MARTOS BÉLA MATEMATIKAI PROGRAMOZÁSI MUNKÁSSÁGA[1]

FORGÓ FERENC
BKE Operációkutatási Tanszék

Bevezetés

Magyarországon az 50-es évek második felében kezdtek el néhány tudományos műhelyben (MTA Matematikai Kutató Intézete, MTA Közgazdaságtudományi Kutató Intézete, Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem) komolyabban foglalkozni eleinte a lineáris programozással, majd a nemlineáris programozással is. Ezen a területen elsősorban amerikai tudósok tették meg az első igen fontos lépéseket és az akkori körülmények között már az is nagy eredménynek számított, ha ezekhez a forrásokhoz valaki hozzá tudott jutni és szakmai körökben valamint az egyetemeken terjeszteni tudta. Még nagyobb teljesítmény rövid időn belül ezen tudományág fejlődéséhez érdemben hozzájárulni.

Martos Béla a 60-as években és a 70-es évek elején jelentős új eredményekkel gazdagította a matematikai programozás elméletét és módszereit. Tanúsítják ezt az elsőrendű folyóiratokban megjelent cikkei, ma is aktuális, didaktikus és szemléletformáló könyve, valamint az az iskolateremtő szellemi kisugárzás, amely azóta sem veszített intenzitásából.

Ebben az előadásban megpróbálom *Martos Béla* legfontosabb munkáit a matematikai programozás általános keretében elhelyezni, a nem specialista számára is világossá tenni jelentőségüket, a specialistát pedig inspirálni hasonló szinvonalú és mélységű eredmények elérésére. Néhány általa felvetett, azóta sem megoldott problémát is felelevenítek, egy kis üresen hagyott területet kitöltök, továbbá egy lehetséges kutatási irányt vázolok a játékelmélet területéről, amelyben a *Martos-féle* megközelítés hasznosnak igérkezik.

Matematikai programozási feladatok kellemes tulajdonságai

A matematikai programozási feladatot az alábbi általános formában adjuk

[1] Martos Béla 75. születésnapja alkalmából rendezett ülésen elhangzott előadás alapján.
Beérkezett 1996. január 18.

meg:

$$\text{MP}: \quad \begin{aligned} & f(x) \longrightarrow \min \\ & g_i(x) \le b_i\,, \qquad i = 1, \ldots, m \\ & x \in X \subset \mathbf{R}^n\,, \end{aligned}$$

ahol X konvex halmaz.

A továbbiakban X mindig egy konvex halmazt jelöl. Jelöljük továbbá az MP lehetséges megoldásainak halmazát a $b := (b_1, \ldots, b_m)$ jobboldal (erőforrásvektor) függvényében az alábbi módon:

$$L(b) := \{x \in X \mid g_i(x) \le b_i\,, \quad i = 1, ..., m\}\,.$$

Az optimális megoldások halmazát pedig jelöljük $L^\circ(b)$-vel.

Ahhoz, hogy hatékony módszereket tudjunk alkalmazni az MP megoldására, jó, ha az bizonyos "kellemes" tulajdonságokkal rendelkezik. Ezek megléte teszi lehetővé, hogy lokális információkból globális következtetéseket vonjunk le, valamint, hogy az optimum keresését egy véges halmazra szűkítsük le.

Az MP feladatot "jól viselkedőnek" nevezzük, ha rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal minden b jobboldal esetében:

1. $L(b)$ zárt, konvex.
2. $L^\circ(b)$ zárt, konvex.
3. Minden lokális minimum egyúttal globális is.

Nevezzük az MP feladatot "igen jól viselkedőnek", ha jól viselkedő, és még rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal is:

4. $L(b)$ és $L^\circ(b)$ poliéderek.
5. Az optimum legalább egy csúcspontban is felvétetik.
6. Minden lokális csúcsminimum-pont egyúttal lokális minimum-pont (és igy a 3. tulajdonság miatt globális minimum-pont) is.

A matematikai programozás első eredményeinek egyike, hogy az ún. konvex programozási feladat, ahol $f, g_1, \ldots, g_m$ folytonos, konvex függvények jól viselkedő, míg a lineáris programozási feladat ($X = \mathbf{R}^n, f, g_1, \ldots, g_m$ lineárisak) igen jól viselkedő.

Martos tette fel először a következő kérdést: Meddig lehet elmenni az f, $g_1, \ldots, g_m$ függvények általánosításában, hogy a fenti kellemes tulajdonságok közül lehetőleg minél több megmaradjon?

A felelethez szükséges a kvázikonvex (kvázikonkáv) függvény definiciója. Az $f : X \longrightarrow \mathbf{R}$ függvényt kvázikonvexnek nevezzük, ha bármely $x_1, x_2 \in X$ és $0 \leq \lambda \leq 1$ esetén

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \max\{f(x_1), f(x_2)\}.$$

Explicit kvázikonvex (*Deák* [2], *Martos* [5]) az $f : X \longrightarrow \mathbf{R}$ függvény, ha kvázikonvex és minden $x_1, x_2 \in X$ és $0 < \lambda < 1$ esetében

$$f(x_1) \neq f(x_2) \Longrightarrow f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \max\{f(x_1), f(x_2)\}.$$

Egy f függvény (explicit) kvázikonkáv, ha $-f$ (explicit) kvázikonvex. Ezeknek a fogalmaknak a segítségével az alábbi *elégséges* feltételeket adhatjuk az egyes kellemes tulajdonságok meglétére:

1. Ha a $g_1, \ldots, g_m$ feltételi függvények kvázikonvexek, akkor $L(b)$ konvex.
2. Ha az $f, g_1, \ldots, g_m$ kvázikonvexek, akkor $L^\circ(b)$ konvex.
3. Ha $L(b)$ konvex és f explicit kvázikonvex, akkor minden lokális minimum egyúttal globális is.
4. Ha a $g_1, \ldots, g_m$ függvények kvázimonotonok (kvázikonvex és kvázikonkáv egyszerre) és alulról félig folytonosak, akkor $L(b)$ poliéder. Ha $L(b)$ poliéder és f kvázimonoton, alulról félig folytonos függvény, akkor $L^\circ(b)$ poliéder.
5. Ha $L(b)$ politóp (korlátos poliéder) és f kvázikonkáv, akkor a globális minimum legalább egy csúcspontban felvétetik.
6. Ha $L(b)$ politóp, f kvázikonkáv és explicit kvázikonvex, akkor minden lokális csúcsminimum-pont egyúttal globális minimum-pont.

Az ezekkel az elégséges feltételekkel párba állítható szükséges feltételek jelölik ki a további általánosítások határait.

Szükséges feltételek:

1. Ha $L(b)$ konvex minden b-re, akkor a $g_1, \ldots, g_m$ feltételi függvények kvázikonvexek X-en. (Ez egyébként alternatív definiciója a kvázikonvexitásnak.)
2. Ha f folytonos és az
$$f(x) \longrightarrow \min$$
$$x \in I$$
feladat optimális megoldáshalmaza konvex minden $I \subset X$ zárt intervallum esetén, akkor f kvázikonvex X-en (bizonyítást lásd később).

3. Ha f alulról félig folytonos X-en és X minden zárt intervallumán a lokális minimum egyúttal globális is, akkor f explicit kvázikonvex X-en. (*Martos* [5])

4. *Nyitott probléma* (*Martos* [8]): Ha $L(b)$ poliéder minden b-re, akkor milyennek kell lenni a $g_1, \ldots, g_m$ függvényeknek?

5. Ha f folytonos és minden $Y \subset X$ politópra igaz, hogy bármely lokális csúcsminimum-pont egyúttal globális minimum-pont is, akkor f kvázikonkáv X-en és explicit kvázikonvex X minden olyan zárt intervallumán, amelynek végpontjai nem fekszenek X ugyanazon élén vagy extremális irányán (*Martos* [5], [8])

   Nyitott probléma: Az f-re tett folytonossági feltétel enyhíthető-e alulról félig folytonosságra?

6. Ha X minden zárt intervallumán a globális minimum a csúcspontok legalább egyikén felvétetik, akkor f kvázikonkáv X-en (*Martos* [5]).

A szimplex módszer hatókörének bővítése

A fentiekben vázolt elméleti alapokon bizonyos speciális programozási feladatokra kifejlesztett módszerek hatókörét ki lehet terjeszteni általánosabb feladatok megoldására. A legrégebbi és mindmáig egyik leghatékonyabb algoritmus a szimplex módszer, amelyet eredetileg a lineáris programozási feladat megoldására fejlesztettek ki. Ha azonban meggondoljuk azt, hogy a szimplex módszert használva egy poliéder csúcspontjain úgy haladunk szomszédos csúcspontok sorozatán keresztül egy optimális megoldásig, hogy közben a célfüggvény értéke csökken (nem növekszik), akkor könnyen látjuk, hogy a lineárisnál általánosabb célfüggvény minimumát is meg lehet határozni a szimplex módszerrel. Nevezetesen:

Ha az MP lehetséges tartománya egy politóp és a célfüggvény kvázikonkáv (a csúcspontok között van optimális megoldás) és explicit kvázikonvex (lokális csúcsminimum=globális minimum), akkor a szimplex módszer alkalmas az MP egy optimális megoldásának meghatározására.

Egyik legszebb példa az ilyen MP-re a hiperbolikus programozási feladat:

$$\mathrm{H}: \qquad \frac{cx+\gamma}{dx+\delta} \longrightarrow \min \qquad x \in L,$$

ahol L politóp és $dx + \delta > 0$ minden $x \in L$-re.

Martos [3] az elsők között volt, aki felismerte, hogy a szimplex módszer hatóköre kiterjeszthető H-ra és az algoritmust részleteiben is kidolgozta.

A szimplex módszer, megfelelő adaptálással, a konvex kvadratikus programozási feladat megoldására is használható. Felmerül a kérdés, hogy kiterjeszthető-e a szimplex módszer hatóköre kvázikonvex kvadratikus célfüggvény esetére is. Ehhez azonban szükség van a kvázikonvex kvadratikus függvények jellemzésére.

Tekintsük az alábbi kvadratikus programozási feladatot:

$$\mathrm{Q}: \quad \begin{array}{rl} f(x) := & px + \frac{1}{2}xCx \longrightarrow \min \\ & x \in L \qquad (L \text{ politóp}). \end{array}$$

A kvázikonvexitás nem hoz semmi újat, ha az f függvényt az egész $\mathbf{R}^n$-en vizsgáljuk. Ugyanis:

$$f \text{ expl. kvázikonvex } \mathbf{R}^n\text{-en} \Longrightarrow f \text{ kvázikonvex } \mathbf{R}^n\text{-en} \Longrightarrow f \text{ konvex } \mathbf{R}^n\text{-en}.$$

Más a helyzet, ha $\mathbf{R}^n_+ := \{x \in \mathbf{R}^n \mid x \geq 0\}$ felett vizsgáljuk f-et. A kulcsfogalom a pozitiv szubdefinitség (Psd), amelyet *Martos* [6] vezetett be.

A C szimmetrikus mátrixot Psd-nek nevezzük, ha bármely $v \in \mathbf{R}^n$-re

$$vCv < 0 \Longrightarrow Cv \geq 0 \text{ vagy } Cv \leq 0.$$

Látható, hogy a Psd általánosítása a pozitiv szemidefinit (Pd) mátrixoknak, hiszen egy C szimmetrikus mátrix akkor és csak akkor pozitív szemidefinit, ha

$$vCv \leq 0 \Longrightarrow Cv = 0.$$

Pusztán pozitiv szubdefinitnek (Ppsd) nevezünk egy mátrixot, ha Psd, de nem Pd. Szép jellemzése a Ppsd mátrixoknak az alábbi (*Martos* [6]): Egy szimmetrikus C mátrix akkor és csak akkor Ppsd, ha

(i) C-nek pontosan egy negativ sajátértéke van,
(ii) $C \leq 0$.

Ezen alapszik f kvázikonvexitásának az alábbi jellemzése (*Martos* [7]): Az $f(x) := px + \frac{1}{2}xCx$ nemkonvex kvadratikus függvény akkor és csak akkor kvázikonvex $\mathbf{R}^n_+$-on, ha

(i) C Ppsd,
(ii) $p \leq 0$,
(iii) van olyan $q \in \mathbf{R}^n$, hogy $p = Cq$ és $pq \leq 0$.

(Ha C nemszinguláris, akkor (iii) a $pC^{-1}p < 0$ formát ölti.) Egy alternativ jellemzés a következő (*Cottle-Ferland* [1]): f akkor és csak akkor kvázikonvex $\mathbf{R}^n_+$-on, ha a

$$\begin{bmatrix} C & p \\ p^T & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix Ppsd.

Bármely "lokális" megoldó módszer szempontjából a pszeudokonvexitás igen fontos. (Az $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ akkor pszeudokonvex az X nyilt konvex halmazon az $\overline{x} \in X$ pontban, ha az $\overline{x}$-ben létezik az f' gradiens és folytonos, valamint $f(x) \leq f(\overline{x}) \Longrightarrow (x-\overline{x})f'(\overline{x}) \leq 0$ és $f(x) < f(\overline{x}) \Longrightarrow (x-\overline{x})f'(\overline{x}) < 0$ fennáll minden $x \in X$-re). Erre vonatkozik a következő tétel (*Martos* [7]):

Az $f(x) := px + \frac{1}{2}xCx$ nemkonvex, kvadratikus függvény, amely kvázikonvex $\mathbf{R}^n_+$-on akkor és csak akkor pseudokonvex (és így egyúttal explicit kvázikonvex is) az $\overline{x} \in \mathbf{R}^n_+$ pontban, ha $C\overline{x} + p \neq 0$.

Martos [7] ezeken az elméleti alapokon kiterjesztette *Frank és Wolfe* módszerét kvázikonvex célfüggvény esetére.

Szükséges feltétel az optimumhalmaz konvexitására

Az MP feladat optimumhalmazának konvexitása szintén a "kellemes" tulajdonságok közé tartozik. A *Martos*-féle szükséges feltételek közé illeszkedik az alábbi tétel, amelyet, érdekes módon, sehol sem láttam még leírva.

Legyen $X \subset R$ konvex és $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ folytonos.

1. Tétel: Ha bármely $I \subset X$ zárt intervallum esetén az

$$f(x) \longrightarrow \min$$

$$x \in I$$

feladatnak az optimumhalmaza konvex, akkor f kvázikonvex X-en.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy f nem kvázikonvex. Ekkor van olyan $x^1 \neq x^2 \in X$, és $x^\circ \in [x^1, x^2]$, hogy

$$f(x^\circ) > \max\{f(x^1), f(x^2)\}. \tag{1}$$

Feltehetjük, hogy $f(x^2) \geq f(x^1)$. Legyen

$$H^i := \{\lambda \mid 0 \leq \lambda \leq 1,\ f(\lambda x^\circ + (1-\lambda)x^i) \leq f(x^2)\}, \quad i = 1,2$$

és

$$\lambda^i := \max_{\lambda \in H^i} \lambda, \quad i = 1,2.$$

A H^i halmazok nemüresek, zártak és korlátosak f folytonossága és (1) miatt, s így λ^1, λ^2 létezik és mindkettő 1-nél kisebb. Ugyanakkor

$$f(\lambda^i x^\circ + (1-\lambda^i)x^i) = f(x^2), \quad i = 1,2$$

ami szintén f folytonosságából következik. Legyen

$$y^1 := \lambda^1 x^\circ + (1-\lambda^1)x^1\,,$$
$$y^2 := \lambda^2 x^\circ + (1-\lambda^2)x^2\,.$$

$y^1 \neq y^2$ és a λ^1, λ^2 definíciója miatt az

$$\begin{aligned} &f(x) \longrightarrow \min \\ &x \in [y^1, y^2] \end{aligned}$$

feladatnak pontosan két optimális megoldása van, az y^1 és y^2, ami ellentmondás. ∎

Az f-re tett folytonossági kikötés nem enyhíthető alulról félig folytonosságra.

2. Tétel: Van olyan alulról félig folytonos f függvény és $X \subset R$ konvex halmaz, hogy bármely $I \subset X$ zárt intervallum esetén az

$$f(x) \longrightarrow \min$$

$$x \in I$$

feladatnak az optimumhalmaza konvex és f nem kvázikonvex.

Bizonyítás: Legyen $X := [-1, 1]$ és $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$

$$f(x) := \begin{cases} x+1, & \text{ha } -1 \leq x < 0\ , \\ -1, & \text{ha } x = 0\ , \\ -x+1, & \text{ha } 0 < x \leq 1\ . \end{cases}$$

a) f nem kvázikonvex. Ugyanis ha $x^1 = -1, x^2 = 1, x^\circ = 1/2$, akkor

$$f(1/2) > \max\{f(-1), f(1)\}\,.$$

b) f alulról félig folytonos. Nézzük az összes $\{x \in X \mid f(x) \leq \beta\}$ nemüres alsó nívóhalmazt β különböző értékeire:

(i)	$-1 \leq \beta < 0$	:	$L(\beta) = \{0\}$,
(ii)	$\beta = 0$	:	$L(\beta) = \{-1, 0, 1\}$,
(iii)	$0 < \beta < 1$	:	$L(\beta) = [-1, -1+\beta] \cup \{0\} \cup [\beta, 1-\beta]$,
(iv)	$\beta \geq 1$	:	$L(\beta) = [-1, 1]$.

Mindegyik esetben $L(\beta)$ zárt, tehát f alulról félig folytonos.

c) Az optimumpontok halmaza konvex bármely $I := [y^1, y^2]$ intervallum esetében. A lehetséges intervallumok és optimumhalmazok a következőek:

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & y^1 < y^2 < 0 & : \quad L = \{y^1\}, \\ \text{(ii)} & y^1 < y^2 = 0 & : \quad L = \{0\}, \\ \text{(iii)} & 0 = y^1 < y^2 & : \quad L = \{0\}, \\ \text{(iv)} & 0 < y^1 < y^2 & : \quad L = \{y^2\}, \\ \text{(v)} & y^1 < 0 < y^2 & : \quad L = \{0\}. \end{array}$$

Látható, hogy minden lehetséges optimumhalmaz konvex.

Martos-féle szükséges feltételek játékelméleti problémákra

Közismert a matematikai programozás és a játékelmélet kapcsolata. Természetesen adódik a kérdés, hogy a játékelmélet fontos egzisztencia tételeihez hogyan lehetne *Martos*-féle szükséges feltételeket adni, és igy itt is kijelölni a lehetséges általánosítások határait. A gondolatot a legismertebb játékelméleti egzisztencia tétel, a minimax tétel példáján szeretném bemutatni.

Legyenek X és Y az $\mathbf{R}^m$ illetve az $\mathbf{R}^n$ konvex és kompakt részhalmazai, $\mathcal{X}$ és $\mathcal{Y}$ pedig X ill. Y részhalmazainak családjai, (pl. az összes zárt részhalmaz, összes zárt, konvex halmaz, összes intervallum, stb.), az $f : X \times Y \longrightarrow \mathbf{R}$ függvény pedig tartozzék egy adott $\mathcal{F}$ függvényosztályba (pl. folytonos függvények osztálya).

Az f függvényt nevezzük teljes minimax tulajdonságúnak az $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ és $\mathcal{F}$-re vonatkozóan, ha $f \in \mathcal{F}$ és

$$\max_{x \in X'} \min_{y \in Y'} f(x,y) = \min_{y \in Y'} \max_{x \in X'} f(x,y)$$

fennáll minden $X' \in \mathcal{X}$ és $Y' \in \mathcal{Y}$-ra.

Hogyan lehet jellemezni a teljes minimax tulajdonságú függvényeket (általánosított) konvexitási tulajdonságokkal?

Analóg kérdés fogalmazható meg a *Nash* egyensúlypont létezésére is.

Mindenki, aki ezeknek a nehéz problémáknak a megoldásán fog dolgozni, gondoljon tisztelettel és szeretettel *Martos Bélára*, akinek a munkássága nélkül ezeket a kérdéseket talán fel sem tennénk. Márpedig, kis túlzással, azt lehet mondani, hogy a tudományt a jó időben feltett jó kérdések viszik leginkább előre.

Irodalom

1. Cottle, R.V.-Ferland, J.A.: Matrix-Theoretic Criteria for the Quasiconvexity and Pseudoconvexity of Quadratic Functions. Dept. Operations Research, Stanford Univ. Techn. Rep. No. 70–6. 1970

2. Deák, E.: Über konvexe und interne Funktionen, sowie eine gemeinsame Verallgemeinerung von beiden. Annal. Univ. Sci. Budapestiensis. Sectio Mathematica 5(1962) 109–154
3. Martos, B.: Hyperbolic Programming. Nav. Res. Log. Quart. 11(1964) 135–155
4. Martos, B.: The Direct Power of Adjacent Vertex Programming Methods. Management Sci. 12(1965) 241–252
5. Martos, B.: Quasi-Convexity and Quasi-Monotonicity in Nonlinear Programming. Studia Sci. Math. Hungarica 2(1967) 265–273
6. Martos, B.: Subdefinite Matrices and Quadratic Forms. SIAM J. Appl. Math. 17(1969) 1215–1223
7. Martos, B.: Quadratic Programming with a Quasiconvex Objective Function. Operations Research 19(1971) 87–97
8. Martos, B.: Nonlinear Programming. Theory and Methods. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1975

ON BÉLA MARTOS'S CONTRIBUTIONS TO MATHEMATICAL PROGRAMMING

The paper summarizes the main contributions of Béla Martos to the development of the theory and methods of mathematical programming between 1962 and 1975. Necessary conditions for objective and constraint functions to produce 'well-behaving' problems and extending the power of simplex-like adjacent vertex methods to nonlinear, nonconvex problems (primarily to hyperbolic and quasiconvex quadratic programming) are are the accomplishment for which Martos will always be considered as an inspirational source to the mathematical programming community. In addition to a systematic restatement of the most important results, a necessary condition for the convexity of the optimum set is proved in the spirit of Martos.

MARTOS BÉLA SZABÁLYOZÁSELMÉLETI MUNKÁSSÁGA[1]

SIMONOVITS ANDRÁS
MTA Közgazdaságtudományi Intézet

Ebben a rövid írásban Martos Béla szabályozáselméleti munkásságát tekintem át. Igyekszem minél szélesebb közönséghez szólni, ezért szeretném a részleteket mellőzni. A részletek iránt érdeklődőknek melegen ajánlom a Kornai és Martos szerkesztésében megjelent (1981) művet, illetve Martos (1990) monográfiáját. Ez utóbbiról hosszabb ismertetést írtam angol nyelven (Simonovits, 1991). A cikk további hét pontból áll. 1. A szabályozáselmélet. 2. Közgazdasági alkalmazások. 3. A magyar szabályozáselméleti iskola. 4. Stabilitás és működőképesség. 5. A Leontief gazdaság szabályozása koordináció nélkül. 6. Mechanizmusok ekvivalenciája. 7. Mit tanulhatunk Bélától?

1. A szabályozáselmélet

A szabályozáselmélet műszaki feladatok megoldására kidolgozott matematikai elmélet. Alapfogalmai: az n-dimenziós *állapotvektor* (x), az m-dimenziós *szabályozási vektor* (u), a p-dimenziós *megfigyelési vektor* (y), az n-dimenziós *zajvektor* (v) és az *állapotegyenlet.* Folytonos idejű, lineáris rendszer esetében a következő differenciálegyenlet-rendszer írja le a rendszer mozgását.

Állapotegyenlet-rendszer:

$$x' = Px + Ru + v \ , \tag{1.1}$$

ahol a $'$ az idő szerinti deriválást jelöli, P és R megfelelő méretű mátrixok. Az alkalmazásokban fontos, hogy az állapotvektor helyett általában csak valamilyen függvénye (pl. az állapot-komponensek összege) figyelhető meg.

Megfigyelési egyenletrendszer:

$$y = Sx \ , \tag{1.2}$$

ahol S egy $p \times n$-es mátrix. A *klasszikus* szabályozáselméletben a szabályozási vektor a megfigyelési változó függvénye.

[1]Martos Béla 75. születésnapja alkalmából a Magyar Modellezési Társaság 1995. őszi balatonkenesei konferenciáján elhangzott ünnepi előadás alapján. Beérkezett 1996. január 11.

Visszacsatolási egyenletrendszer:

$$u = Fy + w \tag{1.3}$$

ahol F egy $m \times p$-es mátrix és w egy m-es vektor. Közgazdasági alkalmazásokban nagyon fontos a *decentralizált* szabályozás, ahol F blokk-diagonális mátrix. Legegyszerűbb esetben, amikor $m = n$, F diagonális mátrix. (1.2)-t behelyettesítve (1.3)-ba, majd az új $u = FSx + w$ egyenletet (1.1)-be adódik az

Alapegyenletrendszer

$$x' = (P + RFS)x + Rw + v \,. \tag{1.4}$$

Az (1.4) differenciálegyenlet-rendszer stacionárius megoldása – ha létezik – $x^0 = -(P + RFS)^{-1}(Rw + v)$. A nem stacionárius megoldása is explicite felírható. A fő cél azonban a rendszer *stabilizálása*: $\lim_{t\to\infty} x(t) = x^0$.

Az utóbbi évtizedekben megjelent és egyre inkább egyeduralkodóvá válik az *optimális* szabályozáselmélet (Pontrjagin et al. 1961). Lineáris állapotegyenlet mellé kvadratikus célfüggvényt társítva, a cél egy olyan szabályozási pálya keresése, amely minimalizálja a *veszteségfüggvényt*:

$$I[x,u] = \int_0^T [x(t)^T Qx(t) + u(t)^T Ru(t)]dt \,, \tag{1.5}$$

ahol Q egy $n \times n$-es pozitív definit és R egy $m \times m$-es nemnegatív definit mátrix. Ha normális eloszlású sztochasztikus zajok is fellépnek, akkor a Linear-Quadratic-Gaussian jelzőhármas rövidítéseként LQG-elméletről beszélünk.

2. Közgazdasági alkalmazások

A hagyományos neoklasszikus közgazdaságtan alapjában véve statikus volt. Nagy áttörést jelentett, amikor az 1930-as években megjelentek az első dinamikus közgazdasági modellek. A szabályozáselmélet alkalmazása olyan dinamikus modellekhez vezetett, amelyekben elvált az állapot- és a szabályozási (döntési) változó.

A szabályozáselmélet közgazdasági alkalmazásai a klasszikus elmélettel kezdődtek. Például Phillips (1954) a makrogazdaság szabályozási mechanizmusait tanulmányozta. A magyar szabályozáselméleti iskola szemléletéhez legközelebb Lovell (1962) és McFadden (1969) munkái álltak.

Érdekes, hogy az optimális LQG elmélet közgazdasági célú kidolgozásával Simon (1956) megelőzte a mérnököket. A dinamikus optimalizálás módszerei talán Cass (1965) és Koopmans (1965) optimális növekedésről szóló cikkeivel léptek be a közgazdaságtanba. Innen már viszonylag könnyen adódtak a makroökonómia optimális szabályozási modelljei.

3. A magyar szabályozáselméleti iskola

Az optimális szabályozáselmélet magyar alkalmazása idáig meglehetősen szórványos volt: Virág (1969) és Szepesi és Székely (1972). Annál többen alkalmaztuk a klasszikus szabályozáselméletet közgazdasági elemzésre.

A kezdetet Kornai (1970) könyve jelentette, amely a közgazdaságtan alapvető, rendszerelméleti alapon történő megújítását tűzte ki célul. Ennek keretében kezdtük a gazdasági rendszerek vegetatív szabályozását tanulmányozni. Biológiai analógia alapján *vegetatív szabályozás*ról beszélünk, ha ár- és tervjelzések helyett a gazdasági egységek a saját maguknál megfigyelhető elemi információk alapján elemi döntéseket hoznak. Például, ha lemerül a késztermék-készlet, akkor növelik a termelést.

Kornai és Martos (1971) dolgozta ki az első vegetatív szabályozási modellt. E munka alapján számos cikk született, melyet Kornai és Martos szerkesztésében (1981) *Árjelzések szabályozás nélkül* c. kötet foglalt egységben. Mint a könyv egyik közreműködője tanúsíthatom, hogy Kornai és Martos mennyi energiát fektetett be a benyújtott kötet kialakításába.

A kötet megjelenése után legtöbben új témák után néztünk, Martos azonban folytatta a kutatást. Rövidebb cikkek után (pl. Martos, 1984) akadémiai doktori értekezésében megírta a téma alapművét, amely 1990-ben angolul jelent meg. Helyszűke miatt csupán három területet emelek ki Martos hozzájárulásából: a stabilitás és működőképesség kapcsolatát, a koordinálatlan szabályozás stabilitási tételeit és a mechanizmusok ekvivalenciáját.

4. Stabilitás és működőképesség

A szabályozáselméletben nagyon gyakran megelégednek a rendszer stabilizálásával. Ez műszaki alkalmazásoknál általában megfelelő, de közgazdasági alkalmazásoknál a tranziens pályák sokkal tartósabbak annál, semhogy elhanyagolhassuk őket. Itt lép be a *működőképesség*, amely azt jelenti, hogy a rendszer bizonyos állapotvektorának egy *megengedett* $\mathbf{X}$ tartományon belül kell lennie. Hasonló szerepet játszik a megengedett szabályozási vektorok tartománya ($\mathbf{U}$). A legegyszerűbb ilyen összefüggések a nem negativitási feltételek, például készleteknek, a termelésnek és a fogyasztásnak, de gyakran a vételnek is pozitívnak kell lenniük. Különösen fontos annak meghatározása, hogy az x^0 kezdőállapotoknak milyen tartománya ad működőképes pályákat és a szabályozási vektor milyen tartományban mozoghat, anélkül, hogy a rendszert működésképtelenné tenné. Az $\mathbf{X}$ és $\mathbf{U}$ tartományt *kompatibilisnak* nevezzük, ha (i) van olyan $u_1 \in \mathbf{U}$ szabályozásvektor és $x_1 \in \mathbf{X}$ állapotvektor, amelyre $Px_1 + Ru_1 = 0$ és (ii) azoknak az $u_1 \in \mathbf{U}$ vektoroknak az $\mathbf{U}_1$ halmaza, amelyekre $-P^{-1}Ru_1$ $\mathbf{X}$ belsejébe esik, nem üres.

A vektornormákra támaszkodva Martos (1990) kidolgozta az (1.1) rendszer működőképességi elméletét és használható elégséges feltételeket adott a működőképességi tartomány meghatározására:

1. tétel. *Ha (P, R) stabil, X és U kompatibilis, és $x_0 \in X$, akkor van olyan $\beta > 0$ valós szám, hogy tetszőleges $u^* \in U$, az $\|Px_0 + Ru(t)\| < \beta$ feltételt kielégítő szabályozási pályára teljesül, hogy x^* pálya működőképes.*

5. A Leontief gazdaság szabályozása koordináció nélkül

Eddig általánosságban beszéltünk, ideje hát egy konkrét gazdasági példát is bemutatni.

A gazdaság változói a következők: r = a termelés n-vektora, q = az outputkészletek n-vektora, Y = az árutranszferek $n\times n$-es mátrixa, V = az inputkészletek $n \times n$-es mátrixa. A = a termelési kapcsolatok együtthatómátrixa, c a végső fogyasztás n-vektora, β és γ szabályozási együtthatók, A-tól γ-ig időben állandók. Az e vektor összes eleme 1.

A legegyszerűbb modell egyenletei a következők:
outputkészlet-változás = termelés − fogyasztás

$$q' = r - Ye - c\,, \tag{5.1}$$

inputkészlet-változás = beszerzés − termelő felhasználás

$$V' = Y - A\langle r\rangle\,, \tag{5.2}$$

termelés-növekedés = outputkészlet-változási korrekció − outputkészlet-eltérési korrekció

$$r' = 2\beta\gamma q' - \gamma^2(q - q^*)\,, \tag{5.3}$$

beszerzés növekedés = inputkészlet-változási korrekció − inputkészlet-eltérési korrekció

$$Y' = 2\beta\gamma V' - \gamma^2(V - V^*)\,. \tag{5.4}$$

A modell egyik legfontosabb vonása, hogy *koordinálatlan*: például az i-edik termelő csak a saját outputkészlete alapján dönt, míg az i-edik termékhez szükséges j-edik termék beszerzését végző egység pusztán a saját inputkészlete alapján dönt. Márpedig az irreducibilis A mátrixú gazdaság *összefüggő*. Ezért meglepő a

2. tétel. *Az (5.1)-(5.4) rendszer aszimptotikusan stabil, ha $\beta > \beta_0$, ahol β_0 egy kritikus érték.*

Az 1. és a 2. tétel alapján kimondható egy

Következmény. *A fenti modell lokálisan működőképes.*

Nincs terünk a többi modell bemutatására, csak felsoroljuk elnevezésüket: rendelésjelzéses, készlet- és rendelésjelzéses, kereskedelmi és árjelzési modell.

6. Mechanizmusok ekvivalenciája

Martos Bélát különösen érdekelte a különböző szabályozási mechanizmusok ekvivalenciája. Először az 1. pont általánossági szintjén definiálta két rendszer ekvivalenciáját, majd a 4. pont konkrétságában tanulmányozta az árjelzéses és árjelzés nélküli rendszerek ekivalenciáját.

3. tétel. *Ha a gazdaság összefüggő, akkor két, egyaránt koordinálatlan árjelzéses és árjelzés nélküli rendszer nem lehet egymással ekvivalens.*

7. Mit tanulhatunk Bélától?

A távirati stílusú ismertetés után néhány szubjektív szóval zárom a dolgozatomat. Mit tanulhatunk Bélától?

a) *Eredetiséget*. A Kornai által javasolt 1971-es modell matematikai elemzésén túl Béla kidolgozta a működőképesség és az ekvivalencia témakörét. Mindhárom területen ragyogóan ötvözte a matematikai és a közgazdasági elemzést.

b) *Igényességet*. Akármilyen jónak is tűnhet egy modell, mindig akad javítanivaló rajta. Számos neves tudóst ismerek, aki igyekszik elrejteni a korábbi munkákban elkövetett hibákat, és ilyenkor javítás helyett tökéletesítésről beszél. Béla nem ilyen ember. Nyíltan feltárja az esetleges tévedéseket, például az 1971-es cikk rejtett koordináltságát, vagy a korábbi ekvivalencia definíció problémáit.

c) *Realizmust*. Manapság a matematikai módszerek gyakran elhomályosítják a közgazdasági tartalmat. Bélánál a matematikai módszer mindig eszköz marad, Béla sohasem feledkezik meg a feltevések és a tételek közgazdasági értelmezéséről. Jellemző, hogy milyen örömet okozott neki, amikor fölfedezett egy empirikus cikket a készlet- és rendelésjelzéses szabályozás valóságáról. Nem állítom azt, hogy Béla gyakorlati közgazdász. Nyugodtan leírom viszont, hogy Béla olyan szabályozáselméleten dolgozott, amely kapcsolatban áll a gyakorlattal.

d) *Eleganciát*. Béla minden cikkét nagy műgonddal írja meg. Mindig tömör, és mindig érthető. Még a jelölések megválasztásával is az érthetőséget akarja elősegíteni. Mondatai nemcsak érthetők, de szellemesek is.

Manapság viszonylag kevés érdeklődés mutatkozik az olyan munkák iránt, amelyek nem az optimalizáláson alapszanak. Ez lehet az oka, hogy jelenleg Béla programozási munkái beárnyékolják szabályozáselméleti munkáit. Bízom benne, hogy amilyen mértékben a matematikus közgazdászok ráébrednek az optimalizálási megközelítés korlátozottságára, térnek vissza Béla szabályozási műveihez is.

Irodalom

1. CASS, D. (1965) Optimum Growth in an Aggregate Model of Capital Accumulation", *Review of Economic Studies 32* 233-240.
2. KOOPMANS, T. C. (1965) "On the Concept of Optimal Economic Growth" in Semain d'Etude sur le Role de l'Analyse Econometrique dans la Formulation due Plans de Dévelopment, Vatikán, A Pápai Tudományos Akadémia, I. kötet, 225-287.
3. KORNAI, J. (1971) *Anti-Equilibrium*, Budapest, Akadémiai Kiadó.
4. KORNAI, J. és MARTOS, B. (1971) "Gazdasági rendszerek vegetatív működése", *Szigma 4* 34–50.
5. KORNAI, J. és MARTOS, B., szerk. (1981) *Szabályozás árjelzések nélkül*, Budapest, Akadémiai Kiadó.
6. KUHN, H. W. és SZEGÖ, G. (1969) *Mathematical Systems Theory and Economics, I.* Berlin, Springer.
7. LOVELL, M. C. (1962) "Buffer Stocks, Sales Expectations and Stability: A Multi-sector Analysis of the Inventory Cycle", *Econometrica 30* 267–296.
8. MARTOS, B. (1981) "Fogalmak és tételek a szabályozás-elméletből", *Kornai és Martos, szerk.* 73–101.
9. MARTOS, B. (1984) "Nem walrasi szabályozási mechanizmusok, *Szigma 17* 123–145.
10. MARTOS, B. (1990) *Economic Control Structures*, Amszterdam, North-Holland.
11. MARTOS, B. (1991) "Viable Control Trajectories in Linear Systems", *Problems of Information and Control Theory 20* 267–280.
12. McFADDEN, D. (1969) "On the Controllability Decentralized Macroeconomic Systems, The Assignment Problem", *Kuhn és Szegő, szerk.* 221–239.
13. PHILLIPS, W. (1954) "Stabilization Policy and a Closed Economy", *Economic Journal 64* 290–323.
14. PONTRJÁGIN, L. SZ., BOLTYANSZKIJ, V. G., GAMKRELIDZE, R. V. és MISCSENKO, J. F. (1961) *Optimális folyamatok elmélete,* (orosz eredeti fordítása) Budapest, Műszaki Könyvkiadó, 1968.
15. SIMON, H. A. (1956) "Dynamic Programming under Uncertainty with a Quadratic Criterion Function", *Econometrica 24* 74–81.

16. SIMONOVITS, A. (1991) A Review on B. MARTOS' *Economic Control Structures, Acta Oeconomica 43* 353–356.
17. SZEPESI, GY. és SZÉKELY, B. (1971) "A gazdasági növekedés optimális pályái egy szabályozott gazdasági rendszerben", *Szigma 4* 137–151.
18. VIRÁG, I. (1969) "Optimális felhalmozási pályák", *Gazdasági fejlődés és tervezés*, Budapest, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 108-136.

REVIEW OF BÉLA MARTOS' WORK ON CONTROL THEORY

This paper is a short review of Béla Martos' work on control theory. Since it addressed to a wider audience, details are omitted. Those interested in details should consult the volume edited by Kornai and Martos (1981), the monograph (Martos, 1990) and its longer survey (Simonovits, 1991). The paper consists of seven sections. 1. Control theory. 2. Economic applications. 3. The Hungarian school of control theory. 4. Stability and viability. 5. An example. 6. Equivalence of mechanisms. 7. What can we learn from Béla?

VÉGES CRISS-CROSS MÓDSZER A HIPERBOLIKUS PROGRAMOZÁSI FELADATRA[1]

ILLÉS TIBOR – SZIRMAI ÁKOS – TERLAKY TAMÁS
Eötvös Lóránd Tudományegyetem – Delft University of Technology

Cikkünkben a hiperbolikus (hányados) programozási feladat megoldására általánosítjuk a criss-cross módszert. A lineáris és a kvadratikus programozási problémákra megfogalmazott criss-cross algoritmusokhoz hasonlóan a hiperbolikus criss-cross módszer is tetszőleges, nem feltétlenül megengedett bázismegoldásból indítható. A hiperbolikus programozásban szokásos feltételek mellett bizonyítjuk az algoritmus végességét.

1. Bevezetés

A hiperbolikus (hányados) programozási feladat természetes általánosítása a lineáris programozási feladatnak. A lineáris feltételeket megtartva, lineáris célfüggvény szélsőértéke helyett két lineáris függvény hányadosát optimalizáljuk. Ilyen hányados függvények természetes módon jelentkeznek a közgazdaságtanban, amikor a profit/ráfordítás típusú célfüggvények optimalizálása a cél (lásd pl. [8]).

Annak ellenére, hogy a hiperbolikus programozás célfüggvénye nem lineáris, sőt nem is konvex, a feladat megoldására hatékony algoritmusok ismertek. Ez az alábbi eredménynek köszönhető. Habár a célfüggvény nem konvex, de mint azt Martos [9] bizonyította, a célfüggvény pszeudokonvex, sőt pszeudolineáris, ami elégséges feltétele annak, hogy minden lokális minimum egyben globális is legyen. A másik kedvező tulajdonság azonosítása Charnes és Cooper [4] nevéhez fűződik. Eszerint a hiperbolikus programozási feladat átfogalmazható egy ekvivalens lineáris programozási feladattá. Így nem meglepő, hogy a különböző lineáris programozási algoritmusok megfelelő adaptálás után alkalmassá válnak a hiperbolikus programozási feladat megoldására. Így a szimplex módszerek adaptálása után [3,4,5] a közelmúltban Karmarkar belsőpontos algoritmusát is általánosították [1,2] hányados programozási feladatok megoldására. A hányados programozás eredményeinek áttekintése és egy teljességre törekvő, majd 1200 elemet tartalmazó irodalomjegyzéke található Schaible [10] cikkében.

[1] Beérkezett 1996. február 18.

Cikkünkben Terlaky [11,6] criss-cross algoritmusát általánosítjuk hányados programozási feladatok megoldására. Az általánosítás megőrzi a criss-cross módszerek azon alapvető tulajdonságát, hogy tetszőleges, nem feltétlenül megengedett bazismegoldásból indítható. A továbbiakban bizonyítjuk az algoritmus végességét az irodalomban [7,9] szokásos enyhe feltételek mellett. Végül két, az irodalomból vett egyszerű numerikus példa megoldásával illusztráljuk az algoritmus lényeges lépéseit.

A következő fejezetben a hányados programozási feladat megfogalmazása után röviden összefoglaljuk a hiperbolikus programozási feladat alaptulajdonságait. Továbbá tárgyaljuk a feladathoz rendelt pivot tábla előjelstruktúrája és a feladat megoldása, nem korlátossága illetve nem megengedettsége közti kapcsolatot.

2. A hiperbolikus programozási feladat alaptulajdonságai

A továbbiakban az alábbi hiperbolikus programozási feladattal foglalkozunk:

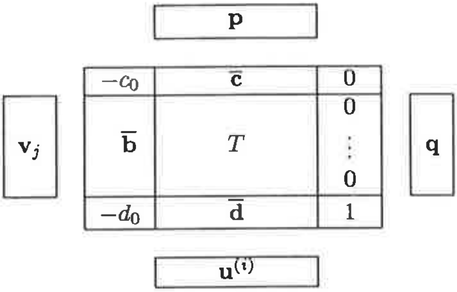
$$\left.\begin{array}{ccc} & \min & \dfrac{\mathbf{c}^T\mathbf{x}}{\mathbf{d}^T\mathbf{x}} \\ A\mathbf{x} & = & \mathbf{b} \\ \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0} \end{array}\right\} \quad (\mathrm{P}),$$

ahol $\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$, $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$, $\mathrm{rang}(A) = m$.

Legyen $P := \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ a (P) feladat *megengedett megoldásainak* a halmaza. Közismert, hogy a hiperbolikus programozási feladat duálisa a következő lineáris programozási feladat:

$$\left.\begin{array}{ccccc} & & & \max & -y_0 \\ A^T\mathbf{y} & + & \mathbf{d}y_0 & \geq & -\mathbf{c} \\ \mathbf{b}^T\mathbf{y} & & & \leq & 0 \end{array}\right\} \quad (\mathrm{D}).$$

A dolgozatban egy új, véges pivot algoritmust adunk a hiperbolikus programozási feladat megoldására. Módszerünk a hiperbolikus feladatok esetén szokásos táblától eltérőt használ, ezért ezt az alábbiakban ismertetjük.



1. ábra

Az 1. ábrán használt jelölések értelmezése a következő:

$$
\begin{array}{rll}
c_0 := \mathbf{c}_B B^{-1}\mathbf{b}, & & d_0 := \mathbf{d}_B B^{-1}\mathbf{b}, \\
\overline{\mathbf{b}} := B^{-1}\mathbf{b}, & \overline{\mathbf{c}} := \mathbf{c} - \mathbf{c}_B B^{-1}A, & \overline{\mathbf{d}} := \mathbf{d} - \mathbf{d}_B B^{-1}A, \\
\mathbf{q} := (1/d_0)\overline{\mathbf{b}}, & & \mathbf{p} := \overline{\mathbf{c}} - (c_0/d_0)\overline{\mathbf{d}}, \\
\mathbf{u}^{(i)} := \mathbf{t}^{(i)} + (\overline{b}_i/d_0)\overline{\mathbf{d}}, & & \mathbf{v}_j := B^{-1}\mathbf{a}_j + (\overline{d}_j/d_0)B^{-1}, \\
 & T := B^{-1}A, &
\end{array}
$$

ahol B jelöli az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer egy bázisát. A B bázis vektorainak indexhalmazát jelölje J_B, továbbá $J_N = J \setminus J_B$ a bázison kívüli változók indexhalmaza.

1. Definíció *Az x_i változó az $i \in J_B$ index esetén* primál nem megengedett, *ha $\overline{b}_i < 0$, továbbá az x_j változó pedig a $j \in J_N$ index esetén* duál nem megengedett, *ha $\overline{c}_j < (c_0/d_0)\overline{d}_j$.*

Az alábbi optimalitási (1. Megjegyzés), primál nem megengedettségi (2. Megjegyzés) illetve duál nem megengedettségi (3. Megjegyzés) feltételek jól ismertek és a pivot tábla konstrukcióját figyelembe véve könnyen igazolhatók.

1. Megjegyzés *Ha $\overline{\mathbf{b}} \geq 0$ és $\mathbf{p} \geq 0$, akkor a pivot táblánk optimális.*

2. Megjegyzés *Ha van olyan $r \in J_B$ index, amely esetén $\overline{b}_r < 0$ és $\mathbf{u}^{(r)} \geq \mathbf{0}$ akkor nem létezik primál megengedett megoldás.*

3. Megjegyzés *Ha van olyan $r \in J_N$ index, amely esetén $p_r < 0$ és $\mathbf{v}_r \leq \mathbf{0}$ akkor nem létezik duál megengedett megoldás.*

A fenti 1-3. Megjegyzések a bevezetésre kerülő algoritmusunk megállási kritériumait fogalmazzák meg.

Terlaky [11] criss-cross módszerét, illetve a 3. Megjegyzést szem előtt tartva, egy lehetséges pivot szabály a következő lenne:

P. Pivot szabály

I. (i) Ha $\overline{\mathbf{b}} \geq \mathbf{0}$ és $\mathbf{p} \geq \mathbf{0}$, akkor optimális táblánál vagyunk.

(ii) Ha az (i) nem áll fenn, akkor legyen

$$k := \min\{i : \bar{b}_i < 0 \text{ vagy } p_i < 0, i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

II. (i) Ha valamely k indexre $p_k < 0$ és $\mathbf{v}_k \leq \mathbf{0}$ akkor nem létezik duál megengedett megoldás.

(ii) Ha az(i) nem áll fenn, akkor legyen

$$s := \min\{j : v_{jk} > 0, j \in J_B\},$$

pivotáljunk az (s, k) pozíción és menjünk az I.-re.

III. (i) Ha valamely k indexre $\bar{b}_k < 0$ és $\mathbf{u}^{(r)} \geq \mathbf{0}$ akkor nem létezik primál megengedett megoldás.

(ii) Ha az (i) nem áll fenn, akkor legyen

$$r := \{i : u_{ki} < 0, i \notin J_N\},$$

pivotáljunk a (k, r) pozíción és menjünk a II.-ra.

A P. Pivot szabály mindenképpen finomításra szorul, hiszen a τ_{sk} illetve τ_{kr} helyen állhat nulla is. Ez egyértelműen annak a következménye, hogy a táblán kívüli mesterségesen kiszámított vektorok előjele alapján határozzuk meg a döntésünket. Mielőtt az 1. ábrán bemutatott táblán a P. Pivot szabály alkalmazása során felmerülő hátrányokat mutatnánk be, talán érdemes felhívni a figyelmet bizonyos lényeges előnyökre is.

1. Állítás *Legyen a $d_0' \neq 0$ az aktuális B' bázis esetén. Válasszuk ki az (s, r) pivot pozíciót a $\overline{\mathbf{b}}, \mathbf{u}^{(s)}$ (illetve a $\mathbf{p}, \mathbf{v}_r$) vektorok segítségével. Tegyük fel, hogy a pivot pozíción lévő $\tau_{sr}' \neq 0$. Ekkor a pivot transzformáció után előálló $d_0'' \neq 0$.*

Bizonyítás. A P. Pivot szabály alapján $\overline{b_s} < 0$ és $u_{sr} = \tau_{sr} + \bar{b}_s \frac{\bar{d}_r}{d_0'} < 0$. Tegyük fel, indirekt módon, hogy a $d_0'' = 0$. Ekkor a feltételünk alapján a

$$-d_0'' = -d_0' - \bar{d}_r \frac{\bar{b}_s}{\tau_{sr}} = 0 \,,$$

azaz $d_0' = -\overline{d}_r \frac{\overline{b}_s}{\tau_{sr}}$ adódik. Felhasználva a $d_0' \neq 0$ és $\tau_{sr} \neq 0$ feltételeket, kapjuk, hogy

$$\tau_{sr} + \overline{b}_s \frac{\overline{d}_r}{d_0'} = 0 \, ,$$

ami ellentmond az $u_{sr} < 0$ feltételnek. ■

A $\mathbf{p}$, $\mathbf{v}_j$ és $\mathbf{u}^{(i)}$ vektorok használatából származó előnyök a 2. fejezetben definiálásra kerülő algoritmus végességének igazolásakor lesznek szembeötlők. Ha a P. Pivot szabályt szeretnénk megőrizni (bizonyos finomítások mellett), akkor a $\tau_{sk} = 0$ (illetve $\tau_{kr} = 0$) eseteket áthidaló megoldást — a pivot tábla struktúrájának megőrzése mellett — kell találnunk. Nyilvánvaló, hogy a szabály által kijelölt helyen nem pivotálhatunk. Célszerűnek látszik a $-c_0$ illetve $-d_0$ pozíciók valamelyikén egy *külső pivot*ot végrehajtani. A $\mathbf{p}$, $\mathbf{v}_j$ és $\mathbf{u}^{(i)}$ vektorok definíciója alapján nem igazán meglepő, hogy a $-d_0$ pozíció az igazán alkalmas pivot-pozíció. Ennek hatását a következő ábrán mutatjuk be.

$$\begin{array}{|c|ccc|c|} \hline -c_0 & \cdots & \overline{c}_j & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & & \vdots & & 0 \\ \overline{b}_i & \cdots & \tau_{ij} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & 0 \\ \hline -d_0 & \cdots & \overline{d}_j & \cdots & 1 \\ \hline \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{|c|ccc|c|} \hline 0 & \cdots & \overline{c}_j - \frac{c_0}{d_0} d_j & \cdots & -\frac{c_0}{d_0} \\ \hline 0 & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \cdots & \tau_{ij} + \frac{\overline{d}_j}{d_0}\overline{b}_i & \cdots & \frac{\overline{b}_i}{d_0} \\ 0 & & \vdots & & \vdots \\ \hline 1 & \cdots & -\frac{\overline{d}_j}{d_0} & \cdots & -\frac{1}{d_0} \\ \hline \end{array}$$

2. ábra

A transzformáció feltétele $d_0 \neq 0$, de ez nyilván teljesül, hiszen egy olyan állapotnál voltunk, amikor a $\mathbf{p}$ illetve $\overline{\mathbf{b}}$ vektorok kiszámíthatók voltak. A $-d_0$ pozíción való pivotálás után nyert tábla a 3. ábrán látható.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & \mathbf{p} & -c_0/d_0 \\ \hline 0 & T = V = U & \mathbf{q} \\ \hline 1 & -1/d_0 \overline{\mathbf{d}} & -1/d_0 \\ \hline \end{array}$$

3. ábra

Vegyük észre, hogy itt $\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$ a tábla részévé vált, míg a $\overline{\mathbf{b}}$ vektor már nem található meg a bázistáblán. Ha ezen a táblán újra döntünk a pivot pozíció megválasztásáról, akkor ismét az (s,k) illetve (k,r) pozíciókat jelölné ki a P. Pivot szabály, de jelenleg ezeken a pozíciókon a

$$\tau_{sk} + \frac{\bar{d}_k}{d_0}\bar{b}_s = \frac{\bar{d}_k}{d_0}\bar{b}_s \quad \text{illetve a} \quad \tau_{kr} + \frac{\bar{d}_r}{d_0}\bar{b}_k = \frac{\bar{d}_r}{d_0}\bar{b}_k$$

értékek állnak. Akár $\mathbf{v}_k$ akár $\mathbf{u}^{(k)}$ definícióját nézzük meg, ezek az értékek nem lehetnek nullák. Tehát az előírt pivot végrehajtható. (Igaz, ezt megelőzően egy speciális pivotot is végre kellett hajtanunk.)

Mivel az eredetileg meghatározott pivotálást csak egy további segítségével lehet végrehajtani, ezért *kettős pivot*álásról beszélünk. A kettős pivotálás szembetűnő előnye: utána ugyanolyan vektorok alapján döntünk a pivot pozíció kiválasztásáról, mint előtte, azaz az előjelstruktúra szempontjából a kettős pivot *nem* zavarja meg az eljárást.

Ha a P. Pivot szabályt azzal pontosítjuk, hogy szükség esetén kettős pivotot hajtunk végre, akkor igaz a következő állítás:

1. Lemma *Kettős pivot legfeljebb egyszer fordulhat elő.* ■

Ha az aktuális bázisunk B' olyan, hogy a $g(\mathbf{x}) = \mathbf{d}^T\mathbf{x}$ függvénynek nem nulla szintvonalán vagyunk, akkor a P. Pivot szabállyal választott báziscsere esetén $g(\mathbf{x}'') \neq 0$ lesz, vagyis nem kerülhetünk a nulla szintvonalra, amely gondot okozhatna. A kettős pivot elvégezhetőségének a feltétele szintén az, hogy az aktuális bázismegoldásunk esetén a $d_0' \neq 0$ teljesüljön. Így az alábbi feltételezéssel élünk.

1. Feltétel

$$\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{b}\} \cap \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \mathbf{d}^T\mathbf{x} = 0\} = \emptyset.$$

Az 1. Feltétel lényegében az elfajuló esetet zárja ki, vagyis azt, amikor a megoldáshalmaz része a $g(\mathbf{x})$ nulla helyeinek a halmazának (amely tulajdonképpen egy hipersík). Az 1. Feltétel nem igazán erős megkötés.

3. Egy criss-cross típusú algoritmus

Ebben a fejezetben bemutatjuk a hiperbolikus programozási feladat megoldására megfogalmazott criss-cross típusú algoritmusunkat. Igazoljuk végességét és két egyszerű példán illusztráljuk működését is. Mielőtt rátérnénk az algoritmus részletezésére, rójuk ki a hiperbolikus programozási feladatra szokásos *pozitivitási megkötés*t, amelyre a későbbiek során szükségünk lesz:

2. Feltétel

$$P \subset \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \mathbf{d}^T\mathbf{x} > 0\}.$$

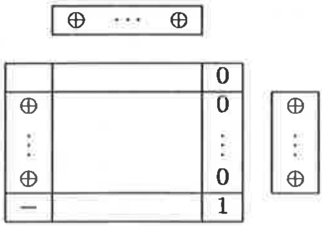
1. Algoritmus

Legyen adott egy B_0 induló bázis, amely kielégíti az (1.) feltételt.

1. lépés: Számítsuk ki a $d_0 = \mathbf{d}_B^T B^{-1}\mathbf{b}$ és $c_0 = \mathbf{c}_B^T B^{-1}\mathbf{b}$ értékeket illetve a $\mathbf{p} := \overline{\mathbf{c}}_N - \frac{c_0}{d_0}\overline{\mathbf{d}}_N$ és $\mathbf{q} := 1/d_0\overline{\mathbf{b}}$ vektorokat.

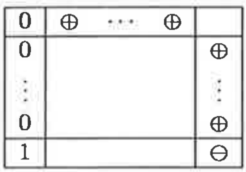
Legyen $I := \{i \in J_B : \overline{b}_i < 0\} \cup \{i \notin J_B : p_i < 0\}$.

Ha $I = \emptyset$ **akkor** az alábbi esetek fordulhatnak elő:

(1) 

4. ábra

Optimális megoldás. STOP.

(2) 

5. ábra

Optimális megoldás. STOP.

különben legyen $r := \min_{i \in I} i$ és menjünk a 2. lépésre.

2. lépés: Ha $r \in J_B$

akkor (*Duál iteráció*)

számoljuk ki a $\mathbf{u}^{(r)}$ vektort és legyen

$J := \{j \notin J_B : u_{rj} < 0\}$.

Ha $J = \emptyset$ **akkor** $P = \emptyset$, STOP

különben legyen $s := \min\limits_{j \in J} j$.

Ha $\tau_{rs} = 0$ **akkor** hajtsunk végre egy kettős pivotot a d_0 és az (r, s) pozíción,

különben pivotáljunk az (r, s) pozíción.

különben (*Primál iteráció*)

számoljuk ki a $\mathbf{v}_r$ vektort és legyen

$J := \{j \in J_B : v_{jr} > 0\}$.

Ha $J = \emptyset$ **akkor** $D = \emptyset$, STOP

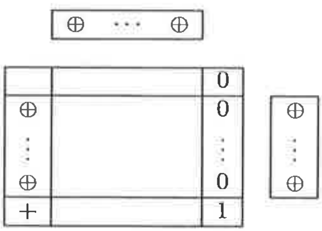
különben legyen $s := \min\limits_{j \in J} j$.

Ha $\tau_{sr} = 0$ **akkor** hajtsunk végre egy kettős pivotot a d_0 és az (s, r) pozíción,

különben pivotáljunk az (s, r) pozíción.

Menjünk az 1. lépésre. □

Az algoritmus végességének a bizonyítása előtt vizsgáljuk meg a megállási kritériumait. A 4. ábrán lévő előjelstruktúra primál megengedett megoldást jelent és a $-d_0 < 0$ miatt a 2. Feltétel (is) teljesül. (A $d_0 = 0$ esetet a 2. Feltétel kizárja.)



6. ábra

A 6. ábrán lévő előjelstruktúra előfordulását kizárja a 2. Feltétel, mert a $-d_0 > 0$ nem lehetséges, ha primál megengedett megoldásunk van.

Az 5. ábrán látható előjelstruktúrával leírt megállási feltételt két részletben tárgyaljuk attól függően, hogy a $-1/d_0 < 0$ vagy pedig a $-1/d_0 = 0$. Kezdjük az egyszerűbb esettel, amikor is $-1/d_0 < 0$. Figyelembe véve a $\mathbf{q}$ vektor definícióját, kapjuk, hogy a $\overline{\mathbf{b}} \geq \mathbf{0}$, azaz primál megengedett megoldásunk van (és a 2. Feltétel is teljesül). A $\mathbf{p} \geq \mathbf{0}$ összefüggést (is) figyelembe véve, megoldásunk optimális.

A $-1/d_0 = 0$ esetet a következő lemma segítségével oldjuk meg.

2. Lemma *Legyen adott a következő előjelstruktúrájú tábla:*

0	$\oplus \ldots \oplus$	
0		$\oplus$
$\vdots$		$\vdots$
0		$\oplus$
1		0

Ekkor a (P) feladatnak létezik megengedett megoldása, a célfüggvény korlátos és az optimális célfüggvényérték csak határértékben állítható elő.

Bizonyítás. A fent látható előjelstruktúra azt jelenti, hogy a

$$\left.\begin{array}{rcrcr} & & \min & \mathbf{c}^T\mathbf{u} \\ A\mathbf{u} & - & \tau\mathbf{b} & = & \mathbf{0} \\ \mathbf{d}^T\mathbf{u} & & & = & 1 \\ \mathbf{u} & & & \geq & \mathbf{0} \\ & & \tau & \geq & 0 \end{array}\right\} \quad \text{(SP)},$$

feladat egy optimális bázismegoldásánál vagyunk, ($\hat{\varphi} := \mathbf{c}^T\hat{\mathbf{u}}$ optimumértékkel) amely esetén $\hat{\tau} = 0$, vagyis előállítottuk az

$$\begin{array}{rcl} A\mathbf{u} & = & \mathbf{0} \\ \mathbf{d}^T\mathbf{u} & = & 1 \\ \mathbf{u} & \geq & \mathbf{0} \end{array}$$

feltételrendszer egy megengedett megoldását, az $\hat{\mathbf{u}} := \mathbf{q} \geq 0$ vektort. Ekkor poliéderünk nem korlátos és egy olyan irányhoz jutottunk, amely esetén az

$$\mathbf{x}_k := \mathbf{x}_0 + k\hat{\mathbf{u}} \in P$$

pontsorozat ($\mathbf{x}_0 \in P$ és $\mathbf{d}^T\mathbf{x}_0 = 1$) a következő tulajdonsággal rendelkezik:

$$\varphi_{0,k} := \frac{\mathbf{c}^T\mathbf{x}_k}{\mathbf{d}^T\mathbf{x}_k} = \frac{\mathbf{c}^T\mathbf{x}_0 + k\mathbf{c}^T\hat{\mathbf{u}}}{\mathbf{d}^T\mathbf{x}_0 + k\mathbf{d}^T\hat{\mathbf{u}}} = \frac{\mathbf{c}^T\mathbf{x}_0 + k\mathbf{c}^T\hat{\mathbf{u}}}{\mathbf{d}^T\mathbf{x}_0 + k} = \frac{\mathbf{c}^T\mathbf{x}_0 + k\hat{\varphi}}{k+1}.$$

Könnyen belátható, hogy a $\varphi_{0,k}$ monoton nem növekvő sorozat. Ha $\varepsilon > 0$ pontossággal akarjuk előállítani a feladat megoldását, akkor

$$k(\mathbf{x}_0, \varepsilon) := \frac{c_0 - d_0\hat{\varphi}}{\varepsilon}$$

küszöbszám adódik. ■

Az 1. lépés (2) esetéhez (5. ábra) kapcsolódik még az alábbi előjelstruktúra is (7. ábra), amelynek az előfordulását a 2. Feltétel kizárja.

0	$\oplus \cdots \oplus$	
0		$\ominus$
$\vdots$		$\vdots$
0		$\ominus$
1		$+$

7. ábra

Az 1. Algoritmus végességének bizonyítása során mindvégig a 3. ábrán látható táblát használjuk, hiszen a pivot szabályt is ehhez kapcsolódóan definiáltuk, azzal a kiegészítéssel, hogy a $\mathbf{q}$ vektor helyett mindenkor a $\mathbf{b}$ vektorral dolgozunk. Az indoklásunk az un. *ortogonalitási tételre* épül ([6], 2.5. Tétel). Mivel a kettős pivot nem változtatja meg a belépő és távozó vektor kiválasztásának a szabályát, ezért a végesség bizonyításánál nem játszik szerepet (1. Állítás és 1.6 Lemma). A bizonyítás menete követi Terlaky [11] bizonyítását.

1. Tétel *A hiperbolikus criss-cross módszer (1. Algoritmus) véges.*

Bizonyítás. Indirekt bizonyítást alkalmazunk, azaz tegyük fel, hogy eljárásunk nem véges. Mivel véges sok bázisunk lehet, ezért ez azt jelenti, hogy valamelyik végtelen sokszor előfordul. Ez csak úgy lehetséges, ha az eljárás ciklizál. Jelölje az I^* halmaz a ciklus során belépő változók indexeinek a halmazát (ezek nyilván pontosan azok, amelyek egyben a ciklus során távoznak is). Legyen $l := \max_{i \in I^*} i$. Figyeljük az l. változó mozgását. Ekkor négy eset lehetséges:

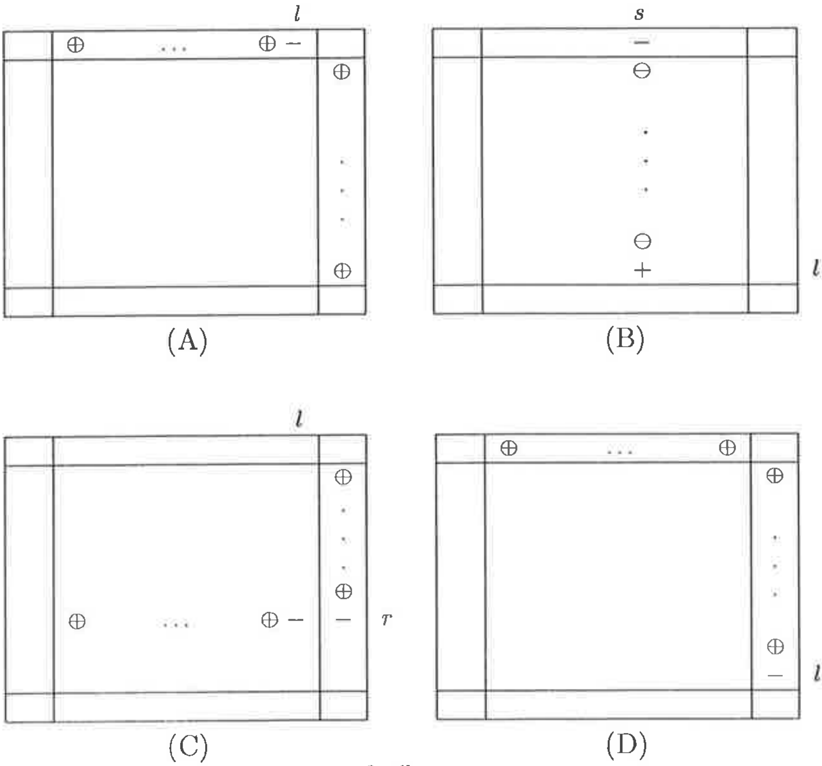
(a) az l. változó primál iterációnál lép be a bázisba és primál iterációnál távozik a bázisból;

(b) az l. változó primál iterációnál lép be a bázisba és duál iterációnál távozik a bázisból;

(c) az l. változó duál iterációnál lép be a bázisba és primál iterációnál távozik a bázisból;

(d) az l. változó duál iterációnál lép be a bázisba és duál iterációnál távozik a bázisból.

A 8. ábra mutatja a négy pivot tábla előjelstruktúráját amikor az l. változó belép illetve távozik a bázisból (felül a **p** vektor sora található, míg jobbra az utolsó oszlopban a **q** vektor helyén (3. ábra), a **b** vektoré). Az (A) tábla azt mutatja, amikor az l. változó primál iterációnál belép, a (B) tábla azt a helyzetet, amikor az l. változó primál iterációnál távozik a bázisból. A (C) tábla azt mutatja, amikor az l. változó duál iterációnál belép, és végül a (D) tábla azt a helyzetet, amikor az l. változó duál iterációnál távozik a bázisból.



8. ábra

Vizsgáljuk meg sorra a lehetséges eseteket. A könnyebb érthetőség kedvéért a megfelelő sor- illetve oszlopvektorok előjelstruktúráját is megadjuk. (Ezek definíciója megtalálható Klafszky és Terlaky cikkében ([6], 433. oldal). Természetesen nem szabad elfelejteni, hogy bizonyításaink – lévén hiperbolikus programozásról szó és nem lineáris programozásról – az $(A, -\mathbf{b})$ mátrix és $(\mathbf{c}, 0)$ vektor által kifeszített altér helyett a $\mathrm{Lin}\big((A, -\mathbf{b}, \mathbf{0}); (\mathbf{c}, 0, 0); (\mathbf{d}, 0, 1)\big)$ altérben történnek.)

Mivel az (a), (c) és (d) esetek bizonyítása azonos technikát igényel, míg a (b) eseté ezektől kissé eltérőt, ezért először az (a), (c) és (d) esetek bizonyításával foglalkozunk.

(a) Az l. változó primál iterációnál lép be a bázisba illetve az l. változó primál iterációnál távozik a bázisból és a belépő változó az s. Ekkor a 8. ábra (A) és (B) tábláját kell figyelembe vennünk. Az ortogonalitási tételt használva azt kell kapnunk, hogy az (A) pivot tábla $\mathbf{p}$ sora merőleges a (B) tábla s. oszlopára.

Az ortogonalitási tételt a $\mathbf{p}$ vektor sorára és az s. változó oszlopára kell alkalmaznunk. A $\mathbf{p}$ vektor sorának előállításakor a $\mathbf{p}$ vektor definícióját vesszük figyelembe, azaz $\mathbf{t}^{(\mathbf{p})} = \mathbf{t}^{(\mathbf{c})} - \frac{c_0}{d_0}\, \mathbf{t}^{(\mathbf{d})}$. (Ebből azonnal adódik, hogy a $\mathbf{c}$ és $\mathbf{d}$ oszlopában 1 illetve $-\frac{c_0}{d_0}$ áll.)

$$
\begin{array}{rl}
 & \begin{array}{ccccc} & l & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{array} \\
\mathbf{t}^{(\mathbf{p})} = & \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \oplus \;\ldots\; \oplus & - & 0 & 1 & -\frac{c_0}{d_0} \\ \hline \end{array} \\[2ex]
\mathbf{t}_s = & \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \ominus \;\ldots\; \ominus & + & 0 & \bar{c}_s & \bar{d}_s \\ \hline \end{array}
\end{array}
$$

Ekkor a ${\mathbf{t}_s}^T \mathbf{t}^{(\mathbf{p})} < 0$ adódik, figyelembe véve a p_s előjelét is, hiszen $p_s = c_s - \frac{c_0}{d_0}\, d_s < 0$, ami újra ellentmondást eredményez.

(c) Az l. változó duál iterációnál lép be a bázisba, a távozó változó az r. illetve az l. változó primál iterációnál távozik a bázisból. Ekkor a 8. ábra (C) és (B) tábláját kell figyelembe vennünk. Az ortogonalitási tételt használva azt kell kapnunk, hogy a (C) (teljes) pivot tábla r. sora merőleges a (B) tábla s. oszlopára. Tehát a $\mathbf{t}^{(r)}$ és a $\mathbf{t}_s$ vektorok merőlegesek.

$$
\begin{array}{rl}
 & \begin{array}{ccccc} & l & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{array} \\
\mathbf{t}^{(r)} = & \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \oplus \;\ldots\; \oplus & - & - & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \\[2ex]
\mathbf{t}_s = & \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \ominus \;\ldots\; \ominus & + & 0 & * & * \\ \hline \end{array}
\end{array}
$$

Ekkor nyilvánvalóan ${\mathbf{t}_s}^T \mathbf{t}^{(r)} < 0$, ami ellentmond az ortogonalitási tételnek.

(d) Az l. változó duál iterációnál lép be a bázisba, a távozó változó az r. illetve az l. változó duál iterációnál távozik a bázisból. Ekkor a 8.

ábra (C) és (D) tábláját kell figyelembe vennünk. Az ortogonalitási tételt használva azt kell kapnunk, hogy a (C) (teljes) pivot tábla r. sora merőleges a (D) tábla $\mathbf{b}$ oszlopára.

$$\begin{array}{rc|c|c|c|c|}
 & & l & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \\
\mathbf{t}^{(r)} = & \oplus \ \ldots \ \oplus & - & - & 0 & 0 \\
 & & & & & \\
\mathbf{t}_{\mathbf{b}} = & \oplus \ \ldots \ \oplus & - & -1 & * & *
\end{array}$$

A $\mathbf{t}^{(r)}$ $\mathbf{c}$-vel és $\mathbf{d}$-vel jelölt pozícióin azért áll nulla, mert a $\mathbf{c}$-nek és $\mathbf{d}$-nek sorvektorok felelnek meg („bázisban" vannak), míg a $\mathbf{t}_b$ vektornál a $*$ mindkét esetben azt jelenti, hogy akármilyen érték állhat ott. Ekkor a $\mathbf{t_b}^T\mathbf{t}^{(r)} > 0$ adódik, ami ellentmond az ortogonalitási tételnek.

Végül térjünk rá a (b) eset tárgyalására.

(b) Az l. változó primál iterációnál lép be a bázisba illetve az l. változó duál iterációnál távozik a bázisból. Ekkor a 8. ábra (A) és (D) tábláját kell figyelembe vennünk.

Az (A) táblából nyert vektorokat $'$-vel, míg a (D) táblából nyerteket $''$-vel jelöljük, és így nem okoz gondot, hogy mindkét táblából előállítjuk a $\mathbf{p}$-nek megfelelő sor-, illetve a $\mathbf{b}$-nek megfelelő oszlopvektorokat. A $\mathbf{b}$-nek megfelő oszlopvektorokat normáljuk úgy, hogy a $\mathbf{d}$-hez tartozó koordináta -1 legyen. Ekkor az alábbi vektorokat nyerjük:

$$\begin{array}{rc|c|c|c|c|}
 & & l & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \\
\mathbf{t}^{(\mathbf{p})'} = & \oplus \ \ldots \ \oplus & - & 0 & 1 & -\frac{c'_0}{d'_0} \\
\mathbf{t}''_{\mathbf{b}} = & \oplus \ \ldots \ \oplus & - & \frac{-1}{d''_0} & \frac{-c''_0}{d''_0} & -1
\end{array}$$

illetve a

$$\begin{array}{rc|c|c|c|c|}
 & & l & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \\
\mathbf{t}^{(\mathbf{p})''} = & \oplus \ \ldots \ \oplus & 0 & 0 & 1 & -\frac{c''_0}{d''_0} \\
\mathbf{t}'_{\mathbf{b}} = & \oplus \ \ldots \ \oplus & - & \frac{-1}{d'_0} & \frac{-c'_0}{d'_0} & -1
\end{array}$$

Ekkor a merőlegességi tulajdonság miatt $\mathbf{t}''_{\mathbf{b}}{}^T\mathbf{t}^{(\mathbf{p})'} = 0$ és $\mathbf{t}'_{\mathbf{b}}{}^T\mathbf{t}^{(\mathbf{p})''} = 0$ adódik, azaz $0 = \mathbf{t}''_{\mathbf{b}}{}^T\mathbf{t}^{(\mathbf{p})'} + \mathbf{t}'_{\mathbf{b}}{}^T\mathbf{t}^{(\mathbf{p})''}$. Azonban a fenti előjelstruktúrát figyelembe véve a két szorzat összege pozitívnak adódik, ami ellentmodás. A tétel bizonyítását befejeztük. ∎

Végezetül két példával illusztráljuk az algoritmus működését. Példáinkat Martos [9] könyvéből vettük és így azonnal alkalmunk nyílik az algoritmusunkat összehasonlítani egyéb jól ismert módszerekkel. Igazán nem meglepő, hogy algoritmusunk más bázisokon keresztül közelíti meg az optimális megoldást, hiszen rendelkezik az összes criss-cross algoritmus azon tulajdonságával, hogy sem nem primál, sem nem duál megengedett bázisokat is meglátogat, illetve a célfüggvény változása nem monoton.

Tekintsük az első példát Martos ([9], 170. oldal) könyvéből, amellyel saját módszerét illusztrálja.

1. Példa *Keressük meg a φ függvény minimumát.*

$$\begin{aligned}
\varphi(x_1, x_2) &= \frac{24x_1 + 6}{5x_1 + x_2 + 1} \\
-x_1 + x_2 &\leq 1 \\
x_1 - x_2 &\leq 1 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

A feladat megengedett megoldás halmazának a csúcsai a következők: $\hat{\mathbf{x}}_1 = (1,0)$, $\hat{\mathbf{x}}_2 = (0,0)$, $\hat{\mathbf{x}}_3 = (0,1)$. A függvényértékek pedig: $\hat{\varphi}_1 = 6$, $\hat{\varphi}_2 = 6$, $\hat{\varphi}_3 = 3$. Martos módszerével az $\hat{\mathbf{x}}_1$ csúcsból az $\hat{\mathbf{x}}_3$ csúcsba nem lehet közvetlenül eljutni, mert nincsen közbülső, primál megengedett megoldás, ezért kénytelenek vagyunk az ún. *regularizációt* [9] végrehajtani, ami nem jelent egyebet, mint egy speciális új feltétel hozzávételét a feladathoz. Esetünkben ez az

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

feltétel és így további két primál megengedett megoldást nyerünk $\hat{\mathbf{x}}_4 = (1/2, 3/2)$, $\hat{\mathbf{x}}_5 = (3/2, 1/2)$. Az $\hat{\mathbf{x}}_1$ csúcsból kiindulva az $\hat{\mathbf{x}}_5, \hat{\mathbf{x}}_4$ csúcsokon keresztül jutunk el az optimális megoldáshoz, az $\hat{\mathbf{x}}_3$ csúcsba, azaz *három* báziscserére és regularizációra volt szükégünk a megoldás során.

Ezzel szemben, ha a criss-cross módszert alkalmazzuk a feladatra és az $\hat{\mathbf{x}}_1$ csúcsból indulunk el, akkor az algoritmusunk szerint azonnal egy kettős pivotot kell csinálnunk, amelynek a végén az $\hat{\mathbf{x}}_2$ csúcsra érkezünk. A következő lépésben az optimális $\hat{\mathbf{x}}_3$ csúcsra lépünk. A megoldás során két lépést tettünk és a kettős pivot miatt három báziscserét hajtottunk végre, de más útvonalon jutottunk az optimális megoldáshoz.

Térjünk rá a második példára, amely Martos Béla könyvének [9] a 177. oldalán található meg és a hiperbolikus szimplex módszer illusztrálására szolgál.

2. Példa *Keressük meg a φ függvény minimumát.*

$$\begin{array}{rcl} \varphi(x_1,x_2) & = & \dfrac{-6x_1 - 5x_2}{2x_1+7} \\ x_1 + 2x_2 & \leq & 3 \\ 3x_1 + 2x_2 & \leq & 6 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Az $x_1 = x_2 = 0$ megengedett megoldása a feladatnak és ekkor az induló bázisváltozók az y_1 és y_2 (mesterséges változók). A hiperbolikus szimplex módszer segítségével a következő bázisok nyerhetők: $\{y_1, y_2\}$, $\{x_2, y_2\}$ és $\{x_2, x_1\}$. A harmadik bázis optimális megoldást szolgáltat. Két iterációra volt szükség és természetesen (lévén szimplex típusú módszerről szó) a célfüggvény monoton csökkent és a közbülső bázisok primál megengedettek voltak.

A hiperbolikus criss-cross módszert alkalmazva a feladatra a következő bázisokhoz jutunk: $\{y_1, y_2\}$, $\{x_1, y_2\}$ és $\{x_1, x_2\}$. Esetünkben a második bázis duál megengedett és primál nem megengedett. A célfüggvény változása nem monoton, vagyis a megoldásunk magán viseli a criss-cross módszerek jellemvonásait és szintén két iterációban oldottuk meg a feladatot, mint a hiperbolikus szimplex módszerrel.

Köszönetnyilvánítás. A cikkünk anyagának a jelentős része Illés Tibor 1994-es delfti látogatása során fogalmazódott meg (Peregrinatio II. Ösztöndíjjal töltött három hónapot Hollandiában). A dolgozat írott változatának elkészítését jelentősen segítette az első szerző koppenhágai tanulmányuta (Állami Eötvös Ösztöndíj), amely során a szerzők az Interneten keresztül cserélték ki a kézirat újabb és újabb változatait. Az eredmények hazai és nemzetközi konferenciákon való bemutatását az OTKA T 14302-es pályázata támogatta. Ezúton (is) kifejezzük köszönetünket kutatásunk támogatóinak.

Irodalom

1. Anstreicher, K. M., Analysis of Karmarkar's algorithm for fractional linear programming, *Technical Report*, (1985), November, Yale School of Management, Yale University, New Haven, CT 06520, USA.
2. Anstreicher, K. M., A monotonic projective algorithm for fractional linear programming, *Algorithmica*, 1, No. 4, (1986) 483-498.
3. Bitran, G. R., Novaes, A. G., Linear programming with a fractional objective function, *Operations Research*, 21 (1973) 22-29.
4. Charnes, A., Cooper, W. W., Programming with linear fractionals, *Naval Research Quaterly*, 9 (1962) 181-186.

5. Gilmore, P. C., Gomory, R. E., A linear programming approach to the cutting stock problem, part II., *Operations Research*, (1963) 863-888.
6. Klafszky E., Terlaky T., A pivot technika szerepe a lineáris algebra néhány alapvető tételének a bizonyításában, *Alkalmazott Matematikai Lapok*, 14 (1989) 425-448.
7. Martos B., Hiperbolikus programozás, *Az MTA Matematikai Kutató Intézetének Közleményei*, 5 Budapest (1960) 383-406.
8. Martos B., Nem-lineáris programozási módszerek hatóköre, *Az MTA Közgazdaságtudományi Intézetének Közleményei*, 20 Budapest, 1966.
9. Martos B., *Nonlinear Programming: Theory and Methods*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1975.
10. Schaible, S., Fractional Programming, in Eds. Pardalos, P. and Horst, R. *Handbook of Global Optimization*, Kluwer Academic Publishers, 1995.
11. Terlaky T., Egy új, véges criss-cross módszer lineáris programozási feladatok megoldására, *Alkalmazott Matematikai Lapok*, 10 (1984) 289-296.

THE FINITE CRISS-CROSS METHOD FOR HYPERBOLIC PROGRAMMING

In this paper the finite criss-cross method is generalized to solve hyperbolic programming problems. Like in the case of linear or quadratic programming the criss-cross method can be initialized with any, not necessarily feasible basis solution. The finiteness of the procedure is proved under the usual mild assumptions. Finally, some small numerical examples illustrate the main features of the algorithm.

ÁRBECSLÉSI MÓDSZEREK ÉRTÉKELÉSE SZIDAROVSZKY ÉS MOLNÁR DISZKRÉT DINAMIKUS TERMELŐI-FOGYASZTÓI MODELLJE ALAPJÁN[1]

BESSENYEI ISTVÁN
JPTE Közgazdaságtudományi Kar

Dolgozatomban a Szidarovszky és Molnár (1994a) által definiált diszkrét dinamikus termelői-fogyasztói modellben bevezetett különféle árbecslési módszereket vetem egyebe. Az összehasonlítás és értékelés alapja a különféle árbecslések alkalmazása esetén elérhető termelői többlet. Mivel egyensúlyi helyzetben valamennyi termelő az árbecslés módszerétől függetlenül azonos profithoz jut, a dolgozat elsősorban az egyensúlytalanság esetére koncentrál. A módosított modell megváltozott stabilitási viszonyai azonban szükségessé teszik a stabilitás legalább egy elegendő feltételének levezetését is.

1. Bevezetés

Diszkrét dinamikus termelői-fogyasztói modellek stabilitását Szidarovszky és Molnár (1994a) vizsgálták. A vizsgálat a lineáris rendszerelmélet (Szidarovszky és Bahill, 1992) azon eredményén alapult, mely szerint a globális aszimptotikus stabilitás szükséges és elégséges feltétele az, hogy az együtthatómátrix sajátértékei az egységkör belsejében legyenek. Szidarovszky és Molnár a stabilitást azon föltevés mellett vizsgálták, hogy valamennyi termelő azonos árbecslési módszert alkalmaz. A különféle árbecslési módszerek összehasonlítása azonban egy olyan modell alkalmazását teszi szükségessé, melyben a statikus, az adaptív és az extrapolatív becslések együtt szerepelnek a teljes információs esettel. Először egy olyan matematikai modellt ismertetek, melyben az egyes termelők költségviszonyai azonosak, eltérés csupán az árbecslés alkalmazott módszerében mutatkozik köztük. A következő paragrafus a stabilitás kérdésével foglalkozik. Az eredmények egyszerűbb értelmezése érdekében a dolgozat további részében a profit helyett a termelői többlet alakulását vizsgálom, és vetem egybe ennek az egyes termelőknél képződő nagyságát. Az eredmények közgazdasági értelmezésére közvetlenül azok levezetése után kerül sor.

[1]Beérkezett 1995. december 8.

2. A matematikai modell

Egy piacon négy termelő termeli ugyanazt a terméket. Jelölje $x_k(t)$ a k-ik termelő által a t időpontban előállított mennyiséget ($k = 1, 2, 3, 4$; $t = 0, 1, 2, \ldots$). Valamennyi termelő azonos kvadratikus költségfüggvénnyel rendelkezik:

$$C_k(x_k) = B\big(x_k(t)\big)^2 + bx_k(t) + c\,, \tag{1}$$

ahol $B, b, c > 0$. Amennyiben a k-dik termelő által a t-dik periódusra becsült árat $P_k(t)$ jelöli, a k-ik termelő profitja a termelés alábbi színvonala esetén maximális:

$$x_k(t) = \frac{P_k(t) - b}{2B}\,, \tag{2}$$

ahol $P_k(t) = b$ a k-dik termelő üzembezárási ára. A termelői többlet definíciójából következik (lásd pl. Varian, 1991), hogy ugyanezen kibocsátási szint mellett maximális a termelői többlet is, és ez a c fixköltségek nagyságával haladja meg a profitot. Jelölje $P_0(t)$ a fogyasztók által a t-dik periódusra becsült árat. Ekkor a lineáris keresleti függvény:

$$d(t) = DP_0(t) + d \tag{3}$$

$D < 0$, $d > 0$ paraméterekkel. Szidarovszky és Molnár nyomán legyen az ár mozgása olyan, hogy túlkereslet esetén nő, túlkínálat esetén pedig csökken. Amennyiben a termékek nem raktározhatók (ilyen például a szolgáltatások piaca), az ár alakulása legegyszerűbben az alábbi mozgásegyenlettel írható le:

$$P(t+1) = P(t) + K\left[d(t) - \sum_{i=1}^{4} x_i(t)\right]\,, \tag{4}$$

ahol $P(t)$ a termék tényleges ára a t-dik periódusban, $K > 0$ pedig adott konstans. A szögletes zárójelben álló kifejezés a túlkereslet nagyságával egyenlő. Az egyes termelők az alábbi árbecsléseket alkalmazzák:

$$P_1(t+1) = P(t+1)\,. \tag{5}$$

Tehát az első termelő reprezentálja a teljes információs esetet. A második termelő az árat statikusan becsli:

$$P_2(t+1) = P(t)\,. \tag{6}$$

A harmadik termelő az árbecslés adaptív módszerét alkalmazza. Legyen M_3 konstans, és $0 < M_3 \leq 1$. Ekkor:

$$P_3(t+1) = M_3P(t) + (1 - M_3)P_3(t)\,. \tag{7}$$

Rögtön látszik, hogy a statikus árbecslés az adaptívnak egy speciális esete, $M_3 = 1$ esetén az adaptív becslés statikussá válik. A negyedik termelő az árat extrapolatív módon becsli:

$$P_4(t+1) = M_4 P(t) + (1 - M_4) P(t-1)\ . \tag{8}$$

Vegyük észre, hogy $M_4 = 1$ esetén az extrapolatív becslés is statikussá válik. $0 < M_4 < 1$ esetén a becsült ár a két korábbi periódusban tapasztalt ár lineáris interpolációja, $M_4 > 1$ esetén pedig lineáris extrapolációja. Legyenek továbbá a vevők tökéletesen informáltak, ekkor:

$$P_0(t+1) = P(t)\ . \tag{9}$$

Az így definiált diszkrét dinamikus rendszer stabilitási tulajdonságait a következő paragrafus vizsgálja.

3. A rendszer stabilitása

Behelyettesítve a (2) és (3) egyenletet a (4)-be, majd az így kapott összefüggést az (5)-be, a teljes információs helyzet árbecslése az alábbi módon írható fel az egyes termelők által az előző periódusra anticipált árak függvényében:

$$P_1(t+1) = P_1(t)(1 + KD) + Kd - K \sum_{i=1}^{4} \frac{P_i(t) - b}{2B}\ . \tag{10}$$

Felírva továbbá az (5) egyenletet a t periódusra, és ezt a (6)-ba helyettesítve az alábbi egyenlet adódik:

$$P_2(t+1) = P_1(t)\ . \tag{11}$$

Ugyanígy az adaptív árbecslés eredménye is felírható az előző periódusban becsült árak függvényeként:

$$P_3(t+1) = M_3 P_1(t) + (1 - M_3) P_3(t)\ . \tag{12}$$

Alkalmazva a (6) egyenletet t-re, és ezt a (8) összefüggésbe helyettesítve az alábbi egyenlőség adódik:

$$P_4(t+1) = M_4 P_1(t) + (1 - M_4) P_2(t)\ . \tag{12}$$

A (10)-(13) egyenletek egy diszkrét dinamikus rendszert határoznak meg, melynek együtthatómátrixa:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1+KD-\frac{K}{2B} & -\frac{K}{2B} & -\frac{K}{2B} & -\frac{K}{2B} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ M_3 & 0 & 1-M_3 & 0 \\ M_4 & 1-M_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Az A mátrix sajátérték-feladata:

$$\begin{gathered} 2B\lambda^4-(4B-2M_3B-1)\lambda^3+(2B-2M_3B+2M_3+M_4)\lambda^2+ \\ (M_3+M_3M_4-2M_4)\lambda-(1-M_3)(1-M_4)=0 \end{gathered} \tag{14}$$

A lineáris rendszerelméletből ismert (Szidarovszky és Bahill, 1992), hogy a globális aszimptotikus stabilitás szükséges és elégséges feltétele az, hogy a (14) egyenlet zéróhelyei az egységkör belsejében legyenek. Hogy ez a rendszer paramétereinek mely értékei esetén teljesül, az többféle módon levezethető, az eljárás azonban meglehetősen hosszadalmas, az eredmény pedig nehezen kezelhető. A stabilitás egy lényegesen egyszerűbb elegendő feltétele kapható Gerschgorin tételének (lásd pl. Stoyan és Tako 1993) fölhasználásával. E-szerint az **A** mátrix sajátértékei az alábbi körökben helyezkednek el:

1) Az $1+KD-\dfrac{K}{2B}$ középpontú, $\dfrac{2K}{3B}$ sugarú körben. 2) A 0 középpontú, 1 sugarú körben. 3) Az $1-M_3$ középpontú M_3 sugarú körben. 4) A 0 középpontú $|1-M_4|+M_4$ sugarú körben.

Másrészt a stabilitás szükséges és elegendő feltétele, hogy az **A** mátrix sajátértékeinek abszolút értéke ne legyen egynél nagyobb, továbbá az origótól egységnyi távolságra eső sajátértékek multiplicitása ne haladja meg az egyet. Az 1. körnek abban az esetben nincs az egységkörön kívüli része, ha

$$\frac{2}{B}-\frac{2}{K}<D<-\frac{1}{B} \tag{15}$$

teljesül. Ilyen D nyilván $K<(2/3)B$ esetén létezik. Az egyenlőség kizárása miatt az első kör nem lehet az origó középpontú egységkör, hanem annak egy valódi részhalmaza. A második kör éppen az origó középpontú egységkör, a harmadik pedig $0<M_3\leq 1$ miatt az egységkör részhalmaza. A negyedik kör $M_4\leq 1$ esetén részhalmaza az egységkörnek. A stabilitás elegendő feltétele tehát (15) egyenlőtlenségek teljesülése mellett az, hogy a 4. termelő interpolatív árbecslést alkalmazzon. Ebben az esetben az origótól

egységnyi távolságra eső sajátértékek (ha egyáltalán vannak ilyenek) multiplicitása nem nagyobb egynél. A Gerschgorin-körök elhelyezkedéséből látható ugyanis, hogy az **A** mátrixnak legfeljebb két olyan sajátértéke van, melyek abszolút értéke egy. E két sajátérték vagy egyszeres multiplicitással szerepel, ekkor egyik a másik konjugáltja, vagy pedig egybeesik, ekkor azonban a valós tengelyen helyezkednek el, értékük tehát 1 vagy −1. A (14) egyenletbe történő behelyettesítés révén egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy az 1 csakis abban az esetben lehet az **A** mátrix sajátértéke, ha $M_3 = 0$. Mivel ez az eset úgy értelmezhető, hogy 3. termelő mindig ugyanarra az árra számít, kizárása nem jelenti az általánosság különösebb megszorítását. Hasonlóképpen a (14) egyenletből következik az is, hogy −1 az **A** mátrixnak biztosan nem sajátértéke, ha $B > 1/4 - M_4/2$ teljesül.

Mindezek alapján a stabilitás elegendő feltétele az alábbiakban fogalmazható meg: A 3. paragrafusban definiált diszkrét dinamikus rendszer stabilitásának elegendő feltétele az alábbiak teljesülése:

1. A (15) egyenlőtlenségek teljesülése. Ennek közgazdasági tartalma a következő: A rendszer stabilitását növeli a minden termelőre azonos határköltségfüggvény meredekségének csökkenése vagy az ármozgás túlkeresletre illetve keresléthiányra való érzékenységének növekedése.

2. A negyedik termelő becslési paramétere ne legyen egynél nagyobb, árbecslése tehát az előző két periódusban tapasztalt ár valamely lineáris interpolációja legyen.

3. A valamennyi termelő esetén azonos határköltségfüggvény meredeksége legyen $1/4 - M_4/2$-nél nagyobb.

Fölhasználva továbbá a lineáris rendszerelmélet azon eredményét (ld. például Szidarovszky és Bahill, 1992), mely szerint ha az **A** mátrixnak legalább egy sajátértéke az egységkörön kívülre esik, akkor a rendszer instabil, az instabilitás elegendő feltétele a

$$D < -2K - \frac{1}{B} \tag{16}$$

egyenlőtlenség teljesülése. Ez esetben ugyanis az $1+KD-K/(2B)$ középpontú Gerschgorin-kör teljes terjedelme az egységkörön kívülre kerül.

4. Az árbecslési módszer termelői többletre gyakorolt hatása

A k-ik termelő által realizált termelői többlet a következő összefüggés szerint adódik:

$$S_k = P(t)x_k(t) - Bx_k^2(t) - bx_k(t) \tag{17}$$

Behelyettesítve ebbe a (2) egyenletet:

$$S_k = \frac{1}{4B}\left[\left(P(t)-b\right)^2 - \left(P(t)-P_k(t)\right)^2\right] , \tag{18}$$

amiből rögtön látszik, hogy minél pontosabb az árbecslés, annál magasabb termelői többlethez (és természetesen profithoz is) jut a termelő. A legmagasabb termelői többlethez tehát a teljes információval rendelkező termelő jut. Ehhez az esethez célszerű a továbbiakban a többi árbecslési módszer esetén adódó termelői többlet nagyságát viszonyítani. A statikus árbecslés esetén adódó termelői többlet teljes információs esethez való viszonya a (6) egyenlet t-re való alkalmazásával az alábbi:

$$\frac{S_2}{S_1} = 1 - \left(\frac{P(t)-P(t-1)}{P(t)-b}\right)^2 . \tag{19}$$

Eszerint egyensúly esetén a statikus árbecslést alkalmazó termelő pontosan akkora termelői többletet realizál, mint a teljes információval rendelkező. Ha azonban az ár növekszik vagy csökken a statikus árbecslés a teljes információnál rosszabb eredményre vezet, éspedig annál rosszabbra, minél nagyobb az egyik periódusról a másikra bekövetkező árváltozás mértéke. Az adaptív árbecslés alkalmazása mellett realizálható termelői többlet a következőképpen viszonyul a teljes információs esetben elérhető termelői többlethez:

$$\frac{S_3}{S_1} = 1 - \left(\frac{P(t)-P(t-1)+(1-M_3)\left(P(t-1)-P_3(t-1)\right)}{P(t)-b}\right)^2 . \tag{20}$$

Eszerint áremelkedés esetén az adaptív becslés akkor vezet a statikusnál jobb eredményre, ha az előző periódusban a termelő túlbecsülte az árat, árcsökkenés esetén pedig, ha az előző periódusban alábecsülte. A (20) egyenlet hátránya, hogy a termelői többlet alakulása az előző periódusra anticipált ár nagyságától is függ. E hátrány kiküszöböléséhez a (7) egyenletbeli rekurzió alábbi zárt formára történő átírása szükséges:

$$P_3(t) = M_3\sum_{i=1}^{n}(1-M_3)^{i-1}P(t-i) + (1-M_3)^n P_3(t-n) , \tag{21}$$

ahol n tetszőleges természetes szám. Legyen most n az utolsó olyan periódus sorszáma, melyben a piac egyensúlyban volt. Ekkor:

$$P_3(t-n) = P(t-n) = \frac{Bd+2b}{2-BD} , \tag{22}$$

ahol a jobb oldalon éppen az egyensúlyi ár szerepel. Ennek meghatározásához a (4) egyenletben a szögletes zárójelben álló kifejezés értékét kell nullával egyenlővé tenni, hiszen ott a kereslet kínálattól való eltérése szerepel. A kínálat meghatározása azon egyensúlyi föltevés alapján történt, mely szerint valamennyi termelő helyesen becsli az árat. A (21) és (22) egyenletek fölhasználásával a (20) egyenlet az alábbival helyettesíthető:

$$\frac{S_3}{S_1} = 1 - \left[\frac{P(t) - M_3 \sum_{i=1}^{n-1} (1 - M_3)^{i-1} P(t-i) - (1 - M_3)^{n-1} \frac{Bd + 2b}{2 - BD}}{P(t) - b} \right]^2 . \tag{23}$$

A (23) egyenlet előnye, hogy az adaptív árbecslés illetve a teljes információ esetén adódó termelői többlet viszonyát az ár utolsó egyensúlyi helyzet óta végzett mozgásának függvényében írja le. Végül a (8) egyenletet felhasználva extrapolatív árbecslések esetére az alábbi hányados adódik:

$$\frac{S_4}{S_1} = 1 - \left[\frac{P(t) - P(t-1) + (1 - M_4)\big(P(t-1) - P(t-2)\big)}{P(t) - b} \right]^2 . \tag{24}$$

Eszerint tartós áremelkedés illetve árcsökkenés esetén a lineáris extrapoláció jobb eredményt biztosít, mint a statikus becslés. Amennyiben az árváltozás iránya periódusonként más és más, a lineáris interpoláció vezet a statikus árbecslésnél jobb eredményre.

5. Következtetések

A (18) egyenlet lehetővé teszi a termelői többlet felírását a termelő által anticipált ár függvényében. Kivonva a jobb oldalon álló kifejezésből a fixköltségek nagyságát, az összefüggés a profit nagyságának meghatározására alkalmas. Ezen egyenlet segítségével meghatározható egy-egy előzetes árinformáció értéke. A különféle árbecslési módszerekkel kapcsolatban a modell alapján az alábbi következtetések vonhatók le:

1. Egyensúlyi helyzet akkor áll fenn, ha valamennyi termelő az általa alkalmazott árbecslési módszer révén az egyensúlyi árat anticipálja. Ebben a helyzetben egyik árbecslési módszer sem tekinthető jobbnak a másiknál.

2. Egyensúlytalanság esetén egy termelő annál kisebb profithoz jut, minél nagyobb hibával becsli az árat. Az egyes árbecslési módszerek értékelése nagymértékben függ a korábbi áringadozások mértékétől.

3. A (19), (20) és (24) egyenletekből jól látszik, hogy egy adott árbecslést alkalmazó termelő által elérhető termelő többlet annál nagyobb mértékben

közelíti a teljes információs esetben elérhető szintet, minél közelebb van a piac egyensúlyi helyzetéhez. Az egyensúlyi helyzettől való távolságot jól jellemzi a kereslet kínálattól való eltérése, amit a (4) egyenletben a szögletes zárójelben szereplő kifejezés reprezentál.

4. Az adaptív vagy extrapolatív árbecslés nem feltétlenül ad jobb eredményt, mint a statikus. Extrapolatív árbecslés esetén azonban a becslési paraméter egyszerűen megválasztható olymódon, hogy a termelői többlet illetve a profit meghaladja a statikus árbecslés mellett adódó értéket.

5. A stabilitás elegendő feltételét összehasonlítva Szidarovszky és Molnár (1994b) dolgozatának következtetéseivel, a B paraméter, tehát a vállalati kínálati függvény meredeksége tekintetében az eredmények azonossága figyelhető meg. Eszerint a B paraméter egyéb feltételek változatlansága mellett történő növelése a stabilitást nem változtatja meg. Más a helyzet a keresleti függvény meredeksége, a D paraméter vonatkozásában. Szidarovszky és Molnár eredményétől eltérően itt előfordulhat, hogy $|D|$ értékét növelve a (15) egyenlőtlenségek közül a bal oldali nem teljesül, ami a rendszer instabillá válását eredményezheti. A két modell stabilitási tulajdonságainak ezen eltérését a különféle árbecslési módszerek egyetlen modellbe építése magyarázza.

A fenti eredmények azon feltevés mellett kerültek levezetésre, mely szerint a fogyasztók teljesen informáltak az árakkal kapcsolatban. Bár e föltevés igen kézenfekvő, a modell a fogyasztói árbecslés különféle eseteire is kiterjeszthető.

Irodalom

1. Stoyan G. és Tako G. (1993) Numerikus módszerek, Eötvös Lóránd Tudományegyetem, Budapest.
2. Szidarovszky F. és A. T. Bahill (1992) Linear Systems Theory. CRC Press, Boca Raton/ London.
3. Szidarovszky F. és Molnár S. (1994a) Egy diszkrét dinamikus termelői-fogyasztói modell stabilitásáról. SZIGMA.
4. Szidarovszky F. és Molnár S. (1994b) Adaptív és extrapolatív becslések egy speciális diszkrét dinamikus termelői-fogyasztói modellben. SZIGMA.
5. Varian H. R. (1991) Mikroökonómia középfokon. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

ON THE VALUATION OF THE PRICE ESTIMATION METHODS ON BASIS OF THE MOLNÁR-SZIDAROVSZKY DISCRETE DYNAMIC MODEL

In the paper Molnár-Szidarovszky's dynamic producer-consumer model is extended as a dynamic market model, which can handle the different price estimation methods of the producers. Sufficient condition is derived for the stability of the corresponding system. The price estimation methods are compared on the basis of the reached producer surplus.

RELATÍV DEPRIVÁCIÓ ÉS SZEGÉNYSÉG: A JÖVEDELMI TRANSZFER DEPRIVÁCIÓS HATÁSA[1]

HAJDU OTTÓ
BKE Statisztikai Tanszék

1. Bevezetés

Egy társadalomban a szegénység fokának megítélésekor alapvető szempont a szegények létszámarányának, továbbá a szegények körében a jövedelmek szóródásának, a szegények jövedelemeloszlásának a figyelembevétele. A szegények jövedelmi eloszlásának egyik alapvető jellemzője átlagos jövedelmük szintjének a szegénységi küszöbhöz való viszonya, vagyis a szegénység intenzitása. Úttörő munkájában *Amartya Sen (1976)* hívta fel a figyelmet arra, hogy a szegénység mérése során – a szegénységi index összetevőjeként – figyelmet kell szentelnünk a szegények körében értelmezett jövedelmi szóródás mértékének is. A szóródás mértéke azonban többféle aspektusból is megközelíthető. Egyrészt kézenfekvő a jövedelmek szóródását jövedelmi egyenlőtlenségként, egyenlőtlenségi mutatóval jellemezni. A jövedelmek különbözőségéből fakadó érzetek jellemzésére másrészt az ún. *relatív depriváció*[2] jelenségének a vizsgálata is kínálkozik. Ugyanakkor mind a szegénységi, mind az egyenlőtlenségi mérőszámoknak eleget kell tenniük egy olyan követelményrendszernek, amely követelmények *axiomatikusan* azt mondják ki, hogy a jövedelmi viszonyokban bekövetkezett nevezetes elmozdulások hatására egy szegénységi mérőszámnak, illetve egy egyenlőtlenségi indexnek növekedést, csökkenést, vagy szinten maradást kell jeleznie. Az egyik leghangsúlyosabb axióma az ún. *transzfer axióma*, amely szerint egy *regresszív transzfer*[3] nyomán mind a szegénységi, mind az egyenlőtlenségi index értékének – egyéb feltételek változatlansága esetén – növekednie kell. Ez a követelmény azonban – mint az a későbbiekben látható lesz – a relatív deprivációs mérőszámokkal szemben ilyen egyértelműen nem rögzíthető. Ezen a ponton tehát fölmerül a kérdés, hogy a szegénység mérése során, a jövedelmi szóródásból következő

[1]Beérkezett 1995. november 5.

[2]Deprivation: valamitől való megfosztottság. A jelenség definiálását lásd a későbbiekben.

[3]Regresszívnek nevezzük a transzfert, ha a jövedelemátcsoportosítás során a transzfert adó és kapó jövedelme közti különbség növekszik.

fenti két jelenség közül melyiket számszerűsítsük. Ha ugyanis azt preferáljuk, hogy a szegénységi index megfeleljen a transzfer axiómának, akkor célszerű egyenlőtlenségi mértékkel jellemezni a szegények jövedelmeinek a szóródását. Ha ellenben az egyenlőtlenségnél tágabb értelmű relatív depriváció fokát akarjuk a szegénységi mértékben figyelembe venni, akkor föl kell adnunk azt a követelményt, hogy a szegénységi index minden körülmények között feleljen meg a transzfer axiómának. E probléma kapcsán jelen tanulmány alapvetően a regresszív jövedelmi transzfernek a relatív depriváció érzetére gyakorolt hatását vizsgálja, egy a szerző által javasolt újszerű deprivációs mérőszám tükrében.[4]

2. A jövedelmi transzfer hatása az egyenlőtlenség és a relatív depriváció fokára

Tekintsük egy n tagú társadalom egyedeinek a jövedelmeit tételesen felsoroló

$$Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_P, \ldots, Y_i, \ldots, Y_R, \ldots, Y_n)$$

eloszlást, ahol az egyes jövedelmek *nemcsökkenő* sorba rendezve követik egymást.[5] A jövedelemegyenlőtlenség és a relatív depriváció közötti különbségtétel érdekében tekintsük e két jelenség rövid meghatározását.

Jövedelmi egyenlőtlenség alatt egyszerűen azt az állapotot értjük, hogy az egyes jövedelmek szóródnak, nem egyenlők egymással. Adott összjövedelem mellett teljes egyenlőségről beszélnénk, ha valamennyi jövedelem egyenlő lenne egymással, és teljes egyenlőtlenségről, ha egyetlen személy mondhatná magáénak az összjövedelmet. Ezzel szemben a relatív depriváció egy összetettebb jelenség, amelynek tárgya nemcsak a jövedelem, hanem bármely "jószág" lehet. A relatív depriváció érzete két összetevő eredőjeként alakul ki. Az egyik a depriváció érzete, a másik pedig annak relatív megítélése. Egy adott jószág tekintetében deprivált személy *Runciman*-féle kritériumai az alábbiak:[6]

[4] Egy későbbi tanulmányában a szerző a szegénységi indexeknek egy olyan újszerű körét tárgyalja, mely a szegények jövedelmi szóródásának jellemzéseként éppen a fent említett új relatív deprivációs mértéket építi magába.

[5] Az egyes jövedelmek i indexe egyben az illető személyek *neveit* is jelenti. Mivel a jövedelmek között egyenlők is lehetnek, ezért a nevek nem rangszámként, hanem az eloszláson belüli sorszámként értelmezendők! A P és R elnevezések a *poorer* és *richer* megkülönböztetést szolgálják, de jövedelmük egyenlő is lehet. Bár a tanulmány a relatív deprivációt a szegénység mérése érdekében vizsgálja, a relatív deprivációra vonatkozó megállapításai a társadalom egészére is érvényesek.

[6] Lásd Runciman(1966).

(1) nem rendelkezik az illető jószággal, (2) más személyeket lát, akik ezen jószág birtokában vannak, (3) birtokolni akarja ezt a jószágot, (4) megvalósíthatónak tartja, hogy e jószág birtokába jusson.

A depriváció érzetére az (1) és (3) kritériumok utalnak, míg a koncepció relatív voltát a (2) és (4) feltételek nyújtják. A Runciman-féle megközelítés magában foglalja, hogy az emberek inkább a társadalom egyes csoportjaihoz, mint a társadalom egészéhez viszonyítják magukat. Azon egyének körét, amelyekhez i viszonyítja magát, i *referencia* csoportjának nevezzük. A relatív depriváció tárgya természetesen egy konkrét jövedelmi szint is lehet, s a relatív depriváció érzete ekkor a jövedelmek szóródásából fakad. Ha a relatív depriváció tárgya a jövedelem, akkor az Y_i nagyságú jövedelemmel rendelkező i személy *deprivált* mindazon $j \neq i$ egyénekkel szemben, akiknek a jövedelme legalább Y_i:[7]

$$\{ i \preceq j \mid Y_j \geq Y_i \} .$$

Az egyenlő jövedelműek egymással szembeni depriváltsága megállapodás szerint *zérus*, és köztük nincs értelme referencia csoportok elhatárolásának. Ebből következően i referencia csoportjába csak nála gazdagabb személyek tartozhatnak. Valamely személy tehát nála szegényebb személlyel szemben nem lehet deprivált, és a depriváltságot mindig az egyének közt értelmezzük. Amennyiben a zérus deprivációval jellemzett relációkat figyelmen kívül hagyjuk, úgy a *szűkített körű* deprivációs viszonylatokat definiáljuk:[8]

$$\{ i \prec j \mid Y_j > Y_i \} .$$

Tételezzük fel ezen a ponton, hogy az $\mathbf{Y}$ jövedelmi eloszlás egy regresszív transzfer nyomán az $\tilde{\mathbf{Y}}$ jövedelmi eloszlássá módosul úgy, hogy a regresszív transzfer a P egyéntől egy d *pozitív* jövedelmet a nála nem szegényebb $R > P$ személyhez csoportosít át:[9]

$$\tilde{Y}_i = Y_i \mid i \neq P, R$$

$$\tilde{Y}_P = Y_P - d$$

$$\tilde{Y}_R = Y_R + d .$$

Fölmerül ezen a ponton a kérdés, hogy a fenti regresszív transzfer miként befolyásolja a jövedelemegyenlőtlenség, és miként a relatív depriváció fokát.

[7] Az öndeprivációt nem értelmezzük. Ugyanakkor látható, hogy a konvencionális egyenlőtlenségi mértékek alkalmazása mögött az a feltevés húzódik meg, hogy a társadalom egésze képezi a referencia csoportot.

[8] Mivel az öndeprivációt nem értelmezzük, ezért mind az $i \prec j$, mind az $i \preceq j$ relációkból $i \neq j$ következik.

[9] Amennyiben szükséges, a transzfer nagyságát az $\tilde{Y}^{(d)}$ módon tüntetjük fel.

A transzfer hatásának a vizsgálata céljából célszerű a populációt két csoportra bontani: egyrészt azon személyekre, akiknek a jövedelmét nem érintette a transzfer, másrészt a transzfert adó és kapó P és R egyének kétfős csoportjára.

Egyfelől nyilvánvaló, hogy azok körében, akiknek a jövedelmét a transzfer nem érintette, mind az egyenlőtlenség, mind a relatív depriváció foka változatlan maradt, ugyanakkor a transzfert adó P és transzfert kapó R személy között mind az egyenlőtlenség, mind a relatív depriváció foka növekedett. A transzfer hatása szempontjából tehát az egyenlőtlenség és a relatív depriváció közötti alapvető különbség abban rejlik, hogy mit értünk a transzfer által érintett és nem érintett két népességcsoport *közötti* egyenlőtlenség, illetve relatív depriváció mértéke alatt.

Érthetjük egyrészt a két csoport összjövedelmének az egymáshoz való viszonyát, de érthetjük az egyedi jövedelmek egymáshoz való, minden lehetséges csoportközi párosítását figyelembevevő, átlagos viszonyát is. Az előbbi elv a csoportközi jövedelmi egyenlőtlenség számszerűsítésének megszokott elve, az utóbbi pedig a csoportközi relatív depriváció jellemzésére kínálkozik, mivel a relatív depriváció érzete alapvetően egyének közötti kategória.

A transzfer egyenlőtlenségi hatását tekintve, ha két csoport jövedelmi egyenlőtlensége alatt a két csoport összjövedelme közti egyenlőtlenséget értjük, akkor a két csoport közötti egyenlőtlenség esetünkben változatlan marad, mivel a transzfer az érintett P és R személyek jövedelmeinek az összegét változatlanul hagyja. Elfogadva továbbá, hogy az egyenlőtlenség az átlagos csoporton belüli, és a csoportközi egyenlőtlenség eredője, egy regresszív transzfer nyomán a teljes populációra vonatkozó egyenlőtlenség foka természetesen növekszik:[10]

Nem ilyen egyértelmű viszont a helyzet a relatív depriváció érzete esetében, mikor a transzfert adó és kapó két személyt a transzfer által érintetlen jövedelmek tulajdonosaival hasonlítjuk össze. Ekkor ugyanis mind a transzfert adó és kapó személy által, mind a velük szemben érzett depriváltság mértéke változik. E változások eredőjére természetesen az is befolyással van, hogy a transzfer eredményeként megváltozik-e az eloszlás *referencia csoportjainak a struktúrája.*

Az egyszerűség kedvéért első megközelítésben tekintsünk el a referencia csoportok struktúrájának a megváltozásától. Jelölje $d \in \underline{\mathbf{d}}$ a transzfer nagyságának azon *pozitív* tartományát, amely mellett a transzfert adó jövedelme nem süllyed nála szegényebb jövedelme alá, a transzfert kapóé pedig nem

[10] Dezaggregálható egyenlőtlenségi indexek esetében (pl. Atkinson index, entropia mutató, variancia) a változás iránya nyilvánvaló, azonban igaz ez bármely olyan mérőszám esetében is, amely bár nem dezaggregálható, de felírható a jövedelmek valamely konvex függvényének számtani átlagaként. (Ilyen pl. a Gini-index. A bizonyítást lásd Kakwani (1980): 67–68. old.)

emelkedik nála gazdagabbé fölé:[11]

$$\underline{d} = \{ 0 < d \leq \min(\overline{Y}_{\overline{P}} - \overline{Y}_{\overline{P}-1}, \overline{Y}_{\overline{R}+1} - \overline{Y}_{\overline{R}}) \} ,$$

ahol pl. $\overline{Y}_{\overline{P}}$ az előforduló, egymástól különböző, növekvő sorba rendezett jövedelmi *szintek* közül azt jelöli, amellyel a transzfert adó is rendelkezett a transzfer előtt.

Ez esetben a transzfert adó egyénnél szegényebbek által a transzfert adóval szemben érzett, valamint a transzfert kapó által érzett depriváltságok csökkennek, viszont a transzfert kapóval szemben, illetve a transzfert adó által érzett depriváltságok nőnek. E hatások eredőjeként egy regresszív transzfer nyomán a relatív depriváció érzetének foka – esetlegesen – növekedhet, de csökkenhet is. E probléma illusztrálására vegyük a Gastwirth-féle

$$GW = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i<j} \frac{|Y_i - Y_j|}{Y_i + Y_j}$$

egyenlőtlenségi mértéket[12] és az $\mathbf{Y} = (1, 4, 10, 20, 35)$ jövedelmi eloszlást, amelyre $GW = 0.6319$. Csoportosítsunk át 10 egységnyi transzfert a *4*. személytől az *5*. személyhez. Ezután $GW = 0.616$, vagyis e regresszív transzfer hatására a Gastwirth index *csökkenést* jelez.[13]

A depriváltság egyéni érzeteken alapuló jellegét méginkább hangsúlyozandó, elméletileg indokolt lenne a relatív depriváció tárgyaként nem a jövedelmet magát, hanem annak hasznosságát szerepeltetni. Másik megközelítésből azonban, mivel az egyének haszonfüggvényei különbözők, ezért az Y_P jövedelem birtokában P nem tudja megítélni a referencia csoportja egyetlen tagjának, így a transzfert kapóénak a depriváltsági érzetét sem. Következésképpen, a teljeskörű depriváltság mérése egy mindenkire közös haszonfüggvény érvényét feltételezné. Egy ilyen közös haszonfüggvény feltételezése mellett azonban, annak konkáv (esetleg konvex) volta különböző mértékű haszonváltozást eredményezne egy adott személy esetében egy transzfer nyomán pusztán attól függően, hogy az illető éppen a transzfert adó, vagy a transzfert kapó szerepét tölti-e be. E problémát megkerülendő, a továbbiakban –

---

[11]Természetesen a referencia csoportok struktúrája csak akkor marad teljesen változatlan, ha $d \in \underline{d}$ mellett az Y_P jövedelmi szinttel csak P, az Y_R jövedelmi szinttel pedig csak R bír. Ellenkező esetben P referencia csoportja az Y_P jövedelműekkel, az Y_R jövedelműek referencia csoportja pedig az R személlyel bővül.

[12]A mutató bevezetését lásd Gastwirth(1975). Gastwirth e mutatót egyenlőtlenségi mérőszámként javasolta, melynek legfőbb erénye, hogy csoportosított populáció esetén dezaggregálható, miközben analógiája a nem dezaggregálható Gini-féle egyenlőtlenségi mértéknek.

[13]A fenti gondolatmenet alapján fölmerül a kérdés, hogy a Gastwirth-index egyenlőtlenségi, vagy relatív deprivációs mérőszámnak tekinthető-e inkább.

speciális *lineáris* haszonfüggvényként – magukat a *jövedelmeket* tekintjük. Így a transzfert adó személy az $u(Y_P) - u(Y_P - d)$ haszoncsökkenését saját szemszögéből megítélve, egyben a transzfert kapó haszonnövekményeként is értelmezi, és így a vele szembeni depriváltsága változásában is ezt veszi figyelembe.

A fentieknek megfelelően az i egyénnek az $Y \geq Y_i$ jövedelemmel szembeni deprivációját jellemző $r(\cdot)$ deprivációs függvényét a jövedelmek függvényében definiáljuk, s úgy választjuk meg, hogy magasabb referencia jövedelemmel szemben magasabb legyen a depriváltsági érzet, de a határdepriváltság a jövedelmi szint növekedésével csökkenjen, s ez a csökkenés a jövedelmi szint növekedésével egyre nagyobb legyen.[14]

Lineáris haszonfüggvényt és konkáv deprivációs függvényt feltételezve, ekkor a jövedelmi transzfer által okozott *deprivációs* változásokkal szemben az alábbi követelmények teljesülését várjuk el $d \in \underline{\mathbf{d}}$ esetén:[15]

A deprivációs függvény konkáv volta miatt, a transzfert adóval szemben érzett depriváltságok csökkenése összességében haladja meg ugyanezen egyéneknek a transzfert kapóval szembeni depriváltságuk növekményét.

Mivel a depriváció tárgya a jövedelmi szint, ezért a transzfert kapó személy által érzett depriváltság csökkenését egyenlítse ki a transzfert adó által ugyanezen referencia személlyel szemben realizált növekedés.

Nyilvánvaló, hogy $d \in \underline{\mathbf{d}}$ esetén a relatív depriváció fokában a transzfer hatására bekövetkezett *globális* változás iránya attól függ, hogy a transzfert adónál szegényebbek (ha vannak ilyenek) depriváltságában mutatkozó csökkenés összességében túl tudja-e szárnyalni a többi deprivációs viszonylatban bekövetkezett növekedést.

Tegyük fel ezután, hogy a transzfer hatására vagy P valamely nála szegényebb alá, vagy R valamely nála gazdagabb fölé kerül a jövedelmi rangsorban. Ezzel együtt vagy a transzfert adó referencia csoportja bővül, vagy a transzfert kapó referencia csoportja szűkül. Ha mindkét hatás egyidejűleg bekövetkezik, akkor mindazoknak, akik bekerülnek P referencia csoportjába, megszűnik P-vel szembeni depriváltsága és megjelenik P velük szembeni depriváltsága. Ugyanakkor megjelenik mindazoknak az R-rel szembeni depriváltsága, akik kiesnek R referencia csoportjából, miközben eltűnik R velük szembeni depriváltsága. Látható tehát, hogy a jövedelmi transzfer deprivációt növelő vagy csökkentő hatása attól is függ, hogy a transzfer után a jövedelmi rangsorban P mennyivel kerül lejjebb, és R mennyivel feljebb.

[14]Feltesszük tehát, hogy az $r(Y)$ deprivációs függvény a társadalom minden tagjára azonos, és $r' > 0$, $r'' < 0$, $r''' > 0$. Ilyen függvény lehet pl. az $r(Y) = 1 - c/Y (Y > c)$ deprivációs függvény, ahol c egy konstans jövedelmi szint.

[15]E két követelmény indoklását a 3. tábla struktúrája szemlélteti.

3. A relatív depriváció mérése

A relatív depriváció mérésére *Yitzhaki(1979)* az átlagos jövedelmi szintnek, és a jövedelmek *Gini*-féle egyenlőtlenségi indexének a szorzatát javasolta:[16]

$$D_Y = \overline{Y}G$$

ahol

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$$

az átlagos jövedelem és

$$0 \leq G = \frac{1}{n^2}\sum_{i,j}|Y_i - Y_j| \leq 1 - \frac{1}{n}$$

a Gini-féle egyenlőtlenségi mutató. Nyilvánvaló, hogy egy regresszív transzfer nyomán a D_Y mérték növekszik, hiszen a jövedelmek átlagos szintje változatlan, miközben a Gini-index értéke – Dalton transzfer axiómáját kielégítve[17] – nö. E mérőszám szerint tehát a transzfer hatásaként a relatív depriváció érzetében bekövetkezett csökkenés nem szárnyalhatja túl a növekményt.

Ezzel szemben a fentiekben már példát láttunk arra (lásd Gastwirth-index), hogy regresszív transzfer hatására egy egyenlőtlenségi mutató értéke nem föltétlenül nő. Az alábbiakban azt vizsgáljuk, hogy milyen transzfer szituációk esetén jelzi egy relatív deprivációs mutató egy regresszív transzfer nyomán a relatív depriváció csökkenését, illetve növekedését.

Vezessük be ennek érdekében a relatív depriváció mérésére a *deprivációs hányad* fogalmát, mely valamennyi deprivációs viszonylat alapján százalékos formában azt fejezi ki, hogy a depriváltszemélyek a javaknak átlagosan mekkora hányadával szemben depriváltak. Amennyiben a jövedelem a relatív depriváció tárgya, úgy deprivációs hányadként a *deprivációs jövedelmi hányad* mutatót számítjuk, mely az egyes jövedelmeket hasonlítja egymáshoz relatív módon valamennyi deprivációs viszonylatban, azt számszerűsítve, hogy a szegényebbek jövedelmei a gazdagabbak jövedelmeinek *átlagosan* hány százalékával maradnak el a gazdagabbak jövedelmi szintjétől:

$$\overline{Q}(\mathbf{Y}) = \overline{Q} = \frac{1}{N}\sum_{i \preceq j}\left(1 - \frac{Y_i}{Y_j}\right)$$

---

[16]A levezetést lásd Yitzhaki(1979).
[17]Lásd Dalton(1920).

ahol

$$N = n(n-1)/2$$

az összehasonlítások száma, és $Y_i \leq Y_j$. E mutató az egyenlő jövedelműek közötti zérus deprivációt is tartalmazza.[18]

A deprivációs jövedelmi hányad adott esetben csökkenhet is egy regresszív transzfer után. Tekintsük ugyanis a már alkalmazott $\mathbf{Y}_1 = (1,4,10,20,35)$ jövedelmi eloszlást, amelyre $\overline{Q} = 0.75$, valamint az $\mathbf{Y}_2 = (1, 4, 10, 34, 35)$ eloszlást, amelyre $\overline{Q} = 0.74088$. Módosítsuk továbbá a fenti eloszlásokat különböző nagyságú jövedelmi transzferekkel, a jövedelemtulajdonosok valamennyi párosítását tekintve. A transzferált eloszlások deprivációs jövedelmi hányadait $\mathbf{Y}_1$ esetén az *1. tábla*, $\mathbf{Y}_2$ esetén pedig a *2. tábla* közli.[19] A táblákban a deprivációs jövedelmi hányadok d növelése mellett addig kerültek kiszámításra, amíg a transzfert adó jövedelme nem vált negatívvá, illetve aláhúzás határolja el d azon tartományát, amely mellett a jövedelmi rangsor még változatlan marad. Emellett kiemelten jelennek meg azok a d értékek, amelyek a deprivációs jövedelmi hányadnak a $d = 0$ *eredeti állapothoz* viszonyított magasabb értékét az alacsonyabbtól elválasztja.

Az 1. és 2. táblák eredményei alapján az alábbi tendenciák rajzolódnak ki. Mindaddig, míg a transzfer a jövedelmi rangsort változatlanul hagyja:

- Ha a transzfert adónál nincsenek szegényebbek a jövedelmi rangsorban ($P = 1$), akkor a deprivációs jövedelmi hányad értéke a transzfer növekedésével együtt minden esetben nő, de ez a növekedés annál csekélyebb mértékű, minél közelebb van a rangsorban a transzfert kapó a transzfert adóhoz.

- Amennyiben viszont a transzfert adó nem a legszegényebb, úgy a deprivációs jövedelmi hányad csökkenése is lehetséges, mégpedig kétféle módon. Egyrészt úgy, hogy d fokozatos növelésével először a deprivációs jövedelmi hányad is nő, majd elérve egy maximumot, attól kezdve csökken a $d = 0$ eredeti állapothoz tartozó szintre, majd az eredeti állapothoz képest is csökken. Ez a helyzet pl. az 1. táblában a $(P, R) = (2,3), (2,4), (2,5)$ transzfer pozícióknál a $d \leq 3$ tartományon, a $(P, R) = (3,4), (3,5)$ relációkban a $d \leq 6$ tartományon, végül a $(P, R) = (4,5)$ párosításban a $d \leq 10$ tartományon. Másrészt a deprivációs jövedelmi hányad a $d = 0$ szintről indulva, d növelésével rögtön elkezdhet csökkeni. Ez történik a 2. táblában a $(P, R) = (3,4)$ relációban, a $d \leq 1$ tartományon.

[18] Jelen mutatót más megközelítésből már tárgyalta Hajdu(1986).

[19] Természetesen a deprivációs jövedelmi hányad értékeit a transzfer után újólag sorbarendezett jövedelmek felhasználásával határoztuk meg.

1. tábla: $\overline{Q}(\tilde{\mathbf{Y}})$ *értékek az* $\mathbf{Y}_1 = (1,4,10,20,35)$ *eloszlásra,* $\overline{Q}(\mathbf{Y}_1) = 0.75$

	A transzfert adó és kapó személyek *(P,R)*									
d	1,2	1,3	1,4	1,5	2,3	2,4	2,5	3,4	3,5	4,5
0.2	.7559	.7579	.7587	.7591	.7516	.7524	.7528	.7507	.7511	.7504
0.4	.7614	.7658	.7674	.7683	.7530	.7546	.7555	.7513	.7522	.7507
0.6	.7663	.7735	.7761	.7774	.7541	.7567	.7580	.7519	.7532	.7510
0.8	.7708	.7811	.7847	.7865	.7549	.7585	.7602	.7524	.7541	.7513
1.0	.7750	.7886	.7933	.7955	.7553	.7600	.7622	.7528	.7550	.7516
1.2					.7554	.7612	.7639	.7531	.7558	.7518
1.4					.7550	.7620	.7652	.7533	.7565	.7520
1.6					.7540	.7623	.7661	.7534	.7572	.7522
1.8					.7524	.7620	.7663	.7535	.7578	.7524
2.0					*.7500*	.7609	.7658	.7534	.7583	.7525
2.2					.7465	.7588	.7643	.7532	.7587	.7526
2.4					.7415	.7552	.7613	.7530	.7590	.7526
2.591					.7349	*.7500*	.7567	.7526	.7592	.7526
2.6					.7345	.7497	.7564	.7526	.7593	.7526
2.768					.7263	.7428	*.7500*	.7521	.7594	.7526
2.8					.7245	.7412	.7485	.7520	.7594	.7526
3.0					.7096	.7278	.7358	.7514	.7594	.7525
3.2					.7314	.7511	.7597	.7506	.7592	.7525
3.333					.7458	.7667	.7757	*.7500*	.7591	.7524
3.4					.7531	.7744	.7837	.7497	.7589	.7523
3.6					.7747	.7977	.8076	.7486	.7585	.7522
3.8					.7963	.8209	.8316	.7473	.7579	.7520
4.0					.8179	.8442	.8555	.7458	.7572	.7518
5.0								.7350	*.7500*	*.7500*
6.0								.7154	.7343	.7471
6.5								.7268	.7477	.7452
7.0								.7370	.7600	.7429
7.5								.7452	.7703	.7403
8.0								*.7500*	.7772	.7372
8.5								.7480	.7774	.7336
9.0								.7293	.7609	.7295
9.5								.7939	.8277	.7248
10								.8583	.8944	.7194
15										.7350
20										.8977

2. tábla: $\overline{Q}(\tilde{\mathbf{Y}})$ *értékek az* $\mathbf{Y}_2 = (1, 4, 10, 34, 35)$ *eloszlásra,* $\overline{Q}(\mathbf{Y}_2) = 0.74088$

	A transzfert adó és kapó személyek *(P,R)*									
d	1,2	1,3	1,4	1,5	2,3	2,4	2,5	3,4	3,5	4,5
0.2	.7468	.7488	.7487	.7498	.7425	.7424	.7435	.7407	.7418	.7420
0.4	.7522	.7566	.7566	.7588	.7439	.7438	.7460	.7405	.7427	.7431
0.6	.7572	.7644	.7644	.7677	.7450	.7450	.7483	.7402	.7435	.7441
0.8	.7617	.7720	.7722	.7766	.7457	.7459	.7503	.7398	.7442	.7452
1.0	.7659	.7795	.7800	.7855	.7462	.7467	.7521	.7394	.7449	.7462
1.2					.7462	.7482	.7536	.7401	.7455	.7472
1.4					.7458	.7494	.7548	.7407	.7461	.7482
1.6					.7449	.7500	.7554	.7412	.7466	.7492
1.8					.7433	.7502	.7555	.7417	.7469	.7501
2.0					*.7409*	.7495	.7547	.7420	.7472	.7511
2.2					.7374	.7478	.7530	.7423	.7474	.7520
2.4					.7324	.7447	.7498	.7424	.7475	.7529
2.6					.7254	.7396	.7447	.7425	.7476	.7538
2.705					.7206	.7358	*.7409*	.7425	.7475	.7543
2.8					.7154	.7315	.7366	.7424	.7475	.7547
3.0					.7005	.7187	.7236	.7423	.7472	.7556
3.2					.7222	.7425	.7474	.7420	.7469	.7564
3.4					.7439	.7663	.7711	.7415	.7464	.7572
3.6					.7656	.7900	.7948	.7409	.7457	.7580
3.8					.7872	.8138	.8186	.7401	.7449	.7588
4.0					.8087	.8375	.8423	.7392	.7439	.7596
4.459								.7362	*.7409*	.7613
5.0								.7310	.7356	.7633
6.0								.7143	.7186	.7665
7.0								.7389	.7431	.7694
8.0								.7550	.7591	.7719
9.0								.7375	.7414	.7741
10								.8698	.8736	.7758
15										.7780
20										.7651
23.286										*.7409*
24										.7326
26										.7448
28										.7483
30										.7308
32										.7796
34										.9032

- Minél közelebb van a transzfert adó a transzfert kapóhoz, annál szélesebb d azon tartománya, amelyre a deprivációs jövedelmi hányad értéke az eredeti állapothoz képest csökken.

Abban az esetben, mikor a transzfer nagysága miatt a jövedelemtulajdonosok rangpozíciója megváltozik, a deprivációs jövedelmi hányad növekedése és csökkenése d függvényében váltogathatja egymást, tehát a csökkenés a transzfer nagyságának több tartományán is bekövetkezhet. Ezt tapasztaljuk az 1. táblában a $(P, R) = (3, 4)$ párosításban, a $d \geq 8$ tartományon.

4. A deprivációs jövedelmi hányad tulajdonságai

Az alábbiakban a deprivációs jövedelmi hányadnak a regresszív jövedelmi transzferre való érzékenységét vizsgáljuk a transzfer nagyságának, illetve a transzfert adó és kapó személyek jövedelmének, továbbá rangpozíciójának a függvényében. Az egyszerűbb tárgyalásmód kedvéért a deprivációs jövedelmi hányadnak nem az átlagos, hanem az összesített

$$Q = \sum_{i \preceq j} \left(1 - \frac{Y_i}{Y_j}\right)$$

értékében mutatkozó változás körülményeit elemezzük. Az egyszerűség kedvéért továbbá első megközelítésben a transzfereknek csak a $d \in \underline{\mathrm{d}}$ tartományát értelmezzük.

Tekintsük ennek érdekében – rögzített P és R egyének közötti d transzfer végrehajtása után – Q értékének az egyedi, páronkénti depriváltságokra bontott, 3. táblában megjelenő struktúráját![20] A $d = 0$ eset a transzfer előtti állapotot jelenti, s így az azzal való összehasonlítást teszi lehetővé.

Figyelembe véve, hogy a transzfert adó személynek a transzfert kapónál gazdagabbakkal szembeni depriváltsága növekményét éppen *kiegyenlíti* a transzfert kapó depriváltságának a csökkenése, a $d \in \underline{\mathrm{d}}$ megszorítás mellett a

[20] Bár az egymással egyenlő jövedelmek tetszőleges sorrendben követhetik egymást, nem megy az általánosság rovására, ha a P és R személyek sorszámát úgy rögzítjük, hogy P a *legkisebb* legyen az Y_P jövedelműek, R pedig a *legnagyobb* az Y_R jövedelműek sorában, ha e jövedelmi szintekkel többen is rendelkeznek. A transzfer után ugyanis úgyis ez az elrendezés alakul ki.

transzfer hatására a Q mutató értékében bekövetkezett változás mértéke:

$$f(d) = Q(\mathbf{Y}) - Q(\tilde{\mathbf{Y}}) = \sum_{i \prec P}(1 - \frac{Y_i}{Y_P}) + \sum_{i \preceq R}(1 - \frac{Y_i}{Y_R}) + \sum_{P \preceq j \preceq R}(1 - \frac{Y_P}{Y_j}) -$$
$$\Big(\sum_{i \prec P}(1 - \frac{Y_i}{Y_P - d}) + \sum_{i \preceq R}(1 - \frac{Y_i}{Y_R + d}) + \frac{d}{Y_R + d} + \sum_{P \preceq j \preceq R}(1 - \frac{Y_P - d}{Y_j})\Big). \tag{1}$$

3. tábla: A $Q(\tilde{\mathbf{Y}})$ mutató struktúrája a regresszív transzfer nyomán

$\tilde{\mathbf{Y}}$	Y_2	$\dots$	$Y_P - d$	$\dots$	$Y_R + d$	$\dots$	Y_n
Y_1	$1 - \frac{Y_1}{Y_2}$	$\dots$	$1 - \frac{Y_1}{Y_P - d}$	$\dots$	$1 - \frac{Y_1}{Y_R + d}$	$\dots$	$1 - \frac{Y_1}{Y_n}$
$\vdots$			$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
Y_{P-1}			$1 - \frac{Y_{P-1}}{Y_P - d}$	$\dots$	$1 - \frac{Y_{P-1}}{Y_R + d}$	$\dots$	$1 - \frac{Y_{P-1}}{Y_n}$
$Y_P - d$			0	$\dots$	$1 - \frac{Y_P - d}{Y_R + d}$	$\dots$	$1 - \frac{Y_P - d}{Y_n}$
Y_{P+1}				$\dots$	$1 - \frac{Y_{P+1}}{Y_R + d}$	$\dots$	$1 - \frac{Y_{P+1}}{Y_n}$
$\vdots$					$\vdots$		$\vdots$
Y_{R-1}					$1 - \frac{Y_{R-1}}{Y_R + d}$	$\dots$	$1 - \frac{Y_{R-1}}{Y_n}$
$Y_R + d$					0	$\dots$	$1 - \frac{Y_R + d}{Y_n}$
Y_{R+1}						$\dots$	$1 - \frac{Y_{R+1}}{Y_n}$
$\vdots$							$\vdots$
Y_{n-1}							$1 - \frac{Y_{n-1}}{Y_n}$

A deprivációs jövedelmi hányad értékében a regresszív transzfer hatására bekövetkezett változás irányát – csökkenését, szinten maradását vagy növekedését – $f(d)$ előjele, illetve zérus volta jelzi. Q transzferérzékenységének a vizsgálata tehát az $f(d)$ függvény vizsgálatát igényli. Mivel $f(0) = 0$, ezért $f(d)$ *Maclaurin*-sorba fejtésével

$$f(d) = a_1 d + a_2 d^2 + a_3 d^3 + a_4 d^4 + \ldots + \varepsilon = \tag{2}$$

$$f'(0)d + \frac{1}{2!}f^{(2)}(0)d^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(0)d^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(0)d^4 + \ldots + \varepsilon \tag{3}$$

ahol $f'(0)$ és $f^{(k)}(0)$ az $f(d)$ függvény d szerinti első, illetve magasabb rendű deriváltjainak a $d = 0$ helyen vett értékeit jelenti. A sorbafejtés érdekében tekintsük a $\partial f(d)/\partial d$ deriváltakat:

$$f'(d) = \frac{1}{(Y_P - d)^2}\sum_{i\prec P} Y_i - \frac{1}{(Y_R + d)^2}\sum_{i\preceq R} Y_i - \frac{Y_R}{(Y_R + d)^2} - \sum_{P\preceq j\preceq R}\frac{1}{Y_j} \quad (4)$$

$$f^{(2)}(d) = \frac{2}{(Y_P - d)^3}\sum_{i\prec P} Y_i + \frac{2}{(Y_R + d)^3}\Big(\sum_{i\preceq R} Y_i + Y_R\Big)$$

vagy az elsőnél magasabb fokú deriváltak általában[21]

$$f^{(k)}(d) = \frac{k!}{(Y_P - d)^{k+1}}\sum_{i\prec P} Y_i + (-1)^k\frac{k!}{(Y_R + d)^{k+1}}\Big(\sum_{i\preceq R} Y_i + Y_R\Big) \quad (k > 1) \quad (5)$$

A (4) és (5) szerinti deriváltakat a (3) egyenletbe helyettesítve $f(d)$ egy végtelen sor formájában is felírható, amelynek összege éppen $f(d)$:

$$f(d) =$$

$$f'(0)d + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{Y_P^{k+1}}\sum_{i\prec P} Y_i + (-1)^k\frac{1}{Y_R^{k+1}}\Big(\sum_{i\preceq R} Y_i + Y_R\Big)\right)d^k = \quad (6)$$

$$d\Bigg[f'(0) + \sum_{k=2,4,6}^{\infty}\Bigg(\Big(\frac{d^{k-1}}{Y_P^{k+1}} + \frac{d^{k-1}}{Y_P^{k+1}}\frac{d}{Y_P}\Big)\sum_{i\prec P} Y_i +$$

$$\Big(\frac{d^{k-1}}{Y_R^{k+1}} - \frac{d^{k-1}}{Y_R^{k+1}}\frac{d}{Y_R}\Big)\Big(\sum_{i\preceq R} Y_i + Y_R\Big)\Bigg)\Bigg] = \quad (7)$$

$$d\Bigg[f'(0) + \frac{1}{Y_P^2}\sum_{i\prec P} Y_i\Big(1 + \frac{d}{Y_P}\Big)\sum_{k=2,4,6}^{\infty}\Big(\frac{d}{Y_P}\Big)^{k-1} +$$

$$\frac{1}{Y_R^2}\Big(\sum_{i\preceq R} Y_i + Y_R\Big)\Big(1 - \frac{d}{Y_R}\Big)\sum_{k=2,4,6}^{\infty}\Big(\frac{d}{Y_R}\Big)^{k-1}\Bigg] = \quad (8)$$

$$d\big[f'(0) + \Sigma_P + \Sigma_R\big] \quad (9)$$

ahol $d \in \underline{\mathbf{d}}$ mellett $\Sigma_P + \Sigma_R$ mindig pozitív, és

$$f'(0) = \frac{1}{Y_P^2}\sum_{i\prec P} Y_i - \frac{1}{Y_R^2}\sum_{i\preceq R} Y_i - \frac{1}{Y_R} - \sum_{P\preceq j\preceq R}\frac{1}{Y_j} \quad (10)$$

[21] Vegyük észre, hogy $f^{(2)}(0 < d < Y_P) > 0$ mindig teljesül, tehát $f(d \in \underline{\mathbf{d}})$ mindig konvex, és $f'(d \in \underline{\mathbf{d}})$ mindig növekvő!

független a d transzfer nagyságától.

Nézzük ezután, hogy miként függ $f(d)$ előjele és mértéke d nagyságától. Tekintsük elsőként $f(d)$ *előjelének* a kérdését!

Látható, hogy $f'(0) \geq 0$ esetén $f(d) > 0$, vagyis ez esetben bármely $d \in \underline{\mathbf{d}}$ mellett Q *csökken* a transzfer előtti állapothoz képest. Ezzel szemben $f'(0) < 0$ esetén $f(d)$ pozitív és negatív is lehet, $f'(0)$ abszolút értékének, és d értékének megfelelően. Következésképpen Q növekedésének szükséges, de nem elégséges feltétele $f'(0)$ negatív volta, amely mellett még meg kell keresnünk d-nek azon tartományát, amelyre $f(d)$ is negatív, mert csak ez esetben fogja a deprivációs jövedelmi hányad egy regresszív transzfer nyomán a relatív depriváltság fokának növekedését jelezni.

Vizsgáljuk meg elsőként, hogy milyen tényezőktől függ $f'(0)$ előjele. A kérdéses előjelet az adott $\mathbf{Y}$ jövedelmi eloszlásra vonatkozóan a P és R személyeknek a jövedelmi rangsorban elfoglalt pozícióinak, továbbá az Y_P és Y_R jövedelmeik értékeinek az egymáshoz való viszonya határozza meg. A rangpozíciókat illetően pl., ha nincsenek a transzfert adó P személynél szegényebbek a populációban, vagyis $P \preceq j$ bármely j-re, akkor a transzfert adóval szemben nem lép fel depriváltsági csökkenés, miközben a transzfert kapó által érzett depriváció csökkenést éppen kiegyenlíti a transzfert adó által a transzfert kapónál gazdagabbakkal szemben érzett depriváció növekedése, tehát a Q mérőszám értéke biztosan növekszik ebben az esetben, függetlenül a transzfert kapó R pozíciójától.[22] Ha viszont vannak, akik depriváltak a transzfert adóval szemben, akkor $f'(0)$ előjele kérdéses. Ekkor a P és R személyek pozícióinak a rögzítésével egyben azok referencia csoportjait is rögzítjük, a megfelelő konkrét jövedelmekkel egyetemben. Mindezek birtokában $f'(0)$ előjelét Y_P és Y_R egymáshoz való viszonya szabályozza, hiszen adottnak véve pl. az Y_P jövedelmi szintet, Y_R értékének megfelelő megválasztásával $f'(0)$ előjele – esetlegesen – átváltható. Rögzítsük tehát P és Y_P értékét, majd keressünk olyan Y_{R_0} *küszöbértéket*, amelyre $f'(0) = 0$. A zérushely meghatározása érdekében tekintsük a

$$g(Y_R) = f'(0) Y_P Y_R^2 = \Big(\sum_{i \prec P} \frac{Y_i}{Y_P} - \sum_{P \preceq j \preceq R} \frac{Y_P}{Y_j}\Big) Y_R^2 - Y_P Y_R - Y_P \sum_{i \preceq R} Y_i \quad (11)$$

függvényt, amely Y_R tekintetében másodfokú, és pozitív zérushelyének léte a

$$C = \sum_{i \prec P} \frac{Y_i}{Y_P} - \sum_{P \preceq j \preceq R} \frac{Y_P}{Y_j} \quad (12)$$

[22] Ez abból is látszik, hogy ekkor a transzfert adónál szegényebbek ($i \prec P$) köre üres halmaz, ebből következően a (4) formula szerinti $f'(d \in \underline{\mathbf{d}})$ biztosan negatív, tehát az $f(d)$ függvény a $d \in \underline{\mathbf{d}}$ tartományon csökkenő, és $f(0) = 0$ miatt negatív.

együttható előjelének a függvénye. Láthatóan C jelentése nem más, mint az $i \preceq R$ személyek körében a transzfert adóval szemben, illetve az általa *eliminált depriváció egyenlege.*[23] Ha ez az egyenleg nem pozitív, akkor $g(Y_R)$ mindig negatív, s így Y_R értéke közömbös $f'(0)$ előjele szempontjából: ekkor $f(d)$ előjelét d értéke dönti el.[24]

Ezzel szemben $C > 0$ mellett $g(Y_R)$ pozitív gyöke[25]

$$Y_{R_0} = \frac{Y_P + \sqrt{Y_P^2 + 4CY_P \sum_{i \preceq R} Y_i}}{2C}$$

és ekkor

$$f'(0 \mid Y_R = Y_{R_0}) = 0$$

$$f'(0 \mid Y_R > Y_{R_0}) > 0$$

és

$$f'(0 \mid Y_R < Y_{R_0}) < 0\,.$$

Amikor tehát $Y_R \geq Y_{R_0} \mid C > 0$, akkor $f'(0) \geq 0$, amiből egyrészt az következik, hogy ez esetben a mindig konvex $f(d)$ függvény pozitív[26], másrészt pedig, hogy a d növelésével mindig növekvő $f'(d > 0)$ is pozitív, tehát $f(d)$ pozitív és növekvő, vagyis a deprivációs jövedelmi hányad *alacsonyabb* a transzfer előtti szintnél és $d \in \underline{\mathbf{d}}$ növelésével *gyorsuló ütemben csökkenő*, tekintet nélkül a transzfer nagyságára mindaddig, míg a transzfer nem okoz rangpozíció változást.

Minden más esetben – mikor $Y_R < Y_{R_0} \mid C > 0$, vagy $C \leq 0$ – akkor Q értéke $f'(0) < 0$ miatt növekedhet is, de csökkenhet is a transzfer előtti állapothoz képest, d értékének megfelelő megválasztása mellett.

Nézzük tehát, hogy $f'(0) < 0$ esetén mely d_0 érték(ek)re teljesül az $f(d_0) = 0$ egyenlőség. A triviális megoldás természetesen $d_0 = 0$. A triviálistól különböző $d_0 \in \underline{\mathbf{d}}$ gyök(ök) meghatározásához alapvető fontosságú, hogy az $f(d)$ függvénynek a $d \in \underline{\mathbf{d}}$ tartományon vett zérushelye egybeesik a d-ben *harmadfokú*

$$h(d) = f(d)(Y_P - d)(Y_R + d) \tag{13}$$

---

[23]A továbbiakban C értékére mint P eliminációs egyenlegére hivatkozunk.

[24]Ez az egyenleg biztosan nem pozitív, ha a transzfert adónál nincsenek szegényebbek a társadalomban, és zérus, ha emellett a transzfert adó és kapó személyek szomszédos helyet foglalnak el a rendezett jövedelmi eloszlásban.

[25]A másik gyök természetesen 0, amit nem értelmezünk. Ugyanakkor az eliminációs egyenleg biztosan pozitív, ha vannak szegényebbek a transzfert adónál a populációban, miközben a transzfert adó és kapó szomszédosak a jövedelmi rangsorban.

[26]Mivel (9)-ben $\Sigma_P + \Sigma_R$ mindig pozitív.

polinom $d_0 \neq Y_P$ zérushelyével, mivel vizsgálatunkban $(Y_P - d)(Y_R + d) \neq 0$. Keressük tehát $h(d)$ zérushelyét. Mivel $h(0) = 0$, ezért sorbafejtéssel

$$h(d) = b_1 d + b_2 d^2 + b_3 d^3 = d(b_1 + b_2 d + b_3 d^2) , \tag{14}$$

amelynek együtthatói (1)-ből egyszerű átalakítások, átrendezések után:

$$b_1 = \frac{Y_R}{Y_P} \sum_{i \prec P} Y_i - \frac{Y_P}{Y_R} \sum_{i \preceq R} Y_i - Y_P - Y_P Y_R \sum_{P \preceq j \preceq R} \frac{1}{Y_j} \tag{15}$$

$$b_2 = \frac{1}{Y_P} \sum_{i \prec P} Y_i + \frac{1}{Y_R} \sum_{i \preceq R} Y_i + 1 + (Y_R - Y_P) \sum_{P \preceq j \preceq R} \frac{1}{Y_j} \tag{16}$$

$$b_3 = \sum_{P \preceq j \preceq R} \frac{1}{Y_j} . \tag{17}$$

Mivel $b_2 > 0$ és $b_3 \geq 0$, ezért $d_0 \in \underline{\mathbf{d}}$ gyök csak $b_1 < 0$ esetén lehetséges. Ugyanakkor nem nehéz észrevenni, hogy

$$b_1 = h'(0) = f'(0) Y_P Y_R , \tag{18}$$

vagyis rögzített Y_P mellett mikor $f'(0)$ negatív, akkor b_1 is negatív. Ekkor pedig, feltéve, hogy $b_3 > 0$, a keresett $d_0 \in \underline{\mathbf{d}}$ gyök a

$$b_1 + b_2 d + b_3 d^2 = 0 \tag{19}$$

egyenlet megoldásaként adódik, ahol $b_1 < 0$, $b_2 > 0$ és $b_3 \geq 0$.

Mivel ez esetben $f'(0) < 0$, $f(0) = f(d_0) = 0$, és $f(d)$ mindig konvex, ezért a $0 < d < d_0$ tartományon $f(d)$ negatív és minimumhelye, a deprivációs jövedelmi hányadnak pedig *maximumhelye* van. Mivel továbbá $b_2 > 0$ és $b_3 \geq 0$, ezért a $(d > d_0) \in \underline{\mathbf{d}}$ tartományon $f(d)$ pozitív és növekvő, ami azt jelenti, hogy e tartományon a deprivációs jövedelmi hányad *alacsonyabb* a transzfer előtti szinthez képest, és *csökkenő*.

Speciális esetben, mikor a transzfert adó és kapó *szomszédos* helyet foglalnak el a jövedelmi rangsorban, akkor $b_3 = 0$, és így

$$d_0 = -\frac{b_1}{b_2} = Y_P - Y_R \frac{\sum_{i \prec P} Y_i}{\sum_{i \prec P} Y_i + Y_P} .$$

Ekkor pedig a kritikus d_0 értéket az alábbi tényezők növelik:

- egyrészt a transzfert adónál szegényebbek összjövedelmét adottnak véve Y_P növelése és Y_R csökkenése,

- másrészt a transzfert adó és kapó személyek jövedelmeit rögzítve a transzfert adónál szegényebbek összjövedelmének a csökkenése.

A fenti jellemzőknek az $\mathbf{Y}_1$ és $\mathbf{Y}_2$ eloszlások esetén számított értékeit a *4, 5. táblák* közlik. (Az e táblákban foglaltak összhangban vannak az 1. és 2. táblák tartalmával.)

4. tábla Az $f(d)$ függvény vizsgálata az $\mathbf{Y}_1 = (1,4,10,20,35)$ jövedelmi eloszlás esetén

P,R	C	Y_{R_0}	b_1	b_2	b_3	$(d_0 \neq Y_P) \in \underline{\mathbf{d}}$
1,2	0	-	-1.25	1.25	0	-
1,3	-0.25	-	-4	3.75	0.25	-
1,4	-0.35	-	-8.75	8.4	0.35	-
1,5	-0.40	-	-16	15.6	0.4	-
2,3	0.25	20	-3.5	1.75	0	2
2,4	-0.15	-	-10	3.6	0.1	2.59126
2,5	-0.35	-	-20.25	6.9	0.15	2.768197
3,4	0.50	30	-7.5	2.25	0	3.333333
3,5	0	-	-20	3.75	0.05	5
4,5	0.75	46.66666	-13.75	2.75	0	5

5. tábla Az $f(d)$ függvény vizsgálata az $\mathbf{Y}_2 = (1,4,10,34,35)$ jövedelmi eloszlás esetén

P,R	C	Y_{R_0}	b_1	b_2	b_3	$(d_0 \neq Y_P) \in \underline{\mathbf{d}}$
1,2	0	-	-1.25	1.25	0	-
1,3	-0.25	-	-4	3.75	0.25	-
1,4	-0.35	-	-13.34118	12.99118	0.35	-
1,5	-0.3794	-	-15.67942	15.3	0.379412	-
2,3	0.25	20	-3.5	1.75	0	2
2,4	-0.15	-	-10.8647	4.69118	0.1	-
2,5	-0.2676	-	-18.96768	6.661772	0.129412	2.7050918
3,4	0.5	30	2.58823	1.94118	0	-
3,5	0.2059	78.7822	-16.7942	3.6353	0.029412	4.4588994
4,5	0.4412	111.0667	-66.15882	2.84118	0	23.28568

Vegyük észre, hogy ha a transzfer a $(P,R) = (3,4)$ személyek jövedelmeit érinti, akkor a transzfert kapó kritikus Y_{R_0} szintje mindkét eloszlás esetén *30*, C értéke pedig mindkét eloszlás esetén *pozitív* ($C = 0.5$), viszont a transzfert kapó $R = 4$ személy jövedelme az $\mathbf{Y}_1$ eloszlásban *20*, vagyis alacsonyabb, az $\mathbf{Y}_2$ eloszlásban pedig *34*, vagyis magasabb, mint a kritikus érték. Ez a magyarázata annak, hogy a $(P,R) = (3,4)$ relációban a deprivációs jövedelmi hányad értéke d pozitív környezetében $\mathbf{Y}_1$ esetén *(1. tábla)* növekedni, $\mathbf{Y}_2$ esetén pedig *(2. tábla)* csökkenni kezd.

Az eddigiekből az is látható továbbá, hogy a relatív depriváció fokában bekövetkezett változás mértéke nemcsak a transzfer nagyságának, hanem a *jövedelmi eloszlás struktúrájának* és a transzfer által érintett jövedelmek *rangpozícióinak* is függvénye. Tekintsük egyrészt (8) és (10) alapján az

$$f(d)/d = (w_P - w_R)\sum_{i\prec P} Y_i - w_R\left(\sum_{P\preceq i\preceq R} Y_i + Y_P + Y_R\right) - \sum_{P\preceq i\preceq R}\frac{1}{Y_i} \quad (20)$$

kifejezést, ahol

$$w_P = \frac{1}{Y_P^2}\left(1 + \left(1 + \frac{d}{Y_P}\right)\sum_{k=2,4,6}^{\infty}\left(\frac{d}{Y_P}\right)^{k-1}\right),$$

$$w_R = \frac{1}{Y_R^2}\left(1 - \left(1 - \frac{d}{Y_R}\right)\sum_{k=2,4,6}^{\infty}\left(\frac{d}{Y_R}\right)^{k-1}\right).$$

Rögzített d transzfer, valamint rögzített (P,R) személyek és (Y_P, Y_R) jövedelmek mellett – fölismerve, hogy mind $(w_P - w_R)$, mind w_R pozitív – a transzfer által *nem érintettek* oldaláról, egyéb feltételek változatlansága esetén a deprivációs jövedelmi hányad csökkenését az alábbi tényezők növelik:

- ha minél több olyan $i \prec P$ személy van, aki a transzfert adóval szemben deprivált, és, ha e személyek minél kevésbé depriváltak a transzfert adóval szemben,
- ha a transzfert adó és kapó *szomszédos* helyet foglalnak el a jövedelmi rangsorban.

Képezve másrészt az $f(d)$ függvény Y_P és Y_R szerinti parciális deriváltjait:

$$\frac{\partial f(d)}{\partial Y_P} = \left(\frac{1}{Y_P^2} - \frac{1}{(Y_P-d)^2}\right)\sum_{i\prec P} Y_i - \left(\frac{1}{Y_R} - \frac{1}{Y_R+d}\right)$$

$$\frac{\partial f(d)}{\partial Y_R} = \left(\frac{1}{Y_R^2} - \frac{1}{(Y_R+d)^2}\right)\sum_{i\preceq R} Y_i + \frac{d}{(Y_R+d)^2}$$

– rögzített transzfer mellett – a transzfer által *érintettek* oldaláról a deprivációs jövedelmi hányad csökkenését növeli

- a transzfert adó jövedelmének csökkenése, mivel $\frac{\partial f(d)}{\partial Y_P}$ *negatív*, és

- a transzfert kapó jövedelmének növelése, mivel $\frac{\partial f(d)}{\partial Y_R}$ *pozitív.*

Az eddigiekben a transzfer hatását a $d \in \underline{\mathbf{d}}$ rangsorőrző megszorítás mellett vizsgáltuk.. Oldjuk fel e megkötést, és tételezzük fel, hogy a transzfer nagysága a $0 \leq d \leq Y_P$ tartományon bármely értéket fölvehet.

Hajtsuk végre a d egységnyi transzferálást ezt követően transzferek *sorozataként* úgy, hogy minden lépésben – attól függően, hogy melyik igényeli a kisebbik mértékű transzfert – vagy P, vagy R jövedelme a vele szomszédos jövedelmi szinttel váljon egyenlővé. Jelölje Δ_{Pj} azt a transzfert, amely a j-edik lépésben P jövedelmét éppen a vele szomszédos jövedelmi *szintre* süllyeszti, Δ_{Rj} pedig azt a transzfert, amely ugyanebben a lépésben R jövedelmét éppen a vele szomszédos jövedelmi szintre emeli. Tegyük fel, hogy e lépéssorozat m lépést igényel. Ekkor a transzfer felbontható a

$$d = \sum_{j=1}^{m} d_j$$

módon, ahol $d_j = \min(\Delta_{Pj}, \Delta_{Rj})$, és lépésenként az

$$\tilde{\mathbf{Y}}_j = \tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}_{j-1}^{(d_j)}$$

eloszlásokhoz jutunk, ahol $\bar{\mathbf{Y}}_0 = \mathbf{Y}$. A fenti jelölések mellett a transzfer hatása végül

$$f(d) = \sum_{j=1}^{m} f(d_j)$$

ahol

$$f(d_j) = Q(\bar{\mathbf{Y}}_j) - Q(\bar{\mathbf{Y}}_{j-1})\,.$$

Mivel az előzőekben megmutattuk, hogy $f(d_j)$ előjeles, ezért a relatív deprivációt lépésenként növelő, illetve csökkentő hatások erősíthetik is, de gyengíthetik is egymást attól függően, hogy az adott lépésben hogyan alakul e növelő és csökkentő tényezők struktúrája. Nem állítható egyértelműen tehát sem az, hogy a „helycserék" számának a növekedése növeli, sem az, hogy csökkenti a relatív depriváció fokát. Mindazonáltal nagyobb mértékű transzfer mellett a helycserék nagyobb száma várható, és lépésről lépésre egyre inkább a relatív depriváció *növekedését* eredményező tényezők hatása erősödik.

5. Összefoglalás

A tanulmány mondanivalóját összefoglalva megállapíthatjuk, hogy bizonyos jövedelmi szituációkban egy d mértékű regresszív, az egyenlőtlenséget növelő jövedelmi transzfer hatásaként a társadalom egészére értelmezett relatív depriváció mértéke *csökkenhet is,* ha a relatív depriváció fokát a *deprivációs jövedelmi hányad* mutatóval mérjük.

A referencia csoportok változatlan struktúrája esetén csökken a relatív depriváció globális érzete egyrészt akkor, mikor a transzfert kapóval szemben depriváltak körében a transzfert adóval szemben eliminált depriváció *túlszárnyalja* a transzfert adó által eliminált depriváltságot, miközben a transzfert kapó Y_R jövedelme nem kisebb az ő kritikus Y_{R_0} szintjénél. Másrészt akkor, ha a transzfer nagysága meghalad egy kritikus d_0 szintet.

A relatív deprivációban bekövetkezett változás *mértékét* illetően továbbá, mikor a deprivációs jövedelmi hányad biztosan alacsonyabb az eredeti szintjénél, a transzfer növelése a relatív depriváció fokát tovább csökkenti. Egyébként d hatása a d_0 értékhez való viszonyának a függvénye: $d < d_0$ esetén d növelése előbb növeli, majd csökkenti a relatív depriváció fokát, míg $d \geq d_0$ esetén d növelése egyértelműen csökkenti azt. Biztosan nő viszont a relatív depriváció foka a transzfer hatására akkor, ha a transzfert adó személlyel szemben a társadalom egyetlen tagja sem deprivált.

Rögzített d transzfer mellett továbbá – a transzfer által *nem érintettek* oldaláról – a deprivációs jövedelmi hányad csökkenését növeli, ha minél több olyan személy van, aki a transzfert adóval szemben deprivált, ha e személyek minél kevésbé depriváltak a transzfert adóval szemben, és ha a transzfert adó és kapó *szomszédos* helyet foglal el a jövedelmi rangsorban. A transzfer által *érintettek* oldaláról pedig a deprivációs jövedelmi hányad csökkenését növeli a transzfert adó jövedelmének csökkenése, és a transzfert kapó jövedelmének növelése, egyéb feltételek változatlansága esetén.

Ha viszont a transzfer nagysága a referencia csoportok struktúrájának a megváltozását eredményezi, akkor minél nagyobb transzfer mellett következik ez be, annál inkább a relatív depriváció fokának a növekedése várható.

Irodalom

1. Atkinson, Anthony B. (1970): On the Measurement of Inequality. Journal of Economic Theory, 2, 244–263.
2. Atkinson, Anthony B. (1987): On the Measurement of Poverty. Econometrica, Vol. 55, No. 4, 749–764.
3. Blackorby, Charles – Donaldson, David (1980): Ethical Indices for the Measurement of Poverty. Econometrica, Vol. 48, No. 4, 1053–1060.
4. Cowell, Frank, A. – Kuga, Kiyoshi (1981): Inequality Measurement. An Axiomatic Approach. European Economic Review, 15, 287–305.
5. Dalton, Hugh (1920): The Measurement of the Inequality of Incomes. The Economic Journal, 30, 348–361.

6. Foster, James E. (1984): On Economic Poverty: A Survey of Aggregate Measures. Advances in Econometrics, Vol. 3, 215–251.
7. Gastwirth, Joseph L. (1975): A New Index of Income Inequality. Proceedings of the International Statistical Institute, Wien, 368–372.
8. Hajdu, Ottó (1986): A jövedelemeloszlások újszerű egyenlőtlenségi mutatója. Statisztikai szemle, 64. évf., 10. sz., 990–1008. old.
9. Kakwani, Nanak (1980): Income Inequality and Poverty. Methods of Estimation and Policy Applications. Oxford University Press.
10. Pigou, A. C. (1912): Wealth and Welfare. Macmillan, London.
11. Rothschild, Michael – Stiglitz, Joseph E. (1973): Some Further Results on the Measurement of Inequality. Journal of Economic Theory, 6, 188–204.
12. Runciman, W. E. (1966): Relative Deprivation and Social Justice: A Study of Attitudes to Social Inequality in Twentieth-Century England. Berkely: University of California Press.
13. Sen, Amartya (1970): Interpersonal Aggregation and Partial Comparability. Econometrica, Vol. 38, No. 3, 393–409.
14. Sen, Amartya (1976): Poverty: An Ordinal Approach to Measurement. Econometrica, Vol. 44, No. 2, 219–231.
15. Sen, Amartya (1979): Issues in the Measurement of Poverty. Scandinavian Journal of Economics.
16. Shorrocks, Anthony F. – Foster, James E. (1987): Transfer Sensitive Inequality Measures. Review of Economic Studies, LIV, 485–497.
17. Stark, Oded (1984): Rural-to-Urban Migration in LDCs: A Relative Deprivation Approach. Economic Development and Cultural Change, 32, 475–486.
18. Stark, Oded – Taylor, J. Edward (1989): Relative Deprivation and International Migration. Demography, Vol. 26, No. 1, 1–14.
19. Yitzhaki, Shlomo (1979): Relative Deprivation and the Gini Coefficient. The Quarterly Journal of Economics, 93, 321–324.
20. Yitzhaki, Shlomo (1982): Relative Deprivation and Economic Welfare. European Economic Review, 17, 99–113.

RELATIVE DEPRIVATION AND POVERTY: THE INCOME TRANSFER'S INFLUENCE ON DEPRIVATION

This paper investigates the effect of a regressive transfer on a newly introduced relative deprivation measure. The conclusion of the paper is that under certain conditions the overall feeling of the relative deprivation may either increase or decrease responding to a regressive transfer, depending on the size and the location of the transfer in the income configuration and, further, on the income levels of the persons affected by the transfer. Consequently, if we require any index – for example a poverty measure – to be sensitive to the relative deprivation, under the same circumstances we must allow it to increase or decrease as well, due to a regressive transfer.

KÖNYVEKRŐL

NANCY L. STOKEY, ROBERT E. LUCAS, ,JR., *Recursive Methods in Economic Dynamics*, Harward University Press, Cambrige, Ma, 1989.

A hat éve megjelent könyv ismertetésének bizonyos aktualitást ad az, hogy az egyik szerző ezévben megkapta a Nobel-díjat, de ismertetésének a közvetlen oka az, hogy egy egyetemi belső szeminárium kertében másfél évvel ezelőtt elkezdtük feldolgozni, ezért megfelelő olyan ismerettel rendelkezem róla, amelyre talán érdemes a szakmai közvélemény figyelmét is felhívni.

A könyvet, címe alapján módszertani tárgyúnak lehetne mondani, de ez csak részben lenne igaz, és a könyv – ha megfelelően dolgozzák fel – hihetetlenül széles tárgykört felölelő közgazdasági ismeretet ad kutatási színvonalon. A szerzők a módszertani kereteket felhasználják arra, hogy a közgazdaságtan több különböző területéről – növekedési, befektetési és megtakarítási, fogyasztói stb. elmélet – való eredményeket egységes módszertani keretbe illesztve ismertessék. Ezzel nagymértékben hozzájárulnak egy célkitűzéshez, amely manapság jelentős szerepet látszik játszani: egységes tárgyalásra törekedve fokozni kell a micro-, macro- , public-, stb. közgazdaságtudományi elméletek szintézisét. Ez a célkitűzés nagyon hasznos, hiszen manapság olyan nagyszámú új dolgozat születik, hogy mindent, ami azok összekapcsolását, áttekinthetőségét elősegíti, üdvözölni kell.

A könyv tartalmi ismertetésére térve, a nagyvonalú vázlat:

1. Determinisztikus optimalizálási módszerek (II. rész).
2. Stochasztikus optimalizálás (III. rész).
3. Mind a detreminisztikus, mind a sztochasztikus modellek elhelyezése egy kompetetív egyensúlyi modelbe (IV. rész).

A II. rész első fejezetében azokról a matematikai tárgykörökről ad egy rövid összefoglalást, amelyek ma az általános matematikai ismeretkörhöz tartoznak: metrikus-tér, normált-tér, kontrakciós tételek, maximum-tétel stb. A hangsúly a függvénytereken ($C[a,b]$) és a sorozattereken van, a bizonyítások is szerepelnek és a tárgyalás módja tökéletesen megfelel a modern analízis szellemének. A következő fejezet a módszertannak szánt: itt kerül feldolgozásra a dinamikus programozás diszkrét rendszerek esetére. A II. rész leghosszabb része azokat a közgazdasági modelleket sorolja fel, amelyek a leírt módszertannal kezelhetőek, amelyek mögött közel húsz jelentős dolgozat van. A leírás rendkivül tömör, megelelégszik azzal, hogy egy rövid paragafusban leírja a model alapgondolatát és néha utal a módszer alkalmazásának az útjára. Ez a látszólagos hátrány előnyre változtatható, ha feldolgozva az eredeti dolgozatot átírjuk az itt szereplő módszer keretei közé. Ez általában nem könnyü feladat, de például kitűnő szakdolgozat vagy TDK témák lehetnek jó képességű hallgatók számára. Ennek a résznek az utolsó pontja ismét módszertani: a determinisztikus dinamikáról nyújt egy szép áttekintést, amely nem annyira teljeskörű, mint a dinamikus programozásról írottak, és kiegészítésre szorulhat, főleg azért, hogy a fellépő fogalmak más helyekről is megalapozást kapjanak (Ljapunov-függvény, Euler-egyenletek, stabilitási problémák stb.).

A leghosszabb III. rész szerkezete azonos az előző rész szerkezetével: matematikai alapok, módszertani rész (sztochasztikus dinamikus programozás), a módszertannal kezelhető modellek. Az teszi hosszúvá ezt a részt, hogy a matematikai alapok keretében megadja a valószínűségelmélet teljes és részletes korszerű megalapozását: felépíti a mérték- és integrálelméletet és a hozzá kapcsolódó egyéb tudnivalókat. A tárgyalás a legmagasabb absztrakciós igényeket is kielégíti, minden aggály nélkül a legmodernebb megközelítéseket választják. A szerzők meg is magyarázzák az előszóban azt, hogy miért tettek így: először azzal próbálkoztak, hogy a valószínűségszámítást és sztochasztikus folyamatokat a klasszikus keretek között maradva használják fel, de rájöttek, hogy ez egyrészt hihetelen módon elbonyolítja a tárgyalást, másrészt nem is ad lehetőséget a megfelelő általánosságú vizsgálatokra. Úgy vélték, hogy megéri a valószínűségszámítás korszerű megalapozását leírní, mert ezen az áron célratörőbben és eredményesebben tudják megvalósítani a céljukat. Ez a gondolat egyébként nagyon természetes, hiszen a matematika modern felfogása pontosan azt jelenti, hogy olyan fogalmi megközelítést kell választani, amelyben gazdaságosabban lehet dolgozni, röviden szólva: *a modernség ökonomikusságot jelent.* Ennek az elvnek az alkalmazását nem szabad az oktatás fejlesztésében sem elhanyagolni. Aki következetesen feldolgozza ezt a részt, az megtanulja a modern valószínűségszámítást és a sztochasztikus folyamatok alapjait, ami más tárgykörökben is hasznos, hiszen nem is kell mondani, hogy milyen szerepe van ma a sztochasztikus integráloknak, differenciálegyenleteknek a pénzügyben.

A IV. rész összekapcsolja az előző ismerteket az egyensúlyelmélet problémakörével. Ez a rész mélységben csúcsa a könyvnek, és az alapvető újdonság a közismert egyensúlyelmélethez képest az, hogy a jelenségek sorozatterekben vagy függvényterekben játszódnak, ezért szükség van a normált terek mélyebb elméletére (duális terek, operátorelmélet, fixpont-tételek, stb.). A közgazdasági és matematikai tárgyalás párhuzamos, ezért jó indoklását adja a matematikai fogalmi rendszer bevezetésének is.

Befejezésül meg lehet állapítani, hogy a könyv nagyon szerencsés példája annak, hogy miként lehet matematikát és közgazdaságtant egyszerre, párhuzamosan tárgyalni. Nem tartozik a könnyű olvasmányok közé, azért is használtam végig "olvasás" helyett a "feldolgozás" szót. Kitűnő vezérfonal lehet egy olyan szemináriumi munka számára, ahol matematikusok és közgazdászok összefogva posztgraduális vagy kutatói szemináriumot hoznak létre.

Dancs István