SZIGMA

Matematikai-közgazdasági folyóirat

A Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai-Közgazdasági Szakosztályának lapja

*

E szám szerzői:

CLAUDIO T. BORNSTEIN, Department of Systems Engineering and Computer Science, COPPE/ Federal University of Rio de Janeiro, FÜSTÖS LÁSZLÓ, az MTA Szociológiai Kutató Intézet tudományos munkatársa, KIRÁLY JÚLIA, az Országos Tervhivatal csoportvezetője, LÉNÁRD MARGIT, a Kossuth Lajos Tudományegyetem Matematikai Intézet munkatársa, MÁTYÁS LÁSZLÓ, kandidátus, az Agrárgazdasági Kutató Intézet tudományos munkatársa, MELLÁR TAMÁS, A Janus Pannonius Tudományegyetem Közgazdaságtudományi Kar adjunktusa, MESZÉNA GYÖRGY, docens, az MKKE Matematikai és Számítástudományi Intézet Közgazdasági Alkalmazások Osztályának vezetője, OKUGUCHI KOJI, a tokiói Metropolitan Egyetem Közgazdasági tanszékének munkatársa, PÉTER SÁNDOR, az MTA Regionális Kutatások Központja Dunántúli Tudományos Intézet tudományos munkatársa, RESS SÁNDOR, a Vízgazdálkodási Intézet főosztályvezetője, SIMONNÉ MOSOLYGÓ NÓRA, kandidátus, az OT Tervgazdasági Intézet főmunkatársa, SZIDAROVSZKY FERENC, a műszaki tudományok doktora, az MKKE Matematikai és Számítástudományi Intézet docense, PAULO R. C. VILLELA, Department of Systems Engineering and Computer Science COPPE/Federal University of Rio de Janeiro

Szerkesztőség: Budapest XI., Budaörsi út 43-45.
levélcím: 1502 Budapest, Pf. 262.

Terjeszti a Magyar Posta. Előfizethető bármely hírlapkézbesítő postahivatalnál, a Posta hírlapüzleteiben és a Hírlapelőfizetési Lapellátási Irodánál (HELIR) Budapest XIII., Lehel út 10/A, 1900, közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a HELIR 215-96 162 pénzforgalmi jelzőszámára.

Előfizethető és példányonként megvásárolható az *Akadémiai Kiadó*nál (1363 Budapest, Alkotmány u. 21., Telefon: 111-010). és az Akadémiai Kiadó *Stúdium* (1368 Budapest, Váci utca 22., tel.: 185-881) és *Magiszter* (1052 Budapest, Városház utca 1., tel.: 382-440) könyvesboltjaiban.

Előfizetési díj egy évre: 104,- Ft. Egy szám ára: 26 Ft.

Külföldön terjeszti a KULTURA Külkerskedelmi Vállalat, H-1389 Budapest, Pf. 149.

OLVASÓINKHOZ, SZERZŐINKHEZ, ELŐFIZETŐINKHEZ

E számunktól fogva többrétű változással találkozik az Olvasó.

1. A lapot új sokszorosítási eljárással állítjuk elő. Ennek hasznaként lényegesen megrövidül a benyújtott cikkeknek az elmúlt évek folyamán elviselhetetlenül hosszúra nyúlt átfutási ideje. Szándékunk az, hogy az elfogadástól számított fél éven belül minden cikk megjelenjék. Reméljük, hogy ez a változás ösztönzi majd szakmánk művelőit, hogy eredményeik javát hozzánk nyújtsák be publikálásra. (Egyidejű idegen nyelvű megjelentetés nem akadály!) Az új technikára való áttérés miatt külső képünk kevésbé tetszetős, mint volt.

2. Folyóiratunk XX. kötete 1987–1988-as évszámmal összevontan jelenik meg, a kötet terjedelme megegyezik az előző kötetekével. A Kiadó így tudja az MTA elnökségének határozatát végrehajtani, s az elmaradást 1989-re megszüntetni. Az 1987-re befizetett előfizetési díj fejében az előfizetők a XX. kötetet, az 1988-ra befizetett díj fejében a XXI. kötetet (1989. évfolyam) kapják meg.

3. Nem változik az a tudományos igényesség, amellyel – hozzáértő és gondos lektorok segítségével – a benyújtott cikkeket elbíráltuk, a szerzőknek tartalmi és stílusbeli segítséget nyújtottunk. Ugyancsak változatlan marad lapunk profilja is. Szándékunkban áll azonban, hogy – napjaink követelményeinek megfelelően – Szoftver rovatunkat kibővítsük és rendszeresebben jelentessük meg. Várjuk azoknak a szerzőknek a sűrűbb jelentkezését, akik e területen olvasóink érdeklődési körébe eső eredményeket értek el. Felfrissül a szerkesztőség is, új tagjai *Király Júlia* és *Hunyadi László*.

A Szerkesztőség

Szigma, XX. (1987–88) 1. sz.

MELLÁR TAMÁS – PÉTER SÁNDOR

Központi erőforrás-allokáció és a fogyasztási szféra egyensúlytalansági viszonyai a szocialista gazdaságban*

1. Bevezetés

A szocializmus politikai gazdaságtana hosszú időn keresztül tervgazdaságként és tervszerűen működő gazdaságként tekintette a létező szocialista gazdaságokat. Csak a hatvanas-hetvenes években változott meg ez a felfogás, amikor egyre több olyan munka látott napvilágot, amely meggyőzően bizonyította, hogy (i) a tervek sohasem fogták át az egész gazdaságot, s ezt reálisan célként sem lehet kitűzni, (ii) a megfogalmazott tervek sohasem valósulnak meg, még megközelítő pontossággal sem, a hierarchikusan szervezett végrehajtó apparátusok ellenérdekeltsége miatt, (iii) a tervek többnyire ex ante sem fogalmaznak meg egyensúlyt, s ez a kezdeti egyensúlytalanság csak fokozódik a végrehajtás során úgy, hogy a tervező szerveknek ex post beavatkozásokat kell eszközölniük a működőképesség fenntartása érdekében, amely beavatkozások aztán végképp nyilvánvalóvá teszik, hogy a tervek nem játszanak alapvető és kizárólagos koordináló szerepet.

Mindezek alapján az utóbbi évek közgazdasági gondolkodása – különösen a magyar, nem utolsósorban a 68-as reform hatására – hajlamosnak mutatkozott nemcsak a tervezés, hanem a központi erőforrás-allokáció szerepének alábecsülésére is. Olyan nézetek terjedtek el, amelyek a terv és a piac egyenrangú integrációs szerepét hangsúlyozták (ellenkező előjelű megfogalmazásban ugyanezt jelenti a sem nem terv, sem nem piac felfogás is). Erőteljesen hangsúlyozták, hogy a központi szinteken megfogalmazott célok sohasem valósulnak meg a gazdasági szereplők eredményes ellenállása és viszonylagos autonómiája miatt.

A nálunk igen népszerűvé vált paternalizmus értelmezés is hasonló megállapításokat tesz.[1] A paternalista szocialista állam nem fogalmaz meg konkrét gazdasági célokat, csak globális céljai vannak: a társadalmi és gazdasági folyamatok kívánatos mederben tartása, a fellépő konfliktusok kiéleződésének megakadályozása. Ezért nem a saját konkrét céljainak érvényesülését tartja szem előtt, hanem az alulról jövő céloknak és követeléseknek többé-kevésbé mindig enged. A felpuhított költségvetési korlátokkal működő vállalatok az állandósult, krónikus túlkereslet és

* Ez a tanulmány az MTA–Soros Alapítvány által finanszírozott kutatás keretében készült. A szerzők ezúton is köszönetet mondanak az Alapítványnak a kutatás támogatásáért.

[1] A paternalizmusnak ezt az igen népszerűvé vált értelmezését lásd KORNAI (1980) munkájának utolsó fejezetében.

hiány körülményei között alakítják ki az erőforrások allokálására vonatkozó autonóm döntéseiket. Ezek a döntések természetszerűen nem piackonformak, nem követik a fogyasztói igények változását stb., de összességük határozza meg a makroszintű erőforrás-allokációt.

Véleményünk szerint a létező szocialista gazdaságokban a központi irányítószerveknek a fent leírtaknál sokkal jelentősebb, hangsúlyozottan aktív szerepük van az erőforrások elosztásában, függetlenül attól, hogy ezt tervutasításokkal, szabályozókkal vagy egyéb informális ráhatásokkal (elvárások, ellátási felelősség) teszik meg. A központi irányítószervek minden időszakban rendelkeznek egy preferenciarendszerrel a kívánatos célokról, az ezekhez hozzákapcsolodó erőforrás-allokációról és a végrehajtás eszközeiről. Ez még akkor is így van, ha néhány megszorítást kell tennünk: (1) a kívánatos célok listája nem fogalmazódik meg mindig egyértelműen, a célok közötti rangsor nem mindig nyilvánvaló, egymásnak ellentmondó célok is megjelennek, (2) az egyes központi irányítószervek nem egységesek az elfogadott célok és érdekek tekintetében, ezért menetközben is változik a célok listája és rangsora, (3) a célok kijelölése és a hozzákapcsolodó erőforrás-allokáció sohasem teljes körű, nem fogja át a gazdaság egészét, csak néhány fontos területre koncentrál, (4) a célok sohasem valósulnak meg maradéktalanul.

A központilag kijelölt céloknak és preferenciáknak, valamint ezek érvényesülésének kiderítéséhez elsősorban nem a nyilvánosságra hozott tervcélokat vagy az általánosság szintjén megfogalmazott kivánalmakat (hatékonyság, takarékosság stb.) kell figyelembe venni, hanem a ténylegesen érvényre jutó gazdaságpolitika által súlypontinak tekintett célokat. Ezek a célok sokszor nem is kerülnek nyilvánosságra, csak utólag deríthető ki hatásuk a gazdasági működésre. További jellemvonása ezeknek a központi preferenciáknak, hogy nem az egész gazdaság összműködésére vonatkoznak, hanem mindig csak a gazdaság bizonyos (politikai vagy más szempontból fontos) területeire, miközben a többi területre nem vonatkozik pozitív célrendszer, ezek csak eszközként szerepelnek a kiemelt kulcsfontosságú célok teljesítése érdekében. Ebből következően azt figyelhetjük meg, hogy a nyilvánosságra hozott célok közül az egész gazdaság összműködésére vonatkozó, átfogó, általános célok és sok-sok részcél általában nem teljesül, de a kiemelt (a gazdaság struktúráját meghatározó) célok nagy valószínűséggel mindig teljesülnek és ezen célok elfogadása tekintetében a központi irányítószerveknél mindig megteremtik a konszenzust valamilyen eszközzel (erőszak, politikai ráhatás, ösztönzés stb.).

Visszatérve a paternalizmus Kornai által használt értelmezéséhez, ez az értelmezés a hangsúlyt a vállalatok megsegítésére, támogatására helyezi és az ebből következő mikroszintű erőforrás-reallokáció értékelésére. Nem fordít azonban kellő figyelmet a paternalizmusból következő központi preferenciarendszer létezésére és az ezt érvényre juttató erőforrás-allokációra. Másként fogalmazva: ez a paternalizmus értelmezés nem veszi figyelembe, hogy a megsegítésért az állam mindig követel is valamit, illetve hogy a megsegítés, a kiterjedt központi redisztribució nem a vállalatok megmentéséért (vagy valamilyem más elvont cél érdekében) történik, hanem a központilag kijelölt célok teljesülése érdekében.

Ebből következően a Kornai-féle paternalizmus értelmezésből nem a központi szintű erőforrás-allokáció következik, hanem a vállalatok puha költségvetési korlátja, majd ezen keresztül a túlkereslet és a (globális) hiány. Ezzel szemben a mi felfogásunk szerint a paternalizmus elsősorban a központi szintű erőforrás-allokációban ölt testet, amely szükségszerűen tér el a fogyasztói igények által megkövetelt allokációtól, s így közvetlenül okozójává válik a (strukturális) hiánynak. A különbség tehát nyilvánvaló: Kornainál a hiány elsősorban globális jellegű, s mind a globális, mind a strukturális hiány csak a felpuhított költségvetési korláttal működő vállalatok eltorzult gazdálkodásának a következménye. Véleményünk szerint viszont a hiány – függetlenül a vállalatok költségvetési korlátjának keménységétől – szükségszerűen lép fel a központi erőforrás-allokáció dominanciája miatt.

A tanulmány további részében megpróbáljuk bemutatni, hogy az általunk értelmezett paternalizmus - fogalomból hogyan következik a szocialista gazdaságban a központi és a fogyasztói preferenciák közötti meg nem felelés, az erőforrások nem kielégítő allokációja, és mindennek folyományaként a jóléti veszteség és hiány.[2]

2. A központi és a fogyasztói preferenciák eltérése, az *ex ante* egyensúlytalanság

Feltételezésünk szerint a paternalista irányításnak (a továbbiakban: Központnak) önálló, független preferenciarendje van a teljes társadalmi jólétre vonatkozóan:

$$U = U^* \left[u_1(x), u_2(x), \ldots, u_m(x)\right] ,$$

ahol $x = \{x_i\}, i = 1, 2, \ldots, n$ a hozzáférhető javak vektora, és $u_1, \ldots, u_m$ a háztartások jóléti függvénye a Központ megítélése szerint, amit tehát úgy is írhatunk, hogy

$$U = U(x) .$$

Ezt központi jóléti függvénynek nevezhetjük, feltételezve a szigorú kvázikonkávitást. A gazdaságról ugyanakkor azt tételezzük fel, hogy a Központ egyének elkülönült halmazát alkotja, s a többi fogyasztó (Fogyasztók) ettől különböző preferenciarenddel rendelkezik. A paternalista Központ például nyilván többre értékel bizonyos felhalmozási, termelési stb. javakat; ideológiai és etikai okokból kevesebbre értékelhet bizonyos kulturális, tartós fogyasztási stb. javakat, és ezek jelennek meg a preferenciák eltéréseiben. A Központról ugyanakkor feltételezzük, hogy jóindulatú és racionális, ami azt is jelenti, hogy saját axiomatikus preferenciáitól eltekintve igyekszik követni a többé-kevésbé megismert tényleges fogyasztói preferenciákat;

[2] Tanulmányunkban a paternalizmus fogalmát a jóléti gazdaságtan által értelmezett módon használjuk. A jóléti gazdaságtan paternalizmus-értelmezését lásd GRAAFF (1957) munkájában. Ehhez az értelmezéshez nagyon hasonló az ARROW (1950) -féle diktatúra fogalom. Náluk a paternalizmus-értelmezés lényege a központi és az egyéni preferenciák közötti eltérés és az ebből az eltérésből, illetve a hozzákapcsolodó erőforrás-allokációból adódó jóléti kihatások vizsgálata.

így tehát a fogyasztói jóléti függvények várhatóan hasonló tulajdonságokkal rendelkeznek (homogenitás, kvázikonkávitás stb. szempontjából). A Fogyasztók jóléti függvénye felírható mint

$$W = W^* \left[w_1(x), w_2(x), \ldots, w_m(x)\right],$$

ahol $x = \{x_i\}, i = 1, 2, ..., n$
$w_j(x) =$ a j-edik háztartás jóléti függvénye, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Valószínűsíthetjük, noha nem kell feltétlenül megkövetelnünk, hogy U a fogyasztói jóléti függvény egy olyan (monoton) transzformációja, amely bizonyos paraméterek értékeiben különbözik W-től.[3]

Tekintsük most (a grafikus illusztráció kedvéért, az általánosság elvesztése nélkül) az x jószágvektort kétdimenziósként. Tehát kétféle termékről beszélünk, amelyek tetszés szerint specifikálhatók, amennyiben az egyiket az U függvény magasabbra értékeli, mint a W függvény. Jelöljük az egyik jószágot x, a másikat y változóként. (Természetesen nem csak egy-egy termékről lehet szó, hanem termékek csoportjáról, így tehát jelölheti x a fogyasztási cikkeket és y a termelési eszközöket, vagy az élelmiszereket és a tartós fogyasztási javakat.) Mindkét jószágtípus normál áru, vagyis, pozitív jövedelemrugalmassággal és negatív saját-ár rugalmassággal jellemezhető a kereslete. Ekkor tehát a fogyasztók társadalmi preferenciáit kifejező jóléti függvény $W = W(z)$, ahol $z = \{x, y\}$, tehát

$$W = W(x, y),$$

a Központé

$$U = u(x, y),$$

ami így is írható:

$$U = U(x, y) = W(x, y^*),$$

ahol $y^* = y^*(y, k), \partial y^*/\partial k > 0$ és $k \geq 0$. y^*-ot úgy definiáljuk, hogy $y^* = y$, ha $k = 0$ (tehát ekkor $U = W$), k a Központ preferenciáinak a fogyasztói preferenciáktól való eltérését jelző paraméter. Feltételezzük, hogy az y jószág preferenciája eltér, tehát

$$\partial W/\partial y^* = \partial U/\partial y > \partial W/\partial y > 0\,.$$

E feltételek mellett $U(x, y)$ és $W(x, y)$ két, egymást metsző kvázikonkáv felület, amelyek vetületei az (x, y) síkban két egymást metsző, konvex közömbösségi térképet alkotnak.

---

[3] Így tehát kettős preferenciarendszer létezik a szocialista gazdaságban. Ezzel a feltételezéssel élt DREWNOWSKY (1979) is. A mi vizsgálatunk azonban szűkebb kört ölel fel, mint Drewnowsky tanulmánya: mi csak azzal az esettel foglalkozunk, amikor az egyének (Fogyasztók) kinyilváníthatják saját preferenciáikat, de ennek nincs hatása, vagy csak részleges hatása van a termelés alakulására.

A Központ tervezési és irányítási szerv, s az általa készített tervet igyekszik realizáltatni a tőle függő termelési komplexummal akár direkt tervutasításos, akár Kantorovics típusú, akár utasitás nélküli rendszerben. Nyilván ezek a végrehajtási mechanizmusok különböző hatékonysággal müködnek, különböző eredményeket produkálnak, s ez hatással van a tervek teljesülésére. A tervek teljesítési fokát azonban nem vizsgáljuk, e helyett azt feltételezzük, hogy a megvalósított tervek inkább tükrözik a központi, mint a fogyasztói preferenciákat, és semmiképpen sem esnek egybe az utóbbi által kívánatosnak tartott termelési szerkezettel. Ezért mindaz, amit megállapítottunk a központi tervre, érvényes marad a végrehajtásra is.

Tételezzük fel, hogy a gazdaság egyféle adott mennyiségű (R_0) erőforrást allokálhat, s az ezen alapuló termelési lehetőségek halmaza a Központ által ismert és számítható. Amennyiben ez a halmaz kvázikonvex, az adott erőforrásmennyiséghez tartozó vetületének a határa az (x, y) sikban az origó felől konkáv görbe, amelyet társadalmi transzformációs függvénynek (TTF) nevezünk. Ennek egyenlete általános formában

$$R_0 - R(x, y) = 0,$$

ahol R_0 adott.

Az első lépés a szokásos, rutinszerű optimalizálás, a Központ igyekszik a saját (de az egész társadalomra vonatkoztatott) jóléti függvényét maximalizálni a termelési lehetőségek adott (OTT') halmazán:

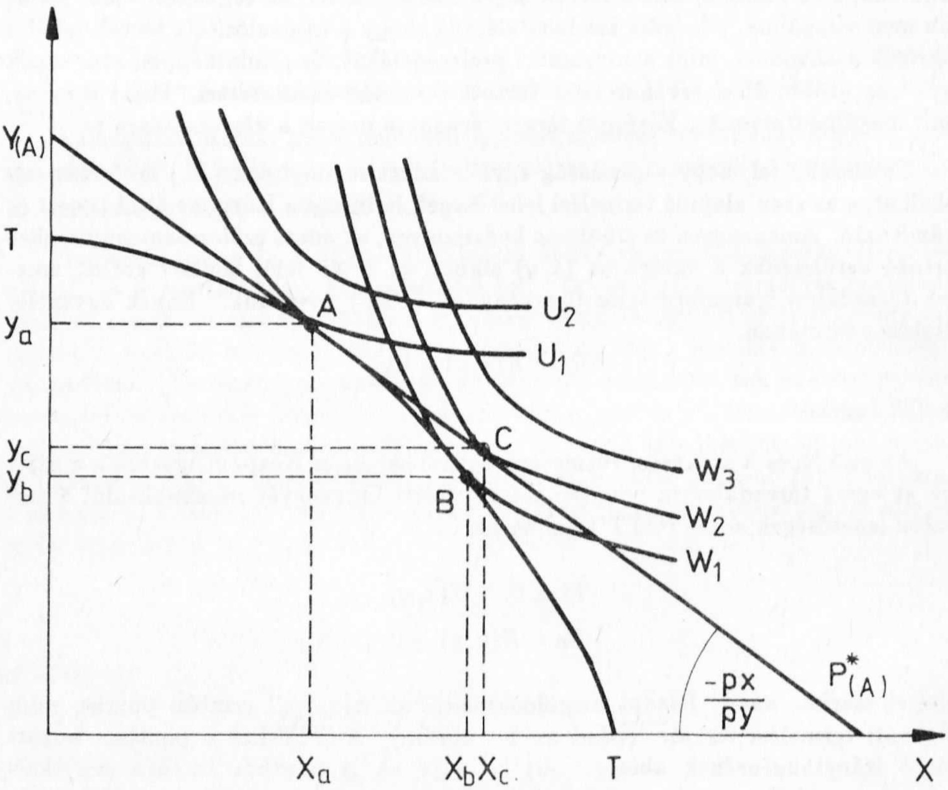
$$\text{Max.}U = U(x, y)$$

$$R_0 - R(x, y) = 0$$

feltétel szerint, amely feladat megoldása adja az $A(x_a, y_a)$ érintési pontot, mint központi termelési tervet. (Lásd az 1. ábrán.) A TTF-hez e pontban húzott érintő iránytangensének abszolút értéke adja az A ponthoz tartozó árnyékárarányokat, $p^*(A) = p_x/p_y$. Amennyiben y termék árát tekintjük egységnyinek, akkor ez az iránytangens abszolút érték p_x-et jelzi, valamint $p^*(A)$ egyenes és az y tengely metszéspontja az A termelési ponthoz tartozó nemzeti jövedelmet mutatja y-javakban mérve: $Y(A)$.

Az szinte magától értetődik, hogy szabadpiaci, nempaternalista rendszerben az U és W függvény-készlet egybeesik, ezért – rugalmas, piaci árrendszer esetén – a kereslet és a kínálat a B egyensúlyi pont felé konvergál, amely a szokásos profit-, illetve hasznosság-maximalizálási feltételek, valamint tökéletes verseny esetén stabil pont. A paternalista preferenciák által létrejött A allokációs helyzetet azonban nem a szabadpiaci B helyzettel kell egybevetni, a tényleges hiány nem az $x_b - x_a$ különbséggel azonos, mert merev hivatalos árrendszert tételezünk fel.[4]

[4] Ez az alapprobléma számos helyen felbukkan a jóléti gazdaságtan irodalmában, lásd többek között BOADWAY–BRUCE (1984), DESAI–MARTIN (1983), HENDERSON–QUANDT (1980), NICHOLSON (1978), QUIRK–SAPOSNIK (1968), WELLISZ–FINDLAY (1986) stb.



1. ábra

A következő lépésben ugyanis a fogyasztók maximálják saját jóléti függvényüket az általuk ismert piaci információknak – $p^*(A)$ – függvényében:

$$\text{Max.}W = W(x, y)$$

$$p_x x + p_y y = M$$

feltétel szerint, ahol M , fogyasztók ténylegesen rendelkezésre álló jövedelme. Valószinüsithető, hogy M szoros kapcsolatban van $Y(A)$-val, de nem szükségszerű az együttmozgásuk. Tételezzük fel az egyszerűség kedvéért, hogy $M = p_y Y(A)$, vagyis a gazdaságban globális egyensúly van, a megtermelt javaknak megfelelő menynyiségű jövedelem áramlott ki. (A megtakarítás–beruházás kérdéstől eltekintünk, de később meg visszatérünk rá.) Tekintettel arra, hogy az előző (központi) maximalizálási feladatból $p^*(A) = p_x/p_y$, ezért tehát ha p_y-t rögzitjük egység szinten, $p^*(x)$ jelzi x központilag meghatározott árát, de ne felejtsük el, hogy ez az árnyékár R és U függvények megoldása, tehát

$$p^*(x) = p^*\left[x, R(.), U(.)\right].$$

A fogyasztó feladata tehát a számára adott merev árrendszer mellett a legáltalánosabb alakban a következő:

$$\text{Max.}W = W(x,y)$$
$$p^*(x)x + y = M$$

feltétel szerint. Ennek a megoldása Lagrange-módszerrel:

$$L = W(x,y) + \lambda\left[M - p^*(x)x - y\right]$$

az elsőrendü feltételek:

$$\partial L/\partial x = \partial W/\partial x - \lambda\left[\partial p^*(x)/\partial x\right]x - \lambda p^*(x) = 0$$
$$\partial L/\partial y = \partial W/\partial y - \lambda\left[\partial p^*(x)/\partial y\right]x - \lambda = 0$$
$$\partial L/\partial \lambda = M - p^*(x)x - y = 0.$$

Feltételezve, hogy a másodrendű feltételek teljesülnek (az U és W függvényekre kikötött feltételek miatt ez várható), a fenti feladat megoldása adja a fogyasztók (kezdeti) "effektív piaci keresletét[5]: $C(x_c, y_c)$, ahol nyilvánvalóan

$$x_c = x_c\left[R_0, U(.), W(.), R(.), M\right]$$

és hasonlóan y_c-re is.

Az x–piacon jelentkező hiányt tehát az ily módon nyert $x_c - x_a$ különbség jelzi az 1. ábrán, s ez (minthogy x többek között U specifikációjának függvénye), nyilván függ a Központ k eltérés (diszkrepancia)-paraméterétől (amely grafikusan az U és W térképek eltérésében látható). Az $(x_c - x_a)$ hiány mindenképpen pozitív, mivel feltételeztük, hogy (i): $U(x,y) \neq W(x,y)$, és hogy (ii): $\partial U/\partial y > \partial W/\partial y > 0$ (tehát hogy a Központ y-t preferálja, ezért az U görbék W-nél adott síkban kevésbé meredekek). Jól viselkedő felületek esetében A, B és C nem eshetnek egybe semmilyen párositásban.

A piac ezen ex ante egyensúlytalansága tehát az 1. ábra szerint a következő (a fenti feltételek alapján számitható) mennyiségekkel jellemezhető: az x-piacon

---

[5] Ez az effektív kereslet nem azonos a disequilibrium-irányzat effektív keresletével, mert a fogyasztók itt csak az adott jövedelmük és az árak figyelembevétele mellett optimalizálják hasznosságukat, s nem veszik figyelembe az egyensúlytalanságból következő korlátokat. Lásd erről bővebben BENASSY (1982) és MUELLBAUER–PORTES (1978) munkáját.

$(x_c - x_a)$ hiányt találunk, ugyanakkor az y-piacon $(y_a - y_c)$ többletet. Megjegyzendő, hogy $y_c \gtreqless y_b$ a W-görbék konkrét alakjától függően. A kezdeti feltételek megsértése nélkül lehetséges olyan eset, ahol y_c kisebb, mint y_b. Jelen ábránk olyan helyzetet ábrázol, amikor a $p^*(x)$ árnyékár-rendszer jövedelmi hatása meglehetősen nagy a szabadpiaci alternatívához viszonyítva (ez ellenőrizhető, ha berajzoljuk a B ponthoz tartozó ár-egyenest), így a fogyasztók ex ante valamelyest többet keresnek y-ból, mint y_b, de nem annyit, amennyit a terv kínál. Az 1. ábrán tehát az ex ante helyzetben $(x_c - x_a)$ hiány, $(y_a - y_c)$ felesleg és $(y_c - y_b)$ kereslet-eltolódás található a fogyasztói jövedelmek teljes szándékolt elköltése mellett.

Ennek az ex ante egyensúlytalansági helyzetnek – vagy másként fogalmazva strukturális hiánynak – az az oka, hogy a gazdaságban egyidejűleg létezik egymás mellett két különböző, egy központi és egy fogyasztói preferencia-rendszer és, hogy alapvetően az előbbi preferencia-rendszer vezérli az erőforrások allokációját. Az előbbiekben kifejtett megállapításainkat nem érvényteleníti, hogy idealizált viszonyokat tételeztünk fel: optimalizáló-racionalista központi viselkedést és tökéletes tervvégrehajtást. Ha nem tételezzük fel az optimalizáló központi magatartást, akkor ez azt jelenti, hogy a Központ nem lesz képes a termelés szintjét a termelési lehetőségek határán kijelölni (az A tehát valahova az OTT' belsejébe kerül) és nem lesz képes a helyettesítési határrátáknak megfelelő árrendszert kijelölni. Ez utóbbi azt is jelenti, hogy Kantorovics tipusú árnyékárakkal szabályozott gazdaságként nem működhet a rendszer.

Ha a tervtől eltérő megvalósulás lehetőségét is bekapcsoljuk, akkor ennek valószinű eredménye az lesz, hogy (i) a megvalósult össztermelés szintje elmarad a tervezettől, (ii) a termelés szerkezete el fog térni – de nem tetszőleges mértékben – a kitűzött szerkezettől. Ez utóbbi ugyan csökkentheti k-t, a központi és fogyasztói preferenciák közötti eltérést, de nyilván nem szünteti meg, mert ebben az esetben teljesen hatástalan lenne a központi irányítás. Ez a következtetés független attól, hogy puha vagy kemény vállalati költségvetési korlátot tételezünk fel. A szocialista vállalat mindkét esetben a központi, és nem a fogyasztói preferenciáknak megfelelően igyekszik termelni.

A szocialista gazdaságok irányítási rendszerének és müködési módjának történelmi fejlődesében több korszakot vagy modellt is meg lehet különböztetni. Az (ex ante) strukturális egyensúlytalanság azonban véleményünk szerint mindegyik korszakra jellemzően fennáll. A szocialista gazdaságok teljes fejlődési időszakára igaz az, hogy az alapvető erőforrások elosztása, a gazdaság alapszerkezetének meghatározása nem piaci eszközökkel, hanem a központilag kijelölt célok és preferenciák által direkt vagy indirekt módon vezérelt folyamatokkal történt. A gazdasági szerkezetnek ez a központi meghatározása szükségszerűen kerül ellentmondásba a mikroszinten formálódó fogyasztói igényekkel.

