{-1}d(t), \end{aligned} \tag{20}$$

az invertálás elvégzése után a rekurzív formánk

$$
\begin{aligned}
x(t+1) = & \left\{ Q^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix} Q \right\} x(t) + \\
& + \sum_{i=0}^{\tau-1} \left\{ Q^{-1} \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{i} P^{-1} \right\} d(t+1+i) - \\
& - \left\{ Q^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} P^{-1} \right\} d(t)
\end{aligned} \tag{21}
$$

alakú lesz.

Az egész rendszer megoldását felírhatjuk a 0-adik időszak teljes kibocsátása ismeretében is:

$$
\begin{aligned}
x(t) = & \left\{ Q^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix}^{t} Q \right\} x(0) + \sum_{i=0}^{\tau-1} \left\{ Q^{-1} \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{i} P^{-1} \right\} d(t+i) - \\
& - \sum_{j=0}^{t-1} \left\{ Q^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix}^{t-1-j} P^{-1} \right\} d(j) .
\end{aligned} \tag{22}
$$

Ezzel előállítottuk a differenciaegyenlet-rendszerünk végső felhasználásától függő trajektóriáját.

A trajektória előállítása után azzal foglalkozunk, hogy az A folyó ráfordítások és a B tőkelekötési mátrixok ismeretében hogyan lehet a legegyszerűbben meghatározni azt, hogy mennyi időszakra előre kell ismernünk a végső felhasználások vektorait. Ezt érdemes az alapmátrixaink ismeretében tudni azért, mert az a teljes kanonikus alakra hozás nélkül is megállapítható.

Állítás: A τ érték az $(E-A)^{-1}B$ mátrix 0 sajátértékének algebrai multiplicitásával egyezik meg.

Bizonyítás: A (4) azonosságból indulunk ki:

$$
U(E-A)^{-1}BU^{-1} = \begin{pmatrix} H_p & 0 \\ 0 & H_{n-p} \end{pmatrix} .
$$

Ebben a kifejezésben H_p a Jordan-blokkból álló mátrix és a 0 sajátértékhez tartozik, ami nilpotens.

A kanonikus alaknál azt kaptuk, hogy $N^{\tau} = 0$, valamint azt is tudjuk, hogy

$$
(H_p + E)^{-1} H_p = V_p N V_p^{-1} ,
$$

vagyis

$$[(H_p + E)^{-1} H_p]^\tau = V_p N^\tau V_p^{-1} = 0 .$$

Használjuk most fel azt az összefüggést, hogy nilpotens mátrixokra teljesül:

$$(E + H_p)^{-1} = E - H_p + H_p^2 - \dots (-1)^{p-1} H_p^{p-1} = \sum_{i=1}^{p} H_p^{i-1} (-1)^{i-1} .$$

Ebből az azonosságból következik:

$$[(E + H_p)^{-1} H_p]^\tau = \left[\sum_{i=1}^{p} H_p^i (-1)^{i-1} H_p \right]^\tau = 0 .$$

A fenti egyenletrendszerre alkalmazva a polinomiális tételt, a H_p mátrix kitevőire azt kapjuk, hogy τ-nál nem kisebb, amivel igazoltuk állításunkat.

3.2. Időben állandó végső felhasználás

Ha a végső felhasználás időben változatlan ($d(t) = d$), akkor a (9) megoldás a következő formában írható:

$$x(t) = \left\{ Q^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix}^t Q \right\} x(0) + \sum_{i=0}^{\tau-1} \left\{ Q^{-1} \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^i P^{-1} \right\} d - \tag{23}$$

$$- \sum_{j=0}^{t-1} \left\{ Q^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix}^{t-1-j} P^{-1} \right\} d .$$

Egyszerű algebrai átalakításokkal, felhasználva a

$$\sum_{i=0}^{\tau-1} N^i = (E - N)^{-1} \text{, valamint a}$$

$$\sum_{j=0}^{t-1} \Lambda^{t-j-1} = (E - \Lambda)^{-1} - \Lambda^t (E - \Lambda)^{-1}$$

azonosságokat, az alábbi kifejezést nyerjük:

$$x(t) = \left\{ Q^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix}^t \right\} \left\{ Q x(0) + \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & (E - \Lambda)^{-1} \end{pmatrix} P^{-1} d \right\} +$$

$$+ \left\{ Q^{-1} \begin{pmatrix} (E - N)^{-1} & 0 \\ 0 & -(E - \Lambda)^{-1} \end{pmatrix} P^{-1} \right\} d .$$

A jobboldal másik zárójeles kifejezése éppen egyenlő az $(E-A)^{-1}d$ kifejezéssel, ami éppen a d végső felhasználás folyó ráfordítás igénye (ld. 2. fejezet (11) és (12) összefüggéseit). A teljes megoldás ennek segítségével az

$$x(t)=\left\{Q^{-1}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \Lambda\end{pmatrix}^{t}\right\}\left\{Qx(0)+\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & (E-\Lambda)^{-1}\end{pmatrix}P^{-1}d\right\}+ \\ +(E-A)^{-1}d \tag{24}$$

formává alakítható.

A (24)-et úgy interpretálhatjuk, hogy konstans végső fogyasztás mellett a t-edik évi bruttó kibocsátás két részre oszlik. Az egyik rész úgy fogható fel, mint a d végső felhasználás ráfordítás igénye abban az esetben, ha nem lenne tőkelekötés $((E-A)^{-1}d)$, míg a másik rész az a teljes termelési rész, amely a tőkenövekedéshez szükséges

$$\left(\left\{Q^{-1}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \Lambda\end{pmatrix}^{t}\right\}\left\{Qx(0)+\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & (E-\Lambda)^{-1}\end{pmatrix}P^{-1}d\right\}\right).$$

3.3. A $\tau=1$ eset

Amíg az előző részben egy olyan esetet mutattunk be, amikor a végső felhasználásra tettünk megszorító feltevést, most a rendszer A és B mátrixára együttesen érvényes feltételezéssel élünk. Az input–output modellek ezen osztályába tartozik az a modellforma, amikor a tőkelekötés mátrixát beruházási mátrixként értelmezzük, és teljesül az ismertetésre kerülő regularitási feltétel. A modell megoldása ebben az esetben az

$$x(t+1)=\left\{Q^{-1}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \Lambda\end{pmatrix}Q\right\}x(t)+\left\{Q^{-1}\begin{pmatrix}N & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1}\right\}d(t+1)- \\ -\left\{Q^{-1}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & E\end{pmatrix}P^{-1}\right\}d(t)$$

formát veszi fel.

A továbbiakban megmutatjuk, hogy ha a Leontief-modell mátrixaira teljesül, hogy az

$$x(t)=\begin{pmatrix}A_1\\ A_2\end{pmatrix}x(t)+\begin{pmatrix}B_1\\ 0\end{pmatrix}[x(t+1)-x(t)]+\begin{pmatrix}d_1(t)\\ d_2(t)\end{pmatrix}$$

modellformában a

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ (E-A)_2 \end{pmatrix}$$

kvadratikus mátrix nemszinguláris, akkor a τ értéke éppen egy. Ennek belátásával az is igazolható, hogy az [1], [4], [5], [6] modellek egymással ekvivalensek, és a fenti explicit módon kimondott regularitási feltételre támaszkodnak.

Az igazolást az [5] dolgozat jelöléseivel végezzük el. Ekkor

$$B = \begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (E - A + B) = \begin{pmatrix} G \\ H \end{pmatrix},$$

valamint a $\begin{pmatrix} T \\ H \end{pmatrix}$ mátrix nemszinguláris, és az inverze az $[E, F]$ mátrix. A bizonyításhoz a *2. fejezet* (kanonikus alakká redukálás) gondolatmenetét követjük, azonban míg ott balra emeltük ki az $(E - A)$ mátrixot, most ezt a jobb oldalra történő kiemeléssel végezzük el:

$$\lambda \begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} G \\ H \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B_1 + T \\ H \end{pmatrix} = (\lambda - 1) \begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} G_1 \\ H \end{pmatrix}.$$

Ebben az esetben $\begin{pmatrix} G_1 \\ H \end{pmatrix} = (E - A)$, amely feltételünk szerint invertálható. Legyen $\begin{pmatrix} G_1 \\ H \end{pmatrix}^{-1} = [\bar{B}, C]$, ahol $\bar{B}$-nek annyi oszlopa van, mint amennyi sora a T mátrixnak. Ekkor

$$\begin{aligned} (\lambda - 1) \begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} G_1 \\ H \end{pmatrix} &= \left\{ (\lambda - 1) \begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} G_1 \\ H \end{pmatrix} \right\} [\bar{B}, C] \begin{pmatrix} G_1 \\ H \end{pmatrix} = \\ &= \left\{ (\lambda - 1) \begin{pmatrix} T\bar{B} & TC \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - E \right\} \begin{pmatrix} G_1 \\ H \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{25}$$

Már csak azt kell belátnunk, hogy a $T\bar{B}$ mátrix nemszinguláris. Ehhez használjuk fel a *regularitási feltételt*, vagyis a $\begin{pmatrix} T \\ H \end{pmatrix}$ mátrix invertálhatóságát. Ezesetben a

$$\begin{pmatrix} G_1 \\ H \end{pmatrix} [\bar{B}, C] = \begin{pmatrix} G_1\bar{B} & G_1C \\ H\bar{B} & HC \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

egyenlőségek felhasználásával teljesül a

$$\begin{pmatrix} T \\ H \end{pmatrix} [\bar{B}, C] = \begin{pmatrix} T\bar{B} & TC \\ H\bar{B} & HC \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T\bar{B} & TC \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

mátrixegyenlet, amiből már következik, hogy a $T\bar{B}$ mátrix invertálható, tehát nincs 0 sajátértéke.

Most belátjuk, hogy a

$$\begin{pmatrix} T\bar{B} & TC \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix megfelelő hasonlósági transzformációval kvázidiagonális alakra hozható. Igazolásunk konstruktív lesz. Legyen a hasonlósági transzformáció mátrixa

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ 0 & E \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} M_1^{-1} & -M_1^{-1}M_2 \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

Ennek felhasználásával

$$\begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T\bar{B} & TC \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_1^{-1} & -M_1^{-1}M_2 \\ 0 & E \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} M_1(T\bar{B})M_1^{-1} & M_1(TC) - M_1(T\bar{B})M_1^{-1}M_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

azonosság teljesül, valamint ismert, hogy a $T\bar{B}$ mátrix reguláris, ahonnan következik, hogy

$$M_2 = \left[M_1(T\bar{B})^{-1}\right] M_1(TC).$$

Amennyiben az M_1 mátrix a $(T\bar{B})$ mátrixnak hasonlósági transzformációja, akkor az előbbi M_2 mátrix is megszerkeszthető.

Visszatérve az (5) egyenlőséghez, valamint az $M_1(T\bar{B})M_1^{-1} = \Lambda$ kifejezést használva:

$$\left\{(\lambda-1)\begin{pmatrix} T\bar{B} & TC \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - E\right\}\begin{pmatrix} G_1 \\ H \end{pmatrix} = M\left\{(\lambda-1)\begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - E\right\}M^{-1}\begin{pmatrix} G_1 \\ H \end{pmatrix} =$$

$$= M\left\{\lambda\begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} E+\Lambda & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}\right\}M^{-1}\begin{pmatrix} G_1 \\ H \end{pmatrix} =$$

$$= M\begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}\left\{\lambda\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Lambda^{-1}+E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}\right\}M^{-1}\begin{pmatrix} G_1 \\ H \end{pmatrix}.$$

Végül nem maradt más hátra, mint a $(\Lambda^{-1} + E)$ mátrixot egy hasonlósági transzformációval kanonikus alakra redukálni, tehát

$$\lambda\begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} G \\ H \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_{n-p} & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}\left\{\lambda\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} -\right.$$

$$\left. - \begin{pmatrix} \tilde{\Lambda} & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} V_{n-p}^{-1} & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}M^{-1}\begin{pmatrix} G_1 \\ H \end{pmatrix},$$

ami éppen azt jelenti, hogy a $\begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ és az $\begin{pmatrix} (E-A)_1 + B_1 \\ (E-A)_2 \end{pmatrix}$ mátrixok olyan reguláris mátrixsereget alkotnak, ahol a nilpotens blokk elsőfokú.

A következő feladatunk annak megmutatása, hogy a [4] dolgozat is lényegében az előbbi regularitási feltételt használja fel. *Livesey* modelljében a következő modellformából indul ki:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{t+1} - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_t \right\} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_t ,$$

vagyis a tőkekoefficiensek mátrixa nála a felső blokkokban tartalmaz 0 mátrixú blokkokat. A rekurzivitás feltétele itt az $(E - A_{11})$ és a

$$\Delta = B_{22} - B_{21} G_{11}^{-1} G_{12}$$

mátrix invertálhatóságán múlik, ahol

$$G = (E - A + B) = \begin{pmatrix} E - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} + B_{21} & E - A_{22} + B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} .$$

Itt azt kell bizonyítanunk, hogy a

$$\begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \tag{26}$$

mátrix invertálható.

Erről könnyen meggyőződhetünk. A feltételek szerint a $G_{11} = (E - A_{11})$ mátrix invertálható. Válasszuk tehát a (26) mátrixban, annak inverzének előállításában a G_{11} mátrixot generáló blokknak. A generálás elvégzése után a következő mátrixot kapjuk:

$$\begin{pmatrix} G_{11}^{-1} & G_{11}^{-1} G_{12} \\ -B_{21} G_{11}^{-1} & B_{22} - B_{21} G_{11}^{-1} G_{12} \end{pmatrix} . \tag{27}$$

Ahhoz, hogy a (26) mátrix invertálható legyen, az szükséges, hogy a $\Lambda = B_{22} - B_{21} G_{11}^{-1} G_{12}$ mátrix invertálható legyen, ami viszont éppen a feltétel, vagyis bizonyítottuk, hogy a két explicitté tétel ugyanazon a feltételezésen alapszik.

4. A Leontief-modell irányíthatóságáról

Az (1) rendszerrel kapcsolatban felmerül a kérdés, hogy ha a $\{d(t)\}$ végső felhasználást *szabályozó változóknak* tekintjük, akkor létezik-e a szabályozási vektoroknak olyan sorozata, amely tetszőleges $x(0)$ kezdő termelési szintről indítva a rendszert, egy előre megadott $\bar{x}$ pontba irányítja a bruttó kibocsátásokat, véges időhorizonton belül.

Ezzel a problémakörrel az irodalom széles körben foglalkozott ([1], [4], [7]). LIVESEY [4] cikkében bebizonyítja, hogy az általa vizsgált speciális modell irányítható. AOKI könyvében [1] ugyanakkor azt igyekszik bizonyítani, hogy az input–output modell nem irányítható, míg MIHÁLYFFY–SIMONOVITS [7] cikkükben helyesen állapítják meg, hogy a Leontief-modell irányítható, bizonyításuk azonban pontatlan.

Térjünk ki röviden a [7] cikk pontatlanságára. A dolgozat *1. tétele* mondja ki a dinamikus input–output modell irányíthatóságát, azonban a bizonyítás nem helyes. A bizonyításukban a szerzők kiválasztják az $\bar{x}$ végállapotot és választanak hozzá egy $\{x(t)\}_{t=1}^{T-1}$ $(T \geq 1)$ sorozatot, amely az $x(0)$ kezdeti állapotból indítja a rendszert és $x(T) = \bar{x}$ pontba juttatja. A szabályozó változókra a

$$d(t) = x(t) - Ax(t) - B[x(t+1) - x(t)]$$

egy-egy értelmű megfeleltetés teljesül, amelyikben a bruttó kibocsátások adottak. Ha a fenti egyenlőséget a

$$Bx(t+1) = (E - A + B)x(t) - d(t)$$

alakban írjuk és feltételezzük, hogy a $\{d(t)\}_{t=0}^{T-1}$ sorozatot már kiszámítottuk, akkor a végállapotra a

$$B\bar{x} = (E - A + B)x(T-1) - d(T-1)$$

azonosság teljesül. Ebben az egyenlőségben az $x(T-1)$ és $d(T-1)$ vektorok explicit módon adottak. Mivel a B mátrix szinguláris, ezért az $\bar{x}$-re egy lineáris egyenletrendszert definiál, amelynek megoldása egy partikuláris megoldásból és a B mátrix magteréből áll. Ez azt jelenti, hogy bárhogyan is adjuk meg a $d(T-1)$ vektort, az az $\bar{x}$ vektorra egy *végtelen halmazt* határoz meg, tehát a $\{d(t)\}_{t=0}^{T-1}$ sorozat nem juttatja a rendszert a kívánt pontba, hanem egy olyan halmazt jelöl ki, amelynek eleme az $\bar{x}$ vektor.

Vegyük most vizsgálat alá AOKI könyvét [1]. *Aoki* könyvének 31–33. oldalán rekurzívvá teszi a dinamikus Leontief-modellt, majd ennek eredményeire való hivatkozással a 86–87 oldalon kimondja, hogy a modell nem irányítható. Időzzünk el a rekurzívvá tételnél.

