A MAGYARORSZÁGI NYUGDÍJRENDSZER EGY MATEMATIKAI MODELLJE[1]

BOD PÉTER
MTA Matematikai Kutató Intézet

A magyar társadalombiztosítási nyugdíjrendszer reformja évek óta a közvélemény érdeklődésének a homlokterében áll. Számos, egymásnak jelentősen ellentmondó koncepció került megfogalmazásra. Nehezíti a koncepciók közötti eligazodást, hogy legtöbbjük mögött nincs számszerű megalapozás. Az alábbiakban megkíséreljük az egyik lehetséges koncepció hosszú távú finanszírozhatóságát matematikai modellre alapozott számítások segítségével bemutatni.

Egyúttal felhívjuk a figyelmet arra a sokak számára nem nyilvánvaló körülményre, hogy az ún. felosztó–kiróvó típusú finanszírozással működő nyugdíjrendszerek – jóllehet nem tőkegyűjtőek – mégis, mint egy sajátos, társadalmi méretű befektetési alap működnek.

Bevezetés

Magyarországon 1929 óta létezik olyan kötelező biztosítás, amely munkából kiöregedett dolgozóknak bizonyos korhatár betöltése esetén halálukig nyugdíjat fizet: feltéve, hogy a dolgozó legalább egy előírt minimális időszakon át aktív biztosított volt és utána az előírt járulékokat megfizették.

Tehát a társadalombiztosítási nyugdíj nálunk biztosítási viszonyhoz és járulékfizetéshez kötött jog. A társadalombiztosítási nyugdíjak működhetnek más elven is. Léteznek például olyan rendszerek, ahol bizonyos (általában elég magas) életkor betöltése után az idős emberek állampolgári jogon kapnak közadókból fedezett nyugdíjjáradékot.

Akármilyenek is azonban a nyugdíjrendszerek törvényes szabályai, működőképességük fenntartásához gondoskodni kell arról, hogy a törvényesen odaígért éppen esedékes fizetési kötelezettségek teljesítéséhez szükséges anyagi fedezet likvid formában folyamatosan rendelkezésre álljon. Magyarán szólva: meg kell tudni teremteni a nyugdíjrendszer hosszú távú pénzügyi egyensúlyát.

A feladat minden esetben igen bonyolult. Mindenekelőtt az okozza a nehézséget, hogy a nyugdíjrendszerek keretei között rendkívül hosszú, a hosszú távú gazdasági gondolkodás szokványos időtávját jelentősen meghaladó, sztochasztikus folyamatok valósulnak meg.

[1]Beérkezett: 1992. február 28.

A régi tervgazdasági gyakorlatban az 5 évnél hosszabb gazdasági előregondolkodás volt az ún. hosszú távú. A piacgazdaságok viszonyai között azonban nem ritkán már a 3 évet meghaladó prognózisokat is hosszú távú prognózisnak nevezik, és az ezekhez kapcsolódó döntéseket stratégiai döntéseknek tekintik.

Ezzel szemben egy nyugdíjrendszeren való átfutás minden munkába lépő generáció számára közel 60 évig tart. Hiszen nálunk általában 18 éves koruktól lépnek az emberek munkába, 40–42 évig aktívak és utána 15–20 éven át, sőt tovább is nyugdíjasok. Ha a ma munkába lépők stabil nyugdíját biztosítani akarjuk, legalább 2050-ig illenék előre gondolkodnunk.

Sajnos, társadalombiztosításunkban évtizedek óta a máról holnapra, az egyik évről a másikra való gondolkodás a jellemző. Az állami költségvetés tervezési módszereivel folyik a társadalombiztosítási költségvetések előkészítése is, teljesen figyelmen kívül hagyva a társadalombiztosítás és különösen a nyugdíjrendszer működési sajátosságaiból eredő különbségeket.

Ilyen helyzetben nem meglepő, hogy a kötelező öregségi biztosítás hosszú távon várható terheinek előrebecslésére utoljára 1926–1927-ben került sor a biztosítási rendszert bevezető törvény előkészítése kapcsán.

Ez a törvény olyan nyugdíjrendszert vezetett be, amely ún. várományfedezeti alapon működött. A társadalombiztosítási nyugdíjrendszereket különböző finanszírozási típusok szerint lehet működtetni. Ennek a cikknek a keretei között nincs lehetőségünk a különböző finanszírozási típusok részletes bemutatására. A téma iránt érdeklődő olvasók a „Mennyibe kerül egy társadalombiztosítási nyugdíjrendszer működése" című, a Közgazdasági Szemle 1992. februári és márciusi számában megjelent tanulmányban találhatnak alaposabb információkat.

A forintstabilizáció után a hazai nyugdíjbiztosítás várományfedezeti típusú finanszírozásról felosztó-kirovó típusú finanszírozásra lett átalakítva. Az átalakítást nem sokkal követően az egész társadalombiztosítás, benne a nyugdíjrendszer, be lett olvasztva az állami költségvetésbe, és rövid időn belül gyakorlatilag megszűnt a nyugdíjrendszerrel összefüggésben mindenfajta kalkuláció.

A nyugdíjrendszer ma érvényes alapvető szabályai is megbízható számítási megalapozás nélkül kerültek 1975-ben törvényes szabályozásra. Hasonlóként nem készültek megalapozó számítások a kormányzat legutóbb előterjesztett nyugdíjmódosító koncepcióihoz sem.

Mindezek alapján azt kell mondanunk, hogy nyugdíjrendszerünk modellezése nem csak elméleti, de gyakorlati szempontból is fontos feladat.

A felosztó-kirovó típusú finanszírozás

A felosztó-kirovó típusú nyugdíjfinanszírozás a maga tiszta formájában úgy működik, hogy a nyugdíjbiztosító intézmény minden évben annyi járulékot ró ki és szed be az aktív biztosítottak után, amennyi a tárgyévben esedékes nyugdíjak kifizetéséhez szükséges. Vagyis, a tárgyévi nyugdíjterhet felosztja a teherviselők között. Innen a módszer magyar elnevezése is.

Az így finanszírozott nyugdíjrendszerekhez tehát alapjában nem kapcsolódik elkülönített nyugdíjvagyon és a rendszer nem számol kamatjövedelemmel. Ugyanakkor a finanszírozás típusa még nem határozza meg a finanszírozás konkrét formáit. Így többek között azt, hogy kik a teherviselők és milyen arányban osztódnak meg a terhek a teherviselők között.

A ténylegesen működő nyugdíjrendszerek tapasztalatai azt mutatják, hogy a nyugdíjterheket közvetlenül általában maguk a biztosítottak – akik rendszerint munkavállalók – és munkáltatóik osztják meg maguk között, de nem ritka az állami költségvetés szerepvállalása sem. Az állam gyakran csak a rendszer egyensúlyának szavatolását vállalja, de előfordul a normatív költségvetési támogatás gyakorlata is. Ilyenkor természetesen a költségvetés csak közvetíti az adófizetők támogatását, vagyis bizonyos társadalmi szolidaritást valósít meg.

Ma nálunk az a rend van érvényben, hogy a nyugdíjakat a bérek (nem bérből élők esetében a személyi adó alapja) után fizetendő járulékokból fizetik. A járulékfizetési kötelezettség megoszlik a biztosított és munkáltatója között (ha van munkáltató); míg az állami költségvetés a nyugdíjak kifizetését szavatolja anélkül, hogy a nyugdíjakhoz valamilyen szabály szerint hozzájárulna.

Ismeretes, hogy nyugdíjrendszerünk állandó finanszírozási nehézségekkel küzd. Egyesek úgy vélik, hogy a nyugdíjrendszerünk „túlelosztó”, terhei egyre kevésbé lesznek finanszírozhatók, össze fog omlani. Megoldásként azt javasolják, hogy a biztosítási kötelezettségen alapuló társadalombiztosítási nyugdíjrendszer a jövőben csak mint a „szociális háló” eleme működjék. Tehát biztosítson egy létminimum közelében mozgó ellátást az időskorúak számára, és aki ennél többet szeretne, az gondoskodjék egyénileg arról, hogy munkából való kiválása után ne kelljen lényegesen csökkentenie fogyasztási színvonalát.

Az alábbiakban bemutatásra kerülő modell és az arra alapozott számítások eredményei alapján vitatjuk a fenti nézeteket.

A nyugdíjmodell

Az Országgyűlés 1991 októberében határozatot hozott a társadalombiztosítási reform soron következő feladatairól. Ebben többek között kimondta, hogy a jövőben a nyugdíjbavonulási korhatár alatt megrokkanás következtében munkaképtelenné válók nyugdíját a korhatár betöltéséig a betegségi biztosítás terhére kell fedezni. A nyugdíjbiztosítás az ún. öregségi nyugdíjakat fizeti és az ezekhez kapcsolódó, ún. hozzátartozói ellátásokat.

Ez utóbbiak közül a legjelentősebb az özvegyi jogon járó nyugdíj, és ide tartozik az árvákat megillető ellátás. Modellünkben az árvaellátás lététől eltekintünk és nem különböztetjük meg a saját jogon járó és az özvegyi jogon járó nyugdíjakat.

Olyan nyugdíjrendszert definiálunk, amelyben meghatározott életkoroktól kapnak az idős férfiak és nők nyugdíjat. Ez a nyugdíj a nyugdíjas haláláig kerül kifizetésre. A nyugdíjkiadásokat a rendszer az aktív biztosítottak járulékköteles jövedelme után kivetett azonos mértékű jutalékkulcs szerint befolyó járulékaiból fedezi. Ugyanakkor a nyugdíjjárulékokból kell fizetni a nyugdíjasok betegségi biztosítási járulékait is, amely a nyugdíjak százalékában van rögzítve.

A rendszer működőképessége szempontjából az a fő kérdés, milyen mértékű járulékkulcs mellett biztosítható egy adott évben a nyugdíjak kifizetése.

Vizsgálatunknak az a célja, hogy meghatározzuk az úgynevezett technikailag szükséges járulék időbeni alakulását.

$p(t)$-vel fogjuk jelölni azt a járulékköteles jövedelmek után fizetendő és azok százalékában mért járulék nagyságát, amely mellett a nyugdíjrendszer várható bevételei és kiadásai a t. évben megegyeznek.

A továbbiakban a következő jelöléseket fogjuk használni:

– Az aktív életkorban lévők száma a t. esztendőben: $LA(t)$

– Az aktív életkorban levő biztosítottak száma a t. esztendőben: $LB(t)$

– Az x éves korú férfiak száma a t. esztendőben: $L(t,x)$

– Az y éves korú nők száma a t. esztendőben: $L(t,y)$

– Az x éves korú férfiak éves járulékköteles átlagjövedelme a t. esztendőben: $B(t,x)$

– Az y éves korú nők éves járulékköteles átlagjövedelme a t. esztendőben: $B(t,y)$

– Az x éves korú férfiak biztosítottsági hányada a t. esztendőben: $0 < f(t,x) < 1$

– Az y éves korú nők biztosítottsági hányada a t. esztendőben: $0 < g(t,y) < 1$

– A férfiak, illetve nők munkábaállásának alsó koréve: α_f, α_n

– A férfiak, illetve nők nyugdíjjogosultságának a koréve: β_f, β_n

– A társadalom határéletkora, amelynél idősebb személy nincs az élők között: ω

– Az x éves korú férfiak éves átlagnyugdíja a t. esztendőben: $N(t,x)$

– Az y éves korú nők éves átlagnyugdíja a t. esztendőben: $N(t,y)$

– Éves átlagjövedelem a t. esztendőben: $B(t)$

– Éves átlagnyugdíj a t. esztendőben: $N(t)$

– Nyugdíjas korban levők száma a t. esztendőben: $LN(t)$

– Nyugdíjaban levők száma a t. esztendőben: $LNN(t)$

– Nyugdíj után fizetendő betegségi biztosítási járulékkulcs a t. esztendőben: $b(t)$

– Nyugdíjhányad: a t. esztendőben kifizetett nyugdíjak átlaga osztva az ebben az évben megvalósult aktív járulékköteles jövedelmek átlagával: $NH(t)$

– Eltartási hányad: a nyugdíjkorban levők száma osztva az aktív korban levők számával a t. esztendőben: $EH(t)$

– Korrigált eltartási hányad: a nyugdíjasok száma osztva az aktív biztosítottak számával a t. esztendőben: $EHK(t)$

A definícióknak megfelelően érvényesek az alábbi azonosságok:

$$
\begin{aligned}
LA(t) &= \sum_{x=\alpha_f}^{\beta_f-1} L(t,x) + \sum_{y=\alpha_n}^{\beta_n-1} L(t,y) \\
LB(t) &= \sum_{x=\alpha_f}^{\beta_f-1} L(t,x)\cdot f(t,x) + \sum_{y=\alpha_n}^{\beta_n-1} L(t,y)\cdot g(t,y) \\
LN(t) &= \sum_{x=\beta_f}^{\omega} L(t,x) + \sum_{y=\beta_n}^{\omega} L(t,y) \\
LNN(t) &= \sum_{x=\beta_f}^{\omega} L(t,x)\cdot f(t,x) + \sum_{y=\beta_n}^{\omega} L(t,y)\cdot g(t,y) \\
B(t) &= \frac{\sum_{x=\alpha_f}^{\beta_f-1} B(t,x)\cdot L(t,x)\cdot f(t,x) + \sum_{y=\alpha_n}^{\beta_n-1} B(t,y)\cdot L(t,y)\cdot g(t,y)}{LB(t)} \\
N(t) &= \frac{\sum_{x=\beta_f}^{\omega} N(t,x)\cdot L(t,x)\cdot f(t,x) + \sum_{y=\beta_n}^{\omega} N(t,y)\cdot L(t,y)\cdot g(t,y)}{LNN(t)} \\
NH(t) &= \frac{N(t)}{B(t)} \\
EH(t) &= \frac{LN(t)}{LA(t)} \\
EHK(t) &= \frac{LNN(t)}{LB(t)}
\end{aligned}
$$

A fenti jelölésekkel a rendszer összes bevétele a t. évben:

$$
U(t) = p(t)\left(\sum_{x=\alpha_f}^{\beta_f-1} B(t,x)\cdot L(x,t)\cdot f(t,x) + \sum_{y=\alpha_n}^{\beta_n-1} B(t,y)\cdot L(t,y)\cdot g(t,y)\right)
$$

A t. év terhei:

$$
V(t) = (1+b(t))\cdot\left(\sum_{x=\beta_f}^{\omega} N(t,x)\cdot L(t,x)\cdot f(t,x) + \sum_{y=\beta_n}^{\omega} N(t,y)\cdot L(t,y)\cdot g(t,y)\right)
$$

A felosztó–kirovó elv értelmében:

$$
U(t) = V(t)
$$

Ennek következtében:

$$
p(t) = \frac{(1+b(t))\left(\sum_{x=\beta_f}^{\omega} N(t,x)\cdot L(t,x)\cdot f(t,x) + \sum_{y=\beta_n}^{\omega} N(t.y)\cdot L(t,y)\cdot g(t,y)\right)}{\sum_{x=\alpha_f}^{\beta_f-1} B(t,x)\cdot L(t,x)\cdot f(t,x) + \sum_{y=\alpha_n}^{\beta_n-1} B(t,y)\cdot L(t,y)\cdot g(t,y)}
$$

A korábban bevezetett aggregált mutatók segítségével írhatjuk, hogy:

$$p(t) = \frac{(1 + b(t)) \cdot N(t) \cdot LNN(t)}{B(t) \cdot LB(t)} = (1 + b(t)) \cdot NH(t) \cdot EHK(t)$$

A rendszer működéséhez technikailag szükséges járulékkulcs láthatóan rögzített nyugdíjhányad és adott betegségi biztosítási járulékkulcs mellett kizárólag a korrigált eltartási hányadtól függ.

Ennek időbeni alakulását alapjában a demográfiai folyamatok határozzák meg. Ezek tükröződnek ugyanis az eltartási hányadban.

A korrekció abban áll, hogy a számlálóból levonjuk a valamilyen ok miatt nyugdíjban nem részesülő nyugdíjas korúak számát, míg a nevezőt csökkentjük azoknak az aktív korban levőknek a számával, akik után nem történik járulékfizetés. Ezek elsősorban az aktív korban levő rokkantak és azok, akik nem vesznek részt biztosításra kötelezettként a társadalmi munkamegosztásban.

Elméleti vizsgálatoknál gyakran eltekintenek a fenti korrekciótól. Azonban egy adott nyugdíjrendszer járulékszükségletének meghatározásánál az ilyen elhanyagolások nem megengedhetők.

A demográfia egy népességet stabilnak mond, ha a születési gyakoriságok és a korspecifikus halálozási valószínűségek az időben állandóak. Ebben az esetben a szóban levő népesség minden korcsoportjának a létszáma azonos hányadosú mértani sorozat szerint alakul. Ez azt jelenti, hogy a stabil népességnél az eltartási hányad az időben állandó, feltéve, hogy a nyugdíjrendszer szabályai nem változnak.

Így stabil népesség esetén a felosztó-kiróvó rendszerű finanszírozás lehetővé teszi egy időben változatlan nyugdíjhányadot biztosító rendszer változatlan járulékkulcscsal történő működtetését.

Nem stabil népesség esetén az eltartási hányad időben változik, ezért változatlan nyugdíjhányad esetén a szükséges járulékkulcs nem marad változatlan.

A népesség instabilitását mindenekelőtt a születési arányok változása idézi elő. A halálozási gyakoriságok változásának kisebb a hatása. Azonban, ha magas és alacsony születésszámú évjáratok váltják egymást, akkor a szükséges járulékkulcs változásai a különböző évjáratokat egy változatlan szabályokkal működő nyugdíjrendszerben nagyon egyenlőtlenül érintik.

Azokban az években ugyanis, amikor nagylétszámú évjáratok vannak aktív korban és a nyugdíjas korúak alacsony születésszámú korosztályokhoz tartoznak: a szükséges járulék mértéke alacsony. Ahogy azonban a nagylétszámú évfolyamok nyugdíjjogosulttá válnak és az őket követő aktív évjáratok ismét kisebb létszámúak: a korábbi járulékmérték már nem elégséges a rendszer szolgáltatásainak változatlan szintű fenntartásához.

Az elvégzett számításokról

A fentiekben vázolt modell segítségével az elmúlt hónapokban számításokat folytattunk a hazai nyugdíjrendszer hosszú távú finanszírozhatóságáról. Ehhez a korrigált eltartási hányadok valamilyen statisztikai előrebecslésére volt szükségünk. Minthogy a hazai társadalombiztosítás lényegében nem rendelkezik az aktív biztosított állományra vonatkozó előrebecsülő statisztikával: a hazai népesség előrejelzésére alapoztuk számításainkat.

Vagyis az eltartási hányadot prognosztizáltuk és a korrigált eltartási hányadra azt tételeztük fel, hogy az aktív keresők száma $m(t)$%-kal kisebb, mint az aktív korban levők száma. A szükséges járulékkulcs tehát:

$$p(t) = \big(1 + b(t)\big) \cdot NH(t) \cdot EHK(t) = \big(1 + b(t)\big) \cdot NH(t) \cdot \frac{EH(t)}{1 - m(t)}$$

A nyugdíjhányadot a mindenkori járulékköteles jövedelmek 60%-ának választottuk, a nyugdíjasok betegségi biztosítási járulékkulcsát a nyugdíj 10%-ában rögzítettük. Az aktívak nem biztosítottsági hányadát tekintve viszont abból indultunk ki, hogy mivel itt lényegében az aktív korban megrokkantakról van szó: ez attól függően alakul, hogy milyen magas a nyugdíjbavonulás korhatára.

1991-ben ez a hányad 7–8% körül volt. Azokban a számításokban, amelyeket a jelenlegi nyugdíjszabályok szerint folytattunk, 8%-ra állítottuk az $m(t)$ paraméter értékét minden évre.

Vizsgálataink azonban elsősorban arra irányultak, hogy milyen hatással lesz az Országgyűlés 1991. októberi határozatában eltervezett fokozatos korhatáremelés a szükséges járulékkulcsokra. E szerint a határozat szerint 1993-tól a női korhatár kétévente egy évvel emelkednék és 2001-re elérné a 60 évet. Majd a közös korhatár 2005-re 62-re nőne. A korhatár emelkedését figyelembe vevő számításoknál az $m(t)$ mutató értékét fokozatosan emeltük és 2005-től minden esztendőben 15%-nak választottuk.

A számításaink legfontosabb eleme a hazai népesség várható alakulására készített prognózisok voltak. Itt azokat az előrejelzéseket használtuk, amelyeket Tusnády Gábor készített, és amelyek mind módszerükben, mind eredményeikben eltértek a forgalomban levő KSH becslésektől.

Ennek a cikknek a keretei között nem tudunk kitérni a felhasznált demográfiai prognózisok részleteire. Csak utalunk arra, hogy ezek igyekeznek figyelembe venni a korspecifikus halálozási gyakoriságok megfigyelhető változásainak várható hatásait.

Megfigyelhető ugyanis, hogy az 1928 után született évjáratok aktív kori halálozási gyakoriságai romlottak, főként a férfiak esetében. Ezért várható, hogy ezeknek az évjáratoknak a magasabb életkorban jelentkező halálozási gyakoriságai is magasabbak lesznek, mint a korábbi évjáratok hasonló életkorban megfigyelt elhalálozásai.

Természetesen ez nem biztos. Nem zárható ki, hogy az említett évjáratok nyugdíjkort elérő tagjai nem fognak gyorsabban elhalálozni, mint az a régebben nyugdíjba menteknél megfigyelhető volt. Ezért kétféle prognózissal számoltunk: egyszer a várható növekvő halálozási valószínűségekkel, másfelől egy csökkentett halálozási valószínűségeket feltételező változattal. Mindkét változat végig lett számolva változatlan születési rátákat feltételezve, illetve valamelyest javuló születési arányokat feltételezve. A születési arányok persze csak igen nagy időbeni eltolódással hatnak a nyugdíjrendszerre. Ezért a járulékszükségletek számításánál csak azt néztük meg, hogy a csökkentett halálozás esetében hogyan hatna a nyugdíjrendszerre a születési folyamatok esetleges javulása. A számítások eredményeit az alábbi táblázat foglalja össze.

Táblázat: Technikailag szükséges járulékkulcsok

Az első oszlopban a jelenlegi nyugdíjkorhatárokhoz szükséges járulékkulcsok találhatók 8%-os korhatár alatti rokkantaránnyal és 10% betegségbiztosítási járulékkal számítva. A népesség alakulását a várható halandóságok alapján vettük figyelembe. A második, harmadik és negyedik oszlopban a fokozatosan emelkedő és 2005-től egységesen 62 éves nyugdíjkorhatárral számoltunk. A rokkantarány 2005-től 15%. Valamennyi számítás 60%-os nyugdíjhányadból indul ki. A felhasznált demográfiai prognózisváltozatokat jelezzük.

Évszám	Járadékkulcs százaléka			
	Jelenlegi korhatár	Emelkedő korhatár		
		Várható haland.	Csökkentett haland.	
			norm. szül.	jobb szül.
1992	30,1	29,9	30,5	30,5
1993	29,5	29,1	29,3	29,3
1994	28,9	28,6	29,0	29,0
1995	28,3	26,5	28,1	28,1
1996	27,2	25,8	27,8	27,8
1997	27,2	25,0	26,5	26,5
1998	26,7	24,5	26,5	26,5
1999	26,3	26,3	25,5	25,5
2000	25,9	23,4	25,1	25,1
2001	25,6	21,8	24,2	24,2
2002	24,5	21,1	23,8	23,8
2003	25,3	19,0	22,6	22,6
2004	25,3	19,0	22,2	22,2
2005	25,3	17,3	20,9	20,9
2006	25,3	17,5	21,2	21,2
2007	25,4	17,2	21,0	21,0
2008	25,8	17,0	20,9	20,9
2009	26,4	17,1	21,1	21,1
2010	27,1	17,3	21,4	21,4
2011	27,5	17,5	21,7	21,7

Évszám	Járadékkulcs százaléka			
	Jelenlegi korhatár	Emelkedő korhatár		
		Várható haland.	Csökkentett haland.	
			norm. szül.	jobb szül.
2012	27,8	17,9	22,0	22,0
2013	28,2	18,2	22,4	22,4
2014	28,6	18,5	22,7	22,7
2015	28,9	19,0	23,2	23,2
2016	29,0	19,8	23,6	23,8
2017	28,9	20,4	24,5	24,3
2018	28,8	20,4	24,8	24,6
2019	28,8	21,1	24,9	24,6
2020	28,5	21,2	24,8	24,5
2021	28,5	21,3	24,7	24,3
2022	28,5	21,4	24,6	24,1
2023	28,6	21,4	24,4	23,9
2024	28,7	21,4	24,1	23,5
2025	29,0	21,4	23,9	23,3
2026	29,4	21,5	23,7	23,0
2027	29,9	21,6	23,5	22,8
2028	30,5	21,8	23,5	22,7
2029	31,5	22,2	23,6	22,7
2030	32,5	22,7	23,7	22,8
2031	33,5	23,2	23,9	22,9
2032	34,4	23,7	24,1	23,0
2033	35,2	24,1	24,2	23,0
2034	36,2	24,5	24,3	23,1
2035	37,1	25,0	24,5	23,2
2036	37,8	25,9	25,1	23,6
2037	38,2	26,9	25,8	24,2
2038	38,2	27,7	26,3	24,5
2039	38,4	28,3	26,7	24,7
2040	38,3	28,7	26,9	24,7
2041	38,1	28,9	27,0	24,6
2042	37,8	29,0	26,9	24,4
2043	37,4	28,9	26,7	24,0
2044	37,0	28,7	26,4	23,6
2045	36,5	28,6	26,1	23,1
2046	36,1	28,1	25,7	22,7
2047	35,7	28,0	25,5	22,4
2048	35,5	27,8	25,3	22,1
2049	35,3	27,7	25,2	21,8
2050	35,1	27,6	25,1	21,6

Tanulságok és következtetések

A számok mindenekelőtt alátámasztják annak a felfogásnak a helyességét, amely szerint a nyugdíjrendszer jelenlegi nyugdíjbavonulási korhatárai tartósan igen magas megterhelést jelentenek, és a megterhelés távlatilag tarthatatlanul magasra növekednék. Vagyis, ilyen korhatárok mellett csökkenteni kellene a nyugdíjak színvonalát.