Az egyes gazdasági korszakok ebből a szempontból csak abban különböznek, hogy milyen társadalmi-gazdasági folyamatokon keresztül és milyen intézményi felépitésben határozzák meg a kívánatos termelési-allokációs tervet és milyen eszközökkel, milyen módon, milyen hatékonysággal valósítják meg azt. Időben közelítve a mához azt állapíthatjuk meg, hogy már a tervek vagy a kinyilvánított gazdaságpolitikák szintjén is az A ponttal jellemzett termelési terv közelebb került a C pont által jelképezett fogyasztói igényekhez. Ezt elsősorban a rendszerek politikai konszolidációja, másodsorban az irányítás intézményi bázisának kiszélesedése és szakszerűsége segítette elő. A gazdasági reformok következtében megvalósult mechanizmus-változások a végrehajtó szinteket bizonyos mértékben érdekeltté tették a fogyasztói igények kielégítésében is. A megvalósult termelési szerkezet közelebb került a Fogyasztók által kívánatosnak tartott szerkezethez, de a Központ dominanciája miatt ez a változás nem volt elégséges a két fajta preferenciarendszer eltérésének felszámolásához.[6]

3. Ex post helyzet: kényszerhelyettesítés és kvázi-egyensúly

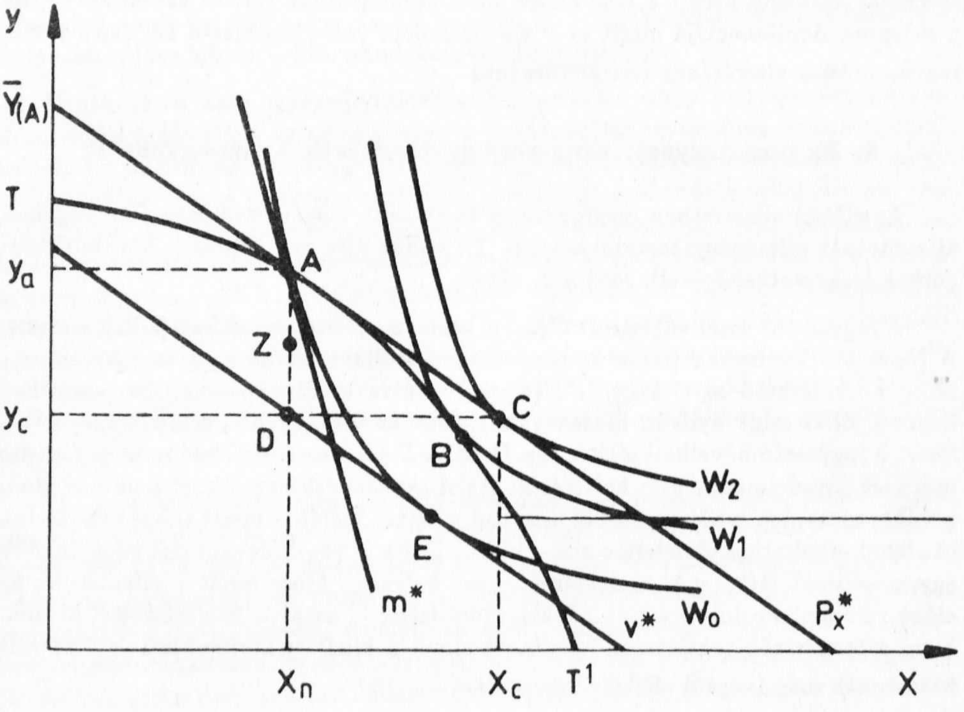
Az előbbi alfejezetben megfogalmazott ex ante helyzet azonban nem végleges állapot, csak pillanatnyi instabil helyzet. Rajzoljuk újra az 1. ábrát (a közömbösségi görbék leegyszerüsítésével): lásd a 2. ábrát.

A fogyasztók által választott $C(x_c, y_c)$ pont nem megvalósítható a hiány miatt. A fogyasztó kezdetben (terve szerint) megvásárolja a kívánt y_c-t és a kívánt x_c-ből a hozzáférhető x_a-t, s így a $D(x_a, y_a)$ pontra kerül. Azonban az e ponthoz tartozó jóléti szint nyilván alacsonyabb, mint az $A(x_a, y_a)$ ponthoz tartozó W_0. Ezért a fogyasztó növelheti jólétét, ha D-ből a DA szakaszon A felé mozog, éspedig maradék jövedelmének y-ra költésével. Az A pontba érkezve jólétét nem növelheti tovább, mert sem x-ből sem y-ból nem tud a fizikai korlátok miatt többet vásárolni, ráadásul elköltetlen jövedelme sincs több. Ezért a végső egyensúlyi vagy inkább egyezségi-pont $A(x_a, y_a)$, ami már ex post helyzet. Most tehát – ellentétben az előző részben megfogalmazott effektiv kereslettel – azzal a feltételezéssel éltünk, hogy a fogyasztók tökéletesen alkalmazkodnak a kínálati korlátokhoz és e szerint határozzák meg (végső) effektív keresetüket.[7]

Ebben a helyzetben a Központ terve teljesül, jólétét maximálta, s a Fogyasztók sem növelhetik jólétüket adott, merev árrendszer mellett. Látszólag tehát egyensúlyi a helyzet, hiszen a piacra hozott kínálat elkel. Ehhez a Kantorovics tipusu egyensúlyhoz azonban a következő megjegyzések tartoznak:

[6] Érdemes itt a magyar helyzetre utalni. A 68-as reform után a jövedelmező gazdálkodás és a fogyasztói igények kielégítésének elve felkerült a vállalatokkal szembeni követelmények listájára, miközben a központi elvárások, ellátási felelősség, exportteljesítés stb. továbbra is jelentős szerepet játszott. Ennek az lett a következménye, hogy a vállalatok igyekeztek kompromisszumot teremteni a kétféle követelmény-rendszer között, és ezért némiképpen közeledett a termelés szerkezete a fogyasztói igényekhez, de ez a közelítés távolról sem volt kielégítő, éppen a központi irányítás dominanciája miatt.

[7] A disequilibrium-irodalomban nincs egységes álláspont a tekintetben, hogy mit értsünk effektív kereslеten. Ha ugyanis a kínálati korlátokhoz való teljes alkalmazkodást tekintjük effektív keresletnek, akkor definíció szerint nem lesz egyensúlytalanság. Ha viszont semmilyen alkalmazkodást nem tételezünk fel, akkor az effektív kereslet egybeesik a (kezdeti) fogalmi kereslettel. Ezt a dilemmát tárgyalja QUANDT (1985) cikke.



2. ábra

1. A legfontosabb következmény, hogy noha a termelés optimális technikai szempontból (hiszen az egyezségi-pont a TTF görbén van), viszont ez határozott $W_1 - W_0$ jólétveszteséget jelent a fogyasztók számára a $k = 0$ helyzethez képest.

2. Ez a rendszer technikai szempontból hatékonyságvesztés a szabadpiachoz képest. Szabadpiaci rendszerben ugyanez a W_0 jóléti szint, ugyanilyen árak mellett (a v^* áregyenes párhuzamos p^*-gal) egy alacsonyabb ráfordítást kívánó OTT-n belüli inferior termelési tervvel (E) lenne elérhető.[8]

[8] Ezt a központi preferenciákból és elosztásból következő jólét- és hatékonyság-vesztést megfogalmazták már a jóléti gazdaságtan közgazdászai is, lásd BOADWAY–BRUCE (1984).

3. Az A pontbeli Kantorovics-egyensúly valójában pszeudoegyensúly, ahol az összkereslet megegyezik az összkínálattal, strukturális feszültségek mellett.[9]. Ezek a strukturális feszültségek rendkívül instabillá teszik az A pontot. Ez abból is látszik, hogy noha az árarány megegyezik a transzformációs határrátával (p^* az OTT' görbe érintője), de nem egyezik meg a fogyasztók helyettesítési határrátájával (amely az A pontban a W_0 görbe meredeksége). A helyettesítési határráta egy, a p^*-nál meredekebb áregyenest kívánna az A pontban, ami az x piacra nehezedő, a túlkeresletből adódó inflációs nyomást jelzi.

4. A fentiek miatt a Kantorovics-egyensúlyi pont k bármilyen értéke esetén a second-best, vagyis szuboptimális megoldást jelenti; instabil helyzet, strukturális feszültséggel és inflációs nyomással jellemezve.

A 2. ábrán tehát $(x_c - x_a)$, ami az ex ante és az ex post fogyasztói kereslet különbsége. Emellett jelentkezik $(y_a - y_c)$ kényszerhelyettesítés, mivel a D-pontból a nemhozzáférhető $(x_c - x_a)$ árumennyiségnek megfelelően fennmaradó jövedelmet költik y-ra. Ez pedig azért történik, mert (i) y-ról felteteleztük, hogy nem inferior áru, hanem jövedelemrugalmassága mindig pozitív, és (ii) mert W jóléti függvényünk kétdimenziós és így a megtakarításnak *per se* nincs hatása a jólétre statikus elemzésben. Vagyis, ha a lakossági megtakarítást S-sel jelöljük, akkor az eredeti modellben $\partial W/\partial S = 0$. A helyzet némiképp komplikáltabb, ha ezt feloldjuk, és a fogyasztói jóléti függvényt így írjuk fel:

$$W = W(x, y, S) \quad \text{és} \quad \partial W/\partial S > 0\,.$$

Ebben az esetben – amelyet már természetesen nem tudunk kétdimenziós síkban ábrázolni – az előző $A(x_a, y_a)$ ex ante terv nem feltétlenül az $A(x_a, y_a)$ pontban végződik ex post, hanem – $\partial W/\partial S$-től függően – valahol egy Z pontban D és A között, amelyre igaz, hogy a Z ponthoz tartozó W-értéknél $W(x_z, y_z, S_z)$ nincs magasabb W-t adó pont a DA szakaszon. Nyilvánvaló, hogy $Z = A$ akkor és csak akkor, ha $\partial W/\partial S = 0$ és $Z = D$, ha $\partial W/\partial S - \partial W/\partial y$ igen nagy pozitív érték.

Ezt a megtakarítási szándékot értelmezhetjük úgy is – sőt valószínüleg ez lesz a helyesebb értelmezés –, hogy ez egy kényszermegtakarítási szándék, amely a kényszerhelyettesítéssel szemben jelenik meg. Az eredeti – nem kényszer jellegű – megtakarítási igény nyilván elsősorban a jövedelmektől függ és automatikusan megvalósulhat – függetlenül az egyensúlyi helyzettől –, tehát arányosan változtatja meg mind az x, mind az y iránti keresleti igényt. Jelen esetben viszont a megtakarítás attól függ, hogy a kényszerhelyettesítést vagy a további megtakarítást tekintik a Fogyasztók előnyösebbnek.

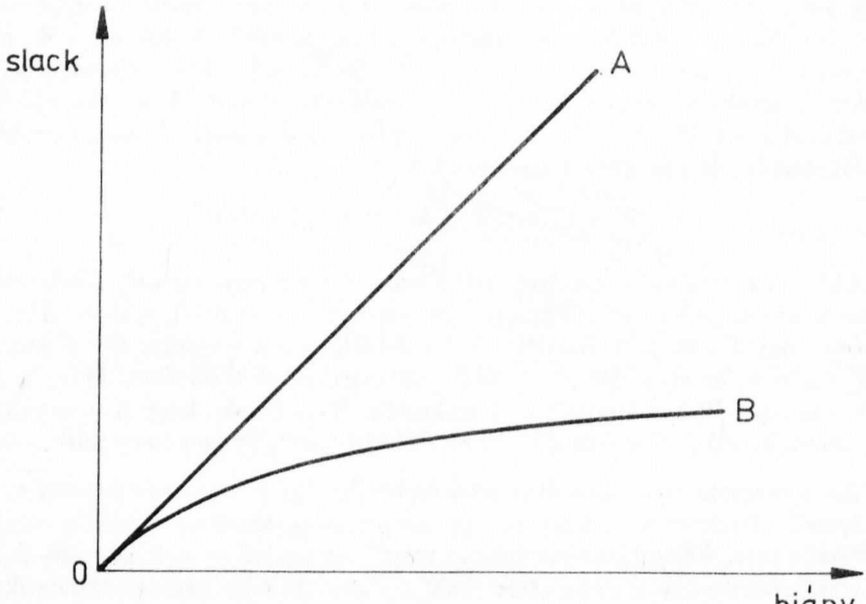
A (kényszer)megtakarítás bekapcsolásával néhány megjegyzést tehetünk a hiány, kényszerhelyettesítés és a slack (felhalmozódó készletek) viszonyára vonatkozóan.

---

[9] A Kantorovics tipusu egyensúly pszeudo-egyensúly jellegére WELLISZ és FINDLAY (1986) is rámutatott már.

1. Az eltérő központi és fogyasztói preferenciákból következően a gazdaságban nagy mértékü strukturális egyensúlytalanság jelenik meg, amely még globális egyensúly (összkereslet = összkinálat) esetén is komoly hiányokat, kényszerhelyettesítéseket és kényszermegtakarításokat von maga után.

2. A kényszermegtakarítás és -helyettesítés között átváltás van, s mindaddig végbemegy az átváltás, amíg $\partial W/\partial y > \partial W/\partial S$. Ha globális egyensúly van, akkor a hiány mennyisége egyenlő a kényszermegtakarítás és -helyettesítés összegével. Ez tulajdonképpen nem más, mint a strukturális egyensúlytalanságnak a két oldalról való számbavétele. Az egyensúlytalanság mértéke tehát nem a hiányok és a kényszeralkalmazkodások összege, hanem a kettő közül csak az egyik.



3. ábra

3. A k eltérés-paraméter növekedésével nő a hiány és a kényszermegtakarítás vagy -helyettesítés. Ha most egy pillanatra a kényszerhelyettesítéstől eltekintünk, akkor azt állapíthatjuk meg, hogy a hiány növekedésével párhuzamosan nő a kényszermegtakarítás, és így az eladatlan készletek, a slack mennyisége. (Ezt a 3. ábrán az OA 45 fokos egyenes mutatja.) Ha azonban bekapcsoljuk a kényszerhelyettesítést, és feltételezzük, hogy a hiány növekedésével az ilyen

irányú szándék növekszik, akkor azt kapjuk, hogy a hiány növekedésétől egyre inkább elmarad a kényszermegtakarítás és így a slack növekedése (az OB görbe a 3. ábrán). Az OA és OB között egyre növekvő különbséget a növekvő kényszerhelyettesítési szándék magyarázza.[10]

4. Ex post egyensúlyteremtési kisérletek

Az egyensúlytalansági feszültségek felszinre kerülése és felhalmozódása mind a Központot, mind a Fogyasztókat arra készteti, hogy lépéseket tegyenek ennek enyhítésére, felszámolására. Nézzük elöször a Fogyasztók lehetőségeit.

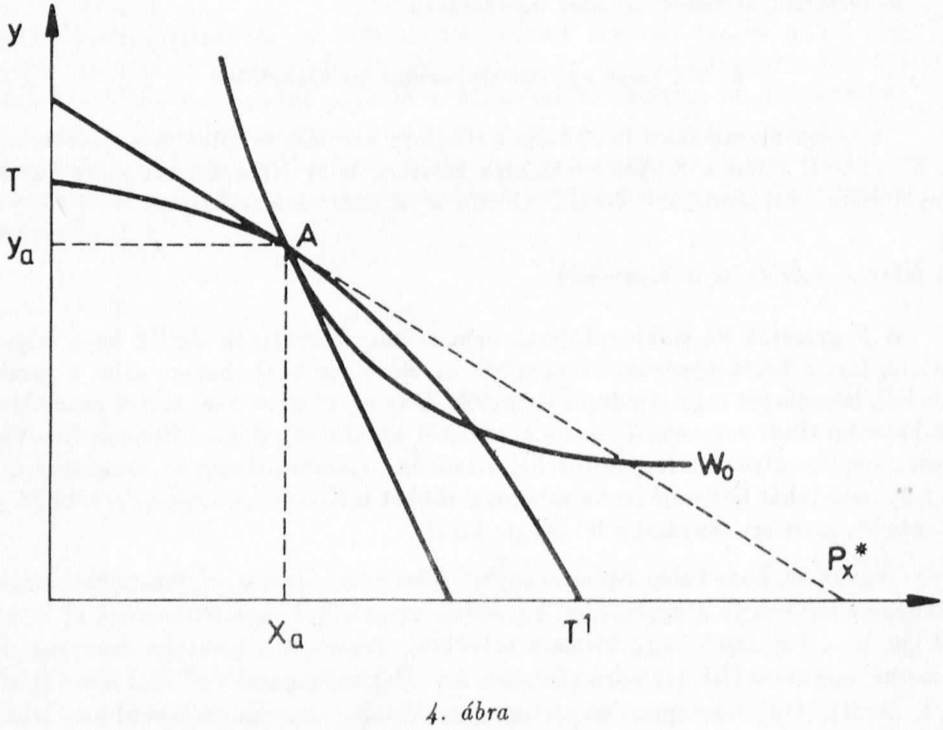
A feketepiac belépése a folyamatba

A Fogyasztók itt tulajdonképpen nem is mint fogyasztók lépnek be a folyamatba (ezt a tevékenységüket tárgyaltuk az elöző részben), hanem mint a javak kínálói, látszólagos vagy tényleges termelők. Erre az ad gazdasági alapot számukra (a hatósági tiltás vagy engedélyezés kérdésétől eltekintve), hogy a Kantorovics-féle pszeudoegyensúlyban a fogyasztók helyettesítési határrátája eltér az árarányoktól, a fogyasztó tehát hajlandó lenne valamivel többet is fizetni egy egységnyi többlet x jószágért, mert így magasabb W-szintre kerül.

Tegyük fel, hogy belép x-piacon egy x^F feketepiaci kínálat, p_x^F feketepiaci árral. Ebben az esetben az áregyenes az A pontban megtörik, hiszen feltehetően $p_x^F > p^*$ és így, ha a fogyasztó balra kívánna mozdulni, akkor ezt a hivatalos áregyenesen tehetné, míg extra (fekete) x áru vásárlása egy relatíve magasabb p_x^F árat jelent (lásd a 4. ábrát). A p_x^F feketepiaci áregyenes meredeksége (abszolút értékben) nem lehet nagyobb, mint a W_0 görbe meredeksége (abszolút értékben) az A pontban, mert akkor egységnyi többlet x érdekében olyan sok y-ról kellene lemondania, hogy ez már jólétveszteséggel járna. Az effektív feketepiaci ár alsó határa tehát a Kantorovics-egyensúlyi ponthoz tartozó helyettesítési határráta monoton függvénye.

Az A pont instabilitását jól jelzi a Fogyasztók rendkivül jelentős reagálása a feketepiac megjelenésére. Tekintsük az 5. ábrát, ahol a feketepiaci (exogén) kínálat és ezzel együtt a hozzátartozó áregyenes meredeksége változik. Ahogy az x_a-n felüli x^F feketepiaci kínálat nő, úgy az AX_1^F áregyenes - szakasz egyre laposabb lesz. Ezen a szakaszon a fogyasztó mindig azt a pontot választja, ahol az áregyenes–szakasz érintkezik a legmagasabb értékü W-görbével, s így mindig nyer egy kicsit az üzleten. Matematikailag (meglehetősen komplikált módon) bizonyítható, hogy ez az F feketepiaci kontrakt-görbe, ami a Fogyasztók tényleges összes (x, y) fogyasztását (s annak függését a feketepiaci áraktól) írja le, alulról konvex. Mégpedig oly módon, hogy kezdetben az első egység x^F megjelenése, s a legmagasabb (a helyettesítési határrátának megfelelő) áraknál az y fogyasztása – tehát a kényszerhelyettesítés –

10 Ez a megállapítás többé-kevésbé megfelel a hiány és slack között KORNAI (1980) által megfogalmazott kapcsolatnak. Persze azzal a különbséggel, hogy ő végig globális és nem strukturális egyensúlytalanságot tételezett fel.

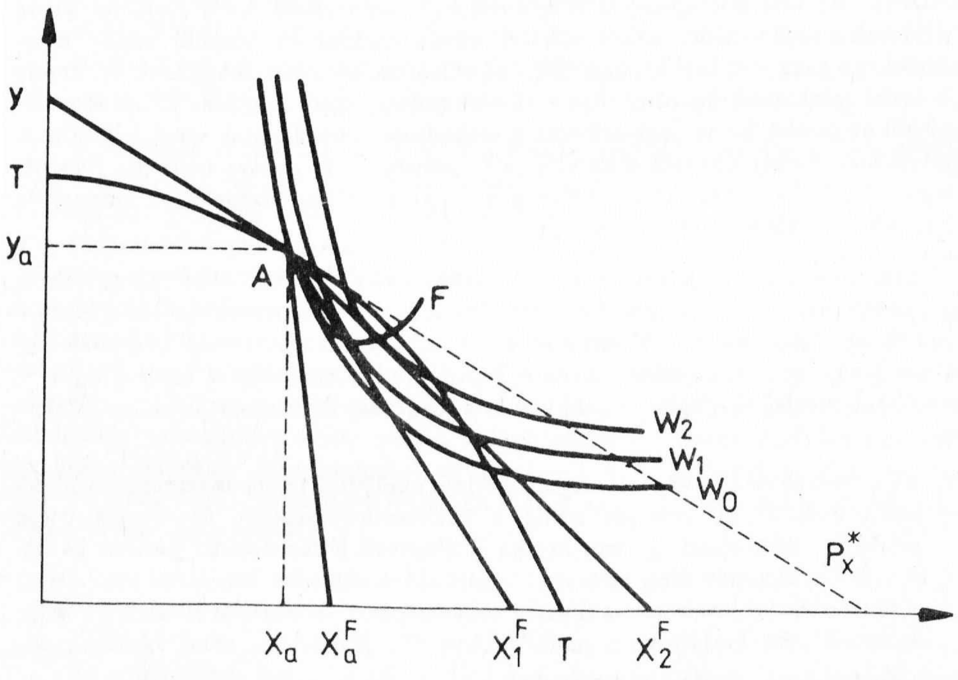


4. ábra

rohamosan zuhan. Majd a feketepiaci árak csökkenésének pozitív jövedelmi hatása ezt a zuhanást megállítja, és visszafordíthatja.

A feketepiaci kontrakt-görbe természetesen átmegy a szabadpiaci (B) egyensúlyi ponton. E modellben tehát a feketepiaci kínálat (exogén) megjelenése fokozatosan növeli (ceteris paribus) a fogyasztói jólétet, s jövedelmet von el az állami szektortól, explicitté téve az addigi $(y_a - y_c)$ fogyasztás kényszerhelyettesítés-jellegét. Következésképpen a feketepiaci kínálat ex post korrigáló mechanizmus, amely igyekszik a termelést a fogyasztói igényekhez hozzáigazítani.

A végső egyensúly az F-kontrakt görbén akárhol alakulhat, a W-függvények alakjától és a feketepiaci exogén kínálattól függően. Figyelembe kell azonban vennünk, hogy elemzésünkben a megtakarítási lehetőségektől eltekintettünk, és exogén feketepiaccal dolgoztunk. Ha a megtakarítás jóléti hatása nem zéró, akkor a kontrakt-görbe az (x, y) síkban kétségkívül laposabb lesz, hiszen egyrészt a kiinduló y_z alacsonyabb, mint y_a, másrészt pedig az elvont jövedelem megoszlik



5. ábra

(határhatásuk viszonyának megfelelően) a kényszermegtakarítás és a kényszerhelyettesítés között. Másfelől pedig a feketepiac endogénné tétele bizonyosan befolyásolná a központi tervet és teljesítését is, hiszen a rendelkezésre álló erőforrások (főként a munkaerő) csökkenése változtatásokra késztetnék a Központot.

Az árarányok központi változtatása

A legkézenfekvőbb ex post egyensúlyteremtési eszköznek az árak változtatása látszik. Az árak változtatásán most csak az árarányok változtatását értjük, az árszinvonalét nem. Ez utóbbi önmagában vett hatása ugyanis megegyezik a reáljövedelmek, az összkereslet változtatásával, amelyről a következő részben lesz szó. A kézenfekvőség ellenére az árváltoztatásokkal a központi vezetés csak igen korlátozottan él, egyfelől mert ennek politikai-ideológiai korlátai vannak, másfelől pedig mert a központi árváltoztatások komoly adminisztrációs nehézségekkel és költségekkel járnak. További korlátot jelenthet, hogy az árváltoztatások esetleges hatása a kínálat szerkezetére nem kívánatos a központi célok szempontjából és ezért külön beavakozásokat igényel ezen mellékhatások megszüntetése.

Az árarányok egyensúlyteremtő célzatú változásának elsődleges célja a kereslet szerkezetének befolyásolása. A kínálatra gyakorolt hatás csak másodlagos, mert a vállalatok nem érdekeltek megfelelően a jövedelmező gazdálkodásban és így az árváltozásokra csak gyengén reagálnak. (Mindemellett, ha a Központ gyors kínálatváltoztatást akar, akkor inkább direkt eszközöket használ ennek megvalósitására.) Az árarányok olyan mértékű változtatására van tehát szükség, amely a kereslet szerkezetét hozzáigazítja a kínálat (adott) szerkezetéhez. Ebből a szempontból nem elég, ha az árak arányát a szabadpiaci szituációnak megfelelő szintre módositják. Ekkor ugyanis a kereslet a C pontról a B pontra változna (lásd 1. vagy 2. ábrát), ami nem szüntetné meg a strukturális feszültségeket, a hiányok és feleslegek csak kismértékben csökkennének.

Igazi megoldást az jelenthet, ha az árarányokat úgy változtatnák meg, hogy a W_0 közömbösségi görbe A pontbeli meredekségével lenne egyenlő (az áregyenes a W_0-nak az A pontbeli $m^*(A)$ érintője lenne a 2. ábrán). Ekkor valóban pontosan akkora lenne az x és y iránti ex ante kereslet, mint amennyi a központi preferenciáknak megfelelő kínálat. Csakhogy ez a megoldás további problémákat idézne elő.

1. Az x termék relatív árának megnövekedése explicitté tenné az eddig is meglévő jóléti veszteséget, amelyet eddig a kényszerhelyettesítés és -megtakarítás eltakart. Különösen így van ez, ha x alapvető létfenntartási javakat jelent. A relatíve alacsony áron tartott – de állandóan elégtelen kínálattal rendelkező – létfenntartási javak azt az illúziót keltették, hogy ezeknek a javaknak a megszerzését nem korlátozza a rendelkezésre álló jövedelem, némi várakozással, sorbanállással végül is megszerezhetők.[11]

2. Ez a piactisztító árarány erősen eltér a központi termelési terv és a termelési lehetőségeknek megfelelő Kantorovics-féle optimális árarányoktól. Ekkor azonban az árak a vállalatokat a központi tervtől eltérő termelési szerkezet megvalósítására ösztönzik. A Központ ebben az esetben vagy teljes körű naturális utasításos rendszert kényszerül bevezetni (ami gyakorlatilag kivihetetlen) vagy pedig a gazdasági önelszámolás fenntartása érdekében állandó és nagymértékű jövedelem-redisztribúciót kell végrehajtania a vállalatok szintjén. Mindkét intézkedésnek komoly negatív konzekvenciái vannak a gazdasági tisztánlátásra és a hatékony gazdálkodásra.

3. A piactisztitó árarányok a szabadpiaci áraknál jóval magasabb relatív árat jelentenek az x hiány-termék vonatkozásában (nyilván ez az elégtelen x-kínálat miatt van így). Ezért aztán könnyen előfordulhat olyan közbülső szituáció a szabadpiaci és a piactisztító árarányok között, amikor a hiány-termék ára

[11] Szovjet példákon keresztül mutatja be WILES (1983) az alacsony létfenntartási cikk árak illuzórikus voltát és ennek politikai fontosságát.

már jóval meghaladja a szabadpiaci árat és mégsincs egyensúly az adott piacon.[12] Így aztán a hiány további fennmaradása és az indokolatlannak vélt áremelkedések negatív hatása együtt jelenik meg. Egyébként ez a jelenség is hozzájárul annak a tézisnek az elfogadásához, mely szerint a szocialista gazdaságban az árak változásával (emelésével) nem lehet megteremteni az egyensúlyt.[13]

A Központ választhat, hogy az árarányok meghatározásánál milyen célokat tart fontosnak: dönthet úgy, hogy a saját termelési tervének megfelelő $p^*(A)$ árarányokat jelöli ki érvényesnek és ekkor a kereslet és a kínálat eltérése miatt nagymértékű strukturális feszültségekkel kell szembenéznie, de dönthet úgy is, hogy olyan árarányokat $m^*(A)$ érvényesít, amelyek a termelés szerkezetéhez hozzáigazítják a kereslet szerkezetét és akkor állandó pénzügyi redisztribuciókat kell végrehajtania a saját preferenciáinak védelmére. A közbülső megoldások (amikor a tényleges árarány $p^*(A)$ és $m^*(A)$ között helyezkedik el) sem termelési, sem fogyasztói szempontból nem kielégítő, mégis a gyakorlatban ezt alkalmazzák leginkább, valószinüleg azért, mert a különböző típusú feszültségek legkedvezőbb együttese itt van. Mindazonáltal az árarányok bármilyen fajta változása nem képes a strukturális feszültségek feloldására, csak az egyik gazdasági szintérről tudja átcsoportosítani a másikra.

Az összkereslet szintjének változtatása

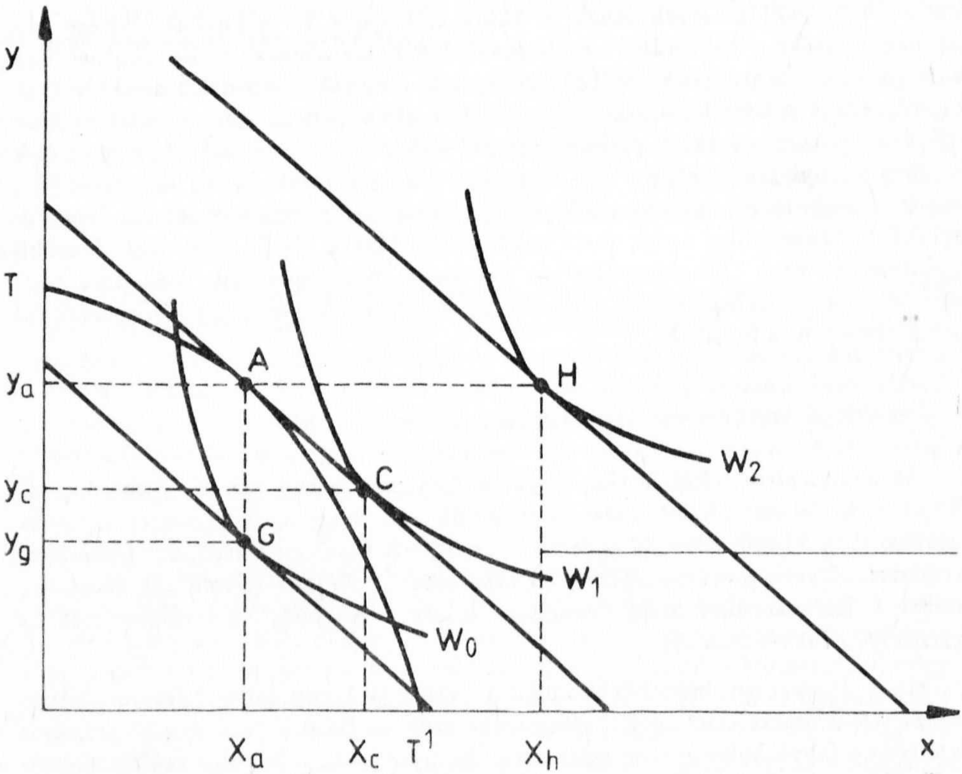
Az eddigiekben feltételeztük, hogy az összkereslet egyenlő az összkínálattal. Oldjuk most fel ezt a feltételezést és engedjük meg, hogy az összkereslet egyaránt nagyobb vagy kisebb lehet az egyensúlyi szintjénél (nyilván a Központ különböző keresletszabályozó tevékenységének következtében). Nézzük először azt az esetet, amikor a (strukturális) hiány fennállása miatt a Központ az összkeresletet az egyensúlyi szint alá szoritja.