Aoki könyve 32. oldalának (E3) képletét több szerző is megkapta pl. [6], sőt nála is ugyanaz a regularitási feltétel szerepel, mint a [4], [5], [6] cikkekben, vagyis a $B - T_2(E-A)$ mátrix reguláris. A hibát *Aoki* azzal követi el, hogy bevezeti az új z_t változót, amely

$$z_t = [B - T_2(E-A)]\,q_t + T_2 d_t$$

formában áll elő. Számítsuk most ki a z_t vektort a particionálás és a beszorzás segítségével:

$$z_t = \begin{pmatrix} z_t^1 \\ z_t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ A_{21} & -(E-A_{22}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_t^1 \\ q_t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ d_t^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} B_{11}q_t^1 + B_{12}q_t^2 \\ A_{21}q_t^1 - (E-A_{22})q_t^2 + d_t^2 \end{pmatrix}.$$

Ebben a kifejezésben az

$$A_{21}q_t^1 - (E-A_{22})q_t^2 + d_t^2 = 0$$

azonosság teljesül, amely az (E1) képletből következik. Ez azt jelenti, hogy

$$z_t = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_t^1 \\ q_t^2 \end{pmatrix} = Bq_t = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix},$$

vagyis a z_t állapotvektorok sorozata az n-dimenziós tér egy alterében vannak. (Az x egy tetszőleges nemnegatív vektor). Innen pedig következik, hogy a transzformált modellformától sem várható, hogy irányítható legyen az egész n-dimenziós térben.

A következőkben belátjuk, hogy a dinamikus input-output modell mindig irányítható. A bizonyításhoz a *3.1. fejezet* eredményeit használjuk fel.

A (18) és (19) összefüggések a következők:

$$\begin{aligned} (Qx(t+1))_1 &= \sum_{i=0}^{\tau-1} N^i (P^{-1}d(t+i))_1 \\ (Qx(t+1))_2 &= \Lambda(Qx(t))_2 - (P^{-1}d(t))_2 . \end{aligned} \tag{28}$$

Ha az elérni kívánt állapot $\bar{x}$, akkor a fenti particióban a

$$Q\bar{x} = \begin{pmatrix} (Q\bar{x})_1 \\ (Q\bar{x})_2 \end{pmatrix}$$

pontba kell irányítanunk a rendszert. Bontsuk fel két lineáris dinamikus rendszer irányíthatósági problémájára eredeti problémánkat. A (28) első egyenletrendszerének irányíthatósága teljesül, mert ha az irányítási változók transzformált $\{(P^{-1}d(t+i))_1\}_{i=0}^{\tau-1}$ változóit tekintjük a (28) új szabályozó vektorainak, akkor a rendszer irányíthatósági mátrixa a

$$[E, N, N^2, \ldots, N^{\tau-1}]$$

alakot veszi fel. Ennek a rangja p, mert tartalmazza az egységmátrixot. A (28) második egyenletrendszerében újra a $\{(P^{-1}d(t))_2\}$ vektorokat tekinthetjük szabályozási változónak. Ekkor az irányítási mátrix:

$$[E, \Lambda, \Lambda^2, \ldots, \Lambda^{n-p-1}]$$

amelynek a rangja $(n-p)$, tehát ez az alrendszer is irányítható. Ezzel beláttuk, hogy a Leontief-modell mindig irányítható.

Végül adjunk meg egy speciális szabályozósorozatot, amely adott $x(0)$ kezdőpontból az $\bar{x}$ végállapotba vezérli a rendszert. Ehhez azt használjuk fel, hogy

$$Bx(t) \leq (E - A + B)x(t-1) \tag{29}$$

teljesül. Ezt egy lineáris programozási sorozattal határozzuk meg. Másodszor az adott T időszakot követő szabályozásokat keressük meg.

(1) *A* $d(0), d(1), \ldots, d(T-1)$ *irányítások felkutatása*

A szabályozások meghatározását egy lineáris programozási feladatra és a (29) feltételre alapozzuk. Első lépésben azt kell megvizsgálni, hogy teljesül-e a

$$B\bar{x} \leq (E - A + B)x(0)$$

feltétel. Ha nem teljesül, akkor oldjuk meg a követlező feladatot:

$$F(1)\begin{cases} x(1) \geq 0, \quad \mu \geq 0 \\ Bx(1) \leq (E - A + B)x(0) \\ x(1) \leq y & (30) \\ -(E - A + B)x(1) + \mu(E - A + B)x(0) \leq 0 \\ \hline \qquad \mu \to \max\,. & (31) \end{cases}$$

Az $F(1)$ feladatban a (30) egyenlőtlenségre azért van szükségünk, mert elképzelhető, hogy a B mátrixnak van 0 oszlopvektora, amiből az következne, hogy a lehetséges megoldások halmaza nem korlátos, vagyis nem létezik az optimum (az y sokkal nagyobb x-nél). A (31) egyenlőtlenség segítségével növeljük a (29) jobboldalán lévő felső korlátot. A feladatból kiszámíthatóvá válik az irányítás is. Legyen $x^*(1)$ az (F1) feladat megoldása. Ekkor a

$$d(0) = (E - A + B)x(0) - Bx^*(1)$$

egyenlőségből a szabályozás meghatározható.

A következő lépésben tesztelnünk kell, hogy a

$$B\bar{x} \leq (E - A + B)x^*(1)$$

egyenlőtlenség teljesül-e. Ha nem teljesül, újra felírjuk az F(1) feladatnak megfelelő lineáris programozási feladatot. Ezt az eljárást elvégezhetjük az

$$F(t) \begin{cases} x(t) \geq 0\,, \quad \mu \geq 0 \\ Bx(t) \leq (E - A + B)x^*(t-1) \\ -(E - A + B)x(t) + \mu(E - A + B)x^*(t-1) \leq 0 \\ \hline \mu \to \max\,. \end{cases}$$

feladatokra is mindaddig, amíg a

$$B\bar{x} \leq (E - A + B)x^*(t) \tag{32}$$

összefüggés nem teljesül. Az első t értéket, amelyre a (32) összefüggés teljesül, $(T-1)$-gyel jelöljük. A szabályozósorozatot a

$$d(t) = (E - A + B)x^*(t) - Bx^*(t+1) \quad (t = 1, 2, \ldots, T-1)$$

szolgáltatja, ahol $x^*(T) = \bar{x}$ a végállapot.

2. A $d(T), d(T+1), \ldots, d(T+\tau-1)$ *szabályozások meghatározása*

A T időszakot követő irányítások kiszámítása már nem okoz gondot, csak a létezését mutatjuk be. Induljunk ki abból, hogy az $x(T)$ végállapot ismert. Ebből kiindulva választunk egy $x(T+1)$ állapotot a következő halmazból:

$$X(x(T)) = \{x(T+1) | (x(T+1) \geq 0) \& (Bx(T+1) \leq (E - A + B)x(T)) \& \\ \& ((E - A + B)x(T+1) \geq 0)\}\,.$$

Ha választottunk egy $x(T+1)$ vektort, akkor az irányítás a

$$d(T) = (E - A + B)x(T) - Bx(T+1)$$

összefüggésből kiszámítható. Ezt továbbfolytatva a $(T+\tau-1)$ időpontig, a szabályozás vektorok sorozata meghatározható.

Ezzel sikerült megadnunk egy irányítási vektorsorozatot, amely az előre megadott $\bar{x}$ pontba juttatja a Leontief-modellt. A megadott algoritmus eléggé számításigényes.

(Beérkezett: 1988. április 5-én.)

Irodalom

1. AOKI, M. (1976): *Optimal Control and System Theory in Dynamic Economic Analysis.* North-Holland Publ. Co. Inc.
2. BRÓDY A. (1980): *Ciklus és szabályozás.* KJK, Budapest.
3. GANTMACHER, F.R. (1967): *Teoria matric.* Nauka, Moszkva.
4. LIVESEY, D.A. (1973): The Singularity Problem in the Dynamic Input-Output Model. *Int. J. Systems Sci.*, Vol.4. No 3., 437-440.
5. LUENBERGER, D.G. - ARBEL, A. (1977): Singular Dynamic Leontief Systems. *Econometrica*, 45, 991-995.
6. MEYER, U. (1982): Why Singularity of Dynamic Leontief Systems Doesn't Matter. *Input-Output Techniques, Proceedings of the Third Hungarian Conference on Input-Output Techniques, 3-5. November 1981.* Budapest. Statistical Publishing House, 181-189.
7. MIHÁLYFFY L. - SIMONOVITS A. (1983): A dinamikus input-output modell vezérelhetőségéről. *Szigma*, 16, 165-168.
8. RÓZSA P. (1976): *Lineáris algebra és alkalmazásai.* MK, Budapest.

The Singularity Problem of the Open, Dynamic Leontief Model

The paper offers a solution for the singularity problem of the Leontief models. For recursiveness it uses the theory of regular family of matrices. With this approach the problem of singularity can be discussed in more general terms. Through recursiveness it becomes provable that the Leontief model is completely controllable, independent of the concrete form of the capital coefficient matrix B.

Szigma, XX. (1987-88) 4. sz.

BRÓDY ANDRÁS

Az orvosolhatatlan kollinearitásról*

A probléma megfogalmazása: Jeölések és definíciók

Legyen az y függő változóra vonatkozó M számú mérés (megfigyelés) az $y = (y_1, \ldots, y_M)$ vektorba rendezve, a független (magyarázó) változók értékei pedig az $X = X_{MN} = \{x_{ik}\}$ mátrixba; x_{ik} a k-adik változó i-edik — az y_i „eredmény"-hez kapcsolódó — adatát jelenti. $N < M$, így több megfigyelésünk van, mint független változónk.

Ha feltételezhetjük, hogy a függő változó az $y = Xb$ lineáris alakban állítható elő, akkor a $b = (b_1, \ldots, b_N)$ vektort a legkisebb négyzetek módszerével

$$b = (X^T X)^{-1} X^T y \tag{1}$$

alakban számíthatjuk ki, ahol T a transzpozíció jele. Ismeretes ugyanis, hogy ez a legkisebb négyzetes eltérést, vagyis az $(y - Xb)^T(y - Xb)$ skaláris szorzat minimumát adja. Erről a skaláris szorzat b szerinti deriválásával győződhetünk meg. Lásd pl. MALINVAUD (1974) VI. fejezet.

Ismeretes az is, hogy $X^T X = (X^T X)^T$ szimmetrikus, úgynevezett Gram-féle mátrix; pozitív szemidefinit, sajátértékei tehát nemnegatív valós számok. Lásd pl. GANTMACHER (1965) IX. fej. 3.§.

Definíció: A független változók rendszere akkor *multikollineáris*, ha az adatok X mátrixából képzett $X^T X$ mátrix *szinguláris*.

A gyakorlatban egzakt multikollinearitással ritkán találkozunk. A szakirodalom azonban akkor is multikollinearitásról beszél, ha az nem egzakt, ha tehát az $X^T X$ mátrix egy vagy több sajátértéke nem zérus ugyan, de igen kicsi. Ez gazdasági adatok vizsgálatakor elég gyakran bekövetkezik. Az ilyen jellegű makroökonómiai megfigyelések létrejöttének elméleti és tapasztalati okait próbáltam összefoglalni „Kószálás Logaritmiában" című tanulmányomban (BRÓDY (1985)). Arra a következtetésre jutottam, hogy Logaritmiában, ahol az összes gazdasági folyamat szigorúan exponenciálisan növekszik, csupán egyetlen nagy sajátérték fogja a mátrixot jellemezni, s ha a többi sajátérték nem pontosan zérus, akkor ez csupán a mérési hibák következménye.

---

* Köszönöm ismeretlen lektoraimnak ismételt fáradozását. Több hibát, pontatlanságot, félreérthető fogalmazást sikerült véleményük figyelembevételével kiküszöbölni. Szerettem volna teljesebben is elfogadni fenntartásaikat — de ebben meggátolt az, hogy az ökonometriában szokásos és nem vitatott alapfeltevéseket nem tudom elfogadni. Talán képes leszek az eltéréseket egy másik tanulmányban részletesebben tárgyalni.

A mérési hibák hatásának és kezelésük módjának áttekintésével *Kőrösi Gábor* kollégám foglalkozik — rövidesen a Szigma számára is feldolgozza vizsgálódását — ezért e kapcsolódó kérdéskört itt a lehetőség szerint elkerülöm és csupán a multikollinearitással kapcsolatban felmerült javaslatok ismertetésére szorítkozom.

A korai orvoslási javaslatok

A jelenségkör felfedezője és elnevezője R. FRISCH (1934). Tőle származik kezelésének első javaslata is: válogassuk ki a magyarázó változóknak azt a kombinációját, amely a lehető legkevésbé kollineáris és a lehető legjobb eredményt adja. („Bunch-maps"). Ez a szellemes eljárás a kísérleti modellépítés vezérfonalává is vált s a mai számítógépes programok rendkívül egyszerűvé és gyorssá teszik alkalmazását. Lásd pl GAUDI (1986) ismertetését a BMDP csomag P2R lépésenkénti regressziószámításáról (i.m. 361 és kö oldal).

Bár így kétségtelenül elkerülhetjük a multikollinearitás fellépését és ráadásul kitűnő vizsgálati eszközt nyerünk, a megoldás nem veszélytelen. A kiválasztás sorrendje nem egyértelmű és csak további feltételezésekkel lehet azzá tenni, hiszen tudjuk, hogy a függőség vagy függetlenség csak vektorok rendszerére és nem egyes vektorokra vonatkozó sajátosság. Hozzá kell tenni, hogy éppen az eljárás mai „automatizáltsága" növeli a téves következtetéseknek azt a veszélyét, amire már *R. Frisch* célzott, amikor például a gólyák megfigyelt számának és a gyerekszületések adatainak szoros korrelációját kiszámította. Későbbi kutatók például a rádióhallgatás „okozta" mentális betegségekre mutattak rá: itt is világosan a Logaritmiában általános „együttnövekedés" délibábos hatása jelentkezik.

A javasolt eljárás tehát elkerüli a multikollinearitás fellépését, de nem ad tanácsot arra, hogy ha az egyszer már fellépett, akkor hogyan birkózzunk meg vele. Ökonometriai szakkönyvek, vagy például W. CORLETT (1987) további adatok bevonását tanácsolták. Természetesen további magyarázó változók bevonása — az X mátrix oszlopainak szaporítása — nem javíthat a helyzeten, mert ez a mátrix szingularitását nem tudja kiküszöbölni. Lehetséges azonban, hogy a megfigyelések számának növelése, azaz X sorainak szaporítása megoldást hoz. Ha azonban — mint Logaritmia esetében — tudjuk, hogy a multikollinearitás nem a rosszul lefolytatott megfigyeléseknek, a meg nem tervezett vagy befolyásolhatatlanul adott „kísérletnek" az eredménye, hanem éppen ez a dolgok szokásos rendje, akkor további mérésektől vagy megfigyelésektől sem remélhetünk javulást.

Az utolsó évtized felgyorsult és számítógép-segítette ökonometriai kutatásai másfajta javaslatokat hoztak. Mielőtt azonban ezeket megvizsgálnánk, számoljunk végig egy ilyen ismerten beteg modellt, hogy világosabban lássuk, milyen bajokat és problémákat okoz a multikollinearitás.

Számpélda

Példánkat KLEIN (1950) modelljéből merítjük, az adatokat THEIL (1971) is felhasználta a multikollinearitás bemutatására. A példa sem közgazdaságilag sem statisztikailag nem állja meg helyét, csupán illusztrációul szolgál.

1. táblázat
Az USA idősorai. 10^{12} *dollár, folyó áron*

Év	y Teljes fogyasztás	x_1 Profit-jövedelem	x_2 Bér-jövedelem
1921	41.9	12.4	28.2
1922	45.0	16.9	32.2
1923	49.2	18.4	37.0
1924	50.6	19.4	37.0
1925	52.6	20.1	38.6
1926	55.1	19.6	40.7
1927	56.2	19.8	41.5
1928	57.3	21.1	42.9
1929	57.8	21.7	45.3

A rutinszerűen elvégzett számítás az

$$y = -0.15x_1 + 1.43x_2$$

egyenlethez vezet. Ez szakmailag értelmetlen eredmény, mert a bérből nem lehet állandóan és jelentősen többet költeni ennek összegénél, a profit növekedése pedig aligha csökkentheti a fogyasztást.

Nem járunk jobban az elaszticitások számításával sem ha az $y = x_1^{b_1} x_2^{b_2}$ alakból indulunk ki, az adatok logaritmizálásával. Ez esetben a $b_1 = -0.49$ és $b_2 = 1.48$ értékeket nyerjük, ez hasonlóan és hasonló okból értelmetlen.

A számítást az ismert programcsomagok valamelyikével lefolytató kutatót persze az eredmény szakmai használhatatlanságán kívül az igen nagy szórások és az ebből következő igen széles konfidencia-intervallumok is figyelmeztetik a számítás megbízhatatlanságára. A korreláció ugyan megnyugtató eredményt ad, $r^2 = 0.999$, de ha a korrelációs mátrixot vizsgáljuk, akkor a b együtthatók közti szintén magas negatív korreláció már utal a számítás problematikus voltára.

A problémát nyilván az $X^T X$ mátrix sajátosságai okozzák. A mátrix értéke, egy tizedesre

$$\begin{pmatrix} 3250.6 & 6575.9 \\ 6575.9 & 13331.3 \end{pmatrix}.$$

E mátrix két sajátértéke 16576.4 és 5.5, az előbbi kereken háromezerszerese az utóbbinak. A mátrix az alábbi két diádból áll, ismét egy tizedesre kerekítve:

$$\begin{pmatrix} 3246.2 & 6578.1 \\ 6578.1 & 13330.2 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} 4.4 & -2.2 \\ -2.2 & 1.1 \end{pmatrix}.$$

Mivel az inverz a sajátértékek reciprokával szorzott diádok összege, abban a második diád válik dominálóvá.

Az inverz értéke 3 tizedesre ugyanis

$$\begin{pmatrix} 0.145 & -0.072 \\ -0.072 & 0.035 \end{pmatrix}$$

Ez a lényegében a második, kisebb diád arányait és előjeleit tükrözi, elnyomva mindazt az információt, ami az első diádból származhatna.

