Szigma, XX. (1987-88) 2-3. sz.

SIMONOVITS ANDRÁS

A szocialista gazdaság beruházási ciklusainak matematikai modellje

1. Bevezetés

1.1. Expozíció

Dolgozatomban a *szocialista gazdaság beruházási ciklusait* egy viszonylag egyszerű matematikai modellel vizsgálom. Folytatva a SIMONOVITS (1987) és (1988a) dolgozatpárban elkezdett munkát, olyan modellt óhajtok szerkeszteni, amelyben a szocialista gazdaság beruházási ciklusai nem egyszerűen a rosszul megválasztott reakciók következményei, hanem a hiánygazdaságban uralkodó feszültségek enyhítésének szükségszerű velejárói. Míg korábbi két dolgozatom vagy a belső, vagy a külső feszültség ingadozását vizsgálta, most a két feszültség együttes (bár késleltetett) hullámzását vizsgálom. Módszertani okokból a szocialista gazdaság klasszikus korszakát, az 1960-1973-as éveket vizsgálom.

Kiindulásul BAUER (1978) és (1981) munkája szolgál, amely monografikusan dolgozta föl a témát.[1] A modellezésnél nagymértékben támaszkodhattam korábbi modellekre: KORNAI (1976), (1982) és LACKÓ (1980), (1987), (1988).[2] Természetesen hasznosítottam az említett források által ihletett dolgozatokat is, köztük saját korábbi — részben Kornai Jánossal közösen írt — cikkeimet: SIMON (1981), KORNAI-SIMONOVITS (1982), (1983) és SIMONOVITS (1986). A források bősége ellenére igyekeztem a cikket úgy megírni, hogy az előzmények ismerete nélkül is érthető legyen.[3]

---

[1] A dolgozatban nem foglalkozunk alternatív cikluselméletekkel. Mindazonáltal fölhívjuk az Olvasó figyelmét SOÓS (1986) monográfiájára (lásd még SOÓS (1983)), amely számos ponton egyetért Bauer cikluselméletével, Kornai hiányelméletével és Lackó modellezésével, alapvető kérdésekben azonban szemben áll velük.

[2] A továbbiakban nem hivatkozom külön LACKÓ (1988)-ra, amely a publikálatlan LACKÓ (1987) számunkra legfontosabb részeinek angol nyelvű publikációja.

[3] Mindenekelőtt köszönetet mondok Kornai Jánosnak és Lackó Máriának, akiknek munkája és támogatása nélkül ez a dolgozat nem született volna meg.

Köszönet illeti a dolgozat korábbi változatainak bírálóit: Ábel Istvánt, Bauer Tamást, John Bonint, Bródy Andrást, Gács Jánost, Halpern Lászlót, Kapitány Zsuzsát, Király Júliát, Michael Lovellt, Martos Bélát, Molnár Györgyöt, Simon Andrást, Soós K. Attilát, Tarján Tamást és Vincze Jánost. Természetesen a dolgozatban kifejtett állításokért és az esetleges hibákért kizárólag én vagyok felelős.

Az említett kutatásokkal párhuzamosan fejlődött a TÉNYI (1976) és a TARJÁN-TÉNYI (1977) cikkel fémjelzett irányzat, amelyet Bródy kezdeményezett, és BRÓDY (1980) és TARJÁN (1987) foglalt össze.

Bár nem foglalkozom a tőkés gazdaság beruházási ciklusaival, néhány klasszikus cikk módszertani gondolatait felhasználom: FRISCH (1933), SAMUELSON (1939), KALECKI (1933) és HICKS (1950). (A gazdasági ciklusokról szóló összefoglaló cikk ZARNOWITZ (1985), amely azonban meg sem említi a szocialista gazdaságot.)

Modellem statisztikailag mért vagy mérhető mennyiségekkel dolgozik, ökonometriai elemzésre azonban nem használható. LACKÓ (1980) és (1987) egy–egy hasonló modellt ökonometriailag verifikált.[4]

1.2. A modell dióhéjban

A modellen végig húzódik KORNAI (1980) gondolata: a szocialista gazdaságban a termelési és különösen a beruházási célú kereslet majdnem végtelen. Az állandó túlkereslet folytán kialakuló *feszültségeket* mennyiségi (árjelzés nélküli) szabályozási mechanizmusok korlátozzák, (KORNAI, 1982).

BAUER (1981) nyomán a beruházási folyamatnak kétféle feszültségét különböztetjük meg: a *külső* és a *belső* feszültséget, (v.ö. LACKÓ (1980) és (1987)). A külső feszültséget vagy a fogyasztási hányad elégtelenségével vagy a külkereskedelmi mérleg hiányával mérjük. A belső feszültség definiálásához a következő fogalmakat kell bevezetnünk.

Minden gazdaságban jelentős eltérés lehet az adott évben beruházásra fordított eszközök volumene (röviden: *beruházás*), az adott évben indított beruházási akciók *várható teljes költsége* (röviden:*indítások*) és az adott évben üzembe helyezett beruházások volumene (röviden: *üzembe helyezés*) között. (BAUER (1981, 1. és 2. fejezet); lásd még: FRISCH (1933) és KALECKI (1933)). Mivel a beruházási akciók általában több évig tartanak, párhuzamosan különböző években indított beruházási akciókat valósítanak meg. A folyamatban lévő beruházások *teljes* és *maradék költségelőirányzata* — az utóbbit *beruházási elkötelezettségnek* is nevezik — Bauer szerint alapvető szerepet játszik a szocialista gazdaság beruházási ciklusaiban. Míg Bauer elsősorban a teljes költségelőirányzat és a beruházás hányadosával, a beruházások szétforgácsoltságával számol, mi — KORNAIT (1982) és LACKÓT (1980) követve — a maradék költségelőirányzat és a GDP hányadosával dolgozunk, és belső feszültségnek e hányados minimális értéke fölötti részét nevezzük.

Mint említettük, a döntések feszültségeket gerjesztenek, s a feszültségekre reagálnak a döntések. Először a feszültségek keletkezését tanulmányozzuk.

---

[4] A teljesség kedvéért megemlítek néhány olyan ökonometriai modellt, amely a szocialista gazdaság beruházási folyamataival foglalkozik: GROSFELD (1987), ROLAND (1987) és SIMON (1981).

A külső feszültség a beruházási hányad növekvő függvénye. Ez az összefüggés szinte definíció szerint igaz, ha figyelembe vesszük, hogy a készletfelhalmozási hányad együtt változik a beruházási hányaddal. A túlberuházás tehát túlfelhalmozás, amely vagy a) a fogyasztást, vagy b) a külkereskedelmi mérleget terheli. Az a) esetet OLIVERA (1960) tanulmányozta, a b) esetet pedig ZALA (1967). BAUER (1978) és (1981) *fogyasztás-szimmetrikus*, ill. *külkereskedelem-szimmetrikus* beruházási ciklusnak nevezte a két esetet. Mi a továbbiakban a b) esetet vizsgáljuk.

A belső feszültség, ill. az elkötelezettség keletkezésének megmagyarázása jóval bonyolultabb. Kiindulásul tegyük föl, hogy a) a beruházási költségelőirányzatok minden évben pontosak és b) minden változó azonos és állandó ütemben növekszik. Az a) feltétel mellett a beruházási elkötelezettség változása az indításnak és a beruházásnak a különbsége. Ha a b) feltétel is teljesül, akkor az elkötelezettség változása (azaz az indítás és a beruházás különbsége) egyenlő a korábbi elkötelezettség és a növekedési ütem szorzatával. Rögtön adódik a következtetés: egyenletesen növekvő gazdaságban az indítás nagyobb, mint a beruházás.

Ha föloldjuk az egyenletes növekedés feltételezését, akkor előfordulhat, hogy az alsó fordulóponton az indítás kisebb a beruházásnál, tehát az elkötelezettség csökken. Ennek ellenére a ciklus egész tartamára, időátlagokat véve, érvényes a fenti összefüggés. Bauer cikluselméletének egyik alaptétele szerint a szocialista gazdaságban a ciklus átlagában a beruházáshoz képest túl nagy az indítás, ezt lehetővé teszi a BAUER (1981) által leírt *tervbeakaszkodás*, s ezért *túlzott* elkötelezettség alakul ki.

A szocialista gazdaságban azonban a költségelőirányzatokat minden évben rendszeresen túllépik, mert a *költségeket alátervezik*, a beruházási igények jelentős részét elbújtatják (KORNAI (1966, 9. fejezet), BAUER (1981, 1. és 23. fejezet), BRÓDY (1983) és SOÓS (1986)). Emiatt mind az indítás, mind az elkötelezettség fogalma módosul, sőt, egyesek szerint értelmét veszti (SOÓS, 1986).

Ezt a nehézséget a dolgozat a költségnövekedési folyamat explicit modellezésével próbálja meg leküzdeni. A fent leírt elkötelezettségváltozást kiegészítjük az elkötelezettségnek a költségnövekedésből fakadó, ún. *autonóm növekményével*, amelyről feltesszük, hogy az előző évi (záró) elkötelezettség növekvő függvénye.[5] (Aláhúzzuk, hogy belső feszültség költségtúllépés nélkül is keletkezik, és a költségtúllépés tovább növeli e feszültséget!) Ezzel a feszültségek keletkezését leírtuk.

Rátérünk a feszültségekre való reagálás magyarázatára. *Bauert* követve feltesszük, hogy az indítási hányad az *indítás igényhányadnál* kisebb és az előző év feszültségeinek csökkenő függvénye (v.ö. *Bauer* jóváhagyási koefficiensével).

Hasonlóan: a beruházási hányad az autonóm beruházási hányadnál nagyobb és az előző évi belső feszültségnek növekvő függvénye.

[5] A dolgozat beadása után BAGDY (1989) jobb megközelítést javasolt: a költségtúllépés az indítással arányos.

Ez a feltevés eléggé ritka az irodalomban. LACKÓ (1980), (1987), SIMONOVITS (1988a) kivételével a belső feszültséggel is foglalkozó tanulmányok föltették, hogy a beruházás az idei és a korábbi évek indításának függvénye, amelyet FRISCH (1933) és BAUER (1981) nyomán *folytatási függvénynek* hívunk. A szóban forgó írások föltették, hogy e folytatási függvény kívülről adott és időben változatlan (v.ö. JORGENSON (1963)). Könnyen belátható, hogy a folytatási függvények segítségével az elkötelezettség is kifejezhető az idei és a korábbi évek indításának függvényeként.

Az osztott késleltetésen alapuló folytatási függvény azonban súlyos terheket rakott a modellezők vállára: (i) A magyar statisztika szűkmarkúan bánt mind az indítási és az elkötelezettségi idősorok mind a megvalósítási arányok publikálásával. A folytatási függvény szakértői becslései meglehetősen szóródnak (LACKÓ, 1987). (iii) A modell kvalitatív viselkedése nagyon érzékenyen függ a megvalósítási eloszlástól (TARJÁN, 1987). (iv) Egyes kutatók kétségbe vonják a megvalósítási eloszlás létezését (SOÓS, 1983, 1986). E nehézségek megkerülésére LACKÓ (1980) a következő szellemes egyszerűsítést javasolta: osszuk három részre a beruházást: (i) „első éves" ráfordítások, (ii) folytatási ráfordítások és (iii) gyorsítás–lassítás; de LACKÓ (1987)-ben már nem szerepel a (iii) megkülönböztetés. Sőt, *Martos Béla* — dolgozatom korábbi változatát olvasva — felhívta a figyelmemet arra, hogy az (i) rész is beolvasztható. S ekkor a LACKÓ (1980) cikkben csupán a (ii) részre kimondott összefüggés most a teljes beruházásra érvényes: A beruházási hányad növekvő függvénye a belső feszültségnek. (A filológiai pontosság kedvéért megemlítjük Bauer következő megállapítását: „A tervezettnél nagyobb beruházási elkötelezettségnek a beruházási volumen mind gyorsabb — az eredetileg tervezettnél gyorsabb — növelésével teret engednek." (BAUER (1981, 16. o.))

1.3. Eredmények

Miután körvonalaztuk modellünket, röviden összefoglaljuk a dolgozat eredményeit.

a) „A szabályozás árjelzések nélkül" (KORNAI–MARTOS szerk. (1981)) egyik központi fogalma a *norma*, amely körül a változó ingadozik. Például, modellünkben a beruházás normától való eltérése arányos az előző évi elkötelezettség normától való eltérésével. Ez a szabályozás biztosítja, hogy hosszú idő átlagában mind a beruházási, mind az elkötelezettségi norma érvényesül.

A korábbi modellek zömében (mint pl. KORNAI–Martos szerk. (1981), KORNAI (1982), KORNAI–SIMONOVITS (1982) és LACKÓ (1980)) a normák kívülről adott, *exogén* mennyiségek. (Ezt kifogásolta HARE (1988)). Ezzel szemben nálunk a normák modellen belül meghatározott, *endogén* értékek (mint pl. KORNAI–SIMONOVITS (1983)). A szabályozási egyenletben egyes paraméterek (mindenekelőtt az indítási igényhányad) állandók, míg más paraméterek (a reakcióegyütthatók) változtathatók. A paraméterek változásával változnak a normák. Hamarosan látjuk majd e megközelítés előnyeit.

b) BAUER (1981) több helyen (pl. 345. o.) hangsúlyozza, hogy a norma körüli ingadozás *szimmetriája* mellett *aszimmetria* is jellemzi a szocialista gazdaság beruházási ciklusait: a feszültségek mindig pozitívak (ezt egyébként SOÓS (1986, 209–230.o.) kétségbe vonja), a beruházási igények mindig rostálódnak. Valószínűleg ez az aszimmetria késztette Bauert arra, hogy a norma szerinti szabályozás érvényességi körét a ciklus alsó fordulópontjára korlátozza, s a felső fordulópontra egy más, az ún. *tűréshatár* szerinti szabályozást posztuláljon. Az endogén normák bevezetésével a norma szerinti szabályozás szimmetriája összeegyeztethetővé válik a ciklus aszimmetriájával; fölösleges tehát a felső fordulópont külön kezelése: a norma szerinti szabályozás az egész periódusra kiterjeszthető.

c) Ellentétben Bauer verbális leírásával és összhangban SIMONOVITS (1988a) megállapításával, a modell keretei között léteznek *aperiodikus* (oszcillációmentes) rendszerek, azonban *reális paraméterek* mellett ezekben az aperiodikus rendszerekben a normál belső feszültség elviselhetetlenül nagy (pl. a beruházások megvalósítási ideje öt év, lásd SIMONOVITS (1988a)). A normál belső és külső feszültség csökkentéséhez bizonyos reakciók erősítésére van szükség, amelyek mindenképpen oszcillációt okoznak. Bizonyos esetekben (de nem mindig) *a feszültségenyhítés és a stabilizálás* ellentétbe kerül egymással, s kompromisszumként a beruházási ciklus adódik.[6]

d) Az általunk leírt *költségtúllépési folyamat létezése* — BAUERREL (1981, 348. o.) ellentétben — *a beruházási ciklusnak sem nem szükséges, sem nem elégséges feltétele.* Belátható, hogy a túlzott indítási szándék a legpontosabb költségvetés mellett is ciklust gerjeszt; ugyanakkor mérsékelt indítási szándék mellett reális mérvű költségtúllépés önmagában nem vezet ciklushoz. (Az eltérést valószínűleg az okozza, hogy Bauernál a költségtúllépés meglepi a döntéshozókat, nálam viszont nem.)[7]

e) Modellünkben egyszerűen meghatározható *a ciklus feltétele, a periódus, a ciklus fázisai és a fázisok sorrendje.* BAUER (1981, 14–16.o.) elméletével összhangban a fázisok sorrendje a következő: 1. megélénkülés, 2. fellendülés, 3. megtorpanás és 4. visszaesés. Kiderül, hogy 4 éves periódus esetén a belső feszültség (az elkötelezettség) és az indítás figyelembevétele nélkül is leírható a külső feszültség (nettóimport) és beruházás ingadozása, melyet ZALA (1967) nyomán SIMON (1981) és SIMONOVITS (1987) modellezett.

1.4. A dolgozat szerkezete

A dolgozat a következő részekből áll: 1. Bevezetés. 2. A modell. 3. Normák és ingadozások. 4. Feszültségenyhítés és stabilizálás. Függelék: A nehezebb matematikai állítások igazolása.

---

[6] Vincze János fölhívta a figyelmemet arra, hogy külkereskedelem–szimmetrikus, azaz fogyasztás–párhuzamos ciklusnál a külső normál feszültség enyhítése egyben a normál fogyasztási hányad csökkentése is.

[7] Az 5. lábjegyzetben említett BAGDY (1989)-féle megközelítésben *Bauer* állítása igaz!

1.5. *A modell korlátai*

Eddig a modell erényeit domborítottuk ki. Itt az ideje, hogy a modell korlátaival foglalkozzunk. Mindenekelőtt megemlítjük, hogy az ökonometriai verifikálás egyelőre nagyon bizonytalan, főleg az indítási és az elkötelezettségi idősorok „konstruálása" miatt. (Ezzel a kérdéssel LACKÓ (1987) foglalkozik alaposabban.)

A modellezésnél számos olyan tényezőt figyelmen kívül hagytunk, amelynek BAUER (1981) nagy jelentőséget tulajdonít: pl. a tervezési rendszer sajátosságait (v.ö. GÁCS–LACKÓ (1974)), a beruházási kapacitás korlátozó szerepét, az építési és a gépi beruházások eltérő viselkedését, a dollár- és rubelviszonylatú külkereskedelem különbségeit és kapcsolatait, stb.

Mégis remélem, hogy sikerült azokat a tényezőket kiválasztanom, amelyek nélkül lehetetlen a szocialista gazdaság beruházási ciklusainak a megértése, s amelyek segítségével a ciklus modellezhető. A megoldás problémáit magam is látom, s továbbfejlesztését elkerülhetetlennek tartom.

1.6. *Következtetések*

Dolgozatom a szocialista gazdaság *magyarázó–leíró* elméletéhez kíván hozzájárulni; ennek ellenére megkísérlem összefoglalni a modellezésből adódó *normatív* következtetéseket.

Eredetileg azt szerettem volna bebizonyítani, hogy a szocialista gazdaság eddigi mechanizmusaiból szinte törvényszerűen következik a beruházási ciklus. Egyelőre be kellett érnem egy jóval szerényebb állítással: Az autonóm beruházási hányad olyan kicsi, és az indítási hányad olyan nagy, hogy aperiodikus szabályozás esetén a keletkező normál belső feszültség elviselhetetlenül nagy. Paradox módon modellemben sikerült olyan reakcióegyüttható–rendszert találni, amely miközben enyhíti a normál feszültségeket, gyorsan csökkenti az oszcilláció amplitúdóját.

Úgy érzem, hogy ez a lehetőség inkább a modellre jellemző, mintsem a valóságra. Minden bizonnyal igaz Bauer tétele: a beruházási ciklus kiküszöböléséhez a gazdasági mechanizmust kell átalakítani, pl. a túlzott indítási igényeket korlátozni kell. Ezt látszik bizonyítani két korábbi, speciális modellem is: SIMONOVITS (1987) és (1988a).

2. A modell

Ebben a pontban ismertetjük a modell alapfeltevéseit, változóit, együtthatóit és egyenleteit.

2.1. *Alapfeltevések*

Először kimondjuk a cikk alapfeltevéseit, majd rövid magyarázatot fűzünk hozzájuk. A speciális feltevéseket majd a megfelelő helyeken ismertetjük.

A1. Létezik egy homogén *makrotermék*, amely egyaránt termelhető, beruházható, fogyasztható, exportálható és importálható.

A2. Sem a belső, sem a külső *árak* nem hatnak a gazdaság működésére.

A3. A *nettóimport-hányad* a beruházási hányad növekvő függvénye (minden hányad a GDP-re vonatkozik).

A4. A beruházási szféra *külső feszültségét* a nettóimport-hányad növekvő függvényével definiáljuk.

A5. A *beruházási elkötelezettség* változása két részből áll: a) az indítás és a beruházás különbségéből, b) az elkötelezettség *autonóm növekményéből*.

A6. Az *elkötelezettség autonóm növekménye* kizárólag az előző év(vég)i elkötelezettségtől függ.

A7. A beruházási szféra *belső feszültsége* a beruházási elkötelezettség GDP-hányadának növekvő függvénye.

A8. *Az indítási hányad* az indítási igényhányadnál kisebb, az előző évi belső és külső feszültségnek pedig csökkenő függvénye.

A9. A *beruházási hányad* az autonóm beruházási hányadnál nagyobb és az előző évi belső feszültségnek növekvő függvénye.

A10. *A GDP növekedési üteme* pozitív és kívülről adott, *exogén* mennyiség.

A11. Az alapfeltevésekben szereplő minden *függvény időben állandó és lineáris*.

Megjegyzések. Miután kimondtuk alapfeltevéseinket, rövid magyarázatokat fűzünk hozzájuk.

Az A1 feltevés megszokott a a makroökonómiában.

Az A2 feltevés valójában két részből áll: a) a belső árak hatástalanok és b) a külső árak hatástalanok. Az a) feltevés szerint elhanyagolhatónak tartjuk az árak és a monetáris szféra hatását a reálváltozókra. A b) feltevés érvényes az 1960–1973-as időszakra, de nem érvényes az 1973-as olajárrobbanás utáni időszakra.[8] Feltevésünkkel összhangban változatlan árakkal számolunk.

Az A3 feltevés megfelelő mennyiségi feltételek mellett a külkereskedelem-szimmetrikus beruházási ciklus megfogalmazása. A fogyasztás és a készletfelhalmozás párhuzamosan mozog a beruházással, ezért modellünkben figyelmen kívül hagyjuk őket. (LACKÓ (1987) ökonometriai vizsgálataiból kiderül, hogy a készletfelhalmozás explicit szerepeltetése jelentősen javítja a modell illeszkedését.)

Az A4 feltevés definíció.

---

[8] Mentségül említem, hogy korábbi, SIMONOVITS (1986) dolgozatomban részletesen foglalkoztam a most elhanyagolt cserearány-romlással, az adósságállománnyal mint külső feszültséggel és a növekedési ütem csökkenésével. BAUER (1987) részletesen megvizsgálja, hogyan módosul elmélete az 1980-as évek stagnáló Kelet-Európájában.

Az A5–6 feltevéspár első része definíció, második része viszont a lehető legegyszerűbben írja le a költségtúllépés folyamatát. Mivel állandó árakkal dolgozunk, az inflációs hatásokat eleve kiszűrjük. Ennek ellenére a költségtúllépési egyenletünk olyan, mintha infláció lenne: amit ebben az évben nem ruháznak be, az jövőre már többe kerül.

A7 szintén definíció, megegyezik LACKÓ (1987) definíciójával.

Az A8 feltevés a Bauer által leírt rostálási folyamatot írja le: az indítási igények messze meghaladják a lehetőségeket, s a Központ rostálja a javaslatokat. A rostálás erőssége azonban változó — minél erősebbek a feszültségek, annál szigorúbb a rostálás.

Az A9 feltevésről részletesen beszéltünk a Bevezetésben. Itt csupán azt emelnénk ki, hogy a tényleges beruházási hányad független az előző évi külső feszültségtől. Ez egyrészt összhangban van LACKÓ (1987) becslésével, másrészt nem zárja ki, hogy a beruházási hányad erősen függjön a két évvel korábbi külső feszültségtől (SIMON (1981), SIMONOVITS (1987) és (1988b), valamint a 11. lábjegyzet).

Az A10 feltevés eléggé szokatlanul hangzik az akcelerátor-elven (SAMUELSON, 1939) nevelkedett matematikai közgazdásznak, de nem igen lepi meg a szocialista gazdaság szakértőit. Az indítás – beruházás – üzembe helyezés – termelés lánc olyan hosszú és olyan gyenge, hogy a GDP növekedési üteme és a beruházási tevékenység egymástól függetlenek, legalábbis rövid- és közép távon. Egyébként feltevésünk ökonometriailag verifikálható.[9]

Az A11 egyszerűsítő feltevéspár. Az időbeli változatlanságot kimondó feltevés jó közelítéssel érvényes az 1960–73-as gazdaságtörténeti korszakra. A függvények linearitását kimondó feltevés gondot okoz a ciklus modellezésében (HICKS, 1950)[10] de e feltevés nélkül nem tudnánk vizsgálni a reakciók és a normák kapcsolatát.

2.2. *A modell változói és együtthatói*

A modellen belül megkülönböztetünk abszolút- és hányadosváltozókat, valamint együtthatókat.

---

[9] Összehasonlításul felsorolom, hogy a korábbi dolgozatok milyen feltevéssel éltek a GDP növekedési ütemével kapcsolatban. KORNAI (1982): a hosszú távú növekedési ütem állandó, a rövid távú függ a kapacitásoktól és a feszültségektől. KORNAI–SIMONOVITS (1983) és SIMONOVITS (1986): a hosszú távú növekedési ütem süllyedő, a rövid távú függ a feszültségektől, SIMON (1981) és LACKÓ (1981): a GDP exogén változó.

[10] *Hicks* cikluselméletében az eredeti lineáris rendszer instabil, de a működőképességi korlátok ciklikussá szelidítették a rendszert. SIMONOVITS (1981) bemutatta az ellenkező esetet is: az eredeti lineáris rendszer stabil, de a működőképességi korlátok instabillá változtatták a rendszert.

Abszolút változók

Y = GDP,
I = (Bruttó) beruházás,
M = Nettóimport (=import–export),
S = Beruházási indítás volumene (röviden: indítás),
K = Beruházási elkötelezettség évvégi volumene (röviden: elkötelezettség).

Hányadosváltozók[11]

Növekvő gazdaságban abszolút mennyiségek helyett célszerűbb relatív mennyiségekben gondolkodni. A szokástól eltérően inkább GDP–hányadosokkal dolgozunk, mint növekedési ütemekkel.

$i = I/Y$ = beruházási hányad,
$m = M/Y$ = nettóimport–hányad,
$s = S/Y$ = indítási hányad,
$k = K/Y$ = elkötelezettségi hányad,
n = külső feszültség,
b = belső feszültség.

Együtthatók

$(-\mu)$ = a nettóimport értéke nulla beruházás mellett,
μ_i = nettóimport - beruházás együttható,
m^* = minimális nettóimport–hányad (értéke függ a láthatatlan külkereskedelmi forgalomtól).
f_K = az elkötelezettség autonóm növekedési együtthatója,
k^* = az elkötelezettségi hányad minimális értéke,
ι = autonóm beruházási hányad,
ι_b = belső feszültség - beruházás reakcióegyüttható,
σ = indítási igényhányad,
σ_b = belső feszültség - indítás reakcióegyüttható,
σ_n = külső feszültség - indítás reakcióegyüttható,
δ = a GDP növekedési együtthatója (=1+növekedési ütem).

2.3. A modell egyenletei

A feltevések és a jelölések előrebocsátása után már ujjgyakorlat az egyenletek fölírása. Mindössze az abszolút változókra kimondott összefüggéseket kell átírni relatív változókra. Az időt általában nem jelöljük: $K(t)$ illetve $K(t-1)$ helyett K, illetve K_{-1} szerepel, míg $K(-1)$-et $K_{(-1)}$ jelöli.

Feltevéseink szerint $K - K_{-1} = S - I + (f_K - 1)K_{-1}$, azaz $K = f_K K_{-1} + S - I$. Osszuk el mindkét oldalt $Y = \delta Y_{-1}$-gyel, és alkalmazzuk a hányadosváltozókat:

---

[11] A statisztikai gyakorlatban a hányadosváltozók nevezőjében nem a megtermelt, hanem a felhasznált jövedelem áll. A linearitás megtartása érdekében mi a megtermelt jövedelmet szerepeltetjük.

$k = f_k k_{-1} + s - i$, ahol $f_k = f_K/\delta$. (Figyelem: f_K az autonóm költségnövekedés *abszolút* együtthatója, míg f_K *relatív* együttható!)

A többi egyenletet közvetlenül fölírhatjuk.

Elkötelezettségi hányad

$$k = f_k k_{-1} + s - i, \quad 1/\delta \le f_k \le 1. \tag{1}$$

Belső feszültség

$$b = k - k^*, \quad k^* > 0. \tag{2}$$

Nettóimport-hányad

$$m = -\mu + \mu_i i, \quad \mu > 0 \text{ és } \mu_i \ge 1. \tag{3}$$

Külső feszültség

$$n = m - m^*. \tag{4}$$

Indítási hányad

$$s = \sigma - \sigma_b b_{-1} - \sigma_n n_{-1}, \quad \sigma, \sigma_b, \sigma_n > 0. \tag{5}$$

Beruházási hányad

$$i = \iota + \iota_b b_{-1}, \quad \iota, \iota_b > 0. \tag{6}$$

Megjegyzések: 1. A modell egyenletei *közgazdasági* tartalmukat tekintve nagyon hasonlítanak LACKÓ (1980) és (1987) egyenleteire. *Matematikailag* a mi egyenleteink egyszerűbbek, mert rövidebbek a késleltetések és kevesebb a változó.

2. Problematikus az autonóm beruházás elnevezés, mert összetéveszthető HICKS (1950) autonóm beruházásával. Nálunk a beruházásnak a belső feszültségtől független részéről van szó, míg Hicksnél a termelés növelésétől független részéről.

3. Az (1) egyenlet után szereplő egyenlőtlenségpár magyarázatra szorul. Az $1/\delta \le f_k \le 1$ bal és jobb oldala azt fejezi ki, hogy az elkötelezettség autonóm növekedési üteme nem negatív, ill. legfeljebb akkora, mint a GDP növekedési üteme. Tekintettel arra, hogy a vizsgált időszakban a GDP évente kb. 5%-kal növekedett, és a beruházások kivitelezése több (pl. 4) évre elhúzódott, korlátunk tetemes, (5–20%-os) költségnövekedést is megenged. (Pl. ha a ráfordítások zöme az utolsó évre esik, akkor a költségnövekedés majdnem $4 \times 5\% = 20\%$.) Az $f_k > 1$ eset kizárását a 4. tételhez fűzött megjegyzésben indokoljuk majd.

4. A (3) egyenlet és a benne szereplő feltevéspár is magyarázatot igényel. Induljunk ki az $M = Q + I + C - Y$ azonosságból, ahol Q és C a készletfelhalmozást, ill. a fogyasztást jelöli. Az azonosságot Y-nal osztva az $m = q + i + c - 1$ azonossághoz jutunk, ahol $q = Q/Y$ és $c = C/Y$ a készletfelhalmozási–, ill. a fogyasztási hányad. Tapasztalatok alapján első közelítésben föltesszük, hogy a készletfelhalmozás és a fogyasztás arányos a beruházással; ugyanez igaz a hányadosokra: $q = \Theta_i i$ és $c = \tau + \tau_i i$, ahol $\Theta_i \ge 0$ és $0 \le \tau, \tau_i < 1$. Behelyettesítve: $m = (\tau - 1) + (\Theta_i + 1 + \tau_i)i$, ahol a $(-\mu)$-vel jelölt állandó tag negatív, a μ_i-vel jelölt együttható pedig legalább 1.

5. A modell hat egyenletből áll, hat változó szerepel benne, és két kezdeti érték határozza meg a rendszer pályáját: $k_{(-1)}$ és $m_{(-1)}$. A modell *rekurzív*, azaz az egyenleteket megfelelő sorrendbe szedve a változók egymás után meghatározhatók. Valóban, (k_{-1}, m_{-1}) (2) és (4) segítségével meghatározza a (b_{-1}, n_{-1}) feszültségpárt, amelyet behelyettesítve (5–6)-ba adódik az (s, i) döntéspár. Innen már (1)-ből adódik k és (3)-ból m.

Az alapegyenletek

Hat egyenletből és hat változóból álló modellünk vizsgálatát nagyban egyszerűsíti, ha a két feszültségváltozó függvényében kifejezzük a többi négy változót, és levezetünk két olyan egyenletet, — az ún. *alapegyenleteket* — amelyek a feszültségváltozók dinamikáját a többi változótól függetlenül írják le. A feszültségpályák ismeretében a többi változó kiszámítása már gyerekjáték.

Levezetés nélkül közöljük a két alapegyenletet.

Alapegyenletek

$$b = \beta + \beta_b b_{-1} - \beta_n n_{-1} \tag{7}$$

és $(b_{(-1)}, n_{(-1)})$ adott

$$n = \alpha + \alpha_b b_{-1}, \tag{8}$$

ahol

$$\beta = (f_k - 1)k^* + \sigma - \iota, \quad \beta_b = f_k - \sigma_b - \iota_b, \quad \beta_n = \sigma_n \tag{9}$$

és

$$\alpha = -\mu + \mu_i \iota - m^*, \quad \alpha_b = \mu_i \iota_b. \tag{10}$$

Megjegyzés. A (7–8) alapegyenlet-rendszer két elsőrendű, kétváltozós differenciaegyenletből áll, s a rendszer rekurzív; adott (b_{-1}, n_{-1}) esetén (b, n) egyértelműen meg van határozva.

1. segédtétel: Az (1–6) eredeti egyenletrendszer ekvivalens a (7–8) alapegyenletrendszerrel.

Ezzel a modell ismertetését befejeztük.

3. Normák és ingadozások

Ebben a pontban az előzőleg bevezetett modell stacionárius pályáját és a körülötte való ingadozást tanulmányozzuk.

3.1. Stacionárius pálya

A dinamikus modellekben a stacionárius pálya kitüntetett szerepet játszik. Definiáljuk először magát a fogalmat!

Definíció: A (7–8) alaprendszer *stacionárius pályája* (pontja) egy olyan (b^0, n^0) feszültségpár, amelyből indítva az alaprendszert, az mindig ott marad. Képletben:

$$Ha\ (b_{(-1)}, n_{(-1)}) = (b^0, n^0),\ akkor\ (b, n) = (b^0, n^0). \tag{11}$$

Megjegyzés. Nyilvánvaló, hogy a többi változó stacionárius értéke is kifejezhető a stacionárius feszültségek függvényében:

$$k^0 = b^0 + k^*, \quad m^0 = n^0 + m^*, \quad i^0 = \iota + \iota_b b^0 \quad \text{és} \quad s^0 = \sigma - \sigma_b b^0 - \sigma_n^0. \tag{12}$$

Az előkészületeket befejezvén, kimondhatjuk a stacionárius pálya létezését és egyértelműségét.

1. *tétel: A (7–8) alaprendszer stacionárius pályája létezik és egyértelmű. Képlete:*

$$b^0 = (\beta - \beta_n \alpha)/\varepsilon \quad \text{és} \quad n^0 = [\alpha_b \beta + (1 - \beta_b)\alpha]/\varepsilon \tag{13}$$

ahol

$$\varepsilon = 1 - f_k + \sigma_b + (1 + \mu_i \sigma_n)\iota_b. \tag{14}$$

Bizonyítás a Függelékben.

Megjegyzés. Feltevéseink szerint $\varepsilon > 0$, tehát (13) értelmes. A (13–14) képletből leolvasható, hogy ha $f_k = 1, \sigma_b = 0$ és $\iota_b = 0$, akkor a stacionárius pálya nem létezik. Sőt, ha $f_k > 1$ és $\sigma_b < f_k - 1$, akkor b^0 negatív lenne. Ezért zártuk ki az (1) egyenletben az $f_k > 1$ esetet.

3.2. *A norma szerinti szabályozás*

A stacionárius pálya meghatározása után rátérhetünk a nem stacionárius pályák vizsgálatára. Célszerű bevezetni a tényleges- és a stacionárius érték *eltérését*:

$$b^d = b - b^0, \quad n^d = n - n^0, \quad s^d = s - s^0 \quad \text{és} \quad i^d = i - i^0. \tag{15}$$

Helyettesítsük be (15)-öt az (5–6) szabályozási egyenletekbe:

$$s^d = -\sigma_b b^d_{-1} - \sigma_n n^d_{-1} \quad \text{és} \quad i^d = \iota_b b^d_{-1}. \tag{16}$$

Szavakban: az indítási- és a beruházási hányad stacionárius értéktől való eltérése pozitív, ill. negatív előjellel arányos a belső és a külső feszültség stacionárius értéktől való eltérésével, azaz *norma szerinti szabályozásról* van szó (KORNAI–MARTOS, szerk. 1981). A stacionárius értékeket *normáknak* nevezzük.

A Bevezetésben említettük, hogy dolgozatunk egyik újdonsága, hogy a normák nem kívülről adottak, hanem a modellen belül határozódnak meg. A későbbiekben még kitérünk e felfogás előnyeire.

Egyszerű számolással belátható, hogy az eltérés-feszültségek kielégítik azt a homogén alaprendszert, amely az inhomogén (7–8) alaprendszerből az additív állandók elhagyásával keletkezik:

$$b^d = \beta_b b^d_{-1} - \beta_n n^d_{-1} \tag{17}$$

és

$$n^d = \alpha_b b^d_{-1} . \tag{18}$$

A differenciaegyenlet-rendszerek elméletéből jól ismert, hogy az eltérésváltozók dinamikájának kvalitatív tulajdonságait a (16–17) együttható-mátrix $p(z) = z^2 - \Omega z + \Theta$ karakterisztikus polinomja határozza meg, amelynek Ω és Θ együtthatója az alaprendszer paramétereinek a következő függvénye:

$$\Omega = \beta_b \quad \text{és} \quad \Theta = \beta_n \alpha_b . \tag{19}$$

A (9–10) jelölések értelmében Ω és Θ kifejezhető az eredeti paraméterek függvényeként:

$$\Omega = f_k - \sigma_b - \iota_b \quad \text{és} \quad \Theta = \mu_i \iota_b \sigma_n . \tag{20}$$

Megemlítjük, hogy $\varepsilon = 1 - \Omega + \Theta$.

3.3. *A pályák osztályozása*

Diszkrét idejű, többváltozós nem-lineáris rendszerekben eléggé összetett feladat pályák kvalitatív osztályozása. Már a stabilitás/instabilitás osztályozás sem olyan egyszerű, de az igazi nehézségek az oszcilláció, és különösen a ciklus értelmezésénél lépnek föl. Szerencsénkre kétváltozós lineáris rendszerrel van dolgunk, ahol a nehézségek jelentős része elkerülhető. Lássuk a következő definíciókat (MARTOS (1981) és SIMONOVITS (1978)):

Definíciók: 1. Egy kétváltozós lineáris rendszert *aperiodikusnak* nevezünk, ha alkalmas t^0 természetes számtól kezdve az eltérés-változók előjele nem változik.

2. Egy kétváltozós lineáris rendszert *oszcillálónak* nevezünk, ha nem aperiodikus, azaz, ha az eltérésváltozók előjele akármilyen nagy t^0 természetes szám után is változik. Kétfajta oszcillációt különböztetünk meg:

(i) *Elfajult* (kétfázisú) oszcillációt, ahol mindkét eltérésváltozó előjelváltása t^0-tól kezdve minden évben végbe megy.

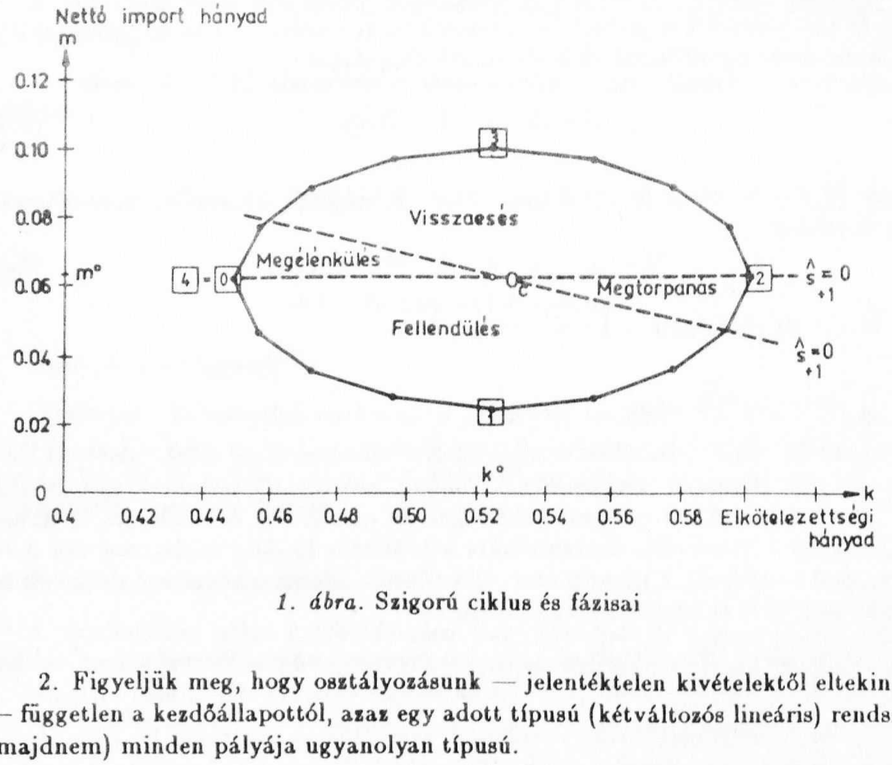
(ii) *Szabályos* (négyfázisú) oszcillációt, ahol a két eltérésváltozó előjelváltása között *késleltetés* van. Következésképpen négyféle előjel-kombináció figyelhető meg: ++, +−, −−, −+, mégpedig meghatározott sorrendben.

3. Egy kétváltozós lineáris rendszert *stabilnak* nevezünk, ha az eltérésváltozók asszimptotikusan nullához tartanak.

4. Egy kétváltozós lineáris rendszert *instabilnak* nevezünk, ha az eltérésváltozók sorozata nem korlátos.

5. Egy kétváltozós lineáris rendszert *szigorúan ciklikusnak* nevezünk, ha sem nem stabil, sem nem instabil.

Megjegyzések: 1. Három ábrán három fajta rendszert mutatunk be: (i) szabályosan (és szigorúan) ciklikus, (ii) elfajultan oszcilláló stabil és (iii) aperiodikus stabil rendszert. Mindhárom rendszernek azonosak a következő paraméterei: $\mu_i = 1$, $\mu = 0,2$; $m^* = 0$; $f_k = 1$, $k^* = 0,4$; $\iota = 0,2$; $\sigma = 0,45$. Különböznek viszont a reakcióegyütthatók: (i) $\iota_b = 0,5$; $\sigma_b = 0,5$; $\sigma_n = 2$; (ii) $\iota_b = 0,25$; $\sigma_b = 1,5$; $\sigma_n = 0,5$; (iii) $\iota_b = 0,3$; $\sigma_b = 0,6$; $\sigma_n = 0$.

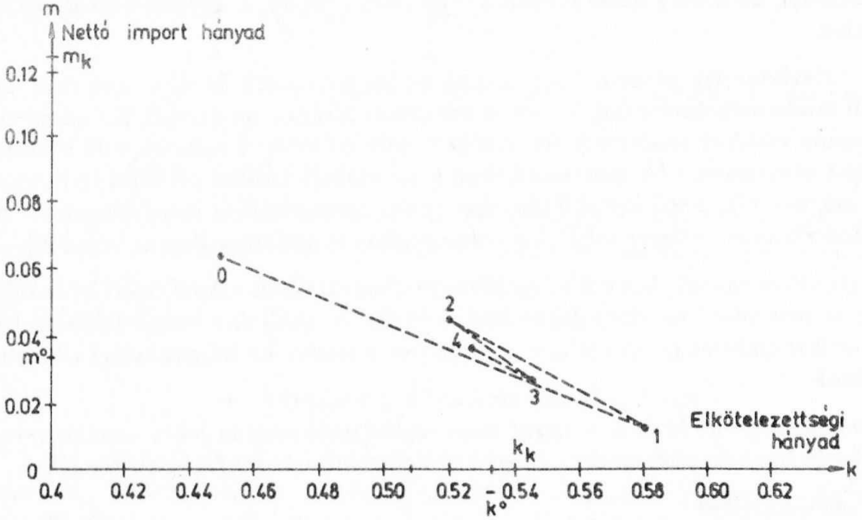


1. ábra. Szigorú ciklus és fázisai

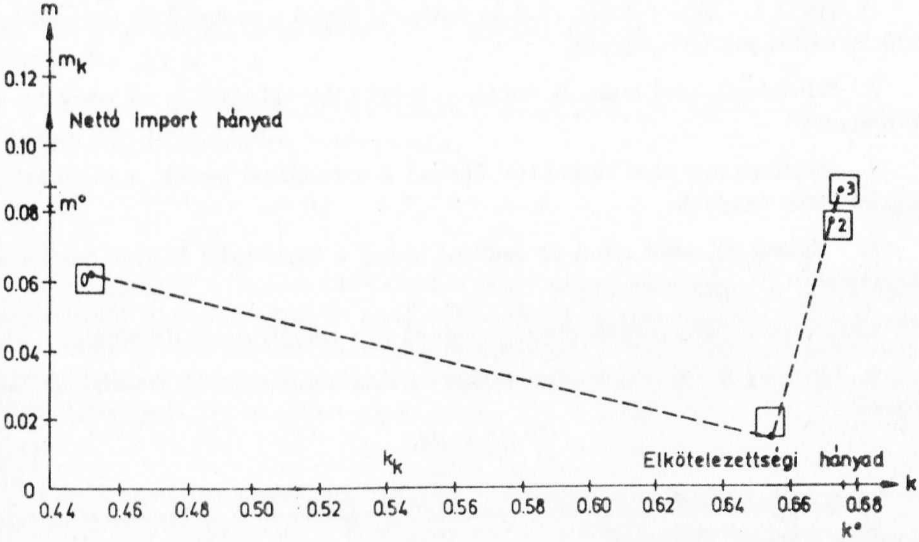
2. Figyeljük meg, hogy osztályozásunk — jelentéktelen kivételektől eltekintve — független a kezdőállapottól, azaz egy adott típusú (kétváltozós lineáris) rendszer (majdnem) minden pályája ugyanolyan típusú.

3. A szabályos oszcilláció és a szigorú ciklus definíciója nagyon körülményes. A diszkrét idő miatt szabályos oszcillációnál előfordulhat, hogy bizonyos fázisok (előjel-kombinációk) időnként kimaradnak, a szigorú ciklusnál pedig általában elmarad a visszatérés. Mindazonáltal belátható, hogy a kétváltozós lineáris rendszereknél a sem nem stabil, sem nem instabil rendszerek a szó eredeti jelentése szerint ciklikusak.

