SAJÁTÉRTÉK-TÉTELEK A LINEÁRIS ÉS NEMLINEÁRIS NEUMANN-RENDSZEREKBEN[1]

MÓCZÁR JÓZSEF
BKÁE, Matematikai Közgazdaságtan és Gazdaságelemzés Tanszék

A tanulmány célkitűzése a sajátérték-tételek lineáris és nemlineáris Neumann-rendszerekre történő kiterjesztése. A szigorú egyensúlyt biztosító Neumann modell a $Cx = \lambda Bx$ és a $pC = \lambda pB$ általánosított sajátérték-feladattal definiálható. A probléma Perron-Frobenius tulajdonságait elsőként Mangasarian (1971) vizsgálta. A technológiailag és/vagy gazdaságilag (ir)reducibilis Neumann rendszerekre megfogalmazott Frobenius tételek bizonyításaihoz Mangasarian, valamint Erdélyi (1967) és Stewart (1972) eredményeit használom fel.

1 Bevezetés

Az utóbbi években reneszánszukat élik a Perron-Frobenius tételek alkalmazásai a különböző elméleti közgazdasági kutatásokban. Ezek az alkalmazások azonban csak a lineáris és legfeljebb nemlineáris Leontief-rendszerre kimondott tételeket foglalják magukban. A valóság pontosabb leírására illetve elemzésére egyre kiterjedtebben használják fel a Neumann típusú modelleket, amelyek feltevéseikben megengedik az ikertermelés szerepeltetését is, valamint a gazdaságot egy sajátos nem-négyzetes termék-tevékenység keresztmetszetben vizsgálják.

Tanulmányom alapvető célkitűzése a sajátérték-tételek lineáris és nemlineáris Neumann-rendszerekre történő kiterjesztése. Vizsgálódásaim kereteül olyan többszektoros gazdasági modell szolgál, amelyben az egyes tevékenységek input-output kapcsolatait megfelelő tulajdonságú nemlineáris függvényekkel, a ráfordítási, illetve kibocsátási struktúráját pedig Jacobi mátrixokkal írom le. Az idő kezelése szempontjából modellünk a diszkrét, illetve a stacionárius modellek családjába tartozik. A modell speciális eseteként értelmezhető mind az irodalomból jól ismert (nem)lineáris input-output modell, mind pedig a tanulmányban újonnan megfogalmazott nemlineáris Neumann modell.

A sajátérték-tételek megfogalmazása előtt értelmezem a sajátérték, a sajátvektor, a spektrum és a spektrál rádiusz fogalmát, bevezetem az (ir)reducibilitás különféle válfajait a (nem)lineáris Neumann-rendszerekben. A

[1]Tanulmányom a hasonló címmel megírt és Martos Béla professzor szerkesztésében megjelent Szigma matematikai közgazdasági folyóirat által közlésre elfogadott, de a külföldi tanulmányútjaim miatt meg nem jelent cikkem legújabb eredményekkel kiegészített változata. Ezúttal szeretnék, még ha kissé megkésve is, köszönetet mondani az akkori névtelen bírálóknak a hasznos tanácsaikért.

szigorú egyensúlyt biztosító lineáris Neumann modell a $Cx = \lambda Bx$, illetve $pC = \lambda pB$ általánosított sajátérték-feladattal definiálható, ahol a C a fogyasztási és a B a kibocsátási mátrixokat, az x a tevékenységek alkalmazási szintvektorát, p a termékek egységár-vektorát valamint a λ az expanziós (növekedési-, illetve kamat-)tényező reciprokát jelöli. A fenti problémának Perron-Frobenius tulajdonságait —tudomásom szerint— ez idáig csak Mangasarian vizsgálta. Tételeit tisztán matematikai szempontból, tetszőleges előjelű, azonos típusú és megfelelő feltételeket kielégítő C és B mátrixok mellett fogalmazta meg. Tanulmányomban a technológiailag és/vagy gazdaságilag (ir)reducibilis lineáris Neumann-rendszerre megfogalmazott Frobenius tétel bizonyításához Mangasarian tételeit használom fel. Megmutatom, hogy ezek a bizonyítások kiterjeszthetők a nemlineáris általánosított sajátérték-egyenletekre is.

Tanulmányomban valamennyi rendszer meghatározásában szerepet kapnak a ráfordítási, illetve a kibocsátási struktúrát leíró Jacobi mátrixok. A nemlineáris Leontief-rendszerre kimondott sajátérték-tételek bizonyításai abban térnek el a szokásos bizonyításoktól, hogy itt a ráfordítási struktúrát szerepeltetjük az egyes állításokban.

A nemlineáris Neumann-rendszerre kimondott sajátérték-tételek alapul szolgálhatnak a marxi értéknagyság kvantitatív meghatározásában, különös tekintettel az ikertermékek problémájára. (Lineáris esetre lásd pl. Zalai (1980).)

A tanulmányban a következő jelölések érvényesek. Vessző jelöli a mátrix transzponáltját. Két azonos méretű vektor összehasonlítására az: $x \geqq y$ jelenti, hogy minden i-re $x_i \geqq y_i$; $x \geq y$ jelenti, hogy minden i-re $x \geqq y$ de $x \neq y$, és az $x > y$ jelenti, hogy $x_i > y_i$ minden i-re. Ennek értelmében, ha x nemnegatív : $x \geqq 0$; ha x szemipozitív : $x \geq 0$; és ha x pozitív: $x > 0$.

2 Feltevések és definíciók

Tekintsünk egy olyan gazdaságot, amelyben $\{1, 2, \ldots, m\}$ véges számú tevékenység (termelési eljárás) funkcionál, és ezek $\{1, 2, \ldots, n\}$ véges számú terméket állítanak elő. Minden egyes tevékenység egy vagy több terméket termelhet (ikertermelés esete), és bármelyik termék többféleképpen (több eljárással) is előállítható. Az egyes tevékenységek általában az anyagi termelő szféra különböző szervezeteit, pl. szakigazgatási szerveket, termelő ágazatokat stb. jelölnek, de jelölhetnek fogyasztást, különféle szolgáltatásokat, sőt külföldi keresletet is. Olyan természetes termelési tényezők, mint a munka és a föld, korlátlan mennyiségben állnak rendelkezésre. Modellünk diszkrét időpontokban írja le a gazdasági jelenségeket, és abban az értelemben zárt, hogy a t-edik időpontban a tevékenységek funkcionálásához szükséges ráfordításokat az előző $(t-1)$-edik periódusban megtermelt outputok fedezik.

A technikai-technológiai összefüggéseket most a következőképpen fejezzük ki. Tegyük fel, hogy minden egyes tevékenység per definitionem egységnyi ideig funkcionál, s az $x^j(t)$, $(j = 1, 2, \ldots, m)$ a j-edik tevékenység alkalmazási szintjét jelöli a t-edik periódusban. Gazdasági rendszerünkben az egyes termékekből történő felhasználásokat és kibocsátásokat egy-egy nemlineáris leképezés-halmazzal definiáljuk: az i-edik termék input-függvényét jelöljük a valós értékű $h_i[x^1(t),\ldots,x^m(t)]$ függvénnyel, amely az $x^1(t),\ldots,x^m(t)$ változók megfelelő nemlineáris függvénye, az output-függvényét az ugyancsak valós értékű és az $x^1(t),\ldots,x^m(t)$ változókban nemlineáris $g_i[x^1(t),\ldots,x^m(t)]$ függvénnyel jelöljük. Az egyszerűség kedvéért vezessük be az input-, illetve az output-függvények jelölésére a következő szimbólumokat:

$$\begin{bmatrix} h_1[x^1(t),\ldots,x^m(t)] \\ h_2[x^1(t),\ldots,x^m(t)] \\ \vdots \\ h_n[x^1(t),\ldots,x^m(t)] \end{bmatrix} = H[x(t)]\,,$$

és hasonlóképpen $g_i[x^1(t),\ldots,x^m(t)] = G[x(t)]$, ahol $i = 1,2,\ldots,n$.

A fentiek segítségével most már könnyen meghatározhatjuk a nemlineáris termelési rendszerünk technikai-technológiai fajlagosainak alakulását leíró függvényeket. Képezzük e célból az egyes függvények elsőrendű parciális deriváltjait, illetve az ezekből képezhető megfelelő $(n\times m)$-es Jacobi mátrixokat:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial h_1[x(t)]}{\partial x^1(t)} & \dfrac{\partial h_1[x(t)]}{\partial x^2(t)} & \cdots & \dfrac{\partial h_1[x(t)]}{\partial x^m(t)} \\ \dfrac{\partial h_2[x(t)]}{\partial x^1(t)} & \dfrac{\partial h_2[x(t)]}{\partial x^2(t)} & \cdots & \dfrac{\partial h_1[x(t)]}{\partial x^m(t)} \\ & \vdots & & \\ \dfrac{\partial h_n[x(t)]}{\partial x^1(t)} & \dfrac{\partial h_n[x(t)]}{\partial x^2(t)} & \cdots & \dfrac{\partial h_n[x(t)]}{\partial x^m(t)} \end{bmatrix}.$$

Az output-fajlagosokat leíró függvényhalmaz hasonlóképpen képezhető. Az egyszerűbb jelölés kedvéért vezessük be a Jacobi mátrixok jelölésére a $\partial H[x(t)]\,/\,\partial x(t)$, illetve a $\partial G[x(t)]/\partial x(t)$ szimbólumokat megfelelően.

A $H[x(t)]$ és a $G[x(t)]$ nemlineáris függvényhalmazokra a következő feltevéseket tesszük:

(1.F) *Folytonosság.* Mind a $h_i[x(t)] \in C^1$, mind a $g_i[x(t)] \in C^1$ minden $i = 1,2,\ldots,n$-re, azaz az R_+^m-ben minden változójuk szerint folytonosan differenciálhatók.

(2.F) *Homogenitás.* $H[\alpha x(t)] = \alpha H[x(t)]$ és $G[\alpha x(t-1)] = \alpha G[x(t-1)]$ bármely $\alpha \geqq 0$-ra.

(3.F) *Nemnegativitás.* $H[x(t)] \geqq 0$ és $G[x(t)] \geqq 0$ minden $x(t) \geqq 0$-ra.

(4.F) *Monotonitás.* $H[x(t)] \leqq H[x(t+1)]$ és $G[x(t)] \leqq G[x(t+1)]$, ha $x(t) \leqq x(t+1)$.

(5.F) *Speciális strukturális tulajdonság.* A nemlineáris rendszer technológiailag és/vagy gazdaságilag erősen nem reducibilis.

Nemlineáris rendszerünk ráfordítási, illetve kibocsátási szempontból történő strukturális jellemzését a $H[x(t)]$, illetve a $G[x(t-1)]$ nemlineáris leképezéshalmazból képezhető $\partial H\left[x\left(t\right)\right] / \partial x\left(t\right), \partial G\left[x\left(t-1\right)\right] / \partial x\left(t-1\right)$ Jacobi mátrixokkal adhatjuk meg, amelyeket a továbbiakban $C\left[x\left(t\right)\right]$, illetve $B\left[x\left(t\right)\right]$ szimbólumokkal jelölünk. Ezek a mátrixok az egyes tevékenységek egységnyi alkalmazási szintjei mellett történő termékfelhasználások, illetve kibocsátások nemlineáris változását írják le. Amennyiben kikötjük, hogy az egyes tevékenységek alkalmazási szintjei az egyes periódusokban arányaikban állandóak, vagyis áttérünk stacionárius modellre, úgy az időindex elhagyható.

Most néhány alapvető fogalmat definiálunk a fentiekben értelmezett nemlineáris és stacionárius gazdasági rendszerünk keretei között, majd megmutatjuk, hogy ezek a definíciók speciális esetekben valóban egybe esnek e fogalmak kevésbé általános rendszerekben megadott definícióival.

1. Definíció (sajátérték, sajátvektor, spektrum, spektrál rádiusz). *Egy (komplex) λ számot a $C(x)$ Jacobi mátrixnak a $B(x)$ Jacobi mátrix szerinti sajátértékének nevezzük akkor és csak akkor, ha van olyan nemzérus x vektor, amelyre teljesül a $C(x)x = \lambda B(x)x$ egyenlőség. Az x vektort a $C(x)$ Jacobi mátrixnak a $B(x)$ Jacobi mátrix szerinti sajátvektorának nevezzük. A sajátértékek halmazát a $C(x)$ Jacobi mátrixnak a $B(x)$ Jacobi mátrix szerinti spektrumának nevezzük és $sp[C(x)_{B(x)}]$-vel jelöljük; ezek közül a legnagyobb abszolút értékű a spektrál rádiusz:*

$$\rho[C(x)_{B(x)}] = \begin{cases} \sup_{\lambda \in sp[C(x)_{B(x)}]} |\lambda| & \text{ha } sp[C(x)_{B(x)}] \neq \emptyset\,; \\ -\infty & \text{ha } sp[C(x)_{B(x)}] = \emptyset\,. \end{cases}$$

Az 1. definíció speciális esetekben a következőképpen módosul:

(a) Lineáris Leontief-rendszer

Ha $m = n$ és $C(x) = A$ valamint $B(x) = E$, akkor a sajátérték és a sajátvektor az $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$ sajátérték-feladat megoldásaként adódik. Ebben az esetben $sp(A_E) = sp(A)$ az A mátrix szokásos spektruma, amelyből a legnagyobb abszolút értékű az A mátrix spektrál rádiuszát, $\rho(A)$-t adja.

(b) Lineáris Neumann-rendszer

Ha a j-edik tevékenység x^j alkalmazási szinten az i-edik termékből felhasznált, illetve kibocsátott mennyisége ezen x^j lineáris függvénye, vagyis $h_i(x) = \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_j$, illetve $g_i(x) = \sum_{j=1}^{m} b_{ij} x_j$, akkor az input és output koefficienseket meghatározó Jacobi mátrixoknak rendre a $C = [c_{ij}]$ és $B = [b_{ij}]$ mátrixok felelnek meg. A rendszerhez tartozó λ sajátértékeket most a $Cx = \lambda Bx$, $x \neq 0$ általánosított sajátérték-feladat megoldásaként határozhatjuk meg. Az ilyen tulajdonságú λ a C mátrix B mátrixra vonatkozó sajátértéke. Ezen összes λ-k halmazát a C mátrix B mátrix szerinti spektrumának nevezzük és $sp(C_B)$-vel jelöljük. A C mátrix B mátrix szerinti spektrál rádiuszáról könnyen belátható, ha

(*i*) $n > m$, akkor $sp\left(C_B\right) \supset \left(-\infty, \infty\right)$, következésképpen $\rho\left(C_B\right) = \infty$;

(*ii*) $n < m$, akkor $sp\left(C'_{B'}\right) \supset \left(-\infty, \infty\right)$, következésképpen $\rho\left(C'_{B'}\right) = \infty$;

(*iii*) $n = m$, akkor $sp\left(C_B\right) = sp\left(C'_{B'}\right) =$ legfeljebb n elemű halmaz, amely lehet üres is.

(c) Nemlineáris Leontief-rendszer

Ha $m = n$ és a j-edik tevékenység a j-edik termékből x^j alkalmazási szinten x^j mennyiséget bocsát ki, azaz $g_j(x) = x^j$, az $i \neq j$ termékből pedig nem állít elő, $g_i(x) = 0$ $(i \neq j)$, valamint az i-edik termékből történő felhasználás x nemlineáris függvénye, azaz $h_i(x)$, akkor a nemlineáris rendszerhez tartozó λ sajátértékre az $A(x)x = \lambda x$ egyenlőségnek kell teljesülnie nemzérus x mellett, ahol $A(x)$ a nemlineáris Leontief-rendszer technológiai koefficienseit meghatározó megfelelő Jacobi mátrix. Az összes sajátértékek halmaza, azaz az $A(x)$ Jacobi mátrixnak az egységmátrixra vonatkozó spektruma pedig $sp(A(x)_E)$ vagy röviden $sp[A(x)]$.

2. Definíció ((i) technológiai és (ii) gazdasági (ir)reducibilitás).

(i) *a* $[C(x), B(x)]$ *Jacobi mátrix-párral megadott nemlineáris rendszer technológiailag (ir)reducibilis akkor és csak akkor, ha* $C(x)x \not> 0$ $(C(x)x > 0)$ *valamely (minden) szemipozitív* x *vektorra, amely mellett* $\alpha C(x)x \leqq B(x)x$, $\alpha > 0$;

(ii) *a* $[C(x), B(x)]$ *Jacobi mátrix-párral megadott nemlineáris rendszer gazdaságilag (ir)reducibilis akkor és csak akkor, ha* $p'B(x) \not> 0'$ $(p'B(x) > 0')$ *valamely (minden) szemipozitív* p *vektorra, amely mellett* $p'B(x) \leqq \beta p'C(x)$, $\beta > 0$.

Definíciónk a szerző egy korábbi tanulmányaiban (Móczár (1980, 1995)) kifejtett (ir)reducibilitás definíciójának általánosított nemlineáris esetre történő kiterjesztése. Nemlineáris esetben is könnyen megmutatható, hogy a Neumann-reducibilitás tágabb fogalom, mint a Leontief-reducibilitás. (Részletesebb kifejtését lásd később!) A fenti definíció is implikálja a gyengén, illetve erősen reducibilis rendszereket, valamint ezek további finomításait, a csak gyengén és a csak erősen reducibiliseket. Általánosított esetben is megmutatható, hogy amíg egy nemlineáris Neumann-reducibilitás gyengén, addig mint nemlineáris Leontief-reducibilis rendszer csak erősen reducibilis. Tehát az általánosított Neumann-reducibilitás értelmezhető a Leontief-rendszerre is, és ha egy Leontief-rendszer Neumann-reducibilis, akkor nyilván mindig Leontief-reducibilis is. Az egyes speciális esetekben definíciónk a következőképpen módosul.

(a) Lineáris Leontief-rendszer

A rendszer (ir)reducibilitása, tekintettel a $C(x) = A$ azonosságra, a nemnegatív kvadratikus A mátrixtól függ. Megjegyzendő, hogy a lineáris Leontief-rendszer erősen nem reducibilis jellege feltételezi a rendszer gazdaságilag csak gyengén reducibilis jellegét. Az irreducibilis (unzerlegbar) mátrix definícióját a tudománytörténet Frobenius nevéhez fűzi, amit a szakirodalomban indekompozábilis, nemredukálható(unreduced) elnevezéssel is jelölnek. (Lásd erről részletesen Romanovsky (1936), Debreu és Herstein (1953) és Wielandt (1950) műveit!) Érdekességként, s nem utolsósorban a hazai kutatásunk kritikájaként megemlítem, hogy Schneider(1977) tanulmányában részletesen kifejti, hogy az irreducibilis mátrix fogalma először a világhírű magyar matematikus, König (1916) munkájában szerepelt.

A teljesség igénye nélkül most áttekintjük a leggyakrabban alkalmazott definíciókat:

($a1$) (*Frobenius*). $n \geqq 2$-re egy $n \times n$-es (komplex) A mátrix *reducibilis*, ha van olyan $n \times n$-es P permutáló mátrix, hogy

$$PAP' = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix},$$

ahol A_{11} egy $r \times r$-es részmátrix, és A_{22} egy $(n-r) \times (n-r)$ -es részmátrix, ahol $1 \leqq r < n$. Ha ilyen permutáló mátrix nem létezik, akkor az A *irreducibilis*. Amennyiben A egy 1×1-es (komplex) mátrix: irreducibilis, ha az egyetlen egy eleme zérustól különböző, egyébként reducibilis.

($a2$) (*König-Varga*). Egy $n \times n$-es (komplex) A mátrix *irreducibilis* akkor és csak akkor, ha a hozzárendelt $G(A)$ irányított gráf erősen összefüggő, ha bármely P_i és P_j rendezett csúcs-párra létezik egy irányított

$$\overrightarrow{P_i P_{l_1}}, \overrightarrow{P_{l_1} P_{l_2}}, \ldots, \overrightarrow{P_{l_{r-1}} P_{l_r = j}}$$

útvonal, amely összekapcsolja P_i-t és P_j-t.

($a3$) (*Geiringer*). Legyen $A = [a_{ij}]$ egy $n \times n$-es komplex mátrix, $n \geqq 2$ és legyen $W = \{1, 2, \ldots, n\}$ az első n természetes szám halmaza. A *irreducibilis* akkor és csak akkor, ha W-nek bármely két diszjunkt és nemüres S és T részhalmazára, $S \cup T = W$, létezik A-nak $a_{ij} \neq 0$ eleme, ahol $i \in S$ és $j \in T$.

($a4$) (*Nikaido*). Az $A = [a_{ij}] \geq 0$ *reducibilis* akkor és csak akkor, ha van olyan $\rho \geqq 0$ valós szám és szemipozitív x vektor (amelynek nem minden eleme zérus), amelyek kielégítik az $Ax \leqq \rho x$ relációt.

($a5$) (*Morishima*). Az $n \times n$-es A mátrix *irreducibilis* akkor és csak akkor, ha egy tetszőleges szemipozitív x vektorra (amelynek van néhány pozitív eleme) $[Ax]_i > 0$ legalább egy $i \in I_2$-re, ahol $I_2 = \{i \mid x_i = 0\}$ az $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ indexhalmaznak egy valódi nemüres részhalmaza.

($a6$) (*Arrow*). A *gazdaság irreducibilis* akkor és csak akkor, ha bármilyen módon is osztjuk a szektorokat két csoportba, az egyik csoport induló készleteiben bekövetkező növekedést fel lehet használni úgy, hogy lehetségessé váljék a termékek olyan elosztása, amely mellett senkinek sem romlik a helyzete, sőt a második csoport legalább egy tagja jobb helyzetbe kerül.

(b) Lineáris Neumann-rendszer

A rendszer technikai-technológiai összefüggéseit kifejező Jacobi mátrixnak most a $C = [c_{ij}] \geq 0$, illetve $B = [b_{ij}] \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m)$ mátrixok feleltethetők meg. A lineáris Neumann-rendszer (ir)reducibilitását ezen (C, B) mátrixpár Neumann értelemben vett (ir)reducibilitása jelenti. Ennek egyes kritériumait következőképpen fogalmazhatjuk meg:

($b1$) (*Gale*). Az $\{1, 2, \ldots, n\}$ sorindex-halmaz I valódi részhalmazát függetlennek nevezzük, ha az $\{1, 2, .., m\}$ oszlopindex-halmaznak van olyan nem üres J részhalmaza, hogy $c_{ij} = 0$ minden $i \in \overline{I}$, $j \in J$ index-párra, és $b_{ij} > 0$ minden $i \in I$-re valamely $j \in J$ mellett. A lineáris Neumann-rendszer irreducibilis, ha nem jelölhető ki benne független részhalmaz.

Ez a definíció tovább specifikálható, amint ezt a korábbi tanulmányaimban (ld. például, Móczár(1995)) megmutattam. Eszerint a reducibilis lineáris Neumann-rendszer adott független I részhalmaz mellett tovább osztályozható: *erősen* reducibilis, ha $b_{ij} = 0$ minden $i \in \overline{I}$, $j \in J$ index-párra; *gyengén* reducibilis, ha $b_{ij} > 0$ néhány $i \in \overline{I}$, $j \in J$ index-pár esetén.[2]

($b2$) (*Gale-Robinson*). (i) A (C, B) Neumann-rendszer *technológiailag (ir)reducibilis* akkor és csak akkor, ha $Cx \not> 0$ $(Cx > 0)$ valamely (minden) szemipozitív x vektorra, amely mellett $\alpha Cx \leqq Bx$ és $\alpha > 0$.(A technológiailag irreducibilis struktúra tehát azt jelenti, hogy egy ilyen rendszer csak úgy képes működni $(x \neq 0)$, ha $Bx > 0$, azaz minden egyes termékből van kibocsátás.)

(ii) A (C, B) Neumann-rendszer *gazdaságilag (ir)reducibilis*, ha $p'B \not> 0$ $(p'B > 0)$ valamely (minden) szemipozitív p vektorra, amely mellett $p'B \leqq \beta p'C$ és $\beta > 0$. (A gazdaságilag irreducibilis rendszerben minden egyes termelési eljárás pozitív értéket eredményez, mégpedig úgy, hogy valamennyi lehetséges szemipozitív árrendszerhez található olyan pozitív kamattényező, hogy egyetlen termelési eljárás sem realizál a kamattényező által meghatározottnál nagyobb jövedelmet. Másként megfogalmazva, ez annyit jelent, hogy egy ilyen rendszerben csak úgy lehet az ún. non-profit feltételeket kielégítő pozitív kamattényezőt és szemipozitív árrendszert megadni, ha minden tevékenység pozitív értéket hoz létre, vagyis a rendszer gazdaságilag reducibilis, ha egy lehetséges értékelési rendszerben valamely tevékenység(ek) csak szabad javakat (termékeket) állítanak elő.)

($b3$) (*Gale-Robinson-Móczár*). (i) A (C, B) strukturális mátrixokkal megadott Neumann rendszer *technológiailag erősen reducibilis* akkor és csak akkor, ha van olyan szemipozitív x vektor és pozitív α valós szám, amelyekre $\alpha Cx \leqq Bx$ és $Bx \not> 0$. (Egyébként irreducibilis vagy csak gyengén reducibilis.)

(ii) A (C, B) strukturális mátrixokkal megadott Neumann rendszer *gazdaságilag erősen reducibilis* akkor és csak akkor, ha van olyan szemipozitív p vektor és β valós szám, amelyekre $\beta p'C \geqq p'B$ és $p'C \not> 0$; (Egyébként irreducibilis vagy csak gyengén reducibilis.)

(c) Nemlineáris Leontief-rendszer

A nemlineáris Leontief-rendszerben technológiai koefficienseket meghatározó Jacobi mátrix $A(x)$, s maga a rendszer a nemlineáris Neumann-rendszer

[2]Megjegyzendő, hogy ez a specifikáció a Gale-féle irreducibilitási definíció közgazdasági szempontból történő pontosítását is jelenti. A Gale-féle definíció értelmében ugyanis a *csak gyengén reducibilis* Neumann gazdaságok irreducibilisnek tekinthetők.

speciális esetének tekinthető. Az (ir)reducibilitás definíciója most a következőképpen módosul.

($c1$) (*Morishima*). A nemlineáris Leontief-rendszer *irreducibilis* akkor és csak akkor, ha tetszőleges szemipozitív z vektornak, amelynek van néhány zérus eleme, legalább egy zérus elemét az $A(x)z$ transzformáció pozitívvá konvertálja.

($c2$) (*Nikaido*). Vegyünk két olyan nemnegatív n-elemű x és y vektort, amelyekre $x \geq y \geq 0$, és legyen $N(x,y) = \{j \mid x_j > y_j\}$ az $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ indexhalmaz részhalmaza. A Leontief-féle irreducibilitás nemlineáris kiterjesztése a következőképpen fogalmazható meg: a $H(x)$ nemlineáris leképezést *irreducibilis*nek nevezzük, ha az x, y fenti tulajdonságú vektor-párra azt kapjuk, hogy $h_i(x) \neq h_i(y)$ valamely $i \in N(x,y)$, ahol $N(x,y)$ az N-nek egy valódi nemüres részhalmaza.

3 Nemlineáris Neumann-modell

Ahhoz, hogy a fentiek figyelembevételével megfogalmazhassuk a *Neumann-modell Morishima-féle nemlineáris kiterjesztését*, képeznünk kell az adott tevékenységi szintvektor melletti input- és output-mátrixokat, amelyek az egységnyi alkalmazási szint melletti felhasználások és kibocsátások időbeni alakulását mutatják. Képezzük e célból a $H[x(t)]$, illetve a $G[x(t-1)]$ nemlineáris leképezés-halmazokból a

$$\left[\frac{\partial h_i\left[x\left(t\right)\right]}{\partial x^j\left(t\right)}\right] \text{ valamint a } \left[\frac{\partial g_i\left[x\left(t-1\right)\right]}{\partial x^j\left(t-1\right)}\right] \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m) \tag{1}$$

$n \times m$-es Jacobi mátrixokat, amelyeket a továbbiakban a $C[x(t)]$, illetve a $B[x(t-1)]$ szimbólumokkal jelölünk. A $H[x(t)]$, illetve a $G[x(t-1)]$ függvény-halmazokra tett (2.F) kikötés következtében alkalmazhatjuk az ismert *Euler tételt*, aminek eredményeként a Jacobi mátrixoknak a tevékenységi szintvektorral alkotott szorzata az összráfordítást, illetve az összkibocsátást adja termékenkénti bontásban. Ekkor a modell zártsága következtében:

$$C[x(t)]x(t) \leqq B[x(t-1)]x(t-1) \;, \tag{2}$$

azaz a t-edik periódusban, nemlineáris esetben is a termeléshez legfeljebb csak annyi terméket használhatunk fel, mint amennyi az előző periódus kibocsátása.

Előre meghatározott árak és kamatlábak mellett előfordulhat, hogy egyes tevékenységek nyereségesebbek, mint a többiek. Egyensúlyi állapotban azonban nem szerepelhet ilyen tevékenység. Ebben az esetben ugyanis egyetlen tevékenység sem realizálhat több nyereséget, mint amennyit a gazdaságra jellemző átlagos kamattényező megenged. Ellenkező esetben ugyanis a többletnyereséget eredményező tevékenység nagyobb mérvű alkalmazása lenne racionális, ami viszont a termelési tényezők áremelkedéséhez, s ezáltal az egyensúly megbomlásához vezetne. Az elmondottak alapján

$$p'(t+1)B[x(t)] \leqq \beta p'(t)C[x(t)] \ , \tag{3}$$

azaz nemlineáris esetben is minden egyes tevékenység legfeljebb csak annyi nyereséget realizálhat, mint amennyit a gazdaság egészére jellemző egységes kamattényező megenged.

Ha valamely termékből többet termelnek, mint amennyi a felhasználási igény, vagyis $b_i'[x(t-1)]x(t-1) > c_i'[x(t)]x(t)$, akkor ezek a termékek szabaddá válnak, ami abban jut kifejezésre, hogy zérus áron értékelődnek, azaz $p^i(t) = 0$. Ez viszont azt jelenti, hogy

$$p'(t)B[x(t-1)]x(t-1) = p'(t)C[x(t)]x(t) \ . \tag{4}$$

Ha viszont valamely tevékenység alkalmazása negatív nyereséget eredményez nemlineáris input, illetve output koefficiensek mellett, azaz $p'(t+1)b_j[x^j(t)] < \beta(t)p'(t)c_j[x^j(t)]$, akkor azt a tevékenységet értelemszerűen nem használják fel, így alkalmazási szintje nulla lesz, vagyis $x^j(t) = 0$. Ezt a következő egyenlőséggel fejezhetjük ki:

$$p'(t+1)\,B\,[x\,(t)]\,x\,(t) = \beta\,(t)\,p'\,(t)\,C\,[x\,(t)]\,x\,(t) \ . \tag{5}$$

Eddig az $x\,(t)$-vel jelölt tevékenység-alkalmazási szintek alakulásáról nem kötöttünk ki semmit. Neumann viszont az egyensúlyt mint az egyensúlyba hozott növekedés állapotát határozta meg, amelyben az árak és a kamatláb változatlansága mellett a tevékenységek intenzitása valamennyi tevékenységre ugyanazon hányados szerint mértani haladványban nő vagy csökken. A kiegyensúlyozott növekedés nemlineáris Neumann modelljét a fentieket kifejező $p\,(t) = p\,(t+1)$, $\beta\,(t) = \beta$, $\alpha x\,(t) = x\,(t+1)$ egyenletek figyelembe vételével a következőképpen fogalmazhatjuk meg:

$$\begin{array}{ll}
(i) & \alpha C\,(x)\,x \leqq B\,(x)\,x \\
(ii) & p'B\,(x) \leqq \beta p'C\,(x) \\
(iii) & p'B\,(x)\,x = \beta p'C\,(x)\,x \\
(iv) & p'B\,(x)\,x = \alpha p'C\,(x)\,x \\
(v) & x \geq 0,\ p \geq 0,\ \alpha, \beta > 0 \ .
\end{array}$$

(Minthogy az intenzitás- és az árvektorok ugyanazon periódusra vonatkoznak, ezért az időváltozó elhagyható.) A modell megoldása a következőképpen értelmezhető: határozzuk meg az $L_\alpha = \{\alpha \mid (B\,(x) - \alpha C\,(x))\,x \geqq 0, x \geq 0\}$ és az $L_\beta = \{\beta \mid p'\,(B\,(x) - \beta C\,(x)) \leqq 0, p \geq 0\}$ halmazokat; az $(\alpha_0, x_{0;}\beta_0, p_0)$ egyensúlyi állapotokat az L_α és az L_β halmazok azon pontjainak kijelölésével kaphatjuk meg, amelyekhez tartozó x_0 és p_0 vektorok kielégítik a modell (iii) és (iv) feltételeit. A modell megoldásával kapcsolatban most is két probléma vethető fel: az egzisztencia és az unicitás bizonyítása. Az egyszerűség kedvéért tekintsük most a nemlineáris modellünket a következő alakban:

$$\begin{array}{ll} (i) & \lambda C(x)\, x \leqq B(x)\, x \\ (ii) & \lambda p' C(x) \geqq p' B(x) \\ (iii) & \lambda > 0\,,\ x \geq 0\,,\ p \geq 0\,. \end{array}$$

Könnyen belátható, hogy eme rendszer (λ, x_0, p_0) megoldásai az eredeti nemlineáris Neumann modell olyan egyensúlyi állapotait szolgáltatják, ahol $\alpha_0 = \beta_0 = \lambda_0$. Az egzisztencia bizonyításához elegendő ebben az esetben is a Kemeny-Morgenstern-Thompson feltételek megfelelő nemlineáris kiterjesztéseit szerepeltetni.

Amennyiben szigorú egyensúlyt írunk elő a nemlineáris rendszerünkben mind a használati érték, mind az érték oldalról, akkor az unicitás bizonyításához a legcélravezetőbb a Perron-Frobenius tételek általánosított nemlineáris rendszerekben történő kiterjesztésének felhasználása.

4 Perron-Frobenius tételek az általánosított nemlineáris rendszerekben

A Perron-Frobenius tételek nemlineáris kiterjesztésében az eddig követett kifejtési módszerrel szemben az induktív utat választjuk, vagyis először az egyes speciális eseteket tekintjük át, majd ezek általánosításaként jutunk el a tétel nemlineáris Neumann-rendszerben történő megfogalmazásához.

A nemnegatív kvadratikus mátrixokra kimondott Perron-Frobenius tételek kulcsfontosságú szerepet játszanak az input-output technikán alapuló lineáris modellek elemzésében. Többféle megfogalmazásuk ismert a szakirodalomban, amelyek mindegyike lényegében a következő állításokat fogalmazza meg a nemnegatív, $n \times n$-es irreducibilis A mátrixra.

(i) Az A mátrixnak van olyan valós és pozitív sajátértéke, amely megegyezik az A mátrix spektrál rádiuszával, $\rho(A)$-val;

(ii) $\rho(A)$-hoz hozzárendelhető egy $x > 0$ sajátvektor;

(iii) $\rho(A)$ az A mátrix monoton növekvő függvénye.

Tudománytörténeti szempontból érdemes megjegyezni, hogy Perron a fenti állításokat $A > 0$ feltevéssel bizonyította 1907-ben. Többek között megmutatta azt is, hogy csak egyetlen ilyen $\rho(A)$ létezik. Később, 1912-ben Frobenius enyhített az A mátrixra tett kikötésen és kiterjesztette Perron eredményeit a nemnegatív kvadratikus és irreducibilis mátrixok osztályára.

A tétel egyfajta kiterjesztéseként egy tetszőleges nemnegatív kvadratikus A mátrixra a következő állításokat fogalmazhatjuk meg:

(i) Az A mátrixnak van olyan nemnegatív valós sajátértéke, amelyik megegyezik $\rho(A)$-val; továbbá ez a sajátérték pozitív hacsak A nem reducibilis és az A mátrix normál alakja[3] nem szigorúan felső trianguláris[4] mátrix.

(*ii*) $\rho(A)$-hoz hozzárendelhető egy $x \geq 0$ sajátvektor;

(*iii*) $\rho(A)$ az A mátrix nemcsökkenő függvénye.

(A tétel bizonyítását az olvasóra bízzuk.) Az irreducibilis esetre kimondott tételt Frobenius elemi úton bizonyította; később Wielandt (1950) valamivel egyszerűbben, a Brouwer-féle fixponttétel segítségével mutatta meg az állítások helyességét. Őket követően több bizonyítás is napvilágot látott, ezek közül Debreu és Herstein (1953), Karlin (1959), Bellmann (1970), Nikaido (1968), Arrow és Hahn (1972), Murata (1972) és Seneta (1973) bizonyításai érdemelnek említést.

A lineáris eset egy másik irányú kiterjesztésével Mangasarian (1971) foglalkozott. Nevezetesen, a $Cx = \lambda Bx$ általánosított sajátérték-feladat megoldását vizsgálta a $p'B \geq 0$, $p'C \geq 0$ feltevések mellett, ahol B és C $n \times m$-es valós mátrixokat jelölnek, p pedig egy megfelelő n-elemű vektort.

A tétel első nemlineáris kiterjesztését Solow és Samuelson végezték el, majd ezt követően Morishima (1964), Nikaido (1968), Morishima és Fujimoto (1974) foglalkoztak a tétel egy lehetséges nemlineáris esetével, vagyis a $H(x)\,x = \lambda x$ sajátérték-feladat megoldásával, ahol a $H(x)$ az adott dimenziójú euklideszi tér két pontja közötti nemlineáris megfeleltetést jelöli.

E rövid bevezető után nézzük meg az egyes speciális rendszerekben kimondható Perron-Frobenius tételek vizsgálatát. Elemzésünk abban tér el a fenti úttörő munkákban kifejtettektől, hogy közgazdaságilag értelmezhető, erősen nem reducibilis rendszerekben fogalmazzuk meg tételeinket és adunk bizonyításokat.

(a) Lineáris Leontief-rendszer

1. Tétel. *Legyen A egy $n \times n$-es valós és nemnegatív mátrix, azaz ha y egy tetszőleges nemnegatív vektor, akkor Ay szintén nemnegatív. Ekkor a következőket állítjuk:*

(*i*) *Létezik olyan szemipozitív vektor, $x \geq 0$, amely mellett $Ax = \lambda x$ valamilyen $\lambda \geqq 0$-ra és $\lambda = \rho(A)$.*

(*ii*) *Létezik olyan szemipozitív vektor, $p \geq 0$, amely mellett $p'A = \lambda p'$ valamilyen $\lambda \geqq 0$-ra és $\lambda = \rho(A)$.*

(*iii*) *Ha $\lambda \neq \rho(A)$ nincs olyan $p > 0$ vektor, amelyre $p'A = \lambda p'$ teljesülne.*

---

[3]Egy $n \times n$-es reducibilis A mátrix *normál alakján* a következő szimmetrikus partícionált hipermátrixot értjük:

$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \cdots & D_{1m} \\ 0 & D_{22} & \cdots & D_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D_{mm} \end{bmatrix},$$

ahol P egy $n \times n$-es permutáló mátrix, és a D_{jj} $\left(1 \leqq j \leqq m\right)$ mátrixok mindegyike olyan kvadratikus mátrix, amely vagy irreducibils vagy egy 1×1-es nulla mátrix.

[4]Egy $n \times n$-es $T = [t_{ij}]$ mátrix *szigorúan felső trianguláris* mátrix, ha $t_{ij} = 0$ minden $i \geqq j$-re.

(*iv*) *Legyen* $\Gamma = \{\xi \mid p'A \geqq \xi p', p' > 0\}$ *és* $\Lambda = \{\xi \mid p'A \leqq \xi p', p' > 0\}$. *Akkor* $\rho(A) = \rho(A') = \sup\{\xi \mid \xi \in \Gamma\} = \inf\{\xi \mid \xi \in \Lambda\}$.

(*v*) *Legyen* D *egy* $n \times n$*-es valós és nemnegatív mátrix. Ha* $A \geqq D$, *akkor* $\rho(A) \geqq \rho(D)$.

A tétel bizonyítása közismert, ezért erre most itt nem térünk ki.

(b) Lineáris Neumann-rendszer

A tétel megfogalmazásához vezessük be a C és a B valós elemű $n \times m$ típusú mátrixokat. Amennyiben B maximális oszloprangú (illetve C maximális sorrangú) és megadható egy olyan $m \times m$-es X valós mátrix (illetve egy $n \times n$-es Z mátrix), amelyre $C = BX$ (illetve $ZC = B$), akkor $sp(X) \subseteq sp(C_B)$, illetve $sp(Z) \subseteq sp(B'_{C'})$. Ezt bizonyítjuk a következő segédtételben.

1. Segédtétel. *Legyen* X *egy olyan* $m \times m$*-es valós mátrix, amelyre* $C = BX$.

(1.1) $\lambda \in sp(C_B)$ *és* $Cx = \lambda Bx$ *akkor és csak akkor, ha az* $Xx = \lambda x$ *sajátérték-egyenletnek van* $x \neq 0$ *megoldása valamilyen valós* λ *mellett.*

(1.2) $\lambda \in sp(C'_{B'})$ *és* $p'C = \lambda p'B$ *akkor és csak akkor, ha a* $z'X = \lambda z'$ *sajátérték-egyenletnek van* $z' \neq 0'$ *megoldása valamilyen valós* λ *mellett.*

Bizonyítás. (1.1) (*i*) *Elégségesség.* Legyen $\lambda \in sp(X)$; ekkor $Xx = \lambda x$ és $x \neq 0$. Minthogy $BXx = \lambda Bx$, $x \neq 0$ és véve a $BX = C$ helyettesítést, kapjuk: $Cx = \lambda Bx$, $x \neq 0$ és így $\lambda \in sp(C_B)$.

(*ii*) *Szükségesség.* Legyen $\lambda \in sp(C_B)$; ekkor $Cx = \lambda Bx$ és $x \neq 0$. C helyébe BX-et írva és figyelembe véve $Xx = \lambda x$, $x \neq 0$, amiből kapjuk, hogy $\lambda \in sp(X)$.

(1.2) (*i*) *Elégségesség.* Legyen $\lambda \in sp(X)$; ekkor $z'X = \lambda z'$ és $z' \neq 0'$. Mivel $z' = p'B$, ezért behelyettesítve: $p'BX = \lambda p'B$, azaz $p'C = \lambda p'B$, amely szerint már $\lambda \in sp(C_B)$ és így $\lambda \in sp(C'_{B'})$ is.

(*ii*) *Szükségesség.* Legyen $\lambda \in sp(C'_{B'})$, ekkor $p'C = \lambda p'B$, $p' \neq 0'$. Minthogy $C = BX$, ezért $p'BX = \lambda p'B$ és $p' \neq 0'$. Figyelembe véve a $z' = p'B$ összefüggést, kapjuk a $z'X = \lambda z'$, $z' \neq 0'$, és így $\lambda \in sp(X)$.

A $Cx = \lambda Bx$ illetve a $C'p = \lambda B'p$ általánosított sajátérték-feladat Perron-Frobenius tulajdonságait —tudomásom szerint— ez idáig csak O. L. Mangasarian (1971) vizsgálta. A Perron-Frobenius tételek Neumann-rendszerben történő kiterjesztéséhez a C és B mátrixok duális jellemzőinek feltárásán keresztül kísérelt meg eljutni. E célból a lineáris Leontief-rendszerre kimondott Perron, illetve Frobenius tételeket megpróbálta az eredetivel ekvivalensen átfogalmazni, s ezek alapján levezetni azokat a lineáris Neumann-rendszerre. A Perron tételt a következőképpen alakította át: Legyen A egy $n \times n$-es valós mátrix; ha tetszőleges szemipozitív p vektor mellett $A'p > 0$, akkor az A spektrál rádiusza valós és pozitív, és a megfelelő sajátvektor pozitív.

A fentiekben transzformált tétel kikötése két esetet foglal magában: az egyik az eredeti feltétel, vagyis hogy az A pozitív mátrix, a másik pedig, megfelelő esetben A nemnegatív és irreducibilis. (Ennyiben tehát a Mangasarian tétel több, mint Perroné volt: együtt tartalmazza mind Perron, mind Frobenius tételét.) A lineáris Neumann-rendszerre a fenti transzformált állítását —lényegében az E mátrixot B' mátrixszal helyettesítve— a következőképpen vitte át: Legyen C és B két $n \times m$ típusú valós mátrix, és C vagy B maximális oszloprangú; ha $B'p \geq 0$ és $C'p > 0$ tetszőleges szemipozitív p vektorra, akkor a $Cx = \lambda Bx$ általánosított sajátérték problémának van egy diszkrét és véges spektruma, és a legnagyobb abszolút értékű sajátérték (spektrál rádiusz) valós és pozitív, valamint tartozik hozzá pozitív sajátvektor.

A Frobenius tételt a következőképpen transzformálta: ha $p \geqq 0$-ra $A'p \geqq 0$, akkor az A mátrixhoz tartozó spektrál rádiusz valós és nemnegatív, és a megfelelő sajátvektor pozitív. A lineáris Neumann rendszerre ezt így fogalmazta meg: Ha a fenti tulajdonságú C és B mátrixokra $B'p \geqq 0$ és $C'p \geqq 0$, akkor a $Cx = \lambda Bx$ általánosított sajátérték feladatnak van egy diszkrét és véges spektruma, és a legnagyobb abszolút értékű sajátérték valós és nemnegatív, valamint tartozik hozzá szemipozitív sajátvektor. A fentiek alapján világos, hogy Mangasariannak a Frobenius tételt nem sikerült ekvivalensen transzformálnia, hiszen kikötése csak A nemnegativitását biztosítja. Ugyanis, míg Perron a $\rho(A)$-ra vonatkozó tulajdonságokat $A > 0$ feltételezéssel bizonyította, addig Frobénius megmutatta, hogy mindezek a tulajdonságok érvényesek a nemnegatív és irreducibilis mátrixok spektrál rádiuszaira is. Jóllehet, hogy az irodalomban valóban létezik a Frobenius tételnek olyan általánosítása, ami a reducibilis esetet is magában foglalja, de ez a nemnegatív sajátértéket és a szemipozitív sajátvektort tovább specifikálja. Eszerint pl. a sajátérték pozitív, ha A irreducibilis, illetve, ha az A mátrix normál alakja nem szigorúan felső trianguláris mátrix. Ez utóbbi feltevések közül az irreducibilitást, ami éppen a Frobenius tétel lényege, Mangasarian figyelmen kívül hagyta. Ez egyébként csak azzal magyarázható, hogy a problémát pusztán matematikai szempontból vizsgálta. Valójában vizsgálódását nem is egy, a fentiekben bevezetett lineáris Neumann-rendszer keretei között végezte el, amit többek között az is bizonyít, hogy a C, B mátrixok előjelére semmilyen kikötést sem tett. Tanulmányomban megkísérelem most a közgazdasági oldalra helyezni a hangsúlyt, s egy erősen reducibilis (mind technológiailag, mind gazdaságilag) lineáris Neumann-rendszerre kimondott Perron-Frobenius tétel bizonyítását megadni.

Visszatérve Mangasarian Perron tételére, a duális tulajdonságot meghatározó feltételrendszere a lineáris Leontief-rendszer gazdaságilag erősen nem reducibilis jellegét biztosítja, ami ez esetben egyet jelent a technológiai irreducibilitással. Ez viszont már egy szükséges és elégséges feltétele annak, hogy az A mátrix spektrál rádiusza valós és elégséges feltétel legyen, és tartozzon hozzá pozitív sajátvektor. Tételében tehát valójában a Perron-Frobenius tételeket fogalmazza meg. Ennek egyenes következménye, hogy a lineáris Neumann-rendszer gazdaságilag erősen nem reducibilis jellegét biztosítják. Ilyen feltételek mellett tehát az általánosított Perron tétele a Perron-Frobenius tételek kiterjesztésének tekinthető.

Mangasarian nem tett kikötést az általánosított sajátérték-feladatban szereplő strukturális mátrixok előjelére az említett tanulmányában. (Ez egyébként a jelen tanulmányban kifejtett további tételekkel együtt lehetőséget ad a (nem)lineáris tevékenységelemzési modellek eddigieknél mélyebb strukturális tulajdonságinak feltárására, az ezeken alapuló további alkalmazásokra.) Tekintettel arra, hogy most a lineáris Neumann-rendszer keretei között végezzük vizsgálatainkat, ezért a továbbiakban kikötjük a C és a B mátrixok nemnegativitását és feltesszük, hogy eleget tesznek a Kemeny-Morgenstern-Thompson feltételeknek: nevezetesen $Cx \geq 0$ bármely $x \geq 0$-ra, $p'B \geq 0'$ bármely $p \geq 0$-ra. Mangasarian a strukturális mátrixok duális tulajdonságait olyan nagyságrendi relációk kikötése mellett vizsgálta, amelyek —közgazdasági szempontból tekintve— a lineáris Neumann-gazdaság keretei között a rendszernek csak a gazdasági (ir)reducibilitását biztosítják. A Perron-Frobenius tételek lineáris Neumann-rendszerre történő kiterjesztésében most figyelembe vesszük a technológiai (ir)reducibilitás különböző válfajait is.

Egyébként, ha a Mangasarian által megfogalmazott és a C, B struktúramátrixok duális tulajdonságait felölelő tételeket a lineáris Neumann-rendszer keretei között értelmezzük, néhány esetben meglepő, más irányú vizsgálatokból már ismert közgazdasági interpretációt kapunk.

Először vegyük sorba Mangasarian azon dualitási tételeit, amelyek a rendszer különféle gazdaságilag (ir)reducibilis jellegét kifejező matematikai feltételek mellett fogalmazzák meg állításaikat. (Érdekességként megemlítem, hogy ezen állítások jó részét, függetlenül az itt szereplő matematikai kritériumoktól, pusztán csak közgazdasági megfontolások alapján bebizonyítottam egy korábbi tanulmányomban.) Itt most még olyan feltételezéssel is élnünk kell, hogy $n \geqq m$, ami úgy biztosítható, hogy a speciális lineáris Neumann-rendszerünkben csak olyan tevékenységeket szerepeltetünk, amelyek ún. alaptevékenységek, és megengedjük az ikertermelés lehetőségét is. Ezzel biztosan teljesül C vagy B maximális oszloprangúsága, s az ikertermelés következtében a termékek száma meghaladja az alaptevékenységek számát. E feltételek bevezetése után tekintsük az egyes dualitási tételeket a speciális lineáris Neumann-rendszerünk keretei között elsősorban a matematikai kikötések közgazdasági értelmezése szempontjából (a bizonyításokat ld. Mangasarian (1971) tanulmányában):

(*i*) Ha van olyan szemipozitív p vektor, amelyre $p'B \geqq 0'$ és következésképpen $p'C \geqq 0'$, akkor és csak akkor van olyan $X \geqq 0$ mátrix, amelyre $C = BX$ egyenlőség teljesül. Világos, hogy a határeset, vagyis $X = 0$ csak az eredeti Neumann feltevés mellett teljesülhet, azaz ha megengedjük a $C = 0$ esetet is.

(*ii*) Ha van olyan szemipozitív p vektor, amelyre $p'B \geq 0'$ és $p'C \geqq 0'$, akkor és csak akkor van olyan $X \geqq 0$, amelyre teljesül a $C = BX$ egyenlőség. Amennyiben megpróbáljuk értelmezni közgazdaságilag a szükséges és elégséges matematikai kritérium határesetét, vagyis $p'B \not> 0'$ esetet, azt kapjuk, hogy lehetséges néhány ikerterméket kibocsátani anélkül, hogy akárcsak egyetlen egy termékértékből is felhasználtunk volna. A matematikai-közgazdasági szakirodalomból jól ismert, hogy ezt az esetet, az ún. „Eldorádó lehetőségét" (Koopmans) kizárjuk a termelési, illetve értékképző halmazból.

(*iii*) Ha van olyan szemipozitív p vektor, amelyre $p'B \geq 0'$ és $p'C \geq$

$0'$, akkor és csak akkor van olyan $X \geq 0$, amelynek néhány oszlopvektora pozitív és kielégíti a $C = BX$ mátrixegyenletet. A fenti kikötés megengedi a lineáris Neumann-rendszerre mind a gazdaságilag erősen, illetve gyengén reducibilis, mind a gazdaságilag csak gyengén reducibilis, illetve irreducibilis struktúrákat.

(iv) Ha van olyan szemipozitív p vektor, amelyre $p'B \geq 0'$ és $p'C > 0'$, akkor és csak akkor van olyan $X > 0$, amelyre $C = BX$. A tételben megfogalmazott szükséges és elégséges feltétel a lineáris Neumann-rendszer gazdaságilag erősen nem reducibilis jellegét biztosítja, ami viszont az X mátrix pozitivitását és ezzel az általánosított sajátérték-egyenlet egyértelmű megoldását adja.

Amennyiben olyan lineáris Neumann-rendszert vizsgálunk, amelyben $n < m$, azaz az egyes termékek előállítására több tevékenység is rendelkezésre áll, és C vagy B maximális sorrangú, akkor az 1. Segédtétel és a fenti dualitási tételek a lineáris Neumann-rendszer technológiai szempontból történő strukturális kikötései mellett a következőképpen módosulnak.

2. Segédtétel. *Legyen Z egy olyan $n \times n$-es mátrix, amelyre $B = ZC$.*

(2.1) *$\lambda \in sp(B'_{C'})$ és $\lambda p'C = p'B$, akkor és csak akkor, ha a $p'Z = \lambda p'$ sajátérték-egyenletnek van $p' \neq 0'$ megoldása valamilyen valós λ mellett.*

(2.2) *$\lambda \in sp(B_C)$ és $\lambda Cx = Bx$ akkor és csak akkor, ha a $Zq = \lambda q$ sajátérték-egyenletnek van $q \neq 0$ megoldása valamilyen valós λ mellett, ahol $q = Cx$.*

A 2. Segédtétel bizonyítása az 1. Segédtétel bizonyításához hasonlóan végezhető el.

Ismeretes, hogy a gazdaság lineáris modelljei adott technológiai összefüggések figyelembe vételével egyrészt a termelési szintek, másrészt az ár(érték)-szintek alakulását írják le. Ez jelenti e modellek duális jellegét, amely alkalmassá teszi e modelleket a dualitás problémakörének, azaz a használati érték és az érték vizsgálatára. Ennek értelmében a C, B struktúra-mátrixok duális tulajdonságait meghatározó tételeket megfogalmazhatjuk a lineáris Neumann-rendszer technológiai (ir)reducibilitásának függvényében is. Minthogy az (ii) állításnak nem adható megfelelő közgazdasági interpretáció, ezért itt már el is tekintünk tőle. A bizonyítások a rendszer gazdasági (ir)reducibilitására tett kikötések mellett megfogalmazott állítások bizonyításaihoz hasonlóan végezhetők el.

(i') Ha van olyan szemipozitív x vektor, amelyre $Cx \geqq 0$ és $Bx \geqq 0$, akkor és csak akkor van olyan $Z \geqq 0$ mátrix, amelyre a $B = ZC$ egyenlőség teljesül. A $Z = 0$ határeset itt is csak az eredeti Neumann feltevés mellett teljesülhet, azaz ha megengedjük a $B = 0$ esetet is.

(iii') Ha van olyan szemipozitív x vektor, amelyre $Cx \geq 0$ és $Bx \geq 0$, akkor és csak akkor van olyan $Z \geq 0$, amelynek néhány sorvektora pozitív és kielégíti a $B = ZC$ mátrix-egyenletet. A fenti kikötés most mind a technológiailag erősen, illetve gyengén reducibilis, mind a technológiailag csak gyengén reducibilis, illetve irreducibilis struktúrákat megengedi.

(iv') Ha van olyan szemipozitív x vektor, amelyre $Cx \geq 0$ és $Bx > 0$, akkor és csak akkor van olyan $Z > 0$, amelyre $B = ZC$. A tételben megfogalmazott szükséges és elégséges feltétel most a lineáris Neumann-rendszer technológiailag erősen nem reducibilis jellegét biztosítja, ami viszont a Z pozitivitását és ezzel az általánosított sajátérték-egyenlet egyértelmű megoldását adja.

Ezek után rátérhetünk a Perron-Frobenius tételek lineáris Neumann-rendszerben történő megfogalmazására, illetve bizonyítására. A félreértések elkerülése végett szükségesnek tartom kihangsúlyozni, hogy itt valóban a Frobenius tétel általánosítását fogalmazzuk meg; vagyis a lineáris Leontief-rendszer irreducibilis jellege egyfajta általánosításaként tekinthető technológiailag és/vagy gazdaságilag erősen nem reducibilis lineáris Neumann-rendszer strukturális sajátossága biztosítja a Frobenius tétel feltételeit.

Az 1. Definíció lineáris Neumann-rendszerre történő értelmezése során rámutattunk: ha $n < m$, akkor a $Cx = \lambda Bx$ sajátérték-feladat; ha $n > m$, akkor pedig a $\lambda p'C = p'B$ sajátérték-feladat megoldása kap prioritást. Következésképpen az első esetben a rendszer gazdasági szempontból történő strukturális jellegére, a második esetben pedig a rendszer technológiai strukturális jellegére tett kikötések mellett fogalmazzuk meg a Perron-Frobenius tételeket.

2. Tétel. *Legyen C és B két $n \times m$ típusú nemnegatív valós mátrix, amelyek leírják a rendszer technikai-technológiai összefüggéseit. Tegyük fel továbbá, hogy eleget tesz a Kemeny-Morgenstern-Thompson kikötéseknek. Ekkor a következőket állíthatjuk:*

(2.1) ($n \leqq m$ eset):

(*i*) *A $p'B = \lambda p'C$ sajátérték-egyenletnek van szemipozitív p megoldása valamilyen $\lambda \geqq 0$-ra; ha a rendszer technológiailag erősen nem reducibilis, akkor $p > 0$; sőt még ha emellett $r(C) = n$ is teljesül, akkor $\lambda = \rho(B'_{C'}) > 0$.*

(*ii*) *Ha B vagy C maximális sorrangú, akkor $\{x \mid Bx = \lambda Cx,\ x \geq 0\} \neq 0$ valamilyen $\lambda \geqq 0$-ra. Ha a rendszer technológiailag irreducibilis, akkor a szemipozitív x megoldásvektor $\lambda > 0$ mellett adódik. Ha még $m = n$ is teljesül, akkor $\lambda = \rho(B_C) = \rho(B'_{C'}) > 0$.*

(*iii*) *Ha B vagy C maximális sorrangú és a rendszer technológiailag erősen nem reducibilis, akkor teljesülnek az alábbi implikációk:*

- *ha $Bx \leqq \nu Cx$, akkor $\rho(B'_{C'}) \leqq \nu$;*
- *ha $\mu Cx \leqq Bx$, akkor $\mu \leqq \rho(B'_{C'})$;*
- *ha $Bx = \lambda Cx$, akkor $\lambda = \rho(B'_{C'})$.*

Ha $m = n$ (azaz C és B kvadratikusak és ezért C vagy B nemszinguláris), akkor $\mu \leqq \rho(B'_{C'}) = \lambda = \rho(B_C) \leqq \nu$.

(*iv*) *Legyen a rendszer technológiai értelemben irreducibilis, $m = n$ és B vagy C nemszinguláris mátrix, továbbá $\Gamma = \{\xi \mid Bx \geqq \xi Cx,\ x \geq 0\}$, $\Lambda = \{\zeta \mid Bx \leqq \zeta Cx,\ x \geq 0\}$. Ekkor*

$$\rho(B'_{C'}) = \rho(B_C) = \max_{\xi \in \Gamma} \xi = \min_{\zeta \in \Lambda} \zeta \,.$$

(*v*) *Legyen $m = n$, D egy $n \times n$-es nemnegatív mátrix és C nemszinguláris mátrix. Ha $\{x \mid Dx \geqq 0$ és $(B - D)x \geqq 0,\ x \geq 0\} \neq \emptyset$, akkor $\rho(D_C) \leqq \rho(B_C)$, illetve, ha $\{x \mid Dx \geqq 0$ és $(D - B)x \geqq 0,\ x \geq 0\} \neq \emptyset$, akkor $\rho(D_C) \geqq \rho(B_C)$.*

Amennyiben a rendszer technológiailag erősen nem reducibilis, ahhoz, hogy a fenti állítások teljesüljenek, D mátrixnak irreducibilisnek kell lennie (azaz $Dx > 0$ minden $x \geq 0$-ra), és szemiegyenlőtlenségnek kell fennállnia. Ha még C szimmetrikus is, vagy ha $(B - D)$ vagy $(D - B)$ irreducibilis, akkor a $\rho(D_C)$ és $\rho(B_C)$ között szigorú egyenlőtlenség áll fenn.

(2.2) ($n \geqq m$ eset):

(i) *A $Cx = \lambda Bx$ sajátérték-egyenletnek van szemipozitív x megoldása valamilyen $\lambda \geqq 0$-ra; ha a rendszer gazdaságilag erősen nem reducibilis, akkor $x > 0$, sőt még ha B maximális oszloprangú, akkor $\lambda = \rho(C_B) > 0$.*

(ii) *Ha $r(C)$ vagy $r(B) = m$, akkor az $\{y \mid C'y = \lambda B'y,\, y \geq 0\} \neq \emptyset$ valamilyen $\lambda \geqq 0$-ra. Ha a rendszer gazdaságilag irreducibilis, akkor a szemipozitív y megoldásvektor $\lambda > 0$ mellett adódik. Ha még $m = n$ is teljesül, akkor $\lambda = \rho(C'_{B'}) = \rho(C_B) > 0$.*

(iii) *Ha C vagy B maximális oszloprangú és a rendszer gazdaságilag erősen nem dekompozábilis, akkor teljesülnek az alábbi implikációk:*

- *ha $C'y \leqq \nu B'y$, akkor $\rho(C_B) \leqq \nu$;*
- *ha $\mu B'y \leqq C'y$, akkor $\mu \leqq \rho(C_B)$;*
- *ha $C'y = \lambda B'y$, akkor $\lambda = \rho(C_B)$.*

Ha $m = n$ (azaz C és B kvadratikus mátrixok, következésképpen C vagy B nemszinguláris), akkor $\mu \leqq \rho(C_B) = \lambda = \rho(C'_{B'}) \leqq \nu$.

(iv) *Legyen a rendszer gazdasági értelemben irreducibilis, $m = n$ és B vagy C nemszinguláris mátrix, továbbá $\Gamma = \{\xi \mid C'y \geqq B'y,\, y \geq 0\}$ és $\Lambda = \{\zeta \mid C'y \leqq \zeta B'y, y \geq 0\}$. Ekkor $\rho(C_B) = \rho(C'_{B'}) = \max_{\xi\in\Gamma}\xi = \min_{\zeta\in\Lambda}\zeta$.*

(v) *Legyen $m = n$, D egy $n\times n$-es nemnegatív mátrix és B nemszinguláris mátrix. Ha $\{y \mid D'y \geqq 0$ és $(C' - D')y \geqq 0,\, y \geq 0\} \neq \emptyset$, akkor $\rho(D_B) = \rho(D'_{B'}) \leqq \rho(C'_{B'}) = \rho(C_B)$, ill., ha $\{y \mid D'y \geqq 0$ és $(D' - C')y \geqq 0,\, y \geq 0\} \neq \emptyset$, akkor $\rho(D_B) = \rho(D'_{B'}) \geqq \rho(C'_{B'}) = \rho(C_B)$.*

Amennyiben a rendszer gazdaságilag erősen nem reducibilis, ahhoz, hogy a fenti állítások teljesüljenek, a D mátrixnak irreducibilisnek kell lennie (azaz $D'y > 0$ minden $y \geq 0$-ra), szemiegyenlőtlenségnek kell fennállnia. Ha még B szimmetrikus is, vagy ha $(C' - D')$ vagy $(D' - C')$ irreducibilis, akkor $\rho(D_B)$ és $\rho(C_B)$ között szigorú egyenlőtlenségnek kell fennállnia.

Bizonyítás.

(2.1) ($n \leqq m$ eset):

(i) A C, B struktúramátrixok duális tulajdonságait meghatározó (i'-iv') tételek értelmében létezik olyan $n\times n$-es Z mátrix, amelyre $ZC = B$ és $Z \geqq 0$. Frobenius tétel általánosításából következik, hogy létezik a Z mátrixhoz tartozó olyan valós és nemnegatív λ sajátérték, amely egyenlő a mátrix spektrál rádiuszával, $\rho(Z)$-vel és ezen λ-hoz tartozik valós és szemipozitív sajátvektor, azaz

$$Zq = \lambda q, \quad q \geq 0, \quad \lambda = \rho(Z) \geqq 0 \tag{6}$$

és

$$p'Z = \lambda p', \quad p' \geq 0\,. \tag{7}$$

A (2.1) segédtétel és a fenti (6) és (7) összefüggések szerint azt kapjuk a $\lambda = \rho(Z)$-re, hogy $p'B = \lambda p'C$, $p' \geq 0'$, $\lambda \geqq 0$, és innen $\lambda \in sp(B'_{C'})$. Ha a rendszer technológiailag erősen nem reducibilis, azaz $\{x \mid Cx \geq 0,\ x \geq 0\} \neq \emptyset$ és $Cx \geq 0$ mellett $Bx > 0$ teljesül, akkor a (iv') tétel értelmében $Z > 0$, amelyhez tartozik pozitív sajátérték és egyértelműen meghatározott pozitív sajátvektor. Ha még $r(C) = n$ is teljesül, akkor $\lambda = \rho(B'_{C'})$ mivel a (2.1) segédtétel szerint $sp(Z)$ tartalmazza $sp(B'_{C'})$-t és a $\lambda = \rho(Z)$ szintén benne van $sp(B'_{C'})$-ben.

(ii) A (2.2) segédtétel és az (6) és (7) összefüggések alapján azt kapjuk, hogy $\lambda = \rho(Z)$, $Bx = \lambda Cx$, $Cx \geq 0$, $\lambda \geqq 0$ és innen $\lambda \in sp(B'_{C'})$. Ha a rendszer technológiailag irreducibilis, azaz $Cx > 0$ minden szemipozitív x vektorra, akkor a (iv') tétel értelmében $Z > 0$, amelyhez az 1. Tétel értelmében $\lambda > 0$ sajátérték tartozik. Ha még $m = n$ is teljesül, akkor $\lambda = \rho(B_C)$ minthogy a (2.2) segédtétel szerint $sp(Z)$ tartalmazza $sp(B_C)$-t és $\lambda = \rho(Z)$ szintén benne van $sp(B_C)$-ben. Ezek alapján már könnyen belátható, hogy $\lambda = \rho(B'_{C'}) = \rho(B_C)$.

(iii) A strukturális feltételek értelmében $Cx \geq 0$ és $Bx > 0$ minden szemipozitív x vektorra. A fenti (i) szerint $\{p \mid p'B = \lambda p'C,\ p > 0,\ \lambda \geqq 0\} \neq \emptyset$ és így $\lambda = \rho(B'_{C'})$. Ebből következően $\nu p'Cx \geqq p'Bx = \lambda p'Cx$, ami azt jelenti, hogy $\nu \geqq \lambda$, mivel $p'Cx > 0$. Legyen most $\mu Cx \leqq Bx$ és $Cx \geq 0$. Ismételten kihasználva a fenti (i)-t, kapjuk $\mu p'Cx \leqq p'Bx = \lambda p'Cx$ és ebből $\mu \leqq \lambda$, mert $p'Cx > 0$. Amennyiben $Bx = \lambda Cx$ és $Cx \geq 0$, akkor a fenti két implikáció egyidejűleg teljesül, ami azt jelenti, hogy $\rho(B'_{C'}) \leqq \lambda \leqq \rho(B'_{C'})$, amiből viszont a $\lambda = \rho(B'_{C'})$következik. Ha mind a B, mind a C kvadratikus mátrix, akkor az előzőek alapján könnyen belátható, hogy $\mu \leqq \rho(B_C) = \lambda = \rho(B'_{C'}) \leqq \nu$.

(iv) Mind a diszkrét, mind a folytonos esetben e fenti (iii) szerint azt kapjuk, hogy ha $\xi \in \Gamma$, akkor $\xi \leqq \rho(B_C) = \rho(B'_{C'})$, valamint ha $\zeta \in \Lambda$, akkor $\zeta \geqq \rho(B_C) = \rho(B'_{C'})$. Az előzőekben bebizonyított (ii) állítás szerint azonban a $\lambda = \rho(B_C)$ kielégíti a $Bx = \lambda Cx$, $Cx \geq 0$ rendszert $x \geq 0$ mellett és így $\lambda = \rho(B_C)$ egy pont a Γ és Λ halmazok metszetében. Ebből már következik állításunk helyessége.

(v) Legyen $\Gamma' = \{\xi \mid Dx \geqq \xi Cx,\ Cx > 0\}$ és $\Lambda' = \{\zeta \mid Dx \leqq \zeta Cx,\ Cx > 0\}$, továbbá $Cx \geqq 0$ valamilyen szemipozitív x vektorra, amiből következik, hogy $Dx \geqq 0$, $(B - D)x \geqq 0$. A fenti (iv) szerint azt kapjuk, hogy $\rho(B_C) = \rho(B'_{C'}) = \sup_{\xi\in\Gamma}\xi$ és $\rho(D_C) = \rho(D'_{C'}) = \sup_{\xi\in\Gamma'}\xi$. Minthogy $Cx > 0$ és $Bx \geqq Dx$, kapjuk $\Gamma' \subset \Gamma$ és innen

$$\rho(D_C) = \rho(D'_{C'}) = \sup_{\xi\in\Gamma'} \xi \leqq \sup_{\xi\in\Gamma} \xi = \rho(B'_{C'}) = \rho(B_C)\ .$$

Hasonlóan, legyen $Cx \geqq 0$ valamilyen szemipozitív x vektorra, következésképpen $Dx \geqq 0$ és $(D - B)x \geqq 0$. A fenti (iv) szerint most azt kapjuk, hogy $\rho(B_C) = \rho(B'_{C'}) = \inf_{\zeta\in\Lambda}\zeta$, és $\rho(D_C) = \rho(D'_{C'}) = \inf_{\zeta\in\Lambda'}\zeta$. Mivel $Cx > 0$ és $Dx \geqq Bx$, kapjuk $\Lambda' \subset \Lambda$, és innen

$$\rho(D_C) = \rho(D'_{C'}) = \inf_{\zeta\in\Lambda'} \zeta \geqq \inf_{\zeta\in\Lambda} \zeta = \rho(B'_{C'}) = \rho(B_C)\ .$$

A fentiek alapján most már könnyen belátható, hogy ha a rendszer gazdaságilag erősen nem reducibilis, ahhoz, hogy az állítások teljesüljenek, a D

mátrixnak irreducibilisnek kell lennie (azaz $Dx > 0$ minden szemipozitív x vektorra). A bizonyítás során értelemszerűen —a folytonosság következtében— $\max \xi$, illetve $\min \zeta$ szerepel.

Amennyiben C szimmetrikus, tegyük fel az állításunkkal szemben, hogy $\rho(D_C) = \rho(B_C) = \lambda$. Meg fogjuk mutatni, hogy ez ellentmondáshoz vezet. Jelen tétel (i) és (ii) állításaiból kapjuk, hogy $\lambda > 0$ és $p'D = \lambda p'C$, $p' > 0'$, és $Bx = \lambda Cx$, $Cx > 0$. Minthogy $Cx > 0$, következésképpen $Bx \geq Dx$ (vagy $Bx \leq Dx$), ezért $p'Bx > p'Cx$ (vagy $p'Bx < p'Cx$), ami ellentmond annak a ténynek, hogy $p'Bx = \lambda p'Cx = \lambda p'C'x = p'Dx$. Ezért $\rho(D_C) \neq \rho(B_C)$. Ha C nem szimmetrikus, de $Cx \geq 0$ és $(B - D)x > 0$, akkor $\rho(B_C) = \rho(B'_{C'}) = \max_\xi \{\xi \mid Bx \geqq \xi Cx,\, Cx > 0\}$, amely viszont az (iv) alapján nagyobb, mint $\max_\xi \{\xi \mid Dx \geqq \xi Cx,\, Cx > 0\}$. Mivel a $Cx > 0$ összefüggésből következik $Bx > Dx$, ezért $\max_\xi \{\xi \mid Dx \geq \xi Cx,\, Cx > 0\} = \rho(D_C) = \rho(D'_{C'})$. Ebből viszont már következik állításunk helyessége. Hasonlóan mutatható meg, ha $Cx \geq 0$ és $(D - B)x > 0$, akkor $\rho(B_C) = \rho(B'_{C'}) < \rho(D_C) = \rho(D'_{C'})$.

A (2.2) ($n > m$ eset) bizonyítása hasonlóképpen végezhető el.

(c) Nemlineáris Leontief-rendszer

A szakirodalomban a nemlineáris Leontief-rendszerben megfogalmazható Perron-Frobenius tételeket a $H(x) = \lambda x$ nemlineáris sajátérték egyenlet $x \neq 0$ megoldásaként vizsgálják (ld. például, Nikaido (1968), Morishima és Fujimoto (1974), és Fujimoto (1979) műveit). Itt most ezektől eltérően, megőrizve elemzésünk eddigi logikáját, a nemlineáris rendszer struktúráját meghatározó $A(x)$ Jacobi mátrix felhasználásával fogalmazzuk meg a tételeket. A $H(x)$-re tett lineáris homogenitás kikötésből következően könnyen belátható, hogy az egyes szektorok kibocsátás-szintjeinek arányos változására invariáns a nemlineáris rendszer ráfordítási struktúrája, azaz $A(\theta x) = A(x)$, ahol θ tetszőleges pozitív valós szám. Az egyszerűség kedvéért jelöljük a rendszer spektrál rádiuszát λ^*-val, vagyis $\rho[A(x)] = \lambda^*$.

3. Tétel. *Legyen $A(x) \geq 0$ minden szemipozitív x vektorra és irreducibilis Morishima értelemben. Ekkor a következőket állítjuk:*

(i) Az $A(x)x = \lambda x$ nemlineáris sajátérték-egyenletnek létezik $\lambda^* > 0$ és $x^* > 0$ megoldása.

(ii) A λ^*-hoz csak egyetlen egy pozitív sajátvektor tartozik és $\lambda^* \geqq |\lambda_i|$, ahol λ_i az $A(x)$-hez tartozó tetszőleges sajátérték.

(iii) x^* az egyetlen $A(x)$-hez tartozó szemipozitív sajátvektor.

Bizonyítás. (i) Az általánosság megsértése nélkül a bizonyítást elegendő elvégezni a $(2.F)$ alapján a következő halmazon: $S = \{x \geq 0 \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$. Tekintsük az $f : S \to R_+^n$ függvényt az alábbiak szerint definiálva:

$$f_i(x) = \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\, x_j}{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\, x_j}$$

minden $i = 1, 2, \ldots, n$-re. A feltevések értelmében néhány $f_i(x)$ pozitív értéket vesz fel, és $\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = 1$. Minthogy f egy folytonos leképezést jelöl S-ből S-be, a Brouwer-féle fixponttétel szerint létezik olyan $x^* \in S$ pont, amelyre $f(x^*) = x^*$, vagyis $A(x^*)x^* = [1'A(x^*)x^*]x^*$. A rendszer irreducibilitásából következően $A(x^*)x^* \geq 0$ és így $1'A(x^*)x^* > 0$, azaz $1'A(x^*)x^*$-t λ^*-nak véve, $\lambda^* > 0$ kapjuk.

Állításunk második részének bizonyításához tegyük fel, hogy $x^* \not> 0$. Partícionáljuk az x^* vektort megfelelő átrendezéssel a következőképpen: $x^{*\prime} = [x_1^{*\prime}, 0']$, ahol $x_1^* > 0$, és ennek megfelelően szimmetrikus átrendezéssel partícionáljuk $A(x)$-et is. Ekkor

$$\begin{pmatrix} A_{11}(x^*) & A_{12}(x^*) \\ A_{21}(x^*) & A_{22}(x^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^* \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1^* \\ 0 \end{pmatrix},$$

amely egyenlőség viszont csak úgy teljesülhet, ha $A_{21}(x^*)x_1^* = 0$. Tekintettel $x_1^* > 0$, ezért $A_{21}(x^*)x_1^* = 0$, ami ellentmond a rendszer irreducibilitásának, vagyis $x^* > 0$.

(ii) Tegyük fel, hogy $A(\widehat{x})\widehat{x} = \lambda^*\widehat{x}$, $\widehat{x} \neq x^*$ és $\widehat{x} \geq 0$. Az (i) szerint $\widehat{x} > 0$. Legyen $\theta = \max_i(\widehat{x}_i/x_i^*) = \widehat{x}_r/x_r^* > 0$. Ekkor $\theta x^* \geq \widehat{x}$. Figyelembe véve, hogy $\lambda^*\theta x_r^* = \lambda^*\widehat{x}_r = \sum_{j=1}^n a_{rj}(\widehat{x})\widehat{x}_j$ és az (5.F), (6.F), valamint a (3.F) szerint kapjuk:

$$\sum_{j=1}^n a_{rj}(\widehat{x})\widehat{x}_j < \theta \sum_{j=1}^n a_{rj}(\theta x^*)x_j^* = \theta \sum_{j=1}^n a_{rj}(x^*)x_j^* = \lambda^*\theta x_r^*,$$

azaz $\lambda^*\theta x_r^* < \lambda^*\theta x_r^*$. A kapott ellentmondásból következik, hogy λ^*-hoz nem tartozhat másik szemipozitív sajátvektor.

A $\lambda^* \geqq |\lambda_i|$ bizonyításához tegyük fel, hogy van egy olyan $\lambda_i = \widehat{\lambda}$ sajátérték, amelyre $|\widehat{\lambda}| > \lambda^*$ és így $A(x)x = \widehat{\lambda}x$, $x \neq 0$ per definitionem. Legyen $y_i = |x_i|$ és $y = [y_i]$, valamint $I = \{i \mid x_i \neq 0\}$ és $\gamma = \min_{i\in I}(x_i^*/|x_i|) = x_r^*/y_r > 0$. Jelölje $z = x^* - \gamma y \geqq 0$. Az (5.$F$) alapján ismét felírhatjuk: $A(y)y \geqq A(x)x = |\widehat{\lambda}x| = |\widehat{\lambda}|y > \lambda^*y$; továbbá $A(z+\gamma y)(z+\gamma y) = A(x^*)x^* = \lambda^*x^* = \lambda^*(z+\gamma y) < \lambda^*z + \gamma|\widehat{\lambda}|y \leqq \lambda^*z + \gamma A(y)y$. Így

$$A(z+\gamma y)(z+\gamma y) - \gamma A(y)y < \lambda^*z.$$

Ha $z_r = 0$, a monotonitás és a nemlineáris rendszer irreducibilitása miatt ismét azt kapjuk, hogy $\sum_{j=1}^n a_{rj}(z+\gamma y)(z_j+\gamma y_j) > \gamma\sum_{j=1}^n a_{rj}(y)y_j$. Az utolsó két egyenlőtlenség most is ellentmondáshoz vezet, ezért $\lambda^* \geqq |\lambda_i|$.

(iii) Tegyük fel, hogy van olyan $\lambda_i = \lambda$ és szemipozitív x vektor, amelyekre $A(x)x = \lambda x$. A rendszer irreducibilitásából következően $\lambda > 0$. Tegyük fel továbbá, hogy $x \not> 0$. Ekkor az (i) bizonyításával megegyezően azt kapjuk, hogy $x > 0$. Definiáljuk θ-t az (ii)-belihez hasonlóan. Ekkor ismét kihasználva az 5.F, 6.F feltevéseket, kapjuk: $\lambda\theta x_r^* = \lambda x_r = \sum_{j=1}^n a_{rj}(x)x_j < \theta\sum_{j=1}^n a_{rj}(\theta x^*)x_j^* = \theta\sum_{j=1}^n a_{rj}(x^*)x_j^* = \lambda^*\theta x_r^*$. Ezért $\lambda < \lambda^*$. Definiáljuk a $\rho = \max_i(x_i^*/x_i) = x_k^*/x_k > 0$; $\rho x \geqq x^*$. Ezek alapján most a $\lambda^*\rho x_k < \lambda\rho x_k$ összefüggéshez juthatunk, ami viszont a $\lambda^* < \lambda$ relációt tartalmazza. Az ellentmondásból következik, hogy x^* valóban az egyetlen $A(x)$-hez tartozó szemipozitív sajátvektor.

A nemlineáris Leontief-rendszerhez tartozó $\rho[A(x)] = \lambda^*$ spektrál rádiuszra is hasonló tulajdonságok fogalmazhatók meg, mint a lineáris esetben.

(d) Nemlineáris Neumann-rendszer

Jelölje $C(x)$, illetve $B(x)$ a nemlineáris rendszerhez tartozó Jacobi mátrixokat, amelyek az egyes tevékenységek egységnyi alkalmazási szintjei mellett történő termékfelhasználások, illetve kibocsátások nemlineáris változását írják le a megfelelő x vektorra vonatkozóan. Legyen K_1 egy olyan konvex kónusz az R_+^m-ben, amelyre a $B(x)$ és/vagy $C(x)$ maximális sorrangú, ahol $x \in K_1$. Hasonlóképpen jelöljön K_2 egy olyan konvex kónuszt az R_+^m-ben, amelynek x pontjaiban a $B(x)$ és/vagy $C(x)$ maximális oszloprangú. Ekkor a lineáris esetben megfogalmazott tételek kiterjesztései a következők.

4. Tétel.

(4.1) *($n \leqq m$ eset):*

(i) A $\{p \mid p'B(x) = \lambda p'C(x),\, p \geq 0,\, x \in K_1\} \neq \emptyset$ *valamilyen* $\lambda \geqq 0$*-ra; ha a rendszer technológiailag erősen nem reducibilis, akkor* $p > 0$*; sőt még ha emellett* $r[C(x)] = n$ *az* $x \in K_1$*-re teljesül, akkor* $\lambda = \rho\left[B'(x)_{C''(x)}\right] > 0$.

(ii) Az $\{x \mid B(x)x = \lambda C(x)x,\, x \geq 0,\, x \in K_1\} \neq \emptyset$ *valamilyen* $\lambda \geqq 0$*-ra. Ha a rendszer technológiailag irreducibilis, akkor a szemipozitív* x *megoldásvektor* $\lambda > 0$ *mellett adódik. Ha* $m = n$ *is teljesül, akkor* $\lambda = \rho\left[B(x)_{C(x)}\right] = \rho\left[B'(x)_{C'(x)}\right] > 0$.

(iii) Ha a rendszer technológiailag erősen nem reducibilis, akkor teljesülnek az alábbi implikációk az $x \in K_1$*-re:*

– *ha* $B(x)x \leqq \nu C(x)x$, *akkor* $\rho\left[B'(x)_{C'(x)}\right] \leqq \nu$;

– *ha* $\mu C(x)x \leqq B(x)x$, *akkor* $\mu \leqq \rho\left[B'(x)_{C'(x)}\right]$;

– *ha* $B(x)x = \lambda C(x)x$, *akkor* $\lambda = \rho\left[B(x)_{C(x)}\right]$.

Ha $m = n$, *akkor* $\mu \leqq \rho\left[{}'(x)_{C'(x)}\right] = \lambda = \rho\left[B(x)_{C(x)}\right] \leqq \nu$.

(iv) Legyen a rendszer technológiai értelemben reducibilis, $m = n$, *továbbá* $\Gamma = \{\xi \mid B(x)x \geqq \xi C(x)x,\, x \geq 0,\, x \in K_1\}$, $\Lambda = \{\zeta \mid B(x)x \leqq \zeta C(x)x,\, x \geq 0,\, x \in K_1\}$. *Ekkor*

$$\rho\left[B'(x)_{C'(x)}\right] = \rho\left[B(x)_{C(x)}\right] = \max_{\xi\in\Gamma} \xi = \min_{\zeta\in\Lambda} \zeta\,.$$

(4.2) *($n \geqq m$ eset):*

(i) Az $\{x \mid C(x)x = \lambda B(x)x,\, x \geq 0,\, x \in K_2\} \neq \emptyset$ *valamilyen* $\lambda \geqq 0$*-ra; ha a rendszer gazdaságilag erősen nem reducibilis, akkor* $x > 0$*, sőt még ha* $r[B(x)] = m$ *az* $x \in K_2$*-re is teljesül, akkor* $\lambda = \rho\left[C(x)_{B(x)}\right] > 0$.

(ii) Az $\{y \mid C'(x)y = \lambda B'(x)y,\, y \geq 0,\, x \in K_2\} \neq \emptyset$ *valamilyen* $\lambda \geqq 0$*-ra. Ha a rendszer gazdaságilag erősen reducibilis, akkor a szemipozitív* y

megoldásvektor $\lambda > 0$ *mellett adódik. Ha még* $n = m$ *is teljesül, akkor* $\lambda = \rho\left[C'(x)_{B'(x)}\right] = \rho\left[C(x)_{B(x)}\right] > 0$.

(*iii*) *Ha a rendszer gazdaságilag erősen nem reducibilis, akkor* $x \in K_2$ *mellett teljesülnek az alábbi implikációk:*

– *ha* $C'(x)y \leqq \nu B'(x)y$, *akkor* $\rho\left[C(x)_{B(x)}\right] \leqq \nu$;

– *ha* $\mu B'(x)y \leqq C'(x)y$, *akkor* $\mu \leqq \rho\left[C(x)_{B(x)}\right]$;

– *ha* $C'(x)y = \lambda B'(x)y$, *akkor* $\lambda = \rho\left[C(x)_{B(x)}\right]$.

Ha $m = n$, *akkor* $\mu \leqq \rho\left[C(x)_{B(x)}\right] = \lambda = \rho\left[C'(x)_{B'(x)}\right] \leqq \nu$.

(*iv*) *Legyen a rendszer gazdasági értelemben irreducibilis,* $m = n$, *valamint* $\Gamma = \{\xi \mid C'(x)y \geqq \xi B'(x)y,\ y \geq 0,\ x \in K_2\}$, $\Lambda = \{\zeta \mid C'(x)y \leqq \zeta B'(x)y,\ y \geq 0,\ x \in K_2\}$. *Ekkor*

$$\rho\left[C(x)_{B(x)}\right] = \rho\left[C'(x)_{B'(x)}\right] = \max_{\xi \in \Gamma} \xi = \min_{\zeta \in \Lambda} \zeta\,.$$

Az állítások a 2. Tételhez hasonlóan bizonyíthatók be. Ebben az esetben is a nemlineáris Neumann-rendszerhez tartozó $\rho\left[B(x)_{C(x)}\right]$, illetve $\rho\left[C(x)_{B(x)}\right]$ spetrál rádiuszokra különböző tulajdonságokat fogalmazhatunk meg.

5 Nemlineáris Neumann modell megoldása

A modell megoldásával kapcsolatban két probléma vetődik fel: az egzisztencia és az unicitás bizonyítása. Az egzisztencia bizonyítása nyomban adódik a nemlineáris rendszerre az előző pontban megfogalmazott Perron-Frobenius tételből. Az unicitásra a következő tételt fogalmazhatjuk meg:

5. Tétel (unicitás). *Ha a* $[C(x), B(x)]$ *Jacobi mátrixokkal megadott nemlineáris Neumann gazdaság technológiailag és/vagy gazdaságilag erősen nem reducibilis, akkor csak egyetlen* $\alpha_0 = \beta_0$ *mellett létezik megoldása a nemlineáris Neumann modellnek.*

A bizonyítás könnyen elvégezhető; a lineáris esetre adott bizonyítást lásd in Móczár (1995). Amennyiben a Neumann gazdaság erősen reducibilis, több egyensúlyi állapot létezik (lásd in Móczár (1997)). Minél nagyobb növekedési ütemet kívánunk elérni, annál több termékcsoport kibocsátásáról kell lemondanunk, illetve, fordítva, minél több terméket kívánunk kibocsátani, annál kisebb növekedési ütemmel fejlődhetünk.

Matematikai szempontból különösen érdekes az az eset, amikor a $C(x)$ fajlagos inputfüggvény-halmaz csupa konvex függvényekből, a $B(x)$ fajlagos outputfüggvény-halmaz pedig csupa konkáv függvényekből áll. Ilyen speciális esetben a rendszer egyensúlyi állapotaira a konvex analízis segítségével végezhetünk elemzéseket. A függvényekre tett specifikáció a közgazdasági elméletben megfeleltethető az U-alakú költséggörbéknek, illetve a csökkenő hozadék elvének.

Irodalom

1. Arrow, K. J. (1979): *Egyensúly és döntés (Válogatott tanulmányok)*, Budapest, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó
2. Arrow, K. J. and F. N. Hahn (1972): *General competitive analysis*, Edinburgh, Holden-Day Co.
3. Bellman, R. (1970): *Introduction to Matrix Analysis*, McGraw-Hill Co.
4. Debreu, G. and I. N. Herstein (1953): Nonnegative Square Matrices, *Econometrica*, 21. pp. 597-607.
5. Erdélyi, I. (1967): On the matrix equation $Ax = \lambda Bx$, *Journal of Mathematical Analysis and Application*, 17. pp. 119-132.
6. Frobenius, G. (1908): Über Matrizen aus positiven Elementem, *Sitzungsberichte der Königlich preussischen Akademie der Wissenschaften*, 9.
7. Fujimoto, T. (1979): Nonlinear generalization of the Frobenius theorem (A Symmetric Approach), *Journal of Mathematical Economics*, pp. 17-21.
8. Gale, D. (1956): The Closed Linear Model of Production, in *Linear Inequalities and Related Systems*, ed.
9. H. W. Kuhn and A. W. Tucker. *Annals of Mathematics Study*, 38. Princeton, Princeton University Press
10. Karlin, S. (1959): *Mathematical methods and theory in games, Programming and economics*, Vol. 1. New York, Pergamon Press
11. Kemeny, J. G., O. Morgenstern, G. L. Thompson (1956): A generalization of the von Neumann model of an expanding economy, *Econometrica*, 24. pp. 115-135.
12. Lahiri, S. (1976): Input-output analysis with scale-dependent coefficients, *Econometrica*, pp. 947-962.
13. Mangasarian, O. L. (1971): Perron-Frobenius Properties of $Ax - \lambda Bx$, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 36, pp. 86-102.
14. Móczár, J. (1997): Non-Uniqueness Through Duality in the von Neumann Growth Models, *Metroeconomica*, Vol. 48, pp. 280-299.
15. Móczár, J. (1997): Growth Paths in the Leontief-type Dynamic Reducible Models (With a Case Study for Japan in the 60's), *Japan and the World Economy*, Vol. 9, pp. 17-36.
16. Móczár, J. (1995): Reducible von Neumann Models and Uniqueness, *Metroeconomica*, Vol. 46, pp. 1-15.
17. Móczár, J. (1993): Cyclical or Turnpike Growth: Capital Accumulation Choices in Some Reducible von Neumann Models (Ph.D. Dissertation, Osaka University), published in *Society and Economy* 1995. no. 4, pp. 33-191.
18. Móczár, J. (1992): Balanced and Unbalanced Growth Paths in a Decomposable Economy: Contributions to the Theory of Multiple Turnpikes, *Economic System Research*, Vol. 3, pp. 211-222 (Co-author: J. Tsukui).
19. Móczár, J. (1991): Irreducible Balanced and Unbalanced Growth Paths (Business Cycles and Structural Change), *Structural Changes and Economic Dynamics*, Vol. 2, pp. 159-176.
20. Móczár, J. (1991): Structural Properties of von Neumann Models, *Pure Mathematics and Applications*, Ser.C. Vol. 2, pp. 301-311.
21. Móczár, J. (1983): Sajátérték-tételek a lineáris és nemlineáris Neumann-rendszerekben (Kézirat)

22. Móczár, J. (1980): A dekompozábilitás kiterjesztése a gazdaság lineáris modelljeiben, *Szigma,* 23-45 o.

23. Móczár, J. (1980): A Neumann-gazdaság egyensúlyi állapotainak meghatározása, *Egyetemi Szemle,* 41-56 o.

24. Morgenstern, O. and G. L. Thompson (1976) : *Mathematical Theory of Expanding and Contracting Economies,* Lexington, Massechusetts, Toronto, London, Lexington Books, D.C. Heath and Co.

25. Morishima, M. (1964): *Equilibrium, Stability and Growth,* Oxford, Oxford University Press

26. Morishima, M., T. Fujimoto (1974): The Frobenius theorem, its Solow-Samuelson extensions and the Kuhn-Tucker theorem, *Journal of Mathematical Economics,* 1. pp. 199-205.

27. Murata, Y. (1972): An alternative proof of the Frobenius theorem, *Journal of Economic Theory,* 5. pp. 285-291.

28. Neumann, J.(1965): *Válogatott előadások és tanulmányok,* Budapest, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó

29. Nikaido, H. (1968): *Convex Structures and Economic Theories,* New York, London, Academic Press

30. Romanovsky, V. (1936): Recherches sur les chains de Markoff, *Acta Mathematica,* 66. 147-251.

31. Sandberg, I. W. (1973): A nonlinear input-output model of a multisectored economy, *Econometrica,* pp. 1167-1182.

32. Schneider, H. (1977): The concepts of irreducibility and full indecomposability of a matrix in the works of Frobenius, König and Markov, *Linear Algebra and its Applications,* 18, pp. 139-162.

33. Seneta, E. (1973): *Non-Negative Matrices,* New York, Wiley.

34. Solow, R. M., P. A. Samuelson (1953): Balanced growth under constant returns to scale, *Econometrica,* 21. pp. 412-424.

35. Stewart, G. W. (1972): On the sensitivity of the eigenvalue problem $Ax = \lambda Bx$, $SIAM$, *Journal of Numerical Analysis,* 9. pp. 669-686.

36. Varga, R. S. (1962): *Matrix iterative analysis,* Englewood Cliffs, Prentice Hall

37. Wielandt, H. (1950): Unzerlegbare, nicht-negative matrizen, *Mathematishe Zeitschrift,* 52. 642-648.

38. Zalai, E. (1980): *Adalékok az értéknagyság elemzéséhez,* Budapest, Kandidátusi értekezés.

SPECTRAL THEOREMS IN LINEAR AND NONLINEAR VON NEUMANN MODELS

In this paper we study some spectral theorems extended on linear and nonlinear von Neumann models. The strict equilibria in von Neumann models can be defined by the generalized eigenvalue problems $Cx = \lambda Bx$ and $pC = \lambda pB$. The Perron-Frobenius properties of these problems were first scrutinized by Mangasarian (1971). Here, for proving the Frobenius theorems in technologically or economically (ir)reducible von Neumann systems are used the results of Mangasarian (1971) as well as Erdélyi (1967) and Stewart (1972).

A DINAMIKUS PROGRAMOZÁS MEGOLDÁSI MÓDSZEREINEK SZEMLÉLTETÉSE [1]

SIMONOVITS ANDRÁS
MTA, Közgazdaságtudományi Kutatóközpont

Ebben a dolgozatban egy dinamikus optimalizálási feladatot mutatok be, amelyet *skalár lineáris–homotetikus (LH) szabályozási feladat*nak nevezek. Az állapotegyenlet lineáris, és az alapfüggvény az állapot- és a szabályozási változó ugyanazon hatványfüggvényének a konvex kombinációja. Ez a modell magában foglal két népszerű közgazdasági modellt és egy harmadik modell is belefoglalható. Az LH-modellben a dinamikus programozás három módszere (találgatásos, a közvetlen és az értékfüggvény-iteráció) jól szemléltethető.

1 Bevezetés

Manapság a dinamikus optimalizálás egyre fontosabb szerepet kap a közgazdaságtanban. Diszkrét idejű rendszerek megoldásánál nagyon kedvelt eljárás a *dinamikus programozás*, és az optimalitás elve, azaz a Bellman egyenlet a megoldási módszer sarokköve. Több módszer is ismert az optimális megoldás megtalálására: a találgatásos módszer, az értékfüggvény iterálása és a Howard-módszer.

Ebben a dolgozatban egy absztrakt matematikai feladatot vezetek be, amelyet *skalár lineáris–homotetikus (LH) szabályozási feladat*nak nevezek. Az állapotegyenlet lineáris, és az alapfüggvény az állapot- és a szabályozási változó ugyanazon hatványfüggvényének a konvex kombinációja. Ez a modell magában foglal két népszerű közgazdasági modellt és egy harmadik modell is belefoglalható: 1. A lineáris–kvadratikus (LQ) szabályozási modell (Stokey és Lucas, 1989, 95–96. o. és Ljungqvist és Sargent, 2000). 2. Az optimális fogyasztási pálya CRRA (állandó relatív kockázatkerülési együtthatójú) hasznossági függvény esetén (vö. Obstfeld és Rogoff, 1996, 720–721. o.). 3. Az optimális felhalmozási pálya Cobb–Douglas termelési függvény teljes amortizáció és Cobb–Douglas-hasznosságfüggvény esetén (Stokey és Lucas, 1989, 11–13 o. és Ljungqvist és Sargent, 2000, 33–34. o.). Az LH-modellben a dinamikus programozás három módszere (találgatásos, a közvetlen és az értékfüggvény-iteráció) jól szemléltethető.

Először a dinamikus programozás *találgatásos* módszerét körvonalazom. Itt egy sejtéssel kezdünk: az értékfüggvény ugyanaz a hatványfüggvény mint ami az alapfüggvényben szerepel, csak egy határozatlan állandóval van megszorozva. Végrehajtva a Bellman-egyenlet jobb oldalán szereplő parametrikus

[1] Köszönetemet fejezem ki Tasnádi Attilának és Valentinyi Ákosnak segítségükért. Beérkezett: 2003. január 14. e-mail: simonov@econ.core.hu.

optimalizálást és ellenőrizve az egyenlet két oldalának egyenlőségét, a határozatlan együttható —s vele együtt az optimális megoldás— kiszámítható.

Másodiknak egy *közvetlen módszert* mutatok be: felismerve, hogy az optimális szabályozás az állapotváltozó lineáris függvénye, az optimális visszacsatolási együttható közvetlenül meghatározható a célfüggvényből. Figyelemre méltó, hogy ez a módszer az ún. Howard-módszer első lépése.

Harmadiknak az *értékfüggvény iterációját* említjük, ahol az értékfüggvényt fokozatosan közelítjük meg. E módszer konvergenciája esetünkben jól szemléltethető.

A három módszer összehasonlítása kétségeket ébreszt: hasznos-e a találgatásos módszer. Inkább arra következtethetünk, hogy e módszer csak az értékfüggvény-iteráció gyakorló terepe.

A cikk szerkezete a következő: a 2. pont a dinamikus programozás alapfeladatát vázolja. A 3. pontban bemutatjuk az LH-feladatot. A 4. pont a találgatásos, az 5. pont a közvetlen és a 6. pont az értékfüggvény-iteráció módszerét szemlélteti. A 7. pont a speciális eseteket mutatja be és a 8. pont a következtetéseket tartalmazza.

2 A dinamikus programozásról

Röviden felidézzük a végtelen időhorizontú, stacionárius és diszkontált célfüggvényű dinamikus programozás alapfeladatát (vö. Simonovits, 1998, 7–8. fejezet).

Legyen $t = 0,\ 1, \ldots,$ diszkrét időváltozó, x_t állapot- és u_t szabályozási változó. Legyen $f(x,u)$ egy folytonos kétváltozós skalárértékű függvény, az *alapfüggvény*, amely azt mutatja meg, hogy egy időszakban az x állapot és az u szabályozás mennyit ér. Legyen $g(x,u)$ egy folytonos kétváltozós skalárértékű függvény, a *transzferfüggvény*, amely azt mutatja meg, hogy az x állapot és az u szabályozás milyen új állapothoz vezet.

A dinamikus programozási feladat célfüggvénye

$$(2.1)\qquad \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t f(x_t, u_t) \to \max, \qquad 0 < \beta < 1,$$

ahol β a *leszámítolási együttható*. A feladat a (2.1) célfüggvény maximalizálása (vagy minimalizálása) a következő feltételek mellett:

$$(2.2)\qquad x_{t+1} = g(x_t, u_t), \qquad t = 0,\ 1, \ldots,, \qquad x_0 \text{ adott.}$$

A dinamikus programozás alapötlete az *értékfüggvény bevezetése:*

$$(2.3)\qquad V(x) = \max_{u_0,\ldots,u_t,\ldots} \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} f(x_t, u_t) | \qquad (2.2), \qquad x_0 = x \right\}.$$

Gondoljuk azt, hogy a $t = 0$ időszakban $x_0 = x$-ből $u_0 = u$ szabályozással eljutottunk $x_1 = x^*$-ba. Ekkor (2.1) alapján $V(x)$ a következő két rész összegének a maximuma: $f(x,u)$ és $\beta V(x^*)$. Innen adódik az

1. Tétel (Bellman, 1957). *Standard feltételek mellett létezik az időben változatlan $u = h(x)$ optimális válaszfüggvény, közte és $V(x)$ értékfüggvény között a következő kapcsolat teljesül:*

$$V(x) = \max_u \{f(x,u) + \beta V(x^*) | \quad x^* = g(x,u)\}. \tag{2.4}$$

A (2.4) *függvényegyenlet*et felfedezőjéről *Bellman-egyenlet*nek nevezzük. Látható, hogy egy végtelen sok tagból álló összeg végtelen sok feltétel melletti optimalizálása helyett csupán a Bellmann-egyenlet jobb oldalán álló kéttagú összeget egy feltétel mellett kell maximalizálni; igaz, hogy az értékfüggvény (2.3) definíciójában végtelen tagú összeg és végtelen sok feltétel áll.

A dolgozat hátralévő részében a feladat különféle megoldási módszerével foglalkozunk.

3 A lineáris–homotetikus (LH) szabályozási modell

Ebben a szabályozási feladatban az állapot és a szabályozásváltozó pozitív skalár, az állapotegyenlet lineáris és az alapfüggvény az állapot- és a szabályozási változónak ugyanazon hatványfüggvényének a konvex kombinációja: $\sigma^{-1}(Fx_t^\sigma + Gu_t^\sigma)$, ahol σ, A, B, F és G skalár paraméter, a következő megszorításokkal: $\sigma < 1$ ($\sigma \neq 0$), $A > 0$, $B > 0$, $F \geq 0$ és $G > 0$. Ekkor a dinamikus programozási feladat

$$\sigma^{-1} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (Fx_t^\sigma + Gu_t^\sigma) \to \max \tag{3.1}$$

a következő korlátok esetén:

$$x_{t+1} = Ax_t - Bu_t, \qquad t = 0,\ 1,\ \ldots \tag{3.2}$$

ahol az $x_0 = 0$ kezdőállapot adott.

Ha $\sigma = 0$, akkor

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (F \log x_t + G \log u_t) \to \max. \tag{3.1'}$$

Ha $\sigma > 1$, akkor maximalizálás helyett minimalizáljuk (3.1)-et.

Esetünkben az értékfüggvény

$$V(x) = \max_{u_0,\ldots,u_t,\ldots} \left\{ \sigma^{-1} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (Fx_t^\sigma + Gu_t^\sigma), \text{(3.2) mellett, } x_0 = x \right\}, \tag{3.3}$$

és a Bellman-egyenlet

$$V(x) = \max_u \{\sigma^{-1}(Fx^\sigma + Gu^\sigma) + \beta V(Ax - Bu)\}. \tag{3.4}$$

Rátérünk a megoldási módszerek ismertetésére.

4 Találgatásos módszer

Első látásra a találgatásos módszer a legegyszerűbb. A bevezetésben említetteket némileg pontosítva, a módszer a következő: 1. megsejtjük az értékfüggvény alakját, 2. megoldjuk a (3.4) egyenlet jobb oldalán szereplő parametrikus maximalizálási feladatot, 3. egyenlővé téve a bal és a jobb oldalt, adódik az ismeretlen paraméter, s vele együtt az optimális szabályozás. Bár a módszer hatásköre nagyon korlátozott, néhány szerző (Obstfeld és Rogoff, 1996, 721–722. o. és Ljungqvist és Sargent, 2000, 33–34. o.) nagy teret szentel neki. Figyelemre méltó, hogy Stokey és Lucas (1989, 15. o.) csak utal a módszerre és rögtön hozzáfűzi: ,,Ez a példa egy gondosan kiválasztott kivétel: a legtöbb parametrikus példa esetén lehetetlen explicit zárt képletet kapni."

Rátérünk a részletekre:

1. lépés. Hatványfüggvényes alapfüggvény esetén sejthető, hogy az értékfüggvény alakja is azonos kitevőjű hatványfüggvény:

$$V(x) = \sigma^{-1}\vartheta x^{\sigma}\,, \tag{4.1}$$

ahol ϑ a határozatlan állandó.

2. lépés. Helyettesítsük be (3.2)-t és (4.1)-et (3.4)-be. Maximalizáljuk az

$$R(\vartheta, x, u) = \sigma^{-1}(Fx^{\sigma} + Gu^{\sigma}) + \beta\sigma^{-1}\vartheta(Ax - Bu)^{\sigma}$$

függvényt u szerint!

Nullává téve az $R(\vartheta, x, u)$ függvény u szerinti parciális deriváltját:

$$R'_u(\vartheta, x, u) = Gu^{\sigma-1} - \beta\vartheta(Ax - Bu)^{\sigma-1}B = 0\,.$$

Bevezetve a $\gamma = 1/(\sigma - 1)$ jelölést, rendezéssel az egyenlet

$$G^{\gamma}u = (\beta B\vartheta)^{\gamma}(Ax - Bu)$$

lineáris egyenletre egyszerűsödik, azaz az optimum lineáris visszacsatolás:

$$u = K(\vartheta)x, \tag{4.2}$$

ahol

$$K(\vartheta) = \frac{(\beta B\vartheta)^{\gamma}A}{G^{\gamma} + (\beta B\vartheta)^{\gamma}B}. \tag{4.3}$$

3. lépés. Behelyettesítve (4.2)-t (3.2)-be, az új állapot $x^* = (A - BK(\vartheta))x$, szintén lineáris függvénye a régi állapotnak. Visszatérve $R(\vartheta, x, u)$-hez, az u változó kiesik:

$$\mathbf{R}(\vartheta, x) = \sigma^{-1}(F + GK(\vartheta)^{\sigma})x^{\sigma} + \sigma^{-1}\beta\vartheta[(A - BK(\vartheta))x]^{\sigma} = \sigma^{-1}\mathcal{R}(\vartheta)x^{\sigma}\,.$$

áll. Egyenlővé téve a Bellman-egyenlet bal és a jobb oldalát, $\vartheta = \mathcal{R}(\vartheta)$ adódik, ahol

$$\mathcal{R}(\vartheta) = F + G\left[\frac{(\beta B\vartheta)^{\gamma}A}{G^{\gamma} + (\beta B\vartheta)^{\gamma}B}\right]^{\sigma} + \beta\vartheta\left[\frac{G^{\gamma}A}{G^{\gamma} + (\beta B\vartheta)^{\gamma}B}\right]^{\sigma}. \tag{4.4}$$

Megoldva a fixpont-feladatot, a gyökök egyike az optimális megoldás $\bar{\vartheta}$.

5 A közvetlen megoldás

Most megmutatom, hogy a (4.2) optimális visszacsatolás közvetlenül is meghatározható az értékfüggvény (3.1) alakjából, a Bellman-egyenlet nélkül. Ez a *közvetlen módszer* rövidebb és egyszerűbb, mint a találgatásos módszer. Sőt, ez a módszer a Howard-módszer első lépése, és az általános feladatoknál a többi lépésre is szükség van.

Az alapfüggvény homoteticitása miatt nemcsak azt tudjuk, hogy az optimális visszacsatolás időben állandó, de azt is, hogy lineáris:

$$u_t^{\circ} = Kx_t, \tag{5.1}$$

ahol K a meghatározandó együttható. Ekkor (3.2) értelmében, $x_t = (A - BK)x_{t-1} = \cdots = (A - BK)^t x_0$, sőt, $u_t = K(A - BK)^t x_0$, tehát (3.3) szerint

$$V(x) = \max_K \sigma^{-1} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (F + GK^\sigma)(A - BK)^{\sigma t} x^\sigma = \max_K \sigma^{-1} \Theta(K) x^\sigma. \tag{5.2}$$

Vegyük észre, hogy ez a lépés igazolja a (4.1) sejtést is.

(5.2)-ből közvetlenül meghatározhatjuk K optimális értékét. Valóban, a végtelen mértani sor összegképletét alkalmazva:

$$\Theta(K) = \frac{F + GK^\sigma}{1 - \beta(A - BK)^\sigma}. \tag{5.3}$$

Nullává téve $\Theta(K)$ deriváltját, és elhagyva σ-t és a nevező négyzetét:

$$\Theta'(K) \approx GK^{\sigma-1}[1 - \beta(A - BK)^\sigma] - (F + GK^\sigma)\beta(A - BK)^{\sigma-1}B = 0\,.$$

Összevonás után

$$GK^{\sigma-1} - \beta(A - BK)^{\sigma-1}(AGK^{\sigma-1} + BF) = 0\,. \tag{5.4}$$

Megoldva (5.4)-et K-ra, adódik egy vagy több érték, s egyikük az optimális visszacsatolásé: $\bar{K}$.

Azok számára, akik kételkednek a heurisztikában, megjegyezzük, hogy a Bellman-egyenletbe visszahelyettesítve belátható, hogy tényleg optimális a lineáris visszacsatolás. Ekkor (3.3) teljesül, mert kiemelve $\sigma^{-1}x^\sigma$, az egyenlet

$$\Theta = F + GK^\sigma + \beta\Theta(A - BK)^\sigma$$

egyenletre egyszerűsödik, amely ekvivalens (5.3)-mal.

6 Az értékfüggvény iterációja

Harmadszor utalunk az *értékfüggvény iterációjá*ra: Ez a fokozatos megközelítés módszerének alkalmazása, amely a matematika egyik legfontosabb tételén

– a kontrakciós leképezés tételén – alapul: az n-edik lépésben a legújabb közelítő megoldást, V_n-t helyettesítjük be (3.3) jobb oldalába. Optimalizáljuk (3.3) jobb oldalát, s megkapjuk a bal oldalon V_{n+1}-et. A függvényiterációt addig folytatjuk, ameddig a közelítés nem válik elég pontossá.

Esetünkben ez az eljárás

(6.1)
$$V_{n+1}(x) = \max_u \left[\sigma^{-1}(Fx^\sigma + Gu^\sigma) + \beta V_n(Ax - Bu)\right], \qquad n = 0,\ 1, \dots,$$

azaz teljes indukcióval belátható, hogy $\vartheta_0 = 0$ és

$$V_n(x) = \sigma^{-1}\vartheta_n x^\sigma, \tag{6.2}$$

ahol a paramétersorozatot a 4. pont 3. lépésében bevezetett $\mathcal{R}$ függvény szerinti paraméter-rekurzió határozza meg:

$$\vartheta_{n+1} = \mathcal{R}(\vartheta_n), \qquad n = 0,\ 1, \dots, .$$

Igazolható, hogy ϑ_n konvergál $\bar\vartheta$-hoz.

7 Alkalmazások

A bevezetésben említetteknek megfelelően három esetet mutatunk be.

1. eset. A lineáris–kvadratikus (LQ) szabályozási modell (Stokey és Lucas, 1989, 95–96. o. és Ljungqvist és Sargent, 2000). $\sigma = 2$, mind az állapot-, mind a szabályozási változó lehet negatív vagy nulla is (nemcsak pozitív). A pozitív optimális visszacsatolási együttható (5.4) értelmében

$$\beta ABGK^2 - [\beta(A^2G - B^2F) - G]K + \beta ABF = 0 \tag{7.1*}$$

másodfokú egyenletből egyértelműen meghatározható. Stokey és Lucas bemutatja az értékfüggvények paramétereinek az iterációját.

2. eset. Az optimális fogyasztási pálya CRRA hasznossági függvény esetén (vö. Obstfeld és Rogoff, 1996, 720–721. o.). Itt $A = B$, $F = 0$ és $G = 1$. Most

$$K^{\sigma-1} - \beta[A(1-K)]^{\sigma-1}AK^{\sigma-1} = 0\,. \tag{7.1**}$$

ahonnan $\bar K = 1 - (\beta A^\sigma)^{1/(1-\sigma)}$.

3. eset. Az optimális felhalmozási pálya Cobb–Douglas termelési függvény teljes amortizáció és Cobb–Douglas hasznosságfüggvény esetén (Stokey és Lucas, 1989, 11–13. o. és Ljungqvist és Sargent, 2000, 33–34. o.). Itt (3.2)-t általánosítani kell:

$$x_{t+1} = Ax_t^\alpha - Bu_t, \qquad t = 0,\ 1, \dots, \tag{7.2}$$

(4.2) helyére

$$u_t^o = Kx_t^\alpha \tag{7.3}$$

lép. Most azonban a találgatásos módszer egyszerűbb, mint a közvetlen módszer.

Végül megemlítjük, hogy a (3.2) és (7.2) összeadásából keletkező

$$x_{t+1} = A_1 x_t + A_2 x_t^\alpha - B u_t, \qquad t = 0,\ 1, \ldots, \tag{7.2'}$$

feladatnak nincs explicit megoldása. (Ez annak felel meg, hogy egy időszak alatt a tőke csak részben kopik el.) Ugyancsak nincs explicit megoldás, ha Cobb–Douglas függvény helyett CRRA függvényt írunk.

Megemlítjük, hogy a közvetett módszer most is működik, csak a lineáris optimum nem fogja kielégíteni a Bellman-egyenletet. Most már szükségünk lesz a Howard-módszerre vagy az értékfüggvény iterációjára.

Számpéldán szemléltetve az elmondottakat: az 1. esetben $\sigma = 2$, $A = B = 1$, $F = G = 1$ esetén a fixpont-egyenlet megoldása $\bar{\vartheta} = \sqrt{2}$, azaz $\bar{K} = \sqrt{2} - 1$. A paraméteriteráció (ϑ_n) első négy értéke a következő: 1,000; 1,333; 1,400; 1,412; 1,414.

8 Következtetések

A dinamikus programozás nehéz téma, ezért tanítása nagyon sok figyelmet igényel. Az oktatásban népszerű találgatásos módszert összehasonlítva a közvetlen módszerrel, kétségeink támadnak: tényleg a találgatásos módszer a dinamikus programozás erejének legjobb szemléltetése. Helyesebb e módszert a tényleg hatékony Howard-módszer vagy az értékfüggvény-iterálás gyakorló terepének tekinteni.

Irodalom

1. Ljungqvist, L. and Sargent, T. J. (2000): *Recursive Macroeconomic Theory*, Cambridge, MA, MIT Press.
2. Obstfeld, M. and Rogoff, K. (1996) *Foundations of International Macroeconomics*, Cambridge MA, MIT Press.
3. Simonovits, A. (1998): *Matematikai módszerek a közgazdasági dinamikában*, Budapest, KJK.
4. Stokey, N. and Lucas, R. (1989): *Recursive Methods in Economic Dynamics*, Cambridge MA, Harvard University Press (with a contribution: Prescott, E.).

ILLUSTRATION OF SOLUTION METHODS IN DYNAMIC PROGRAMMING

In this note, I present an abstract model, to be called the scalar linear–homothetic (LH) control problem, where the state equation is linear and the reward function is a linear combination of the same power function of the state and of control variables. This model encompasses two popular economic models and a third one can also be similarly treated. In the LH model, three standard methods (guessing, direct and value-function iteration) of dynamic programming can be ideally illustrated.

AZ ÁLTALÁNOSÍTOTT POISSON ELOSZLÁS ÚJ BAYESIÁNUSI BECSLÉSE[1]

ANWAR HASSAN – HERMAN SÁNDOR
University of Kashmir, Srinagar, India – PTE Közgazdaságtudományi Kar

A kétparaméteres általánosított Poisson eloszlás paraméterbecsléséhez Bayes becslőfüggvényét ajánljuk, feltéve a paraméter a priori (előzetes) eloszlását, amely általánosabb, mint amit Shoukri-Consul (1989) ajánlott. Szimulációs tanulmányt folytattunk, hogy meghatározzuk az új Bayes becslőfüggvény torzítását és hatékonyságát. Kiszámítottuk az ajánlott becslőfüggvény relatív hatékonyságát és relatív torzítását a Shoukri-Consul becslőfüggvényhez képest, a paraméterek bizonyos kiválasztott értékeire. Az illeszkedés jóságának mérésére is végeztünk teszteket, felhasználva mindkét Bayes becslőfüggvényt.

1 Bevezetés

Consul és Jain (1973) a következő eloszlásfüggvénnyel adott általánosított Poisson eloszlást (GPD).

$$P(x = X) = \lambda_1(\lambda_1 + x\lambda_2)^{x-1} \exp[-(\lambda_1 + x\lambda_2)]/x! \qquad (1.1)$$

$$\lambda_1 > 0; \quad |\lambda_2| < 1; \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Azt találták, hogy a vizsgált eloszlás tagja a Lagrange eloszlások Consul-Shenton (1972) féle csoportjának és Gupta (1972) módosított hatványsor eloszlás (MPSD) csoportjának is.

Megmutatták, hogy a GPD-nek sok hasznos tulajdonsága van és különböző területeken alkalmazhatónak találták, úgymint "biológia, sorbanállási elmélet, epidemiológia és genetika". Valószínűleg ezen okokból sok kutatatót vonzott a téma és így nagyon rövid idő alatt sok kutatási dolgozat jelent meg a statisztikai irodalomban. Ezek jó összefoglalását kapjuk Consul (1989)-ben megjelent művében.

A GPD becslés problémájával sok szerző foglalkozott. Miközben Consul-Shoukri (1984), Consul-Famoye (1988, 1989) a GPD ML (maximum likelihood) becslését elemezte, Gupta (1977), Kumar-Consul (1980) annak MVU (minimális varianciájú torzítatlan) becslését elemezte, Shoukri-Consul (1989) pedig annak Bayes-i szemléletű becslését tanulmányozta.

Shoukri-Consul (1989) a GPD kissé megváltoztatott formáját vette alapul következőképpen

$$P(x = X) = (1 + \beta x)^{x-1} \alpha^x \exp[-\alpha(1 + \beta x)]/x! \qquad (1.2)$$

[1]A tanulmány a két tanszék között a Magyar Oktatási Minisztérium közreműködésével létrejött kutatási és együttműködési szerződés keretében készült. Beérkezett: 2002. június 11.

$\lambda_1 = \alpha$; $\lambda_2 = \alpha\beta$ helyettesítéssel (1.1)-ben. A szerzők α és különböző függvényei bayesi becslését kapták, miközben α értékeket előre nem meghatározott formában kezelik.

A másik paramétert, β-t ismertnek tekintve a következő Bayes szemléletű becslést kapták

$$\hat{\alpha} = Y/(N + \beta Y) , \qquad (1.3)$$

ahol N a mintanagyság és Y az egyedi megfigyelések összege.

Ebben a dolgozatban α bayesi szemléletű becslést tanulmányoztuk inverz gamma eloszlást feltételezve, ami általánosabb eloszlást ad annál, amelyet Shoukri-Consul α a priori eloszlásának tekintett. Az így nyert Bayes becslőfüggvény kapott átlagát és varianciáját szimuláció alapján határoztuk meg. Az új becslőfüggvény hatékonyságát és relatív hibáját összevetettük Shoukri-Consul (1989)-es becslőfüggvény megfelelő értékeivel néhány kiválasztott paraméterértékre.

A két becslőfüggvényt az illeszkedés szempontjából is teszteltük.

2 Az új Bayes becslőfüggvény

Ha $(X_1, X_2, \ldots, X_N)$ véletlen minta (1.2)-ből, akkor likelihood függvénye a következőképpen adott

$$L = \prod_{i=1}^{N} \left[(1 + \beta x_i)^{x_i - 1}/x_i!\right] \alpha^Y \exp(-N\alpha - \alpha\beta Y) , \qquad (2.1)$$

ahol $Y = \sum x_i$. Feltesszük, hogy α a priori eloszlása a következő sűrűségfüggvénnyel adott inverz gamma eloszlás

$$f(a) = [a^b/\Gamma(b)]e^{-a\alpha}\alpha^{b-1}; \qquad \alpha > 0;\ a, b > 0 . \qquad (2.2)$$

Könnyen látható, hogy Shoukri-Consulnak az a priori eloszlása nem informatív és konkrét esete (2.2)-nek, valamint $a = b = 0$ értéket véve nyerhetjük konkrét formáját.

Alkalmazva a (2.1) likelihood függvényt α a posteriori eloszlására a következőt kapjuk

$$P(\alpha \mid Y) = [(N + a + \beta Y)^{b+Y}/\Gamma(b + Y)]\alpha^{Y+b-1}e^{-(N+a+\beta y)}; \quad \alpha > 0 \quad (2.3)$$

és így α Bayes becslő függvénye

$$\alpha^* = (b + Y)/(N + a + \beta Y) \qquad (2.4)$$

Nyilvánvaló, ez α általánosabb becslése annál, melyet Shoukri-Consul kapott, mivel az előző az utóbbit $a = b = 0$-ra redukálja.

3 Az a posteriori átlag és variancia érték

Az α^* a posteriori átlagának és varianciájának meghatározására 100 véletlen mintát vettünk a GPD-ből, mindegyik minta nagysága 200, $\alpha = 0.5$ és $\beta = 0.4$, 0.7 és 0.9 értékkel. Így összesen 300 véletlen mintát vettünk. Mivel nem volt információnk a és b értékéről, kivéve, hogy valós és pozitív számok, (a, b) 25 kombinációjának értékét tekintettük $a, b = 1$, 2, 3, 4 és 5-re és azokat az a és b értékeket választottuk, melyekre az α^* varianciája minimális.

Az α^* átlagára és varianciájára kapott eredményeket összegzik a *3.1-3.3 táblázatok.* A nem zárójelben levő értékek az átlagot jelölik, a zárójelben levők a szórást jelölik minden táblázatban.

Azonnal látható ezekből a táblázatokból, hogy α^* alulbecsült az alacsony értékekre ($\beta = 0.4$ és 0.7), miközben $\beta = 0.9$-re ez nem igaz. Ebben az esetben pozitívan és negatívan is torzított. Továbbá megfigyelhető, hogy a torzítás mértéke csökkenő tendenciájú magasabb β értékre.

	$b=1$	$b=2$	$b=3$	$b=4$	$b=5$
$a=1$	0.4206 (0.00124)	0.4288 (0.00161)	0.4294 (0.00134)	0.4359 (0.00113)	0.4371 (0.00186)
$a=2$	0.4204 (0.00102)	0.4260 (0.00146)	0.4220 (0.00140)	0.4364 (0.00155)	0.4397 (0.00151)
$a=3$	0.4212 (0.00140)	0.4205 (0.00122)	0.4239 (0.00103)	0.4303 (0.00132)	0.4334 (0.00090)
$a=4$	0.4120 (0.00136)	0.4264 (0.00146)	0.4299 (0.00147)	0.4313 (0.00149)	0.4359 (0.00164)
$a=5$	0.4122 (0.00139)	0.4258 (0.00174)	0.4252 (0.00151)	0.4302 (0.00110)	0.4269 (0.00071)

3.1 táblázat. α^* átlaga és szórása $\beta = 0.4$-re és (a, b) különböző értékeire

	$b=1$	$b=2$	$b=3$	$b=4$	$b=5$
$a=1$	0.4961 (0.00141)	0.4820 (0.00141)	0.4848 (0.00140)	0.5094 (0.00117)	0.4943 (0.00128)
$a=2$	0.4749 (0.00118)	0.4861 (0.00139)	0.4884 (0.00110)	0.4897 (0.00119)	0.4843 (0.00119)
$a=3$	0.4739 (0.00136)	0.4821 (0.00163)	0.4876 (0.00118)	0.4857 (0.00107)	0.4998 (0.00152)
$a=4$	0.4799 (0.000994)	0.4828 (0.00161)	0.4854 (0.00102)	0.4859 (0.000991)	0.4946 (0.00139)
$a=5$	0.4678 (0.00128)	0.4790 (0.00144)	0.4812 (0.00174)	0.4862 (0.00205)	0.5124 (0.00139)

3.2 táblázat. α^* átlaga és szórása $\beta = 0.7$-re és (a, b) különböző értékeire

	$b=1$	$b=2$	$b=3$	$b=4$	$b=5$
$a=1$	0.4937 (0.00148)	0.5008 (0.00104)	0.5024 (0.00125)	0.5014 (0.00140)	0.5006 (0.00971)
$a=2$	0.4960 (0.00160)	0.4990 (0.00202)	0.5017 (0.00118)	0.5040 (0.00140)	0.5024 (0.00163)
$a=3$	0.4928 (0.00103)	0.5024 (0.00174)	0.4981 (0.000933)	0.4949 (0.00151)	0.4995 (0.000156)
$a=4$	0.4844 (0.00122)	0.4902 (0.00102)	0.4947 (0.00133)	0.5017 (0.00181)	0.4993 (0.00108)
$a=5$	0.4912 (0.00130)	0.4971 (0.00112)	0.4968 (0.00102)	0.4953 (0.00135)	0.4883 (0.00119)

3.3 táblázat. α^* átlaga és szórása $\beta = 0.9$-re és (a, b) különböző értékeire

Ami α^* varianciáját illeti, érdekes jelenséget figyelhetünk meg. Először: a variancia a és b egyenlő értékeire minimális mindhárom esetben. $\beta = 0.4$-re a minimum $a = b = 5$-nél van; $\beta = 0.7$-re a minimum $a = b = 4$-nél van és $\beta = 0.9$-re a minimum $a = b = 3$-nál van. E jelenség indoklása további elemzéseket kíván. Vizsgálataink alapján egyenlőre csak annyit állíthatunk, hogy α^* varianciája (amely ismeretlen) olyan formájú lehet, amely egyenlő a és b értéknél veszi fel a minimumát, illetve a és b azon értéke, melynél a variancia minimális, magasabb β értékekre ismét csökken. Ezért a (2.4) szerint ajánlott Bayes becslő függvénybe egyenlő és magas a és b értékeket célszerű venni. Magasabb β értékek esetében a-nak és b-nek alacsonyabbnak kell lennie.

Az ajánlott Bayes becslő függvény átlagát és varianciáját összehasonlítottuk a Shoukri-Consul becslő függvényével. Először az Shoukri-Consul becslést számítottunk a GPD-ből vett véletlen mintákra és meghatároztuk átlagukat és varianciájukat. Az így kapott átlagokat és varianciákat összehasonlítjuk az új Bayes becslőfüggvény megfelelő értékeivel a ($\beta = 0.4$; $a = b = 5$); ($\beta = 0.7$; $a = b = 4$) és ($\beta = 0.9$; $a = b = 3$) esetekben, ahol a varianciákat minimálisnak találtuk. Az eredményeket a *3.4 táblázat* tartalmazza.

Kiderül a táblázatból, hogy az ajánlott α^* becslő átlaga közelebb van α pontos értékéhez ($= 0.5$) mint $\hat{\alpha}$-é. Bár a két átlag közötti különbség nem tűnik nagynak, a mind a 100 mintára meghatározott α^* és $\hat{\alpha}$ egyedi értékek alakulása sajátos tendenciát mutat. Felfedezhető, hogy mind a 100 α^* érték nagyobb, mint $\hat{\alpha}$ megfelelő értékei, azaz közelebb vannak α pontos értékéhez $\beta = 0.4$, 0.7 és 0.9 minden értékére. Ez kétségtelenül azt jelenti, hogy az ajánlott becslőfüggvény jobb, mint Shoukri-Consul (1989) becslőfüggvénye, nemcsak átlagosan, hanem egyedileg is. Az is megfigyelhető, hogy α^* relatív hatékonysága $\hat{\alpha}$-hoz viszonyítva mindig több mint 100%, és β értékével együtt növekszik. Ez azt jelenti, hogy α^* nemcsak kevésbé torzított, hanem hatékonyabb is, mint $\hat{\alpha}$.

		$\beta = 0.4$ $a = b = 5$	$\beta = 0.7$ $a = b = 4$	$\beta = 0.9$ $a = b = 5$
Átlag	α^*	0.4269	0.4859	0.4987
	$\hat{\alpha}$	0.4147	0.4784	0.4926
Variancia	α^*	0.000689	0.000751	0.000883
	$\hat{\alpha}$	0.000737	0.001077	0.001048
Relatív hatékonyság		106.97	112.51	118.46

3.4 táblázat. α^* torzítása és százalékos relatív hatékonysága a Shoukri-Consul becsléshez képest

4 Az illeszkedés jósága

Annak érdekében, hogy eldöntsük, a vizsgált két α-ra vonatkozó becslőfüggvény közül melyik illeszkedik jobban, teszteléseket végeztünk Ezért három szimulált értékhalmazt képeztünk az ($\alpha = 0.5$, $\beta = 0.4$, $a = b = 5$); ($\alpha = 0.5$, $\beta = 0.7$, $a = b = 4$) és ($\alpha = 0.5$, $\beta = 0.9$, $a = b = 3$) paraméterkombinációkra. A szimulált értékek generálására a szokásos Monte

Carlo-módszert használtuk. Először a GPD-nek megfelelő kumulatív valószínűségeket $P(X \leq x)$ számítottuk ki $x = 0, 1, 2, \ldots$-re, és képeztük a kumulatív valószínűségi osztályokat, úgymint $P(X \leq x)$-től $P(X \leq x + 1)$-ig. Aztán 200 egynél kisebb véletlen számot generáltunk minden megfigyeléshez. Ezek képviselik a kumulatív valószínűségeket. A különböző valószínűségi osztályokhoz tartozó ilyen véletlen számoknak a számát (gyakoriságát) kaptuk, melyek végül is az $x = 0, 1, 2, \ldots$ gyakoriságai. Az eredményeket a *4.1 – 4.3 táblázatok* mutatják.

A táblázatokban található eredmények azt igazolják, hogy az új Bayes becslőfüggvény szorosabb illeszkedést ad a szimulált adatokhoz, mint a Shoukri-Consul becslőfüggvény.

Mindhárom esetben annak valószínűsége, $P(\chi^2)$, hogy a megfigyelt χ^2 értékeket túllépjük, nagyobb α^*-ra mint $\hat{\alpha}$-ra, ezért várható, hogy az új becslőfüggvény mindig szorosabb illeszkedést ad annál, melyet a Shoukri-Consul becslőfüggvény adott.

	Megfigyelt gyakoriság	Várható gyakoriság	
		α^* alapján	$\hat{\alpha}$ alapján
$X = 0$	124	121	122
$X = 1$	43	50	50
$X = 2$	21	50	18
$X = 3$	10	19	7
$X = 4$	2	3	3
Összesen	200	200	200
α		0.50354	0.49358
Szabadságfok		2	2
χ^2		1.66491	1.91279
$P(\chi^2)$		0.45	0.41

4.1 táblázat. 200 nagyságú véletlen minta GPD-ből $a = b = 5$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.4$-re és a várható gyakoriságok α^* és $\hat{\alpha}$ alapján

	Megfigyelt gyakoriság	Várható gyakoriság	
		α^* alapján	$\hat{\alpha}$ alapján
$X = 0$	113	118	119
$X = 1$	46	43	44
$X = 2$	19	19	19
$X = 3$	11	10	9
$X = 4$	6	5	5
$X = 5$	3	3	3
$X = 6$	2	2	1
Összesen	200	200	200
α		0.53483	0.52897
Szabadságfok		4	4
χ^2		0.72117	1.28787
$P(\chi^2)$		0.95	0.86

4.2 táblázat. 200 nagyságú véletlen minta GPD-ből $a = b = 4$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.7$-re és a várható gyakoriságok α^* és $\hat{\alpha}$ alapján

	Megfigyelt gyakoriság	Várható gyakoriság	
		α^* alapján	$\hat{\alpha}$ alapján
$X = 0$	125	122	121
$X = 1$	33	39	37
$X = 2$	17	17	21
$X = 3$	9	9	9
$X = 4$	6	5	5
$X = 5$	6	3	3
$X = 6$	2	2	2
$X = 7$	1	2	1
$X = 8$	1	1	1
Összesen	200	200	200
α		0.4936	0.48951
Szabadságfok		6	6
χ^2		1.69685	2.81228
$P(\chi^2)$		0.79	0.59

4.3 táblázat. 200 nagyságú véletlen minta GPD-ből $a = b = 3$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.9$-re és a várható gyakoriságok α^* és $\hat{\alpha}$ alapján

Az eredmények gyakorlati felhasználási lehetőségei a bevezetőben megemlítettekhez képest nagyon sokrétűek, a tudomány és a gazdaság számos területén segíthetik a folyamatok jobb megismerését. Ezeken a területeken a Poisson eloszlás modellezése közvetlenül, vagy megfelelő feltételek fennállása esetén a binomiális eloszlást helyettesítve adhat segítséget a döntéshozóknak.

Néhány kiragadott példa:

- A tudományos kutatások vizsgálják a meteoritok, a természetes és mesterséges különböző méretű szilárd testek a világűr egy adott pontján történő megjelenésének (becsapódásának) valószínűségét. Ezeknek az elemzéseknek az űrkutatásban van jelentőségük.
- Az ipari termelésben elsősorban a minőségbiztosítás és minőség-ellenőrzés területén alkalmazhatók a vizsgált eredmények. A selejtarányra, az anyaghibákra vonatkozó információk elősegítik a gyártási folyamatok jobb megszervezését, a gyártásközi ellenőrzés hatékonyabbá tételét, a szavatossági kötelezettségek tervezhetőségét.
- Az ún. sorbanállási elmélet gyakorlati alkalmazása számos területen nagy jelentőségű. A pályaudvari, bevásárlóközponti pénztárrendszerek átbocsátóképességének tervezése is fontos feladat. A telefonközpontok kapacitástervezésekor hasonló kérdések merülnek fel a tervezéskor.
- Ismert a légi közlekedésben és a szállodaiparban a túlvállalás. Ennek ésszerű kockázata szintén modellezendő.
- Az egészségügyben a kórházi ágykapacitás tervezésekor ésszerű határok közé kell szorítani annak kockázatát, hogy adott körzetben, adott típusú ellátás ne legyen biztosítható. Fenti probléma modellezése a rugalmas kockázatcsökkentésre is ötleteket adhat.
- A postaforgalomban az irányítószám hiánya az automatikus szortírozást akadályozza, ennek modellezése elemi érdek.

A példák még sorolhatók, a jövő feladata e konkrét területeken modellkísérleteket végezni.

Irodalom

1. Consul, P. C. and Shoukri, M. M. (1984): The maximum likelihood estimation for generalized Poisson distribution, *Comm. Stat. Theor. & Meth.*, Vol. 10, no. 12, pp. 1533–47.
2. Gupta, R. C. (1974): Modified power series distribution and its applications, Sankhya ser. B, Vol. 36, no. 3, pp. 288–298.
3. Gupta, R. C. (1977): Minimum variance unbiased estimation in a modified power series distribution and some of its applications, *Comm. Stat. Theor. & Meth.*, Ser. A, Vol. 6, no. 10, pp. 977–991.
4. Kumar, A. and Consul, P. C. (1980): Minimum variance unbiased estimation for modified power series distribution, *Comm. Stat. Theor. & Meth.*, Ser. A, Vol. 9, no. 12, pp. 1261–75.
5. Shoukri, M. M. and Consul P. C. (1989): Bayesian analysis of generalized Poisson distribution, *Comm. Stat. Theor. & Meth.*, Vol. 18, no. 4, pp. 1465–80.
6. Solt György (1993): *Valószínűségszámítás*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1993.
7. Denkinger Géza (1990): *Valószínűségszámítási gyakorlatok*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1990.

BAYESIAN ESTIMATION FOR GENERALIZED POISSON DISTRIBUTION

A new Bayes estimator for one of the parameters of the two-parameter generalized Poisson distribution has been suggested by assuming a prior distribution of the parameter which is more general than that suggested by Shoukri and Consul (1989). A simulation study has been done to find amount of bias and efficiency of the new Bayes estimator. Relative efficiencies and relative bias of the proposed estimator with respect to the Shoukri and Consul's estimator have been computed at some selected values of parameters. Some tests on goodness of fit have also been done using both the Bayes estimators. The study contains three approach. In all these three cases, $P(\chi^2)$, the probability for the observed value of χ^2 to be exeed is higher for α^* than $\hat{\alpha}$, it is therefore, expected that the new estimator should invariably provide closer fits than that provided by the Shoukri and Consul's estimator. The practical uses of the results are complex. The study proves it with several examples.

FOGALMAK, MÓDSZEREK

MÉG EGYSZER A KÖTELEZŐ ÖREGSÉGI NYUGDÍJRENDSZEREK FINANSZÍROZÁSI TÍPUSAIRÓL[1]

BOD PÉTER
MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutató Intézet

Mottó: "Ismétlés a tudás anyja"

1 Bevezetés

Ebben a cikkben visszatérünk néhány olyan alapvető fogalomra és problémára, amelyek széles körben forognak a hazai és nemzetközi nyugdíjreformokkal kapcsolatos vitákban. Az elmúlt évek során több alkalommal tettünk kísérletet tisztázásukra. Lásd: Bod (1992), Bod (1997). Ennek ellenére úgy tűnik, hogy a tisztázási folyamatban nem sikerült áttörést elérni. Újra meg újra felmerül a "pay as you go" versus funded finanszírozás hamis alternatívája. A fogalmi tisztázatlanság gátolja a politikai és gazdasági vezetést abban, hogy optimálisan vezérelje azt az egyébként objektíve nagyon bonyolult folyamatot, amit nyugdíjfinanszírozásnak nevezünk.

A továbbiakban ugyanazt akarjuk bemutatni, amire 1997-ben írt cikkünk irányult. Nevezetesen, hogy a társadalom számára rendkívül nagy szabadságfokú választási lehetőség áll fenn egy stabil, hosszú távon változatlan szabályokkal működő kötelező öregségi nyugdíjrendszer finanszírozására. Számos aktuáriusi értelemben korrekt finanszírozási típus közül választhatunk. Ezek közül egyik sem bír olyan kiemelt előnyökkel, amelyek a többivel szembeni kizárólagosan üdvözítő jelleget biztosítanának számára. Az előnyök és hátrányok ugyanis az időben nem állandó módon érvényesülnek. A mindenkori társadalmi, gazdasági, demográfiai és politikai helyzet konkrét elemzése alapján lehet csak az éppen legelőnyösebb megoldásokat megtalálni.

A cikk a Gazdaságmodellezési Társaság 2002-ben Balatonfüreden rendezett Konferenciáján elhangzott hasonló című előadás alapján készült.

2 A finanszírozás általános modellje

Olyan nyugdíjrendszerekkel foglalkozunk, amelyek csak öregségi nyugdíjat folyósítanak. A rendszer szolgáltatásai által meghatározott. Finanszírozása a

[1]Beérkezett: 2003. január 24.

biztosítosított bérek után fizetett járulékokból és az esetleg rendelkezésére álló tartalék hozamából, illetve magából a tartalékból történik. A modell azért általános, mert lehetővé teszi a legkülönbözőbben megállapított tartalékképzést és felhasználást. A modell célja, hogy olyan járulékfizetési mértékeket állapítson meg, amelyek a rendszer pénzügyi egyensúlyát biztosítják.

A rendszer akkor van egyensúlyban, ha minden időpontban igaz, hogy:

(a meglévő tartalékvagyon) = (a jövőbeni kiadások diszkontált várható értéke) – (a jövőbeni bevételek diszkontált várható értéke)

Ennek a fogalomalkotásnak akkor van csak értelme, ha megjelöljük azt a kockázatközösséget, amelyre a várható értékek vonatkoznak. A figyelembe vehető kockázatközösség jellege attól függ, hogy az adott rendszerben hogyan jön létre és hogyan szűnik meg a biztosítási jogviszony. Józanul csak zárt kockázatközösségek jöhetnek szóba, amennyiben a rendszer maga megszűnhet pl. azért, mert mindenki kilép, vagy új tag nem csatlakozik.

Más a helyzet a kötelező rendszerek esetében. Amennyiben elfogadjuk azt a feltételezést, hogy ezeket társadalmi megállapodás hozza létre és a politika nem szüntetheti meg őket: nyílt kockázatközösség alapján lehet gondolkodni. Egy kockázatközösségnek tekinthetjük az összes aktív és szolgáltatást élvező tagot, valamint azokat, akik a kötelező rendszerbe a jövőben, mint pályakezdők be fognak kerülni.

A továbbiakban ilyen, időben nem korlátozott kockázatközösséget tételezünk fel.

Definiáljuk az alábbi függvényeket:

- Biztosításra kötelezett jövedelmek (járulék alap): $J(t)$
- Járulék kulcs: $\Pi(t)$
- Járulék bevétel: $B(t) = \Pi(t)J(t)$
- Szolgáltatási kiadások: $K(t)$
- Tartalék tőke: $V(t)$
- Kamatintenzitás: δ

Valamennyi függvényről feltesszük, hogy folytonos és differenciálható, "sebesség típusú" függvény. Vagyis adott (t_1, t_2) időközben a rendszer járulékbevétele:

$$\int_{t_1}^{t_2} B(t)\, dt\,.$$

A fenti függvények között az alábbi kapcsolat áll fenn:

$$dV(t) = V(t)\delta\, dt + \Pi(t)J(t)\, dt - K(t)\, dt\,.$$

A tartalék differenciális megváltozása egyenlő a tartaléktőke kamata + a járulékbevétel és a szolgáltatási kiadások különbsége. Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát $e^{-\delta t}$-vel, vagyis diszkontáljunk $t = 0$ időpontra és rendezzünk kissé át:

$$dV(t)/dte^{-\delta t} - V(t)\delta e^{-\delta t} = \Pi(t)J(t)e^{-\delta t} - K(t)e^{-\delta t} .$$

A bal oldalon a $V(t)e^{-\delta t}$ függvény t szerinti deriváltja áll. Integrálva egy (t_1, t_2) intervallum felett, azt kapjuk, hogy

$$V(t_2)e^{-\delta t_2} = V(t_1)e^{-\delta t_1} + \int_{t_1}^{t_2} [\Pi(t)J(t) - K(t)]e^{-\delta t}\, dt$$

innen:

$$V(t_2) = V(t_1)e^{\delta(t_2-t_1)} + \int_{t_1}^{t_2} [\Pi(t)J(t) - K(t)]e^{\delta(t_2-t)}\, dt .$$

Ha $t_1 = 0$ és $V(0) = 0$ akkor a tartalék t_2-kor

$$V(t_2) = e^{\delta t_2} \int_0^{t_2} [\Pi(t)J(t) - K(t)]e^{-\delta t}\, dt .$$

Ez a tartaléktőke retrospektív alakja. A rendszer egyensúlyi feltétele a fennállása egész tartamára:

$$\int_0^{\infty} \Pi(t)J(t)e^{-\delta t}\, dt = \int_0^{\infty} K(t)e^{-\delta t}\, dt .$$

Ez felírható az alábbi alakban:

$$\int_0^{t_2} [\Pi(t)J(t) - K(t)]e^{-\delta t}\, dt = \int_{t_2}^{\infty} [K(t) - \Pi(t)J(t)]e^{-\delta t}\, dt .$$

Helyettesítsünk a tartalék retrospektív képletébe:

$$V(t_2) = e^{\delta t_2} \int_0^{t_2} [K(t) - \Pi(t)J(t)]e^{-\delta t}\, dt .$$

Ez a tartaléktőke nagysága prospektív szemléletben.

Mindazok a $\Pi(t)$ függvények, amelyek mellett az ekvivalencia teljesül, egy-egy elvben lehetséges finanszírozási rendszert jelentenek.

Ugyanakkor célszerű néhány további megszorító feltevéssel élni. Így elvárható, hogy $\Pi(t) > 0$ legyen, vagyis a rendszer ne fizessen vissza járulékot. Hasonlóan kizárható $V(t) < 0$, vagyis a rendszer ne vegyen fel hitelt.

3 Az általános modell néhány konkrét megvalósítása

a. Felosztó-kirovó rendszer

Ez a finanszírozási típus elméletileg a $V(t) = 0$ $\forall t$-re feltétellel definiálható. Az alapvető differenciálegyenletből:

$$\Pi(t) = K(t)/J(t)$$

A gyakorlatban a rendszer nem működhet folytonosan. Valamilyen véges intervallumra kell vonatkoznia. Ha ez az intervallum egy év, akkor a hétköznapi értelemben vett "felosztó-kirovó" rendszerrel van dolgunk. Ekkor a tartalékfüggvényre azt kötjük ki, hogy

$$V(t) = 0$$

legyen minden egészértékű t-re.

Legyen $t_2 = t_1 + 1$ és

$$V(t_1) = V(t_1 + 1) = 0 .$$

Így a $(t+1)$-edik évre a szükséges járulékmérték:

$$\Pi_{t+1} = \int_{t_1}^{t_1+1} K(t)e^{-\delta t}\, dt \Big/ \int_{t_1}^{t_1+1} J(t)e^{-\delta t}\, dt .$$

Ha feltételezzük, hogy a járulékok befizetése és a nyugdíjak kifizetése az időben egyenletesen zajlik, akkor nem kell diszkontálni:

$$\Pi_{t+1} = \int_{t_1}^{t_1+1} K(t)\, dt \Big/ \int_{t_1}^{t_1+1} J(t)\, dt ,$$

azaz, éves nyugdíjteher / éves járulékbevétel.

b. Tőkefedezeti rendszer

Legyen $T(t)$ olyan függvény, amelynél a $T\,dt$ a $(t, t+dt)$ időintervallumban újonnan megállapított nyugdíjak tőkeértékét fejezi ki.

Ebben a helyzetben a rendszer összes jövőbeni kifizetéseinek a jelenértékét két különböző formában fejezhetjük ki

$$\int_0^\infty K(t)e^{-\delta t}\, dt = \int_0^\infty T(z)e^{-\delta z}\, dz .$$

Az általános egyensúly feltétele most így is írható:

$$\int_0^\infty \Pi(z)J(z)e^{-\delta z}\, dz = \int_0^\infty T(z)e^{-\delta z}\, dz .$$

Bármilyen időpontra nyilván megoldás:

$$\Pi(t) = T(t)/J(t) .$$

Ha a $(t_1, t_1 + 1)$ egyéves intervallumban állandó járulékmértéket akarunk, akkor

$$\Pi_{t_1+1} = \int_{t_1}^{t_1+1} T(z)e^{\delta z}\, dz \Big/ \int_{t_1}^{t_1+1} J(z)e^{-\delta z}\, dz .$$

Ha egyenletes az új nyugdíjak megállapítása és a járulékfizetés, akkor itt sem kell diszkontálni és azt kapjuk, hogy adott évben a szükséges járulékkulcs:

$$\frac{\text{a tárgyévben indított nyugdíjak tőkeértéke}}{\text{a tárgyév járulékköteles béralapja}}.$$

A teljes felhalmozott tőke valamely $t > 0$ időpontban:

$$V(t) = e^{\delta t} \int_0^t [T(z) - K(z)]e^{-\delta z}\, dz\,.$$

c. A várományfedezeti finanszírozás

Ez a rendszer működése egész időtartamában állandó járulékkulccsal működik

$$\Pi(t) = \Pi\,.$$

Legyen $t = m > 0$ a működés egy adott pillanata. Az egyensúly biztosításához szükséges tartalék:

$$V(m) = e^{\delta m} \int_m^\infty [K(t) - \Pi(t)J(t)]e^{-\delta t}\, dt\,.$$

Innen:

$$\Pi = [\int_m^\infty K(t)e^{-\delta t}\, dt - V(m)e^{-\delta m}] / \int_m^\infty J(t)e^{-\delta t}\, dt\,.$$

A rendszer működésének egészére igaz, hogy:

$$\Pi = \int_0^\infty K(t)e^{-\delta t}\, dt / \int_0^\infty J(t)e^{-\delta t}\, dt\,.$$

d. Tartalékolással párosított felosztó-kirovó rendszerek

A felosztó-kirovó és a várományfedezeti típusú finanszírozási formák alkotják az általános modell extrém realizációit. A két típus között definiálható a részlegesen tőkésített rendszerek végtelen változata. Ez úgy történik, hogy rögzítünk egy egymáshoz kapcsolódó véges hosszúságú időintervallum sorozatot:

$$[t_0, t_1], \ldots, [t_m, t_n], \ldots,$$

- minden időintervallumhoz egy-egy állandó járulékmértéket rendelünk úgy, hogy a tartalékfüggvény az intervallumban előírt módon viselkedjék.

Az egyik megközelítés a következő. Előírjuk, hogy a járulékfüggvény és a tartalékfüggvény nemnegativitása mellett legyen

$$V(t_m) = V(t_n) = 0\,.$$

Minthogy minden $t_m < u < t_n$ időpontban

$$V(u) = V(t_m)e^{\delta(u-t_m)} + \int_{t_m}^{t_n} [\Pi(t)J(t) - K(t)]e^{\delta(u-t)}\, dt$$

A szóban levő fedezeti szakaszra szükséges járulékmérték:

$$\Pi = \int_{t_m}^{t_n} K(t)e^{-\delta t}\,dt \Big/ \int_{t_m}^{t_n} J(t)e^{-\delta t}\,dt\,.$$

Egy másik lehetséges megközelítés, hogy nem engedjük a tartaléktőkét a fedezeti szakasz végén eltűnni. Ehelyett előírjuk a fedezeti szakasz végén elérni kívánt ún. tartalékhányadot. Tartalékhányadnak mondjuk egy adott időpontban a

$$\kappa(t) = \frac{V(t)}{K(t)}$$

értéket. Írjuk elő, hogy a fedezeti szakasz végén a tartalékhányad κ_0 legyen.

Mivel

$$V(t_n) = V(t_m)e^{\delta(t_n - t_m)} + \int_{t_m}^{t_n} [\Pi(t)J(t) - K(t)]e^{\delta(t_n - t)}\,dt$$

és

$$V(t_n) = \kappa_0 K(t_n)\,,$$

valamint

$$\Pi(t) = \Pi\,,$$

ezért

$$\Pi = \frac{\kappa_0 K(t_n)e^{-\delta t_n} + \int_{t_m}^{t_n} K(t_n)e^{-\delta t}\,dt - V(t_m)e^{-\delta t_m}}{\int_{t_m}^{t_n} J(t)e^{-\delta t}\,dt}\,.$$

Egy további lehetőség a tartalék fedezeti szakaszonként való viselkedésének szabályozására, hogy rendelkezünk az ún. egyensúlyi hányados viselkedéséről. Egyensúlyi hányadosnak nevezik az alábbi törtet:

$$\lambda(t) = \frac{K(t) - \Pi(t)J(t)}{\delta V(t)}$$

A tört megmutatja, hogy a tartaléknak mi a szerepe a folyó kiadások finanszírozásában. Ha $\lambda < 0$, akkor a finanszírozáshoz sem a tartalékra, sem a kamataira nincs szükség. A tartalék a bevételi többletből növekszik. $0 < \lambda < 1$ esetén a kamatok egy részét fel kell használni a folyó finanszírozásban. Végül $\lambda > 1$ esetében a kamatokon felül a tartalékból is kell a folyó kiadásokra költeni.

Rögzített λ_0 esetén az alábbi fedezeti szakaszra érvényesítendő járulékmérték adódik:

$$\Pi = \frac{K(t_n)e^{-\delta t_n} + \delta\lambda_0 \int_{t_m}^{t_n} K(t)e^{-\delta t}\,dt - \delta\lambda_0 V(t_m)e^{-\delta t_n}}{J(t_n)e^{-\delta t_n} + \delta\lambda_0 \int_{t_m}^{t_n} J(t)e^{-\delta t}\,dt}\,.$$

4 A tőkésítettség mértéke és implikációi

A fentiekben bemutattuk, hogy milyen változatos struktúrákban lehet egy kötelező öregségi nyugdíjrendszer pénzügyi egyensúlyáról tartósan gondoskodni. Számos finanszírozási típust láttunk, amelyek egyaránt kielégítették a tartós egyensúly követelményét, ugyanakkor karakterisztikusan különböztek a rendszer tőkésítettségének mértékében. A tartósan zérus mértékű tartalékolástól a fokozatosan tartalékot képző és azt tervezett módon ismét elfogyasztó finanszírozáson át az időszakról időszakra előírt szinten tartalékoló rendszereken keresztül az összes kiígért jogosultság diszkontált értékét tartalékoló várományfedezeti finanszírozásig terjed a választható lehetőségek sora. Már csak ezért is nagyjából értelmezhetetlenek azok a „szakértői" vélemények, amelyek a felosztó-kirovó finanszírozást elvetve a tőkével fedezett finanszírozás mellett teszik le voksot.

Ezzel ugyanis nem mondtak semmit. A kérdés pontosan a létrehozandó tartalék mérete és rendeltetése. Azt kell mindenekelőtt eldöntenünk, hogy milyen célt szolgáljon a tartalék. Néhány válasz:

- a tőkefedezeti finanszírozásban a tartalék és kamatai fedezik a már megállapított nyugdíjakat és ezzel mentesítik a társadalmat a mindenkori nyugdíjasokról való törődéstől;
- a fedezeti szakaszok végére felhasználódó tartalékok rendszere lehetővé teszi a rendszer változatlan járulékmértékkel való finanszírozását a fedezeti szakasz ideje alatt;
- a fedezeti szakasz végén előírt szintre álló tartalék kamathozama enyhítheti az egyébként szükséges járulékkulcs emelési szükségletet, bár olykor inkább előrehoz olyan terheket, amelyeket a társadalom későbbre is halaszthatna.

Akármint is ítélik meg a helyzetet: egy nagyméretű, kötelező nyugdíjrendszer tőketartalékolási politikája nemcsak a rendszerre magára jelent implikációkat, hanem a nemzetgazdaság egészére is.

Ennek a cikknek a keretei között csak utalni tudunk arra, hogy jelentősebb tőkésítettségi hányad mellett a nyugdíjrendszer a felhalmozott pénztőkék egyre meghatározóbb tulajdonosává válik. A nyugdíjvagyonok visszahatnak a tőkepiacra és gyakran annak zavaró elemeivé válnak. Különösen akkor, ha nem megfelelően veszik számba egy kötelező rendszerben képződő és olykor nagyon hosszú időn át kifizetésre nem kerülő tőkék hatását.

Ami magát a nyugdíjrendszert illeti, utalok korábbi cikkemre (Bod, 1998), amelyben azt igyekeztem bemutatni, hogy minél magasabb egy nyugdíjrendszer tőkésítettségi foka, annál kiszolgáltatottabb az inflációval szemben. A magas hányadban tőkésített rendszerek saját forrásaikból képtelenek a folyó nyugdíjak inflációt követő indexálására. Automatikus infláció-követés csak zérus tartalékolási szinten lehetséges.

A magas fokon tartalékoló rendszerek csak külső segítséggel képesek infláció követő nyugdíjak fizetésére, vagy az elvártnál alacsonyabb induló nyugdíjakkal képeznek tartalékot a későbbi indexálásra, vagy az alkalmazott technikai kamatlábnál lényegesen magasabb befektetési hozamot kell elérniük. Erre azonban az utóbbi évek nemzetközi tapasztalatai alapján kevés kilátás van.

5 A kötelező rendszerek tartalékai és megtérülésük

Cikkünk befejezéseként legyen szabad egy nem módszertani kérdést érinteni. A kérdésnek az ad aktualitást, hogy az 1997-es reform óta már módunkban állt a folyamatok tényleges tapasztalatai alapján elbírálni azoknak a várakozásoknak a mérlegét, amelyek alapján a kötelező magánpénztári pillér bevezetésre került.

A tények fényénél (lásd Augusztinovics, 2002) kiderült, hogy legalábbis eddig a magánpénztárak befizetésekre vetített reálhozama negatívnak bizonyult. A rendszer a benne takarékoskodók szempontjából veszteséget termel.

Az előző Kormány, érzékelve ezt a problémát, nem engedte növelni az egyébként eredetileg emelni tervezett tagdíjat, de nem tett semmit a folyamat befolyásolására. A jelenlegi Kormány megemeli a tagdíjat és visszaállítja a pályakezdők belépési kötelezettségét, bár kisebb mértékben emel. Ugyanakkor szintén passzív marad a pénztári hozamok tekintetében. Így továbbra sem történik semmi a hozamok tekintetében.

Mit kellene tenni? Keresni kellene azokat a befektetési lehetőségeket, amelyek adekvátak a kötelező rendszerbe biztosan érkező eszközök természetrajzával.

A magánpénztárak jelenlegi befektetési politikája semmiben sem különbözik egy hétköznapi befektetési alap viselkedésétől. Erre motiválja őket a hatályos jogi szabályozás és a felügyeleti gyakorlat. Márpedig egy kötelező nyugdíjintézmény fedezeti vagyona teljesen más természetű, mint egy befektetési alap tőkéje.

Először is a tagdíj jelentős hányada biztosan megérkezik. Az új tagok belépését a törvény elő írja. A tartalékhoz a biztosított nem férhet hozzá az aktivitási időszakban. Kivétel, ha elhalálozik, vagy megrokkan. Ezért a nyugdíjpénztári tartaléktőke igen hosszú távon nem áll likviditási nyomás alatt. A magyar valóságban még több, mint 10 évig nem fog sor kerülni magánpénztári öregségi nyugdíj megállapítására.

Súlyos mulasztás ezért, hogy mind a mai napig semmi sem történt a magánpénztári befektetési politika hosszú távú stratégiai jellegének előmozdítása érdekében. Érthetetlen, hogy miközben tele vagyunk hosszú távú fejlesztési igényekkel (metró, autópálya, lakás, közlekedés), amelyek 10-15 éves megtérüléssel működő vállalkozások, és adva van a magánpénztárak hasonló távon szabadon felhasználható eszközei: a kettő nem találkozik.

Rövid távú spekulációs üzletekkel, nem hatékonyan folyik a nyugdíjtartalékok hasznosítása, és banki csatornákban keresik a hosszú távú projektek pénzügyi forrásait.

Csak emlékeztetőként: 1929 és 1938 között a MABI a kötelező járadékbiztosítás általa kezelt díjtartalékát évi átlagosan 8%-os nettó megtérüléssel kamatoztatta, amikor a lekötött bankbetétek kamata 4-4.5% körül mozgott.

Sokat lehetne tenni a helyzet javítására, bár ez a pénzpiac egyes szereplőinek nem feltétlenül lenne ínyére.

Irodalom

1. Augusztinovics M. és szerzőtársai: A magyar nyugdíjrendszer az 1998-as reform előtt és után. Közgazdasági Szemle. XLIX. 2002. június, 473–517.
2. Bod P.: Mennyibe kerül egy társadalombiztosítási nyugdíjrendszer működtetése? Közgazdasági Szemle. 1992. február, 123–145, és 1992. március, 244–261.
3. Bod P.: Társadalombiztosítási nyugdíjrendszerek lehetséges finanszírozási modelljeiről. SZIGMA. XXVII (1997) 207–220.
4. Bod P.: A nyugdíjak kiigazításának lehetőségei és korlátai. SZIGMA. XXVIII (1998) 131–139.
5. Thullen P.: Mathematische Methoden der sozialen-Sicherheit. Verlag Versicherungswirtschaft. 1997. Karlsruhe.

AGAIN ON SOME FINANCING MODELS OF THE MANDATORY OLD-AGE PENSION SYSTEM

Some fundamental notions and problems are considered in this note which occur often in pension reform discussions. We tried to clear up them on several occasions. But it seems that the clearing process was not successful enough. The false alternative: "pay as you go versus funded" emerges again and again. The notional obscurity is a real obstacle for Parliament and Government to find optimal control in pension financing which is however a very sophisticated task. We try to show —like in our note written in 1997— that the society has broad possibility of choice how to finance a mandatory old-age pension system in order to achieve stability in long range under unchanged rules. We can choose among several actuarially fair financing models. Neither of them has such distinguished advantages which would yield overall superiority. Advantages and disadvantages of a given model are not constant in time. The specific economic, demographic and political circumstances are decisive in finding the optimal model.

KÖNYVEKRŐL

WOLFGANG WEIDLICH: Sociodynamics. A Systematic Approach to Mathematical Modelling in Social Sciences. Harwood Academic Publishers, 2000, 380 p.

A szerző az elméleti fizika nyugalmazott professzora. Ennek ismeretében némelyik olvasó talán máris hajlik az egyáltalán nem alaptalan véleményre, hogy „íme egy újabb fizikus, aki társadalomtudósnak képzeli magát".

Több tény alapján nyugodtan elmondható, hogy jelen esetben nem erről van szó. Weidlich professzor nem most kezdett társadalmi jelenségek modellezésével foglalkozni. Több mint 30 év óta jelennek meg folyamatosan írásai e témakörből. Így a kötetben szerepeltetett kérdéseket sokszor végiggondolta, elemezte és modellezte; vagyis végeredményben több évtizedes kutatómunka didaktikusan feldogozott eredményeit tartja a kezében az olvasó. Másrészt a könyv elsősorban nem csak a társadalomtudományok témakörébe tartozó kérdések megoldásáról szól, hanem sokkal inkább az egyik odavezető utat vázolja fel a szerző.

De ezek után lássuk a könyv tartalmát! Kiindulópontja evidens: mindenfajta társadalmi jelenségeket két alapvető tulajdonság jellemzi – a tömegjellegük és az egyensúlytalanság. Ebből azonnal következik, hogy szociális jelenségek csak egy komplex megközelítés alapján érthetők meg – pláne, ha időbeli alakulásukra vagyunk kíváncsiak. Kielégítő válaszokat így leginkább akkor kapunk, ha a szociális rendszer struktúráját is figyelembe vesszük. Tehát: bármilyen társadalmi kérdés elemzésére is irányul tevékenységünk —legyenek ezek pszichológiai, populációs, szociológiai, közgazdasági vagy egyéb természetűek— nem szabad a különböző (a közgazdaságtanban: mikro- és makro-) szinteket egymástól elkülönülten, külön „világok"-ként kezelni. Mivel ugyanakkor léteznek olyan események, illetve jelenségek, amelyeket csak az egyik szinthez kötjük (gazdasági jelenségeknél maradva: az inflációt makroszinthez, a termelésmenedzsmentet pedig a mikroszinthez tartozónak tekintjük), ezért mégis csak van értelme külön-külön mikro-, illetve makrojelenségekről beszélni. Más szóval: Milyen tulajdonságú mikrojelenségek alapján értelmezhetők a megfigyelhető makrojelenségek?, illetve fordítva, Hogyan hatnak a makrofeltételek a mikroszintű szereplők viselkedésére?, és főleg: Hogyan eredményezik az e két szinten zajló események a rendszer egészének a dinamikáját? – ezek képezik a könyv központi kérdéseit.

Ezek a problémák nem újszerűek, főleg nem egy fizikus számára, hiszen a fenomenológiai termodinamika (makroszint) és a statisztikus mechanika (mikroszint) közötti, L. Boltzmann munkásságával kialakított és azóta sikeresen alkalmazott kapcsolatrendszere éppen ezt tükrözi vissza. A fenti kérdések ezért tulajdonképpen ezen, több mint 100 éves elmélet alkalmazásával, de mindenképpen a jóval fiatalabb általános rendszerelmélet alapján, illetve a

H. Haken —különben éveken keresztül W. Weidlich kollégája a stuttgarti egyetemen— nevével fémjelzett szinergetika keretében tárgyalhatók lennének.

Mi tehát az új, mi a szociodinamika? A fizikai rendszerek —főleg lézerek— tanulmányozásánál eredményesnek bizonyult módszertől abban különbözik, hogy a társadalomtudományokban az individuális szintre, konkrétan: az egyes emberekre, vonatkozó, általánosan érvényű dinamikai egyenletei nélkül kell megpróbálni a makroszintet és így a rendszer egészét modellezni. Gazdaságelméleti vonatkozásban Weidlich megközelítése érezhetően különbözik a hagyományos vagy uralkodó közgazdaságtanban használt gondolkodásmódtól, hiszen a mikroszereplő nála nem a reprezentatív homo oeconomicus; nála az egyének halmaza nem homogén, hanem heterogén. Döntő mértékben ezen halmaz struktúrája, a különböző tulajdonságokkal rendelkező individuumok megoszlása, pontosabban: a struktúra és az eloszlás időbeli alakulása határozza meg a makroszint, a társadalom állapotát és ennek fejlődését.

Míg a közgazdaságtanban a mikro- és makroökonómia évtizedes koegzisztenciája után —Weidlich szavaival: redukcionista— törekvések megfigyelhetők, azaz olyan kísérleteknek lehet(t)ünk tanúi, hogy a makrojelenségeket teljes vagy legalábbis a lehető legnagyobb mértékben azonos, azaz statikusan értelmezett racionális viselkedést mutató szereplőkhöz kapcsolódó mikroeseményekre visszavezessék, addig a szociodinamika a mikroszféra statisztikailag megragadható, dinamikai összefüggésekből igyekszik a makroszintet magyarázni. Közös mindkét modellezési eljárásnál, hogy az egyes gazdasági szereplő konkrét tulajdonságai "eltűnnek"; a különbség a "Miért?" - mert eleve kizárjuk vagy mert elvesznek a tömeges folyamatokban.

A fenti, valószínűleg nem csak közgazdászok számára izgalmas kérdéseket a szerző három részben tárgyalja. Az első három fejezetet magában foglaló I. rész lehetséges modellezési technikák osztályozásai, jellemzései és ezek filozófiai háttere után a szociodinamikai modellezés általános részét tartalmazza. Itt a kifejtésnél a matematikai szabatosság helyett inkább a koncepció megértetésére törekszik a szerző. Amennyiben formalizált levezetéseket közöl, akkor ezek mellé teszi az egyes lépések, közbülső eredmények értelmezését is. A rész az ún. master-egyenlet bemutatásával zárul.

Ez utóbbi egy differenciálegyenlet, amely a rendszer különböző makroszintű állapotai —a mikroszintű szereplők különböző megoszlásai— közötti átmenetekre vonatkozó valószínűségek időbeli alakulását írja le. Megoldhatóságának feltételeit, megoldási eljárásokat itt még nem kerülnek szóba. Ezeket tartalmazza a III. rész, természetesen a szóban forgó egyenlet szigorú matematikai levezetésével együtt.

A könyv II. része nem csak a terjedelem szempontjából a legnagyobb (az összesen 380 oldal közül megközelítően 240 oldalt tesz ki), hanem jelentőségét onnan kölcsönzi, hogy többféle alkalmazását tartalmazza az előzőleg bemutatott módszertannak. Ezek a populációs dinamikához tartozó migrációs folyamatoktól, társadalmi csoportok közötti kapcsolatain, politikai rendszerek formaváltozásain, a minőség területén vállalatok között zajló versenyen keresztül az urbánus evolúcióig terjednek. Meglepő, sőt bizonyos értelemben szinte megrázó, milyen egyszerűen írható le társadalmi csoportok ki- illetve felemelkedése és bukása vagy egy liberális politikai rendszer folyamatos, mondhatni: észrevétlen változása diktatúrává; ez utóbbit a XX. század német történelméből vett konkrétumokkal támasztja alá a szerző. Ennek során világosan kirajzolódnak azok a —formális és tartalmi— feltételek, amelyek az említett fejleményeket lehetővé tették vagy lehetővé tehetik a jövőben is. Számos, szimulációs elemzések eredményeit tartalmazó ábra igen szemléletessé teszi az olvasmányos stílusban megírt könyv legfontosabb megállapításait.

A közgazdász vagy általában a társadalomtudománnyal foglalkozó szakember számára a könyv üzenete talán nem elsősorban a matematikai formalizmusban és finomságokban rejlik. Sokkal fontosabb az az útmutatás vagy a vezérfonal, amelynek mentén a felvetett kérdéseket és ezek analógiájára hasonló problémákat végiggondolhatja az olvasó – mindig azt a kérdést szem előtt tartva: Mit kell tenni vagy mit nem szabad megtenni, hogy a nemkívánatos fejlemények ne valósuljanak meg; ugyanis nem szabad elfelejteni, hogy ezek lehetősége éppen a szociális események tömegjellege és a folytonos egyensúlytalanságok miatt minden pillanatban jelen van.

Visszatérve a recenzió első bekezdéséhez: A könyv nagyon szép és legfőképpen tanulságos példája annak, hogy társadalmi jelenségeket igenis megérthetünk természettudományos analógiák alapján, kezelhetjük ezeket a problémákat a fizikában, kémiában, biológiában használt eszközökkel – feltéve, hogy nem mechanikusan alkalmazzuk ezeket az eljárásokat!

Dietmar Meyer