

NEMLINEÁRIS DINAMIKA KLASSZIKUS NÖVEKEDÉSI
MODELLEKBEN¹

MÓCZÁR JÓZSEF

Budapesti Corvinus Egyetem

Ebben a tanulmányban a klasszikus Harrod növekedési modellt nemlineáris kiterjesztéssel, keynesi és schumpeteri tradíciók bevezetésével reprezentatív ügynök modellbe alakítjuk. A híres *Lucas kritika* igazolásaként megmutatjuk, hogy az *intrinsic* gazdasági növekedési ütemek trajektóriái vagy egy turbulens káoszba szóródnak szét, vagy egy nagyméretű rendhez vezetnek, ami elsődlegesen a megfelelő fogyasztási függvény típusától függ, s bizonyos paraméterek piaci értékei, pedig csak másodlagos szerepet játszanak. A másik meglepő eredmény empirikus, ami szerint külkereskedelmi többlet, a hazai valuta bizonyos devizapiaci értékei mellett, *különös attraktorokat* generálhat.

Kulcsszavak: Harrod modell, akcelerátor-elv, stacionárius növekedés, bifurkáció, Rössler szalag.

1 Bevezetés

A modern közgazdaságtan szépsége a változó arculata. Mindegyik történelmi periódus új közgazdasági kihívásokat vet fel, és az alapvető elméletek új megközelítéseket igényelnek. Például, a brilliánsan megfogalmazott makroökonómiai modellek többsége inkompatibilis a gazdasági folyamatok jelenlegi értelmezésével. A makroökonómiai elmélet két mostani intellektuális fronttörekvése: (1) hangsúlyozni mikroökonómiai megalapozását és integrálni a mikroökonómia legújabb eredményeit; (2) alapos vizsgálat alá vetni a gazdaság viselkedését egyensúlyon kívüli állapotában.

A makroökonómiai növekedést az eredendően is bonyolult mikromegalapozásával együtt vizsgálni meglehetősen nehéz feladat.² Azokban a reprezentatív ügynök modellekben, amelyek megkísérlik ezt, elsősorban a *mikro-optimalitás* jelenik meg. Itt nem optimalizálunk; csak a lehetséges, tetszőleges

¹Beérkezett: 2008. február 14. E-mail: jozsef.moczar@uni-corvinus.hu. A szerző ezúttal is megköszöni Molnárka Gyözőnek a tanulmányban szereplő grafikonok input fájljainak felírásában nyújtott segítségét.

²E megközelítés nemcsak mostanában lett fontos, hosszú története van. Már a keynesi aggregátumok sem voltak mikromegalapozás nélküliek, amint erre Hahn (1985) is emlékeztet bennünket, "... az Általános elméletnek csaknem kétharmada valójában a mikroökonómiának szentelt." A makroökonómia alapvetően azt a versenyzői folyamatot nem érinti a mikroökonómiából, ami megállapítja az árakat és a kibocsátási szinteket a különböző piacokon. A kétféle elmélet közötti összefüggés mindvégig ellentmondásos volt a közgazdaságtan történetében, de mára bizonyos mértékig sikerült integrálni őket. (vö. Hahn, F. (1985)).

induló feltételeket kielégítő egyensúlyi és nem egyensúlyi pályák viselkedése érdekel bennünket. Ezzel az endogén változók kezdeti értékeinek megadásával képet kaphatunk azok időbeli alakulásáról. Egy ún. *konstruktív mikro-megalapozást* fejlesztünk ki, ami a mi értelmezésünkben azt jelenti, hogy az aggregált magánkiadások elemeit megfelelően, különböző piaci értékelésekkel szabályozzuk. E szabályozások eszközei a *fogyasztási adó*, a részvénytőkepiaci értékelés (a *Tobin-q*), és az *árfolyam*. Ezek mindegyike valamiképpen a mikroökonómiában gyökerezik, és értékeik a megfelelő piaci folyamatokat és döntéseket tükrözik.

E modellekben csak a tőkefelhalmozás, együtt a fogyasztás és a megtakarítás közötti választással, szolgál a gazdasági növekedés alapjául. Ezt tekintjük a növekedés magjának, csakúgy, mint a különböző externáliákkal dolgozó modellekben. Például, az endogén növekedési modellekben is a felhalmozás a fő magyarázó változó. Ugyanakkor, a makroökonómiai fejlődésről szóló legtöbb modern elméleti munkában a tőkefelhalmozást a stacionárius, kiegyensúlyozott növekedéssel összefüggésben tanulmányozták (vö. Solow (1956), Uzawa (1961), Morishima (1964), McKenzie (1976)). Különösen az 1960-as években egy olyan világ volt az elméleti közgazdaságtan elsődleges ideálja, ami elkerüli a hirtelen változásokat és az endogén bifurkációkat. Ezek a sima közelítések többnyire a gazdaság reál szektorán alapultak, és bizonyos fokig a fejlett országoknak abban az időszakban elért gazdasági sikereit támasztották alá. Később, még a pénzpiaccal kiegészített klasszikus egyensúlyi modellek is a stacionárius megoldásokban voltak érdekelve, a soron következő konklúziókra jutva: (1) a hosszú távú tőkeintenzitás alacsonyabb a monetáris gazdaságban, mint a nem-monetárisban³; (2) a monetáris hatóságok — a nominális pénzmennyiség megváltoztatásával — képesek variálni a gazdaság stacionárius tőkeintenzitását (vö. Tobin (1965), Stein (1966), Sidrauski (1967), Rose (1969), Hadjimichalakis (1971)). Azonban, mostanában bármerre is tekintünk, a piacgazdaságokban mind evolúciós, mind recessziós piaci folyamatokat látunk, amelyek üzleti ciklusokhoz, növekvő (strukturális) komplexitáshoz, és ezt követően turbulenciához vezetnek. (vö., pl., Day és Chen (eds.) (1993), Chiarella és Flaschel (2000)). Így, a csak arányos egyensúlyi növekedésbe vetett hit ma már a múlté.

A Harrod és Leontief klasszikus növekedésemelvényei alapján *kalibrált modelleinkben* tapasztalható nemlineáris dinamikát exogén sokkok nélkül vizsgáljuk. Ugyan Harrod és Leontief rögzített arányú technológiáit a modern közgazdaságtan univerzálisan a Solow-féle folytonos helyettesíthetőséggel váltotta fel, mi most mégis Lahiri (1976) eredményeit adoptáljuk, amikor is megfelelő tulajdonságokkal rendelkező, a növekedési ütemtől függő koefficienseket veszünk. Tekintettel a híres *Lucas kritikára* (lásd in Lucas (1976)), ami világossá teszi, hogy miért is nagyon veszélyes *ad hoc* függvényekkel leírni a háztartások viselkedését, a fogyasztási és a beruházási függvényeinket néhány ismert közgazdasági elmélet és empirikus tanulmány figyelembe vételével értelmeztük. A beruházási koefficiensek nemlinearitásának specifikáció-

³Eme egyenlőtlenség —egy lehetséges magyarázatként— a pénz nem-semlegességét tükrözi a gazdasági növekedésben.

jában sok megfontolásunkat Hawkins (1948) feltevéseire, Mukerji (1964) és Bródy (1970) vizsgálataira, valamint a 60-as évekbeli japán adatokkal végzett empirikus számítások (lásd in Móczár (1991, 1997), Móczár és Tsukui (1992)) következtetéseire alapoztuk.

A Lucas kritika egyféle igazolásaként megmutatjuk, hogy az ún. *intrinsic* gazdasági növekedési ütemek trajektóriái vagy egy turbulens káoszba szóródnak szét, vagy egy nagymértékű rendhez vezetnek, ami elsődlegesen a megfelelő fogyasztási függvény típusától, és csak másodlagosan bizonyos paraméterek piaci értékeitől függ.

A másik meglepő eredmény empirikus, ami szerint egy külkereskedelmi többlet, a hazai valuta megfelelő devizapiaci értékelése mellett, *különös attraktorokat* generálhat. Ezekben a vizsgálatokban a dinamika legújabb szerzőszámolásából, Goodwin (1990) és Chiarella (1990) valamint May (1976), Guckenheimer és Holmes (1991), Brock és Malliaris (1989) és végül Day (1994, 2000) ötleteiből és technikai arzenáljából merítettünk.

A tanulmány egyes pontjaiban a következő kérdésekkel foglalkozunk. A 2. pontban a Harrod modellt kiterjesztjük egy lineáris Leontief-Neumann típusú felhalmozási modellbe a szokásos reprezentatív ügynök megközelítés felhasználásával. A 3. pont a nemlineáris Leontief-Neumann kiterjesztésű klasszikus Harrod növekedési modell egy lehetséges ún. *konstruktív mikro-megalapozását* írja le. Itt bevezetünk néhány nemlineáris leképezést, amelyek segítségével definiáljuk a tőkeefficiensek és a ráfordítási koefficiensek dinamikus viselkedését. A modell végső alakja a keynesi dinamika és a schumpeteri evolúció egyféle kombinációját implikálja. Továbbá, bizonyítást adunk Harrod ún. *kétszarv problémájára* is, nevezetesen, hogy a sima növekedés és a ciklus, akár periodikus akár aperiodikus, szimultán módon, mint szíami ikrek jelennek meg. Egy másik újdonság itt, egy lehetséges versenyzői optimalitás bevezetése a fenti modellbe. A 4. pont egy kétdimenziós és egy háromdimenziós nemlineáris rendszert vizsgál zárt és nyílt Harrod-Leontief típusú rendszerekben. Az egyszerűség kedvéért most mind a tőkeefficiensek, mind a ráfordítási koefficiensek rögzítettek. A nemlinearitást a nemzetközi kereskedelmi korlátok tartalmazzák. Az utóbbi differenciárendszer egy Rössler rendszer, ami különös attraktorokat generálhat a valuta bizonyos piaci értékelése mellett. Az 5. pont az *intrinsic* gazdasági növekedési ütemek és a Rössler rendszer idősorainak szimulációs vizsgálatait tartalmazza. A kaotikus dinamikát a Maple V. program segítségével megrajzolt számítógépes grafikákkal mutatjuk ki. A 6. pont néhány következtető megjegyzést és további proposíciókat foglal magába.

2 A dinamikus Leontief-Neumann modell mint a Harrod modell egyik általánosítása

A következőkben egy reprezentatív ügynök modellt értelmezünk, és a gazdasági növekedés két központi meghatározójára, a megtakarításra és a beruházásra összpontosítjuk figyelmünket, amelyek mindegyike a gazdaságnak a

kormányzati politika által szabályozható strukturális változója. Az ügynök egyetlen egy szolgáltatás előállítására specializált, mégpedig egy Leontief-típusú termelési függvény segítségével, a rendelkezésére álló tőkeállomány és szélesebb értelemben vett fogyasztás felhasználásával. A növekedési folyamatban a reprezentatív ügynökünk tőkét halmoz fel és inputokat fogyaszt. Itt és a továbbiakban is feltesszük, hogy a kibocsátásnak létezik világpiaca, ezért a bővülő gazdaság szabadon exportálhat és importálhat, és az árak kompetitívek és a fizetési mérlegfeltétel is teljesül.

Egy pillanatig zárt gazdaságot feltételezve, a tőkefelhalmozási folyamatban jelölje b a rögzített tőke-kibocsátás arányt (K/x), vagy ezzel ekvivalensen, a stacionárius tőkekoefficiens, és az s a rögzített megtakarítás-kibocsátás arányt (S/x), vagy ezzel ismét ekvivalensen, egy stacionárius megtakarítási koefficiens. Az s/b növekedési ütemet, a várakozások realizálódása (*tőkélates előrelátás*), vagyis az $x_t^e = x_t$ teljesülése esetén, Harrod 'garantált' növekedési ütemnek nevezte és ρ_w -vel jelölte, azaz,

$$\rho_w = s/b. \quad (1)$$

Az (1) egyenlőség, egyféle neoklasszikus értelmezésben, stacionárius egyensúlyi növekedést definiál, mégpedig az arányos egyensúlyi fogalom időbeli kiterjesztéseként. Ha az (1) egyenlőség fennáll, akkor a gazdaság összes stacionárius egyensúlyi feltétele teljesülni fog.

Az (1) összefüggés, Leontief jelöléseivel, a következő egyenlettel is megadható:

$$b(x_t - x_{t-1}) = (1 - a)x_{t-1}, \quad t = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

ahol $(1 - a)$ jelöli a megtakarítási rátát, amelynek reciproka a stabilizáló multiplikátor, és amelyben az a a fogyasztási határhajlandóság, azaz az input koefficiens. A (2) egyenletről mondhatjuk azt is, hogy az export és import egyensúlyát is mutatja, és ekkor nyitott gazdaságra is értelmezhető. Megfelelő átrendezés után, (2)-ből az ismert dinamikus és lineáris Leontief modellt kapjuk diszkrét időben egyetlen jószágra aggregált gazdaságban:

$$x_{t-1} = ax_{t-1} + b(x_t - x_{t-1}), \quad t = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

ahonnan

$$x_t = \frac{1}{b}(1 + b - a)x_{t-1}, \quad t = 1, 2, \dots. \quad (4)$$

Megjegyzendő, hogy a (4) egyenlet jobb oldalán az első két tényező a Neumann értelemben vett növekedési tényezőnek felel meg. (A részletekért lásd Móczár (1995), (1997).)

2.1 Növekedés és ciklus mint sziámi ikrek

Ahhoz, hogy a (4) rendszert közelítsük a valósághoz, nemlineárisá alakítjuk át. Megfelelő tulajdonságokkal rendelkező skála-függő koefficienseket használunk (lásd in Lahiri (1976)), azaz, az a és b koefficienseket az x_{t-1} kibocsátás

bizonyos függvényeiként vesszük a (4)-ben:

$$x_t = \frac{1}{b(x_{t-1})} (1 + b(x_{t-1}) - a(x_{t-1})) x_{t-1}, \quad t = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Itt az a fő célkitűzésünk, hogy szimultán módon vizsgáljuk Harrod ún. *két-szarv problémáját*, vagyis az (5) által adott intertemporális egyensúlyi pálya ciklikusságát és növekedését. Ciklusok létezhetnek növekedés nélkül is, és fordítva, növekedés létezhet ciklusokkal is. A probléma specialitását az adja, hogy azok szorosan összefüggnek, azaz, teljesen értelmetlen egymás nélkül elemezni őket. Mivel bennünket majd a kibocsátás változásának a változása érdekel⁴, ezért, követve Tsukui és Murakami (1979, pp. 76–77) vizsgálatait, a (4) összefüggést egyszerűen az egyes időszakok ρ_t növekedési ütemeivel írjuk fel:

$$\rho_t = \frac{1}{b(\rho_{t-1})} (1 + b(\rho_{t-1}) - a(\rho_{t-1})) \rho_{t-1}, \quad t = 1, 2, \dots \quad (6)$$

A (6) egyenlet alapján az $(1 + b(\rho_o) - a(\rho_o)) \rho_o > 0$, $\rho_o > 0$ kezdeti feltétellel, mindegyik növekedési ütem a következőt adja. Az (5)-ből a fogyasztási és a beruházási függvények segítségével valóban a kibocsátás változási rátáját kapjuk:

$$\frac{1 - a(x_{t-1})}{b(x_{t-1})} = \rho_t \quad \text{és} \quad \rho_t = \frac{x_t}{x_{t-1}} - 1, \quad (7)$$

míg a (6)-ból a változási ráta változási rátáját:

$$\frac{1 - a(\rho_{t-1})}{b(\rho_{t-1})} = \frac{\rho_t - \rho_{t-1}}{\rho_{t-1}} \quad \text{vagy} \quad \frac{1 - a(\rho_{t-1})}{b(\rho_{t-1})} = \frac{(x_t - x_{t-1})/x_{t-1}}{(x_{t-1} - x_{t-2})/x_{t-2}} - 1. \quad (8)$$

Alaposabban szemügyre véve a (6) egyszektoros modellünket, még mielőtt további vizsgálatokba kezdenénk, megfigyelhetjük, hogy az a fogyasztás és a beruházás (megtakarítás) között egy korlátos *oximoront* tükröz, vagy a közgazdaságilag elterjedtebb *trade-off*-t, ami több figyelmet érdemel a modern piacgazdasági vizsgálatokban.

Felhasználva azt a propozíciót, hogy a közvetlen adót inkább a fogyasztásra mintsem a jövedelemre kell kivetni, bevezetjük modellünkbe a fogyasztási adót, mint az egyetlen lehetséges adóztatási formát. A stabil fogyasztási adó elhalaszthatja a jelen fogyasztást a következő időszakra, ami több megtakarításra és nagyobb növekedési ütemre vezethet. Ugyanakkor, a fogyasztási adó bármilyen emelése a beruházások (nettó) kiszorításával jár, ami viszont csökkenti a növekedési ütemet. A fogyasztási adókulcs nagysága általában attól függ, hogy a befolyt jövedelmet hogyan költi el a kormány, és az milyen hatással van a reprezentatív ügynökünk kiadásaira.

Ami a beruházásokat illeti, azt explicite a *nemlineáris akcelerátor-elben* és a *Tobin-q*-ban kifejezve magyarázzuk, valamint implicite a kamatlábbal a

⁴Itt egész pontosan Cagan (1956) vizsgálatához hasonlóan, csak most nem az inflációs rátára, hanem a növekedési ütemre kívánunk elvégezni bizonyos dinamikai vizsgálatokat. További lényeges különbség, hogy Cagant az inflációs ráta stabilizálása érdekelte, bennünket pedig a kibocsátás változási rátájának alakulása, megengedve irreguláris oszcillációkat és a kaotikus mozgásokat is.

Tobin- q -n keresztül. Az első most azt jelenti, hogy a tetszőleges várható növekedések a GDP-ben egy megfelelő nemlineáris növekedést követelnek meg a tőkeállományban. A beruházások *Tobin- q elmélete* pedig azt állítja, hogy az aggregált beruházás várhatóan stabilan függ a q -tól, amely a tőke piaci értékének és pótlási költségének aránya. (A részletekért lásd, Tobin (1969).) Ha $q = 1$, akkor a beruházás nem változik, míg ha q nagyobb vagy kisebb mint 1, akkor a beruházás rendre pozitív vagy negatív. Így vehetünk egy $I = I(q - 1)$ típusú függvényt, és megfelelően érvelhetünk, hogy $I'(\cdot) > 0$.⁵

Hogyan kapcsolódik a kamatláb a q -*elmélethez*, a beruházás kulcsmeghatározójához? A piac értékeli a vállalatokat a diszkontált jövőbeli jövedelmek alapján a reálkamatláb felhasználásával. A kamatláb bármilyen növekedése nagyobb mértékű diszkontáláshoz vezet, ami viszont a piaci tőkeárak esését eredményezi. Így a reálkamatláb negatív hatása a beruházásra ténylegesen a *Tobin- q* -n keresztül „érvényesül”. A kamatláb mellett, a *Tobin- q* két másik tényező figyelembe vételét is lehetővé teszi a beruházási döntésekben. Az első, a tőke termelékenységének növekedése emeli a jövőbeli jövedelmet és ezáltal növeli a részvényárakat és a q -t. A második, a q megtestesíti a várakozások szerepét is. Vitathatatlan, hogy a beruházás lényegében „fogadás a jövőre”, a vállalatok felszereléseket vásárolnak, hogy előállítsanak termékeket sok-sok éven keresztül bizonytalan feltételek mellett. Hogy hogyan lesznek képesek kihasználni a felszereléseket, a beruházások eldöntésekor még nem ismert. A bizonytalanság nő a hazai és a külföldi piacok versenyzése folyamán, csakúgy, mint a technológiai fejlődés és a kiszámíthatatlan politikai fejlemények során. Mindezeket a szempontokat folyamatosan értékelik a tőzsdék.

Az empirikus vizsgálatok azt mutatják, hogy a *Tobin- q* tipikusan beruházás-generáló. Mivel a vállalatok inkább kölcsönöznek mintsem részvényeket bocsátanak ki, a *Tobin- q* mindig megfelelően méri a beruházási ösztönzést, tükrözi mind a várható jövedelmezőséget a számlálóban, és mind a kölcsönzés reál költségét, a diszkonttényezőt és a tőkeköltségen keresztül, a nevezőben.

Egy sokkal nehezebb kérdés merül fel a tekintetben, hogy vajon a tőkeárak előrejelző természete vezethet-e bizonyos kauzalitásra a tőzsdei árak és a növekedés között? A jelen tőzsdei áraknak tükrözniük kell a jövőbeli profitok diszkontált jelenértékét. Egy hatékony részvénypiacon a reálkamatláb meg egyezik a növekedési ütemmel, ezért a jövőbeli növekedési ütemek az induló árakban fognak tükröződni. Ez a megközelítés a forgalom (piaci tőkésítésen felüli eladások), mint elsődleges növekedési mérték használata mellett érvel, ezáltal tisztázva a hamis oksági hatást, mert a nagyobb növekedés előre-

⁵Keynes (1936, 135. o.) jelölésében $q = V/C$, ahol V -t Keynes a tőkevagyon várható hozamának jelenértékéként definiálta, míg nála a C a tőkevagyon kínálati árát jelöli. Következésképpen, a marginális q tekinthető Tobin marginális q -jára adott sokféle változat egyikének, pontosabban, a beruházási határhatékonyság és a kamatláb hányadosaként, azaz, $q = MEI/r$. Ezért a keynesi beruházási függvény átférhető $I(q - 1)$ -re, ahol a vállalat $q = 1$ -ig (vagy ezzel ekvivalensen, $MEI = r$ -ig) beruház. Így ha r nő, akkor q és így a beruházás is esik, azaz, $dI/dr = I_r < 0$. További megjegyzést érdemel még, hogy Tobin beruházási q -elmélete formálisan megegyezik Eisner-Strotz (1963) és Lucas (1967) beruházási elméletével a szabályozási költség marginalizációja esetén.

jelzésében a magasabb árak a törtnek mind a számlálóját, mind a nevezőjét befolyásolják. Granger (1969) oksági tesztjét széleskörűen használják a pénzügyi piacok tanulmányozásában, csakúgy, mint a gazdasági növekedés meghatározóiban, például a megtakarítások, az export, a pénzkínálat és árstabilitás vizsgálatában. Ugyanakkor, Harris (1997) szerint pozitív kapcsolat van a piaci tőkésítés (a GDP szintjére normalizálva) és a jövőbeli gazdasági növekedés között. Nem meglepő, hogy a fejlettebb pénzügyi piacok hatékonyabbak, és ezért jobban képesek belefoglalni az anticipált jövőbeli növekedést a jelen áraikba. A vizsgálat meglepő a forgalom sebessége vonatkozásában, aminek egy jobb indikátornak kell lennie a tőzsdék növekedésre gyakorolt hatása mérésében, mivel az megtisztított az árak előrejelző hatásaitól. Az eredmények azt mutatják, hogy nagyobb forgalomsebesség nagyobb növekedést vált ki, de csak a nagyon magas és a nagyon alacsony jövedelmű országokban. Eltérően a forgalom sebességtől, arra nincs bizonyíték, hogy a tőzsdén szereplő hazai vállalatok számának változása a gazdasági növekedési ütemek változását eredményezné.

Összegezve érveléseinket, a fenti (6) intertemporális egyensúlyi egyenlet a következőképpen fog változni:

$$\rho_t = \frac{1}{qb(\rho_{t-1})} (1 + qb(\rho_{t-1}) - pa(\rho_{t-1})) \rho_{t-1}, \quad t = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

ahol $p = 1 + \tau$ és τ egy állandó fogyasztási adókulcs.

Megjegyzendő, hogy a (9) rendszer a technológiát az *intrinsic* piaci értékeléssel együtt tartalmazza. Ezután a (9) egyenlet által meghatározott növekedési ütemeket megfelelő kezdeti feltételek mellett *intrinsic* növekedési ütemeknek nevezzük.

Továbbá, bevezetünk bizonyos nemlineáris leképezéseket a (9)-be azért, hogy közelítsük mind a tőkeefficiensek, mind a ráfordítási koefficiensek dinamikus viselkedését a valósághoz. Így az egy periódus alatti tőkeállományváltozás, azaz a beruházás, formálisan a nemlineáris akcelátorrelvben és a Tobin-féle beruházási q -elméletben kifejezve a következőképpen magyarázható:

$$\begin{aligned} i_{t-1} &= [(q-1)\nu e^{\rho_{t-1}} + \nu e^{\rho_{t-1}}] \rho_{t-1} \\ &= (q\nu e^{\rho_{t-1}}) \rho_{t-1}. \end{aligned} \quad (10)$$

ahol

$$\nu e^{\rho_{t-1}} = b(\rho_{t-1}), \quad \text{és általában } 2 < \nu < 3. \quad (11)$$

Szavakban, a tőkeefficiensek exponenciálisan nőnek a megfelelő *intrinsic* növekedési ütem szerint (vö. Mukerji (1964)), ahol ν a tőke-kibocsátás aránya, most 2 és 3 között értékelve. (Napjainkban a nagyon fejlett országokban az éves GDP a működésbe állított tőkeállomány egyharmad és másfél közötti értékét mutatja általában.) Ugyanakkor, tetszőlegesen adott tőkeállománybeli növekedésre jutó kiadás a tőkefelhalmozás *intrinsic* ütemének növekvő függvénye.

A ráfordítási koefficiensek esetében feltesszük, hogy a tőke ($b(\rho_{t-1})$) gazdasági élettartam-eloszlása megközelít valamilyen nemlineáris $h(\rho_{t-1})$ leké-

pezést. Így, ha a tőkeállományról, mint készletről gondolkodunk (vö. Lange (1952), Bródy (1970)), akkor az alábbi kapjuk:

$$h(\rho_{t-1})a(\rho_{t-1}) = b(\rho_{t-1}), \quad (12)$$

ahonnan

$$\begin{aligned} a(\rho_{t-1}) &= b(\rho_{t-1})h^{-1}(\rho_{t-1}) \\ &= \nu e^{\rho_{t-1}} h^{-1}(\rho_{t-1}). \end{aligned} \quad (13)$$

Így a ráfordítási koefficiensek nemlineárisan ‘arányosak’ a tőkekoefficiensekkel, ami a fogyasztási adón keresztül megengedi, hogy a teljes kormányzati kiadás az aggregált tőkével arányosan nőjön a gazdaságban.

A (11) és (13) szerint rendre mind a tőke arány, mind a megtakarítási arány inkább endogén mintsem exogén módon determináltak. Hangsúlyozandó azonban, hogy ezeket a nemlineáris függvényeket a tőkekoefficiensek közelítésére csak bizonyos tartományokban használjuk a (lokális) vizsgálatainkban.

Behelyettesítve (11)-et és (13)-at (9)-be, kapjuk:

$$\begin{aligned} \rho_t &= \frac{1}{q\nu e^{\rho_{t-1}}} (1 + q\nu e^{\rho_{t-1}} - p\nu e^{\rho_{t-1}} h^{-1}(\rho_{t-1})) \rho_{t-1} \\ &= \frac{1}{q} \left(\frac{1}{\nu e^{\rho_{t-1}}} + q - p h^{-1}(\rho_{t-1}) \right) \rho_{t-1} \\ &= \left(1 + \frac{1}{q\nu} e^{-\rho_{t-1}} - \frac{p}{q} h^{-1}(\rho_{t-1}) \right) \rho_{t-1}. \end{aligned} \quad (14)$$

Schumpeter innovációi nélkül azonban a (14) nem lehet teljes. Schumpeter (1939) szintén azon a nézeten volt, hogy a növekedés és a ciklus *intrinsic* módon kapcsolódnak egymáshoz, és a fő elméleti probléma ebben az összefüggésben az, hogy megmagyarázzuk, miért nem megy végbe simán a gazdasági bővülés, miért fordulnak elő púpok és mélyedések? Ő úgy gondolta, hogy a tőkés gazdaságok oszcilláló viselkedése az innovációs folyamatokkal függnek össze, ami a fogyasztási és a beruházási javak nagyobb mennyiségeit eredményezik. Azt állította, hogy az üzleti ciklus lényegében attól a ténytól függ, hogy az innovációk nem egyformán, hanem megszakításokkal oszlanak el az időben.

Új technikák, új termékek és új piacok bevezetése szintén hozzájárul a kibocsátás növekedéséhez, azonban időben különböző mértékben. Mivel a (14) egyenlet jobb oldala egy szakaszosan lineáris függvény, megszorozva azt $\mu = 1 + \omega$ -val, ahol az ω egy schumpeteri innovációs „*swarms*” paraméter, pótlólagos cikk-cakk növekményeket nyerünk az *intrinsic* növekedési ütemeinkben.

$$\rho_t = \mu \left(1 + \frac{1}{q\nu} e^{-\rho_{t-1}} - \frac{p}{q} h^{-1}(\rho_{t-1}) \right) \rho_{t-1}, \quad t = 1, 2, \dots \quad (15)$$

Keynes (1936) absztrakt szinten magyarázta a ciklikus mozgást. Az volt a nézete, hogy a fellendülési és a visszaesési erők közötti egyensúlyban a

változások simán vagy összevissza következhetnek be. A (15) egyenlet jobb oldalán a zárójelek közt bizonyos expanzív (beruházás) és kontraktív (fogyasztás) erők léteznek, amelyek lehetnek Keynes elgondolásainak bizonyos specifikációi. A (15) egyenlet így a keynesi dinamika és a schumpeteri evolúció egyféle kombinációját fejezi ki. Mind a beruházás, mind az innováció lényegesek a növekedés fenntartásában és azok szinkronizált módon mozognak.⁶

Matematikailag a (15) elsőrendű differenciaegyenlet. Jobb oldalán az $f(\rho)$ nemlineáris leképezés a p , μ , ν és q paraméterek bizonyos értékei és a megfelelő $h^{-1}(\rho_{t-1})$ mellett a következő tulajdonságokkal rendelkezik: $f(0) = 0$, $f(\rho)$ monoton növekvő függvénye ρ -nak a $0 < \rho < c$ tartományban ($f(\rho)$ maximális értéke a $\rho = c$ -nél van); $f(\rho)$ monoton csökkenő függvénye ρ -nak $\rho > c$ -re. A p , q és μ paraméterek komplex módon szelídítik meg a nemlineáris viselkedés „vadságát”, más szóval, finomítják a púp meredekségét az $f(\rho)$ leképezésben. Az ilyen tulajdonságú leképezést *unimodális leképezés*nek nevezik az irodalomban. Jól ismert, hogy ilyen egydimenziós diszkrét idejű nemlineáris rendszer nagyon bonyolult dinamika szerint viselkedhet, ami egy véletlenszerű folyamathoz hasonlít. Meglepő tulajdonsága, hogy az általa generált idősorok véletlenszerűek, vagyis nem lehet előrejelezni változóik jövőbeli alakulását. Még ha egy modell teljesen determinisztikus is a struktúra és a kezdeti értékek specifikációi szerint, az egymáshoz közel elhelyezkedő kezdeti értékek teljesen különböző idősorokat eredményezhetnek, annak ellenére, hogy ugyanazon dinamikai rendszer generálta őket. Ezt a jelenséget nevezik az irodalomban a *kezdeti értékektől való érzékenységi függőség*nek.

Mivel a (15) modellünkben az állapotváltozó az *intrinsic* növekedési ütem, a növekedés és a ciklus, akár periodikus, akár aperiodikus, szimultán módon jelennek meg sziami ikreként. Ezzel egy lehetséges egzisztenciabizonyítást adtunk Harrod „kétszarv” problémájára modern piaci értékelésben.

2.2 Optimális periodikus vagy aperiodikus intertemporális egyensúlyi pályák

A (9) egyenletből a következő korlátokat nyerhetjük:

$$1 - pa(\rho_{t-1}) \geq qb(\rho_{t-1}), \quad \rho_{t-1} \geq 0, \quad t = 2, 3, \dots, \quad (16)$$

azaz, nem akumulálhatunk többet a megtakarításoknál a megfelelő *intrinsic* növekedési tényező mellett. A pozitív ρ_0 -t a kezdeti feltételek adják meg úgy, hogy az $[1 - pa(\rho_0) + qb(\rho_0)] \rho_0 > 0$ reláció teljesüljön.

⁶Matsuyama (1998) szerint a neoklasszikus növekedési modell a felhalmozást tekinti a növekedés motorjának, míg a neo-schumpeteri növekedési modell az innovációt hangsúlyozza. Modellünkkel ellentétben arra a megállapításra jutott, hogy a beruházás és az innováció aszinkron módon mozognak, közülük csak az egyik játszik domináns szerepet fázisról fázisra. Az egyik fázis nagyobb kibocsátás-növekedéssel, magasabb beruházással, innováció hiánnyal és egy kompetitív piaci struktúrával jellemezhető. A másik fázist alacsonyabb kibocsátás-növekedés, alacsonyabb beruházás, nagyobb innováció és monopolistább piaci struktúra jellemzi. A gazdaság gyorsabban nő a ciklusok mentén, mint az instabil egyensúlyi növekedési pályán.

Jelölje most $\Pi(\rho_{t-1})$ a ρ_{t-1} *intrinsic* növekedési tényező profitabilitását. Vegyük a $\rho_{t-1}, \rho_t, \dots$ teljes *intrinsic* növekedési ütemsorozat profitabilitásának jelenértékét a következőképpen:

$$\Pi(\rho_{t-1}, \rho_t, \dots) = \sum_{t=1}^{\infty} \gamma^{1-t} \Pi(\rho_{t-1}), \quad (17)$$

ahol $\Pi'(\rho) < 0$ és $\Pi''(\rho) > 0$, valamint $\gamma > 1$.

Az optimális periodikus vagy aperiodikus intertemporális egyensúlyi pálya a $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots$ *intrinsic* növekedési ütemek egy olyan sorozata, amely maximalizálja a (17)-et, kielégítve a (9)-et és (16)-ot adott kezdeti értékek mellett. Ez az optimum-probléma a szerző egy korábbi eredményének (lásd Móczár (1991)) nemlineáris dinamikus kiterjesztése.

3 Különös attraktorok külkereskedelmi többlet vagy hiány mellett

Először egy lineáris dinamikus rendszert írunk fel az egyszerű Harrod-Leontief gazdaságban, mégpedig folytonos időváltozóval.⁷ Feltesszük, hogy a kibocsátás változási időráta, \dot{x} , arányos a γ tényező szerint az x kibocsátáshoz a b tőkeoefficiens mellett szükséges tőkeállomány és az y megtakarítás közötti különbséggel:

$$\dot{x} = \gamma(bx - y). \quad (18)$$

A megtakarítás változási időráta az outputból az a fogyasztási határhajlandósági koefficiens által meghatározott kereslettel csökkentett kibocsátással egyezik meg:

$$\dot{y} = x - ax. \quad (19)$$

A (18) és (19) egyenletek egy kétdimenziós lineáris differenciálegyenlet-rendszert alkotnak:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \gamma(bx - y), & \gamma > 0 \\ \dot{y} &= (1 - a)x, \end{aligned} \quad (20)$$

ahol a γ, b és az a paraméterek, az utóbbi két betű értelmezése pontosan megegyezik a korábbi közgazdasági jelentésükkel. A (20) rendszert kompaktabb módon mátrixegyenletként is felírhatjuk:

$$\dot{r} = Ar,$$

ahol

$$A = \begin{pmatrix} \gamma b & -\gamma \\ 1 - a & 0 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad r = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Az $\dot{r} = Ar$ rendszer megoldásai az (x, y) síkon mozgó trajektóriákként vizualizálhatók, amelyek összessége a fázisportré. Az $\dot{r} = Ar$ rendszer általános megoldása a következő:

$$r(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} r_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} r_2, \quad (21)$$

⁷A változók t időtől való függését a jelölés egyszerűsége miatt elhagyjuk.

ahol most a λ_1 és λ_2 az A mátrix két különböző sajátértéke, r_1 és r_2 a megfelelő sajátvektorok, és c_1 és c_2 olyan skalárok, amelyek kielégítik az $r(0) = c_1 r_1 + c_2 r_2$ egyenletet az adott $r(0)$ kezdeti feltételre.

Amint a (21) egyenletből is látható, a megoldás viselkedése a sajátértékektől függ. Ha a sajátértékek valósak, és, például, különböző előjelűek, akkor a fázisúri origója nyeregpontra, mint most a (20) dinamikai rendszer esetében is.

Transzformálva a (20) kétdimenziós elsőrendű differenciálegyenlet-rendszert két dimenziós másodrendű differenciálegyenletbe, kapjuk:

$$\ddot{x} = \gamma(ax + b\dot{x} - x). \quad (22)$$

Szavakban, a kibocsátás sebességváltozásának időráta, \ddot{x} , a γ tényező szerint arányos a túlkéréslettel, vagy túlkínálattal. Mivel $\gamma > 0$, ha túlkéréslet van, akkor $\ddot{x} > 0$, azaz, a kibocsátás sebessége gyorsul, míg túlkínálat esetén $\ddot{x} < 0$, így a kibocsátás sebessége lassul. Amennyiben $\ddot{x} = 0$ a (22) egyenletből, megfelelő átrendezés után, az ismert zárt, dinamikus és lineáris Leontief modellt kapjuk folytonos, állandó sebességű időváltozóval:

$$\dot{x} = ax + b\dot{x}, \quad (23)$$

vagyis a periódus kibocsátása pontosan fedezi a fogyasztást és a következő periódus kibocsátásnövekedéséhez szükséges beruházást.

A (23) megoldása $(1 - a)/b$ állandó ütemmel exponenciálisan növekvő egyensúlyi pálya. Az ilyen „hőn óhajtott” gazdaság örökké stacionárius egyensúlyi növekedésben van. Viszont instabil, összhangban a korábbi kutatásokkal (lásd például Tsukui (1961)). E stacionárius növekedést a zérus gyorsulás feltevése specifikálta, ami közgazdaságilag meglehetősen irreális premissza.

Modellünk „kinyitáshoz” bevezetünk egy speciális külkereskedelmi mérlegkorlátot, és feltesszük, hogy a nettó import változási időráta a következőképpen definiált:

$$\dot{z} = s + \mu z(x - d), \quad \mu > 0, \quad (24)$$

ahol s a rögzített nettó importkoefficiens, d a kibocsátás alsó korlátja és z az időben változó nettó importkoefficiens. (Az s , d paraméterek természetesen pozitívak.) Itt a μ az igazodási sebesség paramétere, amely egyébként az időkélesletetés inverze.

A kibocsátás alsó korlátja szerinti külkereskedelmi mérleg befolyásolja a kibocsátás-változás időbeli rátáját, így annak meg kell jelennie a (18) egyenletben is:

$$\dot{x} = \gamma(bx - y - czd), \quad \gamma > 0, \quad (25)$$

ahol c jelöli az árfolyamot, amely a hazai valuta devizapiaci értékelését tükrözi. A $bx - y > 0$ feltevés mellett, ha $z < 0$, akkor a kibocsátás-változás időráta nő a külkereskedelmi szufficit következtében, míg ha $z > 0$, akkor pedig csökken a külkereskedelmi deficit miatt. Most γ az időkélesletetés inverze, azaz, a kibocsátási folyamatra vonatkozó igazodási sebesség paramétere.

Ezzel egy olyan háromdimenziós differenciálegyenlet-rendszert kaptunk, amely a kibocsátás, a megtakarítás és a külkereskedelmi mérleg *szimultán* mozgását írja le egy nyílt, folytonos időváltozójú Harrod-Leontief modell keretei között⁸:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \gamma(bx - y - czd) \\ \dot{y} &= (1 - a)x \\ \dot{z} &= s + \mu z(x - d) .\end{aligned}\tag{26}$$

Ismét, a (26) rendszerből kapjuk:

$$\ddot{x} = \gamma [b\dot{x} - (1 - a)x - c(s + \mu z(x - d))d] ,\tag{27}$$

ahonnan az $\ddot{x} = 0$ esetre kapjuk: $x + c(s + \mu z(x - d))d = ax + b\dot{x}$, amelyből

$$(1 - a)x = b\dot{x} - czd .\tag{28}$$

A (28) bal oldalán a megtakarítás, a jobb oldalán pedig a beruházás és a kibocsátás alsó korlátján meghatározott folyó fizetési mérleg szerepel. Ez pontosan megfelel annak, hogy nyitott modellben a folyó megtakarítás kétféleképpen is felhasználható a jövőbeli jövedelem növelésére: belföldi vagy külföldi beruházásra.

Könnyű belátni, hogy a (23) rendszer ténylegesen egy Rössler (1976) rendszer. A paraméterek bizonyos értékei mellett, mint majd látni fogjuk, a Rössler rendszerünk mozgása instabillá válik, és egy komplex dinamika jelenik meg.

Amíg a Lorenz (1963) rendszerben két nemlineáris egyenlet generálja a nagyon véletlenszerű komplex vagy kaotikus pörgést, addig ugyanehhez Rösslernek csak egy nemlineáris egyenletre volt szüksége. Továbbá, itt csak egy alsó érték konvertálja a lokális instabilitást globális stabilitásba. Amint a későbbiekben látni fogjuk a megfelelő számítógépes grafikákból, egy rendszer fixpontra vonatkozó stabilitási fogalmát itt egy pontból egy határciklusba, és ezután egy korlátos régióba általánosítjuk. Amikor egy rendszer visszatartott attól, hogy elérje az egyensúlyi fixpontját, a legkisebb disszipációs állapotában „nyugszik meg”.

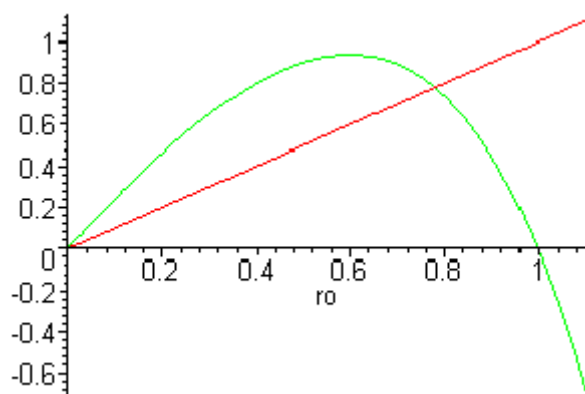
4 Szimulációs számítások

A (15) egyenlettel adott intertemporális egyensúlyi pálya szimulációs elemzésére a szerző korábbi, a japán gazdaság endogén növekedésére vonatkozó számításait használjuk fel. (Lásd Móczár (1991).) A tipikusan beruházókészletező iparágak (walrasi értelemben vett tőkejóságokat kibocsátó ágazatok) egy meglehetősen magas növekedési ütemet mutattak, $\rho = 0.3$, a japán kormány által kibocsátott 56 szektoros input-output táblázatok alapján készített számítások. Most két alig különböző kezdeti értéket adunk az állapotváltozóknak, azaz, $\rho_{01} = 0.1$ és $\rho_{02} = 0.09$. A paraméterértékek a (15)-ben most

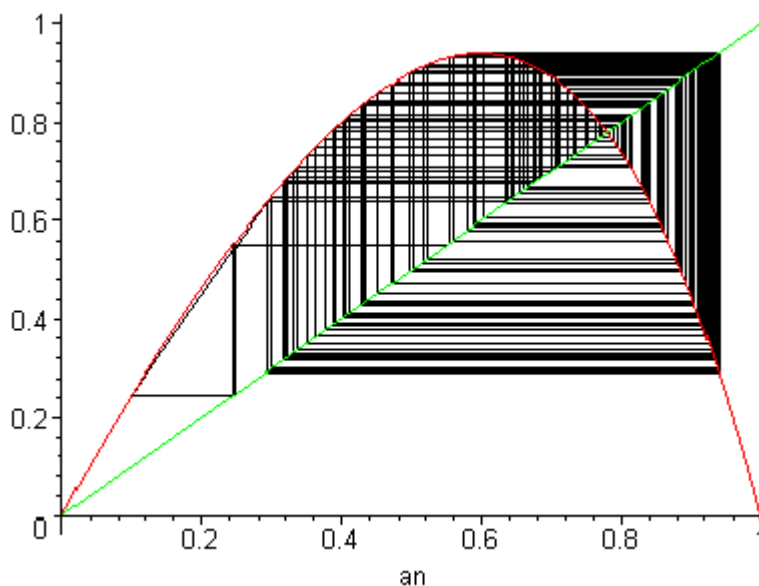
⁸A modell struktúrája hasonló Meltzer (1947) beruházási modelljéhez, illetve Goodwin (1990) adaptációjához.

a következők: $\mu = 1.1$, $\nu = 1.5$, $p = 5/3$, $q = 1.1$ valamint $h^{-1}(\rho_{t-1}) = \rho_{t-1}^3$. Ezekre a paraméterértékekre és az élettartam-eloszlásra a (15) grafikonját az 1. ábra mutatja.

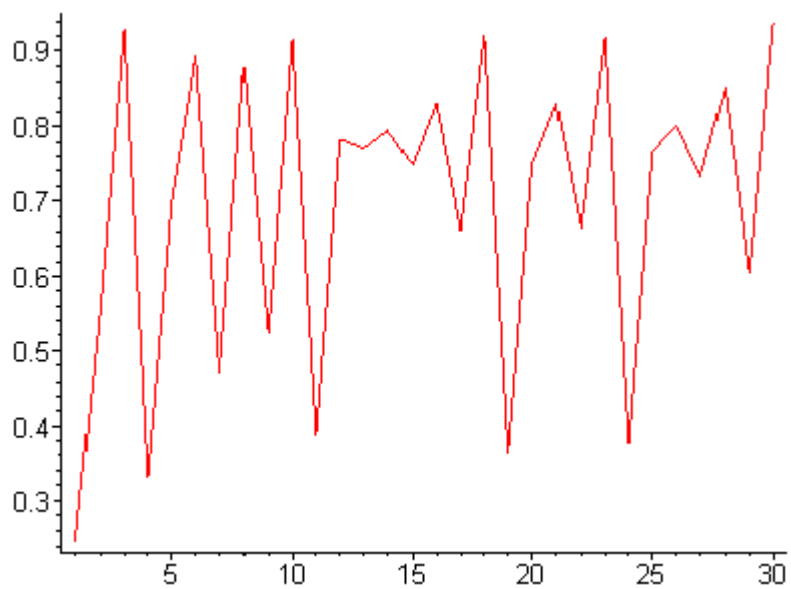
Az 2. ábra a (15) egydimenziós nemlineáris differenciaegyenlet által generált *intrinsic* növekedési ütemeinek divergáló idősorait mutatja. (Ezekhez és a későbbi számításokhoz, valamint a grafikák megrajzolásához is a *Maple V.* programot használtuk fel.)



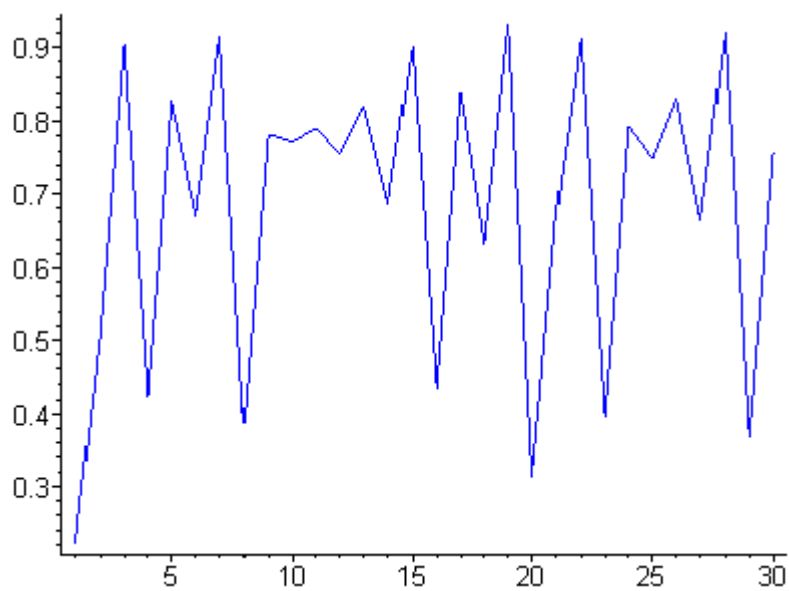
1. ábra. (15) idősora $\mu = 1.1$, $\nu = 1.5$, $p = 5/3$, $q = 1.1$ és $h^{-1}(\rho_{t-1}) = \rho_{t-1}^3$ mellett



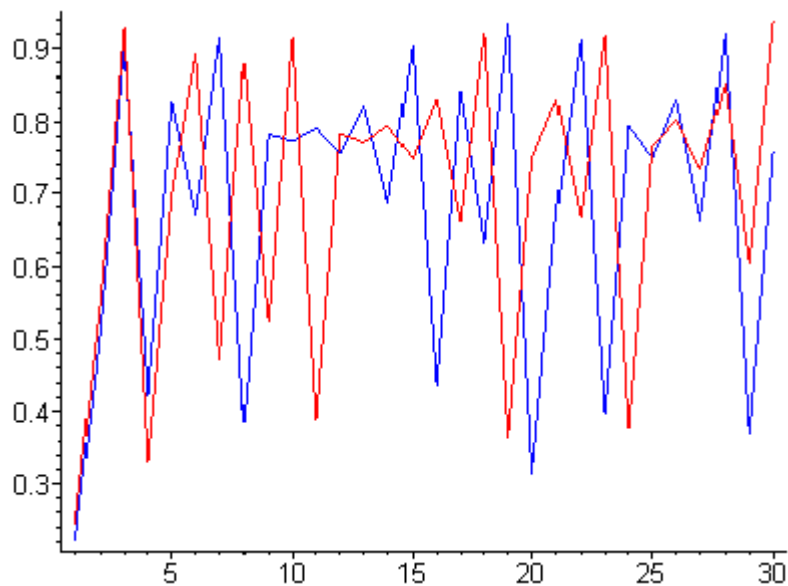
2. ábra. A (15)-tel generált idősor ergodikus viselkedése



3. ábra. A (15) idősorának grafikonja $\rho_{01} = 0.1$ kezdeti érték mellett



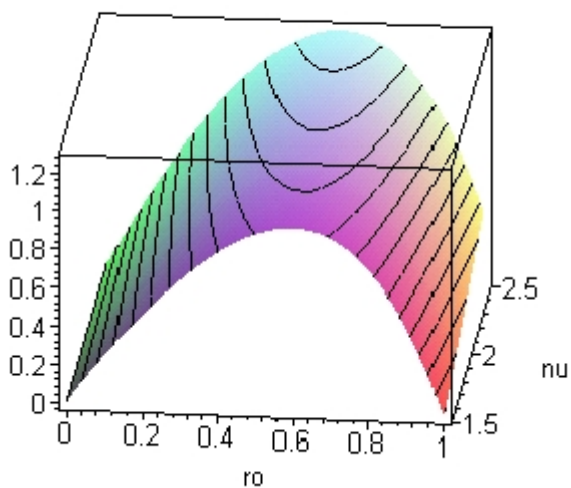
4. ábra. A (15) idősorának grafikonja $\rho_{02} = 0.09$ kezdeti érték mellett



5. ábra. Szenzitív függőség a kezdeti feltételektől

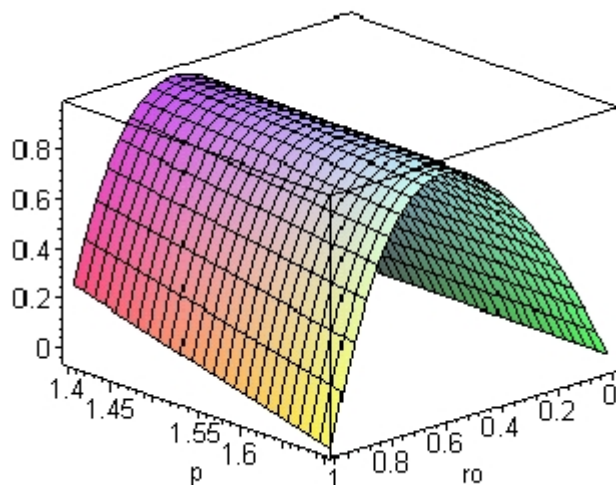
A 3. és 4. ábrák mutatják rendre a (15) idősorainak grafikáit a $\rho_{01} = 0.1$ és $\rho_{02} = 0.09$ kezdeti értékek mellett.

Az 5. ábra a kezdeti feltételektől való érzékenységi függőséget mutatja, amely az *intrinsic* gazdasági növekedési ütemek aperiodikus mozgásait eredményezi.

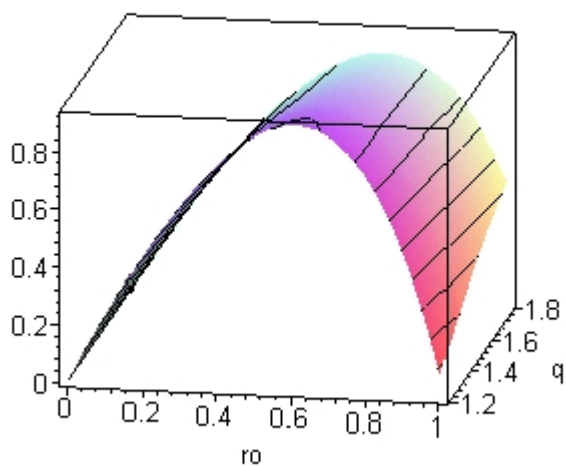


6. ábra. (15) grafikus felszíne $1.5 < \mu < 2$ intervallumban

A 6., 7. és a 8. ábrák mutatják, hogy megengedve a paraméterértékek változását a megfelelő intervallumokban, a fixpontok instabilitása nem változik, vagyis a megfelelő paraméter bármely rögzített értéke mellett a „grafikus felszín” metszetének nyomvonala olyan parabolát ad, amelynek fixpontjába húzott érintőjének meredeksége abszolút értékben nagyobb, mint egy.



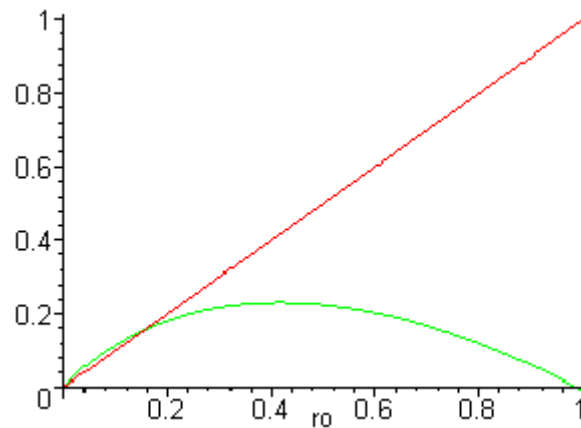
7. ábra. (15) grafikus felszíne $1.4 < p < 1.7$ mellett



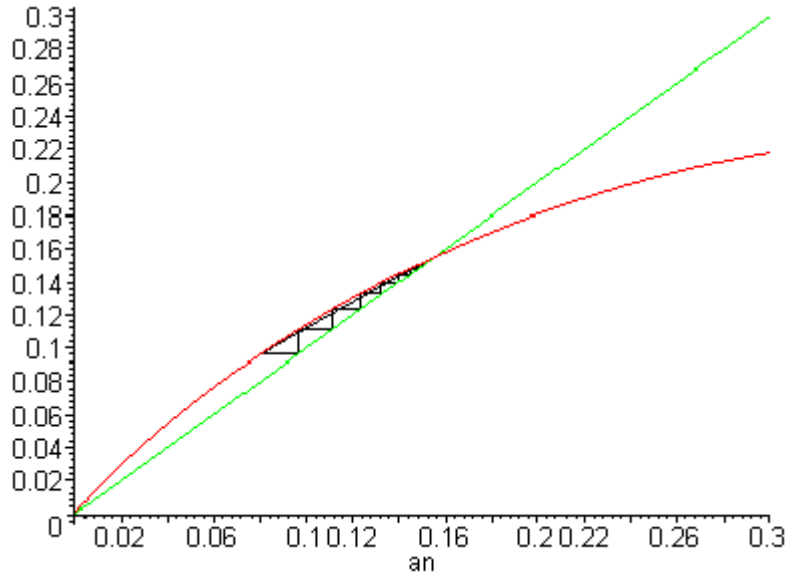
8. ábra. (15) grafikus felszíne $1.1 < q < 1.8$ mellett

Azonban, ha a paraméterek értékeit a (15)-ben csak a fenti intervallumokban változtatjuk meg, mépedig a következőképpen: $\mu = 1.1$; $\nu = 1.6$; $p = 1.65$; $q = 1.2$, míg az élettartam-eloszlást $h^{-1}(\rho_{t-1}) = \rho_{t-1}^{1/5}$ -nek vesszük, akkor a (15) grafikonja a 9. ábrán láthatóan alakul.

Az 10. ábra világosan mutatja, hogy a fixpont ebben az esetben stabil. A fixpont ezen kvalitatív tulajdonsága, mivel a paraméterek a fenti intervallumokban változtak, az élettartam-eloszlás változásának a következménye, azaz, a fogyasztási függvény megváltozásának. Itt érdemes kihangsúlyozni a fentiekben már említett *Lucas kritika* egyféle igazolásaként, hogy vajon a (15)-ből kapott intrinsic gazdasági növekedési ütemek folyamatai vagy trajektóriái szétszóródnak-e egy turbulens káoszba vagy egy nagyméretű rendhez vezetnek, elsősorban a megfelelő fogyasztási függvény típusától függ, és csak másodsorban bizonyos piaci értékelő paraméterektől.



9. ábra. (15) grafikonja $\mu = 1.1$, $\nu = 1.5$, $p = 5/3$, $q = 1.1$ és $h^{-1}(\rho_{t-1}) = \rho_{t-1}^{1/5}$ mellett



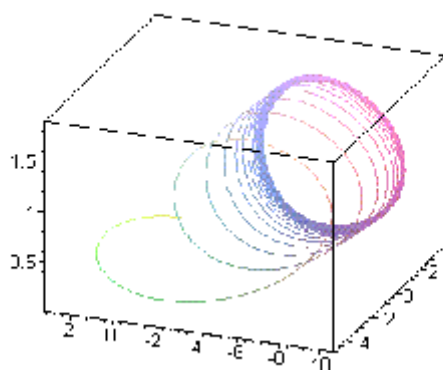
10. ábra. A (15) stabil fixpontja

A (26) nemlineáris dinamikus rendszer szimulációs vizsgálatához először a paramétereket és a kezdeti feltételeket adjuk meg, mégpedig a következőképpen.

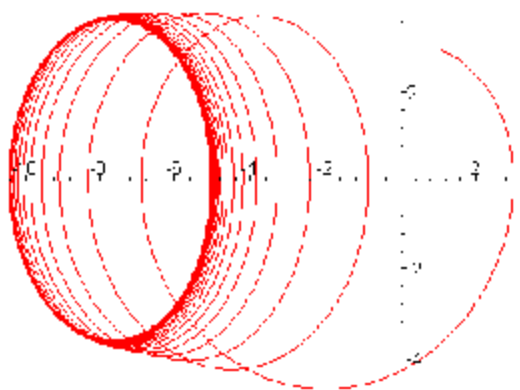
```
>a := 0.429; b := 0.0833; c := 6.0; d := 2.0; γ := 0.5; μ := 1.0; s := 0.1;
>ODEs := diff(x(t),t) = γ * b * x(t) - γ * y(t) - γ * c * d * z(t),
diff(y(t),t) = (1 - a) * x(t), diff(z(t),t) = s + μ * z(t) * (x(t) - d);
>initvals := x(0) = 3.0, y(0) = 1.0, z(0) = 0.05;
>result := dsolve({ODEs,initvals}, {x(t),y(t),z(t)},
type = numeric, method = rkf45, output = listprocedure);
>xx := rhs(result[2]); xy := rhs(result[3]); xz := rhs(result[4])
with(plots):with(plottools):
spacecurve(['xx(t)', 'xy(t)', 'xz(t)'], t = 0..300, numpoints = 1000);
```

A rendszer fázisportréja egy határciklus, és így mindhárom változó mozgása periodikus, amint a 11. ábrán is látható.

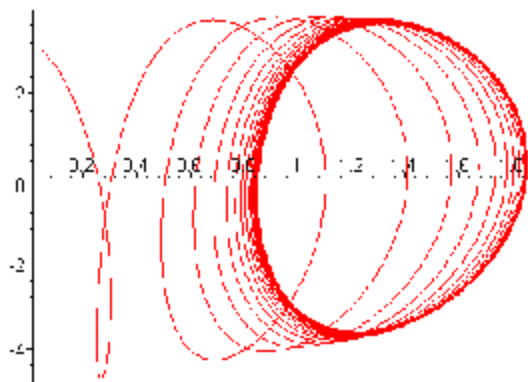
A 12., 13. és a 14. ábrák a 3D határciklus projekcióit mutatják rendre az xy , a xz és a zy síkon. A 15., 16. és a 17. ábrák az x , y és z állapotváltozók idő szerinti dinamikáját mutatják.



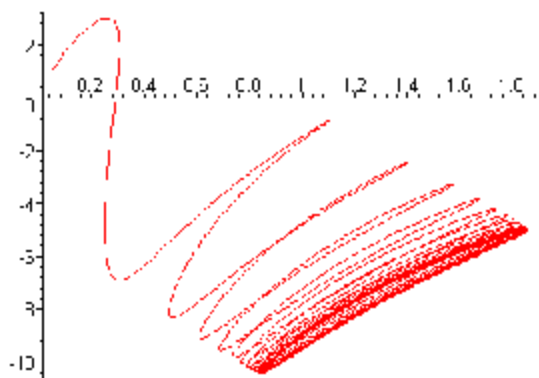
11. ábra. A (26) nemlineáris dinamikus rendszer határciklus megoldása



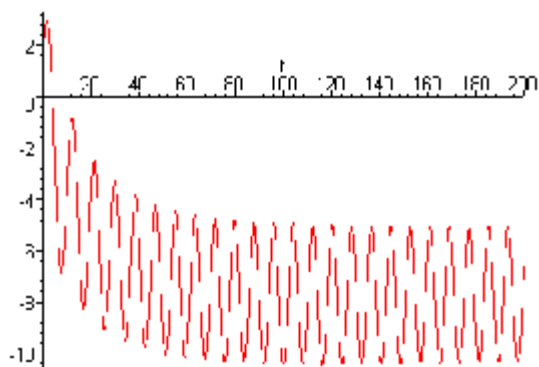
12. ábra. $\text{Plot}(['xy(t)', 'xx(t)', t=0..300])$: 3D határciklus



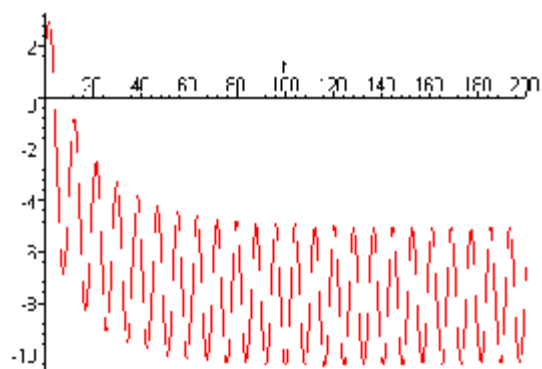
13. ábra. $\text{Plot}(['xz(t)', 'xx(t)', t=0..300])$: 3D határciklus



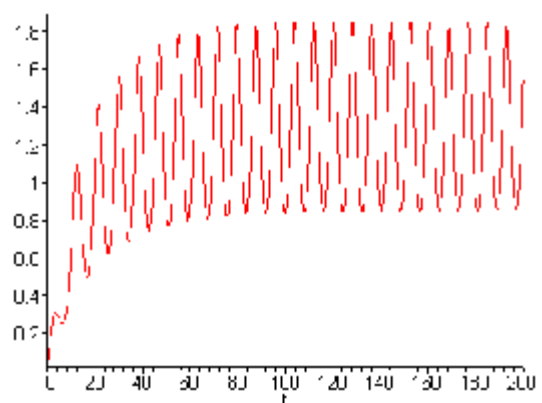
14. ábra. $\text{Plot}(['xz(t)', 'xy(t)', t=0..300])$: 3D határciklus



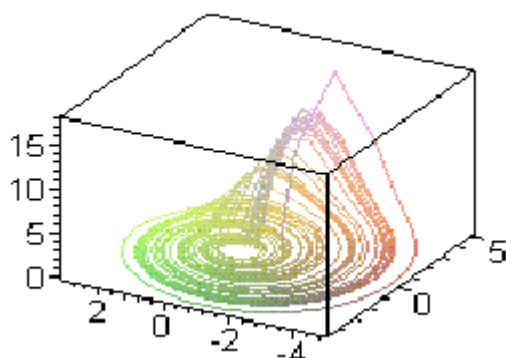
15. ábra. Az x állapotváltozó idő szerinti dinamikája (Plot ('xx(t)', t=0..200))



16. ábra. Az y állapotváltozó idő szerinti dinamikája (Plot ('xy(t)', t=0..200))



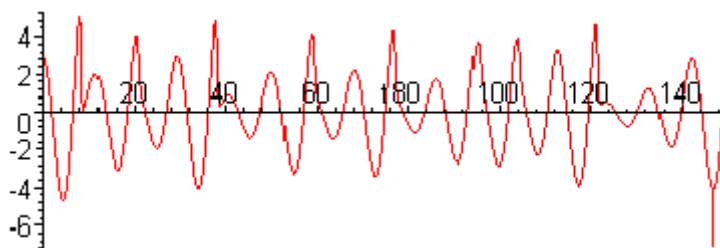
17. ábra. A z állapotváltozó idő szerinti dinamikája (Plot ('xz(t)', t=0..200))

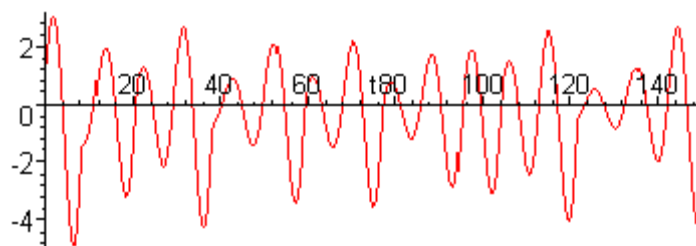
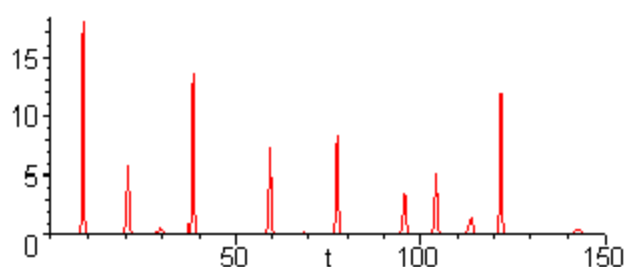


18. ábra. Rössler szalag

Megváltoztatva a modell kalibrálását a lentiek szerint, mindegyik változó irregulárisan mozog egy világos szenzitív függőséggel a kezdeti feltételekre, ami végül is egy Rössler szalagot eredményez, amint a 18. ábrán látható is. Az egyes állapotváltozó dinamikája az 19., 20. és a 21. ábrákon látható.

```
>a := 0.429; b := 0.25; c := 1.0; d := 2.8;  $\gamma$  := 0.5;  $\mu$  := 0.8; s := 0.1;
>ODEs := diff(x(t),t) =  $\gamma$ *b*x(t) -  $\gamma$ *y(t) - c*d*z(t),
      diff(y(t),t) = (1-a)*x(t), diff(z(t),t) = s + z(t)*(x(t)-d);
>initvals := x(0) = 3.0, y(0) = 1.0, z(0) = 0.05;
>result := dsolve({ODEs,initvals}, {x(t),y(t),z(t)},
      type = numeric, method = rkf45, output = listprocedure);
>xx := rhs(result[2]); xy := rhs(result[3]); xz := rhs(result[4])
```

19. ábra. Az x állapotváltozó dinamikája (Plot('xx(t)', t=0..150))

20. ábra. Az y állapotváltozó dinamikája (Plot('xy(t)', t=0..150))21. ábra. A z állapotváltozó dinamikája (Plot('xz(t)', t=0..150))

5 Következtetések és további propozíciók

Láttuk, hogy a klasszikus Harrod növekedési modell a nemlineáris Leontief típusú reprezentatív ügynök megközelítésben és konstruktív mikromegalapozással többé nem ad csak tartós állapotú növekedési pályát. Az *intrinsic* gazdasági növekedési ütemek folyamatai és trajektóriái szétszóródnak egy turbulens káoszba vagy egy nagyméretű rendhez vezetnek attól függően, hogy milyen interakció van az instabil akcelerator és a stabilizáló multiplikátor között. Ez az interakció viszont a piaci értékelésektől és a mikromegalapozástól függ, nevezetesen, a fogyasztási adó nagyságától és a beruházások tőzsdei értékelésétől. Ez a vizsgálat választ adott Harrod *kétszarv problémájára* is. Megmutattuk, hogy a növekedés és a ciklus, akár periodikus, akár aperiodikus, szimultán módon sziámi ikreként jelenik meg. Érdekes itt hangsúlyozni, hogy eredményünk nem mond ellent a tartós növekedésnek, csak a sima, egyenletes növekedést nem teszi lehetővé.

Hasonlóan, a nyílt Harrod-Leontief egyszektoros gazdaságban megfogalmazott Rössler rendszer dinamikája a valuta piaci értékelésétől függ, és egy komplex vagy kaotikus dinamika is előállhat. Az alap kutatás szintjén maradván, eredményeinknek egy további kiterjesztése lehet, továbbra is a Harrod-Leontief modell keretében maradván, a Rössler rendszer újabb nemlineárisálása a tőke és a ráfordítási együtthatók tekintetében. Érdekes lehet itt a

pénzpiac bevezetése is a modellünkbe változó kamatláb és árszínvonal mellett, és így vizsgálni a kiterjesztett rendszer dinamikus viselkedését. Ezek a vizsgálatok azonban már túlhaladnak a cikk eredeti célkitűzésein.

Irodalom

1. Aftalion, A. (1909): 'La Réalité des surproductions générales: Essai d'une théorie des crises générales et périodiques', *Revue d'économie politique*.
2. Bickerdike, C. F. (1914): 'A Non-Monetary Cause of Fluctuations in Employment', *Economic Journal*.
3. Becker, R. and E. Burmeister (ed.) (1991): *Growth Theory*, Edward Elgar Publ. Co.
4. Brock, W. A. and A. G. Malliaris (1989): *Differential Equations, Stability and Chaos in Dynamic Economics*, Amsterdam, North-Holland Publ. Co.
5. Bródy, A. (1979): *Proportions, Prices and Planning*. Amsterdam: North-Holland Publ. Co.
6. Chiarella, C. (1990): *The Elements of Nonlinear Theory of Economic Dynamics*, Berlin: Springer Verlag.
7. Chiarella, C. and P. Flaschel (2000): *The Dynamics of Keynesian Monetary Growth*, Cambridge, Cambridge University Press.
8. Cagan, P. (1956): The monetary dynamics of hyperinflation, in M. Friedman (ed.) *Studies in the Quantity Theory of Money*, Chicago, University of Chicago Press.
9. Clark, J. M. (1917): 'Business Acceleration and the Law of Demand', *Journal of Political Economy*.
10. Day, R. H. (1994): *Complex Economic Dynamics*. Vol. I. Cambridge, Massachusetts, London: The MIT Press.
11. Day, R. H., Chen, P. (eds.) (1993): *Nonlinear Dynamics and Evolutionary Economics*, New York, Oxford: Oxford University Press.
12. Eisner, R. and R. H. Strotz (1963) 'Determinants of Business Investment', in *Impacts of Monetary Policy*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
13. Friedman, M. (1957): *A Theory of the Consumption Function*, Princeton, Princeton University Press for National Bureau of Economic Research, Princeton.
14. Gale, D. (1963): 'A note on global instability of competitive equilibrium', *Naval Research Logistic Quarterly*, No. 10, pp. 81–87.
15. Goodwin, R. M. (1990): *Chaotic Economic Dynamics*. Oxford: Clarendon Press.
16. Granger, C. J. (1969): 'Investigating Causal Relationships by Econometrics Models and Cross Spectral Methods', *Econometrica*, pp. 425–435.
17. Guckenheimer, J. and P. Holmes (1991): *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, New York, Springer Verlag
18. Haavelmo, T. (1960): *A Study in the Theory of Investment*. Chicago: University of Chicago Press.
19. Hadjimichalakis, M. G. (1971): 'Equilibrium and Disequilibrium Growth with Money: The Tobin Models', *Review of Economic Studies*, pp. 457–479.

20. Hahn, H. F. (1985): *Money, growth and stability*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts
21. Harris, R. (1997): 'Stock Markets and Development', *European Economic Review*, pp. 139–146.
22. Harrod, R. F. (1936): *The Trade Cycle: An Essay*, Clarendon Press, Oxford.
23. Harrod, R. F. (1939): 'An essay in dynamic theory', *Economic Journal*, vol. 49. pp. 13–33.
24. Hawkins, D. (1952): 'Some conditions of macroeconomic stability', *Econometrica*, 16, pp. 309–322.
25. Hayashi, F. (1982): 'Tobin's Marginal q and Average q : A neoclassical interpretation', *Econometrica*, Vol. 50, pp. 213–224.
26. Keynes, J. M. (1936): *The General Theory of Employment, Interest and Money*. 1964, reprint, New York: Harcourt Brace.
27. Kornai, J. (1972): *Rush versus Harmonic Growth*. Amsterdam: North-Holland Publ. Co.
28. Lahiri, S. (1976): 'Input-output analysis with scale-dependent coefficients', *Econometrica*, 44, pp. 947–961.
29. Li, T., Yorke, J. (1975): 'Period 3 implies chaos', *American Mathematical Monthly*, 82, pp. 985–992.
30. Lorenz, E. N. (1963): 'Deterministic non-period flows', *Journal of Atmospheric Sciences*, 20, pp. 130–141.
31. Lucas, R. E., Jr. (1967): 'Optimal Investment Policy and the Flexible Accelerator', *International Economic Review*, Vol. 8.
32. Lucas, R. E., Jr. (1976): 'Economic policy evaluation: a critique'. in K. Brunner and A. H. Meltzer, eds., *The Phillips Curve and the Labor market*, Amsterdam, New York and Oxford: North-Holland Publ. Co.
33. Matsuyama, K. (1999) 'Growing Through Cycles', *Econometrica*, 67, pp. 335–347.
34. May, R. (1976): 'Simple mathematical models with very complicated dynamic', *Nature*, 261, pp. 459–467.
35. McKenzie, L. W. (1976): Turnpike Theory, *Econometrica*, 31, pp. 841–865.
36. Metzler, L. A. (1941): The Nature and Stability of Inventory Cycles, *Review of Economic Studies*, 23, pp. 113–129.
37. Móczár, J. (1997): 'Non-uniqueness through duality in the von Neumann growth models' *Metroeconomica*, 48, pp. 280–299.
38. Móczár, J. (1997): 'Growth paths developed by international trade in Leontief-type dynamic models', *Japan and the World Economy*, pp. 17–36.
39. Móczár, J. (1995): 'Reducible von Neumann models and uniqueness', *Metroeconomica*, 46, pp. 1–15.
40. Móczár J. (1991): 'Irreducible balanced and unbalanced growth paths (Business cycles and structural changes)', *Structural Change and Economic Dynamics*, 2, pp. 159–176.
41. Móczár, J. and Tsukui, J. (1992): 'Balanced and unbalanced growth paths in a decomposable economy: contributions to the theory of multiple turnpikes' *Economic Systems Research*, 3, pp. 211–222.
42. Morishima, M. (1964): *Equilibrium, Stability and Growth*, Oxford, Oxford University Press.

43. Mukerji, V. (1964): 'Output and investment for exponential growth in consumption – the general solution and some comments', *The Review of Economic Studies*, 31, pp. 77–82.
44. Ramsey, F. P. (1928): A mathematical theory of saving, *Economic Journal*, 38, pp. 543–559.
45. Rose, H. (1969): 'Real and Monetary Factors in the Business cycle', *Journal of Money, Credit and Banking*, Vol. 1, No. 2. pp. 138–152.
46. Rössler, O. E. (1976): 'Chemical turbulence: chaos in a small reaction-diffusion system', *Z. Naturforsch*, 316, pp. 1168–72.
47. Scarf, H. (1960): 'Some examples of global instability of the competitive equilibrium', *International Economic Review*, No. 1, pp. 57–72.
48. Schumpeter, J. A. (1939): *Business Cycles*, McGraw-Hill Publ. Co. New York.
49. Sidrauski, M. (1967): 'Inflation of Economic Growth', *Journal of Political Economy*, pp. 796–810.
50. Sen, A. (ed.) (1970): *Growth Economics*, Penguin Books Ltd.
51. Stein, J. L. (1966) 'Money and Capacity Growth', *Journal of Political Economy*, pp. 451–465.
52. Summers, L. H. (1981): 'Taxation and corporate investment: A q-theory approach', *Brookings papers an Economic Activity*, pp. 47–127.
53. Taylor, J. B. and M. Woodford (ed.) (1999): *Handbook of Macroeconomics*, Amsterdam, North-Holland Publ. Co.
54. Tobin, J. (1965): Money and economic growth, *Econometrica*, 33, pp. 671–684.
55. Tobin, J. (1969): 'A general equilibrium approach to monetary theory', *Journal of Money, Credit and Banking*, pp. 15–29.
56. Tsukui, J. (1961): On a theorem of relative stability, *International Economic Review*, Vol. 2. pp. 229–230.
57. Tsukui, J. and Y. Murakami (1979): *Turnpike optimality in input-output systems* (Theory and application for planning), North-Holland, Amsterdam.
58. Uzawa, H. (1961): On a Two-Sector Model of Economic Growth, *Review of Economic Studies*, 29, pp. 40–47.
59. Uzawa, H. (1969): 'Time Preference and the Penrose Effect in a Two-Class Model of Economic Growth', *Journal of Political Economy*, Vol. 77, pp. 628–652.

NONLINEAR DYNAMICS IN CLASSICAL ECONOMIC GROWTH MODELS

In this paper the classical Harrodian growth model is transformed into a representative agent model by its nonlinear extensions and the Keynesian and Schumpeterian traditions. For the proof of the celebrated Lucas critique it is shown that the trajectories of intrinsic economic growth rates either are scattered into a turbulent chaos or lead to a large scale order. It depends on the type of the appropriate consumption function, and the market values of some parameters are playing only secondary role. Another surprising result is empirical: the international trade sufficit may generate strange attractors under some exchange rate values.

MAGÁNNYUGDÍJ-JÁRADÉKOK KÖZÖTTI VÁLASZTÁS¹

ÁGOSTON KOLOS CSABA
Budapesti Corvinus Egyetem

Ebben a cikkben a magánnyugdíj-járadékok közötti választást vizsgálom. Arra vagyok kíváncsi, hogy a racionális döntéshozó hogyan választ a lehetséges járadékokból. A döntéshozó a várható hasznosságát maximalizálja. A cikkben megvizsgálom azt az esetet is, ha a döntéshozó számára fontos, hogy gondoskodjék az utódairól, és megvizsgálom a házaspárok optimális döntését is. Felhívom a figyelmet, hogy a nemek közötti differenciálás tilalmának az lehet a következménye, hogy a döntéshozók olyan járadékokat választanak, amely a szolgáltatónak összességében veszteséget okoz. Bemutatom, hogy a halasztott járadékkal kombinált ütemezett pénzkivonás a vizsgált környezetben nem rosszabb, mint a többi lehetőség, a döntéshozó viszont ebben az esetben a befektetési lehetőségeket maga választhatja meg.

1 Bevezetés

A gazdaság szereplői fogyasztási döntésük meghozatalánál több időszak fogyasztását együttesen veszik figyelembe. Meglévő tőkájüket (és egyéb jövedelmüket) időben elosztva fogyasztják el úgy, hogy ez a fogyasztás mégis optimális legyen. A fogyasztás időbeli optimalizálásának gondolata már Samuelson híres [9] cikkében is jelen volt. Ebben a cikkben, és a cikkből kifejlődő együttélő nemzedékek modelljeinél jellemzően az emberi élet vége nem bizonytalan. Yaari [12] és Fischer [4] úttörő munkát végzett a fogyasztás időbeli tervezésére bizonytalan élet esetén. Szintén ők voltak azok, akik az életbiztosítások közgazdasági megalapozását elvégezték. Életjáradékok vizsgálatát végezte Kotlikoff és Spivak [5], akik a családon belüli kockázatmegosztás lehetőségét tanulmányozták. Milevski [6] azt vizsgálta, hogy egy optimális döntéshozónak mikor érdemes felhalmozott tőkáját járadékra váltania. Mitchell [8] és szerzőtársai az USA piacán fellelhető járadékokat értékelték. Magyarországon Simonovits több cikk keretében is vizsgálta hasznosságmaximalizáló fogyasztók nyugdíjjal kapcsolatos döntéseit (lásd például [10]).

A hazai magánnyugdíjpénztári rendszert több cikk is elemzi (például [11,7,1]). Banyár [2] a nemek közötti differenciálást tilalmát vizsgálja.

2 Az életjáradékok közgazdasági megalapozása

A téma részletes ismertetése előtt szeretném pár mondatban összefoglalni az életjáradék közgazdasági megalapozását.

¹Beérkezett: 2007. november 14. E-mail: kolos.agoston@uni-corvinus.hu.

Biztosítás vásárlásakor a biztosított bizonytalan vagyoni helyzetben van. Ezt a bizonytalan vagyoni helyzetet hajlandó bizonyos biztosítási díjért elcserélni egy olyan helyzetre, ahol a bizonytalanság megszűnik, vagy jelentősen csökken. Életjáradék vásárlásánál első ránézésre a helyzet éppen ellentétes. A döntéshozó biztos vagyont hajlandó elcserélni bizonytalanra, ráadásul a járadék várható (jelen)értéke kisebb, mint az egyszeri díj. Ebben az esetben a döntéshozó problémája abból fakad, hogy az emberi élet vége bizonytalan, és a fogyasztását hozzá kell igazítani ehhez a bizonytalan élettartamhoz. A vizsgálatunk középpontjában egy nyugdíjazás előtt álló (62 éves) pénztártag szerepel, aki a magánnyugdíjpénztárban felgyülemlett tőkéjét szeretné átváltani járadékokra. A kérdés az ő számára úgy merül fel, hogy a lehetséges járadékok közül melyiket válassza. Ahhoz, hogy a lehetséges járadékok közül választani tudjon, a járadékokat rangsorolnia kell. Jelölje rendre $C_{62}, C_{63}, C_{64}, \dots, C_{99}$ a 62, 63, 64 ... 99 évesen kapott pénzösszegeket. Ekkor ennek a pénzárannak a hasznossága²:

$$U(C_{62}, C_{63}, C_{64}, \dots, C_{99}) = \sum_{t=62}^{99} P_t \frac{C_t^{1-\beta}}{1-\beta} \frac{1}{\gamma^t}, \quad (1)$$

ahol P_t azt a valószínűséget fejezi ki, hogy egy 62 éves ember megéli a t -edik életévét. Természetesen $P_{62} = 1$, és feltételezem, hogy $P_{100} = 0$, azaz 100 év az emberi élet végső határa³. A β paraméter a döntéshozó kockázatkerülését fejezi ki. Minél nagyobb a β érték, annál inkább kockázatkerülő a döntéshozó, azaz annál inkább szeretné, hogy a fogyasztásra használt pénzmenyiség időben állandó legyen, még azon az áron is, hogy összességében kevesebbet fogyaszt. Ha β értéke kicsi, akkor a döntéshozó kevésbé kockázatkerülő, a fogyasztásra használt pénzmenyiség időbeli változását elviseli, ha összességében elfogyasztható pénzmenyiség kompenzálja. A szélső eset a $\beta = 0$, ebben az esetben a döntéshozót csak a várhatóan elfogyasztható pénzmenyiség érdekli, időbeli eloszlása nem. A döntéshozó türelmetlenségét fejezi ki a γ érték. A fogyasztó bármilyen jószág elfogyasztását jobban értékeli a jelenben, mint bármilyen későbbi időpontban (minél nagyobb a γ paraméter értéke 1-nél, annál türelmetlenebb a döntéshozó).

2.1 A vizsgált döntéshozó

Az általam vizsgált döntéshozó nyugdíjazás előtt álló, 62 éves magyar állampolgár. A legkritikusabb kérdés a döntéshozó koréves halálozási valószínűségei.

²Az (1) képlet csak akkor áll fenn, ha feltételezzük, hogy a döntéshozónak az összes időskori bevétele csak a magánnyugdíj-járadékból származik. Ez természetesen nincs így, hiszen nyugdíjának döntő részét az állami újraelosztó rendszerből kapja. A nyugdíja mellett a döntéshozónak még saját megtakarítása is lehet. Az említett hiányosságok ellenére engedjék meg, hogy feltételezzem, amikor a döntéshozó a magánnyugdíjpénztári járadékok közül választ, az egyéb forrásból származó jövedelmét figyelmen kívül hagyja.

³Magyarországon a halandósági táblák a koréves halálozási valószínűséget 100 éves korig adják meg. Korábbi vizsgálatok azt mutatják, hogy az emberi élet végső határának növelése (ha az adott korév megélésének valószínűsége elenyésző) nem befolyásolja az eredményeket jelentősen (lásd például [8]).

A bemutatott modellben a nemek közötti differenciálás tilalmára koncentrálok, a többi tényezőt megpróbálom kiszűrni. Ezért feltételezem, hogy a halálozási valószínűségek, mind a döntéshozó, mind a járadékszolgáltató számára ismertek. A döntéshozó halálozási valószínűségeit a 2004-es halandósági tábla adja meg⁴, külön férfiakra és külön nőkre. Mivel halálozási valószínűségeket mind a járadékvásárló, mind a járadékszolgáltató ismeri (és a férfiakat és nőket meg is tudja különböztetni), nincs a modellben ebből fakadó antiszelekció.

A kockázatkerülés mértékét külföldi szerzők 1 és 2 között szokták meghatározni (lásd: [8,5]). A számításokat $\beta = 1,25$ és $\beta = 2$ értékekre mutatom be. A γ paraméter értékét 1-nek választom. Az általam bemutatott modelleknél ez csak egy újabb paraméter lenne, a fő mondanivalót nem változtatja meg, csak a konkrét értékeket téríti el.

A döntéshozó optimális viselkedésének meghatározásakor a kamatoktól eltekintek (azt feltételezem, hogy a magánnyugdíjpénztárak —vagy járadékszolgáltatók— pont akkora kamatot érnek el, hogy a kifizetések reálértéke megmaradjon).

A számításokat MS Excel programmal végeztem el, numerikusan.

Feltételezem, hogy a magánnyugdíjpénztári tagnak 5 millió forintja gyűlt össze, ezt az összeget szeretné járadékokra váltani⁵. Azért, hogy a hasznosságok kiszámításánál ne kelljen túlságosan kis számokkal dolgozni, ezért 1000 forintos egységekben dolgozok. Tehát a döntéshozónak 5000 egység fogyasztását kell szétosztania optimálisan⁶. Ahhoz, hogy forintértéket kapjunk, a közölt értékeket be kell szorozni 1000-rel.

2.2 Életjáradék nélküli optimalizáció

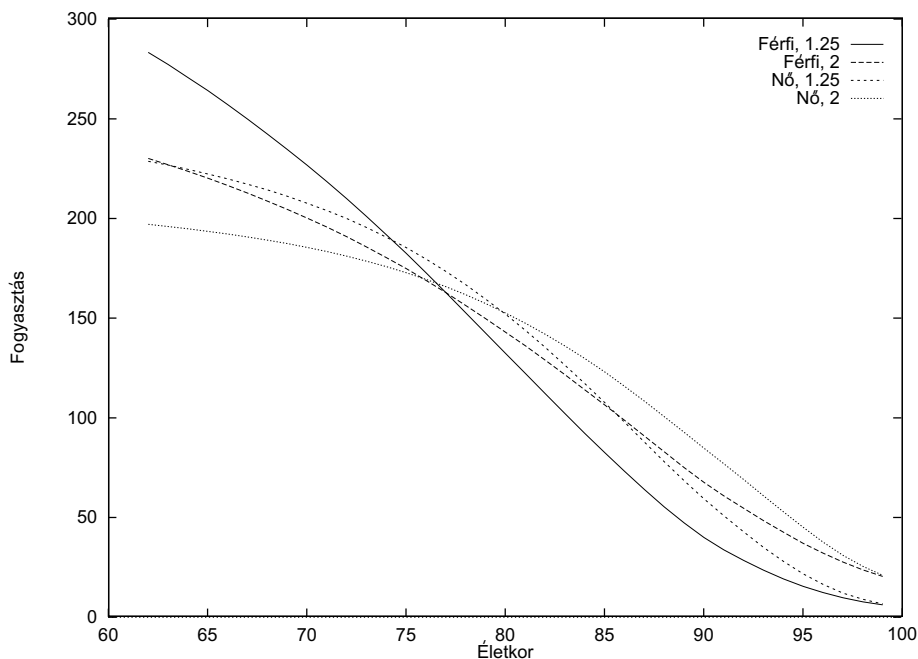
Amennyiben a piacon nem létezik járadékszolgáltató, a döntéshozónak úgy kell elosztania megtakarításait, hogy a nagyon kis valószínűséggel megélt éveire is maradjon pénz. Az 1. ábra mutatja a férfiakra és a nőkre az op-

⁴A halálozási valószínűségeket lehetne pontosabban modellezni, például projektált generációs halandósági táblák alkalmazásával, de több megfontolás is kérdésessé teszi ennek hatásosságát. Egyrészt a magánnyugdíjpénztári tőkék járadékokra való átváltása 2012 után lesz mérvadó, tehát nem a most 62 évesek halandóságát kell előre jelezni, ami a becslés bizonytalanságát növeli. Másrészt Magyarországon generációs halandósági tábla az öszenépessegre áll rendelkezésre, de kérdés, hogy ez mennyire fejezi ki majd a magánnyugdíjpénztári tagok valós elhalálását. Külföldi tapasztalatok szerint az önkéntes járadékosok halandósága jobb az országos átlagnál. Magánnyugdíjpénztárba csak a pályakezdőknek volt kötelező a belépés, idősebbek választhattak. Személyes véleményem, hogy az átmeneti időszakban a magánnyugdíjpénztár tagok halandósága jobb lesz, mint az országos átlag. Magyarországon járadékbiztosítást vásárlók halandóságáról nem áll rendelkezésre adat.

⁵További antiszelekciós probléma lehet, ha nem mindenkinek ugyanakkora a felgyülemlett tőkéje. Erős a gyanú, hogy a nagyobb tőkét összegyűjtött pénztártagok halandósága jobb az átlagnál. Ezt a szelekciós hatást is figyelmen kívül hagyom, hogy a nemek közötti differenciálás tilalmára tudjak koncentrálni.

⁶Természetesen itt is jelentkezik ún. jövedelemi hatás, tehát pl. tízszeres tőke esetén nem az lesz az optimális, ha minden évben a fogyasztásra szánt összeget beszorozzuk tízzel, hanem a fogyasztás szerkezete is megváltozhat. A szerző úgy ítéli meg, hogy a változás a vizsgált probléma szempontjából nem jelentős.

timális esetben elfogyasztandó pénzösszeget, az 1. táblázat pedig megadja a konkrét értéket néhány korévre⁷.



1. ábra. A döntéshozó választása ütemezett pénzkívét esetén

Életkor	Férfi		Nő	
	$\beta = 1,25$	$\beta = 2$	$\beta = 1,25$	$\beta = 2$
62	282,8	229,5	228,1	196,4
67	249,3	212,1	216,1	190,1
72	209,4	190,2	199,3	180,5
77	162,2	162,2	172,8	165,1
82	111,6	128,4	134,7	141,2
87	63,5	90,3	87,2	107,7
92	28,0	54,0	42,2	68,3
97	9,3	27,1	11,5	30,4
El nem használt tőke	1758,5	2078,8	1350,5	1608,5

1. táblázat. A döntéshozó választása ütemezett pénzkívét esetén

Az 1. ábrán és az 1. táblázatban látható, hogy a döntéshozó fogyasztása időben erősen csökkenő. Természetesen a fogyasztás annál jobban csökken, minél inkább kockázatkerülő (minél nagyobb a β paraméter értéke). Mivel a

⁷Az optimális döntés egy nemlineáris programozási feladat megoldása. A programozási feladatokat a függelék tartalmazza. Az 1. ábrához és az 1. táblázathoz az 1. programozási feladat tartozik.

döntéshozónak azokra az évekre is kell tartalékolnia, amit csak kis valószínűséggel él meg, ezért a felhalmozott tőkájének egy részét nem tudja elfogyasztani, ez számára elveszik⁸. Ezt mutatja a táblázat utolsó sora. Az 1. táblázatban az is látszik, hogy férfiak esetén a fogyasztás csökkenése erőteljesebb, amit a nagyobb halálozási valószínűségek okoznak.

Mivel a döntéshozó megtakarításának jelentős része elveszik, így hajlandó életjáradékot vásárolni egy járadékszolgáltatótól.

2.3 Életjáradék eseti optimalizáció

Amennyiben a piacon elérhető életjáradék, a fogyasztó jelentősen jobb helyzetbe kerül. A 2. táblázat azt mutatja, hogy 5000 egységnyi pénz életjáradékra váltásával elért hasznosság mekkora megtakarítást igényelne, ha a piacon nem lehetne életjáradékot vásárolni⁹. Természetesen az életjáradék szolgáltatása költségigényes, ezért különböző költségszinteken is megmutatjuk a szükséges tőke mértékét. Költségszinten azt értem, hogy a várható értékre (egyszeri nettó díjra) hány % költséget számol fel a szolgáltató (vállalkozói díjrész, vagy angolul loading). Itt most csak az azonnal induló, garanciaidő nélküli, ún. egyszerű életjáradék esetét vizsgálom.

Költség %	Férfi		Nő	
	$\beta = 1,25$	$\beta = 2$	$\beta = 1,25$	$\beta = 2$
0	8730	9503	7490	7952
5	8314	9050	7134	7574
10	7936	8640	6810	7229
15	7591	8264	6513	6915
20	7275	7919	6242	6627
30	6715	7310	5762	6117
40	6236	6788	5351	5680

2. táblázat. Járadékot helyettesítő egyösszegű kifizetések

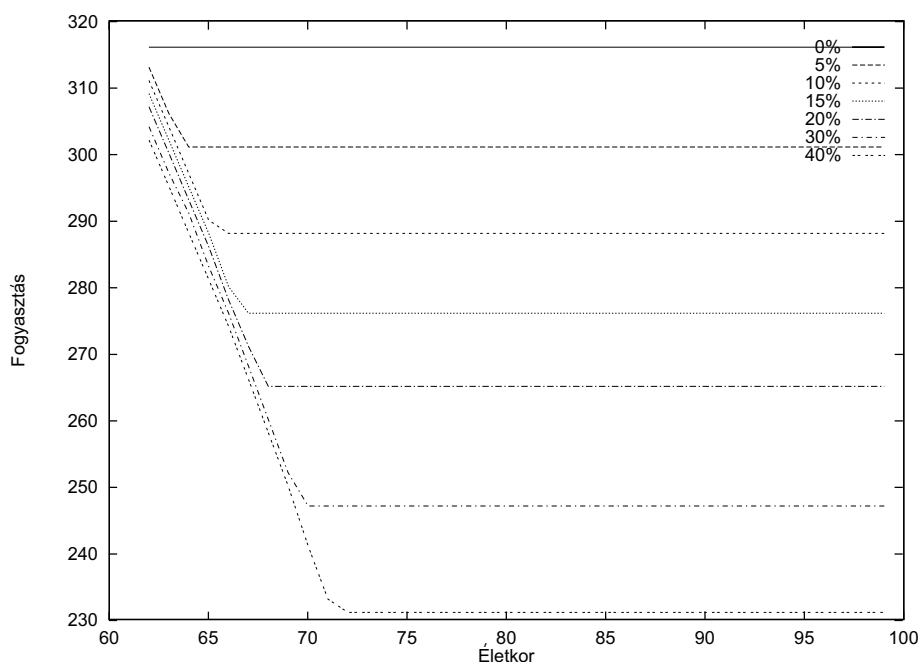
A 2. táblázatból láthatjuk, hogy férfiak számára sokkal többet ér az egyszerű életjáradék, mint a nők számára, ami logikus is, hiszen életjáradék nélkül az ő fogyasztásuk sokkal erősebben csökkent, mint a nőké. Azt is láthatjuk, hogy minél nagyobb a kockázatkerülés mértéke (nagyobb β érték), annál többet jelent a döntéshozó számára az életjáradék, így csak nagyobb összeggel lehet kárpótolni annak elvesztéséért.

Ha a járadékszolgáltató nem tud várható értéken életjáradékot szolgáltatni, akkor a döntéshozó nem a teljes megtakarítását váltja át járadékra (amennyiben lehetősége van erre). A 2. ábra azt mutatja, hogy milyen fogyasztási tervet választ magának egy $\beta = 1,25$ kockázatelutasítási paraméterrel rendelkező férfi különböző költségszintek esetén¹⁰ (az ütemezett pénzkivéteket nem terheli költség). A vízszintes vonalak mutatják az életjáradék iránti igényt, a csökkenő rész pedig a saját megtartást, ami pénzkivétnek értelmezhető. Természetesen ebben az esetben is elveszít bizonyos csekély mennyiséget a döntéshozó a vagyonából.

⁸Az örökösök figyelembevételét a 3.3. fejezetben mutatom be.

⁹A táblázat a 2. programozási feladat optimális megoldását mutatja.

¹⁰Az ábrához a 3. programozási feladat tartozik.



2. ábra. A döntéshozó választása, ha a járadékszolgáltató költséget számol fel

A táblázatból az is kiderül, hogy a döntéshozó számára az az optimális, ha halasztott életjáradékot vásárol, az első pár évben pedig a járadékra át nem váltott pénzt a járadék megindulásáig ütemezetten felveszi. Minél nagyobb költségekkel dolgozik a biztosító, annál tovább szeretne a döntéshozó magáról gondoskodni ütemezett pénzkivét formájában. Magánnyugdíj-járadék szolgáltatás jelenleg még nincs, ezért nem tudjuk, hogy milyen költségszinttel fognak dolgozni, de több szakértő is hangot ad félelmének, hogy a költségszint 'jelentős' lesz. A pénztártag számára viszont nem lehetséges az ütemezett pénzkivétellel kombinált halasztott életjáradék. A törvényalkotóknak érdemes lenne elgondolkodni ezen a lehetőségen is¹¹.

3 A magánnyugdíjpénztár-tagok optimalizációja

Ebben a fejezetben azt vizsgálom meg, hogy a magánnyugdíjpénztár-tagok a felhalmozott tőke járadékra történő átváltásakor hogy viselkednek. Vizsgálá-

¹¹Hasonló (bár nem teljesen megegyező) megoldást vizsgál Milevsky [6], aki a kanadai környezetben arra a megállapításra jut, hogy a döntéshozó nagy valószínűséggel jobban jár, ha nem rögtön induláskor váltja át pénzt járadékra.

taim során egy 62 éves férfi és egy 62 éves női pénztáratgot feltételezek¹², és különösen arra koncentrálok, hogy a nemek közötti differenciálás tilalma hogy hat a döntéshozók viselkedésére. A jelenlegi szabályozás nem egyértelmű (és további változások várhatók), ezért itt a fejezet elején leírom, hogy milyen szabályok vonatkoznak a döntéshozókra. A döntéshozónak a teljes felgyülemlett tőkéjét át kell váltani járadéokra (ütemezett pénzkívét nem megengedett). A döntéshozónak négyféle járadék áll rendelkezésre: egyszerű életjáradék, elől- és hátul garanciaidős életjáradék és több életre szóló életjáradék. Egyszerű életjáradék alatt azt értem, hogy amíg a biztosított életben van, minden év elején megkapja a járadéktagot, ami időben nem változik. N éves elől garanciaidős járadék esetén a biztosított minden év elején megkapja a járadéktagot, de ha az első N év eltelté előtt elhalálozik, akkor a járadéktagot megkapja az örökös. N éves hátul garanciaidős járadék esetén a biztosított minden év elején megkapja a járadéktagot, halála után N évig pedig az örökös is megkapja még a járadéktagot. Két életre szóló járadék alatt azt értem, hogy ameddig a két biztosított közül bármelyik is életben van, év elején megkapja (megkapják) a járadéktagot¹³. Nemek közötti differenciálás tilalma alatt azt értem, hogy a tőke járadéokra történő átváltásakor férfiak és nők egyforma nagyságú tőkére egyforma nagyságú járadékot kapnak. A kapott járadék a férfiak és nők összegyűjtött vagyonának arányától függ. Azt feltételezem, a férfiak összesített vagyona megegyezik a nők összegyűjtött vagyonával¹⁴. Legyen a_{62}^n egy 62 éves nő esetén az egyszeri nettó díj (a járadékkifizetés várható értéke), a_{62}^f pedig ugyanez férfi esetén. Ekkor ebből a típusú járadékból minden pénztáratg 1 egység tőkét

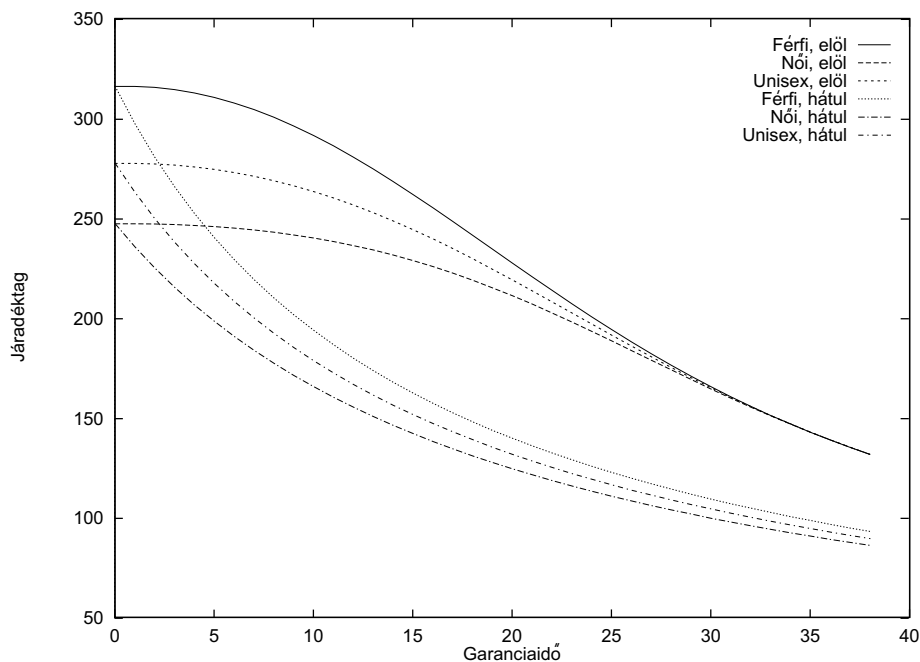
$$\frac{2}{a_{62}^n + a_{62}^f}$$

összegű járadékra tudja átváltani. A fenti definícióból az is látszik, hogy a férfiak és nők közötti redisztribúció függ a járadék típusától. Ha például valaki 38 éves elől garanciaidős járadékot kér (62-99 éves korig), akkor a nemek közötti differenciálás tilalma érvényét veszti, hiszen feltételezésünk szerint az emberi élet végső határa 100 év, így ez a járadék már nem tartalmaz életbiztosítási elemet, egyszerű annuitássá válik. A 3. ábra mutatja, hogy 5000 egység tőkét mekkora járadékra lehet átváltani férfi, női illetve 'unisex' halandósági tábla alapján. A 3. táblázat pár kiválasztott garancia-időre és életkorra mutatja a férfiak és nők közötti átcsoportosítás mértékét. Az átcsoportosítás mértéke alatt azt értem, hogy az 'unisex' halandósággal kiszámított járadék hány százaléka a férfi halandósággal számolt járadéknak.

¹²További problémákat vet fel, ha a férfi- és női pénztáratgok életkora nyugdíjba vonuláskor eltérő.

¹³A több életre szóló járadék esetén elvileg lehetséges, hogy más összeg illeti a párt, amíg mindkét tagja életben van, és más (kevesebb) összeg, ha már csak a pár egyik tagja van életben. Ezt az esetet nem vizsgálom.

¹⁴Női pénztáratgból több van, de a férfiak várhatóan nagyobb tőkét gyűjtenek össze.



3. ábra. Járadéktag különböző garanciaidők esetén

Garanciaidő (év)	Elöl garanciaidős járadék (%)	Hátul garanciaidős járadék (%)
0	87,8	87,8
5	88,4	90,4
10	90,3	92,1
15	93,2	93,3
20	96,3	94,2
25	98,5	94,9
30	99,6	95,4
35	100,0	95,8

3. táblázat. Átcsoportosítás mértéke különböző garanciaidők esetén

A 3. ábra és a 3. táblázat alapján jól látható, hogy férfiak számára az átcsoportosítás mértéke csökkenthető, ha növelik a garanciaidő hosszát.

Több életre szóló járadék esetén azt feltételezem, hogy egy 62 éves férfi és egy 62 éves nő a biztosított, így a nemek közötti differenciálás tilalma értelmetlenné válik¹⁵.

A cikk további részében azt feltételezem, hogy a tőke költség nélkül átváltható járadéokra. A pénztárgoknak ütemezett pénzkívét nem megengedett,

¹⁵Természetesen a gyakorlatban a férj és feleség életkora nem feltétlenül egyezik meg, ami további nehézségek forrása.

a járadékok közötti választást pedig minimálisan befolyásolja csak, ha mind-egyikre felszámítok költséget¹⁶.

3.1 Személyes optimalizáció

Ebben az alfejezetben azt vizsgálom, hogy amennyiben a pénztártagok csak a saját érdekeiket tekintik, milyen járadékot választanak. Nyilván ebben az esetben abban érdekeltek, hogy az éves járadéktag a lehető legnagyobb legyen. Nem érdeke senkinek sem garanciaidőt kérni, mert az éves járadéktag csökken (még férfiak esetén is, lásd 3. ábra), így mindenki egyszerű életjáradékot választ. A férfi pénztártagok a nemek közötti differenciálás tilalmát újabb költségnek élik meg, melynek mértéke 15% körüli. Ha ehhez hozzájön a járadékszolgáltató költsége, a 2. táblázat alapján valószínűsíthető, hogy még mindig jobban megéri neki a pénztár által folyósított életjáradék, mint ha saját magáról gondoskodna ütemezett pénzkivét formájában.

Van azonban egy elvi lehetőség, amire érdemes felhívni a figyelmet. A férfiak nagy garanciaidős járadékot kérnek, mondjuk 38 éveset, amiben már nincs életbiztosítási kockázat, annuitásnak tekinthető. A pénztártag felvesz hitelt, amelynek törlesztőrészleteit ebből az annuitásból fizeti. A felvett hitel összegét pedig olyan járadékszolgáltatónál váltja át járadékra, akire nem vonatkozik a nemek közötti differenciálás tilalma. Az hogy ez az elvi lehetőség gyakorlatilag megvalósítható-e, a költségektől függ. Ha minden egyes szerződést a 'piacon' kell egyénileg megkötni, akkor a költségek valószínűleg felemészítik a hasznot. Ha azonban valamelyik nyugdíjpénztár és háttérintézménye intézményes keretet biztosít ennek a megoldásnak, akkor gyakorlatilag értelmetlenné válik a nemek közötti differenciálás tilalma.

3.2 Ütemezett pénzkivétellel kombinált halasztott életjáradék

A jelenlegi szabályozásban nem szerepel, de ezen alfejezet erejéig tegyük fel, hogy a pénztártagok számára lehetőség van arra, hogy halasztott életjáradékot kérjenek, és az életjáradék elindulásáig ütemezetten vegyék fel a pénzüket. Azt a kikötést teszem, hogy a járadékra át nem váltott tőkét a járadék elindulásáig el kell fogyasztani¹⁷. Amennyiben az ütemezett pénzkivonás megegyezik a járadéktaggal, akkor ez egy elől garanciaidős járadéknak felel meg. Azért érdekes ezt az esetet vizsgálni, mert az ütemezett pénzkivételnek nem kell

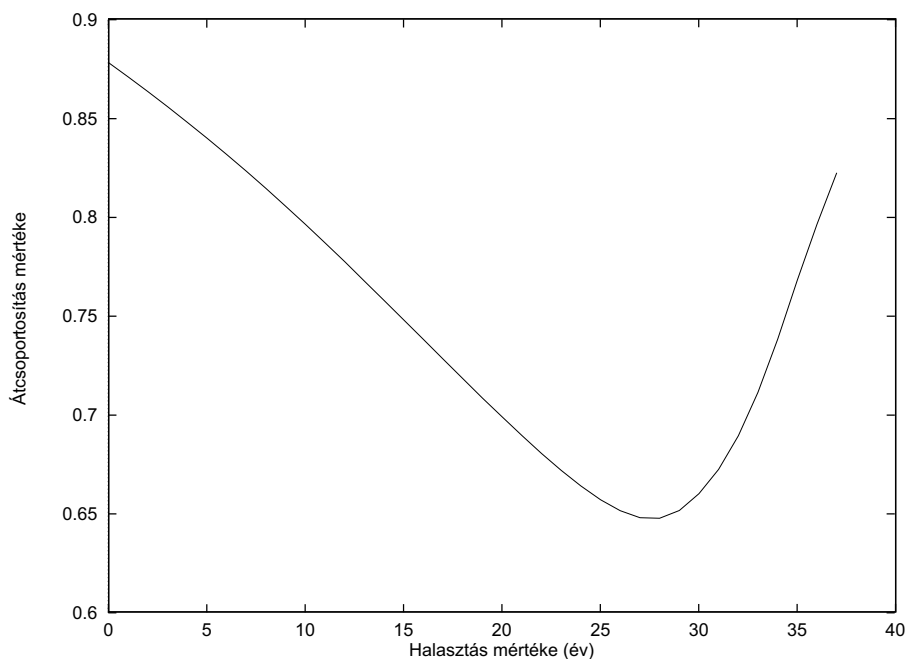
¹⁶Már többször hangsúlyoztam, hogy semmit nem tudunk arról, hogy a járadékszolgáltatók milyen költségsszinttel és milyen biztonsági pótlékkal fognak dolgozni. Minél nagyobb a garanciaidő mértéke, arányaiban annál kisebb életbiztosítási kockázatot vállal a járadékszolgáltató, ami alacsonyabb biztonsági pótléket indokolna. Érdekes lehet a modellt finomítani ezzel az észrevétellel.

¹⁷A 2.3 fejezetben láttuk, hogy a döntéshozó számára nem optimális, hogy valamelyik évben pénzkivét és járadéktag egyszerre szerepeljen. A mostani esetben viszont előfordulhat ez az eset, mert a 'költségsszint' változik a halasztás minden évére. Az általam modellezett példákban az átfedés mértéke elenyésző lenne.

feltétlenül megegyeznie a járadéktaggal, másik oldalról a költségszint eltér az ütemezett pénzkivételre és a járadékra.

Halasztott életjáradék esetén az átcsoportosítás mértékét a 4. ábra tartalmazza. Látható, hogy az átcsoportosítás mértéke a halasztás növelésével egy ideig növekszik (a görbe csökkenése az átcsoportosítás mértékének növekedését jelzi).

A számunkra érdekes kérdés, hogy a tőke mekkora részét váltják át járadékra a pénztártagok, és hány év halasztást kérnek. Első érdekes dolog, hogy a halasztás mértéke nem különbözik nemre és kockázatelutasítás mértékére vonatkozóan, általánosan 1 év¹⁸. Mivel ennél az elemzésnél a költségeknek lényegesebb szerepük van, mint a többinél, ezért elvégeztem úgy is az elemzést, hogy a járadékszolgáltató minden járadékra felszámol 10% költséget. A halasztás időtartama ebben az esetben általánosan 5 év. A pénztártagok választásának pontos értékét a 4. és az 5. táblázatok tartalmazzák¹⁹. Az 5. táblázatban a járadékszolgáltató hiánya azt jelenti, hogy mennyivel többet kell kiadnia a járadékbiztosításokra (várhatóan), mint amennyit egyszeri díjként megkapott, ami a 10% felszámított költségrész miatt nem válik tényleges veszteséggé.



4. ábra. Átcsoportosítás mértéke halasztott életjáradékok esetén

¹⁸Az, hogy a halasztás mértéke férfiakra és nőkre megegyezik, nem szükségszerűség.

¹⁹A táblázatokhoz a 4. programozási feladat tartozik.

	$\beta = 1,25$	$\beta = 2$
Saját megtartás (férfi)	307,8	296,0
Saját megtartás (nő)	252,9	261,8
Járadék (férfi)	275,5	276,2
Járadék (nő)	278,8	278,2
Járadékszolgáltató hiánya	6,8	4,3

4. táblázat. A döntéshozó választása 0% költség esetén

	$\beta = 1,25$	$\beta = 2$
Saját megtartás (férfi)	1449,6	1389,3
Saját megtartás (nő)	1218,3	1235,6
Járadék (férfi)	247,6	251,8
Járadék (nő)	256,1	255,0
Járadékszolgáltató hiánya	18,1	6,7

5. táblázat. A döntéshozó választása 10% költség esetén

A 4. és az 5. táblázatok azt mutatják, hogy a férfiak és nők számára az optimális értékek meglepően hasonlítanak, ezáltal a járadékszolgáltató hiánya is minimális. Kérdés, hogy mi eredményezi ezt a meglepő hasonlóságot? Nézzük először a férfiakat. Ők egyrészt szeretnék minél nagyobb összeget saját megtartásban tartani, mert a nemek közötti differenciálás tilalmát ők többletköltségeként élik meg, másrészt minél nagyobb halasztást igényelnek, annál nagyobb mértékű az átcsoportosítás mértéke is. A nők pont fordított helyzetben vannak. Nem szeretnék sok saját megtartást, mert akkor le kell mondaniuk a kedvező ‘költségekről’, de a halasztás időtartamát viszont szeretnék növelni, hogy nagyobb legyen az átcsoportosítás mértéke. Ezek a hatások meglepő egyensúlyban tartják a rendszert²⁰. A saját megtartás lehetősége azért is jó, mert a pénztárhoz tartozók részben védekezni tudnak a költségek elhatalmasodása ellen²¹.

3.3 Örökösök eseti optimalizáció

Az emberek felelősséget éreznek utódaik iránt, ezért igényeiket figyelembe veszik jövőbeli fogyasztásuk megtervezésénél is. Az örökösök figyelembevételének módja azonban nem egyértelmű. Feltételezem, hogy az örökösök nem igénylik, hogy a nekik juttatott összeg időben elosztva kerüljön hozzájuk, sőt azt is feltételezem, hogy a pénzügyi piacon kezelni tudják azt, hogy a számukra juttatott összeg időzítése eltér attól, amit igényelnének. Ezért az örökösöknek juttatott részt összegzem és csak a várható értékét veszem figyelembe. A döntéshozó hasznossága a saját és örökös hasznossága tekintetében additíven szeparálható, a kockázatelutasítás mértéke megegyezik az döntéshozóra és az örökösre, de van egy paraméter, ami befolyásolja a kettő

²⁰Milevsky [6] már említett cikkében nem halasztott életjáradékot ajánl, hanem hogy minden év végén dönt a pénztárhoz, hogy átváltja-e járadékra a pénzét, vagy még egy évet kivár. Amennyiben nem halasztott életjáradékot vesznek, hanem magasabb korban egy azonnal indulót, akkor az életkor növekedésével az átcsoportosítás mértéke nem hogy nem nő, hanem csökken, ami a leírt hatásokat felborítja

²¹A pénztárhoz tartozók az ellen természetesen nem tudnak védekezni, ha a pénztárak jelentős ‘vagyonkezelési’ díjat számítanak fel a pénzkivételekre, de ez a rendszer hibájának tekinthető.

közötti viszonyt. Képletben:

$$U(C_{62}, C_{63}, C_{64}, \dots, C_{95}, D) = \sum_{t=62}^{95} P_t \frac{C_t^{1-\beta}}{1-\beta} + \gamma \frac{D^{1-\beta}}{1-\beta}, \quad (2)$$

ahol C_t, P_t és β jelentése ugyanaz, mint eddig, D jelenti az örökösöknek juttatott tőke várható értékét, γ pedig azt mutatja meg, hogy az örökösöknek juttatott tőke mekkora súllyal szerepel egy évi elfogyasztott tőkéhez képest.

Az örökösök figyelembevétele kétféleképpen lehetséges. A járadéktagból bizonyos összeget félre lehet tenni a döntéshozó az örökösnek, és kérhet garanciaidőt is, amikor a járadéktagot az örökös kapja meg, ha a döntéshozó már nem él. Nézzük először a $\beta = 1,25$ kockázatelutasítási paraméterrel rendelkező döntéshozót²². Amennyiben az illető férfi, akkor 15 éves elől garanciaidős járadékot fog igényelni. Amíg életben van, megtartja saját magának a járadéktag teljes összegét, az örökösnek juttatott rész pedig a garanciaidő letelte előtti elhalálozásból származik. Az örökös így várhatóan 799 egység pénzhez jut (az 5000-ból). Amennyiben a döntéshozó nő, akkor nem kér garanciaidőt, hanem minden évben a járadéktagból 29 egységet az örökösnek szán, aki így várhatóan 597 egység pénzhez jut. A járadékszolgáltató problémája, hogy ebben az esetben a kifizetett járadék egyszeri díja 10274, tehát többet kell szolgáltatnia, mint amennyi ellenértéket kapott. Amennyiben a döntéshozó kockázatelutasítási paramétere $\beta = 2$, akkor a férfiak 12 év elől garanciaidős járadékot kérnek, így várhatóan 513 egység pénzt juttatnak az örökösöknek. A nők viszont megint a járadéktagot osztják meg, 22 egységet juttatnak az örökösöknek, aki így várhatóan 442 egység pénzre tesz szert. Ebben az esetben a járadékszolgáltató kifizetéseinek várható értéke 10183.

Az, hogy a járadékszolgáltató mennyivel fizet többet, csak a paramétereken múlik. Lehet, hogy a különbségek nem tűnnek jelentősnek, de a különbségek növelhetők, ha pl. azt feltételezzük, hogy a családokban az utódokról a férfiak gondoskodnak, ők kérnek garanciaidőt, a nők nem. Ez azt jelenti, hogy a γ paraméter nagyobb lehet, ami további veszteséget okoz a járadékszolgáltatóknak²³.

3.4 Házaspárok optimalizációja

Ebben a fejezetben azt vizsgálom, hogy amennyiben a házaspárok együtt hozzák meg döntésüket, milyen járadékokat választanak²⁴. A házaspár újra tudja osztani a kettőjük által kapott járadékot, természetesen csak akkor ha mind a ketten életben vannak.

²²A döntéshozó viselkedését az 5. programozási feladat optimális megoldása mutatja.

²³Valószínűsíthető, hogy a férfiak átlagosan nagyobb tőkével rendelkeznek (pl.: nem esnek ki a felhalmozáskor a gyermeknevelés éveit), ha ők garanciaidőt kérnek, akkor a járadéktag már ugyanakkora lehet a családban, ami egyfajta igazságosságként is felfogható.

²⁴A családon belüli kockázatmegosztás vizsgálta Kotlikoff és Spivak [5] is. Az ő esetükben a családtagok nem különböző típusú járadékokat osztottak el egymás között, hanem pont ellenkezőleg, a rendelkezésre álló pénzt a járadékpiac kikerülésével osztották el maguk között.

A házaspár az együttes hasznosságot maximalizálja azzal a feltétellel, hogy mind a ketten legalább akkora hasznot érjenek el, mint egyszemélyes életjáradék esetén (a házaspár esetén az örökösök figyelembe vételét mellőzöm).

Az optimalizáció vizsgálatakor még egy érdekes helyzet adódik. Amennyiben újraosztják a közösen kapott pénzt, vagy valamelyikük több életre szóló járadékot (is) kötött, az általa elfogyasztható összeg függ attól, hogy a másik életben van vagy sem. Tehát az adott évben kapott összeg sem biztos. Két megközelítést is vizsgálok. Az egyik esetben az adott évi kifizetésre is kockázatelutasítást tételezek fel, tehát a nem biztos összeg a várható értékénél kevesebbet ér a döntéshozónak.

$$U(C_{62}^k, \dots, C_{99}^k, C_{62}^e, \dots, C_{99}^e) = \sum_{t=62}^{99} P_t Q_t \frac{(C_t^k)^{1-\beta}}{1-\beta} + \sum_{t=62}^{99} P_t (1-Q_t) \frac{(C_t^e)^{1-\beta}}{1-\beta}, \quad (3)$$

ahol C_t^k jelöli a fogyasztást, ha a pár mindkét tagja életben van, C_t^e pedig abban az esetben, ha csak a döntéshozó van életben. P_t jelöli a döntéshozó halálzási valószínűségeit, Q_t pedig a házastársét.

A másik esetben azt feltételezem, hogy az éven belüli ingadozást a piacon ki tudják küszöbölni, csak az adott évben kapott pénz várható értéke számít:

$$U(C_{62}^k, \dots, C_{99}^k, C_{62}^e, \dots, C_{99}^e) = \sum_{t=62}^{99} P_t \frac{(Q_t C_t^k + (1-Q_t) C_t^e)^{1-\beta}}{1-\beta}. \quad (4)$$

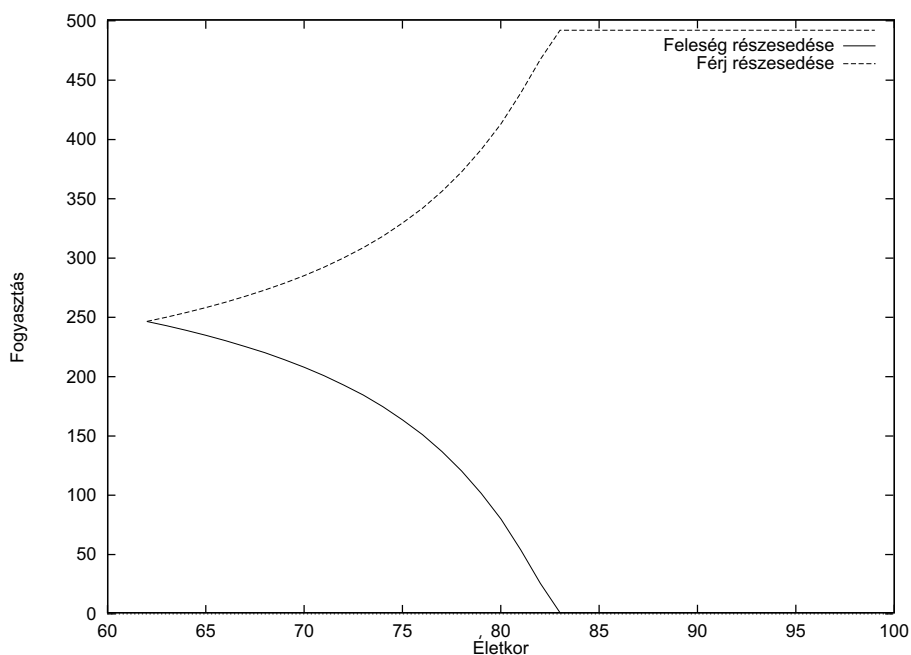
Könnyen belátható, hogy a házaspár nem fog garanciaidőt választani, hiszen ha mind a ketten elhaláloznak, akkor elveszik az összeg. Az egy és kétszemélyes járadékoknak fogják valamilyen kombinációját választani.

Nézzük először az éven belüli kockázatkerülés ((3) képlet), és a $\beta = 1, 25$ esetet²⁵. Ekkor a feleség egyszerű életjáradékot vásárol, a férj pedig, 3190 egység pénzért egyszerű életjáradékot, a maradékért pedig két életre szóló járadékot. A rendelkezésre álló összeget a 6. táblázat szerint osztják újra. A férj a megtakarítása egy részét két életre szóló járadékra költi, mivel ezt jobb áron megkapja, mint ha életjáradékot vásárolna. Cserébe a feleség felajánl a férjének a járadéktárgból 36,7 egységet, amíg mindketten élnek.

	$\beta = 1, 25$	$\beta = 2$
Járadékvásárlás		
Női életjáradék	277,3	277,3
Férfi életjáradék	176,9	216,0
Két életre szóló (férfi által vásárolt)	77,38	47,28
Újraelosztás		
Nő része, ha mindketten élnek	248,2	259,5
Nő része, ha már csak ő él	354,7	324,6
Férfi része, ha mindketten élnek	283,5	281,1
Férfi része, ha már csak ő él	254,3	263,3
Járadékszolgáltató vesztesége	221,3	135,2

6. táblázat. Házaspár választása

²⁵A döntéshozó viselkedését az 5. programozási feladat optimális megoldása adja.



5. ábra. Házastársak részesevése

Amennyiben a kockázatelutasítás mértéke $\beta = 2$, akkor hasonló mechanizmus játszódik le, de mivel mindkét tag kockázatelutasítóbb (jobban érzékenyek arra az ingadozásra, hogy a kapott összeg függ attól, hogy a házastárs életben van-e), ezért a két életre szóló járadék szerepe kisebb.

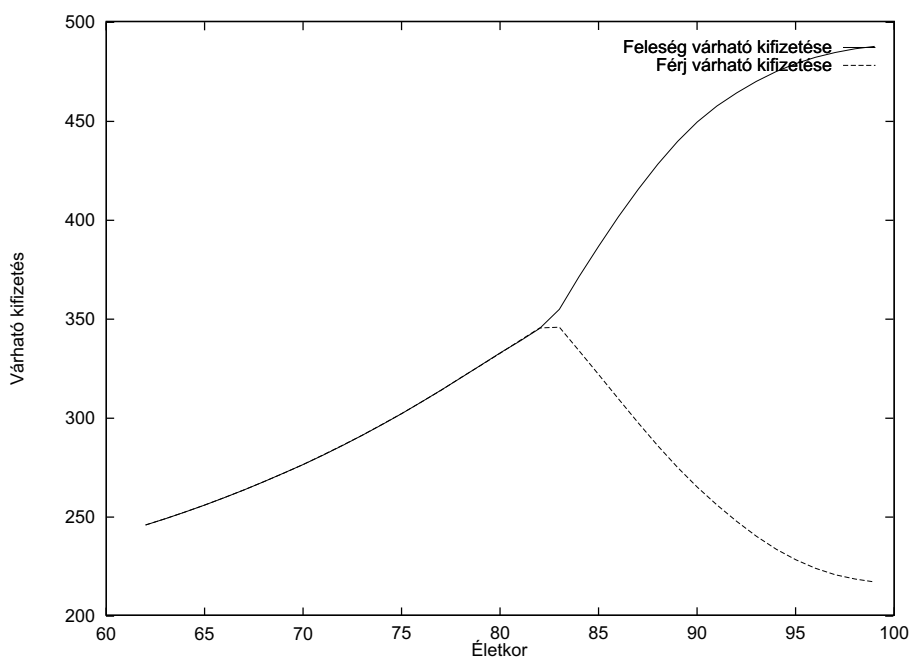
Mind a két esetben a férj hasznossága maradt változatlan, a feleség hasznossága javult egyedül. A járadékszolgáltatónak összességében vesztesége keletkezik, ennek pontos összegét mutatja a 6. táblázat utolsó sora.

Ha a döntéshozó az éven belüli kockázatra nem érzékeny (ezt a piacon semlegesíteni tudja), akkor a feleség a teljes tőkéjét életjáradékra váltja, a férj pedig teljes tőkéjét két életre szóló járadékra²⁶ (függetlenül a kockázatelutasítás mértékétől). Ekkor (ha mindketten életben vannak) évente 491,1 egységnyi pénzzel rendelkeznek. Ezt az összeget az 5. ábra szerint osztják el egymás között.

Az 5. ábrán első látásra furcsa eredmény szerepel. A feleség részesevése az életkorral rohamosan csökken, sőt 83 éves korra 0-vá válik. Ez azonban nem azt jelenti, hogy a feleség idős korára teljes ellátás nélkül maradna, hiszen ez csak az az eset, amikor mindketten életben vannak. Feltéve, hogy a feleség életben van, akkor nagy valószínűséggel az fog bekövetkezni, hogy már csak ő lesz életben, így a várható kifizetése megközelíti a 491,1 egységnyi kifizetést (ha csak a feleség van életben, megkapja a neki járó életjáradékot

²⁶A házaspár viselkedését a 7. programozási feladat adja meg.

és a két életre szóló járadékot is). Amennyiben csak a férj van életben, akkor őt csak a két életre szóló járadékból jut pénzhez, ezért 'kedveskedik' neki felesége nagyobb részesedéssel, ha mind a ketten életben vannak. A 6. ábra mutatja a házaspár vizsgált tagjának várható kifizetését, feltéve hogy megéri a vizsgált kort. A várható kifizetés azért tud a házaspár mindkét tagjára emelkedni, mert feltételes várható értéket számolunk. Ha figyelembe vesszük azt az eseményt is, hogy a pár mindkét tagja halott, és ebben az esetben 0 a kifizetés, akkor összességében nem emelkedik a várható kifizetés.



6. ábra. Házastársak várható kifizetése

A 6. ábrán az az érdekes, hogy a férj és a feleség várható kifizetése megegyezik addig, amíg ezt el tudják érni, és csak akkor válik el, amikor a feleség már nem tudja tovább kárpótolni férjét (amennyiben mindketten életben vannak, az ő részesedése 0). Ebben az esetben mind a feleség, mind a férj jobb hasznosságot ért el, mint ha egyedül vásárolt volna életjáradékot.

Ebben az esetben a biztosítót 611,4 egységnyi kár éri, ami a maximális mennyiség ebben a modellben.

4 Összefoglalás

A cikk során a magánnyugdíjpénztár-tagok döntéseit vizsgáltam. Mivel a szabályozás nem pontos és nem végleges, ezért egy olyan keretet igyekeztem

felállítani, ami szerintem a leginkább alkalmazkodik a jelenlegi szabályozáshoz. Ebben a keretben bemutattam, hogy örökösök figyelembe vételekor, vagy házaspárok együttes döntésének esetén olyan járadékválasztások történnek, ami a járadékszolgáltatónak összességében veszteséget okoz.

A bemutatott veszteség tovább nőhet, ha feltételezzük, hogy a férfiak és a nők nem ugyanabban az évben mennek nyugdíjba, például a nők fiatalabb korukban és egyszerű életjáradékot választanak, a férfiak pedig később és nagy garanciaidős járadékot vagy két személyre szóló járadékot választanak.

Összességében nem akartam a nemek közötti differenciálás ellen érvelni (hiszen nem tartom magam kompetensnek ebben a témakörben), csak arra szerettem volna felhívni a figyelmet, hogy egy rossz szabályozás jelentős bizonytalanságokat okoz a rendszerben, és a jelenleg látható körvonalak nem tekinthetők jónak.

Fontos hangsúlyozni, hogy ha a járadékszolgáltatónak nem megengedett a nemek szerinti differenciálás, akkor olyan járadékválasztások jöhetnek létre, ami a járadékszolgáltatónak összességében veszteséget okoz. Ennek az lehet a következménye, hogy a magánnyugdíjpénztár-tagok választási lehetőségét drasztikusan korlátozzák (lásd pl.: [3]).

Fontos hangsúlyozni azt is, hogy ebben a cikkben csak a nemek közötti differenciálás tilalmát vizsgáltam, ettől eltérő szelekció is elképzelhető.

5 Függelék

A programozási feladatok felírásánál a következő konvenciókkal élek. A t évesen fogyasztásra költött C_t pénzösszeget két összetevőre bontom: CA jelöli a valamilyen járadékszolgáltató által folyósított járadéktagot (a járadéktag időben állandó, ezért nincs t index), CB_t pedig az ütemezett pénzkivonást.

1. Programozási feladat

$$\sum_{t=62}^{99} P_t \frac{(CB_t)^{1-\beta}}{1-\beta} \rightarrow \max ,$$

feltéve, hogy:

$$\sum_{t=62}^{99} CB_t = 5000$$

$$CB_t \geq 0 .$$

2. Programozási feladat

Keressük azt a D pénzösszeget, amelyre a

$$\sum_{t=62}^{99} P_t \frac{(CB_t)^{1-\beta}}{1-\beta} \rightarrow \max ,$$

feltéve, hogy:

$$\sum_{t=62}^{99} CB_t = D$$

$$CB_t \geq 0$$

programozási feladat célfüggvényértéke megegyezik azzal a hasznossággal, amit a fogyasztó az 5000 egységnyi pénz α költség melletti járadékra váltásával tud elérni:

$$\sum_{t=62}^{99} P_t \frac{\left(\frac{5000}{(1+\alpha) \sum_{i=62}^{99} P_i} \right)^{1-\beta}}{1-\beta},$$

ahol α a járadékszolgáltató által felszámolt költség.

3. Programozási feladat

$$\sum_{t=62}^{99} P_t \frac{(CA_t + CB_t)^{1-\beta}}{1-\beta} \rightarrow \max,$$

feltéve, hogy:

$$(1+\alpha) \sum_{t=62}^{99} P_t CA_t + \sum_{t=62}^{99} CB_t = 5000$$

$$CA_t, CB_t \geq 0,$$

ahol α a járadékszolgáltató által felszámolt költség. Ebben a feladatban kivételesen a CA járadéktagnak is van indexe, mert így a legkönnyebb modellezni a döntéshozó lehetőségeit. Optimális megoldás esetén a járadéktag vagy 0, vagy egy konstans érték.

4. Programozási feladat

$$\sum_{t=62}^{99} P_t \frac{(CA + CB_t)^{1-\beta}}{1-\beta} \rightarrow \max,$$

feltéve, hogy:

$$(1+\delta_n)(1+\alpha) \sum_{t=62+n}^{99} P_t CA + \sum_{t=62}^{62+n-1} CB_t = 5000$$

$$CA, CB_t \geq 0,$$

ahol α a járadékszolgáltató által felszámolt költség, δ_n pedig az n éves használt életjáradékhoz kapcsolódó átcsoportosítás mértéke (lásd 4. ábra). n nem külső paraméter, hanem döntési változó.

5. Programozási feladat

Ennél a programozási feladatnál meg kell különböztetni a háromféle járadékot, mivel az is döntési változó, hogy milyen járadékot vásárol. Egyszerű életjáradék járadéktagját $CA1$ módon jelölöm, n év elől garanciaidős járadékot $CA2$, m éves hátul garanciaidős járadékot pedig $CA3$ módon. Garanciaidő esetén, a döntéshozó elhalálása után az örökösöt illeti meg a kifizetés. Ezen kívül a járadéktag (összegének) $(1 - r)$ részét is az örökös kapja. Elméletileg meg lehetne különböztetni az örökösnek juttatott részt járadéktípusonként és évenként, de ennek nincs jelentősége, az optimumban úgymint csak egyféle járadéktípust igényel a döntéshozó, és mivel a döntéshozó szeretné időben kiegyenlíteni a pénzáramát, az örökösöt pedig csak az örökség várható értéke érdekli, így az r paraméter időben úgymint állandó lenne.

$$\sum_{t=62}^{99} P_t \frac{[r(CA1 + CA2 + CA3)]^{1-\beta}}{1-\beta} + \gamma \frac{D^{1-\beta}}{1-\beta} \rightarrow \max ,$$

ahol

$$\begin{aligned} D &= \\ &= \sum_{t=62}^{62+n} (1 - P_t)CA2 + m \cdot CA3 + \sum_{t=62}^{99} P_t(1 - r)(CA1 + CA2 + CA3) , \end{aligned}$$

feltéve, hogy:

$$\left[(1 + \delta) \sum_{t=62}^{99} P_t CA1 + (1 + \delta_n^e) \left(n + \sum_{t=62+n}^{99} P_t CA2 \right) + (1 + \delta_m^h) \left(m + \sum_{t=62}^{99} P_t CA3 \right) \right] = 5000$$

$$CA1, CA2, CA3 \geq 0 ,$$

ahol δ , δ_n^e és δ_m^h az egyszerű-, az n éves elől- illetve az m éves hátul garanciaidős járadékhoz tartozó átcsoportosítás mértéke, n és m pedig az elől- illetve hátul garanciaidős járadék garanciaideje, ami ebben az esetben is döntési változó.

6. Programozási feladat

A programozási feladat esetén P_t jelöli a döntéshozó halálzási valószínűségeit, Q_t pedig a házastársát. U^d jelöli azt a hasznosságot, amit a döntéshozó el tud érni egy egyszerű életjáradékkal, U^h pedig azt a hasznosságot, amit ugyanezzel a járadékkal a házastársa el tud érni.

$$U^d = \sum_{t=62}^{99} P_t \frac{(CA)^{1-\beta}}{1-\beta}$$

$$U^h = \sum_{t=62}^{99} P_t \frac{(CA)^{1-\beta}}{1-\beta},$$

ahol CA az ún. 'unisex' járadéktag (nemek közötti differenciálás nem megengedett).

Jelölje rendre CDK_t és CDE_t azt az összeget, amit a t -edik évében kap a döntéshozó, ha mindketten életben vannak, illetve ha már csak ő él. Hasonlóan CHK_t és CHE_t jelölje azt az összeget, amit a döntéshozó házastársa kap, ha mindketten élnek, illetve ha már csak ő él.

Jelölje továbbá ADE illetve ADK a döntéshozó által vásárolt egyszerű- illetve két életre szóló életjáradék járadéktagját. Hasonlóan AHE illetve AHK a döntéshozó házastársa által vásárolt egyszerű- illetve két életre szóló életjáradék járadéktagját.

$$\begin{aligned} & \sum_{t=62}^{99} P_t Q_t \frac{(CDK_t)^{1-\beta}}{1-\beta} + \sum_{t=62}^{99} P_t (1-Q_t) \frac{(CDE_t)^{1-\beta}}{1-\beta} + \\ & \sum_{t=62}^{99} Q_t P_t \frac{(CHK_t)^{1-\beta}}{1-\beta} + \sum_{t=62}^{99} Q_t (1-P_t) \frac{(CHE_t)^{1-\beta}}{1-\beta} \rightarrow \max, \end{aligned}$$

feltéve, hogy:

$$CDK_t + CHK_t = ADE + ADK + AHE + AHK$$

$$CDE_t = ADE + ADK + AHK$$

$$CHE_t = AHE + AHK + ADK$$

$$ADE(1 + \delta^d) \sum_{t=62}^{99} P_t + ADK \sum_{t=62}^{99} [P_t Q_t + P_t (1-Q_t) + (1-P_t) Q_t] = 5000$$

$$AHE(1 + \delta^h) \sum_{t=62}^{99} Q_t + AHK \sum_{t=62}^{99} [P_t Q_t + P_t (1-Q_t) + (1-P_t) Q_t] = 5000$$

$$\sum_{t=62}^{99} P_t Q_t \frac{(CDK_t)^{1-\beta}}{1-\beta} + \sum_{t=62}^{99} P_t (1-Q_t) \frac{(CDE_t)^{1-\beta}}{1-\beta} \geq U^d$$

$$\sum_{t=62}^{99} Q_t P_t \frac{(CHK_t)^{1-\beta}}{1-\beta} + \sum_{t=62}^{99} Q_t (1-P_t) \frac{(CHE_t)^{1-\beta}}{1-\beta} \geq U^h$$

$$CDK_t, CDE_t, CHK_t, CHE_t, ADK, ADE, AHK, AHE \geq 0,$$

ahol δ^d és δ^h az átcsoportosítás mértékét kifejező konstansok.

7. Programozási feladat

A programozási feladat megegyezik az előző feladattal, azzal az eltéréssel, hogy a célfüggvény most:

$$\sum_{t=62}^{99} P_t \frac{(Q_t CDK_t + (1 - Q_t) CDE_t)^{1-\beta}}{1-\beta} + \sum_{t=62}^{99} Q_t \frac{(P_t CHK_t + (1 - P_t) CHE_t)^{1-\beta}}{1-\beta} \rightarrow \max .$$

Mivel a célfüggvény megváltozott, ezért megváltozik a döntéshozó és a házastársa hasznosságát rögzítő korlát is:

$$\sum_{t=62}^{99} P_t \frac{(Q_t CDK_t + (1 - Q_t) CDE_t)^{1-\beta}}{1-\beta} \geq U^d,$$

$$\sum_{t=62}^{99} Q_t \frac{(P_t CHK_t + (1 - P_t) CHE_t)^{1-\beta}}{1-\beta} \geq U^h.$$

A feladat többi része változatlan.

Irodalom

1. Ágoston K. Cs., Kovács E.: A magyar öngondoskodás sajátosságai, *Közgazdasági Szemle*, 2007, LIV. évf. június, 560–578. o.
2. Banyár J.: A nemek közötti direkt átcsoportosítás a nyugdíjszámlákon — egy új megközelítés, *Sigma*, 2002, 3-4. sz. 141–157. o.
3. Banyár J.: A kötelező életjáradék lehetséges működése és szabályozása. Megjelent: *Van megoldás — Nyugdíjreform*, 254–371. o.
4. Fischer, S.: A Life Cycle Model of Life Insurance Purchases, *International Economic Review*, 1973, vol. 14, issue 1, pp. 132–152.
5. Kotlikoff, L. J., Spivak, A.: The Family as an Incomplete Annuities Market, *The Journal of Political Economy*, Vol. 89, No. 2. (Apr., 1981), pp. 372–391.
6. Milevsky, M. A.: Optimal Asset Allocation towards the End of the Life Cycle: To Annuitize or Not to Annuitize?, *The Journal of Risk and Insurance*, Vol. 65, No. 3 (Sep., 1998), pp. 401–426
7. Matits Á.: *A magánnyugdíjpénztárak hatékonysága – avagy az ördög most is a részletekben van*, ILO-tanulmány, kézirat, 2006.
8. Mitchell, O. S.; Poterba, J. M.; Warshawsky, M. J.; Brown, J. R.: New Evidence on the Money's Worth of Individual Annuities, *The American Economic Review*, Vol. 89, No. 5. (Dec., 1999), pp. 1299–1318
9. Samuelson, P. A.: An Exact Consumption-Loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money, *The Journal of Political Economy*, Vol. 66, No. 6. (Dec., 1958), pp. 467–482

10. Simonovits A.: Optimális rugalmas nyugdíjrendszer tervezése – biztosításmatematikai semlegesség és hatékonyság, *Közgazdasági Szemle* LI. évf., 2004. 1101–12. o.
11. Stahl J.: Mi van/lesz a magánnyugdíj-pénztári szolgáltatásokkal?, *Közgazdasági Szemle*, 6. sz. 599–607. o.
12. Yaari, M. E.: Uncertain Lifetime, Life Insurance, and the Theory of the Consumer, *Review of Economic Studies*, XXXII. (April, 1965), 137–150.

CHOICE AMONGST HUNGARIAN PENSION FUNDS' ANNUITIES

This paper investigates the decision-maker's choice amongst the pension fund's life annuities in Hungary. Hungarian pension funds have not started providing annuities yet, and the environment requires further regulation. The most significant problems is that the annuity providers must not differentiate between sexes. Pension fund members can choose among different types of life annuities (e.g. they can choose guarantee period or joint life annuity), and the member's choice may cause loss to the annuity provider in general. Since differentiation between sexes is not allowed member's opportunities may shrink (e.g. they can not choose guarantee period or joint life annuity).

ADALÉKOK AZ „ÁRELFOGADÓ” ÉS
„ÁRMEGHATÁROZÓ” FOGALMAK ÉRTELMEZÉSÉHEZ¹
II.

BARANCSUK JÁNOS
PTE KTK

Cikkünk *első* részében² arra tettünk javaslatot, hogy *homogén* iparág körülményei között miként célszerű értelmezni és kvantifikálni a *kínálati* oldalon megjelenő gazdasági szereplők árelfogadó/ármeghatározó jellegét, miközben különös figyelmet szántunk a logikai kontextusként szolgáló *keresleti* összefüggések feltérképezésére is. A tanulmány második részében eredményeinket egy olyan modell keretei között *általánosítjuk*, amely —egyformán befogadva a *sokszereplős versus monopolista*, más szempontból a *homogén versus differenciált* iparág specifikumait— a végleteket határesetként kezeli. Ennek során választ keresünk arra is, hogy miért nem ekvivalensek az árra *versus* mennyiségre vonatkozó döntések kimenetelei, illetve milyen logikai csúsztatásokat követtek el a szakma nagyjai a vállalatok árakhoz alkalmazkodó vagy azokat kijelölő magatartásának ábrázolásakor.

6 Értelmezési nehézségek és megoldási (általánosítási) javaslatok heterogén iparág esetén

Némileg nehezebb helyzetben vagyunk a vállalati árflexibilitás meghatározása során, ha az iparágat *differenciált* termékeket gyártó vállalatok alkotják. Ekkor ugyanis jogosan számíthatunk arra, hogy valamely cég parciális kínálatváltoztatása nem azonos, hanem tipikusan eltérő %-ban érinti *saját*, illetve az iparág *többi* (másik) vállalata által érvényesíthető (keresleti) árat. E jelenség bizonyos implikációkkal jár. Ezek közül a legfontosabb, hogy a saját *versus* többi (másik) cég árait szemléltető pályák elkülönülése miatt az árnak is kétféle: *saját*-, valamint *kereszt-flexibilitása* (sőt, értelmes módon ezek *átlagá*) határozható meg. *A tipikusan negatív előjelű saját-árflexibilitás azt méri, hogy a vállalat elszigetelt kínálatváltoztatása relatíve hogyan befolyásolja saját termékének keresleti árát. Az ár bármilyen előjelű kereszt-flexibilitása —amelyet eredetileg Triffin [1940] vezetett be a szakmai köztudatba— ugyanakkor a többi (másik) cég áraira gyakorolt kínálati hatás erősségét fejezi ki.* A két érték eltérése azt jelenti, hogy a vállalat árbefolyásoló képessége saját, szűkebben vett piacán, illetve az iparág többi termékének/egészének piacán eltérően alakul.

¹Beérkezett: 2006. szeptember 8. E-mail: indian@ktk.pte.hu.

²A cikk első része a Szigma 2006/1-2 számában jelent meg.

A továbbiakban az ár saját- és kereszt-flexibilitásának viszonyát olyan logikai környezetben kívánjuk elemezni, amely — az egymásra vonatkoztatás lehetőségét megteremtve — analóg a cikk első részében felhasznált keresleti rugalmasságok rendszerével, valamint — egyfajta határesetként — a *homogén* iparág jelenségeinek befogadására is alkalmas. Az egyszerűség kedvéért tehát ezúttal is a megszokott X, Y, Z termékfajtákat tartalmazó modellben dolgozunk. Gondolati kereteink megteremtése/kibővítése során az ún. *költségvetési egyenletből* (azonosságból) indulunk ki, amely szerint

$$I = P_x X + P_y Y + P_z Z, \quad (37)$$

ahol I a reprezentáns fogyasztó pénzjövedelme.

Ha feltételezzük, hogy az árelfogadó/ármeghatározó potenciált az X változat vonatkozásában vizsgáljuk, akkor értelmes a fenti formula mindkét oldalának X szerinti deriválása:

$$0 = P_x + \frac{dP_x}{dX} X + \frac{dP_y}{dX} Y + \frac{dP_z}{dX} Z, \quad (38)$$

amelyből — az egyes törteteket P_x/P_x -szel, P_y/P_y -nal és P_z/P_z -vel bővítve

$$-P_x = \frac{dP_x}{P_x} \frac{XP_x}{dX} + \frac{dP_y}{P_y} \frac{YP_y}{dX} + \frac{dP_z}{P_z} \frac{ZP_z}{dX} \quad (39)$$

következik. Mindkét oldalt megszorozva X/I -vel:

$$-\frac{XP_x}{I} = \frac{XP_x}{I} \frac{dP_x}{P_x} : \frac{dX}{X} + \frac{YP_y}{I} \frac{dP_y}{P_y} : \frac{dX}{X} + \frac{ZP_z}{I} \frac{dP_z}{P_z} : \frac{dX}{X}, \quad (40)$$

ahol

$$\frac{dP_x}{P_x} : \frac{dX}{X} = \varphi_x^x \quad (41)$$

nem más, mint az X jószágfajta árának *saját-* (tulajdonképpen *aszimmetria*) flexibilitása, míg

$$\frac{dP_y}{P_y} : \frac{dX}{X} = \varphi_x^y \quad (42)$$

és

$$\frac{dP_z}{P_z} : \frac{dX}{X} = \varphi_x^z \quad (43)$$

az Y és Z jószágfajta árának *kereszt-*flexibilitása X kínálatváltoz(tat)ása esetén. A most, és az előzőekben bevezetett jelöléseket felhasználva a (40) formula a következőképpen írható fel:

$$-s_x = s_x \varphi_x^x + s_y \varphi_x^y + s_z \varphi_x^z, \quad (44)$$

amelynek értelmében az X saját-árflexibilitásának, továbbá Y és Z kereszt-árflexibilitásának (a bázisállapotnak megfelelő) költségvetési részesedésekkel súlyozott átlaga (azaz X 1%-os kínálatváltozásának *átlagos* hatása az *összes*

— X, Y, Z — termékfajta árszínvonalára) nem más, mint $-s_x$. A (44) és (1) összefüggések struktúrái között fennálló rendkívüli hasonlóság az általunk vizsgált ár-keresleti/kínálati rendszerben tetten érhető *dualitás* jelenségéből fakad (lásd *Zalai* [2000]), amely azonban a modell alábbiakban közölt elemeiben is megnyilvánul.

Ezt észleljük például akkor, ha a (8) formula levezetésének meg gondolásait —*mutatis mutandis*— követve a

$$\varphi_x^{ind} = \frac{-s_x - s_Z \varphi_x^Z}{s_{ind}} = \frac{s_x \varphi_x^x + s_y \varphi_x^y}{s_{ind}} = \hat{s}_x \varphi_x^x + \hat{s}_y \varphi_x^y \quad (45)$$

összefüggést nyerjük, ahol φ_x^{ind} (az iparági ár parciális átlag-flexibilitása) az X 1%-os kínálatváltozásának átlagos hatása az iparág árszínvonalára. A formula —amely kiemelt szereppel bír, hogy a vállalat árbefolyásoló képességének lényegét megértsük— analóg módon természetesen Y -ra is értelmezhető. A (9) és (16) logikáját adaptálva

$$\varphi_x^{ind} + \varphi_y^{ind} = -1 - \frac{s_Z}{s_{ind}} (\varphi_x^Z + \varphi_y^Z) = \Phi_{\Sigma S} = \hat{s}_x (\varphi_x^x + \varphi_y^x) + \hat{s}_y (\varphi_y^y + \varphi_x^y) \quad (46)$$

azonosság-láncolathoz jutunk, amelyben (17)-nek megfelelően bevezetve, majd alkalmazva a

$$\varphi_x^x + \varphi_y^x = \varphi_{ind}^x \quad \text{és} \quad \varphi_y^y + \varphi_x^y = \varphi_{ind}^y \quad (47)$$

jelöléseket, a (18)-cal analóg

$$\Phi_{\Sigma S} = \hat{s}_x \varphi_{ind}^x + \hat{s}_y \varphi_{ind}^y \quad (48)$$

összefüggést kapjuk. A formulában szereplő φ_{ind}^x és φ_{ind}^y „szimmetria-flexibilitások” azt mutatják meg, hogy hány %-os változást idéz elő X , illetve Y termékfajta árában, ha *mindegyik* áruféleség kínálatát *szimultán* módon 1%-kal növelik.

A (19) levezetésének logikája alapján a flexibilitások rendszerében is levezethetjük a

$$\varphi_x^{ind} = \hat{s}_x \left[\Phi_{\Sigma S} + \frac{s_Z}{s_{ind}} \left(\varphi_y^Z - \frac{\hat{s}_y}{\hat{s}_x} \varphi_x^Z \right) \right], \quad (49)$$

általános érvényű összefüggést, amelyből a (21)-gyel analóg

$$\varphi_x^Z / \varphi_y^Z = \hat{s}_x / \hat{s}_y \quad (50)$$

aránypár fennállása esetén végül is a (22), más szempontból (28) és (29) formulákkal szoros kapcsolatban lévő

$$\varphi_x^{ind} = \hat{s}_x \Phi_{\Sigma S} = \hat{s}_x / \varepsilon_{\Sigma D} \quad (51)$$

eredményt érjük el.

Az (50) aránypár *homogén* iparág esetén magától értetődően felírható, a gyártott javak *differenciáltsága* mellett azonban ezúttal is két, alternatív feltétel teljesüléséhez köthető érvényessége:

- az $X; Y$ iparágra irányuló kereslet *tökéletes függetlensége* a Z környezet által vonzott kereslettől, vagy pedig
- *jól viselkedő* fogyasztói preferenciák létezése.

Az első esetben a (10) következtében *kivételesen* teljesül, hogy

$$\varepsilon_{\Sigma D} = \Phi_{\Sigma S} = 1/\varepsilon_{\Sigma D} = 1/\Phi_{\Sigma S} = \varepsilon_Z^Z = \Phi_Z^Z = -1, \quad (52)$$

amelynek egyértelmű implikációjaként $X; Y$ és Z közötti kereszt-árrugalmasságok valamint kereszt-árflexibilitások értéke *vica versa zérus* (v.ö. Barancsuk [1995]). Ebből pedig a (45) és vele analóg összefüggések első felében —mintegy a (12) „tükröképeként” — a

$$\varphi_x^{ind} = -\hat{s}_x \quad \text{és} \quad \varphi_y^{ind} = -\hat{s}_y \quad (53)$$

eredmények, továbbá triviálisan (51) következnek.

A *jól viselkedő preferenciák* mellett ugyanakkor a (20)-szal analóg, de a flexibilitásokra is érvényes összefüggés alapján igazolható (50), amelyből szintén (51)-hez jutunk.

Észrevehető, hogy *általánosított* összefüggéseink egy vállalat árbefolyásoló képességét lényegében továbbra is az őt befogadó iparágon belüli részeseisével arányosan, az iparági (aggregált) kereslet árrugalmasságával pedig fordítottan arányosan állapítják meg. A (28) és (29) formulákkal összevetve a különbség „mindössze” annyi, hogy e tétel *differenciált* iparág esetén —a (45) tanulsága szerint — a saját és a másik (többi) termék árára gyakorolt hatás *átlagaként* érvényesül. Figyeljük azonban meg: az $\hat{a}r \rightarrow \hat{m}ennyiség$, illetve $\hat{m}ennyiség \rightarrow \hat{a}r$ gondolati rendszereknél definiált analóg kategóriák:

- $\varepsilon_{\Sigma D}$ versus $\Phi_{\Sigma S}$,
- ε_{ind}^x versus φ_x^{ind} ,
- ε_x^x versus φ_x^x , valamint
- ε_y^x versus φ_x^y

vonatkozásában kizárólag az első —*iparági*— „páros” tagjai/értékei között létezik inverz viszony. Ami arra utal, hogy

- duális modellünk „ikerképződményei”: az iparág homogén vagy differenciált jellegére utaló *árrugalmasságok*, versus a gazdasági szereplők ármeghatározó/árfogadó képességére utaló *árflexibilitások* —az iparággal azonos monopólium kivételével — *nem ugyanazon* keresleti görbét karakterizálják, vagy más megközelítésben:
- az ár- versus kínálati döntések eredményeinek ekvivalenciája —amely az analóg elaszticitások értékének *reciprocitásában* tükröződne — törvényszerűen *csak* a tiszta *monopóliumra* jellemző, hiszen ez utóbbi esetben az összes keresleti görbe-típus az *aggregált* függvényben egyesül (v.ö. Allen [1992], Tasnádi [2006]).

Emlékezzünk rá: habár ε_x^x versus φ_x^x (ugyanígy ε_y^x versus φ_x^y) formulái szemfényvesztő módon egymás reciprokai, értékeikre vonatkozóan —lévén, hogy általában (a tiszta monopólium kivételével) más-más keresleti görbéhez kapcsolódnak — ez nem teljesül.

7 A kínálatváltoztatás saját és a többi termék árára gyakorolt hatásának viszonya

Induljunk ki most a (45) és (51) összevonásából keletkezett

$$\varphi_x^{ind} = \hat{s}_x \varphi_x^x + \hat{s}_y \varphi_x^y = \hat{s}_x \Phi_{\Sigma S} \quad (54)$$

formulából, amely jól viselkedő preferenciák mellett érvényes! Mivel a súlyozott számtani közép az átlagolandó értékek közötti távolságot a súlyok arányában osztja fel, ezért az (54)-re vonatkoztatva igaz, hogy ha

$$\hat{s}_x \rightarrow 0, \quad \text{ezért} \quad \hat{s}_y \rightarrow 1, \quad \text{akkor} \quad \varphi_x^y \rightarrow \hat{s}_x \Phi_{\Sigma S} \rightarrow 0, \quad (55)$$

vagyis Y árának kereszt-flexibilitása — φ_x^y — egyre közelebb kerül a (zérushoz tartó) $\hat{s}_x \Phi_{\Sigma S}$ átlaghoz. Ami azt jelenti, hogy *minél kisebb részesedést képvisel X az iparágon belül, annál kisebb mértékben képes kínálatával befolyásolni a másik/többi (Y) termékfajta egységárát.* Az (54) formula önmagában azonban semmit nem árul el az „átlagolandó értékek”: φ_x^x és φ_x^y nagyságrendi relációjáról, arról, hogy egyikük és másikuk az $\hat{s}_x \Phi_{\Sigma S}$ átlag melyik oldalán helyezkedik el. A továbbiakban azt bizonyítjuk, hogy ez a kérdés a modellben szereplő javak fogyasztási kapcsolatának jellege és intenzitása — szintetizáltan: a *helyettesítés rugalmasságának* (σ) — vizsgálata révén válaszolható meg.

A helyettesítés — tipikusan *negatív* előjelű — rugalmasságát gondolati rendszerünkben oly módon értelmezzük, mint ami azt mutatja meg, hogy a jószágfajták arányának (P_x/P_y) 1%-os változása hány %-os elmozdulást generál az X/Y fogyasztási szerkezetben. *Helyettesítést* jelző „*lapos*” közömbösségi görbék esetén a rugalmasság (abszolút) értéke *nagy*, míg *kiegészítő* viszonyra utaló erősebben ívelt, „*sarkos*” közömbösségi görbékénél *kicsi*. Mivel igaz, hogy

$$\frac{P_x X}{P_y Y} = \frac{s_x}{s_y}, \quad (56)$$

belátható, hogy a helyettesítés rugalmasságából a javak költségvetési hányadainak arányában bekövetkező változás irányára is következtethetünk. Nevezetesen, ha

- $|\sigma| > 1$, akkor a P_x/P_y arány dinamikájánál erősebb X/Y (ellentétes irányú) elmozdulása, az s_x/s_y ezért az ararányal *ellentétesen* változik,
- $|\sigma| = 1$, az ararány és a fogyasztási szerkezet dinamikája azonos, ezért a keresleti hányadok aránya *változatlan* marad,

- $|\sigma| < 1$, az árarány és fogyasztási szerkezet közül az előbbi dinamikája erősebb, ezért a keresleti hányadok aránya *azonos* irányban halad az áraránnyal.

Kéttermékes modellben a helyettesítés rugalmasságának mértéke *közvetlenül* kapcsolatos a javak közötti fogyasztási kapcsolat milyenségével: $|\sigma|$ *egységnyinél nagyobb* szintje *helyettesítő*, egységnyinél *kisebb* értéke pedig *kiegészítő* kapcsolatot jelez, míg az *egységnyi* rugalmasság a termékfajták *függetlenségét* indikálja (v.ö. Barancsuk [1995]). Háromtermékes sémánkban azonban —mint majd látni fogjuk— az $X; Y$ iparág és Z „környezete” között esetlegesen előforduló (nem-szimmetrikus) kereszt-árhatások deformálhatják a helyettesítő és komplementer javakat elhatároló nagyságot (v.ö. Zalai i.m. 71-72., 270-272. o.).

Mivel tanulmányunk a *kínálat*változ(tat)ás árakra gyakorolt hatására koncentrál, ezért a továbbiakban a helyettesítés rugalmasságát *reciprok* módon közelítjük meg: a termékszerkezet elmozdulásából indulunk ki, és az árarány módosulását tekintjük következménynek. Vizsgálatunk során feltételezzük, hogy az X/Y arány az X kínált mennyiségének —*ceteris paribus*— 1%-os növekménye miatt változik, amelynek árarány-konzekvenciáit a kínálat saját- és kereszt-flexibilitása méri:

- a P_x értéke φ_x^x %-kal,
- a P_y értéke φ_x^y %-kal

módosul. A felsorolt változásokat az (56) összefüggésben érvényesítve a

$$\frac{P_x(1 + \varphi_x^x/100) \cdot 1,01X}{P_y(1 + \varphi_x^y/100) \cdot Y} = \frac{1,01(1 + \varphi_x^x/100)}{1 + \varphi_x^y/100} \cdot \frac{s_x}{s_y} \quad (57)$$

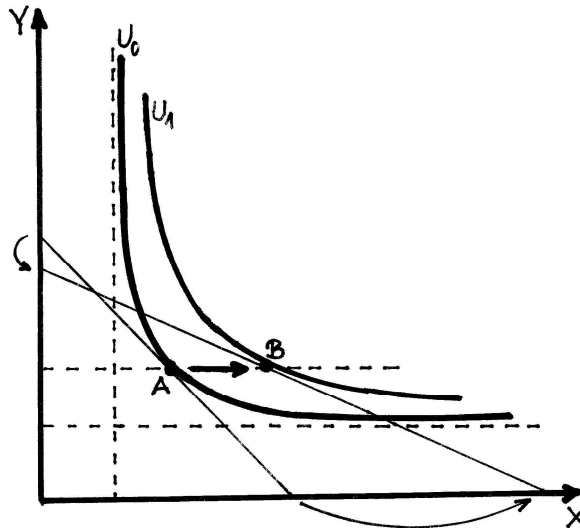
formulát nyerjük, amelynek viselkedésére hatást gyakorolnak a helyettesítés *inverz* rugalmasságának elemei:

$$100 \cdot \frac{1 + \varphi_x^x/100}{1 + \varphi_x^y/100} - 100 = \frac{\varphi_x^x - \varphi_x^y}{1 + \varphi_x^y/100} = 1/\sigma. \quad (58)$$

A továbbiakban négy esetet vizsgálunk, előtte azonban célszerű az (54) formulát a

$$\varphi_x^y = \hat{s}_x/\hat{s}_y(\Phi_{\Sigma S} - \varphi_x^x) \quad (59)$$

alakra hoznunk, és emlékeztetünk arra, hogy az (52)-nek megfelelő speciális helyzetben $\Phi_{\Sigma S}$ értéke (mínusz) *egységnyi* lenne az iparág és környezete közötti (nem-szimmetrikus) kereszt-árhatások hiányában.



8. ábra. Az X parciális kínálatváltozásának hatása a keresleti árakra egy kéttermékes modellben — a *komplementer* javak esete

Az *első* esetben az ár *negatív* előjelű saját-flexibilitásának *abszolút* értéke meghaladja $\Phi_{\Sigma S}$ szintjét, azaz

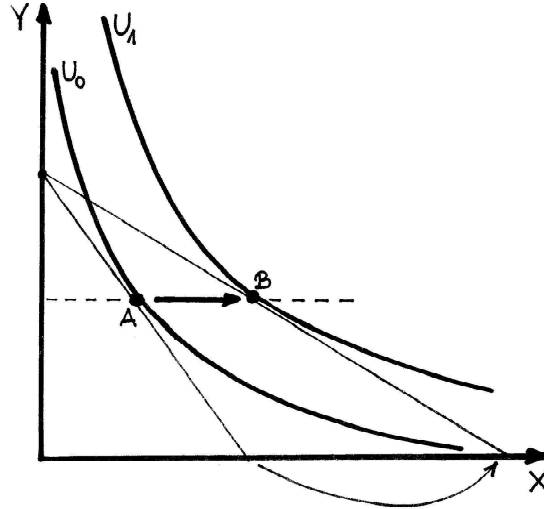
- $\varphi_x^x < \Phi_{\Sigma S} < \hat{s}_x \Phi_{\Sigma S} < 0$. Az (59) alapján ebből (60 Σ)
- $\varphi_x^y > 0 > \hat{s}_x \Phi_{\Sigma S} > \Phi_{\Sigma S}$, az (58) alapján pedig
- $1/\sigma < \Phi_{\Sigma S}$, továbbá $\sigma > 1/\Phi_{\Sigma S}$ következik,

ami *háromtermékes* modellünkben a javak *komplementer* viszonyára utal. X kínálatnövekedése tehát viszonylag intenzív *árcsökkenést* tesz szükségessé saját termelőinél, az Y vonatkozásában viszont az ár *emelkedését* implicálja. A 8. ábrán — a szemléletesség kedvéért — ezt a jelenséget (feltételezve az $X; Y$ iparág és Z környezete *tökéletes függetlenségét*) egy kétdimenziós jószág térben is bemutatjuk, ahol a reprezentáns fogyasztó közömbösségi térképének (*kiegészítő* kapcsolatot jelző) szintvonalai a *tengelyekkel párhuzamos aszimptotákhoz* simulnak. A pont a kezdeti, B pedig az X parciális kínálatnövelése utáni helyzetnek felel meg, az egyes pontokhoz tartozó költségvetési egyenesek tengelymetszeteinek összevetése révén pedig a két termékfajta keresleti árainak változására következtethetünk.

A *második* esetben legyen

- $\varphi_x^x = \Phi_{\Sigma S} < \hat{s}_x \Phi_{\Sigma S} < 0$, ami az (59) alapján (61 Σ)
- $\varphi_x^y = 0 > \hat{s}_x \Phi_{\Sigma S} > \Phi_{\Sigma S}$ relációkhoz vezet. Az ár saját- és kereszt-flexibilitásának értékeit az (58) formulába helyettesítve az
- $1/\sigma = \Phi_{\Sigma S}$, valamint $\sigma = 1/\Phi_{\Sigma S}$ eredményt nyerjük.

A most vázolt konstelláció —háromtermékes rendszerünkben— a fogyasztási szerkezet termékfajtáinak *függetlenségét* jelzi, amit az (52) feltétel mellett kétdimenziósra szűkített, a *tengelyekhez aszimptotikusan közeledő* indifferencia görbéket tartalmazó 9. ábra oly módon szemléltet, hogy X kínálatának változtatása csak saját árát mérsékli, Y piaci árára viszont *nem gyakorol hatást*.

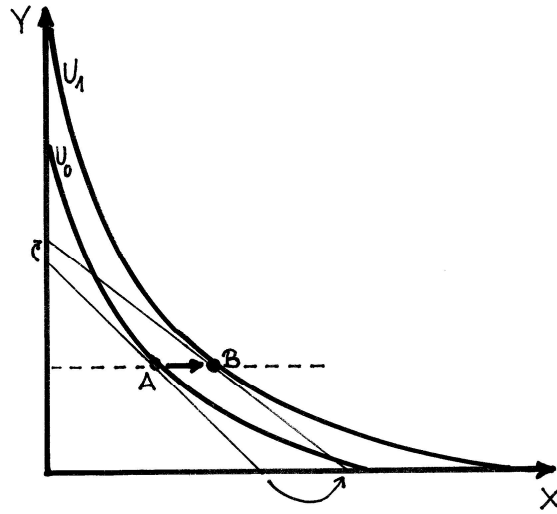


9. ábra. Az X parciális kínálatváltozásának hatása a keresleti árakra egy kéttermékes modellben — a *független* javak esete

A *harmadik* esetben a két árflexibilitás még közelebb kerül az $\hat{s}_x \Phi_{\Sigma S}$ átlaghoz:

- $\Phi_{\Sigma S} < \varphi_x^x < \hat{s}_x \Phi_{\Sigma S} < 0$, amiből (62 Σ)
- $0 > \varphi_x^y > \hat{s}_x \Phi_{\Sigma S} > \Phi_{\Sigma S}$ következik, ez viszont az (58) alapján
- $1/\sigma > \Phi_{\Sigma S}$, valamint $\sigma < 1/\Phi_{\Sigma S}$,

háromtermékes modellünkben a javak *helyettesítő* viszonyát tükröző relációkhoz vezet. Mivel $|\varphi_x^x| > |\varphi_x^y|$, ez azt jelenti, hogy X termék parciális kínálatnövelése egy *heterogén* iparágon (vagyis *differenciált oligopóliumon*, vagy *monopolisztikus versenyen*) belül még akkor is erősebben csökkenti *saját* keresleti árát a másik (többi) termékfajtáénál, ha költségvetési részesedése egyébként *nem* lenne elenyésző. A vásárlóerőn való osztozkodás bizonyos arányainál tehát *az sem lehetetlen, hogy egy cég saját piacán ármeghatározó, míg az ágazat egészére gyakorolt hatását tekintve árelfogadó pozícióban legyen* (v.ö. Carlton – Perloff [2003] 232. és 241. o.). A 10. ábra kéttermékes „világában” —a javak (*korlátozottan*) *kompetitív* viszonyára utalva— a fogyasztó közömbösségi görbéi ekkor még lapultabbak, és *eléri a tengelyeket*.

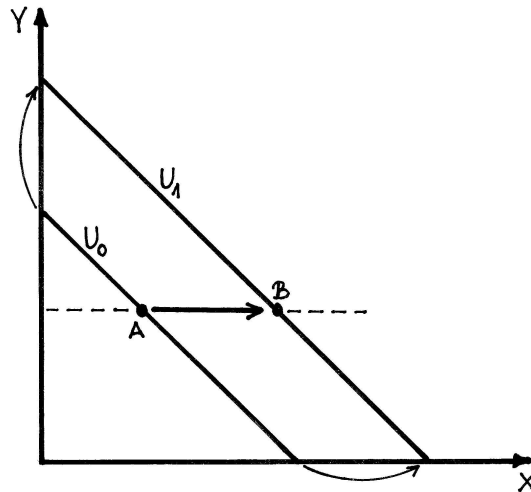


10. ábra. Az X parciális kínálatváltozásának hatása a keresleti árakra egy kéttermékes modellben — az egymást korlátozottan helyettesítő javak (heterogén iparág) esete

A negyedik esetben feltételezzük, hogy a saját- és kereszt-árflexibilitás értéke az átlagukat jelentő $\hat{s}_x \Phi_{\Sigma S}$ szinten *azonossá* válik, vagyis

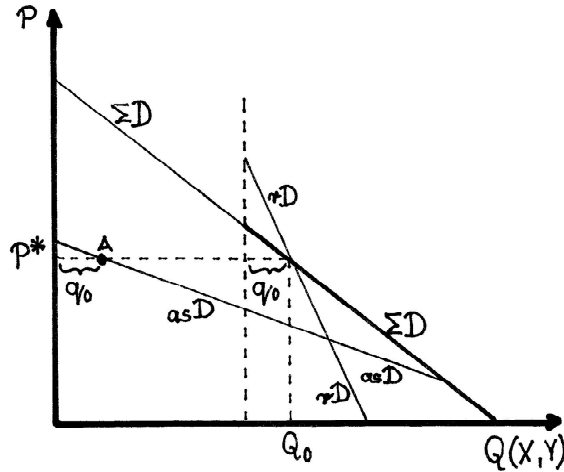
- $0 > \varphi_x^x = \varphi_x^y = \hat{s}_x \Phi_{\Sigma S} > \Phi_{\Sigma S}$. Az (58) alapján ekkor (63Σ)
- $1/\sigma = 0$, σ pedig nem értelmezhető, de $1/\sigma \rightarrow 0$ esetén $\sigma \rightarrow -\infty$.

Ez a *tökéletes helyettesítés*, vagyis a *homogén iparág* sémája, amikor valamely vállalat kínálatváltoztatása *azonos* mértékben érinti mindegyik cég termékének árát. A kétdimenziós közömbösségi görbék ekkor *egyenesek*, amit a 11. ábrán szemléltetünk.



11. ábra. Az X parciális kínálatváltozásának hatása a keresleti árakra egy kéttermékes modellben — a tökéletesen helyettesítő javak (homogén iparág) esete

A harmadik és negyedik eset vizsgálatánál nyert információkat felhasználva immár módunk van arra, hogy felrajzoljuk a *heterogén* ágazatra jellemző, az ár *saját*-flexibilitásának megfelelő maradék-keresleti görbét. A 12. ábrán — az egymásra vonatkoztatás megkönnyítése végett — a 6. ábra céljainkat szolgáló átalakításával, az aszimmetria keresleti görbével együtt jelenítjük meg. Az egyszerűség kedvéért abból indulunk ki, hogy eredetileg az ágazat összes termékének ára egységesen P^* , az aggregált kínálat ezúttal is Q_0 , az általunk vizsgált vállalat kínálata pedig q_0 .



12. ábra. Egy vállalatra vonatkozó aszimmetria és maradék keresleti görbék heterogén iparág esetén

A 10. ábra egyik implikációja, hogy ha a *differenciált* iparág — ezúttal nem %-ban, hanem *természetes mértékegységben* kifejezett — *egységnyi* kínálatnövekménye nem a vállalatok szimultán, hanem egyetlen cég parciális akciójának eredménye, akkor ez utóbbi aktor *kénytelen nagyobb mértékű árcsökkentésbe belemenni, mint amekkorát az iparág kénytelen átlagosan elszervezni a megfelelő kereslet biztosítása érdekében*. Ennek értelmében a *maradék-keresleti görbe meredekebb az aggregált keresleti grafikonnál*. Paradox módon ugyanakkor mégis az *iparági árflexibilitás* ($\Phi_{\Sigma S}$) abszolút értéke *nagyobb az egyéninél* (φ_x^x), ami azzal magyarázható, hogy az *rD* keresleti görbe felső, kiinduló szakaszának *Q* szerinti elaszticitása (amely *közgazdaságilag nem, csak matematikailag értelmezhető!*) rendkívül magas, reciproka — a flexibilitás — tehát ennek megfelelően alacsony.

Amint a 2. és 6. ábrákon megfigyelhető, *homogén* iparágban az *aszimmetria* keresleti görbe *vízszintes*, a *reziduális* pedig — q_0 -nál nagyobb kínálat mellett — az *aggregált függvénnyel megegyező* pozíciót foglal el. Megállapításainkat a (23)-mal analóg, az (54)-gyel és (59)-cel pedig ekvivalens

$$\varphi_x^x = \Phi_{\Sigma S} - \frac{s_y}{s_x} \varphi_x^y \quad (64)$$

összefüggés is alátámasztja, amely a javak *korlátozott* helyettesítése mellett a *harmadik, tökéletes* helyettesítése alkalmával pedig a *negyedik* eseténél tárgyalt

relációkat implikál. Az X vállalat *monopolhelyzete*, azaz s_y zérus szintje ugyanakkor az egyéni és iparági árflexibilitás *azonosságát* eredményezi.

A teljesség kedvéért vizsgáljuk meg, hogy vajon mi történik, ha az ár saját- és kereszt-flexibilitása az átlagukat jelentő $\hat{s}_x \Phi_{\Sigma S}$ két oldalán „helyet cserél”, vagyis $|\varphi_x^x| < |\varphi_x^y|$. Ekkor

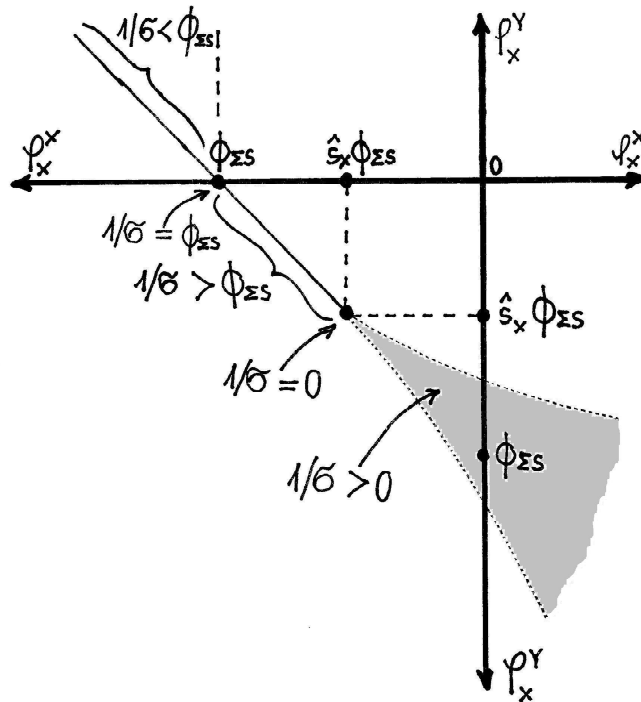
- $\varphi_x^x > \hat{s}_x \Phi_{\Sigma S} > \Phi_{\Sigma S}$, és (65Σ)

- $0 > \hat{s}_x \Phi_{\Sigma S} > \varphi_x^y$ miatt az (58) alapján

- $1/\sigma$ és σ értékeire *pozitív* számokat kapunk.

Ha a helyettesítés rugalmasságát az *eredeti* értelemben, vagyis a közömbösségi görbe végtelenül rövid ívén az MRS és termékarány (X/Y) dinamikájának viszonyaként fogjuk fel, akkor a most jellemző relációk az origóra *konkáv* indifferenciagörbékét implikálnának. Az MRS arányokkal való helyettesítése azonban ekkor az optimum *sarokmegoldás* jellege miatt nem engedhető meg.

A 13. ábrán az előbbiekből feltárt tendenciákat összegezzük, azzal a megjegyzéssel, hogy a legutolsó, konkáv preferenciák esetére vonatkozó $\varphi_x^x; \varphi_x^y$ értékpárok lehetséges sávja az (59) formula szolgái, pusztán matematikai megfontolásokat követő —annak közgazdasági értelmét nem vizsgáló— alkalmazásával került kijelölésre.



13. ábra. Az ár saját- és kereszt-flexibilitásának, valamint a helyettesítési rugalmasság inverzének viszonya a különböző értéktartományokban

Az előzőekben lefolytatott vizsgálatunkból kiderült, hogy a helyettesítés rugalmasságának (σ) bizonyos értéktartományai determinálják az ár saját- és kereszt-flexibilitásának, valamint az átlagukat jelentő $\hat{s}_x \Phi_{\Sigma S}$ érték viszonyát. Ha az (54) analógiájára (6) és (22) formulákra támaszkodva létrehozuk az

$$\varepsilon_{ind}^x = \hat{s}_x \varepsilon_x^x + \hat{s}_y \varepsilon_y^x = \hat{s}_x \varepsilon_{\Sigma D} \quad (66)$$

összefüggést, a σ különböző értékeihez kapcsolódó elemzés —*mutatis mutandis*— a saját- (aszimmetria-) és kereszt-*árrugalmasságok* egymás, valamint $\hat{s}_x \varepsilon_{\Sigma D}$ átlagukhoz való relációjuk tekintetében is elvégezhető.

E logikai momentum azonban nem csak abból a szempontból fontos, hogy általa újabb, lényeges részekkel gazdagítható az *árrugalmasságok versus* *árflexibilitások* rendszere közötti analógiák halmaza. Különös jelentőségét az adja meg, hogy ez teszi lehetővé —természetesen az (5) alapösszefüggésen túl— a „tükörsémák” elemeinek *összekapcsolását, közös formulában való szerepeltetését*. Végeredményben azt, hogy ne csak intuitív, hanem egzakt módon is képesek legyünk egymásra vonatkoztatni az *ár* \rightarrow *mennyiség* szemléletű („*árrugalmas*”) és *mennyiség* \rightarrow *ár* szemléletű („*árflexibilis*”) keresleti görbék helyzetét X és Y javak fogyasztási kapcsolatainak különböző megnyilvánulásai mellett.

A levezetés részleteinek mellőzésével bízzuk az Olvasó belátására tehát az (58)-nak megfelelő

$$\frac{\varepsilon_x^x - \varepsilon_y^x}{1 + \varepsilon_y^x/100} = \sigma, \quad (67)$$

majd az egymást tükröző rendszereket integráló

$$\frac{\varepsilon_x^x - \varepsilon_y^x}{1 + \varepsilon_y^x/100} = \sigma = \frac{1 + \varphi_x^y/100}{\varphi_x^x - \varphi_x^y} \quad (68)$$

formulák relevanciáját.

8 A legjellemzőbb szakirodalmi csúsztatások, pontatlanságok

„- Ha én használok egy szót —mondta Dingidungi megrovó hangsúllyal—, akkor az azt jelenti, amit én akarok, sem többet, sem kevesebbet!

- Az a kérdés —hitetlenkedett Alice—, vajon engedelmesskednek-e a szavak.

- Az a kérdés —így Dingidungi—, ki az úr és kész.”
LEWIS CARROLL

Ebben a fejezetben —a szakirodalomból vett példák alapján— az ármeghatározó/árfelfogadó kategóriapár értelmezése során leggyakrabban előforduló csúsztatásokat, pontatlanságokat mutatjuk be. Szemlénket egy *Variantól* [1991b] vett idézettel kezdjük, amely valóságos tárházát képezi a tárgyunkkal kapcsolatos, de több szerzőre is jellemző fogalmi-szóhasználati-módszertani zűrzavarnak:

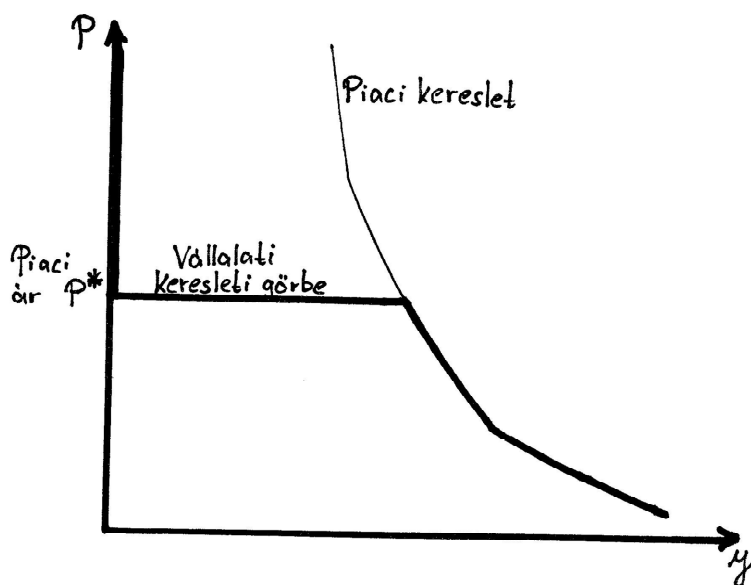
„...egy piacon akkor van tiszta verseny, ha mindegyik vállalat azt *feltételezi*, hogy a piaci ár független az ő saját kibocsátási szintjétől. [...]

Milyen környezetben lehet ez a vállalat számára értelmes feltételezés? Nos, tegyük fel, hogy sok, azonos terméket gyártó vállalatból álló iparágunk van, és mindegyik vállalat csak egy kis részét alkotja a piacnak. [...] *Magától értetődő*, ha feltesszük, hogy az iparág egyetlen vállalata számára a piaci ár előre meghatározott adottság. [...]

De nem ez az egyetlen eset, amikor árelfogadó magatartás lehetséges. [...] Képzeljünk el egy olyan piacot, ahol *állandó a kínálat* valamilyen romlékony áruból [...]. Ha csak két vagy három cég van a piacon, még akkor is megeshet, hogy mindegyik cég számára adottság a többiek ára. Ha a fogyasztók csak a legalacsonyabb áron hajlandók vásárolni, akkor a kínált legalacsonyabb ár a piaci ár. Ha valamelyik másik cég el akar valamennyit adni, csak a piaci áron tudja ezt megtenni. [...]

A versenyző vállalat által az ár és a mennyiség között érzékelt kapcsolatot megfogalmazhatjuk a [...] 14. ábra szerint. Mint látjuk, a keresleti görbe nagyon egyszerű. A versenyző vállalat *úgy véli*, hogy semmit nem ad el, ha a piaci árnál magasabbat kér. Ha a piaci áron ad el, akkor bármilyen mennyiséget el tud adni, ha a piaci ár alatt akar eladni, akkor az adott áron a teljes kereslet az eladás korlátja.

Szokás szerint kétféleképpen közelíthetünk *ehhez* a keresleti görbéhez. Ha a mennyiséget tekintjük az ár függvényének, akkor a görbe azt mondja, hogy a piaci áron vagy az alatt annyit adhatunk el, amennyit csak akarunk. Ha az árat tekintjük a mennyiség függvényében, akkor azt látjuk, hogy teljesen mindegy, mennyit adunk el, az ár független az eladásainktól. [...]



14. ábra. A versenyző vállalat keresleti görbéje. A piaci árnál a vállalati kereslet vízszintes. Magasabb áron a vállalat semmit nem ad el, a piaci ár alatt pedig a teljes keresleti görbe vonatkozik rá. (Forrás: Varian [1991b] 449. o.)

A vállalati keresleti görbe nem csak a fogyasztók magatartásától függ, hanem a többi vállalat magatartásától is. A versenyzői modell szokásos indoklása az, hogy ha nagyon sok kisvállalat van a piacon, akkor lényegében mindegyikük keresleti görbéje vízszintes. De még ha csak *két* vállalat is van a piacon, és az egyik ragaszkodik egy *fix árhoz* —akármennyi is az—, a másik vállalat versenypiaci keresleti görbéje a [. . . 14.] *ábrán* látotthoz lesz hasonló. A versenyzői modell tehát a körülmények tágabb körére alkalmazható, mint első pillantásra látszik” (i.m. 447-449. o., *B.J.* kiemelési és kiegészítései).

Vajon milyen pontatlanságokat, következetlenségeket fedezhetünk fel az előbbi, első olvasásra tökéletesen meggyőző, logikusnak és plauzibilisnek tűnő szövegben?

Mindenekelőtt nehezen fogadható el, hogy a tiszta verseny létezése pusztán a vállalatok bizonyos *feltételezésén*, majd e feltételezéssel kongruens viselkedésén alapul. Ez legfeljebb nagyon rövid távon lehet igaz, hiszen előbbutóbb („*a király meztelen!*” effektus logikája szerint) számítani lehet valamelyik szereplő „szereptévesztésére” amely egyben a tökéletes versenyt szülő attitűdrendszer tesztelését, irrelevanciája esetén pedig korrekcióját, a létező kondícióknak megfelelő új piaci típus kialakulását is jelenti.

Habár Varian, és való igaz: a józan „paraszti” ész szerint is „*magától értetődő*”, hogy egy atomisztikusan tagolt, homogén iparágban az egyes vállalat számára a piaci ár előre meghatározott adottság (amelytől *árakra orientált* magatartást feltételezve sem lenne racionális eltérnie), egy tudományos igényvel íródott műben talán szerencsésebb lett volna —a kivételeknek is teret engedve— a „*nagy valószínűséggel*” kifejezést használni. Az 5. *ábra* áttekintésénél ugyanis megfigyelhettük, hogy egy erősen *rugalmatlan keresletű* jószágfajta forgalmazva még egy *alacsony* költségvetési részesedést birtokló cég aspektusából sem lehetetlen az *ármeghatározó* pozíció elérése. (Ezzel szemben viszont —egy *nagyon rugalmas* keresletű piacon— furcsa módon még egy tökéletes hegemoniával rendelkező monopolista is csupán *árelfogadó* lehet.)

A citátumban megjelenő „*állandó —mintegy ‘lebetonozott’— kínálatú*” oligopólium számára valóban adottság lehet a piaci ár, megjegyezve, hogy ez a megállapítás trivialis. Az említett —egyébként pedig általában csak *nagyon rövid* távon teljesülő— feltétel mellett ugyanis e tétel alól egyetlen iparág (legyen akár tiszta versenyző vagy éppen tökéletes *monopolista*) sem kivétel. Kérdéses ugyanakkor, hogy az *árelfogadó/ármeghatározó* „címkét” a *piaci* időtávon megfigyelhető viselkedés alapján célszerű-e kiosztanunk. Félő, hogy olyan hibába esnénk, mint amikor az élőlények —*fajukra jellemző*— mozgékonyosságát a másodperc törtrésze során, vagy éppenséggel megkötözött állapotban megfigyelt helyváltoztatásuk alapján ítélnék meg, s ezt követően *egységesen mindegyiket* a „mozdulatlan” tulajdonsággal ruháznánk fel.

Meggondolásra méltó továbbá, hogy mennyire valóságos a piac *nagy hányadát birtokló* szereplők esetében egy adott és akár romlékony árukészlet *teljes* egészének értékesítési szándéka. Korántsem elképzelhetetlen ugyanis, hogy —a profitszempontra figyelembe vételével— a készletnél *alacsonyabb* kínálat bizonyul előnyösnek, aminek beállítása az *árszintre való hatást generál*

Varian konstans kínálatot feltételező forgatókönyvével szemben. Ha pedig mégis a létező készlet nagyság (output) eladása bizonyul optimálisnak, az egy korábbi, de ugyancsak *ármeghatározó* (menyiségi) döntés következménye lehet.

És ami talán a legsúlyosabb: a keresleti görbe analizálása során Varian —nagyon sok szerző társaságában (pl. Baumol [1968] 372. o., Carlton — Perloff [2003] 97-99. o., Heyne [1991] 188. o., Koutsoyiannis [1991] 154-155. o., Stigler [1989] 27. o., stb.) — elköveti azt a hibát, hogy *ugyanazon* görbe vízszintes pozíciója mögött látja/láttatja munkálkodni a javak helyettesíthetőségéből eredő szoros versenyt (*ár* → *kereslet* szemlélet), illetve a cég árelfogadó pozícióját is (*kínálat* → *ár* szemlélet). Ezzel —természetesen szándékolatlanul— mintegy azt az illúziót kelti, hogy *szimultán, egymást feltételező* jelenségekről van szó, amelyek mintha egy magasabb metaszinten létező entitás —a tökéletesen kompetitív piac— egymásba transzformálható megnyilvánulásai lennének (lásd még Varian [1991a] 215. o.). Bízunk benne, hogy tanulmányunk előző fejezeteiben (elsősorban a 6. és 12. ábrák felhasználásával) ennek ellenkezőjéről sikerült meggyőznünk az Olvasót, nevezetesen: *a verseny homogenitása versus inhomogenitása, valamint a szereplők árelfogadó versus ármeghatározó pozíciója* valójában *nem egymás implikációi*, és nem is ugyanazon, hanem *kétféle, egymást nem fedő* —aszimmetria és maradék— keresleti görbék jellemzőihez kapcsolható, *logikailag független* momentumok.

Állításunkat illusztráló példaként: egy *homogén* duopólium vállalatának aszimmetria görbéi természetesen *végtelen árrugalmasságúak, ennek ellenére* ezek a cégek *mégsem árelfogadók*: maradék keresleti görbéik flexibilitása szignifikánsan eltér nullától. Elég csak a Cournot- vagy a Bertrand-duopolisták magatartására gondolnunk, melyek közül az előbbieket kínálati döntéseikkel közvetve, utóbbiak pedig közvetlenül, direkt módon is *befolyásolják* —az üzleti ésszerűség szellemében— termékeik árát. Ugyanígy: habár a monopolisztikusan versenyző kisvállalatok kínálati szintjük parciális módosításával csupán elenyésző hatást tudnának gyakorolni az *iparág* árszintjére, aszimmetria keresleti függvényük mégsem végtelen árrugalmasságú.

Varian (amint a fentiekben jeleztük, korántsem egyedül), mintha csak a *Selye* ([1980] 378-418. o.) által akkurátusan felsorolt kutatói tévutak valamelyikén barangolna, vélhetően a két keresleti görbe-típus —*tiszta verseny* körülményei között egyaránt *vízszinteshez* tartó, *heterogén versenyben* pedig *negatív meredekséget* felvevő, és *egymással azonosulni látszó*— szemfényvesztő pozíciójának esik áldozatul. Minden bizonnyal érzi azonban, hogy a két görbe egyesítése homogén oligopólium esetén ellentmondást szül: a tökéletesen helyettesítő javak léte vízszintes, a nyilvánvaló ármeghatározó képesség pedig szembeötlően negatív meredekségű grafikont implikálna; a két tulajdonság viszont ugyanazon függvény vonatkozásában kizárja egymást. Meglátásunk szerint ezt a konfúzus helyzetet nem sikerül a modell némileg „nyögvényvelős” („konstans kínálatra” vagy „fix árra” vonatkozó) kiegészítéseivel sem kezelnie. Nem világos például, hogy ha az egyik szereplő ragaszkodik is valamilyen árszinthez, akkor a másik oligopolista „versenypiaci” keresleti görbáját miért nem lehet a *kínálat* → *ár* szemléletnek megfelelően értelmezni,

és ezt követően regisztrálni, hogy a kínálat parciális változtatása bizony tart-hatatlaná teszi az ominózus árnívót.

Az aszimmetria és maradék-keresleti görbék összemosásával kapcsolatos csúsztatások Varian további levezetései is előfordulnak. Ilyen például az [1991b] 498. oldalán található, y -t ezúttal a *kínálati tömeg* jelölésére lefoglaló

$$MR(y) = p(y) \left(1 - \frac{1}{|\varepsilon(y)|} \right) = MC(y) \quad (69)$$

formula, melynek révén a szerző azt igyekszik bizonyítani, hogy mivel „a *kompetitív esetben* mindegyik vállalat keresleti görbéje egyenes —azaz *végtelen [ár]rugalmasságú görbe*” (uo., *B.J.* kiemelési és kiegészítése), ebből az ár és a határkölttség egyenlősége következik az optimális kibocsátási szint kritériumaként. Állítását ugyan alátámasztani látszik a matematikai séma, amit azonban problémásnak érzünk: a szövegből —lévén, hogy a kereslet *árrugalmassága* csak ez esetben lenne releváns— önkéntelenül az *aszimmetria* keresleti görbe egyenes (értsd: vízszintes) pozíciójára asszociálunk. Holott — mivel a határbevétel a *mennyiség* függvényében adott — valójában a *maradék-keresleti* görbére és ennek zérus *flexibilitására* kellene gondolnunk.

Hasonló félreértésekre ad alkalmat Varian *sok vállalat Cournot-egyensúlyi helyzetére* vonatkozó levezetése is. A szerző ennek során az

$$MR(y) = p(Y) \left(1 - \frac{1}{|\varepsilon(Y)|/s_i} \right) = MC(y_i) \quad (70)$$

egyenlethez jut el, amelyben a nagy és kis Y betűk váltakozása az aggregált (iparági) illetve vállalati kategóriákra utal, i az iparág egyik szereplőjét, s_i pedig ennek piaci részesedését jelenti. A (29)-re támaszkodva figyeljük meg: a formulában szereplő tört tulajdonképpen nem más, mint a *vállalati árflexibilitás*, Varian azonban így kommentálja a végeredményt: „Ez éppen úgy néz ki, mint egy monopóliumnál, kivéve az s_i tényezőt. Az $\varepsilon(Y)/s_i$ tagot a *vállalat keresleti függvényére vonatkozó rugalmasságnak* is tekinthetjük: minél kisebb a vállalat piaci részesedése, annál rugalmasabb a keresleti függvénye. Ha a piaci részesedés 1 —a vállalat monopolhelyzetű— a vállalati keresleti görbe egyben a piaci keresleti görbe [...]. Ha a vállalat csak egy igen kis része egy nagy piacnak, akkor piaci részesedése gyakorlatilag nulla, a vállalati keresleti görbe pedig gyakorlatilag végtelen rugalmasságú” (i.m. 540. o., *B.J.* kiemelése).

A zavar ezúttal is azzal kapcsolatos, hogy ha egy *homogén* javakat forgalmazó iparág (Cournot-oligopólium) áll a vizsgálat fókuszában, akkor miért csak *nagyszámú* vállalat esetén lesz a szereplők keresleti függvénye vízszintes? Egyáltalán pedig milyen típusú keresleti görbéről van szó? A formulában látható —és az ár változtatását feltételező— árrugalmasság alapján egy *aszimmetria*-típusú görbére gondolhatnánk. Ha viszont figyelembe vesszük, hogy a Cournot-modellben az aktorok kizárólag *kínálat-orientált* döntéseket hoznak, akkor ezzel a magatartással disszonáns, ha a kereslet *ár-elaszticitásáról* beszélünk. Egy hasonlattal élve: szaknyelvünk szegénysége ezen a téren olyan

jellegű problémákat vet fel, mint amikor egy kiválóan elkészített, ínycsiklandó éték elfogyasztása után a „nem visszataszító”, „egyáltalán nem büdös”, „korántsem gusztustalan”, „messzemenőig nem íztelen” stb. kifejezésekkel dicsernénk a háziasszonyt. Meggyőződésünk: ha az egyes formulák megfelelő helyére *mennyiségi* alkalmazkodó viselkedés esetén nem az árrugalmasságot, hanem az árflexibilitást iktatnánk be, elkerülhetők lennének az ilyen — fogalmi területen jelentkező — ellentmondások. Talán hasonlóképpen előnyös lenne, ha a *kínálat* \rightarrow *ár* szemléletű görbékét is más néven — „*keresleti függvény*” helyett például „*a keresleti ár függvényeként*” — emlegetnénk.

A Varianéhez hasonló bosszantó csúsztatásokat, következetlenségeket tartalmaz a *price taker/price maker* fogalmak magyarázata során a *Carlton-Perloff* szerzőpáros — egyébként rendkívül magas szakmai színvonalat képviselő — [2003] könyve. Szokás szerint ezúttal is egy idézettel kezdjük:

„A versenyző vállalatokat gyakran árelfogadónak hívjuk. Ezek a vállalatok *úgy vélik*, nem képesek a piaci ár befolyásolására, és adottságként kell elfogadniuk azt. [...]

Árelfogadó a vállalat, amennyiben vízszintes keresleti görbével szembesül, *mivel* egy vízszintes keresleti görbe keresleti *árrugalmassága végtelen*. Ha egy végtelenül rugalmas kereslettel szembesülő vállalat akár kicsit is megemeli az árat, minden értékesítéstől elesik. *Ezzel ekvivalens módon*, a vállalat nem képes árat emelni azáltal, hogy csökkenti a termelt mennyiséget. Ezzel szemben az olyan vállalat, amelyik negatív lejtésű keresleti görbével szembesül, növelheti az árat azzal, hogy csökkenti kibocsátását.

Ha egy piacon a vállalatok száma nagy, bármely adott vállalat egyedi keresleti görbéje csaknem vízszintes (a kereslet rugalmassága végtelen), noha a piaci keresleti görbe negatív meredekségű (a rugalmasság viszonylag kicsi). [...]

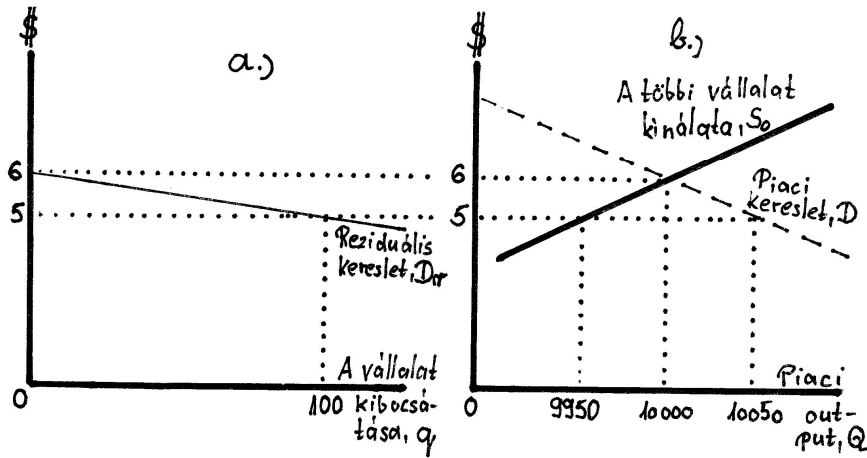
Ennek az eredménynek a bizonyításához meg kell határoznunk a vállalat egyedi keresleti görbéjét: a reziduális keresleti görbét. Egy vállalat azoknak az embereknek értékesít, akiknek a keresletét nem elégíti ki a piacon lévő többi vállalat. Pozitív reziduális kereslet esetén a $D_r(p)$ reziduális kereslet a $D(p)$ piaci keresleti görbe és a többi vállalat $S_0(p)$ kínálatának a különbsége:

$$D_r(p) = D(p) - S_0(p) \quad (71)$$

Ha $S_0(p)$ nagyobb, mint $D(p)$, $D_r(p)$ nullával egyenlő.

A [... 15.b] *ábra* a piaci keresleti görbét, és egy kivételével valamennyi vállalat kínálati görbéjét mutatja. A [... 15.a] *ábra* az egyedi vállalat reziduális keresleti görbéjét mutatja, ami adott ár mellett a piaci kereslet és a többi vállalat kínálata közti különbség. [...]

6 dollárnál a többi vállalat kínálata egyenlő a kereslettel. [... Ezért] 6 dolláros, és minden azt meghaladó áron az *a)* ábrán bemutatott vállalat *nem fog értékesíteni*.



15. ábra. A reziduális keresleti görbe levezetése a.) Az egyedi vállalat terméke iránti reziduális kereslet; b.) A piaci kereslet és a többi vállalat kínálata. (Forrás: Carlton – Perloff [2003] 98. o.)

Az egyes vállalat *reziduális* keresleti görbéje a [... 15.a] ábrán sokkal laposabb, mint a piaci keresleti görbe a [... 15.b] ábrán. Ennek megfelelően az egyedi vállalat keresleti rugalmassága jóval nagyobb, mint a piaci rugalmasság. [...]

Általánosabban, ha n azonos vállalat működik a piacon, akkor az i -edik vállalat iránti kereslet rugalmassága

$$\varepsilon_i = \varepsilon_n - \eta_0(n - 1), \quad (72)$$

ahol ε a piaci kereslet rugalmassága (egy negatív szám), η_0 a többi vállalat kínálatának rugalmassága (egy pozitív szám), $(n - 1)$ pedig a többi vállalat száma.

Tehát adott piaci rugalmasság mellett növelve a piacon lévő vállalatok n számát, az i -edik vállalat egyedi keresletének ε_i rugalmassága abszolút értékben nő (negatívabbá válik). Ehhez hasonlóan, minél nagyobb a többi vállalat η_0 kínálati rugalmassága, vagy minél nagyobb a többi vállalat száma, annál nagyobb abszolút értékű (annál negatívabb) az i -edik vállalat egyedi keresletének rugalmassága. [...]

[A fenti képlet alkalmazásával kiderül, hogy ha például] a piaci kereslet rugalmassága $-0,5$ és 1000 vállalat van a piacon, [akkor] $\varepsilon_i = -500$, vagyis ha a vállalat egy tizedszázalékkal megnövelné az árat, az általa értékesített mennyiség 50 százalékkal csökkenne [feltéve, hogy a többi vállalat kínálata tökéletesen rugalmatlan ($\eta_0 = 0$)]” ([2003] 97-99. o., B.J. kiemelései és kiegészítései).

Carlton és Perloff modelljével ismerkedve mintha az egyik legismertebb Murphy „törvény” parafrázisa igazolódna: a szerzők szinte minden olyan hibát elkövetnek, ami az árelfogadó/ármeghatározó fogalmak értelmezése során csak lehetséges. Ilyen például az a megállapításuk, amely szerint ezek a kifejezések a vállalatok *viselkedésére* alkalmazhatók, ez utóbbinak milyensége

viszont az aktorok *vélekedésétől, anticipációitól* függ. Ezt a felfogást a fentiekben már bíráltuk, és ezúttal is megismételjük: *a gazdasági szereplők piaci környezetükhöz való viszonyulása elsősorban bizonyos képességek birtoklásától függ, és csak másodsorban hozható kapcsolatba az aktorok önmagukról és piaci társaikról alkotott képzetével.* (Hasonlóképpen történik ez az élet nem-gazdasági dimenzióiban is: a realitástól elszakadó imaginációk bár léteznek, de *kórosnak* tekinthetők — talán elég, ha a pszichiátriák „Napoleonjaira”, *versus* a magukba forduló, önbizalomhiánytól szenvedő, lehetőségeiket ki nem használó depressziós emberekre gondolunk.)

A citátum további részei a helyettesítés szorosságáról informáló aszimmetria és az árbefolyásoló képességre utaló maradék-keresleti görbék tökéletesen differenciálatlan kezeléséről, durva egybemosásáról (még pontosabban: kettéválasztásuk hiányáról) tanúskodnak. Nem igaz például, hogy a végtelenül árrugalmas kereslet lenne az árelfogadó magatartás *conditio sine qua non*-ja, ez ugyanis a piacon megjelenő javak homogenitását jelzi. Továbbá: habár a végtelenül rugalmas kereslettel szembeesülő vállalat valóban elveszíti vevőit egy jelentéktelen áremelés következtében, ezzel azonban *nem ekvivalens* jelenlét (pl. a homogén oligopóliumban), hogy ha csökkenti a termelt mennyiséget, akkor ne lenne képes emelni a termék piaci árát.

A szerzők ezt követően levezetik a reziduális keresleti görbét, amely két dologban különbözik az általunk definiált funkciótól. Egyrészt megengedi, hogy az iparág „többi” vállalatának kínálata ne konstans, hanem változó legyen, másrészt a maradék-keresletet —helytelenül— az *ár függvényében* értelmezi. Nem is csodálkozhatunk, hogy ezzel az interpretációval kapcsolatban több probléma is felmerül:

- Egyfajta *prekogníció*ról tanúskodik az *árelfogadó* szereplők kínálati függvényének beemelése abba a reziduális keresletet meghatározó algoritmusba, amely éppen az aktorok árbefolyásoló képességének felmérésére szolgálna.
- Nem derül ki egyértelműen, hogy a modellben *szimultán* és *szimmetrikus-e* az ár változ(tat)ása az iparág vállalatai vonatkozásában? A reziduális keresleti görbe származtatása arra utal, hogy minden szereplő *egységes* árat alkalmaz, az idézett szöveg utolsó mondatai viszont azt sejtetik, mintha az ár módosítása *egyéni kezdeményezés* lenne.
- Ha az árváltoztatás *egyéni* akció, nehéz lenne megindokolni, hogy az iparág feltételezhető *homogenitása* mellett *miért nem végtelen*, hanem a (72)-nek megfelelő véges érték az árrugalmasság szintje.
- Ha viszont mégis mindenki *azonos* áron értékesít, miért releváns az a feltételezés, hogy 6 dolláros árnál a szóban forgó cég elveszíti vevőit? Sokkal valószínűbb, hogy az illető egységárnál fellépő túlkínálat *szétterül* a piacon, és nem egyetlen vállalatot érint. Egyáltalán: komolyan lehet-e gondolni, hogy az iparág $(n - 1)$ szereplőjének kínálati szándéka *biztosan* realizálódik, egy pedig —amelyről semmi okunk feltételezni, hogy

alárendelt pozícióban lenne— csupán a maradék, nem kizárt, hogy zérus nagyságú keresletre tarthat igényt?

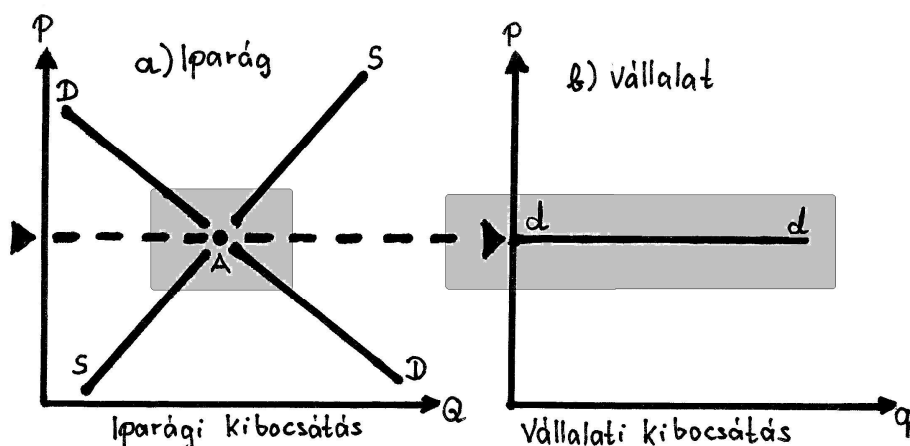
- A Carlton és Perloff által definiált maradék-keresleti görbe alakja — éppen a most megkérdőjelezett furcsa tulajdonsága miatt— *tökéletesen független a vizsgált vállalat tényleges méretétől*, vagyis éppen arra alkalmatlan, amire hivatott lenne: a *price taker/price maker* pozíció jelzésére. A szerzők e fogyatékoságot a szereplők *azonos méretének* feltételezésével igyekeznek korrigálni a (72) képlet megalkotása során: az iparágot alkotó cégek *számossága* (mint a vállalati nagyság reciproka) ily módon a reziduális kereslet ár rugalmasságát befolyásoló tényező lehet.
- Ha azonban el is tekintünk a most jelzett problémától, további ellentmondást szül, hogy —legalábbis a szerzők fogalmazásmódja szerint— a reziduális kereslet automatikusan *megegyezik* a szóban forgó vállalat *értékesítési szintjével*. Ekkor ugyanis egy vízszinteshez közeli (tehát elvileg *árelfogadó* pozíciót jelző, *végtelen ár rugalmasságú*) görbe szerint a cég igen nagy határok között lenne képes kínálatát változtatni, ami viszont paradox módon éppen az aktor *ármeghatározó* jellegét valószínűsítene.

Figyeljük meg: a fentiekben felsorolt —a modell relevanciáját kikezdő— problémák egy csapásra eltűnnek, ha a maradék-keresleti görbét az általunk javasolt *kínálat* → *ár* szemléletben értelmezzük, és a kereslet ár rugalmassága helyett az ár kínálati flexibilitásával jellemezzük. Belátható az is, hogy ha a vizsgált cég outputjának változtatásakor *átmenetileg* adottnak tekintjük a „többi” vállalat kínálatát (vagyis ha η_0 zérus), továbbá megengedjük, hogy $1/n$ a vállalat(ok) piaci részesedésének (s) feleljen meg, akkor a (72) formula reciproka a vállalati ár flexibilitásra általunk adott (29) összefüggéssel lesz ekvivalens.

A Varian – Carlton-Perloff modellek tárgyalása után végezetül egy némileg ritkábban előforduló, mindazonáltal a szakírók körében meglehetősen „népszerűségnek” örvendő pongyolaságot mutatunk be *Samuelson* sorait citálva. Megjegyezzük azonban, hogy az elméleti közgazdaságtan nem csak alap, hanem *haladó* szintű könyvei is előszeretettel alkalmazzák az *árelfogadó versus ármeghatározó* magatartás lényegének érzékeltetésére a most ismertetésre kerülő megközelítést (pl. Henderson–Quandt [1971] 107. o., Schumann [1998] 169. o.):

„Mivel egy kompetitív ágazatban olyan vállalatok vannak, amelyek *kicsik a piachoz mérten*, ezért a reprezentatív cég keresleti görbéje az ágazati keresleti görbe elhanyagolhatóan kis része csak. *Az egyes cégre olyan kis rész jut az ágazati keresleti görbéből, hogy ez a kicsiny szakasz a cég szemében teljesen vízszintesnek vagy másként végtelenül rugalmasnak tűnik.* A [... 16.] ábra azt szemlélteti, hogy egyetlen versenyző esetében a kereslet rugalmassága mérhetetlenül nagyobb, mint a teljes piaci keresleté” (Samuelson – Nordhaus [2003] 134. o., *B.J.* kiemelései és kiegészítése). Az *ármeghatározó* pozíció pedig —stílszerűen egészítve ki Samuelson gondolatmenetét— nyilván arra

vezethető vissza, hogy a piacot „beterítő”, komoly vásárlóerőt lekötő cégek az aggregált keresleti görbe széles tartományát bejárva már érzékelné tudják mennyiségi döntéseik árvezetéseit.



16. ábra. A keresleti görbe vízszintesnek tűnik a tökéletes versenyző számára. Az ágazati keresleti görbe a bal oldalon található, s rugalmatlan keresletet mutat kompetitív egyensúly esetén (A pont). A jobb oldalon lévő tökéletesen versenyző azonban a piacnak csak olyan kis részét látja el, hogy a kereslet számára teljesen vízszintesnek tűnik (vagyis teljesen rugalmasnak). A tökéletes versenyző annyit adhat el a piaci áron, amennyit akar. (Forrás: Samuelson – Nordhaus [2003] 134. o.)

Az egyébként rendkívül didaktikus fejtegetés két vitatható elemet is tartalmaz, melyek egyikét: a *kínálat* \rightarrow *ár* szemléletű görbe *árrugalmassággal* való jellemzését —Varian és további szerzők műveire utalva— éppen a fentiekben bíráltuk. A kifejezőmód szabadsága azonban egy másik szempontból is megkérdőjelezhető, nevezetesen: félreértésre ad okot a keresleti görbe szubjektív, *vállalati perspektívából* szemlélt meredekségének magyarázata.

A gondolatmenet egészen addig könnyen követhető, ameddig azt kell belátnunk, hogy a keresleti árban csupán *elenyésző* változást képes generálni egy jelentéktelen vállalat hasonlóan infinitezimális kínálati tartományában való közlekedés. Nehezen érthető azonban, hogy a keresleti görbéből kiragadott részecske hosszúsága vagy rövidege miért befolyásolná érdemben annak meredekségét: miért kellene (a tiszta versenyzők által bejárható) *végtelesen kicsi*, pontszerű szakaszoknak *vízszintes* pozíciót felvenniük, eltérően az (oligo- vagy monopolisták diszpozíciója alá tartozó) *hosszabb* görbéik szembevetülő *negatív hajlásától*. Ez ugyanis azt jelentené, hogy egy bizonyos görbe tetszőleges pontjaiban a *differenciáhányadosok* szükségszerűen zérushoz tartanának, míg a *differenciáhányadosok* szignifikánsan eltérnének ettől.

A paradoxon feloldása azon a momentumon alapul, hogy az árelfogadó/ármeghatározó pozíciók jellemzéséhez, *a priori* nem a keresleti görbe *meredeksége*, hanem valójában *elaszticitása* szolgál támpontként. Ennek értékét azonban —a függvény meredekségén túl— bizonyos *lépték-effektus* is befolyásolja, hiszen a rugalmasság nem egyszerűen a változóban bekövetkező elmozdulások, hanem az elmozdulások *nagyságrendjeinek* relációja. Egy *meghatá-*

rozott mértékű kínálatváltozás tehát lehet *relatív*e kicsi (ha egy „gigantikus” tömeghez viszonyítjuk), és lehet nagy (egy szerény mennyiséghez képest). Habár Samuelson és az ugyanilyen módszertani fogást alkalmazó szerzők utalnak arra, hogy az aggregált keresleti görbe egy „*kicsi cég szemében*” látszik vízszintesnek, ez a trükk —legalábbis véleményünk szerint— a logikai szigorúság rovására megy. Szolgálja ugyan a meredekség és elaszticitás közti —jelentéstartalmukban mutatkozó— rés áthidalását, de sajnálatos módon legalább ennyire „hatékony” a két kategória összemosásában is.

9 Összegzés

Tanulmányunkban második részében rávilágítottunk, hogy a kereslet saját- (aszimmetria) árrugalmasságára és a vállalati árflexibilitásra adott *képletek megtévesztő módon egymás inverzei*. *Értékeik* azonban (a tiszta monopólium esetét kivéve) mégsem állnak reciprok viszonyban, hiszen *nem ugyanazon* keresleti görbe viselkedését tesztelik. Ez az inkongruencia arra utal, hogy *az ár- versus kínálatorientált döntések eredményeinek ekvivalenciája csak kivételesen, tiszta monopolhelyzetben valósul meg*.

A mértékadó szakforrásokban is tetten érhető pongyolaságok, csúsztatások elkerülése végett javasoltuk a fentiek alapján, hogy *a kifejezetten mennyiség \rightarrow ár szemléletben értelmezhető függvényeket „(maradék) keresleti görbe” helyett „a keresleti ár görbéjének” nevezzük, pozíciójukat pedig a téves asszociációkat keltő kereslet árrugalmassága helyett az ár kínálati flexibilitásával jellemezzük*.

Eredményeinket igyekeztünk *általános* formában is megfogalmazni. Ennek érdekében olyan, az árrugalmasságok *versus* árflexibilitások azonosságainak rendszerén nyugvó modellt hoztunk létre, amely a *sokszereplős versus monopolista*, más szempontból a *homogén versus differenciált* iparág specifikumait is képes befogadni, a végleteket pedig határesetként kezelni. Bizonyítottuk többek között, hogy ha az iparágat *differenciált* termékeket gyártó vállalatok alkotják, akkor valamely cég parciális kínálatváltoztatása nem azonos, hanem tipikusan *eltérő* %-ban érinti *saját*, illetve az iparág *többi* (másik) vállalata által érvényesíthető (keresleti) árat. Emiatt kétféle: *saját*-, valamint *kereszt-árflexibilitás* (sőt, értelmes módon ezek *átlaga*) határozható meg. Levezetéseinkből azonban kiderült, hogy egy vállalat iparági árszintet befolyásoló képessége végső soron ekkor is a piaci részesedésével arányosan, az aggregált kereslet árrugalmasságával pedig fordítottan arányosan alakul. A homogén esettel összevetve a különbség „mindössze” annyi, hogy e tétel a saját és a másik (többi) termék árára gyakorolt hatás *átlagaként* érvényesül a

$$\varphi_x^{ind} = \hat{s}_x \varphi_x^x + \hat{s}_y \varphi_x^y = \hat{s}_x \Phi_{\Sigma S} \quad (54)$$

formulának megfelelően. Az árrugalmasságok és árflexibilitások logikai rendszere között *mély analógiás kapcsolatot* mutattunk ki, amely a modell két aspektusát képviselő oldalak közötti *dualitás* velejárója. Ennek talán leg-

fontosabb megnyilvánulását az (54) és vele analóg

$$\varepsilon_{ind}^x = \hat{s}_x \varepsilon_x^x + \hat{s}_y \varepsilon_y^x = \hat{s}_x \varepsilon_{\Sigma D} \quad (66)$$

összefüggések kölcsönös megfelelésében fedezhettük fel. Feltártuk azonban azt is, hogy a „tükör” sémák — a helyettesítés rugalmasságának közvetítésével — az

$$\frac{\varepsilon_x^x - \varepsilon_y^x}{1 + \varepsilon_y^x/100} = \sigma = \frac{1 + \varphi_x^y/100}{\varphi_x^x - \varphi_x^y} \quad (68)$$

formula révén *közös rendszerben egyesíthetők*, amelynek révén meggyőződhetünk arról, hogy a saját- és kereszt-árrugalmasságok, *versus* saját- és kereszt-árflexibilitások viszonya *vica versa* meghatározott: ε_x^x és ε_y^x relációjából következtetni lehet φ_x^x és φ_x^y relációjára — és viszont.

Tanulmányunk végén tisztában vagyunk vele, hogy diszciplínánk nyelvezete tökéletlenségei ellenére is képes —Bohr „mosogatóvizéhez” hasonlóan— viszonylagos sikerrel ellátni feladatát. Mindazonáltal reménykedünk, hogy kutatómunkánk nem volt teljesen haszontalan: örömünkre szolgálna, ha eredményeinkkel valamennyire is hozzájárulhatnánk a szakmai disputát zavaró félreértések leküzdéséhez.

Irodalom

1. Allen, B. (1992): Price and quantity competition in homogeneous markets, *Economics Letter* 38.
2. Barancsik J. (1995): A helyettesítés és komplementaritás értelmezési problémái a közgazdasági elméletben I. *Sigma* XXVI. évf. 1-2.
3. Baumol, W. J. (1968): *Közgazdaságtan és operációanalízis*, Közgazdasági és Jogi Kiadó, Budapest [Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1961]
4. Carlton, D. W. – Perloff, J. M. (2003): *Modern piacelmélet*, 3rd, Panem, Budapest [Pearson Education, Inc., publ. as Addison Wesley Longman & Comp., 2000]
5. Henderson, J. M. – Quandt, R. E. (1971): *Microeconomic Theory: A Mathematical Approach*, McGraw-Hill Book Company, New York, London
6. Heyne, P. (1991): *A gazdasági gondolkodás alapjai*, Tankönyvkiadó, Budapest [Macmillan Publ. Comp. 3rd ed., New York, 1991]
7. Koutsoyiannis, A. (1991): *Modern Microeconomics*, Macmillan, London
8. Samuelson, P. A. – Nordhaus, W. D. (2003): *Közgazdaságtan*, 16. ed., KJK-KERSZÖV Jogi és Üzleti Kiadó, Budapest [McGraw-Hill Comp. Inc. New York, 1998]
9. Schumann, J. (1998): *A mikroökonómiai elmélet alapvonásai*, 6. ed., JATE-Press, Szeged [Auflage Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1992]
10. Selye J. (1980): *Álomtól a felfedezésig: Egy tudós vallomásai*, Akadémiai Kiadó, Budapest [McGraw-Hill Book Comp., New York, Toronto, London]
11. Stigler, G. J. (1989): Verseny, In: *Piac és állami szabályozás* (vál.), Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest [In: International Encyclopedia of the Social Sciences, vol. 3., Crowell-Collier and Macmillan Inc., 1968]

12. Tasnádi A. (2006): Price vs. Quantity in Oligopoly Games, *International Journal of Industrial Organization*, 24. Elsevier Science S. A.
13. Triffin, R. (1940): *Monopolistic Competition and General Equilibrium Theory*, Harvard University Press, Cambridge, Mass.
14. Varian, H. R. (1991a): *Microeconomic Analysis*, W. W. Norton & Company, New York, London
15. Varian, H. R. (1991b): *Mikroökonómia középfokon: Egy modern megközelítés*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest [W. W. Norton & Comp., New York, London, 1987]
16. Zalai E. (2000): *Matematikai közgazdaságtan*, KJK-Kerszöv Jogi és Üzleti Kiadó, Budapest

A CONTRIBUTION TO THE CLARIFICATION OF „PRICE TAKER” AND „PRICE MAKER” TERMS (II)

The first part of our paper proposes a practical method for the interpretation and quantification of the price taker/price maker feature of the actors on the economy's supply side within the framework of a homogenous industry. Throughout the analysis, we placed a special emphasis on the revelation of demand side rules, which provides us a logic context. The second part of the paper generalizes the results with the help of a model that considers extremities as marginal cases and includes the specific features of both the competitive and monopolistic and, from another point of view, the homogenous and differentiated industries. During this practice, we try to find the reason behind the fact that the outcomes of the decisions concerning the prices versus the quantities are not equivalent. In addition, we show what kind of logic misinterpretations were made by the prominent papers of this area when illustrating the price taker or price maker behaviour of companies.

A VILLAMOSENERGIA-SZOLGÁLTATÁSSAL VALÓ ELÉGEDETTSÉG MÉRÉSEKOR ALKALMAZHATÓ KVANTITATÍV MÓDSZEREK ÉS MODELLEK ¹

PINTÉR JÓZSEF – REKETTYE GÁBOR
PTE KTK

1 Bevezetés

A szolgáltatásminőség és a fogyasztói elégedettség mérése élénk érdeklődésre tart számot az elmúlt húsz évben, és igen fontos szerepet tölt be ma már a hazai gyakorlatban is. A marketingkutatók többsége szerint a szervezetek hosszú távú sikere elsősorban azon múlik, hogy képesek-e megtartani és növelni egy nagy és elégedett vásárlói bázist. Az elégedettség kulcsát a kiváló minőség biztosításában látják, abból kiindulva, hogy a jobb szolgáltatásminőség növekvő elégedettséghez, az elégedettség pedig magasabb fogyasztói hűséghez vezet. A szolgáltatásminőség fogalmát, mint a versenyelőny egyik eszközét mind az elméletben, mind a gyakorlatban elfogadták, a szolgáltatásminőség kutatása pedig a marketingtudomány egyik önálló ágává vált. A szolgáltatások minőségét és az ebből következő marketingfeladatokat érintő nemzetközi szakirodalom kiváló összefoglalóját adják Brown valamint Fisk és társai (Brown et al. 1991; Fisk et al. 1993).

A szolgáltatásminőség és az elégedettségi vizsgálatoknak rendkívül széles a nemzetközi szakirodalma. Álljon itt csupán néhány szerző műve; például (Parasuraman et al. 1988, 1993; Cronin and Taylor, 1992, 1994; Fornell, 1992, 1996; Zeithaml et al. 1996; Anderson and Sullivan, 1993, Anderson et al., 1994; Grönholdt et al., 2000). Meglehetősen kevés szakirodalom foglalkozik azonban e vizsgálatoknak a közszolgáltatásokra való adaptálásával. Jelen tanulmány ezzel a területtel kíván foglalkozni, azzal a céllal, hogy létrehozza és bemutassa az elégedettség-vizsgálatoknak egy, e területre alkalmazható statisztikai modelljét.

A fogyasztói elégedettséget mérő különböző tényezők, változók és az elégedettséget kifejező összetett mérőszámok, mint független változó közötti összefüggések sokféle munkahipotézis ellenőrzését teszik lehetővé, ami gyakorta igényli kvantitatív modellek felépítését, analízisét is. Meg kell említenünk, hogy a nemzetközi szakirodalomban, a téma kapcsán gyakran találkozunk statisztikai módszerekre épülő elemzéseket bemutató közlésekkel (Oliver 1980;

¹A tanulmány opponensi véleményeket is figyelembe vevő átdolgozása még nem készült el teljes mértékben, amikor Pintér József tragikus halála bekövetkezett. A Szigma az elhunyt szerző emléke előtt kíván tisztelegni azzal, hogy a nem végleges dolgozatot jelen formájában közli. A szerzők köszönetet mondanak az OTKA T037855. számú támogatásának. Beérkezett: 2007. január 15. E-mail: rekettye@kkt.pte.hu.

Grönroos, 1984, Bloemer and Kasper, 1995, Wirtz and Bateson, 1999, Chi Cui at al., 2003).

Jelen tanulmány a magyar villamosenergia-szolgáltatással való fogyasztói elégedettség vizsgálatának tapasztalataiból merített. Területileg behatárolt szolgáltató cégek lakossági fogyasztóinak adatai segítségével elemzi a főbb meghatározó tényezőket, keresvén itt a legfontosabb fogyasztói motivációkat, faktorokat, és kísérletet tesz egy olyan modell kialakítására, amely szimulációs vizsgálatokat, előrejelzéseket tesz lehetővé.

A mondanivalónk kifejtése során nem szabad az energiaszolgáltatás mai gyakorlatának sajátosságaitól eltekinteni. Magyarországon is megvalósultak már a liberalizáció első lépései, és körvonalazódtak a továbblépés módozatai.

2 A fontosság és elégedettség mérése

A villamosenergia-szolgáltatással való fogyasztói elégedettség mérésének magyar gyakorlata már majdnem egy évtizede együttesen vizsgálja a fogyasztói elvárásokat, fontosságot, a fogyasztói elégedettséggel. A kétféle megközelítést alapvetően a GAP indexek kiszámíthatósága indokolja (Rekettye and Tersztyánszky, 1997; Rekettye et al. 1997). A ún. gap indexek, a nemzetközi szakirodalomban PI (performance – importance) néven ismert módszer szerint, a szolgáltatás, illetve annak egyes összetevőjének a fogyasztók által észlelt fontosságát vetik egybe a szolgáltatási teljesítménnyel való fogyasztói elégedettséggel.

Az elégedettségi vizsgálatokat véletlen jellegű, kombinált mintavétel alapozta meg a hat áramszolgáltató társaság területén. A minta reprezentativitását és az eredmények megbízhatóságát a Magyar Energia Hivatal határozata írta elő. A megkérdezés személyes volt és a sok változó (nagy számú kérdésre adott válasz) együttes hatásaként alakultak ki az összetett az egyes áramszolgáltatókra vonatkozó komplex mérőszámok. A vizsgálat külön foglalkozott a háztartási és nem háztartási (üzleti, intézményi) fogyasztók elégedettségének vizsgálatával. Jelen tanulmányban csak a háztartási fogyasztókra vonatkozó vizsgálatot foglalkozunk.

A kérdésekre a megfigyelt háztartások 5 pontos ún. Likert-skála segítségével válaszoltak. A hivatkozott határozat előírta, hogy az eredményeket a vizsgálat során konvertálják, és az elégedettségi és fontossági indexek 0-100 skála alapján kerüljenek meghatározásra. Mindez jelzi egyúttal azt is, hogy a mért egyedi változók kategorikus jellege, az aggregálás során, végül egy-egy kvázi folytonosnak tekinthető változóvá transzformálódik. Az eredeti változók a transzformáció következtében természetesen nem lesznek folytonosak, így rájuk vonatkozóan a szokásos (pl. normalitási) követelmények továbbra sem érvényesek. Ugyanakkor a transzformáció egyértelműen javítja az eredmények interpretálhatóságát, illetve — az ismérvváltozatok terjedelmének növelésével — az egyes megítélésbeli különbségek plauzibilisebbé válnak.

Az összetett mutatókat a tényleges válaszadók figyelembe vételével, súlyozott módszerrel határozzák meg. Habár az egyes kérdések (változók, indiká-

torok) eltérőek a fontosság és az elégedettség függvényében, az aggregáltabb mutatók főbb szerkezetükben azonosak, így összehasonlíthatóak.

A villamosenergia-szolgáltatás liberalizációja során a magyar gyakorlatban is a villamos energia korábban egységes „csomagját” szét kellett bontani a hálózatot működtető egységre (elosztó hálózati engedélyes) és a szolgáltatást nyújtó egységre (közüzemi szolgáltató engedélyes). Ez a két részleg ma még a szolgáltató cégeknél egy társaság keretei között működik, de már így is lehetőséget ad arra, hogy a verseny teljes kialakulása során ugyanazon a hálózaton különböző szolgáltatóktól is vásárolható legyen a villamos energia. Az elégedettségi felmérést ezért mindkét szervezetre (*elosztó hálózati engedélyes* és *közüzemi szolgáltató engedélyes*) elkülönülten végezték el, egyszerű átlagolás segítségével azonban mód nyílt az összevonásra, azaz a cég együttes fontossági illetve elégedettségi mérésére is. Itt kell megemlíteni, hogy habár a dolgozat csak a háztartási fogyasztók elégedettségi problémáival foglalkozik, megállapításai általánosíthatók és vonatkoznak az ugyancsak évi rendszerességgel megfigyelt nem háztartási fogyasztói körre is.

3 Az empirikus kutatás módszertana

A változók, indikátorok jelentős száma és a megfelelő mintanagyság alapvetően a többváltozós statisztikai módszerek felhasználását indokolja. Jelen tanulmányban leírt vizsgálatainkat az egyik magyar áramszolgáltató társaság adataira alapoztuk. Ennek a szolgáltató cégnek a működési területe a főváros és környéke.

Adatbázis

A háztartási fogyasztói kör *fontossági* megítélését 30 darab, míg az *elégedettséget* 40 darab elemi változó, Likert-skálán mért indikátor segítségével mértük, 2010 elemű reprezentatív véletlen minta alapján. Természetesen az egyes indikátorok megfigyelt értékei a minta elemszámánál kisebbek voltak, ami alapvetően az adatok meg nem felelésének (missing) tudható be.

Az egyes indikátorok jelentését általában tömören kiírjuk, és csak az általános modellek, megállapítások esetén helyettesítjük őket különböző betűkkel.

A továbbiakban a szintetikus, összetettebb mutatók jelölésére vezessük be az **I** (importance=fontosság) illetve **S** (satisfaction=elégedettség) jelölést. Értelemszerűen **S**₁ az elosztó hálózati engedélyes, míg az **S**₂ a közüzemi szolgáltató engedélyes szervezetek elégedettségét jelölik.

Amint már fent említettük, az elemi kérdéseket 5-ös skálán mérték, a szintetikus mutatószámok 100-as skálán jelennek meg. A további összefüggések feltárása miatt válaszadónként is kiszámoltuk a különböző összetett, szintetikus mutatószámokat.

Faktoranalízis

A változók, indikátorok nagy száma (30 illetve 40 változó) mindenképp szükségessé teszi az információk tömörítését. Ezáltal nyílik mód arra, hogy a legfontosabb meghatározó elemeket kiragadjuk, hatásukat elemezzük. A statisztikai adatredukciós módszerek közül a főkomponens analízist választottuk. A választást indokolta a változók azonos mértékegységén túl, az eljárás viszonylag egyszerű volta, valamint az a tény, hogy segítségével könnyen értelmezhető faktorokat nyerhetünk.

A főkomponensnek f_t ($t = 1, \dots, p$) olyan lineáris kombinációk, amelyek az eredeti változókat x_j ($j = 1, \dots, p$) helyettesítik, másként belőlük, az eredeti változókból képezhetők egy megfelelő súlyrendszer (v_{jt}) segítségével. Tudjuk, hogy a főkomponensek páronként korrelálatlanok, szélsőséges esetben számuk megegyezik az eredeti változók számával, azonban a gyakorlatban sokszor lényegesen kevesebb számú főkomponens is ki tudja fejezni az adatbázisban rejlő legfőbb információkat. A fentiek általános formában:

$$\begin{aligned} f_t &= v_{1t}x_1 + v_{2t}x_2 + \dots + v_{jt}x_j + \dots + v_{pt}x_p \\ x_j &= v_{j1}f_1 + v_{j2}f_2 + \dots + v_{jt}f_t + \dots + v_{jp}f_p \end{aligned} \quad (1)$$

A főkomponensek, faktorok fontosságát sajátértékük jellemzik, csökkenő mértékben. Általában jónak mondható a faktor-modell, ha a megőrzött főkomponensek az összes szórás mintegy 80%-t megmagyarázzák. A faktorstruktúra áttekinthetőbbé válik, ha elvégezzünk egy megfelelő rotálást. Mi számításaink során az ún. VARIMAX módszert használtuk.

A módszer személtetésére kiválasztottuk a fontossági mutatók azon körét, amelyek a hálózati engedélyes tevékenységre (\mathbf{I}_1) vonatkoztak.

Az általánosan magas átlagos értékek mellett, néhány változó szórása erőteljes.

A rotálás után kialakult faktorstruktúrát szemlélteti a 2. táblázat.

A változó megnevezése	Átlag	Szórás	Relatív szórás (%)
Folyamatos áramszolgáltatás	4,90	0,363	7
Ne legyen feszültségingadozás	4,50	0,871	19
Növelhető fogyasztás	3,42	1,506	44
Gyors hibafelvétel	4,82	0,454	9
Tájékoztatás a hibákról	4,73	0,634	13
Gyors hibaelhárítás	4,86	0,394	8
Tervezett áramszünetek	4,79	0,505	11
Óraleolvasás előrejelzése	3,93	1,392	35
Azonosítható szerelő	4,49	0,832	19
Udvarias szerelő	4,54	0,695	15
Szakmai felkészültség	4,64	0,686	15

$n = 1993$

1. táblázat. Kiinduló adatok az I_1 tevékenységi körhöz

A változó megnevezése	Főkomponensek		
	F_1	F_2	F_3
Folyamatos áramszolgáltatás	0,460	0,086	0,034
Ne legyen feszültség-ingadozás	0,273	0,023	0,613
Növelhető fogyasztás	-0,071	0,002	0,813
Gyors hibafelvétel	0,839	0,110	0,038
Tájékoztatás a hibákról	0,733	0,071	0,222
Gyors hibaelhárítás	0,828	0,123	0,017
Tervezett áramszünetek	0,570	0,226	0,092
Óraleolvasás előrejelzése	0,084	0,149	0,562
Azonosítható szerelő	0,099	0,829	0,100
Udvariasság szerelő	0,196	0,880	0,099
Szakmai felkészültség	0,203	0,854	0,033
Sajátértékek:	3,511	1,598	1,272

KMO=0,792; Bartlett's teszt $\chi^2 = 6074,69$, $df = 55$, $p = 0,000$

2. táblázat. Rotált komponensek

A KMO (Kaiser-Meyer-Olkin) mutató nem tér el jelentősen az optimális 0,8-es értéktől, ami azt jelenti, hogy a korrelációs mátrix inverze közel diagonális, tehát a faktorok információtartalma jelentős.

A faktoronként megjelölt változók komponensei adnak módot azok definiálására:

1. **F1** – Gyorsaság, megbízhatóság,
2. **F2** – Udvariasság, felkészültség,
3. **F3** – Folyamatosság.

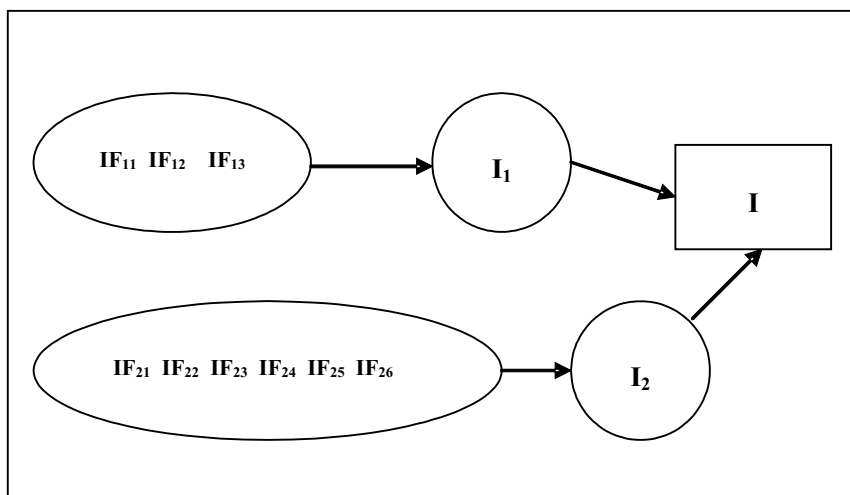
Láthatjuk, hogy a 11 indikátor, változó információtartalmát 3 meghatározó faktorba tudtuk sűríteni, amelyek alkalmasak arra, hogy a hálózati engedélyes tevékenységet megmagyarázzák.

Valamennyi részterületre vonatkozóan elvégezhető a főkomponens analízist, amely alapján meghatároztuk, mind a fontosság, mind az elégedettség faktorait a vizsgált szolgáltató társaságra vonatkozóan.

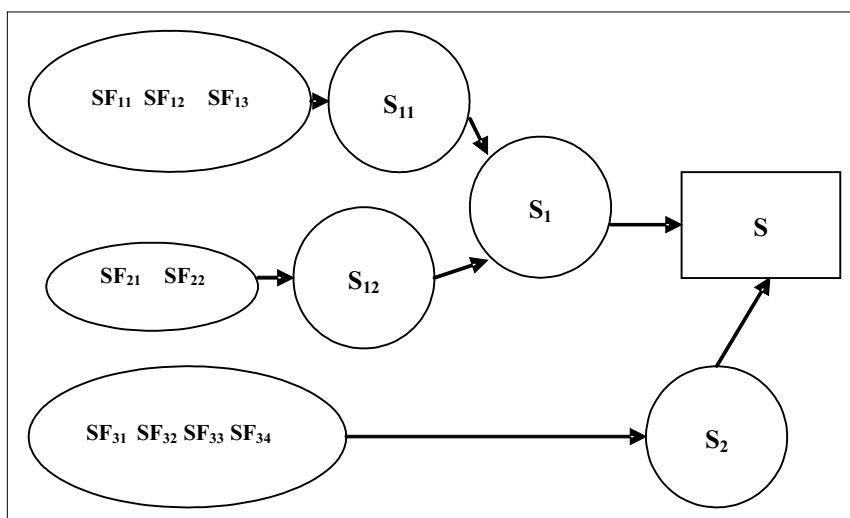
FONTOSSÁGI FAKTOROK	ELEGEDETTSEGI FAKTOROK
I_1 – Hálózati engedélyes 1. Gyorsaság megbízhatóság 2. Udvariasság, felkészültség 3. Folyamatosság	S_1 – Hálózati engedélyes S_{11} - Szolgáltatásminőség 1. Áramszünetek, feszültség-ingadozás 2. Gyors hibaelhárítás 3. Változtatható fogyasztás, feszültség-ingadozás S_{12} - Kapcsolattartás 1. Udvariasság, felkészültség, tervezett áramszünetek, óraleolvasások 2. Udvariasság, tájékoztatás
I_2 – Közüzemi szolg. engedélyes 1. Gyors kapcsolatfelvétel 2. Ügyfélirodai körülmények 3. Panaszok intézése, számlapanaszok 4. Gyors egyszerű ügyintézés 5. Rész-számlák összhangja 6. Áttekinthető számlázás, hírlevél	S_1 – Közüzemi szolg. engedélyes 1. Iroda elérhetősége, hírlevél 2. Számla érthetősége, ügyintézés gyorsasága 3. Rész-számlázás, pontosság, panaszok 4. Szerződés módosíthatósága, szakmai felkészültség

3. táblázat. A szolgáltató cég faktorstruktúrája

A 4. Tábla információi alapján megszerkeszthetjük a faktorok kapcsolódási sémáját. (Ahol I a cég fontossági és S a cég elégedettségi indexe.)



1. ábra. A fontosság faktor-sémája



2. ábra. Az elégedettség faktor-sémája

A fenti sémák támpontként szolgálnak a fontossági elégedettségi modellek felépítése során.

A főkomponensek, faktorok alkalmasak arra, hogy az adatbázisban, esetünkben a kérdésekre adott válaszokban rejlő legfőbb tendenciákat megragadják. Segítségükkel kijelölhetjük azokat a főbb pontokat, amelyek megváltoztatása, és ezek alapján a szolgáltatói tevékenység javítása elsődrendű

fontossággal bír a fogyasztói megítélés kapcsán. Felmerül azonban annak igénye is, hogy a főbb tendenciák segítségével a jelenséget modellezzük. Egy verifikált modell alkalmas lehet különféle szimulációkra, amelyek alátámaszthatják, segíthetik a menedzsment döntéseit.

Regresszió a főkomponenseken

Láttuk, hogy a 2. táblázatban közölt adatok alapján a hálózati engedélyesek körében a fontosságot 3 faktor határozza meg szignifikánsan. Felvetődik annak a gondolata, hogy ezt a fontossági indexet (100-as skálán mérve) mint függő változót kezelve, megbecsüljük a három faktor segítségével. A főkomponensek segítségével becsült regressziós egyenlet az alábbi:

$$I_1 = 87,744 + 5,060 \times IF_{11} + 5,491 \times IF_{12} + 6,686 \times IF_{13}$$

$$R^2 = 0,991$$

$$N = 1993$$

A független változónak igen jó becslését adja a modell, és alkalmas bizonyos érzékenységi vizsgálatokra. (Természetesen a kitűnő illeszkedés nem meglepő, hiszen a valamennyi mutató átlagolásával keletkező I_1 mutatót magyaráztuk az eredeti mutatók terében képzett főkomponensek segítségével.) Gondot jelent azonban a regressziós paraméterek értelmezése, ugyanis a faktoroknak nincs közvetlen tárgyi tartalma.

Elsőként nézzük a főkomponensen alapuló regressziós modellt (jelöljük a továbbiakban *FR*-rel)! A *FR* modell általános alakja az alábbi:

$$\hat{y} = a_0 + a_1 f_1 + \dots + a_t f_t + \dots + a_p f_p = \sum_{t=1}^p a_t f_t \quad (2)$$

Az egyenlet a_0 paramétere, mivel a változókat standardizáljuk, megegyezik a függő változó (y) átlagával, a (2) egyenlet többi paramétereinek valamint az (1) összefüggésben jelzett súlyoknak lineáris kombinációjaként kiszámíthatók az eredeti változóknak megfelelő, és ezért értelmezhető, regressziós együtthatók:

$$b_j = \sum_{t=1}^p a_t v_{jt} \quad (3)$$

Meg kell jegyeznünk, hogy a főkomponenseken alapuló regressziós becslés módszere általában a független változók közötti igen erős multikollinearitás kezelésére szolgál. Természetesen esetünkben is szükségszerűen áll fenn az erős kollinearitás hatása. A hagyományos legkisebb négyzetek módszerével (OLS) kapható eredmények az együtthatások miatt értékelhetetlenek. Mindezt tanulmányozhatjuk a becsült paramétereket tartalmazó alábbi táblában is.

Változók	Regressziós paraméterek	FR
Constant	b_0	6,753
Folyamatos áramszolgáltatás	b_1	0,590
Ne legyen feszültségingadozás	b_2	2,724
Növelhető fogyasztás	b_3	3,256
Gyors hibafelvétel	b_4	0,910
Tájékoztatás a hibákról	b_5	1,524
Gyors hibaelhárítás	b_6	0,839
Tervezett áramszünetek	b_7	1,123
Óraleolvasás előrejelzése	b_8	2,576
Azonosítható szerelő	b_9	1,731
Udvarias szerelő	b_{10}	1,868
Szakmai felkészültség	b_{11}	1,569

$N = 1993$

5. táblázat. A főkomponens-regresszió becsült paraméterei

A főkomponensen alapuló regressziós becsléssel (*FR*) jól elkülönülő paraméterekhez jutunk, melyekből az is kitűnik, hogy legérzékenyebben a növelhető fogyasztást, míg legkevésbé érzékenyen a folyamatos áramszolgáltatást ítélték meg a fogyasztók. Ez utóbbi fontosságát természetesnek tartják.

4 A modell

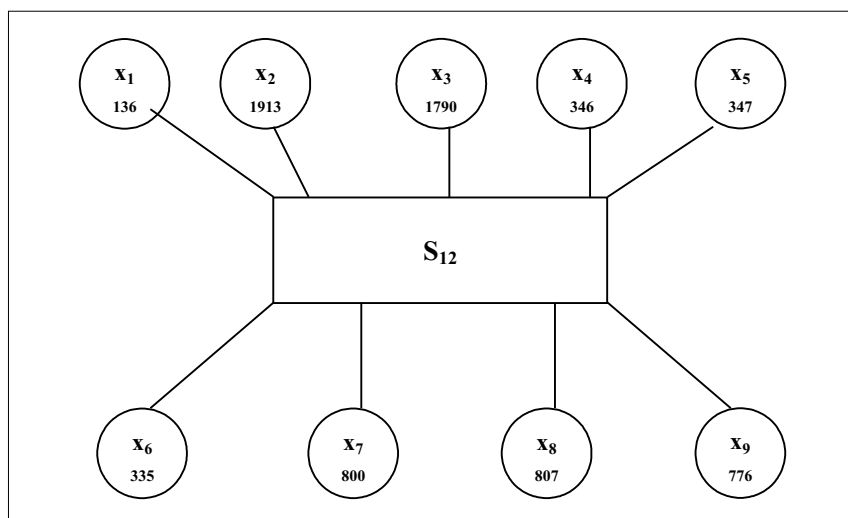
A fenti analízis segített a jelenség természetének megértésében, továbbá módot ad annak egyfajta további modellezésére is. A gyakorlati alkalmazás során azonban felmerül két fontos kérdés:

1. Minden körben alkalmazhatók-e a főkomponensen alapuló faktorok?
2. Hogyan tudnánk kevesebb, és ezáltal jobban kontrollálható változó segítségével modellezni a jelenséget?

Az eltérő számú változók

Különösen az elégedettségi kérdésekre adott válaszokat értékelve tovább kell gondolni az eljárásunkat. A fontossági kérdésekre a legtöbb megkérdezett válaszol, a felvetett problémakörrel van véleménye. Nem ilyen egyértelmű az elégedettség kérdésköre. Általában azok minősítenek ebben a szakaszban, akik találkoztak a kérdezett jelenséggel, esetleg problémájuk volt, így erőteljesebb kritikával élnek. A vélemények jelentősen megoszlanak. Akik valamilyen problémát észleltek egy adott területen, érzéketlenek más probléma iránt, és ezért nem is válaszolnak. Mindezek következtében az elégedettségi változók hossza (a válaszolók számának függvényében) nagyon különböző.

Szemléltessük a felvetett problémát egy séma segítségével! A hálózati engedélyesek kapcsolattartási indexét 9 db változó határozza meg. Az egyes változók esetében —a nem válaszolások, illetve értékelhetetlen válaszok következtében— különböző számú megfigyelt értékünk van. Jelöljük az egyszerűség kedvéért x_i -vel a különféle változókat, és S_{12} -vel a kapcsolattartás mutatószámát! A változók elemszámát mindenütt feltüntettük.



3. ábra. A kapcsolattartás indexére ható változók

A különböző elemszámú változók esetén a meg nem felelés igen nagymérvű lehet. Más megfogalmazásban kicsi a közös halmaz. Sok esetben az ún. közös halmaz mértéke még minimálisan elég lehet a főkomponensek meghatározásához, azonban további számításokhoz, a részletes regressziós modell kialakításához már nem.

Mindezek azt sugallják, hogy olyan megoldást kell keresni, amely megtartja a főkomponens adatredukáló, informáló jellegét, azonban a konkrét regressziós modell illesztéséhez megfelelően nagy megfigyelési elemszámot használ. Kézenfekvőnek tűnik a főkomponensek kialakulása után, ha kiválasztunk *egy darab* változót ún. *vezérváltozót*, amely legerősebben korrelál saját faktorával. Amennyiben ennek a változónak az elemszáma kielégítően nagy, nem okozhat problémát a modell építése.

Regressziós modellek a vezérváltozók segítségével

Elképzelésünk szerint faktoronként egy-egy vezérváltozó és a szintetikus komplex mutatószám közötti kapcsolatot vizsgáljuk egyszerű egy egyenletes regressziós modellek segítségével. Itt jegyezzük, hogy az eltérő elemszámok okozta probléma miatt nem használhatjuk a többváltozós regressziós modelleket sem.

A fentiek alapján tehát leszögezhetjük, hogy annyi regressziós modellünk lesz, ahány főkomponenst kvantifikáltunk. Egy adott tevékenységhez tartozó főkomponensek a *sajátértékek* alapján rangsorolhatóak, de a sajátértékek egyben az egyes faktorok súlyát is kifejezik. Ezért az egyszerű lineáris regressziós modelleket a sajátértékekből képzett *faktorsúlyok* (w_i) segítségével finomítjuk az aggregálás során. Magasabb aggregálási szinten elegendő azonban, ha csak egyszerű átlagolást használunk. A fontossági változókat z_{ji} -vel, míg az elégedettségi változókat x_{kji} -vel jelöljük.

A modellek általánosan az alábbiak:

A fontossági modell

$$I_j = \sum_{i=1}^n w_i (\alpha_{0ji} + \alpha_{ji} z_{ji})$$

$$I = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m I_j \quad (4)$$

Az elégedettségi modell

$$S_{jk} = \sum_{i=1}^n w_i (\beta_{0kji} + \beta_{kji} x_{kji})$$

$$S_k = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m S_{kj} \quad (5)$$

$$S = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p S_k$$

A modellezés eredményei

A vizsgált áramszolgáltató társaság esetén mind a fontosság, mind az elégedettség esetén 9-9 faktort számszerűsítettünk. Az egyes faktorokon belül kiválasztottuk az alábbi vezérváltozókat.

Fontossági változók

- z_{11} – Hibafelvevő gyors elérhetősége;
- z_{12} – Udvariasság, segítőkészség;
- z_{13} – Fogyasztás növelhetősége;
- z_{21} – Ügyintéző könnyű elérhetősége;
- z_{22} – Iroda nyitva tartása;
- z_{23} – Határidőn belüli panaszintézés;
- z_{24} – Egyszerű ügyintézés;
- z_{25} – Módosítható rész-számla;
- z_{26} – Érthető számla.

Elégedettségi változók

- x_{111} – 3 percnél hosszabb áramszünet;
- x_{112} – Hibafelvevő elérhetősége;
- x_{113} – Fogyasztás növelhetősége;
- x_{121} – Azonosíthatóság;
- x_{122} – Szakmai felkészültség;

- x_{21} – Irodai várakozási idő;
 x_{22} – Érthető számla;
 x_{23} – A panaszra reagálás hossza;
 x_{24} – Számla módosíthatósága.

A vezérváltozók segítségével kapott eredményeket a 6. és 7. táblázat mutatja.

Mind a fontossági, mind az elégedettségi számításokhoz elegendő volt az elemszám. Még a legkevesebb megfigyelésen (83) alapuló regresszió is megbízható információkat szolgáltat. Pozitívnek tekinthetjük továbbá, hogy valamennyi paraméter szignifikáns.

Az egyes modellekben a változók közötti kapcsolat igen különböző. Általában a fontossági modellek esetén kevésbé erős a vezérváltozó és a mutatószám közötti kapcsolat, ami természetes, ha arra, gondolunk, hogy itt a válaszadók néha a magas szintre tett elvárásaikat fogalmazzák meg. Az elégedettségi modellekben általában erősebb kapcsolatokat érzékelünk.

A modell alapvetően követi, és tükrözi a meghatározó tényezők hatását.

Paraméter	Becsült érték	Standard hiba	t -értékek	R	Súly (%)	N
IF_{11}				0,516	55,0	1997
α_{011}	32,200	2,067	15,597			
α_{11}	11,506	0,427	26,930			
IF_{12}				0,630	25,0	1995
α_{012}	46,386	1,154	40,211			
α_{12}	9,088	0,251	36,191			
IF_{13}				0,514	20,0	1995
α_{013}	75,852	0,481	157,750			
α_{13}	3,447	0,129	26,732			
IF_{21}				0,656	42,1	1987
α_{021}	38,283	1,260	30,274			
α_{21}	10,405	0,269	38,686			
IF_{22}				0,747	17,6	1961
α_{022}	51,420	0,726	70,505			
α_{22}	8,361	0,168	49,671			
IF_{23}				0,443	11,0	1998
α_{023}	31,203	2,510	12,433			
α_{23}	11,512	0,521	22,090			
IF_{24}				0,328	11,8	386
α_{024}	53,682	5,384	9,971			
α_{24}	7,537	1,109	6,798			
IF_{25}				0,376	9,3	1125
α_{025}	65,131	1,577	41,306			
α_{25}	4,737	0,348	13,609			
IF_{26}				0,373	8,2	2008
α_{026}	40,863	2,540	16,089			
α_{26}	9,746	0,527	17,989			

5%-os szignifikancia szinten minden paraméter szignifikáns.

6. táblázat. A fontossági (I) modell becsült paraméterei és a főbb információk

Paraméter	Becsült érték	Standard hiba	t -értékek	R	Súly (%)	N
SF_{11}				0,861	48,8	1959
β_{0111}	12,688	0,920	13,786			
β_{111}	16,302	0,217	75,005			
SF_{12}				0,671	29,6	285
β_{0112}	25,241	2,945	8,570			
β_{112}	11,095	0,729	15,229			
SF_{13}				0,502	21,6	149
β_{0113}	39,052	5,160	7,568			
β_{113}	8,620	1,225	7,038			
SF_{21}				0,700	65,4	800
β_{0121}	21,279	2,402	8,857			
β_{121}	14,266	0,515	27,720			
SF_{22}				0,622	34,6	335
β_{0122}	20,000	4,667	4,285			
β_{122}	14,253	0,984	14,480			
SF_{31}				0,597	50,3	385
β_{031}	48,393	2,412	20,066			
β_{31}	8,370	0,574	14,582			
SF_{32}				0,648	21,2	1988
β_{032}	29,197	1,533	19,044			
β_{32}	12,513	0,330	37,906			
SF_{33}				0,745	18,8	293
β_{033}	38,786	2,087	18,582			
β_{33}	10,302	0,540	19,076			
SF_{34}				0,604	9,7	83
β_{034}	41,501	5,684	7,301			
β_{34}	8,994	1,317	6,829			

5%-os szignifikancia szinten minden paraméter szignifikáns.

7. táblázat. Az elégedettségi (S) modell becsült paramétereit és a főbb információkat

5 Összefoglalás

Dolgozatunkban az elégedettségi vizsgálatok egyfajta továbbfejlesztésének lehetőségét fejtegettük. Célunk alapvetően annak a bemutatása volt, hogy az elégedettségi felmérések során keletkezett nagyméretű minták és adatbázis kedvező lehetőséget ad kvantatív módszerek (többváltozós statisztikai módszerek) és modellek alkalmazására.

Kutatásunk néhány főbb megállapítását az alábbiakban tudjuk összefoglalni:

- A többváltozós analízis általunk alkalmazott módszere közelebb vitt a fogyasztói vélemények jobb megismeréséhez, a jelenség természetének és belső struktúrájának feltárásához.
- A főkomponensek definiálása lehetővé teszi a kérdések, indikátorok minőségének, és azok konzisztenciájának ellenőrzését.
- Az összefüggések megismerése egyben ötleteket is adhat a menedzsment számára olyan döntések, intézkedések meghozatalához, amelyek javítják a szolgáltatás színvonalát. Ennek eredményei későbbi elégedettségi vizsgálatokban lesznek mérhetőek.

- A vázolt modell segítségével, az összefüggések további megismerésén túl, különféle szimulációs számításokra is mód nyílik.
- A modell felépítése során az alábbi logikát javasoljuk:
 - Az előzetes főkomponens-analízis, amely megkönnyíti a faktorok szerkezetének megismerését. Szükséges lépés itt a faktorstruktúrák elemzése is.
 - A meghatározó faktorokkal legerősebben korreláló változók, az ún. vezérváltozók kiválasztása.
 - A regressziós modell paraméter-bebecslése, és a modell tesztelése.
 - A végső modell felírása.
 - A kontroll vizsgálatok alapján, ha szükséges, a modell további finomítása.

Végezetül szeretnénk hangsúlyozni, hogy további kvantitatív módszerek, és többváltozós statisztikai eljárások alkalmazására is bő lehetőséget látunk a fogyasztói elégedettségi vizsgálatok során. Mindezek tovább árnyalhatják a fogyasztói várakozásokról és véleményekről kialakítható képet.

Irodalom

1. Anderson, E. and Sullivan, M. (1993): The antecedents and consequences of customer satisfaction for firms, *Marketing Science*, Vol. 12, pp. 125–143.
2. Anderson, E., Fornell, C. and Lehmann, D. (1994): Customer satisfaction, market share and profitability: findings from Sweden, *Journal of Marketing*, Vol. 58, July, pp. 53–66.
3. Bloemer, J. M. M and Kasper, H. D. P. (1995): The complex relationship between consumer satisfaction and brand loyalty, *Journal of Economic Psychology*. 16, pp. 311–329.
4. Chi Cui, Ch., Lewis, B. R., and Park, W. (2003): Service quality measurement in the banking sector in South Korea, *International Journal of Bank Marketing*, 21/4 191–201 pp.
5. Cronin, J. J. and Taylor, S. T. (1992) Measuring Service Quality: A Reexamination and Extension. *Journal of Marketing*, 56 Jul/ pp. 55–68.
6. Cronin, J. J. Jr and Taylor, S. A. (1992): Measuring service quality: a re-examination and extension, *Journal of Marketing*, Vol. 56 No. 1, pp. 55–68.
7. Cronin, J. J. Jr and Taylor, S. A. (1994): SERVPERF versus SERVQUAL: reconciling performance-based and perception-minus expectations measurement of servicequality, *Journal of Marketing*, Vol. 58 No. 1, pp. 125–131.
8. Dillon, W. R. and Goldstein, M. (1984): *Multivariate Analysis. Methods and Applications*. John Wiley & Sons., Inc., New York
9. Fisk, R. P., Brown, S. W. and Bitner, M. J. (1993): Tracking the evolution of the services marketing literature, *Journal of Retailing*. 69 (1) pp. 61–103.
10. Fornell, C., Johnson, M. D., Anderson, E. W., Cha, J. and Bryant, B. E. (1996): The American customer satisfaction index: nature, purpose, and findings, *Journal of Marketing*, 60. pp. 7–18. (In: Grönholdt, 2000)

11. Fornell, C. (1992): A national customer satisfaction barometer: the Swedish experience, *Journal of Marketing*, 56, pp. 6–21. (In: Grönholdt, 2000)
12. Füstös László – Meszéna György – Simonné Mosolygó Nóra (1986): *A sokváltozós adatelemzés statisztikai módszerei*, Akadémiai Könyvkiadó, Budapest
13. Grönholdt, L. – Martensen, A. – Kristensen, K. (2000): The relationship between customer satisfaction and loyalty: cross-industry differences, *Total Quality Management*, Vol. 11, Nos. 4/5&6, pp. 509–514.
14. Grönroos, C. (1984): A service quality model and its marketing implications, *European Journal of Marketing*, Vol. 18 No. 4, pp. 36–44.
15. Hajdu Ottó (2003): *Többváltozós statisztikai számítások*. KSH, Budapest
16. Oliver, R. L. (1980): A cognitive model of the antecedents and consequences of satisfaction decisions, *Journal of Marketing Research*, Vol. 17, November, pp. 460–469.
17. Oliver, R. L. (1993): A conceptual model of service quality and service satisfaction: compatible goals, different concepts, in Swartz, T. A., Bowen, D. E. and Brown, S. W. (Eds), *Advances in Services Marketing and Management: Research and Practice*, Vol. 2, JAI Press, Greenwich, CT.
18. Parasuraman, A., Zeithaml, V. and Berry, L. L. (1994): Alternative scales for measuring service quality: a comparative assessment based on psychometric and diagnostic criteria, *Journal of Retailing*, Vol. 70 No. 3, pp. 201–230.
19. Parasuraman, A., Zeithaml, V. A. and Berry, L. L. (1988): SERVQUAL: a multiple item scale for measuring customer perceptions of service quality, *Journal of Retailing*, Vol. 64 No. 1. pp. 12–37.
20. Parasuraman, A., Zeithaml, V. A. and Berry, L. L. (1993): More on improving service quality measurement, *Journal of Retailing*, Vol. 69, Spring, pp. 140–147.
21. Rekettye G. – Tersztyánszky T. (1997): A villamosenergia-fogyasztók elégedettségének mérése, *Marketing & Menedzsment*. 1. sz. 4–8. o.
22. Rekettye G. – Orosdy B. – Tersztyánszky T. (1997): Villamosenergia-szolgáltatás és fogyasztói elégedettség, *Marketing & Menedzsment*. 3. sz. 4–10. o.
23. Wirtz, J. – Bateson, J. G. (1999): Consumer Satisfaction with Services: Integrating the Environment Perspective in Services Marketing into Traditional Disconfirmation Paradigm, *Journal of Business Research*, 44, pp. 55–66.
24. Zeithaml, V.A., Berry, L. L. and Parasuraman, A. (1996): The behavioral consequences of service quality, *Journal of Marketing*, Vol. 60, April, pp. 31–46.

QUANTITATIVE METHODS AND MODELS IN MEASURING CUSTOMER SATISFACTION WITH THE ELECTRICITY SUPPLY

The main objective of the study was to contribute to the improvement of the methods used in the measurement of customer satisfaction. Satisfaction surveys in case of public utilities usually need large size samples and produce big databases, which according to the findings of this study present possibility to use quantitative methods and multivariate statistical models to understand customer preferences better. The model developed in this paper offers possibilities to clarify the underlying motives of customer evaluation of the service quality, which can help the management of the utility providers in improving their market performance.

SZTOCHASZTIKUS HÁLÓSTRUKTÚRÁK KEZELÉSE PROJEKTÜTEMEZÉSI FELADATOKBAN¹

KOSZTYÁN ZSOLT TIBOR – FEJES JÁNOS – KISS JUDIT

Pannon Egyetem

Egy projekt sikeressége érdekében a megvalósítás során létfontosságú kérdésként merül fel a tervezési fázis hatékony teljesítése [1]. E tanulmány célja egy eddig még nem ismert, a tervezési fázis hatékony támogatására szolgáló technika bemutatása. Különböző projektek esetében a feladatok végrehajtásának sorrendjét általában a technológia határozza meg. Azonban joggal merülhet fel a kérdés: ez a leghatékonyabb végrehajtási sorrend? A feladatok összes ütemezési lehetősége, vagyis az összes lehetséges megoldás figyelembe lett véve, mielőtt meghatározták a tényleges ütemtervet? Munkánkat e kérdések megválaszolása motiválta. A bemutatásra kerülő eljárás (SNPM: Stochastic Network Planning Method) egy általános módszer, amely ütemezési feladatok megoldása esetén alkalmazható. Különlegessége az eddig ismert módszerekhez (pl.: PERT, GERT stb.) képest, hogy valószínűségi változók segítségével, az összes lehetséges rákövetkezési reláció figyelembevételével határozza meg a lehetséges megengedett megoldások halmazát. A módszer segítségével a lehetséges megoldásokat eredményező paraméterek változtathatóak a projektet érő hatások (pl.: piaci igények, technológiai feltételek változása) függvényében. Így az SNPM akár egy szakértői rendszer kisebb moduljaként is használható lehet. Munkánk során az SNPM-módszer lépéseit mutatjuk be, valamint példákön keresztül illusztráljuk az eljárás működését.

1 Bevezetés

A projektmegvalósítás első lépései között szereplő tervezési fázis kiemelt jelentőséggel bír, mivel egy ebben a szakaszban bekövetkezett utólagos változtatás kihatással van a további folyamatokra, így sikertelen projekteredmények születhetnek.[15] Tanulmányok igazolják, hogy a legtöbb esetben a projektek sikertelensége már a tervezési fázis során eldől. (Lásd pl. [3,4,6,16]). A projekttervezési módszerek alkalmazása során két fontos probléma vetődik fel: egyrészt általában nem tudjuk pontosan meghatározni a tevékenységek időtartamait (legtöbbször csak becsülni tudjuk), másrészt sokszor nagyon nehezen tudjuk meghatározni a tevékenységek logikai struktúráját, illetve a tevékenységek közötti rákövetkezési relációkat [11,18,20]. A projekttervezés ismert és a gyakorlatban eddig alkalmazott eszközei az ún. hálótervezési, ütemezési eljárások, modellek. (Lásd pl. [8,9,10,12,14,18,19,21,23,24].) Azonban egy modell teljesíthetősége önmagában nem elég a sikeres projekttervezéshez.

¹Beérkezett: 2008. február 14. E-mail: kzst@vision.vein.hu.

Fontos az alkalmazott modell adekvátsága azért, hogy a projekt befejezése után kapott eredmény ne csak a modellhez, hanem a valósághoz is minél jobban illeszkedjen.

Habár az ütemezési problémák elméletben jól kidolgozottak, az ütemezési eljárások gyakorlatban való alkalmazásakor gyakran eltérés tapasztalható a tervezett eredményekhez képest, melynek oka az egyik legnehezebben kezelhető tényezőben, a bizonytalanságban rejlik [16]. Ez a bizonytalanság is két csoportra bontható: becslési és tervezési bizonytalanságra.

A bizonytalanság kezelésének egyik eszköze, hogy a változó paramétereket valószínűségi értékekkel jellemezzük. Ekkor feltételezzük, hogy korábbi projektek során már szereztünk annyi ismeretet, hogy a változó paraméterek statisztikai paramétereit becsülni tudjuk. Jelenleg a tevékenységek idejének változásait kezelni képes legismertebb módszer a PERT-módszer. (Lásd pl. [6,8,17,21].) Abban az esetben, ha semmilyen korábbi tapasztalat nem áll rendelkezésre a projekt tervezése során, akkor a sztochasztikus helyett fuzzy megközelítést célszerű alkalmazni.

A tervezési fázis specifikus lépéseket tartalmaz, melyek között a végrehajtás sorrendjét legtöbb esetben a technológiai sorrend határozza meg. Az SNPM kigondolásakor mi más logikai oldalról közelítettük meg ezt a kérdést. A tevékenységek végrehajtásának sorrendje javarészt a technológiától függ [2,5]. Ez igaz! Viszont úgy gondoljuk, van számos olyan befolyásoló tényező, melyet eddig nem vettek figyelembe a helyes végrehajtási sorrend meghatározásához, pedig fontosak. Ilyen paraméter lehet például a megtérülés, hatékonyság, piaci igények, vállalat good will-je stb., melyek egy-egy célfüggvény alapját képezve tudják befolyásolni a lehetséges megoldások halmazának összetételét. Lehetséges megoldások alatt értjük a végrehajtandó tevékenységek összes olyan ütemezési változatát, amely bekövetkezhet. Az összes lehetséges megoldásból kiválasztani az optimálist már a menedzsment döntése alapján, vagy egy újabb célfüggvény szerinti rangsorolással lehet.

Egy projekt során a tevékenységek összehangolt irányításához különböző ütemezési eljárásokat lehet alkalmazni. Lehet determinisztikus módszereket (pl. CPM, MPM), de lehet sztochasztikus eljárásokat is használni, amilyen a PERT, vagy annak általánosítása, a GERT-módszer, mely hasonló elveken nyugszik, viszont a lehetséges megoldási változatok bekövetkezési valószínűségeit is kezeli [8,12]. A fent említett két eljárás haszna akkor jelentkezik, ha figyelembe vesszük a tevékenységek időtartamaira vonatkozó becslési bizonytalanságokat, és ezáltal próbálunk következtetni a projekt legvalószínűbb átfutási idejére. Az átfutási időt analitikusan is és Monte Carlo szimuláción alapuló módszerek segítségével is meg lehet határozni.

Az idő- és költségtényezők viszont már a valóságban, egy korábbi időpontban befejeződött események adataiból kerülnek meghatározásra. A rendszer két gyenge pontját a tevékenységek időtartamainak pontos megbecslése, valamint a folyamatokhoz a megfelelő mérések hozzárendelése jelenti [22]. Mi olyan módszert szeretnénk volna kidolgozni, mely nem csak a becslési bizonytalanságokat, hanem a tervezésből adódó projekt struktúrájára vonatkozó bizonytalanságokat, valamint a tervezés során fellépő megvalósítás sorrendi

preferenciáit is kezelni tudja.

A bizonytalanság kezelésére egyes kutatásokban a tudásmenedzsment eszközrendszerét és korábbi esetek adatait feldolgozó szimulációs eljárásokat is sikeresen alkalmaztak. Ezzel az eljárással azonban csak a bizonytalanságok egy kis csoportját lehet sikeresen kezelni, mivel csak azokat az eseteket tudja figyelembe venni a rendszer, amelyek korábban már megtörténtek és adataikat feldolgozták [20].

Figyelemre méltó módszer az ütemezési feladatok során is alkalmazható ún. DSM (Dependency Structure Matrix) módszer, mely a tevékenységek sorrendjének megállapítására ill. az információáramlás koordinálására alkalmas. Hasonlóan a tevékenységek végrehajtási sorrendjének megállapítására szolgál, mint az általunk javasolt SNPM-módszer. Viszont a DSM az egyes tevékenységek közötti rákövetkezési sorrendek megállapítására nem valószínűségi változókat, hanem csak az adott feladatok közötti ún. információterjedési sebességet használja [9]. Az SNPM ezenkívül a tevékenységek közötti kapcsolatok erősségét is figyelembe veszi, valamint paramétereit változtathatók, tehát szélesebb körben alkalmazható.

A leginkább elterjedt, a projekt kimenetének lehetséges változatainak bekövetkezési valószínűségeit kezelni képes hálótervezési módszer a már korábban is említett GERT-háló. Előnye, hogy már a tervezés fázisában meg lehet határozni a projekt egy adott valószínűségi szinthez tartozó várható átfutási idejét. Továbbá, mivel számítunk a tevékenység bizonytalan bekövetkezésére, illetve ismerjük is annak mértékét, előre fel tudunk készülni az esetleges projekt megvalósíthatóságát veszélyeztető buktatókra [12]. Hátránya, hogy a GERT csak a tevékenységek időtartamát, illetve döntéseményeknél a lehetséges projekt-kimeneteket tekinti valószínűségi változóknak, a tevékenységek közötti kapcsolatokat nem. Az SNPM ezzel ellentétben az egyes tevékenységek közötti kapcsolatok erősségének figyelembevételével képes meghatározni a projekt lehetséges megoldásainak halmazát. A valószínűségi változók a kapcsolati erősségeken keresztül a döntéshozók preferenciáit tükrözhetik, de ezt a modellt —bizonyos megszorításokkal— a bekövetkezési valószínűségek kezelésére is lehet alkalmazni.

A tevékenységek közötti kapcsolatokat tehát a továbbiakban valószínűségi változóként kezeljük, melyek változtatásával a lehetséges megoldások halmaza, illetve egy adott célfüggvény esetén (pl. lehető legrövidebb megvalósítási idő, legkevesebb összköltség stb.) a megvalósítható projektek (adott célfüggvény szerinti) sorrendje is változik. Ezzel pl. egy szakértői rendszerben visszacsatolás hozható létre, melyben —ha a projektet értékeljük— a lehetséges rákövetkezési relációk erősségét újraszűlyozhatjuk. Ebben az esetben a szakértői rendszerben elegendő az ún. megoldásstruktúrákat, valamint ezek bekövetkezési/elfogadási valószínűségeit tárolni, vagyis azon megoldásokat, melyek mindkét (technológia, menedzsment) szempont szerint megengedettek.

A projektek egyszeri tevékenységsorok, minden lépését tekintve nem ismétlődnek újra. Viszont a folyamatok szétbontásával már kaphatunk olyan alfolyamatokat, melyek megismétlődnek más hasonló projekt esetében is. Így

azok az adatok újrafelhasználhatóvá válnak. Pl. házépítés során a betonozás az épület típusától függetlenül az építőipari projekteknél ismétlődő momentum. Másrészt az összes lehetséges megoldásból a menedzsment által meghatározott célfüggvényekkel, korlátozó feltételek figyelembevételével optimális megoldások ereszthetők.

2 Az SNPM-módszer ismertetése

Módszerünk ismertetésekor tevékenység-csomópontú hálókkal foglalkozunk. Egyrészt azért, mert a legtöbb projektmenedzsment szoftver is tevékenység-csomópontú hálót (AoN²) használ, másrészt pedig az AoN-hálóknál a nyilak reprezentálják a tevékenységek közötti kapcsolatokat. A modellünkben pedig a kapcsolatok erősségével foglalkozunk részletesen, így kézenfekvő a tevékenység-csomópontú háló használata.

A módszerünkben új fogalomként jelenik meg a kapcsolat erőssége, mely érték 0 és 1 között bármely valós számot felvehet.

Definíció. N és M tevékenység közötti (rákövetkezési relációjának) kapcsolati erősségét $\rho(N, M)$ -mel jelöljük és N , M tevékenység közötti kapcsolaterősségnek nevezzük. $\rho(N, M)$ értéke 0 és 1 között bármely valós számot felvehet ($\rho(N, M) \in [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$). Annak valószínűségét, hogy N tevékenység kapcsolatban van M -mel, a következőképpen jelöljük: $p(\rho(N, M)) = \rho(N, M)$. Annak a valószínűsége, hogy N nincs (rákövetkezési) relációban M -mel: $p(-\rho(N, M)) = 1 - \rho(N, M) \in [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$.

Megjegyzés. Ha N és M tevékenység közötti kapcsolat értéke 1, akkor 100% annak a valószínűsége, hogy N tevékenység rákövetkezési relációban van M -mel. (Pl. technológiai előírás szerint N tevékenység után M tevékenységet kell elvégezni). Ekkor annak a valószínűsége, hogy N tevékenység nincs relációban M -mel, $p(-\rho(N, M)) = 1 - \rho(N, M) = 1 - 1 = 0$. Ha N és M tevékenység közötti kapcsolat erőssége 0, akkor M tevékenység független N -től, ekkor közöttük a kapcsolatot nem jelöljük.

Definíció. Legyen adott egy N_1, N_2, \dots, N_n tevékenységekből álló tevékenységlista. Ekkor $\rho \in [0, 1]^{n \times n}$ mátrixot kapcsolati mátrixnak nevezzük, melyben N_i, N_j tevékenység közötti $A(N_i, N_j)$ kapcsolat erősségét $\rho(N_i, N_j) \in [0, 1]$ jelöli ($1 \leq i, j \leq n, i \neq j$).

Megjegyzés. A kapcsolat milyenségével (pl. vég-kezd, kezd-kezd stb.), ebben a fázisban még nem foglalkozunk. Azonban az egyszerűség kedvéért fel kell tennünk, hogy N_i és N_j tevékenység között egyszerre csak egy kapcsolat definiálható.

Definíció. Topologikusan megengedett a megoldás, ha kapcsolati mátrixból kapott megoldás topologikusan rendezhető. A továbbiakban az ilyen megoldásokat topologikusan megengedett struktúráknak nevezzük.

²Activity on Node.

Definíció. Egy lehetséges (topologikusan megengedett/nem megengedett) megoldás adjacencia $s \in \{0, 1\}^{n \times n}$ mátrixát struktúramátrixnak nevezzük, elemeit s_{ij} -vel jelöljük ($s_{ij} \in \{0, 1\}$). Egy (topologikusan) megengedett struktúra struktúramátrixát megengedett struktúramátrixnak nevezzük.

Megjegyzés. A topologikusan megengedett megoldások közül a menedzsment szempontjából nem mindegyik lehetséges megoldás megvalósítása célszerű. Például az olyan megoldások, melyek feleslegesen túl sok rákövetkezési relációt tartalmaznak, a menedzsment döntése alapján kihagyhatók a megoldások közül. Ezeket a döntéseket a továbbiakban formalizáljuk és korlátozó feltételeknek tekintjük.

Definíció. A topologikusan és menedzsment szempontjából megengedett megoldásokat megoldásstruktúráknak nevezzük.

1. Példa. Tekintsünk egy egyszerű, négy tevékenységből álló tevékenységsort. A technológiai követelményeket szem előtt tartva nemcsak egymás után lehet végrehajtani a tevékenységeket, hanem egymással párhuzamosan is. (Az egyes megoldási alternatívák között nincs preferenciabeli különbség, ezeket a kapcsolaterősségekből számoljuk ki.) Ekkor megadható az alábbi kapcsolati mátrix. (Ebben az esetben a kapcsolatok döntési preferenciákat jelölnek, így itt a bekövetkezési valószínűségek helyett az elfogadási valószínűség fogalmát használjuk.)

A kiinduló kapcsolati mátrix:

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Megjegyzés. Itt a 0.5-ös érték azt jelenti, hogy 0.5 annak a valószínűsége, hogy két tevékenység között van-e kapcsolat vagy nincs, tehát nem az egyes megvalósítási alternatívák közötti valószínűségeket reprezentáljuk.³

A példánkban a menedzsment szempontjából megfelelő megoldásokat a következőképpen definiáljuk, ezeket korlátozó feltételekként tekintjük:

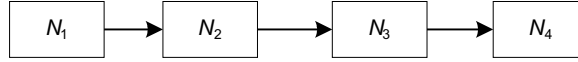
1. *Határozott a tevékenységsor kezdete és a vége:* egy kezdő és egy végpont van a gráfban.
2. *Nincs redundáns kapcsolat,* vagyis: egy $m > 2$ szintből álló topologikusan rendezett gráf i -edik ($i = 3, \dots, m$) szintjében lévő N_i csúcs, j -edik ($j < i$) és k -edik ($k < j$) szintben lévő N_j, N_k csúcsok esetén az alábbi élek közül

$$\begin{aligned} &A(N_j, N_i) \\ &A(N_k, N_i) \\ &A(N_j, N_k) \end{aligned}$$

egyidejűleg csak kettő teljesülhet.

³Azzal, hogy az egyes alternatívák megvalósítási valószínűségét (melyeket pl. GERT hálóban reprezentálhatunk) hogyan lehet kapcsolati mátrix segítségével leírni, egy későbbi cikk keretében foglalkozunk.

Ebből a lehetséges gráf variációk a következők:

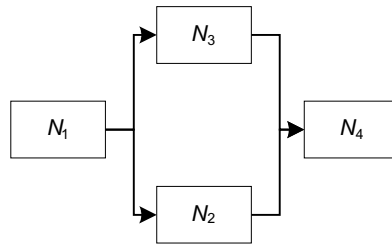


- a) topologikusan és menedzsment szempontból is megengedett megoldás. Minden tevékenység egymás után sorban hajtódik végre. Elfogadási valószínűség:

$$p_1 = \rho(N_1, N_2) * \neg\rho(N_1, N_3) * \rho(N_2, N_3) * \neg\rho(N_2, N_4) * \rho(N_3, N_4) = \\ = 1 * (1 - 0.5) * 0.5 * (1 - 0.5) * 1 = 0.125$$

A struktúramátrix:

$$s_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

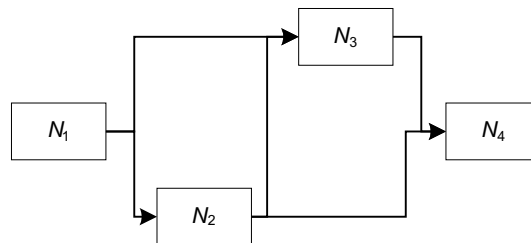


- b) topologikusan és menedzsment szempontból is megengedett megoldás (Párhuzamos végrehajtás). Elfogadási valószínűség:

$$p_2 = \rho(N_1, N_2) * \rho(N_1, N_3) * \neg\rho(N_2, N_3) * \rho(N_2, N_4) * \rho(N_3, N_4) = \\ = 1 * 0.5 * (1 - 0.5) * 0.5 * 1 = 0.125$$

A struktúramátrix:

$$s_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



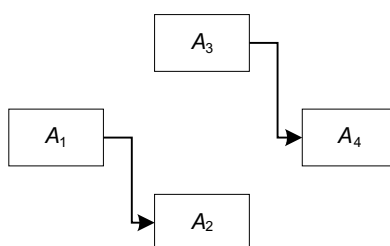
- c) megvalósítható, de a menedzsment szempontjából nem megengedett (kedvezőtlen) megoldás. $(A(N_1, N_2), A(N_2, N_3), A(N_1, N_3))$, valamint

$A(N_2, N_3)$, $A(N_3, N_4)$, $A(N_2, N_4)$ kapcsolatok egyidejűleg jelen vannak). Elfogadási valószínűség:

$$p_3 = \rho(N_1, N_2) * \rho(N_1, N_3) * \rho(N_2, N_3) * \rho(N_2, N_4) * \rho(N_3, N_4) = \\ = 1 * 0.5 * 0.5 * 0.5 * 1 = 0.125$$

A struktúramátrix:

$$s_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

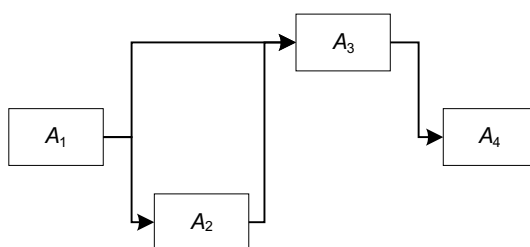


d) menedzsment szempontjából nem megengedett megoldás. (Több kezdő- és végpont.) Elfogadási valószínűség:

$$p_4 = \rho(A_1, A_2) * \neg\rho(A_1, A_3) * \neg\rho(A_2, A_3) * \neg\rho(A_2, A_4) * \rho(A_3, A_4) = \\ = 1 * (1 - 0.5) * (1 - 0.5) * (1 - 0.5) * 1 = 0.125$$

A struktúramátrix:

$$s_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

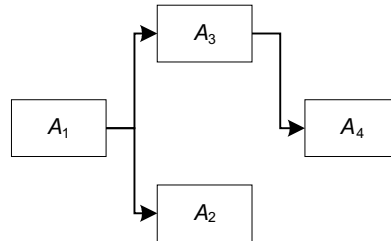


e) menedzsment szempontjából nem megengedett megoldás. ($A(N_1, N_2)$, $A(N_2, N_3)$, $A(N_1, N_3)$ kapcsolatok egyidejűleg jelen vannak). Elfogadási valószínűség:

$$p_5 = \rho(A_1, A_2) * \rho(A_1, A_3) * \rho(A_2, A_3) * \neg\rho(A_2, A_4) * \rho(A_3, A_4) = \\ = 1 * 0.5 * 0.5 * (1 - 0.5) * 1 = 0.125$$

A struktúramátrix:

$$s_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

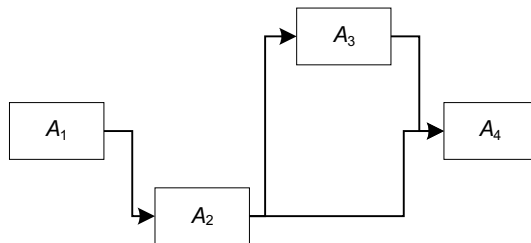


f) menedzsment szempontjából nem megengedett megoldás. Elfogadási valószínűség:

$$\begin{aligned} p_6 &= \rho(A_1, A_2) * \rho(A_1, A_3) * \neg\rho(A_2, A_3) * \neg\rho(A_2, A_4) * \rho(A_3, A_4) = \\ &= 1 * 0.5 * (1 - 0.5) * (1 - 0.5) * 1 = 0.125 \end{aligned}$$

A struktúramátrix:

$$s_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

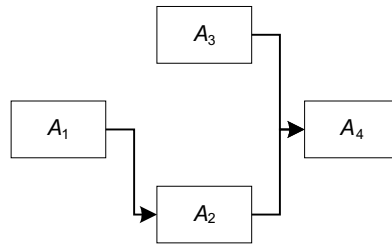


g) menedzsment szempontjából nem megengedett megoldás. ($A(N_2, N_3)$, $A(N_3, N_4)$, $A(N_2, N_4)$ kapcsolatok egyidejűleg jelen vannak). Elfogadási valószínűség:

$$\begin{aligned} p_7 &= \rho(A_1, A_2) * \neg\rho(A_1, A_3) * \rho(A_2, A_3) * \rho(A_2, A_4) * \rho(A_3, A_4) = \\ &= 1 * (1 - 0.5) * 0.5 * 0.5 * 1 = 0.125 \end{aligned}$$

A struktúramátrix:

$$s_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



h) menedzsment szempontjából nem megengedett megoldás. Elfogadási valószínűség:

$$\begin{aligned}
 p_8 &= \rho(A_1, A_2) * \neg\rho(A_1, A_3) * \neg\rho(A_2, A_3) * \rho(A_2, A_4) * \rho(A_3, A_4) = \\
 &= 1 * (1 - 0.5) * (1 - 0.5) * 0.5 * 1 = 0.125
 \end{aligned}$$

A struktúramátrix:

$$s_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Topologikusan valamennyi megoldás megengedett. A menedzsment szempontjából azonban csak *a* és *b* megoldás kivitelezése célszerű. A megengedett struktúramátrixokból a fenti feltételek megléte ellenőrizhető. Ha pl. előírás, hogy egy kezdő- és egy végpont van a gráfban, akkor a (megengedett) struktúramátrixban pontosan egy olyan *i* sor és pontosan egy olyan *j* ($i \neq j$) oszlop van, mely sor, illetve oszlop valamennyi eleme 0. A második feltétel teljesülése ugyanígy a topologikusan rendezett megoldás struktúramátrixa alapján ellenőrizhető. Ekkor ugyanis nem található olyan 3 elem, melyre $s_{ij} = s_{ik} = s_{lj} = 1$ ($k < j, i < l$).

A példában az 1. korlátozó feltétel miatt d, f, h alternatívákat kizártuk. Azonban projektütemezés területén, de főleg folyamatszervezésben több kezdő- és végpont is kezelhető. A gráfoknak csak az irányított körmentesség kritériumának kell megfelelniük.

A példában a 2. korlátozó feltétel miatt kizártuk c, e, g alternatívákat. Mivel azonban a tevékenységek között nem csak szigorú vég-kezdés, hanem elvileg bármilyen minimális illetve maximális (kezdés-kezdés, befejezés-kezdés, kezdés-befejezés) kapcsolat lehet, nem mondható el általánosságban, hogy ez a kizárás minden esetben indokolható lenne.

Ahhoz, hogy a megengedett megoldások közül választhassunk, meg kell fogalmazni egy célfüggvényt. Pl. a legrövidebb átfutási idő. Ekkor a tevékenységek lefutási idejének és a kapcsolatok milyenségének ismeretében a legjobb megoldás kiválasztható a megengedett megoldások közül.

Megengedett megoldások meghatározása:

Definíció. A $\rho \in [-1, 1]^{n \times n}$ kapcsolati mátrix redukált kapcsolati mátrixának nevezzük $r \in \{0, 1\}^{n \times n}$ -t, ha teljesül minden $1 \leq i, j \leq n$ -re, hogy $r \ni r(A_i, A_j) = \lfloor \rho(A_i, A_j) \rfloor$.

Megjegyzés. Az 1. példa redukált kapcsolati mátrixa definíció szerint:

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Megjegyzés. Az összes lehetséges megoldás felső becslése k bizonytalan kapcsolat esetén: 2^k , ahol k maximális értéke: $n(n-1)$.

Megjegyzés. Fontos megjegyezni, hogy abban az esetben, ha technológiailag megvalósítható egy tevékenységsorrend felcserélése is, pl. N tevékenységet M követi 0,7 valószínűséggel, M -et követi N 0,3 valószínűséggel, az ehhez tartozó kapcsolati mátrix

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0,7 \\ 0,3 & 0 \end{pmatrix},$$

akkor módszerünk ezt a két lehetőséget külön lehetséges megoldásként leszámolja. Egyszerre a két kapcsolat azonban egyidejűleg nem teljesülhet (ugyanis nem lesz körmentes a gráf).

Megjegyzés. Az összes megoldás megállapítása már közepes méretű hálónál is reménytelen feladat lenne, így redukálnunk kell a „szóba jöhető” megengedett megoldásokat. A következőkben egy olyan módszert mutatunk be, mellyel az összes megengedett megoldást meg lehet határozni és a lépések számát jelentősen lehet redukálni.

Ha sok lehetséges kapcsolat van az egyes tevékenységek között, akkor már $k = 100$ elemnél a lehetséges megoldások kiszámítása reménytelen vállalkozásnak tűnik, hiszen egy lehetséges variáció esetén topologikus rendezés segítségével kell majd eldöntenünk, hogy egy lehetséges gráf-variáció megengedett megoldás-e (vagyis háló). Mivel a topologikus rendezés futásideje $O(n \log n)$, így könnyen belátható, hogy $k \leq n(n-1)$ esetén $O(2^k n \log n)$ ideig tartana a lehetséges hálók kiértékelése. Ezért szükséges tovább redukálni a lehetséges megoldások halmazát.

Módszerünkben kihasználjuk az irányított körmentes gráfok összes tulajdonságát. Ha egy hálóban irányított kör van, akkor topologikusan nem rendezhető, így olyan eseteket nem vonhatunk be, ahol kör lenne a hálózatban. Felhasználjuk, hogy abban az esetben, ha nincs kör egy egyszerű gráfban, akkor a gráf adjacencia mátrixa átrendezhető ún. felsőháromszög mátrixba. Módszerünk egy back-tracking eljárás, mely bejárja a lehetséges megoldásokat, azokat a megoldásokat pedig, amelyek nem jöhetnek szóba, figyelmen kívül hagyja. A lehetséges megoldások generálásánál a menedzsment által definiálható korlátozó feltételeket is figyelembe vehetjük, így ezen struktúramátrixok által megadott gráfokat nem kell topologikusan rendezni.

A módszer lépései:

0. lépés. A redukált kapcsolati mátrix meghatározása. A mátrix átrendezése felső háromszögmátrixszá. Ha nem rendezhető át, akkor nincs megoldása a feladatnak \rightarrow STOP, ellenkező esetben ugrás az első lépésre.

1. lépés. Ha az élek száma (m) nagyobb, mint a csúcsok száma (n) mínusz 1, akkor a topologikus rendezés elvégzése. Ha nem, akkor ugrás a 2b-re. Ha megengedett a megoldás (a struktúramátrix megfelel a korlátozó feltételeknek, topologikusan rendezhető), akkor ugrás a 2a. lépésre, ellenkező esetben a 2b-re.

2a. lépés. A megoldás kiírása. A következő él kiválasztása. Csak olyan él választható ki, amely a felső háromszögben van, és korábban nem választottuk ki. Tehát (N_i, N_j) esetén $i > j$. Ha nincs kiválasztható él, akkor ugrás a 3. lépésre, ha van kiválasztható él, akkor ugrás az 1. lépésre.

2b. lépés. Lehetséges tevékenység kiválasztása. Csak olyan tevékenység választható ki, ahol az adjacencia mátrix átrendezhető felső háromszögmátrixszá, és korábban ezt az élt nem választottuk ki. Ha nem választható ki, akkor ugrás a 3-as pontra. Ha van kiválasztható él, akkor ugrás az 1. pontra.

3. lépés. Egy kiválasztott kapcsolat redukciója, ha a kapott gráf már szerepel a megoldások között, vagy a redukció után a gráf nem megengedett, akkor kilépes az ágból, egyébként ugrás az 1. pontra.

2. példa. Tekintsük az előző példát. Ekkor a kapcsolati mátrix a következő:

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A redukált kapcsolati mátrix:

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A lehetséges megoldások száma elvileg $2^3 = 8$. Mivel azonban a redukált kapcsolati mátrixban az élek száma kisebb, mint 3, illetve két olyan oszlop/sor is van, melyre az oszlopok/sorok értékei 0-k, így ez a menedzsment által támasztott kritériumok alapján nem megengedett megoldás (1d. ábra), így a topologikus rendezést nem végezzük el. A módszer szerint most egy új élt kell választani, melyet be kell venni a gráfba. Az egyik lehetséges él a $\rho(N_1, N_3) = 0.5$ (1f. ábra). Itt a kiválasztott élek száma 3, de a korlátozó feltételek közül az elsőt nem teljesíti, ezért újabb élt kell kiválasztani. Újabb él lehet a $\rho(N_2, N_3) = 0.5$. A kiválasztott élek száma már 4 (1e. ábra), itt azonban a 2. korlátozó feltétel nem teljesül, így topologikusan nem rendezzük. Újabb kiválasztás $\rho(N_2, N_4) = 0.5$ után 1c. ábrát kapjuk. Itt is a második korlátozó feltétel nem teljesül. Több él már nem választható ki, így élt kell elvenni a gráfból. $\rho(N_2, N_3) = 0.5$ élet elvéve 1b. ábra szerinti gráfot kapjuk, amely topologikusan rendezhető és a korlátozó feltételeket is figyelembe vevő megengedett megoldás. Újabb élt már nem vehetünk el, mert $\rho(N_2, N_4) = 0.5$ elvéve ismét 1f-hez jutnánk, ami ráadásul nem is megengedett, ezért a további redukciónak sincs ezután értelme, $\rho(N_1, N_3) =$

0.5-öt elvéve 1h. ábrához jutunk, ami szintén nem megengedett megoldás, tehát ebből az ágból kilépünk. Így visszajutunk az 1c. megoldáshoz. Innen $\rho(N_1, N_3) = 0.5$ -öt választva 1g. ábrához jutunk, ami a második korlátozó feltételt nem teljesíti. $\rho(N_2, N_4) = 0.5$ -öt elhagyva 1a. ábrát kapjuk, ami viszont megengedett megoldás.

A módszer pszeudó kódja az alábbi táblázatban található:

1	$r := \text{reduced}(\rho);$	{Redukált kapcsolati mátrix meghatározása}
2	$S := \emptyset;$	{S-ben tároljuk a megoldásokat}
3	$S := \text{SNPM}(r, S);$	
4		
5	function SNPM(r, S);	
6	begin	
7	if (uptri(r) = true) then	{Azt vizsgáljuk, hogy a kapcsolati mátrix}
8	begin	{felső háromszögmátrixba átrendezhető-e}
9	if ($m > n - 1$) then	
10	begin	
11	if (m_crit(r) = true) then	{A korlátozó feltételek teljesülésének }
12	begin	{vizsgálata}
13	[s_to,g] = to(r);	{Topologikus rendezés elvégzése}
14	{s_to a rendezés sikerességét, g a topologikusan rendezett gráfot jelöli}	
15	if (s_to = true) then	
16	begin	
17	$S := S \cup g;$	{A korlátozó feltételeket teljesítő, topologikusan}
18	print g;	{rendezhető gráfokat tároljuk és kiíratjuk}
19	end;	
20	end;	
21	[s_s,r] := select(r);	{Következő elem kiválasztása. Ha ez lehetséges,}
22	if (s_s = true) then S:=SNPM(r,S) else	{akkor újra meghívjuk ezt a}
23	begin	{függvényt, ha nem akkor a redukció elvégzése}
24	[s_r,r,g] := reduction(r);	
25	if ((s_r = true) and (m_crit(r) = true)) then	
26	begin	
27	[s_to,g] = to(r);	
28	if ((s_to = true) and (g not in S)) then	
29	begin	{megvizsgáljuk, hogy a topologikus}
30	$S = \text{SNPM}(r,S);$	{rendezéssel kapott gráf}
31	end;	{szerepel-e a megoldások között}
32	end;	
33	end;	
34	end;	
35	end;	
36	end;	

1. táblázat. A módszer pszeudokódja

Az előző példában számos háló nem megengedett volt, így a továbbiakban csak azokat a gráfokat kell tekintenünk, ami topologikusan rendezhető és a menedzsment számára megvalósítható (vagyis megoldásstruktúrák). Ha e kritériumokat figyelembe vesszük, akkor a és b variáns egyenlő valószínűséggel következhet be.

A backtracking eljárás a lehetséges megoldások számításakor nem veszi figyelembe azokat a mátrixokat, melyek nem rendezhető át felső háromszög-mátrixszá (pl. kör van a hálózatban). Ilyenkor további élt sem választunk

ki, így ezeket a struktúrákat kizárjuk. Ennek ellenére így is túl sok olyan megoldást járunk be, melyek biztosan nem lehetnek megengedett megoldások. A korlátozó feltételeket megfogalmazva a lehetséges megoldások számát csökkenthetjük, így a szelekció esetén (21. sor) az ilyen lehetséges megoldásokat nem vesszük figyelembe.

Megjegyzés. Jelölje az összes megoldás halmazát P . Ebből a topologikusan és a menedzsment szempontjából is megengedett megoldások halmaza Q ($Q \subseteq P$). Az összes tevékenység bekövetkezési/elfogadási valószínűsége $p = 1$, hiszen a bekövetkezések teljes eseményrendszert alkotnak, míg azon projektek (megoldásstruktúrák) bekövetkezési/elfogadási valószínűségeinek összege $q \leq p = 1$, amelyek mind technológiailag, mind a menedzsment szempontjából megvalósíthatók. (Az előző példában $p = 1$, $q = 0.125 + 0.125 = 0.25$).⁴

Definíció. Egy i -edik (topologikusan és menedzsment szempontból egyaránt) megengedett projekt q_i megvalósulási valószínűsége a bekövetkezési/elfogadási valószínűsége osztva az összes megengedett projekt bekövetkezési/elfogadási valószínűségével: $q_i = p_i/q$.

3. Példa. Adott célfüggvényre nézve optimális megoldás kiválasztása. Tekintsük az előző példát. Most a kapcsolati erősségek jelöljenek döntéshozói preferenciákat. Legyenek a tevékenységek lefutási idői a következőképpen megadva. $d_{N_1} = 5$ nap, $d_{N_2} = 10$ nap, $d_{N_3} = 7$ nap, $d_{N_4} = 6$ nap. A célfüggvény legyen a minimális átfutási idő! Az 1. példa korlátozó feltételein túl további korlátozó feltétel pedig: az adott projekt megvalósulási valószínűsége legyen legalább 0.4! Ekkor a) és b) megoldás esetén a megvalósulási valószínűség 0.5, a többi esetben 0. Ezek közül az a) megoldás esetén az átfutási idő

$$d_{N_1} + d_{N_2} + d_{N_3} + d_{N_4} = 5 + 10 + 7 + 6 = 28 \text{ nap.}$$

b) megoldás esetén az átfutási idő

$$d_{N_1} + \max(d_{N_2}, d_{N_3}) + d_{N_4} = 5 + \max(10, 7) + 6 = 21 \text{ nap.}$$

A fentiek szerint a b) változatot választják. A tevékenységek rendben lezajlanak és a tevékenységsort sikeresnek ítélik, ezért a megoldásban részt vett bizonytalan relációk értékét 10%-kal növelik. Ekkor $\rho(N_1, N_3) = 0.5 + 0.1 = 0.6$. $\rho(N_2, N_4) = 0.6$. Szintén két lehetséges megoldást kapunk. Ekkor a) megoldás elfogadási valószínűsége:

$$\begin{aligned} p_1 &= \rho(N_1, N_2) * \neg\rho(N_1, N_3) * \rho(N_2, N_3) * \neg\rho(N_2, N_4) * \rho(N_3, N_4) = \\ &= 1 * (1 - 0.6) * 0.5 * (1 - 0.6) * 1 = 0.08 ; \end{aligned}$$

b) megoldás elfogadási valószínűsége:

$$\begin{aligned} p_2 &= \rho(N_1, N_2) * \rho(N_1, N_3) * \neg\rho(N_2, N_3) * \rho(N_2, N_4) * \rho(N_3, N_4) = \\ &= 1 * 0.6 * (1 - 0.5) * 0.6 * 1 = 0.18 . \end{aligned}$$

⁴A topologikusan megengedett, de a menedzsment szempontok alapján kizárt struktúrákat a menedzsment döntése alapján be lehet számítani a Q halmaz elemei közé. Ekkor a megvalósítási valószínűségek kisebbek lesznek. Optimális megoldást azonban csak a Q halmaz elemei közül választhatunk.

Ekkor $q = 0.08 + 0.18 = 0.26$; $q_1 = 0.08/0.26 = 0.31$; $q_2 = 0.18/0.26 = 0.69$. Ekkor a korlátozó feltétel miatt a) megoldás ki is esik, hiszen az előírtak szerint kisebb, mint 0.4.

Megjegyzés. A legtöbb projekt során bizonyos tevékenységek végrehajtása ismétlődhet, még akkor is, ha ehhez tartozó idő-, erőforrás- és költségadatok különbözőek lehetnek. Sok projekttervező szoftver ezt ki is használja oly módon, hogy a logikai hálót, mint „projektsablont” le lehet menteni és későbbi alkalmazásra fel lehet használni (pl. MS Project, Primavera stb.). A javasolt módszerünk ettől a megoldástól annyiban lép tovább, hogy nem csak a logikai kapcsolatokat, hanem a kapcsolati erősségeket és/vagy a megoldásstruktúrákat, illetve a megvalósítás során szerzett tapasztalatokat is tárolni tudja. Ezen kívül projekttervezési technikákat nemcsak projektek kezelésére, hanem pl. egyedi és kissorozatgyártás termelésirányításában is lehet alkalmazni [12]. A visszavezetés, tapasztalatgyűjtés ebben az esetben még hangsúlyosabb lehet.

3 Gyakorlati alkalmazás

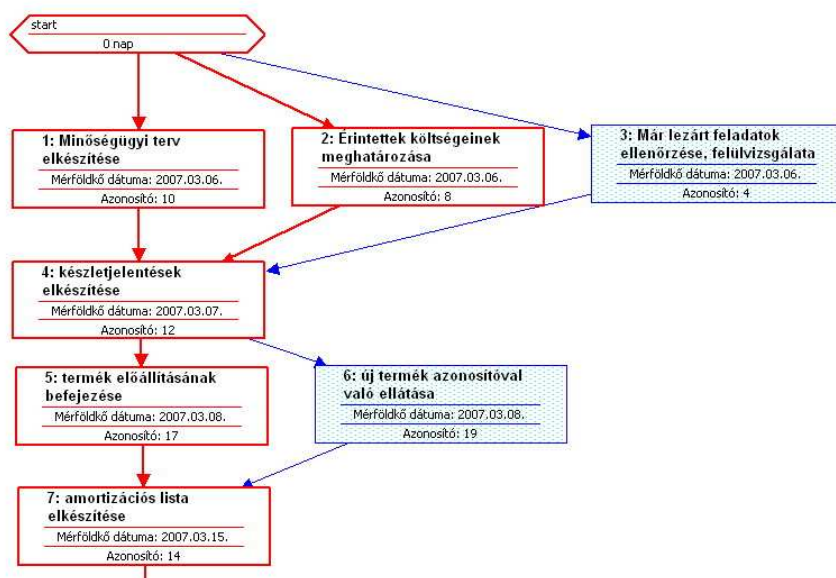
Az SNPM eljárás valós alkalmazásának előnyeit egy, a gyakorlatban kipróbált példával illusztráljuk. Módszerünk egy multinacionális vállalat valós projektjének végrehajtása során került kipróbálásra. Az elemzés alapját egy 37 tevékenységből álló, termékbevezetést magába foglaló folyamat képezte. (Mivel itt a bizonytalan kapcsolatok száma 65 volt, így a kapcsolatokat reprezentáló adjacencia mátrix és a gráf egy részletét mutatjuk csak be. A lehetséges megengedett hálóstruktúrák generálásához a Matlab programot, míg a projektek megjelenítésére az MS Project szoftvert használtuk.)

A munka első lépéseként az egyes feladatok közötti kapcsolatokat, valamint az egyes tevékenységek teljesítési idejét határoztuk meg vállalati szakemberek segítségével.

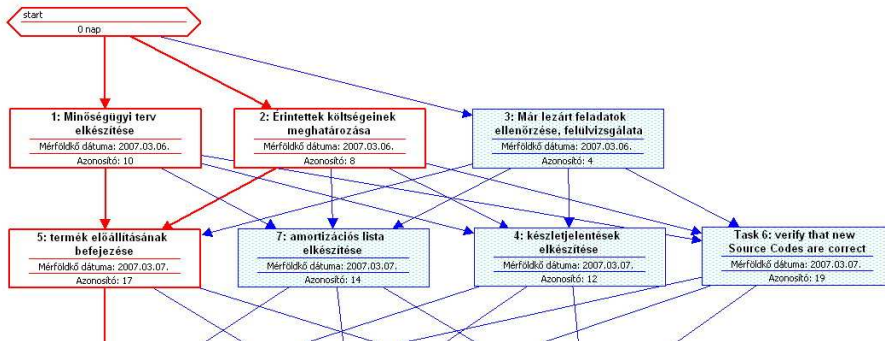
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	–	0.5	0.5	0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	–	0	1	0.5	0.5	0.5	0.5	0	0	0	0	0	0
3	0	0	–	1	0.6	0.7	0.5	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	–	0.5	0.5	0	0.5	0.5	0.5	0	0	0	0
5	0	0	0	0	–	0	0.5	0.8	0.5	0.5	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	–	0.5	0.6	0.5	0.6	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	–	1	1	1	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	–	0.5	0.6	0.5	0.5	0.6	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	–	0	1	1	1	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	–	1	1	1	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	–	0.5	0.6	0.5
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	–	0	1
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	–	1
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	–

2. ábra. Részlet az adjacencia mátrixból

Ahogy láttuk az előző példa során, ha a táblázatban található kapcsolati erősségeken változtatunk, a későbbi eredmények ennek függvényében szintén változhatnak. A módszer ezen tulajdonsága miatt alkalmas az SNPM egy szakértői rendszer kiegészítő moduljaként működni, mivel adatai újrafelhasználhatóak. (Ebben az esetben azonban csak Q halmaz elemeit célszerű tárolni.). Az elfogadási valószínűségek meghatározásakor az alábbi tényezőket vettük figyelembe: technológiai sorrend, rendelkezésre álló és a szükséges erőforrások aránya (emberi ill. műszaki értelemben), aktuális piaci tényezők (pl. sürgős rendelés) stb. Ha egy lehetséges lefutási változat bekövetkezése 80% (kapcsolaterőssége: 0.8), akkor az azt jelenti, hogy a tevékenységek közötti kapcsolatok alapján 10 esetből 8-szor ez a lefutási variáció következne be a célfüggvények alkalmazása nélkül. Fontos megjegyezni, hogy a célfüggvény magasabb prioritású a valószínűségértékkel, preferenciaértékekkel szemben. Jó példa erre a vizsgált projekt során tapasztalt eset, ahol az eredeti lefutás több mint 60%-os megvalósítási valószínűséggel bírt, mi mégis a másik alternatívát javasoltuk, mivel az rövidebb idő alatt és kevesebb költség mellett teljesíthető. A feladatok közötti kapcsolatok becslésekor a feltétlen rákövetkezéseket 1-essel, a lehetséges kapcsolatokat (tehát a párhuzamos teljesíthetőséget is) alapesetben 0.5-tel jelöltük. Ettől olyan esetekben térünk el, amikor nagyobb volt a valószínűsége az adott rákövetkezésnek. Kiindulási alapul minden esetben az eredeti hálót használtuk fel (3. ábra), melyet MS Project segítségével ábrázoltunk.



3. ábra. A projekt első 7 eleme alapesetben



4. ábra. A projekt első 7 eleme a javasolt lefutási sorrendben

Munkánk során a feladatok párhuzamosítására való törekvésünk mellett azokat a lehetőségeket vizsgáltuk, melyek megengedett megoldásokat eredményeznek. Döntési alternatívák felmerülésekor célfüggvényként a minimális átfutási időt és az elfogadási valószínűséget tartottuk szem előtt. Így kaptuk meg a végső hálódigramokat (4. ábra).

A teljes folyamat hatékony megvalósításának mérésére a megtérülési idő értékét alkalmaztuk. Ezen mutatószám mellett minden esetben meghatároztuk az új átfutási időket és az azok hatásaként összköltségek szintjén jelentkező költségcsökkenés mértékét is. Meghatároztuk minden esetben az egyes lépésekhez tartozó tartalékidőket is. A több tartalékidő jobban kezelhetővé teszi a folyamatot, mivel a teljesítés közben több határidős csúszás válik lehetővé anélkül, hogy a teljes projekt tervezett befejezési ideje megváltozna (igaz, több erőforrásra lesz egy időben szükség, ez azonban itt korlátozó feltételként jelentkezett, vagyis olyan esetek, melyeknél az erőforrás-szükséglet nem volt teljesíthető, a menedzsment szempontjából nem megengedett megoldásként szerepeltek). A kritikus úton lévő tevékenységek tartalékideje mindig nulla, vagyis nincs megengedett hibahatár, különben csúszik az egész projekt tervezett befejezése. Ebből kifolyólag a kritikus utak számának csökkenéséből a teljes tartalékidő növekedésére lehet következtetni [13].

Munkánk során két további feltételezéssel éltünk. Az első, hogy az egyes lépések párhuzamosítását csak olyan esetekben alkalmaztuk, ahol volt szabad kapacitás annak elvégzésére, így az nem igényelt többlet-erőforrást. Második feltételezésünk a vállalati szakemberek döntésére való hagyatkozás. A kapcsolati mátrix alapján elméletileg az összes megengedett megoldás $2^{65} = 3,68 \cdot 10^{19}$. Ez a gyakorlatban kevesebb volt, mivel adottak voltak olyan lehetőségek, melyek azonnal kizárhatóak. (Például az üzleti terv kidolgozását, végleges frissítését minden esetben az utolsó lépésként kell elvégezni, mivel csak akkor van már lezárva az összes korábbi feladat, melyeknek az adatait rögzíteni kell.)

Vizsgálataink eredményeképp jutottunk el a végső megengedett megoldáshoz, mely a tevékenységek párhuzamosításának köszönhetően 7 munkanap megtakarítást jelentett.

4 Összefoglalás

A bemutatott módszert már a logikai háló tervezésének szintjén lehet alkalmazni. Lehetőség van azonban egy már lezajlott projekt értékelésére is, hiszen itt nem csak egyszerűen a logikai hálót lehet projektsablonként elmenteni, hanem a kapcsolatok erősségének feltüntetésével, esetleg újraértékelésével a lehetséges megvalósítási alternatívákat is meg lehet határozni. A logikai tervezés után a tevékenységidők, költség- és erőforrásigények meghatározása után a bekövetkezési/elfogadási valószínűségek mellett egyéb szempontok (pl. minimális költség, minimális átfutási idő stb.) is szerepet játszhatnak a megfelelő projektterv kiválasztásában, illetve a lehetséges megoldások rangsorolásában, így ezt a módszert akár projekttervező szoftverekben, sőt akár szakértői rendszerekben is fel lehet használni.

Irodalom

1. *A guide to the project management body of knowledge: PMBOK guide*, Project Management Institute, Newtown Square, Penn., 2000, ISBN 1-880410-23-0, pp. 120–156
2. Cheng-Hua Wang - Sheue-Ling Hwang: A stochastic maintenance management model with recovery factor, *Journal of Quality in Maintenance Engineering*, Vol. 10., No. 2, 2004, pp. 154–164.
3. Davide Cherubini – Alessandra Fanni – Augusto Montisci – Pietro Testoni: A fast algorithm for inversion of MLP networks in design problems, *The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, Vol. 24 No. 3., 2005, pp. 906–920.
4. Dov Dvir - Tzvi Raz - Aaron J. Shenhar: An empirical analysis of the relationship between project planning and project success, *International Journal of Project Management*, Vol. 21, 2003, pp. 89–95.
5. Ehud Menipaz – Avner Ben-Yair: Harmonization simulation model for managing several stochastic projects, *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 61., 2002, pp. 61–66.
6. Giovanni Mummolo: Measuring uncertainty and criticality in network planning by PERT-path technique, *International Journal of Project Management*, Vol. 15, Issue 6, 1997, pp. 377–387,
7. Gündüz Ulusoy – Linet Özdamar: A heuristic scheduling algorithm for improving the duration and net present value of a project, *International Journal of Operations & Production Management*, Vol. 15. No. 1., 1995, pp. 89–98.
8. J. Kamburowski: New Validations of PERT Times, *Omega*, Vol. 25, No. 3. 1997, pp. 323–328.
9. J. Uma Maheswari – Koshy Varghese: Project Scheduling using Dependency Structure Matrix, *International Journal of Project Management*, Vol. 23., 2005, pp. 223–230.
10. J. Will M. Bertrand – Jan C. Fransoo: Operations management research methodologies using quantitative modeling, *International Journal of Operations & Production Management*, Vol. 22. No. 2., 2002, pp. 241–264.
11. Koichi Tokuno – Shigeru Yamada: Stochastic performance evaluation for multi-task processing system with software availability model, *Journal of Quality in Maintenance Engineering*, Vol. 12., No. 4, 2006, pp. 412–424

12. Kosztván Zsolt Tibor: *Optimális erőforrás-tervezés*, Doktori értekezés, Gazdálkodás- és Szervezéstudományok Doktori Iskola, Veszprém, 2005
13. Kosztván Zsolt Tibor, Herner László: *Projektütemtervek érzékenységvizsgálata*, Komplex Műszaki Tanácsadó, Verlag Dashofer, 2007
14. Markus Schneider – Thomas Behr: Topological Relationships Between Complex Spatial Objects, *ACM Transactions on Database Systems*, Vol. 31., No. 1, March 2006, pp. 39–81.
15. Massimoluigi Casinelli: *Project Schedule Delay vs. Strategic Project Planning*, AACE International Transactions, 2005, PS.19.
16. Paul P. M. Stoop – Vincent C. S. Wiers: The complexity of scheduling in practice, *International Journal of Operations & Production Management*, Vol. 16. No. 10., 1996, pp. 37–53.
17. Pierpaolo Pontrandolfo: Project duration in stochastic networks by the PERT-path technique, *International Journal of Project Management*, Vol. 18, 2000, pp. 215–222.
18. R. J. Dawson – C. W. Dawson: Practical proposals for managing uncertainty and risk in project planning, *International Journal of Project Management*, Vol. 16, No. 5, 1998, pp. 299–310.
19. S. A. Oke – O. E. Charles-Owaba: Application of fuzzy logic control model to Gantt charting preventive maintenance scheduling, *International Journal of Quality & Reliability Management*, Vol. 23., No. 4, 2006, pp. 441–459.
20. S. C. L. Koh – A. Gunasekaran: A knowledge management approach for managing uncertainty in manufacturing, *Industrial Management & Data Systems*, Vol. 106 No. 4., 2006, pp. 439–459.
21. S. M. T. Fatemi Ghomi – M. Rabbani: A new structural mechanism for reducibility of stochastic PERT networks, *European Journal of Operational Research*, Vol. 145., 2003, pp. 394–402.
22. Walter J. Gutjahr – Christine Strauss – Martin Toth: Crashing of stochastic processes by sampling and optimisation, *Business Process Management Journal*, Vol. 6. No. 1., 2000, pp. 65–83.
23. Willy Herroelen – Roel Leus: On the merits and pitfalls of critical chain scheduling, *Journal of Operations Management*, Vol. 19, No. 5, 2001, pp. 559–577
24. Xuemin Lin – Qing Liu – Yidong Yuan – Xiaofang Zhou – Hongjun Lu: Summarizing Level – Two Topological Relations in Large Spatial Datasets, *ACM Transactions on Database Systems*, Vol. 31., No. 2, 2006, pp. 584–630.

HANDLING STOCHASTIC NETWORK STRUCTURES IN PROJECT SCHEDULING

The success of the execution of a project depends greatly on the efficiency of the planning phase. [1] This study presents a new technology supporting the planning phase. While projects can differ greatly from one to the other and thus require separate models and considerations, there are some questions that are always applicable. Is this the most efficient executive sequence of tasks? Has all the possible solutions been taken into consideration before the final schedule was identified? In the course of our work, we searched for answers to these questions. The method

under review (SNPM: Stochastic Network Planning Method) is a general technique which is adaptable to solve scheduling tasks. The advantages of the SNPM over already known methods (e.g. PERT, GERT, etc.) are that it identifies possible solutions with the help of stochastic variables and that it takes into consideration all of the possible successor relations. With this method, the parameters can be changed if the impacts on the project change (e.g. due to tendencies of the market, changes of technological conditions). Thus the SNPM could be useful as a module of an expert system. The steps of the SNPM are introduced through a few examples to show how it works.

KÖNYVEKRŐL

MÓCZÁR JÓZSEF: *Fejezetek a modern közgazdaságtudományból.*
Sztochasztikus és dinamikus nemegyensúlyi elméletek, természet-
tudományos közelítések. Akadémiai Kiadó, Bp. 608. o.

Móczár József a Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem híres tervmatematika szakán végzett és azóta is az Egyetemen dolgozik. Számos külföldi egyetemen volt vendégprofesszor, többek között az Oszakai, a Gronin-
geni, a Leuveni, a Sienai és a Velencei La Foscara Egyetemeken. Az USC-n
mint Fulbright professzor folytatott kutatásokat. Móczár József, ma a Bu-
dapesti Corvinus Egyetem professzora, közel 15 éves kutatási eredményeit
foglalta össze könyvében. Kutatási részeredményeit ezt megelőzően rangos
hazai és nemzetközi szakfolyóiratokban publikálta. Több mint 60 jelentősebb
tudományos cikk, könyv, könyvfejezet és meghívott előadás szerzője.

A könyv a természet- és a közgazdaság-tudomány alapvető kérdéseiből in-
dul ki, s a végén eljut a legújabb elméletekig és technikákig, ezeket ágyazza
be az új és újszerű kutatási eredményeivel¹, mégpedig egy teljesen új megköze-
lítésben. A könyv áttekintést ad a közgazdasági elméletek kialakulásáról, fel-
használva a modern matematika terén elért eredményeket, majd a rendkívül
szerteágazó kutatási területek közül a sztochasztikus és dinamikus nemegyen-
súlyi elméletekre koncentrálnak, felismerve azt a tényt, hogy a társadalom része a
természetnek, így a természettudományos megközelítések eredményei a köz-
gazdaságtanban is hasznosíthatók. E rendező elv a különböző közgazdasági
iskolákból a legnagyobb részt a mainstream neoklasszikus iskolából metsz
ki, jóllehet, hogy a keynesi és újkeynesi iskolák befolyását is vizsgálja. A
közgazdaságtan modern statisztikai, számviteli, pénzügytechnikai stb. ismer-
eteinek többsége is e legújabb eredmények következményei, amelyek meg-
fogalmazása szintén a természettudományok sokszor bonyolult matematikai
nyelvezetén történik: lényegében ezek biztosítják a gazdaság modern elmé-
leteken alapuló működését. Elfogadva ezek meghatározó szerepét, a szerző
itt az egyes paradigmákon alapuló tudományos kutatások határterületeinek
elméleti eredményeibe, illetve az általa felvázolt fejlődési irányokba, új elmé-
letekbe és modellezési technikákba kíván betekintést adni a természettudo-
mányok (science) köntösében, ami a közgazdaságtant modern közgazdaság-
tudománnyá tette és még inkább teszi.

A mai modern közgazdaság-tudomány legújabb szemléleti és közelítési
technikái a dinamika, a sztochasztika és a nemegyensúlyi elméletek és mo-
dellek. A szerző széleskörű kutatásai alapján a Ramsey-Neumann-Haavelmo
hármast tekinti a két világháború közötti időszak legkiemelkedőbb matema-
tikai közgazdászainak, akiknek eredményei meghatározták a közgazdaság-
tudomány technikai és módszertani irányát. A „nagy elméleteket” pedig

¹Az irodalomjegyzékben 7 darab, rangos nemzetközi szaklapban megjelent tanulmányát
hivatkozza meg a szerző. A teljes publikációs listája 60-nál több tételből áll.

Keynes és követői, továbbá Hicks, Schumpeter, Arrow, Samuelson és a monetaristák (élükön Friedman) eredményei alakították, amelyek szintén megtalálhatók a legújabb dinamikus és sztochasztikus nemegyensúlyi modellek alapjaiban. Mindezt Roy E. Weintraub ún. történeti-rekonstrukciós módszerével, matematikai nyelvezeten fejt ki, mégpedig Willard J. Gibbs szellemében, aki elsőként vallotta, hogy a „matematika egy nyelv”.

A szerző általános kutatási célkitűzései és eredményei a sztochasztikus és dinamikus nemegyensúlyi elméletek területén az alábbiakban foglalható össze.

A vizsgálataihoz felhasznált cikkeket és tanulmányokat, és az azokban talált eredeti gondolatokat, sok esetben más szerzők szöveghű kiemelésében és interpretációjában, megfelelő hivatkozásokkal építette be könyvébe, ami világos és érthető medret nyújtott saját eredményeinek kifejtésére, és egyúttal egy széles irodalmi áttekintést is adott a modern, a mainstream neoklasszikus közgazdaság-tudomány kialakulásáról és főbb modelljeiről. Vagyis hűen követi a Lakatos Imre által megfogalmazott híres tézist: „A tudományfilozófia a tudománytörténet nélkül üres, a tudománytörténet a tudományfilozófia nélkül vak.” E tézis első részének magyarázata, röviden úgy foglalható össze, hogy minden olyan tudományfilozófia, vagyis a közgazdászok terminológiájában metodológia, amely nem veszi figyelembe az általa vizsgált tudomány történetét, elvéti a saját tárgyát, hiszen nem ismeri meg annak valódi működését, természetét. Vagyis itt most sokkal mélyebb értelmet kap a közgazdaságtan tudománytörténete az idehaza szokásos elmélet-történeti megközelítésekénél, amelyek többnyire csak a problémák korhű társadalmi-gazdasági szempontjaira térnek ki, az adott terület modern eredményeibe történő beágyazás nélkül. Ez pontosabban azt jelenti, hogy egy-egy fejezetben egy bizonyos téma kifejtése első, múlt századbeli érdemleges elméleteiből kiindulva eljut napjaink, sőt a közeljövő várható legújabb eredményéig. A tézis második része azonban ennél jóval problematikusabb: azt állítja, hogy minden olyan történeti kutatás, amelyik nem egy filozófiai koncepció mentén halad, meddő és értelmetlen. Ezért a közgazdaságtan történetéhez Móczár József azzal a filozófiai koncepcióval fordult, s ezzel követi Lakatos Imre racionális rekonstrukcióját, hogy választ kapjon arra a kérdésre, hogy tudomány-e, sőt önálló tudomány-e a közgazdaságtan? A választ nála is pontosan a történeti rekonstrukció szolgáltatja. Vizsgálatainak középpontjába a természettudományos megközelítéseket helyezte, a természettudományok, a fizika, kémia és biológia azon redukcióit, amelyek a modern elméleti (részben matematikai) közgazdaságtan kialakulását és az alkalmazott közgazdaságtan, az ökonometria megszületését eredményezték. A szerző mindvégig azt hangsúlyozza könyvében, hogy a közgazdasági folyamatokban a természettudományok (science) kísérleti eredményei, megfelelő analógia alapján, felhasználhatók. Ami viszont a matematikai redukcionizmust illeti, ott eléggé kritikusan fogalmaz. Az ún. science matematikákból csak a kísérletek eredményeit leíró matematikát tartja alkalmasnak a közgazdaságtan formalizált összefüggéseinek leírására a megfelelő analógia fennállása esetén, ami a priori következik a természettudományos megközelítésből. A bourbaki matematika, amely a matematikai összefüg-

géseket alkalmazások nélküli struktúráként kezeli — amit részletesen is bemutat —, „pusztító hatása” következtében a közgazdaságtannak egy olyan ága fejlődött ki a közelmúltban, aminek semmilyen kapcsolata sincs a valós tényekkel, és csaknem elválaszthatatlanok a tiszta matematikától. Ez az, ami számos közgazdásznak, köztük Roy E. Weindraubnak is, félreértésre adtak okot, vagyis sokan a közgazdaság-tudomány matematikai tudományá válásáról beszélnek. Móczár József könyve mindvégig azt bizonyítja, hogy szó sincs erről, csak a science közelítéssel (redukcióval) az ott használt matematika nyelvezete egyre jobban áthatja, miközben formalizált összefüggéseinek leírására megteremti a saját matematikai nyelvezetét is.

Érdemes a matematikai módszerek és a számítástechnika fejlődésével kapcsolatban Krekó Béla egyetemi tanár 1966-ban írt véleményét idézni, amivel összhangban van Móczár József álláspontja: „Bármilyen messze is halad ezen az úton a fejlődés, a matematika valójában mindig csak eszköz marad a közgazdászok kezében. Éppen úgy, mint ahogy mind a mai napig csak eszköz maradt a fizikusok kezében. A matematika fejlettségének mai fokán — a legáltalánosabb relációk tudományának tekinthető, eltekintve e relációk konkrét tartalmától. Már ebből a megfogalmazásból is következik, hogy a matematika sohasem léphet a közgazdasági tudományok helyébe. Ezzel szemben igen komoly, sok esetben mással nem pótolható segítséget nyújthat a gazdasági döntések meghozatalánál.” A matematikai módszerek elsősorban a döntés-előkészítést segítik elő, többek között a prognózisok kidolgozásával, a „döntés azonban továbbra is közgazdasági [vezetési] funkció marad” állapítja meg ezzel kapcsolatban Krekó Béla.²

A szerző egyértelműen a science kísérleteit leíró matematikai redukcionizmust tekinti járható útnak a közgazdaságtudomány természettudományos megközelítésében, elsősorban azért, mert így kevesebb a veszélye annak, hogy a különböző mítoszok eltérítik a közgazdasági modellezést a valóságtól. Amíg a neoklasszikus iskola a klasszikus mechanika Newton által megfogalmazott törvényeinek matematikai összefüggéseit, a közönséges differenciálegyenleteket (ODE), illetve a parciális differenciálegyenleteket (PDE) tekinti az egyik legfőbb módszertani eszközének, addig a sztochasztikus differenciálegyenletek (SDE) és a sztochasztikus parciális differenciálegyenletek (PSDE) a kvantummechanika kísérleti eredményeit tükrözik és a sztochasztikus dinamikus közgazdasági modellek megfogalmazását tették lehetővé a sztochasztikus folyamatok elméletén keresztül. Emellett forradalmasította a pénzügyi matematikát és elvezetett a sztochasztikus dinamikus általános egyensúlyi (DSGE) modellekhez is.

A fizika, ezen belül kiemelten a newtoni mechanika több módszerét és fogalmát alkalmazta a XIX. század közepétől a közgazdaságtan: például egyensúly, statika, dinamikus és statikus egyensúly, periodicitás, harmonikus mozgás, ciklikusság stb. A konjunktúra-elemzés és prognosztizálás gyakran alkalmazott analógiája a harmonikus rezgőmozgás, mivel e törvény lényege a visszatérés, a megismétlődés, a periodicitás, tágabb értelemben a ritmikusság. Az áralakulást például úgy képzelték el, hogy a mozgó egyensúly tengely-

²Krekó Béla [1966]: Lineáris programozás. KJK. Budapest. 14. o.

vonala a trend, és a trend körül harmonikus, ciklikus módon ingadozik az ár. A ciklikus mozgást ugyanis az váltja ki, hogy a gazdasági tényezők alkalmazkodási képessége más és más, eltérő a reakciósebességük. Ha beindul egy folyamat, akkor ez a különböző tényezők egymásra hatásának eredőjeként egy, önmagát erősítő mechanizmussá válik. A fordulópontot, pedig az idézi elő, hogy minél távolabb kerül a gazdaság az egyensúlyi helyzethez képest, annál erősebb ellenerők is működni kezdenek, hatásuk egyre inkább érezhetővé válik, és arra kényszerítik a gazdaságot, hogy újra egyensúlyi helyzetbe kerüljön, illetve azon túllendüljön. E megközelítés tehát a Newton-féle „akció egyenlő reakció”, illetve „hatás egyenlő ellenhatás” elvből indul ki, vagyis azt feltételezi, hogy a gazdasági életben — éppen úgy, mint a fizika hullámjelenségeiben — az egyensúlyi helyzetből való kilengést az abba való visszatérés jelensége követi, majdnem mechanikus módon. A Newtoni fizika a mikro és makro világ számos jelenségét nem tudta megmagyarázni. E problémákra a választ a kvantummechanika és a relativitás elmélete adta meg. A kvantummechanika elméleti és szigorú, formális matematikai felépítése elsősorban Planck, Dirac és Neumann János nevéhez fűződik, az általános és speciális relativitás elméletét Einstein dolgozta ki. A fizika tudományának fejlődése a közgazdaságtanra is hatással volt.

Azt, hogy mit is értünk itt egészen pontosan az ún. science matematikán, például a „fizikai matematikán”, azt Ito integrál példáján, genezisének tudománytörténeti bemutatásával világítjuk meg. Közismert, hogy mind a sztochasztikus integrálás, mind a kockázatos vagyonaarak modellezése a Brown-mozgás formalizált megfogalmazásával kezdődtek. A legkorábbi kísérletek a Brown-mozgás matematikai modellezésére R. Jarrow és Ph. Protter³ szerint három forrásra vezethető vissza. Az első T. N. Thielé⁴ volt, aki az idősorok tanulmányozása során adott egy lehetséges modellt a Brown-mozgásra Koppenhágában; a második L. Bachelier⁵, aki a párizsi értéktőzsde vizsgálatában támaszkodott a Brown-mozgásra; és végül, a harmadik A. Einstein⁶, aki a folyadékban megfigyelt kis részecskék mozgásának modelljére tett javaslatot, lényegében azzal a céllal, hogy meggyőzzön más fizikusokat is az anyag molekuláris természetéről. Számunkra most igazából Paul Langevin francia fizikus, 1908-ban megjelent tanulmánya⁷ érdekes, amelyben a Brown-

³Robert Jarrow, Philip Protter [2004]: A short history of stochastic integration and mathematical finance: the early years, 1880–1970, Anirban DasGupta, ed., A Festschrift for Herman Rubin (Beachwood, Ohio, USA: Institute of Mathematical Statistics, 2004), 75–91. o.

⁴Thiele, T. N. [1880]: Sur la compensation de quelques erreurs quasisystématiques par la méthode des moindres carrés, Ritzel, Copenhagen.

⁵Bachelier, L. [1900]: Théorie de la Spéculation, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 21-286. o.; Bachelier, L. [1900]: Théorie de la Spéculation, Gauthier-Villars, Paris.

⁶Einstein, A. [1905]: On the movement of small particles suspended in stationary liquid demanded by the molecular-kinetic theory of heat, Ann.d. Physik 17 (In Investigations of the theory of Brownian movement, ed. R. Fürth, Dover, New York, 1956); Lánzos Kornél [1978]: Einstein évtizede. 1905-1915. Gyorsuló idő. Magvető Kiadó. Budapest. Einstein és a Brown-féle mozgás. 110-118. o.

⁷Paul Langevin [1908]: Sur la théorie du mouvement brownien, C. R. Acad. Sci. (Paris)

mozgás leírása, saját szavaival élve, sokkal egyszerűbb volt, mint Einsteiné. Ugyanis, amíg Einstein, kiindulva a megfelelő hipotézisekből egy olyan parciális differenciálegyenletet (azaz, egy Fokker-Planck egyenletet) old meg, amely egy Brown-mozgást végző részecske valószínűségi sűrűségének időbeli evolúcióját szabályozza, addig Langevin egyszerűen csak Newton második törvényét alkalmazta a reprezentatív Brown mozgást végző részecskére. Ezzel Langevin „feltalálta” a sztochasztikus fizika $F = ma$ egyenletét, amit most Langevin egyenletnek neveznek. Ma már világos, hogy Langevin közelítésének nyilvánvaló egyszerűsége annak árán volt lehetséges, hogy az új matematikai objektumokba szokatlan tulajdonságokat erőltetett bele, amelyek mára már jól kidolgozottak és széles körben elfogadottak. Mind a Langevin egyenlet, mind a Fokker-Planck egyenlet folytonos fizikát, Markov (azaz, memória nélküli sztochasztikus) folyamatokat írnak le. Ugyanakkor Langevin elemzése valamivel általánosabb és pontosabb volt, mint Einsteiné. Ugyanis, Langevin bevezetett egy sztochasztikus erőt (az ő kifejezésével élve, egy komplementer erőt), amely tolja körbe a Brown-mozgást végző részecskét a sebességtérben, míg Einstein teljes egészében a konfigurációs térben dolgozott. Azaz, modern terminológiában fogalmazva, amíg Langevin a Brown-mozgást végző részecske sebességét egy Ornstein-Uhlenbeck folyamatként írta le, a helyzetét, pedig a sebességének időintegráljaként, addig Einstein a helyzetét egy sodródás (drift) nélküli Wiener folyamatként. Az előbbi magába foglalja az utóbbit, és egy speciális „coarse-graining limit”-be⁸ redukálja.

A Langevin-egyenlet a következőképpen írható fel:

$$dX_t/dt = -\alpha X_t + \sigma \xi_t$$

ahol X_t a Brown-mozgást végző részecske sebessége a t időpillanatban, továbbá $\alpha > 0$ és σ konstansok. Itt a $-\alpha X_t$ a környező közeg hatásának szisztematikus része, amelyet a dinamikus súrlódás hoz létre. Az α konstans a Stokes-féle törvényből $\alpha = 6\pi a\eta/m$ -nek adódik, ahol a jelöli a gömb alakú részecske sugarát, m a részecske tömegét, η pedig a környező folyadék viszkozitását. Ezzel szemben a $\sigma \xi_t$ második tag azt az erőhatást reprezentálja, amit a molekulák ütközése gyakorol a részecskére. Mivel normális körülmények között másodpercenként kb. 10^{21} molekulaütközést számolhatunk össze, ami a részecskét minden irányból egyenletesen éri, ezért a $\sigma \xi_t$ valóban egy gyorsan változó fluktuációt jelöl, amit „fehér zajként” idealizálhatunk. A „fehér zaj” nulla várható értékű, az egész valós tengelyen konstans spektrum sűrűségű, stacionárius Gauss-folyamattal azonosítjuk. A fehér zaj most is hasznos matematikai idealizálásnak bizonyul azoknak a véletlen hatásoknak leírására, amelyek gyorsan változnak és a különböző időpontokhoz tartozó értékei gyakorlatilag korrelálatlanok. Ha a ξ_t folyamatot úgy normáljuk, hogy kovarianciája delta-függvény legyen, akkor $\sigma^2 = 2\alpha kT/m$ összefüggést kapjuk (itt a k a Boltzmann-állandó, T pedig a környező folyadék abszolút hőmérséklete).

146, 530-533.o.

⁸Daniel T. Gillespie [1996]: Exact numerical simulation of the Ornstein-Uhlenbeck process and its integral, Phys.Rev. E.54, 2084-2091. o.

Megjegyzendő, hogy a Brown-mozgás Langevin egyenletében szereplő X_t valószínűségi változó eloszlásfüggvénye meghatározható, azonban valamennyi ilyen tulajdonságú X_t folyamat (Ornstein-Uhlenbeck folyamat) 1 valószínűséggel nem differenciálható realizációkkal rendelkezik, ezért nem értelmezhető közönséges differenciálegyenletként. Megmutatható, hogy a „fehér zaj” csak általánosított sztochasztikus folyamat, vagyis a

$$W_t = \int_0^t \xi_s ds$$

integrált Wiener-folyamatnak⁹ feleltethetjük meg, amiből parciális integrálással kapjuk, hogy

$$dW_t = \xi_t dt .$$

Ha most a formálisan közönséges differenciálegyenletekben ún. „fehér zaj” típusú véletlen ξ_t függvények lépnek fel, vagyis:

$$\dot{X}_t = f(t, X_t) + G(t, X_t)\xi_t, \quad X_{t_0} = c ,$$

ahol c véletlen kezdeti érték, akkor a fenti Wiener-folyamat figyelembevételével, kapjuk:

$$dX_t = f(t, X_t)dt + G(t, X_t)dW_t, \quad X_{t_0} = c .$$

Ez az egyenlet X_t folyamat szerinti (Ito-féle) sztochasztikus differenciálegyenlet, amelyet integrálegyenletként is felírhatunk:

$$X_t = c + \int_{t_0}^t f(s, X_s) ds + \int_{t_0}^t G(s, X_s) dW_s .$$

Az itt szereplő W_t folyamat realizációi 1 valószínűséggel folytonosak ugyan, de egyetlen intervallumban sem korlátos variációjúak, ezért a fenti integrálegyenletben a második integrál általában még sima G függvény esetén sem értelmezhető a W_t realizációi szerinti Riemann-Stieltjes integrálként, mivel ebben az esetben a közelítő összeg határértéke függ a közbülső pontok megválasztásától. Ito

$$Y_t = \int_{t_0}^t G(s) dW_s .$$

alakú integrálokat definiált a W_s Wiener-folyamat ún. jövőtől nem függő G funkcionáljainak egy széles osztályára, és ezzel megalapozta a sztochasztikus differenciál-egyenletek elméletét, ami kezdetben a pénzügyi matematikában játszott fontos szerepet, de ma már a reálfolyamatok sztochasztikus vizsgálatában is jelentős szerepet játszik, amint Móczár József is rámutat könyvében.

Külön is meg kell említenünk, hogy a könyv egyes fejezeteiben vizsgált legújabb elméletekben a szerző rangos, nemzetközi hírű tudósok, köztük

⁹A Wiener-folyamat egy olyan folytonos (de sehol sem differenciálható) realizációkkal bíró Gauss-folyamat, aminek várható értéke: $EW_t = 0$, és kovarianciája: $EW_t W_s = \min(t, s)$.

több Nobel-díjas hozzájárulása mellett elhelyezi az érintett legkiválóbb hazai közgazdász tudósokét is, mégpedig Bélyácz Ivánét, Bródy Andrásét, Erdős Tiborét, Kornai Jánosét, Mátyás Antalét, Szentés Tamásét, Theiss Edéét, Török Ádámét és Zalai Ernőét.

Móczár József tudományos eredményei közül néhány, külföldi, illetve hazai kutatókkal végzett közös kutatások eredménye. Így mindenképpen megemlítendő Jinkichi Tsukui professzor neve, akivel együtt az egyensúlyi és a nemegyensúlyi növekedési pályákat vizsgálta dekompozábilis gazdaságokban; Krisztin Tibor professzoré, akivel együtt a Harrod modell strukturális stabilitására adott bizonyítást; és Matolcsy Tamásé és Ván Péteré, akikkel konzultálva, kimutatta, hogy nem igazolható Neumann János azon sejtése, hogy a növekedési modellje termodinamikailag izomorf módon értelmezhető. Megemlítendő még Kiyoshi Kuga, Richard H. Day, Lionello Punzo és Roy E. Weintraub neve, akikkel folytatott eszmecserek visszatükröződnek a könyv Neumann modellekkel, nemlineáris dinamikával és a tudománytörténettel foglalkozó fejezeteiben.

A szerző új kutatási eredményei részletesebben:

(A) Neumann-Leontief modellekben

A Neumann modellek strukturális tulajdonságainak pontosítása. A strukturális tulajdonságok karakterisztikumaként *per se* a technológiát reprezentáló A input és B output, nemnegatív mátrixok pozitív elemeinek elrendeződésétől függ. Vagyis, hogy létezik-e olyan független termékhalmoz, amelybe tartozó termékek anélkül termelhetők, hogy a többiből felhasználják. Az ikertermelés miatt viszont lehetséges előállítani olyan termékeket is, amelyeket nem tekintünk függetleneknek. Amennyiben létezik független termékhalmoz, akkor a megfelelő KMT-technológiát reducibilisnek nevezzük. A fentiekből világos, de amit maga David Gale¹⁰ sem vett észre, hogy a független termékhalmoz kijelölése nem egyértelmű. Ez a felfedezés ad lehetőséget a Neumann modellek strukturális tulajdonságainak pontosítására, mind a Gale-féle technológiai, mind a Robinson-féle¹¹ gazdasági értelemben.

A Gale-féle reducibilitási definíció alapján az erős és a gyenge reducibilitási fogalmak bevezetése. A Gale-féle reducibilitási definíció az ikertermelés miatt megengedi azt, hogy a független termékhalmozba olyan termékek is beletartozzanak, amelyeket nem használunk fel előállításukhoz. Gale a legtágabb halmazát vette a független termékeknek és amellet vezetett be a reducibilitási definícióját. Viszont vehetjük a legszűkebb halmazát is a független termékeknek, és akkor lehetőség nyílik a gyenge reducibilitási fogalmak bevezetésére, szemben a Gale-féle erős reducibilitási fogalommal. A kettő közötti átjárás teszi lehetővé a csak erősen reducibilis, illetve a csak gyengén reducibilis fogalmak bevezetését. A Gale-féle technológiai reducibilitás eme új taxonómiája bevezethető a Robinson-féle gazdasági reducibilitásra is.

¹⁰Gale, D. [1960]: The Theory of Linear Economic Models, McGraw-Hill, New-York.

¹¹Robinson, S. [1973]: Irreducibility in the Von Neumann model, *Econometrica*, Vol. 41. 569-573. o.

A reducibilitás új taxonómiájának egybevetése Neumann, Weil, Morishima dekompozabilitási definícióival. Miért is lehet érdekes ez az új taxonómia, nem csak barokkosítása a meglévő fogalmaknak? A válasz roppant egyszerű: matematikailag talán barokkosítás, de ezzel közgazdasági értelemben pontosítható Gale¹² azon állítása, miszerint a Neumann modell irreducibilis struktúrája, akár technológiai, akár gazdasági értelemben, biztosítja a kamattényező és a növekedési tényező egyenlőségét és egyértelműségét, megfelelő kibocsátás- és árvektorok mellett, vagyis az ún. unicitást. A helyes állítás most úgy hangzik, hogy az unicitás fennáll a KMT struktúrájú Neumann modellekben, ha azok irreducibilisek, vagy csak gyengén reducibilisek, akár technológiai, akár gazdasági értelemben¹³. Ez az állításunk pontosan megegyezik a Neumann által adott eredeti feltevéssel, ami biztosította nála az unicitást. Vagyis, az $A + B > 0$ akkor és csak akkor áll fenn, ha a modell irreducibilis vagy csak gyengén reducibilis, mind technológiailag, mind gazdaságilag. Weil¹⁴ dekompozabilitás definíciója az erős, a gyenge és a csak erős reducibilitási fogalmainkkal egyezik meg. Hasonlóképpen, Morishima¹⁵ által adott dekompozabilitás fogalom a technológiailag csak erősen reducibilis struktúra fogalmával egyezik meg. A gazdaságilag csak erősen reducibilis struktúrát Iritani¹⁶ Morishima dekompozabilitás fogalmának kiterjesztése foglalja magába.¹⁷

A Neumann gazdaságok egyensúlyi állapotainak meghatározása;

- a Neumann modellek nem egyensúlyi állapotainak meghatározása a dualitáson keresztül¹⁸;
- egyensúlyi és nemegyensúlyi növekedési pályák, turnpike-elméletek;
- ciklikus és turnpike növekedés reducibilis Neumann modellekben: empirikus elemzések a japán gazdaság input-output táblázatai alapján,

A kutatás célja az (in)dekompozabilis arányos és ciklikus egyensúlyi iparági növekedési pályák tanulmányozása volt, mégpedig a zárt, dinamikus, és spe-

¹²Gale, D. [1960]: *The Theory of Linear Economic Models*, McGraw-Hill, New-York.

¹³Érdemes megjegyezni, hogy D. Gale több kisebb-nagyobb hibát is elkövetett vizsgálataiban. Az egyik legsúlyosabbra maga Gale adott javítást 1972-ben az *Econometrica* (40) számában „Comment” c. megjegyzésében. E cikk sajnálatos módon nem szerepel a hivatkozott irodalmak között, bár a szerző citálja.

¹⁴Weil, T. L. Jr. [1968]: *The decomposition of economic production systems*, *Econometrica*, Vol. 36. 260-278. o.

¹⁵Morishima, M. [1964]: *Equilibrium, Stability and Growth*, Oxford University Press, Oxford.

¹⁶Iritani, J. [1981]: *On Uniqueness of General Equilibrium*, *Review of Economic Studies*, 48. 167-171. o.

¹⁷Az eredmények publikációi: Móczár József [1980]: *A dekompozabilitás kiterjesztése a gazdaság lineáris modelljeiben*, 1980, *Sigma*, 23-45. o.; Móczár József [1991]: *Structural Properties of von Neumann Models*, *Pure Mathematics and Applications*, Ser. C. Vol. 2, 301-311. o.; Móczár József [1995]: *Reducible von Neumann Models and Uniqueness*, *Metroeconomica*, 46, 1-15. o.

¹⁸Az eredmények publikációi: Móczár József [1980]: *A Neumann-gazdaság egyensúlyi állapotainak meghatározása*, *Egyetemi Szemle*, 41-56. o.; Móczár József [1997]: *Non-Uniqueness through duality in the von Neumann growth models*, 1997, *Metroeconomica*, 48, 280-299. o.

ciális reducibilis technológiával rendelkező input-output rendszerekben. Itt Móczár József megmutatta, hogy bizonyos részgazdaságok (és iparágaik) arányos egyensúlyi növekedési pályákkal rendelkeznek, míg a többiek általában ciklikus fluktuációkkal. Azaz, az egyes részgazdaságok (és iparágaik) optimális növekedési pályái nem szükségszerűen közelítik meg a megfelelő arányos növekedési pályát a tervezési horizont legtöbb periódusában. Más szavakkal, a szokásos turnpike tulajdonság többé nem áll fenn. A Kornai János által erőteljesen kritizált egyöntetű iparági növekedési ütemmel szemben itt, a sokkal reálisabb, különböző ütemek generálására ad lehetséges módszereket. A kutatások érdekes eredményeket adnak a nyitott gazdaságokra is, amikor a külkereskedelmet is figyelembe vesszük.¹⁹

A fenti összes kutatási téma eredményeit foglalja össze Móczár József (1995) tanulmánya, ami egyúttal a szerző PhD tanulmánya is volt, amelyet „hakase ronbunként” az Oszakai Egyetemre nyújtott be 1993-ban, és amire megkapta a PhD tudományos fokozatot.²⁰

(B) Perron-Frobenius tételek a lineáris és a nemlineáris Neumann rendszerekben

E kutatás alapvető célkitűzése a sajátérték-tételek lineáris és nemlineáris Neumann rendszerekre történő kiterjesztése. A vizsgálódások keretében olyan többszektoros gazdasági modell szolgál, amelyben az egyes tevékenységek input-output kapcsolatait megfelelő tulajdonságú nemlineáris függvényekkel, a ráfordítási és a kibocsátási struktúráját pedig Jacobi-mátrixokkal írjuk le. Az idő kezelése szempontjából a modell diszkrét, illetve a stacionárius modellek családjába tartozik. A modell speciális eseteként értelmezhető mind az irodalomból jól ismert (nem)lineáris input-output modell, mind pedig az itt megfogalmazott nemlineáris Neumann modell.

A sajátértékek megfogalmazása előtt a szerző értelmezi a sajátérték, a sajátvektor, a spektrum és a spektrálrádiusz fogalmát, bevezeti az (ir)reducibilitás különféle válfajait a (nem)lineáris Neumann-rendszerekbe. A szigorú egyensúlyt biztosító lineáris Neumann modell a $Cx = \lambda Bx$, illetve $pC = \lambda pB$ általánosított sajátérték-feladattal definiálható, ahol C a fogyasztási és B a kibocsátási mátrixokat, az x a tevékenységek alkalmazási szintvektorát, a p a termékek egységárvektorát, valamint a λ az expanziós (növekedési illetve kamat-) tényező reciprokát jelöli. A fenti probléma Perron-Frobenius tulajdonságait —tudomásunk szerint— ez idáig csak O. L. Mangasarian²¹ vizs-

¹⁹Az eredmények publikációi: Móczár József [1991]: Irreducible Balanced and Unbalanced Growth Paths (Business Cycles and Structural Changes), *Structural Change and Economic Dynamics*, 2, 159-176. o.; Móczár József [1991]: Balanced and unbalanced growth paths in a decomposable economy: contributions to the theory of multiple turnpikes, *Economic Systems Research*, 3, 211-222. o. (co-author: Jinkichi Tsukui); Móczár József [1997]: Growth paths developed by international trade in Leontief-type dynamic models, *Japan and the World Economy*, 17-36. o.

²⁰Móczár József [1995]: Cyclical and Turnpike Growth: Capital Accumulation Choices in Some Reducible von Neumann Models, *Society and Economy*, 4. szám, 32-191. o.

²¹Mangasarian, O. L. [1971]: Perron-Frobenius Properties of $Ax - \lambda Bx$, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 36, 86-102. o.

gálta. Tételeit tisztán matematikai szempontból, tetszőleges előjelű, azonos típusú és megfelelő feltételeket kielégítő C és B mátrixok mellett fogalmazta meg. A technológiailag és/vagy gazdaságilag (ir)reducibilis lineáris Neumann-rendszerre megfogalmazott Frobenius-tétel bizonyításához Mangasarian tételeit használja fel. Megmutatja, hogy ezek a bizonyítások kiterjeszthetők a nemlineáris általánosított sajátérték-egyenletekre is.²²

(C) Közgazdasági dinamika

Nemlineáris dinamika, káosz. A makroökonómiai növekedést az eredendően is bonyolult mikromegalapozásával együtt vizsgálni meglehetősen nehéz feladat. Azokban a reprezentatív ügynökmodellekben, amelyek megkísérik ezt, elsősorban a mikrooptimalitás jelenik meg. Itt most nem optimalizálunk; csak a lehetséges, tetszőleges indulófeltételeket kielégítő egyensúlyi és nem-egyensúlyi pályák viselkedése érdekel bennünket. Így az endogén változók kezdeti értékeinek megadásával képet kaphatunk azok időbeli alakulásáról. Egy ún. konstruktív mikromegalapozást fejlesztett ki a szerző, ami azt jelenti, hogy az aggregált magánkiadások elemeit megfelelően, különböző piaci értékelésekkel szabályozzuk. E szabályozások eszközei: a fogyasztási adó, a részvénytőzsi értékelés (Tobin- q) és az árfolyam. Ezek mindegyike valamilyen módon a mikroökonómiában gyökerezik, és értékeik a megfelelő piaci folyamatokat és döntéseket tükrözik. Vizsgálatait a Harrod és Leontief klasszikus növekedésméletei alapján kalibrált modellekben végezte el, amelyek a nemlineáris dinamikát exogén sokkok nélkül generálták.²³

(D) Strukturális stabilitásvizsgálatok a keynesi típusú növekedési modellekben

Harrod-modell. A Harrod-modell egyenlete statikus egyensúlyi helyzetet definiál, amit most az adaptív várakozások segítségével megfogalmazott és a tökéletes előrelátás feltevésével egydimenziósra redukált dinamikus nemlineáris modell stacionárius állapotaként származtattunk. Megmutatható, hogy diszequilibriumi környezetéből vizsgálva a harrodi egyensúlyi helyzet lokálisan instabil, de a dinamikus nemlineáris Harrod-modell strukturálisan stabil.

A harrodi instabilitás vizsgálata nemlineáris közelítéssel legkorábban Nevile (1962) cikkében²⁴ szerepelt. Nevile világosan megmutatja, hogy az instabilitás két alapvető (multiplikátor és akcelerátor) premisszából, plusz a várakozásokra tett egyértelmű feltevésekből következik.

²²Az eredmények publikációja: Móczár József [2003]: Sajátérték-tételek a lineáris és a nemlineáris Neumann rendszerekben, 2003, Szigma, XXXIV. évf., 3-4. szám, 95-118. o.

²³Az eredmények publikációi: Móczár József [2004]: Új áramlatok a közgazdasági dinamikában, Ünnepi dolgozatok dr. Szigeti Endre 70. születésnapjára, Jász Nyomda és Kiadó Kft., Budapest, 164-200. o.; Móczár József [2008]: Nemlineáris dinamika klasszikus növekedési modellekben, Szigma, XXXIX. évf., 1-2. szám, 1-26. o.

²⁴Nevile, J. W. [1962]: The Mathematical Formulation of Harrod's Growth Model: Comment, The Economic Journal, Vol.72. No. 286, 367-370. o.

Az előbbi feltevés az akcelerátorra vonatkozik, amely lehet „rigid” vagy „flexible”, és az utóbbi verzió többletet vagy hiányt eredményez a létező tőkeállományban.

Nevile azonban csak olyan pályák elemzését bizonyította, amelyekben a növekedési ütemek monoton vagy növekvően, vagy csökkenően távolodnak a harrodi egyensúlytól. (Mint a szerző eredményeiből később kiderült, csak az instabil nyeregpályát (sokaságot) határozta meg.) Vagyis, elemzése nem volt teljes, a mai terminus technicus szerint adós maradt a modell teljes fázisdiagramjának elkészítésével és az összes lehetséges mozgási pálya vizsgálatával. Erre egyébként a 60-as évek közepén több szerző is reagált, többek között Ken-ichi Inada (1965)²⁵ és J. Encarnacion (1966)²⁶. Számunkra most Inada cikke az érdekesebb, mert a kérdéses másodrendű differenciaegyenlet kvalitatív megoldását nyújtó részleges fázisdiagramot is felvázolta, jóllehet, ő sem jutott el a teljes körű vizsgálatához. Nevile (1965)²⁷ ezt a hibát el is ismerte, de sem ők, sem mások, egészen a mai napig nem adtak megoldást a Harrod-modell teljes fázisdiagramjára, s ezzel a nemegyensúlyi helyzetekből kiinduló trajektóriák vizsgálatára. A szerző előállította a modell teljes fázisdiagramját, ami már teljes körű leírást ad a Harrod-modell dinamikájára, benne az instabil állapotra is. A Harrod-modell strukturális stabilitási tulajdonságaival, irodalmi ismereteink szerint, nemzetközi viszonylatban is, érdemben először a Móczár-Krisztin tanulmány foglalkozott. Mint ismeretes, a strukturális stabilitási tulajdonság megengedi, hogy az empirikus vizsgálatokban a paraméterek kissé torzítottak legyenek, és megengedjünk más természetű kisebb változtatásokat is a vektormezőben. Ez közgazdasági szempontból azért rendkívül jelentős, mert strukturális stabilitás mellett a tőkeefficiensek várható és tényleges időbeli alakulását leíró függvények piciny változtatása (a vektormező perturbációja) nem érinti az endogén változók kvalitatív tulajdonságait, vagyis trajektóriáik megőrzik topológiai ekvivalenciájukat, s ezzel előrejelzésekre alkalmasak. Vagyis ebben az esetben érvényét veszti a Lucas-, vagy még pontosabban az Engle-kritika kvalitatív vonatkozása. Az időparamétert átskálázza a perturbált modell, vagyis nem teljesül a topológiai konjugáció; a növekedési ütem bizonyos szintre történő emelkedése vagy csökkenése attól eltérő időt vehet igénybe, mint amennyi az eredeti modellben volt.

A strukturális stabilitás fogalmát a modern topológia eszközeivel Andronov és Pontrjagin (1937) definiálták²⁸. A fogalom magának a dinamikus rendszernek egy bizonyos tulajdonsága, ami a leglátványosabban úgy jelenik meg, hogy a strukturálisan stabil modell fázisdiagramjának kvalitatív tulajdonságai nem változnak, ha a modell feltételeit kissé perturbáljuk. Még ha a modell dinamikusan instabil egyensúlyi állapottal is rendelkezik, a struk-

²⁵Inada, K. (1965): The Mathematical Formulation of Harrod's Growth Model, *The Economic Journal*, Vol.75. No. 299, 620-624. o.

²⁶Encarnacion, J. (1966): On Instability in the Sense of Harrod: A Comment, *Economica*, New Series, Vol. 33. No. 131, 346. o.

²⁷Nevile, J. W. (1965): The Mathematical Formulation of Harrod's Growth Model: A Reply to Dr. Inada, *The Economic Journal*, Vol.75. No. 299, 624-625. o.

²⁸Andronov, A.– Pontryagin, S. (1937): Structurally Stable Systems, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, Vol. 14, 247-250. o.

turális stabilitása még mindig tekinthető elégséges feltételnek a tudományos jelenségek megfigyelhetőségére és előrejelezhetőségére, vagyis a mi esetünkben most a Harrod által adott keynesi stacionárius gazdasági növekedésre.²⁹

(E) Arrow-Debreu-modell és a Kornai-kritika

Itt az általános egyensúlyelmélet Arrow-Debreu modelljét vizsgálja a szerző, és Kornai *Antiequilibrium* (1971, KJK, Budapest) c. könyvében megjelent kritikákat veti össze Hahn (1973)³⁰ meglehetősen vitriolos ellenvetéseivel, mégpedig Kornai (2005)³¹ legújabb önéletrajzi kötetében megjelent visszatekintéssel aktualizálva. A vita értékelésében, az általános egyensúlyelmélet és az antiequilibrium különbözőségeit vizsgálta, ami lényegében nem kérdőjelezte meg egyik megközelítés relevanciáját sem, de a legújabb elméletek nem is mindenben igazolták Hahn ellenvetéseit. Mivel az Arrow-Debreu modell nem tekinthető az antiequilibrium modell nemegyensúlyi kiterjesztésének, és fordítva, az antiequilibrium modellnek nem egyensúlyi állapota az Arrow-Debreu modell, ezért a mai ismereteink alapján a kétféle megközelítés szintézise nem lehetséges.³²

(F) Növekedés termodinamikai értelmezése

Móczár József megmutatja könyvében, hogy az ún. Gibbs-féle formula csak akkor használható fel egy (öko)gazdasági modellben, ha a megfelelő közgazdasági fogalmak a termodinamikában definiált potenciálokkal és azokhoz kapcsolódó irreverzibilis folyamatok rátáival megfelelő módon értelmezett. Az ilyenféle megfeleltetés kérdését elsőként Neumann János vetette fel, miszerint a gazdasági modelljében a termodinamikában definiált potenciálokkal és azokhoz kapcsolódó irreverzibilis folyamatok rátáival izomorf módon értelmezhető lenne a növekedés. Móczár József szigorúan termodinamikai összefüggésekből kiindulva levezeti, és Samuelson³³ kontra Bródy³⁴ tanulmányok felhasználásával bizonyítja, hogy sejtése nem igazolható, viszont nem zárta ki annak lehetőségét, hogy általánosabb keretek között mégis bizonyítható.

A könyv igen alapos és széles körű irodalomfeldolgozást tartalmaz, de hiányoltam Heller Farkas: *A közgazdasági elmélet története*. Gergely R., Bp., 1943. c. alapvető munkájának feldolgozását, amit az Aula 2001-ben reprint kiadott.

²⁹Az eredmények publikálása: Móczár József [2006]: A Harrod modell strukturális stabilitása, *Sigma*, XXXVII. évf., 1-2. szám, 1-31. (társszerző: Krisztin Tibor)

³⁰Hahn, H. F. (1973): *The Winter of our Discontent*, *Economica* August, 322-330. o.

³¹Kornai János (2005): *A gondolat erejével — Rendhagyó önéletrajz*, Osiris Kiadó, Budapest.

³²Az eredmények publikációja: Móczár József [2006]: Arrow-Debreu modell és a Kornai kritika 30 év után, *Közgazdasági Szemle*, 2. szám, 171-199.

³³Samuelson, P. A. [1992]: *Economics and Thermodynamics: von Neumann's Problematic Conjecture*, in *Rational Interaction*, ed. By R. Selten, Springer-Verlag, Berlin.

³⁴Bródy András [1989]: *Economics and Thermodynamics*, in *John von Neumann and Modern Economics*, ed. By M. Dore, S. Chakravarty and R. M. Goodwin, Clarendon Press, Oxford.

A könyv ajánlható mindazoknak, akik érdeklődnek a közgazdaságtudomány átfogó kérdései, ezen belül a sztochasztikus és dinamikus nemegyensúlyi elméletek iránt. A könyv nyilvánvalóan tankönyv, ahogy ezt a szerző az utószóban is hangsúlyozza, de ugyanakkor monográfia is, így felhasználási területe ennél szélesebb körű. A közgazdaságtan számos szakterülete, így a marketing, a statisztika, az ökonometria, a prognosztika, a számvitel és pénzügy ismereteinek többsége a könyvben vizsgált legújabb elméleti eredményekre építkezik.

Sipos Béla (PTE KTK)

CONTENTS

MÓCZÁR, JÓZSEF: Nonlinear Dynamics in Classical Economic Growth Models . . .	1
ÁGOSTON, KOLOS CSABA: Choice Amongst Hungarian Pension Funds' Annuities	27
BARANCSUK, JÁNOS: A Contribution to the Clarification of „Price Taker” and „Price Maker” Terms (II)	49
PINTÉR, JÓZSEF – REKETTYE, GÁBOR: Quantitative Methods and Models in Measuring Customer Satisfaction with the Electricity Supply	73
KOSZTYÁN, ZSOLT TIBOR – FEJES, JÁNOS – KISS, JUDIT: Handling Stochastic Network Structures in Project Scheduling	87
BOOK REVIEWS	
MÓCZÁR, JÓZSEF: Fejezetek a modern közgazdaságtudományból (Sipos, Béla) . . .	107

TARTALOM

MÓCZÁR JÓZSEF: Nemlineáris dinamika klasszikus növekedési modellekben	1
ÁGOSTON KOLOS CSABA: Magánnyugdíj-járadékok közötti választás	27
BARANCSUK JÁNOS: Adalékok az „árelfogadó” és „ármeghatározó” fogalmak értelmezéséhez (II)	49
PINTÉR JÓZSEF – REKETTYE GÁBOR: A villamosenergia-szolgáltatással való elégedettség mérésekor alkalmazható kvantitatív módszerek és modellek	73
KOSZTYÁN ZSOLT TIBOR – FEJES JÁNOS – KISS JUDIT: Sztochasztikus hálóstruktúrák kezelése projektütemezési feladatokban	87

KÖNYVEKRŐL

MÓCZÁR JÓZSEF: Fejezetek a modern közgazdaságtudományból (Sipos Béla)	107
---	-----

SZIGMA

Matematikai-közgazdasági folyóirat

A Gazdaságmodellezési Társaság lapja

Főszerkesztő:

VÖRÖS JÓZSEF

PTE Közgazdaságtudományi Kar, H-7622 Pécs, Rákóczi út 80.

Tel.: 72/501-599, Fax: 72/501-553

e-mail: voros@ktk.pte.hu

Társzerkesztők:

FÜLÖP JÁNOS

MTA SZTAKI

e-mail: fulop@oplab.sztaki.hu

HUNYADI LÁSZLÓ

e-mail: laszlo.hunyadi@office.ksh.hu

TEMESI JÓZSEF

Budapesti Corvinus Egyetem,

e-mail: jozsef.temesi@uni-corvinus.hu

VÍZVÁRI BÉLA

Eötvös Loránd Tudományegyetem,

e-mail: vizvari@cs.elte.hu

Szerkesztőbizottság:

AUGUSZTINOVICS MÁRIA, DELI ZSUZSA, FORGÓ FERENC,
GETHER ISTVÁNNÉ, KOMLÓSI SÁNDOR, KOVÁCS ERZSÉBET,
LIGETI CSÁK, MESZÉNA GYÖRGY

Terjeszti a Gazdaságmodellezési Társaság. A kiadvány megjelenését az MTA
Könyv- és Folyóiratkiadó Bizottsága támogatta.

ISSN 0039-8128

www.sigma.ktk.pte.hu