Az országgyűlési határozatban körvonalazott korhatáremelés mellett azonban a helyzet gyökeresen másként alakulna. Mind a három idevágó számítás azt mutatja, hogy a mondott feltételek között egy kielégítő színvonalú nyugellátást biztosító rendszert elfogadható mértékű járulékteherrel lehet finanszírozni.

Mind a három számítás nagyjából azonos 30–30,5%-os járulékszükséglettel indul, ami összhangban van az 1992. évi társadalombiztosítási költségvetés előirányzatával. A női korhatár emelése 2001-re a szükséges járulék szintjét 22–24% köré csökkenti. Majd a további korhatáremelések következtében a rendszer 2005-re 17,5%-os járulékkal finanszírozható, amennyiben a várható halandóságból indulunk ki és 21%-os járulékkal csökkentett halandóság mellett.

A járulékszükséglet minimuma 2008 körül jelentkezik. Ettől kezdve a szükséges járulékmértékek ismét növekszenek és 2041 táján érik el ismét maximumukat. Erre az időpontra azonban a megfigyelt, illetve a javuló születési arányok mellett végzett számítások már érzékelhető eltérést mutatnak.

Vagyis a szükséges várható járulékmértékek az elkövetkező 60 évben a vázolt nyugdíjrendszer keretei között hullámzó mozgást mutatnak. Az ezredfordulóra a szükséges járulékkulcs mindhárom számításban az azt követő 50 év mértékeinek átlaga körül lesz.

A várható halandóságot feltételezve a hosszú távon szükséges járulékmértékek átlaga 23%, a csökkentett halandóság feltételezése mellett 25% körül fog mozogni. Ez lényegesen kevesebb, mint a pillanatnyilag szükséges és érvényes nyugdíjjárulék kulcsa.

A számítások alapján megvalósíthatónak tűnik az alábbi finanszírozási stratégia:

- Az öregségi nyugdíjbiztosítás járulékkulcsát 2000-ig 30%-on kellene tartani. Ezzel lehetővé válnék, hogy a rendszer egy körülbelül egyéves nyugdíjtehernek megfelelő tartaléktőkét halmozzon fel. Ez a tartalék a női korhatár emeléséből származna, és azt a rendszer általános biztonsági tartalékának kellene tekinteni. Amennyiben ez a tartalék létrejönne: feleslegessé válna az állami költségvetési garancia fenntartása.

- A nyugdíjbiztosítás járulékkulcsát 2001-től a ténylegesen megvalósuló demográfiai fejlődéstől függően 23–25%-ra kellene leszállítani. Emellett a járulékmérték mellett a rendszer további kb. 30 éven át további tartalékolásra lenne képes. Ennek a tartaléknak a szerepe az volna, hogy ne kelljen 2030 után a járulékkulcsot emelni. A 2001 és 2030 között felhalmozott összegek és kamatai kiegészítenék a 2030 utáni változatlan mértékű járulékokat a demográfiai arányok megváltozása miatt szükséges többletterhek fedezésében.

- Számításaink alapján azt javasoljuk, hogy a hazai nyugdíjrendszer finanszírozásában térjünk át a tisztán felosztó-kiróvó típusú megoldásról egy tartaléktőke gyűjtésével összekapcsolt megoldásra. Ebben a vegyes finanszírozásban a nyugdíjterhek fedezésének fő forrása továbbra is a folyamatos járulékbevétel lenne. A tartaléktőke egyfelől a működés állami költségvetéstől független biztonságát szolgálná. Másfelől, lehetővé tenné, hogy a nyugdíjhányad és a járulékkulcs évtizedeken át változatlan maradjon.

- Egy ilyen nyugdíjrendszer az egymást váltó generációk számára hasonló terheket és hasonló előnyöket biztosítana. Hozzájárulna az együtt élő korosztályok közötti egyetértés erősödéséhez.

Függelék: A felosztó-kiróvó típusú finanszírozás, mint sajátos lakossági befektetés

Bár a felosztó-kiróvó típusú finanszírozásnál nem kerül sor tartaléktőkék felhalmozására, a rendszer hosszú távon mégis, mint egy befektetési rendszer működik, és a befektetések hatékonysága minden egyes évfolyam esetében meghatározható.

Tekintsünk a példa kedvéért egy, a korábban bemutatott modellnél egyszerűbbet. Nem teszünk különbséget férfiak és nők között, feltesszük, hogy 18 és 59 év között mindenki biztosított és 60 éves kortól mindenki nyugdíjat kap. A rendszer minden évben a nyugdíjasoknak az évi átlagos aktív jövedelem előre rögzített hányadát nyújtja. Tehát a nyugdíjhányad: NH – állandó. A fizetendő járulék a t. évben: $p(t) = NH \cdot EH(t)$.

Vizsgáljuk meg a $t = 0$ évben született évjárat befizetéseinek és az általuk felvett nyugdíjaknak a tőkeértékét a születésük évére diszkontálva. Legyen a $t = 0$ évben az átlagos aktív kereset szintje $B(0)$, és tegyük fel, hogy a járulékköteles jövedelmek évente k%-kal nőnek. A vizsgált évjárat születési létszáma: $L(0,0)$. 18 éves korukban $L(18,18)$ fő aktív dolgozó munkába lép. Átlagos keresetük:

$$B(18) = B(0) \cdot (1+k)^{18}$$

Létszámuk $L(18,18)$. A fizetendő járulékkulcsuk:

$$p(18) = NH \cdot \frac{\sum_{x=60}^{\omega} L(18,x)}{\sum_{x=18}^{59} L(18,x)}$$

Befizetnek ebben az évben:

$$p(18) \cdot B(0) \cdot (1+k)^{18} \cdot L(18,18)$$

összegű járulékot, ami a járulékkulcsra figyelemmel:

$$NH \cdot \frac{\sum_{x=60}^{\omega} L(18,x)}{\sum_{x=18}^{59} L(18,x)} \cdot B(0) \cdot (1+k)^{18} \cdot L(18,18)$$

összeget jelent.

Ez így megy 42 éven át, és az évjárat végül is összesen a születési évre diszkontálva az alábbi összeget fizeti:

$$U = \sum_{t=18}^{59} p(t) \cdot B(0) \cdot (1+k)^t \cdot L(t,t) \cdot v^t$$

ahol:

$$v = \frac{1}{1+i}$$

i jelöli a befektetés jövedelmezőségét mérő, egyelőre ismeretlen nagyságú kamatlábat.

Az évjárat befizetéseinek diszkontált összege írható részletesebben is:

$$U = NH \cdot \frac{\sum_{x=60}^{\omega} L(t,x)}{\sum_{x=18}^{59} L(t,x)} \cdot B(0) \cdot (1+k)^t \cdot L(t,t) \cdot v^t$$

Az évjárat összes nyugdíjbevételének a születés évére diszkontált összege:

$$V = \sum_{t=60}^{\omega} NH \cdot B(0) \cdot (1+k)^t \cdot L(t,t) \cdot v^t$$

Amennyiben az évjárat járulékfizetéseinek az összességét tekintjük az évjáratnak kifizetett nyugdíjak forrásának, akkor:

$$U = V$$

Így egy $\omega - 18$-ad fokú egyenletet kapunk az ismeretlen diszkonttényezőre, illetve az ismeretlen kamatlábra:

$$\sum_{t=18}^{59} \frac{\sum_{x=60}^{\omega} L(t,x)}{\sum_{x=18}^{59} L(t,x)} \cdot (1+k)^t \cdot L(t,t) \cdot v^t - \sum_{t=60}^{\omega} (1+k)^t \cdot L(t,t) \cdot v^t = 0$$

Vegyük észre, hogy az egyenlet első 42 tagjában szerepel a vizsgált évjárat aktív időszakának minden egyes évében érvényesülő eltartási hányad. Ez azt jelenti, hogy az eltartási hányad változásai miatt a különböző évjáratok számára végül is különböző hatékonyságúnak bizonyul utólag az időben változatlan feltételekkel működő nyugdíjrendszerben való részvétel.

Stabil népesség esetén azonban nem ez a helyzet. Ott az eltartási hányad az időben változatlan és így az az egyenletből kifejezhető:

$$EH = \frac{\sum_{t=60}^{\omega}(1+k)^t \cdot L(t,t) \cdot v^t}{\sum_{t=18}^{59}(1+k)^t \cdot L(t,t) \cdot v^t}.$$

Ugyanakkor, ha a stabil népesség létszáma évente 1%-kal nő, akkor az időben változatlan eltartási hányad kifejezhető, mint az évjárat születési évében fennálló eltartási hányad:

$$EH = \frac{\sum_{t=60}^{\omega} L(t,t) \cdot (1+l)^{-t}}{\sum_{t=18}^{59} L(t,t) \cdot (1+l)^{-t}}.$$

A két jobboldal egybevetéséből írható:

$$(1+k)^t \cdot v^t = (1+l)^{-t}$$

$$(1+k)^t \cdot (1+i)^{-t} = (1+l)^{-t}$$

Innen

$$(1+i) = (1+k) \cdot (1+l)$$

Amiből viszont közelítőleg az igaz, hogy

$$i = k + l$$

Samuelson volt az, aki először észrevette ezt az összefüggést. Nevezetesen, hogy a felosztó–kiróvó rendszerű nyugdíjbiztosításban stabil népesség esetén a lerótt járulékok minden befizető generáció számára azonosan „hasznosulnak”, úgy mint egy olyan pénzbefektetés, amelynek a kamatlába megegyezik a jövedelmek és a népesség évi százalékos növekedésének az összegével.

IRODALOM

1. BOD P.: Mennyibe kerül egy társadalombiztosítási nyugdíjrendszer működtetése? I–II. Közgazdasági Szemle, XXXIX. évf. 2. és 3. sz.

2. SAMUELSON P.: An Exact Consumption–Loan Model of Interest with or without the Social Contrivanve of Maney. Journal of Political Economy, 1958. December.

3. TUSNÁDY G.: Magyarország népességének előrejelzése. MTA Matematikai Kutató Intézete, kutatási beszámoló. 1991.

A MATHEMATICAL MODEL FOR HUNGARIAN OLD AGE INSURANCE SYSTEM

The reform of the Hungarian Old Age Insurance System is standing in the limelight of the public opinion. Several conflicting conceptions have been formulated in the last years. It is quite difficult to become familiar with them for any numerical foundation is lacking mostly behind the different ideas. We try to show the long run viability of a specific system with the aide of computations based on a mathematical model. In the supplement we direct the attention to the non–trivial fact that the ,,pay as you go" financing of pensions is functioning like a specific social system whereas no funding capital will be collected.

A LINEÁRIS TERMELÉSSIMÍTÁSI PROBLÉMA[1]

DOBOS IMRE
Budapesti Közgazdaságtudományi Egyetem

A következő bemutatásra kerülő probléma az 50-es évek elején keletkezett, és a mikrogazdasági problémák tárgykörébe tartozik. Az első problémafelvetések a feladatot diszkrét idő kezelésével oldották meg. A mostani tárgyalás az időt folytonos változóként kezeli. A két úton történő kezelés nem feltétlenül vezet azonos eredményre, azonban gondolatkísérletként a második út is érdekes lehet.

A kétféle megközelítés a megoldás létezésének tárgyalásánál válhat el. Amíg a diszkrét időkezelés esetén az optimális megoldás létezését a Weierstrass-tétel biztosítja, addig a folytonos időkezelés esetén nem biztos, hogy létezik a problémának megoldása. [7]

1. Bevezetés

Egy egytermékes vállalat viselkedését vizsgáljuk egy bizonyos $[0,T]$ időintervallumban. A vállalat terméke iránti kereslet a vizsgált időintervallumban ismert. Arra a kérdésre keressük a választ, hogy a vállalat az időszakban hogyan változtassa a termelési rátáját ahhoz, hogy a termelési, a készletezési és a termelési ráta megváltoztatásához tartozó költségek minimálisak legyenek (közgazdaságtudományi oldalról tehát a probléma a neoklasszikus gondolatkörhöz tartozik, tehát a profitmaximalizáláshoz). Esetünkben a termelési és készletezési költségek lineárisak, míg a termelési ráta változtatásához tartozó költségek szakaszonként lineárisak, de folytonosak és minimumuk a nullában van.

A fenti problémának több változata is van. Kiterjesztésként ismert az irodalomban, amikor a munkaerőt, illetve annak változtatását is figyelembe veszik. Ezekkel az esetekkel most nem foglalkozunk.

A modellben a következő jelölésekkel élünk:

- $V(t)$ a termelési ráta változása a t. időpontban,
- $P(t)$ a termelési ráta a t. időpontban,
- $I(t)$ a készletállomány a t. időpontban,
- $S(t)$ az eladási ráta a t. időpontban.

A modellben c jelöli az egységnyi termelés költségét, h az egységnyi készlet tartásának költsége, míg x a termelési ráta növelésének, y a csökkenésének fajlagos költsége. A paraméterek nemnegatív valós számok.

---

[1]Beérkezett: 1989. január 17.

A modell diszkrét változatát behatóan tanulmányozták [1], [6], [8]. A megoldás előállítására rengeteg algoritmus ismert, azonban ezek az optimális megoldást jellemző heurisztikákból indulnak ki.

A folytonos verzióval – ismereteim szerint – csak két tanulmány foglalkozott. Arrow és Karlin (1958b) megoldják a feladatot, és speciális esetekre algoritmust is adnak a megoldásra. Dolgozatukban azonban van egy kisebb pontatlanság, amikor felteszik, hogy a termelési rátának szakadása lehet. Ez a feltevés súlyosnak tekinthető, ha a bemutatásra kerülő modellt vizsgáljuk, ugyanis ekkor az ismertetett algoritmusok hatóköre is megkérdőjelezhető. A problémával ezen kívül még Bensousson–Crouhy–Proth (1983) foglalkozott. A modelljükben felteszik, hogy a termelési, készletezési és a termelési ráta változtatásának költségei konvex, nem csökkenő függvények, valamint a termelési ráta változtatásának költsége a nulla pontban veszi fel a minimumát. A szerzők könyvükben optimális irányítással oldják meg a feladatot, és a megoldás trajektóriájáról kvalitatív információval is szolgálnak, azonban algoritmust nem adnak az optimális trajektória előállítására.

A dolgozat célja az Arrow–Karlin-féle probléma tárgyalás, és – amennyiben lehetséges – az optimumot előállító algoritmus bemutatása.

2. A modell

A bevezetésben leírt problémának a folytonos időkezelésű alakját adjuk meg. A modell leírásánál az időt nem szerepeltetjük. Az eladási rátáról feltesszük, hogy az az időnek folytonosan differenciálható függvénye. A termelési rátát és a készletállományt vektornak tekintve, optimális irányítási feladatként tárgyaljuk a problémát, ahol az irányítási változó a termelési ráta változása, amelyre nincs semmilyen korlát. A termelési ráta és a készletállomány nemnegatív változók, az induló készletállomány adott nemnegatív szám.

$$(F)\begin{cases} \begin{pmatrix} P \\ I \end{pmatrix} \geq 0 \qquad t \in [0,T] \\ I(0) = I_0 \\ \begin{pmatrix} \dot{P} \\ \dot{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} V - \begin{pmatrix} 0 \\ S \end{pmatrix} \\ \int_0^T \left([c,h] \begin{pmatrix} P \\ I \end{pmatrix} + G(V) \right) \to \min \end{cases}$$

Célunk tehát az (F) feladat megoldása. Esetünkben a $P(0)$ kezdeti ráta nem ismert, tehát irányítási változónak tekinthető. A $G(V)$ függvény alakja a következő:

$$G(V) = \begin{cases} x \cdot V, & V \geq 0; \\ -y \cdot V, & V < 0. \end{cases}$$

Térjünk vissza röviden az Arrow–Karlin (1958b) pontatlanságához. Amint az (F)-ből is következik, a $\dot{P} = V$ pszeudodifferenciálegyenlet megoldása P-re csak folytonos lehet, tehát nem is lehet szakadása. A feladat tárgyalható lenne impulzusirányítással (impulse-control, Bensoussan–Hurst–Näslund (1974)), azonban ettől most eltekintünk.

3. A probléma megoldása

A probléma megoldását a Pontrjagin-féle maximumelvvel végezzük el. A megoldásnál Seierstad–Sydsaeter (1977) eredményeire támaszkodunk, amely egyben elégséges feltételt is szolgáltat az optimum meghatározására (az optimumot a probléma konvex volta garantálja, amennyiben létezik megoldás). A megoldás létezésének feltételeivel a továbbiakban nem foglalkozunk, habár – mint látni fogjuk – a megoldás csak bizonyos speciális esetekben létezik.

Feladatunk nehézségét az okozza, hogy az állapotváltozóinkra korlátozások vannak.

Legyenek $[\psi_1(t), \psi_2(t)]$ adjungált rendszer változói, és $[\lambda_1(t), \lambda_2(t)]$ egy vektorfüggvény. Az L Lagrange-függvényt definiálja a

$$L(P, I, V, \psi_1, \psi_2, \lambda_1, \lambda_2) =$$

$$-[c, h]\begin{pmatrix} P \\ I \end{pmatrix} - G(V) + [\psi_1, \psi_2]\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P \\ I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} V - \begin{pmatrix} 0 \\ S \end{pmatrix}\right\} + [\lambda_1, \lambda_2]\begin{pmatrix} P \\ I \end{pmatrix}$$

kifejezés. Ekkor igaz a következő

1. Állítás: Ahhoz, hogy (P^0, I^0, V^0) az (F) feladat optimális megoldása legyen, szükséges és elégséges, hogy létezzenek olyan $[\psi_1, \psi_2], [\lambda_1, \lambda_2]$ vektorok, hogy

$$[\dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2] = -[\psi_1, \psi_2]\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + [c, h] - [\lambda_1, \lambda_2] \tag{i}$$

$$-G(V) + \psi V \to \max, \quad V \in \mathbb{R} \tag{ii}$$

$$[\psi_1(\tau_i^-), \psi_2(\tau_i^-)] - [\psi_1(\tau_i^+), \psi_2(\tau_i^+)] = [\beta_1^i, \beta_2^i] \tag{iii}$$

ahol $0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < T$ a $[\psi_1, \psi_2]$ szakadási pontjai, és ahol

$$\begin{aligned} &\beta_j^i \geq 0 \quad (i = 1, 2) \\ &\beta_j^1 = 0 \quad \text{ha} \quad P(\tau_j) > 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, k) \\ &\beta_j^2 = 0 \quad \text{ha} \quad I(\tau_j) > 0 \end{aligned} \tag{iv}$$

$$\lambda_1 P^0 = \lambda_2 I^0 = 0 \tag{v}$$

Az elégséges feltétel (iii) és (iv) pontjaiból kiderül, hogy a $[\psi_1, \psi_2]$ adjungált változóknak lehetnek szakadásai, de csak olyan pontokban, amikor a P^0 vagy az I^0

változók a határon vannak, tehát ebben az esetben lazul az adjungált változókra tett abszolút folytonossági feltétel. A (v) pont a szokásos komplementaritási feltételnek felel meg. Végül az (ii) szerint a $\psi_1 V - G(V)$ függvénynek a V-ben csak akkor van maximuma, ha $-y \leq \psi_1(t) \leq x$, vagyis az adjungált rendszerünk egyik változójára korlátozás van. Ugyanakkor ez azt is jelenti, hogy az irányítási paraméterünk optimális értéke a $V = 0$ pontban van, ha az adjungált változóra a kétoldali szigorú egyenlőtlenség teljesül, míg a szigorú növekedés (csökkenés) akkor teljesülhet a termelési rátára, ha $\psi_1(t) = x$ ($\psi_1(t) = -y$) egy bizonyos intervallumban.

Ezek után a megoldás jellemzését adjuk.

4. A feltételek jellemzése

Az optimális trajektória jellemzését három területi részre bontással végezzük el. A jellemzésben nem szerepeltetjük azt az esetet, amikor a termelési ráta és a készletállomány is nulla, ugyanis ekkor megsérülhet a készletállomány nemnegativitásra tett feltétel, ha az eladási ráta pozitív.

$$P^0(t) > 0, \quad I^0(t) > 0 \tag{i}$$

Ha a termelési ráta és a készletállomány is pozitív, akkor a (v) feltétel miatt $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ teljesül ebben a régióban, valamint ekkor $t \in (\tau_{i-1}, \tau_i)$ teljesül. Így a következő feltételek lesznek

$$\dot{\psi}_1 = -\psi_2 + c$$
$$\dot{\psi}_2 = h$$

és

$$-y \leq \psi_1 \leq x.$$

Ha feltételezzük, hogy az eset egy $[t_1, t_2]$ intervallumban fordul elő és a kezdeti feltétel $[\psi_1^0, \psi_2^0]$, akkor a megoldás

$$\psi_1(t) = \frac{h}{2}(t - t_1)^2 + (c - \psi_2^0)(t - t_1) + \psi_1^0$$
$$\psi_2(t) = h(t - t_1) + \psi_2^0$$

Itt teljesülnie kell $\psi_1(t)$-re az egyenlőtlenségnek. Ez az egyenlőtlenség esetünkben szigorúan teljesül, mivel $\psi_1(t)$ folytonos, nem konstans függvény. Ebből pedig következik, hogy $V^0(t) = 0$ az egész $[t_1, t_2]$ intervallumon. Így igaz a következő

2. Állítás: Ha egy $[t_1, t_2] \subset [0, T]$ intervallumon a termelési ráta és a készletállomány pozitív, akkor az optimális termelési stratégia az, ha a termelési ráta időben állandó.

Természetesen ez a jellemzés csak lokális lehet.

$$P^0(t) > 0, \quad I^0(t) = 0 \tag{ii}$$

Ha a készletállomány a határon halad egy $[t_1, t_2]$ intervallumon, akkor ebből automatikusan adódik az optimális termelési ráta, és maga a termelési ráta változása is. Ekkor $P^0(t) = S(t)$, valamint $V^0(t) = \dot{S}(t)$, ugyanis feltevésünk szerint az eladási ráta az időnek folytonosan differenciálható függvénye.

Állítsuk most elő erre az esetre is az adjungált rendszerünket:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= -\psi_2 + c \\ \dot{\psi}_2 &= h - \lambda_2 \end{aligned}$$

Ha most visszatérünk ahhoz a fejtegetésünkhöz, hogy $V^0(t) = \dot{S}(t)$ teljesül, valamint tudjuk azt, hogy a $\psi_1(t)$ adjungált változónk folytonos a $[t_1, t_2]$ intervallumon, és feltételezzük, hogy az $S(t)$ függvény egyetlen szakaszon sem konstans, akkor ebből következik, hogy $\dot{S}(t)$ vagy pozitív vagy negatív, tehát $\dot{\psi}_1(t) = x$ vagy $\dot{\psi}_1(t) = -y$. Ebből már következik, hogy $\psi_2(t) = c$ a $[t_1, t_2]$ intervallumon, és $\lambda_2(t) = h$. Tehát ebben az esetben a megoldás:

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= \begin{cases} x, & \dot{S}(t) \geq 0 \\ -y, & \dot{S}(t) < 0 \end{cases} \\ \psi_2(t) &= c \\ \lambda_2(t) &= h. \end{aligned}$$

Így teljesül a következő,

3. Állítás: Ha a készletállomány egy $[t_1, t_2] \subset [0, T]$ intervallumon nulla, akkor az eladási ráta vagy monoton növekvő vagy monoton csökkenő ezen az intervallumon.

Ez az állítás így még eléggé tág, de a későbbiekben pontosítjuk.

$$P^0(t) = 0, \quad I^0(t) \geq 0 \tag{iii}$$

Az utolsó esetben $\lambda_2 = 0$, amivel az adjungált rendszer a

$$\begin{aligned} \psi_1 &= -\psi_2 + c - \lambda_1 \\ \psi_2 &= h \end{aligned}$$

alakban áll elő. Ezt a differenciálegyenlet-rendszert nem oldjuk meg explicit formában, hanem csak az eset diszkusszióját adjuk meg.

Az előbbiekből következik, hogy az (iii) esetet nem követheti és nem is előzheti meg az (i) eset, mivel a $P^0(t)$ függvény folytonos (különben szakadása lenne). Ez azt jelenti, hogy csak az (ii) eset előzheti meg vagy követheti az (iii)-t. Ha azzal a feltevéssel élünk, hogy az eladási ráta pozitív, akkor ez azt jelenti, hogy ez az eset nem fordulhat elő. Ha az $S(t) = 0$ esetet nem zárjuk ki, akkor is csak egy lehetőségünk van, mégpedig az, ha az (iii) eset megelőzi az (ii) esetet, mivel nulla termelési ráta mellett nem lehetséges nemnegatív eladási ráta esetén pozitív készletállománnyal folytatni a rendszer pályáját. Így igaz a következő

4. Állítás: Pozitív készletállományú és nulla termelési rátájú régió csak a $[0, T]$ tervezési horizont elején fordulhat elő.