A mátrix ilyen rossz tulajdonságát a *kondíciószám* fejezi ki: a mátrix legnagyobb és legkisebb sajátértékének hányadosa. Ez esetünkben mintegy 3.10^3 értékű. BELSLEY (1980. 114.o) utal rá, hogy egy 10^n nagyságú kondíciószám n szignifikáns jeggyel csorbíthatja az eredmény megbízhatóságát. Mivel alapadataink 3 jegyre voltak megadva, nem csodálkozhatunk, ha a számítás eredményében egyetlen szignifikáns jegy sem maradt.

Hozzá kell itt tennünk, hogy szakmailag az alapadatok három helyértékre terjedő megbízhatóságát is kétségbe kell vonnunk. Még ha a fogyasztás és bér adataiban esetleg meg is bíznánk — bár ezek elfogadása a mérés és a statisztika 1 ezrelékes toleranciáját engedi csak meg! — a profitok számbavételekor biztosan nagyobb hibák történtek. Ismerve az adóbevallások szokásos torzításait az első két jegy szignifikáns voltának elfogadása is a naivitás határán jár.

A kiinduló adatok kis változtatása — teszem azt, a tizedespont után álló jegyek törlése vagy kerekítése — éppen a második, kis sajátértékű diád jelentős megváltoztatásához vezetne, míg az első diád értéke aránylag stabil maradna.

Általános indoklás

Tegyük fel, hogy az adatokat a számítás előtt standardizáljuk. Ekkor az (1) egyenlet kifejezhető a három korrelációs együttható értékével. Legyen $\mathrm{Corr}(x_1, x_2) = \alpha$, $\mathrm{Corr}(x_1, y) = \beta$, és $\mathrm{Corr}(x_2, y) = \gamma$. Ezért

$$X^T X = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad X^T y = \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

Az inverz értéke így

$$(X^T X)^{-1} = 1/(1-\alpha^2) \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

Ezak alapján

$$b_1 = (\beta - \alpha\gamma)/(1-\alpha^2)$$

$$b_2 = (\gamma - \alpha\beta)/(1-\alpha^2)$$

alakban számítható. Minél közelebb esik hát α^2 értéke 1-hez, annál nagyobb és így bizonytalanabb lesz az $X^T X$ mátrix inverze. E mátrix két sajátértéke $1+\alpha$ és $1-\alpha$, és ha az utóbbi sajátérték zérushoz közelít, akkor reciproka a végtelenhez tart, s ezzel b_1 és b_2 bizonytalansága is minden határon túl növekszik.

A matrix inverze ugyanis

$$\frac{1}{1+\alpha}\begin{pmatrix}\sqrt{0.5} & \sqrt{0.5}\\ \sqrt{0.5} & \sqrt{0.5}\end{pmatrix} + \frac{1}{1-\alpha}\begin{pmatrix}\sqrt{0.5} & -\sqrt{0.5}\\ -\sqrt{0.5} & \sqrt{0.5}\end{pmatrix}$$

alakban írható fel a diádbontás után. Az első diád szorzója körülbelül 1/2 és nem különösebben érzékeny α értékének 1-hez való közeledésére. A második szorzó azonban $\alpha = 0.95$ esetén 20, $\alpha = 0.99$ esetén 100 és ha α értéke 1-hez tart, akkor végtelenné válik. Mindennek következtében $b_1 + b_2$ értéke mindig jól meghatározott marad, azaz stabilnak tekinthető, hiszen

$$b_1 + b_2 = (\beta+\gamma)(1-\alpha)/(1+\alpha)(1-\alpha) = (\beta+\gamma)/(1+\alpha)$$

és ez az érték az $\alpha = 1$ határesetben is véges. Amivel bajunk van, az a $b_1 - b_2$ különbség, mivel

$$b_1 - b_2 = (\beta-\gamma)(1+\alpha)/(1-\alpha)^2 = (\beta-\gamma)/(1-\alpha)$$

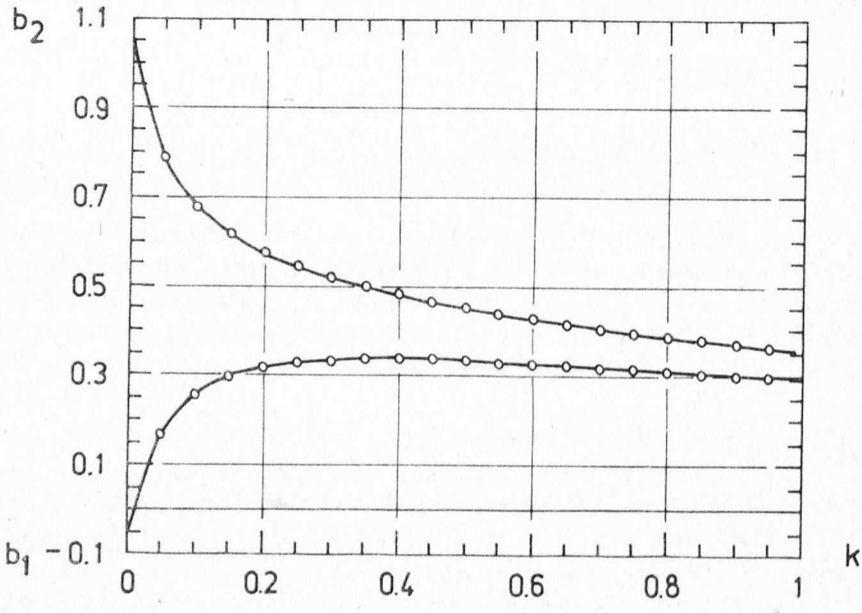
és ez az érték igen érzékeny arra, ha α közelít 1-hez.

A multikollinearitás tehát nem teszi lehetetlenné, hogy a regressziós együtthatók bizonyos lineáris függvényeit — jelen esetben összegét, mivel a nagyobbik sajátértékhez az (1,1) sajátvektor tartozik — a megfelelő biztonsággal becsüljük. Azonban az egyes együtthatókra mégis bizonytalan, sőt helytelen eredmények jönnek létre, mivel más lineáris függvényüket — jelen esetben különbségüket, mert a kisebbik sajátértékhez az $(1,-1)$ sajátvektor tartozik — csak bizonytalanul vagy egyáltalán nem tudjuk megbecsülni.

Újabb javaslatok

Látva a zérushoz közeli, kis sajátértékek zavaró szerepét, a multikollinearitás kezelését célzó javaslatok alapvetően kétfajta stratégiával dolgozhatnak. Az első, agresszív jellegű stratégia mesterségesen megnöveli a sajátértékeket. A második, defenzív stratégia — én ennek pártján állok — belenyugszik a tényekbe és kimenti azt az információt, amely akkor is megmarad, ha ezek a kis sajátértékek akár tovább is csökkennek vagy zérussá válnak.

A támadó jellegű stratégia alapirányzata az úgynevezett „ridge" regresszió, lásd pl. JUDGE (1985. 22.5.2. pont) vagy FOMBY (1984. 13.4.3. pont). Lényege, hogy egy k–értékű diagonális mátrix hozzáadásával megnöveljük a kiinduló mátrix sajátértékeit, s ezzel javítjuk a kondicioszámot. A kiinduló mátrix növelése azonban nyilván csökkenti ennek inverzét, s így becslésünk nem marad torzítatlan, „zsugorodni" fog, mégpedig annál inkább, minél erősebben növeljük a kiinduló mátrixot.



1. ábra. Ridge–regresszió

Az újabb statisztikai programcsomagok általában tartalmazzák a ridge–regressziót, ezért álljon itt egy grafikus kép a b értékek változására a sajátértékek k-val történő növelésének függvényében:

A ridge–becslés alkalmazása azon az (első hallásra meglepő) tételen alapul, hogy hatékonyabb becsléshez juthatunk k valamilyen (eleve nem ismert) pozitív értéke mellett, mint $k = 0$ esetén. A bizonyítást lásd pl SZÉKELY J.G. (1986) 133-4.o.

Mint az a grafikon alapján megállapítható, továbbra sem jutottunk azonban szakmailag elfogadható becsléshez (ezt a szakirodalom alapján a $0.2 < b_1 < 0.6$; $0.9 < b_2 < 1.1$ intervallumokban gyaníthatnánk, lásd pl. ERDŐS–MOLNÁR ,1982) a hatékonyság fokozása az ilyen típusú becslések esetén azonban a linearitás és a torzítatlanság feladását jelenti, s míg az elsőről még esetleg hajlandók is lennénk lemondani, a második elv feladása már igen fájdalmas.

Ez abból is belátható, hogy a sajátértékek k-val való növelése equivalens azzal az (elképzelt) megfigyeléssel, hogy a magyarázó változók külön–külön $\sqrt{k}$ nagyságú kilengése nem okoz változást a függő változó értékében. Ha ugyanis a ténylegesen megfigyelt értékeket kiegészítjük olyan fiktív megfigyelésekkel, amelyekben $y = 0$, x_1 vagy x_2 pedig $\sqrt{k}$ értékű, akkor éppen a ridge–regresszió egyenletéhez jutunk, amely a

$$b = (X^T X + kI)^{-1} X^T y$$

számítási előírással adható meg, ahol I az N-dimenziós egységmátrix.

Pszeudo–inverz és faktorbontás

Eddigi érvelésünk szerint a kisebbik sajátérték és a hozzá tartozó diád lehet puszta esetlegesség (modell vagy adathiba, esetleg kerekítés) eredménye. Ha a „támadás" helyett „védekezünk" akkor kézenfekvő, hogy ezt a zavaró diádot nemlétezőnek, a hozzá tartozó sajátértéket pedig zérusnak tekintsük.

Ez esetben azonban az $X^T X$ mátrix szingulárissá válik, ezért a szokásos módon nem invertálható. Továbbra is létezik azonban úgynevezett pszeudo–inverze — lásd pl. BOLLA (1986. 382–3.o.) — amely úgy hozható létre, hogy csak a nem–zérus sajátértékek reciprokával számolunk, a zérus sajátértékeket (s a hozzájuk tartozó diádokat) figyelmen kívül hagyjuk.

Ha így folytatjuk le a számítást, akkor a

$$y = 0.53x_1 + 1.09x_2$$

becslést nyerjük. Ennek korrelációs együtthatója $r = 0.9993$, azaz $r^2 = 0.9986$ tehát csak lényegtelenül alacsonyabb az iméntinél, de még mindig gyanusan magas a közgazdász számára, aki — ismerve az adatok kiküszöbölhetetlen hibáját — semmikép sem vár ilyen jó illeszkedést. Ugyanakkor az együtthatók számértékei a vizsgált időszak tekintetében szakmailag elfogadhatóbb képet adnak: a nagy válság előtti években a profitjövedelem minegy felét fordíthatták fogyasztásra, a másik fele felhalmozásra került. A munkabér pedig, a részletre és hitelre való vásárlási lehetőségének terjedésével, az életszinvonal állandó növekedését tapasztalva a jövedelemnél valamivel nagyobb fogyasztásra, tehát némi eladósodásra ösztönözte a bérből és fizetésből élőket. (Megjegyzendő itt az is, hogy ez az időszak rendkívül magas bevándorlással járt. E réteg ugyan kétségkívül szegény volt, de pótlólagos pénzeszközöket mindenképpen hozott magával. A modell feltűnő közgazdasági hibája, hogy a fogyasztás egyéb forrásait — az állam, társadalom, turisták, bevándorlók stb. pénzét — nem veszi figyelembe. Ezért aztán mindkét együttható becslése magasabb a valósnál.)

A becslés hibakorlátaira, konfidencia–intervallumaira stb. vonatkozó szokásos számításokat és próbákat azonban most nem tudjuk elvégezni, mivel kiléptünk a regressziószámítás szokásos elméletének kereteiből, s tulajdonképpen átléptünk a főkomponens — és faktoranalízis területére, hiszen csupán az $X^T X$ mátrix főkomponensével dolgoztunk. Itt a megválaszolható kérdések másként alakulnak.

A szinguláris dekompozíció

Kiindulva a Gram-féle mátrix $X^T X = RDR^T$ alakú ortogonális spektrálfelbontásából,[1] ahol $R = R^T = R^{-1}$ a sajátvektorok, D pedig a sajátértékek diagonális mátrixa, X alábbi diadikus felbontását végezhetjük el:

$$X = CD^{1/2}R^T \qquad \text{azaz} \qquad C = XRD^{-1/2}. \tag{2}$$

Ezt a felbontást nevezi a szakirodalom szinguláris dekompozíciónak, lásd BOLLA (1986) 376–7.o. A számítás egyszerűen gépesíthető.[2]

Az *1. táblázat* X adatmátrixának a (2) egyenlet szerinti felbontása két diádra, az eredményeket két tizedesre kerekítve, az alábbiakat adja:

$$X = 128.76 \begin{pmatrix} .24 \\ .28 \\ .32 \\ .32 \\ .34 \\ .35 \\ .36 \\ .37 \\ .39 \end{pmatrix} (.44;\ .9) + 2.35 \begin{pmatrix} -.58 \\ .39 \\ .05 \\ .44 \\ .40 \\ -.18 \\ -.26 \\ -.03 \\ -.25 \end{pmatrix} (.9;\ -.44)$$

A két diád közül az első, pozitív és viszonylag nagy abszolút értékű számokból álló diád „stabil", abban az értelemben, hogy a kiinduló adatok kisebb változása – például a tizedes értékek megváltoztatása, elhagyása vagy kerekítése — nem fogja érdemileg érinteni. A második diád „labilis" , azaz kis változtatások is erősen befolyásolhatják, esetleg zérussá tehetik.

Nyilván

$$C^T C = D^{-1/2} R^T X^T X R D^{-1/2} = D^{-1/2} R^T R D R^T R D^{-1/2} = 1 \tag{3}$$

ezért C a fenti előállítás alapján már normalizált (egymásra merőleges és egységnyi hosszú vektorokból álló) mátrix lesz. $C^T C = 1$, de természetesen általában $CC^T \neq 1$.

Mindezen jelölések mellett az (1) egyenlet a következőképpen alakul át:

$$b = (X^T X)^{-1} X^T y = RD^{-1} R^T R D^{1/2} C^T y = RD^{-1/2} C^T y. \tag{4}$$

---

[1] Lásd EGERVÁRY (1953) és (1956)

[2] A programcsomagok általában csak a szimmetrikus mátrixok spektrálfelbontását tartalmazzák, de ennek alapulvételével tetszőleges téglalap-mátrix felbontható a fenti módon.

Ez a felbontás ad módot arra, hogy a számunkra oly fontos sajátértékeket és kihatásukat vizsgálhassuk. De az átalakításnak más előnyei is vannak.

A korrelációs együttható

A regresszió elvégzése alapján számított eredmény eltér az eredeti adatoktól:

$$y - Xb = y - X(X^TX)^{-1}X^Ty = y - CD^{-1/2}R^TRD^{-1/2}C^Ty = (1 - CC^T)y\,, \quad (5)$$

ahol a (2) és a (4) egyenletet vettük figyelembe.

Mármost $(1 - CC^T)^T = 1 - CC^T$, azaz szimmetrikus, és mivel $(1 - CC^T)^2 = 1 - 2CC^T + CC^TCC^T = 1 - CC^T$, ahol kihasználtuk a (3) egyenletet, ezért a mátrix idempotens is, azaz e mátrix úgynevezett projektor.

A számítás elvégzése után fennmaradó „megmagyarázatlan" szórásnégyzet ezek alapján

$$y^T(1 - CC^T)^T(1 - CC^T)y = y^Ty - y^TCC^Ty \quad (6)$$

amiből következik, hogy a „megmagyarázott" szórásnégyzet y^TCC^Ty és így a korrelációs együttható négyzete

$$r^2 = y^TCC^Ty/y^Ty \quad (7)$$

A CC^T mátrix tehát a független y változó elemeinek a hibákra gyakorolt hatását mutatja. Értelmezése különösen egyszerűvé válik, ha a számítást normalizált adatok alapján végezzük, mivel ekkor $y^Ty = 1$.

A számítás folytatása

Képezve a C álló téglalap alakú mátrix és a magyarázandó y változó szorzatát, az eredményt jelöljük a c vektorral:

$$C^Ty = c\,. \quad (8)$$

E jelöléssel az eredeti (1) illetőleg (4) feladatot az igen egyszerű

$$b = RD^{-1/2}c$$

alakban számíthatjuk.

Ez a c érték számpéldánkban egy tizedesre $(155.9, -1.8)$. A második diádhoz tartozó érték itt is kicsi, és bizonytalan. Azonban a $D^{-1/2}$ mátrixxal való szorzás után már az $(1.21 - 0.77)$ értékhez jutunk, itt a két diádhoz tartozó eltérő nagyságú és biztonságú érték már közel került egymáshoz. Végül b értéke az R mátrixxal való szorzatból adódik, azaz

$$\begin{pmatrix} 0.44 & 0.9 \\ 0.9 & -0.44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.21 \\ -0.77 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.15 \\ 1.43 \end{pmatrix}$$

(a kisebb pontatlanság a kerekítésekből adódik). Ebben már teljesen elmosódott a bizonytalanság minden nyoma.

Mindezek alapján jogosultnak látszott az a felfogás, hogy a második diádot, amely a mérés pontatlanságának köszönheti bizonytalanságát, sőt egyáltalán létrejöttét is és mindenképpen igen esetleges, tekintsük nem létezőnek és *hagyjuk el* a számításból. Ez nem azt jelenti, hogy az amúgyis kicsi sajátértéket még kisebbé tesszük, mert ez éppen „végtelen" erőssé tenné a zavaró hatást. Az *egész* diádot kell nem létezőnek tekinteni. Ebben az esetben tehát csak az R mátrix első oszlopa a mérvadó és a

$$b = \begin{pmatrix} 0.44 \\ 0.9 \end{pmatrix} 1.21$$

összefüggésből a regresszió

$$y = 0.53x_1 + 1.09x_2$$

becslését nyertük.