Érdekes módon a gyakorlatilag fontosabb esetben, a szabályos oszcillációnál a diszkrét idejű megoldás *folytonossá* tehető, s a megoldásként adódó elliptikus spirálok körbeforgási ideje meghatározza a *periódust*, (amely általában nem természetes szám). A szigorú ciklus *zárt* elliptikus spirálként ellipszisként — adódik.



2. ábra. Elfajult (és stabil) osscilláció



3. ábra. Aperiodikus (és stabil) pálya

Természetes módon a szűkülő spirál stabil, a táguló spirál instabil osscillációt ábrázol. Végül a *csillapítási tényező* (másnéven: konvergencia-sebesség) az egy körforgásra jutó szűkülés vagy tágulás átlagát mutatja.

Ugyanakkor a gyakorlatban kevésbé fontos aperiodikus mozgásnál vagy elfajult oszcillációnál, ahol vagy nincs periódus vagy 2-vel egyenlő, a folytonos kiterjesztés lehetetlen.

4. Nyelvtanilag zavaró, hogy a nem stabil rendszerek körébe nem csak az instabil rendszerek tartoznak, hanem a szigorúan ciklikus rendszerek is. Azonban a szigorúan ciklikus rendszerek fontosságára való tekintettel célszerű volt hármas felosztást alkalmazni. (A matematikában a mi stabilitásunkat aszimptotikus stabilitásnak nevezik, a mi instabilitásunkat pedig aszimptotikus instabilitásnak. A szigorúan ciklikus rendszer tehát Ljapunov-stabil, de aszimptotikusan instabil.)

Hasonlóan zavaró, hogy a közgazdaságtanban használt ciklus-fogalom sokkal tágabb a matematikai ciklus-fogalomnál. Ezért használjuk a *szigorú* jelzőt, ha matematikai ciklusra gondolunk, és hagyjuk el a jelzőt, ha közgazdasági ciklusra gondolunk.

Ismert, hogy az Ω és a Θ együttható segítségével hogyan lehet osztályozni a kétváltozós lineáris rendszereket. Megfelelő helyen hivatkozni fogunk e tételekre.

Szabályos oszcilláció

Mivel a gyakorlatban elsősorban szabályos oszcilláció fordul elő, egyelőre megelégszünk ennek vizsgálatával. Ekkor BAUER (1981, 16–19.o.) nyomán az alábbi négy fázist különböztetjük meg:

Definíció 1. *Megélénkülés*, ahol az indítási hányad a normájánál nagyobb, a beruházási hányad pedig kisebb.

2. *Fellendülés*, ahol mind az indítási-, mind a beruházási hányad nagyobb a normájánál.

3. *Megtorpanás*, ahol az indítási hányad a normájánál kisebb, a beruházási hányad pedig nagyobb.

4. *Visszaesés*, ahol mind az indítási, mind a beruházási hányad kisebb a normájánál.

Ezek után néhány megállapítást mondunk ki a szabályos oszcillációról.

2. tétel: a) A (17–18) rendszer akkor és csak akkor oszcillál szabályosan, ha teljesül

$$\Omega^2 < 4\Theta. \tag{21}$$

b) Szabályos oszcilláció esetén a rendszer T periódusa és Φ csillapítási tényezője független a kezdeti értékektől:

$$T = 2\pi/\psi, \quad ahol \quad \psi = arccos\Omega/2\Theta^{1/2} \tag{22}$$

és

$$\Phi = 1/\Theta^{1/2}. \tag{23}$$

c) A szabályosan oszcilláló rendszer akkor és csak akkor szigorúan ciklikus, ha (21) mellett teljesül

$$\Theta = 1. \tag{24}$$

d) Szabályos oszcilláció esetén négy fázis van, s sorrendjük megegyezik a definícióban adott sorrenddel.

Bizonyítás a Függelékben.

Megjegyzés. Az imént kimondott tétel alapján könnyen tehetünk hasonló megállapításokat a nem vizsgált esetekre. Például a szabályos oszcilláció stabil, ha $\Theta < 1$; és instabil, ha $\Theta > 1$. Aperiodikus szabályozásnál (21) nem teljesül és $\Omega > 0$; míg elfajult oszcillációnál (21) nem teljesül és $\Omega \leq 0$.[12]

4. Feszültségcsökkentés és akadályai

Vizsgálatunk egyik fő kérdése: Hogyan hat a reakcióegyütthatók növelése a normákra és a stabilitásra? Lehet-e egyszerre csökkenteni a normákat és növelni a csillapítási tényezőt? Mielőtt e kérdésre válaszolnánk, megvizsgálunk néhány feltételt, amelynek teljesülnie kell ahhoz, hogy a rendszer működőképes legyen.

4.1. *Működőképesség*

Bármely közgazdasági modellben a legtöbb változó pozitív. Ezt tükrözi a következő fogalom.

Definíció. Az (1–6) rendszert *működőképesnek* nevezzük, ha mindkét döntés és mindkét feszültség minden évben pozitív:

$$\imath > 0, \quad s > 0, \quad b > 0 \quad \text{és} \quad n > 0. \tag{25}$$

Megjegyzések: 1. Az $\imath$ és s pozitivitása természetes követelmény. A feszültségek pozitivitását Bauertől vettük át (lásd a Bevezetést). A megmaradó elkötelezettség és nettóimport-hányad nem szerepel a definícióban: k-nak pozitívnak kell lennie, m viszont lehet pozitív is, és negatív is. Mivel $k^* > 0$, teljesül $k > 0$; viszont m^* előjele tetszőleges, így m előjele is az.

---

[12] Ezen a ponton megemlítjük a következő speciális esetet: a periódus 4 év, azaz (22) értelmében $\Omega = 0$. Ekkor $n^d = \Phi^4 n^d_{-4}$, azaz $n^d = -\Phi^2 n^d_{-2}$. Figyelembe véve (3)-at, $\imath^d = \iota_n^{(2)} n^d_{-2}$ — s ez az irodalomból — ZALA (1967), SOÓS (1975), (1986), SIMON (1981) és SIMONOVITS (1986) — jól ismert szabályosság: a beruházási hányad a két évvel korábbi külső feszültség (nettóimport-hányad) csökkenő függvénye, ahol $\iota_n^{(2)} = \Theta^{1/2}/\mu_i$. — Egyébként SOÓS (1986) cikluselmélete összhangban van ezzel a speciális esettel, sőt, nála a kétéves késleltetés a feszültség–tervezés–beruházás láncon alapul (v.ö. GÁCS–LACKÓ (1974)).

2. A működőképességi feltételek két csoportra oszlanak: a) a normák pozitivitását és b) a nem normál változók pozitivitását biztosító feltételek csoportjára. Az egyszerűség kedvéért csupán az a) csoporttal foglalkozunk. Ehhez azonban némi kitérőt kell tennünk.

Definíció. Feszültségmentes beruházási hányadnak nevezzük azt a beruházási hányadot, amely mellett nincs *külső* feszültség. *Feszültségmentes indítási hányadnak* nevezzük azt az indítási hányadot, amely a feszültségmentes beruházási hányaddal együtt nem gerjeszt belső feszültséget. Képletben:

$$i^* = (m^* + \mu)/\mu_i \quad \text{és} \quad s^* = i^* + (1 - f_k)k^* . \tag{26}$$

Három speciális feltevést mondunk ki.

(i) A feszültségmentes beruházási hányad pozitív:

$$i^* > 0 . \tag{27}$$

(ii) Az autonóm beruházási hányad legalább akkora, mint a feszültségmentes beruházási hányad, de nem sokkal nagyobb:

$$i^* \leq \iota \leq \iota_M , \tag{28}$$

ahol ι_M némileg nagyobb i^*-nál.

(iii) Az indítási igényhányad jóval nagyobb, mint az autonóm beruházási hányad:

$$\sigma > \iota + (1 - f_k)k^* . \tag{29}$$

Megjegyzések: 1. Az (i) feltevés azt mondja ki, hogy létezik elegendően kicsiny, de pozitív beruházási hányad, amely mellett nincs (pozitív) külső feszültség. Ez nagyon enyhe megkötés, pl. következik az $m^* \geq 0$ feltevésből. (N.B. (26) és $f_k \leq 1$ értelmében $s^* \geq i^*$, tehát $s^* > 0$.)

2. A (ii) feltevés azt mondja ki, hogy még az autonóm beruházási hányad is elég nagy ahhoz, hogy külső feszültséget gerjesszen, de nem olyan nagy, hogy önmaga erős belső feszültséget származtasson. A feltevés empirikus tartalma távolról sem világos, de a feltevés első része logikailag szükséges ahhoz, hogy a külső feszültség pozitív legyen. (Valóban, $n_{-1} = 0$ mellett (8) $n = \alpha$ összefüggéshez vezet, ahol $\alpha = \mu_i(\iota - i^*)$, azaz $n \geq 0$ ekvivalens (28) első felével.) A második rész ahhoz kell, hogy az oszcillációk elkerülhetetlenek legyenek (lásd. 5. tételt). A tárgyalást egyszerűsítendő a (ii) feltevést a következő feltevéssel helyettesítjük:

(ii^0) Az autonóm beruházási hányad egyenlő a feszültségmentes beruházási hányaddal[13]

$$\iota = i^* . \tag{28^0}$$

[13] SIMONOVITS (1988b) 4.5. alfejezete részletesen foglalkozik a (28) általános esettel. Meghatározhatók olyan kvantitatív feltételek, amelyek mellett az 5. tétel igaz marad.

3. A (iii) feltevés empirikusan magától értetődő: $\iota < \imath^0 < s^0 < \sigma$ (vö. (12)) és $(1 - f_k)k^* \approx 0$.

Kimondjuk a normák pozitivitásáról szóló tételt:

3. tétel: A (27), (28^0) és (29) feltétel mellett a normák pozitívak.

Bizonyítás. Induljunk ki a (13) képletpárból, amely (28^0) értelmében ($\alpha = 0$) a következőképpen egyszerűsödik:

$$b^0 = \beta/\varepsilon \quad \text{és} \quad n^0 = \mu_i \iota_b b^0 . \tag{30}$$

Mivel $\beta = \sigma - \iota - (1 - f_k)k^* > 0$ és $\varepsilon > 0$, igaz $b^0 > 0$; figyelembe véve, hogy $\iota_b > 0$, teljesül $n^0 > 0$.

Ezzel befejeztük a működőképesség vizsgálatát és rátérhetünk a norma – reakcióegyüttható függvények tanulmányozására.

4.2. Feszültségcsökkentés

Felfogásunk szerint a reakcióknak az a szerepe, hogy fokozásukkal csökkenjenek a normál feszültségek. A most következő tételből kiderül, hogy várakozásunk általában igazolódik, de van egy fontos kivétel.

4. tétel: Ha a működőképességi feltételek közül (27), (28^0) és (29) teljesül, akkor a normál feszültségek a reakcióegyütthatóknak csökkenő függvényei, kivéve a külső normál feszültséget, amely a belső feszültség — beruházás reakcióegyütthatónak növekvő függvénye.

Megjegyzések: 1. A 4. tétel kvalitatív jellegű, de kiegészíthető kvantitatív megfontolásokkal. Mivel a kulcsszerepet az indítási igényhányad és a feszültségmentes indítási hányad különbsége játssza, s e különbség a valóságban nagy (pl. $\beta = 0,25$), a változások is nagyok.

2. A matematikai bizonyítás előtt szeretnénk heurisztikusan megmutatni, miért viselkedik $n^0(\iota_b)$ ellentétesen, mint a másik öt függvény. (1–2) értelmében n^0 növekvő függvénye $\imath^0$-nak, amely viszont (6) értelmében — adott b^0 mellett — növekvő függvénye ι_b-nek. (Persze ι_b növelésekor b^0 nem állandó, sőt: csökken, tehát csökkentően hat n^0-ra. A matematikai érvelés éppen azt mutatja meg, hogy e második hatást dominálja az első!)

3. Most megindokolhatjuk az $f_k > 1$ eset kizárását: ebben az esetben a normál indítási hányad *növekvő* függvénye lenne a belső feszültség — indítás reakcióegyütthatónak.

Bizonyítás: (30)-ba behelyettesítve (9)-et és (14)-et, közvetlenül adódik, hogy b^0 csökkenő függvénye ι_b-nek, σ_b-nek és σ_n-nek. Behelyettesítve új összefüggésünket (30) második képletébe, látható, hogy n^0 csökkenő függvénye σ_b-nek és σ_n-nek. A számlálót és a nevezőt elosztva ι_b-vel, adódik, hogy n^0 növekvő függvénye ι_b-nek.

4.3. Az aperiodikus rendszerek megvalósíthatatlansága

A beruházási ciklus kiküszöbölésének legegyszerűbb módja az oszcillációk megszüntetése volna. Belátható, hogy létrehozhatók aperiodikus beruházási szabályozási rendszerek.[14]

Példa stabil aperiodikus beruházási szabályozásra: Legyen $\sigma_n = 0$. Ekkor (20) szerint $\Theta = 0$, azaz (21) nem teljesül. A 2. tételhez fűzött megjegyzésben említett aperiodicitási feltétel ($\Omega > 0$) speciális alakja — stabil esetben — (20) folytán $0 < \iota_b + \sigma_b < f_k$.[15]

Bizonyítani kívánjuk sejtésünket: bármely aperiodikus beruházási rendszer normál belső feszültsége túl erős.

Definíció. Tegyük föl, hogy adva van *a maximális elviselhető normál belső- és külső feszültség*, és jelölje őket b_K és n_K. Egy rendszer *megvalósítható*, ha mindkét normál feszültség kisebb, mint a megfelelő maximális elviselhető feszültség:

$$b^0 < b_K \quad \text{és} \quad n^0 < n_K\,. \tag{31}$$

A mondottak értelmében további feltevés, hogy az egyes maximális elviselhető normál feszültségek pozitívak:

$$b_K > 0 \quad \text{és} \quad n_K > 0\,. \tag{32}$$

Élesítjük a (iii) feltevést:

(iv) A maximális elviselhető normál belső feszültség kisebb, mint az indítási igényhányad és az autonóm beruházási hányad különbsége:

$$b_K < \sigma - \iota - (1 - f_k)k^*\,. \tag{33}$$

Megjegyzések: 1.A (32–33) feltételpárból következik (29).

2. A (33) feltétel empirikus érvényessége nyitott kérdés. A feltétel érzékeltetésére egészítsük ki korábbi példáinkat az $\iota^0 = 0,25$ adattal, és vegyük figyelembe BAUER (1981) 42. o. megállapítását: "... A beruházási elkötelezettség és a beruházási teljesítés hányadosa ...azt fejezi ki, hogy hány évi — adott évi szinten stagnáló — beruházási teljesítésre van szükség a már folyamatban lévő beruházások befejezéséhez." Azaz a *virtuális befejezési idő* (k/ι) a feszültségmentes rendszerben

[14] Az aperiodikus rendszerek szerény szerepet játszanak a közgazdaságtanban. BRÓDY (1973) hangsúlyozta az aperiodicitás kívánatosságát, SIMONOVITS (1978) pedig igazolta, hogy bizonyos decentralizált szabályozásoknál e kívánalom teljesíthetetlen.

[15] Ezt az állítást állandó beruházási hányad esetén már korábban igazolta TARJÁN (1987) a hagyományos, SIMONOVITS (1988a) pedig az egyszerűsített folytatási függvény mellett.

$0,4/0,25 = 1,6$ év, míg a már elviselhetetlen $b^0 = \beta$ normál belső feszültségű rendszerben 2,6 év. Ez tényleg túlzott érték, még a szocialista gazdaságban is.

3. A feltételt egyébként logikai alapon választottuk: A fenti példában (30) értelmében $b^0 = \beta/(1 - f_k + \sigma_b)$, azaz az aperiodicitási feltétel értelmében $b^0 \geq \beta$. (33) értelmében teljesül $b^0 \geq b_K$, azaz az aperiodikus beruházási szabályozás ($\sigma_n = 0$ esetén) megvalósíthatatlan.

Most már kimondhatjuk a speciális példát $\sigma_n = 0$-ról $\sigma_n \geq 0$-ra általánosító tételt.

5. *Tétel: Ha a (28') és a (33) feltétel teljesül, akkor minden aperiodikus beruházási szabályozás megvalósíthatatlan.*

Bizonyítás. Ha a rendszer aperiodikus, akkor a 2. tételhez fűzött megjegyzés szerint $\Omega^2 \geq 4\Theta$ és $\Omega > 0$. Mivel $\varepsilon = 1 - \Omega + \Theta$, $\varepsilon \leq (1 - \Omega/2)^2$. (20) értelmében $\Omega < 1$, tehát $1 - \Omega/2 > 0$, ezért $\varepsilon < 1$. A példa okoskodása szerint tehát $b^0 > \beta$, amely viszont (33) értelmében $b^0 > b_K$ egyenlőtlenséghez vezet. A normál belső feszültség tehát elviselhetetlen.

4.4. *Reakcióegyütthatók és a csillapítási tényező*

Az imént bebizonyított 5. tétel szerint az aperiodikus rendszerek gyakorlatilag megvalósíthatatlanok, ezért a további vizsgálatokban föltehetjük, hogy a rendszer oszcillál. Azt vizsgáljuk, hogy oszcilláció esetén hogyan hat a reakcióegyütthatók növelése a csillapítási tényezőre.

A rövidség kedvéért átugorjuk a gyakorlatilag nem túl fontos elfajult oszcillációt (lásd SIMONOVITS (1988b) 4.9a tételt), és kizárólag a szabályos oszcillációval foglalkozunk.

6. *tétel: Szabályos oszcilláció esetén a csillapítási tényező csökkenő függvénye a külső feszültség – indítás és a belső feszültség – beruházás reakcióegyütthatóknak; és független a belső feszültség – indítás reakcióegyütthatótól.*

Bizonyítás. (23) értelmében Φ csökkenő függvénye Θ-nak, amely viszont (20) szerint növekvő függvénye σ_n-nek és ι_b-nek, valamint független σ_b-től.

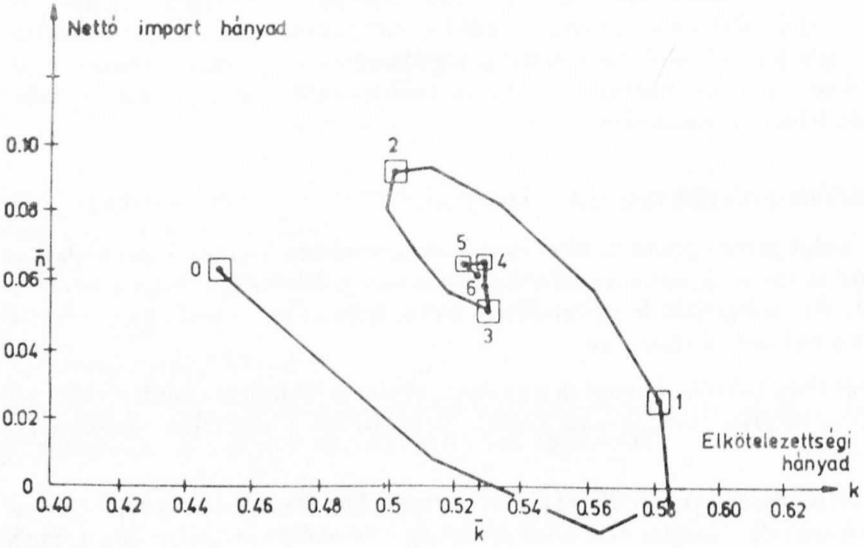
4.5. *Feszültségenyhítés és stabilizálás*

A 4.3. alpontban beláttuk, hogy a feszültségenyhítés keresztezi az anticiklikus politika egyik célját: az oszcilláció fölszámolását. Most egy rokon kérdést vizsgálunk: Mennyire lehet összehangolni a normál feszültségek enyhítését az oszcilláció csillapítási tényezőjének a növelésével? A választ a 4. és a 6. tétel összehasonlítása adja:

7. *tétel: Szabályos oszcillációnál ellentmondás van a két cél között a belső feszültség — beruházás és a külső feszültség — indítás reakciónál, de nincs ellentét a belső feszültség — indítás reakciónál: ez utóbbi erősítésekor mindkét normál feszültség erősen csökken, míg a csillapítási tényező változatlan marad.*

Megjegyzés. A 7. tétel alapján a következő anticiklikus politika javasolható: Induljunk ki olyan rendszerből, amely ugyan szabályosan oszcillál, de kilengései viszonylag gyorsan csillapodnak. (20) és (23) értelmében az utóbbihoz az kell, hogy $\mu_i \sigma_n \iota_b$ viszonylag kicsi legyen. A normál feszültségekkel nem kell törődni, mert azok σ_b növelésével csökkenthetők, anélkül, hogy befolyásolnánk a csillapítás sebességét. Természetesen vigyáznunk kell, hogy ne hagyjuk el a működőképes oszcillációk (itt nem vizsgált) tartományát: a reakciók ne legyenek túl erősek.

Példa sikeres anticiklikus politikára: Megtartva az 1–3. ábrákon szereplő rendszerek közös paraméterértékeit, új reakcióegyütthatókat mutatunk be: $\iota_b = 0,5$; $\sigma_b = 1,25$; $\sigma_n = 0,5$. Ekkor $\beta = 0,25$; $\Phi = 2$; $b^0 = 0,125$ és $n^0 = 0,0625$.



4. ábra. Gyorsan csillapodó oszcilláció

Megjegyzés. Példánk azt mutatja, hogy elvben, legalább is modellünk világában, a normál feszültségek enyhítése és a beruházási ingadozások gyors csillapítása lehetséges még irreálisan nagy indítási igényhányadoknál is.

Óvatosan fogadjuk az ellenpéldát, különösen azért, mert előző két modellemben (SIMONOVITS (1987), (1988a)) sikerült bebizonyítani a beruházási ciklus szükségszerűségét. Jó lenne tudni, hogy milyen feltevések bevezetésével szabadulhatunk meg a gyorsan stabilizálódó, valószínűleg csak modellvilágunkban létező rendszerektől. Ez azonban már egy további vizsgálat feladata. (Egyébként figyelemre méltó a 4. ábra tanulsága: míg az „éves" modell működőképes, a „negyedéves" modell működőképtelen.)

4.6. A ciklusfeltételek összefoglalása

Cikkünk végéhez közeledünk. Nem sikerült bebizonyítani, hogy a ciklus szükségszerűen következik a hiánygazdasági mechanizmusokból. Ellenpéldánk ellenére a beruházások ciklikus ingadozásai a valóságban nem (vagy alig észrevehetően) csillapodnak, tehát önmagában is értelmes a ciklusfeltételeket összefoglalni.

8. tétel: Tegyük föl, hogy (27), (28°) és (29) teljesül. Ha létezik működőképes szabályos szigorú ciklus, akkor teljesül a következő feltételpár:

$$\sigma_n = 1/\mu_i \iota_b \tag{34}$$

és

$$\iota_b + \sigma_b < 2 + f_k . \tag{35}$$

Bizonyítás: (24)-nek felel meg (34), ekkor (21)-nek felel meg (35).

Megjegyzés. A szigorúan ciklikus rendszerek legfontosabb jellemzője a (34) feltétel: a külső feszültség — indítás reakcióegyüttható fordítottan arányos a belső feszültség — beruházás reakcióegyütthatóval, ahol az arányossági szorzó a nettóimport — beruházási együttható. Természetesen dőre dolog két paraméter szorzatát rögzíteni, de lineáris ciklusmodellben ez elkerülhetetlen. Ha lemondunk a szigorú ciklikusságról, akkor persze enyhíthető a (41) feltevés: pl. $0,9 < \mu_i \sigma_n \iota_b < 1,1$. (A (35) feltétel SIMONOVITS (1988b) szerint a működőképesség miatt teljesül.)

Függelék: A nevezetesebb matematikai állítások bizonyítása

Az 1. tétel bizonyítása

Tegyük föl, hogy létezik egy (b^0, n^0) normál feszültség vektor. Ekkor az említett vektor kielégíti a (7–8) alapegyenletrendszert. Új egyenletrendszerünket rendezve az

$$(1 - \beta_b)b^0 + \beta_n n^0 = \beta \tag{F.1}$$

és

$$-\alpha_b b^0 + n^0 = \alpha \tag{F.2}$$

egyenletrendszert kapjuk.

Fejezzük ki n^0-at (F.2)-ből, és helyettesítsük be (F.1)-be: Ekkor $(1 - \beta_b + \beta_n \alpha_b)b^0 = \beta - \beta_n \alpha$, azaz (13).

Hasonlóan igazolható n^0 képlete.

A 2. tétel bizonyítása

A (17–18) rendszer együtthatómátrix $p(z) = z^2 - \Omega z + \Theta$ karakterisztikus polinomjának gyökei a következőképpen határozzák meg a rendszer kvalitatív viselkedését (v.ö. MARTOS (1981, 99–101. o.)).

a) A rendszer akkor és csak akkor szabályosan oszcilláló, ha a karakterisztikus polinom két gyöke komplex (konjugált).

b) Legyen a két gyök $z_{1,2} = (cos\psi \pm isin\psi)/\Phi$, ahol ψ és Φ pozitív valós szám, és i a komplex egységgyök. A másodfokú polinom gyökei és együtthatói közti összefüggések értelmében $z_1 + z_2 = \Omega$ és $z_1 z_2 = \Theta$. Behelyettesítve a komplex gyökpárt két egyenletünkbe adódik, hogy $2cos\psi = \Omega$ és $1/\Phi = \Theta^{1/2}$. Ezzel bebizonyítottuk a (22–23) egyenletet.

c) Nyilvánvaló, hogy a szabályos oszcilláció akkor szigorúan ciklikus, ha csillapítási tényezője 1, azaz (23) folytán, ha (24) teljesül.

d) Be kell még látnunk, hogy a fázisok sorrendje megegyezik BAUER (1981) és definíciónk sorrendjével. Ehhez azt kell igazolnunk, hogy a forgatás pozitív irányú (azaz az óra járásával ellentétes irányú).

Tekintsük pl. a megélénkülés–fellendülés határpontjait, és igazoljuk, hogy ezek a pontok a megtorpanási fázisba mennek át. Valóban, a szóban forgó határon fekvő (b^d_{-1}, n^d_{-1}) pontokat az jellemzi, hogy mindkét feszültségeltérés negatív, és $i^d = 0$. Az egyenlőtlenség miatt $s^d > 0$, tehát $(1 - f_k)b^d = s^d - i^d > 0$. A egyenlőség miatt $n^d = 0$. Figyelembe véve (16)-ot, adódik, hogy $s^d_{+1} < 0$ és $i^d_{+1} > 0$, s ez éppen a megtorpanási fázis definíciója.

(*Beérkezett: 1988. február 29-én*)

Irodalom

BAGDY G. (1989) Beruházási ciklus és költségtúllépés a szocialista gazdaságban, *Közgazdasági Szemle*, közlésre benyújtva.

BAUER T. (1978) Beruházási ciklusok a tervgazdaságban. (A reform előtti gazdaságirányítási rendszer alapján) *Gazdaság 11*, 4. sz. 57–75.

BAUER T. (1981) ***Tervgazdaság, beruházás, ciklusok***, Budapest, KJK.

BAUER T. (1987) Ciklusok helyett válság?, *Közgazdasági Szemle 34*, 1409–1434.

BRÓDY A. (1973) Szabályozási modellekről, *Szigma 6*, 93–102.

BRÓDY A. (1980) *Ciklus és szabályozás*, Budapest, KJK.

BRÓDY A. (1983) A beruházási ciklus elmélete és szabályozása, *Gazdaság 16*, 57–85.

DAVIS, CH. és W. CHAREMZA (1988) szerk: *Disequilibrium and Shortage Models*, megjelenés alatt.

FRISCH, R. (1933) „Terjedési és hatás problémák a dinamikus közgazdaságtanban”, magyarul: *Kvantitatív és dinamikus közgazdaságtan*, Budapest, KJK. (1974) 103–137.

GÁCS J. – LACKÓ M. (1974) A népgazdasági szintű tervezési magatartás vizsgálata, *Közgazdasági Szemle, 21* 257–274.

HARE, P. (1988) Theoretical Foundations: The Economics of Shortage, *in:* DAVIS–CHAREMZA (1988) szerk. 4. fejezet.

HICKS, J. (1950) *A Contribution to the Theory of Trade Cycle*, Oxford, Clarendon.

GROSFELD, I. (1987) Modelling Planners' Investment Behavior: Poland, 1956–1981, *Journal of Comparative Studies 11*, 180–191

ICKES, B.W. (1986) Cyclical Fluctuations in Centrally Planned Economies, *Soviet Studies 38*, 36–52.

JORGENSON, D.W. (1963) Capital Theory and Investment Behavior, *American Economic Review 53, Papers and Proceedings*, 247-255.

KALECKI, M. (1933) A konjunktúraciklus elméletének vázlata, magyarul: *A tőkés gazdaság működéséről. Válogatott tanulmányok, 1933-1970*, Budapest, KJK.

KORNAI J. (1966) *Struktúrális döntések matematikai tervezése*, Budapest, Akadémiai Kiadó.

KORNAI J. (1971) *Anti-Equilibrium*, Budapest, Akadémiai Kiadó

KORNAI J. (1976) Makroszimulációs modell, *kézirat*, Budapest, KTI.

KORNAI J. (1980) *A hiány*, Budapest, KJK.

KORNAI J. (1982) *Növekedés, hiány és hatékonyság*, Budapest, KJK.

KORNAI J. – MARTOS B. szerk. (1981) *Szabályozás árjelzések nélkül*, Budapest, Akadémiai Kiadó.

KORNAI J. – SIMONOVITS A. (1982) Egy makronövekedési modell matematikai tulajdonságai, *Szigma 15*, 132-147.

KORNAI J. – SIMONOVITS A. (1983) Beruházás, hatékonyság és hiány: egy makronövekedési modell, *Szigma 16* 259-278.

LACKÓ M. (1980) Feszültségek felhalmozása és leépítése, *Közgazdasági Szemle 33*, 24-40.

LACKÓ M. (1987) Feszültségek és normák szerepe a beruházások szabályozásában Magyarországon, *kézirat*, Budapest, KTI.

LACKÓ M. (1988) Sectoral Shortage Models in Hungary, *in:* DAVIS–CHAREMZA (1988) szerk. 10. fejezet.

MARTOS B. (1981) Fogalmak és tételek a szabályozás-elméletből, *Kornai–Martos szerk. (1981)*, 73-101.

OLIVERA, H.G. (1960) Cyclical Economic Growth under Collectivism, *Kyklos 2*, 229-255.

ROLAND, G. (1987) Investment Growth Fluctuations in the Soviet Union: An Econometric Analysis, *Journal of Comparative Economics 11*, 192-206.

SAMUELSON, P. (1939) Interactions between the Multiplier Analysis and the Principle of Acceleration, *Review of Economic Studies 21*, 75-78.

SIMON A. (1981) A magyarországi beruházások ciklikusságának egy modellje, *Közgazdasági Szemle 28*, 293-302.

SIMONOVITS A. (1978) A decentralizált szabályozás maximális konvergencia-sebessége, *Szigma 11*, 49-67.

SIMONOVITS A. (1981) Korlátos szabályozás és destabilizálás, *Kornai–Martos szerk. (1981)*, 255-289.

SIMONOVITS A. (1986) Növekedés, szabályozás és feszültségek egy nyitott szocialista gazdaságban, *Szigma 19*, 155-176.

SIMONOVITS A. (1987) A stop-go beruházási ciklusok – egy régi modell új értelmezése, *Közgazdasági Szemle 34*, 1027-1034.

SIMONOVITS A. (1988a) Rejtett beruházási ciklusok a szocialista gazdaságban, *Közgazdasági Szemle 35*, 866-878.

SIMONOVITS A. (1988b) A szocialista gazdaság beruházási ciklusainak három matematikai modellje, *kézirat*, Budapest, KTI.

SOÓS K.A. (1983) The Problem of Time Lags in the Short – Term Control of Macroeconomic Processes, *Acta Oeconomica 30*, 369-380.

SOÓS K.A. (1986) *Terv, kampány, pénz. Szabályozás és ciklusok Magyarországon és Jugoszláviában*, Budapest, KJK.

TARJÁN T. – TÉNYI GY. (1977) Kísérlet a beruházási folyamat modellezésére, *Szigma 10*, 11-24.

TARJÁN T. (1985) Ornehéz és farnehéz beruházási eloszlások, *Szigma 18*, 137-147.

TARJÁN T. (1987) Beruházási ciklusok és ráfordítási megoszlások, *kézirat*, Budapest, KTI.

TÉNYI GY. (1976) Beruházási egyenetlenségek a magyar gazdaságban, *kézirat*, Budapest, KTI.

ZALA J. (1967) 1958–1967. Egy évtized gazdasági fejlődése, *Gazdaság 1*, 29–40.

ZARNOWITZ, V. (1985) Recent Work on Business Cycles in Historical Perspective: A Review of Theories and Evidence, *Journal of Economic Literature 23*, 523–580.

Mathematical Model of the Investment Cycles in a Socialist Economy

The paper models the investment cycles in a socialist economy by relying on the ideas of BAUER (1981), KORNAI (1980), (1982) and LACKÓ (1980). The controlled variables (commitment and net import) depend on the simultaneous values of the control variables (investment starting and investment spending), while the control variables themselves depend on the past value of the controlled variables.

Under adequate simplifying assumptions the following results are obtained: a) The *norms* are, in general, too large, for their *reduction* relatively *strong reactions* are necessary. These reactions always cause *oscillations* which are frequently undamped: involving a cycle. b) In the model the *conditions* of cycling, the *period* and the ordering of *phases* can be determined.

Szigma, XX. (1987–88) 2–3. sz.

ZSOLNAI LÁSZLÓ

Önérdekű gazdasági döntések és következményeik

A hagyományos közgazdasági doktrína szerint, ha a gazdasági szereplők szigorúan önérdekeiket követik, akkor ezzel a közjót mozdítják elő. Dolgozatom 1–3. pontjában az önérdekű gazdasági döntéshozatal újfajta modelljét adom a Tversky–Kahneman–féle „prospect theory" és a téridő diszkontálás elmélete alapján, majd a 4. pontban megmutatom, hogy az önérdekűség szükségképpen vezet „közrosszak" létrejöttéhez a gazdaságban (ökológiai és humán károsodás, illetve katasztrófák).

1. Veszteségérzékenység

Tekintsünk egy *önérdekű gazdasági szervezetet*, amelynek két alternatíva között kell döntenie. Az első alternatíva egy G nyereség *biztos* megszerzése, míg a második alternatíva αG nyereség megszerzése $p = 1/\alpha$ *valószínűséggel* ($\alpha > 1$). Föltételezzük, hogy a gazdasági szervezet számára mind G, mind pedig αG *érzékeny* nyereség. Ez a Swalm–tétel értelmében azt jelenti, hogy

$$0,01E \leq G < \alpha G \leq 100E\,,$$

ahol E a szervezet átlagos jövedelmi szintjét jelenti.

A *döntési probléma* az önérdekű gazdasági szervezet számára a következő:

$$\mathrm{DP}(1) \qquad (G; p = 1) \quad \text{vagy} \quad (\alpha G; p = 1/\alpha)\,.$$

A fönti két alternatíva *várható hasznossága* egyenlő, hisz $G \times 1 = \alpha G \times 1/\alpha$. TVERSKY és KAHNEMAN azonban kísérletileg kimutatta [4], hogy a DP(1) típusú döntési helyzetekben a való világ valódi döntéshozói az első alternatívát szokták preferálni a másodikhoz képest. Tehát

$$\mathrm{DR}(1) \qquad (G; p = 1) \quad \succ \quad (\alpha G; p = 1/\alpha)\,.$$

Általánosítva kimondhatjuk, hogy azonos várható hasznosságú, *pozitív alternatívák esetén a döntéshozók hajlamosak a kockázatkerülésre*, azaz „biztosra mennek".

Legyen adott két veszteséges alternatíva egy önérdekű gazdasági szervezet számára. Az első alternatíva egy L veszteség *biztos* elszenvedése, míg a második alternatíva βL veszteség elszenvedése $1/\beta$ *valószínűséggel* ($\beta > 1$). Most is föltételezzük, hogy a gazdasági szervezet számára érzékeny veszteség mind L, mind pedig βL.

A döntési probléma ezek után a következő:

$$\text{DP}(2) \qquad (L; p = 1) \quad \text{vagy} \quad (\beta L; p = 1/\beta)\,.$$

A fönti két alternatíva várható hasznossága megintcsak egyenlő, de a „prospect theory"-ból tudjuk [4], hogy a való világbeli döntéshozók a DP(2) típusú döntési szituációkban a második alternatívát fogják preferálni az elsővel szemben. Tehát

$$\text{DR}(2) \qquad (L; p = 1) \quad \prec \quad (\beta L; p = 1/\beta)\,.$$

Általánosítva kimondhatjuk, hogy azonos várható hasznosságú, *negatív alternatívák esetén a döntéshozók hajlamosak a kockázatvállalásra*, azaz „kockáztatnak".

Tekintsük ezekután a DP(1) és a DP(2) döntési problémák „keresztkombinációját". Ekkor az önérdekű gazdasági szervezet számára az első alternatíva az, hogy *biztosan* nyer G-t és $1/\beta$ *valószínűséggel* elszenved βL veszteséget. A második alternatíva pedig az, hogy *biztosan* elszenved L veszteséget és $1/\alpha$ *valószínűséggel* nyer αG-t. A döntési probléma tehát a következő:

$$\text{DP}(3) \qquad [(G; p = 1) \quad \text{és} \quad (\beta L; p = 1/\beta)]$$

$$\text{vagy} \qquad [(L; p = 1) \quad \text{és} \quad (\beta G; p = 1/\alpha)]\,.$$

A várható hasznosságok megintcsak egyenlőek az alternatívakombinációkban, de DR(1) és DR(2) együttes alkalmazásával adódik, hogy a döntéshozók a második alternatívát diszpreferálják az elsőhöz képest. Vagyis

$$\begin{aligned}\text{DR}(3) \qquad & [(G; p = 1) \quad \text{és} \quad (\beta L; p = 1/\beta)] \succ \\ & [(L; p = 1) \quad \text{és} \quad (\alpha G; p = 1/\alpha)]\,.\end{aligned}$$

Általánosítva kimondhatjuk, hogy azonos várható hasznosságú, de *pozitív és negatív alternatívákat vegyesen tartalmazó döntési helyzetekben a döntéshozók inkább veszteségérzékenyek*, azaz a biztos nyereségeket és a nem-biztos veszteségeket választják a biztos veszteségekkel és a nem-biztos nyereségekkel szemben.

2. Távlatbeszűkítés

Legyen adott újból két alternatíva egy önérdekű gazdasági szervezet számára. Az első alternatíva az, hogy megszerzi a G nyereséget „*itt és most*", azaz a téridő azon pontján, ahol ő éppen tartózkodik. A második alternatíva pedig az, hogy a G nyereséget „*távol és a jövőben*" szerzi meg, azaz a téridő egy tőle messzebb eső pontján. A döntési probléma így a következő:

$$\text{DP}(4) \qquad (G; s_0, t_0) \quad \text{vagy} \quad (G; s_m, t_n)\,,$$

ahol s_0, t_0 és s_m, t_n a téridőbeli allokációra utal ($m > 0, n > 0$).

Látható, hogy mindkét alternatívában *ugyanaz a nyereség* szerepel, csak más téridőbeli allokációval. Ez a különbség elegendő ahhoz, hogy a való világbeli döntéshozók inkább az első alternatívát válasszák a másodikkal szemben [5]. Tehát

$$\mathrm{DR}(4) \qquad (G; s_0, t_0) \quad \succ \quad (G; s_m, t_n)\,.$$

Általánosítva kimondható, hogy azonos, de a *téridőben különbözően allokált nyereségeket a döntéshozók leszámítolják*, azaz az „itt és most" nyereségeket preferálják a „távol és a jövőben" nyereségekkel szemben.

Tekintsük a veszteségek esetét. Az önérdekű gazdasági szervezet számára az első alternatíva az, hogy elszenvedi az L veszteséget *„itt és most"*, míg a második alternatíva az, hogy az L veszteséget *„távol és a jövőben"* szenvedi el. A döntési probléma így a következő:

$$\mathrm{DP}(5) \qquad (L; s_0, t_0) \quad \text{vagy} \quad (L; s_m, t_n)\,.$$

Mindkét alternatívában *ugyanaz a veszteség* szerepel, és megintcsak a téridőbeli allokációban van a különbség. Ez azonban elegendő ahhoz, hogy a való világbeli döntéshozók inkább a második alternatívát válasszák az elsővel szemben [5]. Tehát

$$\mathrm{DR}(5) \qquad (L; s_0, t_0) \quad \prec \quad (L; s_m, t_n)\,.$$

Általánosítva kimondható, hogy az azonos, de a *téridőben különbözően allokált veszteségeket a döntéshozók leszámítolják*, azaz a „távol és a jövőben" elszenvedett veszteséget preferálják az „itt és most" veszteségekkel szemben.

Tekintsük most a DP(4) és DP(5) döntési problémák „keresztkombinációját". Ekkor az önérdekű gazdasági szervezet számára az első alternatíva az, hogy megszerzi a G nyereséget *„itt és most"*, és elszenvedi az L veszteséget *„távol és a jövőben"*. A második alternatíva pedig az, hogy elszenvedi az L veszteséget *„itt és most"*, és megszerzi a G nyereséget *„távol és jövőben"*. A döntési probléma tehát a következő:

$$\mathrm{DP}(6) \qquad [(G; s_0, t_0) \quad \text{és} \quad (L; s_m, t_n)]$$

vagy

$$[(L; s_0, t_0) \quad \text{és} \quad (G; s_m, t_n)]\,.$$

A *nyereség – veszteség kombinációk azonosak*, de DR(4) és DR(5) együttes alkalmazásával adódik, hogy a döntéshozók az első alternatívát választják a másodikkal szemben. Vagyis

$$\mathrm{DR}(6) \qquad [(G; s_0, t_0) \quad \text{és} \quad (L; s_m, t_n)] \succ$$
$$[(L; s_0, t_0) \quad \text{és} \quad (G; s_m, t_n)]\,.$$

Általánosítva kimondható, hogy a *téridőben különbözően allokált*, de azonos nyereség – veszteség *kombinációk esetén a döntéshozók távlatbeszűkítő módon választanak*, mert mind a nyerségeket, mind pedig a veszteségeket diszkontálják térben és időben.

8. Túlélésközpontúság

Azt találtuk, hogy az *önérdekű gazdasági szervezetekre a veszteség-érzékenység és a távlatbeszűkítés a jellemző.* E két jellemző összekapcsolásával megragadhatóvá válik az önérdekű gazdasági döntéshozatal lényege.

Legyen adott két alternatíva egy önérdekű gazdasági szervezet számára. Az első az, hogy a gazdasági szervezet *biztosan* nyer G-t *„itt és most"*, és elszenved βL veszteséget $1/\beta$ *valószínűséggel „távol és a jövőben"*. A második pedig az, hogy a gazdasági szervezet *biztosan* elszenved L veszteséget *„itt és most"*, és nyer αG-t $1/\alpha$ *valószínűséggel „távol és a jövőben"*. A döntési probléma így a következő:

DP(7) $$[(G; p = 1, s_0, t_0) \quad \text{és} \quad (\beta L; p = 1/\beta, s_m, t_n)]$$

vagy

$$[(L; p = 1, s_0, t_0) \quad \text{és} \quad (\alpha G; p = 1/\alpha, s_m, t_n)]\,.$$

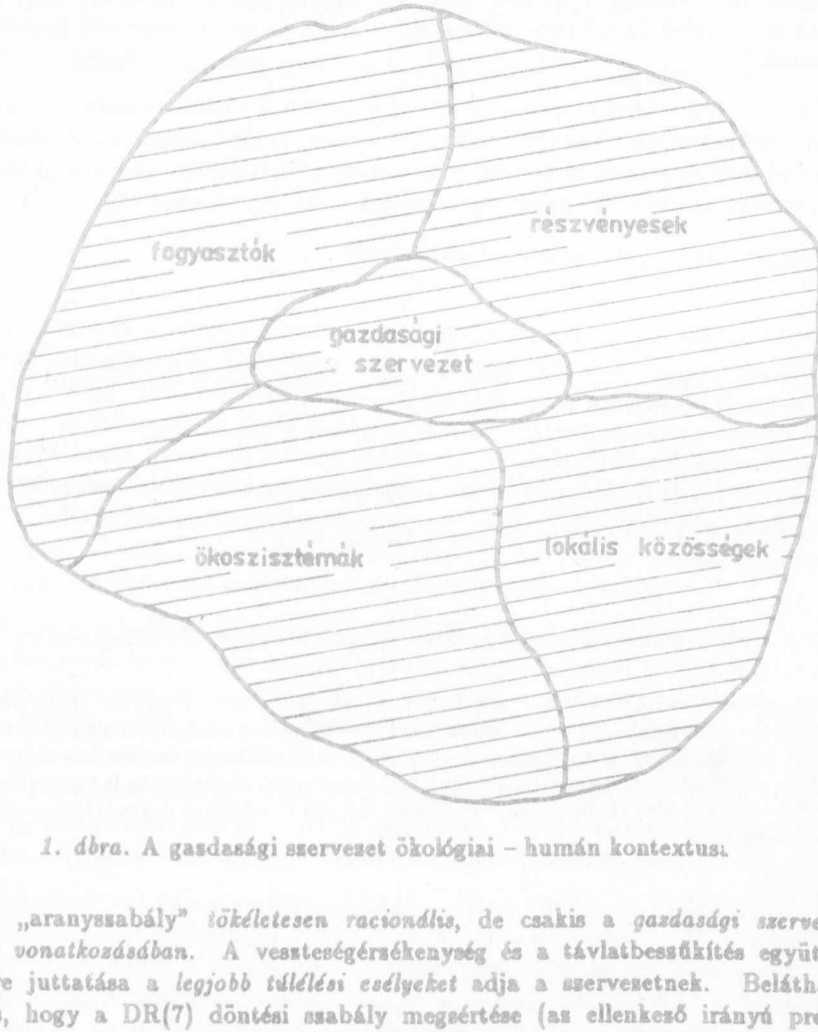
A két alternatíva várható hasznossága ugyanaz, de mások a valószínűségeloszlások, és a nyereségek – veszteségek a téridőben különbözően vannak allokálva. DR(3) és DR(6) együttes alkalmazásával adódik, hogy a döntéshozók inkább az első alternatívát választják a másodikkal szemben. Tehát

DR(7) $$\begin{aligned} &[(G; p = 1, s_0, t_0) \quad \text{és} \quad (\beta L; p = 1/\beta, s_m, t_n)] \succ \\ &[(L; p = 1, s_0, t_0) \quad \text{és} \quad (\alpha G; p = 1/\alpha, s_m, t_n)]\,. \end{aligned}$$

Az *önérdekű gazdasági döntéshozatal „aranyszabálya"* — azonos várható hasznosságú alternatívakombináció esetén — a következő: a *biztos „itt és most" nyereségek*, valamint a *nem-biztos „távol és a jövőben" veszteségek választása* és a *biztos „itt és most" veszeteségek*, valamint a *nem-biztos „távol és a jövőben" nyereségek elutasítása.*

1. táblázat
Az önérdekű gazdasági döntéshozatal aranyszabálya

Alternatívák	biztos, „itt és most"	nem-biztos, „távol és a jövőben"
nyereségek	választani	elutasítani
veszteségek	elutasítani	választani



1. ábra. A gazdasági szervezet ökológiai – humán kontextusa

Az „aranyszabály" *tökéletesen racionális*, de csakis a *gazdasági szervezet túlélése vonatkozásában*. A veszteségérzékenység és a távlatbeszűkítés együttes érvényre juttatása a *legjobb túlélési esélyeket* adja a szervezetnek. Belátható ugyanis, hogy a DR(7) döntési szabály megsértése (az ellenkező irányú preferencia) *elmaradó nyereséget* és *fölösleges kockázatot* jelentene. Vagyis a gazdasági önérdekűség a *túlélésorientált* (survivalist) döntéshozatallal azonos. Nem véletlen, hogy R. Dawkins a „túlélőgépek"-ként definiált géneket „önző"-nek találta [2].