Az állítás csak egzisztenciát mond ki. Valójában csak akkor teljesülhet, ha létezik olyan $\tau \in [0, T]$ időpont, amelyre

$$S(\tau) = 0, \qquad I_0 - \int_0^t S \geq 0 \quad \forall t \in [0, \tau], \qquad I_0 - \int_0^\tau S = 0$$

összefüggések teljesülnek. Az adjungált rendszert a $\lambda_1(t)$ függvény szabad volta miatt választhatjuk olyanra, hogy a $\psi_1(t) \in [-y, x]$ tartalmazás teljesüljön.

Ezzel a megoldást befejeztük. A következő részben algoritmust állítunk elő az optimális trajektória meghatározásához.

5. Egy algoritmus az optimális trajektória meghatározására

Mielőtt az optimális trajektóriát előállítanánk, két kisebb állítást mondunk ki és látunk be, amely megkönnyíti jellemzésünket.

5. Állítás: Az a maximális $\bar{t}$ időperiódus, amelyben a termelési ráta és a készletállomány pozitív

$$\bar{t} = 2\sqrt{2\frac{x+y}{h}}.$$

Az állítás bizonyítása triviális. Csupán azt kell észrevennünk, hogy az adjungált rendszer $\psi_1(t)$ változója az időnek másodfokú függvénye.

Az állítás tehát azt mondja ki, hogy csak egy korlátos intervallumon lehet a termelési ráta állandó. A másik állításunk azzal foglalkozik, hogy állandó termelési ráta esetén az őt követő eladási ráta monoton növekvő vagy csökkenő-e. Ez a kérdés azért érdekes, mert az optimális trajektóriában az állandó termelési rátájú régiót nulla készletállományú, eladási rátával azonos termelési ráta követhet.

6. Állítás: Állandó, pozitív termelési rátát csak egy csökkenő eladási rátával egyenlő termelési ráta követhet.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy egy t_1 pont az a töréspont, ahol az állandó termelési rátáról az eladási rátára térünk át. Ekkor tekintsük az $I(t)$ készletállományt az idő függvényeként. Ennek a függvénynek a t_1 pontbeli lokális viselkedését az $\dot{I} = P - S$ derivált függvény jellemzi. Mivel feltételeink szerint a termelési ráta függvény és az eladási függvény is folytonos, ezért az $\dot{I}$ függvény is folytonos. Az $\dot{I}$ függvény a t_1 pont kivételével egy tetszőlegesen kicsiny, t_1 pontot is tartalmazó környezetben differenciálható. A feltételek szerint a t_1 pontban az I függvénynek minimuma van, így az $\ddot{I}$ függvénynek t_1-től jobbra és balra is nemnegatívnak kell lennie.

Az $\ddot{I}$ függvény t_1-től jobbra 0 értéket vesz fel, mivel egy nulla függvénynek a differenciálhányadosa 0. A t_1-től balra azonban

$$\ddot{I} = \dot{P} - \dot{S} = -\dot{S} \geq 0,$$

mivel itt P egy konstans függvény. Tehát a $[t_1 - \epsilon, t_1]$ intervallumon az S függvény monoton csökkenő, ahol ϵ tetszőlegesen kicsiny. Mivel az S függvény a t_1 pontban és annak környezetében is folytonosan differenciálható, ezért ott $\dot{S} \leq 0$, amivel állításunkat bebizonyítottuk.

Az előbbi állítást analóg módon kiterjeszthetjük arra az esetre is, amikor egy eladási rátával azonos termelési rátáról akarunk átlépni egy állandó termelési rátájú tartományba. Ekkor igaz a

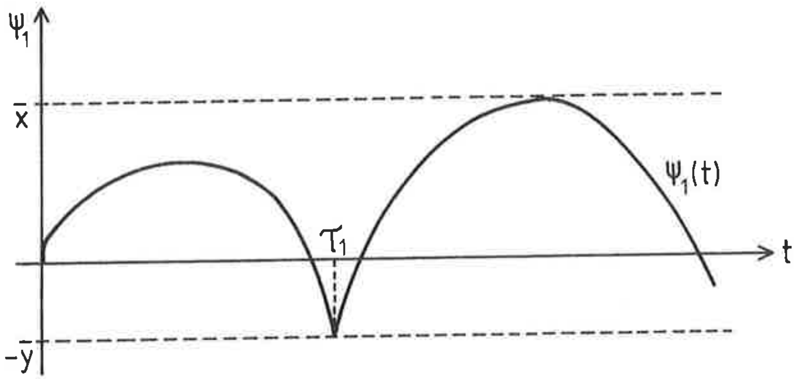
7. Állítás: Egy állandó termelési rátájú régiót csak csökkenő eladási rátával azonos termelési ráta előzhet meg.

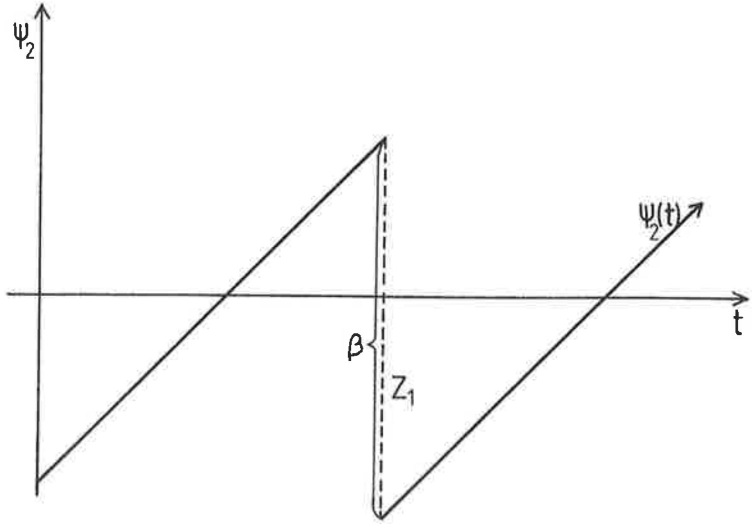
Ezt nem bizonyítjuk, a bizonyítás megegyezik az előző állítás bizonyításával. Az utóbbi két állításunk arra is rámutat az (ii) esetben $\psi_1(t) = -y$.

Mielőtt az optimális trajektóriát előállítanánk, már amikor létezik, vizsgáljuk meg, hogy az 1. Állítás (iii)–(iv) pontjait mikor alkalmazhatjuk. Az 5. Állítás egy intervallumot ad arra, hogy maximálisan mennyi ideig lehet pozitív a termelési ráta és a készletállomány. Ez erős korlátnak tűnik akkor, ha a

$$T \gg 2\sqrt{2\frac{x+y}{h}}$$

összefüggés teljesül, vagyis a tervezési időhorizont sokkal nagyobb a számított értékünknél. Azonban előfordulhat olyan τ_1 időpont, amikor t előtt és utána $P^0(t) > 0$ és $I^0(\tau_1) = 0$. Ekkor τ_1-ben teljesülhet a $\psi_2(\tau_1^-) - \psi_2(\tau_1^+) = \beta > 0$ összefüggés, mivel a fenti korlát „újraszámolódik". Erre egy példát mutat a





Ennyi előkészület után megadjuk a feladatot megoldó algoritmust, és felhívjuk a figyelmet arra, hogy mikor nem létezik optimális trajektória.

Az optimális trajektóriát előállító algoritmus Arrow–Karlin (1958a) dolgozatában szerepel. Az algoritmusnál abból indulunk ki, hogy optimális esetben a termelési ráta konstans. Így elsősorban válasszunk egy termelési rátát, amelyre

$$I(t) = I_0 + P_1 t - \int_0^t S \geq 0 \qquad \forall t \in [0, T].$$

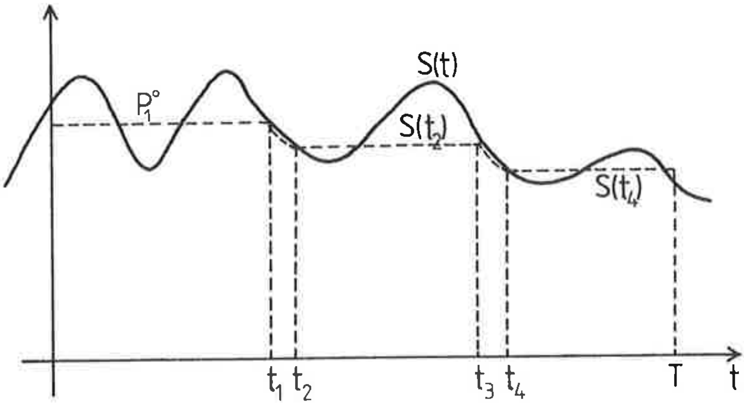
Az ezt kielégítő P_1 ráták közül vegyük a minimálisat, ami legyen P_1^0. Legyen ezután t_1 a legnagyobb olyan érték, amelyre $I(t_1) = 0$. Ekkor a $[0, t_1]$ intervallumon a termelési ráta P_1^0. A 6. Állítás szerint a t_1 pontban az eladási ráta negatív, tehát a $[t_1, T]$ intervallumon választhatunk egy olyan maximális t_2 értéket, amelyre $S(t) \leq 0$, $t \in [t_1, t_2]$ és

$$I^0(t) = S(t_2) \cdot (t - t_2) - \int_{t_2}^t S \geq 0, \qquad \forall t \in [t_2, T].$$

Ekkor a $[t_1, t_2]$ intervallumon $P^0(t) = S(t)$. Itt két lehetőség van. Vagy $I^0(T) = 0$, vagy létezik olyan t_3 pont, ahol $I^0(t_3) = 0$. Újra a 6. Állításra hivatkozással, a t_3 után választhatunk egy t_4 pontot, hogy $\dot{S}(t) \leq 0$, $t \in [t_3, t_4]$ és

$$I^0(t) = S(t_4) \cdot (t - t_4) - \int_{t_4}^{t} S \geq 0, \qquad \forall t \in [t_4, T],$$

és vizsgáljuk, hogy $I^0(t) = 0$ vagy sem. Ezzel az algoritmus folytatható, amíg $I^0(T) = 0$ eredményünk nem lesz. Az optimumot tehát előállíthatjuk, ha létezik. Az optimum előállítását a következő ábra mutatja:



Ez az algoritmus akkor nem használható, ha a $[t_0, t_1], [t_2, t_3], \cdots [t_{2i}, t_{2i+1}]$ intervallumok bármelyike nagyobb, mint a küszöbszámunk és/vagy nem léteznek az intervallumokban olyan τ_i pontok, ahol $I(\tau_i) = 0$ és a τ_i pont nem osztja a küszöbérték alá az intervallumokat.

Tehát nem létezik olyan optimális megoldása az olyan feladatnak sem, ahol

$$I_0 > 0 \quad \text{és} \quad T \gg 2\sqrt{2\frac{x+y}{h}} \quad \text{és} \quad \dot{S}(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

Az ilyen feladatokat csak akkor tehetjük megoldhatóvá, ha a kezdeti I_0 feltételt, akár a P_0-ra feloldjuk.

6. Konklúzió

A termeléssimítási probléma az esetek többségében nem oldható meg. Azonban amikor megoldható, akkor alkalmazható rá a jól ismert Arrow–Karlin-féle algoritmus (2). Ez azt is jelenti, hogy ez az algoritmus bizonyos fokig maximális megoldási módszert ad a termelési-készletezési rendszerek széles osztályára.

IRODALOM

1. ANTOSIEWITZ, H.–HOFFMAN, A.: A Remark on the Smoothing Problem, Management Science, Vol. 1., No. 1., pp. 92–95.
2. ARROW, K. J.–KARLIN, S. (1958a): Production over Time with Increasing Marginal Costs, In: Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production, Stanford University Press, pp. 61–69.
3. ARROW, K. J.–KARLIN, S. (1958b): Smoothed Production Plans, In: K. J. Arrow, S. Karlin and H. Scarf (eds.) Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production, Stanford University Press, pp. 70–85.
4. BENSOUSSAN, A.–CROUHY, M.–PROTH, J. M. (1983): Mathematical Theory of Production Planning, North-Holland, pp. 231–238.
5. BENSOUSSAN, A.–HURST, E. G.–NÄSLUND, B. (1973): Management Applications of Modern Control Theory, North-Holland.
6. HOFFMAN, A.–JACOBS, W. (1954): Smooth Patterns of Production, Management Science, Vol. 1., No. 1., pp. 86–91.
7. IOFFE, A. D.–TYIHOMIROV, V. M. (1974): Tyeorija eksztremalnih zadacs, Moszkva. Nauka.
8. KUNTREUTHER, H. C.–MORTON, T. E. (1973): Planning Horizons for Production Smoothing with Determistic Demands, I. All Demand Met from Regular Production, Management Science, Vol. 20., No. 1., pp. 110–125.
9. SEIERSTAD, A.–SYDSAETER, K. (1977): Sufficient Conditions in Optimal Control Theory, International Economic Review, Vol. 18., No. 2., pp. 367–391.

THE LINEAR PRODUCTION SMOOTHING PROBLEM

The aim of the paper is to investigate the linear production smoothing problem, in the case of continuous time. The author uses the well-known maximum principle for solving the problem. An algorithm can be constructed with the help of the necessary and sufficient conditions. The algorithm is a forward algorithm. The solution is monotone decreasing in the production rate, if there exists. If a solution exists, there are cycles. A cycle consists of a constant and a demand rate regions.

AZ ÁLLAM DEZERTÁLÁSÁNAK GAZDASÁGI KÖVETKEZMÉNYEI[1]

ÁBEL ISTVÁN – JOHN P. BONIN
Budapest Bank – Westleyan University, USA

A piac által termelt megbízható információ az alapja annak, hogy a piacgazdaság erős államot jelent. Az állami beavatkozás hatásosságát annak koncentráltsága és funkcionális korlátozottsága biztosítja. A piacra való áttérést Kelet-Európában azonban nem az erős állam adta önbizalom, hanem az állam dezertálásának bűntudata jellemzi. Az állami funkciók leépülésének gazdasági következményeit vizsgálja ez az írás.

Manapság igen elterjedt az a vélemény, hogy a tervgazdálkodás örökségeként ránk maradt költségvetési problémák – ide értve az államadósság, a társadalombiztosítás és a jóléti intézmények finanszírozásától kezdve az iparfejlesztés és kutatás finanszírozásáig sok mindent – megoldhatatlanok a jelenlegi gazdasági feltételek mellett. Felmerül tehát a következő kérdés. Vajon a gazdaság fog összeomlani ezen örökölt terhek súlya alatt, vagy az állam fogja korábban vállalt kötelezettségeit cserbenhagyni. Indulatok korbácsolta érzelmekkel keveredő gazdasági érdekek csapnak össze a múlt rendszer romlottságát és felelőtlenségét hozva fel érvként az állam feltétel nélküli visszavonulását követelve az egyik oldalon, míg a másik oldal hasonló érveléssel az állam jelenlegi képviselőinek rója fel vétkes mulasztásként az állam kivonulását a gazdaságból.[2]

Ha a fent említett vélekedés helytálló, akkor a piacgazdaságra való áttérés során az állam dezertálása igen súlyos válságot idézhet elő. Nem egyszerűen a költségvetési szemlélet megváltozását, hanem az állam és a társadalom viszonyának megváltozását jelenti ez. Olyan változást, ami feltételezi a társadalmi struktúra, az életmód és a kultúrához való viszony alapvető átalakulását, de az egyén szellemi és lelki „rendszerváltását" is. Az ilyen „gyökeres" átalakulás végeredménye könnyen lehet bénulás, apátia és meghasonlás, az alkotó lendület, a fejlődés újfajta motorjainak beindulása helyett.

A kelet-európai átalakulás történelmileg egyedülálló jelenség. A lengyelek a halászlé akváriummá való visszaváltoztatásához, az oroszok a rántotta tojásba való visszacsinálásához hasonlítják. A közgazdászok pedig modellezik. Ezt tesszük mi is ebben az írásban. A főbb makroökonómiai mérlegek hasznos támpontot adnak ahhoz, hogy az átalakulást éppen megkezdő gazdaság állapotát felmérjük, és ez alapján

[1] Beérkezett: 1991. január 17.

[2] A tanulmány az MTA-OTKA 681. sz. Költségvetési és monetáris politika a piacgazdaságra való áttérés időszakában című kutatás keretében készült.

a gazdaságpolitikai alternatívák várható hatásait bemutassuk. Helyénvaló azonban rögtön az elején tisztáznunk megközelítésünk korlátait, nevezetesen azt, hogy a mikroökonómiai vonatkozásokat nem részletezzük. Jóllehet, valójában azon áll vagy bukik az átalakulás, hogy a privatizált és az új vállalkozások, valamint a végül mégis az államra maradó gazdasági funkciók milyen piacon és hogyan működnek majd. Ezeket a problémákat modellünkben megoldottnak tekintjük, és csupán azt vizsgáljuk, hogy a különböző gazdaságpolitikai alternatívák – konvertibilitás, liberalizálás, külföldi tőkebevonás – milyen makrogazdasági folyamatokat indukálnak az új piacgazdaságokban. Ezen belül is külön kiemelten foglalkozunk a költségvetés szerepével, valamint a költségvetésre gyakorolt hatások mérlegelésével.

Egy nyílt makromodellt elemzünk, melyben a külkapcsolatok liberalizáltak, az árfolyam egységes és a fizetési mérleg folyó tételeit tekintve konvertibilis a valuta. Az átalakulás során a reálbér, a közvetlen külföldi beruházás alakulásának és az öröklött külső adósság terhének hatásait vizsgáljuk.

A következő részben a lakosság, a gazdálkodók, a költségvetés és a külföld nettó pozícióját, a felhalmozás-megtakarítás egyenleteit – IS görbe – a fizetési mérleg egyenlettel – BOP görbe – összevetve határozzuk meg a gazdaság foglalkoztatási szintjét, a GDP-t, az árfolyamot és a reálbért. A nominálbér külső (exogén) gazdaságpolitikai paraméter. A közvetlen külföldi beruházás és az adósságszolgálat szintje fontos szerepet játszik a fizetési mérleg alakulásában, és ezen keresztül a fenti változók meghatározásában. A modellt felhasználjuk a két alapvető gazdaságpolitikai alternatíva, az árfolyam *nominális* szintjét rögzítő sokkterápia és a *reálfolyamatok* változatlan szinten tartó alternatív gazdaságpolitika hatásainak összevetésére.

Az átalakulás modellezése[3]

A piacgazdaságra áttérő gazdaságban a termékpiacon túlkereslet van – a hiánygazdaságok általános jellemzőjeként –, ennek következtében a beruházás és a megtakarítás sincs egyensúlyban. A termékpiacon jelentkező túlkereslet munkaerőpiaci túlkínálattal párosul, ami azt tükrözi, hogy a reálbér adott szintjén a kemény költségvetési korlát mellett nyereségmaximáló vállalkozások munkaerőkereslete nem elegendő a munkaerő teljes foglalkoztatásához és a kereslet kielégítéséhez.

A gazdaság *reálszféráját* a következő egyenletek írják le. A folyóáras GDP,

---

[3] A cikk egy korábbi változatához fűzött hasznos észrevételeket *Robert Rowthorn* (Cambridge University) és *David Begg* (University of London). Ezekből sokat hasznosítottunk már az átírás során, néhány azonban további munkát igényel. Így például kifogásolták a modell statikus jellegét. Az adósságállománnyal és a közvetlen külföldi beruházással kapcsolatban egyaránt szükség lenne az intertemporális összefüggéseket is elemezni. Ez ahhoz elengedhetetlen, hogy a hitelfelvét vagy a külföldi beruházás formájában megvalósuló forrásbevonás alternatíváit egymással is összevessük. Szintén súlyos hiányossága a modellnek az, hogy az exportot exogénnek veszi, és így a költségvetési politika elemei nem hatnak a dollárban mért GDP alakulására.

amelyet Y jelöl:

$$Y = PQ, \tag{1}$$

ahol P az árszintet és Q a reálértékben mért GDP-t jelöli.

Az aggregált termelési függvényre az alábbi egyszerű alakot vesszük:

$$Q = E^{\alpha}, \tag{2}$$

ahol E az aggregált foglalkoztatást jelöli, α pedig olyan paraméter, melyre teljesül a $0 < \alpha < 1$ kikötés.

A *gazdálkodók* kemény költségvetési korlát melletti nyereségmaximáló foglalkoztatási döntését a következő összefüggés írja le:

$$(\frac{w}{P}) = Q_E = \alpha E^{\alpha-1} \tag{3}$$

A (2) és (3) kifejezéseket (1)-be helyettesítve adódik:

$$wE = \alpha Y. \tag{4}$$

Mivel a folyóáras GDP, vagyis Y a modellben határozódik meg, a kormányzati bérpolitika a nominálbér, w megválasztására korlátozódik. Ezt adottnak véve, a (2) és (4) egyenletek az IS és a BOP egyenletekkel együtt elegendőek a négy endogén változó, az E aggregált foglalkoztatási szint, a P árszint, a Q reál GDP és az e árfolyam meghatározásához.

A *háztartások* két forrásból jutnak jövedelemhez ebben a modellben: bérből és munkanélküli segélyből. Az E foglalkoztatási szint, valamint az L munkaerő állomány alapján a munkanélküliek száma $L - E$. Legyen a munkanélküliségi segély a bér b százaléka és adómentes. A személyi jövedelemadó lineáris és kulcsa t_w. A rendelkezésre álló jövedelmet (Y_H^D) így az alábbi képet adja meg:

$$Y_H^D = (1 - t_w)wE + bw(L - E), \tag{5}$$

ahol $0 < b < (1 - t_w) < 1$.

Vegyünk ehhez egy egyszerű *fogyasztási függvényt*:

$$C = C_0 + cY_H^D, \tag{6}$$

ahol C a fogyasztás, C_0 az autonóm fogyasztás és c a fogyasztási határhajlandóság.

A lakosság összes *megtakarítása*, $Y_H^D - C$ tehát a következő:

$$S_H = -C_0 + (1 - c)\big((1 - t_w)wE + bw(L - E)\big). \tag{7}$$

Az aggregált *profit* (Π) a folyóáras GDP (Y) és a bérköltség különbsége:

$$\Pi = Y - wE. \tag{8}$$

Az *összes beruházás*, I, a belföldiek által finanszírozott beruházások és a közvetlen külföldi beruházások összege. A belföldi beruházást exogénnek tekintjük – ami nem függ a modell változóinak alakulásától – és I_0-al jelöljük. A közvetlen külföldi beruházást a folyóáras GDP lineáris függvényeként írjuk le az egyszerűség kedvéért. Az összes beruházást így a következő forma írja le:

$$I = I_0 + fY, \tag{9}$$

ahol f a közvetlen külföldi beruházás GDP-hez viszonyított aránya.

A nyereségadó mértéke t_B, így a *gazdálkodók nettó pozícióját* (S_B) a következő összefüggés írja le:

$$S_B = (1 - t_B)(Y - wE) - I_0 - fY. \tag{10}$$

A *költségvetés* bevételei a személyi jövedelemadó és a nyereségadó bevételek, míg kiadásai a G_0 autonóm kormányzati kiadások, a munkanélküli segély és az adósságszolgálat tételeiből tevődik össze. A dollárban kifejezett adósságszolgálat az exogén kamatláb, i, és a korábban felhalmozott külföldi adósság, $D_\$$ szorzata. Az árfolyam, e segítségével ezt átszámítjuk belföldi fizetőeszközre.

$$D = iD_\$ e \tag{11}$$

A *költségvetés nettó pozíciója* – többlete, ha ez pozitív – így írható:

$$S_G = t_w wE + t_B(Y - wE) - G_0 - bw(L - E) - iD_\$ e. \tag{12}$$

A tárgyalás egyszerűsítése érdekében a cserearány-változás hatásától eltekintünk a külső szektor leírásánál. Az átalakulással automatikusan megszűnő KGST miatt az export átirányítása más piacokra és az exportvolumen alakulása nehezen megragadható, de nagy jelentőségű változásokat okoz. A nagy bizonytalanság miatt az *exportot exogén változóként* kezeljük, ami technikailag azt jelenti, hogy a modellben konstans, $X_\$$. Az *import* a folyóáras GDP (Y) lineáris függvénye a modellben:

$$M = mY, \tag{13}$$

ahol M az import forintban kifejezett értéke, m az importigényesség mutatója.

A *fizetési mérleg* a kereskedelmi mérleg egyenlegéből, az adósságszolgálat tételeiből és a közvetlen külföldi beruházásokból tevődik össze a modellben:

$$X_\$ - \frac{mY}{e} - iD_\$ + \frac{fY}{e} = 0. \tag{14}$$

Átalakítva (14)-et, adódik:

$$e = \frac{m - f}{X_\$ - iD_\$} Y. \tag{15}$$

A (15) kifejezésben a nevező csakis akkor pozitív, ha teljesül:

$$1 > \frac{iD_\$}{X_\$} \tag{16}$$

Más szóval, a modellben értelmezhető *BOP egyenlet* a megoldás létezésére vonatkozóan meghatároz egy feltételt, mely szerint, feltéve, hogy az import aránya a GDP-ben nagyobb, mint a közvetlen külföldi beruházásé, akkor az adósságszolgálat nem érheti el az exportbevétel nagyságát. Ha ez nem teljesülne, akkor a modellnek nincs megoldása.

A *beruházás-megtakarítás egyenlet* (IS görbe) az összes beruházás és az összes megtakarítás egyezősége alapján határozódik meg. A megtakarításoknál a lakossági megtakarítások, a gazdálkodók és a költségvetés nettó pozíciója mellett figyelembe vesszük a külföld nettó megtakarításait is, melyekkel hozzájárul a magyarországi beruházások finanszírozásához. A külföld nettó pozícióját, S_F, a következő képlet írja le:

$$S_F = mY - e(X_\$ - iD_\$). \tag{17}$$

Az *IS görbe* tehát az $S_H + S_B + S_G + S_F = 0$ összefüggés alapján adódik.

Innen átalakítások után adódik:

$$C_0 + I_0 + G_0 + eX_\$ = Y + (m - f)Y - c\big((1 - t_w)wE + bw(L - E)\big). \tag{18}$$

A (4) összefüggés alapján (18) így írható le:

$$A_0 + eX_\$ = Y\big(1 + (m - f) - \alpha c(1 - t_w - b)\big), \tag{19}$$

ahol $A_0 = C_0 + I_0 + G_0 + cbwL$.

A modell megoldása az IS görbe és a BOP görbe metszéspontjában, a (15) és a (19) egyenlet megoldásaként adódik. A (15) egyenletet (19)-be helyettesítve kapjuk:

$$Y^* = A_0 \left\{ \frac{1}{1 - (m - f)\frac{iD_\$}{X_\$ - iD_\$} - \alpha c(1 - t_w - b)} \right\}. \tag{20}$$

A kapcsos zárójelben szereplő kifejezés a *GDP abszorpciós multiplikátora*. Az egyensúlyi árfolyam meghatározásához (20)-at (15)-be helyettesítjük:

$$e^* = \frac{m - f}{X_\$ - iD_\$} A_0 \left\{ \frac{1}{1 - (m - f)\frac{iD_\$}{X_\$ - iD_\$} - \alpha c(1 - t_w - b)} \right\}. \tag{21}$$

Az egyensúlyt az 1. ábrán szemléltetjük. Átírva (19)-et az alábbi alakra:

$$Y^* = \mu A_0 + \mu X_\$ e, \tag{22}$$

ahol

$$\mu = \frac{1}{1 + (m - f) - \alpha c(1 - t_w - b)}.$$

Feltételezzük, hogy $\mu > 0$, vagyis

$$\frac{1+m-f}{(1-t_w-b)c} > \alpha.$$

Az egyensúly létezésének az a feltétele, hogy az IS és a BOP egyenesek metszék egymást. Ehhez az szükséges, hogy az 1. ábrán az IS egyenes meredeksége kisebb legyen, mint a BOP meredeksége, vagyis hogy teljesüljön az alábbi összefüggés:

$$\frac{X_\$ - iD_\$}{m-f} > \mu X_\$. \tag{23}$$

Az egyensúly létezésének e feltétele átalakítva a következő kifejezést adja:

$$1 > \frac{iD_\$}{X_\$} + \frac{m-f}{1+m-f-\alpha c(1-t_w-b)}. \tag{24}$$

Vegyük észre, hogy ez a feltétel erősebb, mint a (16) volt. A (24) feltételből látható, hogy az m, α és c paraméterek magas értékei nehezítik, míg az f, t_w és b paraméterek nagyobb értékei valószínűbbé teszik az egyensúlyi feltétel teljesülését. Minél nagyobb tehát az adósságszolgálati ráta értéke, annál jobban fenyeget annak veszélye, hogy a modellnek nincs megoldása.

A modell stabilitási jellemzőit az ábrán nyilakkal jelöltük. A modell stabilitási jellemzői megegyeznek az Ábel és Bonin [1991]-ben elemzett modellel, így ennek részletezését itt mellőzzük.

A modell *komparatív statikai* elemzéséhez szükséges levezetések megtalálhatók Ábel és Bonin [1992a]-ban, itt csupán ennek eredményeit használjuk fel a levezetés részleteit mellőzve. A paraméterek megválasztása kifejezi, hogy az átalakulás során különös fontosságot tulajdonítunk a külgazdaság ($X_\$, m-f$), a külföldi adósság ($D_\$, i$), a költségvetési politika (G_0, t_w) és a bérpolitika (w) jellemzőinek. Az 1. táblázatban összefoglalt komparatív statikus jellemzőkről látható, hogy bármely paraméter árfolyamalakulásra és a folyóáras GDP alakulására gyakorolt hatása azonos irányba mutat, emiatt érdemes külön figyelmet szentelni a dollárban mért GDP $\left(\frac{Y}{e}\right)$ alakulására gyakorolt hatásuknak, annál is inkább, mivel e tényező a (9) beruházási egyenletünkben fontos szerepet játszik. A dollárban kifejezett közvetlen külföldi beruházás ugyanis ennek alakulásától függ a modellben. Az 1. táblázat tartalmának értelmezését kezdjük az exporttal. A konvertibilis *export* növekedése a BOP egyenes meredekségét $\left(\frac{X_\$-iD_\$}{m-f}\right)$ növelve a forint felértékelődésére és a folyóáras GDP csökkenésére vezet. Eközben a dollárban mért GDP növekszik, mivel a forint felértékelődése ellensúlyozza a GDP nominális csökkenését. A folyóáras GDP csökkenése mérséklően hat a fogyasztásra. Ez teszi lehetővé az export növelését csökkenő termelés mellett.

Az *importigényesség* növekedése ezzel éppen ellentétes hatást jelent. Mivel az export a modellben exogén, így az importigényesség növekedése esetén a (14) egyenlet szerint a fizetési mérleg csak úgy kerülhet egyensúlyba, ha az árfolyam növekszik, vagyis a forint leértékelődik. Változatlan folyóáras GDP mellett ez azonban a dollárban kifejezett GDP csökkenésén keresztül a közvetlen külföldi beruházásokat is csökkentené, ami egyrészt tovább rontja a fizetési mérleget, másrészt megbontja a termékpiac, a megtakarítások és a beruházások egyensúlyát. Az egyensúly csak úgy állhat helyre, ha a forint leértékelődésének hatását a folyóáras GDP inflációs növekedése némileg ellensúlyozza, így a dollárban mért GDP csökkenésének üteme elmarad a forint leértékelődésének ütemétől.

Az *adósságszolgálat* terheinek csökkenése az exportvolumen növekedésével azonos hatást fejt ki. Mivel az exportot exogénnek vettük, a gazdaságpolitikával kapcsolatos változók (G_0, t_w, w) erre gyakorolt hatásait nem tudja kezelni a modell, emiatt ezek árfolyamhatásai is elsikkadnak. Megjelenik azonban a költségvetési kiadások növekedésének a GDP inflációs növekedésén keresztüli forintleértékelődési hatása.

A *reálbér* fontos gazdaságpolitikai változó a stabilizáció és az átalakulás időszakában, ezért ezzel érdemes külön foglalkozni. Mint már említettük, az export exogén kezelése miatt ez a változó sem az árfolyamra, sem a dollárban kifejezett GDP-re nem hat a modellben. A folyóáras GDP-modellből levezetett nominálbér elaszticitása egynél kisebb[4], vagyis a nominálbér egy százalékos emelkedése hatására a folyóáras GDP inflációs növekedése egy százaléknál kisebb. Ebből az is következik, hogy a P árszínvonal növekedése is kisebb százalékos arányú, mint a bérnövekedés. Tegyük fel ugyanis ennek az ellenkezőjét, hogy a w bér 1 százalékos növekedése a P árszínvonal ennél nagyobb növekedéséhez vezet. Ekkor a w/P reálbér csökkenése a foglalkoztatás növekedéséhez vezetne a (3) egyenletnek megfelelően, ami a (2) egyenlet értelmében egyben a termelés növekedését jelenti. Vagyis, ha a nominálbér növekedése az árszínvonal nagyobb ütemű növekedésével járna, amihez ráadásul a termelés bővülése társul, akkor a folyóáras GDP bérelaszticitása egynél nagyobb kellene hogy legyen, ellentétben a modellből levezetett értékkel. Az egynél kisebb elaszticitás tehát azt jelenti, hogy a nominálbér növekedése esetén a modellben a reálbér is növekszik. A bérnövekedés ily módon a reálbér emelkedésén keresztül a termelés csökkenéséhez vezet, amit az árszínvonal növekedése ellensúlyoz, vagyis a folyóáras GDP növekszik. Az 1. táblázatnak megfelelően ez a forint leértékelődésével jár, így a GDP inflációs növekedése ellenére a dollárban mért GDP nem változik, és nem változik emiatt a közvetlen külföldi beruházás mennyisége sem.

A gazdaságpolitika választási lehetőségei

A piacgazdaságra való áttérés a jogi intézményrendszer és az üzleti infrastruktúra átalakulását éppúgy kiinduló feltételként igényli, mint ahogy a pénzügyi közvetítés, és a management szakismeret hiányában az átalakulás első lépéseinek sincs esélye a sikerre. Mindennek tehát egyszerre kellene megtörténnie, méghozzá gyorsan.

[4] A komparatív statika levezetései Ábel és Bonin (1992a) függelékében megtalálhatók.

Az átalakulás ebből adódóan csakis *sokkterápiaszerűen* képzelhető el sok szakértő szerint.[5] Csakhogy – érvelnek megint más szakértők, intézmények –, mint amilyen a piac is, nem születnek egyik percről a másikra. A fejlődés, legyen az gyors vagy lassú, mindig folyamatos. Ilyen értelemben a fokozatosság nem választás kérdése, hanem adottság, amivel jól vagy rosszul lehet kalkulálni, de vakon félresöpörni nem lehet büntetlenül.[6] Megint mások azt tartják, hogy az átalakulás a többségnek bizony sokkterápia lesz akkor is, ha közben mindenki a fokozatosság mellett tör lándzsát.

A helyzet tehát komplikált. Lássuk, hogy milyen útbaigazítást ad a modell a kétféle gazdaságpolitikai alternatíva, a sokkterápia és a fokozatosság értékelésére. A sokkterápia szemléltetésére a *Balcerowicz-program* által fémjelzett lengyel stabilizációból merítünk példákat, a fokozatosságra az 1990. év során követett magyar stabilizációs politika szolgál példaként.[7]

A lengyel program 1990. január 1-jén a zloty jelentős leértékelésével és az árfolyam nominális szintjének rögzítésével indult, miközben a kormány jövedelemszabályozással (tax based income policy) próbálta csökkenteni a reálbéreket. A lengyel valuta 40 százalékos leértékelésével a lengyel kormány a zlotyt alulértékeltté tette a dollárral szemben. A konvertibilis export növekedett, az import pedig csökkent, amihez az árfolyam mellett a vámok növekedése és a KGST összeomlásával járó irányváltási kényszer egyaránt hozzájárult.

Magyarország esetében hasonló mértékű leértékelésre nem került sor, de a dollárexport itt is jelentősen növekedett, jórészt a korábbi KGST-export átirányításával nyugati piacokra. A forint a dollárral szemben túlértékelt valuta volt, ami szükségessé tette a lakossági devizakorlátozások fenntartását. A külkereskedelem liberalizálása, valamint a külföldi befektetések nyereségének és tőkéjének repatriálása biztosításával azonban a vállalkozások számára a forint lényegében konvertibilissé vált.[8]

A lengyel stabilizáció az árfolyam nominális rögzítésére alapozódott, amit azzal indokoltak, hogy az infláció letörésére a nyugati árstruktúra és inflációs ráta importja által alkalmas eszköz. A magyar gazdaságpolitika a reál árfolyam tartására törekedett, kisebb lépésekben végrehajtott korrekciókkal mérsékelve a nagyobb infláció forinttúlértékelődési hatását. A magyar gazdaságpolitika a valutakosárhoz kötött rugalmas árfolyampolitikát folytatott.[9]

---

[5] Lásd Lipton és Sachs (1990a,b)

[6] Kornai (1990) álláspontja említhető erre példaként.

[7] A kétféle gazdaságpolitika eredményeinek összevetését részletesen elemeztük Ábel és Bonin (1992b) írásunkban, ezért itt csupán néhány jellegzetes vonatkozásra térünk ki. A lengyel gazdaságpolitikát Gomulka (1990) leírása alapján értékeljük, aki egyébként a Balcerowicz-program egyik kidolgozója volt.

[8] A forintkonvertibilitás fokozatos kialakításának útját Bokros (1991) mutatja be.

[9] A forint reál effektív árfolyama az 1987. decemberi szintet alig haladta meg, 1991. első negyedévében kevesebb, mint 10 százalékkal volt e szint felett. Ezzel szemben a lengyel valuta reál effektív árfolyama 1991. első negyedévére 73 százalékkal haladta meg a stabilizáció kezdeti szintjét, az 1990. első negyedévit, de az 1987. decemberi szinthez képest is több mint 40 százalékkal volt ekkor már túlértékelt.

A modell keretébe helyezve, 1990 elején Magyarország és Lengyelország a valutapiacot tekintve az egyensúlyi állapothoz viszonyítva ellentétes oldalon helyezkedett el. Lengyelországot a stabilizáció elején $e > e^*$ állapot (*alulértékeltség*) jellemezte, ami az országot a BOP egyenestől jobbra teszi. A termékpiacokat mindkét ország esetében túlkereslet jellemezte, így Lengyelország az 1. ábrán a IV. mezőbe kerül.

A magyar helyzet ettől több szempontból is eltér. Egyrészt, a forint ha csak kis mértékben is, de *felülértékelt* volt a dollárhoz viszonyítva, így ha túlkeresletet tételezünk fel a termékpiacon, az ország az 1. ábrán a III. mezőbe kerül, méghozzá az egyensúly közvetlen közelébe, jelezve, hogy az egyensúlytalanság nem olyan mértékű, mint a lengyel esetben. A gazdaságpolitika fokozatosan közelített a konvertibilitáshoz Magyarországon is.

Modellünk viszonyítási alapként választásánál ne feledkezzünk meg arról, hogy a modellben leegyszerűsített gazdaság teljes konvertibilitást és liberalizált külkereskedelmet ír le, miközben 1990-ben még egyetlen kelet-európai ország sem érte el ezt az állapotot. Sőt, mindkét említett gazdaságban a külső megrázkódtatások, a KGST-kereskedelem összeomlása különösen megnehezítette az ebbe az irányba való jelentős előrelépést.

E megszorításokat szem előtt tartva, a lengyel stabilizációs programot a modell komparatív statikai jellemzői alapján minősítve azt mondhatjuk, hogy az az egyensúlytól még távolabb vitte a lengyel gazdaságot. A szigorú költségvetési politika, az import vámokkal történő visszafogása, valamint a tapasztalt exportexpanzió együtt a folyóáras GDP visszafogásához és a zloty egyensúlyi árfolyama felértékelődéséhez vezet, ami még élesebbé teszi a program alulértékelt valutája és a valóság közötti ellentmondást. Ez az ellentmondás a valóságban úgy oldódott fel, hogy az egyik elemet, nevezetesen a költségvetési megszorítást feláldozták. Így az egyensúlyi feszültség ugyan mérséklődött, de ennek megint a stabilizáció látta kárát, mert a laza költségvetés az inflációnak adott további lendületet. Az árfolyam rögzítése annál inkább hibás választásnak tűnik a modell tükrében, mert a zloty egyensúlyi árfolyamának eléréséhez szükséges felértékelődés a dollárban mért GDP növekedésén keresztül a közvetlen külföldi beruházások gyorsabb növekedését tette volna lehetővé.

Magyarország esetében a forint induláskor is túlértékelt volt. Az 1990. évi nagy költségvetési hiány és az olajárak emelkedése miatti cserearányromlás együttesen az egyensúlyi árfolyam leértékelődés irányába történő elmozdulását indokolják, ami e^* jobbra mozdulását jelenti, és egyben a ténylegesen túlértékelt árfolyam és az egyensúlyi árfolyam közötti rés növekedését okozná. E feszültség mérséklésére több út is adódott, és a valóságban bizonyos mértékig mindegyik szerepet is kapott. Egyrészt leértékeléssel némileg korrigálták a forint túlértékeltségét, másrészt a recesszió, GDP volumenének csökkenése természetes úton is a rés csökkentése irányába hatott.

Mindkét esetben az a meglepő dolog történt, hogy bár a gazdaságpolitikai filozófia alapvetően ellentétes volt, az egyik a sokkterápiára, a másik a fokozatosságra épített, mégis az eltérő kiinduló helyzet hibás felmérése és az alkalmazott politika ebből adódó hibás megválasztása egyformán ugyanazzal a következménnyel járt mindkét ország esetében, nevezetesen az egyensúlytalanság fokozódását eredményezte. A két esetet vázlatosan a 2. és 3. ábrán hasonlítjuk össze. A korrekció Magyarország esetében leértékelés formájában 1991 elején megtörtént, Lengyelország esetében pedig az infláció továbbélésén keresztül automatikus korrekciót jelentett, amíg a lengyelek is át nem tértek a valutakosárhoz kapcsolt rugalmasabb árfolyampolitikára.

Az állam visszavonulása a piacról

Az állam dezertálásának csak egyik – és valószínűleg nem is a legfontosabb – frontvonala a tulajdonlásból való kiszállása. Itt is meggondolandó azonban, hogy a külföldi tőkével való stafétaváltás valóban a legjobb megoldás-e? Kétségtelenül sok érv hozható fel a külföldi működőtőkére való támaszkodás *mellett*. Ezek például a konvertibilis valutához, pótlólagos befektetésekhez, management és piaci ismeretekhez való könnyebb hozzájutás, valamint a piacra való belépés megkönnyítése. De nem minden külföldi hozza ezt, sőt számolni kell a haszonlesőkkel, akik rövid távon akarnak nagy profitot kiszivattyúzni. Az ilyen forrásbevonás nagyon drága lesz. A tulajdonból való állami kivonulás emiatt, bár fontos eleme az átalakulásnak, nem mindegy, hogy milyen stratégia szerint valósul meg. Az meg különösen fontos, hogy a választott stratégiának megfelelő átgondolt makro gazdaságpolitikai irányvonalat kövessen az állam. A magyar kormány külföldi tőkével kapcsolatos álláspontját 1990-ben egy külsődlegesnek tűnő, mégis fontos szerepet játszó tényező alapján kell értékelnünk. Az előnyök és hátrányok mérlegelését csak akkor kérhetjük számon, ha valós választási lehetőség van. 1990 indulásánál azonban ilyen nemigen volt. A külföldi finanszírozásnak úgyszólván egyetlen pótlólagos forrásává lépett elő a közvetlen külföldi beruházás.

Az állami visszavonulás más területein azonban ennél is nagyobb bajok forrása a hagyományos állami feladatok elöli fejvesztett menekülés. Tévedés azt gondolni, hogy a piac működése – de még kevésbé annak kiépítése – határozott állami szerepvállalás nélkül lehetséges lenne.[10] A piac ugyanis erős államot feltételez. Ezzel kapcsolatban azonban az a történelmi tapasztalat, hogy nem akkor erős az állam, amikor mindenbe beleszólva úgy tesz, mintha mindenható volna. Éppen ellenkezőleg, a gyöngeség legbiztosabb jele az, amikor még arra sem képes a hatalom, hogy azt felmérje, mire lehet befolyása és milyen hatásfokkal. A piacgazdaságban működő kormány egyébként éppen azért lehet erős, mert a piac értékelve a folyamatokat megbízható *információt* is kitermel, amire döntéseket lehet alapozni. Terv-

[10] A piachoz fűződő illúziókat jól jellemzi a ,,Hányan kellenek egy villanykörte becsavarásához?" vicc újabb fordulata: míg a szocializmusban öt emberre volt ehhez szükség – egy, aki a körtét fogta, négy pedig az asztalt forgatta alatta –, addig az átalakuló gazdaságban nulla. Mondván, hogy ,,majd a piac megoldja".

gazdaságban a kormány nem annyira a legitimáció hiánya, mint inkább a megfelelő információ hiánya kárhoztatta elgyöngülésre.

Az oktatás, a kutatás, de még a levitézlett iparfejlesztés vagy struktúrapolitika is alapvetően állami feladat, és az aktív irányítás megszünése az ilyen funkciókban nem azt jelenti, hogy azt a piac átveszi, hanem azt, hogy koordináció nélkül sorsára hagyjuk az esélyeinket leginkább meghatározó területeket. Talán a mai zavar abból ered, hogy még mindig nem tudtunk a *centralizáció-decentralizáció* fogalomköréből kitörni. Csupán azért, mert valami centralizáltan nem ment, attól még decentralizáltan sem biztos, hogy menni fog. A döntő kérdés ugyanis nem ez, hanem a *koordináció*. A koordináció, melyet az államnak, vagy ha az nem képes rá, akkor a társadalomnak kell valahogy megoldania. A társadalom ezt csupán atomizáltan tudja kezelni, amiből nagy bajok származhatnak. Az egymással is összeegyeztethetetlen szempontok szerint kialakuló elkülönült rendszerek ugyanis csak lokálisan működőképesek. Az állam dezertálása így vezetett el a központtól a helyi közösségek felé forduláshoz. Ennek számos előnye mellett az átalakulás során inkább a hátrányait tapasztalhatjuk ma. Az elvek és a gyakorlat összeegyeztethetetlensége régen nem tapasztalt méreteket ölt. Amíg szinte mindenki a privatizációt egyértelműen előnyösnek tartja általában, ha a saját munkahelyére fordul a sor, akkor azonban már csak az ellenérvek hallhatók, a dolog meg nem halad. Az egymással is összeegyeztethetetlen rendszerek sajnos az egymás közötti koordinációban sem jeleskednek. A koordináció *hiánya* esetén azonban a centralizált vagy a decentralizált rendszerek egyaránt forráspazarlóak, hosszabb távon működésképtelenek.

IRODALOM

1. ÁBEL I.–BONIN, J. P. (1991): A közvetlen külföldi beruházás és az adósságszolgálat. Közgazdasági Szemle, 1991. 7–8. sz.

2. ÁBEL I.–BONIN, J. P. (1992a): Debt Service, Foreign Direct Investment and Transition to Market: A Simple Model, Center for Economic Policy Research Discussion Paper No. 625.

3. ÁBEL I.–BONIN, J. P. (1992b): A Comparison of the Hungarian and the Polish Transformation: The „Big Bang" versus „Slow But Steady", Center for Economic Policy Research Discussion Paper No. 626.

4. BOKROS L. (1991): Gradual Progress Towards Currency Convertibility in Hungary, 1991. In: Williamson, J. szerk. (1991): Currency Convertibility in Eastern Europe, Washington D. C.: Institute for International Economics, 1991.

5. GOMULKA, S. (1990): Reform and Budgetary Policies in Poland, 1989–1990. European Economy, 43 (March 1990), pp. 127–138.

6. KORNAI J. (1990): The Road to a Free Economy – Shifting form a Socialist System: The Example of Hungary. New York, London: Norton, W. W. 1990.

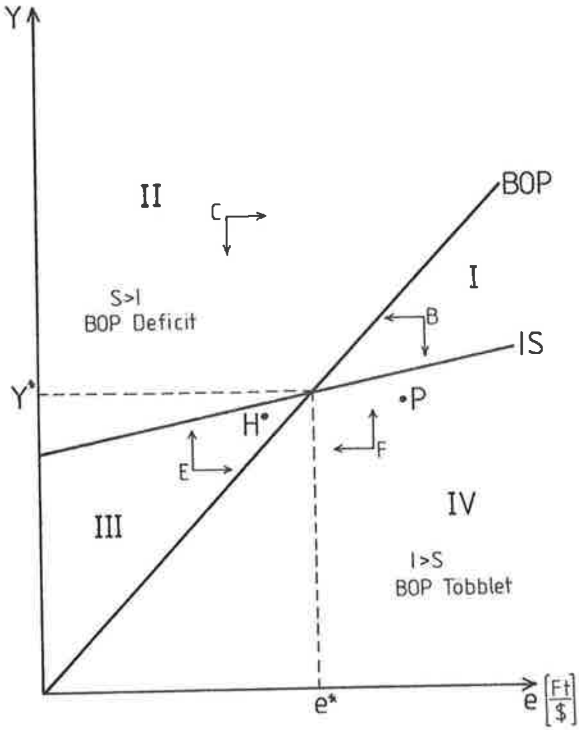
7. LIPTON, D.–SACHS, J. (1990a): Creating a Market Economy in Eastern Europe: The Case of Poland, Brokings Papers on Economic Activity, 1990. 1. pp. 75–147.

8. LIPTON, D.–SACHS, J. (1990b): Privatization in Eastern Europe: The Case of Poland, Brookings Papers on Economic Activity, 1990. 1. pp. 293–341.

ECONOMIC CONSEQUENCES OF STATE DESERTION

In this paper we use the term state desertion to characterize the changing role of the state when it is abandoning its economic functions traditional in socialist economies. We focus on the macroeconomic framework for the transformation of the formerly socialist economies of Central Europe back into capitalist mixed market economies. We construct a simple model to contrast the situations in Poland and Hungary on the eve of the transformation before the new governments were elected. This model is used to evaluate the policies designed to lead the two countries along the road to the market. The magnitude of the dept service ratio fundamentally influences the chances for stability while foreign direct investment has a profound influence on real appreciation of the domestic currency.

1. ábra: GDP/Árfolyamegyensúly

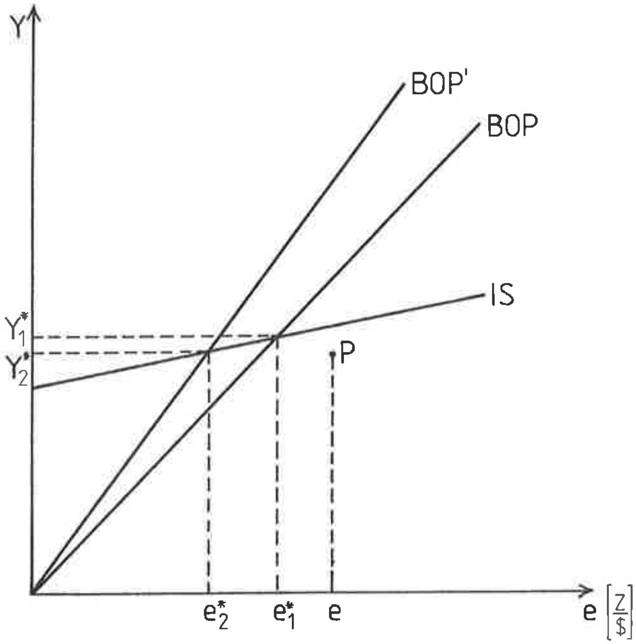


1. táblázat: Komparatív statika

	e Árfolyam (Ft/\$)	Y Folyóáras GDP	Y/e Dollár GDP
$X_{\$}$ Konvertibilis export	–	–	+
$m-f$ (Import–Külf. Ber.)/GDP	+	+	–
C_0, I_0, G_0 Autonóm kiadások	+	+	Nincs hatás
$D_{\$}$ Külföldi adósság (\$)	+	+	–
i Adósságszolgálat/Adósság	+	+	–
t_w Béradó kulcsa	–	–	Nincs hatás
w Bér	+	+	Nincs hatás

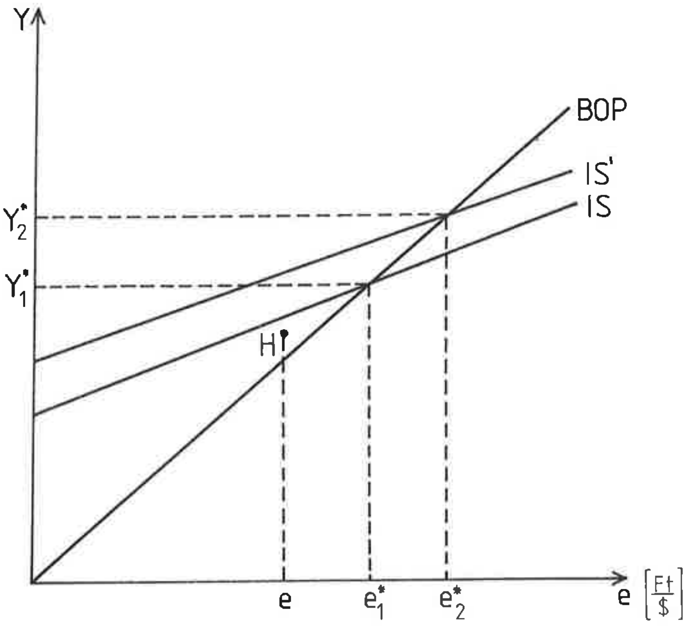
Megjegyzés: A levezetések megtalálhatók Ábel és Bonin (1992a) függelékében.

2. ábra: A lengyel stabilizációs politika egyensúlyrontó hatása



Magyarázat: A stabilizáció előtti egyensúlyi árfolyamot e_1^* jelöli. A stabilizáció keretében a leértékelés utáni tényleges árfolyam e. A zloty leértékelése és a KGST piac összeomlása által kiváltott exportnövekedés hatására a BOP egyenes meredeksége megnövekedett, amit az ábrán a BOP' egyenes jelez. Ezzel együtt az egyensúlyi árfolyam e_2^* pontba kerül, így növelve a tényleges árfolyamtól mért távolságot. Ezt korrigálja majd a költségvetési hiány növekedése miatt felfelé eltolódó IS egyenes. Természetesen további alkalmazkodási folyamatok is beindulnak, amelyek mindkét egyenes további elmozdulásaival járnak. Az ábrán csupán a domináns hatást szemléltetjük.

3. ábra: A magyar stabilizációs politika egyensúlyrontó hatása



Magyarázat: A stabilizáció előtti egyensúlyi árfolyamot e_1^* jelöli. A stabilizáció keretében az árfolyamot relatíve túlértékelve tartják (e), annak érdekében, hogy az inflációs nyomást mérsékeljék. A KGST piac összeomlása a költségvetési hiány növekedését váltja ki, amit az ábrán az IS egyenes felfelé történő eltolódása (IS') jelez. Ezzel együtt az egyensúlyi árfolyam e_2^* pontba kerül, így növelve a tényleges árfolyamtól mért távolságot. Ezt korrigálja majd a leértékelés, ami azt jelenti, hogy az e árfolyam jobbra mozdul el. Természetesen további alkalmazkodási folyamatok is lezajlanak, melyek mindkét egyenes további elmozdulásaival járnak. Így például a külföldi beruházások növekedése a BOP egyenes meredekségét növelve csökkenti a feszültséget.

AZ ÁTMENET MELYIK MODELLJE A MEGGYŐZŐBB?[1]

TARJÁN TAMÁS
MTA Közgazdaságtudományi Intézete

A címben felvetett kérdésre, hogy a sokkterápia vagy a fokozatos átmenet modellje tűnik inkább megvalósíthatónak, a cikk egy elméleti modell segítségével ad egy lehetséges választ. Ez egy kétszektoros Leontief-modell, amelyet az átmenet két legfontosabb kereszt-kölcsönhatása: I. az állami és magántulajdon, II. a hazai és külgazdaság szerinti felosztás esetén ír fel. Összehasonlítva az átmenet előtti és az utána következő pálya instabilitásának a mértékét, mindkét modell esetén kimutatja, hogy a sokkterápia nem követhető útja az átmenetnek. A modellek közvetve azt is mutatják, hogy az átmenet minden esetben kis szabadságfokú kényszerpályát követve történhet.

Bevezetés

1989 óta a Kelet-Európa jövőjével foglalkozó gazdasági elemzők és gazdaságpolitikusok munkájukhoz az „átmenet gazdaságtanának" létezését igényelnék. Mivel Kelet-Európa sorsa a világpolitika és világgazdaság egyik legfontosabb, vagy talán a legfontosabb kérdése, 1989 óta a világ számos kutatási központjában komoly erők fáradoznak ilyen elmélet kidolgozásán.

Mind az elméleti, mind a gyakorlati megközelítést tekintve az átmenetnek ezidáig két iskolája, modellje alakult ki.

1. A „sokkterápia" hívcinek iskolája, vagy az utóbbi időben divatos kifejezéssel fémjelzett *„ősrobbanás" modellje.*

2. A „gradualizmus" híveinek iskolája, vagy más szóval a *„fokozatos átmenet" modellje.*

A címben feltett kérdés tehát ezek alapján így hangzik: *Az „ősrabbanás" vagy a „fokozatos átmenet" modellje a meggyőzőbb?*

Egy lehetséges választ a kérdésre egy elméleti matematikai-közgazdasági modell segítségével próbálok adni. Erre a célra az input-output technikát alkalmas módszernek tartom, mivel ez mind a tervutasításos, mind a kapitalista makrogazdaság vizsgálatára évtizedek óta hasznos eszköznek bizonyult. Ezeknek a módszereknek fontos közös vonásuk, hogy bizonyos hatékonysági mutatókat és technikai együtthatókat állandónak, vagy közel állandónak tételeznek fel. Ezek a mennyiségek, matematikai konstansok a gazdasági váltás során sem elméletileg, sem gyakorlatilag

[1]Beérkezett: 1992. szeptember 15. A szerző köszönetet mond Kovács János tudományos osztályvezetőnek és osztályának a kutatáshoz nyújtott hasznos tanácsokért, segítségért.

nem állandók, azonban az induló és a kívánt végállapotban konstansnak tekinthetők. Ezért vizsgáztak jól mind a szocialista, mind a kapitalista makrogazdaság növekedési modelljeinek megépítésekor.

A 80-as évek közepén sikerrel próbálkoztam Bródy András [1] nyomdokain a szocialista gazdaság ciklikus növekedésének leírására a dinamikus Leontief-modell segítségével [2]. Ezen kutatás legfontosabb eredménye abban foglalható össze, hogy a beruházások megvalósítási ideje alatt technikai és szervezési okok miatt elfekvő, lekötött tőke szükségképpen ciklust visz a termelés növekedésébe, függetlenül attól, hogy kapitalista vagy szocialista gazdaságról van szó. Azonban a szocialista gazdaságokban az állami szektor fölénye miatt az ilyen beruházások lényegesen nagyobb súlyt kaptak, ráadásul a tulajdonosi érdektelenség miatt a kivitelezők nem voltak érdekeltté téve a műszakilag lehetséges, optimális szervezettségben történő kivitelezésben. Így a nagy beruházások átlagban a fejlett tőkés gazdaságokéhoz képest legalább kétszeres kivitelezési időigénye több mint négyszer olyan erős ciklustgerjesztő tényezőként jelentkezett. Az input-output technikák tehát alkalmasak „szabályos szabálytalanságok" leírására is, azonban a gazdasági rendszerváltás (divatos szóval: „ősrobbanás") teljes leírására nem.

Arra teszek kísérletet, hogy összehasonlítsam a rendszerváltás előtt fennálló Leontief-pálya és a rendszerváltás utáni pálya legfontosabb jellemzőit és paramétereit. Az átmenet idejére modellünk nem alkalmas a makrogazdaság mozgásának leírására. Ezt talán legjobban egy egyszerű mechanikai hasonlattal élve lehetne érzékeltetni. Amikor egy biliárdasztalon egy biliárdgolyó ütközik egy másikkal, akkor azt előre tudom, hogy az ütközés előtt és után – bizonyos közelítéssel – egyenes vonalú egyenletes mozgást fog végezni, még a mozgások sebességét és irányát is viszonylag könnyen meg tudom határozni. Azonban azt szinte már lehetetlen megmondani, hogy ütközés közben a tömegközéppont pontosan milyen pályát követ. A játék szempontjából ez persze érdektelen. Ezzel a kérdéssel közvetlenül én sem foglalkozom, mivel – mint már említettem – ezek az input-output technikák erre nem alkalmasak. Hasonlatunknál maradva, hallgatólagosan feltételeztük azt, ami egy biliárdgolyó esetén evidencia, hogy a golyó ütközés során nem törik apró darabokra. A gazdaság esetében, ahol nem atomok és molekulák a mikroszintű szereplők, hanem emberek, ez a kérdés is elsőrendű fontosságú. Nem felejtkezve el tehát erről a nagyon fontos kérdésről sem, modellünk közvetlenül csak az átmenetet közvetlenül megelőző és az azt követő szakaszt vizsgálja.

Az átmenet modelljének verbális leírása

A piacgazdaságba történő átmenet során az állami tulajdon elsődlegességét és dominanciáját a magántulajdoné váltja fel. Ez belátható időn (5–10 éven) belül csak külső források bevonásával történhet, mivel a váltás idején a befektetésre fordítható hazai magántőke elenyészően kicsi volt, a technológiai elmaradás szinte minden területen 15–25 éves volt (lásd [3], [4]). Ezért a privatizáció csak külföldi tőke bevonásával, a technikai lemaradás felszámolása pedig technológiai transzferrel valósítható meg, ami fokozott külkereskedelmi nyitást tesz szükségessé a fejlett gazdaságok felé. Ennek fontosságát az ezekben az országokban fennálló adósságállomány csak fokozza.

Modellünket éppen ezért az átmenet két legfontosabb kereszt-kölcsönhatására,

I. az állami és magántulajdon, valamint

II. a hazai és külgazdaság kapcsolatára írtuk fel.

Az előbbit a *privatizáció*, az utóbbit pedig a *külgazdasági nyitás* modelljének nevezzük a továbbiakban.

Mindkét esetben tehát egy kétszektoros, dinamikus Leontief-modellt írunk fel, amely (lásd a 102. oldalon az 1. és 2. tételt) elég általános nem-negativitási feltételek mellett egy egyensúlyi arányt (sajátvektort) szab meg a két szektor között, és egy 1-nél nagyobb növekedési tényezőt (sajátértéket) ad. Ez az egyensúlyi pálya minden esetben instabil, azaz a megoldásnak van egy olyan komponense, amelyet ha érvényesülni hagyunk, ezt az egyensúlyi arányt képes felborítani. Ez esetben felvetődik a kérdés, hogy mi van akkor a modern piacgazdaságokban? Megnyugtathatom az olvasót, hogy ott az állami és magánszektor a gazdasági teljesítményt tekintve egyenrangú, sőt olyan mértékben egymásba integrálódtak, olyan kifinomult együttműködés alakult ki közöttük, hogy elvileg sem lehet megmondani, hogy egy gazdasági egység hány százalékban állami, vagy pedig magán. Hiába különböztetek meg két szektort, valójában egyszektoros modellel van dolgunk. Ugyanez a helyzet a bel- és külpiaci megkülönböztetéssel, ha a belpiac versenyképes a külpiaccal. Egyébként többek között ez az egyik elengedhetetlen feltétele a konvertibilis nemzeti valuta létezésének.

Azt várnánk tehát, hogy az átmeneti operáció után rögtön csökken az instabilitás mértéke, azaz onnan már sima és egyenes út vezet a stabil, dinamikusan gyarapodó piacgazdaság felé.

I. Privatizációs modellünk kedvezőtlenebb képet tár elénk. Eredményünket az alábbi két esetet megkülönböztetve fogalmazzuk meg:

I/a. Ha az állami szektor egy átlagos hatékonyságú részét úgy privatizáljuk, hogy az átmenet során előbb megszüntetjük a privatizálandó rész szerves kapcsolatát a fennmaradó résszel, akkor a stabilitás nő még akkor is, ha a privatizálandó rész termelői felhasználása változatlan marad. (Burkoltan persze ebben is benne van egy hatékonyságnövelés, hiszen azzal a feltételezéssel, hogy az inputját át tudja irányítani a hatékonyabb magánszektorba „cserearányromlás" nélkül, akkor ez maga már egy indirekt úton történő hatékonyságnövelés.)

I/b. Ha viszont az állami szektor egy átlagos hatékonyságú részét úgy privatizáljuk, hogy az átmenet során a hatékonyságát nem növeljük, és input-output kapcsolatai a régiek maradnak, akkor a *stabilitásban* határozott *romlás* mutatkozik.

Ebből pedig egyenesen következik, hogy egycsapásra privatizálni csak a gazdaság erős instabillá válása árán lehetséges. Más szóval, a gazdasági visszaesés fokozódik, hacsak valami külső segítséget nem kap a gazdaság. Állításunk helyességét legjobban a volt NDK példája igazolja, amely a „gazdag testvér" miatt a legjobb helyzetben van, és ott sem lehetett a gazdaságot egyetlen operációval még két év alatt sem privatizálni, holott ehhez a maximális külső segítség rendelkezésre állt. A magyar privatizációs tapasztalatok is fényesen igazolják ugyanezt.

A privatizáció ugyan mágikus kulcsszóként csengett és cseng még ma is, a gazdasági terápiák, receptek megfogalmazásánál azonban egy illúzióval, úgy látszik, végleg szegényebbek lettünk, és bátran kimondhatjuk, hogy a privatizáció nem csodaszer a volt szocialista országok problémáinak orvoslására.

II. Külgazdasági modellünk tanulsága pedig az, hogy a külkereskedelmi nyitás is rendkívüli mértékben destabilizálja a gazdaságot még abban az ideális esetben is, amikor azt tesszük fel, hogy a nyitás közben a gazdaság növekedése nem esik vissza.

Az alapkérdésre tehát, hogy az átmenetnek melyik a meggyőzőbb modellje: *ősrobbanás* vagy *gradualizmus,* csak félig tudunk válaszolni. Matematikai modellünk azt bizonyítja, hogy nem lehet meggyőző az a modell, amelyik a piacgazdaságba történő átmenetet egycsapásra vagy néhány éven belül megvalósíthatónak tartja. *Az ősrobbanás modellje nem valósítható meg!* Modellünk azt is megmutatja, hogy az átmenet szükségképpen instabil pályán történik minden esetben, azaz minden gazdaság hosszú évekig csak nagyon keskeny, kis szabadságfokú kényszerpályán haladhat (ha egyáltalán haladhat). Ebből következik, hogy a volt szocialista országok által az ezredfordulóig bejárható út mélyen gyökerezik a Kelet-Európán 1989-ben végigsöprő politikai változások idején tapasztalható gazdasági és társadalmi szituációban. Matematikai nyelven megfogalmazva, a kezdeti feltételek ha nem is egyértelműen, de nagyban meghatározzák az útfüggvényt.

Mivel a kezdeti feltételek sokban különböztek egymástól 1989-ben az egyes volt szocialista országokban, ebből következően nagyon sok sajátosságban egymástól eltérő kell hogy legyen az átmenet. A kérdés másik felére tehát a válasz minden bizonnyal az, hogy minden országra más a legmeggyőzőbb modell.

Az átmenet modelljének matematikai leírása

Kétszektoros dinamikus Leontief-modell

Bontsuk fel a gazdaságot két szektorra, ágazatra. Tételezzük fel, hogy az $\underline{y}(t)$ termelési vektor $\underline{z}(t)$ termelői felhasználásra, $\underline{b}(t)$ beruházásra és $\underline{f}(t)$ lakossági fogyasztásra fordítódik

$$\underline{z}(t) + \underline{b}(t) + \underline{f}(t) = \underline{y}(t), \tag{i}$$

ahol $\underline{z}(t), \underline{b}(t), \underline{f}(t), \underline{y}(t) \in \mathbb{R}^2$ 2 dimenziós vektorok.

Tegyük fel továbbá, hogy a $\underline{z}(t)$ termelői felhasználás az A 2×2-es mátrixon keresztül, az $\underline{f}(t)$ lakossági fogyasztás pedig az F 2×2-es mátrixon keresztül függ lineárisan az $\underline{y}(t)$ termeléstől, azaz

$$\underline{z}(t) = A\underline{y}(t),$$

$$\underline{f}(t) = F\underline{y}(t);$$

míg a $\underline{b}(t)$ beruházás a B 2×2-es tőkelekötési mátrix segítségével az alábbi módon függ az $\underline{y}(t)$ termelési vektortól:

$$\underline{b}(t) = B\big[\underline{y}(t+1) - \underline{y}(t)\big].$$

Ekkor (i) alapján kapjuk a kétszektoros dinamikus Leontief-modellt, amelynek az egyenlete az

$$A\underline{y}(t) + F\underline{y}(t) + B\left[\underline{y}(t+1) - \underline{y}(t)\right] = \underline{y}(t). \tag{ii}$$

Az alábbi

$$D = A + F - 1 \tag{iii}$$

jelöléssel kapjuk a homogén

$$B\big[\underline{y}(t+1) - \underline{y}(t)\big] + D\underline{y}(t) = \underline{0} \tag{ii*}$$

alakot.

A megoldást az $\underline{y}(t) = \lambda^t \underline{y}$ alakban keresve, a

$$\big[B(\lambda - 1) + D\big]\underline{y} = \underline{0}$$

sajátérték feladatot kapjuk. A karakterisztikus egyenlet a

$$\det\big[(\lambda - 1)B + D\big] = 0 \tag{iv}$$

másodfokú polinom, amelynek λ_1 és λ_2 gyökei (sajátértékei) és a hozzájuk tartozó $\underline{x}_1$ és $\underline{x}_2$ sajátvektorok segítségével az (ii) egyenlet általános megoldását az

$$\underline{y}(t) = \alpha_1 \lambda_1^t \underline{x}_1 + \alpha_2 \lambda_2^t \underline{x}_2 \tag{v}$$

egyenlet adja, ahol α_1, α_2 tetszőleges valós számok.

Az új $\mu = (\lambda - 1)$ változóra a

$$b = \det B, \quad d = \det D$$

$$\beta = \det \begin{pmatrix} b_{11} & d_{12} \\ b_{21} & d_{22} \end{pmatrix}, \quad \delta = \det \begin{pmatrix} d_{11} & d_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \tag{vi}$$

jelölések segítségével a (iv) karakterisztikus egyenlet az alábbi egyszerű másodfokú egyenlet a $\mu = \lambda - 1$ változóra:

$$\mu^2 b + \mu(\beta + \delta) + d = 0 \tag{vii}$$

Ha speciálisan $b = \det B = 0$, akkor $\mu = -\frac{d}{\beta+\delta}$ egyszerűen számolható. Ha $b = \det B \neq 0$, akkor a másodfokú megoldóképlettel számolva könnyen kapjuk a

$$\mu_{1,2} = \frac{-(\beta+\delta) \pm \sqrt{(\beta+\delta)^2 - 4bd}}{2b} \tag{viii}$$

két sajátértéket.

Vezessük be (vi) mintájára a következő két jelölést:

$$\beta^* = \det\begin{pmatrix} b_{12} & d_{12} \\ b_{22} & d_{22} \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \delta^* = \det\begin{pmatrix} d_{11} & b_{11} \\ d_{21} & b_{21} \end{pmatrix}, \tag{ix}$$

ekkor könnyen belátható, hogy a (viii) másodfokú megoldóképlet a következő módon is megadható:

$$\mu_{1,2} = \frac{-(\beta+\delta) \pm \sqrt{(\beta-\delta)^2 - 4\beta^*\delta_*}}{2b} \tag{x}$$

Ebből az alakból nyilvánvaló, hogy a gyök alatti mennyiség (diszkrimináns) mindig pozitív, ha kikötjük azt az igen természetes feltételt, hogy

$$\begin{gathered} A > 0 \\ B > 0, \quad \det B = b > 0 \\ F \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{2}(a_{ij} + f_{ij}) < 1 \quad j = 1,2 \end{gathered} \tag{xi}$$

Ez az utóbbi feltétel szavakban kifejezve azt jelenti, hogy mindkét ágazatban kisebb 1-nél az egységnyi termékre eső termelői és lakossági fogyasztás. A (iii) jelölés alapján pedig ez a feltétel azt is jelenti, hogy $d_{ii} = a_{ii} + f_{ii} - 1 < 0$ és $b_{ii} > 0$ $i = 1,2$-re. Ekkor ugyanis β^* és δ_* közül mindkettő negatív, így szorzatuk pozitív, tehát a diszkrimináns is pozitív. Így két valós gyöke van az egyenletnek, mivel a (viii) képletből nyilvánvaló, hogy a számláló pozitív, mert

$$-(\beta+\delta) > 0 \quad \text{és} \quad d > 0$$

Az utóbbi azért, mert (xi) utolsó feltételéből $-d_{11} > d_{21}$ és $-d_{22} > d_{12}$. Így a főátlóban levők szorzata nagyobb, mint a mellékátlóban levőké. Ekkor tehát mindkét gyök pozitív, azaz λ_1 és λ_2 növekedési ütemek 1-nél nagyobbak és $\lambda_1 > \lambda_2$.

Ezek alapján kimondhatjuk és bizonyítottnak tekintjük az alábbi tételt.

1. Tétel: A dinamikus Leontief-modell (ii) alapegyenletének általános megoldását szolgáló (v) képletben található $\lambda_1 > \lambda_2$ növekedési ütemek valósak és 1-nél nagyobbak, ha feltesszük a (xi) feltételt az A, B és F mátrixokra.

Kimondjuk a következő tételt:

2. Tétel: A dinamikus Leontief-modell (ii) alapegyenletének általános megoldását szolgáló (v) képletben található $\underline{x}_1$ és $\underline{x}_2$ sajátvektorok közül $\underline{x}_1$ koordinátái ellentétes, míg $\underline{x}_2$ koordinátái egyező előjelűek, ha feltesszük a (xi) feltételt az A, B és F mátrixokra.

Bizonyítás: Az (iv) képletben szereplő

$$g(\lambda) = \det\big[(\lambda - 1)B + D\big]$$

másodfokú polinom gyökereiről már tudjuk az 1. Tételből, hogy $\lambda_1 > \lambda_2 > 1$. A (xi) feltétel $\det B = b > 0$ egyenlőtlensége miatt $g(\lambda)$ alulról konvex parabola. Mivel $g(\lambda)$ az $(1 - \frac{d_{11}}{b_{11}})$ helyen negatív, ha feltesszük, hogy $d_{12} = b_{12} = 0$ vagy $d_{21} = b_{21} = 0$ nem áll fenn, ez pedig a (xi)-beli $B > 0$-ból következik, tehát

$$g(1 - \frac{d_{11}}{b_{11}}) = -(d_{12} - d_{11} \cdot \frac{b_{12}}{b_{11}})(d_{21} - d_{11} \cdot \frac{b_{21}}{b_{11}}) < 0 \tag{xii}$$

és $g(\lambda)$ λ_1, λ_2 zérushelyeire fennáll az

$$1 < \lambda_2 < 1 - \frac{d_{11}}{b_{11}} < \lambda_1 \tag{xiii}$$

egyenlőtlenség. A $h_{ij}(\lambda) = d_{ij} + (\lambda - 1)b_{ij}$ kifejezés szigorúan monoton nő a λ változóban, ezért igaz az alábbi két egyenlőtlenségsor

$$d_{11} + (\lambda_2 - 1)b_{11} < d_{11} - \frac{d_{11}}{b_{11}} \cdot b_{11} = 0 < d_{11} + (\lambda_1 - 1)b_{11}$$

$$0 < d_{12} + (\lambda - 1)b_{12} < d_{12} + (\lambda_1 - 1)b_{12},$$

azaz

$$h_{11}(\lambda_2) < 0 < h_{11}(\lambda_1) \quad \text{és} \quad 0 < h_{12}(\lambda_2) < h_{12}(\lambda_1)$$

tehát $\underline{x}_1$ koordinátái ellentétes, míg $\underline{x}_2$ koordinátái egyező előjelűek. Ezzel a 2. Tételt beláttuk.

3. Tétel: Annak szükséges feltétele, hogy a dinamikus Leontief-modell (ii) alapegyenletének a (xi) feltételt és az $\underline{y}(0)$ kezdeti feltételt kielégítő speciális megoldása minden t időpontban működőképes tartományban haladjon az, hogy az A, F mátrixra és $\underline{y}(0)$ vektorra az alábbi feltétel teljesüljön:

$$\frac{a_{12} + f_{12}}{1 - a_{11} - f_{11}} < \frac{y_1(0)}{y_2(0)} < \frac{1 - a_{22} - f_{22}}{a_{21} + f_{21}} \tag{xiv}$$

Ha viszont a (xiv) feltétel teljesül az A, F mátrixra és az $\underline{y}(0)$ vektorra, akkor mindig található olyan $B > 0$ és $\det B > 0$, hogy az (ii) alapegyenlet $\underline{y}(0)$-on átmenő speciális megoldása minden t időpontban működőképes tartományban haladjon.

Bizonyítás: Az (ii) alapegyenlet $\underline{y}(0)$-on átmenő speciális megoldását állítsuk elő az (v) általános megoldóképlet segítségével. Tegyük fel, hogy az $\alpha_1 \neq 0$, ekkor a 2. Tétel alapján a λ_1 domináns sajátértékhez ($\lambda_1 > \lambda_2$) tartozó sajátvektor koordinátái ellentétes előjelűek, így a rendszer valamelyik t-re egyik koordinátájában negatívvá válik, működőképtelen lesz. Ezért szükségképpen $\alpha_1 = 0$. $\underline{y}(0)$-ra alkalmazva az (v) megoldóképletet:

$$\underline{y}(0) = \alpha_2 \lambda_2^0 \underline{x}_2,$$

tehát $\underline{y}(0)$ a λ_2-höz tartozó sajátvektor, ami (iv) alapján azt jelenti, hogy

$$\begin{array}{l} [d_{11} + (\lambda_2 - 1)b_{11}]y_1(0) + [d_{12} + (\lambda_2 - 1)b_{12}]y_2(0) = 0 \\ [d_{21} + (\lambda_2 - 1)b_{21}]y_1(0) + [d_{22} + (\lambda_2 - 1)d_{22}]y_2(0) = 0. \end{array} \tag{xv}$$

Átrendezéssel:

$$\begin{array}{l} -d_{11}y_1(0) - d_{12}y_2(0) = (\lambda_2 - 1)b_{11}y_1(0) + (\lambda_2 - 1)b_{12}y_2(0) \\ -d_{21}y_1(0) - d_{22}y_2(0) = (\lambda_2 - 1)b_{21}y_1(0) + (\lambda_2 - 1)b_{22}y_2(0). \end{array} \tag{xvi}$$

Mivel a két jobboldalon álló kifejezés pozitív, ezért a baloldalak is pozitívak, így

$$\begin{array}{l} -d_{11}y_1(0) > d_{12}y_2(0) \\ d_{21}y_1(0) > -d_{22}y_2(0) \end{array}, \tag{xvii}$$

amiből pedig pozitív mennyiségekkel való osztással kapjuk a (xiv) feltételt.

$$\frac{-d_{22}}{d_{21}} > \frac{y_1(0)}{y_2(0)} > \frac{d_{12}}{-d_{11}} \tag{xviii}$$

A tétel állításának első részét bebizonyítottuk. A második rész bizonyításához haladjunk visszafelé. Ha a (xiv)-gyel egyenértékű (xviii) feltétel teljesül, akkor pozitív mennyiségekkel való szorzással (xvii) is fennáll. Ebből következően (xvi) baloldalai pozitívak. Ezekhez a pozitív mennyiségekhez, $\underline{y}(0)$-hoz és bármely $\lambda_2 > 1$-hez megadható több B is, amelyre $B > 0$ és $\det B > 0$. Ezzel a 3. tételt bebizonyítottuk.

A 3. tétel megmondja tehát, hogy A-nak és F-nek milyennek kell lenni ahhoz, hogy a dinamikus Leontief-modell működőképes legyen.

Most azt a kérdéskört vizsgáljuk, ha Leontief-modellünk valamely A, B, F mátrixra és $\underline{y}(0)$ vektorra működőképes pályán van, és az A, B, F mátrixokat úgy változtatjuk, hogy az oszlopösszegek nem változnak (ez közgazdaságilag azt jelenti, hogy a két szektor szorosabban integrálódik egymásba, azaz az egyik ágazat több fogyasztási és beruházási jószágot használ fel a másiktól, mint előzőleg, és megfordítva, a másik is többet használ fel az előzőtől), akkor mi történik a működőképességgel és a pálya stabilitásával.

Vezessük be az alábbi egyszerű jelöléseket a mátrixok oszlopösszegeire:

$$\begin{array}{ll} a_{\cdot j} = a_{1j} + a_{2j} & b_{\cdot j} = b_{1j} + b_{2j} \\ f_{\cdot j} = f_{1j} + f_{2j} & d_{\cdot j} = d_{1j} + d_{2j} \end{array} \quad (j = 1, 2) \tag{xix}$$

Továbbá a diszkrimináns:

$$\Delta = (\beta + \delta)^2 - 4bd \tag{xx}$$

és

$$\mu_{1,2} = \lambda_{1,2} - 1 \tag{xxi}$$

0. Lemma: Legyen két kifejezés

$$\nu_1 = \max\left\{\frac{-d_{11}}{b_{11}}, \frac{-d_{22}}{b_{22}}\right\} \quad \text{és} \quad \nu_2 = \min\left\{\frac{-d_{11}}{b_{11}}, \frac{-d_{22}}{b_{22}}\right\}. \tag{xxii}$$

Ekkor a (viii)-ban a definiált $\mu_1 \geq \mu_2$-re fennáll az alábbi egyenlőtlenség:

$$\mu_2 \leq \nu_2 \leq \nu_1 \leq \mu_1; \tag{xxiii}$$

és a két szélen egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$d_{12} = b_{12} = 0 \quad \text{vagy} \quad d_{21} = b_{21} = 0 \tag{xxiv}$$

Bizonyítás: Induljunk ki az alábbi egyszerű egyenlőtlenségből:

$$g(\mu) = (d_{11} + \mu b_{11})(d_{22} + \mu b_{22}) - (d_{21} + \mu b_{21})(d_{12} + \mu b_{12}) \leq$$
$$\leq (d_{11} + \mu b_{11})(d_{22} + \mu b_{22}) = l(\mu).$$

Mivel $l(\mu)$ másodfokú parabola, amelyben μ^2 együtthatója pozitív,

$$0 = g(\mu_1) \leq l(\mu_1) \qquad 0 = g(\mu_2) \leq l(\mu_2)$$

nyilvánvalóan teljesül. Mivel ν_1 és ν_2; $l(\mu)$ gyökei, $\nu_1 \leq \mu_1$ és $\nu_2 \geq \mu_2$; és egyenlőség akkor és csak akkor, ha (xxiv) teljesül. Ezzel a lemmát bebizonyítottuk.

1. Lemma: A (xix), (xx) és (xxi) jelölések segítségével az alábbiak teljesülnek:

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial_{a_{11}|a_{.1}=konst}} = -\frac{b_{.2}}{\sqrt{\Delta}} \cdot (\lambda_1 - 1 + \frac{d_{.2}}{b_{.2}})$$

$$\frac{\partial \lambda_2}{\partial_{a_{11}|a_{.1}=konst}} = +\frac{b_{.2}}{\sqrt{\Delta}} \cdot (\lambda_2 - 1 + \frac{d_{.2}}{b_{.2}})$$

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial_{b_{11}|b_{.1}=konst}} = -\frac{b_{.2}}{\sqrt{\Delta}} \cdot (\lambda_1 - 1)(\lambda_1 - 1 + \frac{d_{.2}}{b_{.2}})$$

$$\frac{\partial \lambda_2}{\partial_{b_{11}|b_{.1}=konst}} = +\frac{b_{.2}}{\sqrt{\Delta}} \cdot (\lambda_2 - 1)(\lambda_2 - 1 + \frac{d_{.2}}{b_{.2}})$$

Differenciáljuk parciálisan az alábbi, (vi)-ban definiált kifejezéseket:

$$\frac{\partial(\beta + \delta)}{\partial_{a_{11}|a_{.1}=konst}} = b_{.2} \qquad \frac{\partial(\beta + \delta)}{\partial_{b_{11}|b_{.1}=konst}} = d_{.2}$$

$$\frac{\partial d}{\partial_{a_{11}|a_{.1}=konst}} = d_{.2} \qquad \frac{\partial b}{\partial_{b_{11}|b_{.1}=konst}} = b_{.2}$$

A (viii)-ban található képletet deriválva:

$$\frac{\partial \mu_{1,2}}{\partial_{a_{11}|a_{.1}=konst}} = -\frac{b_{.2}}{2b} \pm \frac{2(\beta+\delta)b_{.2} - 4bd_{.2}}{4b\sqrt{\Delta}} = \frac{b_{.2}}{\sqrt{\Delta}}\left(\frac{\pm(\beta+\delta)-\sqrt{\Delta}}{2b} \mp \frac{d_{.2}}{b_{.2}}\right) =$$

$$= \mp\frac{b_{.2}}{\sqrt{\Delta}}(\mu_{1,2} + \frac{d_{.2}}{b_{.2}})$$

$$\frac{\partial \mu_{1,2}}{\partial_{b_{11}|b_{.1}=konst}} \cdot 4b^2 = \left[-d_{.2} \pm \frac{2(\beta+\delta)d_{.2} - 4db_{.2}}{2\sqrt{\Delta}}\right] 2b - \left[-(\beta+\delta) \pm \sqrt{\Delta}\right] 2b_{.2} =$$

$$= \frac{4b^2 \cdot b_{.2}}{\sqrt{\Delta}} \left[\frac{\pm(\beta+\delta)-\sqrt{\Delta}}{2b}\frac{d_{.2}}{b_{.2}} \mp \frac{d}{b} + \frac{(\beta+\delta)\sqrt{\Delta} \mp (\beta+\delta)^2 \pm 4bd}{2b^2}\right] =$$

$$= \frac{2b \cdot b_{.2}}{\sqrt{\Delta}}\left[\pm(\beta+\delta) - \sqrt{\Delta}\right]\left[\frac{d_{.2}}{b_{.2}} - \frac{(\beta+\delta)}{b} \pm \frac{2d\left[\pm(\beta+\delta)+\Delta\right]}{\underbrace{(\beta+\delta)^2 - \Delta}_{4bd}}\right] =$$

$$= \frac{2b \cdot b_{.2}}{\sqrt{\Delta}}\left[\pm(\beta+\delta) - \sqrt{\Delta}\right]\left[\frac{d_{.2}}{b_{.2}} - \frac{(\beta+\delta)}{b} + \frac{(\beta+\delta) \pm \sqrt{\Delta}}{2b}\right] =$$

$$= \frac{4b^2 \cdot b_{.2}}{\sqrt{\Delta}}(\mp\mu_{1,2})\left[\frac{d_{.2}}{b_{.2}} + \mu_{1,2}\right]$$

$$\frac{\partial \mu_{1,2}}{\partial_{b_{11}|b_{.1}=konst}} \mp \frac{b_{.2}}{\sqrt{\Delta}} \cdot \mu_{1,2} \cdot \left(\mu_{1,2} + \frac{d_{.2}}{b_{.2}}\right).$$

Ezzel az 1. Lemmát bebizonyítottuk.

Megjegyzés: Eddigiekben az A, B, F és D mátrixok oszlopösszegére a matematikában szokásos (xix) jelölést használtuk. Ha most a szokásostól eltérő, alábbi (xix*) jelölést vezetjük be egy γ valós konstans segítségével:

$$\begin{array}{ll} a^*_{.j} = \gamma a_{1j} + a_{2j} & b^*_{.j} = \gamma b_{1j} + b_{2j} \\ f^*_{.j} = \gamma f_{1j} + f_{2j} & d^*_{.j} = \gamma d_{1j} + d_{2j} \end{array} \qquad \text{(xix)}$$

akkor természetesen $\gamma = 1$ esetén a (xix) definíciót visszakapjuk. Könnyű belátni, hogy a $*$-gal jelzett γ-val „súlyozott" oszlopösszegre is fennáll az 1. Lemma mind a négy állítása, továbbá azt is, hogy

$$\frac{\partial \lambda_{1,2}}{\partial a_{21}} = \pm\frac{b_{12}}{\sqrt{\Delta}}\left(\lambda_{1,2} - 1 + \frac{d_{12}}{b_{12}}\right),$$

és

$$\frac{\partial \lambda_{1,2}}{\partial b_{21}} = \pm \frac{b_{12}}{\sqrt{\Delta}} (\lambda_{1,2} - 1) \left(\lambda_{1,2} - 1 + \frac{d_{12}}{b_{12}} \right).$$

2. Lemma: A dinamikus Leontief-modell (ii) alapegyenletéhez tartozó megoldás nagyobbik sajátértéke λ_1 ($\lambda_1 > \lambda_2 > 1$) csökken az a_{jj}, b_{jj} ($j = 1, 2$) változóban, míg nő az a_{j3-j}, b_{j3-j} ($j = 1, 2$) változóban a (xi) feltétel által megszabott tartományban.

Bizonyítás: az 1. Lemma megjegyzése alapján

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial a_{11}} = \frac{\partial \lambda_1}{\partial a_{11}|a^*_{.1} = konst} = -\frac{b_{22}}{\sqrt{\Delta}} \left(\lambda_1 - 1 + \frac{d_{22}}{b_{22}} \right),$$

ahol $a^*_{.1} = \gamma a_{11} + a_{21}$ és $\gamma = 0$. A (x)-ben definiált $\mu_1 = \lambda_1 - 1$-re és a (xxii)-ben definiált ν_1-re a (x$^{\mathrm{i}}$) feltételbeli $B > 0$ miatt az alábbi egyenlőtlenséget írhatjuk fel a 0. Lemma alapján:

$$\frac{-d_{22}}{b_{22}} \leq \nu_1 < \mu_1 = \lambda_1 - 1.$$

Ekkor pedig $\lambda_1 - 1 + \frac{d_{22}}{b_{22}} > 0$, azaz $\frac{\partial \lambda_1}{\partial a_{11}} < 0$, tehát λ_1 az a_{11} változóban szigorúan csökken. A $\frac{\partial \lambda_1}{\partial b_{11}} < 0$ reláció hasonlóképpen bizonyítható.

Az 1. Lemma megjegyzése alapján

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial a_{21}} = +\frac{b_{12}}{\sqrt{\Delta}} \left(\lambda_1 - 1 + \frac{d_{12}}{b_{12}} \right) > 0,$$

tehát λ_1 az a_{21} változóban nő. Hasonlóan

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial b_{21}} = +\frac{b_{12}}{\sqrt{\Delta}} (\lambda_1 - 1) \left(\lambda_1 - 1 + \frac{d_{12}}{b_{12}} \right) > 0$$

miatt b_{21}-ben is nő. A többi eset az 1. és 2. szektor felcserélésével visszavezethető az előbbiekre.

I. Privatizáció

A privatizáció során egy vagy több termelő egység, esetleg egy egész ágazat, amely az állami szférába tartozott, átkerül a magánszektorba, vagyis az 1. szektorból a 2. szektorba.

A privatizálandó egység termelése (outputja) az 1. szektorból a 2.-ba kerül, míg a felhasználása (inputja) pontosan akkor kerül az 1-ből a 2. szektorba, ha az a privatizálandó egység(ek)ből származott.

Ebből következően a privatizációs modellünk, amely a privatizáció előtt és után két (állami és magán-) szektorral dolgozik, az átmenet során három szektort kell hogy megkülönböztessen.

A privatizáció előtt az állami szektor két részre oszlik:

állami szektor, amelyet nem privatizálunk + a privatizálandó állami szektor.

A privatizáció után pedig a magánszektor áll két részből:

a privatizált állami szektorból + a privatizáció előtti magánszektorból.

1. Definíció: Azt mondjuk, hogy az állami szektor egy *átlagos részét* privatizáljuk, ha

– a privatizálandó állami szektor y_p kibocsátásának megfelelő arányos részt használ fel a magánszektorból, tehát míg az egész állami szektor $a_{21} \cdot y_1$ részt használ fel, addig a privatizálandó rész $a_{21} \cdot y_p$ részt;

– valamint a magánszektor a privatizálandó állami szektor y_p kibocsátásával arányos részt használ fel az állami szektorból, tehát míg a magánszektor az egész állami szektorból $a_{12} \cdot y_2$ részt használ fel, addig a privatizálandó részből $a_{12}\frac{y_p}{y_1}y_2$ részt.

A nem privatizálandó és a privatizálandó rész viszonyával kapcsolatban az alábbi két szélsőséges esetet fogom vizsgálni:

1.a Definíció: *a két rész között nincs input-output kapcsolat,* függetlenül működnek egymástól, azaz a nem privatizálandó rész csak a nem privatizálandó résztől, míg a privatizálandó rész pedig csak a privatizálandó résztől kap inputot az $y_1 - y_p$ és y_p outputok arányában. Ekkor a már említett 3 szektort figyelembe véve, az ágazati kapcsolatok mérlege a következő:

$$\begin{pmatrix} a_{11}y_1(1-\frac{y_p}{y_1}) & 0 & a_{12}y_2(1-\frac{y_p}{y_1}) \\ 0 & a_{11}y_1\frac{y_p}{y_1} & a_{12}y_2\frac{y_p}{y_1} \\ \underbrace{a_{21}(y_1-y_p)}_{y_1-y_p} & \underbrace{a_{21}y_p}_{y_p} & \underbrace{a_{22}y_2}_{y_2} \end{pmatrix}$$

A privatizáció után az

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

2×2-es mátrix pedig a következő:

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & (1-\frac{y_p}{y_1})\frac{a_{12}y_{12}}{y_p+y_2} \\ a_{21} & \frac{(a_{11}+a_{21}+a_{12}\frac{y_2}{y_1})y_p+a_{22}y_2}{y_p+y_2} \end{pmatrix}$$

1.b Definíció: *a két rész között mindkét irányban szoros kapcsolat van,* azaz a nem privatizálandó rész az $(y_1 - y_p)$ és y_p arányának megfelelően felosztva kap $a_{11}y_1(1-\frac{y_p}{y_1})$-ből, míg a privatizálandó rész ugyanilyen arányban $a_{11}y_1\frac{y_p}{y_1}$-ből. A 3 szektort figyelembe véve az ágazati kapcsolatok mérlege az alábbi:

$$\begin{pmatrix} a_{11}y_1(1-\frac{y_p}{y_1})^2 & a_{11}y_1(1-\frac{y_p}{y_1}) & a_{12}y_2(1-\frac{y_p}{y_1}) \\ a_{11}y_p(1-\frac{y_p}{y_1}) & a_{11}y_p\frac{y_p}{y_1} & a_{12}y_2\frac{y_p}{y_1} \\ \underbrace{a_{21}(y_1-y_p)}_{y_1-y_p} & \underbrace{a_{21}y_p}_{y_p} & \underbrace{a_{22}y_2}_{y_2} \end{pmatrix}$$

Ekkor a privatizáció után az

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

2×2-es mátrix pedig a következő:

$$A'' = \begin{pmatrix} a_{11}(1-\frac{y_p}{y_1}) & \frac{a_{11}y_p+a_{12}y_2}{y_p+y_2}(1-\frac{y_p}{y_1}) \\ a_{11}\frac{y_p}{y_1}+a_{21} & \frac{(\frac{y_p}{y_1}a_{11}+a_{21})y_p+(\frac{y_p}{y_1}a_{12}+a_{22})y_2}{y_p+y_2} \end{pmatrix}$$

2. Definíció: Azt mondjuk, hogy az *állami szektor termelői felhasználása (inputja) kevésbé hatékony a magánszektorénál,* ha $a_{11}+a_{21} > a_{12}+a_{22}$, azaz az egységnyi termékben az állami szektor felhasználása több, mint a magánszektoré.

Megjegyzés: Mivel a_{21} elhanyagolhatóan kicsi a_{12}-höz képest, ezért $a_{11} > a_{22}$ is következik a definícióból.

Ekkor a privatizációval kapcsolatban az alábbi fontos tételt mondhatjuk ki:

4. Tétel: Az előbbi definíciók alapján, ha az állami szektor termelői felhasználása kevésbé hatékony a magánszektorénál, és az állami szektor egy átlagos részét úgy privatizáljuk, hogy

a) az állami szektor nem privatizálandó és privatizálandó része között nincs input-output kapcsolat (1.a Definíció), akkor a dinamikus Leontief-modell (ii) alapegyenletéhez tartozó λ_1 ($\lambda_1 > \lambda_2 > 1$) sajátérték csökken, azaz a Leontief-pálya stabilitása nő;

b) a nem privatizálandó és privatizálandó rész között mindkét irányban szoros kapcsolat van (1.b Definíció), akkor a Leontief-pálya stabilitása csökken.

Bizonyítás: Képezzük az alábbi mátrix differenciákat:

a)

$$A' - A = \frac{y_p}{y_p+y_2}\begin{pmatrix} 0 & -a_{12}(1+\frac{y_2}{y_1}) \\ 0 & a_{11}+a_{21}+a_{12}\frac{y_2}{y_1}-a_{22} \end{pmatrix}$$

b)

$$A'' - A = \frac{y_p}{y_p+y_2}\begin{pmatrix} -a_{11}\frac{y_p}{y_1} & a_{11}(1-\frac{y_p}{y_1})-a_{12}(1+\frac{y_2}{y_1}) \\ a_{11}\frac{y_p}{y_1} & a_{11}\frac{y_p}{y_1}+a_{21}+a_{12}\frac{y_2}{y_1}-a_{22} \end{pmatrix}$$

Könnyen látható, hogy előjel szempontjából a változás a következő alakú:

a)

$$A - A' : \begin{pmatrix} 0 & - \\ 0 & + \end{pmatrix},$$

mivel feltettük, hogy $a_{11} + a_{21} > a_{12} + a_{22}$,

$$a_{11} + a_{21} + a_{12}\frac{y_2}{y_1} - a_{22} > 0$$

még inkább teljesül.

A 2. Lemma alapján λ_1 értéke csökken a változás után: hiszen a_{11}, a_{21} változatlan, a_{12} csökken, ekkor λ_1 csökken, a_{22} nő, és ekkor λ_1 tovább csökken. Ezzel beláttuk a tétel a) állítását.

Nem ilyen evidens, hogy előjelét tekintve a b) esetben a változás a következő alakú:
b)

$$A'' - A : \begin{pmatrix} - & + \\ + & - \end{pmatrix}$$

Tételezzük fel az alábbi, elég természetes korlátokat:

$$y_p < \frac{1}{3}\, y_1, \quad y_2 < \frac{1}{3}\, y_1.$$

Mivel a_{21} az átmenet előtt elvileg 0 volt,

$$a_{21} < \frac{1}{12}\, a_{11}$$

sem tekinthető szigorú korlátnak. Végül tegyük fel azt, hogy:

$$a_{22} > \frac{1}{2}a_{11} \quad \text{és} \quad a_{12} < \frac{1}{2}a_{22}.$$

Ekkor könnyen belátható, hogy

$$a_{11}(1 - \frac{y_p}{y_1}) - a_{12}(1 + \frac{y_2}{y_1}) > \frac{2}{3}a_{11} - \frac{4}{3}a_{12} > \frac{2}{3}a_{11} - \frac{2}{3}a_{22} = \frac{2}{3}(a_{11} - a_{22})$$

A 2. Definíció megjegyzése alapján $a_{11} > a_{22}$ miatt ez utóbbi pozitív.

$$a_{11}\frac{y_p}{y_1} + a_{21} + a_{12}\frac{y_2}{y_1} - a_{22} < \frac{1}{3}a_{11} + \frac{1}{12}a_{12} + \frac{1}{6}a_{22} - a_{22} = \frac{5}{6}\,(\frac{1}{2}a_{11} - a_{22}) < 0$$

Ezzel beláttuk, hogy $A'' - A$ előjelét tekintve milyen alakú. A 2. Lemma alapján λ_1 értéke nő a változás után: mert ha a_{11} és a_{12} csökken, akkor λ_1 nő és még tovább nő, ha a_{21} és a_{12} nő. Ezzel a 4. Tételt bebizonyítottuk.

II. Külgazdasági modell

5. Tétel: A dinamikus Leontief-modell (ii) alapegyenletéhez tartozó megoldás nagyobbik sajátértéke λ_1 ($\lambda_1 > \lambda_2 > 1$) nő, míg a kisebbik λ_2 változatlan marad, ha az A és B mátrixok elemeit úgy változtatjuk meg, hogy a két szektor szorosabban integrálódjék egymásba, azaz az egyik ágazat több fogyasztási és beruházási jószágot használ fel a másiktól, mint előzőleg, és megfordítva, a másik is többet használ fel az előzőtől, tehát az A, B mátrixok $a_{.j}$, $b_{.j}$ ($j = 1, 2$) oszlopösszegei állandóak a (xi) feltételben megszabott tartományban, továbbá kielégítik az

$$\left(a_{11} + f_{11} - 1 + (\lambda_2 - 1)\, b_{11}\right) y_1(0) + \left(a_{12} + f_{12} - 1 + (\lambda_2 - 1)\, b_{12}\right) y_2(0) = 0 \quad \text{(xxv)}$$

egyenletet.

Megjegyzés: Az 5. Tétel közgazdaságilag értelmezve azt jelenti, hogy ha a két szektor szorosabban integrálódik egymásba úgy, hogy közben az oszlopösszegek és (xxv) bal oldala nem változik, akkor a megoldás növekedési üteme, λ_2 nem változik, azonban a rendszer stabilitása csökken, mivel λ_1 nő.

Bizonyítás: Vegyük észre, hogy a (xxv) egyenlet nem más, mint (xv) első egyenlete. Adjuk össze (xv) két egyenletét, akkor kapjuk az

$$\left(a_{.1} + f_{11} - 1 + (\lambda_2 - 1)\, b_{.1}\right) y_1(0) + \left(a_{.2} + f_{.2} - 1 + (\lambda_2 - 1)\, b_{.2}\right) y_2(0) = 0 \quad \text{(xxvi)}$$

egyenletet. Nyilvánvaló, hogy (xxv) és (xxvi) ekvivalens (xv) két egyenletével. (xxvi) az oszlopösszegek állandósága miatt teljesül, (xxv) pedig a tétel feltételei miatt marad érvényben. Így (xv) a változtatás után is érvényben van, ami azt jelenti, hogy λ_2, a kisebbik sajátértéke nem változik. λ_1 pedig a 2. lemma alapján nő az A és B mátrix elemeinek változtatása után. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

IRODALOM

1. BRÓDY, A. (1989): Gestation Lags and the Explanation of Investment Cycles in Socialist Economies, June 1989 Semecon, Working Papers, University of Munich, Nr. 89–1 pp. 12.

2. TARJÁN, T. G. (1989): Economic Cycles Based on Gestation Lags: A Formal Analysis, June 1989 Semecon, Working Papers, University of Munich, Nr. 89–2 pp. 13.

3. RAY, G. F. (1991) : Innovation and Technology in Eastern Europe: An International Comparison, NIESR, Report Series, Nr 2. pp. 123.

4. TARJÁN, T. (1991): L' innovazione technologica nell' economia ungherese, La nuova Ungheria e i rapporti internazionali, á cura di Dénes Huszti e Bruno Tellia, I.S.I.G., C.C.I.A.A., GORIZIA, pp. 19–35.

WHICH MODEL OF TRANSFORMATION IS THE MORE CONVINCING?

To the question proposed in the title (if the „shock-therapy" or a successive transformation seems to be better realizable in the formerly socialist economies) the paper gives a possible answer with the help of a two-sectorial Leontief-model, which is formulated on the partitions according to the transformation's most important two cross-interactions: I. private/state enterprises and II. domestic/foreign economies. We prove that the solutions of these Leontief-models are necessary instable. Comparing the magnitudes of instability of earlier and later trajectories both models show that shock-therapy is not an acceptable way of transformation.

IDEGEN TOLLAK

A MAGYAR MÓDSZER EREDETÉRŐL[1]

HAROLD W. KUHN
Princeton Egyetem, Matematika Tanszék

Ez a kis írás személyes emlékeimet eleveníti fel a hozzárendelési feladat megoldására szolgáló magyar módszer felfedezéséről. Ezt kiegészítendő, az Utóiratban az utazó ügynök probléma tanulmányozásának korai szakaszáról szolgálok néhány további adalékkal.

A történet 1953 nyarán kezdődik, amikor is a Nemzeti Mérésügyi Hivatal és más egyéb amerikai kormányzati szervek összegyűjtöttek egy kiváló kombinatorikusokból és algebristákból álló csoportot a Kaliforniai Egyetem Los Angelesi campusának Numerikus Analízis Intézetében (INA). Miután helyszűkében voltunk, ezért azzal a Ted Motzkinnal kerültem egy szobába, aki a lineáris egyenlőtlenségekkel kapcsolatos úttörő munkájával több, mint tíz évvel megelőzte a lineáris programozást. Az INA-ban volt az egyik legjobb korabeli számítógép, a Standards Western Automatic Computer (SWAC), melynek az egész memóriája 256 darab Williamson katódcsőből állt. A SWAC gyorsabb és ugyanakkor kisebb is volt, mint testvére, a Standards Eastern Automatic Computer (SEAC), amely folyadék-memóriával büszkélkedhetett és amelyet speciálisan lineáris programozási feladatok megoldására kódoltak. A SEAC-ról az Utóiratban lesz még szó.

A nyár folyamán C. B. Tompkins 10-szer 10-es hozzárendelési feladatokat próbált a SWAC segítségével megoldani az összes 10!=3,628,800 permutáció leszámlálásával. Egyetlen próbálkozása sem járt sikerrel.

Egy n-szer n-es hozzárendelési feladat adata egy valós n-edrendű négyzetes $A = (a_{ij})$ mátrix. A feladat az adott mátrix minden sorából és oszlopából úgy választani egyetlen elemet (megfelelő átfogalmazásban egy olyan permutációt), hogy a kiválasztott mátrixelemek összege maximális legyen. Annak a tételnek az alapján, (melyet különböző módon König, Birkhoff és von Neumann is bebizonyított, és) mely szerint a permutáció mátrixok (az n^2-dimenziós tér pontjaiként felfogva azokat) konvex burka a duplán sztochasztikus mátrixok halmaza (vagyis azon nemnegatív négyzetes mátrixok összessége, melyekben minden sor- és oszlopösszeg 1-gyel egyenlő), könnyen belátható, hogy a hozzárendelési feladat ekvivalens a következő lineáris

[1]H. W. Kuhn: On the Origin of the Hungarian Method. In: History of Mathematical Programming. Elsevier, 1992. Fordította: Komlósi Sándor.

programozási feladattal:

$$\max \sum_{i,j} a_{ij} x_{ij}$$

feltéve, hogy

$$\sum_j x_{ij} = 1 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

$$\sum_i x_{ij} = 1 \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, n)$$

Ennélfogva egy 10-szer 10-es hozzárendelési feladat ekvivalens egy 100 nemnegatív változót és 20 egyenlőség feltételt tartalmazó lineáris programozási feladattal. (Az egyenlőség feltételek közül csak 19-re van valójában szükség.) 1953-ban azonban még nem volt a világon olyan számológép, amelyen meg lehetett volna oldani ilyen nagy méretű lineáris programozási feladatot.

Ebben az időszakban König klasszikus gráfelméleti könyvét [3] olvastam és rájöttem, hogy egy gráf két n szögpontú részre partícionálása és a két rész közötti párosítás problémája pontosan megegyezik egy olyan n-szer n-es hozzárendelési feladattal, ahol az A mátrix minden elemére vagy $a_{ij} = 1$, vagy $a_{ij} = 0$ teljesül. De ami még ennél is fontosabb, König megadott egy olyan kombinatorikus algoritmust, amellyel meghatározhatók voltak a fenti párosítási problémának és kombinatorikus (lineáris programozási) duáljának az optimális megoldásai. Az egyik, König által adott alakja az említett eredménynek a következő ([3], p.240, Theorem D): legyen az n-edrendű $A = (a_{ij})$ mátrix minden elemére $a_{ij} = 0$ vagy 1. Fedjük le az A mátrix bizonyos sorait és oszlopait. Ha ezek a fedések az A mátrixban található összes 1-est lefedik, akkor az A mátrix fedőrendszeréről beszélünk. A legkevesebb sor, illetve oszlop fedést használó fedőrendszert minimális fedésnek nevezzük. Válasszunk maximális számú 1-est az A mátrixból oly módon, hogy egy sorból vagy oszlopból legfeljebb egy 1-est választhatunk. Az ily módon választható egyesek maximális száma megegyezik a minimális fedésben szereplő sor és oszlop fedések számával. A König-féle algoritmus még egy további szempontból is jónak tűnt; erre később még visszatérek. Ezek után már csak a következő probléma megoldása maradt hátra: hogyan lehet az általános hozzárendelési feladatot 0-1 típusúra visszavezetni?

Figyelmesebben olvasva König könyvét felfigyeltem a következő lábjegyzetre ([3], 238.old. 2.lábjegyzet): „...Eine Verallgemeinerung dieser Sätze gab E. Egerváry, Mátrixok kombinatorikus tulajdonságairól (Über kombinatorische Eigenschaften von Matrizen), Matematikai és Fizikai Lapok, 38, 1931,S.16-28 (ungarisch mit einem deutschen Auszug)...". Éreztem, hogy a fenti probléma megoldásának a kulcsát talán éppen Egerváry cikkében találhatom meg. Amikor ősszel visszatértem a Bryn Mawr College-ba, kézhez kaptam a Haverford College könyvtárából Egerváry cikkének egy másolatát egy nagy magyar szótár és nyelvtan kíséretében. Két hétig magyarul tanultam és közben lefordítottam Egerváry cikkét [1]. Ahogy gyanítottam, Egerváry cikke tartalmazott egy módszert, melynek alapján az általános hozzárendelési feladat visszavezethető véges sok 0-1 típusú hozzárendelési feladatra.

Felhasználva Egerváry redukciós eljárását és König maximum-párosítási algoritmusát, 1953 őszén számos 12-szer 12-es típusú hozzárendelési feladat megoldását számoltam ki kézzel. Mindegyik feladatot két órán belül meg tudtam oldani és ez meggyőzött arról, hogy ez a kombinált algoritmus „jó". Valószínűleg ez egyike volt azon legutolsó eseteknek, amikor papírral és tollal le lehetett győzni a világ legnagyobb és leggyorsabb elektronikus számítógépét.

Hogy teljesen nyilvánvaló legyen, miszerint az általam javasolt algoritmust két magyar matematikus, König és Egerváry munkája inspirálta, ezért ezt az eljárást „magyar módszer"-nek kereszteltem el és ezen a néven is publikáltam [4, 5]. Nem sokkal a publikálás után Munkres [7] megmutatta, hogy az algoritmus „jó", abban az értelemben, hogy egy n-szer n-es hozzárendelési feladat megoldásához legfeljebb $O(n^3)$ műveletre van szükség. Vagyis ez volt a legelső polinomiális komplexitású algoritmus lineáris programozási feladatok egy nagy osztályára.

Nagyon sokan azt hitték, hogy a magyar módszer nem más, mint a szimplex módszer álruhában. (Alan Hoffman fogadott is velem 25 centben; jó pár évvel ezelőtt meg is adta a tartozását.) A módszer pontos geometriai interpretációját [8] tartalmazza.

Ennek lényege a következő: az algoritmus (nem bázis) duál megengedett és primál komplementer megoldásokat állít elő. Mihelyt a primál megoldás egyúttal megengedett is, mind a primál, mind pedig a duál megoldás optimális. Az 50-es évek vége felé Ray Fulkerson elmondta nekem, hogy ennek az algoritmusnak a szerkezete nagy mértékben befolyásolta a Forddal és Dantziggal közösen kidolgozott primál-duál algoritmusuk megalkotását.

Utóirat

Ugyanazon a nyáron az utazó ügynök problémájával is foglalkoztam. Mivelhogy a hozzárendelési feladat primál megengedett megoldásainak halmazában $n!$ extremális pont és mindössze n^2 határoló lap van, ezért abban reménykedtem, hogy az utazó ügynök problémája esetében a hozzárendelési problémához hasonló esettel van dolgunk. Talán a duál feladat szerkezete bizonyulhat könnyen megfoghatónak, amelynek alapján azután hatékony megoldó algoritmust lehet konstruálni. Ebből a célból lineáris egyenletekkel és egyenlőtlenségekkel kellett jellemezni azon permutációk konvex burkát, amelyek „utak" (vagyis az n város olyan permutációi, amelyek egyszerű ciklusokból állnak). Ez a konvex burok természetes módon az (n^2-n)-dimenziós tér részhalmazaként fogható fel (a diagonál elemek ugyanis mind 0-k), ahol is n^2-3n+1 a dimenziója (minden mátrix duplán sztochasztikus) és az $(n-1)!$ út az extremális pontjai.

Az első érdekes eset $n=5$ esetén adódik, ahol is a 24 útvonal egy 11 dimenziós politopot határoz meg, amely természetes módon be van ágyazva a 20-dimenziós térbe. Ezen politop határoló lapjainak meghatározására 1953 nyarán a következő „kísérleti eljárást" gondoltam ki: helyezkedjünk el a politop $\overline{x}$ súlypontjában és egy véletlenszerűen választott d irányban adjunk le egy pisztolylövést. A lövés 1 valószínűséggel a politop egy határoló lapján halad át. Ha a 24 útvonalat $t^1, t^2, \ldots, t^{24}$ és a véletlen irányt d jelölik, akkor $\overline{x} = (t^1 + t^2 + \ldots + t^{24})/24$ és a probléma mint a következő lineáris programozási feladat fogalmazható meg:

$$\max \lambda$$

$$\overline{x} + \lambda d = \sum_k \lambda_k t^k,$$

$$\sum_k \lambda_k = 1,$$

$$\lambda_k \geq 0 \quad (k = 1, \ldots, 24)$$

Könnyen igazolható, hogy a duális feladat optimális megoldása megadja annak a határoló lapnak az egyenletét, amelyen keresztül a lövés elhagyja a politopot. Figyeljük meg, hogy ennek a lineáris programozási feladatnak 25 nemnegatív változója van és 21 egyenlőség feltétel szerepel benne. Ez a méret megfelelően kicsi volt ahhoz, hogy a SEAC-on meg lehessen oldani 1953-ban. Alan Hoffman segítségével távírón elküldtünk 10 ilyen feladatot Washingtonba (a véletlen számokat a Los Angelesi telefonkönyvből választottuk ki véletlen tűszúrások segítségével). A válaszok, melyeket kaptunk, végtelenül lehangolóak voltak: mind a 10 lövés triviális, $x_{ij} \geq 0$ típusú határoló lapon ment keresztül. Ez szerény tapasztalati bizonyítéka volt annak, hogy ezeknek a határoló lapoknak a politop súlypontjából vett szférikus látószögei a teljes középponti szög nagy részét kiteszik.

Végül is (kézi számolással) meghatároztam mind a 390 határoló lapot és felhagytam a duális feladat szerkezetének a tanulmányozásával. Ez a kis írás lehetőséget ad számomra, hogy az említett 390 darab határoló lap [2]-ben és [6]-ban megadott listáján javításokat eszközöljek.

Tegyük fel, hogy $x = (x_{ij})$ eleme az utak által kifeszített konvex buroknak. Ekkor x eleget kell, hogy tegyen a következő $3n$ számú egyenletnek:

$$\sum_j x_{ij} = 1 \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

$$\sum_i x_{ij} = 1 \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

$$x_{ii} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Ráadásul x eleget kell, hogy tegyen a következő 390 irredundáns egyenlőtlenségnek:

I.	$x_{ij} \geq 0, \quad i \neq j$	(20 lap);
II.	$x_{ij} + x_{ji} \leq 1, \quad i \neq j$	(10 lap);
III.	$x_{ij} + x_{jk} + x_{ki} + 2x_{ji} \leq 2$	(60 lap);
IV.	$x_{ij} + x_{jk} + x_{kl} + x_{li} + 2x_{ik} + 2x_{ki} \leq 3$	(60 lap);
V.	$2x_{ij} + 2x_{ji} - x_{ik} + x_{jk} - x_{li} + x_{lj} - x_{kj} \leq 2$	(120 lap);
VI.	$x_{ij} - x_{jk} - x_{kl} + x_{li} + x_{il} \leq 1$	(120 lap).

A [6] dolgozatban az V. csoportot tévesen, mint új csoportot említettem, jóllehet ez a csoport már szerepelt a [2] dolgozatban. A VI. csoport azonban sem a [2], sem pedig a [6] cikkekben nem szerepel.

Hogy lemérjem a számítógépek terén 1953 és 1991 között bekövetkezett fejlődést, ezért újra kiszámoltam a 390 határoló lap listáját Motzkin kettős-leírás módszerével, azt Basic-ben az íróasztalomon levő Macintosh-SE számítógépre programozva. A számolás 1 óra 43 percet vett igénybe, amely 1953-ban a világ valamennyi számítógépe számára még túlságosan nagy feladat volt. Ráadásul, mialatt szabadságom alatt távol voltam, számítógépemmel 152,636 véletlen lövést szimuláltattam. Egy véletlen irány generálása (a 11-dimenziós tér egységgömbjén egyenletes eloszlást használva), majd a megfelelő lineáris programozási feladat megoldása és a megfelelő határoló lap csoportjának meghatározása átlagosan négy másodpercnél kevesebb időt vett igénybe. A számolások eredményeként a következő adódott:

Csoport	I	II	III	IV	V	VI
Gyakoriság	122,200	1,593	6,179	4,843	12,719	5,102

Ezek az eredmények arra engednek következtetni, hogy az I. csoport 20 határoló lapja mintegy 80%-át fedi le a politop középponti szférikus szögének. Ennélfogva az 1953-as kisérletem eredménye nem is tekinthető olyan valószínűtlennek.

És végül egy utolsó észrevétel ezzel a nevezetes politoppal kapcsolatban. 1953-ban észrevettem, hogy ez a politop „jószomszédos" (neighborly polytop), azaz bármely két csúcspontja össze van kötve egy, a politop határán haladó éllel. Ezt az észrevételemet elmondtam David Gale-nek és Ted Motzkinnak is, akik ennek is köszönhetően később alapvető eredményekkel gazdagították a jószomszédos politopok elméletét.

IRODALOM

1. E. EGERVÁRY (1955). On Combinatorial Properties of Matrices, translated by H. W. Kuhn, Logistics Papers (Issue 11), Paper 4, George Washington University, 1-11.

2. I. HELLER (1953). On the problem of shortest path between points. I. Bull. Amer. Math. Soc. 59, 551.

3. D. KÖNIG (1936). Theorie der endlichen und unendlichen Graphen: kombinatorische Topologie der Streckenkomplexe, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig.

4. H. W. KUHN (1955). The Hungarian method for assignment problems. Naval Res. Logist. Quart. 2, 83-97.

5. H. W. KUHN (1956). Variants of the Hungarian method for assignement problems. Naval Res. Logist. Quart. 3, 253-258.

6. H. W. KUHN (1956). On certain convex polyhedra. Bull. Amer. Math. Soc. 61, 557-558.

7. J. MUNKRES (1957). Algorithms for the assignement and transportation problems. J.SIAM 5, 32-38.

8. H. J. SCHMID (1978). A geometrical interpretation of the Hungarian method. Discrete Math. 21, 297-308.

TÁRSASÁGI HÍREK

A MAGYAR OPERÁCIÓKUTATÁSI TÁRSASÁG ÉLETÉBŐL

A Magyar Operációkutatási Társaság 1991. május 24-én megtartott első, alakuló közgyűlésén tiszteletbeli elnökévé választotta Prékopa András professzort, a Magyar Tudományos Akadémia rendes tagját. Jóllehet Prékopa Andrást nem kell bemutatni az operációkutatók hazai táborának, a következő életrajzi ismertetés sokunk számára szolgálhat újabb adalékokkal Prékopa professzor gazdag életútjáról.

Prékopa András életrajza

1929. szeptember 11-én született Nyíregyházán. Édesapja Szabolcs Vármegye legnagyobb bankjának, a Nyíregyházi Takarékpénztár Egyesületnek volt az igazgatóhelyettese. A Prékopa család ősi nyíregyházi iparos, kereskedő és értelmiségi család. Őseik a felvidékről származnak, ahol egy Túrócszentmárton és Kossuthfalva melletti falu viseli ezt a nevet.

Iskoláit két és fél év kivételével Nyíregyházán végezte, ott is érettségizett a Kossuth Lajos gimnáziumban, 1947-ben. Az említett két és fél év alatt a marosvásárhelyi hadapródiskola növendéke volt. Kiváló tanárok tanították, mint pl. Sziklay László, Margócsy József, Gacsályi Sándor, Scharbert Ármin, Borzsák István, egyetemi tanári szintű emberek, többen közülük később valóban azzá is váltak.

Szülővárosához és iskoláihoz mindig erős volt a kötődése. Hosszú idő óta elnöke a Szabolcs-Szatmár-Bereg Megyei Öregdiákok Klubjának és alelnöke volt a Nyíregyházi Kossuth Lajos Gimnázium Baráti Körének.

Az érettségi után beiratkozott a Debreceni Tudományegyetemre, mint matematika, fizika és ábrázoló geometria szakos tanárjelölt. Matematikus professzorai Varga Ottó, Rényi Alfréd, Gyires Béla, Rapcsák András akadémikusok, Barna Béla, Szénássy Barna, Szele Tibor, a tudomány doktorai, továbbá Gyarmati László kandidátus voltak. Az utóbbi az ábrázoló geometriát tanította. A fizikát abban az időben Szalay Sándor, Budó Ágoston akadémikusok és Fényes Imre, a tudomány doktora tanította.

A fent említett tanárok közül a legnagyobb hatást Rényi Alfréd gyakorolta Prékopa Andrásra. Bár matematikai statisztikai vonalon volt már Magyarországon nemzetközi hírű kutató és egyetemi tanár, Jordan Károly személyében, aki iskolát is teremtett, ám a modern, Kolmogorov-elméleten nyugvó valószínűségelmélet meghonosítója Rényi Alfréd volt, aki 1949-től kezdődően tekintélyes iskolát hozott létre maga körül. Ebben, időrendben a legelsők között foglalt helyett Prékopa András. Már egyetemi hallgató korában megjelent egy cikke az un. ,,Banach gyufák" problémáról.

Az egyetemet 1951-ben végezte el, majd 1952-ben államvizsgát tett és középiskolai tanári oklevelet szerzett. Az egy év középiskolai tanítás helyett, ami a végzés és az államvizsga között történt volna, a Műegyetemre irányították, ahol fél évig tanársegéd volt a Vegyészmérnöki Kar Matematika Tanszékén, majd aspiráns lett az Alkalmazott Matematikai Intézetben, Rényi Alfréd vezetése mellett. Ezek az évek formálták alkalmazott matematikusi szemléletmódját és hivatástudatát. Az akkori akadémiai intézetben kötelező volt az alkalmazási tevékenység, ami előtt persze igen nagy nehézségek tornyosultak, mert nem volt az országnak modern ipara és működőképes gazdasága. Az aspirantúrát 1955-ben fejezte be. ,,Sztochasztikus halmazfüggvények" című disszertációját 1956-ban védte meg. Ezt még abban az évben Grünwald Géza díjjal jutalmazta a Bolyai János Matematikai Társulat.

Az aspirantúra után 1956 szeptemberéig az Alkalmazott Matematikai Intézet jogutódjában, a Matematikai Kutató Intézetben volt tudományos munkatárs. Ezután az ELTE TTK Valószínűségszámítási Tanszékén dolgozott 1968-ig, előbb adjunktusi, 1963-tól pedig docensi beosztásban Már néhány évvel korábban is, de főként ebben az időben részt vett a valószínűségelméleti-statisztikai szakirány létrehozatalában. Az ő feladata a sztochasztikus folyamatok kurzus kidolgozása volt, melyet azután több éven keresztül tartott, más egyéb kurzussal együtt. Legfontosabb oktatási jellegű alkotása azonban az operációkutatásnak az ELTE-n való meghonosítása volt. Első, lineáris programozási speciális előadását 1958-ban tartotta. Az 1965. évi egyetemi reform tervben már elfogadták az operációkutatási szakirány létesítését és 1969-ben már végzett is az első évfolyam. Ezzel megvalósult Magyarországon egy képzési forma, mely minden tekintetben egyenrangúnak bizonyult az angolszász egyetemek ,,master in operations research" fokozatával (noha a végzett hallgatók egységesen matematikusi diplomát kaptak, melyen a szakirány nem volt feltüntetve). Abban az időben még Nyugaton is csak kevés egyetemen létezett operációkutatási szakirányú képzés.

Abból a célból, hogy a korábban végzett matematikusok, mérnökök és közgazdászok is elsajátíthassák azokat az ismereteket, amiket egy ilyen szakirány nyújtani tud, továbbá, hogy az ELTE operációkutatási szakirányt megalapozza, 1967-1969 között nagysikerű tanfolyamot szervezett a Bolyai Társulatban. Ennek során a legfontosabb operációkutatási diszciplínák mind szerepeltek egy-egy féléves kurzussal. Az előadások jegyzeteit a Bolyai Társulat kiadta, ezek később országszerte használttá váltak az operációkutatás oktatásában.

1967-ben az ELTE-n létrejött egy egyetemi szintű számítástechnikai bizottság, melynek vezetésével a rektor Prékopa Andrást bízta meg. Az egyetem első számítógépének az installálása, 1968 tavaszán, erre az időre esett.

Noha 1967-ben Rényi Alfréd javaslatot készített egy Operációkutatási Tanszék létesítésére és 1968-ban az egyetem kérte a Minisztériumot egy Operációkutatási és Számítástechnikai Tanszék létesítésére, az utóbbiból is csak a Számítástechnikai Tanszék valósult meg. Az operációkutatásnak az ELTE-n való oktatásához sem az ELTE, sem a Minisztérium nem nyújtott támogatást. Az utóbbinak illetékes főosztályvezetője azt ígérte Prékopa Andrásnak, hogy megadják a támogatást, de a Műegyetemre telepítve. Így 1968-ban elfogadta a Műegyetem ajánlatát és a Villamosmérnöki Kar Matematika Tanszékének egyetemi tanára lett. Később, 1977-ben átment a Gépészmérnöki Kar Matematika Tanszékére, hogy részt vegyen a matematikus- gépészmérnök szakirányú képzésben. Itt dolgozott 1983-ig, amikor visszakerült az ELTE-re, miután ott létrejött az Operációkutatási Tanszék.

Prékopa András életében az akadémiai intézetekben betöltött mellékfoglalkozású pozíciói legalább ol, an fontos szerepet játszottak, mint főállásai. Ezekben az intézetekben a politikai nyomás jóval enyhébb volt és így a párton kívüli professzor könnyebben nyerhetett el vezető beosztást. Az első kutatócsoportja a Matematikai Kutató Intézeten belül létesült 1959-ben, "A Matematika Közgazdasági Alkalmazásai Csoport" elnevezéssel. Ez 1970-ben átment az Akadémia Számítástechnikai Központjába, ahol Operációkutatási Osztállyá alakult. A Központ és az Automatizálási Kutató Intézet 1973-ban bekövetkezett egyesülése után nem sokkal megfosztották osztályvezetői pozíciójától, ám 1977-ben az egyesült intézetet átszervezték és az akkor létrejött Alkalmazott Matematikai Főosztálynak lett a vezetője. Ezen belül helyezkedett el az Operációkutatási Osztály. Az akadémiai intézetekben betöltött pozíciói lehetőséget adtak arra, hogy az ELTE-n az Operációkutatási szakirányt fenntartsa. Ezt az oktatást 1968 után is változatlanul ő szervezte és végezte, a SZTAKI Operációkutatási Osztályának áldozatkész és lelkes tagjaival együtt. Az Akadémia és az Egyetem együttműködése tehát már évtizedekkel ezelőtt megvalósult, jóllehet ezt nem a két intézmény magasszintű együttműködési megállapodása, hanem a politikai akadályok megkerülése eredményezte.

Az 1983-ban létrejött tanszék mindössze négy főből állt és helyiséget még négy évig nem kapott. E mostoha körülményeket tovább súlyosbította, hogy 1985-ben a SZTAKI-beli pozícióját kénytelen volt feladni. Miután oktatási és kutatási lehetőségei ilyenformán beszűkültek, 1985-ben elfogadta az Amerikai Egyesült Államokbeli Rutgers Egyetem Operációkutatási Központjának a meghívását előbb egy „distinguished visiting professor", majd egy állandó jellegű "Professor II." pozíció betöltésére. Az utóbbi a Rutgers Egyetemen a legmagasabb professzori rangot jelenti. Időközben az ELTE részéről szabadságon volt. Jelenleg itthon tartózkodik, az ELTE TTK Operációkutatási Tanszékének egyetemi tanára.

Tudományos pályafutásának első szakaszában valószínűségelmélettel és statisztikával foglalkozott. Az ilyen irányú érdeklődés megtartásával, 1957 óta egyre intenzívebben fordult az operációkutatás felé. A tudományok doktora fokozatot már operációkutatási jellegű disszertációval nyerte el 1971 -ben. Ennek címe: "Sztochasztikus

Rendszerek Optimalizálási Problémáiról." 1977-ben külföldi levelező tagja lett a Mexikói Mérnöki Akadémiának, (A. Charnes professzor azt írja, hogy egyidejűleg terjeszti fel L. Kantorovich Nobel-díjas orosz professzorral, az utóbbit külföldi rendes tagnak), 1979-ben levelező tagja lett a Magyar Tudományos Akadémiának, ugyanennek rendes tagja lett 1985-ben. Két évvel később tagja lett a New York-i Tudományos Akadémiának is. A fentieken kívül más elismerést jelentő tagságokban is részesült: 1968-ban tagja lett a Nemzetközi Statisztikai Intézetnek és 1978-ban Fellow-ja lett az ugyancsak nemzetközi Ökonometriai Társaságnak. Alapítója és nyolc éven át elnöke (1981–1989) a Matematikai Programozási Társaságon belül működő Sztochasztikus Programozási Bizottságnak. Alapítója és huszonegy éven át (1964–1985) elnöke a Bolyai János Matematikai Társulat Alkalmazott Matematikai Szakosztályának. A Bolyai Társulatban kifejtett munkásságáért 1983-ban MTESZ díjban részesült. Létrehozója és tíz éven át elnöke az Akadémia Matematikai és Fizikai Tudományok Osztálya Operációkutatási Bizottságának. Egyik alapítója, majd előbb felelős szerkesztője, később főszerkesztője az Alkalmazott Matematikai Lapoknak. Tagja számos hazai és nemzetközi folyóirat szerkesztő bizottságának. Elnöke volt a Magyarországon rendezett első nemzetközi jellegű operációkutatási konferenciának 1963-ban (pontos neve más volt, itthon akkor még nem volt elfogadott az "operációkutatás" terminológia), majd ezt követően közel húsz, Magyarországon rendezett, nemzetközi és magyar, főleg operációkutatási jellegű tudományos konferenciának. Ezek közül a főbbek:

Operációkutatási Konferencia, Veszprém, 1967 (MTA), Debrecen, 1970 (Bolyai Társulat); Inventory Control and Water Storage, Győr, 1971 (Bolyai Társulat); International Conference on Operations Research, Eger, 1974 (Bolyai Társulat); IX. International Symposium on Mathematical Programming, Budapest, 1976 (Math. Prog. Soc., Bolyai T., MTA); International Conference on Stochastic Programming, Kőszeg, 1981 (Bolyai Társulat); GAMM Tagung, Budapest, 1982 (GAMM és Bolyai Társulat); System Modelling and Optimization, Budapest, 1985 (IFIP és MTA SZTAKI).

Első tudományos eredményei a sztochasztikus folyamatokkal és ezek általánosításaival kapcsolatosak. Ezt követően az operációkutatáson belül főleg sztochasztikus programozással foglalkozott. A valószínűséggel korlátozott sztochasztikus programozási modell legfontosabb eredményei az ő nevéhez fűződnek. Az ennek kapcsán nyert logkonkávitási eredményei a matematika számos egyéb ágában is felhasználást nyertek (valószínűségelmélet, statisztika, konvex geometria, funkcionálanalízis). Újabban a diszkrét momentum problémával kapcsolatban ért el fontos eredményeket, melyeket a matematika és alkalmazásai több területén hasznosítottak (megbízhatóságelmélet, optimalizálás, statisztika, stb.).

Prékopa András egész tudományos pályafutása alatt különös érdeklődéssel fordult az alkalmazások felé. Ám e tekintetben elsősorban a tudományos értékű alkalmazások vonzották, melyekben új matematikai eredmények elérése, újszerű modellalkotás és fontos gyakorlati következmény egyaránt létrejön. Ilyen irányú eredményei közül a legjelentősebbek: A közismert Prékopa-Ziermann-féle készletezési modell megalkotása 1962-ben és az azt követő években. Ez, a főleg megbízhatóságot szem előtt tartó modell, újszerű volt a matematikai megfogalmazás és az elért matematikai eredmények szempontjából egyaránt. Gyakorlati szempontból is igen jelentős volt a hatása, mert a 60-as évek elején országos szinten kb. négy milliárd forint megtakarítást eredményezett és hosszú ideig az egyetlen, itthon a gyakorlatba bevezetett készletmodell volt. Időrendben ezt követték vízügyi modelljei. Hatékony vízszintszabályozási módszert adott a Balatonra, tározórendszer irányítási modellt dolgozott ki a Tiszalök- Kiskörei rendszerre és egy délmagyarországi rendszerre. Tározó-rendszer méretezési modellt dolgozott ki árvízvédelmi rendszerekre. Ezek a munkái Szántai Tamással közösek. A harmadik csoportot villamosenergiaipari alkalmazások alkotják. Az MTA SZTAKI egy kutatócsoportja vezetőjeként munkatársaival együtt olyan napi villamosenergia termelési modellt és módszert dolgozott ki, mely egy:tt szerepelteti az erőműveket a hálózattal. A nyert nagyméretű, nemlineáris, vegyesváltozós modellt igen rövid időn belül tudták számítógéppel megoldani. Egy másik modellje együttműködő villamosenergia rendszerek kapacitás tervezését célozza, olyan feltétel mellett, hogy a kooperáló rendszerek előírt, nagy megbízhatósággal képesek legyenek az összes igényt kielégíteni. További fontos alkalmazást végzett dietetikai vonatkozásban. Korábban, 1965-ben és 1967-ben az Egyesült Államokbeli Tulane Egyetemen vett részt egy ilyen jellegű projektekben. Részben erre támaszkodva, egy SZTAKI-beli kutató csoporttal létrehozott egy dietetikai rendszert, melyet azután kórházakban alkalmaztak. A feladat olyan számítógépes rendszer létrehozatala volt, mely a tápanyagkövetelményeknek eleget tevő, többféle diéta megtervezésére volt alkalmas, előírt költséghatárokon belül. Említést érdemelnek még azok a statisztikai jellegű alkalmazások, melyeket 1958-1965 között a Statisztikai Hivatalban végzett egy matematikus csoport vezetőjeként.

Prékopa András nemzetközi viszonylatban is ismert és nagyra értékelt operációkutatási iskolát hozott létre. 1975-ben Aiex Orden amerikai professzor így ír az általa vezetett kutató csoportról: "Jóllehet az amerikai operációkutatási aktivitás mérete és változatossága a magyarországinál sokkal nagyobb, nehéz olyan amerikai kutató egységet találni, melyben a matematikai kutatás, algoritmus és számítógépes program fejlesztés és az operációkutatás alkalmazásai ily harmóniában élnek együtt ennyire széles területen". (SIGMAP Newsletter, 1975). Iskolateremtő hatása az alkalmazott matematika más ágaira is kiterjedt. Összesen 33-an szereztek kandidátusi, vagy egyetemi doktori fokozatot vezetése alatt. Ezek között ma már több egyetemi tanár, illetve akadémikus van és Magyarországon kívül a következő országokból jöttek, illetve országokban élnek: Jugoszlávia, Litvánia, NSZK, Mongólia, USA, Vietnam. Szakmák szerint pedig matematikus, mérnök, közgazdász, számítástechnikus és orvos végzettségűek. Iskolájának tevékenységét alkalmazott matematikai szempontból méltatja az ausztriai H.Wacker professzor, amikor azt írja, hogy (Zeitschr. für Hochschuldidaktik, 1982) egyik példáját adja azoknak a csoportoknak, nemzetközi viszonylatban, amelyek a matematikus képzésben az elméleti megalapozáson kívül a gyakorlat orientáltságot is megvalósították.

Több hazai és nemzetközi "Ki Kicsoda" ismerteti életrajzát. A legjelentősebb az International Biographical Center által kiadott "5000 Personalities in the World". Az erről kiadott igazoló lap indoklásul az alkalmazott matematika terén elért eredményeit említi.

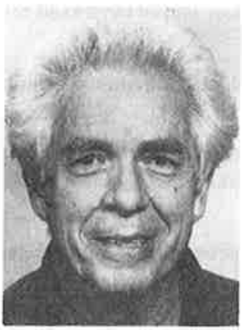
Prékopa András 1962-ben nősült. Felesége Széchenyi Kinga, a Toldy Ferenc gimnázium angol szakos tanára, az ELTE vezető tanára és műfordító. Két lányuk van. A nagyobbik, Mónika, angol–francia szakot végzett, 1982-ben az országos tanulmányi versenyen francia nyelvből első helyezett lett. Jelenleg jogot tanul az USA-ban, ahol férjnél van. Férje vegyész professzor Indianaban a Purdue Egyetemen. A kisebbik, Judit, másodéves egyetemi hallgató az ELTE Bölcsész Karán, angol–olasz szakos. A múlt évben a Rutgers Egyetemre járt, ahol a fenti tárgyakon kívül matematikát, közgazdaságtant és pszichológiát tanult.

* * *

A Magyar Operációkutatási Társaság 1992. május 22-i közgyűlésén tiszteletbeli tagjává választotta H. W. Kuhn amerikai matematikust. A nemlineáris programozás elméletében csak egy kicsit is jártas embernek nem idegen a Kuhn név. Az optimalitás szükséges feltételét megfogalmazó Karush–Kuhn–Tucker feltételt vélhetően mindenki ismeri. Kevésbé ismert azonban Kuhn munkásságának magyar vonatkozása: a hozzárendelési feladat megoldására kidolgozott egy algoritmust, amely két magyar matematikus, Egerváry Jenő és König Dénes eredményeire épül. Ezt a tényt örökítette meg Kuhn professzor azzal, hogy az említett algoritmust magyar módszernek keresztelte el[1].

Életrajzának rövid ismertetésével szeretnénk közelebb hozni Őt a magyar szakmai közvéleményhez.

Harold W. Kuhn életrajza



Dr. Harold W. Kuhn a Princeton Egyetem matematikai közgazdaságtan professzora. Főbb kutatási területei: lineáris és nemlineáris programozás, játékelmélet, kombinatorikus problémák, valamint a matematikai módszerek és technikák közgazdasági alkalmazásai.

Santa Monicában (Kalifornia) született 1925. július 29-én. 1949-ben házasságot kötött Estelle Henkinnel. Három fiúgyermekük és öt fiúunokájuk van. Kuhn professzor 1944–46-ban a U.S. Army tagja volt, szolgálati ideje alatt japán nyelvi képzést kapott az „Army Language Program" keretében a Yale Egyetemen.

1947-ben a California Institute of Technology-n B.S. fokozatot szerzett, majd beiratkozott a Princeton's Graduate School-ra, ahol 1948-ban M.A., majd 1950-ben Ph.D. fokozatokat szerzett. Princetoni tanulmányai közben instruktorként már részt vett a Matematika Tanszék munkájában.

Az 1950–51-es tanévben Párizsban folytatott tanulmányokat, mint Fulbright Research Scholar. A következő évben matematikát tanított a Princeton Egyetemen. 1952-ben docensi kinevezést kapott matematikában a Bryn Mawr College-on, ahol is hét éven át tevékenykedett.

1958–59-ben, mint a National Foundation ösztöndíjasa (Senior Postdoctoral Fellow) egy évet töltött a London School of Economics-on. Innen Princetonba tért vissza, ahol docensi kinevezést kapott matematikai közgazdaságtanban. 1963-ban nevezték ki professzornak. 1965–66-ban egy évet a római egyetemen töltött, mint a National Science Foundation (NSF) ösztöndíjasa (Senior Postdoctoral Fellow), majd

[1] Kuhn professzor személyes visszaemlékezése erről az Idegen tollak rovatban olvasható

1971–72-ben ugyancsak az NSF ösztöndíjasaként (Science Faculty Fellow) ismét egy évet töltött a London School of Economics-on.

Tanácsadóként különféle kormányzati szervek és számos társaság munkájában részt vett. 1961-től 1983-ig tagja volt a Mathemetica, Inc. Princeton székhelyű kutató vállalat Igazgató Tanácsának. Fenti feladataiból következően számos kutatás vezetője volt. Néhány ezek közül:

- tanulmány a nukleáris fegyverek biztonságáról és megbízhatóságáról (az Atomenergia Bizottság számára),
- megfigyelői rendszerek és a hasznosság elmélet metodológiája (a Fegyverzet Ellenőrzési és Leszerelési Ügynökség számára),
- közlekedési hozzárendelési modellek aggregációja (a Közlekedéstudományi Intézet számára)

Számos tudományos társaság illetve szervezet bizottságaiban illetve tanácsadó testületeiben tevékenykedett.

- 1953–54-ben a SIAM (Society of Industrial and Applied Mathematics) elnöke volt.
- A Nemzeti Tudományos Akadémia Kutatói Tanácsának több éven át tagja, 1957-től 1960-ig pedig a Kutatói Tanács Matematikai Osztályának titkára volt.
- 1959-től 1962-ig választott tagja volt az Amerikai Egyetemi Professzorok Egyesülete Tanácsának.
- Tagja a következő tudományos társaságoknak: American Mathematical Society, Mathematical Association of America, Econometric Society.

1967-től 1971-ig tagja volt a Princeton Egyetem Tanácsadó Bizottságának. Az ebben az időben írt „Egyetemisták és az egyetem" című helyzetelemzése nyomán széleskörű változtatásokra került sor az egyetemisták egyetem-kormányzati kérdésekben való részvételét illetően. Ez alatt az idő alatt tagja volt a Princeton Egyetemi Közösség Tanácsának és első elnöke ezen testület Fegyelmi Bizottságának (Committee on Rights and Rules).

Mint közgazdász alsóbb (undergraduate) évfolyamokon „price theory" és „managerial economics", felsőbb (graduate) éveseknek pedig „microeconomics", "trade theory" és „mathematical economics" című tárgyakat tanít. A matematikai közgazdaságtan című előadásait a matematikai intézet hallgatói is látogatják. Matematikus hallgatók számára matematikai programozási kurzusokat is tart.

Tudományos publikációi közül külön említést érdemelnek a

- nemlineáris programozásról (1950, A.W. Tuckerrel közösen),

- az extenzív játékokról (1950),
- a magyar módszerről (1955),
- egy, a bimátrix játékok Nash equilibriumának meghatározására szolgáló algoritmusról (1959),
- a Sperner–lemma általánosításairól (1960),
- fix pontok szimpliciális felbontások segítségével történő közelítéseiről (1968)
- egy, polinomok gyökeinek meghatározására szolgáló algoritmusról (1974)

írt dolgozatai.

Szerkesztője volt (Albert W. Tuckerrel együtt) a ,,Contributions to the Theory of Games and Linear Inequalities and Related Systems" című sorozat első két kötetének. Szerkesztője volt továbbá (G. P. Szegővel együtt) a ,,Mathematical Systems Theory and Economics" és a ,,Differential Games" című konferencia köteteknek. Szerkesztője volt a "Proceedings of the Princeton Symposium on Mathematical Programming" című kötetnek. Ez a szimpozium egy nagyon híres nemzetközi szimpozium sorozat hatodik konferenciája volt 1967-ben Princetonban. Számos tudományos folyóirat társszerkesztőjeként is tevékenykedett.

1980-ban Kuhn professzort (David Gale-lel és Albert W. Tucker-rel együtt) az Amerikai Operációkutatási Társaság John von Neumann Theory Prize-zal tüntette ki. 1982-ben Guggenheim tagságot kapott. 1992-ben az Amerikai Tudományos és Művészeti Akadémia tagjává választották.

Kuhn professzor jelenlegi tudományos munkássága elsősorban a játékelmélettel kapcsolatos. 1987 júniusában Capriban igazgatója volt egy nyári iskolának (NATO Advanced Study Institute) "Games with Incomplete Information and Bounded Rationality" témában. Egy 1953-ban elkezdett témához való visszatérésként 1991-ben az asszimetrikus 6-városú utazó ügynök probléma politopja határoló lapjainak teljes leírását adta meg H. Trotterrel közösen.

1992-ben a Magyar Operációkutatási Társaság tiszteletbeli tagjává választotta.

KÖNYVEKRŐL

VARGA JÓZSEF: *Angewandte Optimierung.* Akadémiai Kiadó, Budapest 1991.

A szerzőt aligha kell bemutatni a magyar olvasóközönségnek, hiszen az elmúlt negyedszázad alatt szinte mindenki találkozott a matematikai programozás alkalmazásait tárgyaló könyveivel.

Örvendetes tény, hogy ez a kiforrott munkája németül most egy sokkal szélesebb publikum számára is elérhető lesz. Ismerve az operációkutatás német nyelvű szakirodalmát, némi túlzással még azt is mondhatjuk, hogy a mű modelleket tárgyaló része hézagpótló. Míg angolul az algoritmusok matematikai hátterétől kezdve egészen az egyszerű alkalmazásokig a legkülönbözőbb előképzettségű és érdeklődésű olvasó számára az elmúlt években több korszerű munka jelent meg, addig németül csupán a Tomas Gal által kiadott háromkötetes Grundlagen des Operations Research emelkedik ki tartalmi sokrétűségével.

A mű három egymással szoros kapcsolatban álló témakört ölel fel:

- a modellezés elméleti kérdései és a modellkészítés módszertana,
- a gyakorlatban sűrűn előforduló jellegzetes döntési problémák matematikai modelljei,
- a lineáris, egészértékű és néhány nemlineáris modell megoldási módszerének bemutatása.

A tárgyalás mélységében az egyes témaköröket illetően eltérések tapasztalhatók. Míg a megoldási módszereknél csupán az alapvető eljárások találhatók, a modellek általában nem a lehető legegyszerűbb formában kerülnek megfogalmazásra. Emiatt a modellek területén nem járatos olvasónak célszerű először a modelltípusokkal és azok kapcsolatával valamely más munkából megismerkedni.

A bemutatott modellek számítógépes megoldását és a kapott eredmények értelmezését is részletesen tárgyalja a szerző. Egy konkrét szoftver felhasználásával tenni mindezt azonban nem szerencsés, hacsak nem egy általánosan elterjedt eszközről van szó. Megemlíti ugyan a PC-k szerepét, mégis számos tanácsot ad a számítóközpontokkal való együttműködésre, ami mai szemmel nézve kissé anakronisztikusnak tűnik.

Számos, az alkalmazások szempontjából fontos témakört csupán érint a szerző vagy nem is tárgyal, ilyen például az optimalizálás hálózatokon vagy a célprogramozási modellek, de még folytathatnánk a sort. Manapság azonban ilyen átfogó munka megírására egyedül már senki sem vállalkozhat.

A kitűzött feladatok megoldásai jó szolgálatot tesznek a megszerzett ismeretek ellenőrzésénél.

A kötet végén található irodalomjegyzék igencsak kurtára sikeredett, egy kivétellel csupán néhány alapmunkát találunk a hatvanas évekből és a hetvenes évek elejéről. A felsorolt szakfolyóiratok listájáról is hiányoznak olyanok mint a European Journal of Operational Research vagy a Journal of the Operational Research Society. Mindenképpen kívánatos lett volna az érdeklődő olvasók számára segítséget nyújtani a további munkához az egyes alkalmazásokról megjelent áttekintő cikkekből készült válogatással.

Mindazonáltal, egyetértve a kiadó ajánlásával, a mű mind a modellezés területén ismereteit gyarapító egyetemi hallgató, mind a problémája megoldásához segítséget váró gyakorló szakember számára fontos ismeretek tárháza.

Varró Zoltán

* * *

Új operációkutatási folyóirat!
CALL FOR PAPERS AND SUBSCRIPTION INFORMATION!

Egy új nemzetközi operációkutatási folyóirat jelent meg **Czechoslovak Journal for Operations Research (CSJOR)** címmel, melynek gazdája az 1991-ben alapított *Cseh és Szlovák Operációkutatási Társaság (CSSOR)*. A folyóirat folytatni kívánja a *Review of Econometrics (Economicko-matematicky obzor)* 27 éves tradícióját, melyet 1965-től 1991-ig a *Csehszlovák Tudományos Akadémia* szerkesztett.

A folyóirat első évfolyamának (1992) első száma már megjelent. A szerkesztőségi bevezető szerint a folyóirat nemzetközi fórum kíván lenni kutatók és gyakorlati szakemberek számára, mindazoknak, akik egyetemen, kutatóintézetben, valamely gyakorlati szakterületen, vagy az irányítás területén dolgoznak, és az operációkutatás, a gazdaságmatematika vagy közgazdaságtan különböző fejezeteinek elméleti, gyakorlati és számítástechnikai területét művelik.

A CSJOR két részből áll. A „THEORY" rovatban nagyobb lélegzetű, magasan minősített elméleti cikkek fognak megjelenni a fenti területek kutatási eredményeit bemutatva. A „REPORTS" rovat konkrét problémákra, gyakorlati alkalmazásokra orientálódik. Rövid, 4–6 oldalas beszámolókat közöl szoftverfejlesztésekről, érdekes, még nyitott vagy megoldott problémákról, továbbá aktuális információkat hazai és nemzetközi operációkutatási szervezetek életéből.

A lap főszerkesztője Frantisek Turnovec, társszerkesztő Michal Fendek. A nemzetközi szerkesztőség: R. E. Burkard, A. Charnes, J. E. Falk, T. Gal, F. Gyetván, M. Luptácik, M. Manas, G. L. Nemhauser, G. Ch. Pflug, J. Sojka, R. Steuer, L. Uncovsky, M. Vlach, M. Wozniak.

A szerkesztők meggyőződéssel vallják, hogy az új folyóirat szolgálni tudja a közép-európai Operációkutatási Társaságok, s ezzel együtt a kutatók szorosabb együttműködését.

A negyedévenként megjelenő folyóirat éves előfizetési díja (amely magába foglalja a postai és kezelési költséget is) egyéni előfizetők részére 120 DEM/év, intézmények részére 180 DEM/év.

A szerkesztőség címe:
Department of Operations Research and Econometrics
The School of Economics
Odbojárov 10 Bratislava CS–83 220
Czechoslovakia

Gyetván Ferenc