További megfontolások

Már Egerváry utalt rá, SZÉKELY B. (1970, 1976) bizonyította és JÓZSA (1973) részletesen is tárgyalta, hogy a faktor-bontás az egy-egy diád leválsztása után megmaradó információt minimálissá teszi. Tehát az első diád (amelynek Logaritmiában oly nagy szerepe van) a maximális információt tartalmazza, amely a megfigyelt adatokból — lineáris módszerekkel — egyáltalán kinyerhető.

Meddig haladjunk az ilyen faktor-bontással? A közgazdász hajlamos lesz kialakult arányérzéke alapján (amely a statisztikai adatok megbízhatóságának ismeretéből táplálkozik) akkor megállni, amikor már csak a harmadik helyértéknek megfelelő vagy ennél kisebb számok jelennek meg a maradék-mátrixban. A matematikus — lásd REJTŐ (1986. 99.o.) — azt tudja ehhez hozzátenni, hogy a teljes varianciát az $X^T X$ mátrix nyoma (diagonális elmeinek összege), azaz a sajátértékek összege adja meg, az tehát a (2) egyenlet alapján $\Sigma_i d_i$, számpéldánk szerint pedig 16581.9. Annyi faktort kell tehát kiválasztani, hogy a választott, mondjuk r számú faktor sajátértékeinek összege e variancia célul kitűzött hányadát megmagyarázza. Ezért a

$$\frac{d_1 + d_2 + \ldots + d_r}{\sum_i d_i}$$

hányadost kell mérvadónak tekinteni. Mi egyetlen faktort választottunk, s ez a 16576.4/16581.8 = 0.99967 hányadost adja. Ezért nem romlott a korrelációs együttható érezhetően, mivel a teljes varianciának kevesebb mint 23 százezrelékét hanyagoltuk el.

Az ördög azonban a részletekben lakik: a kérdés az, hogy az így elhanyagolt diádot milyen valószínűséggel tekinthetjük véletlen mátrixok szorzatából adódó úgynevezett Wishart-mátrixnak? Sajnos erre, mint TUSNÁDY (1986. 22.o.) írja, még nincs igazán használható eljárás, nincs elfogadott próba.

Bármilyen kicsi a második faktor és bármilyen kicsi a szerepe a teljes varianciában, a közgazdász már ránézésre is gyanúsnak találja és nem tekintheti véletlennek, mert egyrészt határozott (és az irodalomban másutt már tárgyalt) ciklikus viselkedést mutat, másrészt — és ezen belül — a bér és a profit ellentétes irányú mozgását tételezi. A ciklus „súlya" az általános növekedésen belül ugyan viszonylag csekély (az X mátrix sajátértékeivel jellemezve 2.35/128.76, azaz kevesebb mint 2%-os), de semmiképp sem véletlen műve. Ezzel azonban ismét elérkeztünk kis számpéldánk sajátos korlátaihoz, amelyek a „modellezés" túlzásbavitt egyszerűsítéseinek és elhanyagolásainak következményei. A számpélda mentségére szolgáljon, hogy kizárólag az orvosolhatatlan „együttnövekedés" azaz multikollinearitás problémáját kívánta a lehető legegyszerűbben bemutatni.

(Beérkezett: 1988. augusztus 8-án.)

Irodalom

BELSLEY, D.A. - KUHN, E. - WELSH, R.E. (1980): *Regression Diagnostics.* Wiley, New-York.

BOLLA M. (1986): *Lineáris algebrai segédeszközök.* A MÓRI F.J. - SZÉKELY J.G. (1986) kötetben.

BRÓDY A. (1984): Barangolás Logaritmiában, *Szigma* XVII. 147-156.

CARLETT, W. (1987): Multicollinearity. Címszó a *The new Palgrave* c. közgazdasági enciklopédiában. Macmillan, London.

EGERVÁRY J. (1953): Mátrixfüggvények kanonikus előállításáról és annak néhány alkalmazásáról. *MTA III. Osztályának Közleményei.* II.1.sz. 417-458.

EGERVÁRY J. (1956): Az inverz mátrix általánosítása. *Az MTA Matematikai Kutatóintézetének Közleményei.* I. évf. 315-324.

ERDŐS P. - MOLNÁR F. (1982): *Válság és infláció a 70-es évek amerikai gazdaságában.* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

FOMBY, T.B. - HILL, R.C. - JOHNSON, S.R. (1984): *Advanced Econometric Methods*, Springer, Berlin.

FRISCH, R. (1934): *Statistical confluence analysis by means of complete regression systems.* Oslo Universsity Institute of Economics. Oslo.

GAUDI J. (1986): A többváltozós statisztikai analizis számítógépes eljárásai. A MÓRI F.J. - SZÉKELY J.G. (1986) kötetben.

GANTMACHER, F.R. (1954): *Teoria Matric.* Goszizdat Techniko-Teoreticseszkoj Litteraturi, Moszkva.

JÓZSA S. (1973): A diád-módszer statisztikai expozíciója *Szigma.* 1. 63-72.

JUDGE, G.G. - GRIFFITHS, W.E. - HILL, R.C. - LÜTKEPOHL, H. - LEE, T.C. (1985): *The theory and practice of econometrics.* Wiley, New York.

KLEIN, L.R. (1950): *Economic Fluctuations in the United States*, 1921-1941. Wiley, New-York.

MALINVAUD, E. (1974): *Az ökonometria statisztikai módszerei.* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

MÓRI F.J. – SZÉKELY J.G. (szerk) (1986): *Többváltozós statisztikai analízis.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest.

REJTŐ L. (1986): A változók számának csökkentése: főkomponens és faktoranalízis. A MÓRI F.J. – SZÉKELY J.G. (1986) kötetben.

RIMLER, J. (1976): *Fejlődéselemzés ökonometriai módszerekkel.* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

SZÉKELY B. (1970): Mátrixok egy speciális diadikus felbontása ennek néhány alkalmazása az összehasonlító elemzésben. *Szigma,* 4. 241–253.

SZÉKELY B. (1976): Mátrixok egy speciális diadikus felbontása. Rimler (1976) művében. 315–324.

SZÉKELY G. (1986): Regressziós modellek. A MÓRI F.J. – SZÉKELY J.G. (1986): kötetben.

THEIL, H. (1971): *Principles of Econometrics.* Wiley and Sons, New York.

TUSNÁDY G. (1986): A többdimenziós normális eloszlás. A MÓRI F.J. – SZÉKELY J.G. (1986): kötetben.

About Irremediable Multicollinearity

Economic time series are very often pervaded by a strong multicollinearity which bedevils multiple regression computations. Illustrating the phenomenon by a well known example, used already by Theil, the literature on remedial action is reviewed. By accepting, rather than fighting, multicollinearity one is led to exploiting the generalized inverse with small eigenvalues set to zero. This approach, utilizing results of Egerváry, maintains that the small eigenvalues do not carry any information and represent only errors of measurement or "noise". An exact test for "noise" is, alas, not yet established by statistical theory.

Szigma, XX. (1987-88) 4. sz.

IDEGEN TOLLAK

PATRICK MOYES

Eloszlások jóléti rangsorolását megőrző függvények*

1. Bevezetés

1.1 Számos szerző [ATKINSON (1970), DASGUPTA et al., (1973)] foglalkozott a jövedelemeloszlások rangsorolásának kérdésével. Rendszerint azt bizonyítják be, hogy annak szükséges és elégséges feltétele, hogy valamely eloszlás magasabb rangsorolást kapjon egy másiknál — bármilyen legyen is az egyenlőtlenség mérésére használt mutató — az, hogy viszonylagos Lorenz-görbéje az utóbbi eloszlásé alatt legyen. Ha — mint KOLM (1976) javasolta — inkább az abszolút, semmint a viszonylagos jövedelem-különbségeket hangsúlyozzuk, az abszolút Lorenz-dominancia fogalmát [MOYES (1987a)] kapjuk. SHORROCKS (1983) kidolgozott egy olyan kritériumot, amely bármely két (különböző) várható értékkel bíró eloszlás rangsorolását eldönti. Az új kritérium — amelyet általánosított Lorenz-dominanciának nevezünk — figyelembe veszi mind a nagyobb jövedelemegyenlőség, mind pedig a magasabb jövedelem iránti igényt. Az általánosított Lorenz-rangsorolásban megtestesülő jóléti ítéletek azonban összeütközésbe kerülhetnek a jövedelem egyenlőbb elosztására vonatkozó társadalmi igénnyel. Sőt, a leggazdagabb személy jövedelmének növekedését rendszerint az egyenlőtlenség fokozódásaként fogják fel, noha az általánosított Lorenz-dominancia ilyenkor is egyértelműen a jólét emelkedését mutatja. Az egyenlőség és a hatékonyság közötti ilyen összeütközés elkerülése érdekében SHORROCKS (1983) a hatékonyságra vonatkozó preferencia gyengítését javasolta, olymódon, hogy összeegyeztethetővé váljék a jövedelemegyenlőség növelésével. Attól függően, hogy a viszonylagos vagy az abszolút egyenlőséget részesítjük-e előnybe, kapjuk az általánosított viszonylagos illetve abszolút Lorenz-dominanciát.

1.2 Ha adottnak vesszük, hogy létezik az eloszlások rangsorolásának megfelelő módjára vonatkozó megállapodás, gyakorlatilag két kérdés merül fel. Egyrészt a politikai döntéshozó egyik fő célja minden bizonnyal az, hogy mérsékelje a termelési folyamatból közvetlenül származó jövedelemeloszlás egyenlőtlenségét. Az állami szektor jövedelemtranszfer-tevékenysége állandóan fokozódik az idők folyamán, és a modern társadalmakban a jövedelemadó-politika központi problémájává vált. Ha

---

* PATRICK MOYES: Functions that Preserve the Welfare Ranking of Distributions. A tanulmány rövidített változata megjelenik a *Journal of Economic Theory*-ban. Fordította *Tényi György*.

most első megközelítésben figyelmen kívül hagyjuk az adózás ösztönző hatását, régóta tudjuk, hogy a progresszív adórendszerek csökkentik a jövedelemkülönbségeket. Pontosabban, csak a progresszív rendszereknek (a növekvő átlag értelmében) van meg az a tulajdonságuk, hogy az adózás utáni jövedelemeloszlás dominálja az adózás előtti eloszlást a viszonylagos Lorenz-értelemben [JAKOBSSON (1976), EICHHORN et. al. (1984), THON (1987)]. A viszonylagos Lorenz-dominancia helyébe az abszolút Lorenz-dominanciát téve, MOYES (1987b) megmutatta, hogy a Fei-féle minimális progresszivitás (az adókötelezettség növekedése) és az abszolút jövedelmi egyenlőtlenséget csökkenő adózási rendszer egyenértékű[1]. Az adózás egyenlősítő tulajdonságai mellett hasznos tudni, hogyan hat az adózás utáni eloszlásra az adózás előtti jövedelemeloszlás valamilyen adott módosítása. Jogosnak látszik például az a követelmény, hogy ha valamely adózás előtti jövedelemeloszlás egyenletesebb, mint egy másik, akkor adózás után is ilyen legyen a kettő viszonya. Más szavakkal, elvárható az adórendszertől, hogy megőrizze az eloszlások jóléti és/vagy egyenlőtlenségi szempontok szerinti rangsorolását. Noha ez a kérdés még nyitva áll a viták előtt, a tanulmány végén igyekszünk bebizonyítani, hogy az eloszlások rangsorolásának megőrzése — mint következmény — az igazságosság és az ellentmondásmentesség elve alapján igazolható. Míg az első probléma a dominancia-reláció létrejöttével kapcsolatos, a második az ilyen reláció megőrzésére vonatkozik. Ebben a tanulmányban a második kérdéssel foglalkozunk, és azt vizsgáljuk, milyen körülmények között igaz, hogy SHORROCKS három jóléti kritériumának valamelyike alapján kialakított adózás előtti rangsorolás az adózás után is megmarad.

1.3 A tanulmány felépítése a következő. A *2. részben* — az átlagjövedelmet állandónak véve — igazoljuk, hogy az eloszlások Lorenz-rangsorolását csak a kvázilineáris adórendszerek őrzik meg. Feloldva az azonos átlagjövedelem feltevését, a 3. fejezetben azoknak a függvényeknek a tartományát vizsgáljuk, amelyek megőrzik az eloszlásoknak az általánosított Lorenz-dominancia szerinti rangsorolását. Látni fogjuk, hogy a monoton növekedés és a konkávitás szükséges és elégséges feltétele annak, hogy az általánosított Lorenz-rangsorolás megőrződjék. Ezzel szimmetrikusan, minden csökkenő és konvex rendszer esetén az eloszlások rangsorolása megfordul. A *4. részben* olymódon korlátozzuk a hatékonysági preferenciát, hogy a jólét emelkedése összeegyeztethető legyen az egyenlőség fokozásával. Arra az esetre, amikor előírjuk, hogy a jólét akkor növekszik, ha minden jövedelem azonos arányban nő, igazolni fogjuk, hogy csak a lineáris vagy a konstans függvény őrzi meg az eloszlások jóléti rangsorolását. Ha továbbmegyünk egy lépéssel és előírjuk, hogy a jólét akkor növekszik, ha ugyanakkora abszolút mennyiséget adunk valamennyi jövedelemhez, akkor csak a kvázi-lineáris rendszerek bizonyulnak megengedhetőnek. Az *5. (és utolsó) részben* ismertetjük a rokon eredményeket, és indokoljuk

[1] Burkoltan feltételezzük, hogy az adózás nem módosítja az adóalanyoknak a jövedelemskálán elfoglalt helyzetét, vagyis az adózás utáni jövedelem növekszik az adózás előtti jövedelem függvényében. Mint másutt megmutattuk (MOYES (1988a)), ha a népesség száma rögzítve van, a növekvő jelleg nem szükséges feltétel többé ahhoz, hogy egy adórendszer egyenletesen egyenlősítő legyen mind a viszonylagos, mind az abszolút Lorenz-dominancia értelmében.

azt az elvet, hogy az adórendszernek meg kell őriznie az adózás előtti rangsorolást. Befejezésképpen röviden utalunk a további kutatás lehetőségeire.

2. Alapjelölések és egy bevezető összefüggés

A dolgozatban használt fontosabb jelölések

$\mathbb{R}$	valós szám
$\mathbb{R}_+$	pozitív valós szám
$\mathbb{R}_{++}$	szigorúan pozitív valós szám
$:=$	definíció szerint egyenlő
$\in$	eleme
$:\subseteq$	„magában foglalja"
D_n	jövedelemeloszlások halmaza
$\mathbf{1}$	összegző vektor
$\hat{z}$	z redukált eloszlása
$\tilde{z}$	z centralizált eloszlása
z^z	z növekvő újrarendezése
$f : A \to B$	A-ból B-be képező függvény
$\mathcal{F}$	$V \to \mathbb{R}_+$ függvények halmaza
$\succeq$	D_n-n értelmezett bineáris reláció
$F(\succeq)$	$\succeq$ rendezést megőrző függvények
$\sum_{j=1}^{n} z_j$	$= z_1 + z_2 + \ldots + z_n$
$\mathrm{GL}(\frac{k}{n}; z)$	a z állapotbeli k legszegényebb összjövedelme
$\geq_\ell 1[>_\ell]$	gyenge (erős) Lorenz-dominancia
$\geq_{\ell r} [>_{\ell r}]$	gyenge (erős) relatív Lorenz-dominancia
$\geq_{\ell a} [>_{\ell a}]$	gyenge (erős) abszolút Lorenz-dominancia
$\geq_{\ell g} [>_{\ell g}]$	gyenge (erős) Lorenz-dominancia
$\geq_{\ell r} [>_{\ell r}]$	gyenge (erős) relatív Lorenz-dominancia
$\geq_{\ell a} [>_{\ell a}]$	gyenge (erős) abazolút Lorenz-dominancia
$\geq_{\ell g} [>_{\ell g}]$	gyenge (erős) általánosított Lorenz-dominancia
$\geq_{\ell gr} [>_{\ell gr}]$	gyenge (erős) relatív általánosított Lorenz-dominancia
$\geq_{\ell ga} [>_{\ell ga}]$	gyenge (erős) abszolút általánosított Lorenz-dominancia

2.1. Tekintsük n számú egyén homogén populációját, akiknek z_i jövedelme valamely korlátos vagy nem-korlátos $V := (\underline{v}, \bar{v})$ valós intervallumba esik. Jelölje $\mu(z)$ a $z := (z_1, \ldots, z_n)$ jövedelemeloszlás átlagát, és jelentse $D_n := \{z \in \mathbb{R}^n | z_i \in V$ minden i-re$\}$ a megvalósítható jövedelemeloszlások halmazát. Az $\mathbf{1}$ jelölést fogjuk alkalmazni az egyesekből álló n-elemű vektorra. Legyen továbbá

$$z^z := (z_1^z, \ldots, z_n^z)$$

z olyan permutációja, amelyre

$$z_1^z \leq z_2^z \leq \ldots \leq z_n^z.$$ [2]

Több esetben normálni fogjuk a jövedelemeloszlásokat, úgyhogy, $\widehat{z} := (\widehat{z}_1, \ldots, \widehat{z}_n)$ fogja jelenteni a z-hez tartozó *„redukált átlagú"* eloszlást, ahol $\widehat{z}_i := z_i/\mu(z)$, míg $\widetilde{z} := (\widetilde{z}_1, \ldots, \widetilde{z}_n)$ a *„centrált átlagú"* eloszlást jelenti, ahol $\widetilde{z}_i := z_i - \mu(z)$.

Elemzésünk szempontjából az $F : V \to \mathbb{R}_+$ függvényosztály érdekes, amelyet $\mathcal{F}$-fel jelölünk. Ha adva van $y \in D_n$ és $F \in \mathcal{F}$, legyen $F(y) := (F(y_1), \ldots, F(y_n))$. A jelölések rövidsége kedvéért, néha az x, x' jelölést alkalmazzuk $F(y), F(y')$ stb. helyett. Célszerű F-et úgy elgondolni, mint adózási rendszert, amely az u adózás előtti jövedelemhez az $F(u)$ adózás utáni jövedelmet rendeli hozzá. Ezzel az értelmezéssel csábítónak tűnhet figyelmünket a (gyengén) növekvő F függvényekre korlátozni. Az általánosság kedvéért azonban nem fogjuk ezt az utat követni, lehetséges tehát, hogy F nem növekvő, sőt esetleg nem is monoton. Ha adva van a D_n halmazon a $\succeq$ bináris reláció, azt fogjuk mondani, hogy az F függvény megőrzi a rangsorolást a $\succeq$ relációra nézve, ha igaz, hogy $F(x) \succeq F(y)$, valahányszor $x \succeq y$, minden $x, y \in D_n$ esetén. A $\succeq$ reláció szerinti rangsorolást megőrző függvények halmazát az $F(\succeq)$ jellel jelöljük.

2.2 Először arra az esetre korlátozzuk figyelmünket, amikor az eloszlások várható értéke egyenlő. Az igazságtalanság elmélete és a jólét mérése a *regresszív transzfer* fogalma körül forog, amely legalábbis DALTONIG (1920) megy vissza. Azt mondjuk, hogy az y jövedelemeloszlás regresszív transzfer révén jött létre az x jövedelemeloszlásból, ha (a) $x_k = y_k$ $k \neq i, j$, (b) $x_i - y_i = y_j - x_j$ és (c) $y_i \leq x_i \leq x_j \leq y_j$.

Ezzel egyenértékű megfogalmazás, hogy az x eloszlás *progresszív transzfer* révén keletkezett az y eloszlásból. Hasonló módon definiáljuk a *szigorúan* regresszív transzfert, olymódon, hogy a fenti (c) feltétel helyébe a (c') $y_i < x_i \leq x_j < y_j$ feltételt írjuk. SHORROCKS (1988) gondolatmenetét követve bármely $z \in D_n$ eloszlás esetén legyen

$$\mathrm{GL}\left(\frac{k}{n}; z\right) := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} z_j^z \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.1}$$

és definiáljuk a z eloszlás $\mathrm{GL}(p; z)$ általánosított Lorenz–görbéjét a következőképpen. Legyen $\mathrm{GL}(0; z) := 0$ és

$$\mathrm{GL}((k + \theta)/n; z) = (1 - \theta)\mathrm{GL}(k/n; z) + \theta\mathrm{GL}(k + 1)/n; z) \tag{2.2}$$

minden $\theta \in [0, 1]$ esetén. Ha adva van két eloszlás, $x, y \in D_n$, azt mondjuk, hogy az x eloszlás Lorenz–értelemben gyengén dominálja az y eloszlást, (jele $x \geq_\ell y$)

---

[2] Az ilyen permutáció nem szükségképpen egyértelmű, hacsak nem minden z' különböző.

akkor és csak akkor, ha mindkét eloszlás várható értéke azonos és az x eloszlás Lorenz–görbéje sehol sem halad az y eloszlás Lorenz–görbéje alatt, vagyis

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}\left(\frac{k}{n};x\right) &\geq \mathrm{GL}\left(\frac{k}{n};y\right) \quad \text{minden} \quad 1 \leq k < n \quad \text{és} \\ \mathrm{GL}\left(\frac{k}{n};x\right) &= \mathrm{GL}\left(\frac{k}{n};y\right) \quad \text{ha} \quad k = n\,. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Ha (2.3)-ban a szigorú egyenlőtlenség érvényes legalább egy k-ra ($1 \leq k \leq n$), akkor azt mondjuk, hogy az x eloszlás Lorenz–féle értelemben szigorúan dominálja az y eloszlást, amit a továbbiakban Igy jelölünk: $x >_\ell y$.[3]

A Lorenz–dominancia normatív tartalma már hosszú ideje nyilvánvaló: $x \geq_\ell y$ akkor és csak akkor áll fönn, ha az y eloszlást regresszív transzferek véges sorozata révén kaptuk az x eloszlásból, vagy (ami ezzel egyenértékű) ha $W(x) \geq W(y)$ minden Schur–konkáv (vagyis a jövedelemegyenlőséget preferáló) $W : D_n \rightarrow \mathbf{R}$ jóléti függvény esetében [lásd DASGUPTA et al., (1973), ROTHSCHILD és STIGLITZ (1974)][4].

Milyen azoknak a függvényeknek az osztálya, amelyek megőrzik az eloszlások Lorenz–féle rangsorolását? A következő tétel szerint csak a kvázi–lineáris adózás őrzi meg az eloszlások Lorenz–féle rangsorolását.

2.1 tétel: Korlátos (illetve nem–korlátos) jövedelmek esetén:

(T2.1.a) $F(t) = at + b$ minden $a, b \in \mathbb{R}^2$ feltéve $F(t) \geq 0$ [illetve $a, b \in \mathbf{R}_+$]

akkor és csak akkor, ha

(T2.1.b) Minden $y, y' \in D_n$ ($n \geq 2$), esetén az $y' \geq_\ell y$ egyenlőtlenségből következik $F(y') \geq_\ell F(y)$.

Bizonyítás:

Mivel az elégségesség nyilvánvaló, a tételnek csak a szükségességet kimondó része szorul bizonyításra. Vegyünk két eloszlást $y := (y_1, \ldots, y_n) \in D_n$ és $y' := (y'_1, \ldots, y'_n) \in D_n$ úgy, hogy $y' \geq_\ell y$. Ekkor létezik olyan B bisztochasztikus mátrix, amelyre $y' = By$ [lásd például DASGUPTA et al. (1973)]. Tételezzük fel továbbá, hogy

$$y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_n \quad \text{és} \quad y'_1 \leq y'_2 \leq \ldots \leq y'_n$$

---

[3] A Lorenz–dominanciára adott meghatározásunk eltér a szokásostól. Célszerű különbséget tenni a szigorú értelemben vett Lorenz–dominancia (az összehasonlított eloszlások várható értékei egyenlők) és a viszonylagos Lorenz–dominancia között (ekkor az összehasonlított eloszlás méretei lehetnek külöbözők is).

[4] Valamely $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény Schur–konkáv, ha $H(Bx) \geq H(x)$ minden $x \in \mathbf{R}^n$ és minden B bisztochasztikus mátrix esetén. H szigorúan Schur–konkáv, ha $H(Bx) > H(x)$ minden $x \in \mathbb{R}^n$ ($x \neq u\mathbf{1}$) és minden olyan B bisztochasztikus mátrix esetén, amelyre Bx nem az x-nek valamely permutációja [lásd MARSHALL és OLKIN (1979)].

(ellenkező esetben helyettesítsük B-t RBQ^{-1}-gyel, y-t Qy-nal, y'-t Ry'-vel, ahol Q és R olyan permutációs mátrixok, amelyeket úgy választottunk meg, hogy Qy és Ry' elemei nem-csökkenők legyenek.) Mivel $y' = By$ azt jelenti, hogy B felírható T-transzformációs mátrixok szorzataként, [lásd MARSHALL és OLKIN (1979), B.1 lemma], bizonyításunk teljessé válik, ha a kívánt eredményt valamilyen T-transzformációs mátrixra igazoljuk. Ezért tételezzük fel, hogy $y' = Ty$, ahol T az alábbi implicit módon definiált T-transzformációs mátrix:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & y'_k = y_k & k \neq i,j \\ \text{(b)} & y'_i = (1-\tau)y_i + \tau y_j & \\ \text{(c)} & y'_j = \tau y_i + (1-\tau)y_j & \end{array} \tag{2.4}$$

ahol $0 \leq \tau \leq 1$. Ha F eleget tesz a (T2.2.b) feltételnek, akkor szükségképpen

$$\sum_{j=1}^{n} F(y'_j) = \sum_{j=1}^{n} F(y_j),$$

ami viszont (2.4) következtében azt jelenti, hogy

$$F(\tau y_i + (1-\tau)y_j) + F((1-\tau)y_i + \tau y_j) = F(y_i) + F(y_j). \tag{2.5}$$

Mivel (2.5) érvényes minden $y \in D_n$ esetén, ebből következik, hogy minden olyan $u, v, w, t \in V$-re, amelyre $0 \leq t < u \leq v < w$ és $u - t = w - v$:

$$\frac{F(u) - F(t)}{u - t} = \frac{F(w) - F(v)}{w - v} \tag{2.6}$$

aminek megoldása $F(t) = at + b$ [lásd ACZEL (1966), 1. tétel, 43. l.]. Ha a jövedelem korlátos, akkor

$$\begin{array}{llll} \text{(i)} & -b/a \leq \underline{v} & \text{ha} & a < 0,\ b > 0 \\ \text{(ii)} & -b/a \leq \bar{v} & \text{ha} & a > 0,\ b < 0 \quad \text{vagy} \\ \text{(iii)} & a, b \in \mathbb{R}_+ & & \end{array}$$

szükséges ahhoz, hogy $F(t) \geq 0$ legyen minden $t \in V$ esetén. Nem-korlátos jövedelem esetén (iii) elegendő. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

A *2.1 tétel* „erős" változatát úgy kapjuk, hogy a (T2.1.a) feltételben $a \neq 0$, a (T2.1.b) feltételben

$$y \neq u\mathbb{1} \quad \text{és} \quad y' \neq v\mathbb{1} (u, v \in \mathbb{R}_{++})$$

teljesülését követeljük meg, a (T2.1.b) feltételben pedig $\geq_\ell$ helyébe a $>_\ell$ relációt írjuk.

Megjegyezzük mellesleg, hogy kvázi-lineáris adózás valamivel többet is teljesít, mint az eloszlások Lorenz-rangsorolásának a megőrzését: ténylegesen az adózás előtti jövedelmek egyenlősítése (amelyet a B bisztochasztikus mátrix tartalmaz) megőrződik az adózás utáni jövedelmekben is.

Az eloszlások jóléti rangsorolásának megőrzése

3.1 Mindeddig az olyan — a gyakorlatban igen ritka — eloszlások összehasonlítására korlátoztuk figyelmünket, amelyeknek várható értéke egyenlő. Ez magyarázza, hogy a Lorenz-kritérium által meghatározott részleges rendezés gyakorlati szempontból többé-kevésbé haszontalan. Szerencsére a fenti fogalmak könnyen kiterjeszthetők a különböző méretű eloszlások esetére is. A regresszív transzfer fogalmának alábbi általánosítása [ROTSCHILD és STIGLITZ (1973)] lehetővé teszi, hogy eltérő várható értékű eloszlások viszonylagos kívánatosságát is értékeljük. Azt fogjuk mondani, hogy az y eloszlás nem-hatékony regresszív transzfer révén keletkezett az x eloszlásból, ha

(a) $x_k = y_k$ minden $k \neq i, j$ esetén,

(b) $x_i - y_i \geq y_j - x_j$ és (c) $y_i \leq x_i \leq x_j \leq y_j$.

Hasonlóképpen definiáljuk a szigorúan nemhatékony regresszív transzfert olymódon, hogy a

(b') $x_i - y_i > y_j - x_j$ és (c') $y_i < x_i \leq x_j < y_j$

feltételeket írjuk (b) illetve (c) helyébe. Az általánosított Lorenz-dominancia — tükrözve a nagyobb igazságosságra, egyszersmind a magasabb jövedelemre való törekvést — természetes módon terjeszti ki a Lorenz-rangsorolást a nem egyenlő várható értékű eloszlásokra. SHORROCKS (1983) gondolatmenetét követve azt fogjuk mondani, hogy az x eloszlás az általánosított Lorenz-értelemben gyengén dominálja az y eloszlást (jele $x \geq_{g\ell} y$), akkor és csak akkor, ha

$$\mathrm{GL}\left(\frac{k}{n}; x\right) \geq \mathrm{GL}\left(\frac{k}{n}; y\right) \quad \text{minden} \quad k = 1, 2, \ldots, n \quad \text{esetén}. \tag{3.1}$$

A szokásos módon definiáljuk az $\geq_{\ell g}$ reláció aszimmetrikus összetevőjét és bevezetjük rá a $>_{\ell g}$ jelet. Az általánosított Lorenz-dominancia normatív jelentése is kézenfekvő: ha $x \geq_{\ell g} y$, akkor (i) az y eloszlást nem-hatékony és regresszív transzferek véges sorozata révén kapjuk az x eloszlásból, vagy (ami ezzel egyenértékű) (ii) $W(x) \geq W(y)$ minden növekvő és Schur-konkáv $W : D_n \to \mathbf{R}$ jóléti függvényre és megfordítva [lásd MARSHALL és OLKIN (1979), ROTSCHILD és STIGLITZ (1973), SHORROCKS (1983)].

3.2 A következő tétel bizonyítja, hogy csak a növekvő és konkáv függvények őrzik meg az eloszlások általánosított Lorenz-rangsorolását.

3.1 tétel: Korlátos jövedelmek esetén:

(T3.1.a) F növekvő és konkáv[5] akkor és csak akkor, ha

(T3.1.b) minden $y, y' \in D_n$ $(n \geq 2)$ esetén $y' \geq_{\ell g} y$ teljesüléséből következik $F(y') \geq_{\ell g} F(y)$.

Nem-korlátos jövedelmek esetén F növekvő volta redundáns feltétellé válik, tekintettel az alábbi *3.2 lemmára.*

Mielőtt rátérnénk a tétel bizonyítására, célszerű bevezetni néhány lemmát.

3.1 lemma [MARSHALL és OLKIN (1979), 447. l.]: Abból, hogy $F : V \to \mathbb{R}_+$ konkáv (szigorúan konkáv) következik:

$$\frac{F(v) - F(u)}{v - u} \geq [>] \frac{F(t) - F(w)}{t - w}$$

minden olyan $u, v, w, t \in V$ esetén, amelyre $u < v \leq t$, $u \leq w < t$. Megfordítva, ha (3.2) igaz abban a speciális esetben, amikor $u < v = w < t$ és $v - u = t - w$, akkor F konkáv (szigorúan konkáv).

3.2 lemma: Ha V nem korlátos, akkor abból, hogy $F : V \to \mathbb{R}_+$ (szigorúan) konkáv, következik, hogy F (szigorúan) növekvő.

Bizonyítás:

Tételezzük fel, hogy F konkáv, de nem növekvő, vagyis létezik olyan $0 \leq u < v$, amelyre $F(u) > F(v)$. A (3.2) egyenlőtlenség értelmében minden $w > v$-re

$$F(w) \leq F(v) + \frac{F(v) - F(u)}{v - u}[w - v] \tag{3.3}$$

A (3.3) kifejezés jobboldala minusz végtelenhez tart, ahogy w tart a végtelenhez, ezért $F(w) < 0$, ami lehetetlen. Hasonlóképpen bizonyítható, hogy F szigorúan konkáv voltából következik, hogy szigorúan növekvő. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

3.3 lemma: Bármely $z \in D_n$ és minden $P := [p_{ij}]$ permutációs mátrix esetén:

$$\sum_{i=1}^{k} z_{n-i+1}^{z} \geq \sum_{i=1}^{k} \left[\sum_{j=1}^{n} p_{ij} z_j \right] \geq \sum_{i=1}^{k} z_i^{z} \quad (k = 1, 2, \ldots, (n-1)) \tag{3.4}$$

Bizonyítás : MARSHALL és OLKIN (1979) művének 141. lapján szereplő *A.3 tétel* alkalmazásával.

---

[5] Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor (gyengén) konkáv, ha

$$f(\tau u + (1 - \tau)v) \geq \tau f(u) + (1 - \tau) f(v)$$

minden $u, v \in \mathbf{R}$ és minden $\tau \in [0, 1]$ esetén. Ha $u \neq v$ és $\tau \in (0, 1)$ esetén szigorú egyenlőtlenség érvényes, akkor f szigorú konkáv.

Ezután rátérünk a tétel bizonyítására.

A *3.1 tétel bizonyítása* :
Tekintettel a *3.2 lemmára*, elegendő, ha figyelmünket a korlátos jövedelmek esetére korlátozzuk.

Elégségesség : Tételezzük fel, hogy $y'' \geq y'$; könnyen ellenőrizhető, ez egyenértékű azzal, hogy valamely $y' \in D_n$ esetén $y'' \geq y'$ és $y' \geq_\ell y$.[6]
Először azt bizonyítjuk, hogy $y' \geq_\ell y$ teljesüléséből következik $F(y') \geq_{\ell g} F(y)$. Tételezzük fel, hogy $y' = Ty$, ahol T a (2.4)-ben definiált T-transzformációs mátrix, és legyen $\varepsilon := \tau(y_j - y_i)$ a j személytől az i személyhez transzferált jövedelem. Az általánosság megszorítása nélkül feltételezhetjük, hogy $0 \leq \tau \leq 1/2$, mivel egy T-transzformációs mátrix és egy permutációs mátrix szorzata szintén T-transzformációs mátrix. Két esetet kell megvizsgálnunk.

1. eset : Az i és a j egyén közötti jövedelemtranszfer nem módosítja a jövedelemskálán elfoglalt egyéni helyzetüket, vagyis $y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_n$ maga után vonja $y'_1 \leq y'_2 \leq \ldots \leq y'_n$ teljesülését is. Ebben az esetben megtehetjük, hogy az egyéneket a jövedelemskálán eredetileg elfoglalt helyzetükkel jellemezzük:

(i) A $g < i$ egyének esetében $y'_g = y_g$. Ennélfogva $\mathrm{GL}(g/n; x') = \mathrm{GL}(g/n; x)$.