Ha k lényegesen különbözik nullától, akkor a hiány teljes felszámolásához nagymértékű összkereslet-korlátozásra lenne szükség (lásd a 6. ábrán az origóhoz legközelebb fekvő költségvetési egyenest). Ez nyilván igen jelentős reáljövedelemcsökkentést jelentene, amely komoly társadalmi feszültségeket okozna, így tehát nemigen számit reális alternatívának. Mindemellett lenne még egy nem elhanyagolható negatív hatása: miközben megszüntetné a hiányt x-ből, nagymértékben megnövelné az eladatlan készletek mennyiségét y-ból vagy, ha y termelése a

[12] PODKAMINER (1982) bizonyítja be összehasonlító elemzések alapján, hogy Lengyelországban a hús ára relatíve magasabb, mint a nyugati országokban és mégis állandóan hiány van belőle.

[13] Az a vélekedés, hogy az árak emelése nem csökkenti a hiányt, igen elterjedt hazánkban, és a majdnem végtelen túlkereslet feltételezésére alapul. Véleményünk szerint nem erről van szó, hanem arról, hogy az árak változása igazából csak a keresletre hat és a kínálatra nem, ezért igen lelassítja az alkalmazkodás folyamatát.

készletnövekedés következtében csökkene, akkor erőteljes kapacitás-kihasználatlanságot idézne elő. Éppen ezért a reálisan szóba jöhető összkereslet-korlátozás ennél jóval kisebb lehet, amely azonban csak részlegesen csökkenti a hiányt és szerényebb mértékben növeli a felesleget.



6. ábra

Vegyük most a másik szélső esetet, az összkereslet növekedését addig a szintig, amig fel nem szívja az összes felesleget (vagyis amig teljessé nem válik a kapacitás-kihasználás).[14] Ennek viszont az lesz az ára, hogy x termékből rendkívüli

[14] Ez az a szituáció, amely a leginkább megfelel Kornai feltételezésének: az erőforrás-korlátokig kiterjedő termelés (vagyis teljes kapacitás-kihasználás) és majdnem végtelen kereslet.

mértékben megnő a hiány és ez fog szinte elviselhetetlenné válni. Tehát ismét csak azt mondhatjuk: nem valószinű, hogy az összkereslet eddig a szintig (lásd a 6. ábrán a legkülső költségvetési egyenest) felemelkedne, a Központ még ez előtt szigorú restrikciókat léptet életbe.

Mindebből világosan kitűnik, hogy az összkereslet szabályozása sem elégséges eszköz az egyensúlytalanság felszámolására. A 6. ábrán jól megfigyelhető a Központ dilemmája: az összkereslet korlátozása ugyan csökkenti a hiányt, de ugyanakkor fokozza a felesleget vagy a kapacitás-kihasználatlanságot, és ellenkezőleg; az összkereslet elengedése ugyan csökkenti a felesleget, a kapacitás-kihasználatlanságot, de növeli a hiányt.[15] Hogy a Központ a feszültségek milyen kombinációját választja az nem független tértől és időtől, a mindenkori politikai-hatalmi viszonyok és az érvényben lévő társadalmi konszenzus ezt erősen befolyásolja. Úgy tünik, hogy a korábbi időszakokban inkább volt elfogadott elv a túlkereslet és a nagy mértékű hiány, mint napjainkban.

(Beérkezett: 1987. július 15-én.)

Irodalom

ARROW, K. J.: A Difficulty in the Concept of Social Welfare, *Journal of Political Economy*, 1950. 58: 328-46.

BENASSY, J. P.: *The Economics of Market Disequilibrium*, New York: Academic Press 1982.

BOADWAY, R. – BRUCE, N.: *Welfare Economics.* Oxford: Basil Blackwell, 1984.

DESAI, P. – MARTIN, R.: Measuring Resource Allocational Efficiency in Central Planned Economies. In: DESAI (ed).: *Marxism, Central Planning and the Soviet Economy*: Economic Essays in Honor of Alexander Erlich. Cambridge, MA: The MIT Press 1983.

DREWNOWSKY, J.: Dual Preference System in Socialism, in: BORNSTEIN, M. (ed.): *Comparative Economic Systems* : Models and Cases, Richard D. Irwin, Inc., Homewood Illinois 1979.

GRAAFF, J. V.: *Theoretical Welfare Economics*, Cambridge: Cambridge University Press, 1957.

HENDERSON, J. M. – QUANDT, R. E.: *Microeconomic Theory*: a Mathematical Approach, New York: McGraw-Hill, 1980.

KORNAI JÁNOS: *A hiány* , Budapest, KJK, 1980.

MUELLBAUER, J. – PORTES, R.: Macroeconomic Models with Quantity Rationing, *Economic Journal*, 88. December 1978. 788-821.

NICHOLSON, W.: *Microeconomic Theory.* Hillsdale, IL: The Dryden Press, 1978.

PODKAMINER, L.: Estimates of the Disequilibria in Poland's Consumer Markets, 1965–1978, *The Review of Economics and Statistics*, 1982. 64: 423–31.

QUANDT, R.: Concepts and Structures in Disequilibrium Models, *Rivista Internazionale di Scienze e Commerciali*, 32. no. 3. 1985. 207–232.

QUIRK, J. – SAPOSNIK, R.: *Introduction to General Equilibrium Theory and Welfare Economics*, New York: McGraw-Hill, 1968.

SOÓS K. ATTILA: *Terv, kampány, pénz* , Budapest, KJK, 1986.

[15] SOÓS K. A. (1986) konjunktúraciklus magyarázata is hasonló elven alapul. A központi engedés és restrikció változása az általunk emlitett dilemma időszakonként eltérő értékelésének a következménye.

WELLISZ, S. – FINDLAY, R.: Central Planning and the Second Economy in Soviet-type Systems, *The Economic Journal*, 1986. 96: 646–58.
WILES, P.: Soviet Inflation, 1982, *Jahrbuch der Wirtschaft Osteuropas*, 1983. 132–155.

Central allocation of resources and the consumers' good disequilibium in socialist economies

The major features of the central allocation of resources characteristic of socialist economy and the resulting disequilibrium are analysed with the aid of theoretical tools of welfare economics.

The introduction surveys the relationship between central allocation of resources and paternalism. This is followed by a model-like presentation of the necessary discrepancy between the central target setting and the more or less concomitant resource allocation on the one hand and the formation of consumer demand at the micro-level, on the other. This mutual non-correspondence also plays an important role in the macro-balance relations: shortages and surpluses appear simultaneously, inefficient use of resources prevail together with the welfare losses of consumers. This type of structural disequilibrium exists even if there is no aggregate excess demand and the budget constraint of firms is hard.

The structural disequilibrium following from the deviating central and consumer preferences calls forth various ex post equilibrium creating instruments and institutions (black market, central regulation of relative prices and aggregate demand) which, however, cannot completely eliminate the causes of imbalances.

Szigma, XX. (1987-88) 1. sz.

KIRÁLY JÚLIA

Inhomogén népesség a növekedési modellekben *

1. Bevezetés

A neoklasszikus növekedési elméletek valamifajta aranyszabály megfogalmazására törekednek, aminek betartása esetén a gazdaság az optimális fejlősési pályán haladhat. A gazdasági pálya alakulása ezekben a modellekben gyakorlatilag három tényezőtől függ: a *tőke* alakulásától, a *munkaerő* alakulásától és végül a *technikai haladástól.* A modellekben általában hallgatólagosan felteszik, hogy a munkaerő (avagy ami ezzel legtöbb esetben ekvivalens: a népesség) alakulása és a technikai haladás kivülről adott, időbeli alakulásuk a modellek legnagyobb részében exogén adottság illetve általában endogenizálásuk sem szabályozhatóságukat, hanem csak áttételes befolyásolhatóságukat jelenti.

A harmadik tényező, a *tőke* az, amelyik feltételezetten, a felhalmozási (illetve, ami a modellekben ezzel ekvivalens, a megtakarítási) ráta helyes megválasztásával kontrollálható, így a növekedési modellek megoldásai optimális felhalmozási pályákban fogalmazódnak meg. A neoklasszikus iskola alkotta meg a Megtakarítások Aranyszabályát (Golden Rule of Saving), ami egyszerű megfogalmazásánál és jó interpretálhatóságánál fogva azóta viszonyítási alapot, egyfajta sztenderdet nyújt minden dinamikus modell számára. Így vagy úgy az Aranyszabályt fogalmazzák át az eltérő feltevésekkel élő különböző modellek.

A cikk első része egy egyszerű kontrollmodell alapján röviden ismerteti a Megtakarítások Aranyszabályát.

A második részben bevezetem az inhomogén népesség fogalmát. A népesség aktív és inaktív csoportokra bomlik, akiket eltérő jövedelemszerzési és fogyasztási lehetőségek jellemeznek. Az aktív népesség sem homogén a munkavégzés szempontjából, aminek következtében a hagyományostól némileg eltérően jellemezhetjük a munkaerőpiacot.

A harmadik rész az inhomogén népesség feltevése mellett az első részben leírt kontrollmodell keretein belül elemzi az optimális felhalmozási pályát. Belátható, hogy mivel az elmélet alapvető jellegzetességeit ez a relaxáció sem változtatja meg, a megfogalmazható normatív megtakarítási pálya szoros rokonságban áll az Aranyszabállyal.

---

* A tanulmány részeredménye annak a kutatómunkának, melyet a szerző a Rotterdami Egyetem Ökonometriai Intézetében B.M.S. van Praag professzor vezetésével M. Pradhannal együtt folytatott. Ezúton is szeretném segítségüket megköszönni, a cikkben található hibákért azonban egyedül vállalom a felelősséget.

A tanulmányban alkalmazott jelölések
(az előfordulás sorrendjében)

a bruttó mennyiségeket (össznépesség, összfogyasztás...) *latin nagybetűk*, az egy főre jutó mennyiségeket és arányokat (egy főre jutó fogyasztás, megtakarítási ráta...) *latin kisbetűk*, míg az egyéb paramétereket *görög betűk* jelölik.

t	idő
$\dot{y}$	idő szerinti derivált: $\partial y/\partial t$
$K(t)$	bruttó tőkeállomány
$L(t)$	a munkaerőállomány nagysága (az első fejezetben megegyezik a népesség nagyságával)
$C(t)$	összfogyasztás
$s(t)$	megtakarítási ráta
δ	lineáris amortizációs kulcs
n	a népesség – illetve a munkaerő – növekedési üteme
$F(K,L)$	termelési függvény (felt: lineáris homogén)
$f(k)$	egy főre jutó termelés az egységnyi munkaerőre jutó tőke függvényében
$c(t)$	egy főre jutó fogyasztás – a homogén modell kontrollváltozója
$k(t)$	egységnyi munkaerőre jutó tőkeállomány – a kontrollmodell állapotváltozója
$U(\cdot)$	hasznossági függvény
ρ	diszkonttényező
q	a kontrollmodell duálváltozója
$H(\cdot)$	a kontrollmodell jelenértékű Hamilton-függvénye
$P(t)$	népesség
x	a munkavégző képesség mértéke
$\widehat{x}$	a munkaerőpiacra való belépési küszöb
$G(x), g(x)$	a munkavégző képesség szerinti/eloszlás-, illetve sűrűségfüggvény
$PA(t)$	aktív népesség
$PI(t)$	inaktív népesség
$h(x)$	relatív bérstruktúra
$c_A(x,t)$	az aktívak differenciált egy főre jutó fogyasztása
$c_I(t)$	az inaktívak átlagos egy főre jutó fogyasztása
$w(t)$	átlagos bérszinvonal (az inhomogén modell kontrollváltozója)
μ	lineáris társadalombiztosítási járulék
γ	a munkaerő és a népesség aránya
π, η	segédváltozók

1. A Megtakarítás Aranyszabálya

A neoklasszikus növekedési iskola legismertebb eredménye az ún. *aranykori* növekedés, amelyet úgy jellemezhetünk, hogy valamennyi abszolút mennyiség (népesség, termelés, tőke, munkaerő, fogyasztás) egyenletesen és egyforma ütemben nő, valamennyi relatív mennyiség (az egy főre jutó termelés, tőke, fogyasztás, valamint a felhalmozási ráta) konstans és a társadalmi összhaszon (ami valamilyen módon az egy főre jutó fogyasztás mennyiségétől függ) maximális. Ekkor a felhalmozási ráta – konstans skálahozadék feltételezése mellett – éppen megegyezik a tőke részesedésével – vagyis a tőkének határtermelékenysége alapján járó jövedelemhányaddal.

Ezt az eredményt a Solow–Swan modell alapján szokták levezetni. A modellben a tőke időbeli változását leíró összefüggés:

tőkeállomány változása = beruházás – lineáris amortizáció.

A beruházás, amit a felhalmozás szinonimájaként használok, mivel ezek a modellek általában eltekintenek a készletfelhalmozástól, az adott évi termeléstől függ:

beruházás = termelés – fogyasztás =

= termelés × megtakarítási ráta.

Látható, hogy a beruházás nagysága ekvivalens módon szabályozható a fogyasztással avagy a megtakarítási rátával, tehát az egyikre adott aranyszabály egyértelműen átfogalmazható a másikra. Az adott évi tőkeállományt K-val, a munkaerőállományt L -lel, a fogyasztást C-vel, a megtakarítási rátát s-sel, az amortizációs kulcsot δ-val jelölve, és feltéve, hogy a technikai haladástól eltekintve az adott évi termelés leírható egy lineáris homogén termelési függvénnyel, a tőke mozgásegyenletére ezt kapjuk:

$$\dot{K} = -\delta K + F(K, L) - C = -\delta K + sF(K, L)\,. \tag{1.1}$$

Feltéve, hogy a munkaerőállomány megegyezik a népességgel, a népesség egyenletes n ütemben bővül, és kisbetűvel jelölve az egy főre jutó mennyiségeket, a fenti egyenlet egyszerű transzformációjával meghatározható az egy főre jutó tőkeállomány dinamikus pályája:

$$\dot{k} = -(\delta + n)k + f(k) - c = -(\delta + n)k + sf(k)\,. \tag{1.2}$$

A gazdaság stacionárius, ha valamennyi abszolút mennyiség egyenletesen és egyforma – a népességnövekedéssel megegyező – ütemben nő, azaz ha az egy főre jutó tőke, termelés, fogyasztás... időben konstans. Ekkor tehát van olyan k, hogy $\dot{k} = 0$, azaz

$$-(\delta + n)k + sf(k) = 0\,. \tag{1.3}$$

Belátható, hogy f-re kirótt meglehetősen általános feltételek mellett létezik ilyen k (vö. pl. RAMANATHAN, 1982). Ekkor a fenti képletből levezethető:

$$s = k(\delta + n)/f(k)\,. \tag{1.4}$$

Eltérő s értékek különböző stacionárius pályákat generálnak. Solow és Swan aranykorinak azt a pályát nevezi, amely mentén maximális az egy főre jutó fogyasztás, azaz:

$$\max_s (1 - s)f(k)\,, \tag{1.5}$$

vagy, ami ezzel ekvivalens:

$$\max_k f(k)\,[1 - k(\delta + n)/f(k)]\,. \tag{1.6}$$

Így kapjuk:

$$f_k = \delta + n, \tag{1.7}$$

amit behelyettesítve (1.4)-be jutunk a felhalmozás Aranyszabályához:

$$s = kf_k/f(k). \tag{1.8}$$

Ez éppen igazolja kiinduló állitásunkat, hiszen lineáris homogén termelési függvény esetén $kf_k/f(k)$ éppen a tőke relatív részesedése a megtermelt jövedelemből.

Vegyük észre, hogy a neoklasszikus megközelítés nem foglalkozik azzal, hogyan jut el a rendszer a stacionárius pályára, csak annyit állít, hogy a stacionárius pályák közül az a legjobb, amelyet a fenti Aranyszabály jellemez. Az optimális megtakarítási rátához tartozó optimális egy főre jutó tőkeállományt az (1.3) képlet adja meg, anélkül, hogy e között és egy induló, adott k_0 érték között bármiféle kapcsolat teremtődne.

Éppen ebben térnek el a Solow–Swan-féle megközelítéstől az optimális szabályozási (növekedési) modellek (lásd pl: ARROW–KURZ, 1968), amelyek adott k_0 kiindulópont figyelembevételével határozzák meg a rendszer által követendő optimális pályát és azt vizsgálják, milyen kiindulópont választása esetén vezet ez a pálya stabil egyensúlyhoz. Erről a hosszú távú stacionárius megoldásról mutatható meg, hogy amennyiben nincs időbeli diszkontálás, éppen egybeesik az aranykori pályával. Ebben az esetben tehát nem a stacionárius pályák közötti választás a kérdés, hanem az, hogy van-e olyan optimális pálya, amelyik adott kiindulópont mellett éppen a hosszú távú stacionárius megoldást eredményezi.

Mint azt már az előbb megállapítottuk, ekvivalens módon választhatjuk kontrollváltozóként a fogyasztást avagy a megtakarítási rátát, így most az egyszerűbb tárgyalásmód kedvéért az egy főre jutó fogyasztást tekintjük kontrollváltozónak A Solow–Swan modellben megfogalmazott mozgásegyenlet mellett keressük azt az optimális pályát, amelyen a – diszkontált hasznossági függvénnyel mért – társadalmi jólét maximális. Így az alábbi formálisan megfogalmazott kontrollfeladathoz jutunk, ahol k az állapot- és c a kontrollváltozó:

$$\max_{c,k} \int_0^\infty e^{-\rho t} U\left(c(t)\right) dt \tag{1.9}$$
$$\dot{k} = -(\delta + n)k + f(k) - c$$
$$k(0) = k_0 .$$

ρ jelöli a diszkonttényezőt, $U(\ )$ pedig a szokásos "jó" tulajdonságokkal rendelkező hasznossági függvényt. A feladatot a Pontrjagin maximumelv felhasználásával, a feladathoz tartozó jelen értékű Hamilton-függvény maximálásával és a duálváltozó mozgásegyenletének meghatározásával oldjuk meg. Belátható, hogy jelen esetben a szükséges feltétel egyben elégséges is (ld. SETHI–THOMPSON, 310. o.). A duálváltozót q–val jelölve, $(c^*(t), k^*(t), q^*(t))$ optimális megoldása a feladatnak, ha a jelenértékű Hamilton függvényre

$$H(k, c, q) = U(c) + q[-(\delta + n)k + f(k) - c] \tag{1.10}$$

teljesül, hogy:

$$\begin{aligned} &\text{a)} && \partial H^*/\partial c = 0 \\ &\text{b)} && \dot{q} - \rho q = -\partial H^*/\partial k \\ &\text{c)} && \dot{k} = \partial H^*/\partial q \\ &\text{d)} && \lim_{t\to\infty} k(t)q(t) = 0 \qquad \text{(transzverzalitás)}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Kis átalakítással kapjuk:

$$\begin{aligned} &\text{a)} && U'(c) - q = 0 \\ &\text{b)} && \dot{q} = q(\rho + \delta + n - f_k) \\ &\text{c)} && \dot{k} = -(\delta + n)k + f(k) - c. \end{aligned} \tag{1.12}$$

(1.12 a)-ból q-t kifejezve $\dot{q} = \dot{c}U''(c)$, és (1.12 b)-be behelyettesítve:

$$\dot{c}U''(c) = U'(c)(\rho + \delta + n - f_k). \tag{1.13}$$

Az (1.13) képletet átrendezve jutunk a szabályozó változó optimális pályát leiró mozgásegyenlethez:

$$\dot{c} = (U'/U'')(\rho + \delta + n - f_k). \tag{1.14}$$

Egy fejlődési pálya tehát optimális, ha a kontrollváltozó kielégíti az (1.14) képlettel, a hozzá tartozó állapotváltozó pedig az (1.12.c) képlettel megadott differenciálegyenleteket, valamint az (1.11.d) transzverzalitási feltételt. A továbbiakban a rendszer optimális megoldásáról beszélve ezekre a feltételekre utalok.

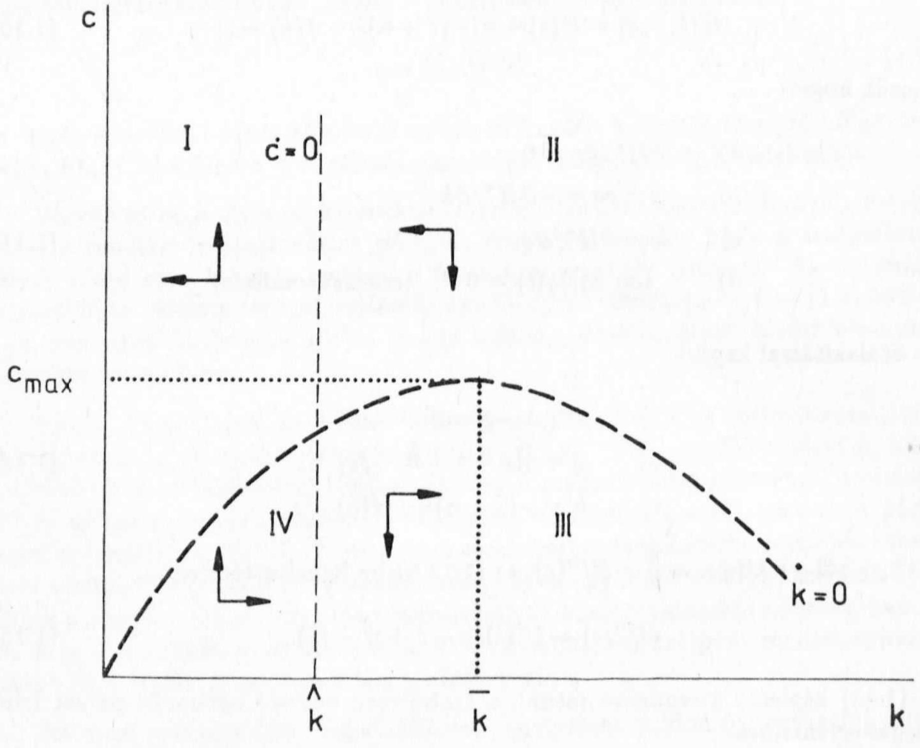
A hosszú távú stacionárius pályán teljesül, hogy mind az állapot-, mind a kontrollváltozó idő szerinti deriváltja zérus, azaz:

$$\dot{c} = 0 \longrightarrow \rho + \delta + n = f_k \tag{1.15}$$

$$\dot{k} = 0 \longrightarrow c = -(\delta + n)k + f(k) \tag{1.16}$$

A könnyebb elemzés érdekében érdemes a pályákat egy kétdimenziós fázisdiagramon ábrázolni (1. ábra).

(1.16)-ból látható, hogy az egy főre jutó fogyasztás időben változatlan, ha k egy kitüntetett $\hat{k}$ értéket vesz fel, míg a $\dot{k} = 0$ megoldását az ábrán szaggatott vonallal jelöltük. A szaggatott görbe és a függőleges egyenes metszéspontjában teljesülnek a hosszú távú stacionaritás feltételei az állapot és a kontrollváltozóra egyaránt, ebből



1. ábra Az optimális növekedési kontrollmodell megoldásának fázisdiagrammja

a "pontból" nincs elmozdulás. Íly módon a fázisteret négy tartományra oszthatjuk, amelyekben (c, k) időbeli mozgását nyilakkal ábrázoltuk.

Az egyes tartományokra jellemző mozgások szintén az (1.15)-(1.16) képletekből olvashatók ki, pl: az I. fázisban $k < \hat{k}$ így $f_k > \rho + \delta + n$, de mivel $U'/U'' < 0$ így $\dot{c} > 0$, azaz az egy főre jutó fogyasztás nő. Ugyanitt $c > -(\delta + n)k + f(k)$ tehát $\dot{k} < 0$, azaz az egy főre jutó tőkeállomány csökken. Hasonló módon elemezhetjük a többi tartománybeli dinamikus viselkedést is.

Látható, hogy I. és III. fázisbeli pályák divergensek, míg a II. és IV. tartománybeli pályák a rendszer egyensúlyi pontjába vezetnek. A transzverzalitási feltételnek (1. 11. d) csak ez utóbbi pályák tesznek eleget, tehát az optimális trajektóriák az egyensúlyi pontba futnak.

Térjünk át ennek a hosszú távú egyensúlyi pályának a jellemzésére. (1.15)-ből tudjuk, hogy

$$\delta + n = f_k - \rho. \tag{1.17}$$

Ezt behelyettesítve az (1.16)-ba:

$$c = (-f_k + \rho)k + f(k)\,. \tag{1.18}$$

Felhasználva, hogy $c = f - sf$, ahol s a megtakarítási ráta, (1.18) átalakításából következik, hogy:

$$\begin{aligned} f(k) - sf(k) &= (-f_k + \rho)k + f(k) \\ s &= kf_k/f(k) - \rho k/f(k)\,. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Látható, hogy (1.19) zéró diszkonttényező ($\rho = 0$) mellett éppen a Megtakarítás Aranyszabályát adja vissza. Vegyük észre, ha a diszkonttényező zérus, akkor az 1. ábrán $\hat{k}$ jobbra tolódik és éppen az egy főre jutó fogyasztás maximumpontján metszi a másik görbét. Így tehát az alábbi összefüggésre jutottunk: végtelen időhorizont esetén az egy főre jutó fogyasztás hasznossági függvényének diszkontálás nélküli maximalizálása egyensúlyi megoldásként éppen a Megtakarítás Aranyszabályát eredményezi és az összes stacionárius pályák közül a maximális egy főre jutó fogyasztásút választja ki.

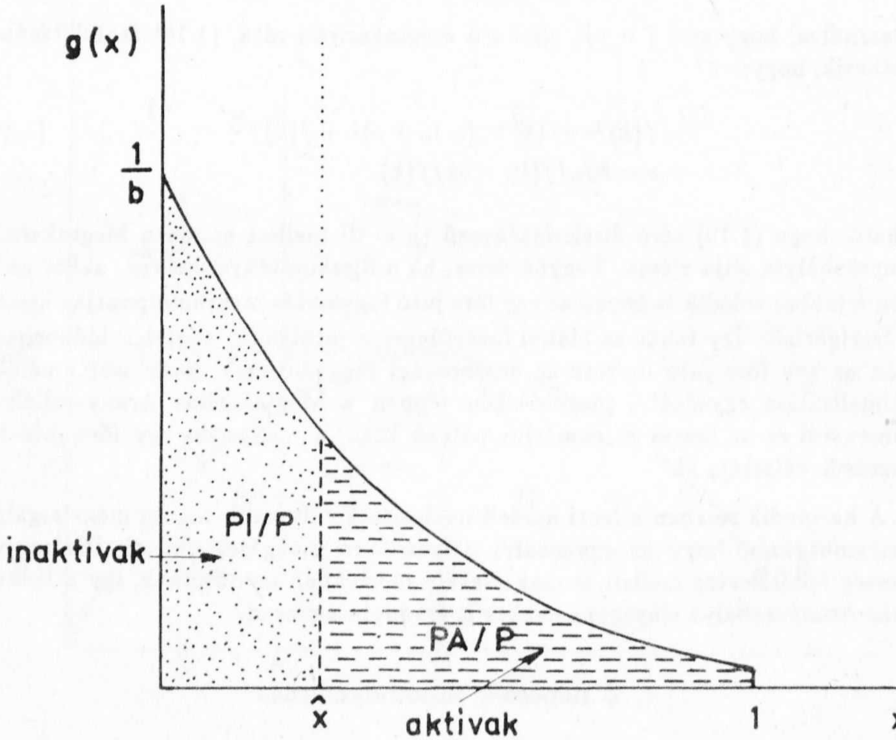
A harmadik részben a fenti modell módositott változatát fogom megvizsgálni, és megmutatom, hogy az egyensúlyi pályát leíró mozgásegyenletek inhomogén népesség feltételezése mellett is csak csekély mértékben módosulnak, így a Felhalmozás Aranyszabálya lényegében ekkor is érvényben marad.

2. A népesség inhomogenitása

Ebben a fejezetben, némileg elszakadva az előző rész elemzésétől tágabb megközelítésben vizsgáljuk a népesség inhomogenitását és ennek különböző irányú következményeit. Az előző fejezetben végig feltételeztük, hogy a népesség homogén, amelyet stabil növekedési ütem, homogén termelékenység, homogén fogyasztás jellemez. A homogenitásból következően a munkaerő éppen megegyezett a népességgel, azaz $L(t) = P(t)$ implicit feltevés húzódott meg valamennyi levezetés mögött, ahol $P(t)$ jelöli a népességet.

Ennek a feltevésnek egy lehetséges feloldását jelenti annak figyelembevétele, hogy nem minden embernek ugyanakkora a munkavégző képessége. Feltesszük, hogy ez a képesség jellemezhető egy $(0, 1)$ intervallumba eső értékkel, amit x-szel jelölünk. Ez a megközelítés nincs ellentétben az inhomogenitásra vonatkozó szokásos feltevésekkel, amikor is a népességet generációk, korcsoportok, képzettségi szint stb. szerint bontják. Kézenfekvő feltevés, hogy a munkavégző képesség és a kor avagy az iskolázottsági szint szoros kapcsolatban állnak egymással.

Mivel a népesség minden tagja jellemezhető ezzel a mértékkel, így feltételezhetjük, hogy létezik a népességnek a $(0, 1)$ intervallumon értelmezett x szerinti



2. ábra Egy hipotetikus sűrűségfüggvény: $g(x) = 1/(ax + b), b = a/(e^a - 1)$

eloszlása, amelynek eloszlásfüggvényét $G(x)$, sűrűségfüggvényét pedig $g(x)$ jelöli. Illusztrációként a 2. ábrán látható egy ilyen lehetséges konstruált sűrűségfüggvény.

Mivel $g(x)$ sűrűségfüggvény, következik, hogy

$$\int_0^1 g(x)dx = 1\,, \quad \text{tehát} \quad P = P\int_0^1 g(x)dx\,. \tag{2.1}$$

Feltesszük, hogy adott szint alatt az emberek be se lépnek a munkaerő piacra, azaz a népesség megoszlik aktív és inaktív keresőkre. Ha ezt a bizonyos „küszöböt" $\widehat{x}$-pal jelöljük, akkor az aktív népesség nagyságát a következő módon tudjuk meghatározni:

$$PA = P\int_{\widehat{x}}^1 g(x)dx\,, \tag{2.2}$$

míg az inaktívak számát az alábbi képlet mutatja:

$$PI = P \int_0^{\widehat{x}} g(x)dx\,. \tag{2.3}$$

A munkaerőkínálatot az aktív lakosság munkavégző képessége határozza meg, azaz:

$$L^S = P \int_{\widehat{x}}^{1} xg(x)dx\,. \tag{2.4}$$

Látható, hogy a modellben az inaktívak aránya, illetőleg a munkaerő/népesség arány a $g(x)$ sűrűségfüggvény paramétereitől, illetőleg $\widehat{x}$ megválasztásától függ. Illusztrációként a mellékelt táblázatban a fentebb ábrázolt sűrűségfüggvényünk segítségével bemutatjuk a paraméterek és a különböző arányok összefüggéseit.

