A HATÉKONY ÉS RACIONÁLIS ELOSZTÁS (IN–) KONZISZTENCIÁJA: EGY AXIOMATIKUS MEGKÖZELÍTÉS[1]

FORGÓ FERENC
Budapesti Közgazdaságtudományi Egyetem

A nemzetközi közgazdasági irodalomban már hosszú ideje jelentős helyet foglal el különböző „etikai" kérdések tárgyalása. A teljesség igénye nélkül említjük meg RAWLS [3], SEN [4], ZAJAC [5], MOULIN [6] és KANG [7] munkáit. Ezekben a vizsgálat tárgya elsősorban a gazdasági „igazságosság", az „igazságos" elosztás, illetve ezek kapcsolata a gazdasági hatékonysággal.

A hazai közgazdasági irodalomban hosszú időn keresztül ez a kérdés fel sem merült. Az utóbbi időben azonban különböző formában és szinteken fogalmazódott meg egy olyan állítás, hogy a gazdasági hatékonyság és bizonyos értékek összessége, amelyeket a „szocialista gazdálkodás etikai elveinek" is neveznek, inkonzisztensek. Ennek legkitűnőbb példája KORNAI [1] könyvének „Hatékonyság és szocialista erkölcs" című fejezete, amelyben nagyon meggyőzően érvel amellett, hogy „elkerülhetetlenül összeütközések keletkeznek egyfelől a hatékonyság feltételei, másfelől a szocialista gazdaság etikai elvei között".

Ebben a cikkben megfelelő absztrakciós szinten, a hatékonyságnak egy harmadik tényezővel, az elosztási racionalitással való kapcsolatát vizsgáljuk. Ez természetesen sokkal kevésbé ambiciózusabb vállalkozás, mintha a hatékonyság–igazságosság–racionalitás hármas kapcsolatát elemeznénk, de azt reméljük, hogy annak kimutatása, hogy a hatékonysági és racionalitási követelmények csak kivételes esetekben elégíthetők ki egyszerre, hozzájárul ennek a komplex problémának a jobb megértéséhez.

A hatékonyságot a klasszikus „lokális" módon értelmezzük, a lokálisan legnagyobb teljesítménynövekedést biztosító elosztást vesszük „hatékony" elosztásnak, a „racionalitást" pedig axiomatikus alapokra helyezzük.

A választott modell technikai apparátusa a költségallokációs modellek eszköztárára épül, a közgazdasági interpretáció és az alkalmazás azonban új.

A modell felépítése

Legyen G egy gazdasági egység (népgazdaság, vállalat, szövetkezet, család stb.), amelynek egy adott időszakban a „jövedelmét" (pl. nemzeti jövedelem, nyereség, családi összjövedelem) n „tag" (résztvevő) együttes tevékenysége (munkája) határozza meg. Ilyen tagok lehetnek vállalatok, brigádok, dolgozók, családtagok stb.

[1]Beérkezett: 1989. január 17.

Minden tag a saját tevékenységét különböző „intenzitással" végezheti. Az intenzitás szót itt nem a klasszikus, szűk értelemben használjuk, hanem a lehető legtágabban értelmezzük. Tulajdonképpen a színvonal szó megfelelőbb lenne azzal a megszorítással, hogy minden tag kontrollálni tudja saját tevékenységének színvonalát, pl. munkás esetében szakmai tudásának növelésével, figyelmesebb munkával, vállalat esetében jobb szervezéssel, okosabb döntésekkel.

Feltesszük, hogy minden tag tevékenységének intenzitása 0 és 1 között folytonosan változhat. Ha az i-ik tag tevékenységének intenzitása x_i $(i = 1, \ldots, n)$, akkor a G által elért jövedelem legyen $f(x_1, \ldots, x_n)$, ahol f folytonosan differenciálható függvény a $[0,1]^n$ n-dimenziós intervallumon.

A 0 szintet egy kiinduló intenzitásszintnek vesszük. Ekkor az $f(x)$ az x intenzitásnövekedéshez tartozó többletjövedelem (a későbbiekben egyszerűen csak jövedelem) és ennek az elosztásával foglalkozunk.

Ha az adott időszakban a tagok tevékenységének intenzitása a_i $(i = 1, \ldots, n)$ és a G egész $f(a_1, \ldots, a_n)$ jövedelmét fel akarja osztani tagjai között, felmerül a kérdés, hogyan tegye ezt. Két alapvető követelményt (követelményrendszert) szeretnénk kielégíteni: (a) a hatékonyságra ösztönzés és (b) a racionalitás követelményeit. Felmerül a kérdés, hogy létezik-e olyan szétosztási mechanizmus, amely ezeket az alkalmasan formalizált követelményeket egyszerre ki tudja elégíteni? Legelőször az f jövedelem függvényre teszünk további feltételeket.

F1. $f(0) = 0$, ami azt a követelményt fejezi ki, hogy ha mindenki a kiinduló intenzitásszinten tevékenykedik, akkor nem keletkezik többletjövedelem.

F2. $f'(0) \geq 0$, $f'(x) \neq 0$ minden $x \in [0,1]^n, x \neq \mathbf{1}$ esetén. Ez a feltétel azt jelenti, hogy egyetlen tag intenzitásnövekedése sem csökkenti az összjövedelmet és minden helyzetben (az $x = \mathbf{1}$ kivételével) lehet növelni az összjövedelmet.

A hatékonyságra ösztönzés követelménye. Az $a \in [0,1]^n$ intenzitásvektor kis környezetében (lokálisan) a relatív összjövedelem növekedés maximális legyen, vagyis a h elosztási arányvektor maximalizálja az $f'(a)h$ függvényt a $hh = 1$ normáló feltétel mellett, ahol $f'(a)$ az a helyen vett marginális jövedelemvektor.

Közismert, hogy ha $f'(a) \neq 0$ (ezt pedig az F2. feltétel biztosítja), akkor a hatékony elosztási arányvektor az $f'(a)$ pozitív konstansszorosa, vagyis a hatékonyság követelményének eleget tevő elosztási vektor a marginális jövedelmekkel, az összjövedelemhez való marginális hozzájárulással arányos:

$$\frac{f(a)}{f'(a)a} f'(a)$$

($f'(a)a > 0$ nyugodtan feltehető, az $f'(a)a = 0$ esetben nyilvánvalóan nem is létezik hatékony elosztás).

Ezen a ponton álljunk meg egy pillanatra. Itt, kissé burkoltan, azzal a feltevéssel éltünk, hogy az elosztási arányok ugyanolyan arányú intenzitásváltozást indukálnak. (Például ha az egyik tag kétszer annyit kap a jövedelemtöbbletből, mint a másik, akkor kétszer annyira van ösztönözve az intenzitása növelésére.) Ezért

tehetünk tulajdonképpen egyenlőségjelet a hatékonyságra ösztönzés és a hatékony jövedelemnövelés közé.

A racionális elosztás követelményei. n-rendű elosztási problémának nevezzük az (f, a) párost, ahol a egy n-elemű intenzitásvektor, f pedig egy folytonosan deriválható jövedelemfüggvény. Jelölje P^n az összes n-rendű elosztási problémák halmazát, $P = \bigcup_{n\geq 1} P^n$ pedig valamennyi elosztási probléma halmazát.

Jövedelemelosztási eljárásnak nevezzük azt az $r : P \to \bigcup_{n\geq 1} \mathbb{R}^n$ függvényt, amely minden $(f, a) \in P^n$ párhoz egy $r(f, a) \in \mathbb{R}^n$ vektort (elosztást) rendel ($\mathbb{R}^n$ itt az n-dimenziós euklideszi teret jelöli).

Az $r_i(f, a)$ koordináta az i-ik tag egységnyi (maximális) intenzitású teljesítményére jutó jövedelmét jelenti, $(i = 1, \ldots, n)$. Egy „racionális" jövedelemelosztási eljárástól megköveteljük a következőket.

K1. A megtermelt összjövedelmet pontosan ossza el (se többet, se kevesebbet $f(a)$-nál):

$$\sum_{i=1}^{n} r_i(f, a)a_i = f(a).$$

K2. A jövedelemelosztási eljárás legyen additív, vagyis

$$r(f, a) + r(g, a) = r(h, a) \quad \text{ha} \quad (f, a), (g, a) \in P^n \text{ és } h = f + g.$$

Ez a követelmény azt jelenti, hogy ha a jövedelemfüggvény két részjövedelem függvény összegéből tevődik össze (pl. a számításba vett időszak két egymást nem átfedő részidőszak egyesítése), akkor a jövedelemelosztási eljárást külön-külön alkalmazva a két részidőszakra és a két elosztást összegezve ugyanazt az elosztást kapjuk, mintha az eljárást rögtön az egész időszak jövedelemfüggvényére alkalmaztuk volna. Ez nagyon természetes, tulajdonképpen a könyvelési racionalitást megtestesítő követelmény. (Nemcsak részidőszakok, hanem különböző jövedelemfajták esetére is természetes ezen követelmény teljesülésének kívánalma.)

K3. Tegyük fel, hogy az egész T időszakot két egymást át nem fedő T_1, T_2 részidőszakokra bontjuk és az első tagot formálisan két 1_1 illetve 1_2-vel jelölt taggal helyettesítjük a jövedelemelosztási problémában. Az 1_1 ugyanazt a munkát végzi, amit az első tag a T_1-ben, az 1_2 azt, amit az első tag a T_2-ben. Az összjövedelem így változatlan marad, de az első (eredeti) esetben egy n-dimenziós $(f, a) \in P^n$ jövedelemelosztási problémáról van szó, míg a másodikban egy $(g, b) \in P^{n+1}$ $n+1$-dimenziósról. Az első problémában a első komponense a b első két komponensének összege és $f(x) = g(y)$ mindig fennáll, ha

$$x \in [0, 1]^n,\ y \in [0, 1]^{n+1} \text{ és } x_1 = y_1 + y_2, x_i = y_{i+1}\ (2 \leq i \leq n)$$

A jövedelemelosztási eljárástól megköveteljük, hogy az első és második esetben kapott elosztás „gyakorlatilag" ugyanaz legyen, az elsőben az első tag ugyan-

annyit kapjon, mint a másodikban 1_1 és 1_2 összesen, a többiek pedig természetesen ugyanazt kapják mindkét esetben.

Ha ezt nemcsak összegre, hanem tetszőleges lineáris kombinációra is kiterjesztjük és megköveteljük, akkor azt mondjuk, hogy a jövedelemelosztási eljárás aggregáció–invariáns.

Formálisan és valamivel általánosabban:

Legyen A egy $m \times n$-es mátrix és az f összjövedelem függvény legyen az alábbi alakú

$$f(x) = g(Ax)$$

ahol g folytonosan differenciálható a $[0,1]$-en. Az r jövedelemelosztási eljárástól megköveteljük, hogy

$$r(f,a) = r(g,Aa)A$$

fennálljon.

K4. Azt mondjuk, hogy a jövedelemelosztási eljárás monoton, ha f nem csökkenő voltából következik, hogy $r(f,a) \geq 0$, ami azt a természetes követelményt fejezi ki, hogy ha egy tag intenzitásnövelése nem csökkenti az összjövedelmet, akkor tőle nem szabad jövedelmet elvonni.

Ezek után expliciten is meg tudjuk fogalmazni annak a feltételét, hogy a hatékony és igazságos elosztás egy a intenzitásszint mellett egybeessék. BILLERA és HEATH [2] egy költségallokációs modell keretében bebizonyították, hogy egy és csakis egy olyan költségszétosztási eljárás van, amely a K1–K4 követelményeket kielégíti és ez expliciten meg is adható. Minthogy tételünk bizonyításában – megváltoztatva a megváltoztatandókat – semmilyen lényeges szerepet nem játszik, hogy ott költségről és nem pedig jövedelemről van szó, eredményük az általunk tárgyalt jövedelemelosztási problémára is vonatkozik. BILLERA és HEATH nyomán a K1–K4 igazságossági követelményeket az

$$r(f,a) = \int_0^1 f'(ta)\,dt$$

úgynevezett „AUMANN-SHAPLEY-árak" elégítik ki. Így annak a feltétele, hogy a racionális és hatékony elosztás egybeessék az, hogy az

$$\int_0^1 f'(ta)\,dt = \frac{f(a)}{f'(a)a} f'(a) \tag{1}$$

egyenlőség fennálljon.

Láthatjuk, hogy a hatékony elosztás a marginális jövedelmek arányában, a racionális elosztás az „átlagos" marginális jövedelmek arányában történik (az átlagolás a 0-ról az a szintre való egyenletes felfutás ösvénye mentén történik).

Egy más oldalról megvilágítva: hatékony elosztás esetén az a szinten csak „előre tekintünk", nem érdekel bennünket, hogyan jutottunk oda, míg a racionális elosztásnál a 0-tól a-ig megtett út egésze érdekes.

Azt kell tehát vizsgálnunk, hogy az (1) egyenlőség milyen feltételek mellett áll, illetve nem áll fenn. E célból tovább egyszerűsítjük a modellünket és feltesszük, hogy az a intenzitásszint „elég közel" van a kiinduló 0 szinthez. Olyan közel, hogy az $f(x)$ jövedelemfüggvény jól közelíthető a 0 középpontú, az a vektort a belsejében tartalmazó környezetben egy kvadratikus függvénnyel. A továbbiakban ezzel a kvadratikus függvénnyel dolgozunk:

$$f(x) := Q(x) := px + xCx.$$

$Q(0) = 0$, és az F2. feltevés szerint

$$Q'(0) \doteq p \geq 0,\ p \neq 0$$

C nyugodtan vehető szimmetrikusnak és azt is feltesszük, hogy C definit (pozitív vagy negatív), s ilymódon $Q(x)$ vagy szigorúan konvex vagy szigorúan konkáv.

Nézzük meg, hogyan alakul az (1) egyenlőség most:

$$\int_0^1 f'(ta)\,dt = \int_0^1 p + (2Ca)t\,dt = p + Ca = \frac{f(a)}{f'(a)a} f'(a) = \frac{pa + aCa}{pa + 2aCa}(p + 2Ca)$$

Legyen $\lambda(a) = \dfrac{pa + aCa}{pa + 2aCa}$. Ekkor $p + Ca = \lambda(a)(p + 2Ca)$, amiből

$$(1 - 2\lambda(a))Ca = (\lambda(a) - 1)p.$$

Ha $\lambda(a) = 1$, akkor $Ca = 0$ kell legyen, ami $a \neq 0$ miatt nem lehet. $\lambda(a) = 1/2$ sem lehet $p \neq 0$ miatt. Így

$$a = \frac{\lambda(a) - 1}{1 - 2\lambda(a)} C^{-1} p$$

ami azt jelenti, hogy a a $Q(x)$ abszolút maximumpontjának (minimumpontjának) konstansszorosa.

Különböztessünk meg két esetet:

a) *Q konkáv.* Az (1) egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha 0 intenzitásszintről az a-ra való elmozdulás az „abszolút maximum" irányában történt. Az abszolút maximum nem „lokális" fogalom, s mint ilyen, általában nem látható előre, s így (1) fennállása csak „esetleges", „véletlen" lehet.

b) *Q konvex.* Az érvelés hasonló, ilyenkor az elmozdulás a lokálisan nem ismert abszolút minimumtól való eltávolodás irányában van, ami szintén csak esetleges lehet.

Az a) esetben nevezhetjük a jövedelemfüggvényt *degresszív*nek, míg a b)-ben *progresszív*nek, ha pedig $Q(x)$ lineáris, akkor *semlegesnek*. Semleges, azonos struktúrában való fejlődés (intenzitásnövekedés) esetén könnyű látni, hogy (1) mindig fennáll, tehát a hatékony és racionális elosztás egybeesik. (Mindig ez a helyzet, ha az $f(x)$ jövedelemfüggvény homogén.) Gyorsuló vagy lassuló ütemű (progresszív, illetve degresszív jövedelemfüggvény) fejlődés esetében az azonos struktúrában való fejlődés általában (a kivételes, „véletlen" esettől eltekintve) nem a leghatékonyabb és így a hatékony és racionális elosztás nem eshet egybe, és így valamelyik elvnek a kizárólagos (vagy domináns) alkalmazása ilyenkor lehet leginkább feszültségek forrása.

IRODALOM

1. KORNAI JÁNOS: Ellentmondások és dilemmák. Magvető Kiadó, Budapest, 1983.

2. LOUIS J. BILLERA – DAVID C. HEATH: Allocation of shared costs: a set of axioms yielding a unique procedure. Mathematics of Operations Research, Vol 7, No. 1, 1982.

3. RAWLS, J.: A theory of justice (Cambridge, MA: Belknap Press of Harvard University), 1971.

4. SEN, A. K.: Labour allocation in a cooperative enterprise. Rev. Econom. Stud. 33, 1966, 361–371.

5. ZAJAC, E. E.: Perceived economic justice: the example of public utility regulation, in Cost allocation methods, principles, applications (ed. A. P. Young), North-Holland, Amsterdam, 1985, 119–153.

6. MOULIN, H.: Equal or proportional division of a surplus, and other methods. International Journal of Game Theory, 16, 1987, 161–186.

7. KANGS, S.: Fair distribution rule in a cooperative enterprise. Journal of Comparative Economics 12, 1988, 89–92.

(IN)CONSISTENCY OF THE EFFICIENT AND THE RATIONAL DISTRIBUTION: AN AXIOMATIC APPROACH

In this paper using cost-allocation techniques it is proved that in case of progressive and degressive income function there exists both efficient and rational distributing procedure. We define the efficiency in the classical „local" sense, and provide some expressive requirements for the concept of rationality.

A FÜGGVÉNYHÁNYADOS, FÜGGVÉNYSZORZAT ÉS AZ ÖSSZETETT FÜGGVÉNY ERŐS KVÁZIKONVEXITÁSÁRÓL[1]

JOVANOVIĆ MILAN–POGÁNY TIBOR
Műszaki Főiskola, Banjaluka–Tengerészeti Főiskola, Rijeka

Az összetett függvények, továbbá a függvényhányados és a függvényszorzat konvexitása, pszeudo-, valamint kvázikonvexitása már jól ismert. A cikkben eddigi eredmények általánosítására kerül sor erősen konvex és erősen kvázikonvex esetre.[2]

Dolgozatunkban többek között bizonyítjuk, hogy

(i) nemnegatív, erősen konvex és pozitív, korlátos konkáv függvény hányadosa erősen kvázikonvex;

(ii) nempozitív, erősen konvex és konkáv, alulról pozitív korláttal rendelkező függvény szorzata erősen kvázikonvex;

(iii) a $g \circ f$ összetett függvény erősen kvázikonvex, ha f, g differenciálhatók, f erősen kvázikonvex és $g'(x) \geq m > 0$.

Ezen eredményeket példákkal illusztráljuk, így (i) esetben az aritmetikai és a geometriai közepet vizsgáljuk kompakt, konvex $C \subset \mathbb{R}^n$ halmazon.

Az idézett tétel és a bizonyítás végét ■, definíció, megjegyzés, példa végét □ jelöli.

1. Bevezetés

1.1 Alapfogalmak

A nemlineáris programozásban jól ismert (pl. MARTOS, 1975; SCHAIBLE–ZIEMBA, 1981; MOND, 1983; AVRIEL–DIEWERT–SCHAIBLE–ZANG, 1988; HU–KLEE–LARMAN, 1989) a kvázi-, és pszeudokonvex függvények szerepe (Kuhn–Tucker feltétel, a Slater-féle általánosított feltétel stb.). Ezért a továbbiakban csak röviden ismertetjük a konvexitás fajait, valamint néhány közöttük fennálló kapcsolatot.

A differenciálható $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény pszeudokonvex, ha minden $x, y \in \mathrm{Dom}(f)$ mellett eleget tesz a

$$\langle \nabla f(x), y - x \rangle \geq 0 \Rightarrow f(y) \geq f(x) \tag{1}$$

[1]Beérkezett: 1991. június 17.

[2]A szerzők köszönettel tartoznak a dolgozat egyik ismeretlen bírálójának. Véleménye figyelembevételével több hibát, pontatlanságot és félreérthető fogalmazást sikerült kiküszöbölni.

feltételnek, ahol Dom$(\cdot)$ az értelmezési tartományt, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ pedig a skalárszorzatot jelöli. Továbbá, f akkor kvázikonvex a konvex $C \subset \mathbb{R}^n$ halmazon, ha tetszőleges $x, y \in C$ és $\lambda \in [0,1]$ értékre

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}. \tag{2}$$

Végül is, ha a kvázikonvex f függvényre érvényes a

$$f(x) \neq f(y) \Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \max\{f(x), f(y)\}$$

feltétel minden $\lambda \in (0,1)$ értékre, akkor f explicit kvázikonvex.

Az (1) feltétel a következő alakban is felírható:

$$f(y) < f(x) \Rightarrow \langle \nabla f(x), y - x \rangle < 0. \tag{3}$$

Másrészt, a differenciálható f függvény akkor és csakis akkor kvázikonvex egy konvex C halmazon, ha bármely $x, y \in C$ esetén fennáll:

$$f(y) \leq f(x) \Rightarrow \langle \nabla f(x), y - x \rangle \leq 0. \tag{4}$$

Ezek szerint a pszeudokonvex függvény egyben kvázikonvex is. Az explicit kvázikonvex függvény pedig ad definitionem kvázikonvex. Végül is MARTOS (1975, p.113) bizonyította, hogy a pszeudokonvex függvény explicit kvázikonvex.

1.2 Eddigi eredmények

A nemlineáris programozás módszerei általában az eddigiektől szűkebb függvényosztályokhoz folyamodnak (erősen konvex, erősen kvázikonvex függvények). Így KARMANOV (1989) a relaxációs eljárások hibabecslésével foglalkozott erősen kvázikonvex esetben. Analóg eredményeket adtak KORABLEV (1980) és JOVANOVIĆ (1989; 1) az erősen kvázikonvex függvényekre. Ugyancsak JOVANOVIĆ (1989; 2) ismertette e függvények további tulajdonságát, ez pedig a $\{ x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq \alpha \}$ nívóhalmaz korlátos volta. Következésképpen a folytonos, erősen kvázikonvex függvény infimumát éri el valamely konvex, zárt halmazon. Másrészt, a feltétel nélküli minimalizációs algoritmusokban nem szükséges feltételezni, hogy $\{ x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq f(x_0) \}$ zárt valamely x_0 értékre.

További alkalmazások találhatók a KORABLEV (1980) és JEYAKUMAR (1986) cikkekben. Így JEYAKUMAR (1986) fontos másodrendű dualitási tételeket bizonyított az úgynevezett s-kvázikonvex nemlineáris programozás témakörében (f akkor s-kvázikonvex, ha a (6) reláció $s \in \mathbb{R}$ mellett érvényes).

A következő két definíciót POLJAK (1986) adta meg. Jelölje $\|\cdot\|$ az euklideszi normát.

1. Definíció. Legyen C konvex halmaz, $x, y \in C$, $\lambda \in [0,1]$. Ekkor f erősen konvex C halmazon, ha létezik olyan r pozitív állandó, hogy

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - \lambda(1-\lambda)r\|x-y\|^2. \square \tag{5}$$

2. Definíció. Tegyük fel, hogy C konvex halmaz. Ha létezik, minden $x, y \in C$ és $\lambda \in [0,1]$ mellett olyan pozitív s, melyre

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\} - \lambda(1-\lambda)s\|x-y\|^2 \tag{6}$$

akkor f függvény erősen kvázikonvex. □

ROCKAFELLAR (1976) következő tétele alapján elégséges és szükséges feltételek adhatók meg (konvex terminológiában) a differenciálható erősen konvex függvényekre.

1. Tétel. A konvex C halmazon akkor és csakis akkor létezik az 1. Definíció értelmében vett r állandó, ha a

$$f(x) - r\|x\|^2$$

függvény a C halmazon konvex. ■

Megjegyezzük, hogy a tétel bizonyítása egyáltalán nem nehéz; tulajdonképpen a

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2 = \lambda\|x\|^2 + (1-\lambda)\|y\|^2 - \lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2 \tag{7}$$

egyenlőségen alapszik, ahol $\lambda \in [0,1]$.

Ezek után közvetlenül adódik az 1. Tételből az

1. Következmény. Legyen f kétszer folytonosan differenciálható a konvex $C \subset \mathbb{R}^n$, nem üres belsejű ($\mathrm{int}(C) \neq \emptyset$) halmazon. Akkor és csakis akkor lesz f erősen konvex (pozitív r állandóval) a C halmazon, ha minden $x \in C$, $v \in \mathbb{R}^n$ értékre

$$\langle \nabla^2 f(x)v, v\rangle \geq 2r\|v\|^2. \square \tag{8}$$

Természetesen a fenti definíciók és eredmények konkáv esetre is visszavezethetők. Így, ha $-f$ kvázi-, pszeudokonvex ..., akkor f kvázi-, pszeudokonkáv .... Tehát például f akkor kvázikonkáv, ha $-f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \max\{-f(x), -f(y)\}$, azaz $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{f(x), f(y)\}$. Ezt (3) segítségével láthatjuk be.

Nyilván minden erősen konvex függvény erősen kvázikonvex, és minden erősen kvázikonvex függvény egyben explicit kvázikonvex is. Végül is a differenciálható, erősen kvázikonvex függvény szigorúan pszeudokonvex, mivel a differenciálható f függvény akkor és csakis akkor erősen kvázikonvex egy konvex C halmazon, ha

$$f(y) \leq f(x) \Rightarrow \langle \nabla f(x), y-x\rangle \leq -s\|x-y\|^2 \tag{9}$$

érvényes pozitív s mellett. Az eredményt VIAL (1983) bizonyította.

1. Példa. JOVANOVIĆ (1990). Nem létezik olyan nem üres belsejű konvex $C \subset \mathbb{R}^n$ halmaz, melyen $f(x) = \|x\|$ euklideszi norma erősen konvex, ennek ellenére $\|x\|$ erősen kvázikonvex a korlátos, nem üres belsejű konvex halmazon. Azonban $f(x) = \|x\|^2$ erősen konvex $C \equiv \mathbb{R}^n$ esetében (lásd a (7) relációt). □

2. Erősen kvázikonvex függvényhányados és szorzat

2.1 Függvényhányados

MARTOS (1975, p.62) vizsgálta, mikor explicit kvázikonvex, valamint pszeudokonvex (differenciálható függvényekre) a $h(x) = f(x)/g(x)$ függvényhányados.

A 16 lehető esetből, amikor f konvex vagy konkáv, nemnegatív vagy nempozitív, 4 lényeges eset emelhető ki úgy, hogy a többi 12 előjelváltoztatással kapható meg belőlük. A lényeges 4 eset tehát

$$(A)\quad \left\{\begin{array}{l} f \text{ konvex, nemnegatív} \\ g \text{ konkáv, pozitív} \end{array}\right\} \Rightarrow h \text{ explicit kvázikonvex}$$

$$(B)\quad \left\{\begin{array}{l} f \text{ konvex, nempozitív} \\ g \text{ konvex, pozitív} \end{array}\right\} \Rightarrow h \text{ explicit kvázikonvex}$$

$$(C)\quad \left\{\begin{array}{l} f \text{ konvex, nemnegatív} \\ g \text{ konvex, pozitív} \end{array}\right\}$$

$$(D)\quad \left\{\begin{array}{l} f \text{ konvex, nempozitív} \\ g \text{ konkáv, pozitív} \end{array}\right\}$$

(C) és (D) esetben $h(x)$ hányados nem feltétlenül kvázikonvex, sőt, explicit kávzikonkáv sem (ha $-h$ explicit kvázikonvex, akkor h explicit kvázikonkáv). A következő két példa éppen azt illusztrálja, hogy (C) és (D) esetben nem várható általános érvényű, az előző esetekhez hasonló kijelentés.

2. Példa. A harmadik, (C) eset feltételeit $f(x) = x^2$, $g(x) = e^x$ kielégítik ugyan, de $h(0) < \min\{h(-1), h(1)\}$, valamint $h(2) > \max\{h(0), h(3)\}$. □

3. Példa. Legyen $C = [-1, 1]$, $f(x) = -1$, $g(x) = 1 - x^2$. Ekkor $h(x)$ nem kvázikonkáv. Továbbá, $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = 1 - |x|$ függvények hányadosa nem kvázikonvex. □

2. Tétel. Tegyük fel, hogy f nemnegatív, erősen konvex, g pozitív, konkáv, felülről korlátos a konvex C halmazon. Ekkor $h(x) = f(x)/g(x)$ erősen kvázikonvex ugyanott.

Bizonyítás. Ha $x, y \in C$, minden $\lambda \in (0,1)$ értékre jelölje $x_\lambda = \lambda x + (1-\lambda)y$. Ezek után érvényes

$$\begin{aligned} h(x_\lambda) &\leq \frac{\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - \lambda(1-\lambda)r\|x-y\|^2}{\lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)} \\ &= \frac{\lambda g(x) f(x)/g(x) + (1-\lambda)f(y)g(y)/g(y) - \lambda(1-\lambda)r\|x-y\|^2}{\lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)} \\ &\leq \max\left\{\frac{f(x)}{g(x)}, \frac{f(y)}{g(y)}\right\} - \frac{\lambda(1-\lambda)r\|x-y\|^2}{\lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)} \\ &\leq \max\{h(x), h(y)\} - \lambda(1-\lambda)s\|x-y\|^2 \end{aligned}$$

ahol $s = r/M$, $M = \sup\{ g(x) \mid x \in C \}$. ■

Érdekes megemlíteni, hogy ha $g(x)$ affin függvény, vagyis $g(x) = \langle c, x \rangle + \gamma$, ahol $c \in \mathbb{R}^n$, $\gamma \in \mathbb{R}$, akkor

$$g(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y).$$

Így a 2. Tétel bizonyításában szereplő egyenlőtlenségláncolat érvényes tekintet nélkül az $f(x)$ előjelére, ha $g(x)$ affin függvény. Éppen ezt a tényt mondja ki a

2. Következmény. Legyen $f(x)$ erősen konvex a konvex C halmazon. Ekkor $h(x) = f(x)/(\langle c, x \rangle + \gamma)$ erősen kvázikonvex a $C_m = \{ x \in C \mid 0 < \langle c, x \rangle + \gamma < m \}$ halmazokon.

Bizonyítás. Az 1. Tétel alapján a nemnegatív $h(x)$ függvény akkor erősen kvázikonvex, ha létezik pozitív, konkáv, felülről korlátos $g(x)$, melyre $h(x)g(x)$ erősen konvex. Affin $g(x)$ nyilván kielégíti e feltételeket. ■

Nem nehéz belátni, hogy a kétszer differenciálható egyváltozós $\phi(x)$ függvény akkor és csakis akkor erősen konvex az $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon, ha $\phi''(x) \geq 2r > 0$, (ez tulajdonképpen az 1. Következmény egydimenziós esete).

4. Példa. A $h(x) = \sin(x)$ függvény nem erősen konvex $[-\pi/4, 0]$ intervallumon, mivel $h''(0) = 0$. □

1. Megjegyzés. A függvényhányados nevezőjében szereplő függvény konkáv volta nem cserélhető fel kvázikonkáv tulajdonsággal, ugyanis a következő egyszerű ellenpéldát szerkeszthetjük meg: $f(x) = e^x$ erősen konvex $C = [0, 1]$ intervallumon (lásd az 1. következményt, $r = 1/2$), $g(x) = e^x$ pozitív, korlátos és kvázikonkáv C-n, ennek ellenére $h(x) = f(x)/g(x) = 1$ nyilvánvalóan nem erősen kvázikonvex C-n. □

Az eddigiek szerint, ha (A) esetben „f konvex" helyett „f erősen konvex" áll, valamint g korlátos, akkor a $h(x) = f(x)/g(x)$ függvény erősen kvázikonvex. Vegyük észre, hogy ez (B) esetben is igaz. Ezt illusztrálja ugyanis a következő.

3. Tétel. Tegyük fel, hogy f nempozitív, erősen konvex, továbbá g pozitív, konvex, felülről korlátos a konvex C halmazon. Ekkor $h(x) = f(x)/g(x)$ erősen kvázikonvex ugyanott.

Bizonyítás. Ha $x, y \in C$, minden $\lambda \in (0, 1)$ értékre legyen $x_\lambda = \lambda x + (1-\lambda)y$. Mivel $f \leq 0$ és g pozitív, konvex függvény (más szóval $g(x_\lambda) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)$), érvényes

$$h(x_\lambda) = \frac{f(x_\lambda)}{g(x_\lambda)} \leq \frac{f(x_\lambda)}{\lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)} \leq \frac{\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - \lambda(1-\lambda)r\|x-y\|^2}{\lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)}$$

A bizonyítás ezek után megegyezik a 2. Tétel bizonyításával. ■

Végezetül a 2. Tétel további vállfajait fogalmazzuk meg egy új következmény és két új példa kíséretében.

$$(E) \quad \left\{ \begin{array}{l} f \textit{ erősen konkáv, nempozitív} \\ g \textit{ konvex, negatív, alulról korlátos} \end{array} \right\} \Rightarrow h \textit{ erősen kvázikonvex}$$

$$(F)\quad \left\{\begin{array}{l} f \text{ erősen konkáv, nempozitív} \\ g \text{ konkáv, pozitív, felülről korlátos} \end{array}\right\} \Rightarrow h \text{ erősen kvázikonkáv}$$

$$(G)\quad \left\{\begin{array}{l} f \text{ erősen konvex, nemnegatív} \\ g \text{ konvex, negatív, alulról korlátos} \end{array}\right\} \Rightarrow h \text{ erősen kvázikonkáv}$$

3. Következmény. A nempozitív $h(x)$ függvény akkor lesz erősen kvázikonvex az $[a,b] \subset I\!R$ intervallumon, ha létezik olyan $s > 0$, melyre

$$h''(x) + 2h'(x) + h(x) \geq s \tag{10}$$

Bizonyítás. Legyen $0 < 2r \leq se^a$. Ekkor minden $x \in [a,b]$ értékre igaz, hogy $h''(x) + 2h'(x) + h(x) \geq s$ miatt

$$\big(h''(x) + 2h'(x) + h(x)\big)e^x \geq se^x \geq se^a \geq 2r \Rightarrow \big(e^x h(x)\big)'' \geq 2r > 0.$$

Nyilván ekkor $e^x h(x)$ erősen konvex, nempozitív függvény. Mivel e^x pozitív, konvex, a 3. Tétel értelmében

$$\frac{e^x h(x)}{e^x} \equiv h(x)$$

erősen kvázikonvex az $[a,b]$ intervallumon. ■

5. Példa. A $h(x) = \sin x$ nem erősen konvex a $[-\pi/4, 0]$ intervallumon (4. példa), azonban ugyanott erősen kvázikonvex, ugyanis

$$h''(x) + 2h'(x) + h(x) = 2\cos x \geq \sqrt{2}. \square$$

6. Példa. Vizsgáljuk most az $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$ függvényt, ha $\alpha_i \in I\!R \setminus [0,1]$. Az $f(x)$ függvény $\nabla^2 f(x)$ Hesse mátrixa ez esetben diagonális, lévén $f(x)$ szeparábilis. Így az 1. Következmény alkalmazásával $f(x)$ erősen konvex a $\prod_{i=1}^n [a_i, \infty] \subset I\!R_+^n$ n-dimenziós intervallumon, ha $\alpha_i > 2$. Továbbá, legyen $\alpha_i \in (-\infty, 0) \cup (1,2)$. Ekkor $f(x)$ erősen konvex a $\prod_{i=1}^n (0, a_i]$ intervallumon. Végezetül $\alpha_i = 2$ esetben f erősen konvex az egész $I\!R^n$ téren. Továbbá tegyük fel, hogy $\beta_i > 0$ és $\sum_{i=1}^n \beta_i = 1$. Az $I\!R_+^n$ intervallumon ekkor a $g(x) = \prod_{i=1}^n x_i^{\beta_i}$ függvény konkáv (SUHAREV–TIMOHOV–FEDOROV, 1986, p.88). Mivel f és g kielégítik a 2. Tétel feltételeit ha $g(x)$ korlátos, hányadosuk $h(x) = f(x)/g(x)$ erősen kvázikonvex a $[a,b]^n \subset I\!R_+^n$ n-dimenziós téglalapon.

A fenti eredmény speciális esete a hatványközép és a mértani közép hányadosa; $h : I\!R_+^n \to I\!R$,

$$h(x) = \Big(\sum_{i=1}^n x_i^n / n\Big)\Big(\prod_{i=1}^n x_i\Big)^{-1/n} \tag{11}$$

mely függvény erősen kvázikonvex minden konvex, kompakt $C \subset I\!R^n$ halmazon, ha $n \geq 2$. $\square$

2. Megjegyzés. A 6. Példában rögzített $n = 1$, $\alpha_1 = 2$, $\beta_1 = 1$ értékekre $h(x) = x$. E függvény erősen kvázikonvex $C = [1, 2]$ intervallumon, de nem erősen konvex ugyanott. □

3. Megjegyzés. A hányadosprogramozás (fractional programming) célfüggvénye $h(x) = f(x)/g(x)$; ha azonban speciálisan $f(x)$ és $g(x)$ affin függvények, akkor hiperbolikus programozásról van szó (MARTOS, 1975, p.176). A hányadosfüggvény tulajdonságainak kivizsgálása tehát különösen fontos feladat. Érdekes megjegyezni, hogy az erős kvázikonvexitásnak nincs jelentősebb szerepe a hiperbolikus programozásban, mivel affin függvények hányadosa csak az egy-, és kétdimenziós esetben lehet erősen kvázikonvex. (Ezt a tényt a 7. Példában látjuk majd be.)

Egészen más a helyzet, ha $f(x)$ nem affin. Ekkor néhány konkrét következtetés is levonható. Példának okáért KARMANOV (1989, pp.137–144) bizonyította be, hogy

$$\min f(x), \quad x \in \{ x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) \geq 0,\ i = \overline{1, m} \}$$

probléma korrekt, ha f erősen konvex. Ez az eredmény akkor is érvényen marad, ha $h(x)$ erősen kvázikonvex hányadosfüggvényre alkalmazzuk Karmanov feladatát. E tény bizonyítása az erősen kvázikonvex függvényeknél alkalmazott egyenlőtlenséglánc alapozódik meg. Következésképpen megjegyezhetjük, hogy a hányadosprogramozási probléma korrekt, ha $f(x)$ erősen konvex, $g(x)$ pedig affin függvény (2. Következmény). □

Térjünk most vissza az affin függvények hányadosának kérdésére.

7. Példa. A $h(x) = (\langle a, x \rangle + \alpha)/(\langle b, x \rangle + \beta)$ függvény egyetlen konvex $C \subset \mathbb{R}^n$, $\operatorname{int}(C) \neq \emptyset$ halmazon sem erősen kvázikonvex, ha $n \geq 3$. A bizonyítás lényegét a következő gondolatmenet tükrözi. Tegyük fel, hogy $n \geq 3$, és $x \in \operatorname{int}(C)$, továbbá legyen a tetszőleges $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ vektor merőleges a, valamint b vektorra. Ekkor létezik olyan $t > 0$, melyre $y = x + tv \in C$. Mivel $\langle a, v \rangle = \langle b, v \rangle = 0$, innét $h(x) = h(y)$.

Továbbá $\nabla h(y) = (a - h(y)b)/(\langle b, x \rangle + \beta)$ és $y - x = tv$, ezért

$$\langle \nabla h(y), y - x \rangle = 0$$

látható be. Mármost ezen implikáció előzménye igaz, következménye pedig hamis minden $s > 0$ ($\|v\| \neq 0$) esetén. Tehát $h(x)$ nem lehet erősen kvázikonvex. □

Hátramaradt még az egy- és kétdimenziós eset. Ha $n = 1$, akkor

$$h(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$$

erősen kvázikonvex minden $-\delta/\gamma \notin [a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon, ha $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Ugyanis, ha $f \in C^1[a, b]$ és $f'(x) \neq 0$ minden $x \in [a, b]$ értékre, akkor f erősen kvázikonvex az $[a, b]$ intervallumon, JOVANOVIĆ (1990).

Végezetül is, legyen $n = 2$. Ekkor

$$h(x) = \frac{\langle a, x \rangle + \alpha}{\langle b, x \rangle + \beta}$$

nem erősen kvázikonvex $\{a, b\}$ lineáris függőségének esetében. Ugyanez a helyzet, ha $\alpha = \beta = 0$.

Lineáris függőség mellett létezik olyan $\rho \neq 0$, hogy $a = \rho b$. Ezek után a bizonyítás megegyezik az $n \geq 3$ eset bizonyításával.

Ha $\alpha = \beta = 0$, természetes, hogy $\mathrm{Dom}(h) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Válasszunk $x \in \mathrm{int}(C)$, valamint legyen $y = tx$, $t \in (0, 1)$. Ilyen t nyilván létezik, hiszen $0 \notin C$. Ezek után ismételten az $n \geq 3$ eset bizonyítási eljárásával tudunk majd következtetni.

Végleges választ azonban a kérdésre, hogy mikor is erősen kvázikonvex $h(x)$ hányadosfüggvény ha $n = 2$, nem tudtunk megadni.

2.2 Függvényszorzat

A függvényszorzat analizálásánál a következő három fontos esetben ((H), (I), (J)), csak (I)-ben lehet általános érvényű következtetést levonni. Így (I) és vállfajai bizonyítását MARTOS (1975, p.61) tette közzé.

$$(H) \quad \left\{ \begin{array}{l} f \text{ konvex, nemnegatív} \\ g \text{ konkáv, nemnegatív} \end{array} \right\}$$

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} f \text{ konvex, nempozitív} \\ g \text{ konkáv, nemnegatív} \end{array} \right\} \Rightarrow s \text{ explicit kvázikonvex}$$

$$(J) \quad \left\{ \begin{array}{l} f \text{ konvex, nemnegatív} \\ g \text{ konvex, nemnegatív} \end{array} \right\}$$

Egyszerű ellenpéldát adhatunk meg kvázikonvex (kvázikonkáv) szorzatra (H) esetben. Ha $f(x) = x$, $g(x) = 1 - x$, akkor $C = [0, 1]$ intervallumon $s(x) = x(1 - x)$ nem (explicit) kvázikonvex; továbbá $f(x) = x^2$, $g(x) = 1$ és $C \equiv \mathbb{R}$ mellett $s(x) = x^2$ nem (explicit) kvázikonkáv.

Azonban az utóbbi (J) esetben sem lesz $s(x)$ szükségképpen kvázikonvex (kvázikonkáv), ami a 2. Példa alapján ($s(x) = x^2 e^{-x}$) jól látható.

A pozitív, konkáv $g(x)$ függvény reciprok függvénye konvex, MARTOS (1975, p.62). A 3. Tétel alapján ezek szerint

$$(K) \quad \left\{ \begin{array}{l} f \text{ erősen konvex, nempozitív} \\ g \text{ konkáv, alulról pozitívan korlátos} \end{array} \right\} \Rightarrow s \text{ erősen kvázikonvex.}$$

Vegyük észre, hogy (K) két variánssal rendelkezik.

3. Az összetett függvény erős kvázikonvexitása

Legyen $C \subset \mathbb{R}^n$ konvex halmaz, $f : C \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Végül jelölje $g \circ f$ az összetett függvényt. MARTOS (1975) ismertette a következő eredményeket:

(L) Ha f konvex, g konvex és monoton nemcsökkenő, akkor $g \circ f$ konvex C halmazon; MARTOS (1975, p.58).

(M) Ha f kvázikonvex, g monoton nemcsökkenő, akkor $g \circ f$ kvázikonvex; MARTOS (1975, p.59).

(N) Ha f pszeudokonvex, g differenciálható és $g'(x) > 0$, akkor $g \circ f$ pszeudokonvex, MARTOS (1975, p.117).

Azonnal szembe tűnik, hogy f konvexitása mellett g konvexitása is elégséges feltétele $g \circ f$ konvex voltának. Hasonló érvényes erősen konvex esetben is. Ezzel kapcsolatban VIAL (1983) bizonyította be a következő eredményt.

4. Tétel. Legyen f erősen konvex, továbbá $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, monoton növekvő. Tegyük fel, hogy g'_+, g'_- deriváltak alulról korlátosak, pozitív alsó korláttal. Ekkor $g \circ f$ erősen konvex. ■

Végezetül még egy általánosítást fogalmazunk meg.

5. Tétel. Legyen f differenciálható, erősen kvázikonvex a konvex C halmazon, g differenciálható, valamint $g'(x) \geq m > 0$. Ekkor C halmazon $h = g \circ f$ erősen kvázikonvex.

Bizonyítás. Tetszőleges $x, y \in C$ esetén a következő igaz:

$$h(y) \leq h(x) \Rightarrow g^{-1}(h(y)) \leq g^{-1}(h(x)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(y) \leq f(x) \Rightarrow \langle \nabla f(x), y - x \rangle \leq -s\|x - y\|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle g'(f(x))\nabla f(x), y - x \rangle \leq -g'(f(x))s\|x - y\|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle \nabla h(x), y - x \rangle \leq -ms\|x - y\|^2 . \blacksquare$$

IRODALOM

1. AVRIEL, M.–DIEWERT, W. E.–SCHAIBLE, S.–ZANG, I. (1988): Generalized Concavity, Plenum Press, New York.

2. HU, T. C.–KLEE, V.–LARMAN, D. (1989): Optimization of Globally Convex Functions, IMA Preprint Series 485, University of Minnesota.

3. JEYAKUMAR, V. (1986): ρ-convexity and the second order duality, Util. Math. 19, 71–85.

4. JOVANOVIĆ, M. (1989; 1): Some inequalities for strong quasiconvex functions, Glas. Mat. 24(44), 25–29.

5. JOVANOVIĆ M. (1989; 2): On strong quasiconvex functions and boundedness of level sets, Optimization 20, 163–165.

6. JOVANOVIĆ M. (1990): Strong quasiconvexity of a norm and linear functions, Rad. Mat. 6, 215–220.

7. KARMANOV, V. G. (1989): Mathematical Programming, Mir Publishers, Moscow.

8. KORABLEV, A. I. (1980): On relaxational methods of minimization of pseudoconvex functions, Issled. po Prikl. Mat., Kazan 8, 3–8. (orosz nyelven)

9. MARTOS B. (1975): Nonlinear Programming: Theory and Methods, Akadémiai Kiadó, Budapest

10. MOND, B. (1983): Generalized convexity in mathematical programming, Bull. Amer. Math. Soc. 27, 185–202.

11. POLJAK, B.T. (1966): Existence theorem and convergence of minimizing sequences in extremum problems with restrictions, Dokl. Akad. Sci USSR 166, 287–290. (orosz nyelven)

12. ROCKAFELLAR, R. T. (1976): Saddle points of Hamiltonian systems in convex Lagrange problems having a nonzero discount rate, J. Econ. Theory 12, 71–113.

13. SCHAIBLE, S.–ZIEMBA, W. T. (eds.) (1981): Generalized Concavity in Optimization and Economics, Academic Press, Inc., New York.

14. SUHAREV–TIMOHOV–FEDOROV (1986): Optimization Methods Course, Nauka, Moscow. (orosz nyelven)

15. VIAL, J. P. (1983): Strong and weak convexity of sets and functions, Math. of Oper. Res. 8, 231–259.

ON THE STRONG QUASICONVEXITY OF QUOTIENT, PRODUCT AND COMPOSITE FUNCTION

The characterization of convexity – as well as pseudo- and quasiconvexity – of the composite, product and quotient function is well-known. These results are generalized in this paper for strongly convex and strongly quasiconvex case. We prove, among others, that (i) the quotient of a non-negative, strongly convex and a positive, bounded concave function is strongly quasiconvex; (ii) the product of a non-positive, strongly convex function and a concave function with positive lower bound is strongly quasiconvex; (iii) the composite function $g \circ f$ is strongly quasiconvex whenever f, g are differentiable, f strongly quasiconvex and $g'(x) \geq m \geq 0$. These results are illustrated by many examples, e.g. for (i) we examine the arithmetical and geometrical means over a convex, compact set in $\mathbb{R}^n$.

EGY KLASZTEREZŐ GLOBÁLIS OPTIMALIZÁLÁSI MÓDSZER A PARAMÉTERBECSLÉSI FELADAT MEGOLDÁSÁRA[1,2]

CSENDES TIBOR
József Attila Tudományegyetem, Kalmár Laboratórium

1. A paraméterbecslési feladat

A természettudományok gyakori módszere, hogy a vizsgált rendszert egy modellel közelítik. Az illető rendszer működésének megértését az jelzi, ha viselkedését jól lehet leírni, jósolni a modell viselkedése alapján. A paraméterbecslési feladat függvény formájában adott modelleknek a mérési adatokhoz való illesztését és a paraméterek meghatározását tűzi ki célul.

A paraméterbecslési feladatot a numerikus matematikához, és azon belül az optimalizáláshoz, vagy más megközelítésben az operációkutatáson belül a matematikai programozáshoz szokás sorolni. A paraméterbecslési feladat gyakorlati alkalmazásáról megemlítünk néhány olyan közleményt, amely a dolgozatunkban szereplő eredményekhez kötődik, illetve valamely vizsgált algoritmus használatával elért eredményt tartalmaz: [9,12,14,17,18,19,22,34,35,36].

A paraméterbecslési feladat fontosságát az is jelzi, hogy a 100 legtöbb hivatkozást kapott természettudományi közlemény között az egyetlen matematikai cikk D. W. Marquardt publikációja a nemlineáris paraméterbecslésről [23]. A feladat nehézségét pedig az jellemzi, hogy például a Fermat-sejtést is meg lehet fogalmazni paraméterbecslési feladatként [25].

E dolgozatban kizárólag a determinisztikus esettel foglalkozom, amikor tehát a statisztikai jellegű megközelítéssel szemben egy konkrét adatsorhoz legjobb illeszkedést biztosító modellparamétereket keressük. A dolgozat egy klaszterező globális optimalizálási módszert ismertet, és teszteredményeket tartalmaz annak numerikus hatékonyságára vonatkozóan.

A paraméterbecslési feladat szokásos alakja a következő:

$$\min_{x \in X} f(x) \tag{1}$$

ahol $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

[1] Beérkezett: 1991. június 17.
[2] A kutatások anyagi feltételeit részben az 1074/1987 és 2879/1991 sz. OTKA pályázat és a 314/108/004/8 sz. DAAD ösztöndíj biztosították

$$f(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(f_i - f_{mod}(s_i, x))^2}$$

$f_i \in I\!R$ adatpont; $f_{mod}(s, x)$ pedig a modell-függvény, s annak változója, s_i-k az alappontok, $i = 1, 2, \ldots, m$; $m > 0$ egész. $X \subseteq I\!R^n$ kompakt halmaz, a lehetséges megoldások halmaza. X a legtöbb esetben egy n-dimenziós intervallum: $X = \{x \in I\!R^n : a_j \leq x_j \leq b_j\}$; $a_j, b_j \in I\!R; j = 1, 2, \ldots, n$. Ebben az esetben a lehetséges megoldások halmazát megadó feltételek egyszerű korlátok a paraméterekre. Az (1) feladat célfüggvénye a modellfüggvény optimális legkisebb négyzetes értelmű illesztését adja meg az f_i adatpontokhoz.

Az (1) feladat megoldása során gyakran feltételezik [13], hogy $f(x)$ nem multiextremális, azaz csak egy helyi minimuma van, vagy hogy legalábbis egy megfelelő kezdőpont áll rendelkezésre a helyi kereső algoritmus számára. Mivel számos olyan gyakorlati paraméterbecslési feladatot találtunk, amelynek célfüggvényének több helyi minimumpontja volt, ezért megvizsgáljuk az összefüggést az (1) nemlineáris paraméterbecslési feladat és a globális optimalizálási feladat között. Ez utóbbit a következő módon szokás definiálni:

Tekintsünk egy X kompakt halmazt az n-dimenziós valós térben, és egy $g(x) : I\!R^n \to I\!R$ esetleg multiextremális függvényt. A feladat a $g(x)$ egy $x^* \in X$ globális minimumpontjának megkeresése, amelyre $g(x^*) \leq g(x)$ teljesül minden $x \in X$ pontra.

Azt találtuk, hogy az (1) feladat célfüggvényének szerkezete csak $f(x)$ nemnegativitását biztosítja, pontosabban érvényes a következő

1. ÁLLÍTÁS. *Minden nem-negatív $g(x) : I\!R^n \to I\!R$ valós függvényhez, m egészhez és $f_i \in I\!R$, $i = 1, 2, \ldots, m$ valós számokhoz létezik olyan $f_{mod}(s, x)$ valós függvény, hogy*

$$g(x) = f(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(f_i - f_{mod}(s_i, x))^2}$$

minden $x \in I\!R^n$ pontra.

BIZONYÍTÁS. Legyenek például $g_i(x) : I\!R^n \to I\!R$ valós, nem-negatív függvények $(i = 1, 2, \ldots, m)$ úgy, hogy

$$g(x)^2 = \sum_{i=1}^{m} g_i(x).$$

Ilyen függvények léteznek, mivel például a $g_i(x) = g(x)^2/m$ függvények kielégítik ezt a feltételt. Ezután az az $f_{mod}(s, x)$ modell-függvény, amelyre $f_{mod}(s_i, x) = g_i(x)^{1/2} + f_i$, eleget tesz az 1. Állításnak. □

Vegyük észre, hogy a $g_i(x)$ függvények csaknem teljesen szabadon választhatók meg, és ezen a módon további tulajdonságokat tudunk biztosítani az $f_{mod}(s,x)$ függvényekre. Például, ha $g(x)$ folytonos, akkor $f_{mod}(s,x)$ is választható folytonosnak.

Az 1. Állítás szerint egy nemlineáris paraméterbecslési feladat célfüggvénye bármely nem-negatív valós függvény lehet. Tehát egy nemlineáris paraméterbecslési feladatnak lehet akárhány (sőt akár kontinuum sok) helyi minimumpontja. Az $f(x)$ szerkezete, azaz a legkisebb négyzetes alak csak $f(x)$ nem-negativitását biztosítja, semmi más szabályosságot nem eredményez. Ez indokolja általános globális optimalizálási módszerek alkalmazását olyan speciális szerkezetű feladatokra is, mint (1).

2. Klaszterező globális optimalizálási módszer

Itt egy olyan algoritmust tárgyalunk, amely az előző szakaszban definiált globális optimalizálási feladat megoldására szolgál. Ez a módszer csak a célfüggvény értékét tetszőleges pontban kiszámító szubrutinra támaszkodik. Ebben az értelemben nevezzük hagyományosnak. Az ilyen eljárástól nem várhatjuk, hogy garantált megbízhatósággal mindig megtalálja a globális minimumot, de azt igen, hogy nagy valószínűséggel jó becslést adjon rá.

A globális optimalizálási feladat nehézségének egyik oldalát mutatja az, hogy még egy pont helyi minimumpont voltának ellenőrzése is NP-teljes feladat [25]. A másik gyakran idézett tétel az, hogy nem létezik olyan determinisztikus algoritmus, amely csak a célfüggvényt és annak deriváltjait kiértékelő szubrutinhívások segítségével meg tudná határozni véges számú lépésben bármely globális optimalizálási feladat megoldását [38]. A hagyományos módszerek fejlesztésének célja így az marad, hogy minél hatékonyabb és megbízhatóbb módszert találjunk. Amint látni fogjuk, a gyakorlati feladatok nagy részére létezik kielégítő megoldást nyújtó eljárás.

A globális optimalizálási módszereket célszerű a felhasznált információ jellege szerint osztályozni. A már említett hagyományos algoritmusok csak a célfüggvény és esetleg annak deriváltjai értékét használják. Ez az osztály sok érdekes módszert tartalmaz, mint a többszörös helyi keresés mintavétel után (multistart) [38], a nemlineáris szimplex módszer [30], trajektória-követés [10], vagy az alagút-módszer [38]. A Lipschitz konstans ismeretére támaszkodó algoritmusok [20,28,29] először egydimenziós feladatokra voltak alkalmazhatók, ezeket a korlátozás és szétválasztás módszerével illetve térkitöltő görbékkel általánosították. Az utóbbi években az intervallum-aritmetikával meghatározott befoglaló függvényre [7,8,15,24,31] alapozó, és a célfüggvény képletét szimbolikus manipulációval kezelő [16] eljárások is elterjedtek.

A korábbi kiterjedt alkalmazási tapasztalatok és a szakirodalom alapján Boender és munkatársai algoritmusát [4,32,33,37] implementáltuk két verzióban, kisebb változtatásokkal. A két változat közötti különbség az, hogy az egyik egy kvázi-

Newton eljárást [13], a másik egy „véletlen séta" típusú helyi kereső módszert (UNIRANDI [21,38]) használ. A következőkben ezeket A, ill. B algoritmusnak fogjuk nevezni. Mindkettő deriváltmentes, tehát a megoldáshoz nem használják a célfüggvény parciális deriváltjait. Ez utóbbiak meghatározása ugyanis nehéz, illetve lehetetlen számos paraméterbecslési feladat esetén [18,19]. UNIRANDI robusztus, de rossz hatékonyságú helyi kereső módszernek bizonyult, míg a kvázi-Newton módszer érzékeny volt az indulópontra, de pontosabbnak mutatkozott [5]. A globális optimalizálási módszer és az UNIRANDI helyi kereső eljárás implementálásánál csak az említett publikációkra támaszkodtunk.

Az algoritmus fontos része az alkalmazott klaszterezési eljárás. Ennek elhagyásával egy egyszerű multistart módszert kapnánk. A klaszterezés célja az, hogy a gyűjtött információk alapján statisztikai jellegű eszközökkel határozza meg és különítse el a helyi minimumpontok vonzáskörzetét (azon globális minimumpontban végződő $\mathbb{R}^n$-beli folytonos görbék pontjai halmazát, amelyek mentén a célfüggvény szigorúan monoton csökkenő). Ez teszi aztán lehetővé, hogy csak a feltétlenül szükséges számú helyi keresést hajtsa végre algoritmusunk, és egy előre adott szintű megbízhatóság fenntartása mellett az algoritmusunk a lehető legkevesebb iterációs lépést tegyen.

A tárgyalt globális optimalizálási algoritmus röviden a következő:

1. **lépés:** Generáljunk N darab mintapontot egyenletes eloszlással az X halmazon, és adjuk őket a C aktuális mintához. Állítsuk elő a T transzformált mintát úgy, hogy vesszük a C-ben lévő pontoknak a legkisebb célfüggvényértékkel rendelkező γ százalékát.

2. **lépés:** Alkalmazzuk a klaszterezési eljárást a T ponthalmazra. Ha T minden pontja hozzárendelhető valamely klaszterhez, akkor folytassuk a 4. lépésnél.

3. **lépés:** Indítsunk helyi keresést azokból a T-beli pontokból, amelyek nincsenek valamely klaszterhez rendelve. Ha találtunk új helyi minimumpontot, akkor folytassuk az 1. lépésnél.

4. **lépés:** Határozzuk meg a legkisebb helyi minimumot, ez lesz a globális minimum közelítése.

Az itt említett helyi keresés vagy a kvázi-Newton módszer, vagy az UNIRANDI eljárás volt. Az eredeti közleményben ([4]) vizsgált két klaszterezési módszer közül a single linkage eljárást választottuk, mint ígéretesebbet. A klaszterezés célja azon mintapontok megtalálása, amelyekből indulva a helyi keresés valószínűleg egy már ismert helyi minimumponthoz vezetne. A klasztereket úgynevezett magpontok (helyi minimumpontok, és olyan mintapontok, amelyekből a helyi keresés egy már ismert helyi minimumponthoz vezetett) köré építjük. Két pont $d(x, x')$ távolságát az x^* helyi minimumpont környezetében a következő képlettel definiáljuk [4]:

$$d(x, x') = \sqrt{(x - x')^T H(x^*)(x - x')}.$$

A kvázi-Newton módszer az A algoritmusban megfelelő becslést ad a célfüggvény $H(x^*)$ Hesse-mátrixára. Az UNIRANDI esetén pedig az egységmátrix pótolja a $H(x^*)$ mátrixot (vö. [4]). Egy új x pontot akkor adunk egy klaszterhez, ha annak egy x' pontjára

$$d(x,x') \leq \left[\frac{\Gamma(1+\frac{1}{2}n)|H(x^*)|^{1/2}m(X)}{\pi^{n/2}}(1-\alpha^{1/(N'-1)})\right]^{1/n}$$

teljesül, ahol $|H(x^*)|$ a $H(x^*)$ mátrix determinánsát jelöli, $m(X)$ az X halmaz egy mértéke, N' az összes generált mintapont száma, és $0 < \alpha < 1$ a klaszterezési eljárás paramétere [4].

Az eredeti algoritmuson végrehajtott két legfontosabb módosítás a következő:

1. Nem használunk "legmeredekebb lejtő" szerinti lépést az aktuális minta transzformálására; ennek hatékonyságát megvizsgáltuk az implementálás során, és elhagyhatónak bizonyult.

2. A célfüggvény változóit a globális optimalizálási rutin skálázza [13] a következő képlettel:

$$x_i' = \frac{2x_i - a_i - b_i}{b_i - a_i} \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ezt természetesen a célfüggvény alakjától függetlenül is meg lehet tenni. A skálázásnak ugyan nem volt kimutatható hatása a tesztfüggvények megoldásának hatékonyságára, gyakorlati problémák esetén viszont nélkülözhetetlen.

Az implementálás eredményeként egy valamivel több mint 400 soros FORTRAN szubrutint kaptunk, amely 44 kilobyte memóriát igényel (a helyi kereső rutinok nélkül). Legfeljebb 15 paraméteres globális optimalizálási feladatok megoldására szolgál, de egyszerűen bővíthető nagyobb feladatokhoz. A globális optimalizáló rutin tárigénye lineárisan nő a változószámmal, az UNIRANDI-é szintén, de nem számottevő, a kvázi-Newton eljárásé pedig $n(n+1)/2$-vel arányos. A globális optimalizáló szubrutin a felhasználó által megadott I/O utasításokon felül önállóan dokumentálja előrehaladását, és listát ad a növekvő sorrendbe rendezett helyi minimumokról.

3. Numerikus eredmények standard globális optimalizálási tesztfeladatokon

A numerikus tesztelést ROBOTRON R55M számítógépen végeztük. A programokat szimpla pontossággal kódoltuk (ez 7 értékes tizedesjegyet biztosított). A későbbiekben használatos standard időegység, azaz az S5 tesztfüggvény 1000 kiértékeléséhez szükséges idő az $x = (4,0,4,0,4,0,4,0)^T$ pontban [10,38], tíz mérés

1. Táblázat. A tesztfüggvények globális minimumai és globális minimumpontjai

Teszt-függvény	$f(x^*)$	x_1^*	x_2^*	x_3^*	x_4^*	x_5^*	x_6^*
S5	-10,153206	3,99995	4,00014	4,00011	4,00016		
S7	-10,402947	4,00061	4,00072	3,99945	3,99958		
S10	-10,536416	4,00075	4,00061	3,99967	3,99948		
H3	-3,8627815	0,1146	0,5557	0,8525			
H6	-3,3223667	0,201536	0,149909	0,476906	0,27524	0,31160	0,65735
GP	2,9996490	0,000068	-1,0001				
RCOS	0,39788723	-3,1416	12,275				
	0,39788723	3,1416	2,2750				
	0,39788723	9,425	2,4750				
SHCB	-1,0316286	0,0899	-0,7126				
	-1,0316286	-0,0899	0,7126				
RB	0,0	1,0	1,0				

átlagában 2,0 másodpercnek adódott (a standard szórás 0,15 volt). A standard globális optimalizálási tesztfeladatok [10,38] részletes leírását a Függelékben adjuk meg. Ezek a feladatok főleg a globális optimalizálási módszerek hatékonyságának mérésére alkalmasak, mivel a globális minimum elkülönítése a nagyobb helyi minimumoktól ezekben a feladatokban nem nagyon nehéz. A hatékonyság fogalmának használata az optimalizálásban nem egységes. Dolgozatunkban is különféle hatékonysági mutatókat használunk, ezek viszont valamilyen értelemben mindig a közel azonos minőségű megoldás eléréséhez szükséges számítási ráfordítást jellemzik. Az összehasonlító táblázatokban, ahol lehetséges, az eredeti cikkek adatait adjuk meg – ezek esetenként némileg eltérnek a [4,10]-ben megadottaktól. Az A és B algoritmusokkal minden tesztfeladatot tízszer oldottunk meg. Mindegyik feladatra azonos eljárás-paramétereket (N, γ, α) használtunk, úgy beállítva, hogy minden feladatra mindkét eljárás mind a tízszer megtalálta a globális minimumot.

Úgy találtuk, hogy a számítógépes ráfordítás (a szükséges CPU-idő és a függvényhívások száma) arányos a helyi minimumok igényelt pontosságával. Eszerint különböző globális optimalizálási módszerek összehasonlításakor figyelembe kell venni azok pontosságát is. Ehhez először is meg kell határozni a globális minimumok pontos helyét és értékét. Az 1. Táblázat adja meg a standard globális optimalizálási feladatok ilyen adatait, jó egyezést mutatva Price eredményeivel [30]. Meg kell jegyezni, hogy más számítógépes pontossággal persze némileg eltérő értékeket is kaphatunk. Néhány globális minimumpontot csak 4-5 értékes jegyre adtunk meg: ezek esetén a célfüggvény az optimális értéket a megadott pont kis környezetében is felveszi.

Meghatároztuk a [10]-ben hivatkozott globális optimalizálási módszerek eredmé-

2. Táblázat. Az értékes jegyek száma a globális minimum becslésében

Módszer	Tesztfüggvény								
	S5	S7	S10	H3	H6	GP	RCOS	SHCB	RB
Branin	–	–	–	–	–	–	–	–	–
Törn*	3,0	2,9	3,2	4,3	2,6	3,9	4,5	–	–
Price*	6,2	5,3	5,8	6,4	6,0	3,9	6,3	–	–
De Biase	2,9	3,4	2,0	4,7	4,7	4,8	–	6,4	–
Boender	–	–	–	–	–	–	–	–	–
A*	7,0	6,8	6,7	6,8	6,9	4,3	7,2	7,1	10,1
B*	4,9	4,0	5,2	4,3	4,3	4,4	4,1	4,5	4,7

* Ezek a módszerek nem használják a célfüggvény deriváltjait.

nyeinek pontosságát, ahol ez lehetséges volt. A globális minimum értékes jegyeinek számát a

$$-\log \frac{f(x') - f(x^*)}{|f(x^*)|}$$

képlettel definiáljuk [3], ahol $f(x^*)$ az adott tesztfüggvény globális minimuma, és $f(x')$ ennek a program által adott becslése. A Rosenbrock (RB) függvény esetén a globális minimum nulla, ekkor a $-\log f(x')$ képletet használtuk.

A globális minimumok becslései értékes jegyeinek számát a 2. Táblázat foglalja össze néhány globális optimalizálási módszerre. Az A és B eljárások helyi kereső rutinjainak paramétereit úgy próbáltuk beállítani, hogy azok hasonló pontosságot érjenek el a különböző tesztfüggvényeken. Módszerünknél a pontosság és a megbízhatóság csaknem függetlenül volt hangolható.

A globális optimalizálási módszerek által a tesztfeladatok megoldásához igényelt függvényhívások számát tartalmazza a 3. Táblázat. Mivel azok a helyi kereső eljárások, amelyek nem használják a célfüggvény deriváltjait, rendszerint gyengébb hatékonyságúak, ezért az A és B módszerek inkább csak a többi deriváltmentes módszerekkel vethetők össze. Azokat a módszereket, amelyekről ismert, hogy deriváltmentesek, csillaggal jelöltük meg a 2–4. Táblázatokban. Az adatok egy-egy futásra vonatkoznak az első négy módszer esetén, a Boender és munkatársai módszerére vonatkozó értékek négy futás átlagaként, az A és B módszerhez tartozók pedig tíz független futás átlagaként adódtak. A 3. Táblázat szerint Boender és munkatársai módszere [4] a leghatékonyabb, míg Törn [38] és Price [30] eljárása gyengébb hatékonyságú, mint az A és B algoritmus.

A 4. Táblázat a tesztfeladatok megoldásához szükséges CPU-időt adja meg standard időegységben. Ezen adatok alapján az A és B algoritmusok határozottan gyorsabbaknak mutatkoznak, mint a többi deriváltmentes módszer, és az A eljárás körülbelül olyan gyors, mint Boender és munkatársaié. Gyakorlati feladatokban

3. Táblázat. A függvényhívások száma

Módszer	Tesztfüggvény								
	S5	S7	S10	H3	H6	GP	RCOS	SHCB	RB
Branin	5500	5020	4860	–	–	–	–	–	–
Törn*	3649	3606	3874	2584	3447	2499	1558	–	–
Price*	3800	4900	4400	2400	7600	2500	1800	–	–
De Biase	620	788	1160	732	807	378	597	717	–
Boender	567	624	755	235	462	398	235	–	–
A*	990	1767	2396	216	1446	436	330	233	410
B*	1083	1974	2689	697	2610	386	464	267	1524

* Ezek a módszerek nem használják a célfüggvény deriváltjait.

azonban rendszerint több CPU-idő szükséges a célfüggvény kiértékeléséhez, mint a tesztfeladatok esetén, tehát a 4. Táblázat inkább az egyes módszerek adminisztrációs (overhead) számítási igényeit jellemzi.

A hagyományos, csak függvény-kiértékelésekre épülő módszerek heurisztikus jellegűek, így a numerikus teszt látszik az egyetlen összevetési lehetőségnek. A 3. és a 4. Táblázat alapján történő összehasonlítás akkor megalapozott, ha az egyes módszerek azonos megbízhatóságúak (nagyszámú független futás hasonló számú esetben adja a globális minimumot), és azonos pontosságú eredményt szolgáltatnak (l. 2. Táblázat). Sajnos ezek a követelmények ritkán teljesülnek, sőt, a személyes tisztázási kísérletek is ellentmondó információkat eredményeztek. Mindenesetre, az A algoritmus mind megbízhatóság, mind pontosság szempontjából kimutathatóan jobb, mint az összehasonlításban szereplő többi algoritmus. Ez alapozza meg a hatékonysági összevetést.

Összegezve a numerikus tesztek eredményeit megállapíthatjuk, hogy Boender és munkatársai módszerének itt vizsgált két deriváltmentes változata határozottan jobb, mint a többi deriváltmentes eljárás. Az A algoritmus hatékonysága megközelíti az eredetiét. Ez a kvázi-Newton helyi keresővel ellátott globális optimalizálási eljárás jól használható sima globális optimalizálási feladatokhoz, amelyekben a célfüggvény parciális deriváltjai nem állnak rendelkezésre, vagy nehezen számíthatók. Ugyanez a globális optimalizálási kereteljárás az UNIRANDI direkt kereső módszerrel hatékony eszköz lehet nem-sima, vagy nem-differenciálható célfüggvényekhez.

4. Globális optimalizálási módszerek megbízhatósága

Szinte mindegyik globális optimalizálási módszer csak helyi információt használ, tehát a célfüggvény és annak első- és másodrendű parciális deriváltjai értékét bizonyos pontokban. Könnyű megmutatni [38], hogy nem létezik olyan determinisztikus algoritmus, amely véges sok ilyen függvényhívás révén minden globális

4. Táblázat. A standard időegységek száma

Módszer	Tesztfüggvény								
	S5	S7	S10	H3	H6	GP	RCOS	SHCB	RB
Branin	9,0	8,5	9,5	–	–	–	–	–	–
Törn*	10,0	12,4	14,4	8,0	15,6	4,1	3,7	–	–
Price*	13,9	20,0	19,7	7,5	47,5	2,8	4,4	–	–
De Biase	26,1	23,0	33,7	17,6	23,1	16,8	15,2	23,2	–
Boender	3,5	4,5	7,0	1,7	4,3	1,5	1,0	–	–
A*	3,0	4,9	7,0	1,2	4,2	1,3	1,4	1,2	1,0
B*	3,5	6,0	8,8	1,9	14,2	1,5	1,6	1,3	1,5

* Ezek a módszerek nem használják a célfüggvény deriváltjait.

optimalizálási feladatot meg tudna oldani. Emiatt a globális optimalizálási kutatások az egyre hatékonyabb és megbízhatóbb heurisztikus eljárások fejlesztésére koncentrálódtak.

A globális minimum vonzáskörzetének mértéke jellemzi az adott feladat nehézségét. Ennek az a magyarázata, hogy az olyan hagyományos globális optimalizálási módszerek, mint amilyent dolgozatunkban is ismertettünk, a kisebb vonzáskörzetű helyi minimumot kisebb valószínűséggel találják meg. Ebből a szempontból a leggyakrabban használatos tesztfeladatok meglehetősen könnyűek, inkább csak az algoritmusok hatékonysága vizsgálható velük.

Az alábbiakban egy olyan tesztfeladatot tárgyalunk, amely az algoritmusok megbízhatóságát méri, azaz meghatározza azt a nehézségi szintet, amelyhez tartozó globális optimalizálási feladatot az illető algoritmus még meg tud oldani. A javasolt n-dimenziós függvény egyszerűen számítható:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \tag{2}$$

ahol minden $i = 1, 2, \ldots, n$-re:

$$f_i(x_i) = x_i^6(\sin(1/x_i) + 2)$$

ha $x_i \neq 0$, és $f_i(0) = 0$. Ha $x_i \neq 0$, akkor $f(x)$ gradiense

$$g_i(x) = 6x_i^5(\sin(1/x_i) + 2) - x_i^4 \cos(1/x_i),$$

Hesse-mátrixa pedig

$$H_{i,j}(x) = 0 \qquad (i \neq j)$$

$$H_{i,i}(x) = 30x_i^4(\sin(1/x_i) + 2) - 10x_i^3 \cos(1/x_i) - x_i^2 \sin(1/x_i)$$

minden $i, j = 1, 2, \ldots, n$-re. Különben $g_i(x)$ és $H_{i,j}(x)$ nulla $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. A gradiens és a Hesse-mátrix mindenütt folytonos $I\!R^n$-ben. Mivel nyilvánvalóan

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^6 \leq f(x) \leq 3 \sum_{i=1}^{n} x_i^6,$$

ezért $f(x)$ globális minimuma $I\!R^n$-ben zérus, és ezt az értéket csak az origóban veszi fel.

1. TÉTEL. *Az $f(x)$ függvénynek megszámlálhatóan végtelen sok helyi minimuma és maximuma van az n-dimenziós valós térben, és minden extremális pontja a*

$$-1 \leq x_i \leq 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{3}$$

n-dimenziós intervallumban van.

BIZONYÍTÁS. Tekintsük először az $n = 1$ esetet. Tegyük fel, hogy az első derivált nulla, és $x \neq 0$. Ekkor érvényes, hogy

$$6x(\sin(1/x) + 2) = \cos(1/x). \tag{4}$$

Ezen egyenlet jobboldala -1 és 1 között változik, míg a baloldal $6x$ és $18x$ között, az első derivált tehát csak a (-1/6, 1/6) intervallumban lehet nulla. A (4) egyenlet jobboldala felveszi a -1 és az 1 értékeket a

$$[(1/2k\pi), 1/(2(k+1)\pi)) \qquad k = \pm 3, \pm 4, \ldots \tag{5}$$

intervallumok mindegyikében, míg ugyanezen intervallumokban

$$-1 < 6x(\sin(1/x) + 2) < 1. \tag{6}$$

Ez azt bizonyítja, hogy az $f(x)$ függvénynek legalább egy helyi minimuma és maximuma van minden ilyen intervallumban, mivel az első derivált folytonos függvény. Ezen extrémumpontok különbözőek, mert mind az (5) intervallumok belsejébe esnek. Ebből következik, hogy legalább megszámlálhatóan végtelen sok szélsőérték van a (3) intervallumban.

Könnyen belátható, hogy $f(x)$ első és második deriváltja nem lehet nulla ugyanazon helyen. Mivel a második derivált folytonos, ezért minden szélsőértékhez tartozik egy nyitott intervallum $I\!R$-ben, amelyben az az egyetlen szélsőérték. Ebből következik, hogy $f(x)$-nek nem lehet $I\!R$-ben kontinuum sok helyi extrémuma.

Az $f(x)$ függvény szeparálhatósága miatt az előbbi érvelés nyilvánvalóan kiterjeszthető bármely pozitív egész n-re. □

Ezek szerint a feltétel nélküli feladat helyi minimumainak halmaza nem csökken a (3) korlátok alkalmazásával. A globális minimumpont nem-izolált [1] abban az

értelemben, hogy előáll helyi minimumpontok torlódási pontjaként (és most ez az egyetlen torlódási pont). A globális minimum vonzáskörzete nyilvánvalóan nullamértékű. Az $f(x)$ függvény legfontosabb tulajdonsága, hogy minél kisebb helyi minimumról van szó, annál kisebb annak vonzáskörzete; ezt a tulajdonságot a globális optimalizálási módszerek megbízhatóságának mérésére lehet használni.

Az egydimenziós változat helyi minimumpontjait a célfüggvény értéke szerint csökkenő sorrendbe lehet rendezni. Az x helyi minimumpont N_x sorszáma a következő képlettel számítható:

$$N_x = 2\lfloor |1/x|/2\pi \rfloor - 1 + (sgn(x) - 1)/2,$$

ahol $\lfloor . \rfloor$ a legnagyobb, az argumentumnál nem nagyobb egészt, *sgn* pedig a signumfüggvényt jelöli. Az egydimenziós esetben az x helyi minimumpont vonzáskörzetének A_x méretét jól lehet becsülni a (4) egyenlet segítségével, ha x abszolút értéke kicsi. Ekkor a (4) egyenlet baloldala közel nulla, és A_x közelítőleg a jobboldal x-szel szomszédos két zérushelyének távolsága:

$$A_x \approx \frac{2\pi}{\frac{1}{x^2} - \pi^2}.$$

Az $f(x)$ függvény numerikus, számítógépes változata természetesen különbözik az analitikustól, különösen az origó közelében. Emiatt fontos a tesztfüggvény gondos programozása.

A javasolt tesztfüggvény gyorsan számítható: az egydimenziós esetben $f(x)$ 1000 kiértékeléséhez $0,306 \pm 0,006$ (SD) standard időegységre volt szükség, míg $n = 4$ esetén a megfelelő érték $0,829 \pm 0,001$ (SD). Eszerint, még a négydimenziós változat kiszámítása is valamivel kevesebb CPU-időt igényel, mint az S5 tesztfüggvényé. A (2) tesztfüggvény numerikus változatának értéke az $x_i \in (-1,0 \cdot 10^{-13}, 1,0 \cdot 10^{-13})$, $i = 1, 2, \ldots, n$ intervallumban volt nulla. Ennek ellenére a számítógépes ábrázolás elég finom volt ahhoz, hogy több mint egymillió olyan helyi minimuma maradt, amelynek vonzáskörzete legalább száz numerikusan megkülönböztethető pontot tartalmaz.

Az A algoritmust tíz független futással teszteltük a (2) feladat egy- és négydimenziós változatával a (3) korlátokkal megadott tartományon. Az eljárás paramétereit úgy állítottuk be, hogy a globális minimumpont becslése minél közelebb legyen az origóhoz (így ezek a paraméterek eltértek a korábban használtaktól). A megbízhatósági teszt szempontjából a helyi kereső választása közömbösnek bizonyult.

Az egydimenziós feladatra a legkisebb talált helyi minimum $0,523449 \cdot 10^{-52}$ volt a $0,193281 \cdot 10^{-8}$ pontban. Ez az előbb említett sorrendben a 164 687 623. helyi minimumpont, és vonzáskörzetének nagysága a képlet alapján $A_x = 0,23472 \cdot 10^{-16}$. A globális minimumra kapott legrosszabb becslés $0,319144 \cdot 10^{-23}$-nak adódott a $-0,119009 \cdot 10^{-3}$ pontban; ez a 2673. helyi minimum és $A_x = 0,88989 \cdot 10^{-7}$. Az átlagos futás 33,5 standard időegységet és 22 137 függvényhívást igényelt.

A négydimenziós feladatra a globális minimum legjobb és legrosszabb becslése $0,272099 \cdot 10^{-8}$, illetve $0,598347 \cdot 10^{-6}$ volt. Az átlagos futás 46,1 standard időegységet és 22 020 függvényhívást használt.

Ezen eredmények alapján megállapíthatjuk, hogy a vizsgált globális optimalizálási módszer hangolható úgy, hogy alkalmas legyen a legtöbb gyakorlati feladat megbízható megoldására.

5. Numerikus tesztelés légzésmechanikai modell illesztési feladatokkal

Az előzőekben tárgyalt numerikus vizsgálatokon túl paraméterbecslési módszerünk használhatóságát világítja meg a gyakorlati feladaton végzett teszt is. A légzésmechanikai modellek illesztésére az

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} |z(\omega_i) - z_{mod}(\omega_i, x)|^2}, \tag{7}$$

célfüggvényt használtuk, ahol x a modellparaméterek vektora, m az adatpontok száma, $z(\omega_i)$ az ω_i valós körfrekvencián mért komplex impedancia, és $z_{mod}(\omega_i, x)$: $I\!R^{n+1} \to C$ pedig a vizsgált modellfüggvény [5,18,19]. Könnyű megmutatni, hogy a (7)-ben szereplő komplex eltérések ellenére $f(x)$ felírható olyan tisztán valós függvényként, amely beilleszthető az (1) feladatba. Tesztünkben a talán leggyakrabban tanulmányozott légzésmechanikai modellt, a Mead-modellt alkalmaztuk (l. Model 1 a [2]-ben):

$$z_{mod}(s) = \frac{I_c R_2 C_1 C_2 s^3 + (I_c(C_1 + C_2) + R_c R_2 C_1 C_2)s^2 + (R_c(C_1 + C_2) + R_2 C_2)s + 1}{R_2 C_1 C_2 s^2 + (C_1 + C_2)s}, \tag{8}$$

ahol $s = \imath\omega$, $\imath$ a képzetes egység, R_c, I_c, R_2, C_1, C_2 pedig pozitív valós modellparaméterek. Ez a feladat mért adatok felhasználásával gyakran vezetett több, lényegesen különböző helyi minimumhoz.

A jelen tesztben módszerünk pontosságát és hatékonyságát vizsgáltuk. A korábban említett UNIRANDI és kvázi-Newton helyi kereső eljárások mellett a kifejezetten a legkisebb négyzetes alakú célfüggvényekhez kifejlesztett Levenberg – Marquardt algoritmust is implementáltuk. A teszthez az adatokat az 5. Táblázatban megadott paraméterértékekkel számítottuk a (8) modellfüggvénnyel a 2,5, 3,0,..., 10,5 Hz frekvenciákon, (azaz a szokásos alacsonyfrekvenciás mérések ω_i értékein). Mivel globális optimalizálási módszerünk sztochasztikus, ezért minden helyi keresővel hétszer futtattuk ugyanazon a feladaton. A globális minimumot minden esetben megtalálták az egyes eljárások. Az 5. és 6. Táblázatban lévő adatok ezen futások átlagaként értelmezendők.

Az 5. Táblázat az egyes helyi keresőkkel kiegészített globális optimalizálási algoritmus talált optimális paraméter-értékei átlagát és variációs koefficiensét (szórás

5. Táblázat. A három helyi kereső eljárás hatása a modellparaméterek reprodukálásának pontosságára

Helyi kereső		Paraméter				
		R_c	I_c	C_1	R_2	C_2
Eredeti értékek:		4,00	0,02	0,005	7,00	0,1
UNIRANDI	átlag	4,0335	0,01944	0,005082	6,9738	0,1105
	c.v.	0,0041	0,0144	0,0092	0,0019	0,0760
Levenberg-Marquardt	átlag	4,0195	0,01969	0,005055	6,9838	0,1044
	c.v.	0,0128	0,0381	0,0218	0,0044	0,1073
kvázi-Newton	átlag	4,0003	0,02000	0,005001	6,9998	0,1001
	c.v.	0,0003	0,0007	0,0004	0,0001	0,0023

osztva az átlaggal, jelölése c.v.) foglalja össze. Bár mindegyik módszer pontossága kielégítő, a kvázi-Newton eljárással kiegészített messze a legpontosabb. Meg kell jegyezni, hogy a kis c.v. érték csak akkor mutatja az illető módszer pontosságát, ha csak egyetlen globális minimumpont van, és az szeparált; míg ha a globális minimumpontok egy alteret alkotnak, akkor a kis c.v. érték azt jelzi, hogy a vizsgált algoritmus nem képes ezt a redundanciát tükrözni (vö. [2]). Az 5. Táblázatban a C_2 paraméterre közel egy nagyságrenddel nagyobb variációs koefficiensek adódtak, mint a többi paraméterekre. Ez arra utal, hogy a célfüggvény kevésbé érzékeny erre a paraméterre, ami összhangban van mérési adatokkal végzett hasonló vizsgálatokkal [2].

A 6. Táblázat a három eljárásra vonatkozó hatékonysági eredményeket foglalja össze. Ebben f^* jelöli a talált globális minimumot, CPU a megoldáshoz használt CPU-időt másodpercben, NFE pedig a szükséges függvényhívások számát. Az első három oszlopban szereplő értékek ugyanarra a hét futásra vonatkozó átlagértékek, mint amelyek az 5. Táblázat adatait szolgáltatták. Az első három oszlop alapján a kvázi-Newton módszer a leghatékonyabb, de az első két módszert nehéz összevetni. Ezért az utolsó két oszlopban olyan mutatókat szerepeltetünk, amelyek jellemzik az illető eljárás hatékonyságát: a nagyobb érték nagyobb hatékonyságot jelez. Ezek a mutatók is megerősítik a kvázi-Newton módszer kiemelkedő voltát, valamint azt, hogy feladatunkon a Levenberg-Marquardt módszer valamivel jobb hatékonyságú, mint az UNIRANDI.

Ezek az eredmények némileg meglepőek, hiszen a feladat szerkezete alapján a Levenberg-Marquardt módszernek kellene a leghatékonyabbnak lennie. Valószínűleg a viszonylag kevés mintapontra való illesztés és a célfüggvény simasága miatt bizonyult a kvázi-Newton módszer hatékonyabbnak. A teszteredmények összhangban vannak az ilyen modellillesztési feladatokra vonatkozó numerikus tapasztalatokkal (pl. [2,12,26,27]). Egy cikket találtunk [11], amelyben összehasonlításra alkalmas

6. Táblázat. A három paraméterbecslési eljárás hatékonysága

Helyi kereső	$100\,f^*$	CPU	NFE	$\frac{1}{\text{CPU}\,f^*}$	$\frac{1}{\text{NFE}\,f^*}$
UNIRANDI	0,8100	646,7	10957	0,00191	0,000113
Levenberg-Marquardt	1,2676	209,0	3632	0,00377	0,000217
kvázi-Newton	0,0219	124,7	2324	0,36690	0,019693

adat van légzésmechanikai modellillesztési eljárás hatékonyságáról. Ott több mint 47 000 függvényhívásra volt szükség a (8) modell azonosításához 31 impedancia-adat alapján. Ezzel szemben globális optimalizálási módszerünk a kvázi-Newton eljárással ugyanilyen feladatot mért adatokon az esetek nagy többségében 10 000-nél kevesebb függvényhívással oldott meg, és tesztünkben átlagosan csak 2324 függvényhívásra volt szükség. Eljárásunkat [5,6,18] publikálása óta számos neves kutatócsoport használja (pl. [12,14,22,26,27,38]).

Függelék: Standard globális optimalizálási tesztfeladatok

Ebben a függelékben a dolgozatban több helyen is említett standard globális optimalizálási tesztfeladatokat ismertetjük. Ezeket a szokásos nemlineáris optimalizálási tesztfeladatoktól az különbözteti meg, hogy a lehetséges megoldások halmazán rendszerint több helyi minimumpont van, és így egy helyi kereső eljárás nem feltétlenül tudja a globális minimum helyét meghatározni. A tesztfeladatok használata tipikus [4,6,8,10,24,32,33,37,38]; inkább kivételnek számít, ha egy globális optimalizálási módszer numerikus vizsgálatát más feladatokon végzik el [39].

A dolgozatban tárgyalt algoritmusokhoz jobban kötődő adatokat (a globális minimum értéke és helye) összefoglaltuk az 1. Táblázatban, itt az egyes feladatok leírását adjuk meg.

1. Shekel feladatok. A célfüggvény 4-változós:

$$f(x) = -\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{(x-a^i)^T(x-a^i)+c^i}$$

ahol a^i valós vektor, c^i valós szám ($i = 1, \ldots, m$), a lehetséges megoldások halmaza $0 \le x_j \le 10$ ($j = 1, 2, 3, 4$). A feladathoz tartozó adatok:

	i									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_1^i	4	1	8	6	3	2	5	8	6	7,0
a_2^i	4	1	8	6	7	9	5	1	2	3,6
a_3^i	4	1	8	6	3	2	5	8	6	7,0
a_4^i	4	1	8	6	7	9	5	1	2	3,6
c^i	0,1	0,2	0,2	0,4	0,4	0,6	0,3	0,7	0,5	0,5

Az $m = 5, 7, 10$ eseteket az S5, S7, S10 rövidítésekkel szokás jelölni. Ezek rendre 5, 7, illetve 10 helyi minimumponttal rendelkeznek, amelyek helyét közelítőleg az a^i vektorok adják meg, az egyes helyi minimumok értéke pedig $-1/c^i$ körül van. A feladatok jellemzője, hogy (különösen nagy m esetén) a globális minimum vonzáskörzete kicsi a lehetséges megoldások halmazához képest, ezért az egyes módszerek gyakran nem találják meg a globális minimumot.

2. Hartman feladatok. A célfüggvény alakja:

$$f(x) = -\sum_{i=1}^{m} c_i \exp(-\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(x_j - p_{i,j})^2)$$

ahol $p_{i,.}$ közelítőleg az i. helyi minimumpont, és c_i közelítőleg a megfelelő helyi minimum. A lehetséges megoldások halmaza $0 \leq x_i \leq 1$, ahol $i = 1, 2, \ldots, n$. A feladathoz tartozó adatok $n = 3$ esetén:

i	$a_{i,j}$			c_i	$p_{i,j}$		
1	3,0	10,	30,	1,0	0,3689	0,1170	0,2673
2	0,1	10,	35,	1,2	0,4699	0,4387	0,7470
3	3,0	10,	30,	3,0	0,1091	0,8732	0,5547
4	0,1	10,	35,	3,2	0,03815	0,5743	0,8828

Az $n = 6$ esetre az adatok:

i	$a_{i,j}$						c_i
1	10,	3,0	17,	3,5	1.7	8,	1,0
2	0,05	10,	17,	0,1	8.0	14	1.2
3	3,0	3,5	1,7	10,	17,	8,	3,0
4	17,	8,0	0,05	10,	0,1	14	3,2

i	$p_{i,j}$					
1	0,1312	0,1696	0,5569	0,0124	0,8283	0,5886
2	0,2329	0,4135	0,8307	0,3736	0,1004	0,9991
3	0,2348	0,1451	0,3522	0,2883	0,3047	0,6650
4	0,4047	0,8828	0,8732	0,5743	0,1091	0,0381

A globális minimumpontok körül a célfüggvény rendkívül lapos, és ez nem kedvez az intervallum-aritmetikán alapuló módszereknek. A Hartman feladatok rövid jelölése H3, illetve H6.

3. Goldstein-Price feladat. A kétváltozós célfüggvény

$$f(x) = [1+(x_1+x_2+1)^2(19-14x_1+3x_1^2-14x_2+6x_1x_2+3x_2^2]\times [30+(2x_1-3x_2)^2(18-32x_1+12x_1^2+48x_2-36x_1x_2+27x_2^2)],$$

és a lehetséges megoldások halmaza $-2 \le x_i \le 2$ $(i = 1, 2)$. Ezen négy helyi minimumpont található. A célfüggvény bonyolultsága miatt a természetes intervallum-kiterjesztésen alapuló befoglaló függvény általában több nagyságrenddel szélesebb, mint a megfelelő értékkészlet. Jelölése GP.

4. Branin feladat. A kétváltozós célfüggvény alakja

$$f(x) = \left(x_2 - \frac{5.1}{4\pi^2}x_1^2 + \frac{5}{\pi}x_1 - 6\right)^2 + 10\left(1-\frac{1}{8\pi}\right)\cos x_1 + 10,$$

a lehetséges megoldások halmaza $-5 \le x_1 \le 10$, $0 \le x_2 \le 15$. Ezen három globális minimumpont van. Jelölése RCOS.

5. Six-hump-camel-back feladat. A célfüggvény ismét kétváltozós:

$$f(x) = 4x_1^2 - 2.1x_1^4 + \frac{1}{3}x_1^6 + x_1x_2 - 4x_2^2 + 4x_2^4,$$

a $-5 \le x_i \le 5$ lehetséges megoldási halmazzal. A függvény szimmetrikus az origóra, és három pár helyi minimumpontja van. Jelölése SHCB.

6. Rosenbrock feladat. Az

$$f(x) = 100(x_1^2 - x_2)^2 + (1-x_1)^2$$

függvényt globális optimalizálási tesztfeladatként a $-1 \leq x_i \leq 5$ korlátokkal szokás használni. Rövidítése RB.

IRODALOM

1. ARCHETTI, F., G.P. SZEGŐ (1980): Global optimization algorithms. In: Nonlinear Optimization — Theory and Algorithms (L.C.W. Dixon, E. Spedicato, G.P. Szegő, eds.) Birkhäuser, Boston, 429–469.
2. AVANZOLINI, G., P. BARBINI (1982): Comment on "Estimating Respiratory Mechanical Parameters in Parallel Compartment Models". IEEE Trans. Biomed. Eng. 29, 772–774.
3. BAHVALOV, N.SZ. (1977): A gépi matematika numerikus módszerei. Műszaki Könyvkiadó, Budapest.
4. BOENDER, C.G.E., A.H.G. RINNOOY KAN, G.T. TIMMER, L. STOUGIE (1982): A stochastic method for global optimization. Math. Programming 22, 125–140.
5. CSENDES, T., B. DARÓCZY, Z. HANTOS (1986): Nonlinear parameter estimation by global optimization: comparison of local search methods in respiratory system modelling. In: System Modelling and Optimization (Lecture Notes in Control and Information Sciences, No. 84, A. Prékopa and B. Straziczky, eds.), Springer, Berlin, 188–192.
6. CSENDES, T. (1988): Nonlinear parameter estimation by global optimization — efficiency and reliability. Acta Cybernetica 8, 361–370.
7. CSENDES, T. (1989): An interval method for bounding level sets of parameter estimation problems. Computing 41, 75–86.
8. CSENDES, T. (1990): Interval method for bounding level sets: revisited and tested with global optimization problems. BIT 30, 650–657.
9. DARÓCZY, B., Z. HANTOS (1990): Generation of optimum pseudorandom signals for respiratory impedance measurements. Int. J. Biomed. Comp. 25, 21–31.
10. DIXON, L.C.W., G.P. SZEGŐ (eds.) (1978): Towards Global Optimisation 2. North-Holland, Amsterdam.
11. EYLES, J.G., R.L. PIMMEL (1981): Estimating respiratory mechanical parameters in parallel compartment models. IEEE Trans. Biomed. Eng. 28, 313–317.
12. FARRÉ, R., R. PESLIN, E. OOSTVEEN, B. SUKI, C. DUVIVIER, D. NAVAJAS (1989): Human respiratory impedance from 8 to 256 Hz corrected for upper airway shunt. J. Appl. Physiol. 67, 1973–1981.
13. GILL, P. E., W. MURRAY, M.H. WRIGHT (1981): Practical Optimization. Academic Press, London.
14. GROMA, G.I., F. RAKSI, G. SZABÓ, G. VARÓ (1988): Picosecond and nanosecond components in bacteriorhodopsin light-induced electric-response signal. Biophysics J. 54, 77–80.
15. HANSEN, E.R. (1980): Global optimisation using interval analysis — the multi-dimensional case. Numer. Math. 34, 247–270.

16. HANSEN, P., B. JAUMARD, S.H. LU (1989): An analytical approach to global optimization. RUTCOR Research Report 4-89, Rutgers University, New Brunswick.

17. HANTOS, Z., G. GALGÓCZY, B. DARÓCZY, T. CSENDES, J. KLEBNICZKI (1982): A lumped parameter model of the upper airway. Bull. Eur. Physiopath. Resp. 18, 48–49.

18. HANTOS, Z., B. DARÓCZY, B. SUKI, G. GALGÓCZY, T. CSENDES (1986): Forced oscillatory impedance of the respiratory system at low frequencies. J. Appl. Physiol. 60, 123–132.

19. HANTOS, Z., B. DARÓCZY, T. CSENDES, B. SUKI, S. NAGY (1990): Modelling of low-frequency pulmonary impedance in the dog. J. Appl. Physiol. 68, 849–860.

20. HORST, R. (1988): Deterministic global optimization with partition sets whose feasibility is not known: application to concave minimization, reverse convex constraints, DC-programming, and Lipschitzian optimization. J. Optim. Theory Appl. 58, 11–37.

21. JÄRVI, T. (1973): A random search optimizer with an application to a maxmin problem. Publications of the Institute for Applied Mathematics, University of Turku, No. 3.

22. LUTCHEN, K.R., JACKSON, A.C. (1987): Reliability of parameter estimates from models applied to respiratory impedance data. J. Appl. Physiol. 62, 403–413.

23. MARQUARDT, D.W. (1963): An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. SIAM J. Appl. Math. 11, 431–441.

24. MOORE, R.E., H. RATSCHEK (1988): Inclusion functions and global optimization II. Math. Programming 41, 341–356.

25. MURTY, K.G., S.N. KABADI (1987): Some NP-complete problems in quadratic and nonlinear programming. Math. Programming 39, 117–130.

26. OOSTVEEN, E., R. PESLIN, C. GALLINA, A. ZWART (1989): Flow and volume dependence of respiratory mechanical properties studied by forced oscillation. J. Appl. Physiol. 67, 2212–2218.

27. PESLIN, R., C. DUVIVIER, B. SUKI, R. FARRE, E. OOSTVEEN, C. GALLINA (1990): Respiratory impedance to ambient pressure changes at low frequencies. J. Appl. Physiol. 68, 665–671.

28. PINTÉR, J. (1986): Extended univariate algorithms for n-dimensional global optimization. Computing 36, 91–103.

29. PINTÉR, J. (1988): Branch-and-bound algorithms for solving global optimization problems with Lipschitzian structure. Optimization 19, 101–110.

30. PRICE, W.L. (1978): A controlled random search procedure for global optimisation. In: Towards Global Optimisation 2. (L.C.W. Dixon, G.P. Szegő, eds.), North-Holland, Amsterdam, 71–84.

31. RATSCHEK, H., J.G. ROKNE (1987): Efficiency of a global optimization algorithm. SIAM J. Numer. Anal. 24, 1191–1201.

32. RINNOOY KAN, A.H.G., G.T. TIMMER (1987): Stochastic global optimization methods. Part I: Clustering methods. Math. Programming 39, 27–56.

33. RINNOOY KAN, A.H.G., G.T. TIMMER (1987): Stochastic global optimization methods. Part II: Multi-level methods. Math. Programming 39, 57–78.

34. ROTGER, M., R. PESLIN, C. DUVIVIER, D. NAVAJAS, C. GALLINA (1988): Density dependence of respiratory input and transfer impedances in humans. J. Appl. Physiol. 65, 928–933.

35. SUKI, E., R. PESLIN, C. DUVIVIER, R. FARRÉ (1989): Lung impedance in healthy humans measured by forced oscillations from 0.01 to 0.1 Hz. J. Appl. Physiol. 67, 1623–1629.

36. SUKI, B., T. CSENDES, B. DARÓCZY (1990): Mechanical impedance of the canine diaphragm II. theoretical model and parameter estimation. Med. & Biol. Eng. & Comp. 28, 367–373.

37. TIMMER, G.T. (1984): Global optimization: a stochastic approach. Ph.D. Thesis, Erasmus University, Rotterdam.

38. TÖRN, A., A. ŽILINSKAS (1989): Global Optimization. (Lecture Notes in Computer Science No. 350, G. Goos and J. Hartmanis, Eds.) Springer, Berlin.

39. WALSTER, G.W., E.R. HANSEN, S. SENGUPTA (1985): Test results for a global optimization algorithm. In: Numerical optimization 1984 (P.T. Boggs, R.H. Byrd, R.B. Schnabel (ed.), SIAM, Philadelphia) pp. 272–287.

A CLUSTERING GLOBAL OPTIMIZATION METHOD FOR PARAMETER ESTIMATION PROBLEMS

In this paper we first show that the objective function of a least squares type nonlinear parameter estimation problem can be any non-negative real function, and therefore this class of problems corresponds to global optimization. Two non-derivative implementations of a global optimization method are presented; with nine standard test functions applied to measure their efficiency. A new nonlinear test problem is then presented for testing the reliability of global optimization algorithms. This test function has a countable infinity of local minima and only one global minimizer. The region of attraction of the global minimum is of zero measure. The results of efficiency and reliability tests are given, and three local search procedures are compared by means of a real life problem.

FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK

A MONETÁRIS KOCKÁZAT SZÁMÍTÁSÁRÓL[1]

DORMÁNY MIHÁLY
Pénzügyi és Számviteli Főiskola, Budapest

Abból a feltevésből indulunk ki, hogy a fix befektetés ellenértékeként adódó hozamot egy ismert eloszlású valószínűségi változó írja le. A dolgozat a befektetői kockázat mérésére kétféle mérőszámot javasol. Az abszolút kockázat a (valamilyen hasznossági függvény szerint) véleményezett esetleges veszteség nagyságával és bekövetkezésének valószínűségével számol; a relatív kockázat a kedvező kimenetelt, a lehetséges nyereséget is figyelembe veszi. Mivel a relatív kockázati skála 0-tól 1-ig terjed, jó lehetőséget kínál a különböző befektetések kockázatának összehasonlítására.

1. Bevezetés

Mint ismeretes, Daniel BERNOULLI volt az első, aki matematikai formában is megfogalmazta azt a tapasztalati megfigyelést, hogy a pénzmennyiségek nominál értéke és a birtoklásukból eredő „erkölcsi érték" eltér egymástól. BERNOULLI szerint az x tőke u „erkölcsi értékében" mutatkozó du növekedés egyenesen arányos a tőke dx növekményével és fordítva arányos magával a tőkével, vagyis

$$du = a\frac{dx}{x},$$

mely differenciálegyenlet megoldása az $u(x) = a\ln x + b$ ún. hasznossági függvény (utility function).

A fenti függvény mellett számos más hasznossági függvénnyel is találkozhatunk a matematikai közgazdaságtanban, ilyen pl. az $u(x) = ax(2b - x)$, $x < b$ *kvadratikus*, vagy az $u(x) = a^{-1}(1 - e^{-ax})$ *exponenciális* függvény. Az $u(x)$ függvények – a csökkenő határhaszon gazdasági törvényének megfelelően – általában konkáv függvények, de elvileg nem zárhatók ki más típusú függvények sem.

A céljainknak megfelelő, kétszer folytonosan deriválható konkáv $u(x)$ függvényeket (ahol $u'(x) > 0$ és $u''(x) < 0$) az összehasonlíthatóság és a jobb kezelhetőség végett *normalizálni* fogjuk, vagyis – szükség esetén – elvégezzük az

$$U(x) = \frac{u(x+p) - u(p)}{u'(p)}$$

[1]Beérkezett: 1991. június 17.

transzformációt. ($U(x)$ a p nagyságú *tőke* x mértékű *megváltozását* értékeli.) Az így nyert $U(x)$ függvényre nézve $U(0) = 0$ és $U'(0) = 1$. A fent említett hasznossági függvények normál alakja:

$$U(x) = p \ln \frac{p+x}{p}, \quad x > -p \qquad \text{logaritmikus hasznosság,}$$

$$U(x) = x - \frac{x^2}{2(b-p)}, \quad x < b \qquad \text{kvadratikus hasznosság,}$$

$$U(x) = u(x) = \frac{1}{a}(1 - e^{-ax}) \qquad \text{exponenciális hasznosság.}$$

(Érdekes megjegyezni, hogy az exponenciális hasznosságon kívül egyedül az $U(x) = x$ lineáris hasznosság független a döntéshozó tőkéjétől. BORCH (1968) szerint elsősorban a decentralizáltan működő nagy cégek döntéshozói dolgozhatnak sikeresen ezzel a függvénnyel.)

2. Vételár, közömbösségi görbék

A további vizsgálatainkhoz tételezzük fel, hogy ismeretes egy $H(x)$ hozamfüggvény, ami egy későbbi időpontban lejátszódó pénzügyi, gazdasági stb. folyamat hozamának valószínűségi eloszlásfüggvénye. (A szokásos módon $H(x)$ annak a valószínűsége, hogy a folyamat valamilyen pénzegységben kifejezett hozama kisebb lesz, mint x.)

Ha a folyamat a döntési időponttól számított jelentős t idő múlva fog csak lefutni, akkor az időtényezőt az x hozam diszkontálásával vehetjük figyelembe, vagyis elvégezhetjük a

$$H(x) \leftarrow H(e^{it}x)$$

transzformációt (ahol i az időegységre számított kamatténye ző).

Tételezzük fel továbbá, hogy a döntéshozónak módjában áll egy Π összegért „megvásárolnia" ezt a folyamatot, vagyis a jelen pillanatban kifizetett Π „vételár" ellenében diszponálhat a jövőbeni folyamat hozama felett. Kérdés, hogy mennyi a „korrekt" Π_0, illetve egy tetszőleges vételár mellett mivel jellemezhetnénk a befektetés kockázatát?

A döntéshozó $U(x)$ hasznossági függvényét (használatos a „véleményfüggvény" terminológia is) oly módon vehetjük figyelembe, hogy a $H(x)$ eloszlású X valószínűségi változót (a véletlen hozamot) az $X \leftarrow U(X)$ transzformációval „véleményezzük". A vételár megfizetése a (diszkontált) X hozamot $X - \Pi$ értékre csökkenti; ezt a csökkentett hozamot kell véleményeznünk, és máris előttünk áll a döntéshozó értékítélete. A vételár a döntéshozó szempontjából akkor korrekt, ha a véleményezett hozam várható értéke zérus, vagyis

$$\mathbf{E}U(X - \Pi_0) = 0. \tag{1}$$

A várható értéket ismert módon,

$$\int_{-\infty}^{\infty} U(x-\Pi)dH(x) \tag{2}$$

alakban, vagy ha létezik a $h(x)$ derivált függvény, akkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} U(x-\Pi)h(x)dx$$

alakban számíthatjuk.

Egy egyszerű példaként tekintsük a

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le a; \\ 1/2, & \text{ha } a < x \le b; \\ 1, & \text{ha } x > b \end{cases}$$

hozamfüggvényt, ami megfelel a

$$P(X=a) = P(X=b) = 1/2$$

diszkrét eloszlásnak. Nevezzük az ilyen eloszlásokat „fej-írás játékoknak", és jelöljük őket $G(a,b)$-vel.

Kérdés, hogy mennyi egy ilyen játék korrekt vételára, ha a logaritmikus véleményfüggvénnyel dolgozunk. (Nyilván $a > -p$ kell legyen.) Az (1) és (2) összefüggés alapján

$$\int_{-p}^{\infty} U(x-\Pi_0)dH(x) = \frac{1}{2}\,p\,\ln\frac{p+a-\Pi_0}{p} + \frac{1}{2}\,p\,\ln\frac{p+b-\Pi_0}{p} = 0,$$

vagyis

$$\frac{p+a-\Pi_0}{p}\,\frac{p+b-\Pi_0}{p} = 1$$

Innen – nyilvánvalóan negatív előjellel a gyök előtt –

$$\Pi_0 = \frac{a+b+2p-\sqrt{(b-a)^2+4p^2}}{2}$$

Vezessük be a $G(a,b)$ játék várható értékére az $m = \frac{1}{2}(a+b)$, a szórására pedig a $\Delta = \frac{1}{2}(b-a)$ jelölést. Ezzel a $G(m-\Delta, m+\Delta)$ játék korrekt vételára:

$$\Pi_0 = m + p - \sqrt{(\Delta^2+p^2)} \tag{3}$$

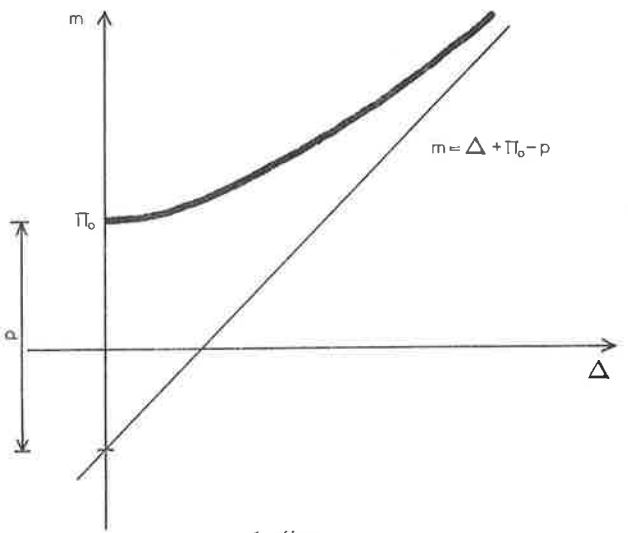
Például, ha a döntéshozó tőkéje $p = 12$, a $G(-4,6)$ játék korrekt vételára: $\Pi_0 = 0$, míg a játék várható értéke: $m = 1$. Ez a különbség az $U(x)$ görbe konkáv, „kockázatelutasító" jellegéből következik, vagyis abból, hogy a döntéshozót

érzékenyebben érinti a veszteség, mint az ugyanolyan nagyságú nyereség. Az $m-\Pi_0$ különbséget úgy is felfoghatjuk, mint egy „kockázati prémiumot", ami mintegy ellensúlyozza a döntéshozó kockázatelutasító magatartását.

A (3) összefüggésből

$$(m + p - \Pi_0)^2 - \Delta^2 = p^2,$$

amiből az következik, hogy adott p tőke és rögzített Π_0 vételár mellett az összetartozó (Δ, m) értékek az *1. ábra* szerint egy hiperbola-ágon helyezkednek el. Ez az ún. ***közömbösségi görbe***, u.i. a döntéshozó indifferens a tekintetben, hogy a Π_0 vételár ellenében milyen – a görbén elhelyezkedő (Δ, m) ponttal jellemzett – $G(m-\Delta, m+\Delta)$ játékot vásárol.



1. ábra

Különböző Π_0 értékekre függőlegesen eltolt közömbösségi görbesereget kapunk, melyet nomogramként használhatunk Π_0 meghatározására: adott m és Δ esetén a megfelelő görbe mentén leolvashatjuk Π_0 értékét.

A „fej-írás" játéknál bonyolultabb hozamfüggvények esetén a Π_0 érték és a közömbösségi görbék meghatározása természetesen nehezebb – egzakt módon gyakran kivitelezhetetlen – feladat. Ilyen esetekben jól használható az alábbi közelítés.

Határozzuk meg az $U(X - \Pi)$ függvény másodrendű MacLaurin polinomját (és vegyük figyelembe, hogy $U(0) = 0$ és $U'(0) = 1$):

$$U(X - \Pi) \approx X - \Pi + \frac{1}{2}(X - \Pi)^2 U''(0).$$

Vegyük mindkét oldal várható értékét; az (1) összefüggésnek megfelelően tegyük a jobb oldalt egyenlővé zérussal, és Π-re oldjuk meg a másodfokú egyenletet:

$$\Pi_0 = E(X) + \frac{1}{U''(0)} \pm \frac{\sqrt{1 - \left(U''(0)\right)^2 D^2(X)}}{U''(0)},$$

ahol a szokásos módon $D^2(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$ a szórásnégyzet.

A gyökjel alatti mennyiség sorbafejthető; a gyök előtti negatív előjelet véve nyerjük, hogy

$$\Pi_0 = E(X) + \frac{1}{U''(0)} - \frac{1}{U''(0)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\frac{1}{2}}{k} \left(U''(0)\right)^{2k} \left(D^2(X)\right)^k$$

$$= E(X) + \frac{1}{2} U''(0) D^2(X) + \frac{1}{8} \left(U''(0)\right)^3 \left(D^2(X)\right)^2 + \dots$$

Viszonylag kis szórások esetén jó közelítést nyerhetünk, ha a fenti összegből csak az első 2 tagot vesszük figyelembe:

$$\Pi_0 \approx E(X) + \frac{1}{2} U''(0) D^2(X). \tag{4}$$

Az $r(0) = -U''(0) > 0$ értéket *kockázatelutasítási együtthatónak* nevezik, mivel megmutatja, hogy a döntéshozó milyen mértékű kockázati prémiumra tart igényt, a hozamfüggvény szórásnégyzetétől függően.

$E(X) = m$, $D^2(X) = \Delta^2$ jelöléssel (4) az alábbi alakra hozható:

$$m = \frac{1}{2} r(0) \Delta^2 + \Pi_0$$

vagyis az $m = m(\Delta)$ – közelítő – közömbösségi görbék *parabolák*.

3. Kockázati mérőszámok

A „kockázat" terminológiát nem egységesen használják a szakirodalomban; sok esetben a $H(x)$ eloszlásfüggvényű valószínűségi változó szórását vagy szórásnégyzetét (mint pl. a (4) összefüggésben) értik alatta. A biztosítási matematikában magát a kárigényt tekintik kockázatnak ([3],[4],[5]); itt a nettó prémium játsza – ellentétes értelemben – a korrekt vételár szerepét.

Amikor a $H(x)$ hozamfüggvényt a Π vételárért megvásároljuk, azt kockáztatjuk, hogy a tényleges hozam nem fogja elérni a vételárat, és így veszteség fog érni bennünket. Ennek a kockázatnak a mérésére legjobban egy olyan mérőszám felel

meg, melyben mind a (véleményezett) veszteség nagysága, mind pedig bekövetkezésének valószínűsége tükröződik. Az előzőekkel összhangban a monetáris dimenziójú

$$\mathtt{K} = -\int_{-\infty}^{\Pi} U(x-\Pi)dH(x)$$

értéket tekinthetjük az abszolút kockázat mértékének. (Hasonló ajánlást találunk [1]-ben, de ott a feltételes valószínűség miatt csak a veszteség várható nagysága jelenik meg kockázatként.)

Ez a mérőszám azonban csak a befektetés kedvezőtlen, veszteséges kimenetelét veszi figyelembe, nem számol az esetleges kedvező eredménnyel. Nyilvánvalóan egyoldalú beállítás egyenlő kockázatról beszélni, ha pl. 10 forint ellenében ugyanolyan valószínűséggel nyerhetünk 20 forintot, mint 2000 forintot.

A kedvező kimenetelt is figyelembe vevő mérőszámot nyerhetünk, ha a

$$\mathtt{K}_r = \frac{-\int_{-\infty}^{\Pi} U(x-\Pi)dH(x)}{-\int_{-\infty}^{\Pi} U(x-\Pi)dH(x) + \int_{\Pi}^{\infty} U(x-\Pi)dH(x)} = \frac{\mathtt{K}}{\mathtt{K}+\mathtt{H}}$$

összefüggés alapján a dimenzió nélküli *relatív kockázat*ot definiáljuk.

(A $\mathtt{H} = \int_{\Pi}^{\infty} U(x-\Pi)dH(x)$ integrál a kockázattal, mint várható veszteséggel ellentétes értelmű várható nyereség.)

$\mathtt{K}_r$ értéke 0 és 1 közé esik; könnyű belátni, hogy $\Pi = \Pi_0$ (a korrekt vételár) esetén $\mathtt{K}_r = 1/2$. Zérus felé közeledvén a kockázat csökken, ellenkező irányban pedig nő. $\mathtt{K}_r = 0$ a biztos bukás, $\mathtt{K}_r = 1$ pedig a biztos siker.

Példa gyanánt számítsuk ki $\mathtt{K}$ és $\mathtt{K}_r$ értékét abban az esetben, ha a (logaritmikus véleményfüggvénnyel dolgozó) döntéshozó $\Pi = 10$ egységért megvásárolja a [8,18] intervallum egyenletes eloszlású hozamot! A döntéshozó tőkéje legyen $p = 30$.

Az egyenletes eloszlás sűrűségfüggvénye

$$h(x) = \begin{cases} 1/10, & \text{ha } 8 < x < 18; \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

ezzel

$$\mathtt{K} = -\int_{-\infty}^{\Pi} U(x-\Pi)h(x)dx = -\int_{x>-p}^{\Pi} p\ln\frac{p+x-\Pi}{p}h(x)dx$$

$$= -\frac{1}{10}\int_{8}^{10} 30\ln\frac{30+x-10}{30}dx = 6 - 84\ln\frac{15}{14} \approx 0,205.$$

$$\mathtt{H} = \int_{\Pi}^{\infty} U(x-\Pi)h(x)dx = \frac{1}{10}\int_{10}^{18} 30\ln\frac{30+x-10}{30}dx = 114\ln\frac{19}{15} - 24 \approx 2,950.$$

$\mathtt{K}_r = \frac{\mathtt{K}}{\mathtt{K}+\mathtt{H}} = 0,065$ a befektetés alig kockázatos – ami ebben az egyszerű példában számolás nélkül is nyilvánvaló.

IRODALOM

1. BÁCSKAI T.–HUSZTI E.–MESZÉNA GY.–MIKÓ GY.–SZÉP J. (1976): A gazdasági kockázat és mérésének módszerei. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
2. BORCH, K. H. (1968): The Economics of Uncertainty. Princenton Univ. Press.
3. BÜHLMANN, H. (1970): Mathematical Methods in Risk Theory. Springer-Verlag.
4. HEILMANN, W.-R. (1987): Grundbegriffe der Risikotheorie. Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe.
5. SEAL, H.L. (1969): Stochastic Theory of a Risk Business. John Wiley.

ON COMPUTATION OF MONETARY RISK

It is supposed that the profit of a fixed investment is described by a random variable with known distribution. The paper suggests two possible ways for measuring the investments' risk. The *absolute risk* – according to certain utility function – is based on the expected amount and the probability of loss, while the concept of *relative risk* takes into consideration the advantageous outcome that is the possible profit as well. As the range of the relative risk is between 0 and 1, it is suitable for comparing the different kinds of investments.

IDEGEN TOLLAK

EMLÉKEIM A LINEÁRIS PROGRAMOZÁS SZÜLETÉSÉRŐL[1]

GEORGE B. DANTZIG
Stanford Egyetem, Operációkutatás Tanszék

A lineáris programozás 1947-es – katonai tevékenységek tervezésével kapcsolatos – megalkotása óta széleskörű alkalmazást nyert. Tudományos körökben matematikusok, közgazdászok és azok, akik a Management Science-en belül operációkutatással foglalkoznak, könyvek százait és természetesen megszámlálhatatlanul sok cikket írtak ebben a témakörben.

Érdekes, hogy mindennapi problémákra való széleskörű alkalmazhatósága ellenére a lineáris programozás 1947-ig ismeretlen volt. Igaz, ketten vagy hárman tudtak a benne rejlő potenciális lehetőségről – például Fourier már 1823-ban és de la Vallee Poussin 1911-ben. Ezek azonban még elszigetelt próbálkozások voltak és műveik a feledés homályába merültek. Kantorovics 1939-ben javasolt egy átfogó módszert, amelyet azonban a Szovjetunióban nem méltattak figyelemre. Csak a matematikai programozásban végbement nagy fejlődés után, 1959-ben vált ismertté munkája nyugaton. Hogy milyen csekély erőfeszítések történtek korábban ezen a területen, jól szemlélteti, hogy Motzkin doktori (Ph.D.) értekezésében csak 42 cikket sorol fel 1936 előttről a lineáris egyenlőtlenségrendszerekről olyan szerzőktől, mint Stokes, Dines, McCoy és Farkas[2].

Tevékenységemet ezen a területen a második világháború során szerzett szakmai ismereteim alapozták meg. Ekkor váltam szakértővé a tervezési módszerek asztali számítógéppel történő programozása terén. 1946-ban az Egyesült Államok légierejének matematikai tanácsadója voltam. Éppen megszereztem a Ph.D. fokozatot, és egy kutatói állást kerestem. Hogy ne fogadjak el másik állást, kollégáim rávettek, vizsgáljam meg, milyen módon lehetne a tervezési folyamatot mechanikussá tenni. Arra kértek, hogy keressek egy gyorsabb számítási módszert egy időben többszintű hadrendbe állítási, kiképzési és utánpótlásszállítási program elkészítésére. Abban az időben a mechanikussá tétel analóg eszközök és lyukkártyák alkalmazását jelentette.

Képzettségemmel összhangban, mint matematikus elkezdtem felállítani egy modellt. Elbűvölt Vasszilij Leontief munkája, aki 1932-ben egy egyszerű mátrix struk-

[1] G.B. Dantzig: Reminiscences about the Origins of Linear Programming, Operations Research Letters, Vol. 1. No. 2. Fordította: Varró Zoltán.

[2] Farkas Gyula (1847-1930), a kolozsvári egyetem tanára volt. Számos eredmény fűződik nevéhez a lineáris egyenlőtlenségrendszerek megoldása terén.

túrát javasolt, amelyet az amerikai gazdaság *iparágak közötti input-output modell*jének nevezett. Koncepciója egyszerű volt és elegendő részletességgel lehetett megvalósítani, hogy hasznos legyen a gyakorlati programozás számára. Hamarosan láttam, hogy általánosítani is lehet. Leontief modellje statikus volt, nekem viszont egy dinamikus modellre volt szükségem, amely az időtényezőt is figyelembe veszi. Leontief modelljében kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés volt a termelési folyamatok és a folyamatok által előállított termékek között. Ezzel szemben nekem olyan modell kellett, amelyben sok alternatív tevékenység szerepel. Ez egy nagyméretű alkalmazás volt, tevékenységek és termékek százaival. Végül a modellnek megoldhatónak is kellett lenni. Miután a modell elkészült, szükség volt egy gyakorlati módszerre is ezen tevékenységek méreteinek kiszámítására, amely összhangban van input-output jellemzőikkel és az adott erőforrásokkal. A modell, amelyet felállítottam, manapság dinamikus lineáris programozási feladatnak lenne nevezhető, lépcsős mátrix struktúrával. Kezdetben nem volt célfüggvénye, mivel gyakorlati tervezőknek egyszerűen nem volt módjuk egy meghatározott célt megfogalmazni.

A következő egyszerű példa egy tervezési probléma tevékenységelemzéssel történő megfogalmazásánál felmerülő alapvető nehézségeket illusztrálja. Tekintsük 70 ember hozzárendelését 70 munkához. A "tevékenység" itt az i-edik embernek a j-edik munkához való hozzárendelését jelenti. A feltételek:

(1) minden embert hozzá kell rendelni egy munkához;

(2) minden munkát el kell végezni.

Egy tevékenység szintje vagy 1, ekkor végrehajtjuk, vagy 0, ekkor pedig nem. Így 2×70, azaz 140 feltételünk van, és 70×70, azaz 4900 tevékenységünk a hozzájuk tartozó 4900 nulla-egy értékű döntési változóval. Sajnos összesen 70! különböző lehetséges megoldás, azaz hozzárendelési mód van. A feladat az, hogy ezeket összehasonlítsuk egymással és valamilyen kritérium alapján kiválasszuk a legjobbat.

A 70! nagyon nagy szám, nagyobb mint 10^{100}. Tegyük fel, hogy lett volna egy IBM 370-168 számítógépünk az ősrobbanás időpontjában, 15 milliárd évvel ezelőtt. Képes lett volna átnézni az összes 70! permutációt 1981-ig? Nem! És ha feltesszük, hogy meg tudott volna vizsgálni 1 milliárd hozzárendelést másodpercenként? A válasz még mindig nem. Ha a Föld tele lenne olyan számítógépekkel, amelyek párhuzamosan dolgoznak, a válasz még akkor is nem. Ha lenne 10^{50} számú Föld, vagy 10^{44} számú Nap nagyságú bolygó, tele párhuzamosan programozott, nanosecundum sebességű számítógépekkel, amelyek az ősrobbanás kezdetétől a nap kihűléséig működnének, akkor talán a válasz igen lenne.

Ez az egyszerű példa illusztrálja, hogy 1947-ig és jórészt a mai napig miért van olyan nagy szakadék az ember vágyai és cselekedetei között. Az emberek szeretnék igényeiket egy cél tekintetében maximálni, de olyan sokféle megközelítés létezik, előnyökkel és hátrányokkal, hogy lehetetlennek látszik mindet összehasonlítani, és közülük a legjobbat kiválasztani. Ezért eddig mindig egy vezetőhöz fordultak, akinek a tapasztalatai és megfontolt véleménye mutatott utat. Ezt általában úgy tették, hogy megfogalmaztak egy sor szabályt és utasítást, amelyet a program fej-

lesztőinek végre kellett hajtani. Ez volt a helyzet 1946 vége felé. Felállítottam egy modellt, amely kielégítően reprezentálta a gyakorlatban rendszerint előforduló technológiai kapcsolatokat. Egy explicit cél vagy célfüggvény helyett nagy számú ad hoc szabály volt, amelyek elősegítették a kiválasztást. Ezek nélkül a szabályok nélkül a legtöbb esetben csillagászati számú megengedett megoldásból kellett volna választani.

Mindaz, amit a korai fejleményekről eddig elmondtam, még a számítógép megjelenése előtt történt. Azonban 1946 vége felé már tudtuk, hogy hamarosan megszületik.

Egy pillanatra elkalandozva a tárgytól, szeretnék néhány szót szólni az elektronikus számítógépről. Számomra, de feltételezem, hogy mindannyiunk számára, az egész időszak legmegdöbbentőbb fejleménye a számítógép behatolása volt az emberi tevékenység majd minden fázisába. Mielőtt azonban egy számítógépet intelligensen használni lehet, fel kell állítani egy modellt és jó algoritmusokat kell kifejleszteni. A modell felépítéséhez szükség van a téma axiomatizálására. Ez előidézi a matematika egy egészen új ágának a létrejöttét, amelyet önmagáért is tanulmányoznak. Így a számítógép minden egyes újabb térhódításával új tudományág is születik.

Neumann[3] írta le ezt az axiomatizálás irányába mutató tendenciát *Az automaták általános és logikai elmélete* című tanulmányában. Azt állítja, hogy az automaták a természettudományokban folytonosan növekvő szerepet játszanak. A természetes rendszerek (pl. a központi idegrendszer) roppant bonyolultak, ezért világos, hogy ezeket először fel kell bontani számos részre, amelyek bizonyos mértékig független, elemi egységek. A probléma annak a megértéséből áll, hogy hogyan szerveződnek az alkotórészek egésszé. Valószínűleg az utóbbi probléma vonzza azokat, akiknek matematikai vagy logikai képzettségük és hajlamuk van. „Ilyen beállítottsággal – állítja Neumann – az ember hajlik arra, hogy a kiindulópontot elfelejtse, és egy axiomatizálási folyamat befejezése után a matematikai szempontokra koncentráljon."

1947 közepéig eldöntöttem, hogy a célt explicit formában kell megfogalmazni. A tervezési problémát axiómák halmazaként fogalmaztam meg. Az axiómák a kétféle halmaz közötti kapcsolatra vonatkoztak. Az első a megtermelt vagy felhasznált termékek halmaza, a második a tevékenységek vagy termelési folyamatok halmaza volt. A termékek rögzített arányban, egymásnak nemnegatív számszorosaként, ezeknek a folyamatoknak az inputjai vagy outputjai. Az eredményül kapott megoldandó matematikai probléma egy lineáris forma minimumának megkeresése volt, lineáris egyenlőségekből és egyenlőtlenségekből álló feltételrendszer mellett. A különlegessége az volt, hogy egy lineáris forma mint célfüggvény szélsőértékét kellett meghatározni.

Ekkor vetődött fel a nem nyilvánvaló kérdés: Meg lehet oldani egy ilyen rendszert? Először azt feltételeztem, hogy közgazdászok dolgoznak ezen a problémán.

[3]Neumann János (1903–1957), századunk egyik legjelentősebb matematikusa Budapesten született és végezte tanulmányait. 1931-től Princetonban működik. Úttörő szerepet játszott számos tudományág kialakulásában (játékelmélet, operációkutatás, számítógépek programozása).

Ezért 1947 júniusában meglátogattam T.C. Koopmanst a Cowles alapítványnál a chicagói egyetemen és mindent megtudtam a matematikai közgazdászoktól, amit csak lehetett. Koopmans nagyon izgatott lett. Ő a második világháború alatt a Szövetségi Szállítási Hivatalnál dolgozott ki egy szállítási modellt, így neki mind az elméleti, mind a gyakorlati tervezői képzettsége megvolt ahhoz, hogy felbecsülje annak jelentőségét, amit előadtam. Azonnal látta annak az általános gazdasági tervezésre vonatkozó következményeit. Ettől kezdve Koopmans vezető szerepet játszott abban, hogy a lineáris programozásban rejlő potenciális lehetőségekre felhívja az olyan fiatal közgazdászok figyelmét, mint K. Arrow, P. Samuelson, H. Simon, R. Dorfman, L. Hurwicz, hogy csak néhányat említsek. Ez a kutatás számos Nobeldíjhoz vezetett a közgazdaságtanban.

Mivel láttam, hogy a közgazdászoknak nincs módszerük a feladat megoldására, magam próbáltam szerencsét egy algoritmus megkeresésével. Nagy hálával tartozom Jerzy Neymannak, a világ akkori vezető matematikai statisztikusának, aki egyetemista koromban irányította a munkámat Berkeleyben. Értekezésem a matematikai statisztika két híres megoldatlan problémáját tárgyalta, melyeket félreértvén házi feladatnak hittem, és megoldottam. Az egyik közülük, később Walddal közösen publikálva, a Neyman-Pearson lemmával foglalkozott. Mai szóhasználattal élve az értekezésem kontinuum számosságú változóból álló lineáris programozási feladat Lagrange szorzóinak (vagy duál változóinak) létezését vizsgálta. A változók a nulla és egy korlátok között mozoghattak és Lebesgue integrál formájában kifejezett lineáris feltételeknek kellett eleget tenniök. Ilyen feltételrendszer mellett kerestem egy lineáris célfüggvény szélsőértékét. Az a sajátságos geometria, amelyet értekezésemben használtam, a sorok helyett az oszlopvektoroké volt. Az oszlopvektoroknak a geometriája sejttette velem, hogy a szimplex módszer nagyon hatásos technika lesz a lineáris programozási feladatok megoldására. Így ezt ajánlottam 1947 nyarán, és szerencsére működött is.

A szimplex módszer első nagyméretű alkalmazása egy, a szükséges kívánalmaknak megfelelő, minimális költségű étrend meghatározása volt. 1947 őszén J. Laderman, a Nemzeti Szabványügyi Hivatal Matematikai Táblázatok kutatási témájának vezetője irányította a kilenc egyenletből és hetvenhét nemnegatív változóból álló rendszer megoldását. Kézi működtetésű asztali számológépekkel a megoldás 120 napot vett igénybe. A számításokhoz használt lapokat összeragasztottuk egy nagy táblázattá és így volt kiállítva évekig. A megoldott problémát korábban G. J. Stigler is tanulmányozta, aki egy olyan megoldást sejtett, amely csak 24 centtel (1939-ik évi árszinten) volt magasabb, mint az igazi minimális költség, amely 39$ 69 centet tett ki.

De csaknem egy év múlt el, mielőtt felismertem, hogy a szimplex módszer valójában milyen hatékony eszköz. Időközben eldöntöttem, konzultálok a „nagy" Neumann Jánossal, hogy megtudjam, milyen megoldási technikát javasolna. Őt akkor sokan a világ vezető matematikusának tekintették. 1947 október 3-án látogattam meg először az Alkalmazott Tudományok Intézetében Princetonban. Emlék-

szem, hogy úgy próbáltam leírni Neumannak a légierő problémáját, mintha egy közönséges halandó lennék. A tevékenységeket és termékeket magában foglaló lineáris programozási feladat megfogalmazásával kezdtem, stb. Ekkor Neumann valami olyat tett, ami, azt hiszem, nem volt jellemző rá. „Térjünk a lényegre!" mondta türelmetlenül. Ha időnként valamilyen kevésbé érdekes részhez értünk, akkor azt mondtam magamnak: „Oké, ha össze akarja csapni, akkor úgy is elmondhatom." Egy perc alatt fölfirkantottam a probléma geometriai és algebrai változatát a táblára. Neumann felállt, és azt mondta: „Tehát erről van szó!" És a következő másfél órában hozzáfogott egy előadás megtartásához a lineáris programok matematikai elméretéről.

Egyszer csak, miután észrevette, hogy kidülledt szemekkel és tátott szájjal ülök ott (ugyanis végigkerestem a szakirodalmat, és nem találtam semmit), Neumann azt mondta: „Ne gondolja, hogy ezeket, mint egy varázsló, most húzom ki a kabátom ujjából. Az imént fejeztünk be egy könyvet Oscar Morgensternnel a játékelméletről. Amit most csinálok, az annak feltételezése, hogy a két probléma azonos. Az elmélet, amelyet az ön problémájára körvonalazok, analóg ahhoz, amelyet játékokra fejlesztettünk ki." Így szereztem tudomást első alkalommal Farkas lemmájáról és a dualitásról. Neumann megígérte, hogy a problémámhoz ad néhány gondolatot, és pár hét múlva ismét kapcsolatba lép velem. Írt nekem, és egy iteratív módszert javasolt, amelyet Alan Hoffman és csoportja a Szabványügyi Hivatalban 1952 körül összehasonlított a szimplex módszerrel és Motzkin javaslatával. A szimplex módszer jött ki tisztán győztesként.

Egy másik princetoni látogatásomnak az volt az eredménye, hogy 1948 júniusában találkoztam Al Tuckerrel. Hamarosan Tucker és hallgatói, H. Kuhn és D. Gale megkezdték történelmi jelentőségű munkájukat a játékelmélet, a nemlineáris programozás és a dualitás elméletének a területén. Ez a princetoni csoport lett a fókuszpontja azoknak a matematikusoknak, akik ezt a területet kutatták. Tizenkét évvel későbbről emlékszem egy beszélgetésre Tucker professzorral, aki a *Lineáris programozás és kiterjesztései* [2] című könyvem kéziratát olvasta. Beszélgetésünk a következőképpen folyt le: „Miért tulajdonítja a dualitást Neumannak, és nem az én csoportomnak?" kérdezte. „Mert ő volt az első, aki megmutatta nekem." Különös, mivel semmilyen írott anyagot nem találtunk erről Neumanntól. Ami nekünk van, az az *Egy maximumfeladatról* című cikke. „Igaz, – mondtam – de hadd küldjem el Neumannal történő első találkozásom eredményeként írt cikkemet." Elküldtem neki 1948. január 5. keltezésű *Egy tétel a lineáris egyenlőtlenségekről* című tanulmányomat, amely tartalmazta (legalábbis ismereteim szerint) a dualitás első szigorú bizonyítását. Később Tucker azt kérdezte: „Miért nem publikálta ezt?" Mire én ezt válaszoltam: „Mert ez nem az én eredményem, hanem Neumanné. Csupán annyit tettem, hogy belső terjesztésre leírtam saját bizonyításomat, amit Neumann vázolt. Ilyen módon oktattam hivatalom embereit a Pentagonban." Ma mindenki úgy tartja, hogy a dualitás fogalma Neumanntól ered, és az első szigorú bizonyításokat Tucker, Kuhn és Gale publikálták.

Nem sokkal Tuckerrel történt első találkozásom után volt a Közgazdasági Társaságnak egy találkozója Wisconsinban, amelyen jól ismert statisztikusok, matematikusok és közgazdászok, mint Hotelling, Neumann, Koopmans és más, ma jól ismert, de akkor karrierjük kezdetén álló kutatók vettek részt. Emlékszem, hogy eléggé meg voltam ijedve attól, hogy először ilyen kitűnő hallgatóságnak kell bemutatnom a lineáris programozás alapgondolatát.

Előadásom után az elnök megnyitotta a vitát. Egy pillanatig csend volt, de aztán egy kéz emelkedett a magasba. Hotellingé volt. Gyorsan előre kell bocsátanom, hogy Hotelling hatalmas termetű volt. Szeretett úszni az óceánban, és azt mondják, hogy ekkor érezhetően megemelkedett a vízszint. Ez az óriási termetű ember állt fel a terem végében. Kifejező arcára a mindentudók mosolya ült, amelyet jól ismertünk. Mindent elsöprő módon azt mondta: "*Hiszen mindannyian tudjuk, hogy a világ nem lineáris.*" Aztán méltóságteljesen leült, és én, aki tulajdonképpen ismeretlen voltam, kétségbeesetten próbáltam megfogalmazni a helyes választ a nagy Hotellingnek.

Hirtelen egy másik kéz emelkedett a hallgatóság soraiban. Neumanné volt. „Elnök úr, Elnök úr" – mondta – „ha az előadó megengedi, én szeretnék válaszolni rá." Természetesen beleegyeztem. Neumann azt mondta: „Az előadó előadásának a Lineáris programozás címet adta. Ezután gondosan kifejtette axiómáit. Ha vannak olyan alkalmazások, amelyek eleget tesznek az axiómáknak, akkor használjuk, ha nincsenek, akkor ne" – és leült. Végeredményben Hotellingnek igaza volt. A világ egyáltalán nem lineáris. Szerencsére a lineáris egyenlőtlenségrendszerek (az egyenletekkel ellentétben) lehetővé teszik, hogy a legtöbb gyakorlati tervezésben előforduló nemlineáris relációt lineárissal közelítsük.

Az elektronikus számítógép megjelenése, vagy inkább ígérete, az elméleti matematikusok és közgazdászok szoros kapcsolata a valóságos problémákkal a háború alatt, a tervezési folyamat mechanikussá tételének fontossága és a pénz elérhetősége az ilyen alkalmazott kutatásokra találkozott össze az 1947-49 közötti időszakban. Nemcsak ösztönzött bennünket a megjelenése, de a számítógép használatának lehetőségei a tervezésben okot szolgáltattak a hadseregnek arra, hogy nagy pénzösszegeket bocsásson a Szabványügyi Hivatal rendelkezésére a számítógép kifejlesztése céljából (Univac, SEAC és IBM).

1949-ben, pontosan két évvel azután, hogy a lineáris programozás megkezdődött, rendezték a chicagoi egyetemen az első matematikai programozási konferenciát (amelyre mint az első Matematikai Programozási Szimpozion-ra is szokás hivatkozni). A szervező Koopmans később a konferencia előadásainak a *Termelés és elosztás tevékenységelemzése* címet adta. Közgazdászok, mint Koopmans, Arrow, Samuelson, Hurwicz, Dorfman, Georgescu-Roegen és Simon; matematikusok, mint Tucker, Kuhn és Gale; továbbá a légierő emberei Marshall, Wood, Murray Geisler és jómagam adtunk elő. Az idő elérkezett arra, hogy a tudomány e két rövid esztendő alatt, véleményem szerint, véghezvigye a történelem egyik legfigyelemreméltóbb teljesítményét. A konferencia közleményei mind a mai napig fontos hivatkozási alapként szolgálnak, klasszikus munkák.

A szerkesztés idején Koopmans arra kért, hogy hagyjak el egy feltételt, amelyre a szimplex módszer bizonyításánál támaszkodtam. Azt akarta, bizonyítsam be, hogy az algoritmus konvergens a degenerációmentességre vonatkozó feltétel nélkül is. Ez ésszerűnek is tünt, hiszen például mennyi a valószínüsége annak, hogy négy sík a tér egy pontjában találkozik? De ezután valami váratlan történt. Kiderült, hogy jóllehet egy LP feladat degeneráltságának a valószínűsége zéró, mégis a légierőnél tesztelt minden feladat ilyennek bizonyult. Úgy nézett ki, hogy degeneráció nem fordulhat elő, de mégis előfordult. Szabály volt, és nem kivétel.

A jobboldal perturbációjának módszerét javasoltam a degeneráció elkerülésére a szimplex módszer használatánál. Körvonalaztam a bizonyítást és a hallgatóimnak adtam házi feladatként. J. H. Edmondston és mások adtak rá bizonyításokat 1951 márciusában. 1951 nyarán P. Wolfe, aki akkoriban Berkeleyben hallgató volt, velem töltötte a nyarat a Pentagonnál, és a perturbációs gondolat egy lexikografikus interpretációját javasolta, amelyet Wolfe, Orden és én közösen publikáltunk. A. Charnes tőlünk függetlenül kifejlesztett egy másik perturbációs eljárást is. Évekkel később Wolfe egy harmadik módszert javasolt (a szimplex módszerre vonatkozó induktív bizonyításomra támaszkodva), amely véleményem szerint a legjobb, mivel csupán egy újabb oszlopnyi információ segítségével feloldja a degenerációt. Beale és Hoffman 1953 körül megalkották az első olyan degenerált feladatokat, amelyekre a szimplex algoritmus nem konvergens. Hogy a degeneráció elkerülésére szükséges-e valamilyen módszert alkalmazni, eddig még nem dőlt el. Nemrégen (1981) megfigyelték, hogy még ha nincs is degeneráció, nagy a valószínűsége, hogy majdnem degeneráció van. Ez azt sugallja, hogy a pivot elem választási kritériumot úgy kellene meghatározni, hogy elkerüljük a degenerált és majdnem degenerált megengedett megoldásokat. Ilyen módon eljárva kellene az iterációk számát csökkenteni.

Az ipari és közgazdasági alkalmazások 1951-ben kezdődtek Charnes és Cooper révén. Alan Manne, Harry Markowitz és mások kifejlesztették a folyamat-modellek fogalmát. Az 1950-es években és később a lineáris programozás több általánosítása született meg, mint például a nem-lineáris programozás, hálózati folyamok elmélete, módszerek nagy méretű feladatokra, sztochasztikus programozás, egészértékű programozás, komplementer pivot elmélet, kombinatorikus feladatok bonyolultságával foglalkozó elmélet és az algoritmus hatékonyság. Az 1960-as és 70-es években ezek a területek exponenciálisan növekedtek.

Mielőtt még befejezném, hadd mondjak el néhány sztorit arról, hogyan keletkeztek a különböző lineáris programozási fogalmak elnevezései. A hadseregben a kiképzés, az ésszerű utánpótlás és a harci egységek hadrendbe állítására szolgáló ütemterveket programnak hívták. Amikor először elemeztem a légierő tervezési problémáját és láttam, hogy lineáris egyenlőtlenség-rendszerként lehetne megfogalmazni, ezért tanulmányomnak az alábbi címet adtam: *Programozás egy lineáris struktúrában*. 1948 nyarán Koopmans és én meglátogattuk a RAND nevű vállalatot. Egyik napon sétát tettünk Santa Monica mellet a tengerparton. Koopmans azt mondta: „Miért ne rövidítsük a programozás egy lineáris struktúrában elnevezést

lineáris programozásra?" Azt válaszoltam: „Ez az! Mostantól kezdve ez legyen a neve!" Később ugyanezen a napon előadást tartottam a RAND-nál lineáris programozás címmel. A matematikai programozás szakkifejezés Robert Dorfmantól származik, aki már 1949-ben túlságosan szűknek érezte a lineáris programozás elnevezést. A szimplex módszer kifejezés egy T. Motzkinnal folytatott megbeszélésünk során merült fel, mivel ő úgy gondolta, hogy az általam választott megközelítés az oszlopvektortér geometriájában egyik szimplextől a szomszédos szimplexhez történő mozgással írható le (1948).

A matematikai programozás szintén közrejátszott néhány elnevezés kialakulásában, amelyek ma általánosan elfogadottak a matematikai szakirodalomban. Ilyenek például az Arg-min, Arg-max, Lexico-max, Lexico-min fogalmak. A duál elnevezés nem új. Meglepő módon a primál, amelyet 1954 körül vezettek be, viszont igen. Következőképpen keletkezett: W. Orchard-Hays, aki az első kereskedelmi kategóriájú LP szoftvert készítette, mondta nekem a RAND-nál egy napon: „Szükségünk lenne egy szóra annak a kiinduló feladatnak az elnevezésére, amelynek ez a duálja." Én viszont apámhoz, Tobias Dantzighoz fordultam, aki matematikus és jól ismert szerző volt a matematika történetét népszerűsítő könyvei révén. Tudott latinul és görögül is. Akárhányszor is próbálkoztam neki előhozakodni a lineáris programozzással – Toby, akit mindenki nagy szeretettel csak így hívott –, mindig unatkozott és ásított. De egy alkalommal mégis gondolkozott a dolgon, és néhány nappal később a primál elnevezést javasolta a duál természetes ellentétének, mivel mindkét szó a latinból származik. Ez volt Tobynak az egyetlen közreműködése a lineáris programozás területén, hacsak nem számítjuk azt a képzést, amit nekem nyújtott a klasszikus matematikában, vagy szerepét elképzelésem kialakításában.

Ha arra kérnének, hogy összegezzem korai és talán legfontosabb eredményeimet a lineáris programozásban, akkor a következő hármat említeném:

(1) Annak felismerése (a háború alatti öt éves gyakorlati program tervezői munka eredményeként), hogy a legtöbb gyakorlati tervezési relációt lineáris egyenlőtlenségrendszerrel lehet megfogalmazni.

(2) A jó vagy a legjobb tervek kiválasztási kritériumának kifejezése explicit célok segítségével (pl. lineáris célfüggvény) és nem olyan szabályokkal, amelyek legfeljebb a célok megvalósításának eszközei, de maguk nem célok.

(3) A szimplex módszer feltalálása, amely a közgazdaságtan elméletének egy lehetséges érdekes megközelítését a nagy komplex rendszerek gyakorlati tervezése alapvető eszközévé alakította át.

A szimplex módszer irtózatosan nagy erejét nehéz felismerni. Hogy a korábban említett hozzárendelési feladatot nyers erővel megoldjuk, a naprendszert kitöltő mennyiségű, nanoszekundum sebességű elektronikus számítógépeknek kellene működni az ősrobbanástól az Univerzum kihűléséig, hogy minden permutációt átvizsgálva biztosan megtalálják a legjobb megoldást. Az IBM 370-168 számítógépnek egy szabványos, szimplex módszert használó szoftverével a megoldás mégis csupán egy másodpercig tart. A szimplex módszer tételek bizonyítására is erőteljes elméleti

eszköz. Tételek bizonyításához lényeges, hogy az algoritmus magában foglalja a degeneráció elkerülésének módját is.

Visszatekintve érdekes megjegyezni, hogy az eredeti probléma, amely elindította kutatásaimat, még mindig nem megoldott. Nevezetesen a dinamikus, időben történő tervezés vagy ütemezés problémája. Több javaslat is született ilyen típusú, nagyméretű rendszerek megoldására, mint például az egymásba skatulyázott dekompozíciós elv. Manapság ez egy élő, izgalmas és nehéz terület, amelynek fontos hosszú távú tervezési alkalmazásai vannak, és hozzá tudna járulni a világ jólétéhez és stabilitásához.

A lineáris programozást megelőzően nem volt jelentőségük az explicit módon kifejezett céloknak, amelyeket így összetévesztettek a megoldáshoz szükséges alapszabályokkal. Kérdezzünk meg egy katonai parancsnokot, hogy mi a cél. Azt fogja mondani: „A cél a háború megnyerése". Ha arra kérjük, hogy ezt világosabban fejtse ki, akkor a haditengerészetnél azt mondják: „A háború megnyerésének módja a hadihajók építése." A légierő tábornoka viszont ezt mondja: „A háborút nagy bombázó légiflotta építésével lehet megnyerni." Így az eszközök célokká válnak, amelyek ismét új alapszabályokat szülnek, hogy hogyan építsünk bombázókat vagy űrhajókat, és így tovább lefelé.

Az a képesség, hogy általános célokat tudunk megállapítani, és aztán megtaláljuk a nagy bonyolultságú gyakorlati döntési problémák optimális megoldását, forradalmi fejlemény. Bizonyos területeken, mint a kőolaj- vagy vegyipari tervezésben a lineáris programozás általánossá vált a költségminimalizálás céljaira. Más területeken, mint például a csökkenő erőforrásokkal szemben növekvő népesség dinamikájának modellezésében rejlő lehetőségek az életszínvonal növelése céljából eddig nagyrészt kiaknázatlanok maradtak.

IRODALOM

1. A. CHARNES – W. COOPER: Management Models and Industrial Applications of Linear Programming. Vol. I, II. Wiley, New York (1961).
2. G. B. DANTZIG: Linear Programming and Extensions. Princeton University Press. Princeton , N.J. (1963).
3. D. GALE – H. KUHN – A. TUCKER: Linear Programming and the Theory of Games, in: Activity Analysis of Production and Allocation (Tj.C. Koopmans, ed.). Wiley, New York (1951) Chapter VII, pp. 287-297.
4. A. J. HOFFMAN – M. MANNOS – D. SOKOLOWSKY – N. WIEGMANN: Computational experience in solving linear programs. Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics 1(1953) 17-33.
5. L. V. KANTOROVICH: Mathematical Methods of Organizing and Planning Production (in Russian). Publication House of the Leningrad State University, 1939. English translation: Management Science 6(1959-60) 366-422.
6. T. C. KOOPMANS, (ed.): Activity Analysis of Production and Allocation. Wiley, New York (1951).

7. W. LEONTIEF: The Structure of the American Economy, 1919-39. Oxford University Press, Oxford (1951).
8. A. S. MANNE – H.M. MARKOWITZ, (ed.): Studies in Production Analysis. Wiley, New York (1963).
9. J. VON NEUMANN – O. Morgenstern: Theory of Games and Economic Behaviour. Princeton University Press, Princeton, N.J. (1944).

TUDOMÁNYOS ÉLET

BESZÁMOLÓ A GAZDASÁGMODELLEZÉSI TÁRSASÁG II. SZAKÉRTŐI KONFERENCIÁJÁRÓL

A Gazdaságmodellezési Társaság 1992. június 17 és 19 között tartotta második szakértői konferenciáját. A több mint harminc résztvevő Pécsett a televíziós torony közelében, a festői környezetű Kikelet Szállóban, családias hangulatban 20 előadást hallgathatott meg. A konferencia megrendezését a Janus Pannonius Tudományegyetem Közgazdasági Kara vállalta magára, a résztvevők szerint nagyon sikeresen. Az öt plenáris előadás előrevetítette a konferencia sokszínűségét: konkrét, gazdaságpolitikával kapcsolatos kérdésektől kezdve, gyakorlattal nagyon szoros kapcsolatban levő modelleken, elemzési eljárásokon át, a szigorúan vett gazdaságmatematikai elméletig terjedt a skála.

Bélyácz Iván „Tulajdonelmélet és privatizáció" című előadása az első, illetve a második csoportba is beletartozott. Az előadó ismertette a különböző privatizációs álláspontokat, és a nemzetközi tapasztalatok tükrében beszámolt a hazai törekvésekről. **Náray László** „Átmenet a makrogazdasági mutatók tükrében" és **Vértes András** „Prognózisok és módszerei" című előadása is a konkrét elemzéseken kívül a gazdaságmatematika eszköztárának egy-egy felhasználási területével foglalkozott. Náray László azt boncolgatta, hogy mennyi reális információt tartalmaznak egy átmeneti gazdaság mutatói, és mire kell ügyelni az ilyen adatokat tartalmazó idősoros elemzésekkor. Náray definiálta a restriktív gazdaságpolitika fogalmát. Vértes András a prognózisokhoz szükséges szakértői vélemények összegyűjtési módszereiről, az általuk szerzett konkrét tapasztalatokról beszélt.

Augusztinovics Mária „Stacioner gazdasági népességek elmélete" című előadásában egy olyan témával foglalkozott, amelynek saját cikkein kívül elég szűkkörű a magyarországi irodalma. A különböző lakossági cohorsok életútja során a bemenő inputokat hasonlította össze a cohorsok munkájának eredményeként létrejött outputtal. Az alapmodell feltételezte a népesség cohorsainak keresztmetszeti és idősoros azonosságát, mind demográfiai, mind gazdasági aktivitás tekintetében. Augusztinovics vázolta az egyszerűsítő feltételek feloldásakor keletkező nehézségeket.

Bródy András „Közgazdaságtan és termodinamika" című előadásában Paul A. Samuelson őt érintő kritikájára reagált. Samuelson a John C. Harsanyi tiszteletére a Springer-Verlagnál nemrégiben megjelent kötetben sérelmezi, hogy Bródy véleménye szerint a közgazdasági axiómarendszer párhuzamos a termodinamikai axiómarendszerrel. Samuelson úgy véli, hogy Bródy helytelenül értelmezi J.W.Gibbs termodinamikai munkásságát is. Bródy axiómánként végighaladva igazolta állításai helyességét, és rávilágított Samuelsonnak Gibbs-szel kapcsolatos tévedésére is.

A szekcióülések legnépszerűbb előadója **Simon András** volt, akinek három alkalommal is tapsolhatott a hallgatóság. Előadásának címei: „Kelet-ázsiai kereskedelmi modell", „Aggregált többletkereslet vagy strukturális rugalmatlanság?" és „Privatizálási stratégiák makroökonómiája". A középsőnek említett előadásában Simon azt hangoztatta, hogy a szocialista gazdaságokra nem a túlzott kereslet, hanem a kínálati struktúra merevsége a jellemző. Simon szerint a disequilibrium makromodellek logikailag hibásak. **Horváth Gézáné** a marketing kutatás Markov-láncos előrejelzéseiről, **Rappai Gábor** a többpiacos nem egyensúlyi modellek specifikációjáról és paraméterbecsléséről beszélt. **Ligeti Csák** a nemzetgazdasági elszámolásokat és az ágazati kapcsolatok mérlegét integrált módon megalapozó rendszert, a Commodity Flowt ismertette.

Meszéna György „Egyes fizikai és biológiai analógiák a társadalomtudományban" című előadásában rendszerezte a közgazdaságtan fizikai, illetve biológiai analógiáit. **Hajdú Ottó** a korrespondencia analízissel ismertette meg a hallgatóságot, megmutatta ennek a sokváltozós technikának a szerepét a gyakorisági táblák értékelésekor.

Vörös József „Egy új heurisztika sorozatnagyság megállapításához" című előadásából kiderült, hogy egy speciális problémára olyan heurisztikus algoritmust sikerült találnia, amelynek hatékonysága pillanatnyilag világelső. **Kruzslicz Ferenc** egyszintű sorozatnagyság-modellek osztályozásáról, **Fazekas Gergely** a tőzsdeindexekről tartott előadást.

Nagy érdeklődés kísérte **Korinek László** rejtett bűnözésről szóló értekezését. Először 1982-ben, majd a közelmúltban véletlenszerű lakossági minta kérdőíves felmérésével megpróbálták feltérképezni a rendőrségen be nem jelentett bűneseteket. Hallhattunk a felméréssel kapcsolatos statisztikai kérdésekről, illetve magukról az eredményekről is.

Bessenyei István a tőkehiányos térségek növekedési lehetőségeiről beszélt a tervgazdaságokban. **Tarján Tamás** „Az átmenet melyik modellje a legmeggyőzőbb?" című előadásában elméleti matematikai-közgazdasági modellcsalád segítségével próbált választ adni arra a kérdésre, hogy az átmenetre a sokkterápia híveinek megoldása vagy a fokozatos változások modellje a legmegfelelőbb. A **Lovrics László** tolmácsolásában elhangzott Alföldi Ferenc – Gábor András – Kő Andrea – Lovrics László szerzőnégyes előadása a neurális hálók elméletéről, ökonometriai alkalmazásával kapcsolatos problémákról szólt. **Berde Éva** a közjátszóterek mikroökonómiájáról, és saját kérdőíves felméréséről számolt be.

Berde Éva
BKE, adjunktus