4. Ökológiai és humán „közrosszak"

A gazdasági szervezetek nem légüres térben működnek, hanem mindenkor valamely *ökológiai– humán kontextusba ágyazottan*. A gazdasági szervezetek ugyanis állandó input–output kapcsolatban állnak a természeti környezet egységeivel, az ökoszisztémákkal, és rendszeres interakciókat folytatnak különböző embercsoportokkal (fogyasztók, részvényesek, lokális közösségek). (*1. ábra*) A való világban, amelyben a gazdasági szervezetek, az ökoszisztémák és az embercsoportok együtt léteznek, *nincs* semmi olyan *előrendezett harmónia*, ami biztosítaná, hogy a gazdasági szervezetek és a kapcsolódó ökoszisztémák és embercsoportok érdekei egybeessenek [1].

A *gazdasági önérdek*, azaz a gazdasági szervezetek túlélésorientált racionalitása számos esetben *megsérti az ökológiai megőrzés* és az *embert szolgálás imperatívuszait*. A *Global 2000 Report* az egész világra kiterjedően föltérképezte azokat a „közrosszakat", amiket az önérdekű gazdasági döntések és akciók okoznak [3].

(Beérkezett: 1988. február 8-án.)

Irodalom

1. BEAUCHAMP, T.L.–E. BOWIE (eds): *Ethical Theory and Business*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 1982.
2. DAWKINS, R.: *Az önző gén*. Gondolat Kiadó. Budapest 1986.
3. *Global 2000 Report*. Penguin Books. 1982.
4. KAHNEMAN, D.–A. TVERSKY: „Prospect theory: an analysis of decision under risk", *Econometrica*, 1979. March.
5. KINDLER J.: „Rövidülő távlatok", *Valóság*, 1985. 7.

Self-Interest Economic Decisions and their Consequences

According to conventional economics, if economic actors pursue their own self-interest, then the public good will be served. By unifying the prospect theory of TVERSKY and KAHNEMAN and the general theory of discounting the author presents a new model of self-interest economic behaviour. The main proposition of the paper is that self-interest economic decisions necessarily lead to public wrongs (ecological degradation and human deprivation).

Szigma, XX. (1987–88) 2–3. sz.

HUNYADI LÁSZLÓ – RÉVÉSZ TAMÁS

Modell az energiaár hatásainak vizsgálatára

Bevezetés

A Világbank a Magyarországnak nyújtandó energia–racionalizálási hitel kapcsán 1986-ban azzal a kéréssel fordult az illetékes magyar szervekhez, hogy Magyarországon átfogó tanulmány mérje fel a világpiaci energiaár alakulásának belföldi hatásait. A feladatot az OMFB kapta meg, amely a tanulmány kidolgozására bizottságot hozott létre. A bizottság a Világbank képviselőivel konzultálva úgy határozott, hogy a tanulmányt megalapozó számítások között kapjon helyet egy olyan modell, illetve modellrendszer, amely a fontosabb számszerűsíthető hatásokat ragadja meg. Ennek a modellnek az elkészítésével az OT Tervgazdasági Intézetét bízták meg, de részt vett a munkában az Ipargazdasági Intézet is.

Az energiagazdálkodás modelljei a korábbi időszakban elsősorban a hagyományos mennyiségi tervezéshez kapcsolódtak és erősen műszaki szemléletűek voltak [4]. Alapkérdésük az energiatermelés és elosztás egyensúlya, a technológiák közti optimális választás, valamint az optimális beruházásallokáció körül mozgott. Az árhatások modellezése hazánkban mindezidáig viszonylag háttérbe szorult; mindössze néhány ÁKM típusú árszámítás, egy — a mi munkánkkal időben párhuzamosan készült — ökonometriai elemzés [11] és modellezési munkánk közvetlen előzményeként egy egyszerűsített hatásvizsgálat [3] említhető meg.

Modellünk, amely a bizottsági munka keretében 1986-ban és 1987-ben készült, megkísérelte keresleti oldalról feltárni az árhatások közvetlen és tovagyűrűző hatásait. A modellezési munka egyes fázisait menet közben dokumentáltuk; ezek a munkaanyagok részletesen tartalmazzák a modell leírását [5], a felhasznált adatbázist [6], az első számítási eredményeket és a fő következtetéseket ([7] és [8]). A modellszámítások főbb eredményei a Bizottság zárójelentésében [10] is megjelennek. A modellezés egyes kiragadott kérdéseit nyilvánosan is publikálni kívántuk; így megjelent egy cikk a munka teljes áttekintéséről [1] és egy másik az eredmények közgazdasági értékeléséről [2].

Jelen cikkünkben elsősorban a modell szerkezetét, gondolatmenetét, működési módját kívánjuk bemutatni. A bevezetést követő *1. rész* a modell szerkezetét, az egyes modellrészek kapcsolatát tekinti át, majd a *2. rész* az adatok kérdéseivel foglalkozik. Ezután bemutatjuk a modell lényegesebb egyenleteit, egyenletcsoportjait (*3. rész*), végül röviden összefoglaljuk a fontosabb számítási eredményeket (*4. rész*).

1. A modell fő célkitűzései és szerkezete

A modellszámítások célja az, hogy megkísérelje felvázolni azokat a többirányú népgazdasági hatásokat, amelyeket az energiaárak feltételezett változásai indukálnak az 1986–2000 időszakra. Ennek során a modell számba veszi a legfontosabb hatásokat, ugyanakkor eltekint egy sor lényeges kérdés vizsgálatától. Talán a legfontosabb azt megemlíteni, hogy csak a keresleti oldalt, azaz az energia iránti igényeket vizsgálja, de nem foglalkozik az ellátás, a kínálat kérdéseivel.

Az ágazati, illetve cikkcsoportos bontású makromodell az 1970–1984-es időszak alapján statisztikai-ökonometriai eszközökkel becsült magatartási egyenletekből és 1983. évi — jórészt ÁKM bázisú — rögzített koefficiensekkel leírt technikai összefüggésekből áll. Ezek segítségével méri fel az energiaárak változásának tovagyűrűző hatásait.

Az első lépésben azt vizsgálja, hogy az energiahordozók termelői árának és egyéb fontos tényezőknek (pl. ágazati termelési értékeknek) a változása hogyan befolyásolja a nem energiatermelő ágazatok energia felhasználását. A becsült felhasználások és a feltételezett árak alapján meghatározható az egyes ágazatok energiaköltsége, amelynek változása egy ÁKM ármodellen keresztülvezetve megadja a nem energiatermelő ágazatok számított termelői árindexeit. (Ezek nem igazi termelői árindexek, hiszen nem a magyar árpolitika elveinek megfelelően képezzük őket, hanem azonnali és teljes költségtovagyűrűzést feltételező, az árváltozások irányába ható nyomásnak tekinthetők.)

A következő lépésben az ugyancsak kívülről adott (feltételezett) fogyasztói árak hatásait vizsgáljuk a lakossági energiafelhasználás struktúrájára és volumenére. A lakossági energiafelhasználás becslésénél természetesen más tényezőket is figyelembe veszünk, így egyebek közt a lakossági jövedelmeket és a hőmérsékleti tényezőket. A modell ezután egyszerű számítások útján kiterjeszti a vizsgálatot a lakossági fogyasztás egészére. Abból a feltételezésből, hogy a kiszámított „termelői árak" arányosan növelik a nem energia jellegű cikkek fogyasztói árait, levezethetők a lakossági fogyasztás feltételezett cikkcsoportos fogyasztói árindexei. Másfelől, ismerve az energia jellegű cikkekre vonatkozó becsléseket, és feltételezve, hogy a lakosság összes fogyasztása a reáljövedelmekkel arányosan nő, továbbá megtartva a nem energetikai cikkek fogyasztásának bázisidőszaki arányait, meghatározhatók a fogyasztási szerkezetnek azok az elmozdulásai, amelyeket az energiaár változások hoznának létre.

Továbbmenve, a modell nagyon leegyszerűsített módon ugyan, de becslést ad arra is, hogy az energiaár változások függvényében hogyan változna az egyes társadalmi–gazdasági csoportokba, illetve jövedelemkategóriákba tartozó háztartások átlagos fogyasztói árindexe. Ennek becslésére az egyes rétegek rögzített kiadási arányait, a fogyasztás szerkezetének átlagos elmozdulásait, valamint a becsült fogyasztói árindexet használtuk fel. Végül a lakossági fogyasztás fogyasztói illetőleg termelői áron számított értékének összevetésével becslést kaphatunk a fogyasztáson realizálódó forgalmi adók és árkiegészítések egyenlegére, amely a költségvetés egyik jelentős tétele.

A modell egyik ága alkalmas arra, hogy segítségével kivülről adott ágazati termelői árindexek esetén ÁKM összefüggésekből becsülje a nem energetikai ágazatok jövedelmi helyzetében bekövetkező változásokat, de ilyen számításokat a jelenlegi munkafázisban nem végeztünk. A modell szerkezetének, működésének áttekintését megkönnyíti az *1. ábra*, amely a modell folyamatainak blokksémáját adja meg.

A modell magatartási egyenleteinek becslését részben C64-es személyi számítógépen, részben az OTSZK Honeywell számítógépén végeztük. A modell szimulációs programját IBM kompatibilis személyi számítógépre készítettük el, részben egy táblázatkezelő program felhasználásával, részben pedig BASIC célprogram formájában. A szimulációs rendszer működési módja interaktív.

2. A modellben alkalmazott bontások és kapcsolataik

A modell központi magját egy ÁKM bázisú árszámítási blokk képezi, ennek következtében az alkalmazott szektorbontás meghatározó a modell többi részét illetően is. A felhasznált — 1983. évi 15 szektoros — ÁKM jellegzetessége az, hogy kiemelten kezeli az energiatermelő ágazatokat és viszonylag összevontan a többi szektort.[1]

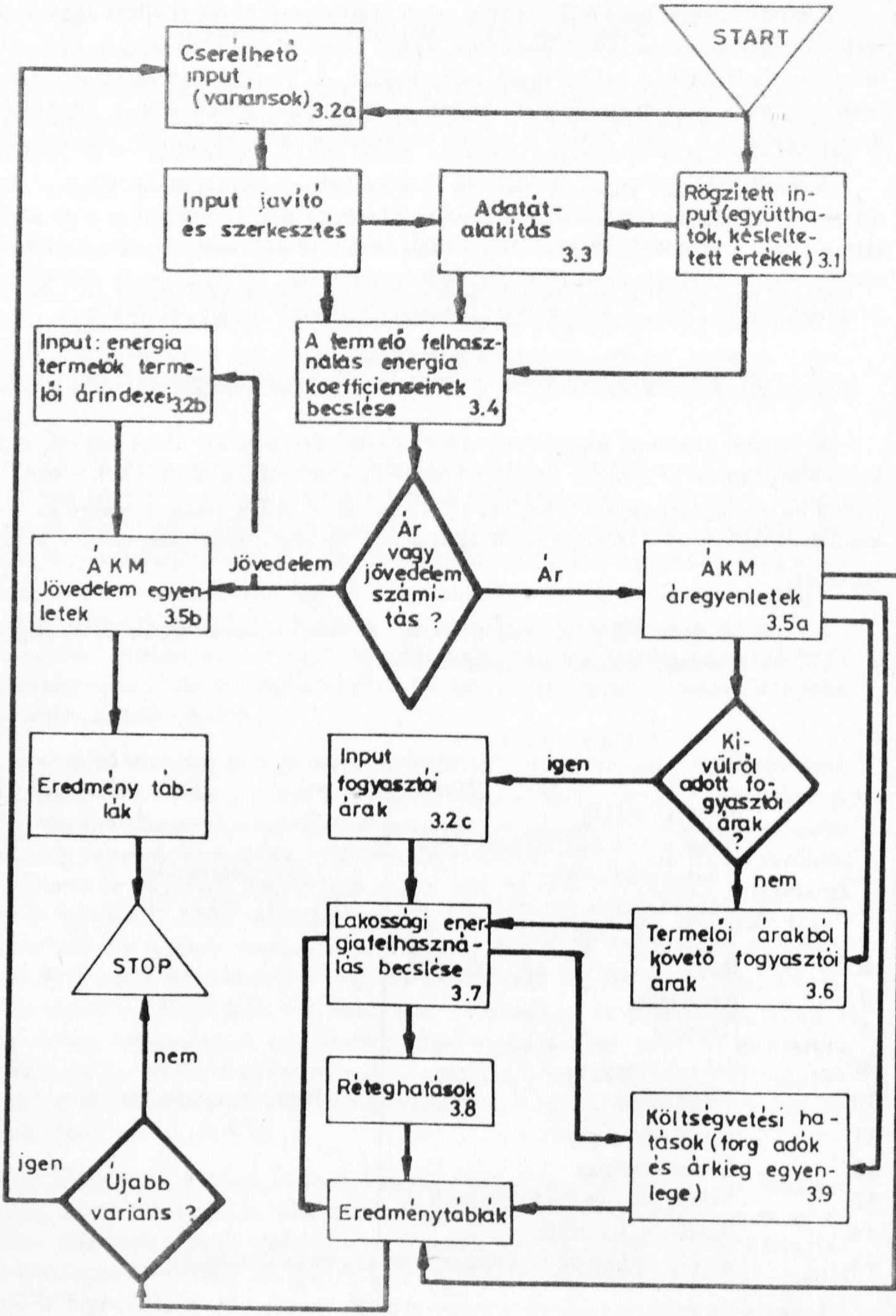
Az alkalmazott ÁKM ágazati bontása (a formális leírás során az ágazatokat $j = 1 \ldots 15$ indexszel jelölve) tehát az alábbi:

Á g a z a t o k

1.	Szénbányászat	Energiatermelők ($j = 1 \ldots 5$)
2.	Kőolaj- és földgázkitermelés	
3.	Kőolajfeldolgozás	
4.	Gázgyártás és -elosztás	
5.	Villamosenergiaipar	
6.	Bauxit- és egyéb ércbányászat	Nem energiatermelők ($j = 6 \ldots 15$)
7.	Kohászat	
8.	Gépipar	
9.	Szűkebb vegyipar[2]	
10.	Könnyűipar	
11.	Építőanyagipar	
12.	Élelmiszeripar	
13.	Mezőgazd. erdő- és vízgazd.	
14.	Szállítás, hírközlés	
15.	Egyéb ágazatok (építőipar, keresk., szolgáltatások)	

[1] A megalapozó számítások során néhány fő energiafelhasználó ágazatot is kiemelten kezeltünk, de az ÁKM-be ezek már aggregáltan kerültek be.

[2] Nem tartalmazza a 3. és 4. sz. ágazatokat.



1. ábra. A modell folyamatábrája

A számítások során 6 energiahordozót különböztettünk meg. Ennek a bontásnak a jelentőségét az adja meg, hogy a keresleti egyenletek becslésénél energiahordozó fajtánként álltak rendelkezésre idősoros adatok (a termelő szféra ill. a lakosság felhasználása), így a becsléseket ilyen bontásban végeztük el. A vizsgált 6 energiahordozó (a formális leírás során $i = 1 \dots 6$ indexszel jelölve) a következő:

E n e r g i a h o r d o z ó k

1. Szilárd energiahordozók
2. Folyékony energiahordozók
3. Gáz
4. Villamosenergia
5. Távhő
6. Benzin

A fentiekkel kapcsolatban meg kell jegyeznünk, hogy ezt a bontást a lakossági fogyasztás egyenleteinél alkalmaztuk, míg a termelő felhasználás esetében a benzin nem jelent meg külön energiahordozóként, hanem a folyékony csoport része volt. Ott tehát az i index tartalma értelemszerűen módosul.

A számítások során a lakossági fogyasztás szerkezetét a tervezésben használatos cikkcsoportos bontásban vizsgáltuk. A szolgáltatások egy csoportba való összevonásával így 14 cikkcsoportot használtunk ($l = 1 \dots 14$). Ezek a cikkcsoportok az alábbiak voltak:

C i k k c s o p o r t o k

1. Élelmiszerek
2. Élvezeti cikkek
3. Ruházati cikkek
4. Vas- és műszaki cikkek
5. Járművek
6. Háztartási vegyi cikkek
7. Bútorok
8. Kultúrcikkek
9. Üzemanyagok
10. Tüzelőanyagok
11. Gyógyászati cikkek
12. Egyéb cikkek
13. Víz, villany, gáz, távfűtés
14. Szolgáltatások

Végezetül a réteghatások vizsgálatakor 5 társadalmi–gazdasági csoportot különböztettünk meg (az egyes háztartások családfőjének hovatartozása szerint), és mindegyiken belül három jövedelemkategóriát (alacsony, átlagos, magas) határoztunk meg. (Az egyes jövedelemkategóriák tartalmát az adatbázis kiadványunkban [6] részletezzük.) Így tehát összesen 15 réteggel ($k = 1 \ldots 15$) számoltunk.

A modell működése szempontjából lényeges kérdés, hogy biztosítani tudjuk-e a közlekedést a különböző bontások között. Tekintve, hogy a különböző modellrészek egymástól lényegesen eltérő szemléletű és forrású adatokra épülnek, ez a közlekedés korántsem egyértelmű, sőt, teljes pontossággal meg sem valósítható. Ezért a munka során több olyan gyakorlati aggregációs és dezaggregációs problémát kellett megoldanunk, amelyek legalább nagy vonalakban biztosították a megfelelő átmeneteket. A legfontosabb ilyen lépéseket az alábbiakban foglaljuk össze.

a.) Az input adatoknál az árvariánsok kialakítása során a termelői árak esetében az OAÁH árvariánsait reprezentáns termékekre fogalmazta meg (vö. [6] 21. sz. tábla). Ebből kellett egyrészt ÁKM szemléletű ágazati, másrészt energiahordozónkénti átlagos árindexeket kikevernünk. Mindkét esetben a megfelelő árindexeket az 1983. évi anyagfelhasználási statisztikákból vett súlyokkal állítottuk elő. Itt kell megemlítenünk, hogy mivel a Kőolaj- és földgázkitermelés nevű ÁKM ágazat a nem energetikai szektorok felé gyakorlatilag csak a földgázt értékesíti, ágazati termelői árindexét a gáz árindexével tekintettük azonosnak.

b.) A termelő felhasználás becslésekor az idősoros adatokból nyert saját- illetve keresztárrugalmasságok energiahordozónként álltak rendelkezésre, így ezeket kellett az ÁKM ágazati struktúrájával azonosítani. Elvben a korrekt megoldás az lett volna, ha az ÁKM ágazatok és az energiahordozók egymásnak egyértelműen megfeleltethetők lettek volna, de ez nem így volt. Ezért azt a megoldást választottuk, hogy a szénbányászat esetén a szilárd, a kőolajfeldolgozás esetén a folyékony, a villamosenergiaipar esetén a villamosenergia, míg a kőolaj- és földgázkitermelés, valamint a gázgyártás és -elosztás ágazat esetén a gáz saját elaszticitásával számoltunk. A hő termelését nem tudtuk így besorolni, ennél fogva modellünkben a hőárak változása az energiafelhasználás költségeit csak közvetve — a helyettesítési hatásokon keresztül — befolyásolja.

c.) A fogyasztói árak azonosításakor a fentiekhez hasonló probléma nem merült fel. Azoknál a változatoknál, ahol a termelői árak növekedését automatikusan átvittük a fogyasztói árakra (ún. követő változatok), a benzin fogyasztói árát a kőolajfeldolgozó ipar átlagos termelői árindexéhez kötöttük.

d.) A lakossági fogyasztást (az ÁKM szektorokból) cikkcsoportos bontásba a pénzügyi tervezés 1984. évi transzformációs mátrixával vittük át. (Tekintve, hogy ez a mátrix alapvetően technológiai jellegű összefüggéseket tartalmaz és ezek időben meglehetősen stabilak, nem okoz különösebb gondot, hogy 1984. évi mátrixszal dolgoztunk 1983-as helyett; ez utóbbi ugyanis nem állt rendelkezésünkre.) A cikkcsoportos bontásban a lakosság üzemanyag fogyasztását a benzin felhasználásával azonosítottuk; ez, tekintve a diesel üzemű járművek kis súlyát, nem okoz számottevő torzítást. Az említett átmenet-mátrix az adatbázis kiadványunk [6] 14. sz. táblájában található meg.

e.) A háztartásstatisztika kiadási szerkezeteit és a lakossági fogyasztás szerkezetét is meg kellett feleltetnünk egymásnak a réteg árindexek meghatározásához. Ennek módját — a meglévő módszertani nehézségek (pl. háztartásstatisztika torzításai) hangsúlyozása mellett — az adatbázis kiadványunk aggregációs sémája adja meg. A szimulációs számítások báziséve 1983 volt; a számításokat az 1983–2000 időhorizontra végeztük el. Ez az előrejelzések szempontjából hosszú horizont a Világbank kifejezett kérése volt, s racionális magva az, hogy az energetikában a keresleti — kínálati alkalmazkodási folyamatok csak lassan bontakoznak ki, s így hosszabb előretekintésre van szükség. Nyilvánvaló, hogy ezek az előrejelzések csak nagy óvatossággal, igen sok fenntartással fogadhatók el.

3. A modell fontosabb egyenletei

A modell egyenleteit az alábbiakban az *1. ábra* blokksémájának megfelelően tárgyaljuk. Maga a blokkséma, amely valójában a program szerkezetét írja le, megadja az egyenletek elhelyezkedését is a rendszerben, így az egyenleteket az ottani hivatkozási számok szerint tárgyalva egyben a modell logikáját is megvilágítjuk. A rendszerben sok olyan elem (modul) van, amely „csak" az adatokkal való manipulálásra (adatelőkészítés, átszámítások az abszolút számokból indexekké stb...) szolgál. Ezek látszólag meglehetősen bonyolulttá teszik a rendszert, holott az valójában, legalábbis elveiben, meglehetősen egyszerű. Ezért a továbbiakban formálisan csak az érdemi számításokat végző egyenleteket mutatjuk be, míg az említett adatkezelő modulokról csak rövid, verbális leírást adunk. A rendszer pontos leírását a már említett munkaanyagunk [5] adja meg.

A modell egyenletei három nagy csoportra oszthatók: az első csoport a termelő felhasználás becslését és az árszámításokat végzi, a második a lakossági fogyasztást becsüli, míg a harmadik az előző kettő alapján kiegészítő számításokat végez a réteghatások és a költségvetési hatások felmérésére.

Az első feladatcsoport sémáját jól mutatja a *2. ábra* egyszerűsített ÁKM-je.

Ebben a szerkezetben az **E** mátrix az, amit elsődlegesen becsülni kívánunk, majd ennek felhasználásával készítünk ÁKM bázisú ármodellt a nem energetikai ágazatok termelői árainak, illetőleg jövedelmeinek becslésére.

Ezeket a feladatokat a *3.1–3.6 modulok* látják el. Szervezési okokból különválasztottuk a rögzített és a cserélhető inputot, hiszen a rögzített inputot csak egyszer kell betölteni, míg a cserélhető input szimulációs változatoktól függő értékeket visz be. A rögzített input *(3.1. modul)* viszi be a fix ÁKM-eket, az ágazat → cikkcsoport transzformációs mátrixot, a hasznos–energia együtthatókat, a társadalmi-gazdasági rétegek fogyasztási struktúráit, valamint a számításokhoz szükséges késleltetett árakat és árindexeket. A cserélhető input *(3.2 modul)* az energiahordozók belföldi árait, az ágazati bruttó termelés indexeit, a lakossági jövedelmeket, továbbá a viselkedési egyenletek egyes paramétereit olvassa be, valamint a termelő felhasználást és a lakossági fogyasztás becsléséhez szükséges egyéb, exogén változókat. Ez olvassa be — jövedelemszámítások esetén — az exogénnek tekintett fogyasztói árindexeket is. A cserélhető input kényelmes kezelésére a programba beépített saját editor szolgál.

A *3.3. modul* adatátalakítást és előkészítést végez. Itt állítjuk elő — egyebek között — az ÁKM koefficienseket és számítjuk ki az 1983. ill. 1984. évi bázisú megfelelő szerkezetű fogyasztói ár- és jövedelemindexeket. A továbbiak szempontjából lényeges a hazai ill. import pénzügyi hidak kulcsos kezelése, amely elvben lehetőséget ad az adórendszerben bekövetkező változások bizonyos értelmű követésére és amelyet a *2. ábra* jelöléseivel az alábbi egyenletek definiálnak:

$$RH_j = FH_j / \sum_{m=6}^{15} A_{m,j} \quad \text{és} \quad < RH_j >= \mathbf{RH}$$

$$RI_j = FI_j / IM_j \quad \text{és} \quad < RI_j >= \mathbf{RI}$$

$$\mathbf{M}' = \mathbf{AM}' + \mathbf{BE}' + \mathbf{TJ}' .$$

A termelő energiafelhasználás becslése és előrejelzése a modell központi feladata. Ezt a modellezés során több különböző változatban is elvégeztük különféle, egyre bonyolultabb szerkezetű egyenletekkel és egyre több magyarázó változó segítségével. Itt csak a legegyszerűbb megközelítést mutatjuk be, amely az energiafelhasználást csak az energiahordozók relatív árindexeivel (és implicit módon bruttó termelés növekedésével) magyarázza. Az egyes energiahordozók árindexeiből ($PP_{i,t}$), az ágazati bruttó termelési érték deflátor árindexeiből ($PT_{j,t}$) a megfelelő relatív árak szerepeltetésével becsült saját- és keresztárrugalmasságokból[3] ($EL_{i,m}$), valamint az exogénként kezelt ágazati bruttó termelési értékekből ($BT_{j,t}$) indulunk ki. Az árindexeket — tekintettel a hatások időbeni szétterülésére — általában a tárgyév és az azt megelőző 2 év mozgó átlagaként képeztük. A felhasznált egyenletek lényege az alábbiakban formalizálható:[4]

$$PR_{i,k,t} = \begin{cases} (PP_{i,t}/PP_{k,t})/(PP_{i,83}/PP_{k,83}), & \text{ha} \quad k = 1\dots5 \\ (PP_{i,t}/PT_{k,t})/(PP_{i,83}/PT_{k,83}), & \text{ha} \quad k = 6\dots15 \end{cases}$$

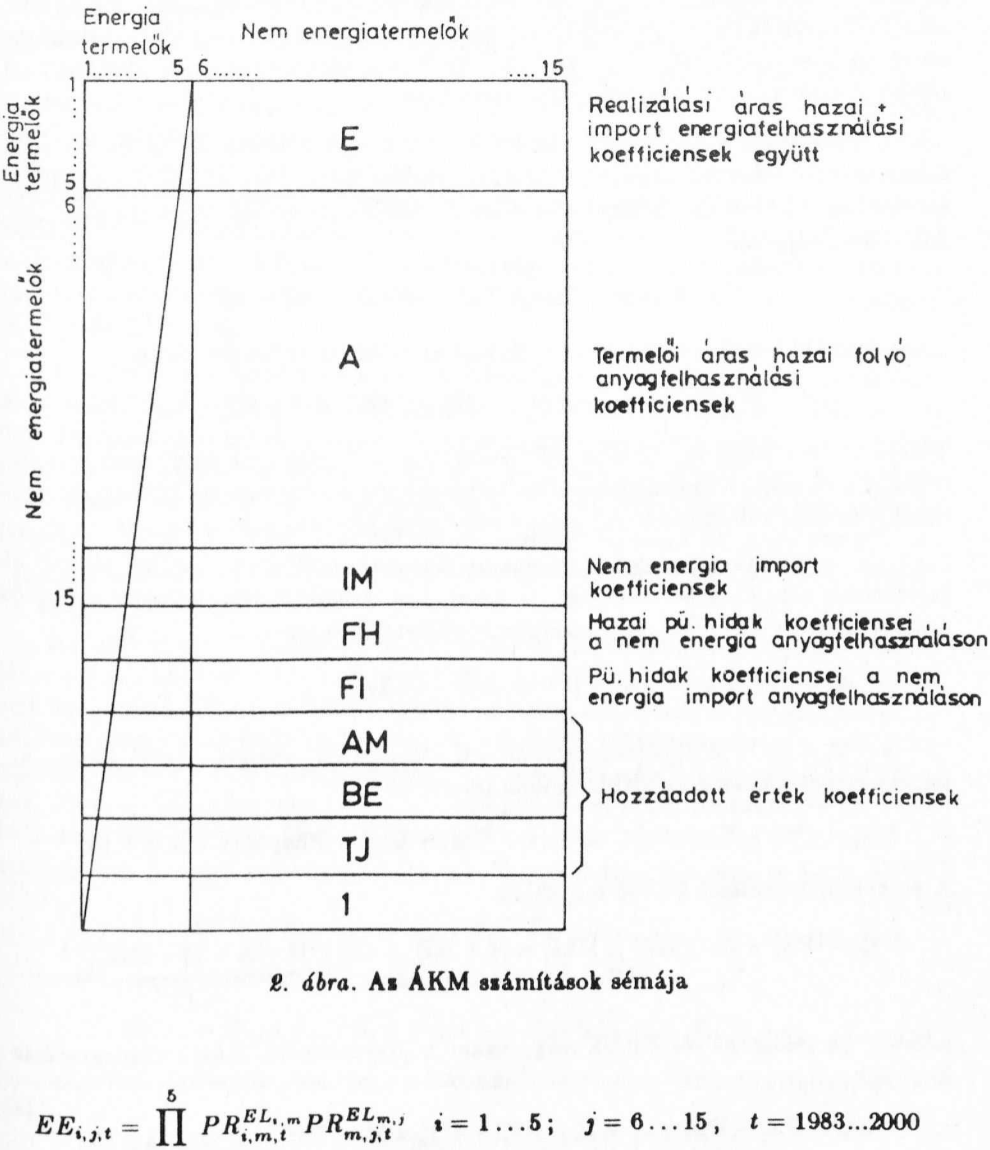
$$t = 1983\dots2000; \quad i = 1\dots5$$

(az egyes energiahordozók egymáshoz, ill. az ágazati árindexekhez és az 1983-hoz viszonyított árindexének meghatározása)

---

[3] A becslések módszerét és fontosabb eredményeit itt nem közöljük, ezek részletesen megtalálhatók az említett kiadványokban.

[4] A t =1983-at röviden 83 indexszel jelöljük.



2. ábra. **Az ÁKM számítások sémája**

$$EE_{i,j,t} = \prod_{m=1}^{5} PR_{i,m,t}^{EL_{i,m}} PR_{m,j,t}^{EL_{m,j}} \quad i = 1\ldots5; \quad j = 6\ldots15, \quad t = 1983...2000$$

(a j-edik ágazat fajlagos i-edik energiahordozók–igényének bázisindexei 1983=1.00)

$$E_{i,j,t} = E_{i,j,83} \times EE_{i,j,t} \quad i = 1\ldots5; \quad j = 6\ldots15; \quad t = 1983\ldots2000$$

(a becsült ÁKM koefficiensek a nem energiatermelő szektorokra, az 1983–2000 évekre)

$$EF_{i,j,t} = E_{i,j,t} \times BT_{j,t} \quad i = 1\ldots5; \quad j = 6\ldots15; \quad t = 1983\ldots2000.$$

A fenti számításokban $EF_{i,j,t}$ abszolút számban forintban adja meg az induló feltételek (árak és termelési érték) függvényében az ágazati és energiahordozónkénti energiafelhasználást, míg $E_{i,j,t}$ azokat a koefficienseket mutatja, amelyek az ár-, illetve jövedelemszámításoknál szükségesek lesznek.

A következő, *3.5. modul* a termelői árakra illetve alternatív módon a termelői jövedelmekre vonatkozó ÁKM számításokat végzi. Az ebben a modulban szereplő egyenletek indoklására tekintsük az érték összetevőire felírható alapvető ÁKM összefüggést:

$$\mathbf{1}' = \mathbf{1}' \times \mathbf{E} + \mathbf{1}' \times \mathbf{A} + \mathbf{FH}' + \mathbf{FI}' + \mathbf{IM}' + \mathbf{M}'$$

ami a korábbi koefficiensek felhasználásával az alábbi formára írható át:

$$\mathbf{1}' = \mathbf{1}' \times \mathbf{E} + \mathbf{1}' \times \mathbf{A} \times (\mathbf{I} + \mathbf{RH}) + (\mathbf{IM}') \times (\mathbf{I} + \mathbf{RI}) + \mathbf{M}' .$$

Tételezzük fel, hogy **RH** illetve **RI** időben nem változik, azaz az új árak mellett is a hazai és import anyagfelhasználás fajlagos támogatásigénye az 1983-as szinten marad, és nem változik a hozzáadott értékelemek hányada sem.

Legyen **P1**, az energiahordozók (energiatermelő szektorok) termelői árindexeit tartalmazó vektor, $\mathbf{PM} = < PM_i >$ az import árindexekből képzett diagonális mátrix **G** pedig egy némiképp speciális szerkezetű inverzmátrix:

$$\mathbf{G} = [\mathbf{I} - \mathbf{A} \times (\mathbf{I} + \mathbf{RH})]^{-1} .$$

A $\mathbf{P3}'_t = [\mathbf{P1}'_t, \mathbf{P2}'_t]$ árrendszerben a t. időszakra az energiatermelő ágazatokban az értékazonosság az alábbi módon írható fel:

$$\mathbf{P2}'_t = \mathbf{P1}'_t \times \mathbf{E}_t + \mathbf{P2}'_t \times \mathbf{A} \times (\mathbf{I} + \mathbf{RH}) + \mathbf{IM}' \times \mathbf{PM}_t \times (\mathbf{I} + \mathbf{RI}) + \mathbf{M}' .$$

A fenti alapegyenletet $\mathbf{P2}'_t$-re megoldva

$$\mathbf{P2}'_t = [\mathbf{P1}'_t \times \mathbf{E}_t + \mathbf{IM}' \times \mathbf{PM}'_t \times (\mathbf{I} + \mathbf{RI}) + \mathbf{M}'] \times \underbrace{[\mathbf{I} - \mathbf{A} \times (\mathbf{I} + \mathbf{RH})]^{-1}}_{\mathbf{G}}$$

adódik, ha pedig $\mathbf{M}'$-re oldjuk meg, akkor a jövedelemszámítások alapegyenlete kapható:

$$\mathbf{M}'_t = \mathbf{P2}'_t - \mathbf{P2}'_t \times \mathbf{A} \times [\mathbf{I} + \mathbf{RH}] - \mathbf{P1}'_t \times \mathbf{E}_t - \mathbf{IM}' \times \mathbf{PM} \times [\mathbf{I} + \mathbf{RI}]$$

(a nem energiatermelő ágazatok számított hozzáadott érték hányada)

$$\mathbf{TJ}'_t = \mathbf{M}'_t - \mathbf{AM}'_t - \mathbf{BE}'_t , \quad t = 1983 \ldots 2000$$

(a nem energiatermelő ágazatok számított tiszta jövedelem hányada)

$$\mathbf{TI}'_t = \mathbf{TJ}'_t \times < \mathbf{BT}_j >_t , \quad j = 6 \ldots 15; \quad t = 1983 \ldots 2000$$

(a nem energiatermelő ágazatok számított tiszta jövedelme az 1983 ... 2000 időszakban, 1983. évi reálértéken milliárd forint).

Ebben a felírásban — mint említettük — a termelő felhasználás változását egyszerűsített módon, az árváltozások függvényében fogalmaztuk meg mivel *koefficiensekkel* számoltunk, ez implicite azt jelenti, hogy a termelő felhasználás termelésrugalmasságát egységnyire rögzítettük. Számításaink során ez csak az első, leginkább áttekinthető, megközelítési mód volt; a későbbiekben feloldottuk a termelés rugalmasságára tett korlátozó feltevést, és a rugalmasságot külön becsültük. Természetesen ez esetben a kapott árrugalmassági együtthatók értéke is eltér a korlátozott becslésnél kapottól. Mivel számításainkat az egyedi (ágazati illetve cikkcsoportos) sajátosságok figyelembe vételével végeztük el, részletes sémájukat itt nem tudjuk bemutatni — az esetleges érdeklődők ezeket az említett munkaanyagokban [7,8] tekinthetik meg.

A másik nagy feladatcsoportot, a lakossági fogyasztás becslését a *3.6* és a *3.7. modulok* végzik: a 3.6. előállítja a megfelelően késleltetett és átlagolt relatív fogyasztói árindexeket, míg a 3.7. az energiafelhasználás energiahordozónkénti becslését adja meg. A becslések során a tüzelőanyag felhasználást — amelyen belül elvileg lehetőség van a helyettesítésre — két lépcsőben kezeltük: először becslést adtunk az összes tüzelőanyag felhasználásra, majd az egyes energiahordozók hányadának alakulására. A többi energiahordozó lakossági felhasználását külön egyenletekkel becsültük.

Az alábbi — sematizált — egyenletekben TR_t a trendkomponenst, TE_t a hőmérsékleti hatásokat kifejező proxy változót (vö. [9]), RJ_t a lakossági reáljövedelemindexet, TL_t a távfűtött lakások számát, AU_t pedig a lakosság személygépkocsi állományát (ezer db.) jelöli. A reál-árindexváltozók jelentése ezeknél az egyenleteknél: $PL1_t$ a tüzelőanyagok, $PL2_t$ a folyékony energiahordozók, $PL3_t$ a gáz, $PL4_t$ a villamosenergia, $PL5_t$ a hőenergia, $PL6_t$ pedig a benzin relatív, — a fogyasztói árindexekhez, illetve $PL2$ és $PL3$ esetén a tüzelőanyag átlagárához — viszonyított, és egyes árhatások esetén 4 év mozgó átlagaként képzett árindexe.[5]

$$DM_t = \beta_{10} + \beta_{11}TR_t + \beta_{12}TE_t + \beta_{13}PL1_t + \varepsilon_1$$

(a tüzelőanyagok lakossági felhasználásának becslése, PJ)

$$DL_{1,t} = \beta_{20} + \beta_{21}TR_t + \beta_{22}RJ_t + \beta_{23}PL2_t + \beta_{24}PL3_t + \varepsilon_2$$

(a szilárd tüzelőanyagok részaránya a lakossági tüzelőanyag felhasználásban, százalék)

$$DL_{2,t} = \beta_{30} + \beta_{31}TR_t + \beta_{32}RJ_t + \beta_{33}PL2_t + \beta_{34}PL3_t + \varepsilon_3$$

(a folyékony tüzelőanyagok részaránya a lakossági tüzelőanyagfelhasználásban, százalék)

$$DL_{3,t} = \beta_{40} + \beta_{41}TR_t + \beta_{42}RJ_t + \beta_{43}PL2_t + \beta_{44}PL3_t + \varepsilon_4$$

(a gáz részaránya a lakossági tüzelőanyagfelhasználásban, százalék)

---

[5] Az egyenletek és a változók pontos leírását (pl. késleltetések hossza, struktúrája) az említett munkaanyagunk [5] tartalmazza.

$$DL_{4,t} = \beta_{50} + \beta_{51}TR_t + \beta_{52}RJ_t + \beta_{53}PL4_t + \varepsilon_5$$

(a villamosenergia lakossági felhasználásának becslése, PJ)

$$DL_{5,t} = \beta_{60} + \beta_{61}TL_t + \beta_{62}PL5_t + \varepsilon_6$$

(a távhő lakossági felhasználásának becslése, PJ)

$$DL_{6,t} = \beta_{70} + \beta_{71}RJ_t + \beta_{72}AU_t + \beta_{73}PL6_t + \varepsilon_7$$

(a benzin lakossági felhasználásának becslése, PJ), és valamennyi egyenletben $t = 1984 \ldots 2000$.

A paraméterek becslése külön ökonometriai feladat, ennek részleteire itt nem térünk ki; a becslés módszereit, a kapott paramétereket és statisztikákat egy korábbi munkaanyagunk [7] részletesen bemutatta.

A fenti sematizált egyenletek egy kissé módosított keresleti rendszert írnak le: módosított olyan értelemben, hogy a sztenderdnek tekintett ár- és jövedelemváltozókon kívül egyéb, megítélésünk szerint fontos változók is szerepelnek az egyenletekben, továbbá azért is speciális a rendszer, mert konzisztenciafeltételeket, valamint keresztárhatásokat a termékcsoportoknak csak egy részhalmazára határoz meg. A villamosenergia, a távhő és a benzin olyan — egymással és a többi energiahordozóval nem helyettesíthető — célokat szolgálnak, hogy indokoltnak látszott elkülönült kezelésük. Ezt a kezelésmódot egyébként az előzetes számítások igazolták.

A bemutatott fogyasztási egyenletek némi átalakítás után PJ-ban adják meg a lakossági energiafelhasználást. A *3.8. modul*, amely a réteghatásokat kívánja vizsgálni, ezeket a rétegenként eltérő induló (1983. évi) kiadási szerkezet, az árak, valamint egyéb tényezők függvényében változó fogyasztási szerkezet és a számított fogyasztói árindexek alapján határozza meg. A számítások itt azzal az alapfeltevéssel élnek, hogy

- az összes lakossági fogyasztás a tervezett reáljövedelmekkel arányosan nő;
- a nem energia jellegű fogyasztási cikkek fogyasztási arányai nem változnak;
- az egyes rétegek fogyasztási szerkezete az összes fogyasztás szerkezetével arányosan változik.

Ezek az egyszerűsítő feltevések és a rájuk épített modul egy komplett, rétegenkénti keresleti rendszert hivatottak — legalábbis részben — pótolni.

Az egyenletek a fenti feltételezésekből azonnal következnek, de mivel sok, igen egyszerű elv technikailag csak viszonylag bonyolultan írható le, részletes felírásuktól eltekintünk. Hasonlóképpen elhagyjuk a *3.9. modul*nak, a forgalmi adók és árkiegészítések egyenlegét leíró egyenleteknek a felírását is. Ezek abból indulnak ki, hogy a lakossági fogyasztás felírható fogyasztói és termelői áron is, és ezek különbségének cikkcsoportonkénti összegét képezzük változatlan (1983. évi) és becsült folyó áron.

4. Számítási eredmények és következtetések

Miután bemutattuk a modell szerkezetét, felépítését, működésének módját, igen röviden szólnunk kell az eddig elvégzett számítások néhány leglényegesebb következtetéséről is.

A számítások két nagy csoportra oszthatók: egyik részük a magatartási egyenletek becslésére vonatkozott, azaz azoknak a paramétereknek a becslésére, amelyeket itt a leírásban szabadon hagytunk, míg a számítások másik része a modellel végzett szimulációkat mutatja be alternatív szcenáriók feltételezésével.

A magatartási egyenletek becslése arra a végkövetkeztetésre vezetett, hogy mind a termelő felhasználás, mind a lakossági fogyasztás esetében az energiafelhasználás gyengén ugyan és késleltetve, de statisztikailag kimutatható módon reagál az árak változásaira. Az árérzékenység kisebb, mint a fejlett piacgazdálkodást folytató országok hasonló mutatója, ami egyben azt is jelenti, hogy a változó árakhoz való alkalmazkodásunk lassú, és ez sok veszteség forrása. Kiváltképp igaz ez a termelő felhasználásra, míg a lakossági fogyasztás esetén az árérzékenységi mutatók — érthető módon — erősebbek és közelebb állnak az említett értékekhez. A becslések másik fontos paramétercsoportja a termelés, illetve a jövedelem változásaira való reagálásokat fejezi ki. Eredményeink szerint az energia termelő felhasználása átlagosan kb. 0.7 rugalmassággal válaszol a termelés változásaira, ami magasabb érték a hagyományos tervezés által használtnál, és azt mutatja, hogy távlatokban a termelés növekedése radikális ágazati és azon belüli szerkezetváltozás hiányában a tervezettnél magasabb energianövekedéssel jár.

A modellel végzett szimulációs számítások természetesen csak a nagyszámú szcenáriók ismertetésével együtt értékelhetők, ezt viszont itt nem tudjuk megadni. Így csak néhány fontosabb, minőségi következtetés bemutatására vállalkozhatunk. Az első az, hogy a becsült termelői árváltozások, amelyeket az energia világpiaci és ezen keresztül belföldi árai indukálnak, még a gyenge alkalmazkodóképesség ellenére is kisebbek a vártnál. A másik — egyáltalán nem meglepő — következtetés az, hogy a vizsgálatba bevont árszcenáriók csekély mértékbben ugyan, de növelték a rétegek közötti egyenlőtlenségeket. Végül számításaink kimutatták, hogy a termelés ágazati szerkezetének kedvező irányú megváltozása (pl. a feldolgozó ágazatok gyorsabb, az alapanyagtermelő ágak lassabb növekedése) nagyon lényegesen csökkenti a gazdaság energiaigényességét.

(Beérkezett: 1988. május 12-én.)

Irodalom

1. HUNYADI L.–RÉVÉSZ T.: Az energia árhatásvizsgálat modellje. *Tervgazdasági Fórum*, 1988 1. 41–52 old.
2. HUNYADI L.–RÉVÉSZ T.: Modellszámítások az energiafelhasználás becslésére. *Közgazdasági Szemle*, 1988 9. 1072–1086.
3. LŐVEI L.: A lakosság energiafelhasználásának statisztikai vizsgálata. Tervgazdasági Intézet (TGI), Budapest 1986.
4. PETHŐ J.: Az energiahordozó árak hatása a fogyasztás struktúrájára. ERŐTERV, Budapest 1986.
5. Az energia árhatásvizsgálat modellje (EÁM). A modell leírása. TGI és Ipargazdasági Intézet (IgI), Budapest 1987.
6. EÁM. A modell adatbázisának dokumentációja. TGI és IgI, Budapest 1987.
7. EÁM. A modell első számítási eredményei. TGI és IgI,m Budapest 1987.
8. EÁM. A termelő felhasználás újrabecslése és érzékenységvizsgálatok a modellel. TGI és IgI, Budapest 1987.
9. Az energiahordozók szezonális tárolása. OMFB, Budapest 1986.
10. A magyar energiaárak vizsgálata. OMFB, Budapest 1987.
11. A magyar gazdaság energiaérzékenységének empirikus vizsgálata. Világgazdasági Kutató Intézet, Budapest 1987.

A Model for the Investigation of the Impacts of Energy Prices

The article presents the formal description and operation of the model constructed on the initiative and with the cooperation of the World Bank. It also refers to the working papers and articles published elsewhere which contain the numerical results and the conclusions.

The article first shows the phases of modelling and their interrelations on a flow chart and indicates the computerized implementation of the model. Then the break-downs applied in the model are surveyed and the difficulties discussed. These emerge since the partial models (modules) were built on different approaches resulting in different levels of desaggregation and contents of the data. The central chapter of the article presents first the price equations based on input/output relations, and then the schemata of equations describing the expected development of household consumption. Finally, a brief insight into the main conclusions is provided.

Szigma, XX. (1987–88) 2–3. sz.

MÁTYÁS LÁSZLÓ

Dinamikus panelmodellek becslése

Az idősorok és keresztmetszeti adatok együttes felhasználásának — az input és az output információt növelő szerepe következtében — rendkívül fontos helye van az ökonometriai vizsgálatokban. A panelmodellek lehetővé teszik az így előállított adatbázisra épülő ökonometriai modellek specifikálását és becslését (MÁTYÁS [4]). A hagyományos panelmodellekre kidolgozott (és a statisztikai-ökonometriai számítógépes programcsomagokban fellelhető) paraméterbecslési eljárások azonban dinamikus modellek esetén (mikor a magyarázó változók között késleltetett endogének is szerepelnek) nem mindig eredményeznek torzítatlan, illetve konzisztens becslést. Tekintettel kell lenni különösen arra, hogy a konzisztencia vizsgálata valamivel kiterjedtebb elemzést igényel, mint a hagyományos idősoros modelleknél, mivel az egyes változók megfigyeléseinek száma két szempontból is tarthat a végtelenbe: egyrészt a megfigyelt egyedek száma (ami a sztochasztikus határértékek számításánál a nagy számok törvényének alkalmazását teszi lehetővé), másrészt a megfigyelt idősor hossza egyaránt a végtelenbe tarthat.

Írásom fő célja bemutatni, hogy a panelmodellek szokásos paraméterbecslési eljárásai mikor konzisztensek és mikor nem, különös tekintettel arra az esetre, amikor a megfigyelt idősorok végesek, hiszen általában nagyszámú egyed rövid idősorainak a megfigyelései állnak rendelkezésünkre. Nem kerülnek terítékre a továbbiakban speciálisan dinamikus panelmodellekre kidolgozott olyan becslési eljárások, mint például a megfelelő instrumentális változók módszerei: egyrészt, mivel ez jelentősen megnövelné az írás terjedelmét; másrészt, mivel ezen módszerek feladatorientáltak, így általánosságban beszélni róluk nem lenne célravezető; s végül harmadszor, mivel a már említett számítógépes programcsomagok nem tartalmazzák ezen eljárásokat, így gyakorlati szerepük — jelenleg még — kicsi.

Az írás első részében röviden emlékeztetünk a panelmodellekre, illetve a paramétereinek becslésére szolgáló eljárásokra. Ezután megnézzük egy egyszerűsített — exogén változókat nem tartalmazó — modell főbb paraméter esztimátorainak asszimptotikus és „fél"-asszimptotikus tulajdonságait (mikor a megfigyelt idősor hossza véges), megállapítva, mely esztimátorok konzisztensek. A továbbiakban a megfigyelt változók stacionaritását feltételezve, újravizsgáljuk a fenti esztimátorok konzisztenciáját. Végül bebizonyítjuk, hogy az eddig tett összes főbb megállapításunk érvényben marad az exogén változókat magában foglaló általános modellben is. Sajnálatos módon a téma tárgyalása nélkülözhetetlenné tesz számos súlyos képlet és levezetés alkalmazását, ami azonban elkerülhetetlen, mivel ezek az irodalomban nem találhatók meg (és így itt referenciaként szolgálhatnak), illetve ha meg is találhatók, hibásak (mint például TROGNON [11], SEVESTRE–TROGNON [9], NICKELL [6] írásaiban).

1. A panelmodellek

Legyen a kiinduló modell

$$y = X\beta + u\,, \tag{1}$$

ahol – és a továbbiakban mindig –

y – az endogén változó megfigyeléseinek $(NT \times 1)$ méretű vektora,

X – az exogén magyarázó változók megfigyeléseinek $(NT \times K)$ méretű mátrixa,

u – a látens változók $(NT \times 1)$ méretű vektora,

K – a magyarázó változók száma,

N – a megfigyelt egyedek száma,

T – a megfigyelt idősor hossza,

tehát

$$y = \begin{pmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{1T} \\ \vdots \\ y_{N1} \\ \vdots \\ y_{NT} \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad X = \begin{pmatrix} x_{11}^1 & \dots & x_{11}^K \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{NT}^1 & \dots & x_{NT}^K \end{pmatrix}.$$

Ha az egyedspecifikus hatásokat állandó hatásként építjük be az (1) modellbe, akkor a modell formája:

$$y = X\beta + Z\alpha + u\,, \tag{1a}$$

ahol

$Z = I_N \otimes L_T$ a vakváltozók $(NT \times N)$ méretű mátrixa

I_N – az $(N \times N)$ méretű egységmátrix,

L_T – a $(T \times 1)$ méretű csupa egyesekből álló vektor,

α – az egyedhatásokat kifejező $(N \times 1)$ méretű paramétervektor és

$E(u) = 0,\quad E(uu') = \sigma^2 I_{NT}$.

Ha az egyedspecifikus hatásokat véletlen hatásként építjük be az (1) modellbe, akkor a modell formája:

$$y = X\beta + \mu \otimes L_T + v\,, \tag{1b}$$

ahol

μ – az egyedhatásokat kifejező $(N \times 1)$ méretű valószínűségi vektorváltozó,

v – a látens változók $(NT \times 1)$ méretű vektora, valamint:

a) A μ_i és v_{it} valószínűségi változók függetlenek minden i-re és t-re;

b) $E(\mu_i) = 0,\ \ E(v_{it}) = 0$;

c)

$$E(v_{it}v_{i't'}) = \begin{cases} \sigma_v^2 & \text{ha } i=i',\ t=t' \\ 0 & \text{különben;} \end{cases}$$

d)

$$E(\mu_i\mu_{i'}) = \begin{cases} \sigma_\mu^2 & \text{ha } i=i' \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Belátható (MÁTYÁS [4]), hogy az (1a) és (1b) modell paramétereinek főbb esztimátorai kifejezhetők a λ–típusú esztimátor segítségével:

$$\widehat{\beta}_\lambda = (X'W_nX + \lambda X'B_nX)^{-1}(X'W_ny + \lambda X'B_ny)$$

vagy

$$\widehat{\beta}_\lambda = (X'X + (\lambda-1)X'B_nX)^{-1}(X'y + (\lambda-1)X'B_ny)\,,$$

ahol

$$W_n = I_{NT} - (I_N \otimes \frac{J_T}{T}) = I_N \otimes (I_T - \frac{J_T}{T})$$

és

$$B_n = I_N \otimes \frac{J_T}{T}\,,$$

ahol

J_T a csupa 1-esekből álló $(T\times T)$ méretű mátrix. Ha $\lambda = 0$, akkor $\widehat{\beta}_\lambda$ az (1a) modell paramétereinek állandó hatású (úgynevezett intra, vagy within) esztimátora; ha $\lambda = 1$, akkor az (1a), (1b) modellek paramétereinek KLNM esztimátorát nyújtja a $\widehat{\beta}_\lambda$, valamint ha $\lambda = (\delta_v^2/\delta_v^2 + T\delta_\mu^2)$, akkor az (1a), (1b) modellek ALNM esztimátora.

Fő figyelmünk a továbbiakban az (1b) modell λ–típusú esztimátoraira fog irányulni. Az állandó hatású (1a) modellt csupán néhány problémával fogjuk érinteni, mivel a dinamikus megközelítés szempontjából sokkal kevesebb nehézség forrása.

2. A λ–típusú esztimátorok dinamikus modellekben

Az írás további részében feltételezzük, hogy az (1b) modell csupán egyetlen magyarázó változót tartalmaz és az a késleltetett endogén változó. Az utolsó fejezetben be fogjuk látni, hogy az így egyszerűsített modellre tett megállapításaink érvényben maradnak az exogén változókat tartalmazó modellben is. A modell tehát:

$$y_t = \beta y_{t-1} + u_t\,, \tag{2}$$

ahol

$$y_t = \begin{pmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{1T} \\ \vdots \\ y_{N1} \\ \vdots \\ y_{NT} \end{pmatrix}, \quad y_{t-1} = \begin{pmatrix} y_{10} \\ \vdots \\ y_{1,T-1} \\ \vdots \\ y_{N0} \\ \vdots \\ y_{N,T-1} \end{pmatrix}$$

és

$$u = \mu \otimes L_T + v \,.$$

Vegyük észre, hogy itt az y változó t indexe a szokásostól eltérően annak megkülönböztetésére szolgál, hogy az y vektorváltozó egyidejű vagy késleltetett értékeivel van-e dolgunk.

Egyszerűen belátható, hogy a (2) modell magyarázó és látens változói nem függetlenek, így a λ–típusú esztimátorok (véges mintában) nem torzítatlanok.

Nézzük, mi a helyzet nem véges mintában! Gyakorlati szempontból két esetnek van jelentős szerepe:

1. mikor N fix és $T \to \infty$ (a továbbiakban *teljesen asszimptotikus* eset);
2. mikor $N \to \infty$, de T fix (*fél–asszimptotikus eset*).

Vegyük először a $\widehat{\beta}_\lambda$ esztimátort a fél–asszimptotikus esetben:

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty} \frac{1}{NT}\widehat{\beta}_\lambda = \operatorname*{plim}_{N\to\infty} \frac{1}{NT}\left[y'_{t-1}y_{t-1} + (\lambda-1)y'_{t-1}B_n y_{t-1}\right]^{-1} \times$$
$$\times \left[y'_{t-1}y_t + (\lambda-1)y'_{t-1}B_n y_t\right].$$

Visszahelyettesítve a fenti formulába a (2) összefüggést:

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty} \frac{1}{NT}\widehat{\beta}_\lambda = \beta + \operatorname*{plim}_{N\to\infty} \frac{1}{NT}\left[y'_{t-1}y_{t-1} + (\lambda-1)y'_{t-1}B_n y_{t-1}\right]^{-1} \times$$
$$\times \left[y'_{t-1}u + (\lambda-1)y'_{t-1}B_n u\right].$$

Figyelmünket összpontosítsuk most a torzító tényezőre, és vizsgáljuk meg az egyes tagok fél–asszimptotikus határértékeit.

A) A $\text{plim}_{N\to\infty} \frac{1}{NT} y'_{t-1} u$ határérték kiszámításához figyelembe kell venni, hogy az y_i, illetve az y vektor az i-edik egyednél a (2) modell végső formáját felhasználva a következő formát ölti:

$$y_{it} = \begin{pmatrix} \beta y_{i0} + \mu_i + v_{i1} \\ \vdots \\ \beta^j y_{i0} + \frac{1-\beta^j}{1-\beta}\mu_i + \sum_{\tau=0}^{j-1} \beta^\tau v_{i,j-\tau} \\ \vdots \\ \beta^T y_{i0} + \frac{1-\beta^T}{1-\beta}\mu_i + \sum_{\tau=0}^{T-1} \beta^\tau v_{i,T-\tau} \end{pmatrix}$$

és

$$y_{i,t-1} = \begin{pmatrix} y_{i0} \\ \beta y_{i0} + \mu_i + v_{i1} \\ \vdots \\ \beta^{T-1} y_{i0} + \frac{1-\beta^{T-1}}{1-\beta}\mu_i + \sum_{\tau=0}^{T-2} \beta^\tau v_{i,T-\tau-1} \end{pmatrix}.$$

Mivel pedig

$$u_i = \mu_i L_T + \begin{pmatrix} v_{i1} \\ \dots \\ v_{iT} \end{pmatrix},$$

így

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty} \frac{1}{NT} y'_{t-1} u = \frac{1}{NT}[\sum_{\tau=1}^{T-1} \frac{1-\beta^\tau}{1-\beta} E(\mu'\mu) + \sum_{\tau=0}^{T-1} \beta^\tau E(y'_0\mu)],$$

ahol y_0 a y_{i0} kezdeti értékeket tartalmazó $(N \times 1)$ méretű valószínűségi vektorváltozó.

Vegyük figyelembe, hogy az $y_{i,t-1}$ és az u_i valószínűségi vektorváltozók egyes elemei függetlenek minden i-re $(i = 1, \dots, N)$ és azonos eloszlásúak, így a nagy számok törvényének megfelelően (lásd a Hincsin tételt)

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty} \frac{1}{N} y'_{t-1} u = \frac{1}{N} E(y'_{t-1} u)$$

$$E(\mu'\mu) = N E(\mu_i^2), \quad (E(\mu_1) = \dots = E(\mu_N))$$

$$E(y'_0\mu) = N E(y_{i0}\mu_i), \quad (E(y_{10}\mu_i) = \dots = E(y_{N0}\mu_N))$$

$$\sum_{\tau=0}^{T-1} \beta^T E(y_{i0}\mu_i) = \frac{1-\beta^T}{1-\beta} E(y_{i0}\mu_i)$$

és végül

$$\sum_{\tau=1}^{T-1}\frac{1-\beta^\tau}{1-\beta}E(\mu_i\mu_i)=\frac{1}{1-\beta}[T-1-\beta^1-\ldots-\beta^{T-1}]E(\mu_i\mu_i)=$$

$$=\frac{1}{1-\beta}(T-\frac{1-\beta^T}{1-\beta})E(\mu_i\mu_i)=\frac{1}{(1-\beta)^2}(T-T\beta-1+\beta^T)E(\mu_i\mu_i)\,.$$

Összegezve tehát

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty}\frac{1}{NT}y'_{t-1}u=\frac{1}{T}\frac{1-\beta^T}{1-\beta}E(y_{i0}\mu_i)+\frac{1}{T}(\frac{T-T\beta-1+\beta^T}{(1-\beta)^2})\sigma_\mu^2\,.$$

B) A $\operatorname{plim}_{N\to\infty}\frac{1}{NT}y'_{t-1}y_{t-1}$ határérték kiszámításánál vegyük figyelembe az $y_{i,t-1}$ valószínűségi vektorváltozó A) pontban látott kifejtését, amiből könnyen adódik, hogy

$$y'_{it-1}y_{i,t-1}=(\beta^{T-1}y_{i0}+\frac{1-\beta^{T-1}}{1-\beta}\mu_i+\sum_{\tau=0}^{T-2}\beta^\tau v_{iT-\tau-1})^2+\ldots+y_{i0}^2\,,$$

és így a nagy számok törvényének figyelembevételével

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty}\frac{1}{NT}y'_{t-1}y_{t-1}=\frac{1}{T}[\sum_{\tau=0}^{T-1}\beta^2E(y_{i0}^2)+\sum_{\tau=1}^{T-1}\frac{2\beta^\tau(1-\beta^\tau)}{1-\beta}E(y_{i0}\mu_i)+$$

$$+\sum_{\tau=1}^{T-1}(\frac{1-\beta^\tau}{1-\beta})^2E(\mu_i\mu_i)+\sum_{j=1}^{T-1}\sum_{\tau=0}^{j-1}\beta^{2\tau}E(v_{ij-\tau-1}^2)]\,.$$

Számításba véve, hogy

$$\sum_{j=1}^{T-1}\sum_{\tau=0}^{j-1}\beta^{2\tau}=1+(1+\beta^2)+\ldots+(1+\beta^2+\ldots+\beta^{2(T-2)})=$$

$$=\frac{1}{1-\beta^2}[1-\beta^2+1-\beta^4+\ldots+1-\beta^{2(T-1)}]=$$

$$=\frac{1}{1-\beta^2}[T-1-\beta^2(\frac{1-\beta^{2(T-1)}}{1-\beta^2})]=$$

$$=\frac{1}{1-\beta^2}[\frac{T-1-T\beta^2+\beta^{2T}}{1-\beta^2}],$$

a keresett határérték :

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty}\frac{1}{NT}y'_{t-1}y_{t-1}=\frac{1}{T}\frac{1-\beta^{2T}}{1-\beta^2}E(y_{i0}^2)+\frac{1}{T}\frac{2}{1-\beta}[\frac{1-\beta^T}{1-\beta}-\frac{1-\beta^{2T}}{1-\beta^2}]E(y_{i0}\mu)+$$

$$+\frac{1}{T}\frac{1}{(1-\beta)^2}[T-2\frac{1-\beta^T}{1-\beta^2}+\frac{1-\beta^{2T}}{1-\beta^2}]\sigma_\mu^2+\frac{1}{T}\frac{1}{1-\beta^2}[\frac{T-1-T\beta^2+\beta^{2T}}{1-\beta^2}]\sigma_v^2.$$

C) A $\operatorname{plim}_{N\to\infty}\frac{1}{NT}y'_{t-1}B_n y_{t-1}$ határérték kissámításánál as eddigiek figyelembevételével könnyen adódik, hogy

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty}\frac{1}{NT}y'_{t-1}B_n y_{t-1}=\frac{1}{T^2}E[(\sum_{\tau=0}^{T-1}\beta^\tau y_{i0}+\sum_{\tau=1}^{T-1}\frac{1-\beta^\tau}{1-\beta}\mu_i+$$

$$+\sum_{j=1}^{T-1}\sum_{\tau=0}^{j-1}\frac{1-\beta^\tau}{1-\beta}v_{iT-\tau-1})^2].$$

Elvégesve a négysetre emelést és as eddig ismertetett technikai fogások adta egyssersűsítéseket, adódik, hogy

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty}\frac{1}{NT}y'_{t-1}B_n y_{t-1}=\frac{1}{T^2}\frac{1}{(1-\beta)^2}\Bigg[(1-\beta^T)^2E(y_{i0}^2)+$$

$$+2(1-\beta^T)(\frac{T-1-T\beta+\beta^T}{1-\beta})E(y_{i0}\mu_i)+$$

$$+(\frac{T-1-T\beta+\beta^T}{1-\beta})^2\sigma_\mu^2+[T-1-2\beta\frac{1-\beta^{T-1}}{1-\beta}+\beta^2\frac{1-\beta^{2(T-1)}}{1-\beta^2}]\sigma_v^2\Bigg].$$

D) As eddigiek figyelembevételével vissonylag egyssersűen adódik, hogy

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty}\frac{1}{NT}y'_{t-1}B_n u=\frac{1}{T}\frac{1-\beta^T}{1-\beta}E(y_{i0}\mu_i)+\frac{T-1-T\beta+\beta^T}{T(1-\beta)^2}\sigma_\mu^2+$$

$$+\frac{T-1-T\beta+\beta^T}{T^2(1-\beta)^2}\sigma_v^2.$$

A fél–assimptotikus határértékekből könnyen adódnak a teljesen assimptotikus határértékek. Ehhez azonban meg kell fontolni a következőket: ha $\beta > 1$ és $T \to \infty$, akkor a torzítás határértéke zérus less. Ennek belátása egyszerű: osszuk el a torzító tényezőben mind a számlálót (A és D), mind a nevezőt (B és C) β^T-vel. Ekkor $T \to \infty$ esetén a számláló 0-hoz, míg a nevező $+\infty$-hez tart (a határértékek tulajdonságairól lásd például SZÉP [10] könyvének 2. fejezetét) és így a torzítás határértéke valóban zérus. Ebből az a rendkivül fontos megállapítás következik, hogy $T \to \infty$ esetén (ha $\beta > 1$) az összes λ–típusú esztimátor konzisztens becslést fog nyújtani a dinamikus modell paraméterére.[1] Szimulációs vizsgálatok kimutatták (MÁTYÁS [5]), hogy gyakorlatilag (átlagosan) $T > 9-10$ esetén a KLNM, az ALNM, és az intra esztimátorok numerikusan megegyeznek és torzításuk elhanyagolhatóan kicsi.[2] A teljesen assimptotikus határérték vizsgálatához tehát elegendő a $\beta < 1$ eset figyelembe vétele (a továbbiakban – ha ettől eltérő nem kerül említésre – a fenti okok miatt csupán $\beta < 1$ esetet vizsgáljuk).[3] Az A és D határértékekből, ha $\beta < 1$ és $T \to \infty$ az adódik, hogy

1.
$$\operatorname*{plim}_{N,T\to\infty} \frac{1}{NT} y'_{t-1} u = \frac{1}{1-\beta}\sigma_\mu^2 \ ;$$

2.
$$\operatorname*{plim}_{N,T\to\infty} \frac{1}{NT} y'_{t-1} y_{t-1} = \frac{1}{(1-\beta)^2}\sigma_\mu^2 + \frac{1}{1+\beta^2}\sigma_v^2 \ ;$$

3.
$$\operatorname*{plim}_{N,T\to\infty} \frac{1}{NT} y'_{t-1} B_n y_{t-1} = \frac{1}{(1-\beta)^2}\sigma_\mu^2 \ ;$$

4.
$$\operatorname*{plim}_{N,T\to\infty} \frac{1}{NT} y'_{t-1} B_n u = \frac{1}{1-\beta}\sigma_\mu^2 \ ;$$

és ebből

$$\operatorname*{plim}_{N,T\to\infty} \frac{1}{NT}\widehat{\beta}_\lambda = \beta + [\frac{1}{(1-\beta)^2}\sigma_\mu^2 + \frac{1}{1-\beta^2}\sigma_v^2 + (\lambda-1)\frac{1}{(1-\beta)^2}\sigma_\mu^2]^{-1} \times$$
$$\times [\frac{1}{1-\beta}\sigma_\mu^2 + (\lambda-1)\frac{1}{1-\beta}\sigma_\mu^2] .$$

---

[1] Megjegyzendő, hogy a tényleges gazdasági elemzéseknél a $\beta > 1$ eset csak viszonylag ritkán fordul elő, mivel egy explozív modellt eredményez és a gazdasági folyamatok csak nagyon ritkán rohamosan növekvő jellegűek.

[2] A vizsgálatok szerint, ha $1 < \beta < 2$, akkor $T > 15 - 13$ esetén, ha $\beta > 2$, akkor $T > 6 - 7$ esetén állja meg a helyét az a numerikus ekvivalenciára és a torzítás mértékére tett megállapítás.

[3] A $\beta = 1$ határeset gyakorlati jelentősége kicsi, viszont számos elméleti nehézség forrása lehet, így ezt az esetet itt sem vizsgáljuk.

Látható, hogy ha $\lambda = 0$, akkor a $\widehat{\beta}_\lambda$ (az intra) esztimátor asszimptotikusan torzítatlan. Ez annyit jelent, hogy mind az állandó, mind a véletlen hatású modellnél N és $T \to \infty$ esetén az intra esztimátor konzisztens becslést nyújt a keresett paraméterre (ami triviálisnak tűnik, hiszen az állandó hatású modellnél semmi ok sincs a torzításra, a véletlen hatású modellnél pedig az intra esztimátornál alkalmazott merőleges vetítés kiiktatja az egyedhatásokat (MÁTYÁS [4]), melyek a torzítás hordozói). Az ALNM esztimátor $[\widehat{\beta}_\lambda\ , \lambda = \sigma_v^2/(\sigma_v^2 + T\sigma_\mu^2)]$ szintén konzisztens becslést nyújt a (2) modell paraméterére, mivel ha $\lambda = \sigma_v^2/(\sigma_v^2 + T\sigma_\mu^2)$ és $T \to \infty$, akkor $\lambda \to 0$, vagyis ekkor az ALNM esztimátor tart a konzisztens intra esztimátorhoz és így maga is konzisztens. Természetesen a KLNM esztimátor nem konzisztens $(\widehat{\beta}_\lambda\ , \lambda = 1)$, ami a (2) modell magyarázó és látens változói közötti kapcsolatnak a következménye.

3. A λ-típusú esztimátor fél-asszimptotikus határértékének elemzése

Térjünk vissza a fél-asszimptotikus eset vizsgálatához. Láttuk, hogy a fél-asszimptotikus határértékek erősen függnek az $E(y_{i0}^2)$ és $E(y_{i0}\mu_i)$ várható értékétől, vagyis a kezdeti értékekre tett hipotézisektől. Alaposabb szemlélődés után kitűnik az is, hogy a $\widehat{\beta}_\lambda$ esztimátor T véges esetén torzítottak, ha $\lambda = 1$ és $\lambda = \sigma_v^2/(\sigma_v^2+T\sigma_\mu^2)$ vagyis a (2) modell paraméterének KLNM, ALNM és intra esztimátora is torzított. Lényeges továbbá annak megállapítása is, hogy ha $\sigma_\mu^2 = 0$ és az intra esztimátort vizsgáljuk (ami nem más így most, mint a (2) modell állandó hatású változatának paraméter esztimátora), akkor ezen esztimátor is torzított. Ez első nekifutásra nagyon furcsának tűnik, mivel látszólag egy állandó hatású modellnél még, ha T véges is, nincs semmi ok a torzításra.

a) Különböző kezdeti érték feltételek

Az elemzés folytatásához és ahhoz, hogy többet tudjunk mondani a λ-típusú esztimátorok fél-asszimptotikus tulajdonságairól, az y_{i0} kezdeti értékre néhány hipotézist kell tenni. Az irodalomban (ANDERSON–HSIAO [1], SEVESTRE–TROGNON [8]) általában az alábbi négy hipotézis valamelyikével szokás élni:

1. y_{i0} konstans, vagyis nem valószínűségi változó. Ez gyakorlatilag azt jelenti, hogy a fejlődés egy tökéletesen ismert kezdeti pontról indul el pályáján.

2. $y_{i0} = \alpha_i + v_{i0}$, ahol α_i konstans és v_{i0} "valódi" látens változó, amely független μ_i-től. Ez azt jelenti, hogy az egyedhatás a kiinduló pontban nem valószínűségi változó. Ekkor a $t = 0$ időpontban α_i a tényleges egyedhatást fejezi ki, a $t \neq 0$ időpontban pedig a μ_i valószínűségi változó értékei a pillanatnyi eltérést mutatják ezen egyedhatástól. Ennek megfelelően $\alpha_i = E(\mu_i)$, vagy másként $E(\mu_i - \alpha_i) = 0$.

3. $y_{i0} = \widehat{\alpha}_i + v_{i0}$, ahol $\widehat{\alpha}_i$ valószínűségi változó, de független μ_i-től és fennáll az $E(\mu_i) = E(\widehat{\alpha}_i) = 0$ egyenlőség. Például $\widehat{\alpha}_i$ lehet a $t = 0$ időpontban az i dezaggregációnál kisebb dezaggregációból származó becslés.

4. $y_{i0} = k_1\mu_i + k_2 v_{i0}$, ahol k_1 és k_2 a folyamatot meghatározó paraméterek.

A fenti 1., 2. és 3. hipotézisek lényeges megszorításokat feltételeznek az y_{i0} kezdeti értéket illetően, melyek szerint e kezdeti érték eltérően viselkedik, mint az endrogén változó előrehaladott értékei. A gazdasági elemzéseknél ezen hipotézisekkel nem mindig célszerű élni, mivel a valóságtól néha teljesen elrugaszkodottak lehetnek. Előnyük viszont, hogy $E(y_{i0}\mu_i) = 0$ és így az ALNM esztimátor ($\lambda = \sigma_v^2/(\sigma_v^2+T\sigma_\mu^2)$) még a fél–aszimptotikus esetben is konzisztens lesz.

A 4. hipotézis értelmezéséhez tegyünk egy kis kitérőt. Tegyük fel, hogy y_{it} stacioner sztochasztikus folyamat, amely az „idők kezdete" óta tart és az idők végtelenségéig fog tartani. (vagyis $T \to \infty$). Ekkor

$$y_{i0} = \frac{\mu_i}{1-\beta} + \sum_{\tau=0}^{\infty} \beta^\tau v_{i,-\tau}$$

és ebből

$$E(y_{i0}^2) = \frac{\sigma_\mu^2}{(1-\beta)^2} + \frac{\sigma_v^2}{1-\beta^2}$$

$$E(y_{i0}\mu_i) = \frac{\sigma_\mu^2}{1-\beta}.$$

Visszatérve a 4. hipotézishez, ha itt $k_1 = \frac{1}{1-\beta}$ és $k_2 = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)}}$, akkor éppen a fenti stacioner sztochasztikus folyamatot modelleztük! Visszahelyettesítve ezen várható értékeket a $\widehat{\beta}_\lambda$ esztimátor fél–aszimptotikus határértékeibe, megkaphatjuk a λ–típusú esztimátorok torzítását, ha y_{it} stacioner sztochasztikus folyamat és T véges.

A)

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty} \frac{1}{NT} y_{t-1}' u = \frac{\sigma_\mu^2}{1-\beta}$$

B)

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty} \frac{1}{NT} y_{t-1}' y_{t-1} = \frac{\sigma_\mu^2}{(1-\beta)^2} + \frac{\sigma_v^2}{1-\beta^2}$$

C)

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty} \frac{1}{NT} y_{t-1}' B_n y_{t-1} = \frac{\sigma_\mu^2}{(1-\beta)^2} + \frac{\sigma_v^2}{T(1-\beta)^2} - \frac{2\beta(1-\beta^T)}{T^2(1-\beta)^2(1-\beta^2)}\sigma_v^2$$

D)

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty} \frac{1}{NT} y_{t-1}' B_n u = \frac{\sigma_\mu^2}{1-\beta} + \frac{\sigma_v^2}{T(1-\beta)} - \frac{\sigma_v^2(1-\beta^T)}{T^2(1-\beta)^2}$$

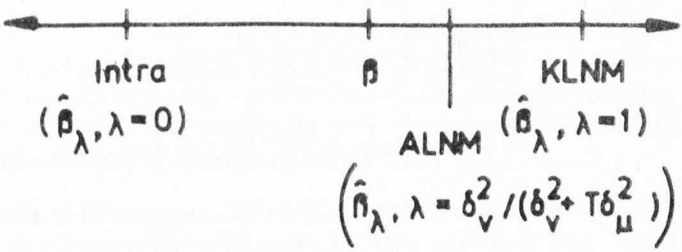
Ebből

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty} \frac{1}{NT}\widehat{\beta}_\lambda = \beta + [(\frac{\sigma_\mu^2}{(1-\beta)^2} + \frac{\sigma_v^2}{1-\beta^2})+$$

$$+ (\lambda - 1)(\frac{\sigma_\mu^2}{(1-\beta)^2} + \frac{\sigma_v^2}{T(1-\beta)^2} - \frac{2\beta(1-\beta^T)}{T^2(1-\beta)^2(1-\beta^2)}\sigma_v^2)]^{-1}\times \quad (3)$$

$$\times [\frac{\sigma_\mu^2}{1-\beta} + (\lambda - 1)(\frac{\sigma_\mu^2}{1-\beta} + \sigma_v^2 T(1-\beta) - \frac{\sigma_v^2(1-\beta^T)}{T^2(1-\beta)^2})].$$

A fenti képlet segítségével számos „feladat-orientált" konzisztens becslést tudunk előállítani, ha T véges; (lásd például CHOWDHARY [3]), de mivel ezek egyedi megoldások, itt nem fogunk rájuk kitérni. Megvizsgálva a főbb esztimátorok által nyújtott paraméterbecsléseket, megnézhetjük, hogy ezek értéke hol helyezkedik el az elméleti paraméterhez képest. (1. ábra.)



1. ábra.

b) Az intra esztimátor torzításának oka az állandó hatású modellnél

Az 1. fejezetben láttuk, hogy az intra esztimátor ($\widehat{\beta}_\lambda$, $\lambda = 0$) a következő:

$$\widehat{\beta}_{intra} = (X'W_nX)^{-1}(X'W_ny)\,,$$

illetve dinamikus esetben a (2) modellre alkalmazva:

$$\widehat{\beta}_{intra} - (y'_{t-1}W_ny_{t-1})^{-1}(y'_{t-1}W_ny)\,.$$

Egyszerűen belátható (MÁTYÁS [4]), hogy ugyanezt az esztimátort nyerjük, ha a (2) modellt balról W_n -nel beszorozva transzformáljuk és erre a KLNM-et alkalmazzuk. A transzformált (2) modell a következő:

$$W_ny_t = \beta W_ny_{t-1} + W_nu\,. \quad (4)$$

Mivel $W_n = I_{NT} - (I_N \otimes \frac{J_T}{T})$, az $(I_N \otimes \frac{J_T}{T})u$ tényező felírható a következőkeppen (most $u = v$):

$$(I_N \otimes \frac{J_T}{T})u = \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{T} v_{1t} \\ \vdots \\ \sum_{t=1}^{T} v_{1t} \\ \vdots \\ \sum_{t=1}^{T} v_{NT} \\ \vdots \\ \sum_{t=1}^{T} v_{NT} \end{pmatrix} \quad \text{(a vektor mérete :}(NT \times 1)\text{)}.$$

Figyelembe véve az y_{it-1} változó redukálását a 2. fejezetben áttekintett végső formára (és hogy most $u = v$):

$$(I_N \otimes \frac{J_T}{T})y_{t-1} = \begin{pmatrix} \sum_{\tau=0}^{T-1} \beta^\tau y_{10} + \sum_{j=1}^{T-1} \sum_{\tau=0}^{j-1} \frac{1-\beta^\tau}{1-\beta} v_{1T-\tau-1} \\ \vdots \\ \sum_{\tau=0}^{T-1} \beta^\tau y_{10} + \sum_{j=1}^{T-1} \sum_{\tau=0}^{j-1} \frac{1-\beta^\tau}{1-\beta} v_{1T-\tau-1} \\ \vdots \\ \sum_{\tau=0}^{T-1} \beta^\tau y_{N0} + \sum_{j=1}^{T-1} \sum_{\tau=0}^{j-1} \frac{1-\beta^\tau}{1-\beta} v_{N,T-\tau-1} \\ \vdots \\ \sum_{\tau=0}^{T-1} \beta^\tau y_{N0} + \sum_{j=1}^{T-1} \sum_{\tau=0}^{j-1} \frac{1-\beta^\tau}{1-\beta} v_{N,T-\tau-1} \end{pmatrix}.$$

Látható tehát, hogy véges T esetében az (5) modell magyarázó és látens változói nem függetlenek, ami a fellépő torzítás oka. Ha azonban $T \to \infty$, akkor $\sum_{t=1}^{T} v_{it} \to 0$ és így a torzítás zérussá válik.

c) Konzisztens λ-típusú esztimátor véges T esetén

A fél-asszimptotikus határértékek tanulmányozásából kitűnik, hogy lennie kell olyan kitüntetett λ-nak (a továbbiakban λ^*), melynek értékére véges T esetében a torzítás zérus lesz. A torzító tényező számlálóját tegyük egyenlővé nullával:

$$\lambda[\frac{1}{T}\frac{1-\beta^T}{1-\beta}E(y_{i0}\mu_i) + A(\sigma_\mu^2 + \frac{1}{T}\sigma_v^2)] - \frac{A}{T}\sigma_v^2 = 0,$$

ahol

$$A = \frac{1}{T}\frac{T-1-T\beta-\beta^T}{(1-\beta)^2}.$$

Ebből könnyen adódik a λ^*-ra

$$\lambda^* = \frac{\frac{A}{T}\sigma_v^2}{\frac{1}{T}\frac{1-\beta^T}{1-\beta}E(y_{i0}\mu_i) + A(\sigma_\mu^2 + \frac{1}{T}\sigma_v^2)},$$

illetve a (3) képletből, ha stacioner idősorral van dolgunk,

$$\lambda^* = \frac{\frac{A}{T}\sigma_v^2}{\frac{\sigma_\mu^2}{1-\beta} + \frac{A}{T^2}\sigma_v^2}.$$

Vegyük észre, hogy ha $T \to \infty$, akkor $\lambda^* = 0$ és így a $\widehat{\beta}_{\lambda^*}$ esztimátor az intra esztimátorra redukálódik, valamint, ha $E(y_{i0}\mu_i) = 0$, akkor $\lambda^* = \sigma_v^2/(T\sigma_\mu^2 + \sigma_v^2)$ és így a $\widehat{\beta}_{\lambda^*}$ az ALNM esztimátorra redukálódik. A $\widehat{\beta}_{\lambda^*}$ esztimátor függ az ismeretlen paraméterektől, a gyakorlatban tehát csak úgy használható, ha első lépésben előállítjuk az ismeretlen paraméterek valamilyen konzisztens becslését, majd ennek felhasználásával újrabecsüljük β-t a $\widehat{\beta}_{\lambda^*}$ esztimátor segítségével. Szimulációs vizsgálatok kimutatták (MÁTYÁS [5]), hogy a $\widehat{\beta}_{\lambda^*}$ esztimátor nem nyújt jobb becslést az ismeretlen paraméterekre, mint a másik kétlépcsős esztimátor, a becsült kovariancia mátrixot felhasználó ALNM esztimátor. E jelenség okának a felderítése még további kutatásokat igényel.

4. Az exogén változókat is magában foglaló dinamikus modell

Az eddigiek során a (2) egyszerűsített modell vizsgálata során jutottunk el számos fontos következtetésig. Most belátjuk, hogy főbb eredményeink érvényben maradnak az exogén magyarázó változókat magában foglaló modellben is. Írjuk fel újra az (1b) modell it-edik elemét, ha a magyarázó változók között $k-1$ darab exogén és egy késleltetett endogén változó szerepel:

$$y_{it} = \beta_1 y_{it-1} + \sum_{k=2}^{K} \beta_k X_{kit} + \mu_i + v_{it} =$$

$$= \beta_1^t y_{i0} + \sum_{k=2}^{K} \beta_k \sum_{\tau=0}^{t-1} \beta_1^\tau X_{kit-\tau} + \mu_i \frac{1-\beta_1^t}{1-\beta_1} + \sum_{\tau=0}^{t-1} \beta_1^{t-1}\beta_1^\tau v_{it-\tau}.$$

Ha most az összekeverés elkerülésére a (2) egyszerűsített modellt $*$-gal jelöljük, vagyis

$$y_{it}^* = \beta_1^t y_{i0} + \mu_i \frac{1-\beta_1^t}{1-\beta_1} + \sum_{\tau=0}^{t-1} \beta_1^\tau v_{it-\tau}$$

(ahol β_1 a késleltetett endogén változó paramétere és az 1-es index a többi magyarázó változó paraméterétől való megkülönböztetésére szolgál), akkor

$$y_{it}^* = \beta_1^t y_{it-1}^* + \mu_i + v_{it},$$

ahol $y_{i0}^* = y_{i0}$. Az elemző modell tehát mátrix formában felírva a következő:

$$y_t = \beta_1 y_{t-1} + X\beta + u, \tag{5}$$

ahol $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_K)$. Belátható (MÁTYÁS [4], [5]), hogy az (5) modell paramétereinek λ–típusú esztimátora úgy állítható elő, hogy a modellt balról beszorozva a $(W_n + \sqrt{\lambda}B_n)$ transzformációs operátorral transzformáljuk és erre a transzformált modellre alkalmazzuk a KLNM-et (a W_n és B_n operátorokat már definiáltuk az 1. fejezetben). A mátrixok partíciónkénti inverzének felhasználásával adódik, hogy

$$\widehat{\beta}_{1\lambda} = [\widetilde{y}'_{t-1}\widetilde{M}\widetilde{y}_{t-1}]^{-1}[\widetilde{y}'_{t-1}\widetilde{M}\widetilde{y}_t] = \widehat{\beta}_1 + [\widetilde{y}'_{t-1}\widetilde{M}\widetilde{y}_{t-1}]^{-1}\widetilde{y}'_{t-1}\widetilde{M}\widetilde{u}$$

és

$$\begin{aligned}\widehat{\beta}_\lambda &= (\widetilde{X}'\widetilde{X})^{-1}\widetilde{X}'(\widetilde{y}_t - \widehat{\beta}_{1\lambda}\widetilde{y}_{t-1}) = \\ &= \beta - (\widehat{\beta}_{1\lambda} - \beta_1)(\widetilde{X}'\widetilde{X})^{-1}\widetilde{X}'\widetilde{y}_{t-1} + (\widetilde{X}'\widetilde{X})^{-1}\widetilde{X}\widetilde{u},\end{aligned}$$

ahol a $\widetilde{y}_t$, $\widetilde{y}_{t-1}$, $\widetilde{u}$, $\widetilde{X}$ vektorok, illetve mátrix jelölik a $(W_n + \sqrt{\lambda}B_n]$ operátorral transzformált y_t, y_{t-1}, u, X vektorokat, illetve mátrixot és $\widetilde{M} = I_{NT} - \widetilde{X}(\widetilde{X}'\widetilde{X})^{-1}\widetilde{X}'$.

Tegyük fel, hogy az X mátrix változói tisztán exogén jellegűek, ebből következik, hogy $\operatorname{plim}_{N\to\infty} \widetilde{X}'\widetilde{u}/N = 0$ ami maga után vonja, hogy

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty} \widetilde{y}'\widetilde{M}\widetilde{u}/N = \operatorname*{plim}_{N\to\infty} \widetilde{y}'_{t-1}\widetilde{u}/N\,.$$

Foglaljuk egybe az y^*_{it-1} $(t = 1, \ldots, T;\ i = 1, \ldots, N)$ változókat az y^*_{t-1} vektorba, és jelöljük $\widetilde{y}^*_{t-1}$-gyel a $[W_n + \sqrt{\lambda}B_n]$ operátorral történt transzformálás után. Az X változóinak exogenitásából következik az is, hogy

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty} \widetilde{y}^*_{t-1}\widetilde{u}/N = \operatorname*{plim}_{N\to\infty} \widetilde{y}^{*\prime}_{t-1}\widetilde{u}/N\,.$$

Összegezve tehát adódik az eredmény

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty}(\widehat{\beta}_{1\lambda} - \beta_1) = \operatorname*{plim}_{N\to\infty}\left[\frac{\widetilde{y}^{*\prime}_{t-1}\widetilde{y}^*_{t-1}}{\widetilde{y}'_{t-1}\widetilde{M}\widetilde{y}_{t-1}}\right] \times \operatorname*{plim}_{N\to\infty}(\beta^*_{1\lambda} - \beta_1)$$

és

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty}(\widehat{\beta}_\lambda - \beta) = \operatorname*{plim}_{N\to\infty}(\widehat{\beta}_{1\lambda} - \beta) \times \operatorname*{plim}_{N\to\infty}(\widetilde{X}'\widetilde{X})^{-1}\widetilde{X}'\widetilde{y}_{t-1}\,,$$

ahol $\beta^*_{1\lambda}$ a (2) egyszerűsített modell paraméterének λ–típusú esztimátora. Beláttuk így, hogy az exogén változókat tartalmazó dinamikus véletlen hatású modellben az (1b) a paraméterek λ–típusú esztimátorainak torzítása arányos az egyszerűsített (2) modellbeliekkel és amikor a fél–aszimptotikus torzítás zérus az egyszerűsített modellben, akkor zérus az exogén változókat tartalmazó modellben is. Hasonló módon, hasonló eredményre jutunk természetesen, ha N és T is tart a végtelenbe.

A fentiekből következik, hogy ha az egyszerűsített modellben valamilyen λ–típusú esztimátort aszimptotikusan, illetve fél–aszimptotikusan torzítatlannak találtuk, akkor ezen esztimátor aszimptotikusan, illetve fél–aszimptotikusan torzítatlan lesz az exogén változókat tartalmazó modellben is. Degenerált esetektől eltekintve (mikor $(X'X)^{-1}X'y_{t-1} = 0$) az állítás komplementere is igaz, vagyis amikor az egyszerűsített modell paraméterének λ–típusú esztimátora aszimptotikusan, vagy fél–aszimptotikusan torzított, akkor az exogén változókat tartalmazó modell paramétereinek λ–típusú esztimátora is aszimptotikusan vagy fél–aszimptotikusan torzított lesz.

Általánosságban az is elmondható, hogy mivel többnyire

$$\tilde{y}^{*\prime}_{t-1}\tilde{y}^{*\prime}_{t-1} < \tilde{y}^{*}_{t-1}\widetilde{M}\tilde{y}_{t-1},$$

az exogén változók szerepeltetése csökkenti a paraméterbecslések torzításának mértékét.

Gyakorlati jelentősége kicsi, a teljesség kedvéért azonban mindenképpen szükséges néhány szó erejéig érinteni azt az esetet, amikor N fix és $T \to \infty$. Ekkor az aszimptotikus határérték számításánál nem támaszkodhatunk a nagy számok törvényére, viszont felhasználhatjuk az autoregresszív modellek aszimptotikus tulajdonságaira vonatkozó ismereteinket. Ezek segítségével belátható (TROGNON [11]), hogy a $\beta^*_{1\lambda}$ esztimátor csak akkor konzisztens, ha $\lambda = 0$ vagy $\lambda = \sigma_v^2/(\sigma_v^2 + T\sigma_\mu^2)$, vagyis mind az egyszerűsített, mind az exogén változókat tartalmazó modellben a főbb λ–típusú esztimátorok közül csupán az ALNM és az intra eredményez N fix és $T \to \infty$ esetén aszimptotikusan torzítatlan becslést.

Az írás végére néhány rövid gyakorlati észrevétel kívánkozik. Először is mi tekinthető nagy, illetve kis N-nek és T-nek? Nagy N-nek egyértelműen vélhető az az eset, amikor $N > 25$. T–vel már nem ilyen egyszerű a helyzet. Ha $\beta_1 < 1$ és N nagy, akkor $T > 10 - 15$ már nagynak tekinthető, ellenben, ha N kicsi, akkor $T > 20 - 25$ tekinthető nagynak. $\beta_1 > 1$-nél N-től függetlenül már $T > 6 - 7$ nagynak tekinthető.

Felmerülhet továbbá a kérdés, hogy mi a teendő, ha több konzisztens esztimátor közül áll módunkban választani. Ekkor célszerű (ha lehetséges) az ALNM-et választani, mivel ez általában hatásos.

Végül egy elméletileg alá nem támasztott gyakorlati tapasztalat: ha lehetőség adódik az instrumentális változók alkalmazására, használatukat célszerű jól megfontolni, mivel ritkán fizetik vissza bonyolultságuk árát.

(Beérkezett: 1987. április 3-án.)

Irodalom

1. ANDERSON, T.W.–HSIAO, C.: Formation and Estimation of Dynamic Models Using Panel Data. *Journal of Econometrics*, 1982. No. 1.
2. ANDERSON, T.W.–HSIAO, C.: Estimation of Dynamic Model with Error Components. *JASA*, 1981. No. 375.
3. CHOWDHURY, G.: A Note on Correcting Biases in Dynamic Panel Models. *Applied Economics*, 1987. No. 1.
4. MÁTYÁS L.: A panelmodellek becslése. *Szigma*, 1986, 4.
5. MÁTYÁS L.: Idősorok és keresztmetszeti adatok együttes felhasználása az ökonometriai vizsgálatokban. *Kandidátusi értekezés*. Budapest, 1986.
6. NICKELL, S.: Biases in Dynamic Models with Fixed Effects. *Econometrica*, 1981. No. 6.
7. SEVESTRE, P.: Modeles Dynamiques a Erreurs Composées. (Thése pour le doctorat de 3 cycle), Université de Paris I Panthéon Sorbonne, Paris, 1983.
8. SEVESTRE, P.–TROGNON, A.: A Note on Autoregressive Error Components Models. *Journal of Econometrics*, 1985. No. 2.
9. SEVESTRE, P.–TROGNON, A.: Proprietés de Grands Echantillons d'une Classe d'estimateurs des Modeles Autoregressifs á Erreurs Composées. *Annals de l'INSEE*, 1983. No. 50.
10. SZÉP J.: *Analizis*. KJK. Budapest. 1972.
11. TROGNON, A.: Econometrie. *INSEE-ENSAE*. Malakoff 1984.
12. TROGNON, A.: Valeurs Assymptotiques de l'estimateur des Moindres Carrés Ordinaires dans les Modeles Autoregressifs á Erreurs Composées. *INSEE*. Unité de Recherche. 1976. No. 112–930.

Estimation of Dynamic Panel Models

Panel models are the most widespread instruments for using time series and cross-section data. Unfortunately, in a dynamic case the traditional parameter estimates do not posses the usual good properties. The purpose of this writing is to show what properties particular estimators possess in this case, with special regard to the small sample properties. Using the results of Monte–Carlo analyses guidelines are given for practice, i.e. what kind of models and estimators are worth while and expedient to use in a particular case.

Szigma, XX. (1987-88) 2-3. sz.

MÁTYÁS LÁSZLÓ

Szimultán panelmodellek becslése

Az idősorok és keresztmetszeti adatok együttes felhasználásának a gyakorlatban legjobban bevált módja a panelmodellek alkalmazása. A hagyományos (MÁTYÁS, 1986b) és a dinamikus (MÁTYÁS, 1987/88) modellekre kidolgozott paraméterbecslési eljárások azonban — természetesen — a szimultán modellek esetén nem kielégítőek.

Az alábbi írás fő célja bemutatni a szimultán panelmodellek paramétereinek becslésére szolgáló főbb eljárásokat. A tárgyalandó témakört három szempontból is leszűkítjük:

- egyrészt nem foglalkozunk a maximum likelihood becslésekkel, csupán a legkisebb négyzetek módszerére támaszkodó eljárásokat mutatjuk be, mivel ezek gyakorlati alkalmazása a legelterjedtebb;
- másrészt kizárólag a véletlen hatású modelleket tárgyaljuk (ahol az egyed és időspecifikus hatások a residuális változóba kerülnek beépítésre), mivel az állandó hatású szimultán modellek becslése viszonylag egyszerűen elvégezhető (MÁTYÁS, 1986a);
- s végül nem foglalkozunk az identifikáció feltételeivel, mivel ezek — szempontunkból — a hagyományos feltételektől nem különböznek.

A továbbiakban először a modellt és feltételrendszerét definiáljuk, majd a korlátozott információs esztimátorokat és végül a teljes információs esztimátorokat tekintjük át részletesebben.[1]

A modell

Tekintsük az M darab szimultán egyenletből álló modellt:[2]

$$Y\Gamma + X\beta + U = 0 \tag{1}$$

ahol

Y az endogén változók megfigyeléseinek $(NT \times M)$ méretű mátrixa,

---

[1] Az írás folyamán végig felhasználjuk a MÁTYÁS (1986b) cikkben megfogalmazottakat és támaszkodunk az ott bevezetett jelölésekre.

[2] Ahol az identitásokat kiküszöböltük.

X az exogén változók megfigyeléseinek $(NT \times K)$ méretű mátrixa,

U a reziduális változók $(NT \times M)$ méretű mátrixa,

Γ az endogén változókhoz kapcsolódó strukturális paraméterek $(M \times N)$ méretű mátrixa,

β az exogén változókhoz kapcsolódó strukturális paraméterek $(K \times M)$ méretű mátrixa,

K az exogén változók száma,

N a megfigyelt egyedek száma és

T a megfigyelt idősor hossza.

Az (1) rendszer j-edik egyenlete a következő:

$$y_j = Y_j\alpha_j + X_j\beta_j + u_j = Z_j\gamma_j + u_j\,, \tag{2}$$

ahol

y_j a j-edik strukturális egyenlet eredmény változójának megfigyeléseit tartalmazó $(NT \times 1)$ méretű vektor,

Y_j a j-edik strukturális egyenlet endogén magyarázó változóinak megfigyeléseit tartalmazó $(NT \times M_j)$ méretű mátrix,

X_j a j-edik strukturális egyenlet exogén magyarázó változóinak megfigyeléseit tartalmazó $(NT \times K)$ méretű mátrix,

$Z_j = [Y_j, X_j]$,

α_j $(M_j \times 1)$ méretű paramétervektor,

β_j $(K_j \times 1)$ méretű paramétervektor,

$\gamma'_j = [\alpha'_j, \beta'_j]$

u_j a reziduális változók $(NT \times 1)$ méretű vektora,

M_j a j-edik strukturális egyenlet endogén magyarázó változóinak száma,

K_j a j-edik egyenlet exogén magyarázó változóinak száma, továbbá

$$Y_j = YH_j \quad \text{és} \quad X_j = XL_j\,,$$

ahol H_j és L_j a megfelelő szelektáló mátrixok, melyek az (1) modellből a j-edik strukturális egyenletet előállítják.

A véletlen hatású panelmodelleknél az u_j reziduális változó felbontható az

$$u_j = (I_N \otimes L_T)\mu_j + (L_N \otimes I_T)\lambda j + v_j \tag{3}$$

formában, ahol

μ_j az egyedhatásokat képviselő $(N \times 1)$ méretű valószínűségi vektorváltozó

$\mu_j = (\mu_{1j}, \ldots, \mu_{Nj})$,

λ_j az időhatásokat képviselő $(T \times 1)$ méretű valószínűségi vektorváltozó

$\lambda_j = (\lambda_{1j}, \ldots, \lambda_{Tj})$,

v_j a tényleges residuális vektorváltozó, mérete: $(NT \times 1)$,

I_N, I_T az $(N \times N)$ illetve $(T \times T)$ méretű egységmátrixok.

Tegyük fel,hogy

$$E(\mu_j) = 0\,,\ E(\lambda_j) = 0\,,\ E(v_j) = 0\,, \quad j = 1, \ldots, M$$

$$E(\mu_j \mu_l') = \sigma^2_{\mu jl} I_N\,, \quad E(\lambda_j \lambda_l') = \sigma^2_{\lambda jl} I_T\,, \quad E(v_j v_l') = \sigma^2_{vlj} I_{NT}\,,$$

és a μ_j, λ_j, v_j vektorok páronként függetlenek minden j és l-re (j és $l = 1, \ldots, M$).

Bevezetve a (MÁTYÁS 1986b) írásban részletesen áttekintett

$$M_1 = B_n = (I_N \otimes \frac{J_T}{T}) - \frac{J_{NT}}{NT}\,, \quad M_2 = B_t = (\frac{J_N}{N} \otimes I_T) - \frac{J_{NT}}{NT}\,,$$

$$M_3 = FA = \frac{J_{NT}}{NT}\,, \quad M_4 = W^* = I_{NT} - (I_N \otimes \frac{J_N}{T}) - (\frac{J_N}{N} \otimes I_T) + FA$$

operátorokat, ahol J a csupa 1-esekből álló megfelelő méretű mátrixot jelöli, a kiinduló (1) modell residuális változóinak kovariancia mátrixa:

$$\Sigma = E[(\text{vec } u)(\text{vec } u)'] = \Sigma_\mu \otimes (I_N \otimes J_T) + \Sigma_\lambda \otimes (J_N \otimes I_T) + \Sigma_v \otimes I_{NT}\,,$$

ahol

vec a máglyázó operátort jelöli[3] és

$\Sigma_\mu = [\sigma^2_{\mu jl}]$, mérete: $(M \times M)$,
$\Sigma_\lambda = [\sigma^2_{\lambda jl}]$, mérete: $(M \times M)$,
$\Sigma_v = [\sigma^2_{vjl}]$, mérete: $(M \times M)$.

A j-edik egyenlet (3) residuális változójának konvariancia mátrixa:

$$E(u_j u_j') = \Sigma_{jj} = \sigma^2_{\mu jj}(I_N \otimes J_T) + \sigma^2_{\lambda jj}(J_N \otimes I_T) + \sigma^2_{vjj} I_{NT}\,.$$

Belátható (a MÁTYÁS, 1986b-ben látottak analógiájára, BALESTRA, & al., 1987), hogy a Σ mátrix spektrálfelbontása a következő:

$$\Sigma = \sum_{i=1}^{4} \Sigma_i \otimes M_i$$

[3] A máglyázó operátor adott vektoregyüttest „egymás alá" rendez.

$$\Sigma_1 = \Sigma_v + T\Sigma_\mu, \quad \Sigma_2 = \Sigma_v + N\Sigma_\lambda,$$

$$\Sigma_3 = \Sigma_v + T\Sigma_\mu + N\Sigma_\lambda \quad \text{és} \quad \Sigma_4 = \Sigma_v.$$

Korlátozott információs becslés

Korlátozott információs becslésnek szokás nevezni azt a becslési eljárást, mely az (1) modellt a (2) összefüggésre alapozva egyenletenként becsüli, figyelmen kívül hagyva az egyes egyenletek közötti kapcsolatból származó, Σ-ban megtestesülő információt.

Tekintsük újra a j-edik strukturális egyenletet és transzformáljuk a 2LNM[4] esztimátor előállításánál megszokottakhoz hasonlóan, csak egy kicsit általánosabban:

$$X'Fy_j = X'FZ_j\gamma_j + X'Fu_j \tag{4}$$

ahol F egy $(NT \times NT)$ méretű mátrix. Abban az esetben ha $F = I_{NT}$, akkor a (4) transzformált modellre az ALNM[5]-et alkalmazva a hagyományos 2LNM esztimátort kapjuk. A reziduális változó (3) struktúrája következtében azonban ez az esztimátor nem megfelelő. Abban az esetben, ha $F = W^* = M_4$ akkor a (4) összefüggésre az ALNM-et alkalmazva a csoporton belüli (*within, intra*) esztimátor szimultán esetre vonatkozó megfelelőjét kapjuk:

$$\hat{\gamma}_{jw} = [Z_j'W^*X(X'W^*X)^{-1}X'W^*Z_j]^{-1}\times$$

$$\times \; Z_j'W^*X(X'W^*X)^{-1}X'W^*y_j. \tag{5}$$

Nézzük meg egy kicsit közelebbről, hogy honnan jön az (5) esztimátor. Tekintsük újra a (2) modellt és transzformáljuk úgy, hogy a (3) reziduumból az idő és egyedhatásokat kiiktassuk. A W* operátorral beszorozva a modellt ez könnyen elérhető (MÁTYÁS, 1986b):

$$W^*y_j = X'W^*Z_j\gamma_j + W^*u_j,$$

ahol $E(W^*u_ju_j'W^*) = \sigma_{vjj}W^*$. Erre alkalmazva az instrumentális változókat

$$X'W^*y_j = X'W^*Z_j\gamma_j + X'W^*u_j,$$

ahol

$$E(X'W^*u_ju_j'W^*X) = \sigma^2_{vjj}X'W^*X = \sigma^2_{vjj}\Omega.$$

A szokásos módon keresünk egy olyan P nem szinguláris mátrixot, hogy

$$P^{-1}P^{-1'} = \Omega^{-1}, \quad P^{-1}\Omega P^{-1'} = I, \quad PP' = \Omega.$$

---

[4] Kétfokozatú legkisebb négyzetek módszere.

[5] Általánosított legkisebb négyzetek módszere.

Ezzel tovább transzformálva a modellt:

$$P^{-1}X'W^*y_j = P^{-1}X'W^*Z_j\gamma_j + P^{-1}X'W^*u_j\,,$$

majd alkalmazva a ALNM-et megkapjuk az (5) esztimátort.

Az (5) esztimátor tehát egy olyan speciális 2LNM esztimátor, mely két merőleges vetítés segítségével (ezt végzi a W^* operátor) kiiktatja a μ_j és λ_j egyed- és időhatásokat, így ezután az ALNM már a szokásos módon alkalmazható. Ennek az esztimátornak nagy előnye, hogy használatához nincs szükség az ismeretlen varianciák becslésére.[6] A merőleges vetítés azonban információ veszteséggel jár, így célszerűbb az egyed- és időhatások kiiktatása helyett ezeket figyelembe venni, mivel ekkor az (5) esztimátornál jobb hatásfokú esztimátort nyerhetünk. Ez természetesen megfelelő F mátrix kiválasztásával történhet. Legyen $F = \Sigma_{jj}^{-1}$, akkor a (2) összefüggésből a megfelelő általánosított 2LNM (A2LNM) esztimátor a következő:

$$\hat{\gamma}_{j,\mathrm{A2LNM}} = \left[Z_j'\Sigma_{jj}^{-1}X(X'\Sigma_{jj}^{-1}X)^{-1}X'\Sigma_{jj}^{-1}Z_j\right]^{-1}\times \tag{6}$$
$$\times\left[Z_j'\Sigma_{jj}^{-1}X(X'\Sigma_{jj}^{-1}X)^{-1}X'\Sigma_{jj}^{-1}y_j\right].$$

Belátható (BALESTRA & al., 1987, WHITE, 1984), hogy az $F = \Sigma_{jj}^{-1}$ minimalizálja az A2LNM esztimátor kovariancia mátrixának a nyomát (diagonális elemeinek összegét), és ilyen értelemben kielégítőnek tekinthető (vagyis az $F = \Sigma_{jj}^{-1}$ választás ilyen értelemben optimális).

Nézzük meg ennek az esztimátornak a logikáját az (5) esztimátornál látottakhoz hasonlóan. A j-edik strukturális egyenlet kovariancia mátrixát az R transzformáció segítségével diagonalizálva ($R^{-1}R^{-1'} = \Sigma_{jj}^{-1}$, $\;R^{-1}\Sigma_{jj}^{-1}R^{-1'} = I$, $\;RR' = \Sigma_{jj}$):

$$R^{-1}y_j = R^{-1}Z_j\gamma_j + R^{-1}u_j\,. \tag{7}$$

Vezessük most be a továbblépés érdekében a *lényegében aszimptotikusan hatásos* esztimátor fogalmát. Egy $\widetilde{\beta}$ aszimptotikusan torzítatlan esztimátort akkor nevezünk *lényegében aszimptotikusan hatásos*abbnak egy másik $\widehat{\beta}$ aszimptotikusan torzítatlan esztimátornál, ha tetszőleges $\delta > 0$ esetén van olyan mintaelemszám $((NT)(\delta))$, hogy minden $n > (NT)(\delta)$ mintánál az

$$(1+\delta)avar\;\widehat{\beta}_n - avar\;\widetilde{\beta}_n$$

különbség pozitív szemi-definit, ahol *avar* az aszimptotikus kovariancia mátrixot jelöli (WHITE, 1984). Ebből a definícióból kiindulva a (7) modell optimális instrumentális változóinak nevezzük azokat a változókat, mellyekkel a modellt transzformálva, majd erre a ALNM-et (vagy KLNM-et) alkalmazva egy *lényegében*

---

[6] Megjegyzendő, hogy az (1) szimultán modell (2) j-edik egyenlete kovariancia mátrixának diagonalizálása útján nyert paraméterbecslések megegyeznek az (5) esztimátor nyújtotta becslésekkel MÁTYÁS, 1986a, BALTAGI, 1981.

aszimptotikusan hatásos esztimátorhoz jutunk. Belátható (WHITE, 1984), hogy a (7) modell esetén az ilyen optimális instrumentális változókat a $R^{-1}X$ mátrix tartalmassa. Ennek megfelelően a (7) modellt ezzel transzformálva:

$$(R^{-1}X)'R^{-1}y_j = X'R^{-1}R^{-1}Z_j\gamma_j + X'R^{-1}R^{-1}u_j\,,$$

majd az ALNM-et alkalmazva visszakapjuk a (6) esztimátort, ami értelemszerűen *lényegében aszimptotikusan hatásos.*

Az A2LNM esztimátor használhatóságához szükség van a Σ_{jj} kovariancia mátrix becslésére. Ez az $\hat{u}_j = y_j - Z_j\hat{\gamma}_{j,w}$ becsült residuum vektor segítségével könnyen előállítható:

$$\hat{\sigma}^2_{i,jj} = \frac{1}{m_i}\hat{u}'_j M_i \hat{u}_j\,, \qquad i = 1,2,4$$

ahol m_i a megfelelő M_i operátorok rangja ($m_1{=}N{-}1$, $m_2{=}T{-}1$, $m_4{=}(N{-}1)(T{-}1)$), továbbá

$$\hat{\sigma}^2_{3,jj} = \hat{\sigma}^2_{1,jj} + \hat{\sigma}^2_{2,jj} - \hat{\sigma}^2_{4,jj}\,,$$

és ebből

$$\hat{\Sigma}_{jj} = \sum_{i=1}^{4} \hat{\sigma}^2_{i,jj} M_i\,.$$

Ezek után az A2LNM esztimátor már minden további nélkül használható.

Belátható (BALESTRA, 1987, felhasználva HSIAO, 1974 eredményeit), hogy abban az esetben, ha

1. a μ_j, λ_j és v_j valószínűségi vektorváltozók elemei függetlenek,

2. X nem sztochasztikus és

$$\lim_{T,N\to\infty} \frac{1}{NT} X'W^*X = A\,,$$

ahol A pozitív definit,[7]

3.

$$\lim_{T,N\to\infty} \frac{N}{T} = 1\,,$$

akkor az (5) és (6) esztimátorok aszimptotikusan (megegyezően) normális eloszlásúak, 0 várható értékkel és

$$\sigma^2_{4,jj}[(\Pi H_j L_j)'A(\Pi H_j L_j)]^{-1}$$

kovariancia mátrixszal, ahol Π a redukált forma paramétereinek mátrixa.

[7] Csak akkor lehet pozitív definit, ha a modellben nincs szabad konstans, ellenkező esetben ugyanis az $X'W^*X$ mátrix szinguláris.

A fentiekből következik, hogy a (6) esztimátor (aszimptotikusan) nem hatásosabb mint az (5) esztimátor, ami annak tudható be, hogy N és $T \to \infty$ esetén a residuális változó kovariancia struktúrájából származó információ elenyésző az X és Y megfigyelés mátrixban foglalt információhoz képest. Vegyük figyelembe, hogy a Σ_{jj} mátrix spektrálfelbontása (MÁTYÁS, 1986b):

$$\Sigma_{jj} = (\sigma^2_{vjj} + T\sigma^2_{\mu jj} + N\sigma^2_{\lambda jj})FA + \\ + (\sigma^2_{vjj} + T\sigma^2_{\mu jj})B_n + (\sigma^2_{vjj} + N\sigma^2_{\lambda jj})B_t + \sigma^2_{vjj}W^* ,$$

és így

$$\Sigma^{-1}_{jj} = \frac{1}{\sigma^2_{vjj} + T\sigma^2_{\mu jj} + N\sigma^2_{\lambda jj}} FA + \\ + \frac{1}{\sigma^2_{vjj} + T\sigma^2_{\mu jj}} B_n + \frac{1}{\sigma^2_{vjj} + N\sigma^2_{\lambda jj}} B_t + \frac{1}{\sigma^2_{vjj}} W^* .$$

Ennek megfelelően világos, hogy ha N és $T \to \infty$ akkor az (5) esztimátor és a (6) esztimátor aszimptotikusan megegyezik. Ennek tudatában kellően nagy minta esetén (ha N és T is nagy) célszerűbb az (5) esztimátor használata, mivel ekkor nem kell a varianciák becslésével foglalkozni.[8] Véges minta esetén (ha a minta nem kellően nagy) elméletileg célszerűbb az A2LNM esztimátor használata, mivel ekkor a residuális változó kovariancia struktúrájából származó információnak lényeges szerepe lehet.

Teljes információs becslés

Az (1) modell teljes információs becslésének szokás nevezni azt az eljárást, mely a modell paramétereit úgy becsüli, hogy az egyes egyenletek közötti kapcsolatra vonatkozó (a Σ mátrixban megtestesülő) információt felhasználja. Az általánosított háromfokozatú LNM esztimátorhoz (A3LNM) a hagyományos 3LNM[9] esztimátornál megszokott módon juthatunk.

Legyen

$$Z_* = \begin{pmatrix} Z_1 & & \\ & \ddots & \\ & & Z_M \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_j \end{pmatrix}, \quad y = \mathrm{vec}\, Y, \quad u = \mathrm{vec}\, U .$$

Ekkor az (1) modell felírható az

$$y = Z_*\gamma + u$$

formában. Legyen

---

[8] Azt, hogy mi tekinthető nagy N-nek és T-nek további *Monte-Carlo* vizsgálatokkal kell eldönteni.

[9] Háromfokozatú legkisebb négyzetek módszere.

$$D = diag < \Sigma_{11} \ldots \Sigma_{MM} >, \quad \tilde{X} = I_M \otimes X .$$

Ekkor a (6) esztimátor levezetésénél látott transzformációt elvégezve majd az ALNM-et alkalmazva kapjuk a (1) modell általánosított háromfokozatú LNM esztimátorát (A3LNM)

$$\hat{\gamma}_{\text{A3LNM}} = [Z_*' D^{-1} \tilde{X} (\tilde{X}' D^{-1} \Sigma D^{-1} \tilde{X})^{-1} \tilde{X}' D^{-1} Z_*]^{-1} \times$$
$$\times [Z_*' D^{-1} \tilde{X} (\tilde{X}' D^{-1} \Sigma D^{-1} \tilde{X})^{-1} \tilde{X}' D^{-1} y] .$$

Az esztimátor használhatóságához szükséges az ismeretlen varianciák becslése. Ennek egyik konzisztens útja a következő:

$$\hat{\sigma}_{ijl}^2 = \frac{1}{m_i} (y_j - Z_{j\gamma_j,\text{A2LNM}})' M_i (y_l - Z_{l\gamma_l,\text{A2LNM}}) \qquad i = 1, 2, 4$$

$$\hat{\sigma}_{3jl}^2 = \hat{\sigma}_{1jl}^2 + \hat{\sigma}_{2jl}^2 - \hat{\sigma}_{4jl}^2$$

$$\hat{\Sigma}_{jl} = \sum_i \hat{\sigma}_{ijl}^2 M_i , \quad \hat{\Sigma} = [\hat{\Sigma}_{jl}], \quad \hat{D} = diag < \hat{\Sigma}_{11} \ldots \hat{\Sigma}_{MM} > .$$

A hagyományos technikai eszközök segítségével belátható, hogy a (6) esztimátor tárgyalásánál bevezetett 1., 2. és 3. feltételek esetén a A3LNM esztimátor aszimptotikusan normális eloszlású, 0 várható értékkel és

$$(\tilde{P}' (\Sigma_v^{-1} \otimes A) \tilde{P})^{-1}$$

kovariancia mátrixszal, ahol

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} \Pi H_1 L_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \Pi H_M L_M \end{pmatrix} .$$

Abban az esetben, ha az egész rendszer éppen identifikált, bármely j-edik strukturális egyenlet paramétereinek A3LNM esztimátora megegyezik a A2LNM esztimátorral. Az (1) modell paramétereinek teljes információs maximum likelihood esztimátorának (bonyolult) levezetésével pedig kimutatható (BALESTRA, P. & al. 1987), hogy ez az esztimátor aszimptotikusan megegyezik az A3LNM esztimátorral.

Az A2LNM és A3LNM esztimátorok látszólagos bonyolultságuk ellenére számítástechnikai eszközökkel könnyen előállíthatók, így gyakorlati alkalmazásuk nem ütközik nehézségbe. Ez azért is kedvező, mert a szimultán modellek nagyon információigényesek, és ez az igény hatékonyan elégíthető ki az idősorok és keresztmetszeti adatok együttes felhasználásával, ami a szimultán panelmodellek felhasználását ösztönözheti.

(Beérkezett: 1988. május 3-án.)

Irodalom

BALESTRA, P. – VARADHARAJAN-KRISHNAKUMAR, J. (1987) Full Information Estimation of a System of Simultaneous Equation with Error Component Structure. *Econometric Theory* (Vol 3) N1.

BALTAGI, B.H. (1981) Simultaneous Equation with Error Components. *Journal of Econometrics* (Vol 17) N2.

HSIAO, C. (1974) Statistical Inference for a Model with Both Random Cross-Sectional and Time Effects. *International Economic Review* (Vol 15) N1.

MÁTYÁS L. (1986) Idősorok és keresztmetszeti adatok együttes felhasználása az ökonometriai vizsgálatokban. Kandidátusi értekezés. Budapest.

MÁTYÁS L. (1986) A panelmodellek becslése. *Szigma*, (Vol 19) N4.

MÁTYÁS L. (1987/88) Dinamikus panelmodellek becslése. *Szigma* (Vol 20) N2.

WHITE, H. (1984) *Asymptotic Theory for Econometricians*. Academic Press Inc. 1984.

Estimation of Simultaneous Panel Models

The purpose of the article is to show how the parameter estimation procedures for traditional simultaneous models can be extended to panel models. By analysing the properties of the parameter estimators thus produced the author wishes to help to the practice of model builders.

Szigma, XX. (1987-88) 2-3. sz.

NEMÉNYI JUDIT

Az időben változó paraméterű modellek alkalmazási lehetőségei

A klasszikus, lineáris, többváltozós regressziós modellek alkalmazásakor feltételezzük, hogy a magyarázó változók átlagos változása a megfigyelési időszak egészében a becsült, konstans paramétereknek megfelelő átlagos változást eredményez a függő változó értékében. Másként megfogalmazva ez azt jelenti, hogy a becsléshez felhasznált mintát generáló gazdasági struktúra változatlanságát, s így a független és függő változók kapcsolatát jellemző paraméterek változatlanságát feltételezzük. Még csak nem is kell nagyon hosszú megfigyelési időszak ahhoz, hogy e feltevés jogosságát megkérdőjelezzük. Például ugyanahhoz a jövedelemváltozáshoz más-más fogyasztás-, beruházás-, vagy készletváltozás tartozhat a tényidőszak különböző időpontjában a szabályozórendszer változása esetén vagy, mert a fogyasztási szokások megváltoztak. A végső, felhasználást befolyásolják az inflációs és konjunktúravárakozások. A külöböző ösztönző, korlátozó gazdaságpolitikai intézkedések az egymást követő években különböző mértékben befolyásolják a gazdasági folyamatok alakulását. Tehát sokszor közgazdasági ismereteink alapján *a priori* elképzelésünk van bizonyos összefüggések intenzitásának módosulásáról azoknál a modelleknél is, amelyek szerkezetét, specifikációját helytállónak, relevánsnak tartjuk.

A változó paraméterek kérdésköréhez vezet a valóság és az adekvát modell megtalálásának problematikája is. Az állandó paraméterű, lineáris modell sok esetben alkalmatlan az egyébként változatlan gazdasági struktúra leírására, a megfelelő modell közelítésének tekinthető csupán. Ez nem csak akkor fordulhat elő, ha a megfelelő modell nem lineáris, hanem amikor fontosnak tartott magyarázó változók „technikai" okokból nem kerülnek be a modellbe.

Kérdéses ugyanis, hogy a kiválasztott modell mennyire képes követni a gazdasági környezet változásait. Amennyiben feltételezzük, hogy modellünk csak azokat a hatásokat tükrözi, amelyek a megfigyelési időszak egészében érvényesültek, viszont olyan változók hatását nem tartalmazza, amelyek erősen befolyásolták ugyan a függő változó alakulását, de a mintavételi időszaknak csak egy részében hatottak (tegyük fel, hogy ezeknek a változóknak a beépítése megfigyelés híján, jó proxy híján, vagy pl. a kollinearitás miatt nem lehetséges), akkor ebből következik az a sejtés, hogy a modellezett változók válaszparaméterei a megfigyelési időszakon belül változóak. A paraméterek változatlanságának feltételezése aggregált adatokra épülő modellek esetén csak az alrendszerekre vonatkozó különböző feltételek teljesülése mellett jogos (lásd THEIL, 1979).

Mindezek alapján távol áll tőlünk, hogy vitassuk a sok esetben sikerrel alkalmazott állandó paraméterű modellek létjogosultságát, alkalmazhatóságát. A modellválasztásnál szóbajöhető modellek körét azonban az előzőekben vázolt esetekben célszerűnek látszik kibővíteni a paraméterek változását valamilyen formában kezelő modellekkel. A paraméterek időbeli állandóságának és változásának vizsgálata két szorosan összetartozó munkafázisból áll. Az első lépcsőben a paraméterek állandóságának tesztelését kell elvégezni, ezt követően — amennyiben a különböző próbák (lásd pl. JUDGE et.al., 1980; QUANDT, 1960) alapján nem vethető el a paraméterek változásának hipotézise — különböző változó paraméterű modelltípusok számszerűsítésével próbálkozhatunk. Cikkünkben csupán a második kérdéskört, a számszerűsíthető modelleket tárgyaljuk.

A változó paraméterű elméleti modellek különböző típusait tárgyalja a szakirodalom, de az elméleti modellek széles választékához képest kevés empirikus alkalmazást találunk. Ennek több oka van. Egyfelől a változó paraméterű modell számszerűsítéséhez viszonylag nagy mintákra van szükség, ez elsősorban az idősorokra épülő modelleknél szab korlátot az alkalmazásoknak. Másrészt a változó paraméterű modellekre kidolgozott becslési eljárásoknak viszonylag nagy a számításigénye. Általában több lépcsős, iteratív, sokszor nem lineáris összefüggéseket kezelő optimalizáló eljárásokról van szó, amelyek megvalósítására nem állnak rendelkezésre könyvtári programcsomagok. A bonyolult számítások után elvégezhető hipotézisvizsgálatok esetleg éppen arra a megállapításra vezetnek, hogy nem jogosult az adott modelltípus feltételezése, vagy legalábbis a rendelkezésre álló adatok alapján nem verifikálható.

A változó paraméterű modellekkel foglalkozó kutatások nagy része olyan egy egyenletes modellekre szorítkozik, melyeknél feltételezhető, hogy a magyarázó változók nem valószínűségi változók, hanem külső, exogén adottságok. Ha ezt a feltételezést feloldjuk, és szimultán rendszerbe kívánjuk beépíteni változó paraméterű függvényeinket, vagy hovatovább változó paraméterű rendszert szeretnénk kialakítani (természetesen, ha ezt a közgazdasági megfontolások indokolttá teszik), akkor további módszertani problémák adódnak.

Egy cikk keretébe a szerteágazó témának csupán vázlatos áttekintése fér be, annál is inkább, mivel a hangsúlyt itt az alkalmazási lehetőségek bemutatására helyezzük. Az elméleti kérdések és az alkalmazási problémák iránt érdeklődőknek széleskörű szakirodalom áll rendelkezésére. Lásd. pl. CHOW (1983), KMENTA (1986), MADDALA (1977) és ZAREMBKA (1974).

A továbbiakban először áttekintjük az idősoros modelleknél alkalmazható változó paraméterű modellek különböző változatait, majd kísérleti számításaink tapasztalatairól számolunk be.

1. Az időben változó paraméterű modellek alaptípusainak áttekintése

Cikkünkben csupán az idősorok alapján specifikált változó paraméterű regressziós modellekkel foglalkozunk, mivel az aggregált, makroszintű adatokkal megragadható szerkezetváltozások kérdését vizsgáljuk. Meg kell azonban jegyeznünk, hogy a változó paraméterű modell feltételezése keresztmetszeti adatok esetén méginkább kézenfekvő a súlyukban, minőségi jellemzőikben jelentősen eltérő egyedek (pl. vállalatok, háztartások) válaszparaméterei azonosságának feloldására. A változó paraméterű modellek nagy jelentőségű területe az ún. panelmodellek, amelyek keresztmetszeti és idősoros adatokat egyaránt felhasználnak és segítségükkel a szerkezeti változásoknak az időben változó paraméterű modelleken túlmutató vonatkozásai is vizsgálhatók (lásd pl. MÁTYÁS, 1986).

Az időben változó paraméterű modellek különböző alaptípusainak áttekintéséhez induljunk ki az alábbi standard, lineáris regressziós modellből:

$$y_t = \sum_{k=1}^{K} x_{tk}\beta_k + \varepsilon_t = x_t'\beta + \varepsilon_t\,, \quad t = 1, 2, \ldots, T\,, \tag{1}$$

ahol

y_t a függő változó t-edik megfigyelése,

x_t a nem sztochasztikus magyarázó változók K dimenziós vektorának t-edik megfigyelése,

β a modellből becsült, konstans paraméterek $(K \times 1)$-es vektora,

ε_t pedig az egyenlet véletlen változója $E(\varepsilon_t) = 0$ várható értékkel és $E(\varepsilon_t\varepsilon_s) = \begin{cases} \sigma^2, & \text{ha } t = s \\ 0, & \text{ha } t \neq s \end{cases}$ kovarianciamátrixszal.

A paraméterek változásának feloldására az (1) modellt a következő alakba írjuk át:

$$y_t = \sum_{k=1}^{K} x_{tk} \cdot \beta_{tk} = x_t'\beta_t + \varepsilon_t\,, \quad t = 1, 2 \ldots, T\,, \tag{2}$$

ahol a β_t a változó paraméterek t-edik időpontra vonatkozó $(K \times 1)$-es vektora.

A (2) modellben $(T \times K)$ paraméter becslését kellene elvégezni a rendelkezésre álló T megfigyelés alapján. A becslés csak további információk megadásával végezhető el. A változó paraméterű modellek alaptípusai a becslésnél felhasznált további feltételekben különböznek egymástól.

A *switching regressziós* (rezsimváltós) modellek esetén, valamilyen előzetes információ alapján feltételezzük, hogy a vizsgált összefüggés tekintetében a megfigyelési időszakban két, vagy több „rezsim" érvényesült, amelyekre vonatkozóan a paraméterek más-más — egy adott rezsimen belül konstans — értéke volt jellemző. Két rezsim megkülönböztetése esetén:

$$y_t = \begin{cases} x_t'\beta_1 + \varepsilon_{1t} & \text{ha} \quad t \in T_1 \\ x_t'\beta_2 + \varepsilon_{2t} & \text{ha} \quad t \in T_2 , \end{cases} \tag{3}$$

ahol

T_1 és T_2 a megfigyelési időszak azonos rezsimbe tartozó időpontjainak diszjunkt halmaza,

β_1 és β_2 pedig a különböző rezsimeknek megfelelő paramétervektorok.

A szerint, hogy a töréspontok ismertek vagy ismeretlenek, különböző technikákkal (dummy változók módszere, a szakaszolt regressziós modellekre alkalmazható módszerek) becsülhető modellel specifikálhatók (lásd JUDGE et al., 1981).

Amennyiben nem feltételezhető, hogy a válaszparaméterek tekintetében a megfigyelési időszak jól elkülöníthető részekre bontható, kézenfekvő a (2) modellt úgy átfogalmazni, hogy a *β_t paramétereket sztochasztikus változóként kezeljük.* Ekkor a paramétereket generáló többváltozós sztochasztikus folyamat jellemzői alapján megkülönböztethetjük a konstans várható értékű válaszparaméteres *(constant mean response coefficients)* és a változó várható értékű válaszparaméteres *(variable mean response coefficients)* modelleket.

A *konstans várható értékű válaszparaméteres* modellek alaptípusa a HILDRETH és HOUCK által kidolgozott *véletlen paraméterű* modell (1968), amelynél feltételezték, hogy az aktuális válaszparaméter véletlenszerűen alakul a konstans várható érték körül:

$$\beta_t = \bar{\beta} + \mu_t , \tag{4}$$

ahol

β_t az aktuális paraméterek $(K \times 1)$-es vektora a t-edik időpontban,

$\bar{\beta}$ a válaszparaméterek konstans várható értékének $(K \times 1)$-es vektora,

μ_t pedig a véletlen eltérések $(K \times 1)$-es vektora a t-edik időpontban, melyről feltételezzük, hogy $E(\mu_t) = 0$ és $E(\mu_t\mu_s') = \begin{cases} \Sigma & \text{ha} \quad t = s \\ 0 & \text{ha} \quad t \neq s . \end{cases}$

Idősoros modellek esetén észszerűbb az a feltevés, hogy az aktuális paraméterek nem véletlenszerűen, hanem időtől függően alakulnak, miközben várható értékük konstans marad. Ezen a feltevésen alapulnak a *normál állapotba visszatérő* modellek, melyeknél a paramétereket többváltozós stacionárius ARMA folyamat generálja, s a stacionaritás biztosítja, hogy az aktuális paraméterek a konstans várható érték körül mozogjanak. Ha a paramétereket AR(1) folyamat generálja, a (2) modellt a paraméterek alakulására vonatkozó alábbi összefüggéssel egészítjük ki (ROSENBERG, 1973):

$$\beta_t - \bar{\beta} = \Phi(\beta_{t-1} - \bar{\beta}) + \mu_t , \tag{5}$$

ahol

Φ $(K \times K)$-s K^2 ismeretlent tartalmazó paramétermátrix (a stacionaritás miatt Φ sajátértékeire teljesülnie kell a $\lambda_k < 1$ feltételnek, de Φ-t többnyire diagonálisnak feltételezik és a stacionaritást $\Phi_{kk} < 1$ biztosítja).

Látható, hogy a (2), (5) normál állapotba visszatérő modellből $\Phi = 0$ speciális esetben visszakapjuk a (2), (4) egyenletekkel leírt véletlen paraméterű modellt.

A *változó várható értékű válaszparaméteres* modellek közé tartoznak az ún. *véletlen bolyongás (random walk)* modellek, amelyeknél a paramétereket generáló sztochasztikus folyamat nem stacionárius és ennek következtében a megfigyelési időszak alatt a paraméterek időben jelentősen változhatnak (pl. COOLEY–PRESCOTT, 1976). Ekkor:

$$\beta_t = \beta_{t-1} + \mu_t\,, \tag{6}$$

ahol

μ_t a véletlen eltérések $(K \times 1)$-es vektora, $E(\mu_t) = 0$ és $E(\mu_t\mu_s) = \sigma^2 Q$, $t = s$ esetén.

A Q $(K \times K)$-s mátrix határozza meg a paraméterek változásának terjedelmét. ($Q = 0$ esetén a konstans paraméterű standard lineáris modellt kapjuk vissza.)

A változó várható értékű válaszparaméteres modellek csoportjába sorolhatók a *paraméterek változását exogén változók függvényében leíró modellek*. Ezeknél feltételezzük, hogy közgazdasági ismereteink alapján meghatározható az exogén változók olyan köre, amellyel megragadhatók a paraméterek változását előidéző főbb hatások. Ekkor a (2) alapmodellt a paraméterekre vonatkozó alábbi regressziós egyenlettel egészítjük ki:[1]

$$\beta_t = Z_t \cdot \gamma + \mu_t \tag{7}$$

ahol

Z_t a paraméterek alakulását befolyásoló exogén változók t időpontra vonatkozó megfigyeléseiből összeállított $(K \times M)$-es mátrix,

γ a paraméterek alakulását magyarázó változókhoz tartozó $(M \times 1)$-es paramétervektor.

Az idősoros változó paraméterű modellek különböző alaptípusainak áttekintése alapján látható, hogy változatos specifikációs lehetőségek állnak rendelkezésre. A megfelelő specifikáció meghatározása sok elméleti és alkalmazási-technikai nehézséggel jár. Az előzőekben bemutatott elméleti modellek becslésére különböző eljárásokat dolgoztak ki. Ezek vagy az általánosított legkisebb négyzetek módszerének, vagy a maximum likelihood módszereknek, vagy a Kalman-szűrő eljárásnak az alkalmazására épülnek. A továbbiakban csak az utoljára bemutatott — a paraméterek

[1] A (7) speciális eseteként (ha Z_t $(K \times K)$ elemű egységmátrix) származtatható a (4) véletlen paraméterű modell.

változását exogén változók függvényében leíró — modell becslési kérdéseivel foglalkozunk, mert ezzel végeztünk számításokat. Abból indultunk ki, hogy idősoros modellek esetén gyakran jól indokolható az a feltételezés, hogy a paraméterek szisztematikusan változnak a megfigyelési időszakban. A rendelkezésre álló minta nagysága (1960–85) éppen azon a határon van, amikor ennek a módszernek az alkalmazása megpróbálható.

2. Az exogén változók függvényében változó paraméterű modellek becslése

Az exogén változók függvényében változó paraméterű modell az előzőek alapján a következő:[2]

$$y_t = \Sigma x_{tk} \cdot \beta_{tk} = x_t' \beta_t \tag{8a}$$

$$\beta_t = Z_t \cdot \gamma + \mu_t \,. \tag{8b}$$

Behelyettesítve (8b)-t (8a)-ba:

$$y_t = x_t' Z_t \gamma + x_t' \mu_t = w_t' \gamma + e_t \,, \tag{9}$$

ahol

$w_t' = x_t' Z_t$ és $e_t = x_t' \mu_t$ helyettesítéssel kaptuk a (9) konstans (γ) paraméterű modellt.

Az alábbi

$$E(\mu_t) = 0 \quad \text{és} \quad E(\mu_t \mu_s') = \begin{cases} \Sigma & \text{ha} \quad t = s \\ 0 & \text{ha} \quad t \neq s \end{cases} \tag{10}$$

feltevésekből következik, hogy a (9) modell e_t véletlen változója $E(e_t) = E(x_t' \mu_t) = 0$ várható értékű és heteroszkedasztikus, mivel

$$E(e_t^2) = E(x_t' \mu_t \mu_t' x_t) = x_t' \Sigma x_t = \varphi_t^2 \,. \tag{11}$$

Ezért, ha a Σ kovarianciamátrix ismert, akkor γ-ra a legjobb lineáris torzítatlan esztimátort (BLUE) az általánosított legkisebb négyzetek (GLS) módszerének alkalmazásával kapjuk.

Írjuk fel a (9) modellt mátrixok segítségével a megfigyelési időszak egészére:

$$y = XZ\gamma + e = W\gamma + e \,, \tag{12}$$

[2] A (2) alapmodell ε_t véletlen változóját a továbbiakban nem szerepeltetjük, mivel ennek identifikálhatósága a konkrét modellek kapcsán vizsgálandó. A legegyszerűbb esetben ε_t a (8a) egyenlet konstansához tartozó véletlen összetevő részének tekinthető.

ahol

y a független változók megfigyeléseinek $(T \times 1)$-es vektora,

W a „transzformált" magyarázó változók $(T \times M)$-es mátrixa: $W = XZ$ és

$$X = \underset{(T \times TK)}{\begin{pmatrix} x_1' & & & \\ & x_2' & & \\ & & \ddots & \\ & & & x_T' \end{pmatrix}}, \qquad Z = \underset{(TK \times M)}{\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_T \end{pmatrix}}$$

γ a β paraméterek változását meghatározó konstans paraméterek $(M \times 1)$-es vektora,

e a modell véletlenváltozójának $(T \times 1)$-es vektora $E(e) = 0$ és $E(ee') = \Phi = < \varphi_1^2, \dots, \varphi_T^2 >$.

Ekkor γ legjobb lineáris torzítatlan esztimátora GLS módszerrel:

$$\hat{\gamma} = (W'\Phi^{-1}W)^{-1}W'\Phi^{-1}y\,. \tag{13}$$

Megjegyezzük, hogy amennyiben Σ (és így Φ) ismeretlen akkor maximum likelihood módszerrel szimultán lehet becsülni γ-t és Φ-t, azonban a számítási nehézségek (nem lineáris, iteratív számítógépigényes eljárások) miatt célszerűbb megpróbálkozni Φ mintából való becslésével. Ezt követően ugyanis a GLS módszer könnyen alkalmazható.

Φ *becslésére* több módszer is rendelkezésre áll (áttekintést ad HSIAO, 1975), amelyek általában a HILDRETH és HOUCK (1968) által javasolt — eredetileg a véletlen paraméterű modell becslésére kialakított — eljárás módosított, finomított változatai. Φ becslését visszavezetjük Σ becslésére. Felhasználva, hogy

$$\varphi_t^2 = x_t'\Sigma x_t = a_t'\sigma\,, \tag{14}$$

ahol

σ a Σ mátrix egymástól különböző elemeiből alkotott vektor, és

a_t az $x_t \otimes x_t$ mátrix azonos elemeinek összevonása után kialakuló vektor[3]

[3] Pl. két magyarázó változó ($K = 2$) esetén: $\sigma = \{\sigma_1^2, \sigma_{12}, \sigma_2^2\}$ és $a_t = \{x_{t1}^2, 2x_{t1}x_{t2}, x_{t2}^2\}$.

és bevezetve az $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_T \end{pmatrix}$ jelölést, a Φ kovarianciamátrix felírható

$$\Phi = \langle A \cdot \sigma \rangle \tag{15}$$

alakban.

(15) alapján látható, hogy σ BLU tulajdonságú becslése előállításával a Φ kovarianciamátrix becslését is megadtuk.

σ becsléséhez induljunk ki a (12) egyenletből, melynek paramétereire az egyszerű legkisebb négyzetek módszerével (OLS) torzítatlan, de nem hatásos esztimátor adható:

$$\widehat{\gamma}_{OLS} = (W'W)^{-1}W'y\,, \tag{16}$$

a becsléshez tartozó residuumok pedig:

$$\widehat{e}_{OLS} = y - W(W'W)^{-1}W'y = My\,, \tag{17}$$

ahol $M = I - W(W'W)^{-1}W'$ szimmetrikus, idempotens mátrix.

Továbbá $\widehat{e}_{OLS} = My = M[W\gamma + e] = Me$,

és $E(\dot{\widehat{e}}_{OLS}) = \dot{M}\varphi$, $(\varphi = \{\varphi_1^2, \ldots, \varphi_T^2\})$ felhasználásával σ OLS módszerrel becsülhető az alábbi összefüggésből:

$$\dot{\widehat{e}}_{OLS} = \dot{M}A \cdot \sigma + \nu\,, \tag{18}$$

ahol ν véletlen változó és $E(\nu) = 0$,
$\dot{\widehat{e}}_{OLS}\dot{M}$ pedig az $\widehat{e}_{OLS}$ és M elemeinek négyzetét tartalmazó vektor, illetve mátrix.

A σ-ra kapott esztimátor

$$\widehat{\sigma} = (F'F)^{-1}F'e \qquad (F = \dot{M}A) \tag{19}$$

torzítatlan, mivel $E(\widehat{\sigma}) = E[(F'F)^{-1}F'\dot{\widehat{e}}_{OLS}] = (F'F)^{-1}F'E(\dot{\widehat{e}}_{OLS}) = \sigma$,

szórása pedig:

$$E\{(\widehat{\sigma} - \sigma)(\widehat{\sigma} - \sigma)'\} = (F'F)^{-1}F'E(\nu\nu')F(F'F)^{-1}\,. \tag{20}$$

Ahhoz tehát, hogy σ-ra hatékony becslést adjunk ismerni kellene a ν véletlen változó kovarianciamátrixát. A $\widehat{\sigma}$ becslés hatásosságának biztosítására az eddigiekben ismertetett Hildreth–Houck által javasolt $(H - H)$ módszer továbbfejlesztett változatait dolgozták ki, amelyekre a későbbiekben még visszatérünk.

Összefoglalva, a (8a)–(8b) változó paraméterű modell $H - -H$ módszerrel való becslésének a lépései a következők:

A) A $\Phi = < \varphi_1^2, \ldots, \varphi_T^2 >$ kovarianciamátrix becslése

a) Előállítjuk a (12) modell magyarázó változóinak $W = XZ$ mátrixát.

b) Elkészítjük a (12) modell OLS becslését.

c) Az OLS becslés (17) reziduumai, valamint az $M = I - W(W'W)^{-1}W'$ és az x_t-kből számítható A mátrix felhasználásával becsüljük a Σ kovarianciamátrix elemeit (19) szerint.

d) (15) alapján előállítjuk a $\widehat{\Phi} = < A\widehat{\sigma} >$ becsült kovarianciamátrixot.

B) A $\widehat{\Phi}$ felhasználásával (14) alapján elkészítjük γ GLS becslését, amely — figyelembe véve, hogy $\widehat{\Phi}$ diagonális mátrix — a súlyozott legkisebb négyzetek módszerével előállítható.

Az **A)** pontban leírt eljárás „szépséghibája", hogy az így becsült $\widehat{\sigma}$-ra semmi sem garantálja, hogy eleget tegyen a kovariancia-mátrixok esetén szükséges feltételeknek ($\widehat{\sigma}_i^2 < 0$ is adódhat). A $\widehat{\Sigma}$ nem negatív definitségét biztosító korlátok érvényesítése kvadratikus programozási feladathoz vezet, aminek megoldása több változó paraméter és nem diagonális Σ feltételezése esetén meglehetősen bonyolult.

Ehelyett bemutatjuk a SINGH et. al (1976) által javasolt *módosított H-H esztimátort*, ahol a $\widehat{\sigma}$ becslés hatásosságának javításával csökkentik a valószínűségét annak, hogy $\widehat{\sigma}_i^2$-re negatív érték adódjon. Az eljárás előnye, hogy számítástechnikailag viszonylag könnyen realizálható.

Bebizonyítható (SINGH, 1976), hogy

$$E(\nu\nu') = E(\widehat{e}_{OLS}\widehat{e}'_{OLS}) - F\sigma\sigma'F' = 2\dot{\Psi}\,, \tag{21}$$

ahol $\dot{\Psi}$ a $\Psi = M\Phi M$ mátrix elemeinek négyzetét tartalmazza.

Ekkor a H-H eljárás **A)** lépése a következő két ponttal bővül ki:

e) $\widehat{\Phi}$ felhasználásával elkészítjük a (18) egyenlet GLS becslését $\widehat{\sigma}_{GLS} = (F'\dot{\Psi}F)^{-1}F'\Psi - \dot{\Psi}^{-1}$

f) ezután $\widehat{\sigma}_{GLS}$ felhasználásával előállítjuk $\widehat{\Phi}_{GLS}$ kovariancia mátrixot.

A szokásos normalitási feltételek mellett γ-ra és Φ-re maximum likelihood (ML) módszerrel készíthető szimultán becslés (lásd DENT–HILDRETH, 1977). A (12) modell becslésére a likelihood függvény a következő:

$$L(\gamma, \sigma) = 2\pi^{T/2} \mid \Phi \mid^{\frac{1}{2}} \exp -\frac{1}{2}e'\Phi^{-1}e\,, \tag{22}$$

ahol $\mid \Phi \mid = \prod_{t=1}^{T} \varphi_t^2$ és $\varphi_t^2 = a_t \cdot \sigma$.

A maximalizáláshoz (22) γ és σ szerinti deriválásával adódó feltételi egyenletek nem lineárisak a becsült paraméterekben, így megoldásunkhoz különböző iteratív eljárásokat használnak fel (lásd pl. DENT–HILDRETH, 1977; HSIAO, 1975; SINGH et. al., 1976), amelyek megegyeznek abban, hogy a paraméterekre valamilyen induló értéket feltételeznek (pl. a H–H eljárással kapott becslést).

A jelenlegi szakaszban ML módszerrel még nem készítettünk számításokat — elsősorban számítástechnikai nehézségek miatt, ugyanakkor ezt nem tekintjük súlyos hiányosságnak, mivel DENT–HILDRETH (1977) Monte Carlo vizsgálatai alapján kis mintában (T=25-re végezték a vizsgálataikat) a H–H módosított eljárással kapott eredmények tulajdonságai kedvezőek voltak az ML módszerrel számítottakkal összevetve.

3. Néhány kísérlet az exogén változók függvényében változó paraméterű modellek alkalmazására

Az idősorok alapján specifikálható változó paraméterű modellek alkalmazási lehetőségeinek feltárása terén csupán az első lépéseket tettük meg. A változó paraméterek hipotézisét tesztelni kell a kiválasztott modelltípus jellemzőinek megfelelően. Kérdéses azonban, hogy melyik legyen a kiválasztott modell. Erre vonatkozóan nem látunk jelenleg jobb útmutatót, mint hogy közgazdasági ismereteink alapján válasszunk specifikációt. Az alábbiakban két olyan példát mutatunk be, ahol előzetes megfontolások alapján megpróbálkoztunk a paraméterek változásának számszerűsítésével.

3.1. A lakossági fogyasztás változó paraméterű modellje[4]

Az aggregált lakossági fogyasztás alakulásának leírására induljunk ki az alábbi egyszerű regressziós modellből:

$$FL(t) = \beta_{FL}(t) FL(t-1) + \beta_{LJ}(t) \cdot LJ(t)\,, \tag{23}$$

ahol FL a lakossági fogyasztás
LJ a lakossági jövedelem.

A (23) modellben a lakossági fogyasztás alakulását a már elért fogyasztási szint (a fogyasztói szokások) és a rendelkezésre álló jövedelem határozza meg. Feltételezzük, hogy a β_i válaszkoefficiensek időben változók, mégpedig

$$\begin{aligned} \beta_{FL}(t) &= \bar{\beta}_{FL} + \gamma_{FL} f(t) + \mu_{FL}(t) \\ \beta_{LJ}(t) &= \bar{\beta}_{LJ} + \gamma_{LJ} f(t) + \mu_{LJ}(t)\,, \end{aligned} \tag{24}$$

ahol $f(t)$ az időváltozó $t = 1, 2, \ldots T$ valamilyen függvénye.

---

[4] Ezzel a modellel SINGH et. al. (1976) végeztek több országra összehasonlító elemzéseket. A modellt az eredeti cikkben bemutatott változatban ismertetjük, de felhívjuk a figyelmet arra, hogy a (23) specifikáció tartalmazza a fogyasztás késleltetett értékét, s így nem tesz eleget az elméleti modellnél bevezetett feltételezéseknek. Ezért a H–H módszerrel készített becslések torzítottak lesznek.

Ílymódon a válaszkoefficiensek determinisztikus összetevője trend szerint alakul. Ez a fogyasztás esetén pl. azzal indokolható, hogy a fogyasztói szokások időbeli változása tartós változást eredményez a jövedelem felhasználásában. A fogyasztói szokások és a jövedelemalakulás aktuális válaszparamétereinek $(\beta_{FL}(t), \beta_{LJ}(t))$ eltérését a konstans, átlagosan jellemző értéktől $(\bar{\beta}_{FL}, \bar{\beta}_{LJ})$ egyfelől véletlen tényezők (μ_{FL}, μ_{LJ}), másfelől azonban a gazdasági fejlődést befolyásoló számos tényező határozza meg, melyek hatását itt nem specifikáljuk explicit módon, hanem úgy tekintjük, hogy az időváltozó függvényében megragadható változást okoznak.

(23) és (24) az alábbi modellt határozza meg $f(t) = t$ lineáris trend esetén:

$$\begin{aligned} FL(t) = &\bar{\beta}_{FL} \cdot FL(t-1) + \bar{\beta}_{LJ} \cdot LJ(t) + \gamma_{FL} \cdot t \cdot FL(t-1) + \\ &+ \gamma_{LJ} \cdot t \cdot LJ(t) + FL(t-1) \cdot \mu_{FL}(t) + \\ &+ LJ(t) \cdot \mu_{LJ}(t) . \end{aligned} \tag{25}$$

Látható, hogy $E(\mu_{FL}) = 0$, $E(\mu_{LJ}) = 0$ és $E(\mu_{FL}^2) = \sigma_{FL}^2$, $E(\mu_{LJ}^2) = \sigma_{LJ}^2$ feltételezése esetén (25) megfelel a (12) heteroszkedasztikus modellnek, amelynek becslése az előző fejezetben ismertetett eljárással végezhető el.

A (25)-ben megadott modell becslését a késleltetett fogyasztási változó szerepeltetésén kívül a multikollinearitás is kérdésessé tette a magyar adatokra való alkalmazáskor. (Számításainkhoz ÁCS (1986-os kiadványából, 1981. évi áron számított milliárd forintban mért lakossági fogyasztási adatokat, és a KSH mérlegkiadványokból összeállított lakossági jövedelemadatokat használtunk.) Ezért becsléseinket a lakossági fogyasztás növekedési ütemére felírt, transzformált modellre készítettük el.

$$\begin{aligned} NFL(t) = \; &\underset{(1.68)}{0.1374} + \underset{(3.09)}{0.0202} \cdot t \\ &+ \underset{(10.98)}{0.8384}\, RF(t) \underset{(-3.24)}{-0.0197}\, RFT(t) , \end{aligned} \tag{26}$$

$$R^2 = 0.9378 \qquad DW = 1.7577 \qquad RE = 0.5\%$$

ahol NFL a lakossági fogyasztás növekedési üteme
RF a lakossági reáljövedelem,
$RFT = RF \cdot t$.

A (26)-os egyenlet a paraméterek OLS becslését mutatja be.[5] A becsült modell reziduumainak CUSUMQ teszttel való vizsgálata alapján az empirikus modellre nem állt fenn az elméleti modellben feltételezett heteroszkedaszticitás. Ugyanerre az eredményre vezetett a H-H módszer, amellyel σ_{FL}^2 és σ_{LJ}^2-re negatív, illetve nem szignifikáns érték adódott.

---

[5] A becslések jellemzésére most és a továbbiakban is a paraméterek alatt zárójelben feltüntettük a t statisztikákat, valamint a korrigált többszörös korrelációs együtthatót (R^2), a Durbin-Watson mutatót (DW) és az egyenlet relatív hibáját. Számításaink a TSP 4.0. programcsomag felhasználásával készültek.

A paraméterek szignifikánsak, ezért a változó paraméterű modell hipotézisét determinisztikus paraméterváltozás feltételezésével fogadhatjuk el. A paraméterértékek alapján megállapíthatjuk, hogy a megfigyelési időszakban (1961–85) a fogyasztási függvény válaszparamétereiben jelentős, tartós eltolódás mutatható ki. Míg a fogyasztási szokások meghatározó ereje növekvő (a válaszparaméter 1961-ben 0.1576 volt, 1985-ben 0.6427), a reáljövedelem változása azonban egyre csökkenő fogyasztási volumenváltozást von maga után (1961-ben 0.8186, 1985-ben 0.3458 a válaszparaméter). Érdekes lehet a továbbiakban a kapott számszerű eredmények összehasonlítása a Singh által készített nemzetközi eredményekkel. Ehhez azonban szükséges lenne a fenti eredmények ellenőrzése különböző módszerekkel készített számításokkal.

3.2. Az üzembehelyezett beruházások változó paraméterű, osztott késleltetésű modellje

A beruházási folyamat időbeli lefutását külöböző megközelítésű elméleti és empirikus modellekkel vizsgálták: AUGUSZTINOVICS *et. al.* (1979), KORNAI (1982), LACKÓ (1980), TARJÁN–TÉNYI (1977), TARJÁN (1985). Ezek a modellek alapvetően két csoportra oszthatók aszerint, hogy a beruházási akciókat az indítás, vagy a befejezés éve szerint aggregálva kezelik a beruházások megvalósulási folyamatának leírására. (Ezt a megközelítésbeli különbséget tárgyalja AUGUSZTINOVICS *et. al.*, 1979.) A megvalósulási folyamatot jellemző paramétereket, így a beruházások megvalósulási koncentráltságát — amely azt mutatja meg, hogy az egy adott évben üzembe helyezett beruházások értéke hogyan oszlik meg az adott év és a megelőző évek beruházási ráfordításaira — adott paraméterként kezelik. A koncentráltság vizsgálatát azért tartjuk fontosnak, mert az alakulásában kimutatható tendenciák feltárhatják a beruházási folyamat belső feszültségeit, s ezáltal a felhalmozás és növekedés összefüggései megbízhatóbban számszerűsíthetők. A termelő kapacitásokat az üzembehelyezések növelik. A koncentráltság változása azért meghatározó, mivel növekvő beruházási teljesítés mellett sem várható jelentős termelés növekedés, ha a beruházások üzembe helyezése elnyúlik. A beruházások szétforgácsoltságának növekedése, az anyagi-műszaki összetétel, az ágazati szerkezet változása, a kivitelezési kapacitások alakulása meghatározóak az átlagos megvalósulási idő, a befektetések hatékonysága tekintetében.

Megközelítésünk abban különbözik az előzőekben említett modellektől, hogy a koncentráltság alakulását nem kívülről adott exogén paraméterként kezeljük, hanem a modell becsült, változó paraméterei alapján származtatjuk.

Egy adott évi üzembe helyezés ($u(t)$) felírható a beruházási ráfordítások egyidejű és késleltetett értékeinek függvényében.

$$\begin{aligned} u(t) &= \alpha_0(t)i(t) + \alpha_1(t)i(t-1) + \ldots + \alpha_K(t)i(t-K) = \\ &= \sum_{k=0}^{K} \alpha_k(t)i(t-k), \quad t = 1, \ldots T, \end{aligned} \tag{27}$$

ahol $i(t-k)$ a $(t-k)$-adik évi beruházási teljesítés,
$\alpha_k(t)$ a $(t-k)$ évi beruházási ráfordításból a t évben üzembe helyezett rész (üzembe helyezési együttható).

Látható, hogy ebben a modellben az üzembe helyezés, azaz a befejezés éve szerint kapcsoljuk össze a beruházási projektumokat $(u(t))$, míg az $i(t-k)$-k a kezdés és befejezés éve szerint különböző projektumokra való $(t-k)$-adik évi ráfordításokat jelentik.[6] Feltételezzük, hogy az $\alpha(t)$ paraméterek időben változóak, s alakulásuk modellezhető. Egy adott évi üzembe helyezés két részből tevődik össze: az adott évben beruházott és azonnal üzembe helyezett, valamint az előző években teljesített beruházásokhoz kapcsolódó, azok üzembe helyezését eredményező ráfordításokból. Ennek leírására fel kell bontanunk az adott évi beruházási ráfordítások üzembe helyezési koefficiensét, $\alpha_0(t)$-t. Ezért: (27)-et átírjuk az

$$u(t) = c(t) + \sum_{k=0}^{K} \alpha_k(t) i(t-k) \tag{28}$$

alakra, ahol a későbbi felírások egyszerűsége kedvéért az $\alpha_0(t)$ jelölést megtartottuk az előző évek beruházásaihoz kapcsolódó t-beli üzembe helyezési koefficiens jelölésére, $c_0(t)$ pedig az adott évben azonnal üzembe helyezett beruházások koefficiense $(c_0(t) = c(t)/i(t))$.

A (28) alapmodellből a beruházási folyamat lefutásának további jellemzői is származtathatók. Az egy adott évi beruházási ráfordításból az új beruházások indítására fordított részt adja meg az $(1 - c_0(t) - \alpha_0(t))$ paraméter. A (28) egyenlet jobboldalát $u(t)$-vel végigosztva megkapjuk a különböző évek üzembe helyezéseihez tartozó koncentráltsági mutatókat.

A változó paraméterű (28) modell becsülhetőségéhez további feltevések szükségesek. Itt valójában végtelen sok specifikációs változatra van lehetőség, a késleltetés formájától, hosszától és a paraméterek változására vonatkozó feltevésektől függően. A továbbiakban a polinomiális osztott késésű specifikációt mutatjuk be, mivel a későbbi eredményeket ennek alkalmazásával kaptuk.

Feltételezzük, hogy az $\alpha(t)$ paraméterek $(M-1)$-ed fokú polinomon helyezkednek el (Almon módszere lásd pl. JUDGE *et. al.*, 1983). Ekkor

$$\underset{(K\times 1)}{\alpha(t)} = \begin{pmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_K(t) \end{pmatrix} = \underset{(K\times M)}{H} \cdot \underset{(M\times 1)}{\beta(t)}, \tag{29}$$

ahol $H = [h_1, \ldots, h_M]$ a polinomot meghatározó mátrix,
$\beta(t)$ a polinomiális osztott késésű modell paramétervektora.

[6] Valójában a (27) modellre teljesülnie kell, hogy $\sum_{k=0}^{K} \alpha_k(t+k) = 1$, de ez $(T-K)$ további feltétel érvényesítését jelentette volna a becslésnél, amely szabadságfok problémát okozott volna, ezért a becslés után vizsgáltuk a fenti feltétel teljesülését.

Számításainkat lineáris és másodfokú polinom feltételezésével (végpontkorlátozás mellett) végeztük. Ekkor:

$$u(t) = c(t) + i_0(t)\beta_0(t) + i_1(t)\beta_1(t)\,, \tag{30}$$

ahol $i_0(t) = h_1' i_K(t)$

$$i_1(t) = h_2' i_K(t)$$

$$i_K'(t) = \{i(t), i(t-1), \ldots, i(t-K)\}.$$

Lineáris esetben a beruházásra egyre növekvő a „költségrárakódás", a másodfokú polinom pedig elvileg lehetővé teszi, hogy a koncentráció az üzembe helyezést megelőző években érje el a maximumát.

A β és c_0 paramétereket valószínűségi változónak tekintjük és feltételezzük, hogy az alábbiak szerint alakulnak:

$$\beta_0(t) = \bar{\beta}_0 + \sum_{n=1}^{N} \gamma_{0n} x_n(t) + \mu_0(t)$$

$$\beta_1(t) = \bar{\beta}_1 + \sum_{l=1}^{L} \gamma_{1l} v_l(t) + \mu_1(t) \tag{31}$$

$$c(t) = \bar{c} + \mu_2(t)\,,$$

$$\text{és} \quad E(\mu) = 0, \quad E(\mu_t \mu_s') = \begin{cases} \sum & \text{ha} \quad t = s\,, \\ 0 & \text{ha} \quad t \neq s\,, \end{cases}$$

$x(t)$ és $v(t)$ pedig olyan exogén változók, amelyeket fontosnak tartunk a beruházási folyamat időbeli „lefutása" szempontjából.

Behelyettesítve (31)-t (28)-ba:

$$u(t) = \bar{c} + i_0(t)\bar{\beta}_0 + i_1(t)\bar{\beta}_1 + z_0^{*\prime}(t)\gamma_0 + z_1^{*\prime}(t)\gamma_1 + e(t)\,, \tag{32}$$

ahol

$$z_0^*(t) = \{x_1(t)i_0(t), \ldots, x_N(t)i_0(t)\}$$

$$z_1^*(t) = \{v_1(t)i_1(t), \ldots, v_L(t)i_1(t)\}$$

$$\gamma_0' = \{\gamma_{01}, \ldots, \gamma_{1N}\} \qquad \gamma_1' = \{\gamma_{11}, \ldots, \gamma_{1L}\}\,.$$

$$e(t) = \mu_2(t) + i_0(t)\mu_0(t) + i_1(t)\mu_1(t)\,. \tag{33}$$

Mátrixformába átírva:

$$u = Z\beta + e\,, \tag{34}$$

ahol $Z = [1, i_0, i_1, Z_0^*, Z_1^*]$ $\quad T \times (N + L + 3)$ méretű mátrix

$$Z_0^* = \begin{pmatrix} Z_0^*(1) \\ \vdots \\ z_0^*(T) \end{pmatrix} \qquad Z_1^* = \begin{pmatrix} z_1^*(1) \\ \vdots \\ z_1^*(T) \end{pmatrix}$$

és $\beta' = (\bar{c}, \bar{\beta}_0, \bar{\beta}_1, \bar{\gamma}'_0, \gamma'_1)$ $(N+L+3)\times 1$-es paramétervektor, ahol $N+L+3 < T$.

A μ véletlen változókra tett (31) feltevésekből következik, hogy $E(e) = 0$ és $E(ee') = \Phi$, ahol $\Phi =< \varphi_1^2 \ldots \varphi_T^2 >$ és $\varphi_t^2 = i^{*'}(t)\Sigma i^*(t)$, $i^*(t) = \{1, i_0(t), i_1(t)\}$, tehát a (34) modell heteroszkedasztikus, megfeleltethető a (12) elméleti modellnek, és becslése az előző pontban ismertetett eljárással elvégezhető.

A következőkben a (28) modell alapján a népgazdaság összes beruházására, valamint az ipar és a mezőgazdaság üzembe helyezett beruházásaira készített számításainkat mutatjuk be. Modellünk tehát az egy adott évben befejeződő, üzembe helyezett beruházásokat kapcsolja össze, s ezeket az adott év és a megelőző évek beruházási ráfordításaiból származtatja. Az üzembe helyezett beruházásokra és a beruházási ráfordításokra ÁCS (1986) kiadványából származó, 1981 évi áron számított milliárd forintban mért volumenadatokat használtunk az 1960–85-ös időszakra. $K = 3$, azaz 4 éves átfutási idővel számoltunk. Egyenletenként sokféle variánssal kísérleteztünk. Az osztott késésekre a másodfokú polinom feltételezése mellett készített becslések megbízhatóságát a nagyfokú multikollinearitás miatt nem tartottuk kielégítőnek. Így az alább bemutatandó eredmények lineáris osztott késés feltételezésével adódtak. A paraméterek változásának magyarázatára különböző változókkal kísérleteztünk (pl. kapacitáskihasználtsági, importkorlátozást megjelenítő változók, anyagi–műszaki, valamint ágazati összetétel jellemzői stb.). Végül egy viszonylag egyszerű, a beruházási folyamat belső feszültségeinek feltárása szempontjából talán nem a legérdekesebb változatot fogadtunk el, mivel ennek a statisztikai jellemzői voltak a legkedvezőbbek. Ebben a változatban a beruházási ráfordítások osztott késésének paraméterét két magyarázó tényező függvényében becsültük. Ezek: az építőipari termelés volumenének trendtől való eltérése (QEP) és az egységnyi beruházásra eső befejezetlen állomány átlagtól való eltérésének két évvel késleltetett értéke (BEF). Feltételezésünk szerint mindkét változó paraméterének pozitív előjelűnek kell lennie. Ugyanis, ha az építőipari termelés volumene az átlagosnál jobban nő, akkor feltehetően csökken az épületberuházások kivitelezési ideje, s így nőnek az üzembe helyezések. A befejezetlen állomány súlyának növekedése előbb-utóbb — a modellben 1–1,5 éves késéssel — kiváltja az üzembe helyezések növekedését.

Az *1. táblázatban* bemutatjuk a népgazdaság, az ipar és a mezőgazdaság üzembe helyezéseire vonatkozó eredményeinket. Összehasonlítási alapul a *2. táblázatban* közöljük a megfelelő konstans paraméterű osztott késésű modell becslési jellemzőit.

Az *1. táblázat* a (34)-es modell egyszerű legkisebb négyzetek (OLS) módszerével készített becslési jellemzőit tartalmazza. Elméleti feltevéseink alapján a modell korrekt becslését a 2. pontban bemutatott eljárásokkal végezhetjük el.

1. táblázat

A változó paraméterű becslés eredményei

Üzembe helyezett beruházás	$\bar{c}$	Beruházási ráfordítás $(\bar{\beta}_0)$	Építőipari kapacitás (γ_{01})	Befejezetlen áll. késleltetve (γ_{02})	R^2	DW	RE
Népgazdaság összesen (NG)	22.87 (4.93)	0.3350 (28.44)	0.0221 (3.11)	0.2462 (4.60)	0.9964	2.2721	2.5 %
Ipar (IP)	4.13	0.3539	0.0430	0.2457	0.9671	2.6239	9.7 %
Mezőgazdaság (MG)	4.07 (4.34)	0.3304 (19.23)	0.0217 (2.79)	0.0901 (2.45)	0.9820	2.0421	4.8 %

2. táblázat

A konstans paraméterű becslés eredményei

Üzembe helyezés	c	Beruházás $(\bar{\beta}_0)$	R^2	DW	RE
Népgazdaság összesen (NG)	5.43 (1.11)	0.3759 (31.38)	0.9781	1.9241	5.0 %
Ipar (IP)	1.40	0.3765	0.8702	2.1061	12.6 %
Mezőgazdaság (MG)	2.30 (1.98)	0.3634 (19.04)	0.9426	1.2957	6.3 %

A lehetséges becslési módszerek közül — a számítógépes lehetőségek korlátozottsága miatt — csupán a H–H módszerrel való becslést készítettük el. A Σ kovarianciamátrix elemeire H–H módszerrel (19) alapján kapott becsléseink rossz illeszkedése és a $\widehat{\sigma}$ paraméterek inszignifikanciája arra utal, hogy empirikus modellünkre nem helytálló a (33)-ban megadott hibaspecifikáció. Az így kapott eredmények megerősítették az OLS módszerrel készített becslések reziduumainak CUSUMQ teszttel végzett vizsgálata alapján tett feltételezésünket, hogy a (34)-nek megfelelő empirikus modellek nem heteroszkedasztikusak, és így H–H módszerrel nem adható modellünkre az OLS becslésnél jobb statisztikai jellemzőkkel rendelkező GLS becslés. Sajnos a σ paraméterek módosított H–H eljárással és ML módszerrel való becslését számítástechnikai nehézségek miatt nem tudtuk elkészíteni, s mivel a H–H módszerrel készített fenti becsléseknél minduntalan felmerül a paraméterekre vonatkozó nem-negativitási követelmény érvényesítésének gondja (lásd 2. pont), ezeket az eredményeket csak fenntartással fogadhatjuk el. (Ez nem változtat azon a megállapításunkon, hogy ha a paraméterek becslésére alkalmazott eljárás minden szempontból kielégítő lett volna, akkor is feltehetően azt az eredményt kapjuk, hogy empirikus modellünkre az OLS módszerrel megfelelő tulajdonságú becslés adható.)

A továbbiakban bemutatjuk az *1. táblázatban* megadott becslésekhez tartozó változó paramétereket és az azokból származtatható koncentráltsági mutatókat.

A (27)-es modellnek megfelelő $\widehat{\alpha}_i$ $(i = 0, \ldots, 3)$ becsült üzembe helyezési paramétereket[7] a 3–5. táblázatok tartalmazzák. A becsült α_i paraméterek alakulását összevetve a beruházási volumen és az üzembe helyezések növekedési ütemeivel megállapítható, hogy $\widehat{\alpha}_0$ (az adott évben üzembe helyezett részarány) csökken, vagy stagnál, amikor a beruházások növekedési üteme a legnagyobb ('67, '74, '77, '82) és nő, amikor a növekedési ütem csökken. A volumen növekedésével az adott évi üzembe helyezési részarány csökken, a beruházások szétforgácsoltsága nő. A paraméterek alakulása az iparban a legváltozékonyabb a vizsgált függvények közül. A „csúcsokon" — attól függően, hogy az ipar részesedése nőtt-e az összberuházáson belül — $\widehat{\alpha}_0$ csökken ('67, '77), vagy nő (1970, '74, '82). $\widehat{\alpha}_0$ értéke az iparban mindvégig alacsonyabb, a mezőgazdaságban pedig magasabb, mint az összes népgazdasági üzembe helyezés esetén.

A számszerűsített modellben 4 éves beruházási átfutási idővel számoltunk. Az $\widehat{\alpha}$ paraméterekre explicit módon nem érvényesítettük, hogy egy adott év beruházási ráfordításaihoz tartozó paraméterek együtthatóinak összege 1 legyen, viszont utólag vizsgáltuk ennek a feltételnek a teljesülését (lásd *6. táblázat*) és azt találtuk, hogy a mezőgazdaság esetében valószínűleg kevesebb késleltetéssel kellett volna számolni, az összes beruházás és az ipar esetén viszont több év figyelembe vétele is indokolt lett volna.

Kiszámítottuk az üzembe helyezésekhez tartozó koncentráltsági mutatókat U_i $(i = 0, \ldots, 3)$, amelyek megmutatják, hogy — az adott feltételezések mellett — az üzembe helyezés éve szerint összekapcsolt beruházások ráfordítási szerkezete hogyan oszlik meg az adott év és a megelőző évek között (lásd *7–9. táblázat*, $\sum_{i=0}^{3} U_i = 1$). Az U_i mutatók alapján látható, hogy a megfigyelési időszak egészét tekintve az üzembe helyezett beruházások csökkenő hányadát teljesítik az üzembe helyezés évében. Ez a hányad az iparban alacsonyabb, a mezőgazdaságban magasabb, mint a népgazdaság egészére számított érték. A beruházási ráfordítások növekedési ütemének csökkenésekor az üzembe helyezéseken belül megnő az előző évek ráfordításaiból származó rész ('65, '72, '80). Amikor a beruházási ráfordítások növekednek, akkor az üzembe helyezéseken belül nő a nem áthúzódó beruházások aránya (gép, import) ('67, '70, '77, '82). A beruházási volumen növekedésének csökkenése az előző években elkezdett beruházások befejezését gyorsítja (U1, U2, U3 nő), s így az üzembe helyezési csúcs kb. 1 évvel követi a beruházási csúcsot. Ezek a tendenciák az ipar esetében rajzolódnak ki leginkább.

---

[7] Az $\widehat{\alpha}_0$ értékek a (27)-es modell felírásának megfelelő becsléseket jelentik.

3. táblázat
A becsült üzembe helyezési paraméterek
Népgazdaság összesen

Év	$\hat{\alpha}_0$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$
1963	0.59176	0.21576	0.14384	0.07192
1964	0.57241	0.21520	0.14346	0.07173
1965	0.55793	0.20645	0.13764	0.06882
1966	0.53637	0.21023	0.14015	0.07008
1967	0.50543	0.21819	0.14546	0.07273
1968	0.50903	0.22327	0.14885	0.07442
1969	0.49293	0.22299	0.14866	0.07433
1970	0.49499	0.24642	0.16428	0.08214
1971	0.47383	0.24415	0.16277	0.08138
1972	0.46618	0.23589	0.15726	0.07863
1973	0.47473	0.24583	0.16388	0.08194
1974	0.47108	0.25514	0.17009	0.08505
1975	0.49519	0.28262	0.16841	0.09421
1976	0.46507	0.26017	0.17345	0.08672
1977	0.43187	0.24491	0.16327	0.08164
1978	0.43552	0.25126	0.16750	0.08375
1979	0.43853	0.25410	0.16940	0.08470
1980	0.44779	0.25645	0.17096	0.08548
1981	0.45725	0.25993	0.17329	0.08664
1982	0.43209	0.23975	0.15983	0.07992
1983	0.47630	0.26990	0.17994	0.08997
1984	0.48220	0.27100	0.18067	0.09033
1985	0.45452	0.24739	0.16493	0.08246

4. táblázat
A becsült üzembe helyezési paraméterek
Ipar

Év	$\widehat{\alpha}_0$	$\widehat{\alpha}_1$	$\widehat{\alpha}_2$	$\widehat{\alpha}_3$
1963	0.52385	0.25187	0.16792	0.08396
1964	0.49648	0.25095	0.16730	0.08365
1965	0.44394	0.21784	0.14522	0.07261
1966	0.46745	0.23948	0.15965	0.07983
1967	0.45018	0.23973	0.15982	0.07991
1968	0.45223	0.25458	0.16972	0.08486
1969	0.45093	0.25209	0.16806	0.08403
1970	0.48591	0.27949	0.18633	0.09316
1971	0.44421	0.26112	0.17408	0.08704
1972	0.42578	0.25589	0.17060	0.08530
1973	0.42822	0.25252	0.16834	0.08417
1974	0.44348	0.26681	0.17787	0.08894
1975	0.45634	0.28200	0.16800	0.09400
1976	0.45646	0.29314	0.19543	0.09771
1977	0.38793	0.24577	0.16385	0.08192
1978	0.41034	0.26684	0.17789	0.08895
1979	0.41522	0.27035	0.18023	0.09012
1980	0.40245	0.25825	0.17216	0.08608
1981	0.40396	0.25629	0.17080	0.08543
1982	0.44200	0.26381	0.18921	0.09460
1983	0.45710	0.29343	0.19562	0.09781
1984	0.46342	0.29686	0.19790	0.09895
1985	0.39679	0.24531	0.16354	0.08177

5. táblázat
A becsült üzembe helyezési paraméterek
Mezőgazdaság

Év	$\widehat{\alpha}_0$	$\widehat{\alpha}_1$	$\widehat{\alpha}_2$	$\widehat{\alpha}_3$
1963	0.64751	0.21576	0.14384	0.07192
1964	0.60039	0.21959	0.14639	0.07320
1965	0.60936	0.21791	0.14528	0.07264
1966	0.61743	0.21879	0.14586	0.07293
1967	0.60453	0.22265	0.14844	0.07422
1968	0.50528	0.22081	0.14720	0.07560
1969	0.48678	0.22286	0.14858	0.07429
1970	0.51298	0.25608	0.17072	0.08536
1971	0.51679	0.26018	0.17345	0.08673
1972	0.51726	0.25976	0.17318	0.08659
1973	0.53267	0.26875	0.17916	0.08958
1974	0.52032	0.26778	0.17852	0.08926
1975	0.49115	0.25426	0.16951	0.08475
1976	0.49056	0.25463	0.16976	0.08488
1977	0.49565	0.25558	0.17o39	0.08519
1978	0.47317	0.25701	0.17134	0.08567
1979	0.46885	0.25514	0.17010	0.08505
1980	0.47198	0.25087	0.16725	0.08362
1981	0.46126	0.25048	0.16699	0.08349
1982	0.46625	0.25207	0.16805	0.08402
1983	0.47762	0.24609	0.16406	0.08203
1984	0.48785	0.23908	0.15939	0.07969
1985	0.49285	0.22949	0.15299	0.07650

6. táblázat
A t-edik évi beruházási ráfordításhoz tartozó üzembe helyezési paraméterek összege
$(\Sigma_{k=0}^{3}\alpha_k(t+k))$

Év(t)	Népgazdaság összesen	Ipar	Mezőgazdaság
1963	1.01467	0.99985	1.08530
1964	0.99174	0.95388	1.03839
1965	0.98804	0.92810	1.05020
1966	0.97774	0.96093	1.06158
1967	0.95951	0.96599	1.05927
1968	0.97769	0.97769	0.98559
1969	0.98076	0.98980	1.00290
1970	0.97837	1.00180	1.03592
1971	0.95865	0.95739	1.04498
1972	0.97628	0.95015	1.04929
1973	1.00500	0.98074	1.05484
1974	1.00878	1.00238	1.02953
1975	1.00238	1.00228	1.00184
1976	0.96218	0.97025	1.00253
1977	0.93801	0.92108	1.00637
1978	0.93723	0.93828	0.97905
1979	0.94817	0.93892	0.97073
1980	0.95752	0.94575	0.97254
1981	0.96727	0.98236	0.95708
1982	0.96513	1.01510	0.94823

7. táblázat
A becsült koncentráltsági mutatók
Népgazdaság összesen

Év	U0	U1	U2	U3
1963	0.61878	0.19921	0.12001	0.06200
1964	0.60438	0.21332	0.12557	0.05673
1965	0.58930	0.21591	0.13513	0.05966
1966	0.58842	0.20893	0.13791	0.06474
1967	0.59236	0.21422	0.12938	0.06405
1968	0.56092	0.24239	0.13537	0.06132
1969	0.55282	0.23147	0.15203	0.06368
1970	0.55137	0.23354	0.14411	0.07099
1971	0.54346	0.24952	0.14153	0.06550
1972	0.51136	0.26460	0.15718	0.06636
1973	0.50091	0.25138	0.17137	0.07635
1974	0.51192	0.24695	0.15955	0.08158
1975	0.50735	0.26134	0.15547	0.07534
1976	0.48894	0.27310	0.16403	0.07332
1977	0.50151	0.25348	0.16873	0.07628
1978	0.48996	0.26974	0.16028	0.08002
1979	0.47537	0.27329	0.17388	0.07748
1980	0.45414	0.27610	0.16262	0.08714
1981	0.44972	0.26728	0.16916	0.09384
1982	0.46191	0.26033	0.18145	0.09631
1983	0.45620	0.26773	0.18129	0.09477
1984	0.45646	0.26630	0.18388	0.09338
1985	0.46487	0.26099	0.18062	0.09353

8. táblázat

A becsült koncentráltsági mutatók

Ipar

Év	U0	U1	U2	U3
1963	0.53432	0.24659	0.14514	0.07394
1964	0.52924	0.24489	0.15670	0.06917
1965	0.51710	0.25373	0.15485	0.07432
1966	0.52851	0.23911	0.15941	0.07296
1967	0.55033	0.23879	0.14059	0.07029
1968	0.49506	0.28319	0.15383	0.06792
1969	0.48916	0.26151	0.17715	0.07217
1970	0.49431	0.25781	0.16436	0.08351
1971	0.50285	0.28255	0.15871	0.07589
1972	0.46949	0.28513	0.16883	0.07655
1973	0.45593	0.27578	0.18578	0.08250
1974	0.48181	0.25535	0.17462	0.08822
1975	0.47963	0.27555	0.16182	0.08300
1976	0.47707	0.27627	0.17123	0.07542
1977	0.50598	0.26269	0.15792	0.07341
1978	0.46938	0.29600	0.16171	0.07291
1979	0.43507	0.29556	0.19108	0.07829
1980	0.40296	0.29370	0.20429	0.09906
1981	0.40973	0.27426	0.28767	0.10834
1982	0.42740	0.27229	0.19153	0.10877
1983	0.42320	0.26691	0.18978	0.10012
1984	0.42493	0.28006	0.19718	0.09782
1985	0.43543	0.27565	0.18907	0.09964

9. táblázat

A becsült koncentráltsági mutatók

Mezőgazdaság

Év	U_0	U_1	U_2	U_3
1963	0.65641	0.18663	0.10388	0.05308
1964	0.62330	0.21018	0.11748	0.04904
1965	0.57742	0.22570	0.13873	0.05816
1966	0.59386	0.19671	0.14334	0.06608
1967	0.61285	0.19715	0.12286	0.06714
1968	0.60486	0.21308	0.12407	0.05799
1969	0.59332	0.22949	0.12533	0.05386
1970	0.57308	0.23814	0.13412	0.05406
1971	0.51709	0.27001	0.14968	0.06323
1972	0.46569	0.27000	0.18669	0.07762
1973	0.48593	0.25705	0.18243	0.09461
1974	0.52818	0.23397	0.15080	0.08705
1975	0.52451	0.25685	0.14739	0.07125
1976	0.48023	0.27327	0.17233	0.07417
1977	0.50504	0.23836	0.17421	0.08240
1978	0.51206	0.25091	0.15310	0.08392
1979	0.48855	0.27253	0.16391	0.07501
1980	0.45241	0.27494	0.18789	0.08475
1981	0.48403	0.23966	0.18268	0.09303
1982	0.48775	0.26198	0.15924	0.09104
1983	0.45761	0.27612	0.18289	0.08338
1984	0.45357	0.25198	0.19673	0.09773
1985	0.47092	0.24068	0.18189	0.10651

Mindaz, amit a modell eredményei kapcsán leírtunk esetleg trivialitásnak tűnik, de a modell megbízhatósága a valós folyamatokkal való összehasonlítás alapján ítélhető csak meg. Ami e téren eddig történt az valóban kevés, hiszen eddig nem tudtunk még sort keríteni pl. a modellből származtatott mutatók és statisztikai megfelelőjük (ha létezik) összehasonlítására. Ezért az értékeléskor a modellből kapott becslések tükrözte tendenciákra és nem magukra a konkrét számokra helyeztük a hangsúlyt.

A tapasztalatok alapján megállapíthatjuk, hogy a paraméterek stabilitásának vizsgálata valószínűleg sok esetben hasznosan beilleszkedhetne az ökonometriai eszköztárba. Az 1980-as évek elején a gazdasági fejlődés főbb jellemzőiben olyan változások, törekvések következtek be, amelyeket hosszabb időszak adataira épülő, konstans paraméterű modellek egyáltalán nem, vagy csak kevéssé tudnak leírni. A folyamatok dinamikus összefüggéseinek vizsgálatánál ezért fontos a változó paraméterű modellek számszerűsítésével próbálkozni.

A hatékony alkalmazásnak jelenleg elsősorban számítástechnikai korlátai vannak. A különböző változó paraméterű alapmodellek becslésére a rendelkezésre álló programcsomagok felhasználásával alakíthatók ki célprogramok. Az összefüggések változására vonatkozó — közgazdasági megfontolások alapján kialakított — *a priori* elképzeléseink azonban nem biztos, hogy helytállóak. Abból, hogy a változó paraméterű modell kiválasztott típusát nem sikerült az adatokból verifikálni, nem következik, hogy a változó paraméterű modell hipotézise hibás. A modellválasztás akkor válna igazán megalapozottá, ha különböző változó paraméterű modellek becslését, tesztelését nem egyedi célprogramokkal, hanem opciókkal vezérelhető, sztenderd programokkal lehetne elvégezni.

(*Beérkezett: 1988. május 21-én.*)

Irodalom

AUGUSZTINOVICS M. (szerk.) (1979) *Népgazdasági modellek a hosszú távú tervezésben*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

CHOW, G.C. (1983) *Econometrics*, McGraw Hill, New York.

DENT, T.W.–C. HILDRETH (1977) Maximum Likelihood Estimation in Random Coefficient Model, *Journal of the American Statistical Association* (JASA), VOL 72, 69–72.

GALEAZZI, G. (1985) International Differences in Comparative Price Levels and Exchange Rates, *Rivista di Politica Economica*, Suppl. to XII., 3–41.li

GRIFFITHS, W.E. (1972) Estimation of Actual Response Coefficients in the Hildreth-Houck Random Coefficient Model, *JASA*, VOL 67, 633–635.

HARVEY, A.C. (1981) *Time Series Analysis*, Philip Alan, London.

HILDRETH, C.–J.P. HOUCK (1968) Estimation for a Linear Model with Random Coefficients, *JASA*, VOL 63, 584–595.

JUDGE, G.G.–W.E. GRIFFITHS–R.C. HILL–T.CH. LEE (1980) *The Theory and Practice of Econometrics*, John Wiley & Sons, New York.

JUDGE, G.G.–R.C. HILL–W. GRIFFITHS–H. LÜTKEPHOHL–T.CH. LEE (1983) *Introduction to the Theory and Practice of Econometrics*, John Wiley & Sons, New York.

KORNAI J. (1982) *Növekedés, hiány és hatékonyság*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

KMENTA, J. (1986) *Elements of Econometrics*, Macmillan, New York–London.

LACKÓ M. (1980) Feszültségek felhalmozása és leépítése, *Közgazdasági Szemle*, 27. 7–8, 923–940.

MADDALA, G.S. (1977) *Econometrics*, McGraw Hill, New York.

MÁTYÁS L. (1986) A panelmodellek becslése, *SZIGMA*, 19. 325–339.

QUANDT, R.E. (1960) Tests of the hypothesis that a linear regression system obeys two separate regimes, *JASA* 55, 324–330.

ROSENBERG, B. (1973) Random coefficient models. The Analysis of a Cross Section of Time Series by Stochastically Convergent Parameter Regression, *Annals of Economic and Social Measurement*, VOL 2, 399–428.

SINGH, B.–A.L. NAGAR–N.K. CHOUDRY–B. RAJ (1976) On the Estimation of Structural Change: a Generalisation of the Random Coefficients Regression Model, *International Economic Review*, VOL 17, 340–360.

TARJÁN T.–TÉNYI GY. (1977) Kísérlet a beruházási folyamat modellezésére, *SZIGMA*, 10, 11–24.

TARJÁN T. (1985) Ormnehéz és farnehéz beruházási megoszlások, *SZIGMA*, 18, 137–147.

THEIL, H. (1979) *Principles of Econometrics*, North –Holland, Amsterdam.

ZAREMBKA, P. ed. (1974) *Frontiers in Econometrics*, Academic Press, New York–London.

ÁCS M. (1986) *A népgazdasági fejlődés összefoglaló mutatóinak 1981. évi árszinten egységesített idősorai 1950–85.* OT IMI.

Application Possibilities of Models with Time-Variant Parameters

The article first surveys the different types of models with time-variant parameters which enable the study of some problems of structural changes of the economy. Then the theoretical characteristics and estimation methods of models are reviewed which describe the parameter changes as functions of exogeneous variables. Among the methods the procedure based on the generalized least squares, originally proposed by *C. Hildreth* and *J.P. Houck*, is selected.

In the concluding part of the article the author illustrates the applicability of the reviewed models by presenting her empirical results. In the model of household consumption she analyses the hypothesis of parameters shifting according to a linear trend, while in the model of investments put into operation she constructs the estimates with parameters changing as a function of exogeneous variables within a distributed lag model.

Szigma, XX. (1987–88) 2–3. sz.

FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK

KLAFSZKY EMIL– TERLAKY TAMÁS

Az ellipszoid módszerről

Dolgozatunkban az ellipszoid módszer egy rövid, újszerű tárgyalását adjuk. Célunk a módszer fő lépéseinek egyszerű, lehetőleg elemi bizonyítása, az ellipszoid módszer önmagában teljes, minden részletét összefoglaló tárgyalása. A feladat méretének mérésére egy a szokásostól eltérő konstanst vezetünk be. Nem célunk az elméleti korlátok javítása, vagy a legélesebb elméleti korlátot adó változat közlése.

Cikkünk négy részből tevődik össze. Először egész vektorok által adott poliéderek térfogatára adunk külső és belső korlátot, majd az ellipszoidok, illetve egy adott fél ellipszoidot tartalmazó minimális térfogatú ellipszoidok tulajdonságait vizsgáljuk. A harmadik részben ismertetjük az ellipszoid módszert és bizonyítjuk, hogy az polinomiális lépésszámban eldönti, hogy egy egyenlőtlenségrendszer megoldható-e vagy sem. Végül megmutatjuk, hogy ha van ilyen algoritmus, akkor ennek felhasználásával polinomiális lépésszámban meg is találhatunk az egyenlőtlenségrendszer megoldásai közül egyet.

Immár évtizedek óta jól ismert, hogy gyakorlati feladatokon mutatott hatékonysága ellenére a szimplex módszer nem polinomiális algoritmus. Erre először KLEE és MINTY [5] adott szép példát. Klee és Minty példájának módosításával megmutatható, hogy a szimplex módszer tetszőleges, ismert változata nem polinomiális.

Először KHACSIJÁN szovjet matematikus adott polinomiális eljárást lineáris programozási feladatok megoldására 1979-ben. Az algoritmus *ellipszoid módszer* néven vált ismertté, mivel ellipszoidok térfogatcsökkentésén alapul. Elméleti hatékonysága ellenére hamar kiderült, hogy az ellipszoid módszer (jelenlegi formájában) a gyakorlatban használhatatlan.

Az algoritmusok területén a következő lépés KARMARKAR projekciós módszere, amely az ellipszoid algoritmusnál jobb elméleti korlátot ad, de gyakorlati alkalmazhatósága, hatékonysága pillanatnyilag még erősen vitatott. Azaz Karmarkar módszere sem hozta meg az áttörést olyan értelemben, hogy elméletileg és gyakorlatilag is egyaránt hatékony módszert nyerjünk.

Dolgozatunkban GÁCS–LOVÁSZ [2], KHACSIJÁN [4] cikkeire valamint SCHRIJVER [7] könyvére támaszkodva ismertetjük az ellipszoid módszer lényegét.

A továbbiakban a mátrixokat latin nagy betűkkel, a vektorokat kis betűkkel, míg a skalárokat görög betűkkel jelöljük. Egy $A: m \times n$ mátrix sorvektorait $a^{(1)}, \ldots, a^{(m)}$, oszlopvektorait $a_1, \ldots, a_n$, míg együtthatóit α_{ij} jelöli.

Mielőtt rátérnénk az ellipszoid módszer elemeinek tárgyalására, ismertetünk néhány, a továbbiakban felhasznált tételt, illetve meghatározzuk, hogy mit is értünk polinomiális algoritmuson.

Polinomiális algoritmus [7]: Egy algoritmust egy adott feladat megoldására vonatkozóan polinomiális algoritmusnak nevezünk, ha van olyan α konstans és r szám, hogy a feladat megoldásához szükséges műveletek száma a legrosszabb esetben is legfeljebb αs^r, ahol s a feladat méretét jelöli (esetünkben s a változók száma – dimenzió).

A *Caratheodory* tételt nem fogalmazzuk meg precízen, csak megjegyezzük, hogy esetünkben ez azt garantálja, hogy ha egy lineáris egyenlőtlenségrendszernek van megoldása, akkor bázismegoldása is van. (lásd. [6,7])

Hadamar egyenlőtlenség [7]: Legyen $B = (b_1, \ldots, b_n)$ egy $m \times n$-es mátrix. Ekkor

$$\sqrt{\det(B^* B)} \leq \| b_1 \| \times \ldots \times \| b_n \|,$$

és ha $m = n$ (B négyzetes), akkor

$$\det(B) \leq \| b_1 \| \times \ldots \times \| b_n \| .$$

Cauchy–Schwarz egyenlőtlenség [7]: Legyen $c, d \in R^n$, akkor $c^* d \leq \| c \| \cdot \| d \|$ egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha c és d párhuzamosak.

Végül megjegyezzük, hogy lineáris programozási feladatok megoldása ekvivalens lineáris egyenlőtlenségrendszerek megoldásával, így elég ezek megoldására szorítkoznunk. Ugyanis mint az jól ismert, a $\min\{c^* x \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$ és a $\max\{y^* b \mid A^* y \leq c\}$ primál–duál feladatpár megoldása ekvivalens az $\{Ax = b,\ x \geq 0,\ A^* y \leq c,\ c^* x - y^* b \leq 0\}$ lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldásával [1,2,6].

1. Külső és belső korlátok

Ebben a fejezetben egész együtthatókkal adott poliéderekre, és így azok térfogatára adunk külső (felső) és belső (alsó) korlátot. Az együtthatók egész értékűsége nyilván ekvivalens azzal, hogy racionalitást tételezünk fel (a legkisebb közös nevezővel szorozhatunk).

Legyen az A: $m \times n$ mátrix és a $c \in R^n$ vektor egész értékű (azaz α_{ij} és γ_j egész $i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n$), $(m > 1)$. Az általánosság megsértése nélkül feltehető, hogy $\operatorname{rang}(A) = m$.

1.1. definíció: A paraméterek *terjedelmének* a

$$\sigma = | a^{(1)} | \cdot \ldots \cdot | a^{(i)} | \cdot \ldots \cdot | a^{(m)} | \cdot | c | . \tag{1.1}$$

számot nevezzük, ahol $| a^{(i)} |$ az $a^{(i)}$ vektor Euklideszi normáját jelöli. □

Tekintsük az

$$A^* y \leq c \qquad \begin{aligned} Ax &= \Theta \\ c^* x &= -1 \\ x &\geq \Theta \end{aligned}$$

alternatív feladatpárt, ahol $\Theta = (0, \ldots, 0)$. Jól ismert, hogy ezen feladatok közül pontosan az egyiknek van megoldása. A következő lemmában bizonyítjuk, hogy amennyiben valamelyik feladat megoldható, akkor a σ sugarú gömbben is van megoldása.

1.1. lemma:

1° Ha $A^* y \leq c$ megoldható, akkor $A^* y \leq c$; $| \eta_i | \leq \sigma$, $\forall i$ is megoldható. (Minden bázismegoldás ilyen.)

2° Ha $Ax = \Theta$, $c^* x = -1$, $x \geq \Theta$ megoldható, akkor $Ax = \Theta$, $c^* x = -1$, $x \geq \Theta$, $| \xi_j | \leq \sigma$, $\forall_j$ is megoldható. (Minden bázismegoldás kielégíti az utóbbit.)

Bizonyítás: 1° Carathéodory tétele szerint, ha van megoldás, akkor van olyan B bázis és y bázismegoldás is, melyre $B^* y = c_B$, $N^* y \leq c_N$ (itt $A = (B, N)$ és $c = (c_B, c_N)$ jelöléseket használtuk). Jelölje $b^{(i)}$ a B mátrix i-edik sorát. A Cramer szabály szerint

$$\eta_i = \frac{\det(B \setminus b^{(i)}, c_B)}{\det(B)} .$$

A számlálót a Hadamard egyenlőtlenséggel becsüljük felülről, a nevezőt pedig a Leibnitz kifejtéssel alulról, így:

$$| \eta_i | \leq \frac{| b^{(1)} | \ldots | b^{(m)} | | c_B |}{1}$$

(Itt kihasználtuk, hogy A egész értékű mátrix.)
A jobboldalt tovább becsülhetjük felülről triviális módon σ-val, így állításunknak megfelelően $| \eta_i | \leq \sigma$ adódik.

2° Ha van megoldása a feladatnak, akkor a Caratheodory tétel szerint valamely $\bar{B}$ bázisra van $\bar{x}_B$ bázismegoldása is az egyenletrendszernek, azaz $\bar{B} = \binom{B}{c_B}(m+1) \times (m+1)$ méretű mátrix, $\bar{x}_B \in R_+^{m+1}$ melyekre $\bar{B}\bar{x}_B = \binom{\Theta}{1}$ és $\bar{x}_B \geq \Theta$. Ekkor a Cramer szabály szerint

$$\xi_j = \frac{\det\left(\bar{B} \setminus \bar{a}_j, \binom{\Theta}{1}\right)}{\det(\bar{B})} .$$

Hasonlóan az 1° részben elmondottakhoz a számlálót a Hadamard egyenlőtlenséggel becsüljük felülről, a nevezőt pedig a Leibnitz kifejtéssel alulról, így (A egész):

$$|\xi_j| \leq \frac{|b_1|\ldots|b_{m+1}|\cdot 1}{1},$$

aminek triviális felső becslése σ. $\square$

A lemma alapján, a Farkas tétel felhasználásával bizonyítható az alábbi fontos tétel.

1.1. tétel: Ha $A^*y \leq c$ nem megoldható, akkor $A^*y \leq c + \frac{1}{m\cdot n\cdot\sigma}\mathbb{1}$ sem megoldható. ($\mathbb{1} = (1,\ldots,1)$)

Bizonyítás: Ha $A^*y \leq c$ nem megoldható, akkor a Farkas tétel szerint

$$\begin{aligned} Ax &= \Theta \\ c^*x &= -1 \\ x &\geq \Theta \end{aligned}$$

megoldható, ami 2° szerint azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} Ax &= \Theta \\ c^*x &= -1 \\ x &\geq \Theta \\ \xi_j &\leq \sigma \qquad \forall_j \end{aligned}$$

is megoldható. Ez átalakítható az alábbi alakba:

$$\begin{aligned} Ex + Eu &= \sigma\mathbb{1} \\ Ax \qquad &= \Theta \\ c^*x \qquad &= -1 \end{aligned}$$

$$x \geq 0, \quad u \geq \Theta,$$

ahol E az egységmátrix.

Ez a feladat ismét megoldható, de ekkor a Farkas tétel szerint a

$$\begin{aligned} Ez + A^*y + \vartheta c &\leq \Theta \\ Ez \qquad\qquad &\leq \Theta \\ z^*\sigma\mathbb{1} - \vartheta &> \Theta \end{aligned}$$

feladat nem megoldható. Ekkor speciálisan a $\vartheta = -1$ és $z = -\frac{1}{m\cdot n\cdot\sigma}\mathbb{1}$ választással sem megoldható, azaz az

$$A^*y \leq c + \frac{1}{m\cdot n\cdot\sigma}\mathbb{1}$$

nem megoldható, mivel a másik két feltétel a $-\frac{1}{m \cdot n \cdot \sigma}\mathbf{1} \leq 0$ és a $-\sigma\frac{1}{m \cdot \sigma} + 1 > 0$ triviálisan teljesülő feltételbe megy át. □

1. *következmény*: Az $A^* y \leq c$ egyenlőtlenségrendszer akkor és csak akkor megoldható, ha az

$$A^* y \leq c + \frac{1}{m \cdot n \cdot \sigma}\mathbf{1}$$

$$|\,\eta_i\,| \leq \sigma + \frac{1}{m^2 \cdot n \cdot \sigma^2} \qquad \forall i$$

egyenlőtlenség rendszer megoldható.

Bizonyítás: A lemma 1° állítás szerint ha $A^* y \leq c$ megoldható, akkor az $A^* y \leq c$ $|\,\eta_i\,| \leq \sigma$ $\forall i$ rendszer is megoldható. Ekkor nyilván az $A^* y \leq c + \frac{1}{m \cdot n \cdot \sigma}\mathbf{1}, |\,\eta_i\,| \leq \sigma + \frac{1}{m^2 \cdot n \cdot \sigma^2}$, $\forall i$ egyenlőtlenségrendszer is megoldható.

Fordítva, ha $A^* y \leq c$ nem megoldható, akkor a tétel szerint $A^* y \leq c + \frac{1}{m \cdot n \cdot \sigma}\mathbf{1}$ sem megoldható. Ekkor nyilván az $|\,\eta_i\,| \leq \sigma + \frac{1}{m^2 \cdot n \cdot \sigma^2}$, $\forall i$ feltételek mellett sem megoldható. □

2. *következmény*: Ha az

$$A^* y \leq c + \frac{1}{m \cdot n \cdot \sigma}\mathbf{1}$$

$$|\,\eta_i\,| \leq \sigma + \frac{1}{m^2 \cdot n \cdot \sigma^2} \qquad \forall i$$

egyenlőtlenségrendszer megoldható, akkor megoldáshalmaza tartalmaz $\frac{1}{m^2 \cdot n \cdot \sigma^2}$ élű kockát is.

Bizonyítás: Az 1. következmény szerint legyen $\bar{y}$ az $A^* \bar{y} \leq c$ egyenlőtlenségrendszer egy megoldása.
Legyen továbbá $y := \bar{y} + \frac{1}{m^2 \cdot n \cdot \sigma^2}\mathbf{1}$. Ekkor

$$A^* y = A^* \bar{y} + \frac{1}{m^2 \cdot n \cdot \sigma^2} \cdot A^* \mathbf{1} \leq c + \frac{1}{m^2 \cdot n \cdot \sigma^2} \cdot A^* \mathbf{1}$$

De $\mathbf{1}^* \cdot A = a^{(1)} + \ldots + a^{(m)}$ és az egész vektorokra nyilvánvalóan teljesülő $x \leq \mathbf{1} \cdot |\,x\,|$ becslés miatt

$$\mathbf{1}^* \cdot A \leq \mathbf{1}^* \cdot |\,a^{(1)} + \ldots + a^{(m)}\,| \leq \mathbf{1}^* \sum_{i=1}^{m} |\,a^{(i)}\,| \leq$$

$$\leq \mathbf{1}^* \sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{m} |\,a^{(j)}\,| \leq \mathbf{1}^* \cdot m \cdot \sigma\,.$$

Így

$$A^* y \leq c + \frac{1}{m^2 \cdot n \cdot \sigma^2} A^* \mathbf{1} \leq c + \frac{1}{m \cdot n \cdot \sigma}\mathbf{1}$$

ami igazolja állításunkat. □

Ebben a fejezetben egy tetszőleges poliéderhez adtunk egy, megoldhatóság szempontjából vele ekvivalens olyan poliédert, amelynek térfogata már garantáltan pozitív.

2. Ellipszoidok

Ebben a fejezetben egy speciális ellipszoid transzfromációval foglalkozunk. Megmutatjuk, hogy a transzformáció eredményeként kapott ellipszoid tartalmazza az eredeti ellipszoid alkalmas fél–ellipszoid részét, valamint, hogy térfogata kisebb.

Az alábbiakban, az elliposszoidok tulajdonságának vizsgálatakor nem használjuk ki az adatok egész értékűségét.

2.1. definíció: Legyen $z \in R^m$ és P pozitív mátrix. Az R^m m dimenziós Euklideszi tér

$$E = ell(z, P) := \{x \mid (x-z)^* P^{-1}(x-z) \le 1\}$$

halmazát ellipszoidnak nevezzük. □

A z vektort az ellipszoid *centrumának* nevezzük. Ismert, hogy a z ponton átmenő a normálvektorú *féltér* az

$$a^*(x-z) \le 0$$

egyenlőtlenséggel adható meg.

Legyen $E' = ell(z', P')$ az alábbi módon adott:

$$z' := z - \frac{1}{m+1} \cdot \frac{Pa}{\sqrt{a^* Pa}},$$

$$P' := \frac{m^2}{m^2-1}\left(P - \frac{2}{m+1} \cdot \frac{Pa\,a^*P}{a^*Pa}\right).$$

Az alábbiakban belátjuk, hogy az $ell(z', P')$ halmaz valóban ellipszoid, és tartalmazza az $ell(z, P) \cap \{x \mid a^*(x-z) \ge 0\}$ fél–ellipszoidot.

2.1. lemma: P' pozitív definit.

Bizonyítás: Azt kell megmutatni, hogy tetszőleges $x \in R^n$ $(x \ne 0)$ vektorra $x^* P' x > 0$, azaz

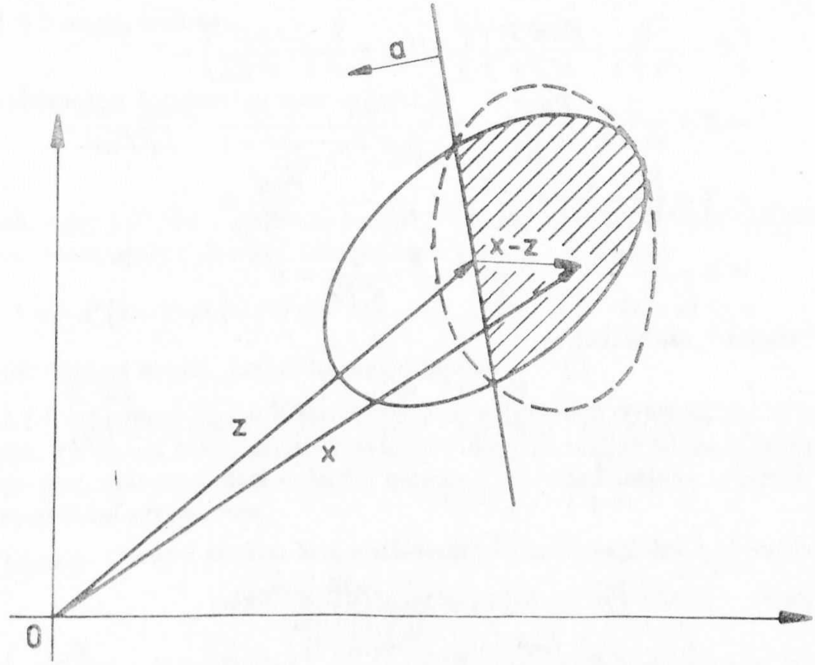
$$x^* Px - \frac{2}{m+1} \cdot \frac{x^* Pa\, a^* Px}{a^* Pa} > 0. \qquad (*)$$

Ehhez, $m > 1$ miatt elég megmutatni, hogy

$$(x^* Px)(a^* Pa) > (x^* Pa)(a^* Px).$$

Mivel P pozitív definit, így van olyan teljes rangú S mátrix, hogy $P = S^* S$. Ekkor a fenti egyenlőtlenség az

$$|\, Sx \,|^2 |\, Sa \,|^2 > ((Sx)(Sa))^2$$



1. ábra.

alakot ölti, ami pedig a Cauchy–Schwartz–Bunyakovszki egyenlőtlenség szerint $Sx \neq \lambda Sa$ esetén fenn áll. Ha $Sx = \lambda Sa$, akkor $x = \lambda a$ és $(*)$ nyilván teljesül. □

2.2. lemma: Az új ellipszoid tartalmazza az eredeti ellipszoid felét, azaz

$$ell(z', P') \supset \{x \mid a^*(x - z) \leq 0\} \cap ell(z, P)\,.$$

Bizonyítás: Legyen x eleme a jobboldalnak, azaz

$$a^*(x - z) \leq 0$$

és

$$(x - z)^* P(x - z) \leq 1\,.$$

Be kell látni, hogy ekkor x a baloldalnak is eleme.
Elemi számolással adódik, hogy

$$P'^{-1} = \frac{m^2 - 1}{m^2}\left(P^{-1} + \frac{2}{m-1} \cdot \frac{aa^*}{a^*Pa}\right),$$

ugyanis

$$\left(P - \frac{2}{m+1}\cdot\frac{Paa^*P}{a^*Pa}\right)\left(P^{-1} + \frac{2}{m-1}\cdot\frac{aa^*}{a^*Pa}\right) =$$
$$= E - \frac{2}{m+1}\cdot\frac{Paa^*}{a^*Pa} + \frac{2}{m-1}\frac{Paa^*}{a^*Pa} - \frac{4}{m^2-1}\cdot\frac{Paa^*Paa^*}{(a^*Pa)^2}$$
$$= E + \left\{-\frac{2}{m+1} + \frac{2}{m-1} - \frac{4}{m^2-1}\right\}\frac{Paa^*}{a^*Pa} =$$
$$= E + \frac{-2m+2+2m+2-4}{m^2-1}\cdot\frac{Paa^*}{a^*Pa} = E\,.$$

Így állításunk igazolásához az

$$\left(x - z + \frac{1}{m+1}\cdot\frac{Pa}{\sqrt{a^*Pa}}\right)^*\cdot\frac{m^2-1}{m^2}\left[P^{-1} + \frac{2}{m-1}\cdot\frac{aa^*}{a^*Pa}\right]\cdot$$
$$\cdot\left(x - z + \frac{1}{m+1}\cdot\frac{Pa}{\sqrt{a^*Pa}}\right) \le 1$$

egyenlőtlenséget kell igazolni a félellipszoidban levő minden x esetén.

Legyen $\alpha := \sqrt{a^*Pa}$ és $\beta := a^*(x-z)$. Ekkor

$$\left((x-z)^* + \frac{1}{\alpha(m+1)}a^*P\right)\left(\frac{m^2-1}{m^2}P^{-1} + \frac{2(m+1)}{m^2\alpha^2}aa^*\right)\left((x-z) + \frac{Pa}{(m+1)\alpha}\right) =$$

$$= \frac{m^2-1}{m^2}(x-z)^*P^{-1}(x-z) + 2\frac{m^2-1}{m^2}\cdot\frac{1}{\alpha(m+1)}(x-z)^*P^{-1}Pa +$$

$$+ \frac{m^2-1}{m^2}\cdot\frac{a^*PP^{-1}Pa}{\alpha^2(m+1)^2} + \frac{2(m+1)}{m^2\alpha^2}(x-z)^*aa^*(x-z) +$$

$$+ 2\frac{2(m+1)}{m^2\alpha^2}\cdot\frac{1}{\alpha(m+1)}(x-z)^*aa^*Pa + \frac{1}{\alpha^2(m+1)^2}\cdot\frac{2(m+1)}{m^2\alpha^2}a^*Paa^*Pa \le$$

$$\le \frac{m^2-1}{m^2} + \frac{2(m-1)}{m^2}\cdot\frac{\beta}{\alpha} + \frac{m-1}{m^2(m+1)} + \frac{2(m+1)}{m^2}\cdot\frac{\beta^2}{\alpha^2} + \frac{4}{m^2}\cdot\frac{\beta}{\alpha} + \frac{2}{(m+1)m^2} =$$

$$= \left[\frac{m^2-1}{m^2} + \frac{m-1}{m^2(m+1)} + \frac{2}{(m+1)m^2}\right] + \left(\frac{2(m-1)}{m^2} + \frac{4}{m^2}\right)\frac{\beta}{\alpha} + \frac{2(m+1)}{m^2}\cdot\frac{\beta^2}{\alpha^2} =$$

$$= 1 + \frac{2(m+1)}{m^2}\cdot\frac{\beta}{\alpha}\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) = 1 + \frac{2(m+1)}{m^2}\cdot\frac{\beta}{\alpha^2}(\alpha+\beta)\,.$$

Így $\beta \leq 0$ miatt, csak az

$$\alpha + \beta \geq 0$$

egyenlőtlenséget kell belátni, azaz azt, hogy

$$\sqrt{a^* P a} + a^*(x - z) \geq 0 \, .$$

Tudjuk, hogy $| S^{-1}(x - z) |^2 = (x - z)^* P^{-1}(x - z) \leq 1$, így a Cauchy–Schwartz–Bunyakovszki egyenlőtlenséget alkalmazva a

$$-\beta = -a^*(x - z) = (-a^* S)(S^{-1}(x - z)) \leq | Sa | \cdot | S^{-1}(x - z) | \leq \alpha \cdot 1 = \alpha$$

egyenlőtlenséget kapjuk, ami állításunkat igazolja. □

A fejezet befejezéseként belátjuk, hogy az új ellipszoid térfogata kisebb mint az eredetié. Ehhez azt a geometriából jól ismert tényt használjuk fel, hogy ellipszoidok térfogatának aránya az őket definiáló mátrixok determinánsainak arányaiból vont négyzetgyökkel egyezik meg.

2.3. lemma:

$$\frac{vol(ell(z', P'))}{vol(ell(z, P))} < e^{\frac{1}{2(m+1)}} \, .$$

Bizonyítás: Mint említettük

$$\frac{vol(ell(z', P'))}{vol(ell(z, P))} = \sqrt{\frac{\det(P')}{\det(P)}} \, .$$

Tudjuk (Rózsa, [8]), hogy tetszőleges nem szinguláris négyzetes B mátrix, b vektor és α skalár esetén

$$\det(B + \alpha b b^*) = (1 + \alpha b^* B^{-1} b) \det(B) \, ,$$

amiből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\det(P') &= \left(\frac{m^2}{m^2 - 1}\right)^m \left(1 - \frac{2}{(m+1) a^* P a} a^* P P^{-1} P a\right) \det(P) = \\
&= \left(\frac{m^2}{m^2 - 1}\right)^m \left(1 - \frac{2}{m+1}\right) \det(P) = \\
&= \left(1 + \frac{1}{m^2 - 1}\right)^{m-1} \left(\frac{m}{m+1}\right)^2 \det(P) = \\
&= \left(1 + \frac{1}{m^2 - 1}\right)^{m-1} \left(1 - \frac{1}{m+1}\right)^2 \det(P) \, .
\end{aligned}$$

Az $1 + x < e^x$ összefüggést felhasználva kapjuk a

$$\det(P') < e^{\frac{m-1}{m^2-1}} e^{-\frac{2}{m+1}} \det(P) = e^{-\frac{1}{m+1}} \det(P)$$

összefüggést. Így

$$\frac{vol(ell(z',P'))}{vol(ell(z,P))} < \sqrt{\frac{e^{-\frac{1}{m+1}}\det(P)}{\det(P)}} = e^{-\frac{1}{2(m+1)}}. \quad \square$$

Megjegyezzük, hogy az $ell(z',P')$ a fent említett fél–ellipszoidot tartalmazó minimális térfogatú ellipszoid. Erre a tényre nem lesz szükségünk a továbbiakban, így ezt nem bizonyítjuk.

3. Az ellipszoid módszer

Ebben a részben ismertetjük az ellipszoid módszert annak eldöntésére, hogy az $A^*y \leq c$ lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldható-e vagy sem.

Ettől a ponttól kezdve ismét szükségünk van arra, hogy az adatok egészek.

Algoritmus:

0. lépés: Adott $A : m \times n$ mátrix, $c \in R^n$. Számítsuk ki az (1.1) képlettel adott σ értéket. Legyen
$ell(z_0, P_0) = ell(\Theta, 2\sigma E)$, azaz a kezdeti ellipszoid a 2σ sugarú gömb.

$(k+1)$ lépés: Ha z_k kielégíti a $A^*z_k \leq c + \frac{1}{mn\sigma}\mathbb{1}$ egyenlőtlenségrendszert, akkor STOP, az $A^*y \leq c$ rendszer megoldható.

– Ha z_k nem megoldása a fenti rendszernek, akkor van olyan j index, melyre

$$z_k^* a_j > \gamma_j + \frac{1}{mn\sigma}.$$

A 2.2 definíciónak megfelelően legyen $a := a_j$.

Ha $k+1 > 2m(m+1)\log(4\sigma^3 m^2 n)$ STOP, az $A^*y \leq c$ rendszer inkonzisztens.

Ha $k+1 \leq 2m(m+1)\log(4\sigma^3 m^2 n)$, akkor legyen $z_{k+1} := z'$, $P_{k+1} := P'$ a 2.2. definíció szerint. Folytassuk a $(k+2)$ lépéssel. $\square$

Mint az 1.1. tétel és 1. következmény mutatja az $A^*y \leq c$ egyenlőtlenségrendszer megoldhatósága ekvivalens az $A^*y \leq c + \frac{1}{mn\sigma}\mathbb{1}$ egyenlőtlenségrendszer megoldhatóságával. Így a fenti algoritmus helyességéhez csak azt kell belátni, hogy ha $2m(m+1)\log(4\sigma^3 m^2 n)$ lépésig eljut az algoritmus, akkor tényleg inkonzisztens az egyenlőtlenségrendszer.

3.1. tétel: Ha a fenti algoritmus $2m(m+1)\log(4\sigma^3 m^2 n)$ lépésig nem talál megoldást, akkor az egyenlőtlenségrendszernek nem is létezik megoldása.

Bizonyítás: Az 1.1. tétel és következményei szerint $A^*y \leq c$ megoldhatósága ekvivalens $A^*y \leq c + \frac{1}{mn\sigma}\mathbb{1}$, $|\eta_i| \leq \sigma + \frac{1}{m^2 n\sigma^2}$ $\forall i$ megoldhatóságával, és az utóbbi tartalmaz $\frac{1}{m^2 n\sigma^2}$ élű kockát is, amelynek térfogata $\left(\frac{1}{m^2 n\sigma^2}\right)^m$.

A fentiekből az is látható, hogy mindkét fent említett poliéder benn van az origó középpontú, 2σ sugarú gömbben, melynek térfogatát $(2\cdot 2\sigma)^m$-el becsülhetjük felülről.

A 2.2. lemma szerint a poliédert minden ellipszoid tartalmazza, amelyet az algoritmus generál. A 2.3. lemma szerint az ellipszoidok térfogata csökken, és N lépés után

$$vol(ell(z_N, P_N)) < e^{\frac{-N}{2(m+1)}} vol(ell(\Theta, 2\sigma E)) < e^{\frac{-N}{2(m+1)}} (4\sigma)^m .$$

Amennyiben ez a térfogat kisebb mint $\left(\frac{1}{m^2 n\sigma^2}\right)^m$, azaz az ellipszoid térfogata kisebb mint a benne lévő kocka térfogata, akkor ellentmondásra jutunk, azaz a poliéder üres.

$$e^{-\frac{N}{2(m+1)}} (4\sigma)^m < \left(\frac{1}{m^2 n\sigma^2}\right)^m$$

$$e^{-\frac{N}{2m(m+1)}} \cdot 4\sigma < \frac{1}{m^2 n\sigma^2}$$

$$e^{-\frac{N}{2m(m+1)}} < \frac{1}{4\sigma^3 m^2 n}$$

$$N > 2m(m+1)\log(4\sigma^3 m^2 n) .$$

Tehát ha $2m(m+1)\log(4\sigma^3 m^2 n)$ lépésnél tovább jutunk úgy, hogy nem találtunk megoldást, akkor a lineáris egyenlőtlenségrendszernek nincs megoldása. □

Ebben a fejezetben algoritmust adtunk annak eldöntésére, hogy az $A^*y \leq c$ egyenlőtlenségrendszer megoldható-e vagy sem. Sajnos algoritmusunk csak az $A^*y \leq c + \frac{1}{mn\sigma}\mathbb{1}$ egyenlőtlenségrendszerhez ad megoldást polinomiális lépésszámban.

A fenti algoritmust felhasználva a következő fejezetben megmutatjuk, miként kereshetünk megoldást is polinomiális lépésszámban az eredeti feladathoz.

4. Megoldás keresése

A harmadik fejezet algoritmusának ismételt hívásával, illetve a Gauss elimináció alkalmazásával polinomiális lépésszámban megoldást találhatunk az $A^*y \leq c$ lineáris egyenlőtlenségrendszerhez.

4.1. tétel: Amennyiben van egy algoritmusunk (pl. az ellipszoid módszer), mely polinomiális lépésszámban eldönti, hogy egy lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldható-e, akkor polinomiális lépésszámban megoldást is kaphatunk.

Bizonyítás: Az eredeti algoritmus legfeljebb n^2-szeri hívásával, és egy egyenletrendszer Gauss eliminációval való megoldásával kaphatunk megoldást.

Az algoritmus:

0. – Döntsük el, hogy az

$$y^* a_1 \le \gamma_1$$
$$\vdots$$
$$y^* a_n \le \gamma_n$$

rendszer megoldható–e. Ha nem akkor kész vagyunk, $A^* y \le c$ nem megoldható.

1. – Ha igen akkor az

$$y^* a_1 = \gamma_1$$
$$y^* a_2 \le \gamma_2$$
$$\vdots$$
$$y^* a_n \le \gamma_n$$

rendszer megoldhatóságát döntsük el az algoritmussal.

Ha nem megoldható, akkor elég az $y^* a_2 \le \gamma_2, \dots, y^* a_n \le \gamma_n$ rendszert megoldani, ugyanis ekkor ennek minden megoldására $y^* a_1 < \gamma_1$. Ebben az esetben $n = n - 1$, és visszatérünk az előző lépésre.

2. – Ha megoldható, akkor az

$$y^* a_1 = \gamma_1$$
$$y^* a_2 = \gamma_2$$
$$y^* a_3 \le \gamma_3$$
$$\vdots$$
$$y^* a_n \le \gamma_n$$

rendszer megoldhatóságát döntsük el.

$\vdots$

k. – Ha megoldható, akkor az

$$y^* a_1 = \gamma_1$$
$$\vdots$$
$$y^* a_k = \gamma_k$$
$$y^* a_{k+1} \le \gamma_{k+1}$$
$$\vdots$$
$$y^* a_n \le \gamma_n$$

rendszer megoldhatóságát döntsük el.

Ha nem megoldható, akkor elég az

$$
\begin{aligned}
y^* a_1 &= \gamma_1 \\
&\vdots \\
y^* a_{k-1} &= \gamma_{k-1} \\
y^* a_{k+1} &\leq \gamma_{k+1} \\
&\vdots \\
y^* a_n &\leq \gamma_n
\end{aligned}
$$

rendszert megoldani, ugyanis ennek minden megoldására $y^* a_k < \gamma_k$. Ekkor $n = n - 1$ és visszatérünk az első lépésre.

k+1. – Ha megoldható akkor az

$$
\begin{aligned}
y^* a_1 &= \gamma_1 \\
&\vdots \\
y^* a_k &= \gamma_k \\
y^* a_{k+1} &= \gamma_{k+1} \\
y^* a_{k+2} &\leq \gamma_{k+2} \\
&\vdots \\
y^* a_n &\leq \gamma_n
\end{aligned}
$$

rendszer megoldhatóságát döntsük el.

⋮

A fenti algoritmus nyilván polinomiális lépésszámban megoldást talál az $A^* y \leq c$ feladatra, ugyanis az utolsó lépésben egy egyenletrendszert kell megoldani.

Így polinomiális lépésszámban nem csak azt tudjuk eldönteni, hogy egy lineáris egyenletrendszer megoldható-e, hanem polinomiális időben megoldást is találhatunk.

Befejezésül megismételjük, hogy az általunk közölt ellipszoid módszer nem az algoritmus legélesebb változata. Célunk a fő gondolatok, a fő lépések olyan, közérthető ismertetése volt, amely lehetőleg csak elemi eszközöket használ fel, és egyetemi előadásban is előadható.

(Beérkezett: 1988. augusztus 10-én.)

Irodalom

1. DANTZIG, G.B., *"Linear Programming and Extensions"*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963.
2. GÁCS, P.–LOVÁSZ, L., "Khacsijan's algorithm for linear programming", *Mathematical Programming Study* 14, (1981) 61–68.
3. KARMARKAR, N., "A new polinomial time algorithm for linear programming", *Combinatorica* 4, (1984) 373–395.
4. KAHACSIJAN, L.G., "A polinomial algorithm for linear programming", *Doklady Akad. Nauk USSR* 244, (1979) 1093–1096.
5. KLEE, V. – MINTY, G.J., "How good is the simplex algorithm?", in: *Inequalities* III. (O.Shisha, ed.) Academic Press, New York, (1972) 159–175.
6. LEDERMANN, W. and VAJDA, S., *Combinatorics and Geometry*. (Handbook of applicable mathematics, Vol. V.) John Wiley and Sons, 1985.
7. SCHRIJVER A., *"Theory of Linear and Integer Programming"*, John Wiley and Sons, 1986.
8. RÓZSA P., *Lineáris algebra és alkalmazásai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1974.

KÖNYVEKRŐL

KERÉKGYÁRTÓ GYÖRGYNÉ–MUNDRUCZÓ GYÖRGY: *Statisztikai módszerek a gazdasági elemzésben.* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1987. 333 o.

A statisztika módszerét felhasználó közgazdászok ismereteik jó részét a Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetemen a statisztika oktatás alapját képező KÖVES–PÁRNICZKY: *Általános statisztika* könyvekből merítették, amelyek mintegy 10 évenként megújulva követték egymást. Ebben a sorozatban új színfoltot jelent KERÉKGYÁRTÓ és MUNDRUCZÓ könyve, amely a MKKE-n folyó mérnökképzés tananyagából kristályosodott ki. Szemléletét tekintve természetesen tükrözi a szerzők egyéni tudományos arculatát, de alapvetően nem tér el az említett könyvektől. Hasonló mondható el anyagáról is: nagy vonalakban ugyanazokat a témákat tartalmazza, mint az említett könyvek, de természetesen több kérdésben lényeges új ismereteket ad. Mivel a könyv terjedelme józanul mértéktartó, nyilvánvaló, hogy ennek ára van: más területeket kénytelen szűkebben, illetve tömörebben tárgyalni. A továbbiakban ismertetésemben elsősorban azokat a pontokat emelem ki, amelyek túlmutatnak közgazdász társadalmunk sztenderd ismeretkörén, illetve más logikával, más megvilágításba helyezik azt.

A könyvben kimondatlanul ugyan, de logikailag kettéválik a két nagy rész: az első öt fejezet leíró statisztikája és a 6–10. fejezetek statisztikai következtetéselmélete. (A két nagy rész terjedelemben is kb. felezi a könyvet.)

Az *1. fejezet* a statisztika tárgyának és alapfogalmainak célszerűen tömör bevezetése után a tárgyalás hangsúlyát az adatok vizsgálatára (beszerzésük, rendszerezésük, feldolgozásuk, pontosságuk) helyezi. Ez nagyon fontos kérdés és csak üdvözölni lehet a statisztika alapkérdéseinek ilyen gyakorlatias megközelítését. Jónak tartom a statisztikai szervezet és publikációs rend rövid leírását és kiváltképp a statisztikai törvény összefoglalását.

A *2. és 3. fejezet* a statisztikai sokaságok egyszerű elemzési eszközeivel foglalkozik. Igen aktuálisnak és elméleti szempontból lényegesnek tartom, hogy ezt a részt a mérési skálák kérdéseinek tisztázásával indítják; ez jó, bár kissé szűkreszabott bevezetője a további tárgyalásnak. A 2. fejezet a minősítéses jellemzők elemzéseit mutatja be. Két nagy módszercsoportot vizsgál: a struktúraváltozás elemzési módszereit (az elnevezés talán nem egészen szerencsés, hiszen pl. a struktúravektorok hajlásszöge és távolsága térbeli összehasonlításra is alkalmasak), valamint a kapcsolatvizsgálati módszereket. Ez utóbbiak közt több olyan módszer ismertetése is megtalálható, amelyeknek összefoglaló magyar nyelvű tárgyalására eddig nem került sor (pl. többdimenziós rangelemzési módszerek).

A *3. fejezet* példamutató következetességgel veszi sorra a mennyiségi sorok elemzésére szolgáló, egyre árnyaltabb képet adó módszereket: táblázatos és grafikus ábrázolás, kvantilisek, középértékek, szóródásvizsgálat, empirikus eloszlások elemzése, egyenlőtlenség- és koncentrációvizsgálat. A könyv szerkezetének valószínűleg előnyére vált, hogy a szerzők csak nagyon röviden érintették a koncentráció mérésének összetett problémakörét, jóllehet kutatási eredményeik e téren messze túlmutatnak az itt leírtakon.

A becsléselméleti és hipotézisvizsgálati kérdéseket tárgyaló *7. fejezet* szemléletesen és didaktikusan igen jól ragadja meg az alapkérdéseket. Emellett bemutat – inkább csak illusztrációszerűen – néhány fontosabb próbát és alkalmazási területeikből is felvillant néhányat. Gyakorlati alkalmazások szempontjából fontosak és viszonylag kevéssé ismertek a minőségellenőrzés kérdései köré csoportosított módszerek, amelyek a mintavétel tervezésére mutatnak be néhány érdekes és hasznos példát (többszörös és szekvenciális mintvétel, jelleggörbék stb). A *8. és 9. fejezet* a korreláció- és regressziószámítás fontosabb problémáit tekinti át, mégpedig az egyszerűbbtől a bonyolultabb felé haladva. Bár ez a tárgyalásmód következetes, jól áttekinthető és szemléletében is igazodik más rokonterületek (pl. ökonometria) tárgyalásához, felmerül a kérdés, hogy nem elég érettek-e a közgazdász- és mérnökhallgatók ahhoz, hogy a regressziószámítást az absztrakció magasabb fokán indítsuk, azaz a többváltozós lineáris modellnél. Ez esetben elkerülhető lenne a félrevezető „Általánosított lineáris regressziós modell" elnevezés, de ami még lényegesebb, tovább lehetne elmenni a regressziószámítás speciális kérdéseinek tárgyalásában, ami ismét csak egybevág a szerzők kutatási eredményeivel.

A *10., befejező rész* az idősorelemzés egyes módszereit mutatja be. Sajnos a hagyományokhoz híven, ez a könyv sem lép túl a determinisztikus modellekre épülő simító és dekompozíciós eljárásokon, amelyek a korszerű idősorelemzésben csak induló lépések lehetnek. Nyilván itt is gyakorlati szempontok vezérelték a szerzőket: a jelenleg alkalmazott főbb módszereket írták le. Ugyanakkor látni kell, hogy a számítástechnika rohamos fejlődésével a bonyolultabb idősorelemzési módszerek is kézzelfogható közelségbe kerültek, így ismertetésük és az oktatásban való tárgyalásuk egyre sürgetőbb feladat.

Mint a fentiekből is látható, a könyv sok olyan témát vet fel, amelyek összefoglaló, tankönyvszerű tárgyalása eddig hiányzott. Szemléletében gyakorlati orientációjú és tömörségre törekszik. A mit és a hogyan kérdéseket állítja előtérbe, míg a miért (részletes magyarázatok, összefüggések, levezetések) némiképp háttérbe szorul. A számítási módok, eljárások leírása a szokásoshoz képest határozottan visszafogottabb, de még mindig tartalmaz általam feleslegesnek és ide nem tartozónak ítélt algoritmikus kérdéseket (pl. a regressziószámítás normálegyenleteinek kétféle megoldása, a logisztikus függvény paramétereinek becslése), holott ezek már egyértelműen a számítástechnika hatáskörébe tartoznak. Igaz ugyanakkor, hogy az itteni megoldás segíti a gyakorlati felhasználást.

A könyvet az elmondottak alapján – az oktatáson túl – azok számára is ajánlhatom, akik a napi közgazdasági gyakorlatban találkoznak statisztikai problémákkal, és igényesen kívánnak válogatni a rendelkezésre álló módszerek széles spektrumából. Ilyen értelemben a könyv kézikönyvként is használható, amit elősegít a jól összeválogatott, részletesen kidolgozott, valós, többnyire mikrogazdasági problémákra épített sok példa, valamint az esetleges további tájékozódást elősegítő irodalomjegyzék.

HUNYADI LÁSZLÓ

TUDOMÁNYOS ÉLET

Az operációkutatás helye és szerepe a módszertani kutatások körében[1]

Bevezetés

Az utóbbi években számos olyan dolgozat jelent meg nemzetközi folyóiratokban [4], [7], [8], ill. az IFORS (International Federation of Operational Research Societies) volt elnökének az üzeneteiben, amelyek arra utalnak, hogy viták vannak az operációkutatási tevékenység megítélése körül, vagy H. MÜLLER-MERBACHNAK, az IFORS volt elnökének a szavaival élve, az operációkutatás különböző kihívásokkal néz szembe a 80-as évtizedben [1]. A kihívások már a múltban is jelentkeztek elsősorban a rendszerelemzés és a politikaelemzés (policy analysis)[2] oldaláról, újabb kihívást az utóbbi időben gyors fejlődésnek indult tudományok, mint például a mesterséges intelligencia [3], [11], a számítástudomány [10], a döntéstámogató rendszerek, szakértői rendszerek [6], jelentenek az operációkutatás számára.

A kihívások jelentős része abból ered, hogy ezek a tudományok azonos módszertani alapra — alkalmazott matematika, matematikai modellezés — épülnek, s nem definiálhatók, nem írhatók körül olyan pontosan, ami lehetővé tenné a kutatási területek és alkalmazások elhatárolását. A pontos definícióra, amíg a vita elméleti síkon folyik nincs szükség, mert egy elméletileg új eredményt, vagy sikeres alkalmazást nem az minősít, hogy azt milyen tudományterületek zászlója alatt hozták létre, hanem az, hogy mi annak a tényleges értéke. A vita mögött azonban esetenként érdekcsoportok húzódnak meg, akik a vita révén és nem tudományos eredmények felmutatásával előnyt próbálnak meg kiharcolni maguknak. Ez káros, mert a tárgyszerűtlen kritika a laikusokban felkeltheti a gyanakvást, s elfordulhatnak egy számunkra egyébként hasznos, jelentős eredményekkel kecsegtető területtől.

Vitára nem csak az ad alapot, hogy bizonyos eredményeket milyen módszertannal oldottak meg, milyen zászló alatt érték el, hanem az is, hogy az alkalmazott módszertani eredmények mennyire számítanak tudományosnak, s ha igen, akkor milyen területhez sorolhatók. Ez a probléma felmerül a „metriák" (biometria, ökonometria, pszichometria stb) esetében is.

Úgy véljük, hogy az alkalmazott matematikai kutatások (operációkutatás, rendszerelemzés, ökonometria, biometria stb.) létjogosultságát nem lehet vitatni. Eredményeikkel nagy mértékben hozzájárultak a tudomány fejlődéséhez, törvényszerűségek felismeréséhez, gyakorlati problémák megoldásához s szerepük a jövőben még növekedni is fog a tudományterületek éles határvonalainak elmosódásával, az egyre összetettebb, bonyolultabb rendszerek vizsgálatára való törekvés következtében. A matematika alkalmazásának széleskörű elterjedése természetes, ha a matematikának azt a szerepét tekintjük, hogy

---

[1] A dolgozat a XVII. Magyar Operációkutatási Konferencián hasonló cimmel elhangzott plenáris előadás átdolgozott változata [12].

[2] A politikaelemzés helyett talán jobb elnevezés lenne a stratégia elemzés, azonban *A rendszerelemzés kézikönyvének* magyar fordításában ez a kifejezés szerepel, így indokolatlan lett volna azon változtatni.

a matematika a szaktudományok „közös nyelve", amelynek felhasználásával a különböző tudományok problémái azonos nyelven, azonos rendszerben írhatók le.

A matematikának ezt a szerepét azonban fontos kihangsúlyozni, s a tudományos eredmények számbavételekor is megfelelően értékelni. Nem az a cél, hogy a tudományok élesen elhatárolásra kerüljenek, ez az alkalmazott módszertani jellegű kutatásoknál elképzelhetetlen, hanem az, hogy az eredmények, s azon belül a közreműködő tudományágak képviselői megfelelő elismerést kapjanak.

Ezen alapelvekről indulva a dolgozat célja az, hogy nemzetközileg elismert kutatók, tudósok megállapításaira támaszkodva áttekintést adjunk az opeációkutatás — rendszerelemzés — politikaelemzés kapcsolatáról, valamint az operációkutatás, és ezen keresztül más módszertani kutatások tudományos megítéléséről.

Remélem, hogy a dolgozat elősegíti a problémák jobb megismerését, a közös gondolkodást, a megoldásokhoz vezető út megtalálását.

Mi az operációkutatás?

Az operációkutatásnak több definíciója van, amelyek közül itt kissé lerövidítve az IFORS megfogalmazását adjuk meg [5]:

„Az operációkutatás bonyolult rendszerek tervezési és irányítási problémáinak megoldását szolgáló tudományos módszertan... Az operációkutatási tevékenységben nagy szerepe van a tapasztalatnak és annak, hogy milyen analítikus módszertant sikerült kifejleszteni, illetve adaptálni, továbbá ezek révén milyen eredményesen tudjuk a logkai implikációkat felismerni.

A gyakorlati operációkutatás olyan csoportmunka, mely szoros kooperációt kíván a döntéshozók, a képzett operációkutatási szakemberek, továbbá azok között, akik a rendszerrel kapcsolatos akcióban valamilyen módon részt vesznek".

Ez a definíció azt jelenti, hogy az operációkutatás szélesebb értelmezést kap a matematikai modellezésnél, mert az operációkutatókra hárul a gyakorlati alkalmazások felderítése és megoldása a probléma feltárásától kezdve a modellépítésen keresztül azok számszerű megoldásáig, sőt sok esetben az eredmények értelmezése is.

Ebből az általános definícióból következik a sok bizonytalanság, az eredmények tudományos besorolásának problémája.

Tulajdonképp ez a viták egyik fő forrása, ahogy arra H. MÜLLER-MERBACH: „Ki aratja le gyümölcseinket?" című elnöki üzenetében rámutat [2]:

„Az operációkutatás valóban haszontalan a gyakorlatban? Aktualitását vesztette néhány sikertelen alkalmazás miatt? Meghalt vagy haldoklik? Az ellenkezője igaz: az operációkutatók minden fontos és releváns eredménye nagy számban kerül alkalmazásra, azonban sajnos gyakran nem az operációkutatás zászlója alatt. Ez vonatkozik mind az operációkutatás módszertanára, mind a technikájára.

Az operációkutatás *módszertana* jelenik meg sok fontos gyakorlati alkalmazásban és akadémiai diszciplinában, amelyek zászlójára a rendszerkutatás, rendszertudomány, rendszerszervezés stb. elenevezést irták."

„Az operációkutatás *technikáját* nagyon sikeresen alkalmazták számos esetben. Ezek közül sokat részben, vagy egészében operációkutatók fejlesztettek ki, de ezek alkalmazásakor sok esetben nem kerül említésre az operációkutatás."

Ezek között említhetők meg többek között
- a hálózati elemzések /CPM, PERT/,
- a gráfelméleti technikák,

– a dinamikus programozás,
– a szimulációs modellezés, stb.
számos eredménye.

„Aki becsületes az nem mondja, hogy az operációkutatás haszontalan, de maguk az operációkutatók sem fejtenek ki elég hatást, eredményeik gyakorlati elismertetésére. Az operációkutatás technológiájának és methodológiájának számos elemét dolgozták ki az operációkutatók, vagy befolyásolták. Azonban úgy tűnik, hogy az operációkutatók nem fordítanak elég gondot saját gyümölcseik betakarítására."

H. MÜLLER–MERBACH előző elnöki üzenetében a „rendszer" tudományokat emeli ki, de a „kihívás" fokozódhat új tudományágak rohamos fejlődésével párhuzamosan [1]:

„A 80-as évtizedet az operációkutatással szembeni kihívás időszakának lehet tekinteni. Hathatós technikai eszközeink vannak, de e téren verseny jelentkezik az információs folyamatok, a mesterséges intelligencia, a logisztika, robottechnika valamint a technológia és automatizáció különböző ágai felől. Mi alapozhatunk az értékeinkre, interdiszciplinaritásunkra, de elég gyakorlottak vagyunk-e ezen a téren?

A problémák legkülönbözőbb fajtája vár megoldásra, melyekben az operációkutatók társadalma közreműködhet".

Az előző idézetekből láthatóan a fő probléma abból adódik, hogy az operációkutatást se mint tudományt, se mint tevékenységi kört nem lehet pontosan meghatározni. Vámos Tibor akadémikus az operációkutatást „nem jól meghatározott diszciplinaként jellemezte", s felhívta a figyelmet arra, hogy „nem szabad a merev lehatárolásra törekedni" [3].

Hasonló elvből indult ki R. TOMLINSON is [4] aki „Az operációkutatással és alkalmazott rendszerelemzéssel kapcsolatos néhány veszélyes téveszme" című cikkében foglalkozik az operációkutatás értelmezésével. TOMLINSON úgy fogalmaz dolgozatában, hogy vannak akik megpróbálják néhány kategóriába sorolni a világot, s ez nagyon veszélyes dolog. Ő nem is tesz különbséget az operációkutatás (OR) és alkalmazott rendszerelemzés (ASA) között, s ezeket együttesen ORASA-nak nevezi, aminek definiálásával kapcsolatban írja:

„Vannak akik hamisan egy egyszerű definícióval vagy néhány állítással próbálják meg jellemezni. Ezek vagy dogmatikus kijelentések, vagy olyan édeskések, hogy nincs információtartalmuk, éppen ezért veszélyesek. A túlzások a legveszélyesebbek, mert bár

– sok elemét tartalmazhatják az igazságnak, de
– azt mondják amit a hallgató hallani akar."

Az operációkutatás IFORS által elfogadott definíciója számos nyitott kérdést hagy, mint ahogy azt az idézetek is igazolják. A továbbiakban ezek közül hármat fogunk részletesebben elemezni:

– körülhatárolható-e az a szakterület, aminek az operációkutatás a módszertana?

– mi a kapcsolata az operációkutatásnak a matematikához? (módszertan vagy elmélet?)

– tudomány-e az operációkutatás, vagy tudományosan megalapozott tevékenység?

Operációkutatás – rendszerelemzés – politikaelemzés

Az operációkutatást nem lehet egyértelműen valamilyen tudományterület módszertanának tekinteni, mint például az ökonometriát, vagy pszihometriát. Az operációkutatás módszertanát széles körben alkalmazzák, s az alkalmazási területek és a módszertan folyamatosan bővül.

Az operációkutatás elnevezés eredetileg bizonyos katonai műveletekkel kapcsolatos kutatások módszertanának megjelölésére szolgált. Majdnem egyidőben született a rendszerelemzés elnevezés, amivel nem a módszertani különbséget akarták kifejezni, hanem azt, hogy „bonyolultabb rendszerek" viselkedését elemezték [8]. Ezek a határok később elmosódtak.

A bemutatott idézetek is igazolják, hogy az operációkutatás definíciója nem teszi lehetővé egy tudomány-, ill. tevékenységi terület pontos körülhatárolását. A társadalmi problémák vizsgálatának szükségessége bővítette a megoldandó kérdések körét, s az alkalmazott módszertant is, ami elvezetett a politikaelemzés kialakulásához.

A rendszerelemzés és politikaelemzés mellett módszertani kutatások jellemzésére gyakran használják a döntéstámogató módszerek, szakértői rendszerek elnevezéseket is. Ezek még kevésbé definiáltak, mint az előzőek, s ezért a továbbiakban ezekkel részletesebben nem foglalkozunk. Egy-egy mondattal jellemezzük az operációkutatással való kapcsolatukat.

A döntéstámogató módszertant (DSS) J. ZIONTS, a Buffaló Egyetem professzora a következőképp jellemezte a „Döntéstámogató kontra szakértői rendszerek" témájú vitában [6]: „az operációkutatás és DSS között az a különbség, hogy az első elnevezést 40 éve találták ki, az utóbbit csak pár évvel ezelőtt".

VÁMOS TIBOR „Operációkutatás és szakértői rendszerek" című előadásában [3] a követlezőképp fogalmazott:[3]

- az operációkutatás disszciplina, a mesterséges intelligencia, a szakértői rendszerek pszeudódisszciplina;
- az operációkutatás matematikai modellek megoldási technikája, matematikailag megfogalmazható rendszerek vizsgálata, míg a mesterséges intelligencia körében alapvető probléma az, hogy lazán megfogalmazott feladatból hogyan lehet modellt építeni.

A rendszerelemzés és politikaelemzés jellemzésére, meghatározására ezen tudományok vezető szakembereitől, ideológusaitól idézek. E.S. QUADE és H.J. MISER A rendszerelemzés környezete, jellege és felhasználási területei c. tanulmányukban írják [7]:

„A rendszerelemzés, mint elnevezés viszonylag új – de nem új fogalom és nem új tevékenység. A történelem számos múltbeli elemzési erőfeszítésről tesz említést, amelyeket – ha ma folynának – rendszerelemzésnek neveznénk. A rendszerelemzés keletkezése, ahogy azt ebben a könyvben értelmezzük (legalábbis az Egyesült Államokban, ahol az ötvenes években széleskörűen elterjedt a honvédelmi és űrhajózási iparágakban és azután a hatvanas években a szövetségi kormány által finanszírozott más területeken is), a negyvenes évek végére tehető. Az elnevezést 1957-ben fogadták el, hogy különbséget tudjanak tenni az akkori időkben végzett és az Egyesült Államok légierejének jövőbeni fegyverzetrendszereire irányuló kutatás és az operációkutatás között. A munka nem operációkutatás volt (ahogyan azt akkoriban értelmezték), mert mind a rendszerek céljait, mind erőforrásigényeit meg kellett határozni, valamint azt a környezetet is előre kellett jelezni, amelyben az elképzelések szerint majd működniük kell. Ezeket a vizsgálódásokat rendszerelemzésnek nevezték, miután jól meghatározott rendszerekre vonatkozó döntéseket érintettek. Azonban annak, hogy egy elemzés egy rendszerrel foglalkozott, nem volt jelentősége sem felépítése, sem az operációkutatástól eltérő módszere szempontjából. A különbséget részben az jelentette, hogy be kellett vonni hosszú távú gazdasági tényezőket és hogy foglalkozni kellett az eszközök és célok kölcsönhatásaival, amelyek akkoriban nem tartoztak az operációkutatás körébe. Mára azonban az operációkutatás kibővült ezeknek a megfontolásoknak a számbavételével és a rendszerelemzéssel együtt foglalkozik a méltányosság és más politikai és társadalmi érdekek szempontjaival is.

[3] tartalmi idézet

A rendszerelemzés, ahogyan ebben a kézikönyvben jellemezzük, és az operációkutatás – ahogyan ma egyesek nagyvonalúan definiálják – lényegében ugyanaz. A költség–haszon elemzés, a rendszertervezés és a normatív modellezés tekinthető a rendszerelemzés egy formájának is, de a gyakorlatban ezek általában szűkebb körre korlátozódnak. A problémák megoldásában a fenti tevékenységek mind ugyanazt az általános megközelítést alkalmazzák. A rendszerelemzéshez hasonlóan felhasználják számos tudományág ismereteit, mint például a közgazdaságtant, a statisztikát és a valószínűségszámítást; egyazon eszköztárra támaszkodnak (lineáris programozás, sorbanállási elmélet és a számítógép, hogy csak néhányat említsünk); és, ha a szükség úgy kívánja, olyan eljárásokat alkalmaznak, mint az előrejelzési modellezés. Így hát amikor a soron következő fejezetekben rendszerelemzésről beszélünk, mások talán más elnevezést használnának; az Egyesült Államokban lehetne politikaelemzés és az Egyesült Királyságban talán operációkutatás."

A fenti megfogalmazásból egyértelműen következik, hogy a rendszerelemzés és az operációkutatás között lényeges különbség nincs, a megkülönböztetés nem lényegi indíttatású, hanem a kutatási módszertan kialakulásakor konkrét tevékenységek elhatárolására szolgált.

A következő idézet a politikaelemzés és a rendszerelemzés jellemzését szolgálja az előbb idézett dolgozatból:

„A rendszerelemzés gyakran bizonyult eredményesnek olyan kérdések megoldásában, melyekben a tudomány és a technika dominál, így számos ipari és katonai területen. A felelősség e területeken általában világos, a döntéshozók késznek az együttműködésre és rendszerint meg vannak győződve arról, hogy az elemzés inkább előmozdítja, semmint bonyolítja a helyzetet.

Ezzel szemben ha politikai, szervezeti és társadalmi tényezők dominálnak, a célok politikai jellegűek (amelyek nehezen mérhetők), a felelősség megoszlik és átfedő (és a döntéshozók általában nem bíznak abban, hogy az elemzés segítségükre lehet a megoldásban).

Emellett ezekben a kérdésekben a hatékonyságnak és eredményességnek nem egyértelmű a jelentése; a méltányosság kérdése, vagyis az, hogy „ki jár jól" és „ki fizet", nagyobb súllyal jöhet szóba egy javasolt megoldás elfogadásánál, mint a költségek és hozamok aránya. A „hogyan" kérdés eldöntésénél felmerülő nehézségek eltörpülnek azokhoz képest, amelyek a „mit kellene tenni" vonatkozásában felmerülnek. Mindazonáltal a rendszerelemzés már ebben is tud segíteni — még akkor is, ha nem kínál teljes megoldást — azáltal, hogy információt szolgáltat, hogy elkülöníti az alternatívákat és hogy betekintést nyújt olyan tényezőkbe, amelyek a döntéshozókat képessé teszik jobb megoldások ösztönös megérzésére. A rendszerelemzés ez utóbbi típusát ma politikaelemzésnek nevezik, különösen az Egyesült Államokban, részben azért, hogy elkerüljék összetévesztését a „rendszerelemzés" kifejezés speciális értelmezésével, ami az irodai irányításra és a számítástechnikai alkalmazásokra vonatkozik."

Az idézett megfogalmazás mutatja, hogy a politikaelemzés meghatározás nem kimondottan szakmai, módszertani elkülönítésen alapul, hanem részben a vizsgálat tárgya szerint, részben a döntési folyamatban elfoglalt hely szerint. Ezt támasztja alá még a következő két rövid idézet is, amit G. MAJONE [8] fogalmazott meg „A rendszerelemzés fejlődéstörténeti megközelítése" c. tanulmányában:

„A politikaelemzésnek a rendszerelemzéstől való megkülönböztetésére tett kísérletek különböző vonalakat követnek. Két fő irányt különböztethetünk meg. Az egyik irányzat szerint a politikaelemzés kitágított rendszerelemzés — abban az értelemben, hogy a probléma műszaki és gazdasági szempontjain túl magában foglalja a politikai szempontokat is."

„A másik irány, amerre a rendszerelemzés és a politikaelemzés közötti megkülönböztetést keresték, egészen más, miután ez inkább az elemzőt nem annyira problémamegoldónak vagy tanácsadónak tekinti, hanem inkább csoportos döntéshozatali eljárások tervezőjének és katalizátornak a megvalósítási folyamatban."

Minden további kommentár nélkül idézzük még G. MAJONE előbb idézett cikkének egy megállapítását, ami alapját képezheti a jövőbeli együttműködésnek, közös útkeresésnek:

„Az operációkutatás, a rendszerelemzés és politikaelemzés közötti terminológia megkülönböztetés — jóllehet ezek meglehetősen mindennapi fogalmak az angol nyelvterületeken — semmi esetre sem általánosan elfogadott és használatos. Sok országban egyetlen elnevezés, az „operációkutatás" vonatkozik az elemzésnek itt megkülönböztetett mindhárom fokozatára. Ilyen esetben az „operációkutatás" pontosan ugyanazt a fogalmat fedi, mint a „rendszerelemzés".

A rendszerelemzés ideológusaitól vett idézetek azt mutatják, hogy az operációkutatás (rendszerelemzés, politikaelemzés) diszciplinájának viszonylag tág körülhatárolása nem indokolja viták kezdeményezését, mert azonos alapra épülő módszertani irányzatról van szó, s különbséget legfeljebb a vizsgálat tárgyában, behatárolásában lehet találni.

Az operációkutatás és a a matematika kapcsolata

Az IFORS az operációkutatást problémák megoldását szolgáló tudományos módszertanként definiálja, majd az operációkutatási tevékenységről beszél. Ez a megfogalmazás felveti azt a kérdést, hogy az operációkutatás tudomány-e, vagy tudományos tevékenység, s mi a kapcsolata a matematikával.

A választ talán a legkifejezőbb módon egy látszólagos tautológiával adhatjuk meg: az operációkutatás tudományos alapokon folyó tevékenység, aminek módszertana az opeációkutatás.

Ennek a látszólagos ellentmondásnak a feloldásához az operációkutatás kezdeti időszakához kell visszanyúlni. Az operációkutatás kialakulása a 40-es évekre nyúlik vissza, amikor is elsősorban katonai műveletek optimalizálását szolgálta. Az 50-es években dolgozták ki az operációkutatás alapjait. Ez a gyorsan fejlődő matematikai terület is az operációkutatás elnevezést viselte, s a 60-as években, amikor „akadémiai" diszciplinává vált, ezen a néven nyert elfogadást. Egyetemi tanszékek, tudományos társulatok alakultak, folyóiratokat jelentettek meg. Ezek nagyrészt a matematikához kötődtek, s kötődnek még ma is. Erre jó példa a hazai helyzet is.

Magyarországon az operációkutatás oktatását a matematikai, számítástechnikai tanszékek végzik, kivéve a szaktárgyakhoz kötődő alkalmazásokat. Az operációkutatás oktatás gyakorlatilag a matematikai módszertanra redukálódik (elsősorban a lineáris programozás, szállítási feladat, konvexprogramozás stb.). A hallgatók kevés alkalmazással, modellépítéssel találkoznak s ennek tudható be az, hogy az operációkutatást azonosítják a matematika egy ágával.

Az operációkutatók jelentős része nem a matematika talajáról indul. Ezt igazolja az operációkutatási konferenciák szakmai összetétele is. Eredményeikkel elsősorban az alkalmazások körét bővítik. Általában kevés közöttük az olyan munka, amelyik nem a standard eszközrendszert használja, hanem újszerű modellépítéssel a módszertant is gazdagítja. A probléma alapvetően abból fakad, hogy a matematikus operációkutatók nagy része távol áll a szaktudományoktól, a szaktudományok képviselőinek zöme pedig nem ismeri olyan mértékig a matematika nyelvezetét, hogy alkotó együttműködést tudjanak kialakítani, olyan új modelleket alkossanak, ami a módszertant is gazdagítja, ami természetesen visszahat a matematikai apparátus fejlődésére.

A matematikai módszertan egyre keményebb lesz, egyre több ismeretet tételez fel, s így ha nincs megfelelő együttműködés a matematikusok és a szaktudományok képviselői között, akkor a két irányzat egyre jobban távolodik egymástól. E folyamatot bizonyos szempontból az is elősegíti, hogy a rosszul struktúrált döntési feladatok kezelésére, támogatására kialakulóban van egy „soft" módszertani irányzat, amely viszonylag kevés matematikai ismeretet tételez fel. Áttekintése, megértése, kevesebb fáradtsággal jár s ezért a nem kvantifikálható döntési problémák vizsgálata terén gyorsan terjed.

Ezt a viszonylagos népszerűséget, a jó személyi számítógépes szoftver támogatást használják ki időnként annak igazolására, hogy az operációkutatás idejét múlta. Ez hibás és veszélyes alapállás. Hibás azért, mert nincs kizárólagosan mindenre jó módszertan, a feladathoz kell megválasztani az adekvát módszertant és nem azt ráerőszakolni a problémára.

A szembeállítás veszélye elsősorban abban van, hogy a potenciális felhasználók körében, akik nem jártasak a módszertanban, hamis reményeket ébreszthetnek, ami eltávolíthatja őket a nehezebben érthető és alkalmazható módszerektől, s ezáltal a valós megoldástól.

Összefoglalóan megállapítható, hogy az operációkutatás módszertani alapját a matematika képezi, s az operációkutatási tevékenység egyik magva a modellépítés. Feladattól és ismereteinktől függően a modell lehet logikai vagy matematikai. Ezek használata nem kizárja, hanem kiegészíti egymást, az előrelépés útja az, ha a két irányzat képviselői nem egymás ellen dolgoznak, hanem eredményeiket ötvözve fejlesztik a módszertant és tágítják a megismerés, az alkalmazások körét.

Tudomány-e az operációkutatás

A matematika és az operációkutatás kapcsolatának a vizsgálata ráirányítja a figyelmet arra is, hogy az operációkutatás helye a tudományok klasszikus diszciplináris rendjében nem tisztázott. Sokan és sokszor felvetették már azt a kérdést, hogy mennyiben tudomány az operációkutatás. R. TOMLINSON [4] a már idézett tanulmányában az ORASA-t hét féligazsággal jellemzi, s ezek közül az egyik a tudománnyal való kapcsolata. A következőket írja:

„Az ORASA tudományos módszertan, mert logikus, valós adatokra épül, objektív és verifikálható... A tudományos módszertan nem jelenti azt, hogy tudomány is, mert a tudomány egymástól elkülöníthető ismeretek összességét jelenti. Nem tisztán matematika, bár sok helyen az oktatásban mint a matematika egy ágát tanítják... Az ORASA gyakorlat nem jelenti azt, hogy művelője egyben tudósa is a vizsgált területnek. Elképzelhető ez is, de ez nem mindig előny a számára."

TOMLINSON a jövő tudóseszményképének a Leonardo da Vinci típusú kutatókat tartja. G. MAJONE [8] megállapítása a következő:

„... újra és újra felmerül a kérdés, milyen mértékben tudomány a rendszerelemzés (vagy operációkutatás vagy vezetéstudomány). Ami a hagyományos igényt illeti, hogy tudománynak tekintsék, mindig szembekerül egy feloldhatatlannak látszó ellentmondással: ha a rendszerelemzés tudomány, akkor nem az a feladata, hogy javasoljon vagy előírjon bizonyos cselekvéseket, hanem az, hogy tudományos magyarázatot és előrejelzéseket adjon; ha viszont arra törekszik, hogy akciókat irányítson, meggyőzőnek kell lennie és előírásokat kell adnia, tehát nem lehet tudomány — a tudományos eljárásra vonatkozólag elfogadott nézet alapján semmiképpen sem. Néhány szerző megpróbálta ezt a dillemmát azzal az érveléssel feloldani, hogy a rendszerelemzés „tudományosan megalapozott" tanácsokkal szolgál. Ez az érvelés azonban alapvetően téves, mert — amint erre Hume két évszázaddal ezelőtt rámutatott — nincs logikai híd a „kellene" és a „van" között.

Az operációkutatást sokan a „mérnöki tevékenységhez hasonlítják, mivel nemcsak elméletekkel foglalkozik, hanem választással és cselekvéssel is, szoros együttműködésben a választásért és akcióért felelős személyekkel". Az igazság ebben az esetben is többarcú. Aki a matematikai módszertannal azonosítja az operációkutatást, az joggal tartja azt tudománynak épp úgy, ahogy tudomány az algebra, az analízis, a valószínűségszámítás stb.

Ha az operációkutatásnak a szélesebb értelmezését fogadjuk el, akkor más a helyzet. Az operációkutatás matematikai elméletének a besorolásán ez nem változtat. Az operációkutatási tevékenység ebben az esetben valóban hasonlítható a mérnöki, tervezői tevékenységhez, amely azonban mindenképp alkotó tevékenységnek tekintendő, újat hoz létre, eredménye közvetve, vagy közvetlenül gazdasági hasznot eredményez, esetleg hozzájárul a tudomány fejlődéséhez. Ez az interdiszciplináris alkotó tevékenység az, aminek jelenleg a tudományok rendszerében nincs kialakult helye. VÁMOS TIBOR [3] akadémikus is ugyanerről a problémáról szól a mesterséges intelligencia — szakértői rendszerek vonatkozásában. Az alkotómunka tudományos elismerésének, még ha az klasszikus értelemben nem is tudomány, alapvető feltétele az, hogy az adott tudományok művelői tudják, hogy hova tartoznak, ne érezzék magukat a periférián. Ez szükséges ahhoz, hogy a pálya vonzó legyen, magas színvonalú kutatói műhelyek alakuljanak ki, amit elérni csak akkor lehet, ha az azonos problémákkal küszködő területek képviselői összefognak, s magas színvonalú kutatási és alkalmazási eredményekkel bizonyítanak is.

Erre fokozottan szükség is lesz a jövőben, ha a siker reményében akarnak szembenézni azokkal a kihívásokkal, amelyeket J. LESOURNE Az operációkutatás és annak jövője c. elnöki üzenete [9] tartalmaz. J. LESOURNE öt pontban foglalja össze az operációkutatás előtt álló kihívásokat:

- alkalmazkodni a tudományos ismeretek terén végbemenő fejlődéshez;
- részt vállalni a nagy technológiai fejlődésben;
- a társadalmi változások alkotó részeseivé válni;
- hatékonyan résztvenni a világ növekvő összefüggés-rendszeréből adódó problémák megoldásában, s végül
- segíteni az emberiséget abban, hogy megőrizze a közös örökséget, ami nem csak a nem megújítható erőforrásokra vonatkozik, hanem az ökológiai, biológiai kulturális és történelmiekre is.

2000-ben 6 milliárd ember él majd a Földön, s az operációkutatás hatása jelentőssé válhat. De az, hogy ez megtörténik-e, vagy sem, az nagyrészt tőlünk függ.

HARNOS ZSOLT

Irodalom

1. H. MÜLLER-MERBACH: The five decades of operational research. IFORS, Letter from the president No. 27. 1988.
2. H. MÜLLER-MERBACH: Who are those who harvest our fruits? IFORS, Letter from the president No. 31. 1985.
3. VÁMOS T.: Operációkutatás és szakértői rendszerek. XVII. Magyar Operációkutatási Konferencia. Balatonfüred 1987.
4. R. TOMLINSON: Some dangerous misconceptions conserning operational research and applied systems analysis. *European J. of Operational Research* 7 (1981).
5. Az operációkutatás tudománya és hazai helyzete. Az MTA Operációkutatási Bizottság helyzetelemző tanulmánya. MTA. 1984.
6. Methodology and software for Interactive Decision Suppport. IIASA Workshop, Albena 1987.
7. E.S. QUADE és H.J. MISER: A rendszerelemzés környezete, jellege és felhasználási területei.

8. G. MAJONE: A rendszerelemzés fejlődéstörténeti megközelítése. [7] és [8] H.J. Miser és E.S. Quade (szerk.): *A rendszerelemzés kézikönyve*, MAREB Budapest, 1986. kötetben jelent meg.
9. J. LESOURNE: Operational research and its futures, IFORS, Letter from the president No. 1. 1986.
10. H. MÜLLER–MERBACH: Operational research and computer science, IFORS, Letter from the president No. 25. 1985.
11. H. MÜLLER–MERBACH, D.B. HERTZ: Operational research and artificial intelligence, IFORS, Letter from the president. No. 26. 1985.
12. HARNOS ZS.: Az operációkutatás helye és szerepe a módszertani kutatások körében. XVII. Magyar Operációkutatási Konferencia, Balatonfüred 1987.

Beszámoló a fiatal matematikus–közgazdászok 1987. évi konferenciájáról

(Szeged, 1987. szeptember 24–26.)

Az MKT matematikai–közgazdasági szakosztálya harmadik alkalommal szervezte meg a 35 éven aluli, a matematikai közgazdaságtan iránt érdeklődő fiatalok szakmai szemináriumát.

Az eddigiektől eltérően idén két vezértémája is volt a szemináriumnak: az egyik az új ár- és adórendszer, a másik a vállalati viselkedés modellezhetősége. A szervezők számára az első meglepetés az volt, hogy a két, igencsak aktuális téma ellenére hihetetlenül kevés modellezési munkát sikerült felkutatni, pontosabban: feltűnően kevesen vállalták ezzel kapcsolatos kutatásaikat, számításaikat. Végül is több előadót csak hosszas rábeszéléssel sikerült meggyőzni. Ettől függetlenül is kevesen voltak az önként jelentkező előadók, úgy tűnt a piac igencsak pang, a szakma válsága meglehetősen súlyos. Valószínű, hogy 1988-ban nem is lesz érdemes a konferenciát megszervezni, inkább 1989-ben lehet ismét kísérletezni.

Az idei találkozón végülis 21-en vettünk részt és három szekcióban 8 előadást hallgattunk meg. Szeniorként — szekcióvezetőként — *Simon András, Hunyadi László* és *Kovács Álmos* segítették munkánkat.

Az első szekció foglalkozott az új adó- és árrendszerrel kapcsolatos számításokkal. *Lux Erika* az Árhivatal, *Győri István* pedig a Pénzügyminisztérium keretében folytatott — az általános forgalmi adóra való áttérésre vonatkozó, illetve a személyi jövedelemadó bevezetése miatt szükséges bérbruttósításra vonatkozó — elemzésekről számoltak be. Az ismertetett két modell egymásnak ikertestvére: mindkettő hagyományos ÁKM bázisú és alsó szárnybeli elemekre vonatkozó megszorítások esetén keresi a merev technológia mellett kialakuló egyensúlyi megoldást. A korlátozó feltételt mindkét számítássorozatban bizonyos jövedelmezőségi kritériumok jelentették, a lényeges eltérés a két modell között dezaggregáltsági fokukban volt.

A közönség meglehetős kritikával fogadta az előadásokat. A kifogások egy része *szakmai*, más része *etikai* jellegű volt. A szakmai kifogások az input/output bázisú ármodellezés ismert korlátait támadták: nincs helyettesíthetőség, nincs kölcsönös ár–volumen hatás, a paraméterek kis elmozdulására a megoldás nagyon érzékeny lehet. Ez a típusú árszámítás hasonló feladatok megoldásakor hasznos lehet (sok szektorra vonatkozó kényelmes becslés), de feltétlenül szükséges más feltételezéseken nyugvó, talán nehézkesebb, ám szakmailag igényesebb módszerekkel bizonyos típusú kontrollszámítások elvégzése.

A szakmainál nagyobb vihart kavart az etikai kérdések felvetése. Mennyiben lehet a modellező a gazdaságpolitika kiszolgálója? Célszerű-e, ha a nem is túlságosan modern, de itthon még mindig csillogónak tűnő módszerek alkalmazásával növeljük a gazdaságirányító bürokrácia amúgyis meglevő omnipotencia érzetét, ha valóban már magunk is elkezdjük hinni, hogy „minden pontosan kiszámítható"? Mennyiben vagyunk urai és mennyiben rabjai saját eszközeinknek? Miközben megrendelőinket igyekszünk elkápráztatni, nem káprázunk-e el magunk is, és kezdünk előbb-utóbb hinni abban, amiről eleinte józan eszünkkel még tudtuk, hogy csak délibáb?

A viharos első napot a meghívott vendégekkel, *Bokros Lajossal* (Pénzügykutatási Intézet) a magyar gazdaság helyzetéről folytatott vita zárta le.

A második szekcióban három, valamilyen módon a vállalati viselkedéshez kapcsolódó előadás hangzott el. *Bohner Róbert* (OT) az ELECTRE eljárással kapott vállalati rangsorolásról számolt be. A vita — akárcsak a korábbi munkahelyi megbeszélésen — akörül robban ki, hogy ezt a viszonylag egyszerű módszert minek kellett megfejelni — úgymond: a rangsorolás alapjául szolgáló mutatók kiválasztása érdekében — egy kétes értékű faktoranalízissel. Kételyüknek adtak hangot a résztvevők az elemzés kompetenciáját és értelmét illetően is. *Csányi Tamás* a KOPINT vállalati-tükör elemzéseiről számolt be, pontosabban a felmérés módszerét és a kapott eredményeket foglalta össze meglehetősen röviden. *Dobos Imre* (MKKE) egy olyan modellkísérletet (pontosabban modellkudarcot) ismertetett, ahol sem a modellt, sem empírikus alakját nem sikerült megfogalmazni. Talán a kudarcból is lehet tanulni, ha valaki képes pontosan megfogalmazni a kudarc okait.

A harmadik szekcióban hangzottak el a szeminárium legszínvonalasabb előadásai. *Tétényi Tamás* (OT) készülő kandidátusi értekezéséből ismertetett egy fejezetet: egy egszerű vállalati viselkedési modellre támaszkodva belátható, hogy a vállalati bérköltség (teljesítményektől függő része) inverz-Gauss eloszlású valószínűségei változóval közelíthető. Az ennek alapján kapott becslési eredmények nagyobb leíró erejűnek bizonyultak, mint a klasszikus regressziós modellel — illetve annak heteroszkedasztikus változatával — végzett számítások. A jól felépített, alapos elmélyültségről tanúskodó előadással kapcsolatban egyedül azt vetették fel, hogy mennyire mesterkéltek az alkalmazott feltevések — pontosabban: mennyire kellett a hétköznapi gondolkodást megerőszakolni ahhoz, hogy végül is eljussunk az inverz-Gauss eloszláshoz. A szerző végig fenntartotta, hogy nem az eredményhez kereste a kiindulópontot, hanem valóban az ismertetett úton jutott el az eredményhez. *Hajdú Ottó* (pécsi Janus Pannonius Egyetem) a jövedelemeloszlások becslési pontosságának javítására mutatta be a gamma eloszlás magasabb hatványainak alkalmazási lehetőségeit. A KSH adatsorain végzett szimulációs vizsgálatainak eredményeit és a további kutatás feladatait — egyszerűbb paraméterbecslés, a paraméterek jobb értelmezhetősége,... — ismertette. A konferencia záróelőadásaként *Takács Tibor* (BFKI) egy optimális diszkrét lineáris kontrollmodell alkalmazását mutatta be bizonyos tervezési-típusú feladatok megoldására. Az előadó önálló eredménye az irányítás „simává" tétele, azaz a hasonló modellekből ismeretes kilengések tompítása volt.

A konferencia zárásaként a résztvevők *Hajdú Ottónak* és *Tétényi Tamásnak* ítélték oda a legjobb előadásoknak járó hagyományos Karancs-kupát.

KIRÁLY JÚLIA–TÉTÉNYI TAMÁS

Szerzői útmutató

1. A SZIGMÁ-hoz közlésre benyújtott kéziratokat *három példányban* az alábbi címre kérjük küldeni:

MARTOS BÉLA főszerkesztő
SZIGMA szerkesztősége
Pf. 262
1502, Budapest

A szerkesztőség magyar nyelven még nem publikált tanulmányokat fogad el (egyidejű megjelenés idegen nyelven nem akadály).

A kézirat *kísérőlevelében* a következő adatokat kérjük minden szerzőről:

1. Név, tudományos fokozat
2. Lakcím (telefon)
3. Munkahely és beosztás (telefon)
4. Levelezési cím
5. Személyi szám

Több szerző esetén aláhúzandó annak a szerzőnek a neve, akinek a címére a szerkesztőség küldeményeit címezze.

2. A kéziratok a papírnak csak egyik oldalán, jól olvasható gépírással készüljenek: (lábjegyzetekben is) kettes sortáv, oldalanként legfeljebb 30 sor, széles margó. Új bekezdést öt beütéssel jelölünk. Az oldalakat kérjük folyamatosan számozni.

A táblázatokat és ábrákat (ugyancsak három példányban) kérjük külön lapokon mellékelni és helyüket a szövegben megfelelő módon jelölni:
1. ábra. A GDP növekedési üteme
2. táblázat. A GDP nemzetközi összehasonlításban
Az ábrák hátoldalán tüntessük fel a szerző nevét és a cikk címét.
Az ábrák és a táblázatok önmagukban, a szöveg nélkül is értelmezhetők legyenek.

3. A kézirat *első oldalán* kérjük feltüntetni az alábbi adatokat:
- a szerző(k) neve
- a tanulmány címe
- a cikk 100 szónál nem hosszabb kivonata

4. A *lábjegyzeteket* folyamatosan arab számokkal sorszámozzuk, a szövegben felső indexbe tett (zárójel nélküli) sorszámmal hivatkozzunk rájuk. Puszta irodalmi hivatkozást ne tegyünk lábjegyzetbe. A hivatkozási szám és a lábjegyzet ugyanazon az oldalon legyen (nem feltétlenül a lap alján). Minimalizáljuk a lábjegyzetek számát és terjedelmét.

A köszönetnyilvánítást és az esetleges finanszírozási forrásra vonatkozó információkat az első, *nem számozott* lábjegyzetben kérjük közölni.

5. A *szöveg* elkészítésében ügyeljünk

a) *a helyesírásra* (gyakori hibák: meg nem jelölt hosszú magánhangzók; mondat közben nagy kezdőbetű, pl. 2. Definíció; a központozás elhagyása, különösen a képletek után; zárójel helyett /törtvonal alkalmazása),

b) *a nyelvtanra* (egyes és többesszám egyeztetése, külön szóba vagy egybeírás, határozott vagy határozatlan névelő kitevése vagy elhagyása),

c) *a stílusra* (henye kifejezések: sor kerül, biztosít, jelent stb.; túlbonyolított mondatszerkezetek; idegen, főleg angol szakkifejezések felesleges használata).

Szavak vagy szövegrészek kiemelésére *dőlt* (kurzív) betűt használjunk, a kéziratban ezt aláhúzással jelöljük.

6. *A matematikai jeleknél és képleteknél* a következőkre kell ügyelni.

a) Minden matematikai jel automatikusan dőlt betűvel jelenik meg nyomtatásban (kivételek a rövidítések pl. exp, cos, det és a differenciál d jele) tehát a matematikai jelek kurziválását nem kell a kéziratban aláhúzással megjelölni, kivéve ha a szövegben félreérthető (pl. a). A vektorok és mátrixok jelölésére lehetőleg ne használjunk félkövér betűket; ha elkerülhetetlen, kettős aláhúzással jelöljük a kéziratban. Különleges jelek első előfordulásakor lapszélen adjunk magyarázatot. (Ezeket a szerkesztő a technikai lehetőségek ismeretében módosíthatja.) Mondatot ne kezdjünk matematikai jellel.

b) A következő jelek legyenek jól megkülönböztethetők: az O (betű) és a 0 (nulla), a Φ (görög nagybetű) és $\emptyset$ (üres halmaz), ε (epszilon) és $\in$ (eleme), l (betű) és 1 (szám), x (betű) és $\times$ (szorzókereszt), . (írásjel) és $\cdot$ (szorzójel vagy hiányzó argumentum). Matematikai jelként ' (hiányjel) és - (kötőjel) nem alkalmazható, helyette $'$ (vonás) és $-$ (minusz) használandó.

c) Az alsó ill. felső indexeket ne tegyük zárójelbe. Ha mint sorszámra hivatkozunk rá a szövegben, a helyes írásmód i-edik, és nem i. vagy i-ik.

d) Azokat a formulákat, amelyekre később hivatkozunk, a sor jobboldalán zárójelbe tett arab sorszámmal lássuk el. Rövidített levezetések esetén a teljes levezetést ajánlatos külön elküldeni a bíráló munkáját segítendő. Empirikus vizsgálat esetén ugyancsak kérjük a felhasznált adatbázis megküldését, avagy pontos forrásának megnevezését a számítások reprodukálhatósága érdekében.

7. Az irodalomjegyzék („Irodalom" cím alatt) csak a cikkben hivatkozott tételeket tartalmazza. Helye a cikk legvégén (az esetleges függelék(ek) után) van. A szövegben a hivatkozás módja a következő:

TARJÁN (1948) bizonyította, hogy ...
vagy „Ismeretes (pl. TARJÁN, 1948, 26.old.), hogy..."
Az irodalomjegyzék a következő minták szerint írandó (kis nagybetű helyett a kéziratban csupa nagybetűt használhatunk):

Könyv:
BRIDGE, J.L. (1971): *Applied Econometrics.* North-Holland, Amsterdam.

Tanulmánykötet:
KING, B. (1985): What is a SAM ? *in:* G. Pyatt–J.Round, Eds. *Social Accounting Matrices. A basis for planning.* The World Bank, Washington 1985, 17–52.

Folyóiratcikk:
MUTH, J.F. (1961): Rational expectations and the theory of price movements. *Econometrica* 29, 315–335.

Magyar szerző magyar nyelvű publikációja esetén a vezetéknév és a keresztnév kezdőbetűje közé nem jön vessző.

A jövőben csak a fenti formai követelményeknek megfelelő kéziratokat továbbítjuk elbírálás céljából! A lektorálási eljárás eredményéről a szerzők értesítést kapnak. A nyomdai sokszorosítás előtt a szerzőknek módjuk nyílik a levonat javítására. Hazai szerzők honoráriumot és 25 különlenyomatot kapnak.

Felhívjuk szövegszerkesztővel dolgozó szerzőink figyelmét, hogy mivel a SZIGMA számítógépes szerkesztésű folyóirat, a cikk elfogadását követően a megjelentést nagymértékben gyorsítja, ha a szövegszerkesztő programmal készült tanulmányt a szerkesztő hajlékony mágneslemezen megkapja, illetve annak gyorsmásolását a szerző lehetővé teszi. Minden esetben kérjük, hogy a „nyers" ASCII-filet bocsássák rendelkezésünkre, lehetőleg az adott szövegszerkesztőre jellemző kontrolljelek és utasítások mellőzésével.

Szövegszerkesztővel készített kéziratot csak akkor fogadunk el, ha a lenyomat levél minőségű (NLQ), és egyebekben is (pl. sortávolság) megfelel a fentebb leírtaknak.

A szerkesztőség

A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó és Nyomda Vállalat főigazgatója
Szedte és nyomta: az ECONOMIX Közgazdász Egyetemi Kisszövetkezet kiadásszervezésében: MKKE házinyomda Felelős vezető: Jász József
Budapest, 1989, 88/23
Felelős szerkesztő: Király Júlia
Műszaki szerkesztő: Sándor István
Megjelent: 11,2 (A/5 ív) terjedelemben
HU ISSN 0039–8128