A táblázatból látható, hogy megfelelő paraméterválasztással viszonylag reális összefüggésekhez juthatunk. Az aktívak aránya 55-65% körül mozog, és ezzel nagyjából megegyező a munkaerő nagysága.

Az inhomogenitás bevezetésével megváltozik az összfogyasztás, illetve az egy főre jutó fogyasztás értelmezése is. Reálisnak tűnő feltételezés, hogy az aktívak és inaktívak egy főre jutó fogyasztása eltér egymástól, illetve az aktívaké valamilyen módon függ munkavégzésüktől. A probléma lehetséges megoldását jelenti a megfelelő *bérrendszer* és *társadalombiztosítási rendszer* megválasztása a modellben.

1. táblázat
Demográfiai jellemzők $g(x) = 1/(ax + b)$
sűrűségfüggvény esetén, ahol $b = 1/(e^a - 1)$.

a) Az aktív népesség aránya %

a értéke $\widehat{x}$ értéke	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.25	68.8	67.7	66.6	65.4	64.3
0.30	63.3	62.1	60.9	59.6	58.4
0.35	57.9	56.6	55.4	54.1	52.9

b) Munkaerő/népesség arány (L/P) %

a értéke $\widehat{x}$ értéke	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.25	73.9	66.6	61.0	56.4	52.7
0.30	72.4	65.1	59.4	54.8	51.1
0.35	70.7	63.3	57.6	53.1	49.3

Azt a szokásos feltevést, hogy bérből nincs megtakarítás, vagyis, hogy az egész bér fogyasztásra kerül, továbbra is megtartjuk. Az összes kifizetett bértömeg tehát meghatározza az összfogyasztás szintjét, ezen belül a társdalombiztosítási rendszer keretében történik az újraelosztás; az aktívak munkabéréből levont lineáris adó finanszirozza az inaktívak fogyasztását. Mindebből az is következik, hogy a fogyasztásra rendelkezésre álló termékmennyiség az aktív népesség, illetve a munkaerő nagyságától függ: ennek elfogyasztásában azonban a *teljes* népesség részt vesz. Ezt a nem elhanyagolható körülményt a hagyományos megközelítés a $P = L$ feltétel miatt teljesen figyelmen kívül hagyja.

Legyen a munkavégzéstől, x-től függő bérfüggvény $h(x)$. Belátható, hogy a bérarányok csak abban az esetben felelnek meg a munkavégzési arányoknak, ha $h(x)$ lineáris homogén. Ezt azonban nem feltétlenül követeljük meg, ugyanis természetes jelenség, hogy a bérstruktúrát a béralku az eredeti arányoktól eltéríti. A kifizetett összbér, ami éppen megegyezik az összfogyasztással:

$$\text{összbér} = C = P \int_{\widehat{x}}^{1} g(x)h(x)dx\,. \tag{2.5}$$

Az aktívak egy főre jutó fogyasztása megegyezik a lineáris társadalombiztosítási járulékkal (μ) csökkentett bérükkel:

$$c_A(x) = (1 - \mu)h(x)\,. \tag{2.6}$$

Az inaktívak között az így beszedett adót számos elv alapján szét lehet osztani. A modellben, több nyugat-európai ország gyakorlatát követve, feltételezzük, hogy az inaktívak egyenlő jövedelemhez, illetve fogyasztáshoz jutnak, azaz

$$c_I = \mu C/PI = \int_{\widehat{x}}^{1} \mu g(x)h(x)dx \Big/ \int_{0}^{\widehat{x}} g(x)dx\,. \tag{2.7}$$

Vegyük észre, hogy c_I a fenn elmondottak értelmében x–től független.

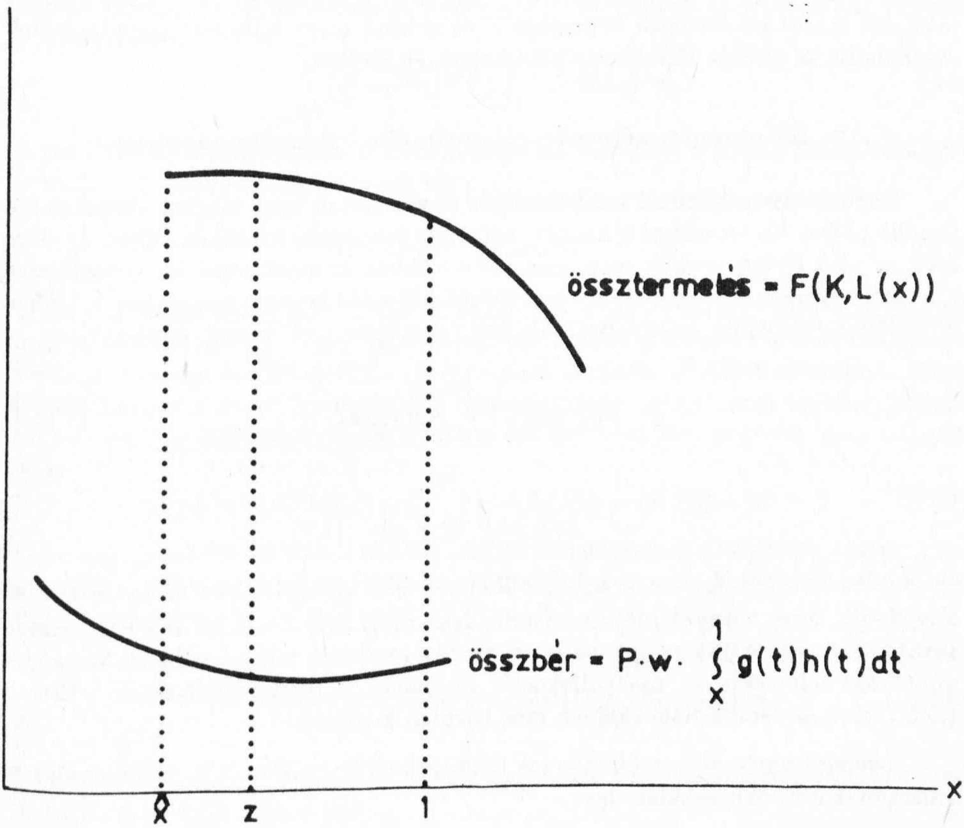
A hagyományos munkapiaci feltételek is módosulnak az inhomogenitás bevezetésével. Feltételezhetjük, hogy a munkaerő keresletét most is a profitmaximálásra való törekvés határozza meg. Rögzített tőkeállomány mellett, ha a termelési függvényt $F(K, L)$-lel jelöljük és feltesszük, hogy a termékár éppen egységnyi, a megoldandó maximumfeladat:

$$\max_{z} F(K, P \int_{z}^{1} xg(x)dx) - \int_{z}^{1} g(x)h(x)dx\,, \tag{2.8}$$

azaz azt a z munkavégzési szintet kell meghatározni, ami mellett még rentábilis a termelés.

Az egyváltozós maximalizálást elvégezve kapjuk:

$$\partial F/\partial L = h(z)/z\,. \tag{2.9}$$



3. ábra A munkaerőpiac jellemzői inhomogén népesség esetén

A $h()$ függvényre kirótt megfelelő megkötések esetén a maximum létezik és kizárólagos. Vegyük azonban figyelembe, hogy modellünk szempontjából csak az $\widehat{x} < z < 1$ megoldás releváns: ugyanis, ha $z < \widehat{x}$, akkor teljes a foglalkoztatottság (a munkaerőpiaci korlát tehát nem effektív), ha pedig $z > 1$, akkor nincs hatékony megoldás a rendszer keretein belül. A 3. ábráról leolvashatók a munkaerőpiac jellegzetességei.

Az ábrán a felső vonal a bruttó termelést reprezentálja x függvényében. Ha x nő L csökken, tehát a bruttó termelés is csökken. A bruttó bér x növekedésével szintén csökken, de csökkenő ütemben. A két görbe közötti különbség a maximumát z-nél éri el. $x > z$-re a terméktöbblet még meghaladja a bértöbbletet, máshol alatta marad. Ha $\widehat{x} > z$, teljes a foglalkoztatottság.

Amennyiben létezik munkanélküliség, úgy az inaktívak száma megnő, és módosulnak az eredeti elosztási viszonyok. Vegyük észre, hogy teljes foglalkoztatottság esetén a hatékony foglalkoztatottsági szint felett alkalmazott munkásoknak (akiknek tehát munkavégző képessége $\widehat{x}$ és z közé esik) kifizetett pótlólagos bér meghaladja az általuk létrehozott többlettermék értékét.

3. Inhomogén népesség az optimális kontrollmodellben

Térjünk vissza kiinduló modellünkhöz és vizsgáljuk meg, hogyan alakul az optimális pálya, ha az eddigi homogén népesség feltevését feloldjuk. Ezen az úton csak az első lépést tesszük meg, ugyanis továbbra is megtartjuk az egyenletesen növekvő népesség feltevését és a munkavégző képesség szerinti megoszlást is időben állandónak tekintjük. Azaz feltesszük, hogy $g(x,t) = g(x)$. Ennek megfelelően:

$$L(t) = P(t) \int_{\widehat{x}}^{1} x g(x) dx \,, \tag{3.1}$$

és így:

$$\dot{L}/L = \dot{P}/P = n \,.$$

Íly módon a népesség és a munkaerőállomány időben egyformán változik, amiből következik, hogy arányuk időben állandó, azaz $L(t)/P(t) = \gamma$ konstans. Úgyszintén továbbra is megtartjuk az optimális növekedési modellek teljes foglalkoztatottságra vonatkozó feltevését is, azaz allokációs problémával nem foglalkozunk. Erre a problémára az összefoglaló részben még röviden kitérünk.

Hasonlóképpen időben állandónak tekintjük a bérstruktúrát is, azonban időben változónak a bérszinvonalat. Így:

$$h(x,t) = w(t) h(x) \,, \tag{3.2}$$

ahol $w(t)$, a bérszinvonal, veszi át a modellben a homogén modellbeli egy főre jutó fogyasztástól, $c(t)$-től, a kontrollváltozó szerepét. Vegyük észre, hogy az inhomogén modellben lényegében $w(t)$ határozza meg az *átlagos egy főre jutó fogyasztás* szintjét.

Feltéve, hogy a hasznossági függvény továbbra is az egy főre jutó fogyasztástól függ, és ez a függvény egyénenként továbbra sem eltérő $U()$, akkor az első fejezetbeli célfüggvény az alábbi alakot ölti:

$$\max_{k,w} \int_0^\infty e^{-\rho t} \left\{ \int_0^{\widehat{x}} U(c_I(t)) g(x) dx + \int_{\widehat{x}}^1 U(c_A(x,t)) g(x) dx \right\} dt \,. \tag{3.3}$$

ahol c_I és c_A az előző fejezetben elmondottakkal és a bérfüggvény fenti dinamizált alakjával összhangban:

$$c_A(x,t) = (1-\mu) w(t) h(x) \tag{3.4}$$

$$c_I(t) = P\left[\int_{\widehat{x}}^{1} \mu w(t)g(x)h(x)dx\right]/PI$$

Ugyancsak így áll elő az összfogyasztás képlete, ami éppen megegyezik a kifizetett bruttó bérekkel:

$$C(t) = w(t)P(t)\int_{\widehat{x}}^{1} g(x)h(x)dx. \tag{3.5}$$

A rendszer mozgásegyenletének a meghatározásához most a bruttó tőkeállományra vonatkozó összefüggésből indulunk ki:

$$\dot{K} = -\delta K + F(K, L) - C. \tag{3.6}$$

Mivel $L \neq P$ így az *egy főre* illetve az *egységnyi munkaerőre* jutó tőke nem egyezik meg. L és P azonban $g(x)$ időfüggetlensége miatt azonos ütemben nőnek: dinamikus viselkedés szempontjából mellékes, hogy melyik „egységnyi" tőkét vizsgáljuk. Mivel továbbra is szeretnénk kihasználni $F()$ homogenitását, az *egységnyi munkaerőre* jutó tőke dinamikus pályáját vizsgáljuk, és ezt jelöljük továbbra is k–val. k–ra teljesül, hogy

$$\dot{k} = \partial(K/L)/\partial t = (\dot{K}/L) - (\dot{L}/L)k = (\dot{K}/L) - nk. \tag{3.7}$$

k mozgásegyenletét az alábbi módon tudjuk meghatározni (3.6)-(3.7), illetve a fogyasztásra (C) vonatkozó képlet felhasználásával, valamint figyelembe véve, hogy $F()$ lineáris homogén, és $P/L = 1/(L/P) = 1/\gamma$:

$$\dot{k} = -(\delta + n)k + f(k) - (1/\gamma)w(t)\int_{\widehat{x}}^{1} h(x)g(x)dx. \tag{3.8}$$

Mindezek után az 1. fejezetben közölt optimális növekedési kontrollmodell (vö. (1.19)) a következő alakot ölti:

$$\max_{k,w}\int_0^{\infty} e^{-\rho t}\left\{\int_0^{\widehat{x}} U(c_I(t))g(x)dx + \int_{\widehat{x}}^{1} U(c_A(x,t))g(x)dx\right\}dt, \tag{3.9}$$

$$\dot{k} = -(\delta + n)k + f(k) - (1/\gamma)w(t)\int_{\widehat{x}}^{1} h(x)g(x)dx$$

$$k(0) = k_0,$$

ahol továbbra is $k(t)$ az állapotváltozó, azonban most $w(t)$ a kontrollváltozó $c_I(t)$ és $c_A(x,t)$ függvényeket pedig (3.4) írja le.

A feladathoz tartozó jelenértékű Hamilton-függvény:

$$H(k, w, q) = \int_0^{\widehat{x}} U(c_I(t))g(x)dx + \int_{\widehat{x}}^{1} U(c_A(x,t))g(x)dx + \tag{3.10}$$

$$+\,q\left[-(\delta + n)k + f(k) - (1/\gamma)w(t)\int_{\widehat{x}}^{1} h(x)g(x)dx\right]$$

(w^*, k^*, q^*) optimális megoldása a feladatnak, ha teljesül:

$$\begin{aligned}
&\text{a.} \quad \partial H^*/\partial w = 0 \\
&\text{b.} \quad \dot{q} = \rho q - \partial H^*/\partial k \\
&\text{c.} \quad \dot{k} = \partial H^*/\partial q \\
&\text{d.} \quad \lim_{t\to\infty} k(t)q(t) = 0 \quad (\textbf{transzverzalitás})\,.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

(3.11.a) kiszámításához vegyük figyelembe, hogy

$$\partial U/\partial w = (\partial U/\partial c)(\partial c/\partial w) = U'(c)(\partial c/\partial w)\,, \tag{3.12}$$

ahol c_A így $U'(c_A)$ x-től függő, míg c_I így $U'(c_I)I$ x-től független kifejezések. Ezt az összefüggést, valamint az egy főre jutó fogyasztások (3.4) képleteit alkalmazva (3.11.a)-ból kapjuk:

$$\begin{aligned}
\partial H/\partial w = (1-\mu)\int_{\widehat{x}}^{1} U'(c_A(x))g(x)h(x)dx + \\
+\left[P\mu\int_{\widehat{x}}^{1} g(x)h(x)dx/PI\right] U'(c_I)\int_0^{\widehat{x}} g(x)dx - \\
-(1/\gamma)q\int_{\widehat{x}}^{1} g(x)h(x)dx = 0\,,
\end{aligned} \tag{3.13}$$

q-ra rendezve az egyenletet adódik:

$$q = \frac{1}{\pi}\int_{\widehat{x}}^{1} \left[(1-\mu)U'(c_A(x)) + \mu U'(c_I)\right] g(x)h(x)dx\,, \tag{3.14}$$

ahol:

$$\pi = (1/\gamma)\int_{\widehat{x}}^{1} g(x)h(x)dx\,.$$

(3.14) alapján meghatározható q idő szerinti deriváltja is, figyelembe véve, hogy a jobb oldalon csak $c_A(x,t)$ és $c_I(t)$ függ az időtől és idő szerinti deriváltjuk:

$$\begin{aligned}
&\text{a.} \quad \dot{c}_A(x,t) = \dot{w}(t)(1-\mu)h(x) \\
&\text{b.} \quad \dot{c}_I(t) = (P/PI)\dot{w}(t)\left[\mu\int_{\widehat{x}}^{1} h(x)g(x)dx\right].
\end{aligned} \tag{3.15}$$

$\dot{w}(t)$ azonban x-től független változó, tehát kiemelhető az integráljel elé, így q idő szerinti deriváltjára adódik:

$$\dot{q} = (\dot{w}/\pi)\int_{\widehat{x}}^{1} \left[(1-\mu)^2 h(x)U''(c_A) + \tau\right] h(x)g(x)dx\,, \tag{3.16}$$

ahol:

$$\tau = \mu^2 U''(c_I) \left[\int_{\widehat{x}}^{1} h(x) g(x) dx \right] (P/PI) .$$

Az optimum feltételek közül (3.11.b) adja meg q idő szerinti deriváltját, aminek alapján $\dot{q}$-ra egy új kifejezést kapunk:

$$\dot{q} = q(\rho + \delta + n - f_k) . \tag{3.17}$$

Ha (3.17)-be behelyettesítjük a q-ra (3.14)-ből illetve $\dot{q}$-ra (3.16)-ból nyert kifejezéseket, megkapjuk a kontrollváltozó optimalitásának mozgásegyenlet formájában megfogalmazott feltételét:

$$\dot{w} = (Y/Z)(\rho + \delta + n - f_k) , \tag{3.18}$$

ahol:

$$Y = \int_{\widehat{x}}^{1} [(1-\mu)U'(c_A) + \mu U'(c_I)]\, g(x) h(x) dx$$

$$Z = \int_{\widehat{x}}^{1} \left[(1-\mu)^2 h(x) U''(c_A) + \tau \right] h(x) g(x) dx .$$

A képlet hasonlít a homogén modellbeli kontrollváltozót, $c(t)$-t meghatározó kifejezéshez, ami nem meglapő, hiszen, mint láttuk tartalmilag $w(t)$ megegyezik $c(t)$-vel. Az Y és Z kifejezések „magja" most is a hasznossági függvény első, illetve második deriváltja. A $h()$, illetőleg $g()$ függvények tulajdonságai miatt – mindkettő szigorúan pozitíív – valamint, mivel $\mu < 1, U' > 0, U'' < 0$, következik, hogy Z szigoruan negatív, Y szigoruan pozitív, tehát w előjele ismét csak $\rho + \delta + n - f_k$ előjelétől függ, akárcsak a homogén modellben. A stacionárius állapot, $\dot{w} = 0$ akkor áll fenn, ha

$$\rho + \delta + n = f_k , \tag{3.19}$$

azaz a mellett a $\widehat{k}$ mellett, melyre (3.19) teljesül. A homogén népesség esetével összevetve tehát azt mondhatjuk, hogy a kontrollváltozónak – amely itt is az egy főre jutó átlagos fogyasztást határozza meg – a stacionárius állapotát inhomogén esetben is a fenti feltétel jellemzi, azonban az ide vezető pálya paraméterei eltérnek a homogén esetétől.

Ezek után vizsgáljuk meg az állapotváltozó optimalitásának feltételeit. (3.11.c)-ből következik, hogy:

$$\dot{k} = -(\delta + n)k + f(k) - (1/\gamma) w(t) \int_{\widehat{x}}^{1} h(x) g(x) dx . \tag{3.20}$$

A hosszú távú egyensúlyi helyzetben teljesülni kell, hogy:

$$\dot{k} = 0 \longrightarrow f(k) = -(\delta + n)k + \pi w(t) , \tag{3.21}$$

ahol ismét

$$\pi = (1/\gamma)\int_{\widehat{x}}^{1} g(x)h(x)dx\,.$$

(3.19) behelyettesítésével kapjuk:

$$f(k) = (f_k - \rho)k + \pi w(t)\,. \tag{3.22}$$

A fázistér ismét négy részre osztható, és a transzverzalitási feltétel miatt megint csak a stacionárius állapotba konvergáló pályák optimálisak, tehát a rendszer hosszú távú optimális megoldását a stacionér pálya tulajdonságai jellemzik.

Ebben a hosszú távú egyensúlyi megoldásban vizsgáljuk a megtakarítási ráta alakulását. Ha felhasználjuk, hogy a megtakarítási ráta kifejezhető az egy főre jutó fogyasztásból, azaz:

$$\pi w(t) = (1-s)f(k)\,, \tag{3.23}$$

akkor azt kapjuk, hogy az inhomogén modell optimális stacionárius állapotát az alábbi felhalmozási ráta jellemzi:

$$s = kf_k/f(k) - \rho k/f(k)\,. \tag{3.24}$$

Ez viszont megegyezik a homogén modell hosszú távú egyensúlyi állapotát jellemző megtakarítási rátával (vö. (1.19)), azaz zéró diszkontálás esetén a Megtakarítások Aranyszabályának felel meg.

4. Munkanélküliség a homogén és az inhomogén modellekben

Az optimális növekedési kontrollmodellek *aggregált makroösszefüggéseket* határoznak meg, implicit módon feltételezve, hogy a kapacitások teljes kihasználása *hatékony* allokáció mellett valósul meg. Feloldják a rövid távú modellek allokációs célokat szolgáló piaci korlátait, a kapacitás kihaszálását nem befolyásolja jövedelmezőségi korlát.

Ennek a korlátnak a feloldása természetszerűleg nagyobb mozgásteret eredményez. Az optimális kontrollmodell ebből a szempontból korlát nélküli optimalizálást jelent. Eléggé nyilvánvaló, hogy egy korlát beépitése csak ronthat az optimális megoldáson, ha egyáltalán létezik az adott korlát mellett minden kiinduló állapothoz optimális megoldás.

Anélkül, hogy a profitkorlát beépítésének következményeit részletesen analitikusan megvizsgálnám csak röviden térek ki arra, hogy a munkaerőpiacon érvényesülő profitszempont milyen korlátozásokat eredményez a megtakarítási rátára nézve a *homogén*, illetőleg az *inhomogén* modellben.

A már említett kutatás során egy dinamikus programozási diszkrét növekedési modell segítségével éppen az így generált különböző pályákat hasonlítottuk össze (PRAAG–KIRÁLY–PRADHAN, 1987).

Az egyszerűbb összehasonlíthatóság érdekében a homogén modellben is az átlagos bérszinvonal $w(t)$ függvényében fejezzük ki az összefüggéseket. Homogén népesség esetén a bérstruktúra is homogén. Az összfogyasztás = összbér feltétel így homogén esetben azt jelenti, hogy:

$$C(t) = w(t)L^*(t)\,, \tag{4.1}$$

ahol $L^*(t)$ a felhasznált munkaerő. A munkaerő keresletét, illetve kínálatát - felhasználva a 2. fejezetbeli profitmaximalizálásból levezetett feltételt - az alábbi összefüggések határozzák meg:

$$\begin{aligned} \text{kereslet:}\quad & F_L(K, L^D(t)) = w(t) \\ \text{kinálat:}\quad & L^S(t) = P(t) \\ & L^*(t) = \min(L^D(t), L^S(t))\,. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Amennyiben $L^*(t) = L^S$, azaz a munkaerő keresleti korlát nem effektív, ez azt jelenti, hogy a bérszinvonal alacsonyabb a teljes foglalkoztatottság melletti határtermelékenységnél, azaz $w < F_L(K, L^S)$. A munkanélküliség és a teljes foglalkoztatottság esetére tehát együttvéve teljesül, hogy:

$$w(t) \le F_L(K, L^*(t))\,, \tag{4.3}$$

amikor is az egyenlőség munkanélküliség (effektív profitkorlát) mellett áll fenn. A $w(t)$-re kapott korlátot az összfogyasztás (4.1) képletébe helyettesítve az alábbi egyenlőtlenséget kapjuk:

$$C(t) \le L^*(t)F_L(K, L^*(t))\,. \tag{4.4}$$

A fogyasztás+beruházás=kibocsátás egyenlőséget és a megtakarítás=beruházás ex post azonosságot felhasználva a megtakarítási rátára a következő korlátot irhatjuk fel:

$$s \ge KF_K/F = \text{a tőke részesedése}\,, \tag{4.5}$$

azaz munkanélküliséget megengedő homogén modell esetén *a megtakarítási ráta nem lehet kisebb, mint a tőke részesedése*, és azzal egyenlő, ha a munkanélküliségi korlát effektív.

Vizsgáljuk meg most ugyanezt az összefüggést az inhomogén modellben. Az összfogyasztás képlete (lásd (3.5)):

$$C(t) = w(t)P(t)\int_{\widehat{x}}^{1} h(x)g(x)dx\,. \tag{4.6}$$

A munkaerőpiaci feltételek már ismertek a 2. fejezetből:

$$\text{kereslet:} \quad L^D(t) = P(t)\int_z^1 xg(x)dx\,, \text{ahol}: w(t) = zF_L(z)/h(z) \tag{4.7}$$

$$\text{kinálat:} \quad L^S = P(t)\int_{\widehat{x}}^1 xg(x)dx$$

$$L^*(t) = P(t)\int_{x^*}^1 xg(x)dx\,,$$

ahol: $x^* = \max(z, \widehat{x})$.

Belátható, hogy a keresleti korlát csak akkor nem effektív, ha a bérszinvonal olyan alacsony, hogy $w < \widehat{x}F_L(\widehat{x})/h(\widehat{x})$. Tehát a bérszinvonalra összefoglalóan az alábbi egyenlőtlenséget kapjuk:

$$w(t) \leq x^* F_L(x^*)/h(x^*)\,, \tag{4.8}$$

ahol az egyenlőség effektív profitkorlát mellett áll fenn. Ennek következtében az összfogyasztásra fennáll az alábbi egyenlőtlenség:

$$C(t) \leq F_L(x^*)P(t)\left[x^*/h(x^*)\right]\int_{x^*}^1 h(x)g(x)dx = \eta F_L(x^*)\,. \tag{4.9}$$

Ez a korlát még korántsem eredményez olyan egyértelmű következtetéseket, mint a homogén esetben. Figyelembe véve ugyanis, hogy:

$$L^*(t) = P(t)\int_{x^*}^1 xg(x)dx\,, \tag{4.10}$$

ahol: $x^* = \max(z, \widehat{x})$ három eset képzelhető el:

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \eta < L(x^*) \\ &\text{b)} \quad \eta = L(x^*) \\ &\text{c)} \quad \eta > L(x^*)\,. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Megmutatható, hogy (4.11) bármelyik alesete előfordulhat megfelelően megválasztott – x-ben növekvő – bérfüggvény mellett.

a) Legyen $h(x) = x^{1-\lambda}, \lambda \leq 1$. Ekkor, mivel $x^* \leq x$, ezért $(x^*)^\lambda \leq x^\lambda$, tehát:

$$\eta = \int_{x^*}^1 (x^*)^\lambda x^{1-\lambda} g(x)dx \leq \int_{x^*}^1 xg(x)dx = L(x^*)\,, \tag{4.12}$$

azaz $\eta < L(x^*)$. Így az összfogyasztásra felírt egyenlőtlenségsor tovább folytatható, és a megtakarítási rátára *szigorú* egyenlőtlenség formájában kapjuk (tehát függetlenül attól, hogy éppen hatékony-e a munkaerőkorlát vagy sem!):

$$s > KF_K/F = \text{a tőke részesedése}\,. \tag{4.13}$$

b) Az egyenlőség áll fenn (4.11)-ben, ha a bérfüggvény éppen kifejezi a munkateljesítményeket, azaz $h(x) = x$, ami éppen az előző eset $\lambda = 0$ esetén:

$$\eta = \int_{x^*}^{1} [x^*/x^*]\, xg(x)dx = L(x^*)\,. \tag{4.14}$$

Ez az eset tökéletesen megegyezik a homogén esettel; a megtakarítási ráta effektív munkaerő piaci korlát esetén megegyezik a tőke részesedésével, ellenkező esetben meghaladja azt.

c) Legyen most $h(x) = ax - b$, ahol $a, b > 0$. Ekkor:

$$\begin{aligned} \eta &= \int_{x^*}^{1} \frac{x^*}{ax^* - b}(ax - b)g(x)dx \geq \\ &\geq \int_{x^*}^{1} \frac{x(ax^* - b)}{ax^* - b} g(x)dx = \int_{x^*}^{1} xg(x)dx = L(x^*)\,, \end{aligned} \tag{4.15}$$

azaz $\eta > L(x^*)$. Így a fogyasztásra vontkozó egyenlőtlenségsorozatot folytatni nem tudjuk és a megtakarítási rátára egy kissé értelmezhetetlen alsó korlátot kapunk:

$$s = (F - C)/F \geq 1 - \eta(F_L(x^*)/F(x^*)\,, \tag{4.16}$$

ami nem tudjuk milyen kapcsolatban áll a tőke részesedésével.

Összefoglalóan tehát azt mondhatjuk, hogy mind homogén, mind inhomogén esetben a munkaerőpiaci korlát a megtakarítási ráta korlátozását – így az optimum romlását – jelenti, azonban inhomogén esetben különböző bérfüggvények választásával ezt a korlátot erősíteni vagy lazítani tudjuk.

(Beérkezett: 1987. június 5-én.)

Irodalom

ARROW, J.K. (1968): "Application of Control Theory to Economic Growth", in *Lectures in Applied Mathematics*, vol. 12. American Mathematical Society: Providence, R.I.

BUHL, H.V. (1984): "A Discrete Model of Optimal Economic Growth", *Journal of Macroeconomics*, Fall 1984. vol. 6. no. 4, pp. 447–456.

BURMEISTER, E. and DOBEL, A.R. (1970): *Mathematical Theories of Economic Growth,* London: MacMillan.

CASS, D. (1965): "Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation", *Review of Economic Studies*, 32(3), pp. 233–24O.

RAMANATHAN, R. (1982): *Introduction to the Theory of Economic Growth,* Springer-Verlag.

RAMSEY, F.P. (1928): "A Mathematical Theory of Saving", *Economic Journal*, vol. 39, 1928, pp. 543–549.

RITYEN, J.M.M. and VAN PRAAG, B.M.S. (1985): "Golden Rules and Non-stationary Population", (Manuscript).

SETHI, S.P. and G.L. THOMPSON (1981): *Optimal Control Theory*, Martinus Nijhoff Publishing.

SHELL, K. (ed.), (1967): *Essays on the Theory of Optimal Economic Growth*, The M.I.T. Press.

VAN PRAAG B.M.S. and PRADHAN, M.P. (1986): A Flexible Programming Model to Study the Problems of Population Economics, (Manuscript).