(ii) Az i egyén esetében $y'_i = y_i + \varepsilon \geq y_i$. Mivel F növekvő, $x'_i \geq x_i$ és $\mathrm{GL}(i/n; x') \geq \mathrm{GL}(i/n; x)$.

(iii) Az $i < h < j$ egyének esetében $y'_h = y_h$. Ekkor $\mathrm{GL}(h/n; x') \geq \mathrm{GL}(h/n; x)$.

(iv) A j egyén esetében $y'_j = y_j - \varepsilon \leq y_j$. Ezért

$$\mathrm{GL}(j/n; x') - \mathrm{GL}(j/n; x) = F(y_i + \varepsilon) - F(y_i) + F(y_j - \varepsilon) - F(y_j) \geq 0\,, \quad (3.5)$$

mivel F konkáv.

(v) Végül a $j < m < n$ egyének esetében $y'_m = y_m$, amiből következik $\mathrm{GL}(m/n; x') \geq \mathrm{GL}(m/n; x)$.

2. eset : Az i és a j egyén közötti jövedelemtranszfer megváltoztatja a jövedelemskálán elfoglalt helyzetüket. Ezért a következő helyzet alakul ki:

$$y_g \leq y_i \leq y_h < y_k \leq y_\ell \leq y_j \leq y_m$$

$$y'_g \leq y'_h < y'_i \leq y'_k \leq y'_j < y'_\ell \leq y'_m$$

Könnyebb a bizonyítás menetét az alábbi ábra segítségével követni, amelyen a jövedelem balról jobbra haladva növekszik:

---

[6] Ha adva van $x, y \in \mathbb{R}^n$, akkor és csak akkor írjuk, hogy $x \geq y$, ha $x_i \geq y_i$ minden $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén. Ha $x \geq y$ és $x \neq y$, ennek jelölése $x > y$.

Az egyének helyzete										
Eloszlás	g	i	h	$\ldots$	k	$\ldots$	ℓ	j	m
y	y_g	y_i	y_h	$\ldots$	y_k	$\ldots$	y_ℓ	y_j	y_m
y'	y_g	y_h	$y_i+\varepsilon$	$\ldots$	y_k	$\ldots$	$y_j-\varepsilon$	y_ℓ	y_m

3.1 ábra

(i) A g helyzetben levő egyének esetében $y'_g = y_g$. Ennélfogva $\mathrm{GL}(g/n\,;x') = \mathrm{GL}(g/n\,;x)$.

(ii) Az i-edikként rangsorolt egyén esetében $y'_i = y_h \geq y_i$. Mivel F növekvő,

$$x'_i \geq x_i \quad \text{és} \quad \mathrm{GL}(i/n\,;x') \geq \mathrm{GL}(i/n\,;x)\,.$$

(iii) A h helyzetben levő egyének esetében $y'_h = y_i + \varepsilon \geq y_h$. Ezért $\mathrm{GL}(h/n\,;x') \geq \mathrm{GL}(h/n\,;x)$.

(iv) A k-adikként rangsorolt egyének esetében $y'_k = y_k$. Ezért $\mathrm{GL}(k/n\,;x') \geq \mathrm{GL}(k/n\,;x)$.

(v) Az ℓ helyzetben levő valamennyi egyén esetében $y'_\ell = y_j - \varepsilon \leq y_\ell$. Ezért

$$\begin{aligned}
\mathrm{GL}(\ell/n\,;x') - \mathrm{GL}(\ell/n\,;x) &= F(y_i+\varepsilon)/ - F(y_i) + F(y_j-\varepsilon)/ - F(y_k) \\
&\geq F(y_i+\varepsilon)/ - F(y_i) + F(y_j-\varepsilon)/ - F(y_j) \quad (F \text{ növekvő}) \qquad (3.6)\\
&\geq 0 \qquad (F \quad \text{konkáv})\,.
\end{aligned}$$

(vi) A j-edikként rangsorolt egyén számára $y'_j = y_\ell \leq y_j$. F konkavitásánál fogva

$$\mathrm{GL}(j/n\,;x') - \mathrm{GL}(j/n\,;x) = F(y_i+\varepsilon)/ - F(y_i) + F(y_j-\varepsilon)/ - F(y_j) \geq 0\,. \quad (3.7)$$

(vii) Végül minden m-edikként rangsorolt egyén esetében $y'_m = y_m$, amiből következik

$$\mathrm{GL}(m/n\,;x') \geq \mathrm{GL}(m/n\,;x)\,.$$

Ennélfogva mindkét esetben érvényes az $x' \geq_{\ell g} x$ reláció.
A $\geq_{\ell g}$ reláció tranzitivitása következtében az eredmény érvényes tetszőleges B bisztochasztikus mátrix esetében is.

Legyen most $w := (w_1,\ldots,w_n)$ és $z := (z_1,\ldots,z_n)$, ahol $w_i := F(y''_i)$ és $z_i := F(y'_i)$ minden i-re. Mivel F növekvő, $w_i \geq z_i$ minden i-re. Ez nyilvánvalóan egyenértékű azzal, hogy $w_i^w \geq z_i^w$ $(1,,2,\ldots,n)$, ahol $z^w = Pz$ (P olyan permutációs mátrix, amelyre $Pw = w^w$). Összegezve $j = 1,2,\ldots,k$-ra, kapjuk:

$$\sum_{j=1}^{k} w_j^w \geq \sum_{j=1}^{k}\left[\sum_{r=1}^{n} p_{jr}z_r\right] = \sum_{j=1}^{k} z_j^w . \quad (k = 1,2,\ldots,n) \tag{3.8}$$

Tekintettel a *3.3 lemmára*, ebből viszont következik

$$\sum_{j=1}^{k} w_j^w \geq \sum_{j=1}^{k} z_j^z \qquad (k = 1,2,\ldots,n) \tag{3.9}$$

vagyis $z \geq_{\ell g} w$, amivel befejeződik az elégségesség bizonyítása.

Szükségesség : Az ellenkező feltevésből kiindulva bizonyítunk, azaz feltesszük, hogy az implikáció hamis. Először azt tételezzük fel, hogy F nem konkáv. A *3.1 lemma* értelmében ez azt jelenti, hogy létezik $u,v,w,t \in V$ úgy, hogy $u < v = w < t$, $v - u = t - w$ és

$$\frac{F(v) - F(u)}{v - u} < \frac{F(t) - F(w)}{t - w} . \tag{3.10}$$

Legyen $y := (u,\ldots,u,u,t) \in D_n$ és $y' := (u,\ldots,u,v,w) \in D_n$; ekkor nyilván $y' \geq_\ell y$ és ezért a fortiori $y' \geq_{\ell g} y$. Tekintettel 3.10-re,

$$\mathrm{GL}(k/n\,;x') - \mathrm{GL}(k/n\,;x) < 0\,,$$

ami ellentmond a (T3.1.b) feltevésnek.

Tételezzük most azt fel, hogy F nem növekvő, vagyis létezik olyan $u,v \in V$, amelyre $u < v$, de $F(u) > F(v)$. Válasszuk meg y-t úgy, hogy $y := (u,\ldots,u,u,v) \in D_n$ és vezessük be a következő definíciót:

$$\widehat{Q} := \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \frac{v}{u} & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \widetilde{Q} := \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Legyen $y' := \widetilde{Q}y$, valahányszor $u = 0$, egyébként pedig $y' := \widehat{Q}y$. Mindkét esetben $y' = (u,\ldots,u,v,v)$, úgyhogy $y' >_{\ell g} y$. Azonban

$$\mathrm{GL}(k/n\,;x') - GL(k/n\,;x) = 0$$

minden $k = 1, 2, \ldots, (n-2)$ esetén, és

$$\mathrm{GL}(k/n\,;\,x') - \mathrm{GL}(k/n\,;\,x) = F(v) - F(u) < 0$$

$k = (n-1)$ és n esetén. Ezért $F(y) >_{\ell g} F(y')$, ami megintcsak ellentmond a (T3.1.b) feltevésnek. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Ha (T3.1.a)-ban „növekvő és konkáv" helyett „szigorúan növekvő és konkáv"-ot, (T3.1.b)-ben pedig „$\geq_{\ell g}$" helyett „$>_{\ell g}$" jelet írunk, továbbá előírjuk, hogy $y \neq u\mathbf{1}$ és $y' \neq v\mathbf{1}$ $(u, v \in \mathbf{R}_{++})$ legyen, akkor megkapjuk a *3.1 tétel* „erős" változatát. A *3.1 tétel* közvetlen következménye, hogy a csökkenő és konvex adórendszerek megfordítják az eloszlások általánosított Lorenz–rangsorolását.

4. Az eloszlások igazságosság–szempontú jóléti rangsorolásának megőrzése

4.1 A leggazdagabb egyén jövedelmének növekedését — ceteris paribus — rendszerint az egyenlőtlenség fokozódásának tekintik. A $\geq_{\ell g}$ reláció szerinti jólétnövekedés ezért összeegyeztethető a jövedelemegyenlőtlenség fokozódásával, tehát az általánosított Lorenz–dominancia fogalmában rejlő jóléti megítélés összeütközésbe kerülhet azzal a társadalmi törekvéssel, hogy a jövedelemeloszlás egyenletesebbé váljék. Például a Pareto–féle „individualista" és szétválasztható jóléti függvény esetén (amikor is az egyéni jóléti szintek függetlenek a többiek jövedelmétől), a hatékonyság és az egyenlőség közötti konfliktus mindig a hatékonyság javára oldódik meg. Ez a nézőpont akkor elfogadható, ha feltételezzük, hogy valamely x állapotban az életszínvonal mérésének egyetlen releváns információja az egyének jövedelmi helyzete. Ha viszont elismerjük annak lehetőségét, hogy az egyes emberek irígyek lehetnek, és még azt is elismerjük, hogy ezt az információt is figyelembe kell vennünk, amikor a társadalmi jólétet mérjük, akkor nyilvánvalóan nem állja meg a helyét az a felfogás, hogy minden olyan helyzet, amelyben egyes egyedeknek magasabb a jövedelme, automatikusan előnyösebb. A hatékonyság és az egyenlőség között ilyen konfliktus elkerülésére SHORROCKS (1983) javasolta a megengedett jóléti függvények osztályának megszorítását, a hatékonysági preferencia olymódon történő gyengítésével, amely összeegyeztethetővé teszi azt az egyenlőség fokozódásával.

Mivel valamennyi jövedelem arányos növelése nyilvánvalóan nem változtatja meg a viszonylagos egyenlőtlenséget, az egyenlőség és a hatékonyság konfliktusát természetes módon megoldaná, ha megkövetelnénk: a jólét akkor növekedjék, ha valamennyi jövedelem arányosan nő[7]. Vezessük be a következő definíciót:

$$\mathrm{LR}(k/n\,;\,z) := \mathrm{GL}(k/n\,;\,\widehat{z})\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n\,,$$

[7] Ez az elv, amelyet „arányos jövedelemkiegészítésnek" neveznek, azt állítja, hogy a jövedelemegyenlőtlenség mérése szempontjából csak a viszonylagos jövedelemkülönbségek számítanak. Általában DALTON-nak (1920) tulajdonítják ezt az elvet, noha az, amit ő az arányos jövedelemkiegészítés elvének nevezett, valójában azt követelte meg, hogy a jövedelemegyenlőtlenségek csökkenjenek (ill. növekedjenek) az arányos jövedelemkiegészítés (ill. levonás) esetén. [lásd DALTON (1920), 335. l.].

ahol $\mathrm{LR}(k/n\,;\,z)$ annak a jövedelemnek a részaránya, amely a lakosság $(k/n)\times 100\%$ legszegényebb részének jut a z helyzetben, és azt mondjuk, hogy az x eloszlás viszonylagos Lorenz-értelemben gyengén dominálja az y eloszlást (jele $x \geq_{\ell r} y$), akkor és csak akkor, ha

$$\mathrm{LR}\left(\frac{k}{n}\,;x\right) \geq \mathrm{LR}\left(\frac{k}{n}\,;y\right) \quad \text{minden} \quad k = 1,2,\ldots,(n-1) \quad \text{esetén}. \tag{4.1}$$

Azt mondjuk, hogy az x eloszlás az általánosított viszonylagos Lorenz-értelemben gyengén dominálja az y eloszlást (jele a továbbiakban $x \geq_{\ell r} y$), akkor és csak akkor, ha $x \geq_{\ell r} y$ és $\mu(x) \geq \mu(y)$. SHORROCKS (1983) dolgozatának *3. tételéből* következik, hogy $x \geq_{\ell r} y$ akkor és csak akkor, ha létezik olyan $z = \tau y$ eloszlás, amelyre y regresszív transzferek véges sorozatával állítható elő az x eloszlásból, vagy — ami ezzel egyenértékű — $W(x) \geq W(y)$ fennáll minden olyan Schur-konkáv $W : D_n \to \mathbb{R}$ jóléti függvényre, amelyre $W(\tau z) \geq W(z)$ minden $z \in D_n$ és $\tau \geq 1$ esetén (vagyis W az origóból kiinduló sugarak mentén növekvő).

Az itt említett értékítélet azonban még mindig igen erősnek tűnhet, hiszen az eloszlás „felnagyítása" változatlanul hagyja ugyan a jövedelemarányokat, de növeli a jövedelmek közötti abszolút különbségeket [lásd KOLM (1976)]. Bevezetve a

$$\mathrm{LA}(k/n\,;\,z) := \mathrm{GL}(k/n\,;\,\tilde{z})\,, \quad k = 1,2,\ldots,n\,,$$

jelölést, azt fogjuk mondani, hogy az x eloszlás abszolút Lorenz-értelemben gyengén dominálja az y eloszlást, (jele $x >_{\ell a} y$), akkor és csak akkor, ha

$$\mathrm{LA}\left(\frac{k}{n}\,;\,x\right) \geq \mathrm{LA}\left(\frac{k}{n}\,;\,y\right) \quad \text{minden} \quad k = 1,2,\ldots,(n-1) \quad \text{esetén}. \tag{4.2}$$

Az abszolút Lorenz-kritérium egyformán rangsorolja azokat az eloszlásokat, amelyek között csak annyi a különbség, hogy ugyanazt a pozitív mennyiséget adjuk valamennyi egyéni jövedelemhez. $\mathrm{LA}(k/n\,;\,z)$ jelenti a $(k/n)\times 100\%$ legszegényebb egyén jövedelmének átlagos elmaradását az átlagos jövedelemtől a z helyzetben [lásd MOYES (1987a)].
Azt mondjuk, hogy az x eloszlás abszolút általánosított Lorenz-értelemben gyengén dominálja az y eloszlást (jele $x \geq_{\ell ga} y$), akkor és csak akkor, ha $x \geq_{\ell a} y$ és $\mu(x) \geq \mu(y)$. SHORROCKS (1983) dolgozatának *4. tételéből* tudjuk, hogy $x \geq_{\ell ga} y$ akkor és csak akkor, ha $W(x) \geq W(y)$ fennáll minden olyan $W : D_n \to \mathbb{R}$ Schur-konkáv jóléti függvényre, amelyre $W(z + \theta\mathbf{1}) \geq W(z)$ minden $z \in D_n$, $\theta \geq 0$ esetén (vagyis W növekvő az első diagonálissal párhuzamos egyenesek mentén). Ezzel egyenértékű, hogy létezik olyan $z = y + \theta\mathbf{1}$ eloszlás, hogy y regresszív transzferek véges sorozata révén keletkezik a z eloszlásból.

A jövedelemeloszlások összehasonlítása a viszonylagos vagy az abszolút általánosított Lorenz-dominancia segítségével két lépésből álló művelet, először két eloszlás egyenlőtlenségét vetjük egybe, és azután használjuk fel az átlagjövedelemmel kapcsolatos információt. A szokásos módon definiáljuk a fenti rendezések aszimmetrikus részét.

4.2 Nyilvánvaló, hogy $\geq_{\ell g}$, $\geq_{\ell gr}$ és $\geq_{\ell ga}$ „egymásba skatulyázott" rendezések, ezért kimondhatjuk a sejtést, hogy

$$\mathcal{F}(\geq_{\ell ga}) \subseteq \mathcal{F}(\geq_{\ell gr}) \subseteq \mathcal{F}(\geq_{\ell g})$$

Valóban, mindaddig, amíg $n \leq 2$, a növekvő és konkáv jelleg (mindkettő szigoru értelemben) elégséges feltétel ahhoz, hogyy F megtartsa az eloszlások $\geq_{\ell ga}$ és $\geq_{\ell gr}$ szerinti rangsorolását. Nagyobb populációk esetében azonban ez már nem igaz. A részleteket illetően lásd a *Függeléket.* Hasznos lesz a következő

4.1 lemma :

Ha $n > 2$, (i) $\mathcal{F}(\geq_{\ell gr} \subseteq \mathcal{F} \geq_{\ell})$, (ii) $\mathcal{F}(\geq_{\ell ga} \subseteq \mathcal{F}(\geq_{\ell})$.

Bizonyítás :

Tekintettel a *2.1 tételre* és ACZEL (1966, 43. l.) *1. tételére*, vegyük először is észre, hogy ha $F \in \mathcal{F}(\geq_{\ell})$, akkor F megoldása a

$$F\left(\frac{u+t}{2}\right) = \frac{F(u)+F(t)}{2} \quad u, t \in V \tag{4.3}$$

függvényegyenletnek.

A két következtetést egyidejűleg bizonyítjuk, megmutatva, hogy abban az esetben, amikor $F \notin \mathcal{F}(\geq_{\ell})$, mindig találunk olyan eloszlást, (y és y'), amelyre $y' \geq_{\ell gr} y$ (illetve $y' \geq_{\ell ga} y$), de nem $x' \geq_{\ell gr} x$ (illetve nem $[x' \geq_{\ell ga} x]$). Tételezzük fel, hogy (4.3) hamis, és legyen

$$v = w = (u+t)/2\,, \quad \text{ahol} \quad u < t\,.$$

Két lehetőség van:

1. eset : $F(v) - F(u) > F(t) - F(w)$

Legyen $y := (u, \ldots, u, u, t) \in D_n$ és $y' := (u, \ldots, u, v, w) \in D_n$. Ekkor $y' \geq_{\ell} y$, ennélfogva $y' \geq_{\ell gr} y$ és $y' \geq_{\ell ga} y$ is érvényes. Másrészt

$$\sum_{i=1}^{n} F(y_i) < \sum_{i=1}^{n} F(y'_i)\,,$$

amiből következik, hogy nem $[x' \geq_{\ell} x]$. Mármost ellenőrizhető, hogy minden $k = 1, 2, \ldots, (n-2)$ esetén

$$\begin{aligned} \mathrm{LR}\left(\frac{k}{n}; x\right) &= \frac{kF(u)}{(n-2)F(u)+F(u)+F(t)} > \\ &> \frac{kF(u)}{(n-2)F(u)+F(v)+F(w)} = \mathrm{LR}\left(\frac{k}{n}; x'\right) \end{aligned} \tag{4.4}$$

vagyis nem $[x' \geq_{\ell r} x]$, ezért egyrészt $F \notin \mathcal{F}(\geq_{\ell gr})$, másrészt pedig hasonlóképpen

$$\begin{aligned} \mathrm{LA}\left(\frac{k}{n};x\right) &= \frac{k}{n}\left[F(u) - \frac{(n-2)F(u)+F(u)+F(t)}{n}\right] > \\ &> \frac{k}{n}\left[F(u) - \frac{(n-2)F(u)+F(v)+F(w)}{n}\right] = \mathrm{LA}\left(\frac{k}{n};x'\right) \end{aligned} \tag{4.5}$$

vagyis nem $[x' \geq_{\ell a} x]$, tehát $F \notin \mathcal{F}(\geq_{\ell ga})$.

2. eset : $F(v) - F(u) < F(t) - F(w)$

Legyen $y := (u,t,t,\ldots,t) \in D_n$ és $y' := (v,w,t,\ldots,t) \in D_n$. Nyilvánvaló, hogy $y' \geq_\ell y$, és így $y' \geq_{\ell gr} y$ valamint $y' \geq_{\ell ga} y$. Azonban

$$\sum_{i=1}^{n} F(y_i) > \sum_{i=1}^{n} F(y_i')$$

amiből következik, hogy nem $[x' \geq_\ell x]$. Továbbá tudjuk, hogy minden $k = 2,\ldots,$ $\ldots,(n-1)$ esetén

$$\begin{aligned} \mathrm{LR}\left(\frac{k}{n};x\right) &= \frac{F(u)+F(t)+(k-2)F(t)}{(n-2)F(t)+F(u)+F(t)} > \\ &> \frac{F(v)+F(w)+(k-2)F(t)}{(n-2)F(t)+F(v)+F(w)} = \mathrm{LR}\left(\frac{k}{n};x'\right) \end{aligned} \tag{4.6}$$

vagyis $F \notin \mathcal{F}(\geq_{\ell gr})$ és hasonlóképpen

$$\begin{aligned} \mathrm{LA}\left(\frac{k}{n};x\right) &= \frac{1}{n}\left[F(u)+F(t)+(k-2)F(t)-k\frac{(n-2)F(t)+F(u)+F(t)}{n}\right] > \\ &> \frac{1}{n}F\left[F(v)+F(w)+(k-2)F(t)-k\frac{(n-2)F(t)+F(v)+F(w)}{n}\right] = \\ &= \mathrm{LA}\left(\frac{k}{n};x'\right) \end{aligned} \tag{4.7}$$

vagyis $F \notin \mathcal{F}(\geq_{\ell ga})$, tehát ismét ellentmondásra jutottunk.

Az $\mathcal{F}(\geq_{\ell gr})$ és $\mathcal{F}(\geq_{\ell ga})$ függvényosztály jellemzése a *4.1 lemma* közvetlen következménye.

4.1 tétel : Korlátos (valamint nem–korlátos) jövedelmek esetén:

(T4.1.a) Vagy $F(t) = b$ vagy $F(t) = at$ $(a, b \in \mathbb{R}_+)$ akkor és csak akkor, ha
(T4.1.b) minden $y, y' \in D_n$ $(n > 2)$ esetén $y' \geq_{\ell gr} y$ fennállásából következik, hogy $F(y') \geq_{\ell gr} F(y)$.

Bizonyítás :

Az elégségesség nyilvánvaló, úgyhogy a szükségességet bizonyítjuk. A *4.1 lemma* értelmében a (T4.1.a) feltevésből következik, hogy $F(t) = at + b$ $(a, b \in \mathbb{R}_+)$. A bizonyítás teljessé tétele céljából csak annyit kell még megmutatnunk, hogy a és b nem lehet egyidejűleg szigorúan pozitív. Az ellenkező feltevésből indulunk ki, és feltételezzük, hogy a és b nem válik zérussá. Legyen $y = (u, \ldots, u, t) \in D_n$ és $y' = (\tau u, \ldots, \tau u, \tau u + \varepsilon, \tau t - \varepsilon) \in D_n$, ahol $u < t, \tau > 1$ és $0 < \varepsilon \leq \tau(t-u)/2$. Nyilvánvalóan $y' \geq_{\ell r} y$ és $\mu(y') \geq \mu(y)$; így $y' \geq_{\ell gr} y$. Továbbá, minden $k = 1, 2, c \ldots, (n-2)$ esetén érvényes

$$\begin{aligned} \mathrm{LR}\left(\frac{k}{n}; x\right) &= \frac{k(au+b)}{(n-1)(au+b)+(at+b)} > \\ &> \frac{k(a\tau u+b)}{(n-1)(a\tau u+b)+a\tau t+b} = \mathrm{LR}\left(\frac{k}{n}; x'\right) \end{aligned} \tag{4.8}$$

Ez pedig valójában azzal egyenértékű, hogy $(at + b/\tau)(au + b) > (au + b/\tau)(at + b)$, ami viszont igaz, ha $b/\tau < b$, ahogy feltételeztük. Ezért nem $[x' \geq_{\ell r} x]$, ami ellentmond (T.4.1.b)-nek. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

4.2 tétel : Korlátos (illetve nem korlátos) jövedelmek esetén:
(T4.2.a) $F(t) = at + b$ minden $a, b \in \mathbb{R}^2$ esetén feltéve, hogy $F(t) \geq 0$ [illetve $a, b \in \mathbb{R}_+$] akkor és csak akkor, ha
(T4.2.b) Minden $y, y' \in D_n$ $(n > 2)$ esetén, $y' \geq_{\ell ga} y$ fennállásából következik, hogy $F(y') \geq_{\ell ga} F(y)$.

Bizonyítás :

Az elégségesség nyilvánvaló, a szükségesség pedig következik a *4.1 lemmából.*

Ha $n = 2$, $\mathcal{F}(\geq_{\ell gr})$ és $\mathcal{F}(\geq_{\ell ga})$ növekvő és konkáv F függvényeket tartalmazza. Ha a (T4.1.b) illetve a (T4.1.b) feltételekben a $\geq_{\ell gr}$ illetve $\geq_{\ell ga}$ relációk helyébe az aszimmetrikus relációkat írjuk, továbbá előírjuk, hogy $a \neq 0$ legyen, megkapjuk a *4.1* és a *4.2 tétel* „erős" változatát.
Megjegyezzük, hogy ha F megőrzi az eloszlásoknak a $\geq_{\ell gr}$ reláció szerinti rangsorolását, akkor a fortiori megőrzi a $\geq_{\ell r}$ szerinti rangsorolásukat is. (Ugyanez érvényes a $\geq_{\ell ga}$ és a $\geq_{\ell a}$ relációkra is.) Könnyen belátható, hogy ennek a fordítottja is igaz, vagyis

4.1 korollárium : Minden $n \geq 2$ esetén

$$\text{(i)} \quad \mathcal{F}(\geq_{\ell gr}) = \mathcal{F}(\geq_{\ell r}), \qquad \text{(ii)} \quad \mathcal{F}(\geq_{\ell ga}) = \mathcal{F}(\geq_{\ell a}).$$

5. Eredményeink a szakirodalom tükrében és további kutatási lehetőségek

5.1 Tételezzük fel, hogy valamely $\succeq$ bináris reláció értelmében az y eloszlás rangsorolása magasabb, mint az y'-é, és tételezzük fel továbbá, hogy létezik olyan F függvény, amelyre

$$F(y) := (F(y_1), \ldots, F(y_n))$$

és

$$F(y') := (F(y'_1), \ldots, F(y'_n)).$$

Hogyan jellemezhető azon F függvények halmaza, amelyek megőrzik az y illetve az y' eloszlás rangsorolását? Bebizonyítottuk, hogy ha az $\succeq$ reláció általánosított Lorenz-rendezés, akkor F-nek növekvőnek és konkávnak kell lennie (*3.1 tétel*). Ha korlátozzuk a hatékonysági preferenciát olymódon, hogy a jólét növekedése összeegyeztethetővé váljék az egyenlőség viszonylagos értelemben vett fokozódásával, akkor F-nek lineárisnak kell lennie (*4.1 tétel*). Ha továbbmegyünk egy lépéssel, és azt kívánjuk, hogy a jólét akkor növekedjék, ha minden jövedelem azonos összeggel lesz nagyobb, akkor a kvázi-lineáris adórendszerekhez jutunk (*4.2 tétel*). MARSHALL és OLKIN (1979, 5. fejezet) részlegesen már tanulmányozta azokat a függvényeket, amelyek megőrzik az eloszlások rangsorolását. Ha felismerjük, hogy a Lorenz-dominancia nem más, mint a majorizálás reciproka, akkor látjuk, hogy a mi *2.1 tételünk* ekvivalens az ő *A.1.e. tételükkel.* Hasonlóképpen ők is felismerték azt a tényt, hogy a növekvő és konkáv függvények megőrzik, viszont a csökkenő és konvex függvények megfordítják az eloszlások általánosított Lorenz-rangsorolását (lásd *A.2 tételüket*). Úgy látszik azonban, nem ismerték föl azt a tényt, hogy ezeknek az állításoknak a megfordítása is igaz, és azt a függvényosztályt sem határozták meg, amely megőrzi az eloszlásoknak a viszonylagos és az abszolút általánosított Lorenz-kritérium szerinti rangsorolását. Más összefüggésekben THON (1985) a mi *3.1 tételünkhöz* igen hasonló eredményre jutott. Bizonyításában azonban additívan szétválasztható és deriválható jóléti függvényeket alkalmaz, míg nekünk ezekre az erős feltevésekre nem volt szükségünk.

5.2 Mint a bevezetőben hangsúlyoztuk, az eloszlások rangsorolásának megőrzése akkor különösen jelentős, amikor az F függvényt adórendszernek fogjuk fel. A tanulmányban levezetett tételeknek a jövedelemadózásra vonatkozó következményei legalább három esetben fölöttébb érdekesek.

Először is, egyes esetekben fontos lehet számunkra, hogy meg tudjuk állapítani, milyen jóléti és/vagy egyenlőtlenségi hatást gyakorol az adózás előtti jövedelem valamilyen megváltozása az adózás utáni jövedelemre. Az eloszlás rangsorolásának megőrzése — mint követelmény — eleve kizárja az olyan adórendszereket, amelyeknél az adózás előtti jövedelmek egyenlőbbé válása az adózás utáni jövedelmek jóléti értékének csökkenését eredményezi, hiszen ez nyilvánvalóan kedvezőtlen tulajdonság lenne egy adórendszer szempontjából. Tételezzük föl, hogy a jövedelmeket újabb és újabb adózás alá vetjük. Ez történik például, amikor a társadalombiztosítási hozzájárulást vetik ki az első lépésben, és az ebből adódó nettó jövedelemre vetik ki a jövedelemadót, vagy amikor a szociális juttatásokat beleszámítják a jövedelemadó alapjába. Az adóreformok alapvető konzisztenciakövetelménye, hogy a legszegényebbek helyzetének javítását célzó transzferfizetések módosító hatása ne semmisüljön meg a jövedelemadó levonása után. Tételeink konkáv, lineáris vagy kvázi–lineáris jövedelemadózási rendszert írnak elő, a célnak megfelelően választott jóléti kritérium szerint.

Másodszor, az adózás előtti rangsorolás megőrzése az adózás utáni jövedelemelosztásban nyilvánvaló következményekkel jár a jövedelemadózás országok közötti vagy idősoros összehasonlításakor. Mindeddig az a szokásos gyakorlat, hogy az adózás utáni eloszlások között megfigyelhető különbségeket az adózás előtti helyzetnek és/vagy az érvényben lévő adórendszernek tulajdonítják. Ha adva van valamilyen rögzített adózás előtti eloszlás, akkor minél progresszívebb az adórendszer, annál erőteljesebb az egyenlítő hatása. A *3.1 tétel* egyik legfontosabb következménye szerint: ha adva van egy rögzített konkáv adórendszer, akkor minél magasabb rangot kapott az általánosított Lorenz–dominancia szerint valamely adózás előtti eloszlás, annál magasabb lesz az adózás utáni eloszlás rangja is [további részleteket illetően lásd MOYES (1988b)].

Végül, az adórendszerek kellemes tulajdonságának tekinthető, ha biztosítják, hogy amennyiben a népesség valamely csoportja egy másik csoportnál kedvezőbb helyzetben van az adózás előtt, akkor ez a helyzet az adózás után is fennmaradjon. Ez a feltétel speciális esetként tartalmazza azt a követelményt, hogy az adóalanyoknak a jövedelemskálán elfoglalt helyzete ne változzék. A *3.1 tétel* triviális módosítása igazolja, hogy F növekvő és konkáv jellege elegendő annak kiküszöbölésére, hogy a csoportoknak a jövedelemskálán való rangsorolása megváltozzék.[8]

5.3 Felhívjuk a figyelmet két lehetséges általánosításra. A tanulmányban mindvégig homogén népességet vizsgáltunk, továbbá feltételeztük, hogy az adót, amelyet valamely egyén fizetni köteles, kizárólag eredeti jövedelme alapján számítják ki. ATKINSON és BOURGNIGNON újabb kutatásaira (1987) támaszkodva, kevésbé szűkkörű fogalmat alkothatunk az adózásról, megengedve, hogy az a jövedelem, amely valamely adóalany rendelkezésére áll az adó megfizetése után, az adózás volumenétől és az adózás előtti jövedelemtő függjön, és ekkor azokat az adórendszereket keressük, amelyek megőrzik az eloszlások a szerzők által meghatározott „általánosított" jóléti rangsorolását. Az általánosítás egy másik lehetséges irányaként feltételezhetjük, hogy minden egyén adózás utáni jövedelme az egész eloszlásnak a függvénye. Történtek már ilyen irányú kísérletek, úgyhogy néhány eredmény már rendelkezésünkre áll. Például MARSHALL és OLKIN (1979, A.14) bebizonyította, hogy minden $H(z) : D_n \to D_n$ függvény, amelynek definíciója $H(z) = (f_1(z), \ldots, f_n(z))$, (ahol $f_j : D_n \to \mathbb{R}_{++}$ Schur–konkáv) megőrzi az adózás előtti

[8] Ha adva van az $N := \{1, 2, \ldots, n\}$ halmaznak egy nem üres S részhalmaza és egy $z \in D_n$ eloszlás, jelöljük $z(S)$-sel z-nek az S-re való korlátozását. A népességcsoportok esetében például a (T3.1.b) feltételt így lehetne felírni: Minden $y \in D_n$ és minden $S, T \subseteq N$ esetén az $y(S) \geq_{\ell g} y(T)$ egyenlőtlenségből következik $F(y(S)) \geq_{\ell g} F(yT))$.

eloszlások Lorenz–rangsorolását az adózás utáni eloszlások általánosított Lorenz–rangsorolását tekintve.[9] Nyilvánvaló, hogy a jelenlegi elemzés elmélyíthető lenne, ha figyelembe vennénk az egyének közötti különbségeket, és/vagy ha a redisztribúció utáni jövedelmet az összes adózás előtti jövedelem függvényeként fognánk fel. Ezeket a kérdéseket a további kutatásokra bízzuk.

Függelék

Ha $n = 2$, a növekvő és konkáv jelleg elégséges feltétele annak, hogy az F függvény megőrizze az eloszlások rangsorolását mind a $\geq_{\ell gr}$, mind pedig a $\geq_{\ell ga}$ relációra nézve. Legyen $y := (u,t)$ és $y' := (\tau u + \varepsilon)$, ahol $u < t$, $\tau \geq 1$ és $0 < \varepsilon \leq \tau(t-u)/2$. Ebből következik, hogy $y' >_{\ell r} y$ és $\mu(y') \geq \mu(y)$; tehát $y' >_{\ell gr} y$. Mivel F növekvő és konkáv (mindkettő szigorúan),

$$F(\tau u + \varepsilon) + F(\tau t - \varepsilon) > F(u) + F(t)\,.$$

átrendezés után ez ekvivalens az alábbival:

$$\begin{aligned} \mathrm{LR}\left(\frac{1}{2}\,; x'\right) = \frac{F(u)}{F(u)+F(t)} > \frac{F(\tau u+\varepsilon)}{F(\tau u+\varepsilon)+F(\tau t-\varepsilon)} = \\ = \mathrm{LR}\left(\frac{1}{2}\,m; x\right) \end{aligned} \tag{A.1}$$

vagyis $F(y') >_{\ell gr} F(y)$. Vezessük be most a következő definíciót: $y' := (u + \theta + \varepsilon t + \theta - \varepsilon)$, ahol $\theta \geq 0$ és $0 < \varepsilon \leq (t-u)/2$, ekkor hasonló gondolatmenettel kapjuk:

$$\begin{aligned} \mathrm{LA}\left(\frac{1}{2}\,; x'\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{F(u)-F(t)}{2} > \frac{1}{2}\cdot\frac{F(u+\theta+\varepsilon)-F(u+\theta-\varepsilon)}{2} = \\ = \mathrm{LA}\left(\frac{1}{2}\,; x\right) \end{aligned} \tag{A.2}$$

vagyis $F(y') >_{\ell ga} F(y)$. Annak megmutatása céljából, hogy F növekvő és konkáv jellege (mindkettő szigorúan) nem elégséges annak biztosítására, hogy megőrizze az eloszlások rengsorolását a $\geq_{\ell gr}$ relációra nézve, ha $n > 2$, válasszunk így: $y := (u,\dots,u,u,t) \in D_n$ és $y' := (u,\dots,u,u+\varepsilon,t-\varepsilon) \in D_n$, ahol $0 < \varepsilon \leq (t-u)/2$. A konstrukciónál fogva $y' \geq_\ell y$, ezért $y' \geq_{\ell gr} y$ és $y' \geq_{\ell ga} y$. Ahhoz, hogy nem $[x' \geq_{\ell r} x]$ teljesüljön, elegendő, hogy

$$\mathrm{LR}(k/n\,; x) > \mathrm{LR}(k/n\,; x')$$

[9] A megfordított állítás azonban hamis, amint könnyen beláthatjuk az $f_j(z) := z_j/\mu(t)$ választással. Tételezzük fel, hogy az x eloszlás progresszív transfer révén keletkezett az y eloszlásból. Nyilvánvaló, hogy $\mu(x) = \mu(y)$ és így $\widehat{x} =: H(x) \geq_{\ell g} H(y) := \widehat{y}$, noha kétségtelen, hogy f_j nem Schur–konkáv.

legyen legalább egy $k \in \{1, 2, \ldots, (n-1)\}$ esetén. A szigorú konkavitásból következik, hogy

$$\mathrm{LR}\left(\frac{k}{n}; x\right) = \frac{kF(u)}{(n-1)F(u)+F(t)} > \tag{A.3}$$
$$> \frac{kF(u)}{(n-2)F(u)+F(u+\varepsilon)+F(t-\varepsilon)} = \mathrm{LR}\left(\frac{k}{n}; x'\right)$$

minden $k = 1, 2, \ldots, (n-2)$ esetén, így tehát nem $[x' \geq_{\ell r} x]$, amiből következik, hogy nem $[x' \geq_{\ell gr} x]$. Azonban legalábbis ebben a speciális esetben a szigorú konkavitásból nem következik $x \geq_{\ell r} x'$. Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$\mathrm{LR}((n-1)/n; x') > \mathrm{LR}((n-1)/n; x);$$

ezért az x eloszlás viszonylagos Lorenz-görbéje egyszer — és felülről — keresztezi x' viszonylagos Lorenz-görbéjét. Hasonló következtetés vonható le az x és az x' eloszlás abszolút Lorenz-görbéjére nézve is, amiből következik, hogy nem $[F(y') \geq_{\ell ga} F(y)]$.

(Beérkezett: 1988. december 29-én.)

Irodalom

ACZEL, J., (1966): *Lecture on functional equations and their applications.* New-York: Academic Press.

ATKINSON, A.B., (1970): On the measurement of inequality, *Journal of Economic Theory,* Vol.2, pp.244–263.

ATKINSON, A.B. és F. BOURGUIGNON, (1987): Income distribution and differences in needs, in G.R. Feiwel (ed.), *Arrow and the foundations of the theory of economic policy,* MacMillan.

DALTON, H., (1920): The measurement of the inequality of incomes, *Economic Journal,* Vol.30, pp.348–361.

DASGUPTA, P., SEN, A.K. és D. STARRETT, (1973): Notes on the measurement of inequality, *Journal of Economic Theory,* Vol.6, pp.180–187.

EICHHORN, W., FUNKE, H. és W.F. RICHTER, (1984): Tax progression and inequality of income distribution, *Journal of Mathematical Econimcs,* Vol.13, pp.127–131.

FEI, J.C.H., (1981): Equity oriented fiscal programs, *Econometrica,* Vol.49, pp.869–881.

FIELDS, G.S. és J.C.H. FEI, (1978): On inequality comparisons, *Econometrica,* Vol.46, pp.303–316.

JAKOBSSON, U., (1976): On the measurement of the degree of progression, *Journal of Public Economics,* Vol.5, pp.161–168.

KOLM, S.C., (1976): Unequal inequalities 1, *Journal of Economic Theory,* Vol.12, pp.416–442.

MARSHALL, A.W. és I. OLKIN, (1979): *Inequalities: Theory of majorization and its applications.* New-York, Academic Press.

MOYES, P., (1987a): A new concept of Lorenz domination, *Economics Letters*, Vol.23, pp.203–207.

MOYES, P., (1987b): *Taxation des revenus, inégalité et bien-être social: Quelques éléments d' analyse*, Thése pour le Doctorat d'Etat, L.A.R.E., Economie Publique.

MOYES, P., (1988a): A note on minimally progressive taxation and absolute income inequality, *Social Choice and Welfare*, Vol.5, pp.227–234, reprinted in W. GAERTNER és P.K. PATTANAIK (eds.), *Distributive Justice and Inequality*, Heidelberg, Springer–Verlag.

MOYES, P., (1988b): Progresszive taxation and after tax welfare, L.A.R.E, Economie Publique, Discussion Paper No.8802.

SHORROCKS, A.F., (1983): Ranking income distributions, *Economica*, Vol.50, pp.3–17.

THON, D., (1985): A note on taxation, incentives and risk sharing, *Operations Research Letters*, Vol.3, pp.323–325.

THON, D., (1987): Redistributive properties of progressive taxation, *Mathematical Social Sciences*, Vol.14, pp.185–191.

Functions that Preserve the Welfare Ranking of Distribution

We identify in the paper those classes of functions that preserve the ranking of distributions according to three welfare criterion introduced recently by A.F. Shorrocks. It is proven that a necessary and sufficient condition for a function to preserve the generalized Lorenz ordering of distributions is that it is increasing and concave. Requiring welfare improvements to be compatible with more equality, we obtain linear [resp. quasi–linear] functions when emphasis is placed on relative [resp. absolute] income differentials.

KÖNYVEKRŐL

KORNAI JÁNOS–MATITS ÁGNES: *A vállalatok nyereségének bürokratikus újraelosztása.* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1987. 247 o.

A magyar gazdasági reformmal foglalkozó közgazdasági irodalom bőséges kosarába egy újabb mű, KORNAI JÁNOS ÉS MATITS ÁGNES: „A vállalatok nyereségének bürokratikus újraelosztása" című könyve került, melyet a Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó jelentetett meg 1987-ben.

Ez a kötet több szempontból is különleges érdeklődésre tarthat számot. Biztos ajánlólevél az olvasó számára *Kornai János* neve, akinek 30 éves munkássága, számtalan úttörő-jelentőségű publikációja nemcsak a szűkebb közgazdász–társadalomban ismert. Az 1980-ban megjelent, a szocialista gazdaság átfogó jellemzését adó „A hiány" című könyve pedig immár klasszikus alapirodalomnak számít. Ebből a könyvből ismertük meg és vettük át például az állam és a vállalatok kapcsolatát nagyon kifejezően jellemző fogalmat, a paternalizmust. Ez a mű a mostani könyv elméleti alapjának tekinthető, ezért is érdemes elolvasni.

Az utóbbi években a gazdasági életben számos deklarált változtatási szándéknak lehettünk tanui. Az állam közvetlen beavatkozásának, azaz a „kézi vezérlésnek" a jelentős csökkentése, a vállalati nyereségnek a piaci viszonyoktól való függése kétségkívül fontos kérdése a reformnak. A rendeletek, határozatok, utasítások formájában megnyilvánult szándékok és a megvalósításuk közötti összhangot (vagy mondjuk inkább szakadékot) számos szerző, köztük *Kornai János* is elemezte már több cikkben és tanulmányban. Most azonban egy olyan könyvet tart kezében az olvasó, amely alapjaiban tér el a hagyományosnak tekinthető verbális megközelítésmódtól. Talán nem árulok el műhelytitkot, ha — ezt bizonyítandó — röviden ismertetem a szerzők munkamódszerét.

A könyv az 1981-ben kezdett kutatómunka keretében született tanulmányokon alapul. E tanulmányok írása során — számítógépes kifejezéssel élve — igazi interaktív kapcsolat alakult ki a szerzők között. Az elméleti feltevések megfogalmazását lépésről–lépésre — bőséges matematikai eszköztárat felvonultatva — szembesítették a valósággal, miközben újabb sejtéseket fogalmaztak meg és ellenőriztek.

„Párbeszédes" munkamódszerük nem ismeretlen más tudományterületeken. Talán nem sértő egyik szakma képviselőire sem, ha az elméleti közgazdászt a diagnózist megállapító orvoshoz, a matematikai ismeretekben jártas elemző–közgazdászt pedig a laborokban, a röntgengép mellett vagy a sebészeten dolgozó kollégához hasonlítjuk.

Az általános állapot verbális leírása éppúgy elengedhetetlen feltétele az eredményes gyógyítómunkának, mint a operálás, amikor is a szike szerepét a matematikai módszerek töltik be. Az adatelemző munka során számos rejtett összefüggés feltárására nyílik lehetőség, amely negymértékben segíti a valóság többé–kevésbé hű matematikai modellezését. Az együttműködés tehát, mint ez a könyv is bizonyítja, szükségszerű és mindkét fél számára gyümölcsöző.

Ez az aktív együttműködés az az újabb szempont, ami miatt különösen érdekes olvasmány ez a kötet.

Számos kvalitatív állítást találunk a könyvben, melyet átfogó számításokkal támasztanak alá. Végig érződik a szerzők mértéktartása: így *is* lehet vizsgálni a redisztribució folyamatát.

Az elméleti és az empirikus közelítésmód együttes alkalmazása miatt az olvasóközönség is szélesebb körből kerülhet ki, mintha tisztán leíró vagy alapvetően módszertani tanulmány készült volna. A könyv az *Előszó* és a *Zárszó* mellett három fejezetet tartalmaz.

A *2. fejezet „Elméleti és módszertani megfontolások"* címmel került a kötetbe. Itt olvashatunk a vizsgálatok során alkalmazott egyszerűsítő feltevésekről, a közgazdasági alapfogalmakat többé-kevésbé leíró speciális mutatószámokról és a felhasznált statisztikai módszerekről. Az alfejezeteket olvasva feltárul előttünk az elemzőmunka szinte minden lépése, és az egyes lépésekben leküzdött nehézségek sora. Nincs az a terjedelmes módszertani leírás, amely számba tudná venni egy-egy konkrét adathalmaz elemzésének lehetséges problémáit. Itt viszont több, a konkrét vizsgálatból leszűrt, általánosítható megállapítást olvashatunk, amely ötleteket, tanácsokat nyújthat más kutatóknak is.

A lehetséges minta kialakítása, a különböző mintakorrekciós eljárások alkalmazása, a hiányzó adatok kezelése, a páronkénti kapcsolatok erősségének mérése mind-mind megelőzi és jelentősen befolyásolja a többváltozós elemzési módszerek alkalmazhatóságát és az eredményeket. A sokváltozós statisztikai módszerek által igényelt adatmátrix előkészítésének ismertetését követendő példának tekinthetjük, amelynek során nyilvánvalóvá válik, hogy a szerzők megállapításai milyen feltételek mellett érvényesek.

A *3. fejezet* címe: „Általános elemzés: a nyereségösztönzés erőssége". Ebben a részben utalást találunk a profitmaximalizálás kapitalizmusbeli szerepére és *Kornai János* az *„Anti-Equilibriumban"* ezzel kapcsolatban kifejtett nézeteire. Ezután pedig összefoglalót kapunk az 1968-as magyar gazdasági reform alapgondolatairól, különös tekintettel a nyereségérdekeltség megteremtésének szándékára.

A költségvetési korlát puhaságának, mint a paternalizmus megnyilvánulásának bemutatása után a redisztribució mértékéről és formáiról olvashatunk. A szerzők 11 megállapítást fogalmaztak meg, többek között a jövedelmek nivellálásáról, a veszteséges vállalatok túléléséről, a jövedelmek és a beruházások kapcsolatáról. Minden megállapítást számszerű vizsgálatok sora követ. Az abszolút és relatív mutatók alapján meghatározott empirikus regressziók és korrelációs együtthatók mellett klaszteranalízissel és faktoranalízissel kapott eredmményeket is ismertetnek. A levont következtetések mellett (pl. az eredeti jövedelmezőségi mutató elszakad a többi jövedelmezőségi mutatótól) figyelemre méltó az egyébként széles körben alkalmazott statisztikai eljárások ötletes felhasználása. A feltáró vagy megerősítő jellegű alkalmazások számszerűen is nyomon követhetők a szövegközi táblázatokból és a könyv egynegyedét kitevő függelékből. Ne feledjük, hogy itt még az adóreform bevezetését megelőző évek tendenciáiról, tényadatairól van szó. Érdekes lenne néhány év mulva a változások hatásait számszerűsíteni, és a két időszak összehasonlító értékelését elvégezni.

A módszertani érdekességek sorában meg kell említenünk azt is, hogy nemcsak keresztmetszeti, hanem idősoros elemzések is készültek.

A vizsgált problémák szempontjából az időbeniség hatása értelemszerűen nem elhanyagolható. Ugyanakkor ebben a kutatásban az időbeni folyamatok leírása a tendenciák tartósságának kimutatása, az idősorok rövidsége miatt a hagyományos idősorelemző módszerekkel nem volt lehetséges. A másik problémát az jelentette, hogy a vizsgált időszakban szabályozóváltozás volt, ami az adatrendszerben inhomogenitást okozott. Az 1976–79 és az 1980–82-es évekre meghatározott átlagmutatószámok használata így részben a kényszerítő körülményeknek tudható be.

A harmadik fejezet befejező része az egyéni jövedelmek és a jövedelmezőség kapcsolatát, illetve egymástól való elszakadását tárgyalja. Elgondolkodtató az a megállapítás, hogy a dolgozók egyik ágazatban sem érdekeltek a jövedelmezőség növelésében, mert a reálkeresetek a vállalatok teljesítményeitől lényegében függetlenek, a keresetek eloszlása a vállalatok között egyenletes.

Mind a 11 megállapítás megérdemelné a kiemelt ismertetést, de még a *4. fejezetről* is kell szólnunk. *„Speciális megközelítések"* cím alatt egyrészt újabb 9 megállapítást, másrészt módszertani szempontból különösen izgalmas megközelítéseket találunk.

Az időbeni változások figyelemmel kísérését, a változások számszerűsítését fontos feladatként jelölik meg a szerzők.

A vállalatnagyság méréséről *Matits Ágnesnek* már 1985-ben jelent meg cikke. Az általa javasolt — főfaktorral kifejezett — vállalatnagyság mutató segítségével kis-, közepes- és nagyvállalatokat különítettek el. A komplex mutató segítségével a nagyvállalatok előnypozícióit is tetten érték. Az ágazati hovatartozás hatását szóráselemzéssel számszerűsítették, és elemzéseikkel megcáfolták azt a közhiedelmet, hogy az export tartós előnyhelyzetet teremt a vállalatok számára.

A *Zárszóban* közölt összefoglaló áttekintésben óvakodnak a szerzők attól, hogy a jelenségek leírását megdönthetetlen értékítéletekkel zárják. Nem adnak útmutatást sem a magyar népgazdaság „gyógykezelésére", de példát mutatnak arra, hogyan lehet statisztikai adatok alapján gazdaságpolitikai következtetésekhez alapot szolgáltatni. És ahhoz, hogy előbbre jussunk, nem árt pontosan tudni, hogy hol vagyunk.

KOVÁCS ERZSÉBET

Köszönet a kötet lektorainak

A Szigma 1987–88. évfolyamához benyújtott cikkeket — a Szerkesztőség állandó munkatársain kívül — a következő külső munkatársak lektorálták:

Ambrus-Lakatos Lóránd
Augusztinovics Mária
Ábel István
Bagdy Gábor
Bokor József
Bródy András
Budavári Péter
Csekő Imre
Ehrlich Éva
Forgó Ferenc
Gyurkovics Éva
Halpern László
Hunyadi László
József Sándor
Klafszky Emil
Körösi Gábor
Krámli András
Lengyel Imre
Martinás Katalin
Mátyás László
Medvegyev Péter
Meszéna György
Meyer Dietmar
Mihályffy László
Neményi Vilmos
Paizs János
Patyi Károly
Postáné Vellai Györgyi
Simon András
Simonovits András
Szentpéteri Szabolcsné
Székely István
Tallós Péter
Uhrin Béla
Vincze János
Vita László
Vízvári Béla
Ziermann Margit

Áldozatkész munkájukért ezúton is köszönetet mond a *Szerkesztőség*.

A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó és Nyomda Vállalat főigazgatója
Szedte és nyomta: az ECONOMIX Közgazdász Egyetemi Kisszövetkezet kiadásszervezésében: MKKE házinyomda Felelős vezető: Jász József
Budapest, 1989, 88/23
Felelős szerkesztő: Király Júlia
Műszaki szerkesztő: Sándor István
Megjelent: 8,75 (A/5 ív) terjedelemben
HU ISSN 0039–8128

CONTENTS

BORROWED QUILLS

BOOK REVIEWS

Ára: 26,- Ft
Előfizetés egy évre: 104,- Ft

ISSN 0039-8128

TARTALOM

IDEGEN TOLLAK

KÖNYVEKRŐL

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST