# A TERMÉSZETI ERŐFORRÁSOK FELHASZNÁLÁSÁNAK OPTIMÁLIS SORRENDJÉRŐL[1]

BESSENYEI ISTVÁN
*Pécsi Tudományegyetem Közgazdaságtudományi Kar*

A jelen tanulmány a makrogazdaság egy olyan egyszerű, dinamikus modelljét ismerteti, melyben a kimeríthetetlen természeti erőforrás felhasználásával történő termelés határköltsége meghaladja bármely nem regenerálható természeti erőforrás felhasználásával történő termelés határköltségét. A nem kimeríthető természeti erőforrás termelési kapacitása korlátozott. Megmutatjuk, hogy bizonyos feltételek fennállása esetén érdemes a költségesebb, kimeríthetetlen természeti erőforrás felhasználásához hozzákezdeni már a nem regenerálható erőforráskészletek kimerülése előtt. Elemzésünkben nem szerepel sem központi tervező, sem pedig társadalmi jóléti függvény, ehelyett azt tesszük fel, hogy a vállalatok célja a jövőben elérhető profitáram nettó jelenértékének maximalizálása.

## 1 Bevezetés

Tekintsünk egy olyan termelési folyamatot, melynek során a természeti erőforrások más termelési tényezőkkel történő helyettesítésére nincs lehetőség. Tegyük fel, hogy létezik egyfajta kimeríthetetlen és néhány fajta kimeríthető természeti erőforrás. Ilyen kimeríthető erőforrás lehet például a szén vagy a kőolaj az energiatermelésben, míg kimeríthetetlen termelési tényező például néhány folyó, melyek energiája vízierőművekben használható fel. Föltesszük, hogy a kimeríthető és kimeríthetetlen természeti erőforrások képesek egymást tökéletesen helyettesíteni a termelés során. Azon kézenfekvő feltevés érvényességét, hogy pozitív diszkontráta esetén az egyes erőforráskészleteket mindig a konstans határköltség szigorúan monoton növekvő sorrendjében kell felhasználni, Solow és Wan igazolták [10] a parciális egyensúly feltételei mellett. Nem feltétlenül érvényes azonban ez a megállapítás általános egyensúlyban,[2] miként azt Kemp és Long kimutatták [6].

Amigus és mások [1] igazolták, hogy pozitív diszkontráta esetén előfordulhat az optimális erőforrásfelhasználási pályán a költségesebb, de megújuló helyettesítő erőforrás felhasználásának megkezdése már az olcsóbb, nem re-

[1] Beérkezett: 2000. május 11.

[2] A parciális és általános egyensúly közti különbséget Romer [9] (S93) nyomán az alábbiak szerint tesszük meg: Parciális elemzés esetén, ha egy adott tevékenység hozadéka valamely exogén ok miatt növekszik, akkor ebből következik, hogy ezen tevékenység folytatásához érdemes több erőforrást allokálni, míg az általános egyensúlyi elemzés számol annak lehetőségével is, hogy az iménti exogén ok esetleg a többi tevékenység hozadékát is növeli, melyek az előbb említett adott tevékenységgel együtt versenyeznek erőforrásokért.

generálható természeti erőforráskészletek kimerítése előtt. Modelljük annyiban tért el Kemp és Long modelljétől, hogy föltevéseik szerint a regenerálódó erőforrások felhasználásával történő termelés nem léphet túl egy adott felső kapacitáskorlátot. E modellek valamennyi fogyasztó preferenciáit azonosnak tekintik, továbbá felteszik, hogy egy nemzetgazdasági tervező a társadalom jövőben várható jólétének diszkontált összegét kívánja maximalizálni. A jelen tanulmány alapvető változtatása, hogy eltekint a nemzetgazdasági tervezőtől. Mivel a természeti erőforrások felhasználásának sorrendjével kapcsolatos döntéseket a gyakorlatban a termelők hozzák, föltesszük, hogy döntéseik célja a jövőben várható profitáram nettó jelenértékének a maximalizálása. Így a társadalmi jóléti függvény helyére a profitfüggvényt vezetjük be. E változtatás nem csupán a modell közgazdasági interpretációját érinti, hanem matematikai tulajdonságait is. Míg ugyanis a társadalmi jóléti függvény a teljes értelmezési tartományán szigorúan monoton növekvő, addig a profitfüggvénynek globális maximumhelye létezik.

Föltesszük, hogy a mindenkori termelés során a természeti erőforrások töltik be a rövidebb oldal szerepét a tőkével és a munkával szemben, így ezen utóbbi termelési tényezőket nem szükséges modellünkben szerepeltetni. A társadalmi jóléti függvény eliminálásával a szabadidő is kimarad vizsgálódásaink köréből. Legyen az iparági keresleti görbe negatív meredekségű, ekkor a termék ára a kibocsátás szigorúan monoton csökkenő függvénye. Föltesszük, hogy a kimeríthetetlen természeti erőforrás felhasználásával történő termelés határköltsége meghaladja a nem regenerálható erőforráskészletek kitermelése révén létrehozott kibocsátás határköltségét, valamint azt, hogy a regenerálható erőforrás termelési kapacitása nem raktározható.

A következő szakaszban a modell legegyszerűbb változatát elemezzük. Ennek során csupán egyfajta kimeríthető és egyfajta kimeríthetetlen természeti erőforrás jelenlétét tételezzük fel lineáris keresleti és költségfüggvények mellett. Már ezen egyszerű eset vizsgálata is számos lényeges következtetés levonását teszi lehetővé. Mondanivalónkat e szakaszban igyekszünk olymódon kifejteni, hogy jól felismerhetőek legyenek a hasonlóságok és különbségek modellünk és Amigus és mások modellje között. A harmadik szakaszban két irányban kerül a modell kiterjesztésre. Egyrészt azt az esetet elemezzük, amikor két különböző kimeríthető erőforráskészlet áll a termelés rendelkezésére, másrészt megvizsgáljuk a nemlineáris keresleti és költségfüggvények esetét. A modell ezen utóbbi irányba történő kiterjesztése az általánosítás egészen új irányát jelenti. A 4. szakaszban kerül sor a végső következtetések levonására a társadalom intertemporális jólétét maximalizálni igyekvő nemzetgazdasági tervező és a profitáram nettó jelenértékének maximumát kereső vállalat közti különbségtétel révén.

## 2 A modell

Amigus és mások példáját követve a problémát az általános egyensúly keretei közt tárgyaljuk. Termelési célokra rendelkezésre áll egyfajta kimeríthető természeti erőforrásból egy adott készlet, melyet valamilyen nem kimeríthető természeti erőforrás képes helyettesíteni. A kimeríthetetlen erőforrás felhasználásával folyamatosan előállítható bizonyos mennyiségű output, ennek időegységre eső nagysága azonban feltevésünk szerint felülről korlátozott. Mivel a kimeríthetetlen erőforrás termelési kapacitása nem raktározható, az ebből felhasználásra nem kerülő egységek mindörökre elvesznek a termelés számára. Föltesszük, hogy a termelési költségek egyenesen arányosak a felhasznált természeti erőforrások mennyiségével. E föltevés csupán az egyszerűbb tárgyalásmód érdekében szükséges, mivel így a naturáliában kifejezett tényező-határköltség konstans.

Egységnyi output előállítása kimeríthetetlen természeti erőforrás felhasználásával $\eta$ nagyságú költséget eredményez, kimeríthető természeti erőforrást felhasználva pedig $\mu$ nagyságút. Föltesszük, hogy $\mu$ és $\eta$ konstansok, továbbá $\mu < \eta$. A kimeríthető erőforrásból még rendelkezésre álló készlet nagyságát adott időpontban $Y$ jelöli. Az ennek kitermelése révén létrehozott kibocsátás mennyiségét valamely időpontban jelölje $y$, a kimeríthetetlen erőforrás felhasználásával előállított output nagyságát pedig $x$. Legyen az egyszerűség érdekében mindkét természeti erőforrás határtermelékenysége egységre normált. Föltesszük, hogy $x \leq \overline{x}$, ahol $\overline{x}$ a kimeríthetetlen erőforrás kapacitáskorlátját jelöli. Ha az összes kibocsátást $q$-val, az összes költséget pedig $c$-vel jelöljük, akkor $q = x + y$ és $c = \eta x + \mu y$. Mivel föltevésünk szerint a kereslet kizárólag a termék árától függ, az inverz keresleti függvény $p = a - bq$, ahol $a$, $b$ pozitív konstansok. Így a profit nagysága egy adott pillanatban:

$$\pi(x,y) = [a - b(x+y)]\,(x+y) - \eta x - \mu y = (a-\eta)x + (a-\mu)y - b(x+y)^2$$

A mindenkori profit nemnegativitása érdekében szükséges, de nem elegendő megkövetelni $a > \eta$ teljesülését. Föltesszük, hogy a kimeríthetetlen természeti erőforrás szűkösen áll rendelkezésre, azaz

$$\pi(\overline{x},0) > 0 \quad \text{és} \quad \frac{\partial \pi(\overline{x},0)}{\partial \overline{x}} > 0\,,$$

amiből $a - \eta > 2b\overline{x}$ következik. A nem megújuló erőforráskészlet kimerülése után bekövetkező stacionárius állapotban a termelést a kimeríthetetlen erőforrás kapacitása korlátozza. Jelölje $T$ ezen stacionárius állapot kezdetét, $\overline{\pi}(T)$ pedig az ezen $(\overline{x},0)$ erőforrás-felhasználással jellemezhető állapotban végtelen időhorizonton képződő profit nettó jelenértékét. Ekkor

$$\overline{\pi}(T) = e^{-\rho T}\frac{(a-\eta)\overline{x} - b\overline{x}^2}{\rho}\,,$$

ahol $\rho > 0$ a diszkontráta.

A profitáram nettó jelenértékét maximalizálni igyekvő vállalat problémája most a következő izoperimetrikus feladatban foglalható össze:

$$\max_{T,x,y} \int_0^T e^{-\rho t}\pi(x,y)\,dt + \overline{\pi}(T)\,,$$

az alábbi feltételekkel

$$q = x + y\,, \quad c = \eta x + \mu y \quad \text{és} \quad \pi(x,y) = aq - bq^2 - c \tag{1}$$

$$\dot{Y} = -y \tag{2}$$

$$Y(0) = Y_0 > 0 \quad \text{és} \quad Y(T) = 0 \tag{3}$$

$$y \geq 0 \tag{4}$$

$$\bar{x} - x \geq 0 \quad \text{és} \quad x \geq 0 \tag{5}$$

ahol $Y_0$ a kimeríthető erőforrásból kezdetben rendelkezésre álló készlet nagyságát jelöli.

A (4), (5) feltételeket figyelembe véve a Hamilton-függvény a következő Lagrange-függvénnyé egészítendő ki:

$$\mathcal{L} = e^{-\rho t}\left[(a-\eta)x + (a-\mu)y - b(x+y)^2\right] - \lambda y + \underline{\alpha} x + \bar{\alpha}(\bar{x} - x) + vy\,,$$

ahol $\lambda$ a kimeríthető erőforrásból még rendelkezésre álló mennyiséghez tartozó határozatlan együttható függvénye, a $v$ függvény az $y$ változó nemnegativitási feltételéhez, az $\underline{\alpha}$, $\bar{\alpha}$ függvények pedig az $x$ és $\bar{x}-x$ kifejezések nemnegativitási korlátjához kapcsolódnak. Az optimális erőforrásfelhasználási programnak minden pillanatban ki kell elégítenie az alábbi elsőrendű feltételeket

$$e^{-\rho t}[a - \eta - 2b(x+y)] + \underline{\alpha} - \bar{\alpha} = 0 \tag{6}$$

$$e^{-\rho t}[a - \mu - 2b(x+y)] - \lambda + v = 0 \tag{7}$$

$$\underline{\alpha} x = 0 \quad \text{és} \quad \alpha \geq 0 \tag{8}$$

$$\bar{\alpha}(\bar{x} - x) = 0 \quad \text{és} \quad \bar{\alpha} \geq 0 \tag{9}$$

$$vy = 0 \quad \text{és} \quad v \geq 0 \tag{10}$$

Mivel a profitfüggvény konkáv, a (2) állapotegyenlet pedig lineáris, Mangasarian elegendőségi tétele (ld. Chiang [4] 214-215 o.) alapján elegendő a (6)-(10) feltételek teljesülését megkövetelni a profitáram nettó jelenértékének meghatározása során.

Mivel az árnyékár szorzóegyenlete a következő:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}\,,$$

a (7) feltételből adódóan

$$\dot{\lambda} = 0\,, \tag{11}$$

ahol a változó fölé tett pont a szokásos módon annak idő szerint vett differenciálhányadosát jelöli.

A transzverzalitási feltétel a $[H]_{t=T} = 0$ szabály alapján adódik, ahol $H$ a Hamilton-függvény. Eszerint

$$e^{\rho T}[(a-\eta)x + (a-\mu)y - b(x+y)^2] - \lambda y = 0\,. \tag{12}$$

Minthogy a kimeríthetetlen erőforrás szűkösen áll rendelkezésre, és így $a-\eta > 2b\bar{x}$, a (12) transzverzalitási feltétel csak $y(T) > 0$ esetén teljesülhet, tehát Amigus és mások eredményével ellentétben [1], az $y$ függvény a $t = T$ pontban nem folytonos az optimális erőforrás-felhasználási pályán.

A továbbiakban gyakran fogunk hivatkozni az optimális erőforrás-felhasználási pálya alábbi tulajdonságára

**1. Tulajdonság.** *Ha $t \leq T$, akkor $\dot{q} < 0$, továbbá*

$$\lambda e^{\rho t} = a - \mu - 2b(x+y)\,. \tag{13}$$

*Bizonyítás.* Mivel $T$ a nem megújuló erőforrás kimerülésének időpontja, valamennyi $t \leq T$ időpontra $y > 0$, és ezért a (10) feltétel miatt $v = 0$. Így a (7) feltétel átalakítása révén nyerjük a (13) egyenletet, melyen további átalakításokat végezve

$$q = x + y = \frac{a - \mu - \lambda e^{\rho t}}{2b}$$

adódik, amiből $\dot{q} < 0$. □

A $\lambda$ együttható értelmezését könnyíti meg, ha felhívjuk a figyelmet a modell következő tulajdonságára.

**2. Tulajdonság.** *A $\lambda$ függvény konstans értéke $x(0)$-tól függ az alábbi módon:*

*ha $x(0) = 0$, akkor $\lambda \leq \eta - \mu$;*
*ha $0 < x(0) < \bar{x}$, akkor $\lambda = \eta - \mu$;*
*ha $x(0) = \bar{x}$, akkor $\lambda \geq \eta - \mu$.*

*Bizonyítás.* $x(0) = 0$ esetén $\bar{\alpha} = 0$ a (9) feltétel miatt, ezért $t = 0$-ra a (6) feltételből

$$a - \eta - 2by + \underline{\alpha} = 0$$

következik, és így $a - \eta \leq 2by$, mivel $\underline{\alpha} \geq 0$ a (8) feltétel miatt. Másrészt

$$\lambda = a - \mu - 2by$$

a (13) egyenlet alapján, ahová az előző egyenlőtlenséget behelyettesítve $\lambda \leq \eta - \mu$ adódik.

Amennyiben $0 < x(0) < \bar{x}$, akkor $\underline{\alpha}, \bar{\alpha} = 0$ a (8) és (9) feltételek miatt és $t = 0$ miatt a (6) feltételből $a - \eta = 2b(x + y)$ következik. Behelyettesítve ezt a (13) egyenletbe, $t = 0$-ra azt kapjuk, hogy $\lambda = \eta - \mu$.

$x(0) = \bar{x}$ esetén $\underline{\alpha} = 0$ a (8) feltétel miatt, továbbá $\bar{\alpha} \geq 0$ a (9) feltétel alapján, és az iménti gondolatmenetet követve $\lambda \geq \eta - \mu$ adódik. □

**1. Következmény.** *$\lambda$ konkrét értéke $x(0)$ és $y(0)$ nagyságától függ, amint ez a (13) egyenletből látszik. Az $y$ erőforrásfelhasználási pályának ki kell elégítenie továbbá az $\int_0^T y\,dt = Y_0$ restrikciós feltételt.*

Legyen $y$ a nem regenerálható erőforrás optimális felhasználási pályája, $t_a$ pedig jelölje azon maximális $t$ értéket, melyre a (13) egyenlet az $x = 0$ feltétel mellett teljesül. Ekkor

$$\lambda e^{\rho t} = a - \mu - 2by \implies t \leq t_a \,. \tag{14}$$

Ha $t_a < 0$, akkor legyen $t_a = 0$. Ez az eset akkor fordul elő, ha a kimeríthető erőforrásból kezdetben rendelkezésre álló készlet nem elég nagy, s ezért a profitmaximumot biztosító kibocsátás eléréséhez már a $t = 0$ időpontban szükség van a kimeríthetetlen erőforrásfelhasználására is. A 2. Tulajdonság szerint ekkor $\lambda \geq \eta - \mu$. $t_a$ azon időintervallum végpontjaként értelmezhető, melynek során kizárólag a kimeríthető erőforrás felhasználásával folyik a termelés az optimális erőforrásfelhasználási pályán. Legyen továbbá $t_b$ a (13) egyenletet az $x = \bar{x}$ feltétel mellett kielégítő minimális $t$. Ekkor

$$\lambda e^{\rho t} = a - \mu - 2b(\bar{x} + y) \implies t \geq t_b \,. \tag{15}$$

Ha $t_b < 0$, akkor legyen most is $t_b = 0$. (Ez a helyzet akkor, ha $Y_0$ nem elegendően nagy.) $t_b$ az optimális erőforrás-felhasználási program azon időintervallumának a kezdőpontja, melynek során a kimeríthetetlen erőforrás teljes kapacitása felhasználásra kerül a termelés során.

**3. Tulajdonság.** $t_a \leq t_b$.

*Bizonyítás.* Mivel $x(t_a) = 0$, a (9) feltételből $\bar{\alpha} = 0$ következik és így $a - \eta - 2bq(t_a) \leq 0$ a (6) feltétel alapján. Másrészt $x(t_b) = \bar{x}$, és így $\underline{\alpha} = 0$ a (8) feltétel miatt, ezért a (6) feltételből $a - \eta - 2bq(t_b) \geq 0$ következik. Így

$$q(t_b) \leq \frac{a - \eta}{2b} \leq q(t_a) \,,$$

továbbá mivel az 1. Tulajdonság alapján $\dot{q} < 0$, az iménti egyenlőtlenségekből $t_a \leq t_b$ adódik. □

A 4. Tulajdonság modellünk azon feltevéséből következik, mely szerint a kimeríthetetlen természeti erőforrás szűkösen áll rendelkezésre.

**4. Tulajdonság.** $t_b \leq T$.

A fentiekben definiált három időpont, $t_a$, $t_b$ és $T$ négy részintervallumra vagy fázisra osztják a $[0, \infty)$ tervezési időtávot. Az egyes függvények e fázisok során felvett lehetséges értékeit az *1. táblázatban* foglaltuk össze.

| Fázis | $t$ | $x$ | $y$ | $\underline{\alpha}$ | $\bar{\alpha}$ | $v$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| I. | $[0, t_a]$ | 0 | $q > 0$ | $\geq 0$ | 0 | 0 |
| II. | $(t_a, t_b)$ | $(0, \bar{x})$ | $q - x > 0$ | 0 | 0 | 0 |
| III. | $[t_b, T]$ | $\bar{x}$ | $q - \bar{x} > 0$ | 0 | $\geq 0$ | 0 |
| IV. | $(T, \infty)$ | $\bar{x}$ | 0 | 0 | $\geq 0$ | $\geq 0$ |

1. táblázat. Az optimális erőforrás-felhasználási pálya tulajdonságai

Még azt kell ellenőrizni, hogy a táblázatban feltüntetett tulajdonságok konzisztensek-e az elsőrendű feltételekkel. Az 1. táblázatból rögtön látszik, hogy a (8)-(11) feltételek teljesülnek a $[0, T]$ időintervallumon. Az I. fázisban

$$\frac{a-\eta}{2b} \leq y \leq \frac{a-\mu}{2b}$$

biztosítja (6) és (7) teljesülését. A II. fázisban

$$q = \frac{a-\eta}{2b}$$

a (6) feltétel alapján, s behelyettesítve $q$ ezen értékét a (7) feltételbe, látszik, hogy az is teljesül. A III. fázisban

$$q \leq \frac{a-\eta}{2b}$$

a (6) feltétel miatt, és így a (7) feltétel is teljesül. A IV, stacionárius fázis pedig kívül esik az optimalizálás tulajdonképpeni időhorizontján. Mivel a $t = T$ pillanatban $y > 0$ és $x = \bar{x}$, a (12) transzverzalitási feltétel is teljesülhet.

Nyilvánvaló a hasonlóság az Amigus és mások modelljében kimutatott négy fázis [1] és az 1. táblázat között. Az egyik legfontosabb eltérés a két megközelítés között, hogy a modellünkben található négy fázis voltaképpen csak három. Az eddigiek következményeként bizonyítható ugyanis:

**2. Következmény.** $t_a = t_b$.

*Bizonyítás.* Legyen $t \in (t_a, t_b)$. Amint az 1. táblázatból leolvasható, ekkor $\underline{\alpha} = \bar{\alpha} = 0$ és a (6) feltételből adódóan $a - \eta - 2bq = 0$, amiből

$$q = \frac{a-\eta}{2b}.$$

Föltevéseink szerint ezen utóbbi egyenlet jobb oldalán álló kifejezés konstans, másrészt $\dot{q} < 0$ az 1. Tulajdonság alapján, amiből $t_a$ és $t_b$ egyenlősége következik. □

A 2. Következmény szerint tehát amikor megkezdődik a kimeríthetetlen erőforrás felhasználása, az rögtön teljes kapacitással termel. Jelölje ezen időpontot $\bar{t}$. Ekkor $\bar{t} = t_a = t_b$ és

$$q(\bar{t}) = \frac{a-\eta}{2b}.$$

Mindezek alapján az $x$ függvény éppúgy nem folytonos a $t = \bar{t}$ időpontban, mint az $y$ függvény a $t = T$ időpontban.

$\bar{t} < T$ esetén tehát a költségesebb kimeríthetetlen erőforrás felhasználása már a nem megújuló erőforrásból rendelkezésre álló készlet kimerülése előtt megkezdődik. Ez a szituáció, amikor a kétféle erőforrás felhasználása egymást időben átfedi, akkor és csakis akkor fordul elő, ha a modell paraméterei kielégítik a következő feltételt:

$$\bar{x} < \frac{a - \eta}{2b}. \tag{16}$$

A (16) egyenlőtlenség tehát annak szükséges feltétele, hogy az optimális erőforrás-felhasználási pályán a különféle erőforrások felhasználása időben átlapoltan történjék, és ez a feltétel a jelen szakasz legfontosabb eredménye. A modell paraméterei által meghatározott optimális erőforrás-felhasználási pályát tekintve egyensúlyinak, egyszerű komparatív statikus elemzéssel látható, hogy az említett átfedési szituáció bekövetkezésének annál nagyobb a valószínűsége, minél

- nagyobb a kereslet
- kisebb a kimeríthetetlen erőforrás felhasználásával történő termelés határköltsége
- kevésbé meredek a keresleti görbe
- kisebb a kimeríthetetlen erőforrás termelési kapacitása.

# 3 A modell két kiterjesztése

Az előző szakaszban bemutatott egyszerű modell a feltételek változtatása révén számos irányba kiterjeszthető. Ezek közül kettőt vizsgálunk meg ebben a szakaszban. A modell kiterjesztései lényegében nem módosítják az előző szakasz azon következtetését, mely szerint bizonyos esetekben érdemes a költségesebb, kimeríthetetlen erőforrás felhasználását megkezdeni már a nem megújítható erőforráskészletek kimerülése előtt akkor is, ha a cél az összprofit nettó jelenértékének maximalizálása. Mindazonáltal a jelen szakasz mélyebb bepillantást enged az optimális erőforrás-felhasználási pálya sajátosságaiba.

Továbbra sem törekszünk az optimális erőforrás-felhasználási pálya meghatározására, csupán azt vizsgáljuk, hogy milyen feltételek teljesülése esetén célszerű megkezdeni a költségesebb regenerálható erőforrás felhasználását az olcsóbb, nem regenerálható erőforráskészletek kimerülése előtt. Így elemzésünk során a transzverzalitási feltételeknek különösebb jelentőségük nincs, ezért a továbbiakban nem is vezetjük le azokat.

Mivel a modell kiterjesztései nyomán előálló profitfüggvények továbbra is differenciálhatóak és konkávak, az állapotegyenletek pedig megtartják linearitásukat, teljesülnek a Mangasarian-féle elegendőségi tétel (ld. Chiang [4] 214-215 o.) feltételei, így az elsőrendű feltételek elegendőek a profitáram nettó jelenértékének létezéséhez.

## 3.1 Két különböző kimeríthető erőforráskészlet

Tekintsük most azt a helyzetet, amikor a gazdaság a kimeríthető erőforrások két különböző készletéhez férhet hozzá, melyek felhasználásával a termelés határköltsége erőforrásonként eltérő konstans nagyság, de alacsonyabb, mint a kimeríthetetlen erőforrással történő termelés ugyancsak konstans határköltsége. Az egyik kimeríthető erőforrás lehet a szén, a másik a kőolaj, míg kimeríthetetlen erőforrásként tekinthetjük továbbra is a vízienergiát. A jelen szakasz következtetései kettőnél több kimeríthető erőforrás esetére is kiterjeszthetőek.

Az előző szakaszban tárgyalt modellt az alábbiak szerint kell átírni. Az (1)-ben adott feltételek helyett a következőket írhatjuk:

$$q = x+y_1+y_2\,, \quad c = \eta x+\mu_1 y_1+\mu_2 y_2 \quad \text{és} \quad \pi(x, y_1, y_2) = aq-bq^2-c\,, \tag{17}$$

ahol $\mu_i$ az $i$-edik kimeríthető erőforrás felhasználásával történő termelés határköltsége. Föltesszük, hogy $a > \eta > \mu_2 > \mu_1$, továbbá $y_i$ jelöli az $i$-edik kimeríthető erőforrás felhasználásával létrehozott kibocsátás nagyságát.

A (2) feltétel helyett azt írjuk, hogy

$$\dot{Y}_i = -y_i\,, \quad i = 1, 2\,, \tag{18}$$

ahol $Y_i$ az $i$-edik kimeríthető erőforrásból még rendelkezésre álló mennyiség egy adott időpontban. A (3) feltételt az alábbi módon írjuk át:

$$Y_i(0) = Y_i^0 > 0 \quad \text{és} \quad Y_i(T) = 0\,, \quad i = 1, 2\,, \tag{19}$$

ahol $Y_i^0$ az $i$-edik kimeríthető erőforrásbóli kezdetben rendelkezésre álló készlet nagysága. A (4) feltételt pedig a következőképpen módosítjuk:

$$y_i \geq 0\,, \quad i = 1, 2\,. \tag{20}$$

A Hamilton-függvényhez most a következő Lagrange-függvényt konstruáljuk:

$$\mathcal{L} = e^{-\rho t}\left[(a-\eta)x + (a-\mu_1)y_1 + (a-\mu_2)y_2 - b(x+y_1+y_2)^2\right] - \\ - \lambda_1 y_1 - \lambda_2 y_2 + \underline{\alpha}x + \overline{\alpha}(\overline{x} - x) + v_1 y_1 + v_2 y_2\,.$$

Az elsőrendű feltételek közül (6) és (7) az alábbiak szerint módosul:

$$e^{-\rho t}[a - \eta - 2b(x + y_1 + y_2)] + \underline{\alpha} - \bar{\alpha} = 0\,, \tag{21}$$

$$e^{-\rho t}[a - \mu_i - 2b(x + y_1 + y_2)] - \lambda_i + v_i = 0\,, \quad i = 1, 2\,. \tag{22}$$

A (8) és (9) feltételek továbbra is érvényben maradnak, de (10) helyett az alábbiakat kell írni:

$$v_i y_i = 0 \quad \text{és} \quad v_i \geq 0\,. \tag{23}$$

A (18) feltétel mindkét oldalát az idő szerint integrálva könnyű felismerni, hogy egy izoperimetrikus problémával állunk szemben, mint az előző szakaszban tárgyalt egyszerű modell esetében is. Chiang [4] szerint ebből eleve következik a $\lambda_i$ változók konstans volta. Eredményünk a (11) egyenlethez hasonló.

$$\dot{\lambda}_i = 0\,, \quad i = 1, 2\,. \tag{24}$$

Ha az 1. Tulajdonság újrafogalmazása során lemondunk a $T$ időpontra történő hivatkozásról, az alábbi, gyengébb állítást fogalmazhatjuk meg:

**5. Tulajdonság.** *Ha legalább egy kimeríthető erőforrás felhasználásra kerül a termelésben, akkor az összkibocsátás csökken:*

$$y_i > 0 \implies \lambda_i e^{\rho t} = a - \mu_i - 2b(x + y_1 + y_2)\,, \quad i = 1, 2\,. \tag{25}$$

Ez a tulajdonság a (22) és (23) feltételekből következik, és a bizonyítás során követett gondolatmenet megegyezik az 1. Tulajdonság bizonyítása során alkalmazottal. Van azonban az 5. Tulajdonságnak egy fontos, nem triviális következménye.

**3. Következmény.** *Abban az időpontban, amikor az optimális erőforrás-felhasználási pályán az egyik kimeríthető erőforrást a termelésben felhasználják, a másik biztosan nem kerül felhasználásra:*

$$y_1 y_2 = 0\,.$$

*Bizonyítás.* Indirekt módon tegyük fel, hogy $y_1 y_2 > 0$. Ekkor a (25) egyenlet alapján:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{a - \mu_1 - 2bq}{a - \mu_2 - 2bq}\,.$$

A bal oldalon álló tört a (24) egyenlet szerint konstans, és mivel $\mu_1$ különbözik $\mu_2$-től, $q$-nak is konstansnak kell lennie. $q$ konstans volta azonban ellentmond a 7. Tulajdonságnak, ezért $y_1 y_2 = 0$. □

Modellünk ezen következménye eltér az erőforrás-felhasználás optimális sorrendjét kutató korábbi modellek következtetéseitől. Amigus és mások [1] a kétfajta kimeríthető erőforrás esetét vizsgálva találtak egy olyan fázist, melynek során az 1. erőforrásból egyre kisebb, de pozitív, a 2. erőforrásból pedig egyre nagyobb mennyiség kerül felhasználásra a termelés során. Esetünkben e fázis hossza zérus. Az eltérés alapvető oka a hasznossági függvény profitfüggvénnyel történő helyettesítésében keresendő. Megjegyezzük, hogy hasonló jellegű eltérés már az előző szakaszban is megjelent, amennyiben az 1. táblázatban bemutatott négy fázis közül a második hossza szintén zérus volt.

Az előző szakasz 2. Következménye szerint amikor a kimeríthetetlen természeti erőforrás felhasználása megkezdődik, az rögtön teljes kapacitással vesz részt a termelésben. Hasonló állítást fogalmazhatunk meg most is:

**6. Tulajdonság.** Ha $y_i > 0$, akkor $x > 0 \Rightarrow x = \bar{x}$.

*Bizonyítás.* Indirekt módon tegyük fel, hogy $0 < x < \bar{x}$. A (8) és (9) feltételekből most is $\underline{\alpha} = \bar{\alpha} = 0$ adódik. Így a (21) egyenletből következően

$$q = \frac{a - \eta}{2b}\,,$$

ami azt jelenti, hogy $q$ konstans és ez $y_i > 0$ esetén ellentmond az 5. Tulajdonságnak. □

Legyen $t_0$ a következő egyenlet megoldása:

$$\mu_1 + \lambda_1 e^{\rho t} = \eta \,. \tag{26}$$

**7. Tulajdonság.** *Ha $y_1(t_0) > 0$, akkor az optimális növekedési pályán egyetlen $t_0$ előtti időpontban sem kerül felhasználásra a kimeríthetetlen erőforrás, és ugyanez az erőforrás minden $t_0$ utáni időpontban teljes kapacitással vesz részt a termelésben:*

$$t < t_0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{és} \quad t > t_0 \Rightarrow x = \bar{x} \,.$$

*Bizonyítás.* $t < t_0$ esetén $\mu_1 + \lambda_1 e^{\rho t} < \eta$, amiből

$$\frac{a - \mu_1 - \lambda_1 e^{\rho t}}{2b} > \frac{a - \eta}{2b} \,.$$

Mivel $y_1 > 0$, a (25) egyenletből adódóan a bal oldalon álló kifejezés éppen $q$-val egyenlő. Következésképp $0 > a - \eta - 2bq$ és a (21) egyenlet alapján $\underline{\alpha} > 0$, amiből $x = 0$ a (8) feltétel miatt. Hasonló gondolatmenetet követve látható be $t > t_0$ esetére, hogy $\bar{\alpha} > 0$, amennyiben $y_1 > 0$. A (9) feltételből most $x = \bar{x}$ adódik. □

A 7. Tulajdonság igen fontos szerepet játszik a természeti erőforrások optimális felhasználási sorrendjének meghatározása során. Kiindulásként tekintsük azt a szituációt, amikor a termelésben kizárólag a legolcsóbb, az 1. kimeríthető erőforrás kerül felhasználásra. Amennyiben az ebből rendelkezésre álló mennyiség elegendően nagy ($y_1(t_0) > 0$), akkor a $t_0$ időpont után az 1. kimeríthető erőforrást továbbra is felhasználják a termelés során, a 2.-at még nem, és a nem kimeríthető erőforrás is teljes kapacitásával felhasználásra kerül.

Az $y_1(t_0) > 0$ feltétel teljesülése az alábbiakból vezethető le:

$$\int_0^{t_0} q \, dt = \int_0^{t_0} \frac{a - \mu_1 - \lambda_1 e^{\rho t}}{2b} \, dt < Y_1^0 \,.$$

Mivel a (24) egyenlet szerint $\lambda_1$ konstans, értéke az 1. kimeríthető erőforrás kezdetben felhasználásra kerülő mennyisége alapján meghatározható. Alkalmazva a (22) egyenletet a $t = 0$, $i = 1$ esetre:

$$\lambda_1 = a - \mu_1 - 2by_1(0) \,.$$

## 3.2 Nemlineáris keresleti és költségfüggvények

Most a 2. szakaszban tárgyalt egyszerű modellt kiterjesztjük nemlineáris függvények esetére is. Az inverz keresleti függvényt $P = P(q)$-ra változtatjuk, a költségfüggvényt pedig $c = c(x,y)$-ra. Az egyszerűbb írásmód érdekében vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$MC_x = \frac{\partial c}{\partial x} \quad \text{és} \quad MC_y = \frac{\partial c}{\partial y},$$

és föltesszük, hogy $MC_x > MC_y$ minden $(x,y)$-ra.[3]

A nettó profit nagysága egy adott időpontban $\pi(x,y) = P(q)q - c(x,y)$, így Lagrange-függvényünk a következő:

$$\mathcal{L} = e^{-\rho t}\left[(x+y)P(x+y) - c(x,y)\right] - \lambda y + \underline{\alpha} x + \bar{\alpha}(\bar{x} - x) + vy\,.$$

A (8)-(10) elsőrendű feltételek továbbra is érvényben maradnak, (6) és (7) helyett pedig a következőket írhatjuk:

$$e^{-\rho t}[P(q) + qP'(q) - MC_x(q)] + \underline{\alpha} - \bar{\alpha} = 0\,, \tag{27}$$

$$e^{-\rho t}[P(q) + qP'(q) - MC_y(q)] - \lambda + v = 0\,, \tag{28}$$

ahol $P'(q) = dP/dq$. A zárójelben szereplő kifejezések közgazdasági tartalma a határprofit nagysága a kimeríthetetlen, illetve a kimeríthető természeti erőforrás felhasználása esetén éppúgy, mint a (6), (7) illetve (21), (22) feltételek esetében. Bevezetve e nagyságokra a $v_x$ és $v_y$ jelöléseket, az alábbiakat írhatjuk:

$$v_x(q) = P(q) + qP'(q) - MC_x(q)\,, \tag{29}$$

$$v_y(q) = P(q) + qP'(q) - MC_y(q)\,. \tag{30}$$

Az erőforrásfelhasználás optimális sorrendjével kapcsolatos vizsgálódásaink során döntő szerepet játszik a határprofit függvények monotonitása. Legyen $i \in \{x,y\}$, ekkor

$$v_i'(q) = 2P'(q) + P''(q) - MC_i'(q)\,.$$

A határprofit függvények szigorúan monoton csökkenő voltához elegendő feltenni az alábbiakat:

1. negatív meredekségű iparági keresleti függvény és
2. konvex iparági keresleti függvény és
3. nemcsökkenő határköltség függvény.

[3]E föltevés csak látszólag erős, valójában a 2. szakaszban alkalmazott $\mu < \eta$ föltevés gyengítése.

Az első két feltétel teljesülése valószínűnek tűnik, a harmadik azonban vitatható, mivel a határköltség függvény monoton növekedő jellege mögött a csökkenő skálahozadék feltevése húzódik meg. Miként azt Charles I. Jones figyelemre méltó tanulmányában [5] megállapítja, szoros kapcsolat mutatható ki az emberi ötletgazdagságot is figyelembe vevő növekedési modellek és a növekvő skálahozadék hipotézise között. Másrészt a technikai haladás is folyamatosan csökkenti a termelés határköltségét. Mindeme nehézségek ellenére a továbbiakban föltesszük, hogy a határprofit függvény szigorúan monoton csökkenő.

Az 1. Tulajdonság teljesülése most a (28) feltételből következik, a (13) egyenletet azonban a következő módon kell átírni:

$$\lambda e^{\rho t} = v_y(q)\,. \tag{31}$$

Legyen most $t_a$ a (31) egyenletet kielégítő azon maximális időpont, melyre $x = 0$ és $t_b$ $x = \bar{x}$ feltétel mellett kielégítő minimális időpont az optimális erőforrásfelhasználási pályán. $t_a < 0$ $t_b < 0$ esetén legyen $t_a = 0$ illetve $t_b = 0$ a 2. szakaszban bevezetett definícióknak megfelelően. Könnyen megmutatható, hogy a 3. Tulajdonság továbbra is érvényben van, a bizonyítás során természetesen a (27) új elsőrendű feltételt felhasználva. Érvényes a 4. Tulajdonság is, továbbá az optimális erőforrás-felhasználási pálya 1. Táblázatban összefoglalásra került jellemzői is. Még a 2. Következmény érvényességét kell ellenőrizni.

*Bizonyítás.* Ha $t \in [t_a, t_b]$, akkor $\underline{\alpha} = \bar{\alpha} = 0$, következésképp $v_x(q) = 0$ a (27) feltétel miatt. Így $q = v_x^{-1}(0)$, ahol a jobb oldalon álló kifejezés az inverz határprofit függvény. E függvény szigorúan monoton csökkenő, mivel föltevéseink szerint a határprofit függvény is szigorúan monoton csökkenő. Következésképp $q$-nak konstansnak kell lennie a $[t_a, t_b]$ intervallumon, és mivel $\dot{q} < 0$ az 1. Tulajdonság alapján, $t_a$ meg kell, hogy egyezzen $t_b$-vel. □

A 2. Következmény tanulságai hasonlóak a 2. szakaszban levontakhoz. Bevezetve $t_a = t_b$-re a $\bar{t}$ jelölést, $\bar{t} < T$ esetén a költségesebb kimeríthetetlen erőforrás felhasználása az optimális erőforrás-felhasználási pályán megkezdődik már az olcsóbb, meg nem újuló erőforrás készletének kimerítése előtt. Ez az átlapolási szituáció akkor és csakis akkor fordul elő az optimális erőforrás-felhasználási pályán, ha $v_x^{-1}(0) > \bar{x}$. Könnyen látható, hogy a (16) feltétel az iménti egyenlőtlenség egy speciális esete.

# 4 Társadalmi jólét versus profitmaximalizálás Összehasonlítás és értékelés

A normatív makromodellek általában a társadalmi jóléti függvény (pl. Blanchard és Fischer [3]) vagy a társadalmi veszteségfüggvény (pl. Mellár [8]) föltevésén alapulnak. E függvényeket általában a társadalmi preferenciák valamiféle aggregátumaként szokás értelmezni. A társadalmi jóléti (vagy veszteség-) függvény e koncepciója azonban rendkívül problematikus. Arrow lehetetlenségi tétele szerint [2][4] ilyen függvény nem is konstruálható. Számos szerző olymódon próbálja megoldani a problémát, hogy feltevésük szerint a társadalmi jóléti függvény egy központi tervező preferenciáit reprezentálja, akinek célja a társadalom jólétének maximalizálása (pl. Amigus és mások [1]). A nehézségek elintézésének másik gyakori módja egy olyan hipotézis alkalmazása, mely szerint a gazdaság azonos preferenciákkal jellemezhető, végtelen élettartamú háztartások sokaságából áll. (pl: Ladrón-de-Guevara és mások [7]). E föltevések azonban csupán látszólag oldják meg a társadalmi jóléti függvénnyel kapcsolatos elméleti nehézségeket, valójában megkerülik azokat. Ezen ok miatt vezettük be modellünkbe a nettó profit függvényét, megteremtve ezáltal a lehetőséget a társadalmi jóléti függvény illetve központi tervező föltevésének elhagyására. A jelen tanulmány legfontosabb következtetése, hogy ez a módosítás alapvetően nem változtatja meg a természeti erőforrások felhasználása optimális sorrendjének azon lényeges tulajdonságát, mely szerint bizonyos feltételek teljesülése esetén a költségesebb, kimeríthetetlen erőforrások felhasználása már az olcsóbb, nem megújítható erőforráskészletek kimerülése előtt megkezdődik.

E módosítás következtében természetesen megváltoznak az átlapolt erőforrás-felhasználás előfordulásának feltételei, amelyeket cikkünk minden egyes modellvariánsához le is vezettünk, továbbá nem áll fenn az $x$, $y$ függvények folytonossága. Mindez azt mutatja, hogy itt nem pusztán a célfüggvény interpretációjának megváltoztatásáról van szó. Jóllehet a társadalmi jóléti függvény és a profitfüggvény bizonyos formális hasonlóságot mutat, ez a formális hasonlóság meglehetősen távoli, hisz a társadalmi jóléti függvény mindkét változójában szigorúan monoton növekvő, míg a profitfüggvényre ez nem érvényes. Másrészt az erőforrásfelhasználási döntések profitmaximalizáló viselkedésre történő alapozása jóval reálisabb, és elméletileg kevésbé problematikus feltevés, mint a társadalom jólétének maximalizálását megkövetelni a döntések motívumaként.

A pozitív diszkontráta feltevése mögött meghúzódó okok elemzése még alaposabban megvilágítja a társadalmi jóléti függvényre, illetve profitfüggvényre alapozott modellek közti hasonlóságokat és különbségeket. A pozitív diszkontráta föltevését általában a célfüggvényben szereplő, végtelen tervezési időhorizont esetében improprius integrál konvergenciájának biztosítása érdekében szokás alkalmazni (pl. Ladrón-de-Guevara és mások [7]). Modellünkben azonban az egyszerűség érdekében a tervezés időhorizontja véges csakúgy, mint Amigus és mások [1] modelljében. Itt a pozitív diszkontráta föltevése azért szükséges, mert ez biztosítja $t < T \Rightarrow \dot{q} < 0$ teljesülését, amitől a modell következtetései döntő mértékben függenek. Az 1. Tulajdonságot, illetve annak módosított változatát, az 5. Tulajdonságot gyakran használtuk fel a bizonyítások során. A $\rho = 0$ feltevés konstans kibocsátást eredményezne az optimális erőforrásfelhasználási pályán, s ez alapvetően megváltoztatná a természeti erőforrások felhasználásának optimális sorrendjét modellünkben éppúgy, mint az [1], [6] vagy [10] modellben. A pozitív disz-

[4]Magyarul lásd Zalai [11].

kontráta társadalmi jóléti függvényben történő alkalmazása azonban súlyos etikai és politikai nehézségeket vet föl. A probléma gyökere abban áll, hogy ez esetben a jövőbeni fogyasztás a jelenbeninél kisebb súllyal kerül számításba az intertemporális jólét maximalizálása során. Igaz ugyan, hogy a társadalmi jóléti függvényt az egyéni preferenciák valamiféle összegzésének tekintve, pozitív egyéni időpreferenciák esetén ennek kifejezésre kell jutnia egy pozitív diszkontrátában, csakhogy ez esetben az összegzés során figyelmen kívül marad mindazon fogyasztók preferenciája, akik még nem születtek meg. E fogyasztók preferenciáit elvileg megjeleníthetné a kormányzat, ám ez a megoldás a demokratikus elvekkel szemben vet föl súlyos politikai nehézségeket. A profitáram nettó jelenértékét maximalizáló vállalat föltevése tehát már csak azért is célszerűbb, mert a társadalmi jóléti függvényben alkalmazott pozitív diszkontráta kérdése nem megoldott.

A dolgozatban ismertetett modellfeltevések iménti részletes elemzése után következtetéseinket az alábbiakban foglalhatjuk össze: A társadalmi jólét helyett a nettó profit diszkontált jelenértékét maximalizálva a tervezés során, továbbra is érvényes Amigus és mások [1] azon megállapítása, mely szerint a költségesebb kimeríthetetlen erőforrás felhasználását bizonyos esetekben már jóval az olcsóbb, meg nem újítható erőforráskészletek kimerülése előtt meg kell kezdeni. Másrészt a 3.1 pontban az is kiderült, hogy a kimeríthető erőforrásokat mindig a határköltség növekvő sorrendjében kell fölhasználni, ennyiben tehát Solow és Wan [10] következtetései továbbra is érvényesek.

## Irodalom


1. Amigus, J. P., Favard, P., Gaudet, G., Moreaux, M., On the Optimal Order of Natural Resource Use When the Capacity of the Inexhaustible Substitute is limited, *Journal of Economic Theory* **80** (1998), 153–170.
2. Arrow, K., *Social Choice and Individual Values.* 2nd edn, Yale University Press. New Haven, 1963.
3. Blanchard, O. J., Fischer, S., *Lectures on Macroeconomics.* The MIT Press. Cambridge, Massachusetts; London England 1992.
4. Chiang, A. C., *Elements of dynamic optimization.* McGraw-Hill, 1992.
5. Jones, C. I., Growth: With or Without Scale Effects, *American Economic Rewiew* **89** (1999) 139–144.
6. Kemp, M. C., Long, N. V., On the optimal order of exploitation of deposits of an exhaustible resource, in *Exhaustible resources, Optimality and Trade* (Kemp, M. C. and Long, N. V. eds.) North-Holland. Amsterdam, 1980.
7. Ladrón-de-Guevara, A., Ortigueira, S., Santos, M. S., A Two-Sector Model of Endogenous Growth with Leisure, *Rewiew of Economic Studies* **66** (1999) 609–631.
8. Mellár, T., *Alkalmazott makroökonómia.* JPTE-KTK. Pécs, 1997.
9. Romer, P. M., Endogenous Technological Change, *Journal of Political Economy* **98** (1990) S71-S102
10. Solow, R. M., Wan, F. Y., Extraction costs in the theory of exhaustible resources, *Bell J. Econ.* **7** (1976), 359–370.
11. Zalai, E., *Bevezetés a matematikai közgazdaságtanba.* KJK. Budapest, 1989.

## ON THE OPTIMAL ORDER OF UTILIZING NATURAL RESOURCES

This paper develops a dynamic model in which the marginal cost of production utilizing inexhaustible natural resources exceeds the marginal cost of production using any kind of exhaustible natural resources. The production capacity of the facility utilizing inexhaustible natural resources is finite in this model. We point out that —under certain assumptions— it is worth utilizing the more expensive inexhaustible natural resources even before the depletion of exhaustible natural resources. Instead of using an economic planner or social welfare function, the objective of the company is to maximize its market value.

# POZITÍV SZUBDEFINIT MÁTRIXOKRÓL ÉS ÁLTALÁNOSÍTÁSAIKRÓL[1]

KOMLÓSI SÁNDOR
*Pécsi Tudományegyetem Közgazdaságtudományi Kar*

Martos Béla az 1960-as évek végén bebizonyította, hogy kvadratikus függvények kvázikonvexitását az $R^n$ nemnegatív ortánsán egy új, általa bevezetett mátrix-tulajdonsággal, a pozitív szubdefinitással lehet karakterizálni. Egészen új az a felismerés, hogy affin leképezések kvázimonotonitási tulajdonságáért ugyancsak a pozitív szubdefinitás a ,,felelős". Jean-Pierre Crouzeix és a szerző a lineáris komplementaritási feladatok megoldhatóságát vizsgálva jutottak el egy általánosabb pozitív szubdefinitás fogalom célszerűségének felismeréséhez. A tanulmány a pozitív szubdefinitás fogalma fejlődésének ezt a három fontos állomását mutatja be.

## 1 Bevezetés

Martos Béla 75. születésnapja alkalmából Forgó Ferenc írt méltató cikket jelen folyóirat hasábjain Martos Béla matematikai programozási munkásságáról [8]. Azóta eltelt 5 esztendő, mely újabb számos bizonyítékát adta annak, hogy Martos Béla úttörő munkássága az optimalizáláselmélet terén még a mai napig is újabb és újabb kutatásokat inspirál.

Ez a tanulmány a Martos Béla által bevezetett pozitív szubdefinitás fogalmának új alkalmazási, és —ezzel szerves összefüggésben— új általánosítási lehetőségeiről kíván számot adni, tisztelegve ezzel is a 2000-ben 80. életévét betöltő Martos Béla munkássága előtt.

Martos Béla egyike azon tudósoknak, akik egy manapság már széles körben művelt és elfogadott tudományterület, az *általánosított konvexitás* bölcsője mellett bábáskodtak a 60-as években.

A konvexitás fogalma a 20. század első évtizedeiben kezdett az érdeklődés középpontjába kerülni, és az optimalizáláselmélet rohamos fejlődése révén a konvex halmazokra és a konvex függvényekre vonatkozó ismereteink mára már egy önálló diszciplínává a *konvex analízissé* terebélyesedtek.

A matematikai programozás kialakulása és rohamos fejlődése előtérbe helyezte a konvexitás fogalmának lehetséges és szükséges általánosítási lehetőségeit. Az 50-es években megindult ezirányú kutatások a 60-as évek elejére olyan új fontos irányzatok kialakulásához vezettek, mint kvázikonvex programozás, kvázikonvex analízis. A kvázikonvexitás mellett olyan további fontos fogalmak alakultak ki, mint pszeudokonvexitás, explicit kvázikonvexitás, szigorú- illetve félig szigorú kvázikonvexitás, invexitás, preinvexitás stb. Újabban

[1] Beérkezett: 1999. november 3.

ezekre a fogalmakra és a rájuk vonatkozó, egyre gyarapodó ismeretekre az Általánosított Konvexitás gyűjtőfogalommal hivatkozunk.

Martos Béla —cikkünk témája szempontjából— egyik fontos hozzájárulása ehhez a diszciplínához a kvadratikus függvények kvázikonvexitási tulajdonságainak vizsgálata. Ennek kapcsán vezette be a pozitív szubdefinitás fogalmát szimmetrikus mátrixokra. Az erre vonatkozó eredményeket a 2. fejezetben tekintem át (v.ö. [15, 16]).

Néhány évvel ezelőtt Jean-Pierre Crouzeix és munkatársai affin leképezések általánosított monotonitási tulajdonságait vizsgálva kimutatták, hogy a szóban forgó tulajdonság a pozitív szubdefinitás fogalmának nemszimmetrikus mátrixokra való megfelelő kiterjesztésével karakterizálható. Ennek a kérdéskörnek dolgozatunk szempontjából releváns vonatkozásait a 3. fejezetben mutatom be (v.ö. [5]).

Jean-Pierre Crouzeix és a szerző a lineáris komplementaritási feladatok megoldhatóságát vizsgálva jutottak el egy általánosabb pozitív szubdefinitás fogalom célszerűségének felismeréséhez. A 4. fejezet részletesen tárgyalja a lineáris komplementaritási feladat megoldhatóságának kérdéskörét és bemutatja azt az új megközelítési módot, melynek eredményeképpen a pozitív szubdefinitás fogalmának egy lényegesen általánosabb formája került az érdeklődés középpontjába (v.ö. [7]).

## 2 Kvázikonvex kvadratikus függvények

Az $f : K \to R$ ($K \subseteq R^n$ konvex halmaz) függvényt *kvázikonvexnek* nevezzük, ha bármely $x_1, x_2 \in K$ és $0 \leq \lambda \leq 1$ esetén

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \max\{f(x_1), f(x_2)\}.$$

Legyen

$$f(x) = \langle Mx, x\rangle + \langle q, x\rangle + c, \quad x \in R^n,$$

ahol $M$ $n \times n$-es mátrix, $q$ $n$-dimenziós vektor és $c$ valós szám. Egyszerű számolással adódik, hogy

$$\nabla f(x) = (M + M^T)x + q$$

és

$$\nabla^2 f(x) = M + M^T.$$

Mivel $2\langle Mx, x\rangle = \big\langle (M + M^T)x, x\big\rangle$ minden $x \in R^n$ esetén, ezért az általánosságot nem sértjük, ha eleve feltesszük, hogy az $M$ mátrix szimmetrikus.

A többváltozós függvények klasszikus elméletéből ismert, hogy az $f(x)$ kvadratikus függvény akkor és csak akkor konvex, ha az $M$ szimmetrikus mátrix pozitív szemidefinit ($PSemiD$). A kvázikonvexitás nem hoz semmi újat, ha $R^n$-en vizsgáljuk. Megmutatható ugyanis, hogy $f(x)$ csak úgy lehet kvázikonvex az egész $R^n$-en, ha konvex. Gyakorlati feladatoknál természetes megszorítás a változók nem-negativitása. Ezért különös jelentőséggel bír az általánosított konvexitási tulajdonságokat $R^n_+$-on, a nem-negatív ortánson vizsgálni. Martos Béla egyik szép eredménye a következő.

**1. Tétel.** [15,16] *Legyen $f(x)$ nem-konvex kvadratikus függvény. Ekkor $f(x)$ akkor és csak akkor kvázikonvex az $R^n_+$ nem-negatív ortánson, ha teljesülnek a következő feltételek:*

*(i)* $w \in R^n, \langle Mw, w\rangle < 0 \Longrightarrow Mw \geq 0$ *vagy* $Mw \leq 0$,

*(ii)* $q \leq 0$,

*(iii)* *van olyan* $u \in R^n$, *hogy* $q = Mu$ *és* $\langle q, u\rangle \leq 0$.

Ennek a tételnek az (i) feltétele kizárólag az $M$ mátrixra vonatkozik. Az (i) feltételnek eleget tevő mátrixokat Martos Béla pozitív szubdefinit (*PsubD*) mátrixoknak nevezte el.

**Definíció.** Az $n$-edrendű szimmetrikus $M$ mátrixot *pozitív szubdefinitnek* mondjuk, ha bármely $w \in R^n$-re

$$\langle Mw, w\rangle < 0 \Rightarrow Mw \leq 0 \text{ vagy } Mw \geq 0. \qquad (PSubD)$$

A definíciókból közvetlenül adódik, hogy egy $PSemiD$ mátrix $PSubD$ is egyúttal, vagyis a $PSubD$ mátrixok osztálya tartalmazza a $PSemiD$ mátrixosztályt. Az érdeklődő Olvasó Martos Béla [16] könyvében számos érdekes és fontos eredményt talál a $PSubD$ mátrixosztályról. Érdemes megemlíteni Martos tételének egy lehetséges ekvivalens formáját.

**2. Tétel.** [1] *Legyen $f(x)$ nem-konvex kvadratikus függvény. Ekkor $f(x)$ akkor és csak akkor kvázikonvex az $R^n_+$ nem-negatív ortánson, ha az*

$$\begin{bmatrix} M & q \\ q^T & 0 \end{bmatrix}$$

*mátrix pozitív szubdefinit.*

# 3 Affin leképezések pszeudomonotonitása

A klasszikus analízis egyik közismert tétele szerint a differenciálható $f(x)$, $x \in R$ függvény akkor és csak akkor konvex az $(a, b)$ intervallumon, ha az $f'(x)$ derivált függvény növekvő $(a, b)$-n. Ez azt jelenti, hogy minden $x_1, x_2 \in (a, b)$ esetén

$$(x_1 - x_2)(f'(x_1) - f'(x_2)) \geq 0.$$

Lehet, hogy a növekedésnek ez a formulázása kissé szokatlan, de a többváltozós függvények esetén a konvexitás elsőrendű jellemzése pont ebben az alakban lehetséges. Bizonyítható ugyanis, hogy a differenciálható $f(x), x \in$

$R^n$ függvény akkor és csak akkor konvex a $K \subseteq R^n$ konvex halmazon, ha minden $x_1, x_2 \in K$ esetén

$$\langle x_1 - x_2, \nabla f(x_1) - \nabla f(x_2) \rangle \geq 0. \qquad (Mon)$$

Ezt a tulajdonságot az $x \to \nabla f(x)$ leképezés monotonitásának nevezik.

A 60-as évektől kezdődően a különböző általánosított konvexitási tulajdonságok számos fontos tulajdonságára derült fény, de érdekes módon tisztán elsőrendű jellemzésre lényegében véve egészen 1990-ig kellett várni. Ekkor jelent meg S. Karamardian és S. Schaible nevezetes cikke [10], amelyben a (gradiens) leképezés monotonitásának fogalmát olyan módon általánosították, hogy az pontosan bizonyos általánosított konvexitási tulajdonsággal legyen ekvivalens. Bevezették a leképezés kvázimonotonitásának, pszeudomonotonitásának fogalmát és (többek között) megmutatták, hogy az $f(x)$ differenciálható függvény akkor és csak akkor kvázikonvex (pszeudokonvex) egy adott $K$ konvex halmazon, ha a $\nabla f(x)$ gradiens-leképezés kvázimonoton (pszeudomonoton) $K$-n. Ennek a cikknek a megjelenése egy új kutatási irányzat, az *általánosított monotonitás* kialakulásához vezetett [6, 12], mely *variációs egyenlőtlenségek* és *általános egyensúlyi feladatok* vizsgálatánál is fontos szerepet játszik [14].

**Definíció.** A $T : R^n \to R^n$ leképezést *kvázimonotonnak* mondjuk a $K \subseteq R^n$ halmazon, ha bármely $x_1, x_2 \in K$ esetén

$$\langle x_1 - x_2, T(x_1) \rangle < 0 \quad \Rightarrow \quad \langle x_1 - x_2, T(x_2) \rangle \leq 0. \qquad (QMon)$$

**Definíció.** A $T : R^n \to R^n$ leképezést *pszeudomonotonnak* mondjuk a $K \subseteq R^n$ halmazon, ha bármely $x_1, x_2 \in K$ esetén

$$\langle x_1 - x_2, T(x_1) \rangle < 0 \quad \Rightarrow \quad \langle x_1 - x_2, T(x_2) \rangle < 0. \qquad (PsMon)$$

Ha visszatérünk a Martos Béla által vizsgált kvadratikus függvényekhez, akkor a fenti eredmények tükrében vizsgálatukat „átjátszhatjuk” a $\nabla f(x) = Mx + q$ affin leképezés vizsgálatára. Érdekes módon a $T(x) = Mx + q$ típusú affin leképezések egy általánosabb probléma kapcsán is előtérbe kerülnek, nevezetesen a lineáris komplementaritási feladatot ilyen leképezések határozzák meg.

A *Lineáris Komplementaritási Feladat* ($LKF$) a következő [4]: keressük azokat az $x \in R^n$ vektorokat, amelyek eleget tesznek a következő feltételeknek

$$\begin{aligned} \langle Mx + q, x \rangle &= 0, \\ Mx + q &\geq 0, \\ x &\geq 0, \end{aligned} \qquad LKF(M, q)$$

ahol $M$ $n$-edrendű kvadratikus mátrix, $q$ pedig $n$-dimenziós vektor.

Az $LKF(M, q)$-ban szereplő $M$ mátrix csak kvadratikus, nem kell szimmetrikusnak lennie. A legújabb vizsgálatok kiderítették, hogy $LKF(M, q)$-nak számos jó tulajdonságot biztosít az, ha a $T(x) = Mx + q$ affin leképezés pszeudomonoton $R^n_+$-on. Érdemes a következő tételt összehasonlítani az 1. Tétellel.

**3. Tétel.** [5] *Legyen a $T(x) = Mx + q$ leképezés nem-monoton, legyen továbbá* $\mathrm{rank}(M) \geq 2$. *Ekkor $T(x)$ akkor és csak akkor pszeudomonoton az $R^n_+$ nem-negatív ortánson, ha teljesülnek a következő feltételek:*

(i) $w \in R^n, \langle Mw, w\rangle < 0 \Longrightarrow M^T w \geq 0$ *vagy* $M^T w \leq 0$,

(ii) *van olyan* $u \in R^n$, *hogy* $q = Mu$,

(iii) *ha* $q = M\bar{u}$, *akkor* $\langle M^s\bar{u}, \bar{u}\rangle \leq 0$ *és* $M^s\bar{u} \leq 0$.

Könnyen észrevehetjük, hogy az (i) feltétel szimmetrikus mátrixok esetén pontosan a pozitív szubdefinitást jelenti, ennélfogva az (i) feltétel a Martos-féle szubdefinitás fogalomnak a kvadratikus mátrixok osztályára való kiterjesztése.

**Definíció.** [5] Az $n$-edrendű $M$ mátrixot pozitív szubdefinitnek ($PSbD$) mondjuk, ha bármely $w \in R^n$-re

$$\langle Mw, w\rangle < 0 \Rightarrow M^T w \leq 0 \text{ vagy } M^T w \geq 0. \qquad (PSbD)$$

Az érdeklődő Olvasó számos érdekes és fontos eredményt talál a $PSbD$ mátrixokról az [5] dolgozatban. Bizonyítható, többek között, a 2. Tétel analogonja.

**4. Tétel.** *Legyen a $T(x) = Mx + q$, ahol $\mathrm{rank}(M) \geq 2$. Ekkor $T(x)$ akkor és csak akkor pszeudomonoton az $R^n_+$ nem-negatív ortánson, ha az*

$$\begin{bmatrix} M & q \\ q^T & 0 \end{bmatrix}$$

*mátrix pozitív szubdefinit.*

# 4 Általánosított PSbD mátrixok

Ebben a részben megmutatjuk, hogy a lineáris komplementaritási feladat egy újszerű vizsgálata hogyan vezet el a $PSbD$ mátrixosztály egy további általánosításához.

## 4.1 A Lineáris Komplementaritási Feladat

Tekintsük ismét az $LKF(M, q)$ feladatot:

$$\begin{aligned} \langle Mx + q, x\rangle &= 0, \\ Mx + q &\geq 0, \qquad LKF(M, q) \\ x &\geq 0, \end{aligned}$$

Jelölje $S(M, q)$ a fenti feladat megoldási halmazát. Ennek tanulmányozásához „bevett szokás" a következő segédfeladatot segítségül hívni:

$$\min\left[f(x) = \langle Mx + q, x\rangle : Mx + q \geq 0,\ x \geq 0\right]. \qquad QP(M, q)$$

Jelölje $S'(M, q)$ ennek a feladatnak a megoldási halmazát. Nyilvánvaló, hogy

$$S(M, q) \subseteq S'(M, q),$$

és $a \in S(M, q)$ akkor és csak akkor teljesül, ha $a$ lehetséges megoldás és $f(a) = 0$. A $QP(M, q)$ kvadratikus programozási feladatnak van néhány igen figyelemreméltó tulajdonsága: a feltételi halmaza poliedrikus, a célfüggvénye pedig a feltételi halmazon alulról korlátos. Frank és Wolfe egyik nevezetes tétele szerint [9] ennek a feladatnak mindig van optimális megoldása, amennyiben létezik lehetséges megoldása. Lehetséges megoldás létezése azt jelenti, hogy létezik olyan $x \in R^n$ vektor, amelyre teljesülnek az $x \geq 0$ és $Mx+q \geq 0$ feltételek. A Farkas-lemma szerint ez a *konzisztencia feltétel* ekvivalens a következővel:

$$u \geq 0,\ M^T u \leq 0 \Rightarrow \langle q, u\rangle \geq 0.$$

Vezessük be a következő kúpot

$$K_M = \left\{u \in R^n : u \geq 0,\ M^T u \leq 0\right\},$$

és tekintsük ennek negatív polárisát:

$$K_M^0 = \{p \in R^n : \langle p, u\rangle \leq 0\ \forall u \in K_M\}.$$

Ennek a poláris kúpnak a segítségével a „konzisztencia" kérdése a következőképpen is kifejezhető: az $LKF(M, q)$ feladat feltételrendszere akkor és csak akkor konzisztens (megoldható), ha

$$-q \in K_M^0.$$

Ennek és a korábban említett Frank-Wolfe tételnek az alapján nyilvánvaló, hogy

$$S'(M, q) \neq \emptyset \Leftrightarrow -q \in K_M^0,$$

illetve egy $a \in R^n$ lehetséges megoldásra

$$a \in S(M, q) \Leftrightarrow -q \in K_M^0 \text{ és } f(a) = 0.$$

A fentiekből következik, hogy ha $K_M = \{0\}$, akkor az $LKF(M, q)$ feladat minden $q \in R^n$-re konzisztens, hiszen ebben az esetben $K_M^0 = R^n$. Ez az eset következik be például akkor, ha az $M + M^T$ mátrix pozitív szemidefinit.

Tegyük most fel, hogy $a \in S'(M, q)$. Ekkor $a$-ban teljesülnek az optimalitás Karush-Kuhn-Tucker feltételei, nevezetesen léteznek olyan $u, v \in R^n$ vektorok, hogy

$$(M + M^T)a + q - M^T u - v = 0, \qquad KKT(a)$$

$$a, u, v, Ma + q \geq 0\,, \qquad KKT(b)$$

$$\langle a, v\rangle = \langle Ma + q, u\rangle = 0\,. \qquad KKT(c)$$

Jelölje $S''(M,q)$ azon $a$ vektorok összességét, melyekre teljesülnek a fenti $KKT(a)$–$(c)$ feltételek. Mivel a $QP(M,q)$ kvadratikus programozási feladat feltételi halmaza reguláris, mert poliedrikus, ezért

$$S'(M,q) \subseteq S''(M,q)\,,$$

következésképpen

$$S(M,q) \subseteq S'(M,q) \subseteq S''(M,q)\,. \qquad (S)$$

Az $LKF(M,q)$ probléma megoldásainak megkeresésére elterjedt módszer a következő: megadunk olyan feltételeket, melyek biztosítják az $S(M,q) = S''(M,q)$ egybeesést és az $S(M,q)$ halmaz elemeit a $QP(M,q)$ kvadratikus programozási segédfeladat megoldása révén határozzuk meg [3, 4, 7].

A $KKT(a)$–$(c)$ feltételrendszerből könnyen adódik a következő:

$$0 = f(a) + \langle u, v\rangle + \left\langle M^T(u-a), (u-a)\right\rangle\,, \qquad (F)$$

ahol $f(a) = \langle Ma + q, a\rangle \geq 0$ és a Lagrange-szorzókra vonatkozó nem-negativitási kikötés miatt $\langle u, v\rangle \geq 0$. Ha történetesen $\left\langle M^T(u-a), (u-a)\right\rangle \geq 0$, akkor $f(a) = 0$, következésképpen $a$ megoldása az $LKF(M,q)$ feladatnak. Ezt a tényt ötvözve a konzisztenciára vonatkozó egyik korábbi megállapításunkkal egy már régóta jól ismert állításhoz jutunk:

**5. Tétel.** *Ha az $M + M^T$ mátrix pozitív szemidefinit, akkor minden $q$-ra $S(M,q) = S''(M,q) \neq \emptyset$.*

## 4.2 Egy új feltétel az $S(M,q) = S''(M,q)$ egybeesés biztosítására

A cikk hátralevő részeiben gyakran fogjuk használni a következő jelöléseket.

- Legyen $H$ szimmetrikus mátrix. Jelölje

  $$\nu_-(H)$$

  a $H$ mátrix negatív sajátértékeinek számát, annyiszor számolva az egyes sajátértékeket, amennyi a multiplicitásuk.

- Legyen $t \in R$ és legyenek

  $$t^+ = \max\{t, 0\}, \quad t^- = \max\{0, -t\}.$$

- Tetszőleges $x \in R^n$ vektorra legyenek

  $$x^+ = (x_1^+, x_2^+, \ldots, x_n^+) \quad \text{és} \quad x^- = (x_1^-, x_2^-, \ldots, x_n^-).$$

A következő tétel a kiindulópontja a további vizsgálódásoknak, mely mélyebb betekintést ad az $(F)$ feltétel "finomszerkezetébe".

**6. Tétel.** [7] *Legyen $a \in R^n$ $KKT$-stacionárius pontja a $QP(M,q)$ feladatnak $u, v \geq 0$ Lagrange multiplikátor vektorokkal. Legyen $w = u - a$. Ekkor*

$$f(a) = \langle a, Ma + q \rangle = \left\langle \left(M^T w\right)^+, w^- \right\rangle, \tag{F1}$$

$$\langle u, v \rangle = \left\langle \left(M^T w\right)^-, w^+ \right\rangle, \tag{F2}$$

$$0 = \left\langle \left(M^T w\right)^+, w^+ \right\rangle + \left\langle \left(M^T w\right)^-, w^- \right\rangle, \tag{F3}$$

$$f(a) = -\frac{1}{2} \langle q, w \rangle . \tag{F4}$$

**Bizonyítás.** Írjuk át a $KKT(a)$ és $(F)$ feltételeket *koordinátás alakba*: minden $i$-re

$$v_i + (M^T w)_i = (Ma + q)_i \tag{1}$$

és

$$0 = (Ma + q)_i a_i + u_i v_i + (M^T w)_i w_i .$$

Ez utóbbit egyszerű átrendezéssel a következő alakra hozhatjuk.

$$-w_i (M^T w)_i = a_i (Ma + q)_i + u_i v_i \geq 0, \quad \forall i, \tag{2}$$

melyből azonnal adódik $(F3)$.

Tegyük fel, hogy $(M^T w)_i > 0$. Ekkor (2) miatt $w_i \leq 0$, (1) miatt pedig $(Ma{+}q)_i > 0$. A $KKT(c)$ komplementaritási feltételből ekkor $u_i = 0$ adódik, ami miatt (2) a következő alakot ölti:

$$a_i (Ma + q)_i = -w_i (M^T w)_i .$$

Mindezen megállapításokból közvetlenül adódik, hogy

$$a_i (Ma + q)_i = (M^T w)_i^+ w_i^-, \tag*{$F1(i)$}$$

és

$$u_i v_i = (M^T w)_i^- w_i^+. \tag*{$F2(i)$}$$

Tegyük most fel, hogy $(M^T w)_i < 0$. Ekkor (2) miatt $w_i \geq 0$, (1) miatt pedig $v_i > 0$. A $KKT(c)$ komplementaritási feltételből ekkor $a_i = 0$ adódik, ami miatt (2) a következő alakot ölti:

$$u_i v_i = -w_i (M^T w)_i .$$

Az elmondottak alapján nyilvánvaló, hogy ebben az esetben is teljesülnek a $F1(i)$–$F2(i)$ feltételek.

Végezetül tegyük fel, hogy $(M^T w)_i = 0$. Ekkor (2)-ből $a_i(Ma+q)_i = u_i v_i = 0$ következik és ennélfogva $F1(i)$ és $F2(i)$ ebben az esetben is teljesül. Ez pedig pontosan a $(F1)$–$(F2)$ állításokat igazolja.

Az $(F4)$ feltétel bizonyítása a következőképpen történhet: Mivel $f(a) = \langle Ma+q, a\rangle$ és $KKT(c)$ szerint $0 = \langle Ma+q, u\rangle$, ezért nyilvánvaló, hogy

$$f(a) = \langle Ma+q, a-u\rangle = \langle Ma, a-u\rangle + \langle q, a-u\rangle\,.$$

Másfelől viszont, $KKT(a)$-ból adódik, hogy $Ma+q = M^T(u-a)+v$. Mivel $KKT(c)$ miatt $\langle a, v\rangle = 0$, ezért nyilvánvaló, hogy

$$f(a) = \langle Ma+q, a\rangle = \left\langle M^T(u-a), a\right\rangle = \langle u-a, Ma\rangle\,.$$

Ebből a két összefüggésből kiadódik az $(F4)$ feltétel. □

Az imént bizonyított tétel alapján több elegendő feltétel is adható arra, hogy $S(M,q) = S''(M,q)$ teljesüljön.

- Az $(F)$ feltétel szerint $\langle Mw, w\rangle \geq 0$ garantálja az $f(a) = 0$ feltételt.
- Az $(F4)$ feltétel szerint, ha $\langle Mw, w\rangle < 0$, de $\langle q, w\rangle \geq 0$, akkor is bekövetkezik az $f(a) = 0$ eset.
- Ha viszont $\langle Mw, w\rangle < 0$ és $\langle q, w\rangle \leq 0$, akkor az $(F1)$ feltétel szerint az $\left\langle \left(M^T w\right)^+, w^-\right\rangle = 0$ feltétel elegendő az $f(a) = 0$ feltétel „kikényszerítéséhez".

Az elmondottak remélhetőleg elegendő indokot szolgáltatnak a következő fogalom bevezetéséhez.

**Definíció.** [7] Az $(M,q)$ párt *megfelelőnek* mondjuk, ha

$$\langle Mw, w\rangle < 0 \ \text{ és } \ \langle q, w\rangle \leq 0 \Rightarrow \left\langle \left(M^T w\right)^+, w^-\right\rangle = 0\,. \qquad APP$$

A következő tétel mutat rá az imént bevezetett fogalomnak a jelentőségére.

**7. Tétel.** [7] *Ha az $(M,q)$ pár megfelelő, akkor $S(M,q) = S''(M,q)$.*

**Bizonyítás.** Folytonosság miatt az $(APP)$ feltétel a következő „élesebb" formában is teljesül:

$$\langle Mw, w\rangle \leq 0 \ \text{ és } \ \langle q, w\rangle \leq 0 \Rightarrow \left\langle \left(M^T w\right)^+, w^-\right\rangle = 0\,.$$

Legyen $a \in S''(M,q)$. Legyenek $u, v \geq 0$ a megfelelő Lagrange multiplikátorok. Legyen $w = u - a$. Ekkor $(F)$ és $(F4)$ szerint $\langle Mw, w\rangle \leq 0$ és $\langle q, w\rangle \leq 0$. Mivel az $(M,q)$ pár megfelelő, ezért $\left\langle \left(M^T w\right)^+, w^-\right\rangle = 0$, és mivel $(F1)$ szerint $f(a) = \left\langle \left(M^T w\right)^+, w^-\right\rangle$, ezért $f(a) = 0$, következésképpen $a \in S(M,q)$. □

Nem nehéz belátni, hogy az $(M,q)$ pár megfelelő a következő esetekben:

- az $M + M^T$ mátrix pozitív szemidefinit,
- az $M$ mátrix pozitív szubdefinit de $M + M^T$ nem pozitív szemidefinit és van olyan $u \in R^n, u \geq 0$, hogy $q = Mu$.

A következő tétel megfelelő $(M, q)$ pár mátrix komponensének egy fontos tulajdonságára mutat rá.

**8. Tétel.** *Ha az $(M, q)$ pár megfelelő, akkor $\nu_-(M + M^T) \leq 1$.*

**Bizonyítás.** Legyen az $(M, q)$ pár megfelelő. Először is megmutatjuk, hogy ekkor érvényes a következő implikáció:

$$\langle q, w\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle Mw, w\rangle \geq 0\,. \tag{3}$$

Ezt indirekt módon bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy létezik olyan $w$, amelyre $\langle q, w\rangle = 0$ és $\langle Mw, w\rangle < 0$ teljesül. Az $(APP)$ feltétel folytán

$$\left\langle \left(M^T w\right)^+, w^-\right\rangle = 0\,. \tag{4}$$

Mivel nyilvánvaló, hogy $\langle q, -w\rangle = 0$ és $\langle M(-w), -w\rangle < 0$, ezért ugyancsak $(APP)$ miatt

$$\left\langle \left(M^T w\right)^-, w^+\right\rangle = 0\,. \tag{5}$$

(4) és (5) miatt

$$\langle Mw, w\rangle = \left\langle \left(M^T w\right)^+, w^+\right\rangle + \left\langle \left(M^T w\right)^-, w^-\right\rangle \geq 0\,,$$

ami ellentmond kiindulási feltevésünknek.

Most megmutatjuk, hogy a (3) implikáció teljesülése esetén $\nu_-(M + M^T) \leq 1$. Tegyük fel állításunkkal ellentétben, hogy $\nu_-(M + M^T) > 1$. Ekkor léteznek olyan $w_1$ és $w_2$ egymásra merőleges sajátvektorai az $(M+M^T)$ mátrixnak, hogy $\langle Mw_1, w_1\rangle < 0$ és $\langle Mw_2, w_2\rangle < 0$. A (3) implikáció miatt ekkor $\langle q, w_1\rangle \neq 0$ és $\langle q, w_2\rangle \neq 0$. Az általánosságot nem sérti, ha feltesszük, hogy $\langle q, w_1\rangle > 0$ és $\langle q, w_2\rangle < 0$. Ekkor létezik olyan $0 < t_0 < 1$ valós szám, hogy

$$\langle q, w_0\rangle = 0$$

teljesül a $w_0 = t_0 w_1 + (1 - t_0) w_2$ vektorra. (3) miatt ekkor

$$\langle Mw_0, w_0\rangle \geq 0$$

kell, hogy legyen. Másfelől azonban

$$2\langle Mw_0, w_0\rangle = \langle (M + M^T) w_0, w_0\rangle = 2t_0^2 \langle Mw_1, w_1\rangle + 2(1-t_0)^2 \langle Mw_2, w_2\rangle < 0.$$

Ez az ellentmondás igazolja tételünket. □

Mivel $\nu_-(M+M^T)=0$ esetén a $QP(M,q)$ feladat egy konvex kvadratikus programozási feladat, melynek vizsgálata nem hoz semmi újat, ezért a továbbiakban azt az esetet vizsgáljuk, amikor $\nu_-(M+M^T)=1$. Ebben az esetben a

$$K=\{w:\langle Mw,w\rangle\leq 0\}$$

halmaz nem üres, és a következő nevezetes tulajdonsággal rendelkezik.

**Lemma.** *Legyen $M$ olyan kvadratikus mátrix, melyre a $H=M+M^T$ mátrixnak pontosan egy egyszeres negatív sajátértéke van. Ekkor létezik olyan zárt konvex kúp $T$, hogy*

$$K=\{w:\langle Mw,w\rangle\leq 0\}=T\cup(-T)\,. \tag{6}$$

**Bizonyítás.** Induljunk ki abból, hogy a $K$ kúpot a következőképpen is megadhatjuk

$$K=\{w:\langle Hw,w\rangle\leq 0\}\,.$$

Ismeretes a szimmetrikus mátrixok elméletéből, hogy a $\langle Hw,w\rangle$ kvadratikus formát egy $P$ unitér transzformáció segítségével ($PP^T=P^TP=I$) diagonál formára lehet transzformálni. Ezzel a $P$-vel teljesül a következő:

$$H=PDP^T=P\begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0\\ 0 & D_2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}P^T,$$

ahol $d_1$ jelöli a $H$ egyetlen negatív sajátértékét, $D_2$ pedig egy pozitív definit diagonál mátrix.

Tekintsük a $P^T(K)=L$ kúpot. Ekkor $w\in K\Leftrightarrow P^Tw\in L$, továbbá

$$L=\left\{y=P^Tw:\langle HPy,Py\rangle=\langle Dy,y\rangle\leq 0\right\}\,.$$

Particionáljuk az $y=P^Tw$ vektort a $D$ fenti előállításának megfelelő módon:

$$y=\begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix},$$

és legyen

$$Y=\{y:\langle Dy,y\rangle=d_1y_1^2+\langle D_2y_2,y_2\rangle\leq 0 \text{ és } y_1\geq 0\}.$$

Az nyilvánvaló, hogy

$$L=Y\cup(-Y).$$

Legyen $T=P(Y)$. Ekkor

$$K=P(L)=P(Y)\cup P(-Y)=T\cup(-T).$$

Most megmutatjuk, hogy $T$ zárt és konvex kúp. Ezt elegendő az $Y$ kúpról bebizonyítani. A $\langle Dy,y\rangle$ kvadratikus forma folytonossága biztosítja azt, hogy

$Y$ zárt. $Y$ konvexitása azonban már nem annyira nyilvánvaló. Ehhez vegyük észre, hogy $Y$-t a következő módon is megadhatjuk:

$$Y = \left\{ y : \sqrt{\langle D_2 y_2, y_2 \rangle} \leq \sqrt{-d_1} y_1 \text{ és } y_1 \geq 0 \right\}.$$

Tekintettel arra, hogy $D_2$ pozitív definit, ennélfogva a $\langle D_2 y_2, y_2 \rangle$ kvadratikus forma szigorúan konvex, de ugyancsak konvex a $\sqrt{\langle D_2 y_2, y_2 \rangle}$ függvény is. Legyenek $u, v \in Y$ és legyen $z = \lambda u + (1 - \lambda) v$. Ekkor

$$\sqrt{\langle D_2 z_2, z_2 \rangle} \leq \lambda \sqrt{\langle D_2 u_2, u_2 \rangle} + (1 - \lambda) \sqrt{\langle D_2 v_2, v_2 \rangle} \leq$$
$$\lambda \sqrt{-d_1} u_1 + (1 - \lambda) \sqrt{-d_1} v_1 = \sqrt{-d_1} z_1 ,$$

következésképpen $z \in Y$. □

Ezek után bebizonyítjuk a következő tételt.

**9. Tétel.** [7] *Tegyük fel, hogy* $\nu_-(M + M^T) = 1$ *és* $q \neq 0$. *Ekkor az* $(M, q)$ *pár akkor és csak akkor megfelelő, ha* $q \in T^0$ *és minden* $i = 1, 2, \ldots, n$*-hez találhatók olyan* $s_i, t_i \geq 0$ *valós számok, hogy*

$$s_i + t_i = 1 \quad \text{és} \quad - s_i e_i + t_i m_i \in T^0,$$

*ahol* $e_i$ *illetve* $m_i$ *az* $E$ $n$*-edrendű egységmátrix és az* $M$ *mátrix* $i$*-edik oszlopait jelölik.*

**Bizonyítás.** *Szükségesség.* Tegyük fel, hogy az $(M, q)$ pár megfelelő. Az előző tétel bizonyításából tudjuk, hogy ekkor teljesül a (3) implikáció, mely ekvivalens a következővel:

$$\langle Mw, w \rangle < 0 \quad \Rightarrow \quad \langle q, w \rangle \neq 0 .$$

Tekintettel a (6) dekompozícióra, ebből az következik, hogy vagy $q$, vagy pedig $-q$ eleme a $T^0$ poláris kúpnak. Mivel $q$ adott, ezért minden további nélkül megtehetjük, hogy a (6) dekompozíciónak azt a komponensét jelöljük $T$-vel, amellyel $q \in T^0$ teljesül. Ekkor

$$T = \{ w : \langle Mw, w \rangle \leq 0 \quad \text{és} \quad \langle q, w \rangle \leq 0 \} . \tag{7}$$

Vezessük be minden $i$-re, $i = 1, 2, \ldots, n$, a

$$W_i = \left\{ w : \langle e_i, w \rangle = w_i < 0 \quad \text{és} \quad \langle m_i, w \rangle = (M^T w)_i > 0 \right\} .$$

konvex poliédert. Nem nehéz belátni, hogy $(M, q)$ akkor és csak akkor megfelelő pár, ha minden $i$-re

$$T \cap W_i = \emptyset . \tag{8}$$

A Farkas-lemma segítségével viszonylag egyszerűen igazolható, hogy a $W_i$ poliéder akkor és csak akkor üres, ha léteznek olyan $s_i, t_i$ nemnegatív valós számok, melyekre $s_i + t_i = 1$ és $s_i e_i = t_i m_i$.

Ezek után tegyük fel, hogy $W_i \neq \emptyset$. Ekkor a konvex halmazok szeparációs tétele szerint a (8) feltétel ekvivalens a következővel: létezik olyan $d_i \in R^n, d_i \neq 0$ vektor, hogy

$$\sup\{\langle d_i, w\rangle : w \in T\} \leq 0 \leq \inf\{\langle d_i, w\rangle : w \in W_i\}.$$

Ebből egyfelől az következik, hogy

$$d_i \in T^0,$$

másfelől pedig az, hogy

$$0 \leq \inf\left\{\langle d_i, w\rangle : w_i \leq 0 \quad \text{és} \quad (M^T w)_i \geq 0\right\}.$$

A Farkas-lemma szerint ebből az következik, hogy vannak olyan $s_i, t_i$ nemnegatív valós számok, melyekre $s_i + t_i > 0$ és $-s_i e_i + t_i m_i = d_i$. Tekintettel arra, hogy $T^0$ kúp, ezért az $s_i, t_i$ számok normálhatók oly módon, hogy teljesüljön az $s_i + t_i = 1$ feltétel.

*Elegendőség.* Tegyük fel, hogy a tétel feltételei teljesülnek és a $w \in R^n$ vektorra

$$\langle Mw, w\rangle < 0 \quad \text{és} \quad \langle q, w\rangle \leq 0$$

teljesül. A $T$ kúp (7) reprezentációjából következik, hogy $w \in T$. Mivel

$$-s_i e_i + t_i m_i \in T^0,$$

ezért

$$\langle -s_i e_i + t_i m_i, w\rangle \leq 0. \tag{9}$$

Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor $s_i \neq 0$. Ekkor

$$w_i \geq \frac{t_i}{s_i}(M^T w)_i.$$

Amennyiben $t_i \neq 0$, akkor (9)-ből azt kapjuk, hogy:

$$(M^T w)_i \leq \frac{s_i}{t_i} w_i.$$

Mindkét esetben teljesül a következő: minden $i$-re

$$(M^T w)_i^+ (w^-)_i = 0,$$

ami pontosan azt jelenti, hogy

$$\left\langle (M^T w)^+, w^-\right\rangle = 0,$$

vagyis az $(M, q)$ párra teljesül az $(APP)$ implikáció. □

## 4.3 Általánosított pozitív szubdefinit mátrixok

Az előző tételben szereplő feltételek körültekintő vizsgálata inspirálta a következő fogalom bevezetését.

**Definíció.** [7] Az $M$ kvadratikus mátrixot *általánosított pozitív szubdefinitnek* nevezzük, ha léteznek olyan $s_i, t_i \geq 0, s_i + t_i = 1, i = 1, 2, ..., n$ valós számok, hogy

$$\langle Mw, w\rangle < 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{vagy} & -s_i w_i + t_i(M^T w)_i \leq 0 \quad \text{minden } i\text{-re}, \\ \text{vagy} & -s_i w_i + t_i(M^T w)_i \geq 0 \quad \text{minden } i\text{-re}, \end{cases} \qquad GPSbD$$

ahol $w_i$ illetve $(M^T w)_i$ a $w$ illetve $M^T w$ vektorok $i$-edik komponenseit jelölik.

Nem nehéz igazolni, hogy az $M$ mátrix akkor és csak akkor $PSbD$, ha $GPSbD$ $s_i = 0$ és $t_i = 1$ együtthatókkal minden $i$-re.

A következő példában megmutatjuk, hogy az általánosított pozitív szubdefinit mátrixok osztálya bővebb, mint a $PSbD$ mátrixoké.

**Példa.** Tekintsük a következő mátrixot:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Az $M + M^T$ mátrix inerciájának kiszámítása révén könnyen megállapítható (két pivot-transzformáció után), hogy $\nu_-(M + M^T) = 1$. (Az inercia kiszámításra szolgáló Cottle-algoritmus megtalálható Cottle eredeti cikkében [2], illetve a [13] egyetemi tankönyvben.) Egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$\langle Mw, w\rangle = 3w_1 w_2 \quad \text{és} \quad M^T w = \begin{bmatrix} w_2 \\ 2w_1 - w_3 \\ w_2 \end{bmatrix}.$$

Könnyen ellenőrizhetjük, hogy $M$ nem $PSbD$, viszont $s_1 = t_2 = s_3 = 0$ és $t_1 = s_2 = t_3 = 1$ választással teljesül az ($GPSbD$) feltétel.

Az általánosított pozitív szubdefinitás fogalma segítségével a 9. Tétel a következőképpen is kimondható.

**10. Tétel.** *Teljesüljön az $M$ mátrixra a $\nu_-(M + M^T) = 1$ feltétel. Ekkor az $(M, q)$ pár akkor és csak akkor megfelelő, ha az $M$ mátrix $GPSbD$ és $q \in T^0$.*

# 5 Köszönetnyilvánítás

Ezen a helyen kívánok köszönetet mondani lektoraimnak, akik észrevételeikkel hozzájárultak ahhoz, hogy a cikk közérthetőbb legyen és kevesebb hibát tartalmazzon. Köszönettel tartozom továbbá az OTKA T 025442 és az FKFP 059/1997 pályázatoknak pénzügyi támogatásukért.

## Irodalom


1. Cottle, R. W.- Ferland, J. A.: *Matrix-Theoretic Criteria for the Quasiconvexity and Pseudoconvexity of Quadratic Functions*, Stanford University, Technical Report, No. 6. 1970.
2. Cottle, R. W.: *Manifestations of the Schur complement*, Linear Algebra and its Applications, **8** (1974) 189–211.
3. Cottle, R. W., Pang, J. S. and Venkatesvaran, V.: *Sufficient matrices and the linear complementarity problem*, Linear Algebra and its Applications, **114/115** (1989) 231–249.
4. Cottle, R. W., Pang, J. S. and Stone, R. E.: *The Linear Complementarity Problem*, Academic Press, New York, 1992.
5. Crouzeix, J.-P., Hassouni, A., Lahlou, A. and Schaible, S.: *Positive Sub-Definite Matrices, Generalized Monotonicity and Linear Complementarity Problems*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., megjelenés alatt.
6. Crouzeix, J.-P., Martínez-Legaz, J.-E., and Volle, M.: *Generalized Convexity, Generalized Monotonicity*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.
7. Crouzeix, J.-P. - Komlósi, S.: *The Linear Complementarity Problem and the Class of Generalized Positive Subdefinite Matrices*, in: Proceedings of the XIVth International Conference on Mathematical Programming held in Mátraháza, March, 1999. submitted.
8. Forgó F.: *Martos Béla matematikai programozási munkássága*, SZIGMA, **27** (1996) 1–9.
9. Frank, M. and Wolfe, P.: *An algorithm for quadratic programming*, Naval Res. Logistics Quart., **3** (1956) 992–997.
10. Karamardian, S.-Schaible, S.: *Seven kinds of monotone maps*, Journal of Optimization Theory and Applications, **66** (1990) 37–46.
11. Komlósi S.: *Általánosított monotonitás és általánosított konvexitás*, SZIGMA, **24** (1993) 23–34.
12. Komlósi S.: *Generalized Monotonicity and Generalized Convexity*, Journal of Optimization Theory and Applications, **84** (1995) 361–376.
13. Komlósi S.: *Az optimalizáláselmélet alapjai*, Dialóg Campus Kiadó, Budapest-Pécs, 2001. Pannonius Tudományegyetem, Pécs, 1996.
14. Komlósi, S.: *On the Stampacchia and Minty Variational Inequalities*, in: G. Giorgi and F. Rossi (Eds.) Generalized Convexity and Optimization for Economic and Financial Decisions, Pitagora Editrice, Bologna, 1998, 231–260.
15. Martos B.: *Subdefinite Matrices and Quadratic Forms*, SIAM J. Appl. Math., **17** (1969) 1215–1223.
16. Martos B.: *Nonlinear Programming: Theory and Methods.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1975.

ON POSITIVE SUBDEFINITE MATRICES AND THEIR GENERALIZATION

At the end of the 1960' years Béla Martos introduced the concept of positive subdefinite matrix in order to characterize quasiconvexity of quadratic functions on the nonnegative orthant of an Euclidean space. Just some years ago Jean-Pierre Crouzeix and his co-workers revealed the role of the positive subdefiniteness concept in characterizing quasimonotonicity of affine maps. Very recently Jean-Pierre Crouzeix and the author introduced a more general concept of positive subdefiniteness proved to be important in studying Linear Complementarity Problems. The paper presents an overview of the three stages of the development of the positive subdefiniteness concept with an emphasis on the last stage.

# NEM PARTICIONÁLIS INFORMÁCIÓS STRUKTÚRA ÉS KÖZTUDOTT TUDÁS[1]

BADICS JUDIT – GÖMÖRI ANDRÁS
*Veszprémi Egyetem Közgazdaságtan Tanszék – BKÁE Mikroökonómia Tanszék*

Cikkünkben a (dinamikus) nem teljes információs játékok elméletében, a játékosok tudásának leírására használt információs struktúra és —az ugyancsak ebben az elméletben használt— köztudott tudás fogalom kapcsolatát vizsgáljuk. Bevezetünk egy a szokásosnál általánosabb köztudott tudás fogalmat, amely az ugyancsak a szokásosnál általánosabb információs struktúrák esetén is érvényes. Végül rámutatunk a hagyományos és az általunk tárgyalt információs struktúrák kapcsolatára, elsősorban a köztudott tudás fogalmának fényében.

## 1 Bevezetés

A dinamikus (szekvenciális), nem teljes információs játékok megoldása a tökéletes Bayes-i egyensúly fogalmára épül (Fudenberg-Tirole [1991] 325-326. o.). Tekintsük az ilyen játék legegyszerűbb, kétszereplős változatát, amelyben az egyik fél informáltsága teljes és ő lép először, majd a rosszul informált fél ezt a lépést megfigyelve hozza meg döntését és ezzel a játéknak vége. Ekkor a rosszul informált fél stratégiáját korrigált vélekedésére (posterior belief) alapozza, amelyet viszont kezdeti vélekedésére (prior belief) és a másik fél lépésére vonatkozó megfigyelésére építve, a Bayes-szabály alapján alakít ki. A Bayes-szabály azonban particionális információs struktúrát feltételez. Ugyanakkor a tökéletes Bayes-i egyensúly feltételezi, hogy a rosszul informált fél korrigált vélekedése —a játék struktúráját leíró más információkhoz hasonlóan— a szereplők között köztudott tudás (common knowledge). Az itt használt köztudott tudás fogalom tehát particionális információs struktúrára épül.

A particionális információs struktúra azonban —miközben azt írja le, hogy a döntéshozó nem tud mindent— igen szigorú feltevéseket jelent a döntéshozó tudására nézve. Feltételezi, ugyanis, hogy egy általa nem ismert állapotban, valamely információ megszerzése nyomán el tudja különíteni az állapotok olyan részhalmazát, amelynek a fennálló állapot biztosan eleme. Az ennél általánosabb, nem particionális információs struktúra esetén azonban ez nem feltétlenül van így. A döntéshozó tudására vonatkozó feltevések enyhítése azzal kecsegtet, hogy a nem teljes információs stratégiai döntési helyzetek szélesebb köre válik a játékelmélet eszközeivel kezelhetővé.

[1]Köszönetet mondunk Dancs Istvánnak és Dombi Péternek értékes megjegyzéseikért.

A nem particionális információs struktúra használata nem ismeretlen az irodalomban. Az általunk ismert cikkek (Geanakoplos [1992] 78–81. o., Rubinstein – Wolinsky [1990] 192–193. o., Neeman [1996] 78–79. o.) szerzői a nem particionális információs struktúrát egyfajta döntéshozói irracionalitás leírásának eszközeként használják, azt állítva, hogy a döntéshozó információs struktúrája akkor nem particionális, ha nem használja fel információit maradéktalanul. Ezzel szemben mi olyan döntéshozót tételezünk fel, aki maradéktalanul kihasználja a rendelkezésére álló információkat, információs struktúrájának nem-particionalitása, helyzetét —információs szempontból— leíró adottság. Az említett gondolatmenetek tárgya tehát nem azonos az általunk vizsgált kérdéssel.

Cikkünkben e problémakör egyetlen vonatkozását, a nem particionális információs struktúra és a rá épülő köztudott tudás fogalmának viszonyát vizsgáljuk. Először megadjuk a particionális információs struktúra formális leírását, majd a köztudott tudás fogalmának ismert definícióját. Ezután a köztudott tudás fogalmának olyan általánosítását adjuk, amely egyaránt érvényes particionális és nem particionális információs struktúra esetén. Ez az általánosítás egyetlen állításon alapul: halmazrendszerek legfinomabb közös particionális durvítása partíciók esetén megegyezik azok legfinomabb közös durvításával. Cikkünkben ezt az állítást bizonyítjuk. Végül kimondunk egy állítást az általunk vizsgált és a hagyományos információs struktúra viszonyára vonatkozóan.

## 2 Particionális információs struktúra és köztudott tudás

Minthogy a stratégiai interakció kérdéseivel itt nem foglalkozunk, a szereplőket döntéshozóknak fogjuk nevezni.

**Definíció.** Legyen $\Omega$ a döntéshozó számára releváns, lehetséges állapotok véges halmaza. Ekkor a

$$\phi : \Omega \to Y$$

függvény a döntéshozó *jelzőfüggvénye*, $Y$ elemeit pedig *jelzésnek* (jelnek, szignálnak) nevezzük.

A jelzőfüggvény fontos tulajdonsága, hogy a $\phi^{-1}$ leképezés partíciót hoz létre az $\Omega$ állapothalmazon. Ekkor a döntéshozó információs struktúrája particionális. A $\mathcal{P}$ partíció a döntéshozó információs partíciója. Az információs struktúra megadható az információs partíció segítségével is.

A köztudott tudás hagyományos fogalmának bemutatásához szükségünk lesz néhány fogalomra.

**Definíció.** Legyen $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \subset P(\Omega)$ partíció. $\mathcal{P}'$ durvább, mint $\mathcal{P}$, ha

$$\forall I' \in \mathcal{P}' \quad \exists I_1, I_2, \ldots I_n \in \mathcal{P} \quad : \quad I' = \bigcup_{i=1}^{n} I_i \,.$$

Ilyenkor azt mondjuk, hogy $\mathcal{P}'$ (gyenge) durvítása $\mathcal{P}$-nek. Jelölése: $\mathcal{P}' \leq \mathcal{P}$.

**Definíció.** Legyen $\mathcal{P}_1$ és $\mathcal{P}_2$ az $\Omega$ két partíciója. $\mathcal{P}_1$ és $\mathcal{P}_2$ legfinomabb közös durvítása $\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2$, ha teljesíti a következő feltételeket:

$\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2$ az $\Omega$ partíciója,
$\mathcal{P}_1 \geq \mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2$ és $\mathcal{P}_2 \geq \mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2$,
ha $\mathcal{P}_3$ partíció, $\mathcal{P}_1 \geq \mathcal{P}_3$ és $\mathcal{P}_2 \geq \mathcal{P}_3$, akkor $\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2 \geq \mathcal{P}_3$ .

A továbbiakban feltesszük, hogy a szituációban $n$ döntéshozó szerepel, az $i$-edik döntéshozó információs struktúrája $\mathcal{P}_i$. Jelölje

$$\mathcal{P}^* = \mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2 \wedge \ldots \wedge \mathcal{P}_n$$

a döntéshozók információs struktúrájának legfinomabb közös durvítását, illetve $\omega \in \Omega$ esetén $\mathcal{P}^*(\omega)$ pedig $\mathcal{P}^*$ azon elemét, amely $\omega$-t tartalmazza.

**Definíció** (Aumann [1976]). Az $E \subseteq \Omega$ esemény pontosan akkor *köztudott tudás* a döntéshozók között az $\omega$ állapotban, ha

$$\mathcal{P}^*(\omega) \subseteq E\,. \tag{1}$$

# 3 Nem particionális információs struktúra és köztudott tudás

Most nem tesszük fel, hogy minden állapot egyértelműen meghatározza a döntéshozó által megfigyelt jelzést, hanem csak azt követeljük meg, hogy minden egyes állapothoz kijelölhető legyen az összes jelzések halmazának egy olyan részhalmaza, amelynek egyik elemét az adott állapot bekövetkezése esetén a döntéshozó megfigyeli. A megfigyelt jelzés információt hordoz a döntéshozó számára, ha feltesszük, hogy ismeri *jelzőfüggvényét.*

**Definíció.** Az $i$-edik döntéshozó *jelzőfüggvénye* a

$$\phi_i : \Omega \to P(Y_i)$$

függvény. A $\phi_i(\omega)$ halmaz elemeit az $i$-edik döntéshozó számára az $\omega$ állapotban *megfigyelhető jelzéseknek* nevezzük.

A döntéshozó tehát megfigyeli jelzését, majd jelzőfüggvényének ismeretében meghatározza, hogy melyek azok az állapotok, amelyekben az aktuálisan megfigyelt jelzés számára megfigyelhető. Ezt írja le a következő függvény:

$$\phi_i^- : Y_i \to P(\Omega) \qquad y_i \mapsto \{\, \omega \in \Omega \mid y_i \in \phi_i(\omega) \,\}\,.$$

**Definíció.** Tetszőleges $y_i \in Y_i$ esetén $\phi_i^-(y_i)$ az $y_i$ jelzéshez tartozó *információs halmaz*, az információs halmazokból álló halmazrendszer pedig a döntéshozó *információs struktúrája:*

$$\mathcal{P} = \{\, \phi_i^-(y_i) \mid y_i \in Y_i \,\}\,.$$

Látható, hogy $\mathcal{P}$ nem feltétlenül partíció, és lefedi $\Omega$-t.

**Definíció.** Legyen $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}' \subseteq P(\Omega)$ tetszőleges. $\mathcal{P}'$ durvább, mint $\mathcal{P}$, ha
$\forall I' \in \mathcal{P}' \quad \exists I_1, I_2, \ldots, I_n \in \mathcal{P} \ : \quad I' = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$, és
$\forall I \in \mathcal{P} \quad \exists I' \in \mathcal{P}' \ : \quad I \subseteq I'$.
Ilyenkor azt mondjuk, hogy $\mathcal{P}'$ (gyenge) durvítása $\mathcal{P}$-nek. Jelölése: $\mathcal{P}' \leq \mathcal{P}$.

**Definíció.** Legyen $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}' \subseteq P(\Omega)$ tetszőleges. $\mathcal{P}'$ particionális durvítása $\mathcal{P}$-nek, ha $\mathcal{P}' \leq \mathcal{P}$ és $\mathcal{P}'$ partíció.

A következőkben megmutatjuk, hogy tetszőleges halmazrendszerhez egyértelműen létezik annak legfinomabb particionális durvítása. Ehhez szükségünk lesz a következő fogalomra:

**Definíció.** Legyen $\mathcal{P}_1$ és $\mathcal{P}_2$ az $\Omega$ két partíciója. $\mathcal{P}_1$ és $\mathcal{P}_2$ *legdurvább közös finomítása* $\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2$, ha teljesíti a következő feltételeket:
$\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2$ az $\Omega$ partíciója,
$\mathcal{P}_1 \leq \mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2$ és $\mathcal{P}_2 \leq \mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2$,
ha $\mathcal{P}_3 \subseteq P(\Omega)$, $\mathcal{P}_1 \leq \mathcal{P}_3$ és $\mathcal{P}_2 \leq \mathcal{P}_3$, akkor $\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2 \leq \mathcal{P}_3$ .

**Állítás.** Legyen $\mathcal{P} \subseteq P(\Omega)$ tetszőleges. Ekkor egyértelműen létezik $\mathcal{P}' \subseteq P(\Omega)$, melyre teljesülnek a következő feltételek:
(1) $\mathcal{P}' \leq \mathcal{P}$
(2) $\mathcal{P}'$ partíció
(3) $\forall \mathcal{P}'' \subseteq P(\Omega)$ partíció esetén $\mathcal{P}'' \leq \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{P}'' \leq \mathcal{P}'$.

**Bizonyítás.** Vezessük be a következő jelölést:

$$\Pi = \{ \mathcal{P}'' \subseteq P(\Omega) \mid \mathcal{P}'' \text{ particionális durvítása } \mathcal{P}\text{-nek } \}.$$

$\Pi \neq \emptyset$, mert $\{\Omega\} \in \Pi$. Először megmutatjuk, hogy $\Pi$ zárt a legdurvább közös finomítás képzésére. Legyen $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2 \in \Pi$ tetszőleges. Ekkor $\mathcal{P}_1$ partíció, $\mathcal{P}_2$ partíció és $\mathcal{P}_1 \leq \mathcal{P}$, $\mathcal{P}_2 \leq \mathcal{P}$. Ebből a $\vee$ művelet definíciója szerint következik, hogy $\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2 \leq \mathcal{P}$ és $\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2$ partíció. Ekkor pedig $\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2 \in \Pi$, ami pontosan azt jelenti, hogy $\Pi$ zárt a $\vee$ műveletre. Vezessük be a következő jelölést:

$$\mathcal{P}' = \bigvee_{\mathcal{P}'' \in \Pi} \mathcal{P}''.$$

Ekkor mivel $\Pi$ zárt a $\vee$ műveletre, azért $\mathcal{P}' \in \Pi$ teljesül, amiből (1) és (2) következik.

Másrészt, ha $\mathcal{P}'' \subseteq P(\Omega)$ partíció és $\mathcal{P}'' \leq \mathcal{P}$, akkor $\mathcal{P}'' \in \Pi$, amiből $\mathcal{P}'' \leq \mathcal{P}'$ következik. Ez pedig (3) teljesülését biztosítja.

Az (1)-(3) feltételeket kielégítő $\mathcal{P}'$ egyértelműségének belátásához tegyük fel, hogy $\hat{\mathcal{P}}$ is teljesíti az (1)-(3) feltételeket. Ekkor egyrészt $\hat{\mathcal{P}} \leq \mathcal{P}'$, másrészt $\mathcal{P}' \leq \hat{\mathcal{P}}$ teljesül, amelyekből $\hat{\mathcal{P}} = \mathcal{P}'$ következik.

**Definíció.** Legyen $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \subseteq P(\Omega)$ tetszőleges. $\mathcal{P}'$ a legfinomabb particionális durvítása $\mathcal{P}$-nek, ha

(1) $\mathcal{P}' \leq \mathcal{P}$
(2) $\mathcal{P}'$ partíció
(3) $\forall \mathcal{P}'' \subseteq P(\Omega)$ esetén $\mathcal{P}'' \leq \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{P}'' \leq \mathcal{P}'$.

**Jelölés.** $\mathcal{P}^*$ a $\mathcal{P}$ legfinomabb particionális durvítása.

**Megjegyzés.** Ha $\mathcal{P} \subseteq P(\Omega)$ partíció, akkor $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}$.

**Definíció.** Legyen 1 és 2 két döntéshozó a $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \subseteq P(\Omega)$ információs struktúrával. $\mathcal{P}^*$ a legfinomabb közös particionális durvítása $\mathcal{P}_1$-nek és $\mathcal{P}_2$-nek, ha $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}_1^* \wedge \mathcal{P}_2^*$.

Tehát $\mathcal{P}_1$ és $\mathcal{P}_2$ legfinomabb közös particionális durvítása, éppen a legfinomabb particionális durvításuk legfinomabb közös durvítása. Az előző megjegyzésből következik, hogy ha $\mathcal{P}_1$ és $\mathcal{P}_2$ partíciók, akkor azok legfinomabb közös particionális durvítása megegyezik legfinomabb közös durvításukkal. Tehát a legfinomabb közös particionális durvítás fogalma a legfinomabb közös durvítás fogalmának általánosítása.

Ezek után definiáljuk a köztudott tudás fogalmát tetszőleges információs struktúrák esetére.

**Definíció.** Legyenek $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_n$ az $1, 2, \ldots, n$ döntéshozók tetszőleges információs struktúrái. Legyen $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}_1^* \wedge \mathcal{P}_2^* \wedge \ldots \wedge \mathcal{P}_n^*$ és $\omega \in \mathcal{P}^*(w) \in \mathcal{P}^*$. Az $E \subseteq \Omega$ esemény köztudott tudás a döntéshozók között, ha $\mathcal{P}^*(w) \subseteq E$.

Amennyiben $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_n$ partíciók, a definícióban szereplő $P^*(w)$ megegyezik az (1) definícióban szereplő $\mathcal{P}^*(w)$-val.

Végül megfogalmazunk egy állítást két döntéshozó "köztudott tudás szerkezetére" vonatkozóan, amennyiben információs struktúrájuk particionális, illetve nem particionális.

**Állítás.** Legyenek az $1, 2, \ldots, n$ döntéshozók információs struktúrái $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, …, $\mathcal{P}_n$ egy adott helyzetben, illetve ugyanezen döntéshozók információs struktúrái $\mathcal{P}_1^*, \mathcal{P}_2^*, \ldots, \mathcal{P}_n^*$ egy másik helyzetben. Legyen az első helyzetben

$$K_E = \{\, \omega \in \Omega \mid \text{ köztudott tudás az } \omega\text{-ban} \,\}$$

a második helyzetben

$$K_E^* = \{\, \omega \in \Omega \mid \text{ köztudott tudás az } \omega\text{-ban} \,\}$$

Ekkor

$$K_E = K_E^* .$$

**Bizonyítás.** Tetszőleges $E \subseteq \Omega$ eseményre $K_E = \{\, \omega \in \Omega \mid$ köztudott tudás $\omega$-ban a $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_n$ információs struktúrák mellett $\} = \{\, \omega \in \Omega \mid \mathcal{P}^*(w) \subseteq E \,\} = \{\, \omega \in \Omega \mid$ köztudott tudás $\omega$-ban a $\mathcal{P}_1^*, \mathcal{P}_2^*, \ldots, \mathcal{P}_n^*$ információs struktúrák mellett $\} = K_E^*$.

## Irodalom

1. Aumann, R. [1976]: Agreeing to Disagree, *Annals of Statistics*, 4 :1236–39.
2. Fudenberg, D. - J. Tirole [1991]: *Game Theory*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
3. Geanakoplos, J. [1992]: Common Knowledge, *Journal of Economic Perspectives*, 6: 53–82.
4. Neeman, Z. [1996]: Common Beliefs and the Existence of Speculative Trade, *Games and Economic Behavior*, 16: 77–96.
5. Rubinstein, A. - Wolinsky, A. [1990]: On the Logic of "Agreeing to Disagree" Type Results, *Journal of Economic Theory*, 51: 184–193.

NONPARTITIONAL STRUCTURE OF INFORMATION AND COMMON KNOWLEDGE

In the theory of dynamic games with incomplete information it is generally assumed that the information structures of the players are partitional. Furthermore the concept of common knowledge plays an important role in the solution of such games. The paper introduces a more general notion of common knowledge wich is appropriate for any —not only for partitional— information structure. The paper compares the conventional and this general information structure and their relation to the concept of the common knowledge.

# NYUGDÍJPÉNZTÁRAK JÖVŐBELI KIFIZETÉSEINEK BECSLÉSE A CENTRÁLIS HATÁRELOSZLÁS TÉTEL ALKALMAZÁSÁVAL[1]

FARAGÓ MIKLÓS
*Központi Statisztikai Hivatal*

Egy nyugdíjpénztár jövőbeli járadék-kifizetéseinek egy adott pillanatra vonatkoztatott jelenértéke valószínűségi változó, mely a tagok koreloszlásától és halálozási valószínűségeitől függ. Biztonsági szempontból szükséges, hogy a pénztár időről időre vizsgálja e valószínűségi változó eltérését a várható értéktől. E dolgozatban megmutatjuk —először tagok egy kohorszára, majd a teljes tagságra vonatkozóan—, hogy e valószínűségi változó eloszlása bizonyos feltételek mellett normális eloszláshoz tart a létszám növelésével. A dolgozat utolsó részében tovább általánosítjuk az addig elért eredményeket valószínűségi változók sorozatának egy még bővebb osztályára.

## Bevezetés

Egy életjáradékot nyújtó pénztár jövőbeli kifizetései jelenértékének összege —*a tagság követelése*— valószínűségi változó, mely az egyes *tagok követelései*nek összege. Egy tagcsoport követelésének várható értéke a tagcsoport tartaléka. A biztosításmatematikában elterjedt „tartalék" elnevezés azért indokolt, mert a pénztárnak pontosan ennyi pénzt kell félretennie, hogy ebből —és a kamatokból— a jövőbeli kifizetéseket várható értékben finanszírozza.

Fontos, hogy a pénztár vizsgálja a tagság követelésének eltérését a várható értéktől, mert, ha nem számol vele, még a valóságos pénztári halandóságnak megfelelő halandósági táblák használata esetén is tönkremehet, különösen, ha taglétszáma alacsony.

Az 1. pontban bebizonyítjuk, hogy a követelések eloszlása —tagok egy adott korú állományának kohorszára vonatkozóan— nagy létszám esetén a normális eloszláshoz közelít. Az állítás a centrális határeloszlás tételéből közvetlenül következne abban a speciális esetben, ha minden tagnak azonos lenne a *szolgáltatása* (havi járadéka). Mi az általános esetet vizsgáljuk. Erre vonatkozóan megadunk egy minimális kohorsz-létszámot, mely fölött a kohorsz követelése a várható érték adott környezetébe esik adott valószínűséggel. A 2. pontban az 1. pont eredményeit általánosítjuk a teljes pénztári tagság követelésére vonatkozóan. A 3. pontban pedig tovább általánosítjuk az addig elért eredményeket és kimondunk egy tisztán matematikai tételt.

[1]A cikk az Állami Pénztárfelügyelet megbízásából Stáhl János által irányított kutatás keretében készült. Beérkezett: 1999. szeptember 14.

# 1 Egyetlen kohorsz esete

Egy nyugdíjpénztár egy tetszőlegesen rögzített $t_0$ időpontban rendelkezik olyan tagokkal is, akiknek már folyósít valamilyen nyugdíjjáradékot. Tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy $t_0$ valamely naptári hónap „első pillanata"; a *járadék* egy havonta kifizetett, a „járadékos" számára személyesen meghatározott, időben változatlan összeg, melynek utalása éppen $t_0$-ban, $t_0+1$-ben, stb., azaz mindig hónap elején „előlegesen" —a járadékos haláláig— esedékes.

$S$ forint $t_0+t$ időpontbeli értékének $t_0$-beli *jelenértéke* $Sv^t$, ahol $v = 1/(1+i)$ és $i$ valamely havi kamatráta. Ha pénzünk havonta $i$ kamatrátával kamatozik, akkor $t_0$-ban $Sv^t$ forinttal kell rendelkeznünk ahhoz, hogy $t_0+t$ -ben $S$ forintunk legyen. $S$ forint havi járadék $t$ hónapon keresztül történő kifizetésének jelenértéke az egyes kifizetések jelenértékének összege:

$$S + Sv + Sv^2 + \ldots + Sv^{t-1} = S\frac{1-v^t}{1-v}, \qquad \text{ha} \quad i \neq 0.$$

Ezentúl feltesszük, hogy $i > 0$. Miután a tag halálának időpontja $t_0$-ban ismeretlen, ezért $t$ valószínűségi változó és így $S(1-v^t)/(1-v)$ is az.

Egy $t_0$-ban $x$ éves tagnak $t$ hónapon keresztül folyósított előleges *egységjáradék* jelenértéke $v \neq 1$ havi kiértékelési diszkontláb mellett

$$\eta = \frac{1-v^t}{1-v}, \tag{1}$$

melynek várható értéke, ill. szórásnégyzete:

$$\mu = \sum_{t=0}^{\infty} r_{x,t}\frac{1-v^{t+1}}{1-v}, \tag{2}$$

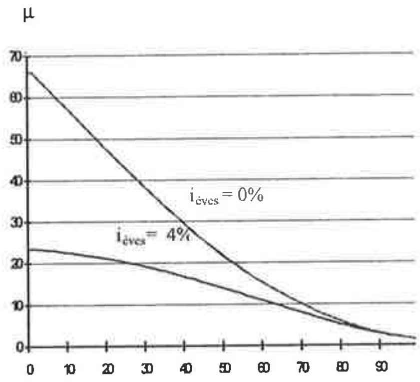
$$\sigma^2 = \sum_{t=0}^{\infty} r_{x,t}\left(\frac{1-v^{t+1}}{1-v}\right)^2 - \left(\sum_{t=0}^{\infty} r_{x,t}\frac{1-v^{t+1}}{1-v}\right)^2, \tag{3}$$

ahol $r_{x,t}$ annak a valószínűsége, hogy a $t_0$-ban $x$ éves tag $t$ hónappal később még él, de további egy hónapon belül meghal. Értéke adott. (A KSH által évente kiadott halandósági táblákban szereplő valószínűségekből egyszerűen számítható.) Feltesszük, hogy az emberi élet véges, azaz $r_{x,t} = 0$, ha $x+t/12$ elég nagy.

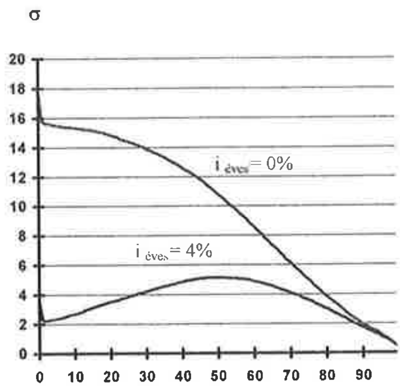
Mivel a továbbiakban egy ideig az $x$ éves járadékosok kohorszával foglalkozunk, $\eta$, $\mu$, $\sigma$ mögül elhagyjuk az $x$ indexet. Azonban később, amikor már a különböző kohorszokkal egyidejűleg foglalkozunk, használni fogjuk a $\eta_x$, $\mu_x$, $\sigma_x$ jelöléseket. Megjegyezzük, hogy (2) és (3) a $v \to 1$ határátmenet esetén természetszerűleg az $x$ éves korú ember hátralévő élettartamának várható értékét és szórását adja hónapokban.

Az alábbi ábrák $x$ függvényében ábrázolják a $\mu$, $\sigma$ és $\mu/\sigma$ értékeket 0%, illetve 4% éves kamatráta mellett, ahol az éves és havi kamatráta közötti összefüggés:

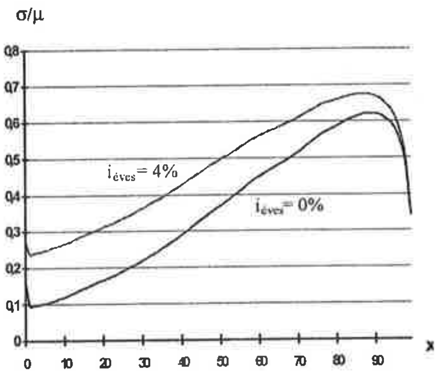
$$i_{\text{éves}} = \left((1+i)^{12} - 1\right)^{1/12}.$$




1. ábra




2. ábra




3. ábra

Vizsgáljunk tehát egy pénztár adott nemű $x$ éves tagjaiból álló $n$ létszámú kohorszot. A kohorsz $k$-adik tagja $t_k$ hónapig $S_k$ járadékot kap ($k = 1, \ldots, n$), ahol $t_k$ azonos eloszlású, független valószínűségi változók sorozata. Tehát feltesszük, hogy a pénztártagok halálának pillanata „egymástól független". Így a $k$- adik tag követelése

$$S_k \frac{1 - v^{t_k}}{1 - v} = S_k \eta_k \,,$$

ahol $\eta_k$ is azonos eloszlású, független valószínűségi változók sorozata. A kohorsz követelése $\sum_{k=1}^{n} S_k \eta_k$, melynek várható értéke (a kohorsz tartaléka), ill. szórásnégyzete $\mu \sum_{k=1}^{n} S_k$, ill. $\sigma^2 \sum_{k=1}^{n} S_k^2$, hiszen feltételezésünk szerint $\eta_k$ várható értéke és szórása minden tagra $\mu$, ill. $\sigma$.

Ha minden tag azonos szolgáltatással rendelkezne ($S_1 = S_2 = \ldots$), akkor a tagok követelése azonos eloszlású, független valószínűségi változók sorozatát alkotná. Ekkor pedig a centrális határeloszlás tételéből közvetlenül következne, hogy összegük közelítően normális eloszlású lenne és az ismert módon fennállna, hogy ha $n > (\delta\lambda / \mu\epsilon)^2$, akkor a kohorsz követelésének relatív eltérése várható értékétől $p_0 = 2\Phi(\lambda) - 1$ valószínűséggel $\epsilon$-nál kisebb mértékű, ahol

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\, du$$

a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye. Fontos már most felhívni a figyelmet, hogy a további számítások során sehol sem fogjuk kihasználni az $\eta$ valószínűségi változót meghatározó formula alakját. Csak a szórását és várható értékét kell ismernünk. Ez azt is jelenti, hogy nem szükséges, hogy a kiértékelési diszkontláb időben konstans legyen, lehet sorozat is, sőt lehet valószínűségi változók sorozata is adott eloszlással. Ekkor a (2), ill. (3) formulák helyébe bonyolultabbak lépnek.

A most következő centrális határeloszlástétel központi helyet foglal el ebben a dolgozatban. (A tételt ebben a formában tartalmazza [3].) Jelölje ezentúl "$\to$" az $n \to \infty$ melletti konvergenciát, $M(\xi)$ és $D(\xi)$ pedig a $\xi$ valószínűségi változó várható értékét, ill. szórását.

LAPLACE-LJAPUNOV-FÉLE TÉTEL

Ha $\xi_1$, $\xi_2$, ... független valószínűségi változók, melyeknek harmadik (következésképpen minden alacsonyabb rendű) momentuma létezik, $M(\xi_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, továbbá

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} \beta_k}{\Delta_n^3} \to 0\,,$$

ahol

$$\Delta_n = \left( \sum_{k=1}^{n} D^2(\xi_k) \right)^{1/2}, \quad \beta_k = M(|\xi_k|^3)\,, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

akkor

$$P\left( \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{\Delta_n} < x \right) \to \Phi(x)\,.$$

Alkalmazzuk a tételt a mi $\xi_k = S_k(\eta_k - \mu)$ sorozatunkra. Feltesszük, hogy valamennyi $\xi_k$ harmadik momentuma létezik. Fennáll

$$\Delta_n = \sigma \sqrt{\sum_{k=1}^{n} S_k^2} \qquad \text{és} \qquad \beta = M\left(|\eta - \mu|^3\right) \sum_{k=1}^{n} S_k^3 .$$

Ekkor a tétel szerint teljesül

$$P\left( \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} S_k(\eta_k - \mu)}{\sigma \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} S_k^2}} < x \right) \to \Phi(x)\,,$$

feltéve, hogy

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k}{\Delta_n^3} = \frac{M\left(|\eta - \mu|^3\right) \sum\limits_{k=1}^{n} S_k^3}{\sigma^3 \left( \sum\limits_{k=1}^{n} S_k^2 \right)^{3/2}} \to 0\,, \tag{4}$$

azaz, ha

$$\frac{\left(\sum_{k=1}^{n} S_k^3\right)^2}{\left(\sum_{k=1}^{n} S_k^2\right)^3} \to 0\,. \tag{5}$$

Ehhez pedig elégséges, ha a járadékok korlátosak, hiszen ha valamely $s$-re és $S$-re $0 < s < S_k < S$, akkor a fenti törtnél nagyobb

$$\frac{n^2 S^6}{n^3 s^6} = \frac{\text{const}}{n} \to 0\,.$$

Az eddigi megfontolások eredményét a következőképpen foglalhatjuk össze: az $x$ éves járadékosok követelése (a nekik szánt jövőbeli összkifizetések jelenértéke) —mely azonos eloszlású független valószínűségi változók lineáris kombinációja— standardizálva normális eloszlású valószínűségi változóhoz tart a létszám növelésével, ha a járadékosok havi szolgáltatásait —melyek a lineáris kombináció együtthatói— pozitív korlátok közé szorítjuk.

Most levezetünk egy feltételt, melynek teljesülése esetén a kohorsz követelése a várható érték egy előre meghatározott környezetébe esik.

Ha a konvergencia elég gyors (ennek teljesülését feltesszük, és e cikkben nem vizsgáljuk), akkor nem túl nagy $n$-re a konvergáló sorozat $n$-edik tagjának eloszlásfüggvényét gyakorlatilag helyettesíthetjük a limesszel és írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} 2\Phi(\lambda) - 1 &\approx \mathbf{P}\left(\left|\frac{\sum_{k=1}^{n} S_k\eta_k - \mu\sum_{k=1}^{n} S_k}{\sigma\sqrt{\sum_{k=1}^{n} S_k^2}}\right| < \lambda\right) = \\ &= \mathbf{P}\left(\left|\frac{\sum_{k=1}^{n} S_k\eta_k - \mu\sum_{k=1}^{n} S_k}{\mu\sum_{k=1}^{n} S_k}\right| < \lambda\frac{\sigma\sqrt{\sum_{k=1}^{n} S_k^2}}{\mu\sum_{k=1}^{n} S_k}\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Azonban mivel

$$\lambda\frac{\sigma\sqrt{\sum_{k=1}^{n} S_k^2}}{\mu\sum_{k=1}^{n} S_k} < \lambda\frac{\sigma\sqrt{nS^2}}{\mu n s} = \lambda\frac{\sigma}{\mu}\frac{S}{s}\frac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon\,, \tag{7}$$

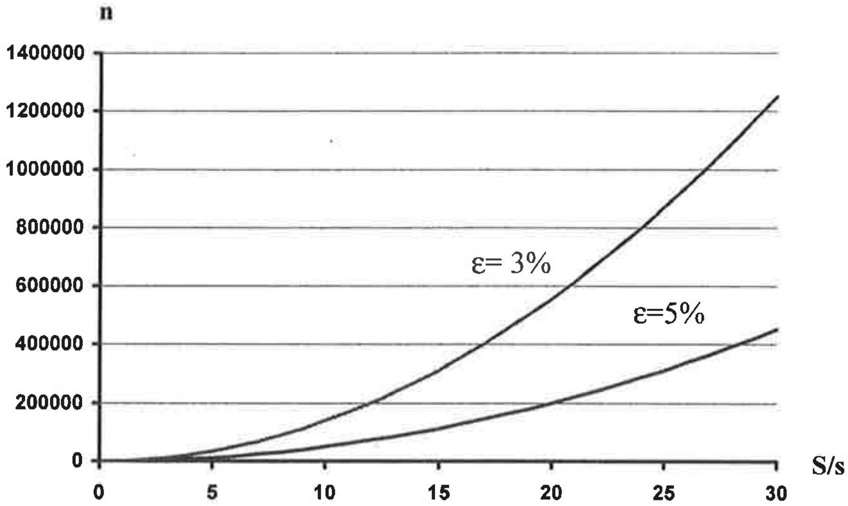
ezért, ha

$$n > \left(\frac{\sigma\lambda}{\mu\epsilon}\right)^2 \left(\frac{S}{s}\right)^2,$$

akkor a kohorsz követelésének relatív eltérése a várható értéktől $2\Phi(\lambda) - 1$ valószínűséggel kisebb $\epsilon$-nál.

A fenti egyenlőtlenségben $\mu$, $\sigma$ adott, $\lambda$-t pedig rögzítsük (pl. úgy, hogy $2\Phi(\lambda) - 1 = 0,99$).

Ha a pénztár csupán a már meglévő tagságának kohorszát kívánja vizsgálni, akkor a (7) egyenlőtlenségben $n$ és $S_k$ is adott, és így kiszámítható a $\lambda$-hoz tartozó $\epsilon$. Ha azonban egy jövőbeli járadékos-állományra vonatkozóan akarunk vizsgálódni, akkor rögzített $\epsilon$ mellett kiszámíthatjuk, hogy különböző $n$ létszámokhoz mekkora $S/s$ 'rés' engedhető meg. Az $n$, $S/s$ és $\epsilon$ közötti függvénykapcsolatot szemlélteti az alábbi ábra:




4. ábra

## 2 A teljes pénztári tagság esete

Általánosíthatóak-e az eddigiek a pénztár összes járadékosára? Igen. Legyen az $x$ éves tagok száma $n_x$, $x \in X$, a kohorszok száma $N = |X|$, $N \leq n$. A $k$-adik $x$ éves tag követelése egy forint havi járadék esetén

$$\eta_{x,k} = \frac{1 - v^{t_{x,k}}}{1 - v}$$

a $\mu_x$, $\sigma_x^2$ várható értékkel, ill. szórásnégyzettel. Ekkor a teljes állomány összkövetelése

$$\sum_{x \in X} \sum_{k=1}^{n_x} S_{x,k} \eta_{x,k} \, ,$$

melynek várható értéke és szórásnégyzete

$$\sum_{x \in X} \mu_x \sum_{k=1}^{n_x} S_{x,k} \qquad \text{ill.} \qquad \sum_{x \in X} \sigma_x^2 \sum_{k=1}^{n_x} S_{x,k}^2 \, .$$

Az összkövetelés standardizált eloszlásának konvergenciája a normális eloszláshoz a $0 < s < S_{x,k} < S$ feltételezés esetén ugyanúgy igazolható, mint egy rögzített kohorszra vonatkozóan, ha a Laplace-Ljapunov-féle tételt most a

$$\xi_{x,k} = S_{x,k}(\eta_{x,k} - \mu_x)$$

sorozatra alkalmazzuk. Ehhez azonban értelmezni kell a konvergenciát: jelölje $n$ az összes járadékos számát, $n_x = n_x(n)$ a mindenkori $x$ évesek számát, $\sum_{x \in X} n_x(n) = n$, továbbá $n_x(n+1) = n_x$ v. $n_x + 1$, azaz $n$ eggyel történő növelése egy új járadékos belépését jelenti valamelyik kohorszba. $n$ új értelmezése mellett is megtartjuk azt a konvenciót, hogy "$\to$" az $n \to \infty$ melletti konvergenciát jelenti. Ekkor tehát

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{k=1}^{n} \beta_k}{\Delta_n^3} &= \frac{\sum_{x \in X} M\left(|\eta_x - \mu_x|^3\right) \sum_{k=1}^{n_x(n)} S_{x,k}^3}{\left(\sum_{x \in X} \sigma_x^2 \sum_{k=1}^{n_x(n)} S_{x,k}^2\right)^{3/2}} \leq \\ &\leq \frac{\max_{x \in X} M\left(|\eta_x - \mu_x|^3\right) \sum_{x \in X} \sum_{k=1}^{n_x(n)} S_{x,k}^3}{\sqrt{N} \min_{x \in X} \sigma_x^3 \left(\sum_{x \in X} \sum_{k=1}^{n_x(n)} S_{x,k}^2\right)^{3/2}} . \end{aligned} \tag{4'}$$

Mivel pedig $x$ véges halmazon fut végig, az eloszlás konvergenciájához elégséges, ha

$$\frac{\left(\sum_{x \in X} \sum_{k=1}^{n_x(n)} S_{x,k}^3\right)^2}{\left(\sum_{x \in X} \sum_{k=1}^{n_x(n)} S_{x,k}^2\right)^3} \to 0 , \tag{5'}$$

ehhez pedig valóban elegendő $0 < s < S_{x,k} < S$, hiszen a fenti törtnél most is nagyobb

$$\frac{n^2 S^6}{n^3 s^6} = \frac{\text{const}}{n} \to 0 .$$

A teljes állomány követelésének a várható értéktől való eltérésére pedig azt kapjuk —megismételve a kohorsz esetén alkalmazott bizonyítás (5), (6) lépéseit—, hogy az $2\Phi(\lambda) - 1$ valószínűséggel kisebb $\epsilon$-nál, ha

$$\lambda \frac{S \sqrt{\sum_{x \in X} \sigma_x^2 n_x}}{s \sum_{x \in X} \mu_x n_x} < \epsilon . \tag{7'}$$

Amennyiben a pénztár úgy dönt, hogy az összes járadékos befizetéseire vonatkozó $s$, ill. $S$ korlátok helyett kohorszonkénti $s_x$, ill. $S_x$ korlátokat állít, akkor a becslését így finomíthatja:

$$\lambda \frac{\sqrt{\sum_{x \in X} \sigma_x^2 n_x S_x^2}}{\sum_{x \in X} \mu_x n_x s_x} < \epsilon . \tag{7''}$$

E formulának —$s_x = s$, ill. $S_x = S$ választás esetén— nyilván speciális esete a megelőző.

Ha a pénztár jövőbeli tagságának nyújtandó $S_{x,k}$ szolgáltatásokról —a fenti korlátok megállapítása mellett vagy helyett— egyéb információk is ismertek, akkor a becslések tovább javíthatóak. Például, ha $S_{x,k}$-t egy adott eloszláscsaládhoz tartozó valószínűségi változónak tekinthetjük, akkor az eddigiekhez hasonlóan egyenlőtlenségeket vezethetünk le az eloszláscsalád paramétereire vonatkozóan.

## 3 Az általános eset

A pénztári vonatkozásoktól eltekintve általánosabban is megfogalmazhatjuk az eddieket.

TÉTEL. Legyen $\xi_1$, $\xi_2$, ... független valószínűségi változók sorozata, melyeknek harmadik momentumai léteznek, továbbá tegyük fel, hogy a sorozat elemei egy táblázatban vannak elrendezve úgy, hogy az egy sorban lévők egy konstans szorzótól eltekintve azonos eloszlásúak, azaz az $x$-edik sor $k$-adik tagja $S_{x,k}\eta_{x,k}$ alakú, ahol $\eta_{x,1}$, $\eta_{x,2}$, ... azonos eloszlású. Legyen $\eta_{x,k}$ várható értéke $\mu_x$ és szórása $\sigma_x$. Az egy sorban lévő elemek száma, valamint a sorok száma egymástól függetlenül lehet véges vagy végtelen. A táblázat kitöltése "természetes módon" történik: ha $\xi_1$, $\xi_2$, ..., $\xi_n$ az első $N(n)$ sor valamelyikébe került és $\xi_n$ elhelyezése után az $x$-edik sor 'hossza' $n_x(n)$, akkor $\xi_{n+1}$ vagy az $N(n)+1$-edik sor első helyére kerül, vagy egy már korábban elhelyezett elem mellé. Azaz formálisan vagy $S_{N(n)+1,1}\eta_{N(n)+1,1}$, vagy $S_{x,n_x(n)+1}\eta_{x,n_x(n)+1}$ alakú lesz ($1 \le x \le N(n)$). Nyilván teljesül $\sum_{x\in X} n_x(n) = n$.

Ha valamely $s$, $S$, $c$, $C$ konstansokra $0 < s < S_{x,k} < S$; $0 < c < \sigma_x^3$ és

$$M\left(|\eta_x - \mu_x|^3\right) < C \qquad (x = 1, 2, \ldots),$$

akkor

$$P\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{\Delta_n} < x\right) \to \Phi(x),$$

ahol

$$\Delta_n = \left(\sum_{k=1}^{n} D^2(\xi_k)\right)^{1/2}.$$

BIZONYÍTÁS. A Laplace-Ljapunov tétel szerint elég igazolni, hogy

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}\beta_k}{\Delta_n^3} \to 0,$$

ahol $\beta_k = M\left(|\xi_k|^3\right)$, $k = 1, 2, \ldots$. Ehhez elegendő belátnunk, hogy

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}\beta_k}{\Delta_n^3} \le \frac{\max_{1\le x\le N(n)} M\left(|\eta_x - \mu_x|^3\right)\sum_{x=1}^{N(n)}\sum_{k=1}^{n_x(n)} S_{x,k}^3}{\min_{1\le x\le N(n)} \sigma_x^3 \left(\sum_{x=1}^{N(n)}\sum_{k=1}^{n_x(n)} S_{x,k}^2\right)^{3/2}} \to 0. \qquad (4'')$$

A (4") konvergencia teljesül, ha a szorzat első tényezője korlátos, a második pedig nullához tart. Utóbbi azért igaz, mert a második tényezőt majorálja

$$\frac{nS^3}{n^{3/2}s^3},$$

az első tényező korlátosságának pedig szükséges és elégséges feltétele $0 < c < \sigma_x^3$ és $M\left(|\eta_x - \mu_x|^3\right) < C$, $(x = 1, 2, \ldots)$, mivel a számláló első tényezője monoton növekvő, a nevezőjé pedig monoton csökkenő függvénye $n$-nek. Tehát a feltételek szerint (4") -et majorálja

$$\frac{C}{c}\frac{n}{n^{3/2}}\frac{S^3}{s^3} = \frac{\text{const}}{\sqrt{n}} \to 0. \qquad (5'')$$

Az első két pontban bizonyított állítások a most bebizonyított tétel speciális esetei: az egyetlen vagy több kohorszból álló tagság a véges számú sorból álló táblázatnak felel meg oly módon, hogy minden kohorszhoz a táblázat egy sora tartozik.

## Irodalom


1. J. J. McCutcheon and W. F. Scott: Mathematics of Finance and Investment, (Heinemann, 1986)
2. B. Benjamin and J. H. Pollard: The Analysis of Mortality and Other Actuarial Statistics, (Institute and Faculty of Actuaries, London, 1993)
3. Prékopa A.: Valószínűségelmélet műszaki alkalmazásokkal (Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1972)
4. Life Insurance Mathematics Hans, Gerber (Springer, Zürich,1995)
5. Actuarial Mathematics (Bowers, Gerber, Hickman, Jones, Negbitt, 1986)



ESTIMATION OF THE FUTURE ANNUITY PAYMENTS OF PENSION FOUNDS APPLYING THE CENTRAL LIMIT THEOREM

At a given moment the net present value of the future annuity payments of a pension found is a random variable that depends on the age distribution of the members and their probabilities of death. In safety respect for a pension found it is necessary to analyse the deviations of this random variable from its expected value from time to time. In this paper we prove —first for a single cohort of members, than for the total pool of members— that under certain conditions the distribution of this random variable is assimptotically normal. In the last part of the paper we generalise the results achieved for a larger class of sequences of random variables.

# KÖNYVEKRŐL

2001. február 8-án ünnepélyes keretek között mutatta be a KJK-Kerszöv Jogi és Üzleti Kiadó egyik legújabb termékét, Zalai Ernő akadémikusnak, a BKÁE tanszékvezető egyetemi tanárának a matematikai közgazdaságtanról írt nagyszabású monográfiáját. A sajtóbeszélgetéssel egybekötött könyvbemutató társrendezője az MTA Közgazdaságtudományi Bizottsága volt.

Az alábbiakban közreadjuk a könyv rövid ismertetőjét és a két felkért hozzászóló, Simonovits András, illetve Komlósi Sándor a könyvvel kapcsolatos gondolatait. Egyben gratulálunk a szerzőnek könyve megjelenése alkalmából.

Vörös József, a SZIGMA főszerkesztője

ZALAI ERNŐ: *Matematikai közgazdaságtan* (A korszerű mikroökonómiai elemzés klasszikus és neoklasszikus szemléletű modelljei), KJK-Kerszöv, Budapest, 2000., pp. 896.

## I.

A könyv a szerző 1989-es —ugyancsak a kiadó gondozásában megjelent— *Bevezetés a matematikai közgazdaságtanba* című munkájának jelentősen átdolgozott és kibővített változata. Az átdolgozás során külön hangsúlyt kapott a mikroökonómiai fogalmak és elemzési eszközök matematikai közgazdaságtani alapjainak és a matematikai közgazdaságtani modellek közgazdasági interpretációjának, elméleti és gyakorlati alkalmazási lehetőségeinek és korlátainak bemutatása.

A könyv három részre tagolódik: Az első rész az általános egyensúlyelmélet matematikai közgazdaságtani megközelítéseit tárgyalja a konvex analízis eszközeivel. A szerző bevezeti és részletesen elemzi a termelési és a fogyasztási döntések leírására felhasznált matematikai modelleket, az általános egyensúlyelmélet fontosabb modelljeit és azok kapcsolatát a mikroökonómiával. A könyv második része a függvénytanon és az analízisen nyugvó neoklasszikus mikroökonómai megközelítését mutatja be, a kereslet és kínálat alakulását magyarázó és elemző elméletek módszertani alapjait és alkalmazásait. A harmadik pedig kiegészíti az előbbieket a lineáris, nemzetgazdasági szintű modellekkel (input-output, tevékenységelemzési modell), illetve az árutermelés és az áralakulás törvényszerűségeinek nemzetgazdasági szintű elemzéseivel. A könyvet két matematikai függelék zárja.

Zalai Ernő hiánypótló munkája tankönyvként és szakmai kézikönyvként egyaránt jól használható.

a Kiadó ajánlása

# II.

A rendszervált(oz)ás óta a matematikai közgazdaságtan folyamatosan veszít jelentőségéből Magyarországon. Pedig ötven évvel ezelőtt, a piacgazdaságot fölszámoló szocializmus kezdetekor még burzsoá tudománynak számított. Amikor az 1960-as években hazánkban is meghonosodott e tudomány, úttörő szerepet játszott a logikus és szakszerű közgazdasági gondolkodás művelésében és terjesztésében. A központi gazdaságirányítás szükségszerű felszámolása és a spontán piaci szabályozás uralomra jutása sokakban azt a tévképzetet keltette, hogy az új rendszerben már a matematikai közgazdaságra sincs túl nagy szükség.

Szerencsére Zalai Ernő „Bevezetés a matematikai közgazdaságtanba" c. könyve 1989-ben jelent meg, amikor még nagyobb hitele volt tudományágunknak. Jó szívvel mondhatom, hogy e könyv azóta is nélkülözhetetlen eszköze az elméleti közgazdaságtan oktatóinak és kutatóinak.

A jelenlegi könyv számos tekintetben folytatja a „Bevezetést", de ahogyan a megváltozott cím is utal rá, már nem bevezető fokon. (Egyébként a Bevezetés is legalább középfokú könyv volt!) A kibővítés a több, mint megkettőződött terjedelemből is látható. Igaz, ezzel párhuzamosan több fontos téma (pl. a dinamika) kikerült az új könyvből, tehát a bent maradt témák elmélyült tárgyalására igazán sok hely maradt.

A könyv egyik sajátossága, hogy egyaránt foglalkozik a neoklasszikus közgazdaságtannal és az eredeti klasszikus (azaz a Marx előtti, elsősorban a ricardo-i, valamint a marxi) közgazdaságtannal és annak modern változataival (Leontief, Neumann, Bródy, Sraffa, Steedman és saját eredményeivel). Talán mondanom sem kell, hogy a főáram képviselői manapság csak a neoklasszikus elméletet tárgyalják, legfeljebb lábjegyzetben foglalkoznak a klasszikus közgazdaságtannal. Pedig a klasszikus közgazdaságtan és annak modern változatai számos pontban a neoklasszikus utódja előtt jár: jobban írja le a gazdaság körkörösségét, dinamikáját, intézményi részleteit. De még ott is, ahol túlhaladottá vált, mint pl. a munkaértékelméletben, egész nemzedékek ideológiai forrásaként szolgált: ezért is oktatandó és kutatandó maradt. Zalai Ernő ragaszkodása e kettős örökséghez dicsérendő, bár a kettő arányát sokan minden bizonyára vitatni fogják.

A könyv másik sajátossága, hogy a szerző nem elégszik meg a logikai kifejtéssel, sokszor rámutat a háttérben húzódó eszmetörténeti folyamatra is. Ez a már beavatott olvasó számára mélyebb megértést tesz lehetővé, de a nem eléggé tájékozott olvasót esetleg megzavarhatja.

Harmadiknak említeném, hogy a szerző —nagyon helyesen— nem matematikai játékszernek tekinti a matematikai közgazdaságtant, hanem a gazdasági élet során felvetődő kérdések tárgyalására, ha nem is mindig megválaszolására szolgáló eszköznek. Ezért fűz gazdag megjegyzéseket a vitatottabb pontokhoz.

Negyedik megjegyzésemmel visszakanyarodom a témaválasztáshoz. Tény, hogy manapság már nem igen írnak olyan átfogó matematikai közgazdaságtani könyveket, mint amilyen Samuelson 1947-es Foundation-ja volt (nem tévesztendő össze sok változatban kiadott, magyarra is lefordított népszerű tankönyvével). Ma már külön mikroökonómiát, külön makroökonómiát, ipari szervezeteket stb. írnak. Címével ellentétben, Zalai könyve sem általában a matematikai közgazdaságtannal foglalkozik, hanem annak legfontosabb és központi területével, az ún. *általános egyensúlyelmélettel.* Én ezt az utóbbi címet adtam volna a könyvnek, és ezzel jeleztem volna a kiadónak a további súlyos teendőket: szükség van magas szintű makro, játékelméleti, ipari-szervezeti stb. könyvekre is.

De hát ne legyünk telhetetlenek. Örüljünk együtt Ernő könyvének, amely hosszú időre nélkülözhetetlen eszköze lesz az igényes matematikai közgazdászoknak — diáknak, tanárnak és kutatónak egyaránt.

Simonovits András (MTA KTK)

## III.

### *A. A matematika szerepe a közgazdaságtanban (az oktatás felől nézve)*

A 90-es évek rendszerváltozása alapjaiban változtatta meg a közgazdászképzést Magyarországon. A politikai gazdaságtant felváltotta a mikro- és makroökonómia, számos új, addig nem tanított tárgy került fel a palettára, mint például pénzügyi matematika, termelésmenedzsment stb. Annak ellenére, hogy a hangsúly az üzleti tárgyak irányában tolódott el, az alapozó matematikai tárgyak „felértékelődtek".

Természetesen szükség volt egy meglehetősen komoly stílusváltásra a matematikai tárgyak oktatásban, de ezzel együtt, illetve ennek eredményeként teljesen megszűntek azok a korábban gyakran tapasztalható „sirámok", hogy miért van egy közgazdásznak szüksége olyan sok matematikára.

A stílusváltás lényege abban áll, hogy a matematikát, nem mint egy „elkülönült" és „mindenek fölött álló", „öntörvényű" „tiszta" tudományt tanulják a hallgatók, hanem mint egy eszközt (nyelvet és technikát), amely nélkül számos komplex közgazdasági probléma nem is tárgyalható, a megoldásról nem is beszélve. Az új stílus szerencsés ötvözete kell, hogy legyen az esszéjellegű megfontolásoknak és a szigorú matematikai okfejtéseknek.

Számomra Zalai Ernő könyve ékes bizonyítéka ezen stílus létjogosultságának. Zalai Ernő tudatosan, nagyon jó arányérzékkel használja ezt a stílust. Én a magam részéről ezt a könyv egyik külön értékének tartom.

### *B. A közgazdaságtan szerepe a matematikában (az oktatás felől nézve)*

A rendszerváltás érdekes módon hozta felszínre a hazai matematikusképzés problémáit. A közgazdászképzés szinte pillanatok alatt „piackonformmá" vált, a tudományegyetemeken folyó matematikusképzés, matematika szakos tanárképzés viszont csak nehezen ébredt „Csipkerózsika álmából". Annak dacára, hogy a közgazdaságtan számos matematikai diszciplínára igen csak megtermékenyítőleg hatott, mégis alig tudunk olyan kezdeményezésről, amely a matematikusképzésben fontos szerepet szánna a matematikai közgazdaságtan eredményeinek bemutatására.

Az egyik ilyen pozitív kezdeményezés a Szegedi Tudományegyetem és a BKÁE által közösen ,,üzemeltetett" programozó matemematikus-közgazdász szak, a másik egy pécsi kezdeményezés: a matematika-tanárképzésben egy Gazdaságmatematika Fakultáció (szakirány) beindítása, amelyben operációkutatás, termelésmenedzsment, matematikai programozás és konvex (nemlineáris) analízis mellett a matematikai közgazdaságtan önálló tárgyként jelenik meg. Sajnos ez az elképzelés nem kapott akkreditációt, nagy valószínűséggel a társegyetemek ellenérdekeltsége miatt.

Véleményem szerint korszerű matematikus, vagy matematika-tanárképzés nem nélkülözheti a közgazdasági alkalmazások magas szintű bemutatását. Hogy várható el egy középiskolás matematika tanártól, hogy közgazdász pályára készülő diákjának megfelelő muníciót és meghatározó motivációt adjon, ha maga erre nincs felkészítve. A matematikai közgazdaságtan, véleményem szerint, nem hiányozhat a modern matematika-tanárképzés programjából.

Zalai Ernő könyvének megjelenését azért is üdvözlöm nagy örömmel, mert végre megszületett az a magyar nyelvű szakkönyv, amiből remélhetően nem csak a közgazdász hallgatók szerezhetnek ismereteket erről a fontos területről.

A könyv tudatos szerkesztéséből arra tudok következtetni, hogy Zalai Ernő maga is hasonlóan vélekedik, mint én. A szerző maga írja, hogy "... *A könyv szerkezete ezért lehetővé teszi azt is, hogy egyes fejezetpontokat, sőt egész fejezeteket lehessen átugrani, és eredeti sorrendjük átrendezésével nagy szabadsági fokkal lehessen összeállítani a könyvre alapozott kurzusok tananyagát."*

Meg vagyok győződve, hogy a Szerző ezen törekvése nem hiábavaló. Sokan fogják élvezettel tanulmányozni a matematikai közgazdaságtant Zalai Ernő útmutatási alapján. Ezt a véleményemet erősíti a könyv számos további jó tulajdonsága:

- az élvezetes és könnyed stílus,
- a szabatos és precíz fogalmazás,
- a ,,laza kifejtések" és a ,,szigorú bizonyítások" egészséges, a mondandó ,,hitelességét" nem veszélyeztető ötvözése,
- a történeti aspektusokra való rámutatás,
- az őszinte, kritikus hangvétel a modellalkotás buktatóiról,
- a matematikai apparátus könnyed és elegáns kezelése,

és még folytathatnám a sort, de nem teszem ... Helyette javaslom a személyes meggyőződés egyedül üdvözítő és jól bevált ,,klasszikus" módszerét: *vegyék kézbe Zalai professzor új könyvét, és szerezzenek bizonyosságot az elmondottak igazságáról!*

Komlósi Sándor (PTE KTK)

BARAKONYI KÁROLY: *Stratégiai döntések: Csapdák - Buktatók - Megoldások,* Janus Pannonius Tudományegyetem Felnőttképzési és Emberi Erőforrás Fejlesztési Intézete, Pécs, 1998.

Bizonyára valamennyien voltunk már olyan döntési helyzetben, amikor meglehetősen kevés információ birtokában, bizonytalanság közepette kellett súlyos következményekkel járó kérdésekben döntenünk. BARAKONYI KÁROLY könyve azoknak az aktuális és potenciális döntéshozóknak szól, akik stratégiai fontosságú döntések meghozatalára kényszerülnek meglehetősen kevés információ birtokában, bizonytalanság közepette, az idő szorításában, jelentős kockázat nyomása alatt. A szerző arra vállalkozik könyvében, hogy segítséget nyújtson a döntéshozóknak ebben a frusztráló folyamatban.

A könyv főként *stratégiai* döntésekről, az egyén, a szervezet, az intézmény vagy egy vállalat életében a legfontosabb döntésekről szól, melyek rendszerint visszafordíthatatlan, vagy nagyon nehezen és költségesen módosítható folyamatokat indítanak el. Paradox módon ezeknek a legnagyobb fontosságú döntéseknek a módszertani megalapozása a leggyengébb.

A 1. Fejezet *a stratégiai döntés általános vonatkozásait* tárgyalja. Rövid áttekintést kapunk a menedzsment gondolat fejlődéséről; a századforduló idején létrejött tudományos munkaszervezéstől kezdve, egészen a 90-es évek elejétől tért hódító *kognitív megközelítésig.* Ez az új irányzat a gondolkodási folyamat jobb megértésével, a rosszul strukturált döntések megalapozásának javításával visz előre bennünket, megtartva a korábbi periódusok bevált eredményeit. BARAKONYI KÁROLY könyve ezt a legmodernebb irányzatot mutatja be, Magyarországon elsőként.

A 2. Fejezet a kognitív megközelítés egyik alapkérdésével, *az emberi gondolkodással* foglalkozik, természetesen a döntéstudomány szemszögéből. Részletesen tárgyalja az intuíció és racionalitás problémáját, valamint a racionalitás korlátozásának kérdéseit. Ez a fejezet a döntéselmélet egyik központi kérdésének, a *hasznosság-elmélet* alapjainak bemutatásával zárul.

A 3. Fejezet a döntési folyamatokban alkalmazott *heurisztikák* (automatikus gondolkodási folyamatok) természetrajzát mutatja be. A szerző sok konkrét példa bemutatásával rámutat arra, hogy nagy a veszélye annak, hogy az automatikus gondolkodási folyamatok irracionális döntésekhez vezetnek. A csapdák és buktatók alapos taglalása, mint a könyv alcíme is mutatja, fontos eleme a könyvnek, és véleményem szerint egyik nagy értéke is. Heurisztikus gondolkodásunk csapdáinak és buktatóinak ismerete feltétlenül hozzájárulhat mások vagy saját magunk viselkedésének, döntéseinek jobb megértéséhez. Ha az irracionális döntés veszélyeivel tisztában vagyunk, akkor kritikus helyzetekben —amikor racionális döntésre lenne szükség— a veszélyt csökkenthetjük.

A 4. Fejezet *a stratégiai döntést, mint folyamatot* elemzi; öt fázisra bontva: *metadöntések – a döntési keret kialakítása – információ gyűjtés – választás az alternatívák között – tanulás.* A szerző nyomatékosan figyelmeztet arra, hogy a döntési csapdák elkerülése érdekében feltétlenül szükséges a döntési folyamat alapos tanulmányozása, az elhárítás módszertanának elsajátítása. További megszívlelendő jó tanács: a döntések értékelése, a tanulságok levonása rendkívül fontos befejező aktusa a döntési folyamatnak, melyet sikeres döntések esetén se hagyjunk el!

Az 5. Fejezetben *a döntési csapdák elkerüléséről* van szó. A döntési folyamatokra vonatkozó kutatások alapján kiderült, hogy a legkülönbözőbb területeken tevékenykedő döntéshozók (vállalati vezetők, politikusok, ügyvédek, orvosok, katonák) ugyanazokat a típushibákat követik el. Ebben a fejezetben azokat a buktatókat foglalja össze a szerző, amelyek a stratégiai döntési folyamat szempontjából különösen veszélyesek (fejesugrás a problémába, keretvakság, a gondolkodási keretek helytelen használata, túlzott magabiztosság, rövidlátási zárlat, csípőből tüzelés, csoport hiba, a visszacsatolások elmaradása, a tanulságok levonásának elmulasztása, a döntési folyamat átvilágításának mellőzése stb.). A döntési csapdákkal kapcsolatban ebben a fejezetben az a központi kérdés, hogyan lehet ezeket a hibákat felismerni és tudatosan elkerülni, és ezáltal hogyan javíthatjuk magát a döntési folyamatot.

Minden döntési folyamat kritikus pontja a *céloknak legjobban megfelelő alternatíva kiválasztása.* Sokan magát a döntést is erre az aktusra szűkítik le, a megelőző fázisokat *döntéselőkészítésnek* tekintve. Minden, ami ez előtt történik (a döntési kritériumok megfogalmazása, az információ összegyűjtése, elemzése és értékelése, a döntési alternatívák megfogalmazása) ennek a választásnak az előkészítését szolgálják. A minden szempontból átgondolt, alapos előkészítés ellenére sem nyilvánvaló, hogyan kell a céljainkat leginkább megvalósítható alternatívát kiválasztani. Ráadásul ez a procedúra is tele van buktatókkal, csapdákkal.

A 6. Fejezet az alternatívák sorbarendezésének (súlyozásának) különböző elveit és technikáit mutatja be. Néhány klasszikus példa után (BLAISE PASCAL elemzése a hit igazolására, a „fogoly dilemmája") részletesen elemzi a könyv a lineáris modellek súlyozási technikáit (bootstrapping módszer, objektív lineáris modell), rámutatva itt is a buktatókra, csapdákra. Kisérletek kimutatták, hogy a lineáris modellek tudatos alkalmazása konzisztensebbé teszi döntéseinket, közelebb visz a racionális gondolkodáshoz, a csapdák elkerüléséhez.

A fejezet hátralevő részeiben a könyv részletesen ismerteti a THOMAS SAATY által kifejlesztett analitikus hierarchikus döntéshozatali megközelítést (Analytic Hierarchy Process, röviden: AHP), amely rosszul strukturált, több célt vagy több kritériumot követő döntési problémák kezelésére különösen alkalmas. Az AHP lehetővé teszi számunkra, hogy a konkrét, mérhető tényezőkkel és a kevésbé megfogható faktorokkal egyaránt foglalkozhassunk. Adatainkat, gondolatainkat, intuitív elgondolásainkat, megérzéseinket és ítéleteinket egy logikus, hierarchikus struktúrába rendezzük, megfelelően kezelve a bizonytalanságot. Az eljárás lehetővé teszi számunkra elgondolásaink, megérzéseink későbbi felülvizsgálatát.

A könyv tömören ismerteti az *Expert Choice* számítógépes rendszert, melyet kifejezetten az AHP támogatására, a döntéshozó munkájának segítésére és vezérlésére fejlesztettek ki. Az Egyesült Államokban ez az egyik legelterjedtebben használt döntéstámogató rendszer, vállalati és kormányzati szervek kiterjedten használják döntéseik jobb megalapozása érdekében.

A könyv *a csoportos döntés* problémájának tárgyalásával zárul. „...Az a tény, hogy egy döntés meghozatalához több okos embert gyűjtünk össze, önmagában még nem jelent jobb megoldást. Csak akkor lehet jobb a csoportos döntés eredménye az egyéninél, ha *alkotó vita* alakul ki közöttük, amelyet az információk finomításával és a különbségeket elsimító *konszenzuskereséssel* oldanak fel. Ha nem ez történik, a csoportos döntés még hibásabb lehet, mint az egyéni. A csoportos döntés sikere tehát a résztvevők képességein túl *elsősorban a döntés irányításától* függ. A csoportos döntési folyamat irányításánál különösképpen figyelemmel kell lennünk a metaterv kidolgozására, a döntési keret kidolgozására, a csoport összeállítására, a divergáló megközelítés stimulálására, a konvergencia megteremtésére, majd a végső döntés meghozatalára ..." írja a szerző a 7. fejezetben.

A könyv egyik erénye a *kiváló, könnyed stílus*, mely a laikus érdeklődők számára is teljes mértékben érthetővé (megkockáztatom: *élvezhetővé*) teszi ezt a szakkönyvet. A fajsúlyosabb részletkérdéseket a szerző nagyon ügyesen a Jegyzetek részben tárgyalja, kielégítve ezáltal a kevésbé laikusok szakmai kíváncsiságát is. A hasznosság-elmélet tárgyalását a NEUMANN-MORGENSTERN elméletre alapozva végzi, nem riadva vissza ennek az elméletnek a tisztességes bemutatásától sem, melyet természetesen a Jegyzetek között tesz meg, érthető okokból. Ez a példa is jól mutatja a szerző helyes arányérzékét mondandója kifejtésekor.

A fentiek alapján teljes mértékben vallom azt, ami a könyv „fülszövegében" olvasható: a könyvet *vezetőknek*, *politikusoknak*, *egyetemi hallgatóknak*, de *a magánélet döntéseivel küszködőknek* egyaránt ajánljuk. Recenzióm vége felé közeledve be kell vallanom, hogy én is a laikus olvasók táborába tartozom, de a fent említett olvasmányos stílusnak köszönhetően szinte egy szusszra olvastam végig ezt a könyvet. De volt egy másik dolog is, ami engem, mint matematikust megfogott és nyilván emiatt élveztem igazán a könyv olvasását: *a kognitív megközelítés, az emberi gondolkodás fontosságának felismerése és hangsúlyozása a stratégiai döntések meghozatalában.* Matematikusok körében jól ismert PÓLYA GYÖRGY neve, aki csodálatos könyveket írt az emberi gondolkodásnak arról a típusáról, ami a problémamegoldó matematikusokat jellemzi (A gondolkodás iskolája, A problémamegoldás iskolája.). De említhetném LAKATOS IMRE matematikus-filozófus munkáit is. Miután az emberi gondolkodásnak nincsenek elkülönült „rétegei" (külön matematikusok és külön döntéshozók számára) ezért nincs is semmi csodálkozni való azon, hogy ezek a matematikusok (gondolkodók) nagyon sok hasonló megállapításra jutottak, mint az emberi gondolkodás buktatóival, csapdáival foglalkozó döntéstudományi szakemberek. Ezeket a műveket, mint meglévő forrásanyagot —véleményem szerint— a stratégiai döntések kognitív aspektusait vizsgálók nagy haszonnal forgathatnák. BARAKONYI KÁROLY könyvének elolvasása után számomra egyre nyilvánvalóbb a két terület erőteljes konvergenciája.

Komlósi Sándor

Simonovits András: *Matematikai módszerek a dinamikus közgazdaságtanban,* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1998. 311 o.

Éppen fél évszázaddal Harrod „Dinamikus közgazdaságtan felé" c. tanulmányának megjelenése után vehették kezükbe az érdeklődők Simonovits András könyvét. A közgazdaságtan várható fejlődési irányára vonatkozó harrodi prognózis helyesnek bizonyult, a statikus illetve komparatív statikus elemzés helyébe mindinkább a gazdasági folyamatok dinamikus szemléletű vizsgálata lépett. A dinamikus szemléletmód elterjedését nagymértékben elősegítette az a tény, hogy a huszadik század ötvenes-hatvanas éveiben kifejlesztésre kerültek azok a matematikai módszerek, melyek a gazdasági folyamatok időbeni vizsgálatát hatékonyan képesek támogatni. Sajnálatos, hogy e módszerek a legtöbb, közgazdászok számára írt matematika tankönyvből mind a mai napig hiányoznak. Simonovits András könyve tehát hiánypótló munka. Ott kezdi a dinamikus közgazdaságtan matematikai módszereinek tárgyalását, ahol a legtöbb matematika tankönyv abbahagyja. A tárgyalás magas színvonala és tömörsége azonban messze felülmúlja a szokásosat. A tételek részletes bizonyítása helyett csupán azok vázlatát vagy alapgondolatát közli a szerző. Minden tételhez megadja viszont a bizonyítás forrásának pontos megjelölését, így a könyv bibliográfiai értéke is igen nagy. Az egyes témakörök tömör kifejtése lehetővé teszi a szerző számára, hogy matematikai módszerek rendkívül széles körét ismertesse.

Az ismertetésre kerülő matematikai anyag jobb megértését segíti a könyv sajátos szerkezete. A páratlan sorszámú fejezetek tartalmazzák a különféle matematikai fogalmak és módszerek bemutatását, míg a páros fejezetek a megelőző fejezetben foglaltak alkalmazására adnak több példát a közgazdaságtan területéről. E példák a legjelesebb nemzetközi és hazai szerzők modelljei közül kerülnek ki, így nem csak a bemutatott matematikai módszerek megértését segítik, hanem mélyebb bepillantást engednek a közgazdaságtan számos területére. Megjegyzendő ugyanakkor, hogy e példaként bemutatásra kerülő modellek nem képezik, a szerző célkitűzése következtében nem is képezhetik, a közgazdaságtan valamely logikailag összefüggő területét, és részletes vizsgálatukra sem kerül sor. Funkciójuk a bemutatásra kerülő matematikai apparátus illusztrálása.

Az első fejezet a differenciaegyenletekkel foglalkozik és az azokhoz kapcsolódó fontosabb fogalmakat ismerteti. Így tárgyalásra kerül a fixpont és stabilitás kérdése, a ciklus, a visszacsatolás és a stabilizálhatóság fogalma. A fejezet legnagyobb részét a szerző a lineáris rendszereknek szenteli. A második fejezet az előzőben bevezetett eszközök alkalmazására ad néhány példát. Bemutatásra kerül többek között a lineáris akcelerátor-multiplikátor modell és a többszektoros készletjelzéses modell. A harmadik fejezet a nemlineáris differenciaegyenleteket tárgyalja. Itt kerül ismertetésre a határciklus, bifurkáció és káosz jelensége. A negyedik fejezetben megint csak a harmadik fejezetben bemutatott matematikai módszerek alkalmazására találunk példákat. E példák nagy része szorosan kapcsolódik a második fejezet példáihoz, többnyire azok nem-lineáris általánosításai. Az ötödik fejezet a differenciálegyenletekkel kapcsolatos fontosabb fogalmakat és módszereket ismerteti. Számos olyan fogalommal találkozhat itt az olvasó, ami már az első fejezetben is szóba került. Az ottani diszkrét idejű közelítés helyett azonban itt a változók az idő folytonos függvényei. A hatodik fejezet ismét az előzőekben tárgyalt matematikai módszerek alkalmazására ad példát. Domar és Solow itt bemutatásra kerülő modelljei a postkeynesi és neoklasszikus növekedési modellek mindmáig kiemelkedő reprezentánsinak számítanak.

A hetedik fejezettől központi szerepet játszik a tárgyalásban az optimalizálás. Ez a fejezet a dinamikus programozás módszerét mutatja be. Mind a determinisztikus mind pedig a sztochasztikus optimum-elv ismertetésre kerül. A nyolcadik fejezet a dinamikus programozás alkalmazására ad néhány példát. E példák java része az optimális felhalmozás problémájára vonatkozik. A kilencedik fejezet az optimális szabályozáselméletet tárgyalja. A fejezet a variációszámítást az optimális folyamatok elméletének speciális eseteként mutatja be. Itt kerülnek szóba a jelenérték-feladatok is. A tizedik fejezet az optimális fogyasztási pályák meghatározása révén illusztrálja az optimális szabályozáselmélet módszereit.

A könyv több, mint negyedrészét kitevő függelék némi lineáris algebrai kiegészítés mellett az ismertetett módszerek komplex alkalmazására ad példát az együttélő nemzedékek és együttélő korosztályok modelljeinek bemutatása által.

Kimarad a fejezetek sorából a ciklus és káosz jelenségének differenciálegyenletek elméletére épített tárgyalása. E hiányosságot a szerző az ilyen jellegű közgazdasági alkalmazások csekély jelentőségével indokolja. A leglényegesebb irodalmi hivatkozásokat azonban ebben a témakörben is megtalálja az olvasó.

Szokatlanul tömör tárgyalásmódja miatt Simonovits András munkája nem könnyű olvasmány, olvasás helyett helyesebb lenne feldolgozásról beszélni. Az ismertetésre kerülő módszerek megértését azonban a páros sorszámú fejezetekben található példákon kívül nagymértékben segíti két további tényező. Egyrészt valamennyi fejezetben és a függelékben is bőségesen található önálló megoldásra szánt feladat, melyek közül legtöbbnek a megoldását is közli a szerző, jobbára némi útmutatással együtt. E feladatok több esetben számítógépes program megírását tűzik ki. Másrészt a páratlan sorszámú, tehát matematikai jellegű fejezetekben is számos példa fordul elő. Ezek legnagyobb része a matematika, illetve a mechanika területéről való.

A tárgyalás igényes technikája és tömörsége miatt a könyv elsősorban az egyetemi szintű közgazdászképzés felsőbb évfolyamai számára ajánlható. Széles körben alkalmazható továbbá az elméleti közgazdaságtan területén folytatott posztgraduális tanulmányokhoz.

Bessenyei István

KOMLÓSI SÁNDOR: *Az optimalizáláselmélet alapjai.* Dialóg Campus Kiadó, Budapest-Pécs, 2001. pp. 403.

Nemrég került a könyvesboltok polcaira a Pécsi Tudományegyetem Közgazdaságtudományi Kara Széchenyi-professzori ösztöndíjas egyetemi tanárának, Komlósi Sándornak a könyve, amelyben a szerző immár 25 éves oktatási tapasztalatait és kutatási eredményeit is felhasználta.

*Az optimalizáláselmélet alapjai* című könyv egyik fontos terméke a Kar Döntéstudományi Tanszékén a 90-es évek elejétől folyó tantárgy-korszerűsítési és képzés-fejlesztési programnak. A tantárgy-korszerűsítési program egyik fő koncepcionális eleme a közgazdász-halgatók számára fontos *Analízis*, *Lineáris algebra* és *Valószínűségszámítás* alapstúdiumok tananyagának újszerű „*átrendezése*". Ez az átrendezés a következő filozófián nyugszik: egy közgazdász hallgatónak a matematikai alapokat már a kezdettől fogva úgy célszerű tanítani, hogy tudatosítjuk bennük az elérendő célt, ami releváns közgazdasági modellek értését, elemezni tudását, megoldási lehetőségeit körvonalazza. Az optimalizáló modellek szerepét, fontosságát még az üzleti életre készülő közgazdász hallgatók is elismerik, elfogadják. Ennek a „filozófiának" az eredménye a közgazdász-képzés alapozó matematikai tárgyainak *Optimalizáláselméletre* és *Valószínűségelméletre* való felosztása.

Ez a könyv egy kiforrott mű, melynek korábbi változatai egyetemi jegyzetként már több éven keresztül „*tesztelték*" a fentebb vázolt képzési filozófia életképességét. Ezek nagyon fontos állomásai voltak annak az útnak, melynek eredményeként egy érett és kipróbált, szakmailag és didaktikailag is magas színvonalú anyagot kap kezébe az érdeklődő Olvasó.

A szerző szándéka szerint a mű az optimalizáláselmélet elemeibe kívánja elkalauzolni az Olvasót, illetve elsősorban azokat a hallgatókat, akik gazdasági jellegű felsőfokú tanulmányokat folytatnak. *Az optimalizáláselmélet alapjai* című könyv a Pécsi Tudományegyetem Közgazdaságtudományi Karán folyó alapozó képzés hivatalos tankönyve, tehát egyetemi tankönyv közgazdász hallgatók számára. Funkcióját tekintve azonban nem csak az, mert akár kézikönyvként is szolgálhat a tudományos pálya jelöltjei és gyakorlói számára.

A könyv témaköreit az optimalizáláselmélet matematikai megalapozása foglalja egységes keretbe. A szerző a bevezetőben olyan közgazdasági problémákat vázol, melyek leírásához, kezeléséhez és megoldásához nélkülözhetetlen az az eszközrendszer és elméleti ismerethalmaz, melyet aztán a könyv tizennégy fejezetre bontva, logikus felépítésben tár az Olvasó elé. Négy témakör alkotja a könyv szerkezeti vázát.

- Az első rész (1-3. fejezet) a halmazok, egy- és többváltozós függvények,
- a második (4-7. fejezet) az infinitezimális (végtelen kicsiny) mennyiségek tana, egy- és többváltozós függvények deriválása,
- a harmadik (8-11. fejezet) a mátrix-aritmetika elemeit, a $k$-dimenziós térbeli speciális vektorrendszerek tulajdonságait, valamint a bázistranszformációkat leíró rész, és

- a negyedik (12-14. fejezet), e két utóbbi eszközrendszer elemeit kihasználó nagy témakör, a feltétel nélküli és feltételes szélsőérték feladatok megoldásának elméleti alapjait tárgyaló rész. Ez utóbbi adja a könyv szerkezeti és egyúttal didaktikai újszerűségét azzal, hogy a szerző egy könyv keretein belül bátor kézzel veti harcba a nagy cél, az optimalizálás érdekében az előző részekben megismert fegyvereket.

Nézzük kicsit részletesebben az egyes fejezetek tartalmát. Az 1. fejezet a valós számhalmaz axiomatikus felépítését írja le, kiemelve a teljességi axióma szerepét. A valós számhalmaz szerkezetének feltérképezése ugyanis nélkülözhetetlen a függvények tulajdonságainak és a határátmenet művelet fogalmának pontos megértéséhez.

Az egyváltozós függvényeket tárgyaló 2. fejezet lényegében összefoglalja és osztályozza a függvényekkel kapcsolatos középiskolai ismereteket, kiegészítve olyan, egyébként a középiskolai törzsanyagban homályban maradt fontos elméleti kérdések tisztázásával, mint például az exponenciális függvény értéke irracionális helyeken, vagy a szakaszonként szigorúan monoton függvények inverzei.

A többváltozós függvényekről szóló 3. fejezetben a $k$-dimenziós euklideszi terek lineáris és metrikus struktúrájának tárgyalása után két elemi szélsőértékszámítási módszer, a szintvonal módszer és az eliminációs módszer kerül ismertetésre.

A határátmenet művelet a közös motívum a következő fejezetekben. A sorozatokra vonatkozó tételek a 4. fejezetben általános alakban, vektorsorozatokra vannak kimondva, ha az állítás vektorsorozatokra értelmezhető. Egyébként számsorozatokra. A függvények határértéke és folytonossága problematikájának leírása (5. fejezet) is a többváltozós függvényekre épül.

A differenciálszámítás című 6. fejezetben az egyváltozós függvények differenciálszámítása után a fogalom kiterjesztéseként a többváltozós függvények iránymeneti és parciális differenciálhányadosa és deriváltja, majd a folytonosságot is biztosító Fréchet-féle általánosításig jutunk el.

A korábbi fejezetek eredményeit használja ki a függvényvizsgálat analitikus módszereit leíró 7. fejezet, melynek középpontjában az egyváltozós függvények lokális szélsőértéke létezése szükséges és elégséges feltételeinek különböző alakjai állnak.

A könyv 8. fejezetében a lineáris algebra alapfogalmai és eljárásai között a mátrix-műveletek, kvadratikus formák, kvadratikus mátrixok inverze és determinánsa szerepel. A vektorrendszerekkel kapcsolatos lineáris függetlenség és rang fogalom indukálja a vektorrendszer által generált altér bázisa és dimenziója fogalmának bevezetését, és azok összefüggéseinek tárgyalását, melyet a 9. fejezet tartalmaz.

Az elemi és az általános bázistranszformáció a központi fogalma a 10. és 11. fejezetnek, mely lehetőséget ad különböző vonatkoztatási rendszerek értelmezésére, és egy vektor adott vonatkoztatási rendszerbeli koordinátáinak kiszámítására. Az elemi bázistranszformáció egy sor alkalmazására látunk példát: függetlenségvizsgálat, kompatibilitásvizsgálat, vektorrendszer és mátrix rangjának meghatározása, lineáris egyenletrendszer megoldása, kvadratikus mátrix inverzének, determinánsának és inerciájának meghatározása.

A nóvum, melyet a könyv kínál a hozzáértő számára, hogy a többváltozós függvények optimalitási kritériumai vizsgálata során elegendő egy adott szimmetrikus mátrix, a Hesse-mátrix sajátértékei előjelének az ismerete. Az ebben a kategóriában írt tankönyvek a Hesse-mátrix definitségi vizsgálatára a hagyományos, determinánsok kiszámításán alapuló eljárást ajánlják. Ez a könyv ehelyett a Hesse-mátrix inerciája segítségével történő vizsgálatot javasolja, mely az inercia kiszámítására szolgáló pivot-algoritmus (a Cottle-algoritmus) egyszerűsége miatt gyakorlati szempontból sokkal gyorsabb. A pivot-algoritmus alkalmazásai között végül eljutunk a lineáris programozási feladat megoldására szolgáló szimplex algoritmusig.

A könyv 12. és 13. fejezete a többváltozós függvények feltétel nélküli és egyenlőség-feltételes szélsőérték-problémájával foglalkozik, összekapcsolva a lineáris és analitikus rész tartalmát. Egy statisztikából vett példát látunk függvény illesztési szélsőérték feladatra. Végül pedig a lineáris feltételek mellett alkalmazható eliminációs módszer után eljutunk a nem feltétlenül lineáris, de még egyenlőség-feltételes szélsőérték feladatok megoldásában alapvető szerepet játszó Lagrange-féle multiplikátoros módszerhez.

A 14. fejezet nem tárgya az alapkurzusnak. Témája a nemlineáris függvényekből felépülő egyenlőtlenség-feltételes programozási feladatok megoldásának vizsgálata, benne az elméletben alapvető szerepet játszó Farkas-lemmával és a Karush-Kuhn-Tucker-tétellel. Megjegyezzük, hogy a könyv borítóján a tétel geometriáját illusztráló ábra mögött Farkas Gyula képe „sejlik fel".

De szólni kell még a könyv módszertani újításáról is, melynek révén lehetővé válik a megfelelő tudományágak legújabb kutatási eredményeinek az oktatásban történő megjelenése. A szerző elsőként vezeti be a feltétel nélküli és az egyenlőség-feltételes többváltozós szélsőérték problémák lokális optimuma létezése elegendőségi feltétele, a Hesse-mátrix és a szegélyezett Hesse-mátrix vizsgálatára a Chabrillac-Crouzeix tételen nyugvó inercia-tesztet, a probléma megoldására eddig egyeduralkodó módon ajánlott, de sokkal nehézkesebb főminorok determinánsán alapuló tesztekkel szemben. A hallgatóság számára a legnehezebbnek tűnő problémát talán az egyenlőtlenség feltételes többváltozós szélsőérték problémák (14. fejezet) megoldása létezésének szükséges feltételeit kimondó Karush-Kuhn-Tucker tétel (és annak különböző változatai) jelentik. A tétel geometriai tartalmát, valamint azt megelőzően, a regularitás problematikáját a szerző páratlanul egyszerű módon, szemléletes ábrákkal illusztrálja, ami a megértést nagyban segíti.

A megértést segítő *„tanári"* szándék mind a tizennégy fejezeten végigvonul, és a legfontosabb pontokon egy-egy illusztratív példa, a fejezetek végén pedig válogatott feladatok (közülük többnek részletesen bemutatva, kiszámolva a megoldását) teszik komfortossá és kényelmessé e tudomány művelését. Jó szívvel ajánlom a könyvet a hallgatóság és az érdeklődő Olvasók figyelmébe egyaránt.

Gyetván Ferenc