VAN PRAAG, B.M.S. - J. KIRÁLY - M. PRADHAN: Inhomogeneous population - optimal control by wage level. A computable dynamic programming model. (Manuscript)

Inhomogeneous population in the growth models

The paper examines saving rates with the aid of optimum growth control models, assuming homogeneous and inhomogeneous population. It has been found that along a long-term optimal growth path - provided the discount rate is zero - the Golden Rule of Saving holds. This is valid for both the homogeneous and the inhomogeneous cases, insofar as the assumption of uniformly growing population is retained and the distribution of population is constant over time.

The inhomogeneity of population has been interpreted as individually deviating working ability, measured along a $(0, 1)$ scale, and the distribution of population with respect to this variable can thus be determined. I define a corresponding wage structure and a simple social security system to finance the consumption of the population outside the labour market, while maintaining the usual assumption of gross wages = total consumption.

I intended to determine the optimal path of capital per unit labour in both the homogeneous and the inhomogeneous cases, in order to optimize some kind of welfare function with the aid of per capita average consumption level as control variable. In the inhomogeneous case the latter role was played by the variable representing wage level. The optimality conditions derived from the present value Hamilton function were similar in both cases, the conditions of the long-term optimal solutions only deviated in one or two parameters.

As a détour, I studied the impact of a labour market constraint on the saving ratio, and established that this constraint has different effects in the homogeneous and inhomogeneous cases. In connection with this détour I call attention to the fact that the optimal control models - precisely because they implicitely assume an effective microallocation - must be used as instruments of economic policy but only for the purposes of comparative analysis. They should be considered as instruments to generate certain standard paths, suitable for descriptive analysis. But no economic policy maker should dream of implementing them with centralized instruments, else - as testified by several examples - instead of the optimum of the welfare function at most the optimum of wasting resources can be attained.

Szigma, XX. (1987–88) 1. sz.

FÜSTÖS LÁSZLÓ – MESZÉNA GYÖRGY – RESS SÁNDOR –
SIMONNÉ MOSOLYGÓ NÓRA

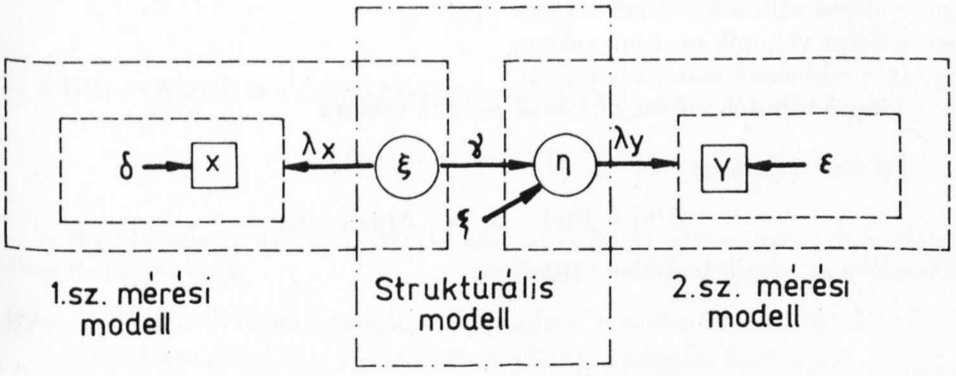
Strukturális kapcsolatok általános lineáris modellje (LISREL)

1. Az általános modell

A LISREL (**L**inear **S**tructural **Rel**ationship) modellrendszer két látens változó halmaz struktúráját írja le, azzal a feltételezéssel, hogy a látens változók közvetlenül nem mérhetők, hanem mögöttes kifejezői a közvetlenül mérhető változóknak.

Az általános modell kétféle típusú blokkot tartalmaz: a *mérési modellt*, amely azt fejezi ki, hogy a mérési változók két komponensre bonthatók, szisztematikus elemre, amit a modellben a látens változó fejez ki, és a mérési hibára. A mérési modellt a függő és független változókra külön-külön írjuk fel.

A *strukturális modell* pedig a látens változók közötti kauzális összefüggéseket fejezi ki. (1. ábra)



1. ábra. Az általános modell sémája

Az ábrán a következő jelölésekkel éltünk:

X: a megfigyelt, független exogén változók halmaza
Y: a megfigyelt, függő endogén változók halmaza
ξ: a látens exogén változók halmaza
η: a látens endogén változók halmaza
λ_x: a független változók faktorsúlyai
λ_y: a függő változók faktorsúlyai
δ: a megfigyelt független változók mérési hibái
ε: a megfigyelt függő változók mérési hibái
γ: a látens változók regressziós együtthatói
ς: a függő látens változók reziduumai.

Az általános modell feltételei kétfélék:

a) rendszer feltételek, ezek a modell becsléséhez szükséges általános feltételek

b) modell feltételek, amelyekkel speciális modellek definiálhatók.

A mérési modellek

A mérési modell két egyenlettel írható fel, az egyik az endogén látens és mérési változók közötti kapcsolatot, a másik pedig az exogén látens és mérési változók összefüggéseit írja le. Az endogén függő változókra:

$$y = \Lambda_y \eta + \varepsilon \,, \tag{1}$$

ahol:

y: a mérési változók p-elemű vektora
η: a látens változók m-elemű vektora
Λ_y: $(p \times m)$-méretű faktorsúly mátrix
ε: a függő változók mérési hibájának p-elemű vektora

Feltételezzük, hogy

$$E(\eta) = E(\varepsilon) = 0 \quad \text{és} \quad E(\eta\varepsilon') = 0 \,.$$

Hasonlóan az exogén független változókra:

$$x = \Lambda_x \xi + \delta \,, \tag{2}$$

ahol:

x: a mérési változók q-elemű vektora
ξ: a látens változók n-elemű vektora
Λ_x: $(q \times n)$-méretű faktorsúly mátrix
δ: a független változók mérési hibájának q-elemű vektora.

Feltételezzük, hogy

$$E(\xi) = E(\delta) = 0 \quad \text{és} \quad E(\xi\delta') = 0 \,.$$

A strukturális egyenletek modellje

A strukturális egyenletek a látens endogén és exogén változók kauzális összefüggéseit írják le:

$$B\eta = \Gamma\xi + \varsigma\,, \tag{3}$$

ahol

B: A látens endogén változók közötti $(m \times m)$-méretű regressziós együttható mátrix

Γ: a látens exogén és endogén változók közötti $(m \times n)$-méretű regressziós együttható mátrix

ς: a függő látens változók reziduális komponense, m-elemű vektor.

Feltételezzük, hogy

$$E(\eta) = E(\xi) = E(\varsigma) = 0 \quad \text{és} \quad E(\xi\varsigma') = 0$$

valamint, hogy a B mátrix nem szinguláris.

Az eddigiekből megállapítható, hogy általános rendszerfeltételek a következők:

a) a mérési hibák és a reziduális tag korrelálatlanok:

$$E(\varsigma\varepsilon') = 0 \quad \text{és} \quad E(\varsigma\delta') = 0\,.$$

b) a két mérési modell hibája korrelálatlan:

$$E(\varepsilon\delta') = 0\,,$$

c) a látens változók és a mérési hibák korrelálatlanok:

$$E(\xi\delta') = 0 \quad \text{és} \quad E(\eta\varepsilon') = 0\,.$$

A modellrendszer akkor tekinthető adottnak, ha az alábbi nyolc paraméter mátrixot specifikáltuk:

1. Λ_y: a megfigyelt függő (endogén) változók $(p \times m)$-méretű faktorsúly mátrixa. Általános eleme λ_{yij} a j-edik látens változó közvetlen hatását fejezi ki az i-edik megfigyelt változóra.
2. Λ_x: a megfigyelt független (exogén) változók $(q \times n)$-méretű faktorsúly mátrixa. Általános eleme λ_{xij} a j-edik látens változó közvetlen hatását fejezi ki az i-edik megfigyelt változóra.
3. B: a látens függő endogén változók $(m \times n)$-méretű regressziós mátrixa. Általános eleme β_{ij} a j-edik endogén változó közvetlen hatását mutatja az i-edik endogén változóra.

4. Γ: a látens független exogén változóknak a látens, függő endogén változókra vonatkozó $(m \times n)$-méretű regressziós mátrixa. Általános eleme γ_{ij} a j-edik exogén változónak az i-edik endogén változóra vonatkozó közvetlen hatását mutatja.

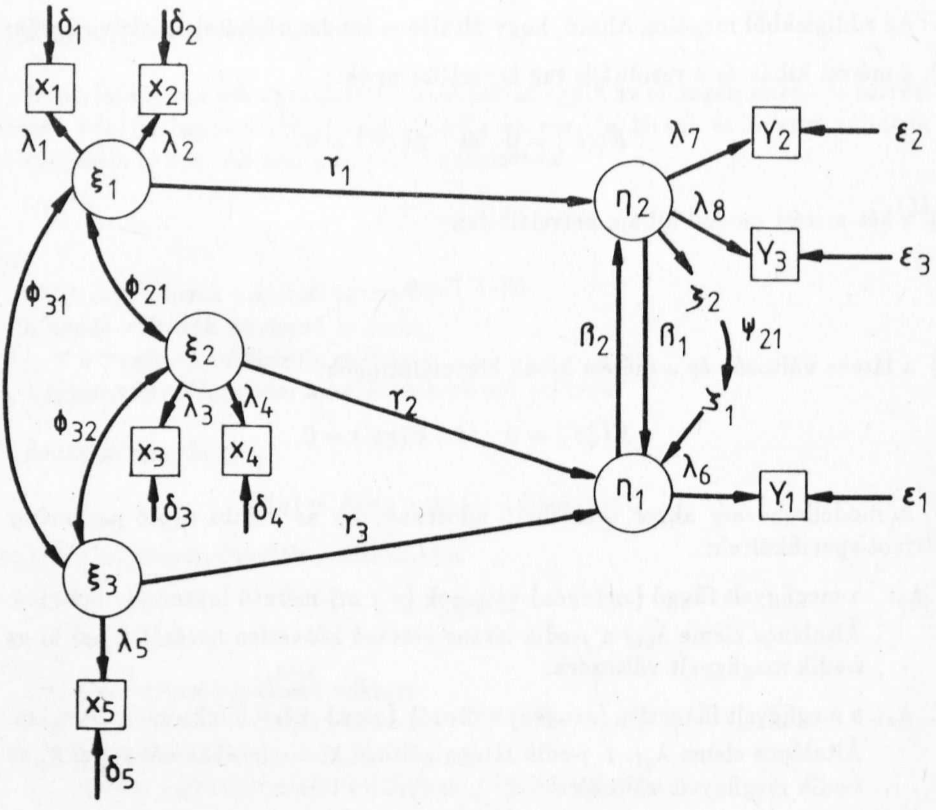
5. Φ: a látens exogén változók $(n \times n)$-méretű kovariancia (korreláció) mátrixa

6. Ψ: a reziduális változók (ς) $(m \times m)$-méretű kovariancia (korreláció) mátrixa

7. Θ_ε: a megfigyelt endogén változók (y) hibájának $(p \times p)$-méretű kovariancia mátrixa

8. Θ_δ: a megfigyelt exogén változók (x) hibájának $(q \times q)$-méretű kovariancia mátrixa

A paraméter mátrixok előállítására példaként tekintsünk egy olyan modellt, amely három látens exogén változót (ξ_1, ξ_2, ξ_3) és két látens endogén változót (η_1, η_2) tartalmaz a 2. ábrán látható séma szerint.



2. ábra. Példa a paramétermátrixok előállítására.

A mérési modellek

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & \lambda_4 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_6 & 0 \\ 0 & \lambda_7 \\ 0 & \lambda_8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

A strukturális modell

$$\begin{pmatrix} 1 & -\beta_1 \\ -\beta_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \gamma_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}$$

A látens exogén és reziduális változók kovariancia mátrixa:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_{11} & & \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \\ \Phi_{31} & \Phi_{32} & \Phi_{33} \end{pmatrix} \qquad \Psi = \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{pmatrix}$$

A megfigyelt változók mérési hibáinak kovariancia mátrixai:

$$\Theta_\varepsilon = \begin{pmatrix} \Theta_{\varepsilon 11} & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_{\varepsilon 22} & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_{\varepsilon 33} \end{pmatrix} \qquad \Theta_\delta = \begin{pmatrix} \Theta_{\delta 11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_{\delta 22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_{\delta 33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Theta_{\delta 44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Theta_{\delta 55} \end{pmatrix}.$$

1.1. A strukturális egyenletek redukált formája

A strukturális egyenletből könnyen eljutunk a redukált formához, mert feltételeztük, hogy B nem szinguláris. Így

$$B\eta = \Gamma\xi + \zeta\,,$$

ebből

$$\eta = D\xi + \zeta_r\,,$$

ahol:

$$D = B^{-1}\Gamma \quad \text{és} \quad \zeta_r = B^{-1}\zeta\,.$$

A D mátrix a redukált forma együtthatóit tartalmazza. A függő változók (η) variancia-kovariancia mátrixa:

$$C = E(\eta\eta') = E[(B^{-1}\Gamma\xi + B^{-1}\varsigma)(B^{-1}\Gamma\xi + B^{-1}\varsigma)'] .$$

Mivel

$$E(\xi\xi') = \Phi; \qquad E(\varsigma\varsigma') = \Psi$$

és

$$E(\xi\varsigma') = E(\varsigma\xi') = 0 ,$$

azt kapjuk, hogy

$$C = D\Phi D' + B^{-1}\Psi B^{-1'} .$$

1.2. A megfigyelt változók variancia-kovariancia mátrixa

Képezzük a függő és független megfigyelt változókból a következő vektort: $z = [y, x]$ és tételezzük fel, hogy a megfigyelt változókat az átlaguktól való eltérésekkel mértük. Ekkor

$$\Sigma = E(zz') = \begin{pmatrix} E(yy') & E(yx') \\ E(xy') & E(xx') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma_{yy} & \Sigma_{yx} \\ \Sigma_{xy} & \Sigma_{xx} \end{pmatrix} .$$

Σ különböző blokkjait a következőképpen kaphatjuk meg:

$$\Sigma_{yy} = E(yy') = E[(\Lambda_y\eta + \varepsilon)(\Lambda_y\eta + \varepsilon)'] .$$

Mivel

$$E(\eta\eta') = C \qquad E(\varepsilon\varepsilon') = \Theta_\varepsilon$$

és

$$E(\eta\varepsilon') = E(\varepsilon\eta') = 0 ,$$

így

$$\Sigma_{yy} = \Lambda_y C \Lambda_y' + \Theta_\varepsilon .$$

Hasonló módon határozható meg Σ többi blokkja is:

$$\Sigma_{yx} = E(yx') = E[(\Lambda_y\eta + \varepsilon)(\Lambda_x\xi + \delta)'] ,$$

mivel

$$E(\eta\xi') = D\Phi \quad \text{és} \quad E(\eta\delta') = E(\varepsilon\xi') = E(\varepsilon\delta') = 0 ,$$

így

$$\Sigma_{yx} = \Lambda_y D\Phi\Lambda_x' = \Sigma_{xy} .$$

Σ_{xx} diagonális blokk a következő:

$$\Sigma_{xx} = E(xx') = E[(\Lambda_x\xi + \delta)(\Lambda_x\xi + \delta)'] ,$$

$$E(\xi\xi') = \Phi; \qquad E(\delta\delta') = \Theta_\delta$$

és

$$E(\xi\delta') = E(\delta\xi') = 0 ,$$

ezért

$$\Sigma_{xx} = \Lambda_x\Phi\Lambda_x' + \Theta_\delta .$$

A fentiek alapján a megfigyelt változók variancia-kovariancia mátrixa a következő:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Lambda_y C\Lambda_y' + \Theta_\varepsilon & \Lambda_y D\Phi\Lambda_x' \\ \Lambda_x\Phi D'\Lambda_y' & \Lambda_x\Phi\Lambda_x' + \Theta_\delta \end{pmatrix} .$$

Megállapítható, hogy a megfigyelt változók variancia-kovariancia mátrixa (Σ) a korábbiakban specifikált nyolc paraméter mátrix közötti kapcsolatot írja le. Ez azt jelenti, hogy az általános modell eredményei tartalmazzák a különböző speciális eseteket is.

Az eddigiekben feltételeztük, hogy a változókat a várható értéküktől vett eltérésekkel mértük. Gyakran célszerü standardizált változók alkalmazása. Tekintsük azt az esetet, amikor a látens változók standardizáltak.

Az η és ξ változók standardizált alakjához jutunk az A_η^{-1} és A_ξ^{-1} mátrixokkal való szorzás útján, ahol

$$A_\eta = (\mathrm{diag}C)^{1/2} \quad \text{és} \quad A_\xi = (\mathrm{diag}\Phi)^{1/2} .$$

A paraméter mátrixok standardizált látens változók esetén a következőképpen transzformálódnak:

$$\begin{aligned}
\Lambda_y^* &= \Lambda_y A_\eta \\
\Lambda_x^* &= \Lambda_x A_\xi \\
B^* &= A_\eta^{-1} B A_\eta \\
\Gamma^* &= A_\eta^{-1}\Gamma A_\xi \\
\Phi^* &= A_\xi^{-1}\Phi A_\xi^{-1} \\
\Psi^* &= A_\eta^{-1}\Psi A_\eta^{-1}
\end{aligned}$$

A látens változókhoz hasonlóan a megfigyelt változókat is standardizálhatjuk.

Megjegyezzük, hogy standardizált változók esetén a variancia-kovariancia mátrix megegyezik a korrelációs mátrixszal, és a standardizált együtthatókat útegyütthatóknak nevezzük.

1.3. Identifikáció

Feltételezzük, hogy a megfigyelt változók együttes valószinüségeloszlása normális, az eloszlás jól jellemezhető az első és második momentumokkal, $z = [y, x]$ eloszlását a $\Lambda_y, \Lambda_x, B, \Gamma, \Phi, \Theta_\varepsilon, \Theta_\delta$ paraméterektől függő kovariancia mátrix (Σ) jellemezze.

Jelölje Π vektor az előbbi paramétereket és legyen t a vektor komponenseinek száma.

A kovariancia mátrix általános eleme: $\sigma_{ij} = f_{ij}(\Pi)$. Feltételezzük, hogy f_{ij} és az első deriváltja folytonos, a kovariancia mátrix pedig pozitív definit a paramétertér minden pontjában.

Egy specifikált modell, egy adott struktúra egy és csak egy Σ-t generál, de különböző struktúrák generálhatják ugyanazt a Σ-t, ezeket empirikusan ekvivalens struktúrának nevezzük.

Ha egy paraméter az összes ekvivalens rendszerben ugyanazt az értéket veszi fel, akkor identifikálható. Ha a modell valamennyi paramétere identifikálható, akkor a modellt identifikálónak nevezzük.

Az identifikálhatóság szükséges feltétele a

$$t \leq \frac{1}{2}(p+q)(p+q+1)$$

reláció teljesülése.

Ha valamely paraméter a Σ mátrixból egyértelműen meghatározható, a kérdéses paraméter identifikálható. Ha egy paraméter többféleképpen is meghatározható az ún. túlidentifikáltság esete áll fenn.

A $\sigma_{ij} = f_{ij}(\Pi)$ egyenletek gyakran nem lineárisak explicit megoldás így ritkán adható.

Az identifikálhatóságot az ún. információs mátrix alapján vizsgáljuk. (Maximum-likelihood becslés esetén ez a becslő függvény második deriváltja.) Ha az információs mátrix pozitív definit, a modell identifikálható; ha szinguláris, akkor a modell nem identifikálható, és az információs mátrix rangja alapján állapítható meg, hogy mely paraméterek nem identifikálhatók.

1.4. A paraméterek becslése

Feltételezzük, hogy a megfigyelt változók eloszlása a várható értékekkel és a kovariancia mátrixszal jellemezhető. A Σ kovariancia mátrix a Π paraméterek függvénye, amelyeket az n-elemü független minta alapján becsülünk.

Jelölje a megfigyelt változók (x, y) mintabeli kovariancia mátrixát S. A becslés problémája a Σ paraméter-mátrix illesztése a mintabeli S kovariancia mátrixhoz. Az illesztésre három eljárást mutatunk be:

a) minimalizáljuk a megfigyelt és a modell által reprodukált varianciák-kovarianciák különbségeinek négyzetösszegét:

$$U = \frac{1}{2} tr(S - \Sigma)^2 .$$

Ez a közismert legkisebb négyzetek módszere (OLS).

b) az általánositott legkisebb négyzetek módszere (GLS) a súlyozott legkisebb négyzetösszeget minimalizálja:

$$G = \frac{1}{2} tr[W(S - \Sigma)]^2 .$$

Ha a súlymátrix (W) egységmátrix, akkor visszakapjuk az előbbi esetet. A gyakorlatban súlymátrixként S^{-1}-t szokás alkalmazni. A fenti két eljárás a változók eloszlására nem tesz kikötést, a becslés egyenletenként történik.

c) a maximum-likelihood becslésnél Σ adott értékeire ismernünk kell S sűrűségfüggvényét. Ha ismert az x és y változók eloszlása, akkor S sűrűségfüggvénye meghatározható, jelölje ezt $f(S \mid \Sigma)$, ebben a függvényben a Π paramétervektor az ismeretlen.

A mintából számított S kovariancia mátrix elemeinek helyettesítésével jutunk a maximum-likelihood függvényhez (L).

Feltételezve, hogy a megfigyelt változók eloszlása normális, a likelihood függvény logaritmusa (konstanstól eltekintve) a következő:

$$\log L = -[\log \mid \hat{\Sigma} \mid + tr(S\hat{\Sigma}^{-1})] .$$

Jöreskog (1970) az F függvény minimalizálását javasolta a becsléshez:

$$F = \log \mid \hat{\Sigma} \mid + tr(S\hat{\Sigma}^{-1}) - \log \mid S \mid - (p + q) .$$

Az F függvény minimuma ugyanazt az értéket adja Π becslésére, mint az L függvény maximuma, mivel

$$F = -c_1(\log L + c_2) ,$$

ahol c_1 és c_2 konstansok és $\log L$, illetve $c_1(\log L + c_2)$ függvény maximuma megegyezik $F = -c_1(\log L + c_2)$ minimumával.

Az F függvény minimalizálása elvégezhető a *Fletcher–Powell* (1963) iterációs eljárással, amely egy választott kezdőpontból indulva gyors konvergenciát biztosít a lokális minimumhoz. Ha több minimumhely létezik, nem garantálja a globális optimumot, ennek elérése függ a kezdőpont megválasztásától. Az eljárás a paraméterek szimultán becslését adja.

1.5. *A modell tesztelése*

Ha a paraméterek maximum-likelihood becslését az F-függvény alapján végezzük, akkor NF_0 nagy minta esetén χ^2 eloszlású lesz.

$$d = \frac{1}{2}(p+q)(p+q+1) - t$$

szabadságfokkal, ahol

t: a paraméterek száma a H_0 hipotézisben
F_0: az F függvény minimuma
N: a minta elemszáma.

A H_0 hipotézist ($S = \hat{\Sigma}$) elfogadjuk, ha a modellből számított NF_0 érték kisebb χ^2 kritikus értékénél a választott szignifikancia szint mellett, egyébként elutasítjuk. Utóbbi esetben szükséges a modell módosítása.

2. Az általános modell speciális esetei

Az általános LISREL modellnek több speciális esete lehetséges, attól függően, hogy a modell egyes blokkjaira – a mérési és a strukturális egyenleteket tartalmazó alrendszerekre – milyen feltételezésekkel élünk, a szereplő változókat hogyan specifikáljuk. A feltételezések vonatkozhatnak csak a mérési vagy csak a strukturális egyenleteket leíró alrendszerekre vagy ezek együttesére. Ettől függően változik a modell értelmezése, becslése is.

A következőkben eltekintünk az egyes esetek részletezésétől, először bemutatjuk a háromféle feltételezésnek megfelelő modell típusokat, majd példaként a gyakorlatban jól ismert faktormodell esetet részletesen tárgyaljuk.

2.1. *A faktormodell*

A faktorelemzésben a megfigyelt változók (x) valódi értékeit (τ) a látens változók függvényeként fejezzük ki. A látens változók között vannak, amelyek több megfigyelt változó előállításában is szerepelnek, ezeket közös faktoroknak (ξ) nevezzük, és vannak olyanok, amelyek csak egy-egy változó reprodukálásában játszanak szerepet, ezeket egyedi faktoroknak (u) nevezzük.

Feltételezések a		
mérési blokkra	strukturális blokkra	mérési és strukturális blokkra
- klasszikus mérési modell	- variancia-kovariancia komponens modell	- többváltozós kauzális modell
- többjellemzős modell	- faktormodell	- több csoportos szimultán modell
	- másodrendü faktormodell	
	- regressziós modell	
	- út elemző modell	

A faktorelemzés matematikai modellje:

$$x_i = \tau_i + e_i$$

$$\tau_i = \lambda_{i1}\xi_1 + \lambda_{i2}\xi_2 + \ldots + \lambda_{im}\xi_m + u_i\,,$$

ahol:

e_i: az i-edik megfigyelt válozó mérési hibája
τ_i: az i-edik megfigyelt változó valódi értéke
ξ_j: a j-edik közös faktor (látens változó)
u_i: az i-edik egyedi faktor
λ_{ij}: a j-edik közös faktorhoz tartozó faktorsúly az i-edik megfigyelt változóra
$\delta_i = u_i + e_i$: az i-edik mérési hiba és az i-edik egyedi faktor összege.

Feltételezzük, hogy: $E(x_i) = o$, $E(\xi_j) = o$, $E(e_i) = o$, $E(u_i) = o$ $\forall i, j$-re

valamint: $E(\xi_j u_i) = o$, $E(\xi_j e_i) = o$ $\forall i, j$-re.

A faktorelemzés modellje mátrix-aritmetikai jelölésekkel:

$$x = \Lambda_x \xi + \delta$$

ahol:

$$\delta = u + e \quad E(x) = 0, \quad E(\xi) = 0, \quad E(\delta) = 0, \quad E(\xi\delta') = 0$$

$$E(\delta\delta') = \Theta_\delta$$

diagonális.

A modellben feltételezzük, hogy (1) a mérési hiba változói korrelálatlanok egymással $E(e_i e_j) = 0$, (2) az egyedi faktorok korrelálatlanok egymással $E(u_i u_j) = 0$, (3) a közös faktorok korrelálatlanok δ-val, $E(\xi\delta') = 0$.

A modell paraméter-mátrixai: Λ_x, Φ és Θ_δ.

A variancia-kovariancia mátrix a paraméterek függvényében:

$$\Sigma = \Lambda_x \Phi \Lambda_x' + \Theta_\delta \,.$$

A gyakorlatban legtöbbször az exploratív elemzésekben feltételezzük, hogy $\Phi = I$, vagyis a közös faktorok korrelálatlanok. Az exploratív faktorelemzés során általában a következő kérdéseket kell megválaszolnunk:

1.) mennyi közös faktor szükséges a megfigyelt változók közötti korrelációk magyarázatához

2.) a faktorsúlyok között melyek szignifikánsak és melyek nem

3.) mi a faktorok elméleti tartalma.

Az első kérdés könnyen megválaszolható, mivel a különböző faktorszámú modellek szignifikanciáját χ^2 próbával tesztelhetjük, és így megtalálhatjuk a faktoroknak azt a számát, amelyet tovább növelve a modell illeszkedése szignifikánsan tovább nem javítható.

A második kérdés a rotált faktorsúlyok standard hibájának számításával válaszolható meg, a módszer azonban elég bonyolult, így a gyakorlati alkalmazása korlátozott. Ennél egyszerűbb eljárást javasol *Jöreskog* (1978), amit „legjobban illeszkedő egyszerű struktúrá"-nak nevezett el.

A harmadik kérdés megválaszolásához a szignifikáns faktorsúlyok mellett a szakmai ismeretek kapnak nagy szerepet. A konfirmatív faktorelemzés alapvetően abban különbözik az exploratív faktorelemzéstől, hogy az előbbieknél a faktorstruktúrát a priori-elméleti vagy korábbi empirikus vizsgálatok alapján ismertnek tételezzük fel, míg az utóbbinál a faktor-struktúrát az elemzés során, a vizsgált adatokból származtatjuk.

3. Látens változók út-elemzése [LVPLS]

(Latent Variable Path Analysis for Partial Least Square method)

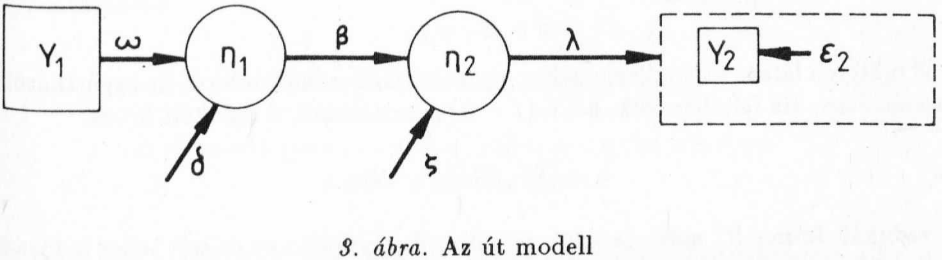
LVPLS a látens változók közötti kauzális kapcsolatok elemzésére kifejlesztett speciális modell. Az általános LISREL modell melletti tárgyalását indokolja, hogy az alkalmazások során kiemelkedő jelentősége van, speciális feltevései a teljes modellrendszert érintik, becslési eljárásként a parciális legkisebb négyzetek elvét alkalmazza.

A továbbiakban a rövid tárgyalás során elsősorban az eltérésekre térünk ki.

3.1. A modell egyenletei

Az út-modell sémáját a 3. ábra mutatja, ahol

y_1, y_2: a megfigyelt változók halmaza
η_1, η_2: a látens változók halmaza
β: útegyütthatók
λ: az endogén megfigyelt változók faktorsúlyai
ω: az exogén megfigyelt változók regressziós súlyai
ς: a látens endogén válrozók reziduális komponensei
δ: a látens exogén változók reziduális komponensei
ε_2: az exogén megfigyelt változók mérési hibái.



3. ábra. Az út modell

A modell három egyenletből áll:

a) a látens változók közötti strukturális egyenlet (út-egyenlet)

$$\eta = B\eta + \varsigma .$$

Feltételezzük, hogy

$$E(\eta) = 0, \quad E(\varsigma) = 0, \quad E(\eta\varsigma') = 0 .$$

b) a megfigyelt endogén változók mérési modellje:

$$y = \Lambda\eta + \varepsilon ,$$

ahol

Λ: a megfigyelt változóknak a látens változókra vonatkozó faktorsúly mátrixa
ε: a megfigyelt változók mérési hibája.

Feltételezzük, hogy

$$E(y) = 0, \quad E(\varepsilon) = 0, \quad E(\eta\varepsilon') = 0.$$

c) a súly-egyenlet a látens változókat a megfigyelt változók regressziós függvényeként állítja elő:

$$\eta = \Omega y + \delta,$$

ahol

Ω: a regressziós együtthatók mátrixa
δ: a látens változók reziduális tagja.

Feltételezzük, hogy

$$E(\delta) = 0, \quad E(y, \delta') = 0.$$

3.2. *A strukturális egyenlet redukált formája*

A strukturális egyenlet

$$\eta = B\eta + \varsigma.$$

A B mátrix a látens változók egymásra gyakorolt közvetlen hatásait, út-együtthatóit tartalmazza. Ha feltételezzük, hogy $(I - B)$ invertálható, a redukált forma:

$$\eta = (I - B)^{-1}\varsigma = B^*\varsigma$$

A redukált forma B^* mátrixa a látens változók egymásra gyakorolt teljes hatásait tartalmazza. A teljes és közvetlen hatások különbsége a közvetett hatás:

$$B^+ = B - B^*.$$

Hasonlóan kifejezhető a látens változóknak a megfigyelt változókra vonatkozó teljes és közvetett hatása is:

$$y = \Lambda\eta + \varepsilon = \Lambda B^*\varsigma + \varepsilon = \Lambda^*\varsigma + \varepsilon,$$

ahol

Λ : a közvetlen hatások mátrixa
Λ^*: a teljes hatások mátrixa.

A közvetett hatások mátrixa:

$$\Lambda^+ = \Lambda - \Lambda^*.$$

3.3. A paraméterek becslése

A modell paraméterei:

B: a látens változók út-együtthatóinak mátrixa
Λ: a megfigyelt változók faktorsúlymátrixa
Ω: a látens változók súly együtthatóinak mátrixa
Ψ: a látens változók reziduális tagjainak kovariancia mátrixa.

A paramétereket a parciális legkisebb négyzetek módszerével becsüljük. A módszer lényege, hogy a paramétereket részhalmazokra bontja, és az egyes partíciókat a legkisebb négyzetek kritériuma szerint becsüli, miközben a többi paraméter ismert, rögzíitett értékkel szerepel.

A becslési módszer (PLS) alkalmazásának feltételei:

a) a megfigyelt változók egymást át nem fedő blokkokra particionáltak,

b) a látens változók is egymást át nem fedő blokkokra particionáltak, és egy látens változó blokk csak egy megfigyelt változó blokkhoz kapcsolódhat,

c) a strukturális egyenlet (út-modell) rekurzív.

A becslés illeszkedése a megfigyelt változók normális együttes eloszlása esetén χ statisztikával, egyébként a speciálisan e célra definiált megbízhatósági indexek alapján mérhető.

4. Gyakorlati alkalmazás (LVPLS)

A vízkészlet mint természeti erőforrás szerepe a magyar gazdaság növekedésében

Bemutató példánk mögött több lépcsőben elvégzett számítássorozat áll. A szereplő 63 változó 1930-80 évekre vonatkozó 50 éves idősorait már évekkel ezelőtt sokrétű statisztikai vizsgálat alá vetették. Az előzőekben tárgyalt általános lineáris modell szemléletében öt változatban építettük fel a modell rendszert. Ismertetni mindössze egy gondolatsort szeretnénk, célunk az elemzésben leírtakkal való kapcsolat, s a kérdésfeltevések, válaszok hangsúlyozása lesz. A 63 változót faktoranalízissel 38-ra tömörítettük, – az információtartalom 95%-ának megtartásával.

Fogalmazzuk meg először alapvető kérdésünket. A víznek mint térben és időben korlátos, de megújuló természeti erőforrásnak az igénybevétele hogyan hat a gazdasági fejlődés pályáira? Milyen számszerű összefüggések ismerhetők fel a különböző struktúrákból felépített rendszerekben? A vizsgálatokban szereplő alapvető struktúrák: a népgazdaság, az ipar, a mezőgazdaság, az infrastruktúra, a vízgazdalkodás. Az éppen bemutatásra kerülő modellváltozatban csak az utóbbi négy kategória szerepel. Az első négy struktúrát endogén, a vízgazdálkodást exogén mérési változókkal írjuk le.

Meggondolásaink két alaphipotézisre támaszkodnak:

1.) A vízkészlet igénybevétele nem függ a többi struktúra kölcsönhatásától. (Valójában ugyanis a népgazdasági irányítás a víz többcélú használatától, illetve a víz társadalmi-gazdasági körforgására épülő gazdaságszabályozás rendszerétől lényegében eltekint.)

2.) A vízkészlet igénybevétele a többi szereplő struktúra hatékonyságán keresztül befolyásolja a makrogazdaság növekedési pályáit.

Nézzük meg most figyelmesen az alábbi három sémát: (4. ábra)

- Az első az LVPLS (3.1. pontban már bemutatott) vázlatos felépítése, a szemléletes összehasonlítás érdekében megismételtük.

- A második a bemutatásra szánt konkrét modell változat, a közvetlen gyakorlati felépítésében.

- A harmadik séma a második azonos átalakítása, hogy formálisan is megfeleljen az első szerkezetének.

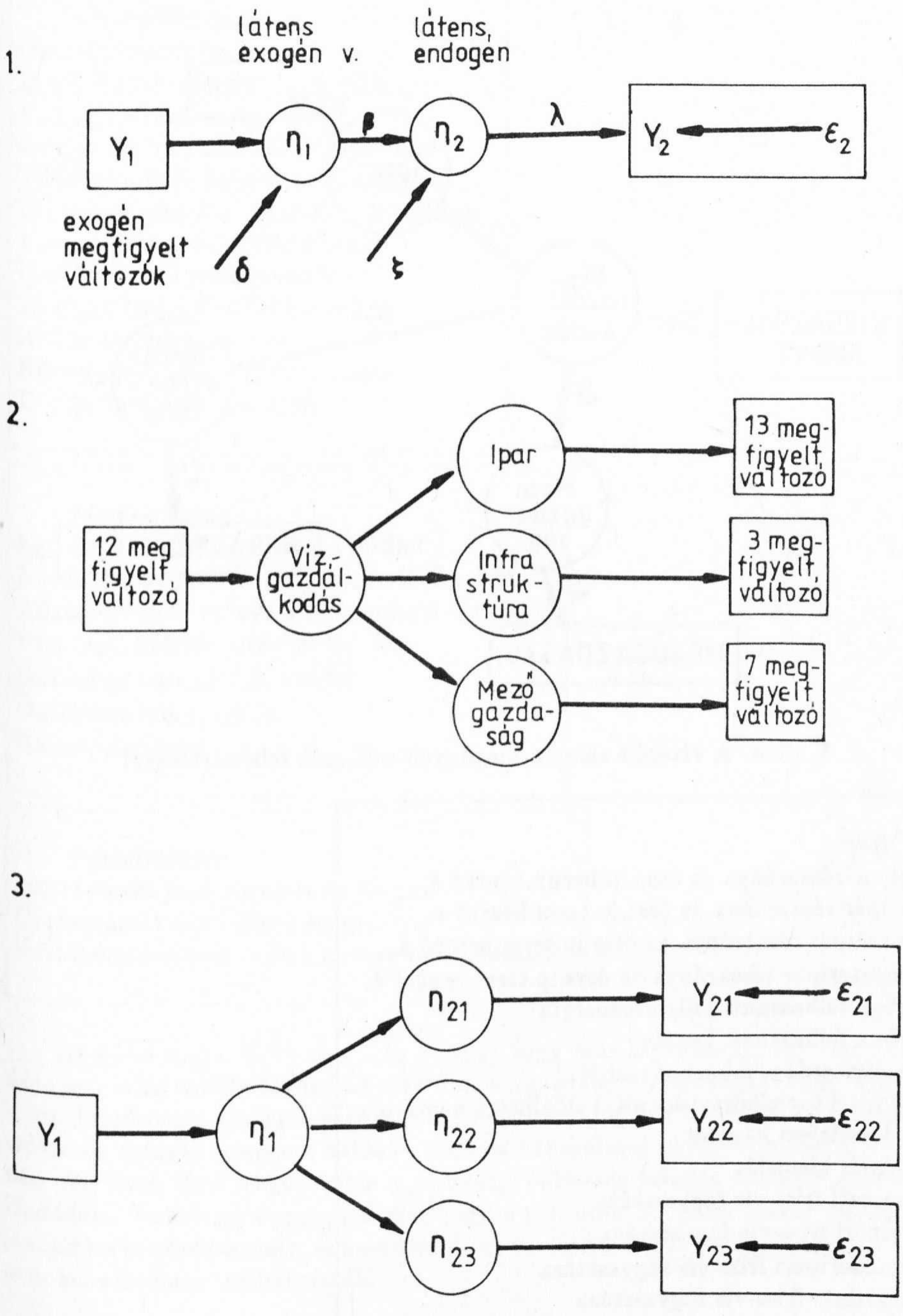
A megfeleltetés tehát a következő:

η_1: vízgazdálkodás (látens exogén változó)
η_{21}: ipar (látens endogén változó)
η_{22}: infrastruktúra (látens endogén változó)
η_{23}: mezőgazdaság (látens endogén változó)

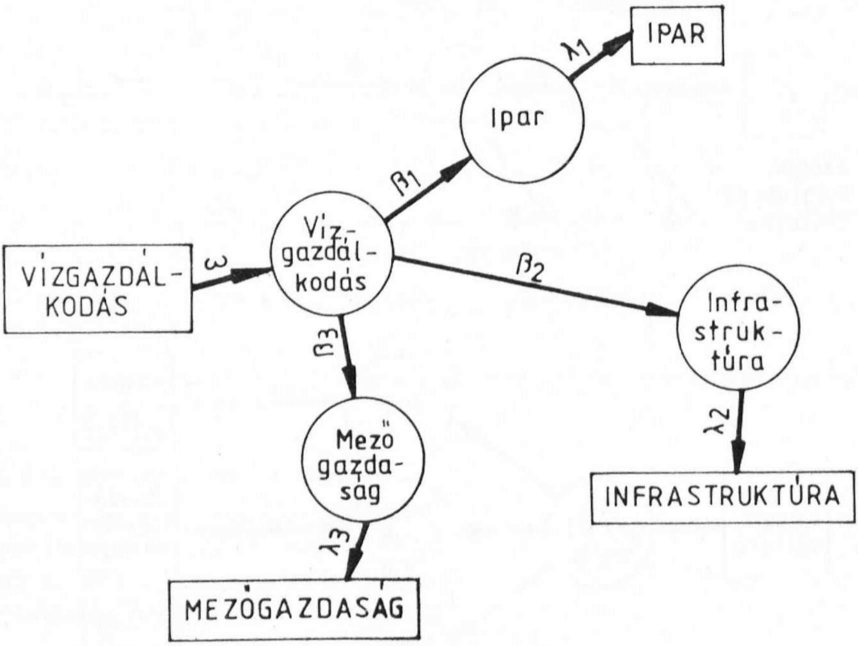
η_2 tehát három részre bomlik, $\eta_{21}, \eta_{22}, \eta_{23}$-ból tevődik össze. Az $Y_1, Y_{21}, Y_{22}, Y_{23}$ szimbólumokba összefoglalt exogén, illetve endogén mérési változó csoportokat a rövidség kedvéért külön nem soroljuk fel, a következő eredmény sémán viszont rendre feltüntetjük őket. (5. ábra)

Nézzük most meg, hogyan vonhatók le az eredményből következtetések. Mindenekelőtt felhívjuk a figyelmet, hogy az eredmény ábrán látható paraméterek értelmezéséhez célszerű ismét visszalapozni a 3.1. pont (LVPLS) alapsémájához, s az ott bejelölt *együtthatók meghatározásaira* támaszkodni.

A vízgazdálkodást leíró 12 megfigyelt változó mellett feltüntethetők volnának a paraméterértékek az exogén megfigyelt változók regressziós súlyai, (ω). Az alapmodell az η_1 szimbólumban rögzített látens változót az Y_1-ben lévő exogén megfigyelt változók regressziós függvényeként fejezi ki.



4. ábra. Modell sémák



5. ábra. A vizsgált séma a megfigyelt változók feltüntetésével

Ipar
Gépipar részaránya az össz.ip.beruh.bruttó é.
Vegyipar részaránya az össz.ip.term.bruttó é.
Könnyűipar részaránya az össz.ip.term.bruttó é.
Élelmiszeripar részaránya az össz.ip.term.bruttó é.
Iparban felhasznált villamosenergia
Iparban felhasznált benzín
Ipar részesedése a beruházásból
1000 ipari foglalkoztatott által előállított nemzeti jövedelem hányad
Bányavíz kiemelés
Kohászati friss-víz fogyasztása
Vegyipari friss-víz fogyasztása
Élelmiszeripari friss-víz fogyasztása
Energiaipar friss-víz fogyasztása

Vízgazdálkodás
Összes víztermelés kap.
Iparnak szolg.víz.energia ip.nélk.
Energiaiparnak szolg. víz
Szenny- és használt víz elvezető kap.
Védelmi művek kiépitettségi szinvon.
Közüzemi vízművel rendelk. települések
1 napra jutó ivóvíz felhasználás
Ipar közüzemi vízfogyasztása
Mezőgazdasági főművi kapacitás
Kohászat vízhasználata
Könnyűipar összes vízhasználata
Energiaipar vízhasználata

Mezőgazdaság
Egy számosállatra jutó mg-i terület
Növényterm. aránya a mg.nemzeti jöv.-ben
Állattenyésztés aránya a mg.nemzeti jöv.-ben
1 ha mg.területre jutó tejtermelés
Öntözésre berendezett terület
Öntözővíz felhasználás
Halastó területe

Infrastruktúra
1000 lakosra jutó követett út hossza
Csatornázott települések száma
Infrastruktúra részesedése az össz.beruházásból

Az $\eta_1 \to \eta_{21}$; $\eta_1 \to \eta_{22}$; $\eta_1 \to \eta_{23}$, vagy más fogalmazásban: vízgazdálkodás-ipar; vizgazdálkodás-infrastruktúra; vízgazdálkodás-mezőgazdaság kapcsolatokat (hatásokat), számszerüsítő útegyütthatók kifejezik a víz, mint természeti erőforrás, igénybevételének hatását, lineáris kapcsolatát az egyes struktúrák fejlődési pályáival. Ez a megállapítás a gazdasági fejlettség minden extenzív szakaszára kiadódott. Ennek az a magyarázata, hogy a víz, mint kollektív jószág általában a szabad javak közé tartozik, és használatának mechanizmusát gazdasági szempontból nem konzekvensen szabályozzák.

A séma másik oldalán azok a faktorsúlyok jelennek meg, amelyek a megfigyelt endogén változók előállítására szolgálnak az endogén látens változókból.

Számos változó volna felhasználható a látens változók helyettesítésére. Az együtthatók értékei alapján, előjelük figyelembevételével a megfelelő látens változó – s mögötte a víz – szerepe nyomon követhető.

Az eljárás használhatósága fokozott mértékben szembeötlő, ha a szereplő struktúrák változtatásával, a közöttük fennálló hipotetikus kapcsolatok irányainak variálásával adódó számítási eredeményeket elemezzük az *aktuális szaktudomány szemszögéből.* Az adatrendszerekhez legjobban illeszkedő reális modell elgondolások következetesen tesztelhetők.

(Beérkezett: 1986. december 5-én.)

Irodalom

1. BLALOCK, H.M. JR.: *Measurement in the social sciences.* Aldina Publishing Company, Chicago, 1974.
2. CHERNOFF, H. and DIVINY, N.: The computation of maximum-likelihood estimates of linear structural estimations. In: C.W. Hood and T.C. Koopmans (eds): *Studies in econometric method.* Wiley, New York, 1953, 236–302.
3. DUNCAN, O.D.: *Introduction to Structural Equation Models* Academic Press, New York–San Francisco–London, 1971, 1–180.
4. EVERITT, B.S.: An introduction to latent variable models. In: *Monographs on Statistics and Applied Probability,* Chapman and Hall, London–New York 1984, 1–107.
5. FLETCHER, R. – POWELL, M.: A rapidly convergent method for minimization. *Computer Journal,* 1963, 6. 163–168.
6. GOLDBERGER, A.S. and DUNCAN, O.D. (eds): *Structural equation models in the social scineces.* Seminar Press, New York, 1973, 85–112.
7. JÖRESKOG, K.G.: A general method for analysis of covariance structure. *Biometrika,* 1970, 57, 239–251.
8. JÖRESKOG, K.G. and WOLD, H. (eds): *Systems under indirect observation: Causality, Structure, Prediction:* North-Holland Publishing Company, Amsterdam–New York–Oxford, 1982.
9. JÖRESKOG, K.G.: Structural analysis of covariance and correlation matrix. *Psychometrika,* 1978, 43, 443–477.
10. LOHMOELLER, J.B.: Estimating parameters of linear structural relation models under partial least-squares criteria. Paper presented at the annual meeting of the American Research Association, San Francisco, April 1979.
11. SCOTT LONG, J.: Covariance structure models. An Introduction to LISREL. In Series: *Quantitative Applications in the Social Sciences,* Sage University Papers, 1983. 1–95.
12. WOLD, H.: Estimation of principal components and related models by iterative least squares. In: P.R. Krishnaiah (ed.): *Multivariate analysis,* Academic, New York, 1966.

A General Linear Model of Structural Relations: LISREL

The article presents the general scheme of the LISREL model which describes the relationship among two sets of observable and two sets of latent variables as well as between measurement errors and residuals. The tools are factor analysis and regression analysis. The analytical formulation of partial models, the problems of estimation, identification and testing as well as special cases of the model are also discussed. The general nature of the model is well explained by the reasoning about the path-analysis of the latent variables – presented in the second part of the article.

The paper ends with a review of a practical applications taken from the area of water management.

Szigma, XX. (1987–88) 1. sz.

MÁTYÁS LÁSZLÓ

A sztochasztikusan változó paraméterű modellek egy lehetséges alkalmazási területe

A változó paraméterű modellek becslése területén az utóbbi években elért eredmények megteremtették a lehetőségét annak, hogy az a ökonometriai modellezés egy lépéssel közelebb kerüljön a gazdasági valósághoz, lehetővé téve ezzel a gazdasági folyamatok valósághűbb leírását. Ennek lényege, hogy míg a hagyományos ökonometriai modellek feltételezték a modellt meghatározó strukturális paraméterek állandóságát, addig a változó strukturális paraméterek bevezetése – éppen e változás révén – jobban megfoghatóvá teszi a változó gazdasági összefüggéseket. A változó paraméterű modellezés alapjait WALD [17] fektette le még a negyvenes években, de csupán az ötvenes, hatvanas évek kutatási eredményei tették lehetővé e modellek alkalmazásának fokozatos térhódítását. A hazai gazdasági modellezők még messze nem élnek a változó paraméterű modellek adta lehetőségekkel, ami egyrészt annak tudható be, hogy a kényelmes felhasználást lehetővé tevő számítógépes programcsomagok még csak most kezdenek elterjedni, másrészt pedig annak, hogy a felhasználás ökonometria-elméleti megalapozása Magyarországon még nem történt meg. Éppen ezen kíván szerény mértékben segíteni ezen írás, melynek fő célja egy lehetséges alkalmazási területen – az idősorok és keresztmetszeti adatok együttes felhasználásának területén – bemutatni, hogy mit nyújthat a gyakorlati modellező számára a változó paraméterű modellezés.

Első lépésben áttekintjük a főbb változó paraméterű modelleket, majd bemutatjuk egy modelltipus paramétereinek a legkisebb négyzetek módszerére alapozott becslését. Ez után az idősorok és keresztmetszeti adatok együttes felhasználásának mezején áttekintjük e modellek egy lehetséges gyakorlati alkalmazási területét, eljutva az időben és egyedenként változó paraméterstruktúrák modellezéséig.

1. Változó paraméterű regressziós modellek

A változó paraméterű modellek a hagyományos ökonometriai modelleknek a regressziós paraméterek állandóságára tett hipotézisét oldják fel. Ez nagyon fontos lehet például a következő ökonometriai problémák esetén:

1. A struktúra nem stabil (időben), vagyis a strukturális paraméterek nem állandóak, mert

a) olyan sztochasztikus hatások vannak a modellben, amelyeket az additív reziduális változó nem tud figyelembe venni;

b) a modell paramétereit egy sokváltozós sztochasztikus folyamat generálja;

c) a modell paraméterei egy adott időpillanatban valamilyen keresztmetszeti minta által generált valószinüségi változók.

2. Annak ellenére, hogy a valódi struktúra stabil, célszerű a változó paraméterű modellezés, mert

a) specifikációs hiba fordul elő (mikor kihagyunk egy vagy több magyarázó változót, például szabadságfok problémák miatt), ekkor ugyanis a valódi paraméterekre „rárakódó" torzító hatást ilyenformán valamennyire megfoghatjuk;

b) egy vagy több (megfigyelhető) helyettesítő változót alkalmazunk az adott modellben szereplő (ténylegesen meg nem figyelhető) változó helyett, aminek a hatása ilyen úton kezelhető;

c) nem korrekt függvényformát alkalmazunk, amiért az eredetileg stabil paraméterek változásnak lehetnek kitéve;

d) aggregációs hibát követünk el, ami kiszűrhető lehet ilyen úton.

A változó paraméterű modelleknek a gazdasági modellezésben alkalmazott főbb típusai a következők:

A) *Szisztematikusan változó paraméterű modellek*

a) Funkcionálisan változó paraméterek

$$y_t = X_t'(\beta + \alpha Z_t) + u_t \,, \tag{$*$}$$

ahol y_t az endogén változó megfigyelése a t-edik pillanatban ($t = 1, \ldots, T$),

X_t' az exogén változók megfigyeléseit tartalmazó mátrix t-edik sora, mérete $(K \times 1)$,

Z_t egy exogén jellegű változó megfigyelése a t-edik pillanatban,

u_t a szokásos tulajdonságokkal rendelkező látens változó,

K az exogén változók száma,

valamint

$$E(X_t' u_t) = 0 \qquad E(Z_t u_t) = 0$$

minden t–re, és α, β ismeretlen paraméter vektorok.

Látható, hogy a (*) egyenlet strukturális paraméterei függvényei egy további exogén változónak.

b) Binárisan változó paraméterek

$$y_t = X_t'(\beta + \alpha D_t) + u_t \,,$$

ahol

$$D_t = \begin{cases} 0 & \text{ha } 1 \le t < t_0 \,, \\ 1 & \text{ha } t_0 \le t \le T \end{cases}$$

és α ismeretlen paraméter vektor.

Mind az a), mind a b) esetben a kellően alkalmazott KLNM konzisztens és hatásos becslést nyújt a keresett paraméterekre. A b) esetben, ha t_0 ismeretlen, akkor ez is becsülhető a KLNM becslés sztenderd hibájának a minimalizálásával. (E modellekről lásd például GOLDFELD–KELEJIAN–QUANDT [4], RAJ–ULLAH [10]). Ennek megfelelően, mivel a szisztematikusan változó paraméterű modellek paramétereinek a becslése nem igényel újfajta megközelítést, a továbbiakban nem foglalkozunk vele.

B) *Sztochasztikus változó paraméterű modellek*

a) Véletlen paraméterek

$$y_t = X_t'(\beta + \varepsilon_t) + u_t ,$$

ahol ε_t egy $(K \times 1)$ méretű valószinüségi vektorváltozó és $E(\varepsilon_t) = 0$, $E(u_t) = 0$, valamint $E(\varepsilon_t' u_t) = 0$.

E modellt – bevezetőjükről – szokás HILDRETH–HOUCK [5] modellnek is nevezni. Észrevehető, hogy itt a modell ($\bar{\beta} = \beta + \varepsilon_t$) paramétervektora egy rögzített ismeretlen (becsülendő) átlag (β) körül ingadozik. Ez gyakorlatilag azt jelenti, hogy regressziós modell paramétervektorát egy teljesen véletlen sztochasztikus folyamat generálja.

b) Szekvenciális paraméterek

$$y_t = X_t'(\lambda\beta_{t-1} + (1-\lambda)\beta + \varepsilon_t) + u_t ,$$

ahol λ a folyamatot meghatározó paraméter[1],

$$E(u_t) = 0 , \quad E(\varepsilon_t) = 0 , \quad E(\varepsilon_t' u_t) = 0$$

és

$$\beta_t = \lambda\beta_{t-1} + (1-\lambda)\beta + \varepsilon_t ,$$

amit fokozatos visszahelyettesítéssel a β_0 kezdeti paraméterre visszavezetve adódik:

$$\beta_t = \lambda^t\beta_0 + (1-\lambda^t)\beta + \sum_{\tau=0}^{t-1} \lambda^\tau \varepsilon_{t-\tau} .$$

Látható, hogy e modellt alapvetően befolyásolja a β_0 kezdeti paramétervektor. Ha $0 < \lambda < 1$, akkor e modellt szokás ROSENBERG-féle [11], [12] sztochasztikusan konvergens paraméterű modellnek nevezni. Ha $\lambda = 0$, akkor visszakapjuk a Hildreth–Houck modellt, ha pedig $\lambda = 1$, akkor

$$y_t = X_t'(\lambda\beta_{t-1} + \varepsilon_t) + u_t ,$$

---

[1] λ a modell szempontjából a priori meghatározott paraméter; hogy milyen értéket adunk neki, az nagyban függ a modellezett gazdaság hipotézisrendszerétől.

amit szokás COOLEY–PRESCOTT [1], [2] modellnek is nevezni, de az irodalomban gyakran adaptív paraméterű modell név alatt is szerepel. A regressziós modell ($\bar{\beta} = \lambda\beta_{t-1}(1-\lambda)\beta+\varepsilon_t$) paramétervektora most az idő függvényében egy ismeretlen (becsülendő) átlag (β) körül ingadozik. Ez gyakorlatilag azt jelenti, hogy a modell paramétervektorát egy elsőrendű autoregresszív sztochasztikus folyamat (**AR**(1)) generálja.

Látható, hogy a sztochasztikus változó paraméterű modellek alapelgondolása, hogy a strukturális paraméterek egy determinisztikus és egy sztochasztikusan változó részből tevődnek össze. Egyértelmű, hogy mind az a), mind a b) modelleknél a KLNM konzisztens becslést nyújt a keresett paraméterekre, azonban a bonyolult látens struktúra következtében e becslés nem lesz hatásos, így az ALNM alkalmazása válik szükségessé.[2].

A következő fejezetben a Hildreth–Houck modell példáján bemutatjuk, hogyan állítható elő a sztochasztikusan változó paraméterű modellek paramétereinek ALNM esztimátora.

2. A Hildreth–Houck modell ALNM becslése

A modell a t-edik időpontban a következő:

$$y_t = X_t'(\beta + \varepsilon_t) + u_t\,,$$

ahol

$$E(\varepsilon_t) = 0, \quad E(u_t) = 0\,;$$

$$E(\varepsilon_t'\varepsilon_{t'} = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \neq t'\,, \\ <\sigma_1^2, \ldots, \sigma_K^2>, & \text{ha } t = t'; \end{cases}$$

$$<\sigma_1^2, \ldots, \sigma_K^2> = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_K^2 \end{pmatrix}$$

$(K \times K)$ méretű diagonális mátrix, valamint az ε_t vektor egyes elemei és u_t korrelálatlanok.

Vektor alakban újraírva a modellt, $u^* = (u_1^* \ldots, u_T^*)$ jelöléssel:

$$y = X\beta + u^*\,, \tag{1}$$

ahol

$$u_t^* = u_t + \sum_{i=1}^{K} X_{it}\varepsilon_{it}\,,$$

[2] Megjegyzendő, hogy mind az a), mind a b) modellek paramétereinek a becslésére léteznek a maximum-likelihood módszeren, illetve a Kálmán filteren alapuló eljárások is, de ezek tárgyalása túlnőne az írás keretein (RAJ–ULLAH [10])

Az ALNM alkalmazásához az $E(u^*u^{*'})$ kovariancia mátrixot kell előállítani:

$$E(u^*u^{*'}) = <\overbrace{\sigma_u^2 + \sum_{i=1}^{K} X_{it}^2\sigma_i^2}^{d_t}>, \quad (t = 1, \ldots, T)$$

amely egy $(T \times T)$ méretü diagonális mátrix.

A továbbiakban tehát a σ_u^2 és a σ_i^2 varianciákat fogjuk becsülni. Legyen az (1) modell paramétervektorának KLNM becslése $\widehat{\beta}$ és az ebből származó reziduum:[3]

$$\mathbf{e} = y - X\widehat{\beta}.$$

Világos, hogy

$$\mathbf{e} = Wy, \quad \text{ahol} \quad W = I - X(X'X)^{-1}X'$$

és ha visszahelyettesítjük az (1) egyenletet a fenti összefüggésbe adódik, hogy

$$\mathbf{e} = Wu^*.$$

A mátrix jelöléseket felbontva, a reziduum vektor t-edik eleme

$$\mathbf{e}_t = \sum_{j=1}^{T} w_{tj}u_j^*,$$

ahol w_{tj} a W mátrix t, j-edik eleme.

Az induló feltételekből következik, hogy

$$E(\mathbf{e}_t) = E(\sum_{j=1}^{T} w_{tj}u_j^*) = 0.$$

A reziduum varianciájára pedig a következő adódik:

$$E(\mathbf{e}_t^2) = E[(\sum_{j=1}^{T} w_{tj}u_j^*)^2] = \sum_{j=1}^{T}\sum_{j'=1}^{T} w_{tj}w_{tj'}[E(u_j^*u_{j'}^*)] = \sum_{j=1}^{T} w_{tj}^2 d_j, \quad (2)$$

ahol

$$d_j = \sigma_u^2 + \sum_{i=1}^{K} X_{ij}^2\sigma_i^2.$$

---

[3] Ha teljesen következetesek lennénk a jelölésben, akkor az **e** helyett $\widehat{u}^*$–ot kellene használnunk, ez azonban nincs összhangban az idevágó irodalommal, amelyben ennél a modellnél a becsült reziduumot **e**-vel jelölik, így ezt használjuk mi is.

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\dot{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^2 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_T^2 \end{pmatrix} \qquad \dot{W} = \begin{pmatrix} w_{11}^2 & \dots & w_{1T}^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{T1}^2 & \dots & w_{TT}^2 \end{pmatrix}$$

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & X_{21}^2 & \dots & X_{K1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{2T}^2 & \dots & X_{KT}^2 \end{pmatrix}, \quad \dot{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_u^2 + \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \vdots \\ \sigma_K^2 \end{pmatrix}.$$

Látható, hogy az $\dot{X}$ mátrix tartalmazza a szabad konstans csupa 1-esekből álló oszlopvektorát, amit a formulákban szintén exogén változóként szerepeltetünk, vagyis K, az exogén változók száma, úgy adódik, hogy $K-1$ ténylegesen exogén változó szerepel plusz a konstans. Most újraírva a (2) összefüggést

$$E(\dot{\mathbf{e}}) = \dot{W}\dot{X}\dot{\sigma}\,, \tag{3}$$

ahol $\dot{\sigma}$–t kell becsülni.

Az ötlet az, hogy tekintsük a (3) várható értéket egy regressziós összefüggésnek, vagyis

$$\dot{\mathbf{e}} = \dot{W}\dot{X}\dot{\sigma} + v\,,$$

ahol v látens változó és $E(v) = 0$.

Bevezetve a $\dot{G} = \dot{W}\dot{X}$ jelölést, a fenti képletre adódik, hogy

$$\dot{\mathbf{e}} = \dot{G}\dot{\sigma} + v\,. \tag{4}$$

Mivel v kovariancia mátrixáról nem állíthatjuk, hogy skalár típusú így a (4) regressziós egyenletben a $\sigma^\bullet$ paramétervektor becslésére az ALNM-et kellene alkalmazni (Raj–Ullah [10]). Általában azonban hagyományosan megelégszünk a varianciák konzisztens becslésével, elsősorban azért, mert a varianciák hatásos becslésének előállítási „ára" nem fizetődne ki az (1) egyenlet strukturális paramétereinek becslésekor. A (4) egyenletre a KLNM-et alkalmazva, a keresett varianciák becslése:

$$\widehat{\dot{\sigma}} = (G'G)^{-1}G'\dot{\mathbf{e}}\,, \tag{5}$$

és így az (1) modell β strukturális paramétervektorának ALNM becslése minden további nélkül előállítható. Vegyük észre, hogy az (5) esztimátorban a σ_u^2 és σ_1^2 varianciák becslésének elkülönítése nem lehetséges. Erre az (1) modell ALNM esztimátorában mellesleg nincs is szükség, és így itt nem okoz gondot, de bizonyos gazdasági elemzéseknél, ahol a varianciákat külön-külön értelmezik, már értelmezési nehézségeket okozhat.[4] A következő fejezetben meglátjuk majd, hogy megnövelt minta információ esetén lehetővé válik e két variancia becslésének szeparálása is.

3. Egy lehetséges alkalmazási terület

Az idősorok és keresztmetszetei adatok együttes felhasználásának hagyományos módja a panel-modellek alkalmazása (MÁTYÁS [7], [8]). Számos esetben azonban az egyedhatásokat célszerübb a paraméterek változásába beépíteni, mint a látens változót szétbontani egyed és reziduális hatásokra. Ennek megfelelően alkalmazhatók az egyedhatások kezelésére a változó paraméterű modellek megfelelő alakjai.

A) *A Swamy modell*

Legyen a vizsgálandó modell most

$$y_i = X_i(\beta + \varepsilon_i) + u_i \tag{6}$$

formájú, ahol

i az i-edik megfigyelt egyedre utaló index, $i = 1, \ldots, N$,

X_i az exogén változók megfigyeléseinek értékeit tartalmazza az i-edik egyednél, mérete $T \times K$,

y_i az endogén változó megfigyeléseinek $(T \times 1)$ méretű vektora az i-edik egyednél,

u_i a látens változók $(T \times 1)$ méretű vektora az i-edik egyednél,

β a paramétervektor (mérete $K \times 1$),

ε_i az egyedhatásokat kifejező $(K \times 1)$ méretű valószinüségi vektorváltozó,

K az exogén változók száma.

Az összes egyedre felírva:

$$y = X\beta + \tilde{X}\varepsilon + u\,, \tag{7}$$

ahol

X az exogén változók megfigyeléseinek értékét tartalmazó $(NT \times K)$ méretű mátrix,

y az y_i-ket tartalmazó $NT \times 1$ méretű vektor,

ε és u az ε_i és u_i vektorokból felépített $(NK \times 1)$, illetve $(NT \times 1)$ méretű valószinüségi vektorváltozók;

---

[4] Az (5) esztimátornál érdemes felfigyelni arra is, hogy ez nem feltétlenül eredményez pozitív becslést a szórásokra. Negatív szórás becslés esetén az egész modell-specifikáció újragondolása válhat szükségessé.

és

$$\widetilde{X} = \begin{pmatrix} X_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & X_N \end{pmatrix}.$$

Tegyük fel, hogy teljesülnek a következő hipotézisek:

$$E(\varepsilon_i) = 0\,, \qquad E(u_i) = 0\,,$$

$$E(u_i u'_{i'}) = \begin{cases} \beta^2_{ui} I_T & i = i'\,, \\ 0 & i \neq i'\,, \end{cases}$$

$$E(\varepsilon_i \varepsilon'_{i'} = \begin{cases} \Delta & i = i' \\ 0 & i \neq i' \end{cases},$$

és ε_i, u_i korrelálatlan valószinüségi vektorváltozók.

Az így leírt modellt P. A. SWAMY [14], [15], [16] állította fel először. Könnyen észrevehető, hogy a modell nem más, mint a Hildreth–Houck modell egy – a dezaggregált adatbázishoz adaptált – változata. A különbség egyrészt az, hogy itt – mivel nem csupán egy idősor áll rendelkezésünkre – lehetővé válik az ε_i vektorváltozó kovariancia mátrixának a diagonalitására vonatkozó hipotézis elhagyása, másrészt pedig az, hogy az u_i látens változó σ^2_{ui} varianciája minden egyednél eltérő lehet.

Ahhoz, hogy a (7) modell paramétervektorának hatásos ALNM becslését előállíthassuk, szükség van az

$$E[(\widetilde{X}\varepsilon + u)(\widetilde{X}\varepsilon + u)'] = \sum$$

kovariancia mátrix becslésére.

Tudjuk, hogy

$$\sum = \begin{pmatrix} \sum_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{NN} \end{pmatrix}$$

ahol $\sum_{ii} = X_i \Delta X'_i + \sigma^2_{ui} I_T$.

Legyen $\widehat{\mathbf{e}}_i$ a KLNM becslésből származó reziduum vektor

$$\widehat{\mathbf{e}}_i = y_i - X_i \widehat{\beta}_i\,,$$

ahol $\widehat{\beta}_i$ az i–edik egyed idősorából, vagyis a (6) egyenletből számított KLNM paraméterbecslés.

Ekkor

$$\widehat{\sigma}^2_{ui} = \frac{\widehat{\mathbf{e}}'_i \widehat{\mathbf{e}}_i}{T - K}$$

a σ^2_{ui} varianciának torzítatlan becslése.

A Δ mátrix becslése pedig (MÁTYÁS [7]):

$$\Delta = \frac{S}{N-1} - \frac{1}{N}\sum_{i-1}^{N} \sigma_{ui}^2 (X_i' X_i)^{-1} ,$$

ahol

$$S = \sum_{i=1}^{N} \widehat{\beta}_i \widehat{\beta}_i' - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \widehat{\beta}_i \sum_{i=1}^{N} \widehat{\beta}_i'$$

és $\widehat{\beta}_i$ a (6) formulából származó KLNM paraméterbecslés.

Látható, hogy a fenti kovariancia mátrix becslése során maximálisan támaszkodtunk az idősorok és keresztmetszeti adatok együttes meglétéből adódó többletinformációra. Így érthetővé válik, hogy az eredeti – sima idősoros vizsgálatokra kidolgozott – Hildreth–Houck modellben az $E(\varepsilon_t \varepsilon_t')$ kovariancia mátrix diagonalitásának a hipotézise pótolja a hiányzó minta információt.

Szintén a (7) modell Σ kovariancia mátrixának becslésére rendelkezésre álló többletinformáció tette lehetővé, hogy az eredeti Hildreth–Houck modellnél látottnál egyszerűbben becsüljük e kovariancia mátrixot. A következő pontban bemutatandó modellnél azonban erre már, sajnos, nem lesz lehetőség.

B) *A Hsiao modell*

Legyen a vizsgálandó modell most

$$y_t = X_i \beta + X_i \varepsilon_i + \widetilde{X}_i \lambda + u_i , \tag{8}$$

ahol

λ az időhatásokat kifejező $(KT \times 1)$ méretű valószínűségi vektorváltozó,

$$\tilde{X}_i = \begin{pmatrix} X_{i1}' & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & X_{iT}' \end{pmatrix}$$

és a többi jelölés változatlan.

Az összes egyedre felírva a (8) modellt

$$y = X\beta + \widetilde{X}\varepsilon + \widetilde{\widetilde{X}}\lambda + u , \tag{9}$$

ahol

$$\widetilde{\widetilde{X}} = \begin{pmatrix} \widetilde{X}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{X}_N \end{pmatrix} .$$

A továbbiakban a következő hipotézisekkel élünk:

$$E(u_i) = 0\,, \quad E(\lambda_t) = 0\,, \quad E(\varepsilon_i) = 0\,;$$

$$E(u_i u'_{i'}) = \begin{cases} \sigma_u^2 I & i = i' \\ 0 & i \neq i' \end{cases};$$

$$E(\varepsilon_i \varepsilon'_{i'}) = \begin{cases} \Delta & i = i' \\ 0 & i \neq i' \end{cases};$$

$$E(\lambda_t \lambda'_{t'}) = \begin{cases} A & t = t' \\ 0 & t \neq t' \end{cases};$$

ahol λ_t a λ vektor t-edik szubvektora. Továbbá feltételezzük, hogy ε, λ és u valószínűségi vektorváltozók páronként korrelálatlanok és hogy az A, valamint Δ kovariancia mátrixok diagonálisak, ahol a megfelelő diagonális elemeket α_k és σ_k-val jelöljük.

Az így definiált (8) modell használatát C. HSIAO [6] ajánlotta először. Látható, hogy e modell egy szabályos Hildreth–Houck modell és egy speciális Swamy modell ötvözete, ahol a Δ kovariancia mátrix diagonális. Az A és Δ kovariancia mátrixokra vonatkozó diagonalitási feltétel elengedhetetlennek tűnik ahhoz, hogy a meglevő minta információból becsülni lehessen őket. A (9) modell ALNM esztimátorának az előállításához a

$$\begin{aligned} \Sigma &= E[(\tilde{X}\varepsilon + \tilde{\tilde{X}}\lambda + u)(\tilde{X}\varepsilon + \tilde{\tilde{X}}\lambda + u)'] \\ &= \tilde{X}(I_N \otimes \Delta)\tilde{X}' + \tilde{\tilde{X}}(I_T \otimes A)\tilde{\tilde{X}}' + \sigma_u^2 I_{NT} \end{aligned}$$

kovariancia mátrixot kell becsülni. A becslés menete hasonló a Hildreth–Houck modellnél látottakhoz, így a levezetés egyes technikai fogásait felesleges részleteiben elemezni.

Írjuk fel a (9) modell it-edik elemét:

$$y_{it} = \sum_{k=1}^{K} \bar{\beta}_{ki} X_{kit} + u^*_{it}\,,$$

ahol

$$\bar{\beta}_{ki} = \beta_k + \varepsilon_{ki}\,,$$

$$u^*_{it} = \sum_{k=1}^{K} \lambda_{kt} X_{kit} + u_{it}\,.$$

Legyen

$$D_{it} = E(u^{*2}_{it}) = \sum_{k=1}^{K} X^2_{kit}\alpha_k + \sigma_u^2\,,$$

vagy vektor alakban

$$D_i = \dot{X}_i \alpha ,$$

ahol

$\dot{X}_i$ az X_i elemeit tartalmazza a négyzetre emelve

$\alpha' = (\alpha_1 + \sigma_u^2, \alpha_2, \dots, \alpha_K)$, (itt a vektor első eleme, hasonlóan a Hildreth–Houck modellnél látottakhoz, a szabad konstans miatt tér el a többi elemtől szerkezetében).

Jelöljük $\widehat{\mathbf{e}}_i$-vel a KLNM becslésből származó reziduum vektort (hasonlóan, mint a Swamy modellnél):

$$\widehat{\mathbf{e}}_i = y_i - X_i \widehat{\beta}_i ,$$

ahol $\widehat{\beta}_i$ a β_i paramétervektor KLNM becslése.

Továbbá jelöljük $\dot{\mathbf{e}}_i$–vel a fenti reziduum vektor elemeinek a négyzeteit tartalmazó vektort. Ekkor

$$E(\dot{\mathbf{e}}_i) = \dot{W}_i D_i = G_i \alpha , \tag{10}$$

ahol a $\dot{W}$ mátrix az $(I - X_i(X_i'X_i)^{-1}X_i')$ mátrix elemeit tartalmazza a négyzeten és $G_i = \dot{W}_i \dot{X}_i$.

A Hildreth–Houck modellnél látott ötletnek megfelelően tekintsük a (10) formulát egy regressziós összefüggésnek, így az α paramétervektor KLNM becslése könnyen adódik:

$$\widehat{\alpha} = (G'G)^{-1} G' \dot{\mathbf{e}} ,$$

ahol G a G_i és $\dot{\mathbf{e}}$ az $\dot{\mathbf{e}}_i$-ket tartalmazó vektor.

Hasonló módon eljárva, de nem egy adott egyedre, hanem egy adott időpontra végezve a vizsgálatot, megkapható a σ_K varianciák konzisztens becslése is. (Ez gyakorlatilag azt jelenti, hogy megfigyeléseinket nem egyedenként, hanem időpontonként csoportosítjuk.)

Láttuk a Hildreth–Houck modellnél, hogy ott a σ_u^2 variancia szeparált becslése nem volt lehetséges. Most ez a többlet minta-információból adódóan lehetővé válik

$$\sigma_u^2 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \widehat{\mathbf{e}}_{it} \bar{\mathbf{e}}_{it} / NT$$

ahol $\widehat{\mathbf{e}}_{it}$ az $\widehat{\mathbf{e}}_i$ vektor t-edik eleme, valamint

$$\bar{\mathbf{e}}_{it} = (y_t - X_t \widehat{\beta}_t)_i$$

és

$$\widehat{\beta}_t = (X_t'X_t)^{-1} X_t y_t ,$$

miközben y_t és X_t az adott változó összes egyedének a t-edik időponthoz tartozó megfigyeléseit tartalmazza.

Az írás végére érve a szerző reméli, hogy sikerült rámutatni a változó paraméterű modellek alapelgondolásának lényegére és bemutatni az idősorok és keresztmetszeti adatok együttes felhasználásának egy alternatív modellezési formáját.

(Beérkezett: 1987. május 6-án.)

Irodalom

1. T.F.COOLEY–E.C.PRESCOTT: Varying Parameter Regression. Theory and Some Applications. *Annals of Economic and Social Measurement*, 1974. (Vol. 2) No 4.
2. T.F.COOLEY–E.C.PRESCOTT: Estimation in the Presence of Stochastic Parameter Variation. *Econometrica*, 1976 (Vol. 44) No 1.
3. B.R.FROEHLICH: Some Estimators for a Random Coefficient Regression Model. *JASA*. 1973 (Vol. 89) No.347.
4. S.M.GOLDFELD–H.H.KELEJIAN–R.E.QUANDT: Least Squares and ML Estimation of Switching Regressions. *Princeton University Research Memorandum* No.130. 1971.
5. C.HILDRETH–J.P.HOUCK: Some Estimators for Linear Model with Random Coefficient. *JASA*. 1968 No.322.
6. G.JUDGE and alia: *The Theory and Practice of Econometrics*. Wiley 1980.
7. MÁTYÁS LÁSZLÓ: Idősorok és keresztmetszeti adatok együttes felhasználása az ökonometriai vizsgálatokban. Kandidátusi értekezés. 1986.
8. MÁTYÁS LÁSZLÓ: A panel modellek becslése. *Szigma*, 1986. 4.
9. B.RAJ–V.K.SRIVASTAVA–S.UPODHYAYA: The Efficiency of Estimating Random Coefficient Model. *Journal of Econometrics*, 1980 (Vol. 12) No 3.
10. B.RAJ–A.ULLAH: *Econometrics. A Varying Coefficients Approach*. Croom–Helm 1981.
11. B.ROSENBERG: The Analysis of Cross–Section of Time Series by Stochastically Convergent Parameter Regression. *Annals of Economic and Social Measurement*, 1973 (Vol. 2) No 4.
12. B.ROSENBERG: A Survey of Stochastic Parameter Regression. *Annals of Economic and Social Measurement*, 1973 (Vol. 2) No 4.
13. H.RUBIN: Note on Random Coefficients. In: *Cowles Commission for Research in Economics*. Monograph No.1O. (Ed.: T.C. Koopmans.) 1950.
14. P.A.SWAMY: *Statistical Inference in Random Coefficient Regression Models*. Springer–Verlag 1971.
15. P.A.SWAMY: Linear Models with Random Coefficients. In: *Frontiers in Econometrics*. (Ed.: P. Zarembka.) Academic Press 1974.
16. P.A.SWAMY–J.S.MEHTA: Estimation of Linear Models with Time and Cross Sectionally Varying Coefficients. *JASA*. 1977 (Vol. 72) No. 360.
17. A.WALD: A Note on Regression Analysis. *Annals of Mathematical Statistics*, 1947 No. 18.

A Possible Field of Application for Models with Stochastically Varying Parameters

The use of models with stochastically varying parameters in econometric analysis allowed derestricting the structural parameters from being constant. This step – important from the viewpoint of modelling – raises several new questions and problems both for modelling and methodology. The purpose of the paper is partly to show the major models with varying parameters – used in econometric analysis – and partly to highlight through a concrete application what the actual content of this approach is. The application presented offeres a more complex and more refined alternative procedure for the combined use of time series and cross-section data than do the panel models.

Szigma, XX. (1987–88) 1. sz.

SZIDAROVSZKY FERENC – OKUGUCHI KOJI

Egy adaptív kvadratikus játék stabilitásáról

1. Bevezetés

A dinamikus játékok stabilitása napjaink játékelméleti kutatásainak egyik központi kérdésköre. Konkrét játékok stabilitásával számos szerző foglalkozott. Például THEOCHARIS (1959), OKUGUCHI (1970, 1976), SZÉP – FORGÓ (1985), OKUGUCHI – SZIDAROVSZKY (1986a, b) munkáit említhetjük meg. Újabban már vannak olyan kutatások is, ahol feloldják azt a Cournot-tól származó feltételezést, hogy minden játékos a jelenlegi stratégiák megtartását feltételezi a következő pillanatban a többi játékos részéről. Ezek a modellek alkalmas adaptív feltételezésekkel élnek, a feltételezések még az oligopol probléma esetén sem egyértelműek. Például az OKUGUCHI – SZIDAROVSZKY (1986b) dolgozatban a többi játékos stratégiái összegéről tételeztek fel adaptív elvárásokat, míg a SZIDAROVSZKY – OKUGUCHI (1986a) cikkben magukról a stratégiákról tételeztek fel hasonló adaptív elvárásokat. Mind a két típusú feltételrendszer esetén sikerült a játék stabilitását bizonyítani, annak ellenére, hogy az egyes játékosok elvárásai egymásnak ellent is mondhatnak. Jelen dolgozatunkban olyan általános kvadratikus dinamikus problémát vizsgálunk meg, amely speciális esetként magában foglal több speciális játékról korábban vizsgált modellt, így például a fenti dinamikus oligopol problémákat is. Speciális kvadratikus modellt vizsgál a SZIDAROVSZKY – OKUGUCHI (1986b) tanulmány, azonban nem vizsgál adaptív viselkedést, hanem megmarad a Cournot-tól származó leegyszerűsített feltételezések mellett. Jelen dolgozatunkban ezt a modellt is realisztikusabbá tesszük.

Tekintsük a következő kvadratikus játékot:

$$\Gamma = N; S_1, \dots, S_N; \varphi_1, \dots, \varphi_N,$$

ahol (A) az $S_k (k = 1, 2, ..., N)$ stratégiahalmazok véges dimenziós euklideszi terek konvex, korlátos, zárt részhalmazai;
(B) a $\varphi_k (k = 1, 2, .., N)$ kifizetőfüggvény

$$\varphi_k(x_1, \dots, x_N) = x^{(k)T} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{00}^{(k)} & \dots & \mathbf{A}_{0n_k}^{(k)} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{n_k0}^{(k)} & \dots & \mathbf{A}_{n_kn_k}^{(k)} \end{pmatrix} x^{(k)} + b^{(k)T} x^{(k)} + c(k) \qquad (1)$$

alakú, ahol

$$x^{(k)} = \begin{pmatrix} x_k \\ s_{k1} \\ \vdots \\ s_{k,n_k} \end{pmatrix}, s_{kl} = \sum_{m \neq k} \mathbf{B}_{lm}^{(k)} x_m (l = 1, 2, \ldots, n_k), \tag{2}$$

valamint az $\mathbf{A}_{00}^{(k)} + \mathbf{A}_{00}^{(k)T}$ mátrix negatív definit.

Ismeretes (ld. például SZÉP – FORGÓ, 1985), hogy az (A) és (B) feltételek mellett a Γ játéknak létezik legalább egy egyensúlypontja.

A (2) kifizetőfüggvény-alakban azt tettük fel, hogy az egyes játékosok kifizetőfüggvényei nem közvetlenül függnek a többi játékos stratégiaválasztásától, hanem közvetlenül csak azok lineáris kombinációitól. Ilyen a helyzet például az oligopol játék esetén is, amikor az árfüggvényekben csak a többi játékos össztermelése – azaz stratégiáinak összege – szerepel. Az itteni feltételezés természetesen nem jelenti az általánosság megszorítását, hiszen az $n_k = N - 1$,

$$\mathbf{B}_{lm}^{(k)} = \begin{cases} \mathbf{I}, & \text{ha } l < k \text{ és } l = m, \text{ vagy} \\ & \text{ha } l \geq k \text{ és } l + 1 = m; \\ \mathbf{O} & \text{különben} \end{cases} \tag{3}$$

esetben közvetlenül a stratégiavektorok jelennek meg a kifizetőfüggvényekben.

Jelen dolgozatunkban az imént megfogalmazott kvadratikus játék olyan dinamikus modelljét fogalmazzuk meg és vizsgáljuk, amikor az egyes (mondjuk a k-adik) játékosoknak adaptív várakozásuk van az $s_{kl}(l = 1, 2, \ldots, n_k)$ vektorokat illetően. Az s_{kl} vektorok általában konkrét közgazdasági jelentéssel bírnak. Például – mint látni fogjuk – az oligopol probléma esetén s_{kl} a k-tól különböző játékosok összkínálatát jelenti, vagy egyszerűen az l - edik ($k \neq l$) játékos kínálata.

A következő paragrafusban a dinamikus modell matematikai formalizmusát adjuk meg, majd a 3. paragrafusban a modell stabilitását vizsgáljuk meg. Konkrét oligopolisztikus problémákkal foglalkozunk a dolgozat befejezéseként.

2. Az adaptív dinamikus modell

Tegyük fel, hogy az egyes játékosok minden $t \geq 0$ időpillanatban a hozzájuk tartozó s_{kl} vektorokat illetően az s_{kl}^E elvárásokkal rendelkeznek, ahol ezekről az elvárásokról a

$$\frac{d}{dt} s_{kl}^E = M_{kl} \cdot (s_{kl} - s_{kl}^E) \tag{4}$$

adaptív feltételezésekkel élnek. A jobb oldalon s_{kl} jelenti a ténylegesen megvalósuló s_{kl} értéket, s_{kl}^E pedig az erre vonatkozó elvárást. Így az $s_{kl} - s_{kl}^E$ különbség az elvárás hibáját mutatja. A (4) reláció pedig úgy interpretálható, hogy ennek a tévedésnek az arányában változtatja meg minden játékos az s_{kl} vektorra vonatkozó elvárást. Az egyes játékosoknak a saját stratégiára vonatkozó dinamizmusát pedig a következőképpen modellezhetjük.

Feltesszük, hogy egyes játékosok stratégiáikat a várható marginális profit arányában idomítják. Ez az illeszkedési elv matematikailag a

$$\frac{d}{dt}x_k = \mathbf{K}_k\left[(\mathbf{A}_{00}^{(k)} + \mathbf{A}_{00}^{(k)T})x_k + \sum_{l=1}^{n_k}(\mathbf{A}_{0l}^{(k)} + \mathbf{A}_{l0}^{(k)T})s_{kl}^E + b_0^{(k)}\right] \tag{5}$$

differenciálegyenlettel írható le. Egy másik illeszkedési elv azt feltételezi, hogy a játékosok stratégiáikat a profitmaximalizáló és az aktuális stratégiájuk különbségével arányosan változtatják meg. Kimutatható (ld. SZIDAROVSZKY - OKUGUCHI, 1986a), hogy ez utóbbi dinamizmus is az (5) alakra írható át alkalmas feltételek mellett.

Megjegyezzük, hogy az (5) jobb oldalán a várható marginális profit a φ_k kifizető függvény x_k szerinti gradiens vektora.

Tekintsük változónak az $x_1, \ldots, x_N$ stratégiavektorokon kívül az $s_{11}^E, \ldots, s_{1,n_1}^E, \ldots, s_{N,n_N}^E$ vektorokat is, és jelöljük az ezen vektorokat ebban a sorrendben tartalmazó összevont vektort z-vel. Ekkor, felhasználva az s_{kl} vektorok definícióját, a (4) és (5) relációk összevontan a következő alakba írhatók:

$$\frac{d}{dt}z = \mathbf{S}\cdot\mathbf{H}z + d, \tag{6}$$

ahol d konstans vektor,

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && \mathbf{K}_N &&&&&& \\ &&& \mathbf{M}_{11} &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& \mathbf{M}_{1n_1} &&& \\ &&&&&& \mathbf{M}_{N1} && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& \mathbf{M}_{Nn_N} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

a $\mathbf{H}$ mátrix szerkezetét pedig (8) mutatja.

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} \overbrace{\hphantom{\mathbf{A}_{00}^{(1)}+\mathbf{A}_{00}^{(1)T}\quad\mathbf{A}_{00}^{(2)}+\mathbf{A}_{00}^{(2)T}\quad\mathbf{A}_{00}^{(N)}+\mathbf{A}_{00}^{(N)T}}}^{N} & \overbrace{\hphantom{\mathbf{A}_{01}^{(1)}+\mathbf{A}_{10}^{(1)T}\quad\cdots\quad\mathbf{A}_{0n_1}^{(1)}+\mathbf{A}_{n_10}^{(1)T}}}^{n_1} & \hphantom{\cdots} & \overbrace{\hphantom{\mathbf{A}_{01}^{(N)}+\mathbf{A}_{10}^{(N)T}\quad\cdots\quad\mathbf{A}_{0n_N}^{(N)}+\mathbf{A}_{n_N0}^{(N)T}}}^{n_N} & \end{array} \\
\mathbf{H} = & \left(\begin{array}{cccc|ccc|c|ccc}
\mathbf{A}_{00}^{(1)}+\mathbf{A}_{00}^{(1)T} & & & & \mathbf{A}_{01}^{(1)}+\mathbf{A}_{10}^{(1)T} & \cdots & \mathbf{A}_{0n_1}^{(1)}+\mathbf{A}_{n_10}^{(1)T} & & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} \\
 & \mathbf{A}_{00}^{(2)}+\mathbf{A}_{00}^{(2)T} & & & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} & & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} \\
 & & \ddots & & \vdots & & \vdots & \cdots & \vdots & & \vdots \\
 & & & \mathbf{A}_{00}^{(N)}+\mathbf{A}_{00}^{(N)T} & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} & & \mathbf{A}_{01}^{(N)}+\mathbf{A}_{10}^{(N)T} & \cdots & \mathbf{A}_{0n_N}^{(N)}+\mathbf{A}_{n_N0}^{(N)T} \\
\hline
\mathbf{O} & \mathbf{B}_{12}^{(1)} & \cdots & \mathbf{B}_{1N}^{(1)} & -\mathbf{I} & & & & & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & & & & & \\
\mathbf{O} & \mathbf{B}_{n_12}^{(1)} & \cdots & \mathbf{B}_{n_1N}^{(1)} & & & -\mathbf{I} & & & & \\
\hline
 & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & \\
\hline
\mathbf{B}_{11}^{(N)} & \mathbf{B}_{12}^{(N)} & \cdots & \mathbf{O} & & & & & -\mathbf{I} & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & & & & & \ddots & \\
\mathbf{B}_{n_N1}^{(N)} & \mathbf{B}_{n_N2}^{(N)} & \cdots & \mathbf{O} & & & & & & & -\mathbf{I}
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\\a\end{array}}\right\} N \\
\left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\end{array}}\right\} n_1 \\
\vphantom{a} \\
\left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\end{array}}\right\} n_N
\end{array}
\end{array}
\qquad (8)
$$

3. Stabilitási kritériumok

Az előbbiekben leírt dinamikus játékot stabilisnak mondjuk, ha a neki megfelelő lineáris differenciálegyenletrendszer aszimptotikusan stabilis. Ennek – mint ismeretes – az a feltétele, hogy az $\mathbf{S}\cdot\mathbf{H}$ mátrix sajátértékeinek a valós része negatív legyen.

A fentieken kívül tegyük még fel a következőket:

(C) a $\mathbf{K}_k$ és $\mathbf{M}_{kl}(1\le k\le N, 1\le l\le n_k)$ mátrixok valamennyien pozitív definitek;
(D) a (6) differenciálegyenletrendszer trajektoriájának $(x_1,\ldots,x_N)$ része az $S_1\times\ldots\times S_N$ halmaz belső pontja tetszőleges $t\ge 0$ esetén.

A (D) feltétel technikai jellegű. Mint azt SZÉP–FORGÓ (1985) kimutatja, alkalmas büntetőfüggvények bevezetésével elérhető, hogy a trajektoria minden $t\ge 0$ esetén $S_1\times\ldots\times S_N$ belsejében maradjon.

Játékok stabilitása közgazdasági szempontból azt jelenti, hogy $t\to\infty$ esetén az $(x_1(t),\ldots,x_N(t))$ stratégiavektorok a játék egyetlen egyensúlypontjához konvergálnak. Ez a tulajdonság nemcsak kvalitatíve jellemzi az egyensúlypontokat, hanem numerikus meghatározásukra is módszert ad.

A (C) feltétel alapján az $\mathbf{S}$ mátrix pozitív definit, így a (6) differenciálegyenletrendszer aszimptotikusan stabilis, ha a $\mathbf{H}$ mátrix H-stabilis (ld. CARLSON, 1968). Ennek pedig – mint ismeretes – az az elégséges feltétele, hogy a $\mathbf{H}+\mathbf{H}^T$ mátrix negatív definit legyen. A továbbiakban ennek a feltételét vizsgáljuk meg. Mindenekelőtt vezessük be a következő jelöléseket:

$$\mathbf{U}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{00}^{(1)}+\mathbf{A}_{00}^{(1)T} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{A}_{00}^{(N)}+\mathbf{A}_{00}^{(N)T}\end{pmatrix} \tag{9}$$

$$\mathbf{V}_1=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{01}^{(1)T}+\mathbf{A}_{10}^{(1)} & \mathbf{B}_{12}^{(1)} & \ldots & \mathbf{B}_{1N}^{(1)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \mathbf{A}_{0n_1}^{(1)T}+\mathbf{A}_{n_10}^{(1)} & \mathbf{B}_{n_12}^{(1)} & \ldots & \mathbf{B}_{n_1N}^{(1)}\end{pmatrix},\cdots$$

$$\cdots\mathbf{V}_N=\begin{pmatrix}\mathbf{B}_{11}^{(N)} & \ldots & \mathbf{B}_{1,N-1}^{(N)} & \mathbf{A}_{01}^{(N)T}+\mathbf{A}_{10}^{(N)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \mathbf{B}_{n_N1}^{(N)} & \ldots & \mathbf{B}_{n_N,N-1}^{(N)} & \mathbf{A}_{0n_N}^{(N)T}+\mathbf{A}_{n_N0}^{(N)}\end{pmatrix}, \tag{10}$$

Tegyük fel, hogy:
(E) $4\mathbf{U}+\sum_{k=1}^{N}\mathbf{V}_k^T\mathbf{V}_k$ mátrix negatív definit.

Dolgozatunk fő eredménye a következő tétel:

Tétel: Az (A) -(E) feltételek mellett a dinamikus játék stabilis.

Bizonyítás: Az előzőek alapján elegendő azt belátnunk, hogy a tett feltételek mellett a $\mathbf{H} + \mathbf{H}^T$ mátrix negatív definit. Ennek belátása érdekében tekintsük e mátrix sajátértékegyenletét. Minthogy a fenti jelölések alapján

$$\mathbf{H} + \mathbf{H}^T = \begin{pmatrix} 2\mathbf{U} & \mathbf{V}_1^T & \dots & \mathbf{V}_N^T \\ \mathbf{V}_1 & -2\mathbf{I} & & \\ \vdots & & ddots & \\ \mathbf{V}_N & & & -2\mathbf{I} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

sajátértékegyenlete így is felírható:

$$2\mathbf{U}u + \sum_{k=1}^{N} \mathbf{V}_k^T v_k = \lambda u$$

$$\mathbf{V}_k u - 2v_k = \lambda v_k (k = 1, 2, \dots, N). \tag{12}$$

Bebizonyítjuk, hogy a tett feltételek mellett $\lambda < 0$. Ha $\lambda = 2$, akkor nincs mit bizonyítanunk. Ellenkező esetben a (12) második egyenletéből

$$v_k = \frac{1}{\lambda + 2} v_k u, \tag{13}$$

amelyet (12) első egyenletébe helyettesítve a

$$(2\mathbf{U} + \frac{1}{\lambda + 2} \sum_{k=1}^{N} \mathbf{V}_k^T \mathbf{V}_k - \lambda \mathbf{I})u = 0 \tag{14}$$

reláció adódik. Kimutatjuk először, hogy $u \neq o$. Ellenkező esetben ugyanis (13) alapján $v_k = 0$ $(k = 1, 2, \dots, N)$ adódna, és ebből zérus sajátvektort kapnánk, ami nem lehet. Így $u \neq 0$. Szorozzuk be balról a (14) egyenlőséget az u^T vektorral, majd osszuk el mindkét oldalt az $u^T u > 0$ számmal. Ekkor az

$$\alpha = \frac{u^T \mathbf{U} u}{u^T u},$$

$$\beta = \frac{u^T (\sum_{k=1}^{N} \mathbf{V}_k^T \mathbf{V}_k) u}{u^T u} \tag{15}$$

jelölésekkel a

$$2\alpha + \frac{1}{\lambda + 2}\beta - \lambda = 0 \tag{16}$$

egyenlet adódik a λ sajátértékekre. Átrendezéssel

$$\lambda^2 - \lambda(2\alpha - 2) - (4\alpha + \beta) = 0 \tag{17}$$

amelyből

$$\lambda = \alpha - 1 \pm \sqrt{(\alpha-1)^2 + 4\alpha + \beta}, \tag{18}$$

Ez akkor és csak akkor negatív, ha

$$\pm\sqrt{(\alpha-1)^2 + 4\alpha + \beta} < 1 - \alpha \tag{19}$$

Minthogy a (B) feltétel alapján $\alpha < 0$, ez az egyenlőtlenség ekvivalens a

$$4\alpha + \beta < 0 \tag{20}$$

relációval, amely biztosan teljesül az (E) feltétel következtében.

Megjegyzés: A tétel lehetőséget ad arra, hogy a $\mathbf{H} + \mathbf{H}^T$ mátrix negatív definitségét egy sokkal kisebb méretű mátrix negatív definitségén keresztül igazoljuk. A (B) feltétel alapján $4\mathbf{U}$ negatív definit, a $\mathbf{V}_k^T \mathbf{V}_k$ szorzatok pedig pozitívak (szemi)definitek, így az (E) feltétel akkor teljesül, ha a $4\mathbf{U}$ tag (definit értelemben) dominál az összegben. Ennek eldöntésében pedig az $\mathbf{U}$ és $\mathbf{V}_k$ mátrixok konkrét struktúrájának ismerete szükséges. Például az oligopol probléma esetén speciális struktúrájuk alapján közvetlenül ellenőrizhető stabilitási kritériumokat nyerhetünk. Ezekkel foglalkozunk a következő paragrafusban.

4. Dinamikus oligopol modellek

A többtermékes oligopol problémát SZIDAROVSZKY (1978) vezette be. Tegyük fel, hogy N termelő M különböző terméket állít elő, és közös piacon együtt értékesíti. Jelölje $x_k^{(m)}$ a k-adik termelő által az m-edik termékből előállított mennyiséget, ekkor a k-adik termelő stratégiája az $x_k = (x_k^{(1)}, \ldots, x_k^{(M)})$ vektorral jellemezhető. Tegyük fel, hogy az egyes termékek egységára az összes termékeknek a piacra küldött mennyiségétől függ. Linearitást feltételezve az árvektor

$$p(x_1, \ldots, x_N) = \mathbf{A} \cdot \sum_{k=1}^{N} x_k + b \tag{21}$$

alakban írható fel. Tegyük fel továbbá, hogy a k-adik termelő költségfüggvénye kvadratikus:

$$c_k(x_k) = x_k^T \mathbf{B} x_k = b_k^T x_k + c_k \tag{22}$$

ekkor kifizetőfüggvénye pedig:

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_N) = x_k^T (\mathbf{A} \cdot \sum_{k=1}^{N} x_k + b) - (x_k^T \mathbf{B}_k x_k + b^T x_k + c_k), \tag{23}$$

ahol $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}_k$,b,b_k,c adott konstans mátrix, vektor, vagy valós szám.

A (23) kifizetőfüggvénnyel rendelkező játék stabilitását viszgáljuk meg a továbbiakban kétféle adaptív feltételrendszer mellett.

Az első modellben feltesszük, hogy az egyes játékosoknak adaptív elvárásaik vannak közvetlenül a többi játékos stratégiáit illetően. Ha x_{kl}^E jelöli a k-adik játékos elvárását az x_l stratégiát ($l \neq k$) illetően, akkor ez az elv a

$$\frac{d}{dt} x_{kl}^E = \mathbf{M}_{kl} \cdot (x_k - x_{kl}^E) \tag{24}$$

dinamizmussal írható le. Kimutatható, hogy ebben az esetben is (6) típusú differenciálegyenlet-rendszer adódik ahol most

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T - (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_1^T) & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{A} + \mathbf{A}^T - (\mathbf{B}_N + \mathbf{B}_N^T) \end{pmatrix}, \tag{25}$$

$$\mathbf{V}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T & \mathbf{I} & \\ \vdots & & \ddots \\ \mathbf{A}^T & & & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{V}_N = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & & & \mathbf{A}^T \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \mathbf{I} & \mathbf{A}^T \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Tekintsük ezután azt a speciális esetet, amikor $\mathbf{A}$ szimmetrikus, valamint a $\mathbf{B}_k (1 \leq k \leq N)$ mátrixok zérus értéküek. Jelölje α az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékeit. Fennáll a következő (SZIDAROVSZKY – OKUGUCHI, 1986a) állítás:

Ha $N = 2$, akkor

$$-3 - \sqrt{8} < \alpha < -3 + \sqrt{8} \tag{27}$$

esetén, ha $N = 3$, akkor

$$\frac{1}{2}(-3 - \sqrt{5}) < \alpha < \frac{1}{2}(-3 + \sqrt{5}) \tag{28}$$

esetén a játék stabilis, ha pedig $N \geq 4$, nincs olyan α, amelyre $\mathbf{H} + \mathbf{H}^T$ negatív definit lenne.

A második modell azon az észrevételen alapszik, hogy a (23) kifizetőfüggvény nem függ külön az $x_l (l \neq k)$ stratégiáktól, hanem csak azok $s_k = \sum_{l \neq k} x_l$ összegétől. Ekkor ugyanis

$$\varphi_k(x_1, \dots, x_N) = x_k^T(\mathbf{A}x_k + \mathbf{A}s_k + b) - (x_k^T \mathbf{B}_k x_k + b^T x_k + c_k), \tag{29}$$

Ha azt feltételezzük, hogy az egyes játékosoknak adaptív elvárásaik vannak az s_k vektorokat illetően, akkor ezt a

$$\frac{d}{dt} s_k^E = \mathbf{M}_k \cdot (s_k - s_k^E) \tag{30}$$

differenciálegyenletet reprezentálja. Egyszerü számítás mutatja, hogy ebben az esetben is (25) alakú az $\mathbf{U}$ mátrix, valamint most

$$\mathbf{V}_1 = (\mathbf{A}^T \mathbf{I} \dots \mathbf{I}), \dots, \mathbf{V}_N = (\mathbf{I} \dots \mathbf{I}\, \mathbf{A}^T). \tag{31}$$

Tekintsük ezután azt a speciális esetet, amikor a $\mathbf{B}_k$ mátrixok azonosak ($\mathbf{B}_k \equiv \mathbf{B}$). Kimutatható (OKUGUCHI – SZIDAROVSZKY, 1986b), hogy amennyiben az

$$(\mathbf{A} + (N-1)\mathbf{I}) \cdot (\mathbf{A} + (N-1)\mathbf{I})^T + 4(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T - \mathbf{B} - \mathbf{B}^T)$$

és az

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{I})^T = 4(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T - \mathbf{B} - \mathbf{B}^T) \tag{32}$$

mátrix negatív definit, akkor a játék szükségképpen stabilis. Tegyük fel végül, hogy $\mathbf{A}$ szimmetrikus, és $\mathbf{B} = 0$. Jelölje most is α az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékét. A (32) mátrixok sajátértékei akkor és csak akkor negatívak, ha

$$(\alpha + N - 1)^2 + 8\alpha < 0 \tag{33}$$

és

$$(\alpha - 1)^2 + 8\alpha < 0 \tag{34}$$

Ez a két egyenlőtlenség pedig akkor és csak akkor teljesül, ha

$$-(N+3) - \sqrt{8(N+1)} < \alpha < -(N+3) + \sqrt{8(N+1)} \tag{35}$$

és

$$-3 - \sqrt{8} < \alpha < -3 + \sqrt{8}. \tag{36}$$

Ezeknek a teljesülési feltételei pedig

$$-3 - \sqrt{8} < \alpha < -3 + \sqrt{8}. \tag{37}$$

és

$$-3 - \sqrt{8} < \alpha < -(N+3) + \sqrt{8(N+1)} \tag{38}$$

A kétféle modell nyilvánvalóan azonos stabilitási eredményt ad $N = 2$ esetén, hiszen ekkor $s_1 = x_2$ és $s_2 = x_1$ azaz a két modell azonos. A második modell $N = 3$ esetére tágabb intervallumot ad α-ra, mint az első modell. Az első modell már $N = 4$ esetére sem ad lehetséges intervallumot α-ra, míg a második modell egészen addig ad lehetséges intervallumot, amíg

$$-3 - \sqrt{8} < \alpha < -(N+3) + \sqrt{8(N+1)}$$

azaz $N \leq 13$. Ebben az értelemben tehát a második modell stabilisabbnak tekinthető.

(Beérkezett: 1987. március 30-án.)

Irodalom

THEOCHARIS, R.D. (1959): On the Stability of the Cournot Solution of the Oligopoly Problem. *Review of Econ. Studies*, Vol. 27, pp. 133–134.

OKUGUCHI, K. (1970): Adaptive Expectations in Oligopoly Model. *Review of Econ. Studies*, Vol. 37, pp. 233–237.

OKUGUCHI, K. (1976): *Expectations and Stability in Oligopoly Models*. Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York.

SZÉP J. – FORGÓ F. (1985): *Introduction to the Theory of Games*. Akadémiai Kiadó, Budapest.

OKUGUCHI, K. – SZIDAROVSZKY, F. (1986a): Dynamics of the Cournot Oligopoly with Multi-Product Firms. (megj. alatt)

OKUGUCHI, K. – SZIDAROVSZKY, F. (1986b): An Adaptive Dynamic Multiproduct Oligopoly Model. (megj. alatt)

SZIDAROVSZKY, F. – OKUGUCHI, K. (1986a): Adaptive Expectations in a Multiproduct Oligopoly Model. (megj. alatt)

SZIDAROVSZKY, F. – OKUGUCHI, K. (1986b): Kvadratikus játékok stabilitásáról. (megj. alatt)

CARLSON, D. (1986): A New Criterion for H-Stability of Complex Matrices. *Lin. Alg. and Appl.*, Vol. 1, pp. 59–64.

ARROW, K.J. – M. MCMANUS (1953): A Note on Dynamic Stability. *Econometrica*, Vol. 26, pp. 448–454.

SZIDAROVSZKY, F. (1978): *Játékelmélet.* ELTE TTK jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest.

On The Stability of an Adaptive Quadratic Game

The stability of N-person games with quadratic pay-off functions is examined under the assumption that the individual players have adaptive expectations about the changes in the other players' strategies and/or the linear combinations thereof. In the study some results of the stability theory of differential equation systems are utilized. As a concrete application the oligopoly problem is examined.

Szigma, XX. (1987–88) 1. sz.

PAULO R.C. VILLELA – CLAUDIO T. BORNSTEIN

A nulla-egyes hátizsák feladat optimális célfüggvényértéke egy felső korlátjának élesítése

1. Bevezetés

Tekintsük a következő P^0 nulla-egyes hátizsák feladatot ($KP01$)

$$z^* = \max z = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \le M \tag{2}$$

$$x_i \in \{0,1\}, \quad i = 1,\ldots,n, \tag{3}$$

ahol az i tárgyhoz tartozó haszon, ill. súly p_i, ill. w_i. A célunk, hogy a tárgyaknak egy olyan részhalmazát válasszuk ki (a megfelelő $x_i = 1$ értékadások segítségével), hogy ezáltal maximalizáljuk a teljes z hasznot, miközben az M súlykorlátot nem sértjük meg.

A probléma látszólagos egyszerüsége ellenére mindmáig nem tudjuk, hogy meg lehet-e azt oldani polinomiális algoritmussal, és tekintve, hogy a feladat NP-teljes, ezért nem is valószinü, hogy ilyen eljárás létezzék.

A $KP01$ feladat egzakt megoldó algoritmusai között igen elterjedtek és hatékonyak a korlátozás és szétválasztás különböző változatai. Így többek között az [1], [3], [4], [5], [7], [8], [9] dolgozatok közölnek ilyen módszert.

Most némileg leegyszerűsítve összefoglaljuk a korlátozás és szétválasztás elvén alapuló algoritmusokat. A P^0 feladatból kiindulva a szétválasztási eljárás a részfeladatok egy $P^1, P^2, \ldots$ halmazát állítja elő, például az x_i változó valamely értéken való rögzítésével. Az algoritmus a P^0 optimális megoldásához egy LB_z alsó korlátot is meghatároz ($LB_z \le z^*$) amely nem más, mint P^0 egy megengedett megoldásának célfüggvényértéke. Továbbá minden P^i részfeladat optimális célfüggvényértékéhez meghatároz egy UB^i felső korlátot. Természetesen ha $UB^i \le LB_z$, akkor a P^i feladatot elhagyhatjuk.

Ebből a tényből adódik, hogy az algoritmus hatékonysága igen erősen függ a korlát jóságától. Azonban pontosabb korlát a szükséges többletszámítások miatt nagyobb gépidőt igényel, ami annál inkább kritikussá válik, minél gyakrabban számítjuk ki a korlátot.

A jelen dolgozatban egy új felső korlátot adunk meg a $KP01$ feladathoz, mely valóban több számítást igényel. Az eredmény fő előnye azonban az, hogy ezt a megjavított korlátot csak egyszer, UB^0 meghatározásánál kell kiszámítani. A további P^i feladatok esetében UB^i már valamely gyorsabb módszerrel is előállítható. Így a kis számítási többletet a korlát pontosságában mutatkozó javulás kompenzálja.

A megjavított UB^0 érték fő előnye a következőképpen érthető meg. Tegyük fel, hogy az eljárás során találtunk egy olyan megengedett megoldást, hogy már $LB_z = UB^0$ is teljesül. Ekkor bizonyosak lehetünk abban, hogy a talált pont optimális. Habár az $LB_z = UB^0$ feltétel ellenőrzése további gépidőt igényel, ezzel kapcsolatban az [5] dolgozat jó eredményekről számol be.

2. Néhány felső korlát rövid áttekintése

Csak azokat a felső korlátokat ismertetjük, amelyek szorosan összefüggnek az általunk megjavított korláttal. Teljes körkép található a témáról [6]-ban.

Tegyük fel, hogy P^0-ban úgy rendeztük a tárgyakat,hogy $p_i/w_i \geq p_{i+1}/w_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n-1$. Továbbá az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy p_i és w_i pozitív egész, $w_i \leq M, i = 1, \ldots, n$, és

$$\sum_{i=1}^{n} w_i > M .$$

A felső korlátok későbbi definícióinak egyszerűsítése érdekében bevezetünk egy új, mesterséges tárgyat a $p_{n+1} = 0$ és $w_{n+1} = M$ adatokkal.

A P^0 feladathoz tartozó egyik legelső felső korlátot 1957-ben DANTZIG közölte [2]. Ez

$$UB_D^0 = \sum_{i=1}^{k} p_i + \lfloor (M - \sum_{i=1}^{k} w_i) p_{k+1}/w_{k+1} \rfloor , \tag{4}$$

ahol k azt a legnagyobb egészet jelöli, amelyre még

$$\sum_{i=1}^{k} w_i \leq M$$

igaz, és $\lfloor \alpha \rfloor$ az a legnagyobb egész szám, amelyik nem nagyobb, mint α.

1977-ben MARTELLO és TOTH [5] megtalálták a Dantzig-féle felső korlát egy javítását. A javítás alapgondolata az, hogy P^0 optimális megoldásában vagy

$x_{k+1} = 0$ vagy $x_{k+1} = 1$. A két esetet külön-külön vizsgálva egy B_1 és B_2 korláthoz jutunk, ahol

$$B_1 = \sum_{i=1}^{k} p_i + \lfloor (M - \sum_{i=1}^{k} w_i) p_{k+2}/w_{k+2} \rfloor , \tag{5}$$

$$B_2 = \lfloor \sum_{i=1}^{k+1} p_i - (\sum_{i=1}^{k+1} w_i - M) p_k/w_k \rfloor . \tag{6}$$

Így Martello és Toth felső korlátja

$$UB^0_{MT} = \max\{B_1, B_2\} \tag{7}$$

lesz. Martello és Toth megmutatták, hogy $UB^o_{MT} \leq UB^o_D$, azaz a korlátjuk jobb.

UB^o_{MT} egy további javítását HUDSON [6] adta meg 1977-ben. Észrevette, hogy B_2-ben a korrekciónál úgy vettük, mintha az egész

$$\sum_{i=1}^{k+1} w_i - M$$

túlsúly a k tárgyból származott volna. Mivel k-ról azt tudjuk csak, hogy a hozzá tartozó érték a legkisebb a $p_i/w_i, i = 1, \ldots, k$ számok közül, ezért a túlsúly w_k-nál nagyobb lehet. Így elképzelhető, hogy a korrekciót alá- és ezért a felső korlátot túlbecsüljük.

Az $x_{k+1} = 1$ esetben Hudson az $1, \ldots, k$ tárgyakra és az $M - w_{k+1}$ megmaradó súlykorlátra Dantzig ötletét alkalmazza. Jelölje $\widehat{k}$ azt a legnagyobb egészet, amire még

$$\sum_{i=1}^{\widehat{k}} w_i \leq M - w_{k+1}$$

teljesül. Ekkor azt nyerjük, hogy

$$B_3 = \sum_{i=1}^{\widehat{k}} p_i + p_{k+1} + \lfloor (M - w_{k+1} - \sum_{i=1}^{\widehat{k}} w_i) p_{\widehat{k}+1}/w_{\widehat{k}+1} \rfloor . \tag{8}$$

[6]-ban megmutatják, hogy $B_3 \leq B_2$ mindig teljesül. Így Hudson felső korlátja

$$UB^0_H = \max\{B_1, B_3\} \tag{9}$$

amire

$$UB^0_H \leq UB^0_{MT} .$$

3. A felső korlát egy élesítése

A mi javításunk is egy hasonló gondolaton alapszik, mint ahogy Hudson B_3-at meghatározta. Észrevehetjük, hogy B_1 kiszámításánál a megmaradó

$$M - \sum_{i=1}^{k} w_i$$

súlyt, ami az $x_{k+1} = 0$ értékadás miatt keletkezett, mind a $k+2$ tárgyhoz rendeltük, holott előfordulhat, hogy

$$M - \sum_{i=1}^{k} w_i > w_{k+2}\,.$$

Ekkor, mivel a $k+2$ tárgyhoz tartozik a legnagyobb p_i/w_i érték a $k+2, \ldots, n$ tárgyak között, felső becslésként szükségtelenül nagy értéket adunk meg.

Amit a továbbiakban csinálni akarunk, az nem más, mint a Dantzig-féle korlát meghatározása az $1, 2, \ldots, k, k+2, \ldots, n$ tárgyakra és az M összsúlyra. A következő tétel írja le a korlát élesítését.

Tétel: Legyen $\bar{k}$ $(1 \le \bar{k} \le n+1)$ az a legkisebb egész, amelyre

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k+1}}^{\bar{k}} w_i \ge M\,.$$

Továbbá legyen

$$B_4 = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k+1}}^{\bar{k}} p_i + \lfloor (M - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k+1}}^{\bar{k}-1} w_i) p_{\bar{k}}/w_{\bar{k}} \rfloor \tag{10}$$

és

$$UB^0_{VB} = \max\{B_4, B_3\}\,. \tag{11}$$

Ekkor

$$UB^0_{VB} \le UB^0_H\,.$$

Bizonyítás: Elegendő csak a $B_4 \le B_1$ egyenlőtlenséget megmutatni az $UB^0_{VB} \le UB^0_H$ reláció bizonyításához. Természetesen $\bar{k} \ge k+2$.

Ha $\bar{k} = k+2$, akkor (5) és (10) összehasonlítása mutatja, hogy $B_4 = B_1$.

Tekintsük most a $\bar{k} \ge k+3$ esetet. Ekkor

$$B_4 = \sum_{i=1}^{k} p_i + \lfloor \sum_{i=k+2}^{\bar{k}-1} p_i + (M - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k+1}}^{\bar{k}-1} w_i) p_{\bar{k}}/w_{\bar{k}} \rfloor\,. \tag{12}$$

Így (5) és (12) összevetéséből adódik, hogy $B_4 \leq B_1$ bizonyításához elegendő csak a $\lfloor\ \rfloor$ jelen belüli részeket tekinteni. Azonban

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=k+2}^{\bar{k}} p_i + (M - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k+1}}^{\bar{k}-1} w_i)p_{\bar{k}}/w_{\bar{k}} = \\
&= \sum_{i=k+2}^{\bar{k}} w_i p_i/w_i + (M - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k+1}}^{\bar{k}-1} w_i)p_{\bar{k}}/w_{\bar{k}} \leq \\
&\leq \sum_{i=k+2}^{\bar{k}} w_i p_{k+2}/w_{k+2} + (M - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k+1}}^{\bar{k}-1} w_i)p_{k+2}/w_{k+2} = \\
&=(M - \sum_{i=1}^{k} w_i)p_{k+2}/w_{k+2}
\end{aligned}
$$

ami a kívánt eredményt bizonyítja.

A következőkben egy példán illusztráljuk a különböző korlátokat.

Példa: Tekintsük az alábbi feladatot

$$
\begin{aligned}
\max z =&15x_1 + 14x_2 + 14x_3 + 18x_4 + 9x_5 + 3x_6 \\
&12x_1 + 14x_2 + 15x_3 + 24x_4 + 12x_5 + 6x_6 \leq 60
\end{aligned}
$$

$$x_i \in \{0,1\}, i = 1,\dots,6.$$

Ekkor

$$
\begin{aligned}
&k = 3, \widehat{k} = 2, \bar{k} = 7 \\
&B_1 = 15 + 14 + 14 + \lfloor 57/4 \rfloor = 57 \\
&B_2 = \lfloor 15 + 14 + 14 + 18 - 14/3 \rfloor = 56 \\
&B_3 = 15 + 14 + 18 + \lfloor 28/3 \rfloor = 56 \\
&B_4 = 15 + 14 + 14 + 9 + 3 + \lfloor 0 \rfloor = 55.
\end{aligned}
$$

Így a felső korlátok a következők

$$
\begin{aligned}
&UB_D^0 = 15 + 14 + 14 + \lfloor 57/4 \rfloor = 57 \\
&UB_{MT}^0 = \max\{B_1 B_2\} = 57 \\
&UB_H^0 = \max\{B_1 B_3\} = 57 \\
&UB_{VB}^0 = \max\{B_4 B_3\} = 56.
\end{aligned}
$$

Így tehát látható, hogy teljesül az

$$UB_D^0 \geq UB_{MT}^0 \geq UB_H^0 \geq UB_{VB}^0$$

reláció.

(Beérkezett: 1987 január 14-én.)

Irodalom

1. J.H. AHRENS – G. FINKE (1975): "Merging and sorting applied to the zero-one knapsack problem", *Operations Research* 23, 1099–1109.
2. G.B. DANTZIG (1957): "Discrete variable extremum problems", *Operations Research* 5, 266–277.
3. D. FAYARD – G. PLATEAU (1975): "Resolution of the 0-1 knapsack problem: comparison of methods", *Math. Programming* 8, 272–307.
4. E. HOROWITZ – S. SAHNI (1974): Computing partitions with applications to the knapsack problem", *Journal of the ACM* 21, 277–292.
5. S. MARTELLO – P. TOTH (1977): "An upper bound for the zero-one knapsack problem and a branch and bound algorithm", *European Journal of Operational Research* 1, 169–175.
6. S. MARTELLO – P. TOTH (1979): "The 0-1 knapsack problem", in: N. CHRISTOFIDES, A. MINGOZZI, P. TOTH and C. SANDI, (eds), *Combinatorial Optimization*, J. Wiley and Sons, Chichester, England.
7. R.M. NAUS (1976): "An efficient algorith for the 0-1 knapscak problem", *Management Sci.* 23, 27–31.
8. V. SUHL (1978): "An algorithm and efficient data structures for the binary knapsack problem", *European Journal of Operational Research* 2, 420–428.
9. A.A. ZOLTNERS(1978): "A direct descent binary knapsack algorithm", *Journal of the ACM* 25, 304–311.

An Improved Upper Bound for the 0-1 Knapsack Problem

After giving a very brief idea of branch-and-bound algorithms for the $KP01$, we present Dantzig's upper bound for this problem as well as some improvements of this bound, obtained in the last years. Finally we present a further improvement with demonstration and example.

KÖNYVEKRŐL

Proceedings of the 4th Pannonian Symposium on Mathematical Statistics, Bad Tatzmannsdorf, Austria, 4–10 September, 1983 Vol. A: Probability and Statistical Decision Theory, Edited by F. KONECNY, J. MOGYORÓDI, W. WETZ, Vol. B: Mathematical Statistics and Applications, Edited by W. GROSSMANN, G. CH. PFLUG, I. WINCZE, W. WERTZ, Akadémiai Kiadó, Budapest 1985.

Ausztriában, Bad Tatzmannsdorfban 1983 szeptember 4–10 között, 1979 és 1981 után harmadízben rendezték meg a IV. Pannónia Matematikai Statisztikai Szimpóziumot (PSMS=Pannonian Symposium on Mathematical Statistics). A sorozat harmadik konferenciáját 1982-ben Magyarországon, Visegrádon tartották. Az előző konferenciák kötetei rendre a Springer, a D. Reidel, ill. a D. Reidel–Akadémiai Kiadó gondozásában jelentek meg.

A IV. Szimpóziumon 17 országból mintegy 130-an vettek részt és 92 előadás hangzott el. A konferencia kiadvány két kötete ezek közül összesen 45 dolgozatot tartalmaz. Az A) kötetben, melynek címe *Valószínűség és statisztikai döntéselmélet,* elsősorban tiszta matematikai problémákkal foglalkozó 24 dolgozat jelent meg. Az alkalmazott statisztika és valószínűségelmélet kérdéseivel, valamint a kapcsolódó témákkal foglalkozó dolgozatokat külön kötetben jelentették meg. A Matematikai statisztika és alkalmazások című B) kötet 21 dolgozatot tartalmaz.

Az A) kötetben három plenáris előadás anyaga jelent meg. P. DEHEUVELS: *Véletlen elhelyezések* (spacing) *és alkalmazások* című összefoglaló dolgozatában a K-ad rendű véletlen elhelyezések rendszerstatisztikáira vonatkozó határeloszlás tételekkel és a véletlen elhelyezések elméletének néhány fontos eredményének statisztikai alkalmazásával foglalkozik. U. MÜLLER–FUNK, F. PUKELSHEIM és H. WITTING a *Kétoldali hipotézisek lokálisan legerősebb problémái* című dolgozatukban lokálisan legerősebb torzítatlan kétoldali próbák létezését bizonyítják. RÉVÉSZ PÁL *A Wiener-folyamatnak és lokális idejének approximációja* című dolgozatában a Wiener-folyamatnak három közelítő folyamattól való, valamint egyik jellemzőjüknek, a megfelelő lokális időknek az eltérését vizsgálja egyenletes normában.

Az A) kötet valószínűségelmélettel foglalkozó dolgozatai két (egymást kizáró) témára orientálódnak: sztochasztikus folyamatokra, ill. határeloszlás tételekre, invariancia elvekre. E témák címszavakban: Gauss-folyamatok, a Wiener-folyamat approximációja, véletlen elhelyezések és rendszerstatisztikák eloszlása, ergodelmélet, maximális egyenlőtlenségek, eloszlásfüggvények konvoluciójának approximációja, sztochasztikus programozás stb.

A B) kötetben egy plenáris előadás anyaga található, melyet ERDŐS PÁL tartott *Valószínűségelméleti módszerek alkalmazása a számelméletben* címmel és számos érdekes nyílt problémát, sejtést tartalmaz.

A B) kötet dolgozatai témakörök szerint három fő csoportba sorolhatók. Az első csoport a valószínűségelmélet alkalmazása; témái Erdős plenáris előadása mellett játékelmélet, urnamodellek, legjobb kiválasztási modellek és véletlen gráfok. A második csoportba, a valós modellek matematikai statisztikája témakörben a kulcsszavak: lineáris modellek, regresszió, diszkriminancia, idősorok stb. A dolgozatok tanúsítják, hogy az alkalmazott problémáknál megnőtt az érdeklődés az új elméleti eredmények iránt. A harmadik csoportba tartozó dolgozatok témái a numerikus statisztika és a Monte Carlo-módszereknek numerikus problémákra (integrálás, optimalizálás) való alkalmazása.

LÉNÁRD MARGIT

A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó és Nyomda Vállalat főigazgatója
Műszaki szerkesztő: Sándor István
A kézirat a nyomdába érkezett: 1988. január 15. - Terjedelem: 8.4 (A/5) ív
88/23 MKKE házinyomda, Budapest. Felelős vezető: Jász József

CONTENTS

BOOK REVIEWS

Ára: 26,– Ft
Előfizetés egy évre: 104,– Ft

ISSN 0039–8128

TARTALOM

KÖNYVEKRŐL

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST