

OPTIMÁLIS LINEÁRIS ADÓ- ÉS NYUGDÍJRENDSZER  
RUGALMAS MUNKAKÍNÁLAT ESETÉN<sup>1</sup>

SIMONOVITS ANDRÁS

MTA KRTK Közgazdaságtudományi Intézet

Az adórendszer a dolgozók között osztja újra a munkajövedelmeket; a nyugdíjrendszer pedig a nyugdíjasok között osztja újra a nyugdíjjövedelmeket. Az egyszerűség kedvéért lineáris *transzferrendszert* vizsgálunk, amelyben a befizetett nyugdíjjárulékért és szá-ért cserében az idősök keresetarányos nyugdíjat, a dolgozók és a nyugdíjas pedig egyaránt alapjövedelmet kapnak. A munkakínálat maximalizálja a dolgozó leszámított életpálya-hasznosságát, amely a fiatal- és időskori fogyasztás mellett a szabadidőtől is függ. A kormányzat olyan transzferkulcsot és alapjövedelmet választ, amely maximalizálja a leszámítás mentes társadalmi jóléti függvényt. Fő eredményünk: e transzferrendszer egyensúlyt teremt a keresetarányos nyugdíjrendszer hatékonysága, valamint az alapjövedelem adta újraelosztás között.

*Kulcsszavak:* személyi jövedelemadó, nyugdíjrendszer, optimális újraelosztás.  
*JEL szám:* H24, I31, J22, J26

## 1 Bevezetés

A személyi jövedelemadó és a tb-nyugdíjrendszer a modern jóléti állam két fontos pillére. Például a legegyszerűbb szja-rendszerben minden dolgozó keresetével arányos adót fizet, és cserébe azonos alapjövedelmet kap. A keresetarányos nyugdíjrendszer a kötelező életciklus-megtakarítás eszköze, az alapnyugdíj pedig felfogható úgy is, mint a személyi jövedelemadózás kiterjesztése a dolgozókról a nyugdíjasokra. (Az egyetlen eltérést a nyugdíjjárulékok egy részére vonatkozó plafon léte jelenti.) E kereszthatások tanulmányozása erőpróbáló, de fontos feladat.

A progresszív szja felszámolása 2011 és 2013 között, valamint a nyugdíj-degresszió fokozatosan tervezett megszüntetése 1998 és 2013 között időszerűvé teszi e felvetett kérdéseket Magyarországon. (A nettó kereset degresszív beszámítása lényegében megszünt, de a kevésbé fontos lineáris szolgálati idő-új nyugdíj 2013-ra tervezett bevezetése az adóztatással együtt elmarad.) De már korábban felvetődött a nyugdíj-degresszió visszahozatala. A NYIKA keretében *Augusztinovics–Matils* [2010] dolgozta ki az arányos és az alapnyugdíj szimmetrikus kombinációját, valamint *Fehér* [2010] a tiszta alapnyugdíjat.

---

<sup>1</sup>Köszönetemet fejezem ki Halpern Lászlónak, Köllő Jánosnak és a névtelen lektoroknak segítségükért. Hálás vagyok az OTKA K 67853 számú pályázat támogatásáért. Beérkezett: 2012. november 14. E-mail: [simonovits.andras@krtk.mta.hu](mailto:simonovits.andras@krtk.mta.hu)

Bár mindkét cikk jelentős empirikus számítást tartalmaz a fokozatos bevezetésről, de a nevezett szerzők nem vállalkoztak az ösztönzési hatások figyelembe vételére. Külön aláhúzzuk, hogy az alapnyugdíj hívei sokat remélnek attól, hogy kereseti járulékok vagy adók helyett általános adókból (áfa?) fedezhető az alapnyugdíj. (Egyébként a lényegében szolgálati idővel arányos alapnyugdíjas cseh nyugdíjrendszert viszonylag magas kulcsú járulékok fedezik, tehát az alapnyugdíj fedezhető járulékokból is! Mi inkább a csak a tartózkodási idővel arányos holland rendszert modellezzük.)

Manapság már számos bonyolult modell vizsgálja az adó- és nyugdíjrendszer dinamikáját (vö. *Auerbach–Kotlikoff* [1987] és *Fehr–Habermann* [2008]). Ebben a cikkben viszont egy nagyon egyszerű statikus modellt elemzünk, amelyben a munkavállalási ösztönzést figyelembe véve a kölcsönhatás legfontosabb kvalitatív tulajdonságait tanulmányozzuk. Modellünk könnyen programozható, és fontos kérdésekre számszerű választ ad. Ugyanakkor elhanyagol számos más, ugyancsak fontos kérdést, amelyeket más modellekben számosan vizsgáltunk: például a kezdőnyugdíjak finomhangolását, a már megállapított nyugdíjak indexálásának részleteit, a transzferek (adók és nyugdíjak) jóváírását, magánmegtakarításokat és a nemzedékek közti újraelosztást.

Kiindulópontunk *Feldstein* [1987] egy nagyon egyszerű kétidőszakos OLG (együttélő nemzedékes) modellje, amelyben a fiatalok dolgoznak, az idősek pedig nyugdíjasok, és az egyének egy leszámított Cobb–Douglas-hasznosságfüggvényt maximalizálnak. A dolgozók jelentős része rövidlátó, és önkéntesen nem takarítana meg eleget időskorára. A kormányzat éppen ezért működtet egy kötelező nyugdíjrendszert, ugyanakkor korlátozva a messzelátók hatékony magánmegtakarításait. Feldstein az alap- és a rászorultsági nyugdíj közti választásra koncentrált, és ezért elhanyagolta a kereseti különbségeket és a munkakínálat rugalmasságát. Egy *paternalista* (diszkontálatlan) utilitarista társadalmi jóléti függvényt maximalizálva, igazolta, hogy a rászorultsági nyugdíj társadalmilag előnyösebb, mint az alapnyugdíj.

Cremer–De Donder–Maldonado–Pestieau [2008] bevezette az időbér-heterogenitást és a munkakínálat rugalmasságát is az elemzésbe, és ennek megfelelően az alapnyugdíjat kiegészítette egy keresetarányos résszel is (a két rész tényleges arányát vizsgálta *Disney* [2004]). Különválasztva a hitelkorlátos és hitelkorlát mentes esetet, és általánosabb egyéni hasznosság- és társadalmi jóléti függvényeket alkalmazva, meghatározták az optimális járulékkulcsot és az újraelosztást a rendszerben.

A jelen dolgozatban e két modellt újszerűen kombináljuk és gazdagítjuk. Elhanyagoljuk a magánmegtakarításokat (azaz feltesszük, hogy nem sokkal hatékonyabbak, mint a kormányzati kényszermegtakarítások). Feladjuk *Cremer és szerzőtársai* speciális, kvázilineáris szabadidő hasznosságfüggvényét. Bár megtartjuk a leszámítolási tényezők heterogenitását, de *Cremer és szerzőtársaival* ellentétben nem tekintjük őket függetlennek az időbérektől, sőt növekvő kapcsolatot teszünk fel közöttük. Végül bevezetjük az alapjövedelmet is, amelyet nemcsak a nyugdíjasok, de a dolgozók is megkapnak.

Főbb eredményeink a következők: kvalitatíve a társadalmilag optimális

transzferrendszer egyensúlyt teremt az arányos nyugdíjrendszer hatékonysági és az alapjövedelem szolidaritási előnyei között. Sejtés: a tiszta alapjövedelemes rendszer elmarad a társadalmi optimumtól. A kvantitatív eredményekre térve, megállapíthatjuk, hogy az optimális egyesített adó- és nyugdíjjárulékkulcs, röviden: *transzferkulcs* növekvő függvénye a következő három kulcsparaméternek: az adózás előtti időbér-egyenlőtlenségnek, a nyugdíjas és a munkaidőszak hosszarányának, valamint a leszámítolási tényezőnek (némi megtevesztő módon nagyobb leszámítolási tényező nagyobb előrelátást jelez). Figyelemre méltó, hogy az időbérhányados kritikus értéke alatt nincs optimális jövedelemadó, azaz alapjövedelem. (A modell kalibrálását illetően megnyugtató kivétel: ha nincs nyugdíjas időszak, akkor a kritikus hányados értéke 1, azaz akármilyen kis időbér-egyenlőtlenség esetén a nyugdíj nélküli, tiszta optimális adórendszerben megjelenik az újraelosztás.) Egy pillanatig visszatérünk az állandó nyugdíjkorhatár melletti népességrepedésre: ha az időhosszára nő, akkor mind az alapjövedelem, mind az arányos nyugdíj csökken.

Egyetlen számszerű eredménypárt ismertetünk: ahhoz, hogy a szuboptimális arányos, illetve alapjövedelemes transzferrendszer ugyanolyan jólétet adjon, mint az optimális vegyes rendszer, az időbéreket 3, illetve 5 százalékkal kellene növelni. (Megjegyezzük, hogy feltevés szerint a szabadidő paraméter értéke független a dolgozó korától.)

Minden vonzereje ellenére a három említett modell – *Feldstein, Cremer és szerzőtársai*, valamint a jelen modell – elhanyagolta a sokkal kifinomultabb nemlineáris nyugdíjjóváírási rendszert (*Sefton–van de Ven–Weale* [2008] és *Simonovits* [2011]), átsiklott a tb-nyugdíj keresetingszűrés ellen nyújtott biztosításon (*Varian* [1980]), és kizárta a kereseteltitkolást (*Simonovits* [2009]). Bár ezek a kérdések is fontosak, együttes elemzésük a modellt analitikusan kezelhetetlenné tennék.

A hátralévő rész szerkezete a következő. A 2. pont bemutatja a modellt. A 3. pont numerikusan szemlélteti az eredményeket. Végül a 4. pont levonja a következtetéseket.

## 2 A modell

Megkülönböztetjük a modell mikro- és makróoldalát. A modellben először megjelenő mennyiségek pozitívak (esetleg nullák). Mindvégig feltesszük, hogy a népesség és a gazdaság stacionárius, és nincs infláció.

### Mikromodell

Legyen egy adott típusú dolgozó időegységre jutó teljes keresete (időbére)  $w$ , a munkaidő-alapja  $T$  és munkakínálata  $l$ :  $0 < l < T$ . Definíció szerint az adózás előtti keresete  $wl$ . Feltesszük, hogy minden dolgozó egységnyi hosszúságú időszakig dolgozik, és  $\mu$  hosszúságú időszakig van nyugdíjban:  $0 < \mu \leq 1$ . (Ez a valóságos rendszerekben általában teljesül, de az egyszerű statikus modellekben feleslegesen  $\mu = 1$ -gyel számolnak.) Ezért a folyam

(flow) jellegű mutatók időegységre értendők. Legyen a transzferkulcs (a járulék- és adókulcs összege)  $t$ , és a keresetarányos nyugdíj  $\beta wl$ , ahol  $\beta$  a *nyugdíjszorzó*, amely a kereseteket munkanyugdíjjá alakítja. Minden dolgozó és nyugdíjas ugyanazt az alapjövedelmet kapja:  $\gamma \geq 0$ . Ebben a modellben nincs magánmegtakarítás. Bevezetve a transzferkulcs „kiegészítését”:  $\bar{t} = 1 - t$ , a dolgozó és a nyugdíjas fogyasztása rendre

$$c = \gamma + \bar{t}wl \quad \text{és} \quad d = \gamma + \beta wl . \quad (1)$$

Az egyénileg optimális munkakínálat meghatározásához szükségünk lesz a szabadidő és a fiatalkori fogyasztás hasznosságarányának együttthatójára, jele:  $\xi$  és a leszámítolási tényezőre, jele:  $\delta$ , ahol  $0 < \delta \leq 1$ . Ekkor a  $w$  időbérért dolgozó,  $\delta$  leszámítolási tényezőjű egyén Cobb–Douglas életpálya hasznosságfüggvénye

$$U(w, \delta, c, l, d) = \log c + \xi \log(T - l) + \mu\delta \log d . \quad (2)$$

Behelyettesítve az (1) fogyasztási párt az eredeti (2) hasznosságfüggvénybe, egy redukált hasznosságfüggvényt kapunk, amelynek két paramétere az időbér és a leszámítolási tényező, valamint egyetlen változója a munkakínálat:

$$u(w, \delta, l) = \log(\gamma + \bar{t}wl) + \xi \log(T - l) + \delta\mu \log(\gamma + \beta wl), \quad \bar{t} = 1 - t . \quad (3)$$

Megjegyezzük, hogy közgazdaságilag helyesebb a szabadidő hasznosságfüggvényben a  $T - l$  szabadidőt a  $w$  időbérrel megszorozni. Mivel  $\log w(T - l) = \log w + \log(T - l)$ , ezért az optimális munkakínálatot ez a módosítás nem érinti, de a jóléti összehasonlításban figyelembe vesszük.

Az optimális munkakínálat a határhasznosság–munkakínálat-függvény azon gyöke, amelyre  $u''_l[p, l] < 0$ :

$$0 = u'_l(w, \delta, l) = \frac{\bar{t}w}{\gamma + \bar{t}wl} - \frac{\xi}{T - l} + \frac{\delta\mu\beta w}{\gamma + \beta wl} . \quad (4)$$

Rendezéssel egy másodfokú egyenlet adódik:

$$a_2 l^2 + a_1 l + a_0 = 0 ,$$

ahol

$$a_2 = -(1 + \xi + \delta\mu)\bar{t}\beta w^2 ,$$

$$a_1 = \bar{t}w(T\beta w - \gamma) - \xi w(\gamma\beta + \bar{t}\gamma) + \delta\mu\beta w(\bar{t}wT - \gamma) ,$$

és

$$a_0 = \bar{t}wT\gamma - \xi\gamma^2 + \delta\mu\beta w\gamma T .$$

Nyilvánvalóan a nagyobb gyök adja az optimumot. Megjegyezzük, hogy zavaróan bonyolultan függ az optimális munkakínálat a modell paramétereitől. A cikk egyik névtelen lektorának javaslatát megfogadva az implicit függvény tétele alapján hamarosan megvizsgáljuk, kvalitatíve hogyan függ az optimális munkakínálat a paramétereiktől.

Fontosságuk és egyszerűségük miatt érdemes két speciális esetet kiemelni.

1. az *arányos nyugdíjrendszer* (P) adórendszer nélkül:  $\gamma = 0$ , valamint
2. az *alapjövedelem* (F) arányos nyugdíj nélkül:  $\beta = 0$ . Mindkét esetben a másodfokú egyenlet elsőfokúra egyszerűsödik. Sőt, a Cobb–Douglas-specifikáció miatt az 1. esetben a kereseti és nyugdíjparaméterek is kiesnek. A megfelelő optimális munkakínálatok rendre

$$l_0^P = \frac{T}{1 + \xi} < l^P = \frac{(1 + \delta\mu)T}{1 + \xi + \delta\mu} < T \quad \text{és} \quad 0 < l_w^F = \frac{T - \xi\gamma/(\bar{t}w)}{1 + \xi} < l_0^P, \quad (5)$$

ahol  $l_0^P$  a Feldstein-féle rövidlátók ( $\delta = 0$ ) arányos rendszerbeli optimális munkakínálata. Ez a szám alsó korlátja az arányos rendszer optimumának, és felső korlátja az alaprendszerének. Ahhoz, hogy az alapjövedelem-rendszerben pozitív munkakínálatunk legyen, (5b) szerint fel kell tennünk, hogy

$$\bar{t}wT > \xi\gamma. \quad (6)$$

Ez a feltevés egyszerűen azt jelenti, hogy az alapjövedelem és a szabadidő együtthatójának szorzata kisebb, mint a kiegészítő transzferkulcs, az időbér és az időalap szorzata.

Általában az optimális munkakínálat (következésképp a kereset) bonyolult függvénye a paraméterértékeknek, ezért beszélünk némileg bonyolultan időbér-egyenlőtlenségről kereset-egyenlőtlenség helyett.

Most megadjuk az optimális munkakínálat paraméterfüggését. Némileg más alakban újra felírjuk az optimalitási feltételt. Legyen  $p$  a modell egy tetszőleges paramétere, ekkor

$$u'_i[p, l] = 0. \quad (4p)$$

Az implicit függvény tétele szerint, ha kizárjuk az elfajult  $u''_{ii}[p, l] = 0$  esetet, akkor az  $l(p)$  függvény létezik és sima, s deriváltját a következő képlet adja:

$$l'(p) = -\frac{u''_{lp}[p, l]}{u''_{ii}[p, l]}.$$

Az optimalitás elégséges feltétele miatt  $u''_{ii}[p, l] < 0$ , ezért

$$\text{sgn } l'(p) = \text{sgn } u''_{lp}[p, l].$$

(4p)  $p$ -szerinti parciális deriválásával  $\gamma > 0$  esetén adódnak az előjelek. Az optimális munkakínálat csökkenő függvénye a  $t$  transzferkulcsnak, valamint a  $\gamma$  alapjövedelemnek, és növekvő függvénye a  $w$  időbérnek, a  $\mu$  időhosszaránynak, a  $\delta$  leszámítolási együtthatónak, valamint a  $\beta$  nyugdíjszorozónak.

## Makromodell

Eddig csupán egy típust mérlegeltünk, adott  $w$  időbérrel és  $\delta$  leszámítolási tényezővel. Most bevezetjük a típusok heterogenitását, de egyetlen példától

eltekintve, feltesszük, hogy a típusok csak az időbérben és a tőle függő leszámítolási tényezőben, és következésképp a munkakínálatban különböznek, de ugyanannyi évesen (hónaposan) kezdenek dolgozni, mennek nyugdíjba és halnak meg,  $w$ -tól függetlenül. (A valóságban magasabb időbérhez kisebb szabadidő együtttható és hosszabb várható élettartam tartozik, de egy kivételtől eltekintve elhanyagoljuk e bonyodalmakat. Emellett ismerünk alacsony időbérű messzelátó dolgozókat és magas időbérű rövidlátókat, de súlyuk elhanyagolhatónak tűnik.) Bevezetve az  $\mathbf{E}$  jelölést az időbérelaszlás várható értékére, a transzferrendszer mérlegegyenlete

$$t\mathbf{E}(wl) = (1 + \mu)\gamma + \mu\beta\mathbf{E}(wl), \quad \text{azaz} \quad \gamma = (1 + \mu)^{-1}(t - \mu\beta)\mathbf{E}(wl), \quad t \geq \mu\beta. \quad (7)$$

Megfelelő mértékegységet választva, feltehető, hogy a várható időbér egysége:  $\mathbf{E}(w) = 1$ .

Tipikusan *általános egyensúlyi* modellt kell vizsgálnunk, mert a típusfüggő munkakínálat függ a  $(t, \beta, \gamma)$ -hármastól, és a (7) mérlegegyenlet függ a munkakínálatoktól. A walrasi rendszer kritikusan egyébként épp e túlzott bonyolultság miatt ellenzik a megközelítést.

Az arányos rendszerben a (7) mérlegfeltétel triviális:  $t^P = \mu\beta$ . Az alapjövedelem-rendszer ( $\beta = 0$ ) mérlegegyenlete sem túl bonyolult. Behelyettesítve  $l_w$ -t [(5b)] a (7) mérlegegyenletbe, és felhasználva  $\mathbf{E}(w) = 1$ -et, adódik az

$$(1 + \mu)\gamma = t \frac{T}{1 + \xi} - t \frac{\xi\gamma}{(1 + \xi)t} \quad (8)$$

fixpontegyenlet. Rendezéssel kapjuk az alapjövedelmet a modell paramétereinek függvényében:

$$\gamma^F(t) = \frac{T}{(1 + \mu)(1 + \xi)t^{-1} + \xi t^{-1}}. \quad (9)$$

Bevezetve a  $\nu = (1 + \xi)(1 + \mu)$  jelölést, a maximális alapjövedelem a

$$0 < t_M = \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{\nu} + \sqrt{\xi}} < 1 \quad (10)$$

transzferkulcsra valósul meg.

Behelyettesítve  $\gamma^F(t)$ -t [(9)] az  $l_w > 0$  [(6)] feltételbe, adódik a modellben megengedett minimális időbér:

$$w > \frac{\xi}{\nu t^{-1} + \xi}, \quad \text{vagyis} \quad w > \frac{1}{\sqrt{\nu/\xi} + 1} \quad (t = 1/2).$$

Feldstein nyomán a társadalmi optimum megállapításához egy *paternalista* társadalmi jóléti függvényt vezetünk be, ahol az egyéni hasznosságfüggvényekben  $\delta$  helyett 1-et írunk:

$$V(t, \beta, \gamma) = \mathbf{E}U(w, 1, c, l, d) = \mathbf{E}[\log c + \xi \log(T - l) + \mu \log d], \quad (11)$$

ahol  $\gamma$  kiegyensúlyozott [(7)].

Először az *arányos* rendszert vizsgáljuk, és behelyettesítjük a  $\beta = \mu^{-1}t$  mérlegegyenletet a (3) egyenletbe: az optimális transzferkulcs

$$t_P^* = \frac{\mu}{1 + \mu}, \quad (12)$$

biztosítva a fiatal és időskori fogyasztás egyenlőségét:  $d_P^* = c_P^*$ . Valóban, a redukált hasznosságfüggvény

$$U[t] = \log(1 - t) + \mu \log(t) \rightarrow \max .,$$

innen az optimális transzferkulcsot

$$U'[t] = -\frac{1}{1-t} + \frac{\mu}{t} = 0$$

határozza meg. Ekkor a megoldás valóban  $t_P^*$ , és a hozzátartozó fogyasztási pár

$$c_P^* = d_P^* = \frac{w}{1 + \mu}.$$

Mivel az optimumhely független az időbértől, ugyanez marad a társadalmi optimum.

Az *alapjövédelmes* rendszert vizsgálva,  $\gamma^F(t)$ -t [(9)] kell behelyettesíteni  $V(t, 0, \gamma)$ -be, de a keletkező függvény túl bonyolult ahhoz, hogy a lokális maximum egyszerűen kiszámítható lenne. Megismételjük a Bevezetésben említett sejtést: a tiszta alapjövédelmes rendszer társadalmilag nem optimális.

### 3 Numerikus szemléltetés

A két tiszta esetet leszámítva, képleteink túl bonyolultak ahhoz, hogy analitikus vizsgálatokat végezzünk. De még az alapjövédelmes rendszer társadalmi optimumát sem tudtuk analitikusan meghatározni. Ezért numerikus szemléltetésekre lesz szükségünk.

Az egyszerűség kedvéért csak két típust különböztetünk meg: az alacsony- és a magas időbérűeket, jelük L és H, akik egyben rövid- és messzelátók. Népeségbeli súlyuk:  $f_L = 2/3$  és  $f_H = 1/3$ , *alapfutásunkban* időbérük:  $w_L = 0,5$  és  $w_H = 2$ . Emellett a  $T = 2$  és  $\xi = 1,5$  számpárt fogadjuk el. Kerek számokra törekedve, némi kísérletezés után a 40 éves munkaviszonyt és a 20 éves nyugdíjaslétet  $\mu = 1/2$  jelzi. A két típus leszámítolási tényezője rendre  $\delta_L = 0,4$  és  $\delta_H = 0,7$ , a megszokott évi szinten (30 évre elosztva) rendre 0,970 és 0,988. Ekkor (9)-(10) szerint a maximális alapjövédelem – ez független a leszámítolási tényezőktől – a  $t_M = 0,613$  transzferkulcsnál valósul meg:  $\gamma_M = 0,2$ ; és  $l_L > 0$  [(6)] pedig ekvivalens a  $w_L > 0,387$  feltétellel.

A (7b) mérlegegyenletet kielégítendő, érdemes olyan  $(t, \beta)$  párokból kiindulni, amelyekre  $t \geq \mu\beta$  teljesül, azaz marad tér az alapjövédelemre. Az egyensúlyi alapjövédelem értékét a fokozatos közelítés módszerével számítjuk ki. Önkényesen az  $\mathbf{E}(wl_0) = 1$  normálással indítva iterációnkat, az első iteráció eredménye  $\gamma_0 = (1 + \mu)^{-1}(t - \mu\beta)$ . Az  $m$ -edik iterációban az  $l(\gamma_{m-1}, w)$

időbér-specifikus munkakínálatot (7b) szerinti  $\gamma_{m-1}$ -ből határozzuk meg, majd a  $\gamma_m = (1+\mu)^{-1}(t-\mu\beta)\mathbf{E}(wl(\gamma_{m-1}, w))$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , (7b) mérlegfeltételből adódik az újabb közelítés a kiegyensúlyozott alapjövedelemre. A tapasztalatok szerint a  $\gamma_m \rightarrow \gamma$  konvergencia nagyon gyors. Bonyolultabb számítással minden bizonnyal igazolható lenne, hogy kontrakciós leképezésünk van, tehát a Banach-féle fixponttétel ebben az elemi esetben működik. (Kereskedelmi szoftvert alkalmazók előtt a konvergenciakérdés rejtve marad!)

Az optimális arányos, alap és vegyes rendszer aggregált jellemzőit az 1. táblázatban, az egyéni jellemzőit a 2. táblázatban ismertetjük. Csupán a rendszerek relatív hatékonysága kíván magyarázatot. Jelölje  $V_X(e)$  az  $X$  rendszer társadalmi jóléti függvényértékét, ahol mindkét típus időbére  $e$ -vel van megszorozva. Ha az  $A$  és a  $B$  rendszert hasonlítjuk össze, és  $V_A(1) < V_B(1)$ , akkor létezik olyan  $e > 1$  valós szám, amelyre  $V_A(e) = V_B(1)$ , s ekkor  $1/e$  az  $A$  rendszer relatív hatékonysága  $B$  függvényében.

Típus	Transzferkulcs $t$	Alapjövedelem $\gamma$	Nyugdíj-szorozó $\beta$	Átlagkereset $\mathbf{E}(wl)$	Relatív hatékonyság $1/e$
Arányos (P)	0,33	0,000	0,66	0,928	0,97
Alapjövedelmes (F)	0,49	0,189	0,00	0,578	0,95
Vegyes (M)	0,52	0,158	0,40	0,741	1,00

1. táblázat. A három rendszer aggregált optimális jellemzői  
( $w_H/w_L = 4$ ,  $\delta_L = 0,4$  és  $\delta_H = 0,7$ )

Típus	Alacsony			Magas		
	időbérű					
	munkakínálat $l_L$	dolgozó fogyasztás $c_L$	nyugdíjas fogyasztás $d_L$	munkakínálat $l_H$	dolgozó fogyasztás $c_H$	nyugdíjas fogyasztás $d_H$
Arányos	0,889	0,296	0,296	0,947	1,264	1,262
Alapjövedelmes	0,356	0,280	0,189	0,689	0,892	0,189
Vegyes	0,512	0,281	0,260	0,856	0,980	0,843

2. táblázat. A három rendszer egyéni optimális jellemzői

Analitikusan már meghatároztuk a szuboptimális arányos rendszer optimális transzferkulcsát [(12)]:  $\tau = 1/3$ . Kerekítési hibáktól eltekintve ez egyenlővé teszi a fiatal- és időskori fogyasztás intenzitását. E rendszernek "csak" az a hiányossága, hogy lemondva az újraelosztásról, nem biztosít méltányos fogyasztást az alacsony időbérűeknek (2. táblázat 1. sora).

A társadalmilag szuboptimális alapjövedelmes rendszert viszont egy másik hiba terheli: minden időskori fogyasztási különbséget eltüntet, s ezzel a hatodára csökkenti a magas időbérű fogyasztását (2. táblázat 2. sora). (Itt már kvantitatíve elviselhetetlenné válik, hogy a messzelátók megtakarítását kiküszöböltük!) Nem meglepő, hogy a kívánt transzferkulcs mellett olyan kicsi az alacsony időbérűek munkakínálata, hogy még időskori fogyasztásuk is jóval elmarad az arányosétól:  $0,19 < 0,3$ . A fő jóléti nyereség (ha egyáltalán helyes nyereségről beszélni) az alacsony időbérűek majd harmadára csökkentett munkaideje:  $0,36 < 0,89$ .



Az optimális egyes rendszer a két szuboptimális tiszta rendszernek valóban jó kombinációja (2. táblázat 3. sora). Egyrészt megőrzi az alapjövedelemrendszer nagy transzferkulcsát, ugyanakkor a nyugdíjszorzó az arányos rendszerének a 60 százaléka, ezért nem rombolja le a munkakínálati ösztönzőket, és elfogadható fogyasztást biztosít mindkét típusnak mindkét időszakban. Végül megadjuk a szuboptimális rendszerek relatív hatékonyságát:  $1/e_{P|M} = 0,97$  és  $1/e_{F|M} = 0,95$ .

Most rátérünk a modell érzékenységvizsgálatára: hogyan hat a kimenetre a kulcsparaméterek értékváltoztatása? Az alapesetet minden táblázatban dőltve közöljük.

A vizsgálatot a szabadidő-hasznosság paraméterével kezdjük. Várható volt, hogy minél nagyobb  $e$  paraméterérték, annál kisebb a munkakínálatpár és az optimális transzferkulcs. Meglepő volt azonban, hogy  $e$  paraméterérték változásának hatása nem volt drámai (3. táblázat): amikor  $\xi$  értékét 1-ről 1,5-en keresztül 2-re növeltük, akkor az optimális transzferkulcs 0,54-ről csupán 0,52-ra, illetve 0,51-ra csökkent;  $s$  a nyugdíjszorzó is stabil maradt. Igaz, az alapjövedelem 0,21-ről 0,16-on keresztül 0,13-ra csökkent, valamint az átlagkereset is 0,92-ről 0,74-on keresztül 0,62-ra csökkent.

Szabadidő paraméter $\xi$	Transzfer- kulcs $t$	Alap- jövedelem $\gamma$	Nyugdíj- szorzó $\beta$	Átlag- kereset $\mathbf{E}(wl)$	A l a c s o n y	
					dolgozó f o g y a s z t á s a $c_L$	nyugdíjas $d_L$
1,0	0,54	0,211	0,39	0,918	0,363	0,340
1,5	0,52	0,158	0,40	0,741	0,281	0,260
2,0	0,51	0,127	0,41	0,623	0,229	0,212

3. táblázat. A szabadidő-paraméter hatása a társadalmi optimumra

A hátralévő részben a politika által befolyásolhatóbbnak tűnő időbérarány ( $\omega$ ), az időhosszarány ( $\mu$ ), a leszámítolási tényező ( $\delta$ ) és a várható élettartam egyenlőtlenség ( $\varepsilon$ ) hatását elemezzük.

Először az időbér-egyenlőtlenséget jelképező  $\omega = w_H/w_L$  mutatót fokozatosan csökkentjük 4-ről 1-re. Előre várható volt, hogy az egyenlőtlenség mérséklődésekor az optimális transzferkulcs is csökken, de csak a 4. táblázat numerikus számításai mutatják  $e$  hatás mennyiségi értékét: az optimális transzferkulcs 0,52-ről 0,33-ra csökken, és az alapjövedelem már az  $\omega = 2$ -es alatt (pontos kritikus érték: 1,8) eltűnik. Ezzel párhuzamosan a nyugdíjszorzó meredeken nő, s eléri az optimális arányos rendszer jellemzőit.

Időbér- hányados $\omega$	Alacsony időbér $w_L$	Transzfer- kulcs $t$	Alap- jövedelem $\gamma$	Nyugdíj- szorzó $\beta$	Átlag- kereset $\mathbf{E}(wl)$	A l a c s o n y	
						dolgozó f o g y a s z t á s a $c_L$	nyugdíjas $d_L$
4	0,5	0,52	0,158	0,40	0,741	0,281	0,260
3	0,6	0,46	0,111	0,51	0,811	0,337	0,324
2	0,75	0,35	0,015	0,65	0,905	0,440	0,440
1	1	0,33	0,000	0,66	0,908	0,596	0,587

4. táblázat. Az időbér-egyenlőtlenség hatása a társadalmi optimumra  
( $\mu = 0,5$ ,  $\delta_L = 0,4$  és  $\delta_H = 0,7$ )

Az időhosszarány hatásvizsgálatakor a  $\mu = 0$  szélső esetben a tiszta adórendszerhez jutunk el (ezt a 8. táblázatban még a béregyenlőtlenség szempontjából megvizsgáljuk). Az optimális transzferkulcsra az 5. táblázatban viszonylag kicsiny értéket kapunk: 0,36; hiszen nem kell a nyugdíjasokról gondoskodni. Megemelve az időhosszarányt 0-ról 0,5-en keresztül 1-re, az optimális transzferkulcs 0,36-ról 0,52-on keresztül 0,62-ra emelkedik, míg az alapjövedelem (intenzitása) 0,21-ről 0,16-on keresztül 0,13-ra zuhan. Eközben az átlagkereset 0,6-ról 0,74-on keresztül 0,85-ra emelkedik. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy mennyire torzít az irodalomban szokásos, de a statikus modellben felesleges  $\mu = 1$  specifikálás. Például az optimális transzferkulcs 0,52 helyett 0,62-nak adódik. (A dinamikus modellekben viszont már tényleg nem lehet félidőszakokkal számolni, mert akkor nem tudjuk megfelelően leírni a népességöregedési folyamatot.)

Időhosszarány $\mu$	Transzferkulcs $t$	Alapjövedelem $\gamma$	Nyugdíjszorozó $\beta$	Átlagkereset $\mathbf{E}(wl)$	A l a c s o n y	
					dolgozó fogyasztása $c_L$	nyugdíjas $d_L$
0,00	0,36	0,215	0	0,598	0,342	–
0,25	0,45	0,181	0,46	0,676	0,308	0,287
0,50	0,52	0,158	0,40	0,741	0,281	0,260
0,75	0,58	0,141	0,36	0,798	0,258	0,241
1,00	0,62	0,128	0,32	0,852	0,242	0,224

5. táblázat. Az időhosszarány hatása a társadalmi optimumra ( $\omega = 4$ )

Eddig bemutatott eredményeink csak a szabadidő-paramétertől és az időhosszaránytól függttek, de függetlenek voltak a munka- és nyugdíjas időszak abszolút hosszától. Napjaink fejlett országában a születéskor várható élettartam növekedését főleg az időskori halandóság süllyedése okozza. Elméletben és gyakorlatban egyaránt szokásos feltevés, hogy a felnőttkori várható élettartam emelkedésével párhuzamosan emelkedik a munkaképességi időszak hossza, nevezetesen ahol a szabadidő-paraméter értéke alacsony marad. Elfogadva e feltevést, az 5. táblázat eredményeit úgy is értelmezhetjük, hogy érdemes az általános nyugdíjkorhatárt indexálni a felnőtt várható élettartammal (Andersen [2012]).

Rátérünk az egyéni leszámítolási tényező változására. Eleve azt várjuk, hogy minél előrelátóbb a dolgozó, annál jobban megérti a nyugdíjbiztosítás fontosságát, de a számítások elvégzése előtt bizonytalanak voltunk az újraelosztás optimális mértékének változásában. Most megnézzük, mi történik, ha 0,25-ről 0,5-en keresztül 1-ig emelve az átlagos  $\delta = f_L \delta_L + f_H \delta_H$  leszámítolási tényezőt, 2:1 arányban változtatva a kis- és a nagy leszámítolási tényezőt. Ekkor az optimális transzferkulcs 0,49-ről 0,52-n keresztül 0,59-ig emelkedik, miközben a nyugdíjszorozó alig változik, és az alapjövedelem 0,14-ről 0,16-on keresztül 0,19-ig nő. Az átlagkereset mérsékelten nő: 0,72-ről 0,74-en keresztül 0,76-ig.

Átlagos diszkont- tényező $\delta$	Transzfer- kulcs $t$	Alap- jövedelem $\gamma$	Nyugdíj- szorzó $\beta$	Átlag- kereset $\mathbf{E}(wl)$	A l a c s o n y	
					dolgozó f o g y a s z t á s a $c_L$	nyugdíjas $d_L$
0,25	0,49	0,144	0,38	0,720	0,268	0,237
0,50	0,52	0,158	0,40	0,741	0,281	0,260
0,75	0,55	0,174	0,41	0,758	0,294	0,283
1,00	0,59	0,194	0,42	0,765	0,303	0,305

6. táblázat. Az egyéni leszámítolási tényező hatása a társadalmi optimumra  
( $\omega = 4, \mu = 0,5; \delta = f_L \delta_L + f_H \delta_H$ )

Most kitérünk a várható élettartam időbértől való függésére. Megtartva az átlagos időhosszarány 0,5-es értékét, differenciáljuk az egyéni várható élettartamokat:  $\varepsilon = \mu_H/\mu_L$ . Ekkor a mérlegegyenlegből nem lehet kiemelni a hosszhányadokat, ezért új alakja

$$t\mathbf{E}(wl) = (1 + \mathbf{E}(\mu))\gamma + \beta\mathbf{E}(\mu wl),$$

Évekre térve át,  $D_i = 60 + 20\mu_i, i = L, H$ . Lecsökkentve az alacsony időbérű egyének várható élettartamát 80-ról 76,7-re, a legtöbb jellemző alig változik. Például az optimális transzferkulcs és az alapjövedelem szinte változatlan marad, de a nyugdíjszorzó 0,4-ről 0,32-re zuhan.

Rövidebb várható élettartam $D_i$	Transzfer- kulcs $t$	Alap- jövedelem $\gamma$	Nyugdíj- szorzó $\beta$	Átlag- kereset $\mathbf{E}(wl)$	A l a c s o n y	
					dolgozó f o g y a s z t á s a $c_L$	nyugdíjas $d_L$
80,000	0,52	0,158	0,40	0,741	0,281	0,260
76,667	0,53	0,165	0,32	0,744	0,273	0,239

7. táblázat. Az időhosszarány heterogenitásának hatása a társadalmi optimumra  
( $\varepsilon = 1,6$  és  $\mathbf{E}(\mu) = 0,5$ )

Most a nyugdíjrendszert kirekesztjük:  $\mu = 0$ , és csak a tiszta adórendszert vizsgáljuk. Kiderül, hogy az időbér-hányados csökkentésével az optimális adókulcs 0,36-ról folyamatosan csökken 0-ra, és itt a kritikus időbér-hányados 1, tehát akármilyen kicsi is az időbér-egyenlőtlenség, az optimális adó pozitív. Ezzel párhuzamosan nő az átlagkereset és természetesen az alacsonyabb időbérűek fogyasztása.

Időbér- hányados $\omega$	Adó- kulcs $t$	Alap- jövedelem $\gamma$	Átlag- kereset $\mathbf{E}(wl)$	Alacsony
				időbérű fogyasztása $c_L$
4	0,36	0,215	0,598	0,342
3	0,28	0,182	0,649	0,418
2	0,14	0,102	0,729	0,557
1	0,00	0,000	0,800	0,800

8. táblázat. Az időbér-hányados hatása a társadalmilag optimális adóra  
( $\mu = 0$ )

Halpern László javasolta, hogy ismételjük meg a számításokat arra az esetre, ha a GDP-számításokhoz hasonlóan a szabadidő nyújtotta hasznosságot

kihagyjuk a paternalista társadalmi jóléti függvényből. Eddigi számításainkban a legnagyobb érzékenységet az időbér-egyenlőtlenség esetén tapasztaltuk, ezért ezt számoljuk újra. Azt vártuk, hogy az ösztönzés felértékelődik, de hogy ennyire, az meglepetés volt: a társadalmi optimum semmilyen újraelosztást nem tűr meg, az optimális vegyes rendszer arányos. Eredményeinket a 9. táblázat tartalmazza.

Időbér- hányados $\omega$	A l a c s o n y						
	Alacsony időbér $w_L$	Transzfer- kulcs $t$	Alap- jövedelem $\gamma$	Nyugdíj- szorzó $\beta$	Átlag- kereset $\mathbf{E}(wl)$	dolgozó f o g y a s z t á s a $c_L$	nyugdíjas nyugdíjas $d_L$
4	0,5	0,33	0	0,66	0,928	0,298	0,293
3	0,6	0,33	0	0,66	0,924	0,357	0,352
2	0,75	0,33	0	0,66	0,918	0,447	0,440
1	1	0,33	0	0,66	0,908	0,596	0,587

9. táblázat. Az időbér-hányados hatása a szabadidő kirekesztésével

Eddig csak egy-egy dimenzióban változtattuk a paraméterértékeket, a 10. táblázatban egyszerre változtatjuk őket, úgy, hogy az alapfutás értékei középen maradjanak, és a változások iránya kedvező legyen. Ekkor a változások összeadódnak, és a részváltozásokhoz képest nagyobb változások figyelhetőek meg. A legkedvezőtlenebb esetben, amikor legnagyobb az időbér-egyenlőtlenség ( $\omega = 6$ ), legrövidlátóbbak a dolgozók és leghosszabb az időskor, akkor nagyon nagy az optimális transzferkulcs: 0,59; viszonylag nagy az alapjövedelem: 0,17 és alacsony az átlagkereset (azaz a munkakínálat): 0,68. A legkedvezőbb esetben viszont, amikor legkisebb az időbér-egyenlőtlenség, legmesszelátóbbak a dolgozók és legrövidebb az időskor, akkor nagyon kicsiny az optimális transzferkulcs: 0,30; viszonylag kicsiny az alapjövedelem: 0,08 és magas az átlagkereset (azaz a munkakínálat): 0,82.

Idő- bérhá- nyados $\omega$	Kisebb							
	leszámí- tolási tényező $\delta_L$	Idő- hossz- hányados $\mu$	Transz- fer- kulcs $t$	Alap- jöve- delem $\gamma$	Nyug- díj- szorzó $\beta$	Átlag- kere- set $\mathbf{E}(wl)$	A l a c s o n y dolgozó f o g y a s z t á s a $c_L$	nyugdíjas nyugdíjas $d_L$
6	0,1	0,75	0,59	0,170	0,2	0,678	0,196	0,183
4	0,4	0,50	0,52	0,158	0,4	0,741	0,281	0,260
2	0,7	0,25	0,30	0,082	0,7	0,821	0,497	0,497

10. táblázat. Együttes változások hatása

Vég nélkül folytathatnánk a számításainkat, de megállunk itt. Reméljük, hogy további vizsgálatok megerősítik a fenti eredményeket.

## 4 Következtetések

Minimális modellünkben a korfüggő újraelosztást mint az arányos nyugdíj-rendszer és a mindenkire kiterjedő arányos adó – alapjövedelem lineáris kombinációját írtuk le. A társadalmilag szuboptimális arányos rendszer viszonylag nagy munkakínálatot ad, de kicsi időskori alacsony fogyasztással. A társadalmilag szuboptimális alapjövedelem-rendszer a magas időbérűek időskori

fogyasztását is alacsony szintre nyomja le, viszont rengeteg szabadidőt enged meg az egész társadalomnak. A társadalmilag optimális vegyes rendszer harmonizálja a két eredményt: viszonylag nagy munkakínálatot és fogyasztást enged meg a magas időbérűeknek, és viszonylag sok szabadidőt (bár kis időskori fogyasztást) biztosít az alacsony időbérűeknek. Modellünkben a társadalmilag optimális transzferkulcs egyenlővé teszi a dolgozók és a nyugdíjasok fogyasztását mindkét időbér-osztályban; és a kulcs növekvő függvénye az időbér-hányadosnak, az időhosszaránynak és a leszámítolási tényezőnek. Ha megengednénk az önkéntes magánmegtakarítást, akkor a társadalmilag optimális rendszer valószínűleg több újraelosztást is elviselne, anélkül, hogy a munkakínálat összeesne.

Zárásként hangsúlyozzuk, hogy modellünk statikus, és nem veszi tekintetbe az időbeli változásokat. Például Andersen [2012] dinamikus modellje megpróbál választ keresni arra, hogyan kell megosztani a népességöregedés miatti megnövekedett terheket a megtakarítások (járulékkulcs) és a korhatár emelések között. De ennek a kérdésnek a szabatos megválaszolásához már igazi korosztályi modelleket kell alkalmazni!

## Irodalom

1. Andersen, T. M. [2012]: Fiscal Sustainability and Demographics – Should we Save or Work More?, *Journal of Macroeconomics* 34, 264–280. o.
2. Auerbach, A. J.–Kotlikoff, L. J. [1987]: *Dynamic Fiscal Policy*, Cambridge, Cambridge University Press.
3. Augusztinovics Mária–Matits Ágnes [2010]: Pontrendszer és alapnyugdíj, *Holtzer Péter, szerk.* 234–247. o.
4. Cremer, H.–De Donder, Ph.–Maldonado, D.–Pestieau, P. [2008]: Designing a Linear Pension Scheme with Forced Savings and Wage Heterogeneity, *Journal of Economic Surveys* 22, 213–233. o.
5. Disney, R. [2004] Are Contribution to Public Pension Programmes a Tax on Employment?, *Economic Policy* 39, 267–311. o.
6. Fehr, H.–Habermann, C. [2008]: Risk Sharing and Efficiency Implications of Progressive Pension Arrangements, *Scandinavian Journal of Economics*, 110, 419–443. o.
7. Fehér Csaba [2010]: Az általános alapnyugdíj paradigmája, *Holtzer Péter, szerk.* 264–273. o.
8. Feldstein, M. S. [1987]: Should Social Security be Means-Tested?, *Journal of Political Economy* 95, 468–484. o.
9. Holtzer Péter, szerk. [2010] : *Jelentés a Nyugdíj és Időskor Kerekasztal tevékenységéről*, Budapest, Miniszterelnökségi Hivatal.
10. Sefton, J.–van de Ven, J.–Weale, M. [2008]: Means Testing Retirement Benefits: Fostering Equity or Discourageing Saving?, *Economic Journal* 118, 556–590. o.
11. Simonovits, A. [2009]: Keresetbevallás és újraelosztás az együttélő nemzedékek modelljében, *Közgazdasági Szemle* 56, 101–118. o.

12. Simonovits, A. [2011]: Alap- vagy rászorultsági nyugdíj? Nyugdíjjóváírás! *Közgazdasági Szemle* 58, 301–313. o.
13. Varian, H. R. [1980]: Redistributive Taxation as Social Insurance, *Journal of Public Economics* 14, 49–68. o.

OPTIMAL LINEAR TAX AND PENSION SYSTEM  
WITH FLEXIBLE LABOR SUPPLY

The tax system redistributes labor incomes among workers, the pension system redistributes incomes from workers to pensioners. We consider a linear transfer system, where workers pay pension contributions and personal income taxes and pensioners receive proportional benefits while workers and pensioners enjoy basic income. Every worker maximizes his discounted lifetime utility function, depending on young- and old-age consumption plus leisure. The government chooses a transfer system which maximizes the undiscounted social welfare function. Our major result is as follows: The transfer system balances the efficiency of proportional pensions and the redistribution of a basic income.

## VILLAMOSENERGIA BESZERZÉST TÁMOGATÓ MODELLEK<sup>1</sup>

FÜZI ÁKOS – MÁDI-NAGY GERGELY  
*IP Systems Kft. – ELTE Operációkutatási Tanszék*

A villamosenergia kereskedő cégek beszerzési stratégiájának fontos része az előrejelzett nettó keresleti görbe lefedezése határidős termékekkel. A villamosenergia terméket az időbeli elérhetősége írja le. Például egy havi csúcsidőszaki termék az adott hónap munkanapjain 8 és 20 óra közt áll rendelkezésre. A termékek kötési egysége tipikusan MW. A keresleti görbe termék alapú lefedését három modellben tárgyaljuk: egy mennyiség alapú illetve két költség alapú megközelítésben. Ez utóbbiak közül a második a fogyasztási előrejelzés bizonytalanságát is figyelembe veszi. Míg az első két modell lineáris programozási (LP) feladat, addig a harmadik modell egy nem-konvex, törtfüggvény célfüggvényű, lineáris feltételekkel rendelkező feladat: ez utóbbi megoldására bemutatunk egy algoritmust. Szó esik a megoldások implementációjának technológiai kérdéseiről, illetve az implementált algoritmusok performanciájáról.

### 1 Bevezetés

Az energiapiaci liberalizáció Magyarországon a villamosenergia piac megnyitásával kezdődött: 2003-ban a nagyobb ipari fogyasztók, majd 2004-ben minden nem-lakossági fogyasztó lehetőséget kapott az áram versenypiaci beszerzésére. 2007 végéig párhuzamosan működött a közüzem és versenypiac. 2008-tól teljessé vált a liberalizáció: innentől a fogyasztók, illetve a villamosenergia-kereskedők szabadpiaci körülmények között szerezhetik be, az erőművek pedig ugyanilyen módon értékesíthetik a villamos energiát. Magyarországon szervezett kereskedelemre 2010. július 20-án nyílt lehetőség a HUPX áramtőzsde (2010) beindításával. A fenti folyamatokról jó áttekintést nyújt Kocsi (2008) és Sugár (2011).

A magyar villamosenergia piac szereplői a

- felhasználók: ipari és lakossági fogyasztók,
  - termelők: erőművek,
  - kereskedők,
- korlátozott villamosenergia-kereskedelmi engedéllyel rendelkezők (végfelhasználó ellátására nem jogosultak),

---

<sup>1</sup>Beérkezett: 2012. április 9. E-mail: fuzi.akos@ipsystems.hu, gergely@cs.elte.hu

- villamosenergia-kereskedelmi engedéllyel rendelkezők,
- egyetemes szolgáltatók (villamos energiát –lakossági és a kisüzleti, valamint közintézményi felhasználók részére– hatósági áron értékesítők),
- elosztó hálózati engedélyesek (adott terület hálózatát üzemeltetők),
- átviteli rendszerirányítók (Magyar Villamosenergia-ipari Átviteli Rendszerirányító Zrt.).

A részletes definíciókat a Függelék – illetve a 2007. évi LXXXVI. törvény a villamos energiáról – tartalmazza.

A kereskedelmi engedéllyel rendelkező szereplők egyaránt folytatnak – tőzsdén és azon kívüli– külkereskedelmi, belföldi nagykereskedelmi és kiskereskedelmi tevékenységet. Egy tipikus magyarországi áramkereskedő rendelkezik fogyasztókkal, akik keresletét ki kell szolgálnia, emellett állnak a hosszú- és rövidtávú kereskedelmi szerződésai. A fogyasztásra rendelkezésre állnak (rövid- és hosszútávú) előrejelzések. A hosszútávú kereskedelmi szerződésekkel korrigált nettó keresletet az alábbi módokon elégíthetik ki:

- bilaterális szerződéseken keresztül (pl. erőművekkel, más kereskedőkkel),
- tőzsdei kereskedéssel.

A bilaterális szerződések tipikusan sztenderdizált (EFET: European Federation of Energy Traders, lásd EFET 2012) szerződések, melyek éves, negyedéves, havi, heti, napi és napon belüli termékekre vonatkoznak fix, vagy indexelt árakkal. Az európai szövetséghez tartozó kereskedők az OTC piacokon kötött ügyleteiket is EFET szerződések alapján kötik. A szervezett piaci tranzakciók részleteit az energiatőzsdék szabályzatainak megfelelően kötik, ilyen a magyar HUPX is. Fizikai exporttal, vagy importtal járó ügyleteknél az energia szállíttatásához szükség van ún. *határkeresztező kapacitások* megvásárlására is. Míg Magyarországon belüli kereskedésnél nincs szükség kapacitás megvásárlására, addig az országhatárokon átfutó kapacitások szűkösek. Ezen kapacitások beszerzése egyrészt történhet bilaterális szerződésekkel, másrészt tőzsdei aukciókon. Az aukciók szervezője a CAO (2012), az aukció algoritmusáról jó áttekintést nyújt Füzi and Mádi-Nagy (2012).

Az áramkereskedők teljes beszerzési folyamatának optimalizálási modelljei két részre oszthatóak aszerint, hogy a termékek árelőrejelzéseit determinisztikusan vagy sztochasztikusan kezelik. Egyik legteljesebb determinisztikus modell Conejo et al. (2005) dolgozata. A sztochasztikus modellek közül Yan and Yan (2000) dolgozata a beszerzési költség várható értékének minimalizálására törekszik, míg Carrión et al. (2007) dolgozata a költség kockázatának Conditional Value-at-Risk (CVaR) mérőszámát minimalizálja.

A fenti *megközelítések* egyik *hátránya*, hogy megvalósításuk a modell komplexitása miatt igen *költséges*: az áramkereskedő cégek közül csak a nagyobbak engedhetik meg maguknak. Másik hátrány, hogy a modell felépítéséhez a valós üzleti környezetről *rengeteg bemenő információra* van szükség: a fogyasztási és tőzsdei árelőrejelzéseken túl le kell képezni az összes bilaterális



szerződést –annak árait és lejáratait figyelembe véve–, figyelembe kell venni a saját tulajdonú erőművek költségeit, technológiai és üzleti korlátait, és le kell képezni a cég belső elszámolási rendszerét is. Ahhoz, hogy a mindennapi kereskedésben használható megoldásunk legyen, olyan modellt kell implementálni, mely valós időben képes kezelni a fogyasztói igénybejelentések változásait és a kereskedők kötéseivel folyamatosan változó nyitott pozíciót.

Dolgozatunkban ezeknél jóval egyszerűbb modelleket tárgyalunk. Feltesszük, hogy a kétoldalú szerződések és a külföldi határidős tőzsdei ügyletek adottak (ez utóbbi feltételezés reális lehet egy külföldi cég magyarországi leányvállalata esetén), és a maradék nettó keresletet már csak a *belföldi áramtőzsde termékeiből elégíthetjük ki*.

Feltesszük, hogy a belföldi tőzsde az alábbi termék típusokat kereskedi.

- *Standard (határidős) termékek:* Itt egyrészt adott a termék érvényességi időszaka (pl. 2012. január 1-31.) illetve az adott időszakban a termék elérhetőségének időpontjai. Pl. az "5/7 6-22" termék hétfőtől péntekig reggel hattól este tízig szolgáltat áramot a termék érvényességi időszakában. A termékek mennyiségét MW-ban mérjük.
- *Órás (másnapi) termékek:* A következő nap adott órája időtartamára vásárolható termék.

Ha egy nap folyamán bármely órában a kereskedők fogyasztói több energiát fogyasztottak, mint a kereskedő beszerzett, akkor a különbözetet a rendszerirányító *kiegyenlítő energiával* pótolja. Ennek –az óras termék beszerzésénél általában magasabb– költségét a kereskedő állja. Kiegyenlítő energiával is számoló modellünkben a kiegyenlítő energia árát órától és az óras termékártól függetlenül egy konstans magas árban határozzuk meg.

Megjegyezzük, hogy a valóságban (pl. Magyarországon) a kiegyenlítő energia árának kiszámítására egy több tényezős képlet szolgál. Ennek beépítése lényegesen bonyolítaná modellt illetve további bemeneti adatokat igényelne (pl. teljes villamosenergia rendszer adott órára vonatkozó le- ill. felszabályozásának költsége). A valóság egyszerűsítésének másik oka, hogy a kiegyenlítő energia árának előrejelzése az óras árelőrejelzéseknél lényegesen bonyolultabb feladat. A kiegyenlítő energia árazásába Paizs (2008), míg előrejelzésébe Varga et al. (2006) dolgozata nyújt betekintést.

Az áramkereskedőnek minden nap rendelkezésére áll egy hosszú távú (tipikusan egy éves), órákra lebontott *fogyasztási előrejelzése*, illetve *óras termékár előrejelzése*. Ez utóbbi ár idősor előrejelzést szokás *HPFC görbének* nevezni. A fentiek alapján a következő stratégiákat szeretné kidolgozni:

1. Év elején, miután a hosszútávú szerződéseket már ismeri, szeretne a nettó keresletre egy *éves beszerzési tervet* készíteni.
2. Minden nap megnézi, hogy az eladott illetve beszerzett termékek mennyiségi különbségei egy adott (havi, negyedéves, éves) horizonton hogyan alakulnak, majd ezeket a *nyitott pozíciókat akarja optimálisan lefedezni* standard (határidős) termékekkel.

Mivel a *nyitott pozíció* általánosabb fogalom, mint a nettó kereslet –ugyanis a túlvásárlást is magában foglalja–, ezért a modellek felírásában inkább ezt használjuk.

Három beszerzési modellt tárgyalunk. Az első mennyiségi alapon fedi le legjobban a nyitott pozíciót standard termékekkel. A másik két modell a nyitott pozíció lefedésének összköltségét minimalizálja, közülük a második modell figyelembe veszi a fogyasztási előrejelzés bizonytalanságát is.

A dolgozat felépítése a következő. A 2. fejezet bemutatja a három modellt. A 3. fejezet tárgyalja a modellek megoldó algoritmusait. A 4. fejezet az első két modell implementációjával kapcsolatos eredményeket mutatja be, míg az utolsó fejezet tartalmazza a tanulságokat illetve további kutatási irányokat.

## 2 Modellek

Mindhárom modellben egy adott időszak nyitott pozícióit akarjuk lefedni standard termékekkel, bizonyos feltételek mellett, a legoptimálisabban.

A legegyszerűbb ún. *naturália alapú modellben* árakat nem is veszünk figyelembe. A cél, hogy a standard termékeket úgy szerezzük be, hogy az óránkénti hiányok ill. többletek abszolút értékének összege minimális legyen. A modell használatának okai (többek közt) az alábbiak:

- megmutat egy robosztus beszerzési tervet, melyhez a kereskedő viszonyíthatja a finomított (költségalapú modellt használó) beszerzési terveit,
- hosszú távú tervezésnél figyelembe vehetünk olyan standard termékeket is, amelyeknek még nincs árak a piacon.

A *költség alapú modell*, a beszerzési költséget az alábbi módon számolja. Adottak a standard termékek árai illetve a tervezési horizontra rendelkezésre áll egy eladási és egy vételi órás ár előrejelzés (HPFC görbe). Ez alapján a minimalizálandó összköltség

- a standard termékek beszerzési költségeiből illetve
- az órás hiányok vételi órás árral,
- az órás többletek eladási órás árral számolt költségeiből

tevédik össze. A modell leginkább a nyitott pozíciók napi lefedésénél használható. A standard termékek árai a napi kereskedésben folyamatosan változnak. A kereskedő a modellt naponta többször is lefuttatja. Az eredmények segítenek annak eldöntésében, hogy az aktuális terméket érdemes-e megvásárolni vagy eladni.

A *kereslet előrejelzési bizonytalanságot figyelembe vevő modell* feltételezi, hogy az órás termékekkel a valós keresletet nem tudjuk tökéletesen lefedni. Emiatt a standard termékek vásárlása utáni maradék nyitott pozíciók egy részét kiegészítő energiából kell fedezni, és eszerint kell árazni. Az, hogy a

standard termék beszerzés utáni hiányok, többletek mekkora része kiegyenlítő energia, függ:

- a tervezési horizonttól,
- a standard termékek beszerzése utáni hiányok és többletek összmenyiségétől,
- fogyasztónként, az adott fogyasztóhoz (fogyasztói körhöz) tartozó *bizonytalansági faktortól*.

Az alkalmazás futtatása történhet mind hosszú távú tervezésnél, mind nyitott pozíciók napi szintű karbantartásánál. A bizonytalansági faktor finom beállítása történhet múltbeli becsült és valós adatok alapján.

## 2.1 Hiány-többlet egyensúlyi feltételek

Mivel a keresleti előrejelzés bizonytalan, így az ebben rejlő kockázat csökkentésére a villamosenergia kereskedelemben bevett hüvelykujj szabály, hogy a beszerzés a becsült kereslethez képest kiegyensúlyozottan történjen. A modellekben lehetőséget adunk arra, hogy a hiányok és többletek időszakonkénti arányát (MWh-ban ill. Ft-ban számolva) előre lerögzítsük. Feltételezve, hogy az előrejelzett érték bizonyos százalékban a tényadatok alá ill. fölé megy, így biztosítható hosszútávon a fent említett átlagos kiegyensúlyozottság.

Az időszakot felosztjuk ún. *kiegyensúlyozottsági intervallumokra* (pl. az évet negyedévekre). A feltétel az, hogy úgy vásároljunk standard termékeket, hogy a kiegyensúlyozottsági intervallumokban a hiányok összegének és többletek összegének aránya egy előre adott érték legyen. (Pl. ha ez az arány 1, akkor periódusonként összességében ugyanakkora mennyiségű hiánynak kell lennie, mint többletnek.)

## 2.2 Bemeneti adatok

A modellek felírásánál szempont volt a *flexibilitás*. Ennek elemei:

- időegység függetlenség: negyedórás, órás, napi felbontású tervezési horizontot egyaránt tudjon kezelni,
- standard termékek szabadon definiálhatóak: nem csak a HUPX-en aktuálisan elérhető termékeket használhatunk, hanem lényegében bármilyen (pl. a tőzsdén később megjelenő) terméket bevehetünk a modellbe.

Ezt szem előtt tartva az alábbi bemeneti adatstruktúrát dolgoztuk ki. Az időszak időegységeit  $1, \dots, T$  indexekkel jelöljük.

- *termékek*: 2-dimenziós tömb. Elemei  $T$  hosszú  $0 - 1$  tömbök, melyek a felhasználó által kiválasztott egyes standard termékek (pl. "5/7 6-22") időegységenkénti elérhetőségét mutatják. 0 ha az adott termék nem elérhető, 1 ha elérhető az adott időegységben.

- *hetHoNeEv*: 3-dimenziós tömb. Elemei az adott *terméktípusok* (pl. heti, havi, negyedéves, éves) elérhető *példányait* mutatják. Egy termék-típushoz egy kétdimenziós tömb tartozik, melynek elemei kételemű tömbök. Ezek az egyes példányok kezdő és befejező időpontjait mutatják. Pl.  $\{\{1. \text{ hét kezdő órája}, 1. \text{ hét végórája}\}, \{2. \text{ hét kezdő órája}, 2. \text{ hét végórája}\} \dots\}, \{\{1. \text{ hónap kezdő órája}, 1. \text{ hónap végórája}\}, \dots\}$ . Természetesen a tömb segítségével bármilyen *terméktípus* definiálható.
- *termekTipusok*: 2-dimenziós tömb. Termékenkénti 0 – 1 tömbök, melyek megadják, hogy mely típusok (pl. heti, havi, negyedéves, éves) elérhetőek az adott termékből.
- *nyitottPoziciok*: 1-dimenziós tömb. Az időegységenkénti nyitott pozíciókat tartalmazza ( $T$  hosszú tömb)
- *kiegyintervallumok*: 1 dimenziós tömb. Kiegyensúlyozottsági intervallumok. A (hiányok összmennyisége) =  $htarany \times$  (többletek összmennyisége) feltételhez tartozó periódushosszak időegységben.

A naturália modell további bemenetei az alábbiak.

- *htarany*: hiányok és többletek előírt aránya (hiányok összmennyisége) =  $htarany \times$  (többletek összmennyisége).

A költségalapú modellek további bemenetei:

- *htcsucs*: a csúcs időszaki hiányok és többletek órás (vételi ill. eladási) árai összegeinek előírt aránya (csúcs hiányok összára) =  $htcsucs \times$  (csúcs többletek összára).
- *htnemcsucs*: a nem-csúcs időszaki hiányok és többletek órás (vételi ill. eladási) árai összegeinek előírt aránya. (nem-csúcs hiányok összára) =  $htnemcsucs \times$  (nem-csúcs többletek összára).
- *csucsNemcsucs*: 1 dimenziós  $T$  hosszú tömb. Értéke az adott időpontban 1, ha az időpont csúcs és 0, ha az időpont nem-csúcs.
- *standardAr*: a standard termékek egységárait tartalmazó vektor (Euro/MW), *termek*/*termekTipusok*/*termekPeldanyok* szerinti felsorolásban.
- *HPFCvetel*: 1 dimenziós  $T$  hosszú tömb. Felsorolja a vételi órás árakat. (Mi veszünk.)
- *HPFCeladas*: 1 dimenziós  $T$  hosszú tömb. Felsorolja az eladási órás árakat. (Mi adunk el.)

### 2.3 A lineáris feltételrendszer

A modellek mindegyike az alábbi lineáris feltételrendszerű feladatként fogalmazható meg:

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \\ f(\mathbf{x}) &\rightarrow \min \end{aligned} \quad (1)$$

A változók vektora az alábbi részekből áll:

$$\mathbf{x}^T = [\mathbf{x}_{standard}^T, \mathbf{x}_{hiany}^T, \mathbf{x}_{tobblt}^T],$$

ahol

- $\mathbf{x}_{standard}$ : standard termékek mennyiségei a *termekek/termekTipusok/termekPeldanyok* szerinti felsorolásban, dimenziója a termékpéldányok száma.
- $\mathbf{x}_{hiany}$ : a hiányok mennyiségei naturáliában időegységenként.  $T$  dimenziós vektor.
- $\mathbf{x}_{tobblt}$ : a többletek mennyiségei naturáliában időegységenként.  $T$  dimenziós vektor.

### 2.4 Naturália alapú modell

Az adott időszakban a vásárolt standard termékek mennyiségei és a nyitott pozíciók közti *abszolút eltérést* minimalizáljuk. Ez lényegében megegyezik a hiányok és többletek (előjel nélküli) mennyiségeinek összegével.

A célfüggvény

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x},$$

ahol az  $\mathbf{x}^T = [\mathbf{x}_{standard}^T, \mathbf{x}_{hiany}^T, \mathbf{x}_{tobblt}^T]$  felosztás szerint:

$$\mathbf{c}^T = [\mathbf{0}^T \ \mathbf{1}^T \ \mathbf{1}^T]$$

A jobb oldal vektora:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{poz} \\ \mathbf{b}_{ht} \end{bmatrix},$$

ahol

- $\mathbf{b}_{poz}$ : a nyitott pozíciók időegységenként. ( $T$  dimenziós vektor)
- $\mathbf{b}_{ht}$ : a kiegyensúlyozási intervallumok számával megegyező dimenziójú csupa nulla vektor.

Az együttható mátrix sorai is két részre bonthatóak az alábbi módon:

$$A = \begin{bmatrix} A_{poz} \\ A_{ht} \end{bmatrix}.$$

Az első rész a hiányok és többletek értékeit állítja elő a standard termékek mennyiségei és a nyitott pozíciók függvényében. Eszerint:

$$A_{poz} = [A_{standard}, I, -I],$$

ahol  $A_{standard}$ :  $T \times$  (termékpéldányok száma) méretű mátrix, mely oszlopai  $0 - 1$  vektorok, és az egyes termékpéldányok időegységenkénti elérhetőségét mutatják.  $I$ :  $T \times T$  méretű egységmátrix. A második rész a (hiányok összmennyisége) =  $htarany \times$  (többletek összmennyisége) relációkat írja le kiegyensúlyozási intervallumonként. Eszerint az  $A_{ht}$  mátrix  $i$ -edik sora az  $\mathbf{x}^T = [\mathbf{x}_{standard}^T, \mathbf{x}_{hiány}^T, \mathbf{x}_{tobblet}^T]$  felosztás szerint:

$$[\mathbf{0}^T, \mathbf{v}^T, -htarany \cdot \mathbf{v}^T],$$

ahol a  $\mathbf{v}$  vektor koordinátái az  $i$ -edik kiegyensúlyozottsági intervallum időegységeiben 1-ek, máshol nullák.

**2.1. Példa.** *A bemenő adataink legyenek a következők.*

$$termekek = \{\{1, 1, 1, 1, 1\}, \{1, 1, 1, 0, 0\}\},$$

$$hetHoNeEv = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}, \{\{1, 5\}\},$$

$$termekTipusok = \{\{1, 1\}, \{0, 1\}\},$$

$$nyitottPoziciok = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$htarany = 2$$

$$kiegyintervallumok = \{2, 3\}$$

Ezek után a termék példányok az alábbiak szerint következnek:

1.termék/heti/1.hét, 1.termék/heti/2.hét, 1.termék/havi/1.hónap, 2.termék/havi/1.hónap. Eszerint a változók vektora:

$$\mathbf{x}^T = [x_{standard}^{(1)} \dots x_{standard}^{(4)} | x_{hiány}^{(1)} \dots x_{hiány}^{(5)} | x_{tobblet}^{(1)} \dots x_{tobblet}^{(5)}]$$

A célfüggvény vektora:

$$\mathbf{c}^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0 | 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 | 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

Az együttható mátrix és a jobb oldal vektora:

$$A = \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \mathbf{b} = \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ \hline 0 \\ 0 \end{array} \right]$$

A függőleges vonalak az  $[\mathbf{x}_{standard}^T, \mathbf{x}_{hiany}^T, \mathbf{x}_{tobblet}^T]$  felosztást, míg a vízszintes vonalak a  $\begin{bmatrix} \mathbf{b}_{poz} \\ \mathbf{b}_{ht} \end{bmatrix}$ , szerinti felosztást mutatják.

**2.1. Tétel.** Az

$$A_{poz}\mathbf{x} = \mathbf{b}_{poz} \quad (2)$$

feltételrendszer, a nemnegativitási kritériummal és a célfüggvény minimalizálásával biztosítja, hogy adott  $\mathbf{x}_{standard}$  értékek mellett az  $\mathbf{x}_{hiany}$  és  $\mathbf{x}_{tobblet}$  vektorok valóban az időszakonkénti hiányokat és többleteket mutassák.

BIZONYÍTÁS. Látható, hogy  $(\mathbf{x}_{hiany} - \mathbf{x}_{tobblet})$  a nyitott pozíció és a megvásárolt standard árammennyiség különbsége.

Először tegyük fel, hogy az  $i$ -edik időpontban ( $i = 1, \dots, T$ )  $s_i$  mennyiségű hiányunk van. Ekkor

$$x_{hiany}^{(i)} - x_{tobblet}^{(i)} = s_i,$$

ebből következik, hogy

$$x_{hiany}^{(i)} + x_{tobblet}^{(i)} = s_i + 2 \cdot x_{tobblet}^{(i)} \quad (3)$$

Adott  $\mathbf{x}_{standard}$  mellett  $s_i$  is adott, így a célfüggvényben szereplő  $x_{hiany}^{(i)} + x_{tobblet}^{(i)}$  összeget pontosan a (3) egyenlet határozza meg. A célfüggvény minimalizálása esetén  $(x_{hiany}^{(i)} + x_{tobblet}^{(i)})$ -nak is minimálisnak kell lennie, ez pedig (3) szerint akkor következik be, ha  $x_{tobblet}^{(i)} = 0 \Rightarrow x_{hiany}^{(i)} = s_i$ .

Ha pedig az  $i$ -edik időpontban ( $i = 1, \dots, T$ )  $l_i$  mennyiségű többletünk van, akkor

$$x_{hiany}^{(i)} - x_{tobblet}^{(i)} = -l_i,$$

ebből következik, hogy

$$x_{tobblet}^{(i)} + x_{hiany}^{(i)} = l_i + 2 \cdot x_{hiany}^{(i)} \quad (4)$$

Adott  $\mathbf{x}_{standard}$  mellett  $l_i$  is adott, így a célfüggvényben szereplő  $x_{hiany}^{(i)} + x_{tobblet}^{(i)}$  összeget pontosan a (4) egyenlet határozza meg. A célfüggvény minimalizálása esetén  $(x_{hiany}^{(i)} + x_{tobblet}^{(i)})$ -nak is minimálisnak kell lennie, ez pedig (4) szerint akkor következik be, ha  $x_{hiany}^{(i)} = 0 \Rightarrow x_{tobblet}^{(i)} = l_i$ . QED

**2.2. Következmény.** Az  $A_{ht}\mathbf{x} = \mathbf{b}_{ht}$  feltételt a feladathoz véve az alábbi esetek fordulhatnak elő:

1. ha létezik az előírt hiány-többlet arányhoz tartozó megoldás, akkor a (1) feladat megoldása valóban teljesíti a hiányok és többletek kiegyensúlyozottsági intervallumonkénti arányát,
2. ha nem létezik az előírt hiány-többlet arányhoz tartozó megoldás, akkor
  - (a) vagy nem lesz az (1) feladatnak megengedett megoldása,

(b) vagy ha mégis van az (1) feladatnak megengedett megoldása, akkor az optimális megoldásban lesz olyan  $x_{hiány}^{(i)}, x_{többlet}^{(i)}$  pár, melynek egyik tagja sem nulla. Így ekkor sem az  $x_{hiány}^{(i)}$  sem az  $x_{többlet}^{(i)}$  nem a valós hiányt ill. többletet mutatja.

**2.3. Következmény.** Az (1) feladat megoldása után le kell ellenőrizni, hogy az

$$x_{hiány}^{(i)} \cdot x_{többlet}^{(i)} = 0, \quad i = 1, \dots, T, \quad (5)$$

komplementaritási feltételek teljesülnek-e. Ha nem, akkor nem létezik az előírt hiány-többlet arányhoz tartozó megoldás.

## 2.5 Költség alapú modell

A beszerzés költségét kell minimalizálni, ahol a standard termékek mellett az adott időszak hiányokat vételi órák áron, a többleteket negatív eladási áron számoljuk.

Az időszakot felosztjuk kiegyensúlyozottsági intervallumokra. A feltétel az, hogy úgy vásároljunk standard termékeket, hogy a kiegyensúlyozottsági intervallumok csúcs és nem-csúcs időszakában – külön-külön – a hiányok időegységenkénti vételi órák áraiból számolt költségek és többletek időegységenkénti eladási órák áraiból számolt bevételek aránya egy-egy előre adott érték legyen.

A célfüggvény vektora az  $\mathbf{x}^T = [\mathbf{x}_{standard}^T, \mathbf{x}_{hiány}^T, \mathbf{x}_{többlet}^T]$  felosztás szerint:

$$\mathbf{c}^T = [\mathbf{c}_{standard}^T, \mathbf{c}_{hiány}^T, -\mathbf{c}_{többlet}^T],$$

ahol

- $\mathbf{c}_{standard}$ : (standard) termékek árai a *termekek/termekTipusok/termekPeldanyok* szerinti felsorolásban, dimenziója a termékpéldányok száma. Az árakat a *standardAr* tömbből nyerjük.
- $\mathbf{c}_{hiány}$ : a hiányok vételi árai időegységenként,  $T$  dimenziós vektor. Az árakat a *HPFCveteli* tömbből nyerjük.
- $\mathbf{c}_{többlet}$ : a többletek eladási árai időegységenként,  $T$  dimenziós vektor. Az árakat a *HPFCeladasi* tömbből nyerjük.

A jobb oldal vektora:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{poz} \\ \mathbf{b}_{htcsucs} \\ \mathbf{b}_{htnemcsucs} \end{bmatrix},$$

ahol

- $\mathbf{b}_{poz}$ : a nyitott pozíciók időegységenként. ( $T$  dimenziós vektor)



- $\mathbf{b}_{htcsucs}$ : a kiegyensúlyozottsági intervallumok számával megegyező dimenziójú csupa nulla vektor.
- $\mathbf{b}_{htnemcsucs}$ : a kiegyensúlyozottsági intervallumok számával megegyező dimenziójú csupa nulla vektor.

Az együttható mátrix sorai is három részre bonthatóak az alábbi módon:

$$A = \begin{bmatrix} A_{poz} \\ A_{htcsucs} \\ A_{htnemcsucs} \end{bmatrix}.$$

Az első rész a hiányok és többletek értékeit állítja elő a standard termékek mennyiségei és a nyitott pozíciók függvényében, ugyanúgy, ahogy a naturália modell (2) feltételrendszere.

A második rész a (csúcs hiányok összköltsége) =  $htcsucs \times$  (csúcs többletek összköltsége) relációkat írja le kiegyensúlyozottsági intervallumonként, míg a harmadik rész a (nem-csúcs hiányok összköltsége) =  $htnemcsucs \times$  (nem-csúcs többletek összköltsége) relációkat írja le kiegyensúlyozottsági intervallumonként.

Eszerint az  $A_{htcsucs}$  mátrix  $i$ -edik sora az  $\mathbf{x}^T = [\mathbf{x}_{standard}^T, \mathbf{x}_{hiany}^T, \mathbf{x}_{tobblet}^T]$  felosztás szerint:

$$[\mathbf{0}^T, \mathbf{u}_{veteli}^T, -htcsucs \cdot \mathbf{u}_{eladasi}^T],$$

ahol az  $\mathbf{u}_{veteli}$  vektor koordinátái az  $i$ -edik kiegyensúlyozottsági intervallum csúcs időegységeiben órás vételi árai, máshol pedig nullák, míg az  $\mathbf{u}_{eladasi}$  vektor koordinátái az  $i$ -edik kiegyensúlyozottsági intervallum csúcs időegységei órás eladási árai, máshol pedig nullák.

Hasonlóan az  $A_{htnemcsucs}$  mátrix  $i$ -edik sora az  $\mathbf{x}^T = [\mathbf{x}_{standard}^T, \mathbf{x}_{hiany}^T, \mathbf{x}_{tobblet}^T]$  felosztás szerint:

$$[\mathbf{0}^T, \mathbf{v}_{veteli}^T, -htnemcsucs \cdot \mathbf{v}_{eladasi}^T],$$

ahol a  $\mathbf{v}_{veteli}$  vektor koordinátái az  $i$ -edik kiegyensúlyozottsági intervallum nem-csúcs időegységei órás vételi árai, máshol pedig nullák, míg a  $\mathbf{v}_{eladasi}$  vektor koordinátái az  $i$ -edik kiegyensúlyozottsági intervallum nem-csúcs időegységei órás eladási árai, máshol pedig nullák.

**2.2. Példa.** *A bemenő adataink legyenek a következők.*

$$termekek = \{\{1, 1, 1, 1, 1\}, \{1, 1, 1, 0, 0\}\},$$

$$hetHoNeEv = \{\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}, \{\{1, 5\}\}\},$$

$$termekTipusok = \{\{1, 1\}, \{0, 1\}\},$$

$$nyitottPoziciok = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$htcsucs = 2$$

$$htnemcsucs = 3$$

$$csucsNemcsucs = \{0, 0, 0, 1, 1\}$$

$$kiegyintervallumok = \{2, 3\}$$

$$standardAr = \{24, 38, 88, 39\}$$

$$HPFCvetel = \{12, 14, 16, 24, 27\}$$

$$HPFCeladas = \{10, 12, 14, 22, 25\}$$

Ezek után a termék példányok az alábbiak szerint következnek: 1.termék/heti/1.hét, 1.termék/heti/2.hét, 1.termék/havi/1.hónap, 2.termék/havi/1.hónap. Eszerint a változók vektora:

$$\mathbf{x}^T = [x_{standard}^{(1)} \dots x_{standard}^{(4)} | x_{hiany}^{(1)} \dots x_{hiany}^{(5)} | x_{tobblet}^{(1)} \dots x_{tobblet}^{(5)}]$$

A célfüggvény vektora:

$$\mathbf{c}^T = [24 \ 38 \ 88 \ 39 | 12 \ 14 \ 16 \ 24 \ 27 | -10 \ -12 \ -14 \ -22 \ -25]$$

Az együttható mátrix és a jobb oldal vektora:

$$A = \left[ \begin{array}{cccc|cccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 27 & 0 & 0 & 0 & -44 & -50 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 14 & 0 & 0 & 0 & -30 & -36 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & -42 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad b = \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right]$$

A függőleges vonalak az  $(\mathbf{x}_{standard}^T, \mathbf{x}_{hiany}^T, \mathbf{x}_{tobblet}^T)$  felosztást, míg a vízszintes

vonalak a  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{poz} \\ \mathbf{b}_{htcsucs} \\ \mathbf{b}_{htnemcsucs} \end{bmatrix}$  szerinti felosztást mutatják. Természetesen a hatodik  $0 = 0$  feltétel mindig teljesül, csak a logikai felépítés szemléltetése miatt nem hagytuk ki.

## 2.6 A kereslet előrejelzési bizonytalanságot figyelembe vevő modell

Az óras árak előrejelzésének (HPFC görbe generálásának) idősor alapú módszerei (lásd pl. Conejo et al. 2005b, Marossy 2010) alkalmasak scenáriók generálására és ezen keresztül az árelőrejelzés kockázatának mérésére, kezelésére. Ezzel szemben a kereslet előrejelzésének gyakorlatban is használt modelljei, statisztikai módszertanok helyett, neurális hálókat használnak (lásd pl. Hippert 2001). Emiatt a keresleti görbék valószínűségi eloszlásáról keveset tudunk mondani, és ennek következtében a kereslet előrejelzés kockázatát is nehezen tudjuk mérni.

A kockázat egzakt mérése helyett az előrejelzési bizonytalanságot az alábbi empirikus megfontolások alapján szerepeltetjük a modellben. Feltesszük,

hogy az előrejelzés pontatlansága miatt a hiányoknak illetve többleteknek csak egy részét tudjuk piaci óras áron megvenni illetve eladni, a többi részt kiegyenlítő energiaként kell megvennünk, illetve többlet esetén elveszik. Az óras termékek arányát a standard termékek beszerzése utáni maradék keresletben az alábbi formulával számoljuk:

$$\begin{aligned} \text{"óras arány"} &= 1 - \text{kockazatiFaktor} \times \\ &\times \frac{2T}{\text{egy év időegység szerinti hossza}} \times \\ &\times \frac{\text{nyitott pozíciók összege}}{\text{hiányok és többletek (előjel nélküli) összege}}, \end{aligned} \quad (6)$$

ahol a *kockazatiFaktor* a fogyasztói portfólió éves előrejelzés bizonytalanságára jellemző tényező.

A formula az alábbi tapasztalati megfontolások alapján született.

- A bizonytalansági faktor két dologból adódik össze. Az első rész az alábbi elszámolási problémából adódik: míg termékek csak óras időintervallumokra adottak, addig a fogyasztást a villamosenergia rendszer irányítója negyedórás intervallumokban számolja el, így valamennyi kiegyenlítő energiát mindenképp be kell szerezni. Emiatt a faktor egyik fele a negyedórás-óras átlag eltérés nagyságát tükrözi. A faktor másik fele a fogyasztók viselkedésének kiszámíthatatlanságából adódik. Pl. közlekedési vállalatnál alacsony, ívkemencét használó öntödénél magas. Minél nagyobb a faktor, annál kisebb az óras termékek aránya.
- A képlet második sora azt tükrözi, hogy a tervezési horizont ( $T$ ) növelésével, az előrejelzés bizonytalansága is nő.
- A képlet utolsó sora azon a tényen alapul, hogy minél jobban közelít a standard termékekkel történt lefedés, *arányaiban* annál nagyobb lesz a kiegyenlítő energia a lefedetlen mennyiségből.

A modellben a korlátozó feltételek megegyeznek a költség alapú modell feltételeivel. A célfüggvényben a vásárlás költségét kell minimalizálni, ahol

- a standard termékeket saját árukon,
- az adott időszaki hiányok "óras arány" szerinti részét vételi óras áron, a maradékot pedig kiegyenlítő energia áron számoljuk,
- a többletek "óras arány" szerinti részét negatív eladási áron számoljuk, a maradékot veszteségként letudjuk.

A célfüggvény képletéhez egyrészt szükség lesz az alábbi  $\mathbf{c}$  árvektorra:

$$\mathbf{c}^T = [\mathbf{c}_{\text{standard}}^T, \mathbf{c}_{\text{hiány}}^T, -\mathbf{c}_{\text{többlet}}^T],$$

ahol

- $\mathbf{c}_{standard}$ : a standard termékek árai a *termekek/termekTipusok/termekPeldanyok* szerinti felsorolásban, dimenziója a termékpéldányok száma. Az árakat a *standardAr* tömbből nyerjük.
- $\mathbf{c}_{hiany}$ : a hiányok vételi árai időegységenként,  $T$  dimenziós vektor. Az árakat a *HPFCvetel* tömbből nyerjük.
- $\mathbf{c}_{tobblet}$ : a többletek eladási árai időegységenként,  $T$  dimenziós vektor. Az árakat a *HPFCeladas* tömbből nyerjük.

A kiegyenlítő termék egységárát jelöljük  $c_{kiegyenlito}$ -szal, tehát legyen

$$c_{kiegyenlito} = kiegyenlitoAr$$

Az óras arány felírásához vezessük be az alábbi tényezőt:

$$R := kockazatiFaktor \times \frac{2T}{\text{egy év időegység szerinti hossza}} \times \text{nyitott pozíciók összege}$$

Vegyük észre, hogy  $R$  a modell felírásakor kiszámolható (nem függ az  $\mathbf{x}$  változóktól). Ekkor

$$\text{”óras arány”} = 1 - \frac{R}{\mathbf{1}^T \mathbf{x}_{hiany} + \mathbf{1}^T \mathbf{x}_{tobblet}},$$

Eszerint a bizonytalanságot figyelembe vevő költséget mutató célfüggvény:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) = & \left(1 - \frac{R}{\mathbf{1}^T \mathbf{x}_{hiany} + \mathbf{1}^T \mathbf{x}_{tobblet}}\right) (\mathbf{c}_{hiany}^T \mathbf{x}_{hiany} - \mathbf{c}_{tobblet}^T \mathbf{x}_{tobblet}) + \\ & + \mathbf{c}_{standard}^T \mathbf{x}_{standard} + \frac{R}{\mathbf{1}^T \mathbf{x}_{hiany} + \mathbf{1}^T \mathbf{x}_{tobblet}} c_{kiegyenlito} (\mathbf{1}^T \mathbf{x}_{hiany}). \end{aligned}$$

A célfüggvény egyszerűbb alakra is hozható:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \frac{R \left( (\mathbf{1}^T c_{kiegyenlito} - \mathbf{c}_{hiany}^T) \mathbf{x}_{hiany} + \mathbf{c}_{tobblet}^T \mathbf{x}_{tobblet} \right)}{\mathbf{1}^T \mathbf{x}_{hiany} + \mathbf{1}^T \mathbf{x}_{tobblet}} \quad (7)$$

**2.3. Példa.** *A bemenő adataink legyenek a következők.*

$$termekek = \{\{1, 1, 1, 1, 1\}, \{1, 1, 1, 0, 0\}\},$$

$$hetHoNeEv = \{\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}, \{\{1, 5\}\}\},$$

$$termekTipusok = \{\{1, 1\}, \{0, 1\}\},$$

$$nyitottPoziciok = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$htcsucs = 2$$

$$htnemcsucs = 3$$

$$csucsNemcsucs = \{0, 0, 0, 1, 1\}$$

$$\begin{aligned}
\text{kiegyintervallumok} &= \{2, 3\} \\
\text{standardAr} &= \{24, 38, 88, 39\} \\
\text{HPFCvetel} &= \{12, 14, 16, 24, 27\} \\
\text{HPFCeladas} &= \{10, 12, 14, 22, 25\} \\
\text{kockazatiFaktor} &= 1 \\
\text{kiegyenlitoAr} &= 50
\end{aligned}$$

Feltesszük még, hogy egy év 30 időegységből áll.

Ezek után a termék példányok az alábbiak szerint következnek:

1.termék/heti/1.hét, 1.termék/heti/2.hét, 1.termék/havi/1.hónap, 2.termék/havi/1.hónap. Eszerint a változók vektora:

$$\mathbf{x}^T = [x_{\text{standard}}^{(1)} \dots x_{\text{standard}}^{(4)} | x_{\text{hiany}}^{(1)} \dots x_{\text{hiany}}^{(5)} | x_{\text{tobblet}}^{(1)} \dots x_{\text{tobblet}}^{(5)}]$$

Az együttható mátrix és a jobb oldal vektora:

$$\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{cccc|cccc|ccccc}
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 27 & 0 & 0 & 0 & -44 & -50 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 14 & 0 & 0 & 0 & -30 & -36 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & -42 & 0 & 0
\end{array} \right] \mathbf{b} = \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right]$$

A függőleges vonalak az  $(\mathbf{x}_{\text{standard}}^T, \mathbf{x}_{\text{hiany}}^T, \mathbf{x}_{\text{tobblet}}^T)$  felosztást, míg a vízszintes

vonalak a  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{\text{poz}} \\ \mathbf{b}_{\text{htcsucs}} \\ \mathbf{b}_{\text{htnemcsucs}} \end{bmatrix}$  szerinti felosztást mutatják. Természetesen a hatodik  $0 = 0$  feltétel mindig teljesül, csak a logikai felépítés szemléltetése miatt nem hagytuk ki.

A célfüggvény formulája együtthatói az alábbiak.

$$\mathbf{c}^T = [24 \ 38 \ 88 \ 39 | 12 \ 14 \ 16 \ 24 \ 27] \ -10 \ -12 \ -14 \ -22 \ -25]$$

$$c_{\text{kiegyenlito}} = 50$$

$$R = 0.01 \frac{2 \cdot 5}{30} (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 0.05$$

Eszerint a célfüggvény:

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \frac{0.05 \left( (\mathbf{1}^T 50 - \mathbf{c}_{\text{hiany}}^T) \mathbf{x}_{\text{hiany}} + \mathbf{c}_{\text{tobblet}}^T \mathbf{x}_{\text{tobblet}} \right)}{\mathbf{1}^T \mathbf{x}_{\text{hiany}} + \mathbf{1}^T \mathbf{x}_{\text{tobblet}}} = \\
&= 24x_{\text{standard}}^{(1)} + \dots + 39x_{\text{standard}}^{(4)} + 12x_{\text{hiany}}^{(1)} + \dots + 27x_{\text{hiany}}^{(5)} - 10x_{\text{tobblet}}^{(1)} - \dots - \\
&\quad - 25x_{\text{tobblet}}^{(5)} + 0.05 \frac{38x_{\text{hiany}}^{(1)} + \dots + 23x_{\text{hiany}}^{(5)} + 10x_{\text{tobblet}}^{(1)} + \dots + 25x_{\text{tobblet}}^{(5)}}{x_{\text{hiany}}^{(1)} + \dots + x_{\text{hiany}}^{(5)} + x_{\text{tobblet}}^{(1)} + \dots + x_{\text{tobblet}}^{(5)}}
\end{aligned}$$

## 2.7 Alternatív optimumok

Mindhárom modell esetén előfordulhat, hogy a feladatnak több optimális megoldása lesz. Erre egy természetes példa, ha naturália modellben a zsinór termékből (egész időszak alatt 0-24 óráig elérhető termék) rendelkezésünkre áll 1. havi, 2. havi, 3. havi és 1. negyedévi termékpéldány is. Ekkor ha a beszerzett 1. negyedévi termékmennyiséget ugyanannyival csökkentjük, mint amennyivel a beszerzett első 3 havi termékmennyiséget növeljük, az óránkénti vásárolt mennyiségek nem változnak. Tehát, például 100 MW 1. negyedévi termék és egyenként 50-50 MW 1., 2. és 3. havi termék beszerzése egyenértékű 80 MW 1. negyedévi termék és egyenként 70-70 MW 1., 2. és 3. havi termék beszerzésével.

A probléma megoldására érdemes egy *másodlagos célfüggvényt* tekinteni: a *kötések számát* (MW-ban számolva). Tehát –például a naturália modell esetén– a minimális abszolút eltérést biztosító beszerzések közül azt választjuk, ahol a standard termékekre vonatkozó kötések száma minimális. Tegyük fel, hogy az (1) feladat megoldása során kapott optimális célfüggvény érték  $z_{opt}$ . Ekkor az optimális megoldások közül a legkisebb kötésszámút az alábbi LP feladat megoldása adja meg:

$$\begin{array}{rcl} A\mathbf{x} & = & \mathbf{b} \\ \mathbf{c}^T \mathbf{x} & \leq & z_{opt} \\ \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0} \\ \mathbf{1}^T \mathbf{x}_{standard} & \rightarrow & min \end{array} \quad (8)$$

## 3 Megoldó algoritmusok

### 3.1 Naturália alapú és a költség alapú modell

A 2.4 és 2.5 szakaszok matematikai modelljei *lineáris programozási (LP) feladatok*. Ennek a feladattípusnak a megoldására számos algoritmus áll a rendelkezésünkre, ezek a gyakorlatban két lényeges családra oszthatók:

- *pivot algoritmusok*: pl. primál és duál szimplex módszer, lásd Dantzig (1998),
- *belső pontos algoritmusok*: a legelső ilyen módszer Karmarkar (1984) cikkéhez köthető. Részletesebb áttekintés Ye (1997) könyvében található.

Az eredeti feladatok megoldásához, hatékonysága miatt, valamely belső pontos algoritmus ajánlott.

Az alternatív optimumok közül a minimális kötésszámú megoldást szolgáltató (8) LP feladat megoldását érdemes az eredeti feladat optimális megoldásából indítani. Erre viszont a pivot algoritmusok alkalmasak. Ezért az (8) feladat megoldásához egy szimplex módszert indítunk az optimális megoldás bázisából.

### 3.2 Előrejelzési bizonytalanságot figyelembe vevő modell

A modell feltételei továbbra is lineárisak. A célfüggvény viszont egy lineáris és egy lineáris törtfüggvény összege. Az ilyen típusú feladatok megoldó algoritmusai a korlátozó feltételekkel meghatározott megengedett tartományról általában felteszik, hogy kompakt. Feladatunkban ez sajnos nem teljesül, mivel az  $\mathbf{x}_{tobbllet}$  vektorok és így az  $\mathbf{x}_{standard}$  komponensei is bármilyen nagy értéket felvehetnek. Ahhoz, hogy a megengedett tartományt kompakttá tegyük, valamilyen további, a gyakorlati alkalmazhatóságot nem korlátozó feltételre van szükség. Egyik lehetséges ilyen feltétel, hogy a *többletek egyik időegységben sem lehetnek magasabbak, mint a legnagyobb nyitott pozíció értéke*. Tehát legyen

$$b_{max} = \text{nyitott pozíciók maximuma}$$

A vizsgált feladat ezután:

$$\begin{array}{rcl} A\mathbf{x} & = & \mathbf{b} \\ \mathbf{x}_{tobbllet} & \leq & b_{max}\mathbf{1} \\ \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0} \\ f(\mathbf{x}) & \rightarrow & \min \end{array}$$

Jelölje a megengedett tartományt  $S$ , tehát

$$S = \{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x}_{tobbllet} \leq b_{max}\mathbf{1}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

A megoldandó feladat pedig írható

$$\min\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in S\} \quad (9)$$

alakban.

Megvizsgálva a (7) célfüggvényt, azt találjuk, hogy *az  $f(\mathbf{x})$  függvény is se nem konvex (se nem konkáv), se nem rendelkezik más egyéb konvexitási tulajdonsággal, amely alapján a klasszikus nemlineáris programozási algoritmusok alkalmazhatóak lennének rájuk*. A célfüggvényünkhöz hasonló lineáris plusz lineáris törtfüggvények konvexitási tulajdonságairól lásd Schaible (1977).

A hatékony algoritmusok nagy része a *globális optimalizálásban használt korlátozás-és-szétválasztás* technikán alapul, melynek az alábbi változatát használjuk

#### Korlátozás-és-szétválasztás algoritmus

Az alábbi feladatot akarjuk megoldani

$$\max\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in X\},$$

ahol az  $f(\mathbf{x})$  függvényről feltesszük, hogy folytonos, az  $X$  halmaz pedig konvex, kompakt.

0. lépés. Legyen  $\varepsilon > 0$  tűrési paraméter, ennyivel térhetünk el a célfüggvény valódi optimális értékétől. Legyen  $L = -\infty$  alsó korlát a maximumra. Jelölje a relaxált (rész)feladatok indexei halmazát  $\mathcal{J} := \{1\}$ .  $X := X^1$ ,  $k := 1$ .

1. lépés. Ha  $\mathcal{J} = \emptyset$ , akkor menjünk a 4. lépésre. Különben válasszunk valamilyen – később specifikált – szabály alapján egy  $j \in \mathcal{J}$  indexet.  $\mathcal{J} := \mathcal{J} \setminus \{j\}$ . Vegyük egy *konkáv*  $g_j(\mathbf{x})$  függvényt, mely az  $X^j$  tartományon nem kisebb az  $f(\mathbf{x})$  célfüggvényénél. Az ezzel a célfüggvénnyel felírt feladatot nevezzük az eredeti feladat *relaxációjának* és jelöljük  $P^j$ -gyel. Oldjuk meg a  $P^j$  feladatot, legyen az optimuma  $\mathbf{x}_j$ .

2. lépés. (korlátozás) Ha  $g_j(\mathbf{x}_j) - L \leq \varepsilon$  akkor menjünk az 1. lépésre. Különben ha  $f(\mathbf{x}_j) > L$  akkor  $L := f(\mathbf{x}_j)$  és  $\mathbf{x}^* := \mathbf{x}_j$ .

3. lépés. (szétválasztás) Legyen  $X^j = X^{2k} \cup X^{2k+1}$ , ahol  $X^{2k} \cap X^{2k+1} = \emptyset$ .  $\mathcal{J} := \mathcal{J} \cup \{2k, 2k+1\}$ ,  $k := k+1$ . Menjünk az 1. lépésre.

4. lépés. Készen vagyunk,  $\mathbf{x}^*$  ( $\varepsilon$ -)optimális megoldás.

Természetesen a fenti algoritmussal előfordulhat, hogy nem ér véget véges sok lépésben: az  $X$  tartományt bármennyi részre osztva sem kapunk  $\varepsilon$  közeli alsó és felső korlátokat az optimumra. Az algoritmus végessége (és hatékonysága), az eredeti  $f(\mathbf{x})$  függvényen és  $X$  tartományon kívül, elsősorban az alábbiaktól függ:

- a felülről becsülő konkáv  $g_j(\mathbf{x})$  függvények megválasztásától, illetve
- az  $X^j$  halmazok felosztásának módjától.

Esetünkre, ahol az  $f(\mathbf{x})$  függvény lineáris törtfüggvények összege, az  $X$  tartomány pedig nemüres politóp (korlátos poliéder), többek közt Konno and Fukaiishi (2000) és Kuno (2002) adott véges lépésszámú korlátozás-és-szétválasztás algoritmust.

Mi a probléma megoldásához Kuno (2002) módszerét választottuk, mivel ennek kivitelezéséhez továbbra is csak LP megoldóra lesz szükség. A hivatkozott dolgozatban az algoritmus egy maximalizáló (egyébként pedig általánosabb) feladatra van felírva, ezért a módszer lépéseit saját feladatunkra lépésről lépésre leírjuk. A megoldandó feladat:

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x}_{tobbllet} &\leq b_{max}\mathbf{1} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \\ \left(\mathbf{c}^T\mathbf{x} + \frac{\mathbf{d}^T\mathbf{x}}{\mathbf{e}^T\mathbf{x}}\right) &\rightarrow \min \end{aligned} \quad (10)$$

Ahol esetünkben az  $A$  mátrix és a  $\mathbf{b}$  vektor a (1) feladatból származik, míg  $b_{max}$  a  $\mathbf{b}_{poz}$  vektor legnagyobb komponense. Ezenkívül a célfüggvény megegyezik a (7) képlettel, tehát az új jelölések:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^T &= [\mathbf{0}^T, R(\mathbf{1}^T c_{kiegyenlito} - \mathbf{c}_{hiany}^T), R\mathbf{c}_{tobbllet}^T], \\ \mathbf{e}^T &= [\mathbf{0}^T, \mathbf{1}^T, \mathbf{1}^T]. \end{aligned}$$



A megengedett tartományt jelölje

$$S = \{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x}_{tobbl\acute{e}t} \leq b_{max}\mathbf{1}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

Feltesszük (esetünkben leellenőrizzük az (1) költség alapú feladat megoldásával), hogy az  $S$  nemüres, (nyilván korlátos) és

$$\mathbf{d}^T \mathbf{x} > 0, \mathbf{e}^T \mathbf{x} > 0, \mathbf{x} \in S.$$

Esetünkben ez utóbbi feltétel azt jelenti, hogy a nyitott pozíciót nem lehet teljesen pontosan lefedni, ami az (1) költség alapú feladat megoldásából ugyancsak kiderül.

Kuno (2002) algoritmus maximalizáló feladatra működik. Így a mi feladatunkat is át kéne alakítani a feltételeknek megfelelő ekvivalens maximalizáló feladattá. Ehhez először számoljuk ki az alábbi:

$$+\infty > M = \max \left\{ \frac{\mathbf{d}^T \mathbf{x}}{\mathbf{e}^T \mathbf{x}} \mid \mathbf{x} \in S \right\}, \quad (11)$$

a végeesség  $S$  korlátosságából és a célfüggvény  $S$ -en való folytonosságából adódik. A (11) feladat Charnes és Cooper (1962) szerint visszavezethető LP feladatra az alábbiak szerint. Legyen

$$z = \frac{1}{\mathbf{e}^T \mathbf{x}}, \quad \mathbf{y} = z\mathbf{x}.$$

Ekkor a (17) ((18)) feladat ekvivalens az alábbi LP-vel

$$\begin{aligned} A\mathbf{y} - \mathbf{b}z &= \mathbf{0} \\ \mathbf{y}_{tobbl\acute{e}t} - b_{max}\mathbf{1}z &\leq \mathbf{0} \\ \mathbf{y}, z &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{d}^T \mathbf{y} &\rightarrow \max \end{aligned} \quad (12)$$

Ezek után az eredeti (10) ekvivalens az alábbi feladattal:

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x}_{tobbl\acute{e}t} &\leq b_{max}\mathbf{1} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \\ \left(-\mathbf{c}^T \mathbf{x} + (M+1) - \frac{\mathbf{d}^T \mathbf{x}}{\mathbf{e}^T \mathbf{x}}\right) &\rightarrow \max \end{aligned} \quad (13)$$

A célfüggvény második tagját átalakítva:

$$(M+1) - \frac{\mathbf{d}^T \mathbf{x}}{\mathbf{e}^T \mathbf{x}} = \frac{(M+1)(\mathbf{e}^T \mathbf{x}) - \mathbf{d}^T \mathbf{x}}{\mathbf{e}^T \mathbf{x}} = \frac{((M+1)\mathbf{e}^T - \mathbf{d}^T) \mathbf{x}}{\mathbf{e}^T \mathbf{x}}$$

Az

$$\mathbf{f}^T = (M+1)\mathbf{e}^T - \mathbf{d}^T$$

helyettesítéssel, már az ekvivalens feladat

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x}_{tobblét} &\leq b_{max}\mathbf{1} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{o} \\ \left(-\mathbf{c}^T\mathbf{x} + \frac{\mathbf{f}^T\mathbf{x}}{\mathbf{e}^T\mathbf{x}}\right) &\rightarrow \max \end{aligned} \quad (14)$$

megfelel a Kuno (2002) algoritmus elvárásainak. Egyrészt maximalizáló, másrészt

$$\mathbf{f}^T\mathbf{x} > 0, \mathbf{e}^T\mathbf{x} > 0, \mathbf{x} \in S.$$

Definiáljuk az alábbi halmazt:

$$\Omega = \{[\mu, \xi, \eta] \in \mathbb{R}^3 \mid \mu = -\mathbf{c}^T\mathbf{x}, \xi = \mathbf{e}^T\mathbf{x}, \eta = \mathbf{f}^T\mathbf{x}, \mathbf{x} \in S\}.$$

Legyen

$$0 < u_1 \leq \min\{(\mathbf{e} + \mathbf{f})^T\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in S\} \quad (15)$$

$$+\infty > v_1 \geq \max\{(\mathbf{e} + \mathbf{f})^T\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in S\} \quad (16)$$

$$0 < s_1^1 \leq \min\left\{\frac{\mathbf{f}^T\mathbf{x}}{\mathbf{e}^T\mathbf{x}} \mid \mathbf{x} \in S\right\} \quad (17)$$

$$+\infty > t_1^1 \geq \max\left\{\frac{\mathbf{f}^T\mathbf{x}}{\mathbf{e}^T\mathbf{x}} \mid \mathbf{x} \in S\right\} \quad (18)$$

Az első négy feladat LP feladat, a (17), (18) feladatok pedig Charnes és Cooper (1962) szerint –a (12) feladathoz hasonlóan– visszavezethetők LP feladatra. Legyen

$$\Gamma = \{[\mu, \xi, \eta] \mid u_1 \leq \xi + \eta \leq v_1\}.$$

Mivel  $\Omega$  a  $\Gamma \cap \Delta^1$  halmaz részhalmaza így az alábbi feladat ekvivalens a (14) feladattal:

$$(MP) \begin{cases} [\mu, \xi, \eta] \in \Omega \cap \Gamma \cap \Delta^1 \\ z = \left(\mu + \frac{\eta}{\xi}\right) \rightarrow \max \end{cases} \quad (19)$$

A fenti problémát nevezzük *mesterproblémának*. Tekintve a korlátozás-és-szétválasztás algoritmusát, esetünkben a  $\Delta^1$  kúpot fogjuk felosztani, tehát

$$X^j = \Omega \cap \Gamma \cap \Delta^j, \quad (20)$$

ahol

$$\Delta^j = \{[\mu, \xi, \eta] \in \mathbb{R}_+^3 \mid s_1^j \xi \leq \eta \leq t_1^j \xi\}.$$

Így a relaxálandó részfeladatok:

$$P(\Delta^j) \begin{cases} [\mu, \xi, \eta] \in \Omega \cap \Gamma \cap \Delta^j \\ f(\mu, \xi, \eta) = \left(\mu + \frac{\eta}{\xi}\right) \rightarrow \max \end{cases}$$

A relaxációhoz szükség van egy a  $\frac{\eta}{\xi}$  függvényt az  $X_j$  tartományon felülről közelítő konkáv függvényre. Legyenek

$$a^j(\xi, \eta) = (t_1^j + 1)(\eta - s_1^j \xi)/u_1 + s_1^j,$$

$$b^j(\xi, \eta) = (s_1^j + 1)(\eta - t_1^j \xi)/v_1 + t_1^j$$

eltolt lineáris (affin) függvények. Ezek segítségével definiálhatjuk az alábbi konkáv függvénycsaládot:

$$\phi^j(\xi, \eta) = \min\{a^j(\xi, \eta), b^j(\xi, \eta)\}.$$

**3.1. Lemma** (Kuno (2002) Lemma 3.1). *A  $\phi^j$  konkáv függvényre minden  $[\mu, \xi, \eta] \in \Gamma$  esetén igaz, hogy:*

$$\phi^j(\xi, \eta) \geq \frac{\eta}{\xi}, \text{ ha } [\mu, \xi, \eta] \in \Delta^j$$

$$\phi^j(\xi, \eta) < \frac{\eta}{\xi}, \text{ ha } [\mu, \xi, \eta] \notin \Delta^j$$

Ráadásul, ha  $\frac{\eta}{\xi} = s_1^j$  vagy  $\frac{\eta}{\xi} = t_1^j$ , akkor a fenti egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül.

Ezek után a  $P(\Delta^j)$  feladatok relaxáltjai az alábbiak lesznek:

$$\overline{P}(\Delta^j) \begin{cases} [\mu, \xi, \eta] & \in \Omega \cap \Gamma \cap \Delta^j \\ g^j(\mu, \xi, \eta) = (\mu + \phi^j(\xi, \eta)) & \rightarrow \max \end{cases} \quad (21)$$

**3.2. Tétel.** *A  $\overline{P}(\Delta^j)$  relaxált feladatok optimumait az alábbi LP feladat megoldásaként kaphatjuk meg:*

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x}_{\text{tobblét}} &\leq b_{\max}\mathbf{1} \\ (t_1^j + 1)(\mathbf{f} - s_1^j \mathbf{e})^T \mathbf{x} - u_1 \zeta &\geq -s_1^j u_1 \\ (s_1^j + 1)(\mathbf{f} - t_1^j \mathbf{e})^T \mathbf{x} - v_1 \zeta &\geq -t_1^j v_1 \\ s_1^j \leq \zeta \leq t_1^j, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} & \\ (-\mathbf{c}^T \mathbf{x} + \zeta) &\rightarrow \max \end{aligned} \quad (22)$$

BIZONYÍTÁS. Kuno (2002) 3.1 szakasza szerint. QED

A korlátozás-és-szétválasztás algoritmusában a problémák  $\mathcal{J}$  indexhalmazából mindig a legkisebb indexűt vesszük ki (depth first). A szétválasztáshoz az alábbi szabályt fogjuk használni. Feltéve, hogy a  $\overline{P}(\Delta^j)$  feladat optimális megoldása  $[\mu^j, \xi^j, \eta^j]$ , legyen

$$s_1^{2k} = s_1^j, \quad t_1^{2k} = s_1^{2k+1} = \frac{\eta^j}{\xi^j}, \quad t_1^{2k+1} = t_1^j. \quad (23)$$

A fentiekkel a feladatot megoldó algoritmust lényegében definiáltuk. A jobb átláthatóság és megvalósíthatóság kedvéért az algoritmus lépéseit még egyszer röviden összefoglaljuk.

#### A megoldás lépései

- Tekintsük a (10) feladatot és annak jelölésrendszerét.
- Oldjuk meg a (11) feladatot a Charnes és Cooper (1962) eljárással, ez a (12) LP feladat megoldását jelenti.
- Tekintsük a (10) feladattal ekvivalens (14) maximalizáló feladatot.
- Számoljuk ki a (15)-(18) által definiált  $u_1, v_1, s_1^1, t_1^1$  értékeket a megfelelő LP feladatok megoldásával.
- Tekintsük az ekvivalens (19) feladatot.
- Alkalmazzuk a (19) feladatra a fent leírt Korlátozás-és-szétválasztás algoritmusát az alábbi paraméterekkel:
  - Az  $X^j$  halmazokat definiálja (20),
  - $g_j(\mathbf{x}) := (\mu + \phi^j(\xi, \eta))$ ,
  - a relaxált  $P^j := \overline{P}(\Delta^j)$  (21) feladatok megoldását a (22) LP feladat megoldásával kapjuk meg.
  - A szétválasztást a (23) szabály szerint tesszük meg.

## 4 Gyakorlati megvalósítás

Mivel mindegyik feladat megoldásakor (egy vagy több) nagy méretű lineáris programozási feladat megoldására van szükség, ezért, a modellek implementálásakor mindenképp *valamilyen LP solver alkalmazása* javasolt. Mivel az algoritmusok további része nem igényel bonyolult matematikai műveleteket, további általános matematikai programcsomagokra nincs szükség.

Optimalizáló solvernek végül a MOSEK (2012) solver PTS lineáris programozás megoldóját választottuk. A modellalkotás, illetve az algoritmus leírása Java nyelven történt (hogy könnyen illeszthető legyen az IP Systems energiakereskedelmi rendszeréhez).

Eddig a naturália alapú és költség alapú modellek kerültek megvalósításra, melyek esetén egy, általában nagy méretű, lineáris programozási feladatot kell megoldanunk. A megoldás lépései:

- a bemeneti adatok alapján előállítja az (1) feladatot,
- meghívja MOSEK *belsőpontos algoritmust alkalmazó* LP megoldóját,
- visszakapja a optimális célfüggvényértéket,

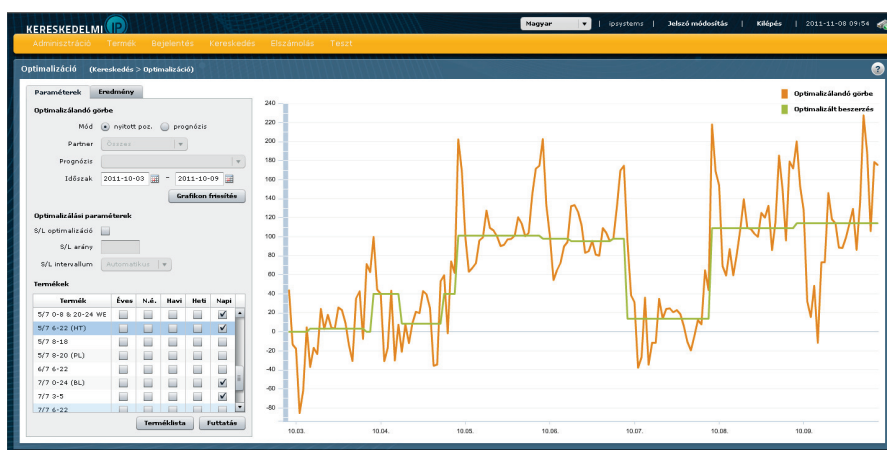
- ennek alapján az eredeti (1) feladatot átírja a minimális kötésszámot biztosító (8) feladattá.
- A megoldáshoz itt már a MOSEK *simplex módszert alkalmazó* LP megoldóját hívjuk meg, mivel így a (1) optimális bázisából kiindulva (primál) megengedett megoldásból indulhatunk.
- A visszakapott célfüggvényértéket és a standard termékekből beszerzendő mennyiséget pedig egy grafikus felhasználói felületen reprezentáljuk.

Az implementált algoritmus hatékonyságát, a naturália modell esetén, az 1. táblázatban szereplő alábbi futási időkkel szemléltethetjük, a tervezési időszak, a kiegyensúlyozási intervallum hossza, illetve a termék példányok számának függvényében. A zárójelekben, összehasonlításképpen, a kereskedők által általában használt Excel Solver futási idejét szerepeltetjük. Az időszakok felosztása órás pontosságú, tehát pl. egy év  $365 \times 24 = 8760$  időegységet jelent.

Tervezési horizont	Kiegy. intervallumok	Termékek száma	Futási idő
1 év	negyedév	4	9 (34) mp
1 év	év	4	7 mp
1 év	év	5	8 (52) mp

1. táblázat. Az algoritmus hatékonysága

A megírt alkalmazás futtatásához az 1. ábrán látható grafikus felületet dolgoztuk ki. (A kiegyensúlyozottsági intervallum S/L intervallum, a hiánytöbblet arány S(hort)/L(ong) arány néven szerepel):



1. ábra.

## 5 Eredmények, tanulságok, további kutatási irányok

Dolgozatunkban három beszerzési modellt állítottunk fel. Egyrészt, a modellekhez szükséges bemeneti adatok száma nem túl nagy, és az adatok könnyen elérhetőek. Másrészt a bemeneti adatstruktúrát kellően rugalmasra terveztük, melynek köszönhetően a tervezési időszakot, termékeket, terméktípusokat, hiány és többlet mennyiségek arányait és a kiegyensúlyozottsági intervallumokat szabadon állíthatjuk be. Ezeknek köszönhetően *a modellek a gyakorlatban lényegében bármely energiakereskedő esetében alkalmazhatóak, implementációjuk is belátható költséggel jár*, szemben az irodalomban szereplő komplex, és a megvalósítás során meglehetősen cég-specifikus beszerzési modellekkel.

A modellek megoldási módszereit ismertettük. Az előrejelzési bizonytalanságot figyelembe vevő modell nemkonvex törtprogramozási feladatának megoldására *Kuno (2002) korlátozás-és- szétválasztás algoritmusát* a kapott feladathoz illesztettük, lépéseit részletesen leírtuk.

A naturália alapú és költség alapú modellek megvalósítása során, a megfelelő adatstruktúra és technológia (MOSEK 2012) használatával *a futási idők kb. huszadára csökkentek* az Excel Solvert használó megvalósításhoz képest.

További terveink az alábbiak. Következő lépés az előrejelzési bizonytalanságot is figyelembe vevő modell implementációja, a bizonytalansági faktorok objektív becslési módszerének kidolgozása. A távolabbi jövő lépései közt szerepelnek újabb – az óras árelőrejelzési kockázatot kezelő – VaR ill. CVaR alapú modellek kidolgozásai, implementációi. Szóba jöhet még a fogyasztók fogyasztási profiljaihoz illeszkedő beszerzési stratégia alapján egy árazási modell kidolgozása.

## Köszönetnyilvánítás

A szerzők köszönetüket fejezik ki Dudás Zoltánnak, a Magyar Áramszolgáltató Kft. munkatársának, a szakmai konzultációk során nyújtott segítségéért.

## Függelék. Fogalmak

*Átviteli rendszerirányító:* a villamosenergia-rendszer üzemének tervezését, irányítását ellátó, a termelőktől, kereskedőktől, fogyasztóktól független szakmai szervezet. Feladata a rendszerszintű operatív üzemirányítás, forrástervezés, hálózati üzem-előkészítés, villamosenergia-elszámolás, a rendszerszintű szolgáltatások, a hálózathoz való szabad hozzáférés biztosítása. (eNKER 2012)

*Elosztó hálózati engedélyes:* a Magyar Energia Hivatal által kiadott engedély alapján területi szolgáltatási jogkörrel és kötelezettséggel felruházott jogi személyiség, aki a hálózatok fejlesztését, üzemeltetését,

karbantartását és a villamos energia elosztását végzi. Az Elosztói engedélyesek feladata a villamos energia előírt minőségben történő eljuttatása a fogyasztók csatlakozási pontjára. Az átadott energia méréséért szintén az elosztói engedélyesek a felelősek. Az elosztói engedélyesek a közcélú villamos hálózatokon keresztül hatóságilag meghatározott díjak fejében szállítják el a vásárolt villamos energiát a fogyasztók csatlakozási pontjára. (energiadiszkont.hu 2012)

*Egyetemes szolgáltatás:* a villamosenergia-kereskedelem körébe tartozó sajátos villamosenergia-értékesítési és árazási mód, amely az ország területén bárhol, meghatározott minőségben a jogosult felhasználó számára méltányos, összehasonlítható, átlátható ár ellenében igénybe vehető. Jellemzően kizárólag a lakosság és a mikrovállalkozások vehetik igénybe. (energiadiszkont.hu 2012)

*Energia kiskereskedelem:* az a tevékenység, amelynek során az energiakereskedő az energiát közvetlenül a felhasználónak adja el. (eNKER 2012)

*Energia tőzsde:* az energia-forgalmat elősegítő szervezett kereskedési rendszer, amelyben az energiakereskedelem és az ahhoz kapcsolódó ügyletek megkötése és lebonyolítása szabványosított formában történik. (HUPX 2012)

*Határkeresztező kapacitás:* szomszédos villamosenergia-rendszerek közötti szállítóhálózat időegységre vonatkoztatott teljesítő képessége.

*Kapacitás aukció:* a határkeresztező szabad átviteli kapacitások elosztására rendszeresen szervezett esemény. Az aukciókon nem az energia, csak a szállítási lehetőség értékesítése történik meg. Aukción az egy időtartamra, egy határmetszékre, egy irányra meghirdetett szabad átviteli kapacitással kapcsolatos folyamat értendő. (KAPAR 2012)

*Kiegyenlítő energia:* az átviteli rendszerirányító által a pozitív, vagy negatív irányú menetrendi eltérést kiegyenlítő szabályozás során a mérlegkörfelelősökkel elszámolt villamos energia. (eNKER 2012)

*Korlátozott villamosenergia-kereskedelmi engedélyes:* olyan kereskedő cég, aki hazai és határokon is átnyúló villamos energia kereskedelemmel foglalkozhat, de nem jogosult a felhasználók ellátására.

*Mérlegkör:* a kiegyenlítő energia igénybevételének okozathelyes megállapítására és elszámolására és a kapcsolódó feladatok végrehajtására a vonatkozó felelősségi viszonyok szabályozása érdekében létrehozott, egy vagy több tagból álló elszámolási szerveződés. (eNKER 2012)

*Nagykereskedelmi energia piac:* az a tevékenység, amelynek során az energiakereskedő az energiát viszonteladónak, és nem közvetlenül a felhasználónak értékesíti. (eNKER 2012)

*Nyitott pozíció:* a bevételek, költségek jövőbeli áráktól függő része. Villamosenergia kereskedelemnél az eladási és vételi határidős pozíciók különbsége. Az eladási oldali pozíciók jelentős része a fogyasztói igények adott árakon való kiszolgálására tett vállalat.

*Villamosenergia-kereskedelmi engedélyes:* olyan kereskedő cég, aki hazai és határokon is átnyúló villamos energia kereskedelmmel foglalkozhat, illetve jogosult a felhasználók ellátására.

*Villamosenergia termékek:* egy villamosenergia terméket az időbeli elérhetősége és az árgörbéje ír le. Az árgörbe órás, vagy negyedórás bontású. Az elérhetőséget leíró időablak a vonatkozási időszakon belül azokat a napszakokat definiálja, amikor az akkor érvényes áron a termék elérhető.

## Irodalom

1. Cambini, A., L. Martein and S. Schaible. 1989. On maximizing a sum of ratios. *Journal of Information and Optimization Sciences* **10** 65–79.
2. CAO 2012. <http://www.central-ao.com/>
3. Carrión, M., A. B. Philpott, A. J. Conejo, J. M. Arroyo. 2007. A Stochastic Programming Approach to Electric Energy Procurement for Large Consumers. *IEEE Transactions on Power Systems* **22**(2) 744–754.
4. Charnes, A. és W. W. Cooper. 1962. Programming with linear fractional functionals. *Naval Research Logistics Quarterly*, **9** 181–186.
5. Conejo, A. J., J. J. Fernández-González, N. Alguacil. 2005. Energy procurement for large consumers in electricity markets *IEE Proc.-Gener. Transm. Distrib.*, **152**(3) 357–364.
6. Conejo, A. J., M. A. Plazas, R. Espinola, A. B. Molina. 2005b. Day-ahead electricity price forecasting using the wavelet transform and ARIMA models *IEEE Transactions on Power Systems*, **20**(2) 1035–1042.
7. Dantzig, G. B. 1998. *Linear Programming and Extensions*. Princeton University Press, Princeton, NJ.
8. EFET: European Federation of Energy Traders 2012. <http://www.efet.org/>
9. energiadiszkont.hu Fogalomtár 2012. <http://energiadiszkont.hu/fogalomtar>
10. eNKER Energetikai Fogalomtár 2012. <http://www.enker.hu/glossary>
11. Füzi, Á. és G. Mádi-Nagy. 2012. Flow-based Capacity Allocation in the CEE Region: Sensitivity Analysis, Multiple Optima, Real Income. *RUTCOR Research Report 8-2012*.
12. Hippert, H. S., C. E. Pedreira, R. C. Souza. 2001. Neural networks for short-term load forecasting: a review and evaluation. *IEEE Transactions on Power Systems* **16**(1) 44–55.
13. HUPX 2010. <http://www.hupx.hu>
14. HUPX GYIK 2012. <http://www.hupx.hu/communications/faq.html>
15. KAPAR, Kapacitás Aukciós rendszer. Felhasználói kézikönyv 2012. [http://www.mavir.hu/documents/10258/23440/KAPAR\\_Felhasznaloi\\_kezikonyv\\_v2.pdf](http://www.mavir.hu/documents/10258/23440/KAPAR_Felhasznaloi_kezikonyv_v2.pdf)



16. Karmarkar, N. 1984. A new polynomial-time algorithm for linear programming. *Proceedings of the sixteenth annual ACM symposium on Theory of computing* 302–311.
17. Kocsi A. Gy. 2008. *Árampiaci liberalizáció Magyarországon*. Szakdolgozat, BGF Külkereskedelmi Kar. [http://elib.kkf.hu/edip/D\\_13774.pdf](http://elib.kkf.hu/edip/D_13774.pdf)
18. Konno, H. és K. Fukaiishi. 2000. A branch and bound algorithm for solving low rank linear multiplicative and fractional programming problems. *Journal of Global Optimization* **18** 283–299.
19. Kuno, T. 2002. A branch-and-bound algorithm for maximizing the sum of several linear ratios, *Journal of Global Optimization* **22** 155–174.
20. Marossy, Z. 2010. *A spot villamosenergia-árak elemzése statisztikai és ökonofizikai eszközökkel*. Ph. D értekezés, Budapesti Corvinus Egyetem Közgazdaságtani Doktori Iskola. <http://phd.lib.uni-corvinus.hu/520/1/marossy-zita.pdf>
21. MOSEK 2012. <http://www.mosek.com/>
22. Paizs, L. 2008. Ösztönzési problémák a kiegyenlítő energia hazai piacán. In Valentiny Pál és Kiss Ferenc László (szerk.): *Verseny és Szabályozás 2007*. MTA KTI, 179–196.
23. Schaible S. 1977. A note on the sum of a linear and linear-fractional function *Naval Research Logistics Quarterly*, **24** (1977) 691–693.
24. Sugár A. 2011. *A piacsabályozás elméleti és gyakorlati aspektusai a közszolgáltató szektorokban, elsősorban az energiaszektor ársabályozása példáján*. Ph. D értekezés, Budapesti Corvinus Egyetem Közgazdaságtani Doktori Iskola. [http://phd.lib.uni-corvinus.hu/570/1/Sugar\\_Andras.pdf](http://phd.lib.uni-corvinus.hu/570/1/Sugar_Andras.pdf)
25. Varga, L., Z. Korényi, T. Hirsch. 2006. Balancing Energy Planning in Wind Generation using Probabilistic Weather Prediction, *WSEAS Transactions on Power Systems*. **7**(1) 1243–1251.
26. Ye, Y. 1997. *Interior point algorithms: theory and analysis*. Wiley-Interscience Series In Discrete Mathematics And Optimization.

## ELECTRICITY PURCHASING STRATEGY TOOLS

Hedging the forecast open positions by standard futures products is an important part of the purchasing strategy of electricity traders. The electricity power product is defined by its temporal availability. E.g., the monthly peak product is available from 8 am to 8 pm on weekdays of the given month. The products are typically measured in MW. Three models are discussed: one of them is quantity-based the other two are cost-based. The second cost-based model takes the uncertainty of consumption forecasting into account. While the first two models are linear programming (LP) problems, the third model has a non-convex, fractional objective function and linear constraints. Here, one of the most effective algorithms is fitted to the model, and described in details. Some technological issues of the implementation and the performance of the implemented algorithms are also discussed.



## HATÉKONYSÁG ÉS STABILITÁS NAGYFESZÜLTSGŰ ELEKTROMOS HÁLÓZATOKBAN: EGY JÁTEKELMÉLETI MEGKÖZELÍTÉS<sup>1</sup>

CSERCSEK DÁVID – KÓCZY Á. LÁSZLÓ  
*Pázmány Péter Katolikus Egyetem – MTA KRTK*

A nagyfeszültségű elektromos hálózatokat használó piaci szereplők a fogyasztás-termelés szempontjából kiegyenlített, úgynevezett mérlegkörökbe tömörülnek. A rendszerirányító a fogyasztók/generátorok fogyasztási, illetve termelési igényei, a hálózat fizikai tulajdonságai és a mérlegkörök egyensúlyi feltételének figyelembevételével maximalizálja a hálózat összforgalmát. Az egyes csomópontok kapacitásának kihasználtsága jelentősen függhet attól, hogy milyen mérlegkörök jönnek létre. Dolgozatunkban egy idealizált egyenáramú teljesítményáramlási- és egy partíciós függvény alakú kooperatív játékelméleti modell segítségével vizsgáljuk a mérlegkörök létrejöttét, stabilitását és a kialakuló mérlegkör-rendszer hatékonyságát. Megmutatjuk, hogy a mérlegkörök alakulása kihat az egész hálózatra és az így fellépő externáliák lehetnek pozitívak, vagy negatívak is. A kialakult partíciók stabilitását a mag partíciós függvény alakú játékokra való kiterjesztése, a rekurzív mag segítségével vizsgáljuk. Bár a játék nyilvánvalóan kohézív, bemutatjuk, hogy nem szükségszerűen szuperadditív. A szuperadditivitás hiánya gátolhatja a hatékonyság szempontjából kívánatos teljeskörű együttműködés kialakulását.

*Kulcsszavak és -kifejezések:* Generátor áthangolás, kooperatív játékelmélet, partíciós függvény alakú játék, rekurzív mag

### 1 Bevezetés

A liberalizált villamosenergia-piacokat a szereplők, azaz a fogyasztók, termelők és a hálózatkezelők bonyolult kölcsönhatása jellemzi. A hálózat működése közben az általános hatékonyságot és a társadalmi jólét maximálását az egyes szereplők egyéni érdekei, így például a befektetők profitra való törekvése mellett kell megvalósítani [8,21]. A szereplők stratégiai kölcsönhatásának sokszínűsége mellett azonban nem szabad elfeledkeznünk hálózati áramokat meghatározó fizikai törvényekről sem.

Dolgozatunkban az elektromos hálózat fizikai és gazdasági jellemzőit összességükben, komplex rendszerként vizsgáljuk; vizsgálódásunk célja elsősorban a

<sup>1</sup>A szerzők köszönik Hangos Katalin, Raisz Dávid, Divényi Dániel és két anonim bíráló észrevételeit, a Magyar Tudományos Akadémia Lendület Programjának (LP-004/2010) illetve az OTKA (NF 104706) támogatását. Beérkezett: 2012. február 4. E-mail: [csercsik@itk.ppke.hu](mailto:csercsik@itk.ppke.hu), [koczy@krtk.mta.hu](mailto:koczy@krtk.mta.hu).

mérlegkörök létrehozására, illetve esetleges felbomlására, vagy átalakulására vonatkozó ösztönzők jobb megértése. A villamosenergia-piac általunk használt egyszerűsített modellje figyelembe veszi a hálózat és a résztvevők fizikai és gazdasági jellemzőit, de jelen formájában eltekint a hálózat használatának költségétől. Ez a modell megfogalmazható egy partíciós függvény alakú kooperatív játékként [30], ami alkalmas a koalíciók létrejöttében részt nem vevő, de közvetve érintett játékosokra ható externáliák explicit modellezésére is.

Bár dolgozatunk nem az első, amely a nagyfeszültségű elektromos hálózatok közgazdasági vonatkozásaival foglalkozik, a korábbi kutatások elsősorban a verseny, a piaci befolyás, illetve szabályozás témakörével foglalkoztak [4,16,25,6], és csak nagyon kevesek vizsgálták a piacot és az energia-átvitel kérdésében a komplex formában [21]. Ismereteink szerint csak [19] és [2] alkalmazott játékelméleti megközelítést a kérdések vizsgálatában.

[19] statikus kooperatív modellek segítségével kereste az átviteli játék rövid távú egyensúlyát, illetve a szállítási kapacitást választva döntési változónak nonkooperatív Stackelberg játékokkal vizsgálta a hosszútávú hatásokat. [2] szállítási veszteségekkel is számolva egy szabad hozzáférésű szállítási módszerrel maximálja a profitokat. Az áramlási viszonyok elemzésére egy Nash alkujátékot használnak, melyben az optimális árakat a felek egyéni érdekei határozzák meg. [27] a szállítás tervezését és üzemeltetését tárgyaló többváltozós probléma megoldásához használt játékelméleti megközelítést. Valószínűleg [15] alkalmazott először kooperatív játékelméleti eszközöket, nevezetesen a magot és a Shapley értéket, a villamos hálózati beruházások során minden fél számára elfogadható kifizetések meghatározásához. [14] a kernelt alkalmazta villamos hálózati bővítések költségeinek megfelelő elosztásához. Az utóbbi években egyre több szerző nyúl kooperatív játékelméleti eszközökhöz a hálózatbővítés témakörében, legyen szó akár központosított, akár decentralizált környezetről [7,9,8].

A mi megközelítésünk alapjaiban tér el a felsorolt munkáktól, hiszen a partíciós függvény alaknak köszönhetően mi explicit módon kezeljük az externáliákat.

A dolgozat további részében először leírjuk a hálózat fizikai tulajdonságait, majd kifejtjük azt az egyszerűsített modellt, amiből már levezethető a partíciós függvény alakú játék. Bemutatjuk a rekurzív magot, amit később a stabil kifizetés-konfigurációk azonosítására használunk. A cikk fő része 3. fejezet, melyben példák segítségével mutatjuk be, hogy a vizsgált hálózatok, illetve a belőlük levezetett partíciós függvény alakú játék milyen —időnként meglepő— tulajdonságokkal is rendelkezhet, melyek részben magyarázhatják, hogy egyes szereplők miért nem a szokásos várakozásaink szerint viselkednek. Végül röviden összefoglaljuk az eredményeket és bemutatjuk a problémakör nyitott kérdéseit.

## 2 Elméleti alapok

### 2.1 A nagyfeszültségű elektromos hálózat egyszerű modellje

Az elektromos hálózat egy  $n$  csomópontból és az azokat összekötő  $m$  élből, azaz vezetékből álló gráffal írható le.

Mielőtt rátérnénk a modell bemutatására, fontos tisztázni a hálózattal kapcsolatos feltételezéseket és megkötéseket. A villamos energia-átviteli hálózat viselkedése meghatározott szabályokat követ. Kirchhoff törvényei<sup>2</sup> többek közt kimondják, hogy egy csomópontban a be- és kimenő áram azonos nagyságú. Váltóáramú rendszerekben, mint például a nagyfeszültségű elektromos hálózatok [31], a törvények a komplex test felett írhatók fel, ezért mi egyenáramú terhelési modellt (DC load flow model) használunk, ami a gyakorlatban azt jelenti, hogy a hálózati teljesítményáramok viselkedését leíró törvények hasonlóak az egyenáramú hálózatok villamos áramait leíró Kirchhoff törvényekhez. Azon tulajdonság, hogy a betáplálási és energiafelhasználási értékeknek a teljes hálózatra nézve egyensúlyban kell lenniük, a fenti törvényekből következik. Amíg a legtöbb útválasztási (routing) problémában ezek megszokott tulajdonságok, az elektromos energia-átviteli hálózatoknak még egy fontos tulajdonsága van: az elektromos energiát nem lehet meghatározott útvonalon küldeni, áramlását a hálózat tulajdonságai valamint a betáplálási és felhasználási értékek egyértelműen meghatározzák.

Egy vezetéken megvalósuló energiaáram a vonal „admittanciájával” arányos. Mivel a hálózati modellünk idealizált, veszteségmentes, az ellenállás, más szóval az impedancia valós része feltételezéseink szerint nulla, a vezetékek reaktanciája határozza meg a vonalakon megvalósuló energiaáramokat. A matematikai képletekben a szuszceptanciát használjuk, ami az admittancia képzetes része, ez azt kvantifikálja, milyen könnyen folyik az áram egy adott vonalon. Ahogy korábban szóba került, az admittancia (ami esetünkben azonos a szuszceptanciával) értékek, valamint a betáplálási és felhasználási mennyiségek ismeretében az elektromos hálózatot leíró gráf éleinek teljesítményárama meghatározható.

A szuszceptancia mellett minden vonal energiaátviteli kapacitása adott: A teljesítményáram az adott vonalon sosem haladhatja meg ezt az értéket.

A jelölések és a matematikai formalizmus [26] és [7] mintáját követi, részletesen lásd [11]. A hálózat generátorait az aktuálisan termelt és maximálisan termelhető energiamennyiségekkel jellemezzük, a fogyasztókat pedig az aktuális és ideális (maximális) esetben fogyasztott energiával.

$A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  jelöli a hálózat gráfjának csomópont-él incidenciamátrixát. Az élek irányítatlanok, a teljesítményáram bármely irányban folyhat. Az energiaátviteli kapacitásvektor  $Q \in \mathbb{R}^m$  határozza meg az  $m$  darab él maximális energiaátviteli kapacitását. A  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  szuszceptancia mátrix  $B_{ij}$  az  $ij$  vonal szuszceptanciáját adja meg, míg  $B^D \in \mathbb{R}^{m \times m}$  mátrix a főátlóban tartalmazza a szuszceptancia értékeket.

<sup>2</sup>Egy játékelméleti értelmezésért l. [24]!

Ezen jelölésekkel az energia átviteli rendszer a következő egyenletekkel írható le [7]:

$$AQ = P, \quad (1)$$

ahol  $Q \in \mathbb{R}^m$  jelöli a (hatásos) teljesítményáram vektort, és  $P \in \mathbb{R}^n$  a teljesítmény betáplálási vektor. Hogy meghatározzuk a hálózat azon konfigurációját, ahol a teljes átvitt teljesítmény maximális, a következő LP problémát kell megoldanunk:

$$\min_P s_P^T P, \quad \text{ahol } |B^D A^T B^+ P| \leq \bar{Q}, \quad \mathbf{1}P = 0 \quad (2)$$

ahol  $B^+$  a  $B$  mátrix Moore-Penrose pszeudóinverze,  $s_P$  a csomópontokhoz tartozó előjelek vektora, ami  $-1$  fogyasztókra és  $+1$  generátorokra, valamint  $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^n$  egy egyesekből álló vektort jelöl. Az egyenlőtlenség típusú korlátozások a vonalak maximális terhelését írják le, míg az egyenlőség típusú korlátozás teljes hálózatra felírt energia egyensúly. Az abszolút értékek egyszerű megfontolásokkal eltávolíthatóak az LP problémából [20]. Ahogy később látni fogjuk, a játékosok koalíciói további egyenlőség típusú korlátozásokat definiálnak majd.

## 2.2 Az energiaátviteli hálózaton játszott kooperatív játék

Jelölje  $N$  a játékosok halmazát amely generátorokból és fogyasztókból áll.  $N$  részhalmazai a koalíciók. Egy partíció a játékosok halmazának diszjunkt koalíciókra való felbontása. Jelölje  $\Pi(S)$   $S \subseteq N$  partícióinak halmazát.

Egy partíciós függvény formában adott játék [30] egy  $(N, V)$  pár, ahol  $V : \Pi \rightarrow (2^N \rightarrow \mathbb{R})$  a partíciós függvény, mely karakterisztikus függvényeket  $(v : 2^N \rightarrow \mathbb{R})$  rendel minden  $\mathcal{P} \in \Pi(N)$  partícióhoz.

Piaci szempontból az energiaátviteli hálózatok úgynevezett mérlegkörökből épülnek fel, melyek termelők és fogyasztók olyan halmazai, melyekre a betáplált és fogyasztott energia egyensúlyban van. Ezek a mérlegkörök lesznek a koalícióink. Ez azt jelenti továbbá, hogy a termelésnek és a fogyasztásnak egyenlőnek kell lennie egy koalíción belül. A nemtriviális koalíciók legalább egy generátort és egy fogyasztót tartalmaznak.

A generátorok az energiatermelésben, a fogyasztók a fogyasztásban érdekeltek a termelési/fogyasztási kapacitásuk határáig. Így egy koalíció értéke a termelt és fogyasztott energia összegével arányos, ami a teljes eladásra került energiamennyiség kétszerese.

Az aktuális fogyasztási és termelési értékeket egy hálózatkezelő határozza meg, aki a hálózat által átvitt teljes energiát maximalizálja a termelési/fogyasztási és átviteli kapacitási korlátok alapján. Ha a koalíciós struktúra (partíció) megváltozik, az új optimum más termelési/fogyasztási értékeket engedélyez, és a generátorok termelését át kell hangolni. A mérlegkörbe történő szerveződés lehet exogén hatások eredménye, de egy liberalizált piacon feltételezhető, hogy a csomópontoknak megfelelő termelők/fogyasztók szabadon dönthetnek mérlegkörük elhagyásáról, más mérlegkörökhöz történő

csatlakozásról, illetve más játékosokkal új mérlegkör létrehozásáról. Jegyezzük meg, hogy a mérlegkörök átalakulása az elektromos hálózatra magára nincs hatással!

Kitüntetett figyelmet érdemelnek azon partíciók, ahol semmi sem motiválja az efféle átstrukturálódást, ahol a játékosok egy koalíciója sem érdekelt más koalíció létrehozásában. A mag [17] egy karakterisztikus formában adott játék azon kifizetéseit tartalmazza, ahol egy koalíció sem profitál az elhajlásból. Más szóval a mag tartalmaz minden olyan  $x$  kifizetést, hogy minden  $S \subseteq N$ -re  $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$ .

Egy partíciós függvény formában megadott játékban az, hogy egy koalíció profitál-e az elhajlásból, a kialakuló partíciótól függ. Az  $\alpha$ -mag [1] azt feltételezi, hogy egy koalíció csak akkor hajlik el, ha a többiek viselkedésétől függetlenül magasabb kifizetésre számíthat. A mag stabilitás [29] engedélyesebb: egy koalíció akkor hajlik el, ha az indukált partíciók valamelyike magasabb kifizetést biztosít számára. A  $\gamma$ -mag esetén [5] a koalíció az egyénileg legjobb válaszokkal szembesül. Jelen esetben a *rekurzív mag* [22,23] koncepcióját használjuk, ami megengedi a megmaradó reziduális játékosoknak, hogy a (reziduális játék) mag-stabil formációját alkossák, mielőtt a kifizetések kiértékelésre kerülnek. A következőben felidézünk a definíciót.

Először definiáljuk a *maradékjátékot* a  $R \subset N$ ,  $R \neq N$  halmaz felett. Jelölje  $\Pi(S)$  az  $S$  halmaz partícióit. Tegyük fel hogy  $\overline{R} = N \setminus R$  létrehozta  $\overline{\mathcal{P}}_R \in \Pi(\overline{R})$ -t. Ekkor a  $(R, V_{\overline{\mathcal{P}}_R})$  maradékjáték az  $R$  játékos halmaz felett adott partíciós függvény formában adott játék, melynek partíciós függvénye  $V_{\overline{\mathcal{P}}_R}(C, \mathcal{P}_R) = V(C, \mathcal{P}_R \cup \overline{\mathcal{P}}_R)$ .

**1. Definíció** (Rekurzív mag, Kóczy [22].) *Egy játékos esetén a rekurzív mag triviális. Most tegyük fel hogy definiáltuk a  $C(N, V)$  rekurzív magot minden  $|N| < k$  játékos esetén. Egy kifizetés vektorból és egy  $\mathcal{P} \in \Pi(N)$  partícióból álló párt  $\omega = (x, \mathcal{P})$  kimenetelnek hívunk. Jelöljük az  $(N, V)$  kimeneteleinek halmazát  $\Omega(N, V)$ -vel. Ekkor  $|N|$  játékos esetén egy  $(x, \mathcal{P})$  kimenetel dominált, ha létezik egy  $Q$  koalíció, mely a  $\mathcal{P}_Q$  partíciót és  $(y, \mathcal{P}_Q \cup \overline{\mathcal{P}}_Q) \in \Omega(N, V)$  kimenetelt hozza létre, úgy, hogy  $y_Q > x_Q$  és ha  $C(\overline{Q}, V_{\overline{\mathcal{P}}_Q}) \neq \emptyset$ , akkor  $(y_{\overline{Q}}, \overline{\mathcal{P}}_{\overline{Q}}) \in C(\overline{Q}, V_{\overline{\mathcal{P}}_Q})$ .  $(N, V)$   $C(N, V)$  rekurzív magja a dominálatlan kimenetelek halmaza.*

A rekurzív mag jól definiált, de lehet üres.

## 3 Eredmények

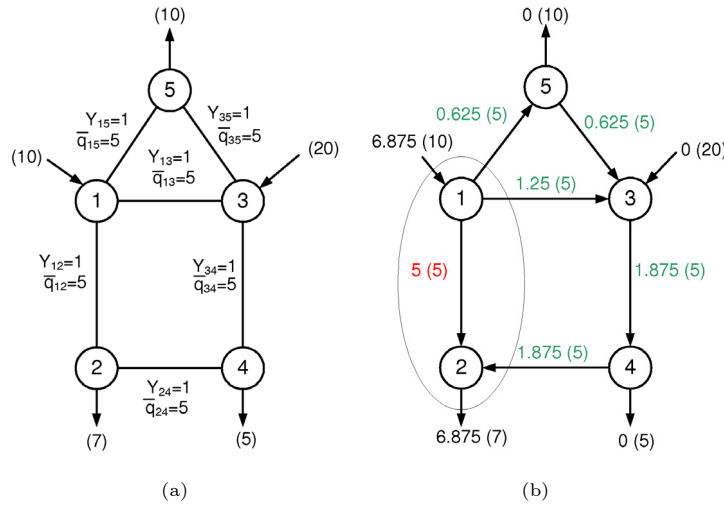
### 3.1 Az externáliák természetéről

A mérlegkörök formálódása okozta externáliákat tanulmányozzuk a hálózaton. Partíciós függvény formájú játékokban az externáliák teljesen természetesek, pontosan azért használjuk ezt a játékformát, hogy az externáliák, amiket a karakterisztikus függvény típusú játékok nem tudnak leírni, kezelhetőek legyenek.

Azt mondjuk, hogy egy koalícióalkotás *pozitív externáliákat* indukál, ha  $V(S_i, \mathcal{P}^+) \geq V(S_i, \mathcal{P})$  minden  $S_i$  koalícióra és  $\mathcal{P} = \{S_1, \dots, S_k, T_1, T_2\}$  és  $\mathcal{P}^+ = \{S_1, \dots, S_k, T\}$  partíciókra, ahol  $T = T_1 \cup T_2$ . Hasonlóan: Az externáliák negatívak, ha a fordított irányú egyenlőtlenség teljesül. Más szóval, egy externália pozitív, ha két koalíció összeolvadása növeli a többi kifizetését, és negatív, ha csökkenti. Természetesen lehetnek partícióink, ahol a fentiek egyike sem teljesül; a koalícióalkotás kétirányú hatással rendelkezik.

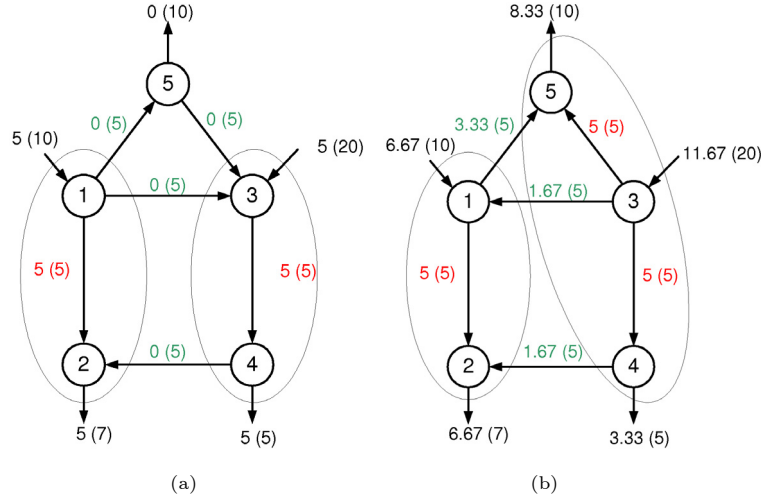
Két mérlegkör összeolvadása annyiban változtatja meg a (2) egyenletben felírt LP problémát, hogy a két individuális mérlegkörre vonatkozó egyensúly helyett egy egyenlőség típusú korlátozás adódik az összeolvadt mérlegkörre. Nyilvánvalóan az összeolvadás előtti optimum még mindig lehetséges, de az új LP problémának általánosságban nem optimuma. Általában az összeolvadt mérlegkörök növelni tudják a rájuk nézve eredő teljes energiaforgalmat, tovább terhelve a hálózatot. A többi játékost, akik a megmaradó átviteli kapacitást használják, a hálózatkezelő esetenként a globális átviteli optimum érdekében fogyasztásuk és termelésük visszafogására utasíthatja. Ez csökkenti ezen koalíciók kifizetését, ezért ebben az esetben negatív externáliáról beszélünk.

A következőben viszont arra láthatunk egy (általános) példát, hogy bizonyos koalíciók összeolvadása hasznos is lehet a többi játékos számára.



1. ábra. (a) A  $\Gamma^5$  játék alapstruktúrája és vonalparaméterei, és (b) teljesítményáramai az  $\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$  koalícióstruktúra esetén. A csomópontokhoz tartozó zárójelben lévő számok a maximális termelési kapacitást (befelé mutató nyíl) illetve az optimális (maximális) fogyasztási értékeket (kifelé mutató nyíl) jelölik. Az élekhez tartozó számok jelölik az aktuális áramlási értékeket, míg a zárójelben található számok a vonalak teljesítményátviteli kapacitásait.





2. ábra. Optimális teljesítményáramok az  $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5\}$  és  $\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}$  koalíciós struktúrák esetében

**1. Példa.** Tekintsük az 5 csomópontból és az 1. ábrán látható hálózatból álló  $\Gamma^5$  játékot. 3 koalíciós struktúrát vizsgálunk.

**Teljesítményáramok az  $\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$  koalíciós struktúra esetén.** A teljes átvitt energia maximumához tartozó áramok az 1(b). ábrán láthatók. Ezt az esetet referenciának tekintjük, ahol a 3-as, 4-es és 5-ös játékosok triviális egytagú koalíciókat formálnak. A  $v$  karakterisztikus függvény könnyedén meghatározható:

$$v(\{1, 2\}) = 13.75 \quad v(\{3\}) = v(\{4\}) = v(\{5\}) = 0. \quad (3)$$

**Teljesítményáramok az  $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5\}$  koalíciós struktúra esetén.** 2(a). ábra mutatja az áramlási viszonyokat abban az esetben, ha a 3-as és 4-es játékos koalícióba olvad. Figyeljük meg hogy az  $\{1, 2\}$  koalíció negatív externáliát „élvezhet”: a kifizetése alacsonyabb, mint előző esetben. Ahogy látható, ebben az esetben a hálózat horizontálisan kiegyensúlyozott, nincs teljesítményáramlás, kivéve az 1, 2 és 3, 4 csomópontokat összekötő vonalakat. A  $v$  értékek ebben az esetben a következőképpen alakulnak:

$$v(\{1, 2\}) = 10 \quad v(\{3, 4\}) = 10 \quad v(\{5\}) = 0. \quad (4)$$

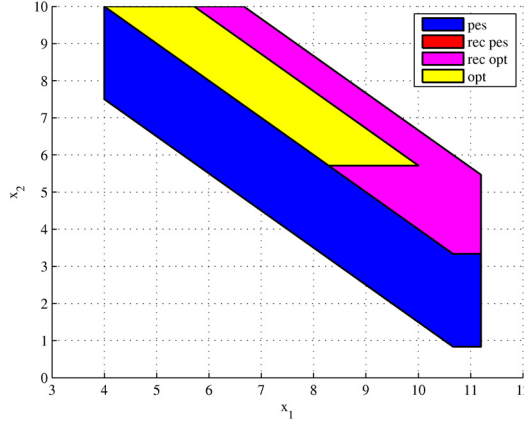
**Teljesítményáramok az  $\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}$  koalíciós struktúra esetén.** Ha a  $\{3, 4\}$  koalíció összeolvad az 5-ös játékosal, az eredő konfiguráció a 2(b). ábrán látható átviteli viszonyokat eredményezi. Ez az eset az  $\{1, 2\}$  koalícióra ható pozitív externáliaként szolgál. Ebben az esetben a hálózat horizontális élei is kihasználásra kerülnek, ami magasabb transzmissziós értéket enged meg az  $\{1, 2\}$  koalíciónak is, amellet hogy az egész hálózat teljes átvitelét növeli. A  $v$  értékek ebben az esetben a következők lesznek

$$v(\{1, 2\}) = 13.33 \quad v(\{3, 4, 5\}) = 23.33. \quad (5)$$

A teljes partíciós függvény a függelékben található.

### 3.2 Stabilitás

Hogy megvizsgáljuk az első ábrán szereplő  $\Gamma^5$  játék tulajdonságait, meghatározzuk a magot.



3. ábra. A  $\Gamma^5$  játék magjainak vetülete az  $x_3 = x_4 = x_5 = 0$  síkra. A mag-stabil kimeneteket tartalmazó rekurzív magok egybeesnek és az  $\alpha$ -mag belsejében találhatóak.

A mag meghatározásához mindenképp először kiszámítjuk, milyen kifizetésre számíthatnak az egyes koalíciók az elhajlás után, majd a kapott értékeket összevetjük a játékosok egyéni kifizetéseivel minden lehetséges kifizetés-konfigurációban. Drámaian különböző eredményt kapunk attól függően, hogy a szélsőségesen optimista mag-stabilitást [29] vagy a szélsőségesen pesszimista  $\alpha$ -magot [1] használjuk. Az  $\alpha$ -mag négydimenziós, míg a mag-stabil kimenetek halmaza sík, ráadásul az  $\alpha$ -mag kétdimenziós vetületénél is jóval kisebb. Ez a különbség jelentősen csökkenthető a rekurzív mag használatával. Az alábbiakban a pesszimista rekurzív mag kiszámítását mutatjuk be lépésről-lépésre, de az optimista rekurzív mag [22] hasonló számítása —ebben a játékban— pontosan ugyanezt az eredményt hozza. Az, hogy a két megközelítés ebben az esetben egybeesik, egyben azt is jelenti, hogy a kapott halmaz független a viselkedési feltételezésektől és a rekurzív mag pontosan meghatározza a (magi értelemben) stabil kimenetek halmazát. A 3. ábra mutatja a különböző mag-fogalmakra kapott halmazok kétdimenziós vetületét.

Rátérve a pesszimista rekurzív mag számítására elmondhatjuk, hogy míg a mag kiszámítása általában egy igen összetett feladat, ez a konkrét példa viszonylag egyszerű számítást tesz lehetővé.

Mindenképp először vegyük észre, hogy a játék szuperadditív, azaz két koalíció összeolvadása —feltéve, hogy a többi koalíció változatlan marad— az összeolvadó koalíció összértékének növekedésével jár (1. 2. táblázatot, illetve a definíciók részleteit a 3.3. fejezetben).

A szuperadditivitás nem általános érvényű, mint ezt később látni fogjuk, de ha igaz, lényegesen leegyszerűsíti a rekurzív mag kiszámítását. Így például

elgendő az egykoalíciós elhajlásokat vizsgálni, hiszen ennek semelyik partíciója nem érhet el magasabb kifizetést. További megkötésként csak a legalább egy generátort és legalább egy fogyasztót tartalmazó koalíciók érdekesek. Nem szükséges tehát egyszemélyes koalíciók elhajlását vizsgálni. A négy-személyes koalíciók értéke egyértelmű, hiszen a maradék, ötödik játékos csak egyféle partíciót tud létrehozni. A háromfős koalíciók esete még mindig egyszerű, bár kevésbé triviális: a megmaradó két játékos vagy létrehoz egy koalíciót, vagy külön marad. A már említett szuperadditivitásnak köszönhetően minden nemtriviális esetben koalíciót fognak létrehozni. Triviális esetben mindkét megmaradt játékos generátor, vagy fogyasztó és elvileg ilyenkor mindkét partícióval számolni kell, azaz a partíciós függvényben máshova kell nyúlni, de a gyakorlatban ennek nincs jelentősége, hiszen a koalíció nem terheli a hálózatot.

Természetesen az elhajló párok esete a legérdekesebb, hiszen a maradék-játékosok öt különböző partíciót is létrehozhatnak. Ha a maradékmag nem üres, a már említett szuperadditivitás miatt a maradékjátékosok mind koalíciót alkotnak, azaz a partíciójuk egyértelmű. Az, hogy a maradékmagok nem üresek, esetünkben nem nyilvánvaló, de a kiegyensúlyozottsági feltétel ellenőrzésével megállapítható [3,28].

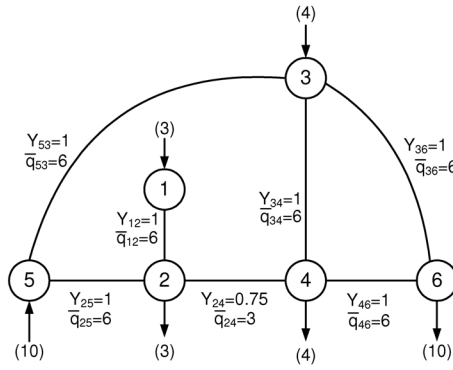
$S$	$v(S)$	$S$	$v(S)$
$\emptyset$	0	{1, 2, 3, 4, 5}	40
{1}	0	{2, 3, 4, 5}	28.8
{2}	0	{1, 3, 4, 5}	30
{3}	0	{1, 2, 4, 5}	20
{4}	0	{1, 2, 3, 5}	34
{5}	0	{1, 2, 3, 4}	20
{1, 2}	13.33	{3, 4, 5}	23.33
{1, 3}	0	{2, 4, 5}	0
{1, 4}	10	{2, 3, 5}	23.33
{1, 5}	20	{2, 3, 4}	20
{2, 3}	14	{1, 4, 5}	20
{2, 4}	0	{1, 3, 5}	20
{2, 5}	0	{1, 3, 4}	10
{3, 4}	10	{1, 2, 5}	20
{3, 5}	20	{1, 2, 4}	20
{4, 5}	0	{1, 2, 3}	14

1. táblázat. Karakterisztikus függvény a  $\Gamma^5$  játék alapján

Az 1. táblában megadott karakterisztikus függvény alapján kiszámíthatjuk a magot. Az egyenlőtlenség-rendszer egyszerűsítése után megállapítjuk, hogy a mag az alábbi pontok halmaza: A  $x_3 = x_4 = x_5 = 0$  síkra való vetülete a (4; 10), (6.67; 10), (10.67; 3.33), (11.2; 3.33), (11.2; 5.47) csúcsok által közrefogott politóp, illetve  $x_3 = x_1$ ,  $x_4 = 20 - x_1 - x_2$  és  $x_5 = 40 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4$ .

A magot megvizsgálva láthatjuk, hogy az egyensúlyi kifizetések elég tág határok között mozognak. A játékban egy profitábilis koalíciónak szüksége van generátorokra és fogyasztókra, hiszen a koalíció értékét közösen állítják elő. Az energia átviteli korlátok és a hálózat egyéb fizikai jellemzői megakadályozzák, hogy az egyik, vagy másik fél kizsákmányolja a másikat. Ez

egyben azt is jelenti, a termelők és fogyasztók közötti profitmegosztás esetleges szabályozása mellett is megmaradhat a mérlegkörök stabilitása.



4. ábra. A  $\Gamma^6$  játék alapvető struktúrája, él- és csúcsparaméterei

### 3.3 Szuperadditivitás

Ha  $\mathcal{P}$  és  $\mathcal{Q}$  partíciók és a  $\mathcal{P}$  minden  $P$  eleme részhalmaza a  $\mathcal{Q}$  valamely  $Q$  elemének, akkor azt mondjuk, hogy  $\mathcal{P}$  finomítása  $\mathcal{Q}$ -nak. Ebben az esetben szuperadditivitás alatt azt értjük, hogy  $v(P_1, \mathcal{P}) + \dots + v(P_k, \mathcal{P}) \leq v(Q, \mathcal{Q})$ .

A szuperadditivitás itt egy természetes tulajdonság, mivel két vagy több koalíció egyesülése felold néhány korlátozást a (2)-ben felvázolt LP problémában, így növeli a teljes energiaátvitelt. A következőkben viszont meg fogjuk mutatni hogy az így keletkező előnyök nem feltétlenül maradnak az összeolvadt koalíciókon belül, sőt az összeolvadók akár rosszabbul is járhatnak.

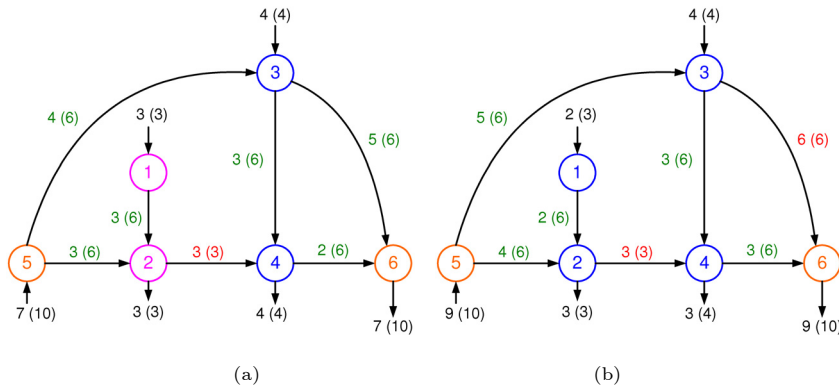
Egy 6 csomópontból álló hálózaton demonstráljuk, hogy a játék nem feltétlenül szuperadditív, és lehetséges, hogy ha két koalíció összeolvad, pozitív externáliát generálnak, miközben az ő eredő átvitelük csökken.

**2. Példa.** Tekintsük a  $\Gamma^6$  partíciós függvény formájú játékot a 4. ábrán vázolt hálózaton.

**Teljesítményáramok az  $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}$  partícióra.** Az 5(a). ábra szemlélteti a teljesítményáramlási viszonyokat az  $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}$  koalíciós struktúra esetén

$$v(\{1, 2\}) = 6 \quad v(\{3, 4\}) = 8 \quad v(\{5, 6\}) = 15.5 .$$

Figyeljük meg hogy a különféle koalíciók különféle módon használják a hálózatot! Az  $\{1, 2\}$  és  $\{3, 4\}$  "vertikális" koalíciók, ezért csak függőleges irányban terhelik a hálózatot. A horizontális átvitel az  $\{5, 6\}$  koalícióhoz kapcsolódik.



5. ábra. Energiabetáplálási és fogyasztási értékek az  $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}$  (a) alábra) és  $\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6\}$  (b) alábra) partíciók esetén

**Teljesítményáramok az  $\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6\}$  partícióra.** Az  $\{1, 2\}$  illetve  $\{3, 4\}$  koalíciók összeolvadása után kialakuló áramlási viszonyok az 5(b). ábrán láthatóak.

$$v(\{1, 2, 3, 4\}) = 13 \quad v(\{5, 6\}) = 17.5 .$$

Ahogy említettük, két koalíció összeolvadása csökkenti az LP problémában szereplő korlátozások számát, ezzel növelve a teljes eladott energiamennyiséget. Ebben a példában viszont a növekedést az  $\{5, 6\}$  koalíció élvezzi, melynek a kifizetése 2-vel növekszik. Ezzel egy időben az összeolvadásban szereplő  $\{1, 2\}$  és  $\{3, 4\}$  koalíciók elveszítik teljes kifizetésük egy részét, szubadditív esetet mutatva.

Mi ennek a szubadditivitási példának a háttere? Ha két koalíció összeolvad, az indukált korlátozások száma csökken. Az új konfigurációban viszont képesé válhatnak olyan vonalakat terhelni, amiket eddig nem. Ebben az esetben a kritikus vonal a 2-es és a 4-es csomópont között található.

A koalíciók rekonfigurációjáig csak a harmadik generátor-fogyasztó pár ( $\{5, 6\}$ ) használta ezt a vonalat vízszintes irányú átvitelre. Emellett viszont ez a koalíció az 5-3-5 vonalat is használja párhuzamosan az 5-2-4-6-tal az átvitelre, ahol a szűk keresztmetszet a 2-4-es vonal.

Ahogy a korlátozások feloldódnak, az  $\{1, 2, 3, 4\}$  koalíciót „rákényszerítheti” a független hálózati operátor, hogy terheljék a 2-4 vonalat jobbról balra irányuló átvitelrel (ami a 2-4 vonal tehermentesítését eredményezi az  $\{5, 6\}$  koalíció szempontjából, aki ezt a vonalat ellentétes irányú átvitelre használja). Továbbá, mivel az  $\{5, 6\}$  koalíció átvitt energiájának csak egy része folyik a 2-4 vonalon, az  $\{5, 6\}$  koalíció a teljes átvitelét tovább növelheti, nagyobb mértékben, mint ahogy az  $\{1, 2, 3, 4\}$  koalíciónak vissza kellett fognia a teljes forgalmát a 2-4 vonal megfelelő kiegyensúlyozásának érdekében.

Ezen módon a hálózat által átvitt teljes energiamennyiség növekszik, amíg az  $\{1, 2, 3, 4\}$  csomópontok forgalma csökken.

Ha kiszámítjuk ezen példa esetén a rekurzív magot, azt tapasztaljuk, hogy nincsenek stabil partíciók, ami azt mutatja, hogy a szubadditivitás a teljes együttműködés elérésének korlátja lehet.

## 4 Következtetések

### 4.1 Összefoglalás

Kifejlesztettünk egy modellt, mely leírja a játékosok csoportba szerveződését egy elektromos energiaátviteli hálózat esetén. Az elektromos energia átvitelével kapcsolatban több gyakorlati probléma merül fel: nem lehet a teljesítményt tetszőleges úton szállítani a rendelkezésre álló távvezetékeken, így előfordulhat, hogy míg az egyik vonalon kapacitás felesleg mutatkozik, a másik párhuzamos vonal túlterhelődik. Ennek leírására egy nagyon egyszerű DC load flow modellt használunk.

Minden csomópontnak jellemzője a kereslet vagy kínálat, és a független hálózatkezelő a hálózat fizikai tulajdonságai, valamint a mérlegkörök alapján határozza meg a termelési és fogyasztási értékeket annak érdekében hogy a hálózatra nézve a teljes átvitt energia maximális legyen. Mivel a mérlegkörök keletkezése többféle externáliát okoz ilyen hálózatokban, a modellt partíciós függvény alakú játékkal írjuk le.

Először az externáliákat vizsgáltuk meg. Kiderült, hogy a természetes negatív externáliák mellett az egyesülés pozitív externáliát is eredményezhet. Ezen kívül 6 játékos esetén (5(b). ábra) példát mutattunk arra, hogy a pozitív externália akár meg is haladhatja a teljes növekményt, így az egyesülő felek rosszul is járhatnak az egyesüléssel. Ennek tükrében a szubadditivitást súlyos problémának tekintjük, ami alááshatja a hálózati kooperációt.

Végül a rekurzív magot használva tanulmányoztuk a stabilitást. Amíg megmutattuk, hogy a fenti energiaátviteli játék magja nem szükségszerűen nemüres, az 5 játékost tartalmazó példa megmutatja, hogy ez a fogalom milyen jól meg tudja jósolni a játékosok viselkedését: amíg az —optimista— mag stabilitás és a —pesszimista—  $\alpha$ -mag között alapvető különbség van, a rekurzív mag nem függ efféle viselkedési feltételezésektől.

### 4.2 A hálózat hazánkban

Hazánkban a nagyfeszültségű villamos hálózatot a MAVIR (Magyar Villamosenergia-ipari Átviteli Rendszerirányító ZRt.) üzemelteti, szerepe a modellünkben a rendszerirányítóéna felel meg. Modellünkhöz hasonlóan a MAVIR célja a valóságban is a legnagyobb forgalom bonyolítása. A valóságban a fogyasztók számára a használt villamos energia ára is fontos döntési szempont; mi az árkülönbségektől, illetve közvetve a termelés eltérő költségeitől eltekintünk. Az irányítás egyszerűsítése végett a valóságban is mérlegkörökbe szerveződik a termelés és a fogyasztás. Természetesen nem az egyes háztartások, hanem közüzemi szolgáltatók, jelentős ipari fogyasztók alkotják a mérlegköröket, ők a játék tulajdonképpeni játékosai.

### 4.3 További kérdések

A bemutatott energiapiaci modell felállításakor elsősorban az egyszerűségegre törekedtünk, de ahhoz, hogy a modell könnyen kezelhető maradjon, bizonyos

kompromisszumokra kényszerültünk. Az alábbiakban kitérünk három olyan általánosításra, melyek révén közelebb kerülhetünk a valós hálózatokhoz, viszont könnyen előfordulhat, hogy a komplexebb matematikai apparátus elfedi az egyszerű intuíciót. Az összetettebb modellek várhatóan nem módosítják cikkünk főbb eredményeit, de kézenfekvő a további munkánk során ezek vizsgálatára is kitérni.

Az első a kereslet napi és szezonális változása. Ha egy mérlegkör létrejön, hosszú távon is jól kell teljesítenie, változó fogyasztási profilok mellett. Még ha a generátorok áthangolásának —szubsztanciális— költségeit, és a játékot, amit a mérlegkörök ezzel kapcsolatosan játszanának, nem vesszük is figyelembe, a probléma nem triviális.

A második probléma ehhez kapcsolódik. Egy hálózatnak megbízhatóan kell működnie. Ha egy vonal túlterhelődik, hibája láncreakció-szerűen továbbterjedhet a hálózaton. Konzervatív tervezési módszerek segíthetnek megoldani ezen problémát, és az ehhez kapcsolódó bizonytalanságot figyelembe vehetjük explicit módon *kockázati mértékek* használatával (l. [12,22,23] és hivatkozásait!), vagy, ha a játékot eleve TUU játékként (átruházható hasznosságú játékok bizonytalansággal, [18]) adjuk meg.

Végül a fizikai hálózat is változhat különféle stratégiai megfontolások függvényében. Más szóval, megengedhetjük a játékosoknak, hogy vonalakat építsenek vagy bontsanak le. A hálózat stabilitás nem új témakör és [9,8] már használt kooperatív játékelméleti eszközöket energiaátviteli hálózatok tanulmányozására. A mi modellünk viszont meglehetősen különbözik az említett szerzők műveiben használttól, így reméljük, hogy új eredményeket hozhat ezen a területen is.

Az elektromos energia igényének állandó növekedése és a megújuló energiaforrások felé fordulás az energiaátvitelt az elsődlegesen aktuális kérdések között tartja. A nemzeti energiaátviteli hálózatok növekvő mértékben kapcsolódnak egymáshoz. Játékelméleti modellünk segíthet kiértékelni a bővítés, használat és üzemeltetés stratégiai aspektusait.

## Függelék. Az 1(a). ábrán vázolt hálózaton játszott játék partíciós függvénye

$\mathcal{P}$	$V$	$\mathcal{P}$	$V$
1,2,3,4,5	40	1,4 + 2,3,5	10 , 23.33
1,2,3,4 + 5	20 , 0	1,4 + 2,3 + 5	10 , 10 , 0
1,2,3,5 + 4	34 , 0	1,5 + 2,3,4	20 , 20
1,2,3 + 4,5	14 , 0	1 + 2,3,4,5	0 , 28.8
1,2,3 + 4 + 5	14 , 0 , 0	1 + 2,3,4 + 5	0 , 19 , 0
1,2,4,5 + 3	20 , 0	1,5 + 2,3 + 4	19.71 , 14 , 0
1,2,4 + 3,5	20 , 20	1 + 2,3,5 + 4	0 , 25.71 , 0
1,2,4 + 3 + 5	17.5 , 0 , 0	1 + 2,3 + 4,5	0 , 14 , 0
1,2,5 + 3,4	20 , 10	1 + 2,3 + 4 + 5	0 , 14 , 0 , 0
1,2 + 3,4,5	13.33 , 23.33	1,4,5 + 2 + 3	20 , 0 , 0
1,2 + 3,4 + 5	10 , 10 , 0	1,4 + 2,5 + 3	10 , 0 , 0
1,2,5 + 3 + 4	20 , 0 , 0	1,4 + 2 + 3,5	10 , 0 , 18.57
1,2 + 3,5 + 4	14 , 17.71 , 0	1,4 + 2 + 3 + 5	10 , 0 , 0 , 0
1,2 + 3 + 4,5	13.75 , 0 , 0	1,5 + 2,4 + 3	15.7143 , 0 , 0
1,2 + 3 + 4 + 5	13.75 , 0 , 0 , 0	1 + 2,4,5 + 3	0 , 0 , 0
1,3,4,5 + 2	30 , 0	1 + 2,4 + 3,5	0 , 0 , 15.71
1,3,4 + 2,5	10 , 0	1 + 2,4 + 3 + 5	0 , 0 , 0 , 0
1,3,4 + 2 + 5	10 , 0 , 0	1,5 + 2 + 3,4	17.14 , 0 , 10
1,3,5 + 2,4	20 , 0	1 + 2,5 + 3,4	0 , 0 , 10
1,3 + 2,4,5	0 , 0	1 + 2 + 3,4,5	0 , 0 , 24.29
1,3 + 2,4 + 5	0 , 0 , 0	1 + 2 + 3,4 + 5	0 , 0 , 10 , 0
1,3,5 + 2 + 4	20 , 0 , 0	1,5 + 2 + 3 + 4	15.71 , 0 , 0 , 0
1,3 + 2,5 + 4	0 , 0 , 0	1 + 2,5 + 3 + 4	0 , 0 , 0 , 0
1,3 + 2 + 4,5	0 , 0 , 0	1 + 2 + 3,5 + 4	0 , 0 , 15.71 , 0
1,3 + 2 + 4 + 5	0 , 0 , 0 , 0	1 + 2 + 3 + 4,5	0 , 0 , 0 , 0
1,4,5 + 2,3	20 , 14	1 + 2 + 3 + 4 + 5	0 , 0 , 0 , 0 , 0

2. táblázat. Az 1(a). ábrán vázolt hálózaton játszott játék partíciós függvénye

## Irodalom

1. Aumann, R. J. és B. Peleg (1960): „Von Neumann-Morgenstern Solutions to Cooperative Games Without Side Payments,” *Bulletin of the American Mathematical Society*, 66, 173–179.
2. Bai, X., S. Shahidehpour és V. Ramesh (1997): „Transmission Analysis by Nash Game Method,” *IEEE Transactions on Power Systems*, 12, 1046–1052.
3. Bondareva, O. N. (1963): „Some Applications of Linear Programming Methods to the Theory of Cooperative Games,” (oroszul) *Problemy Kybernetiki*, 10, 119–139.
4. Cardell, J. B., C. C. Hitt és W. W. Hogan (1997): „Market power and strategic interaction in electricity networks,” *Resource and Energy Economics*, 19(1-2), 109–137.
5. Chander, P., és H. Tulkens (1997): „The core of an economy with multilateral environmental externalities,” *International Journal of Game Theory*, 26(3), 379–401.
6. Chen, Y., B. Hobbs, S. Leyffer és T. S. Munson (2006): „Leader-follower equilibria for electric power and NO<sub>x</sub> allowances markets,” *Computational Management Science*, 3, 307–330.



7. Contreras, J. (1997): „A Cooperative Game Theory Approach to Transmission Planning in Power Systems,” Ph.D. thesis, University of California, Berkeley.
8. Contreras, J., G. Gross, J. M. Arroyo és J. I. Muñoz (2009): „An incentive-based mechanism for transmission asset investment,” *Decision Support Systems*, 47, 22–31.
9. Contreras, J. és F. Wu (1999): „Coalition formation in transmission expansion planning,” *IEEE Transactions on Power Systems*, 14, 1144–52.
10. Contreras, J. és F. Wu (2000): „A kernel-oriented algorithm for transmission expansion planning,” *IEEE Transactions on Power Systems*, 15, 1434–40.
11. Csercsik, D. és L. Á. Kóczy (2012): „Inefficiencies in a transmission game model of congested power networks,” Kézirat.
12. Csóka, P., P. J.-J. Herings és L. Á. Kóczy (2007): „Measures of Risk from a General Equilibrium Perspective,” *Journal of Banking and Finance*, 31(8), 2517–2534.
13. Csóka, P., P. J.-J. Herings és L. Á. Kóczy (2009): “Stable Allocations of Risk,” *Games and Economic Behavior*, 67(1), 266–276.
14. Evans, F., J. Zolezzi és H. Rudnick (2003): „Cost assignment model for electrical transmission system expansion: an approach through the Kernel theory,” *IEEE Transactions on Power Systems*, 18, 625–632.
15. Gately, D. (1974): „Sharing the Gains from Regional Cooperation: A Game Theoretic Application to Planning Investment in Electric Power,” *International Economic Review*, 15, 195–208.
16. Gilbert, R., K. Neuhoff és D. Newbery (2004): „Allocating Transmission to Mitigate Market Power in Electricity Networks,” *RAND Journal of Economics*, 35(4), 691–709.
17. Gillies, D. B. (1959): „Solutions to general non-zero-sum games,” in *Contributions to the Theory of Games IV*, ed. by A. W. Tucker és R. D. Luce, no. 40 in Annals of Mathematics Studies, pp. 47–85. Princeton University Press, Princeton.
18. Habis, H. és P. J. Herings (2011): „Transferable utility games with uncertainty,” *Journal of Economic Theory*, 146, 2126–39.
19. Hobbs, B. (1992): „Using game theory to analyze electric transmission pricing policies in the United States,” *European Journal of Operational Research*, 56, 154–171.
20. Kaltenbach, J. és L. Hajdu (1971): „Optimal Corrective Rescheduling For Power System Security,” *IEEE Transactions on power Apparatus and Systems*, 90, 843–851.
21. Kirschen, D. és G. Strbac (2004): *Fundamentals of Power System Economics*. John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, UK.
22. Kóczy, L. Á. (2007): „A recursive core for partition function form games,” *Theory and Decision*, 63(1), 41–51.
23. Kóczy, L. Á. (2009): „Sequential Coalition Formation and the Core in the Presence of Externalities,” *Games and Economic Behavior*, 66(1), 559–565.
24. Lange, F. és M. Grabisch (2009): „Values on regular games under Kirchoff’s laws,” *Mathematical Social Sciences*, 58(3), 322–340.

25. Neuhoff, K., J. Barquin, M. Boots, A. Ehrenmann, B. Hobbs, F. Rijkers és M. Vázquez (2005): „Network-constrained Cournot models of liberalized electricity markets: the devil is in the details,” *Energy Economics*, 27, 495–525.
26. Oren, S., P. Spiller, P. Varaiya és F. Wu (1995): „Folk Theorems on Transmission Access: Proofs and Counter Examples,” Working papers series of the Program on Workable Energy Regulation (POWER) PWP-023, University of California Energy Institute 2539 Channing Way Berkeley, California 94720-5180, [www.ucei.berkeley.edu/ucei](http://www.ucei.berkeley.edu/ucei).
27. Orths, A., A. Schmidtt, Z. Styczynski és J. Verstege (2001): „Multi-Criteria optimization methods for planning and operation of electrical energy systems,” *Electrical Engineering*, 83, 251–258.
28. Shapley, L. S. (1967): „On Balanced Sets and Cores,” *Naval Research Logistics Quarterly*, 14(4), 453–460.
29. Shenoy, P. P. (1979): „On Coalition Formation: A Game-Theoretical Approach,” *International Journal of Game Theory*, 8(3), 133–164.
30. Thrall, R. és W. Lucas (1963): „ $n$ -person games in partition function form,” *Naval Research Logistics Quarterly*, 10, 281–298.
31. Van Cutsem, T. és C. Vournas (1998): *Voltage Stability of Electric Power Systems*. Kluwer Academic Publishers.

#### EFFICIENCY AND STABILITY IN POWER TRANSMISSION NETWORKS: A GAME-THEORETIC APPROACH

Members of power transmission networks are organised into so-called balancing groups where the production and consumption is balanced. Taking the nodes' production/consumption capacities, the physical properties of the network and the equilibrium conditions for balancing groups into account the operator assigns production and consumptions rights to the nodes to maximise the total traffic. How well the nodes' capacities are used crucially depends on the partition into balancing groups. We study the formation, stability and efficiency of balancing groups in an idealised DC load model using a partition function form game approach. We show that the formation of balancing groups creates widespread externalities and these may be positive or negatives. We study the stability of the formed payoff configuration using the recursive core, a generalisation of the coalition structure core to partition function form games. While the game is naturally cohesive we show that superadditivity is not guaranteed. The absence of superadditivity may inhibit the formation of the grand coalition that would otherwise be desirable from an efficiency point of view.

VÉGTELEN SOKSZOR ISMÉTELT KISZERZŐDÉS<sup>1</sup>

BERDE ÉVA

*Budapesti Corvinus Egyetem*

A cikk a kormányzat és a vállalat közti végtelen sokszor ismételt kiszervezésekkel foglalkozik. Vizsgálati eszköztárát a nem teljes szerződések elméletéből kölcsönzi. A szakirodalmat felhasználva megmutatja, hogy létezik olyan fenyegetési stratégia, köznap szóhasználatával az adott szabályok esetén mindkét fél számára saját érdekében betartandó stratégia, ahol mind a vállalat, mind a kormányzat beruházásának értéke a társadalmilag optimális nagyság. Bebizonyítja, hogy annál valószínűbb, hogy mind a kormányzat, mind a vállalat a társadalmilag optimális beruházási szintet valósítja meg, minél nagyobb annak az esélye, hogy az adott vállalat kapja meg a következő periódusban is az ismétlődő munkafeladatot. Felhívja a figyelmet a szabályozó felelősségére az újabb szerződés valószínűségének indirekt meghatározásában.

Journal of Economic Literature (JEL) kód: C73, D02, D52, D86.

## 1 Bevezetés

Az elmúlt húsz-harminc évben egyes tevékenységek kiszervezése részévé vált nem csak a magán, hanem az állami szféra termelésének, illetve szolgáltatásának. Cikkék és tanulmányok sokasága állította, hogy az állami feladatok kiszervezése, kvázi piacosítása, növeli a közösségi feladatok megoldásának hatékonyságát [4,8,15]. A 2000-es évektől kezdve az Európai Unió szabályai igen erősen ajánlják, ma már az állam esetében legtöbbször kötelezővé is teszik a kiszervezett feladatok kompetitív tendereztetését. Más földrészek országainak szabályozása, így Ausztrália vagy az USA törvényhozása is határozottan támogatja a kompetitív tendereket [1,5,6,17].

A tender útján elnyert munkák eredményességének megítélése előre rögzített, számszerűleg meghatározott kritériumok alapján történik, amibe nagyon nehéz bizonyos speciális minőségi mutatókat is belefoglalni [2]. Ráadásul a szerződéskötés és a munka végrehajtása, illetve végső megvalósulása közt eltelt időszakban általában számos előre nem látható körülmény merül fel, aminek vonatkozásban a megbízó joggal várhatná el a megbízott maximális lelkiismeretességét. Amikor azonban a tenderkiírásban nem szerepelnek ezek az esetek, akkor az előre rögzített kritériumok alapján történő ellenőrzés se tudja figyelembe venni az új körülményeket. Mindez fokozottan érvényes a szolgáltatásokra, melyek minőségét csak minden egyes szolgáltatási elem ismeretében lehet pontosan megítélni. Az egyszerű értékelésen túlmutatva, az

---

<sup>1</sup>Beérkezett: 2012. március 19. E-mail: [eva.berde@uni-corvinus.hu](mailto:eva.berde@uni-corvinus.hu).

újabb tenderek nyerteseinek kiválasztásakor is fontos lenne a már elvégzett feladatok minőségi ismérveinek figyelembe vétele. Az újabb feladatot végrehajtó vállalat tender útján történő kiválasztása különösen akkor ellentmondásos, ha többször ismétlődő tevékenységről van szó. Ilyenkor az előző alkalommal végzett munka minősége hasznos információt adhat arra vonatkozóan, hogy az újabb versenykiírásban melyik vállalatot hirdessék ki győztesnek. A tender döntési szempontjai közt azonban nem olyan egyszerű figyelembe venni a korábbi munkavégzés minőségét, mert a tenderek győzteseinek kiválasztásakor általában az alacsony költségek bizonyulnak a legfontosabb szempontnak. A minőséget illetően sokkal inkább az alapvető előírások teljesítését várják el, mintsem a jó referenciákat pontoznák. Ezt a problémát úgyis meg lehet kerülni, ha az államnak lehetőséget biztosítanak a kiszűzött partner közvetlen, és nem versenykiíráson keresztüli kiválasztására. A szerződő féllel történő közvetlen kapcsolatfelvétel sok esetben az érvényben levő törvények kijátszása, mégis vezethet jó eredményre. Hansen [10] pl. Dánia példáján mutatja meg, hogy az öregek gondozásában azok az esetek voltak hatékonyabbak, amikor a helyi adminisztráció közvetlenül választotta ki a gondozást ellátó vállalkozásokat, pedig ezzel tulajdonképpen törvényt szegtek. Természetesen a kiszűzött fél tenderen kívüli megválasztása visszaéléshez is vezethet, de a tenderen való részvételek esetében is időnként sok visszasság, pl. összejátszás figyelhető meg.

A közösségi pénzből finanszírozott feladatok tendereztetését inkább a 2000-es évek elején született irodalmak tartják jó megoldásnak. Yvrande-Billon [18] pl. egyértelműen kiáll a tendereztetés társadalmi hatékonyságot növelő tulajdonsága mellett, és pontosan abban lát problémát, hogy az inkumbens vállalatnak módjában áll megakadályozni az újabb versenytársak győzelmét. Ugyanakkor már a 2000-es években is több szerző kételyét fejezte ki a közösségi feladatok tendereztetésén keresztüli kiszervezésének univerzális hatékonyságát illetően. Obermann–Kostal [16] pl. ausztriai felmérések elemzésén keresztül jutott arra a következtetésre, hogy több érv hozható fel a szerződések harmadik félnek történő tenderen keresztüli kiszerveztetése ellen, mint mellette. Az ellenérvek közt szerepel a romló minőség és az aránytalanul hosszan elhúzódó kiválasztási és szerződéskötési időszak. Az 1990-es évek közepétől népszerűvé váló nem teljes szerződések elméletének, valamint az irányítási mechanizmusok tanulmányozásának eredményeként ma már ezen irányzatok megközelítéséből kiindulva is vizsgálható a kiszervezés hatékonysága (lásd pl. [7,14]). Bármely elmélet alapján vonjuk is le következtetéseinket, az elvégzendő feladat jellegének megfelelően esetenként a tendereztetés, máskor az állam saját, illetve hosszú távra kijelölt vállalati partnerén keresztüli feladatmegoldása bizonyul hatékonyabbnak. Jelen cikkben a nem teljes szerződések<sup>2</sup> megközelítésében vizsgáljuk a kiszervezés problémáját, azzal a plusz feltétellel, hogy időszakról időszakra újra szükségessé válik a munka elvégzése.

A cikk bemutatja, hogy a végtelen sokszor ismételt szerződések társadalmilag optimális beruházási szintjét eredményező egyensúlyi stratégiáját az

<sup>2</sup>[11] magyarra lefordított változata a nem teljes szerződésekre a „hiányos szerződés” kifejezést alkalmazza.

állami feladatok kiszzerződése esetén is alkalmazni lehet. A 2. rész felvázolja a modell alapfeltevéseit, a 3. rész a játék egyetlen periódusbeli lejátszását mutatja be, majd az ismételt játékkal a 4. rész foglalkozik. Az 5. rész azt mutatja meg, hogy az ismételt kiszzerzések esetében a társadalmilag optimális beruházási szint elérése mennyiben függ annak a valószínűségétől, hogy az előző időszakban optimális beruházási szintet megvalósító vállalat a következő időszakban ismét hasonló szerződést kap. Itt bizonyítom be, hogy minél kisebb ez a valószínűség, annál nagyobb  $\delta$  diszkonttényező szükséges ahhoz, hogy a társadalmilag optimális beruházási szint megvalósuljon. A 6. részben az olvasó példát talál az együttműködést biztosító  $\delta$  értékekre. Itt arra is felhívom a figyelmet, hogy nagyon kis újraszzerződési valószínűség esetén nem is számíthatunk az optimális beruházási értékek megvalósítására.

Mielőtt elkezdeném a modell ismertetését, foglaljuk össze a közgazdasági problémát: egy bizonyos szolgáltatást (vagy jószágot) közvetlenül vagy közvetve az állam kénytelen nyújtani<sup>3</sup>, mert pl. közjóság jellegű termékről vagy szolgáltatásról van szó, melynek direkt magán finanszírozása nem megoldott. Az itt felmerülő kérdés, hogy a szolgáltatást házon belül nyújtsák (a termelést házon belül végezzék), vagy szerződtesék ki. Amennyiben kiszzerződtesik, akkor az újabb dilemma a magánvállalkozás kiválasztásának formájára vonatkozik. Ez tipikusan olyan kérdés, melynek megválaszolásakor érdemes felhasználni a nem teljes szerződések elméletének vizsgálati eszközeit. Akármilyenek ugyanis a tulajdonosi viszonyok, először mindig megkötik a szerződést az alapvető feladatok elvégzésére, amely meghatározott erőfeszítést igényel a szereplőktől. A feladat teljesítése, és a bevételek realizálódása azonban csak egy későbbi időpontban történik. Nem lehet mindent egy harmadik fél által kikényszeríthető szerződésbe foglalni, mert egyrészt sok esetben a feladat maga olyan bonyolult, hogy lehetetlen teljesen pontosan leírni, másrészt pedig a szerződéskötés és a teljesítés közt eltelt idő alatt sok változás történhet. Azt, hogy ilyen körülmények közt a felek mennyire érdekeltek a társadalmilag optimális, vagy ahhoz legalább a lehető legközelebb levő erőfeszítés kifejtésében, nagyban befolyásolja, hogy a munkavégzés milyen tulajdonviszonyok közt zajlik. (A nem teljes szerződések elméleti alapján kifejlesztett elemzési módszerek bemutatását lásd pl. [11]-ben és [12]-ben, valamint az elmélet újabb elemeit [13]-ban.)

A kérdéses eszköztárat néhány kivételtől eltekintve eddig csak véges számú szerződéskötés esetén alkalmazták. Az egyik kivétel, Halonen, aki ezekkel a módszerekkel tárgyalja a végtelen sokszor ismétlődő szerződések esetét [9]. Az idézett cikk problémaköre közel áll az általam elemzett esethez, mert a felek végtelen sokszor kötnek azonos feltételekkel szerződést. Amikor a kormányzat (állam) végtelen sokszor kiszzerződteset egy ugyanolyan típusú feladatot, akkor a [9]-féle probléma egy speciális esetével találkozunk. Ilyenkor nem csak az optimális ösztönzési keretek megtalálása a cél, hanem a szerződéskötés módjának a meghatározása (versenykiírás, azaz tender, vagy közvetlen partnerkiválasztás), illetve tenderkiírás esetén a hatékonyságot legjobban segítő

---

<sup>3</sup>Itt most nem foglalkozunk azzal a kérdéssel, milyen úton lehetne közvetlenül a fogyasztókkal finanszírozni a szolgáltatást.

kritériumrendszer megfogalmazása is feladat. A szerződéskötés módját vizsgálva külön érdemes odafigyelni arra az esetre, amikor az állam ugyanazzal a vállalattal köt időről időre újabb szerződést. Ilyenkor ugyanis az állam közelíti azt a megoldást, mintha a saját vállalata végezné el a munkát. Az alábbiakban bemutatom, hogy a nem teljes szerződések eszköztára milyen iránymutatást adhat ezeknek a feladatoknak az opitmális teljesítéséhez, azaz mit javasol annak az érdekében, hogy a feladatokat társadalmilag hatékony szinten tudják megoldani.

## 2 A modell

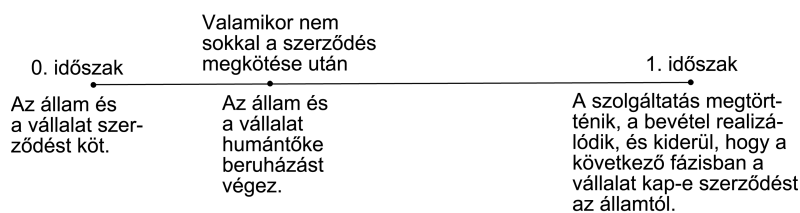
A játék kiindulásakor [9]-re támaszkodom<sup>4</sup>, majd az általa bemutatott modellt fejleszttem tovább a kisserződés speciális körülményeinek figyelembe vételével. A játék egyetlen lejátásakor, akármelyik periódust is tekintjük, a periódus elején *ex ante*, azaz a periódus nulladik időszakában, mind a vállalat, mind a kormányzat humántőke beruházást kell hogy végezzen, ha azt akarják, hogy munkakapcsolatuk működjön. A vállalatnak meg kell ismernie azokat az ügyfeleket, akiket a kormányzat küld hozzá, igényeiknek megfelelő szolgáltatási módszert kell kidolgoznia, tisztába kell jönnie a kormányzat aktuális elvárásaival, az érvényes kormányzati szabályozással, stb. A kormányzatnak össze kell gyűjtenie az ügyfeleket, vagy legalább meghatározni azt, kik vehetik igénybe a szolgáltatást (pl. azokat, akik egy munkaerő-piaci képzésen vesznek részt) a vállalat részére, ki kell alakítania a vállalat felé az aktuális időszak értékelési rendszerét, képeznie kell saját alkalmazottait, hogy alkalmasak legyenek a vállalattal való hatékony kapcsolattartásra, stb. A kormányzat  $v_g$ , a vállalat  $v_f$  értékű beruházást végez. A beruházás költsége  $c(v_i)$ , ahol  $i = f$  vagy  $g$ . A beruházás költségére vonatkozóan a következő feltételezéseket alkalmazzuk. Amennyiben  $v \in [0, V]$  ahol  $V > 0$ , akkor:

$$\begin{aligned} c(v) &\geq 0 \quad \text{és} \quad c(0) = 0, \quad c \text{ kétszer differenciálható} \\ c'(v) &> 0 \quad \text{és} \quad c''(v) > 0 \quad v \in (0, V) \text{ belső pontok esetén} \\ \lim_{v_i \rightarrow 0} c'(v) &= 0 \\ \lim_{v_i \rightarrow V} c'(v) &= \infty, \end{aligned}$$

illetve, ha ezen utolsó feltétel nélkül a következőkben felírt modellek optimális teljes beruházási szintje,  $v$  belső pont, akkor ez a feltétel elhagyható. Az állam (szinonim értelemben kormányzat) és a vállalat közti szerződés megkötése után a két fél kapcsolata olyan, mint [9]-ben a két vállalat kapcsolata, a termeléshez szükséges eszköz közös tulajdona esetén. A játék adott lejátásában a munka befejezéséig az állam és a vállalat egymás nélkülözhetetlen partnerei. Az állam ugyan óriási nehézségek árán találhat másik magán szolgáltatót, de ezzel megszegi a szerződést, mely bírságot eredményez. Az új

<sup>4</sup>[9] pedig Hart and Moore [12] cikkéből indult ki.

partnerrel való kapcsolat kialakítása emellett komoly elsüllyedt költségekkel jár. A vállalat is elállhat speciális körülmények közt a szerződéstől, de ez számára elmaradt bevételt, elsüllyedt költségeket, és az új területre való belépés nagy kvázi fix költségét –mely szintén elsüllyedt költség– vonja maga után. A periódus indulásakor végzett humántőke beruházását pedig egy külső kapcsolatban egyikük se tudja értékesíteni. Modellemben ily módon az adott periódus 0. időszaka után közvetlen végzett beruházás az 1. időszakban csak akkor eredményez bevételt, ha az állam és a vállalat az 1. időszakban is együttműködnek. A játék adott periódusban felvázolt időbeli ütemezését az 1. ábra mutatja.



1. ábra. A játék egyetlen periódusbeli lejátszásának időbeli ütemezése

Mint ahogy az 1. ábrán is látható, a felek a periódus 0. időszakában kötnek szerződést. Mivel a humántőke beruházás rendkívül összetett, ezt nem tudják úgy szerződésbe foglalni, hogy egy harmadik fél által kikényszeríthető legyen. A kikényszeríthetőséget az is akadályozza, hogy a 0. és az 1. időszak közt előre nem látható események következhetnek be. Az 1. időszakban azonban mind a vállalat, mind a kormányzat részére egyértelműen kiderül, hogy mekkora értékben végzett beruházást a másik.

Feltesszük, hogy mind a vállalat, mind a kormányzat közömbös a kockázattal szemben. Amennyiben a vállalat nem kap újabb szerződést a kormányzattól, akkor egy másik területen kell munkát keresnie. Ehhez azonban olyan befektetésre van szüksége, amely a szóban forgó területet elhagyva nem nyerhető vissza, amit a továbbiakban kapcsolat-specifikus elsüllyedt költségnek nevezünk. Feltesszük, ez az elsüllyedt költség arányos azzal az értékkel, amit a jelenlegi iparágban a humántőke beruházással átlagosan előállít. Vagyis ha a humántőke beruházással  $v_f$  értéket teremt, akkor annak csak egy meghatározott részét használja fel most, mert amennyiben a következő időszakban kénytelen egy másik területen dolgozni, akkor várható értékben épp a mostani beruházás teremtette pénzüsszeget kell kvázi fix költségként megfizetnie. Amennyiben  $\pi$  annak a valószínűsége, hogy a vállalat a következő periódusban ismét szerződést kap az államtól, akkor ez a kapcsolat-specifikus elsüllyedt költség  $(1 - \pi) * v_f$ . A megmaradt bevételt tekintve  $\pi * v_f$  ami elkölthetően a rendelkezésére áll. A mostani bevétel és profit (illetve a bevételek és profitok átlaga) tehát a vállalkozás méretét jelzi, és ez az a szint, amit egy másik területen is tartani szeretne. Az újabb területen végzett szolgáltatás vagy termelés azonban mindenképpen egy induló beruházást igényel, amit korábbi bevételeiből tud fedezni.

Feltesszük, hogy a kormányzat számára is van elsüllyedt költsége a kapcsolatnak, amennyiben a következő fázisban más vállalattal köt szerződést: meg kell ismernie a számára munkát végző vállalat viselkedési attitűdjét, a vállalathoz igazodó felügyeleti rendet kell kialakítania, stb. Ezért a vállalathoz hasonló módon a kormányzat is csak maximum  $(1 - \pi) * v_g$  összeggel rendelkezhet az általa teremtett beruházási értékből. A periódus végi elosztási feltételek miatt azonban még ez sem az a bevétel, amivel szabadon gazdálkodhat.

Feltesszük ugyanis, ugyanúgy, ahogy [12], hogy a vállalat és a kormányzat a humántőke beruházás eredményeképp az 1. időszakban a keletkezett bevétel költségmentes alkuval osztják el. Az 1. időszakra azonban a közvetlen a 0. időszak után végzett beruházás költsége már egy realizált költség, amit utólag nem tudnak felosztani egymás közt. Csak a bevételen, pontosan a bevétel  $\pi$ -szeresén osztoznak, mégpedig az aktuális alkupozíciójuknak megfelelően Nash-alkuval. Az aktuális alkupozíciót szimmetrikusnak tekintve, épp felezik a keletkezett bevételeket. Azt is feltesszük, hogy a következő fázisra a humántőke beruházás kvázi fix költséget felülmúló része már elamortizálódik, ezért a következő fázisban az újabb körülményeknek megfelelő új humántőke beruházást kell végezni.

### 3 Az egyidőszaki játék

A vállalat és a kormányzat célja, hogy átlagosan minél nagyobb profitszintet érjenek el. Ehhez azzal is kalkulálniuk kell, hogy a következő periódusban a mostanitól különböző területen, illetve a mostanitól különböző partnerrel kell majd dolgozniuk, aminek induló költségét a jelenlegi bevételéből kell fedezniük. Ezért a játék egyetlen periódusában a vállalat és a kormányzat célja, hogy az adott periódusbeli profitjukat (hasznosságukat) maximalizálják, de az adott periódusban ennek átlagosan csak egy meghatározott részét tudják felhasználni. A profitmaximalizálási problémát társadalmi szempontból meghatározó összefüggés:  $v_i - c(v_i) \xrightarrow{v_i} \max$ , ahonnan

$$1 - c'(v_i^*) = 0, \quad (i = f, g). \quad (1)$$

Az (1) egyenletben  $v_i^*$  a társadalmilag legjobb beruházások által teremtett értéket jelöli. (Az adott periódusban azonban ennek csak  $\pi$ -szeresét használnák fel a szereplők.) A beruházás hasznosítására egyik félnek sincs külső lehetősége, a többletet, ahogy már korábban is láttuk, az ilyen esetekben szokásos Nash-alkuval osztják el, 50:50%-ban (lásd pl. [12]). Ezeket a feltételeket ismerve, a felek profitmaximalizálási problémája:  $\frac{v_i}{2} + \frac{v_i}{2} - c(v_i) \xrightarrow{v_i} \max$ , ahonnan

$$\frac{1}{2} - c'(v_i^p) = 0, \quad (i = f, g). \quad (2)$$

A (2) egyenletben a  $v_i^p$  az egyéni optimumokat jelöli. A  $v(\cdot)$  függvényre vonatkozó feltételek következtében  $v_i^* > v_i^p$ , mind a vállalat, mind a kormányzat kevesebb humántőke beruházást végez, mint ami társadalmilag optimális lenne. Ez a tipikus akadályozási probléma (angolul "hold up problem").



## 4 Az ismételt játék

Ebben a részben [9] gondolatmenetét követve látni fogjuk, hogy az előző rész játékát folyamatosan ismételve, létezik olyan fenyegető stratégia (angolul „trigger strategy”), melynek segítségével a társadalmilag optimális beruházási szintek minden periódusban történő megvalósítása egyensúlyi stratégiát alkot. [9] azonban nem foglalkozott azzal az esettel, amikor a szerződés egy állami feladat magánvállalatnak történő kiszereződését jelenti. Én megmutatom, hogy ilyenkor is el lehet érni a társadalmilag optimális beruházási szintet, de a fenyegető stratégia eredményessége nagyban függ attól, hogy milyen valószínűséggel számíthat a feladatát társadalmilag optimális beruházási szinttel teljesítő vállalat arra, hogy a következő periódusban is vele, és nem egy másik vállalattal köt szerződést a kormányzat.

A fenyegető stratégia előírása az  $i$  ( $i = f, g$ ) szereplő részére<sup>5</sup>:

1. Az 1. periódusban végezz  $v_i^*$  értékű beruházást, és kövesd a  $(P_f^*, P_g^*)$  nettó bevételelosztást (kifizetéselosztást)<sup>6</sup>.
2. Amennyiben az 1, 2,  $\dots$ ,  $t-1$ -edik periódusban mindig  $(P_f^*, P_g^*)$  volt az elosztás, és  $v_i^*$  értékű a partnered beruházása, akkor a  $t$ -edik periódusban te is  $v_i^*$  értékű beruházást végezz, és kövesd az  $(P_f^*, P_g^*)$  elosztást.
3. Amennyiben a  $t$ -edik periódusban vagy  $v_i \neq v_i^*$ , vagy az elosztás a  $t-1$ -edik periódusban nem egyezik meg  $(P_f^*, P_g^*)$ -gal, akkor alkalmazd a  $t, t+1, \dots$ -edik periódusokban a  $(P_f^N, P_g^N)$  elosztást, és ezekben a periódusokban már mindig  $v_i^N$  értékű beruházást végezz. A  $P_f^N$  és  $P_g^N$  a statikus Nash-egyensúlyi kifizetésekre, a  $v_i^N$  pedig a statikus Nash-egyensúlyi beruházási értékekre utal.

A beruházásban való csalás dominálja az elosztásban való csalást, mert az adott periódusban bármelyik fél úgy érhet el maximális bevételt, ha már a beruházásban is csal, miközben a partner még az optimális szintű beruházást valósítja meg. A fenyegetési stratégia leírásához definiáljuk  $T^*$ -ot.

$$T^* = \frac{(P_g^d - P_g^p)[P_f^d + c(v_f^*)] + (P_f^d - P_f^p)[\pi v_f^* + \pi v_g^* - P_g^d - c(v_g^*)]}{(P_f^d - P_f^p) + (P_g^d - P_g^p)} \quad (3)$$

A fenyegető stratégia  $(P_f^*, P_g^*)$  kifizetése:

$$(P_f^*, P_g^*) = [(T^* - c(v_f^*)), (\pi v_f^* + \pi v_g^* - T^* - c(v_g^*))]. \quad (4)$$

A (4) kifizetések mellett a vállalatnak, illetve a kormányzatnak akkor éri meg nem csalnia, ha

$$\frac{1}{1-\delta}[T^* - c(v_f^*)] \geq P_f^d + \frac{\delta}{1-\delta}P_f^p. \quad (5)$$

<sup>5</sup>A fenyegető stratégia leírását, és az optimális diszkonttényező kiszámítását lásd részletesebben [9]-ben

<sup>6</sup>A szóban forgó nettó bevétel elosztását –a kifizetéselosztást– lásd később.

A kormányzat ösztönzési feltétele pedig:

$$\frac{1}{1-\delta}[\pi v_f^* + \pi v_g^* - T^* - c(v_g^*)] \geq P_g^d + \frac{\delta}{1-\delta} P_g^p. \quad (6)$$

A  $P_i^d$  az eltérési (csalási) stratégiával kapott kifizetéseket, a  $P_i^p$  pedig a büntetéssel kapott kifizetéseket jelöli. A büntetési stratégia kifizetése megegyeznek az egyszeri játék Nash-egyensúlyi kifizetéseivel. (Minden kifejezésben  $i = f$ , vagy  $g$ .) A  $\delta$  az ún. diszkonttényező értéke.

Az (5) és (6) egyenlőtlenségekből kifejezve  $\delta$  értékét, a kooperációhoz a diszkonttényezőnek legalább akkorának kell lennie, mint az alábbi (7) és (8) egyenlőtlenség jobb oldalán álló kifejezés értéke

$$\delta \geq \frac{P_f^d - T^* + c(v_f^*)}{P_f^d - P_f^p}, \quad (7)$$

$$\delta \geq \frac{P_g^d - \pi v_f^* - \pi v_g^* + T^* + c(v_g^*)}{P_g^d - P_g^p}. \quad (8)$$

Az optimális  $T^*$  mind a vállalatnak, mind a kormányzatnak kiegyensúlyozott ösztönzést ad. A (7) alapján nem csökkenthető tovább  $T^*$  értéke, a (8)-nak megfelelően pedig nem növelhető tovább. Ily módon a (3)-ban meghatározott  $T^*$  épp  $\delta$  legkisebb olyan értékét biztosítja, amikor még mind a vállalat, mind a kormányzat a társadalmilag optimális beruházást végzi el.

## 5 Az együttműködést biztosító diszkonttényező az újabb szerződéskötés valószínűségének függvényében

Ebben a részben azt mutatom meg, hogy az együttműködést biztosító minimális diszkonttényező értéke hogyan függ annak a valószínűségétől, hogy a vállalat a következő periódusban is szerződést kap a kormányzattól a szóban forgó tevékenység elvégzésére. Feltesszük, hogy mind a vállalatnak, mind a kormányzatnak nagy értékű büntetést kell fizetnie, amennyiben nem teljesíti a szerződésben foglaltakat. A profitmaximalizáló vállalatnak és a kormányzatnak eleve is érdeke a szerződésben foglaltak teljesítése, a kilátásba helyezett büntetés azonban tovább növeli annak az esélyét, hogy még véletlenül se történjen szerződésszegés. Mint azonban láttuk, a megkötött szerződés nem teljes, így nyitva hagyja azt a kérdést, hogy mekkora lesz a humántőke beruházás. Modellünkben ugyan se a társadalmilag optimális beruházás, se az egyszeri játék esetén a vállalat, illetve a kormányzat optimális beruházása nem függ attól a kapcsolat-specifikus elsüllyedt költségtől, amit az új területen kell majd a vállalatnak fizetnie (illetve amit az új szerződéses partner miatt a kormányzatnak kell magára vállalnia), az azonban, hogy egy bizonyos értékű beruházás végeredményben mekkora kifizetést eredményez a játékban résztvevő feleknek, már függ az elsüllyedt költségektől. Minél kisebb annak

a valószínűsége, hogy az adott vállalat a következő periódusban is tendergyőztes lesz, vagy esetleg más módon ismét hasonló szerződéshez jut a kormányzattól, annál nagyobb mindkét résztvevő számára az elsüllyedt költség. Az elsüllyedt költség gyakorlatilag azt biztosítja, hogy amennyiben a fennálló kapcsolat megszűnik, a vállalat és a kormányzat átlagosan akkor is hasonló nagyságú profitot, illetve hasznosságot lesz képes realizálni, mert az új területen, illetve az új partnerrel is hasonlóan jövedelmező termelési feltételeket tud megvalósítani.

Az egyszerűbb tárgyalás érdekében feltesszük, hogy a vállalat és kormányzat feltételei szimmetrikusak, költségfüggvényük megegyezik:  $c_f(\cdot) = c_g(\cdot)$ . A költségfüggvények azonossága további azonosságokat eredményez, ennek megfelelően jelölésrendszerünk is egyszerűsödik. Elhagyjuk a vállalatra vagy a kormányzatra utaló alsó indexet, így a társadalmilag optimális humántőke beruházás jelölése mindkét szereplő esetében  $v^*$ , az egyéni optimális beruházás pedig  $v$ . Jelöljük viszont, hogy milyen  $\pi$  melletti eltérési kifizetésről ( $P_\pi^d$ ), illetve büntetési kifizetésről ( $P_\pi^p$ ) van szó.

A szimmetrikus feltételek mellett:

$$\delta = \frac{P_\pi^d - \pi v^* + c(v^*)}{P_\pi^d - P_\pi^p}. \quad (9)$$

További átalakításokkal belátható, hogy

$$\delta = -1 + 2 \frac{c(v^*) - c(v)}{\pi \cdot (v^* - v)}. \quad (10)$$

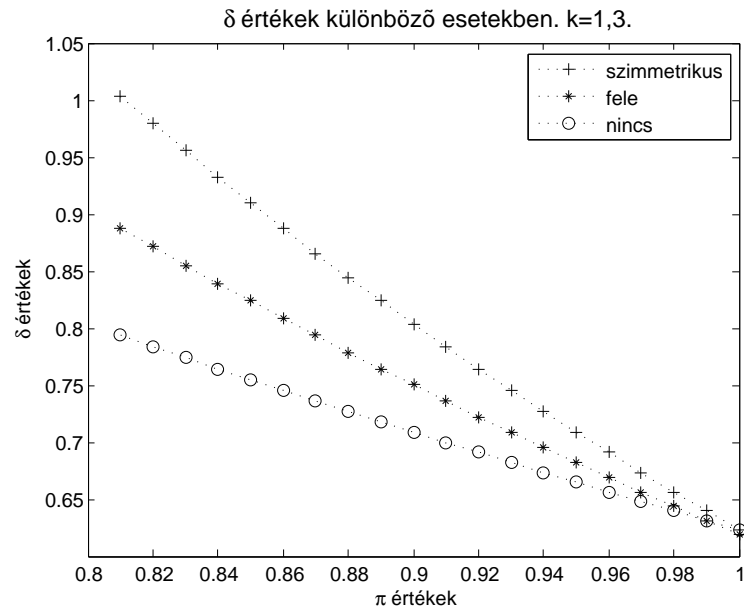
A (10) egyenlet jobb oldalán szereplő tört  $2 \frac{c(v^*) - c(v)}{(v^* - v)}$  tényezője konstans, és ennek a konstansnak kell a  $\pi$ -ed részét venni, melynek eredményeképp  $\delta$  a  $\pi$ -ben szigorúan monoton csökken. Amennyiben meghatározzuk a különböző  $\pi$  valószínűségek mellett a  $\delta$  nagyságát, akkor kis  $\pi$  értékek mellett előfordulhat, hogy nem is kapunk reális  $\delta$ -t, hisz a diszkonttényező értéke nem lehet nagyobb 1-nél. Ez azt mutatja, hogy túl kicsi újabb szerződéskötési valószínűség esetén semmiképp nem várhatjuk el, hogy a felek a társadalmilag optimális humántőke beruházást valósítsák meg.

## 6 Egy példa

Ebben a részben egy konkrét példán keresztül mutatom meg, hogyan befolyásolja a fenyegetési stratégiában a társadalmilag optimális beruházás megvalósítását, pontosabban az ehhez szükséges legkisebb diszkonttényező értékét az újabb szerződéskötés valószínűsége. Példámban a vállalat és a kormányzat költségfüggvényének alakja:  $c(v) = v^k$ , ahol  $k = 1, 3$ .

Az alapesetben a bemutatott modellnek megfelelően a vállalat és a kormányzat teljesen szimmetrikus feltételekkel szembesül. Mindkettő a játék egy lejátszásában a neki jutó beruházási érték  $\pi$ -szeresét tudja az adott periódusban felhasználni. A beruházás értékének  $(1 - \pi)$ -szeresét tartalékolniuk

kell, egy esetleges tevékenység, ill. partnerváltás beindításához: ezt az értéket kapcsolat-specifikus elsüllyedt költségnek tekintjük. A  $\delta$  diszkonttényező alakulását a  $\pi$  függvényében a 2. ábrán a + -szal jelzett pontok mutatják. Amennyiben  $\pi = 0,81$ , akkor nincs is közgazdaságilag értelmezhető diszkonttényező, mert a mechanikusan kiszámított  $\delta = 1,003931$ . Ez azt mutatja, hogy relatíve amnyira kicsi annak a valószínűsége, hogy az adott vállalattal a kormányzat a következő periódusban is szerződést köt, hogy nem is fognak semmilyen körülmények közt annyi beruházást végezni, ami társadalmilag optimális lenne.



2. ábra. A diszkonttényező értéke, a kormányzat különböző szintű elsüllyedt költsége esetén

A második esetben a vállalat feltételei változatlanok, de a kormányzattal kapcsolatos feltevéseket az alapmodellhez képest módosítottuk. Most a kormányzatnak átlagosan csak fele annyit kell tartalékolnia, mint az első esetben, azaz a beruházás értékének csak  $\frac{\pi}{2}$ -szeresét kell elsüllyedt költségnek tekintenie. Azt feltételezzük ugyanis, hogy amennyiben a következő periódusban a kormányzat egy másik vállalattal köt a mostanihoz hasonló szerződést, akkor részére relatíve csak fele annyi az elsüllyedt költség, mint a vállalat számára. A kormányzat majdnem ugyanazt és ugyanúgy teszi, mint korábban, mindössze az új vállalathoz igazodó kapcsolattartási és monitorozási rendszerét kell az előző periódushoz képest valamelyest megváltoztatnia. A diszkonttényező értékeit a 2. ábrán a \* jelöli. Láthatjuk, hogy a  $\pi = 1$  valószínűség mellett az alap és a második eset diszkonttényezője megegyezik. A  $\pi = 1$  azt jelenti, hogy a vállalat a következő periódusban 1 valószínűséggel jut szerződéshez a kormányzattól, ilyenkor egyik résztvevőnek se kell kapcsolat-specifikus elsüllyedt költséggel számolnia.

A harmadik esetben a vállalat továbbra is az eddigi feltételekkel szembeesül, de a kormányzatnak most egyáltalán nincsenek kapcsolat-specifikus elsüllyedt költségei. Ezt a grafikont a  $\circ$  jellel készített pontok alkotják. A három grafikonvonal közül ez utóbbi halad a legalacsonyabban, mert a három eset közül a harmadik igényli a legkisebb minimális diszkonttényezőket az együttműködés eléréséhez. Amikor 1 valószínűséggel újítják meg a fennálló szerződést, akkor a diszkonttényező természetesen ebben az esetben se függ az elsüllyedt költségektől, értéke megegyezik a másik két eset értékével. A három grafikonvonal alakulása jól megmutatja, hogy az optimális beruházási szint könnyebben érhető el akkor, amikor a kapcsolat-specifikus elsüllyedt költségek csökkennek.

Példánk ugyan konstruált, elméleti példa, de jól rávilágít arra, hogy minél nagyobb az újabb szerződéskötés valószínűsége, és ezáltal minél kisebb a szereplők elsüllyedt költsége, annál könnyebben megvalósítható köztük a kooperáció, mert ilyenkor már kisebb diszkonttényező esetén is eredményes a bemutatott fenyegető stratégia. Tendereztetésekor az újabb szerződéskötés valószínűsége nagyban függ attól, hogy az elbírálás kritériumai közt milyen súllyal szerepel a korábbi sikeres, hasonló típusú munkavégzés.

A tenderek bizonyos típusai meg is engedik ennek a lehetőségnek a figyelembe vételét, ennek ellenére, pl. a munkanélküliek számára szervezett tanfolyamok és egyéb aktív munkaerő-piaci programok esetében [3] elemzése alapján 2004 és 2009 között ugyancsak nem volt jellemző a hatékonyság. Nagyon gyakran előfordult, hogy ugyanazt a munkanélkülit ugyanabba a programba többször is bevonták, mert a sikertelen tenderkiírások miatt annyira eltelt az idő, hogy az Európai Unió szabályainak megfelelően kiírt pályázat számszerű követelményeit már csak így lehetett teljesíteni. A képzéseket nem egy esetben valamely, az ország másik részében tevékenykedő intézmény szervezte, aki aztán bevonta a helyi, több hasonló jellegű feladatot korábban eredményesen ellátó versenytársát. A munkanélküliek ügyeit intéző szakemberek általában sokkal jobbnak tartották a régebben már velük eredményesen együttműködő képző intézményeket, de a tendereztetés kötelező előírásai alapján sokszor más cég nyerte el a munkát.

Aki csak valamelyest is ismeri a közbeszerzés bonyolult szabályait, annak minden bizonnyal más, a fenti példához hasonló eset is az eszébe jut. Az ilyen szituációk gyakorlati elemzése, a cikkben ismertetett modellel való elméleti összevetése további kutatás tárgya lehet.

## 7 Következtetések

A cikk a nem teljes szerződések egy speciális esetével foglalkozott, a kormányzat és egy vállalat közti végtelen sokszor ismételt kiszereződéseket elemezte. A vizsgálat célja az volt, hogy megállapítsa, mennyire segítenek a kompetitív tenderek a társadalmilag optimális beruházási szintek megvalósításában. A gyakorlati és az elméleti szakirodalom egy igen jelentős része ugyanis a kompetitív tenderek hatékonyságnövelő tulajdonságát hangsúlyozza, és javasolja,

hogy az állami feladatok megoldása esetén is ezt a módszert használják. A cikk azonban inkább azokkal az irodalmakkal mutat közös vonásokat, amelyek kételkednek a kompetitív tenderek univerzális előnyében.

Vizsgálati módszerünk a végtelen sokszor, azonos feltételekkel ismételt játék elemzése volt. A játék egyetlen lejáttszása egy periódust tartalmazott, mely két időszakból állt. A nulladik időszakban a kormányzat és a vállalat megkötötte a szerződést, majd rögtön utána döntöttek a humántőke beruházásuk szintjéről. A szerződés csak az alapszolgáltatás elvégzését rögzítette, nem tartalmazott a humántőke beruházás vonatkozásában harmadik fél által kikényszeríthető elemeket. A bevételek az adott periódus első időszakában realizálódtak, és ekkor is osztoztak meg ezeken az értékeken. Az első időszakára azonban a nulladik időszak beruházása már megtörtént, „elsüllyedt”, a bevételeket a Nash-alku alapján 50-50%-ban osztották fel. Emiatt a játék egyszeri lejáttszása során egyik résztvevő félnek se állt érdekében a társadalmilag optimális beruházás megvalósítása.

A játék egy periódusa (egy lejáttszása) azonban potenciálisan végtelen sokszor megismétlődött, melynek során azt is figyelembe kellett venni, hogy a következő periódusban az adott vállalat nem biztos, hogy újból szerződéshez jut. Ilyenkor más területen kellett megélhetését keresnie. Az új területre való átállás, illetve a kormányzat részére az újabb partnerrel való kapcsolatok kialakítása azonban elsüllyedt költségekkel járt. A kockázattal szemben közömbös résztvevők számára ez azt jelentette, hogy a beruházás bevételeinek tartalmaznia kellett az átlagosan várható elsüllyedt költségeket. Ez a költség feltételezésünk alapján az új területen (új partnerrel) történő munkavégzés jelenlegihez hasonló szintű profittermelési lehetőségét biztosította. Az adott periódusban kialakult bevételből ezért mind a kormányzat, mind a vállalat, csak az újabb periódus szerződéskötési valószínűségének megfelelő arányt tudta effektíve felhasználni.

A szakirodalom segítségével beláttuk, hogy meg lehet adni olyan fenyegetési stratégiát, amikor az egymás után folyamatosan ismételt játék egyensúlyi stratégiájában a felek a társadalmilag optimális beruházási szintet biztosítják. A kormányzat és a vállalat társadalmilag optimális beruházásban való érdekeltége attól függ, hogy az adott feltételek mellett kellően magas-e a diszkonttényezőjük. A cikk eredménye az, hogy beláttuk, minél nagyobb az újabb szerződéskötés valószínűsége, annál kisebb diszkonttényezőre van szükség.

A diszkonttényező értékét a szabályozó kétféleképpen is befolyásolni tudja. Egyrészt előírhatja a kiszerződés módját: minél inkább megengedi azt, hogy a kormányzat közvetlenül, versenyki írás nélkül válassza meg kiszerződött partnerét, annál inkább elősegíti, hogy a már az adott területen dolgozó vállalat részére növekedjen az újabb szerződéskötés esélye. A közvetlen szerződéskötéskor ugyanis nagyon fontos szempont, hogy a szóban forgó vállalat korábban jól végezte feladatát, a társadalmilag optimális beruházási értéket valósította meg. A közvetlen szerződéskötés természetesen számos veszélyt rejt magában, ilyenkor sokkal inkább hajlamos a kormányzat visszaélésekre, mint versenykiírás esetében. Amikor a szerződéskötés formáját írják elő, akkor minden egyes esetben érdemes mérlegelni, hogy milyen előnyökkel és

hátrányokkal jár a közvetlen szerződés, illetve a tender. A cikk arra mutatott rá, hogy mi lehet a közvetlen szerződéskötés előnye, de nem foglalkozott a hátrányaival.

A szabályozó úgyis befolyásolhatja az újabb szerződéskötés esélyét, hogy kötelező referenciákat ír elő azok közt a kritériumok közt, melyek alapján eldöntik, melyik vállalat lesz a versenykiírás győztese. Erre több módszer is van, lehet pl. a tendereket meghívásossá tenni, amikor már eleve csak a jó referenciával rendelkező vállalatok vehetnek részt a pályázaton. A tenderkiírásokban azonban –hacsak nem akarnak aránytalanul magas költségekkel számolni– mindenképp fontos szempont az elvégzendő feladat költsége. A költségekkel való spórolás pedig akár kontraszelekcióhoz is vezethet, amikor a nyertes nem a leghatékonyabban dolgozó, hanem a legalacsonyabb költségeket ajánló vállalat lesz. A tenderekkel kapcsolatos másik probléma, hogy a feladat teljesítését előre rögzített kritériumok alapján döntenek el, és ezek közt a kritériumok közt nem lehet szerepeltetni olyanokat, amelyeket nem tudtak induláskor szerződésbe foglalni. Azaz pontosan azok az ún. feltartási (más szóval akadályozási) problémák fordulhatnak elő a tenderszerződés értékelésekor, mint amelyek az optimális beruházási szint elérését is megakadályozzák.

Fejtegetésemmel semmiképpen nem kaptunk „receptet” az optimális kiszerezési szabályok meghatározására. Mindössze arra igyekeztem felhívni a figyelmet, hogy téves azt gondolni, hogy minden körülmények közt a versenykiírás adja az optimális megoldást. Akár káros is lehet, ha a tendereket minden állami feladat kiszereződtetése esetén kötelező jelleggel írják elő.

## Irodalom

1. Alam, Q. and Pacher, J., Impact of compulsory competitive tendering on the structure and performance of local government systems in the State of Victoria., *Public Administration and Development*, 20(5):359–371, 2000.
2. Armstrong, A., A Comparative Analysis: New Public Management – The Way Ahead?, *Australian Journal of Public Administration*, 57(2):12–24, 1998.
3. Berde É., *Az Állami Foglalkoztatási Szolgálat munkaerő-közvetítésének és munkaerő-piaci szolgáltatásainak vizsgálata 2004 és 2009 közt. A foglalkoztatási szolgálat fejlesztése az integrált munkaügyi és szociális rendszer részeként c. TÁMOP 1.3.1 kiemelt program keretében. Kutatási zárójelentés*, 2010.
4. Boyne, G. A., Competitive tendering in local government: a review of theory and evidence, *Public Administration*, 76(4):695–712, 1998.
5. European Commission, Directive 2004/18/EC of the European Parliament and of the Council of 31 March 2004 on the coordination of procedures for the award of public works contracts, public supply contracts and public service contracts, *Official Journal (OJ)*, pp. 114–240, 2004.
6. Cox, H., Questions about the initiative of the European Commission concerning the awarding and compulsory competitive tendering of public service concessions, *Annals of public and cooperative economics*, 74(1):7–31, 2003.
7. Dixit, A., Governance institutions and economic activity, *The American Economic Review*, pp. 3–24, 2009.
8. Ferlie, E. *The new public management in action*, Oxford University Press, USA, 1996.

9. Halonen, M., Reputation and the allocation of ownership, *The Economic Journal*, 112(481):539–558, 2002. doi: 10.1111/1468-0297.00729 ISSN 1468-0297,
10. Hansen, M. B., Marketization and Economic Performance, *Public Management Review*, 12(2):255–274, 2010.
11. Hart, O. *Firms, contracts, and financial structure*, Oxford University Press, USA, 1995.
12. Hart, O. and Moore, J., Property Rights and the Nature of the Firm, *Journal of Political Economy*, pp. 1119–1158, 1990.
13. Hart, O. and Moore, J., Incomplete contracts and ownership: Some new thoughts, *The American economic review*, 97(2):182–186, 2007.
14. Hart, O., Shleifer, A. and Vishny, R. W., The proper scope of government: theory and an application to prisons. Technical report, National Bureau of Economic Research, 1996.
15. Ingraham, P. W., Play it again, Sam; it’s still not right: searching for the right notes in administrative reform, *Public Administration Review*, pp. 325–331, 1997.
16. Obermann, G. and Kostal, T., Public Procurement at the Local Level in Austria: The Economic Consequences of Compulsory Competitive Tendering for Public Services, *Annals of Public and Cooperative Economics*, 74(1):139–162, 2003.
17. Vincent-Jones, P., Citizen redress in public contracting for human services, *The Modern Law Review*, 68(6):887–924, 2005.
18. Yvrande-Billon, A., The attribution process of delegation contracts in the French urban public transport sector: why competitive tendering is a myth, *Annals of Public and Cooperative Economics*, 77(4):453–478, 2006.

#### INFINITELY REPEATED OUTSOURCING

The paper analyses the infinitely repeated contracts between the government and a firm. Methods from the incomplete contract theory are used for this analysis. Based on the literature, it is shown that there exist a trigger strategy, when both the government and the firm deploy the socially optimal amount of investment. The paper proves that the greater the chance that an excellently accomplished firm receives a new contract the higher is the probability that both actors’ investments are on the socially optimal level. The regulator has a great liability in establishing indirectly the chance of receiving a new contract opportunity.



# FOGALMAK, MÓDSZEREK

## A SZÁMSZERŰSÍTETT ÁLTALÁNOS EGYENSÚLYI (CGE) MODELLEKRŐL<sup>1</sup>

RÉVÉSZ TAMÁS – ZALAI ERNŐ  
*Budapesti Corvinus Egyetem*

A nemzetközi gyakorlat szerint a többszektoros és a gazdasági élet főbb szféráit egyaránt ábrázoló modellekkel szemben támasztott hármaskövetelménynek (egyszerűség, a magyarázó változók nem-diszkriminatív kezelése, a viselkedési függvények elméleti megalapozottsága) manapság a számszerűsített általános egyensúlyelméleti (CGE) modellek felelnek meg leginkább. Mindenekelőtt azért, mert továbbra is hiány van a gyakorlatban eredményesen használható alternatív elméletekben, illetve azért, mert a gyorsan változó társadalmi-gazdasági struktúrák csak igen szűk körben teszik lehetővé a statisztikai-ökonometriai, előrejelző jellegű modellek alkalmazását.

Ennek a nyugati közgazdasági gyakorlatban a 70-es évek végétől kezdve mind általánosabbá váló modellezési irányzatnak a gyakorlati létjogosultságát abból kiindulva lehet megérteni, hogy a gazdaságban tovagyűrűző és visszacsatoló, valamint egymást keresztező hatások eredőjét csak a gazdaság különféle szféráit együttesen figyelembe vevő, szimultán egyenletrendszerekkel (modellekkel) lehet átfogó és konzisztens módon megbecsülni. A világpiacon hatásokra felgyorsult gazdasági átalakulás alapvető változásokat idéz elő az ágazati szerkezetben. Az egyes ágazatoknak a fajlagos munkaerő-, tőke-, energia-, anyagigénye, a környezetet szennyező anyagok kibocsátása tekintetében egymástól markánsan eltérő technológiája következtében az ágazati szerkezet változásai alapvető hatással vannak a makrogazdasági mutatószámokra, így a foglalkoztatottság szintjére és szerkezetére, a jövedelmek eloszlására, az importigényességre, a külkereskedelmi egyenlegre és a környezetgazdasági mutatószámokra egyaránt. Az aggregált makrogazdasági mutatószámok alakulása tehát alapvetően függ az ágazati szerkezet változásától, ami indokoltá teszi a többszektoros elemzéseket és modelleket.

Az általános egyensúly a walrasi megfogalmazásban arra utal, hogy együtt, kölcsönhatásaiban, szimultán módon elemezzük minden termék és erőforrás piacán az egyensúly megvalósulását. A gyakorlati alkalmazásokban természetesen aggregált jószágkategóriák szerepelnek, a CGE modellek alapvetően

<sup>1</sup>A kutatást és a tanulmány elkészítését támogatta az Európai Unió a TÁMOP-4-2.1.B-09/1/KMR-2010-0005 kódszámú kutatási projekt keretében. Ezúton szeretnénk megköszönni Bessenyei Istvánnak és Longauer Dórának a cikk végső formába öntéséhez nyújtott értékes segítségét. E-mail: [tamas.revesz@uni-corvinus.hu](mailto:tamas.revesz@uni-corvinus.hu), [erno.zalai@uni-corvinus.hu](mailto:erno.zalai@uni-corvinus.hu). Beérkezett: 2012. augusztus 25.

makrogazdasági modellek. Makrogazdasági jellegük ellenére jelentős bennük az ágazati bontás, többek között ez különbözteti meg őket a legfeljebb két-három ágazatot tartalmazó összevont makroökonómiai modellektől, így mindenekelőtt az utóbbi időkben divatba jött számszerűsített dinamikus-sztocasztikus általános egyensúlyi (DSGE) modellektől.

Az 1960-as és az 1970-es évtized a kvantitatív közgazdaságtan és gazdaságpolitikai elemzések virágzásának az ideje volt Magyarországon. Ebben az időszakban alakult ki a magyar gazdaságpolitikai modellező-elemző szakma, s több-kevesebb rendszerességgel alkalmazták a közgazdaságtan és a gazdaságstatisztika által rendelkezésre bocsátott eszköztárat. Az átmenet körülményei között azonban határozottan visszaesett a gazdaságpolitika formálójának kereslete az igényes módszertanon nyugvó elemzések iránt. Időközben jelentősen átalakult a többszektoros gazdasági modellezés módszertana és eszköztára. Az 1960-as és '70-es években az egyszerűbb, praktikus megfontolásokra épülő input-output és lineáris programozási modellek uralkodtak. Ezekben általános érvényű gazdasági elszámolási azonosságok, illetve műszaki-gazdasági összefüggések domináltak, a változók feltételezett viselkedése a követett módszertanból, s nem gazdaságelméleti megfontolásokból adódott. Ennek köszönhetően könnyen szót értettek egymással az ideológiailag egymással szembenálló világrészek makrogazdasági modellezői.

Elméletileg ugyan ismert volt, hogy a programozási modellek primális és duális feladatának megoldásai egy megfelelően definiált gazdaság általános egyensúlyi állapotaként értelmezhetők, a szocialista országok modellezői kevés figyelmet szenteltek a jóléti közgazdaságtani és versenyzői egyensúlyi interpretációs lehetőségeknek. A nyugati közgazdászok szeme előtt viszont mindig is célként lebegett, hogy piacgazdasági elméletekre alapozott funkcionális (termelési, hasznossági függvények) és viselkedési (profit- és haszonmaximalizálás) összefüggéseket építsenek be az alkalmazott makrogazdasági modellekbe. S mivel az általános egyensúlyelmélet volt az egyetlen konzisztens, átfogó gazdaságelmélet, természetszerűleg ilyen irányban keresték a megoldást.

A CGE modellek megjelenése váratlanul érte a központi tervezésű gazdaságok gazdaságpolitikai modellezőit. Az 1960-as és 1970-es évekre jellemző modellezési *détente* folyamata megszakadt. A CGE modellek, a részben ideológiai, részben elméleti eredetű szkeptikus álláspontok miatt, ritkaság számba menő kivételektől eltekintve, még kísérleti jelleggel sem kerültek be a központi tervezés módszertanába. A szerzők ebből a szempontból a kivételek közé tartoztak. Kezdetől fogva hangsúlyoztuk (lásd például Zalai, 1983), hogy a CGE modelleket praxeológiai fogantatásúaknak lehet és kell tekinteni, s hogy az általuk nyújtott technikai lehetőségek hasznosan kibővíthetők, realiztikusabbá, rugalmasabbá teszik a lineáris input-output vagy programozási jellegű modellekkel végzett gazdaságpolitikai elemzéseket. Igyekeztünk hangsúlyozni azt is, hogy az elméleti megalapozottság tekintetében kulturált és igényes gazdaságpolitikai elemzések nálunk sem nélkülözhetik az ilyen típusú modelleket. Nem rajtunk múlott, hogy ez a felismerés nem jutott el a gazdaságpolitikai elemzők, döntés-előkészítők tudatáig. Szerencsére a CGE modellek hazai befogadó közegének „ellenállása” ellenére is van mire építeniünk, mivel rendel-

kezésre áll egy több évtizeden át folyamatosan fejlesztett, a sajátos magyar körülményekre adaptált számszerűsített általános egyensúlyi modelleszalád, a HUMUS (HUNGarian MULtiSectoral) CGE modellek.

Dolgozatunkban áttekintjük a CGE modellek főbb jellemzőit. Az első két fejezetben bemutatjuk kialakulásuk történetét, majd az ilyen típusú modellek általános feltevéseit, szerkezeti és tartalmi jellemzőit, valamint a gazdaság ábrázolt mutatószámai közötti kapcsolatokat leíró egyenleteiket foglaljuk össze. A 3. fejezetben az endogén és exogén változók eltérő feltevéseken nyugvó kijelöléséből fakadó ún. makrolezárási lehetőségeket taglaljuk és illusztráljuk. A 4. fejezet a három évtized óta folyó hazai CGE modellek általánostól megkülönböztető vonásait és eddigi főbb alkalmazási területeit vázolja. Végül az 5. fejezetben röviden áttekintjük a CGE modellek adatigényét általában és a HUMUS CGE modellek inputjának előállításához felhasznált magyar statisztikai adatforrásokat. Ennek kapcsán felhívjuk a figyelmet azokra a főbb hiányosságokra, amelyek számos nehéz feladatot rónak az adatok megbízhatósága tekintetében az igényes modellezőkre, illetve megnehezítik az eredmények korrekt interpretálását és értelmezését is.

## 1 A CGE modellek kialakulása és főbb alkalmazási területei

*L. Johansen* (1960) korai, sokáig különösebb visszhang nélkül maradt úttörő tanulmánya ellenére, a mai értelemben vett számszerűsített általános egyensúlyelméleti modellek csak az 1970-es évek második felében kezdtek, akkor viszont meglepően gyors ütemben elterjedni. Az általános egyensúlyelméletre alapozott első számszerűsített modell Leontief először az 1930-as években megjelent, majd később az amerikai Munkaügyi Statisztikai Hivatalban létrehozott ágazati kapcsolatok mérlege (ÁKM) és az annak elemzésére kialakított input-output modellje volt (*Leontief*, 1937, 1951). Ez még nem volt egy mai értelemben vett kifejlett CGE modell, de már tartalmazta annak számos elemét. Leontief modelljének magvát a termelőágak és a végső felhasználók, illetve az ágazati kibocsátások teljes körére kiterjedő kettős nemzetgazdasági elszámolási rendszer, a termék-, illetve költségvetési mérlegek képezték.

Johansen a norvég gazdaság szektorainak 1950-es évekbeli eltérő növekedési ütemét, illetve azok változását elemezte modelljével. Ő maga nem használta az egyensúlyelméleti elnevezést, sőt, még csak nem is utalt az általános egyensúlyelméletre. Nem is kellett, mert modelljét a nemzeti számlarendszerre és ezen belül is elsősorban az ÁKM-re alapozta, és mindössze pragmatikus alapokon kiegészítette az „elszámolási azonosságokat” a munkaerő és a tőke ágazatok közötti átcsoportosítását megengedő makro termelési függvényekkel, illetve a fogyasztási szerkezet változását magyarázó statisztikai függvényekkel. Olyan alakban fogalmazta meg modellje egyenleteit, amelyben az egyébként változó együtthatók értékét rögzítve lineáris egyenletrendszeret kapott. Ez lehetővé tette egy sajátos megoldási algoritmus kialakítását, a nemlineáris

modell megoldását a lineáris változat paramétereit fokozatosan felfrissítve közelítette meg.

Johansen modellje meglehetősen hosszú ideig nem talált követőre, minden bizonnyal a nemlineáris többszektoros nemzetgazdasági modellek alkalmazása elé tornyosuló, akkor még leküzdhetetlennek tűnő statisztikai, matematikai és számítástechnikai korlátok miatt. De megjelentek olyan kutatások, amelyek e korlátok lebontásában később jelentősnek bizonyultak. Ezek között meg kell említeni a Nobel-díjas *Richard Stone* által irányított Cambridge Growth Project-et, amely keretében, nagyjából Johansen modelljével párhuzamosan, sok tekintetben hasonló metodikával készült el egy angol növekedési modell (ld. *Stone and Brown*, 1962). Ennek eredményei több tekintetben is előfutárai lettek a későbbi CGE modellek módszertanának. Mindenekelőtt itt kezdődött el és készült el a nemzeti számlákat négyzetes táblázatba foglaló és azok szimultán elemzésére alkalmas SAM (társadalmi elszámolások mátrixa) kutatása, amelynek első változata már megjelent az idézett könyvben. A SAM megalkotásában vezető szerepet játszó Pyatt a Világbankban folytatta később ilyen irányú kutatásait (ld. *Pyatt and Round*, 1985). Ugyancsak a projekt keretében dolgozta ki Stone a nevéhez fűződő lineáris kiadási rendszert (LES, Stone, 1954), amelyet mind a mai napig kiterjedten alkalmaznak a CGE modellekben.

Egy másik vonulat, amely – ha nem is közvetlenül, de – jelentősen befolyásolta a CGE modellekkel végzett gazdaságpolitikai elemzések módszertanát, a lineáris programozásra és tevékenységelemzésre alapozott fejlesztéstervezési modellek voltak, amelyek a volt szocialista országokban, így például Magyarországon is különösen nagy számban jelentek meg (ld. például *Augusztinovics*, 1979, *Ganczer*, 1973, *Kornai*, 1965). Ezekben a modellekben is az általános érvényű gazdasági elszámolási azonosságok, illetve a műszaki-gazdasági összefüggések egyszerű, lineárisan parametrizált változatai domináltak. A változók feltételezett viselkedését módszertani, illetve praktikus megfontolások, semmint szilárd elméleti sémák magyarázták. Ugyanakkor, mivel a lineáris programozási (LP) modellek primális és duális feladatpárjának megoldásai egy megfelelően definiált „gazdaság” általános egyensúlyi állapotaként értelmezhetők, a nyugati közgazdászok mindinkább igyekeztek az LP modellek szerkezetét úgy alakítani, hogy modelljeik megoldása egy piaci gazdaság egyensúlyi megoldásaként legyen interpretálható. *Ginsburgh and Waelbroeck* (1976, 1981) például a nemlineáris függvények szakaszos linearizálásával és a lineáris programozási technika alkalmazásával igyekezett az általános egyensúlyelméleti modellek nem lineáris voltából fakadó algoritmikus problémákat megkerülni. Érdekes és tanulságos e törekvések illusztrálására *Taylor* (1975) egy szellemes konklúzióját idézni, amivel előre jelezte a fejleményeket: „Ha az általános egyensúlyelmélet az egyetlen játék a városban, miért ne játsszuk hát azt elegánsan.”

A korlátok lebontásában különösen jelentősnek bizonyult Leontief volt tanítványának, *Hollis Chenerynek* a szerepe, aki Leontief modelljének alkalmazásait, nemlineáris kiterjesztéseit oktatta és kutatta a Harvardon. Ezek kapcsán jutott el többek között az egyszerűbb, számszerűsített általános

egyensúlyelméleti modellek megoldhatóságának tanulmányozásához is (*Chenery and Uzawa*, 1958, *Chenery and Raduchel*, 1971). Bár ő maga az 1970-es évek elején a Világbankhoz kerülve témát váltott, tanítványai (a téma későbbi irodalmából jól ismertté vált szerzők) folytatták a nemzetgazdasági modellek általa megkezdett kutatásait, amihez szellemi irányításon túl kutatási megbízásokkal is hathatós segítséget nyújtott az időközben a Világbank Fejlesztéskutatási Központja (DRC) igazgatójává kinevezett *Chenery*. *Taylor és Black* 1974-es tanulmánya volt az első, amely a *Johansen* által megkezdett és általa inspirált irányt folytatta. *Lysy and Taylor* (1977) és *Adelman and Robinson* (1978) munkáiban jelenik meg először a ma általánosan használt CGE elnevezés.

A standard CGE modellek kialakulásához vezető kutatási irányzat megerősödésében jelentős szerepet játszott *Scarf* algoritmusának megjelenése (*Scarf*, 1967, *Scarf with Hansen*, 1973). *Scarf* szimplex módszerhez hasonló logikájú fixpont-kereső algoritmus lehetővé tette az Arrow–Debreu–McKenzie-típusú általános egyensúlyelméleti modellek megoldását. Algoritmusának jelentősége inkább elméleti jellegű volt, mivel *Johansen* már korábban megmutatta, és később még inkább bebizonyosodott, hogy jól viselkedő neoklasszikus függvényekből felépített modelleket *Scarf* módszerénél jóval egyszerűbb (Gauss–Seidel, Newton, vagy kombinált) iterációs eljárásokkal is meg lehet oldani. *Scarf* eredménye mindenesetre jelentős szerepet játszott a pszichológiai gátak lebontásában.

A Yale Egyetemen *Scarf* által elindított kutatási projekt kezdetben a Harvard és a Világbank együttműködésében folyó kutatásokkal párhuzamosan és jelentős részben azoktól függetlenül folyt. Az *alkalmazott általános egyensúlyi* (AGE) elnevezés alatt megjelent modelljeik szemlélete sok szempontból jelentősen eltért az előbbiektől. Ezek már nem elszámolási azonosságokra épülő, azokat funkcionális és viselkedési egyenletekkel pragmatikus alapokon kibővített makrogazdasági modellek, hanem a neoklasszikus mikroökonómia általános egyensúlyelméletéből levezetett modellek voltak. Modelljeik középpontjában nem az elszámolási azonosságok, hanem racionálisan viselkedő (reprezentatív) gazdasági alanyok optimális viselkedéséből levezetett kínálati és keresleti függvények szerepeltek. Az elszámolási azonosságok helyét piactisztító egyensúlyi feltételek vették át. *Scarf* tanítványai mindazonáltal jelentősen hozzájárultak a CGE modellek számszerűsítése és kalibrálása módszertanának kialakításához. Elemzéseik elsősorban adórendszerbeli változások és külkereskedelmi egyezmények hatásának elemzésére irányultak (lásd például *Scarf and Shoven*, 1972, 1984, *Shoven and Whalley*, 1984, *Piggott and Whalley*, 1985).

Az 1980-as évek elején különösen gyorsan felfutottak a Világbankban, illetve csatolt intézményeiben a fejlesztéstervezéssel kapcsolatos CGE modellek. A világbanki modellezés fókuszában a termelési és külkereskedelmi szerkezet átalakulása, illetve az ezekkel kapcsolatos adók-támogatások hatásának elemzése állt. Jelentős részben ezek eredményeként halmozódott fel az a sok tapasztalat, statisztikai és számítástechnikai tudás, amelyen a CGE modellek alkalmazásai ma is nyugszanak. Külön kiemelendő ennek kapcsán a CGE mo-

dellek számszerűsítésének alapját képező SAM terén bekövetkezett jelentős előrelépés és a felhasználóbarát GAMS (General Algebraic Modeling System) programcsomag kifejlesztése, amely sokféle matematikai programozási feladat hatékony megoldására alkalmas.

Egy harmadik igen fontos kezdeményezés, amely ma is meghatározó szerepet tölt be a CGE modellezők nemzetközi hálózatában, Johansen MSG (Multisectoral Growth) modelljének és megoldási módszerének közvetlen folytatásaként és továbbfejlesztéseként jött létre Ausztráliában (kialakulásának történetét részletesen ismerteti *Dixon*, 2007). Az ausztrál gazdaság protekcionista gazdaságpolitikájának 1970-es évekbeli felszámolása, az azzal együtt járó nagyszabású külkereskedelmi és termelési szerkezeti átalakítás igénye hívta létre a kormányzat keretében működő, de nagyfokú akadémiai szabadsággal és célokkal szervezett, *Alan Powell* által vezetett Impact Project-et. Ennek az Industries Assistance Commission alá rendelt kutatócsoportnak az volt a feladata, hogy különböző modellekkel segítse a strukturális átalakításokhoz szükséges gazdaságpolitikai döntések elemzését, előkészítését.

Egy szintén volt Leontief-tanítvány, *Peter Dixon* vezette azt a csapatot, amelyik a projekt részeként – Johansen nyomdokain, kezdetben az amerikai kutatásokkal párhuzamosan és azoktól függetlenül – kialakította az Orani nevet viselő ausztrál CGE modellt (lásd *Dixon et al.*, 1977, 1984). A párhuzamos munkát jelzi a számítógépes megvalósítását elősegítő, azóta kereskedelmi terméké fejlesztett GEMPACK programcsomag kialakítása is. Az 1991-től a Monash University Centre of Policy Studies (CoPS) keretében működő csapat fejlesztette ki az Orani modell rekurzív-dinamikus utódját, a Monash modellt. Ennek kapcsán szorosan együttműködtek *Tom Hertel* a Global Trade Analysis Project (*GTAP*) megszervezésében a Purdue University keretében (ld. *Hertel*, 1997). Az Impact projekt 30 éves kitartó és erős üzleti szellemű munkássága révén a világ három nagy CGE modellezési vállalkozásának egyikévé nőtte ki magát a Világbank és az International Food Policy Research Institute (IFPRI) mellett.

A fenti, elsősorban a csendes-óceáni térséget érintő főáramlatok mellett más egyetemeken és kutatóhelyeken is folytak CGE modellek alkalmazására irányuló munkálatok. Így például markáns irányzatot képviselnek a gazdaság, az energiaszektor és a környezet közötti kölcsönhatások elemzésére irányuló vizsgálatok. Ezek közül különös figyelmet érdemelnek a *Dale Jorgenson* és munkatársai által végzett kutatások, amelyek szinte egyedülálló módon építettek be úttörő ökonometria módszerekkel becsült termelési és fogyasztási modelleket a CGE modellekbe (ld. például *Jorgenson*, 1984, *Jorgenson and Wilcoxon*, 1993).

Az európai országok általában jelentős késéssel követték a fejleményeket, és ma is inkább követők, mint élenjárók. Az egyik kivétel a svéd *Lars Bergman*, aki szintén Johansen úttörő munkája által inspirálva készítette el az egyik első európai CGE modellt, amellyel a svéd nukleáris erőművek 1970-es évek végén tervezett lezárásának várható gazdasági hatásait elemezte (ld. *Bergman*, 1982). Ez a modell azért is érdekes, mert számítógépes megoldási algoritmusát a magyar *Poór András* készítette el az International Institute of

Applied System Analysis (IIASA) kutatóintézetben, és ez a modell képezte az 1980-as évek elején kialakított első magyar CGE modell közvetlen előzményét is.

A magyar modellek későbbi fejlesztésében jelentős szerepe volt annak, hogy a magyar CGE modellezők bekapcsolódtak az EU Bizottság támogatásával folyó, elsősorban a Leuveni Katolikus Egyetem (*Denise van Rege-morter*) és az Athéni Műszaki Egyetem (*Pantelis Capros*) kutatói által irányított nemzetközi együttműködésbe. A konzorcium által kifejlesztett referencia-modell a három E betűvel kezdődő tényezőre (economy, energy, environment) utalással *GEM-E3* elnevezés alatt vált ismertté (ld. *Capros et al.* 1995, 1997). Számos esetben vették igénybe a GEM-E3 modell különböző változatait az EU energiapolitikai döntéseinek előkészítése során a gazdaság, energia és környezet közötti kölcsönhatások elemzésére. Jelenleg folyamatban van Sevilla-ban, az EU egyik kutatóintézetében a multiregionális európai és világmodell adaptálása. A GEM-E3 modellnek elkészült ugyanis az összes EU tagországot tartalmazó és globális, a világgazdaság egészére kiterjedő, adatokkal feltöltött változata is.

## 2 A CGE modellek általános jellemzői, jellemző blokkjai és összefüggései

A CGE modellezők általában megelégszenek egyidőszakos modellek felállításával. Egyrészt ugyanis, csak hiányosan állnak rendelkezésre többidőszakos modellekhez a megfelelő ágazati bontású és tartalmú statisztikai idősorok (például összehasonlító áron mért makrogazdasági és azonos módszertani tartalmú jövedelemelosztási mutatók). Másrészt, a dinamikus gazdaságelméleti modellek még nagyon kezdetlegesek és absztraktak, összetevőik és paramétereik (műszaki haladás, átfutási idők, várakozások, időpreferenciák, a jövővel kapcsolatos fokozott bizonytalanság stb.) nem becsülhetők meg a gyakorlati alkalmazások által megkívánt pontossággal, bizonyossággal és (időszakonkénti, ágazati stb.) részletezettséggel.

Egyetlen időszak szerepeltetése esetén a számított hatások nem egy meghatározott konkrét időpontra szóló előrejelzések, hanem a komparatív statika szellemében egy olyan állapotot ábrázolnak, amelyhez változatlan feltételek, köztük a rendelkezésre álló erőforrások változatlan állománya mellett a gazdaság tartana, ahogyan a szimulációs forgatókönyvben feltételezett változások tovagyrúzó hatása teljesen kibontakozik, „lecseng”. A többidőszakos modellek ezzel szemben megkísérlik felvázolni időszakról időszakra a várható időbeli pályát is, amin a gazdaság haladna egy stacionárius egyensúly felé, figyelembe véve az erőforrások és más összetevők többnyire exogén módon megbecsült időbeli változását is. Az elméleti és módszertani nehézségek ellenére, mivel a felhasználók általában szeretnék látni a gazdaság várható időbeli alakulását, egyre gyakrabban alkalmazzák a többidőszakos CGE modelleket komparatív dinamikai elemzésekre. A HUMUS CGE modelleknek is vannak ilyen változatai.

A CGE modellek egyenletei a gazdasági mutatószámok egymással konzisztens változásának feltételeit rögzítik, amelyek egy szimultán egyenletrendszer képeznek. Az általános egyensúlyi modellek jellemző összefüggéseit több szempont alapján is csoportosíthatjuk. Az ÁKM-en alapuló input-output modelleket jól ismerők számára például célszerű a CGE modellek egyenleteit három nagy csoportba sorolni. Ennek logikája szerint az első csoportot a különböző javak (ágazati kibocsátások, elsődleges erőforrások), illetve jövedelmek forrásának és felhasználásának egyensúlyát előíró, valamint – a többidőszakos modellekben – az erőforrások és pénzügyi állományok állomány-folyam (stock-flow) konzisztenciát biztosító mérlegszerű összefüggések (naturális elszámolási azonosságok) alkotnák. A második blokkot az árakat és a költségeket, a gazdasági alanyok költségvetési pozícióját meghatározó, elméleti és számviteli alapon elvárt összefüggések, jövedelmi és pénzügyi elszámolási azonosságok képeznek. (Természetesen mindkét csoportban található különféle definíciós azonosságok is.) S végül, a harmadik jellemző csoportot az input-output, illetve a lineáris modellekben általában konstansnak tekintett együtthatók feltételezett viselkedését leíró funkcionális összefüggések alkotnák (bővebben ld. Zalai, 2012.)

Egy másik logika szerint a CGE modellekben ábrázolt körkörös összefüggések láncolatát vehetjük alapul, amit az elsődleges erőforrások (a tőke, munkaerő, de bizonyos szempontból idesorolható a deviza is) árának feltételezett ismeretéből kiindulva követünk nyomon. Ezek árváltozását a keresletükben és kínálatukban, és ennek következtében a relatív szűkösségükben bekövetkezett változások határozzák meg, amelyekre majd még vissza kell térnünk. Az elsődleges erőforrások keresletét, illetve fajlagos felhasználásuk összetételét az áruk, jövedelmezőségük és költségtakarékossági megfontolások határozzák meg. A konstans volumenhozadék, illetve az ebből adódó nonprofit árképzés feltételezése miatt az ágazati termékek árának meg kell egyeznie az előállításukra felhasznált termékek és elsődleges erőforrások költségével. Emiatt az elsődleges erőforrások árai lényegében az input-output ármodellekhez hasonló szimultán egyenletrendszerrel határozzák meg az ágazati termékek árait. Mindössze annyi a különbség, hogy egy CGE modellben a ráfordítási együtthatók maguk is az árak függvényei, az input-output ármodellekben pedig állandók.

Az elsődleges erőforrások ára, igénybe vett mennyisége és az adókulcsok meghatározzák a keletkező elsődleges jövedelmeket is. Ezeknek a CGE modellekben részletesen ábrázolt másodlagos elosztása alakítja ki a jövedelemtulajdonos intézmények (lakosság, állam, vállalatok, külföld) rendelkezésére álló végső jövedelmeket. Az árak, a jövedelmek elosztása és a jövedelemtulajdonosok fogyasztási, megtakarítási, beruházási viselkedése meghatározza a különböző termékek végső keresletét (személyes és közösségi fogyasztás, beruházás, export).

A ráfordítási együtthatókon keresztül a végső felhasználási igények, ismét csak az input-output modellek logikáját követve, meghatározzák a hazai bruttó kibocsátás, illetve az import iránt jelentkező teljes igényt. Az import és a hasonló jellegű hazai termékek iránti kereslet összetételének arányát, pon-



tosabban azok változását, a CGE modellekben az árak arányai, illetve azok változása határozza meg. A bruttó kibocsátás és a ráfordítási együtthatók, amelyek maguk is változhatnak az árak függvényében, meghatározzák a termékek és elsődleges erőforrások termelői keresletét. Ha egy erőforrás ára kívülről adott a modellben (reálértékben), akkor rendszerint a kínálat feltételezett rugalmas alkalmazkodása teremti meg az egyensúlyt kereslete és kínálata között. Ha pedig az erőforrások kínálata rögzített, akkor keresletük és kínálatuk összhangját árak változása teremti meg. És ezzel visszaérkeztünk a kiindulópontához, ahol ezeket az árakat adottnak tekintettük. Ha a feltételezett árak mellett nincs egyensúly az erőforrások piacán, akkor az áraknak és/vagy a kihasználási szintjüknek módosulnia kell.

A bemutatásra kerülő stilizált modell átláthatósága és könnyebb megértése céljából igyekeztünk csak a legfontosabb változókra és összefüggésekre összpontosítani a figyelmünket. Az ábrázolt modell ilyen formán a CGE modellek egy stilizált prototípusának tekinthető csupán. A CGE modellek jellemző összetevőit 24 blokkba csoportosítva soroljuk fel. A levezetett egyenletrendszeret összevont, könnyen áttekinthető formában megtalálhatja az olvasó a függelékben, ahol egy táblázatban ugyancsak összefoglaljuk az alkalmazott jelöléseket is.

### A naturális egyensúly feltételeit leíró összefüggések

A modellben ábrázolt gazdasági változók értékének konzisztenciáját a naturális oldalon a különböző termékek és erőforrások mérlegei biztosítják. Az ágazati kapcsolatok mérlegére épülő modellben a termékek az aggregált ágazati kibocsátások. Minden ágazat esetén megkülönböztetjük egymástól az ágazati összkibocsátás ( $x_j$ ) hazai piacra ( $x_j^h$ ), illetve exportra ( $z_j$ ) kerülő részét, illetve az ágazati termékek teljes hazai kínálatának ( $x_i^{hm}$ ) hazai ( $x_i^h$ ) és import ( $u_i$ ) összetevőjét. Az ágazati összkibocsátás termelési tényezők (anyagok, munkaerő és tőke) iránti igényét termelési függvényekkel határozzuk meg. Rendszerint egymásba ágyazott, első fokon homogén (konstans mérethozadéku), CES típusú termelési függvényeket alkalmazunk. Ezek egyik legegyszerűbb esete az L. Johansenről, első alkalmazójáról elnevezett függvény. Ennek esetén feltesszük, hogy a munkaerő és tőke (ágazati állóeszközök) egymás tökéletlen helyettese, tehát eltérő kombinációjuk képes biztosítani az adott kibocsátáshoz szükséges termelési kapacitást. Egységnyi kibocsátás esetén a munkaerő ( $l_j$ ) és tőke ( $k_j$ ) lehetséges kombinációit egy  $f_j(l_j, k_j)$ , első fokon homogén termelési függvénnyel adjuk meg. Az egységnyi kibocsátáshoz ugyanakkor rögzített nagyságú ( $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}$ ) termékekre van szükség (konstans ráfordítási együtthatók).

A fenti feltevések alapján a  $j$ -edik ágazat termelési függvényét

$$x_j = \min\left(\frac{x_{1j}}{a_{1j}}, \frac{x_{2j}}{a_{2j}}, \dots, \frac{x_{nj}}{a_{nj}}, KL_j\right) = \min\left(\frac{x_{1j}}{a_{1j}}, \frac{x_{2j}}{a_{2j}}, \dots, \frac{x_{nj}}{a_{nj}}, f_j(L_j, K_j)\right)$$

kétszintű CES függvény formájában írhatjuk fel, amelynek első szintjén  $n + 1$  darab egymást tökéletesen kiegészítő termelési tényező szerepel, amelyek

közül az utolsó ( $KL_j$ ) tőkéből és munkaerőből *összetett* (kompozit) tényező. Mindegyik tényező egy-egy kapacitáskorlátot szab meg, és a kibocsátás szintjét a legkisebb, a szűk keresztmetszet határozza meg (Leontief-féle termelési függvény).

A kellően aggregált modellekben rendszerint minden ágazat esetén van export és import is. Ez elméletileg nem egyeztethető össze a tökéletes helyettesíthetőség feltevésével, ezért a CGE modellekben az ágazati termékek hazai és importált, illetve a hazai piacra és exportra kerülő változatait, Armington (1969) nyomán, egymás tökéletlen helyetteseiként kezeljük. Közös volumenüket ( $x_i^{\text{hm}}$  illetve  $x_j$ ) kompozit javak képviselik, amelyek összetevőinek arányát áraik határozzák meg. Ennek megfelelően az  $x_{ij} = a_{ij}x_j$  változók és az  $a_{ij}$  paraméterek kompozit javakra vonatkoznak.

A hazai és az import termékek közötti helyettesítési lehetőséget a különböző felhasználási területeken általában azonosnak tekintjük. Ez ugyan nem szükségszerű, de elfogadása jelentősen lecsökkenti mind a modell statisztikai adatigényét, mind a változók és a paraméterek számát. A feltevés mellett a hazai-import *kompozit jószág* kínálatát az  $i$ -edik ágazati eredetű termékek esetén  $x_i^{\text{hm}}(x_i^{\text{h}}, u_i)$  első fokon homogén *aggregáló függvénnyel*<sup>2</sup> adjuk meg. Az  $x_i^{\text{hm}}$  függvény jelzi a két termékfajta közötti feltételezett helyettesítés könnyebb vagy nehezebb voltát, s ennek segítségével *rugalmasan korlátozza*<sup>3</sup> a kétféle forrás közötti aránynak az árarányok változását követő elmozdulását. A költségminimalizálás feltevése miatt ugyanis a kompozit jószág kétféle forrás szerinti összetételét kínálati árarányaik ( $p_i^{\text{h}}$  és  $p_i^{\text{m}}$ ) határozzák meg. A kétféle összetevő összkínálatához viszonyított optimális hányadát  $s_i^{\text{h}}(p_i^{\text{h}}, p_i^{\text{m}})$  és  $s_i^{\text{m}}(p_i^{\text{h}}, p_i^{\text{m}})$  függvényekkel fogjuk jelölni.

A hazai és importtermékekhez hasonlóan a hazai piacra, illetve exportra szánt termékeket is gyakran egymás tökéletlen helyettesítőinek tekintjük. Ezzel azt érzékeltetjük, hogy az adott ágazat rendelkezésére álló termelési tényezőket, illetve az általuk meghatározott termelési kapacitást csak bizonyos súrlódással lehet átcsoportosítani a kétféle piacra szánt termékek előállítására között. A termelési kapacitást egy változó összetételű hazai-export kompozit ágazati termék mennyiségével fejezzük ki (a  $j$ -edik ágazat esetén  $x_j$ ), aminek a hazai piacra ( $x_j^{\text{h}}$ ), illetve exportra ( $z_j$ ) szánt termékek közötti elosztási lehetőségeit egy  $x_j(x_j^{\text{h}}, z_j)$  szintén első fokon homogén transzformációs (aggregáló) függvénnyel adjuk meg. A termelési tényezők rendelkezésre álló mennyisége által meghatározott kibocsátási kapacitás (összkibocsátás) és annak felhasználása közötti mérlegegyensúly feltétele ennek megfelelően a következő formát öltik:

$$x_j = x_j(x_j^{\text{h}}, z_j) \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (\text{E1})$$

Ebben az esetben a kétféle piacon elért árak ( $p_j^{\text{h}}$  és  $p_j^{\text{e}}$ ) aránya határozza meg az összkibocsátás hazai és külföldi piacon *kínált* mennyiségét, illetve

<sup>2</sup>Az aggregáló függvények és kompozit javak fogalmáról bővebben ld. Zalai (2011).

<sup>3</sup>Az erőforrás-allokáció lineáris programozási modelljeiben a túlspecializált megoldások elkerülése céljából alkalmazott *merev* (rögizített értékű) *korlátok* kiválthatók sokkal életesebb *rugalmas* korlátokkal a nemlineáris aggregáló függvények bevezetésével (ld. Zalai, 2012).

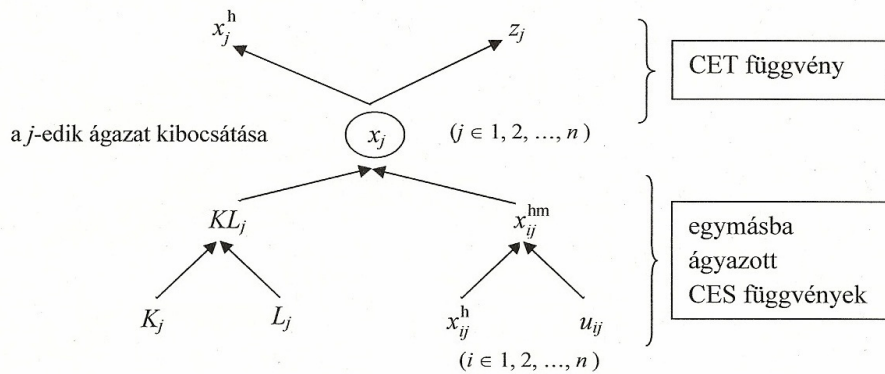
azok összkibocsátáshoz viszonyított optimális arányát, amelyeket  $s_j^d(p_j^h, p_j^e)$  és  $s_j^e(p_j^h, p_j^e)$  függvényekkel fogunk jelölni. A termelők feltételezett célja ugyanis a profit maximalizálása, aminek szükséges feltétele, hogy az adott összkibocsátásból nyert árbevétel a lehető legnagyobb legyen.

Érdeemes megjegyezni, hogy a hazai és export célú termékeket viszont gyakran egymás tökéletes helyetteseiként ábrázoljuk a CGE modellekben, vagyis az (E1) feltétel a lineáris modellekben megszokott egyszerű  $x_j = x_j^h + z_j$  alakot ölti. Ilyenkor a hazai és a külföldi piacon kialakuló kereslet határozza meg  $x_j^h$  és  $z_j$  mennyiségét, illetve az összkibocsátáshoz és egymáshoz viszonyított arányukat is. Exportkeresleti függvények bevezetése azt jelenti, hogy az export fajlagos devizabevétele (világpiaci ára) és az export volumene kölcsönösen függ egymástól, amit  $p_i^{we} = p_i^{we}(z_i)$  inverz keresleti függvényekkel jelenítünk meg a modellben. Ezzel a megoldással, különösen a keresleti rugalmasság paraméterével óvatosan kell bánnunk, mert irreális cserearányokat eredményezhet. Ezt ellensúlyozza, ha a hazai illetve külföldi piacra szánt termékeket egymás tökéletlen helyettesítőiként kezeljük. Ez ugyanis azt jelenti, hogy megjelennek az export kínálati függvények is, ami megakadályozza az export termelésbeli arányának irreális mértékű változását.

A fentiek alapján kapott,

$$x_j = x_j(x_j^h, z_j) = \min\left(\frac{x_{1j}^{hm}}{a_{1j}}, \frac{x_{2j}^{hm}}{a_{2j}}, \dots, \frac{x_{nj}^{hm}}{a_{nj}}, f_j(L_j, K_j)\right)$$

alakban megadható termelési függvény szerkezetét az 1. ábrán szemléltetjük.



1. ábra. A Johansen-féle termelési függvény szerkezete kétszintű beágyazás esetén

A kompozit ágazati termékek kínálatának egyensúlyban meg kell egyeznie keresletükkel. Hazai piacon jelentkező hazai felhasználói igényeket jellemzően termelői ( $\sum_j a_{ij} \cdot x_j$ ), személyes ( $y_i^c$ ) és közösségi ( $s_i^g \cdot y_g$ ) fogyasztás, állóeszköz-beruházási igények ( $\sum_j b_{ij} \cdot y_j^a$ ) és készletváltozás ( $y_i^k$ ) szerint részletezzük (ezek részletes jellemzését ld. később). A természetes elszámolási (mérleg-)

azonosságok ennek megfelelően modellünkben az alábbi formát öltik:

$$x_i^{\text{hm}}(x_i^{\text{h}}, u_i) = \sum_j a_{ij} \cdot x_j + y_i^{\text{c}} + s_i^{\text{g}} \cdot y_{\text{g}} + \sum_j b_{ij} \cdot y_j^{\text{a}} + y_i^{\text{k}} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (\text{E2})$$

ahol  $\mathbf{B} = (b_{ij})$  a beruházási együttthatók mátrixa,  $y_j^{\text{a}}$  a beruházás szintje a  $j$ -edik ágazatban.

Itt is érdemes megjegyezni, hogy a hazai és export célú kibocsátás, valamint az importált ágazati termékek tökéletes helyettesíthetőségének feltevése esetén (E1) és (E2) együtt a hazai termelést és importot együtt kezelő ÁKM alapján felírt termékmérleg azonossággá válna:

$$x_i + u_i = \sum_j a_{ij} \cdot x_j + y_i^{\text{c}} + s_i^{\text{g}} \cdot y_{\text{g}} + \sum_j b_{ij} \cdot y_j^{\text{a}} + y_i^{\text{k}} + z_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (\text{E2}')$$

A termékmérlegek mellett további három mérlegegyensúlyi feltétel jelenik meg a CGE modellekben. A munkaerő- és tőkepiac egyensúlyi feltétele:

$$\sum_j l_j \cdot x_j = l, \quad (\text{E3})$$

$$\sum_j k_j \cdot x_j = k, \quad (\text{E4})$$

ahol  $l$  és  $k$  lehet akár rögzített nagyság (kínálat), akár változó (kereslet). Az utóbbi esetben implicit módon feltesszük, hogy a munkaidő hosszának és/vagy intenzitásának, illetve a kapacitás kihasználásának alkalmazkodása teremt egyensúlyt az adott erőforrás kereslete és kínálata között.

A munkaerő- és tőkepiac egyensúlyi feltételeinek fenti megfogalmazása jelzi, hogy ágazatok között átcsoportosítható erőforrásokként, homogén javakként kezeljük őket, ami hosszú távú szemléletet tükröz. Ez a feltevés, különösen többidőszakos modellekben, nincs összhangban az állóeszközök felhalmozásának kezelésével, ha a beruházások ráfordítási igényeit ágazatok szerint, mint az (E2) egyenletben is, megkülönböztetjük (ld. a beruházási együttthatók mátrix használatát). Ezért többidőszakos modellekben az állóeszközöket gyakran ágazatok között nem átcsoportosítható (ágazatspecifikus) erőforrásokként kezeljük. Köztes lehetőségként kínálkozik ágazatonként differenciált, egymást korlátozottan helyettesíthető javakként való kezelésük. Ilyen megoldással kísérleteztünk a magyar CGE modellekben. Megjegyezzük még, hogy a természeti erőforrások (pl. a föld) általában nem jelennek meg mint termelési tényezők a CGE modellekben.

A további potenciális korlát a külkereskedelmi (deviza-) mérleg egyensúlyi feltétele:

$$\sum_i \left( p_i^{\text{wm}} \cdot u_i - p_i^{\text{we}}(z_i) \cdot z_i \right) = d_e, \quad (\text{E5})$$

ahol  $p_i^{\text{wm}}$  és  $p_i^{\text{we}}$  az import és az export árindexe. Az utóbbiról, mint már jeleztük, gyakran feltesszük, hogy függ az export volumenétől, amit  $p_i^{\text{we}} = p_i^{\text{we}}(z_i)$  inverz keresleti függvénnyel fejezünk ki. A devizamérleg pozitív egyenlege ( $d_e$ ), a felírás módjából következően, deficitet jelez. Ez is lehet kívülről megadott korlát, s ekkor a devizaárfolyam igazodása teremt meg a mérleg egyensúlyát, de rögzített árfolyam feltevése mellett lehet változó is.

Az erőforrások mérlegegyensúlyi allokációját jellemző (E1)-(E5) egyenletek hasonló vagy ugyanilyen formában jelennének meg akár egy input-output, akár egy optimális allokációt eredményező programozási modell primális feladatában.<sup>4</sup>

### Az egyensúlyi árak feltételeit leíró összefüggések

Az egyensúlyi, helyesebben konzisztencia feltételek egy következő jellemző csoportját az ármeghatározási azonosságok alkotják. Az ágazati export ( $p_j^e$ ) és import ( $p_i^m$ ) hazai árindexének meghatározásakor először is az egységes devizasorzó indexe segítségével ( $v$ ) átszámítjuk nemzetközi árukat forintra, majd ad valorem kulcsokat alkalmazva figyelembe vesszük az esetleges exporttámogatás ( $\tau_j^e$ ) illetve importvám ( $\tau_i^m$ ) eltérítő hatását:

$$p_j^e = (1 + \tau_j^e) \cdot v \cdot p_j^{\text{we}}(z_j), \quad (\text{E6})$$

$$p_i^m = (1 + \tau_i^m) \cdot v \cdot p_i^{\text{wm}}. \quad (\text{E7})$$

Az export ( $p_j^e$ ) és import ( $p_i^m$ ), illetve a hazai piacra szánt kibocsátás árindexei ( $p_j^h$ ), valamint a kétféle piacra szánt kibocsátás, illetve a hazai kínálat összetevőinek optimális hányadai ( $s_j^d$  és  $s_j^e$ , illetve  $s_i^h$  és  $s_i^m$ ) alapján kiszámíthatjuk az ágazati termékek (átlagos) *termelői* ( $p_j^a$ ) és *felhasználói* ( $p_i^{\text{hm}}$ ) árindexeit:

$$p_j^a = p_j^h \cdot s_j^d(p_j^h, p_j^e) + p_j^e \cdot s_j^e(p_j^h, p_j^e), \quad (\text{E8})$$

$$p_i^{\text{hm}} = p_i^h \cdot s_i^h(p_i^h, p_i^m) + p_i^m \cdot s_i^m(p_i^h, p_i^m). \quad (\text{E9})$$

A konstans mérethozadék feltevéséből adódóan az egyensúlyi áraknak meg kell egyezniük a termelési költségekkel, teljesülniük kell az alábbi nonprofit árfeltételeknek:

$$p_j^a = \sum_i p_i^{\text{hm}} \cdot a_{ij} + w_j \cdot l_j + q_j \cdot k_j + p_j^a \cdot \tau_j^t, \quad (\text{E10})$$

ahol  $w_j$  és  $q_j$  a munkaerő- és tőke ágazati költségindexe,  $\tau_j^t$  a termelői adó *ad valorem* kulcsa az adott ágazatban. Az adott ágazatban felhasznált munkaerő költségindexe

$$w_j = (1 + \tau_j^w) \cdot w \cdot d_j^w \quad (\text{E11})$$

összefüggéssel adott, amelyben a  $w$  a bérek általános szintjének változója,  $d_j^w$  az általánoshoz viszonyított ágazati bér differencia együtthatója,  $\tau_j^w$  a bérek közterheinek ágazati paramétere.

A felhasznált tőke (állóeszközök) fajlagos költségét a

$$q_j = p_j^b \cdot (r_j^d + \pi \cdot d_j^\pi) \quad (\text{E12})$$

<sup>4</sup>Az ÁKM-re épülő input-output, programozási és CGE modellek hasonlóságainak és különbségeinek részletes elemzésére ld. Zalai (2012).

alakban felírható Walras-féle költségindexszel határozhatjuk meg, amelyben  $\pi$  az általános nettó tőke megtérülési (profit-) ráta,  $d_j^\pi$  az általános rátát ágazatonként differenciáló tényező,  $r_j^d$  az amortizáció ágazati rátája, s végül

$$p_j^b = \sum_i p_i^{\text{hm}} \cdot b_{ij} \quad (\text{E13})$$

az adott ágazati állóeszközök (tőkejavak) átlagos árindexe.

Egyes modellváltozatokban a tőkehozadékként értelmezett, normatív módon képzett nyereség ( $\pi \cdot d_j^\pi \cdot p_j^b$ ) helyett vagy mellett  $p_j^a \cdot \pi_j^c$  additív képlettel definiált haszonkulcsos ( $\pi_j^c$ ) nyereség (is) szerepel a termelői árak (E10) képletének jobb oldalán.

Az ágazati felhasználói árakat a személyes fogyasztásban különböző adók/támogatások módosítják (jellemzően növelik), amelyek nettó kulcsa az  $i$ -edik ágazatban  $\tau_i^c$ , így a fogyasztói árindexeket az alábbi egyenletekkel határozzuk meg:

$$p_i^c = (1 + \tau_i^c) \cdot p_i^{\text{hm}} . \quad (\text{E14})$$

Mivel az általános egyensúlyi feltételek az árak általános szintjét nem határozzák meg, ezért valamilyen módon kívülről kell rögzítenünk, például a személyes fogyasztás árindexének ( $p_c$ ) a bázisszinten való rögzítésével:

$$p_c = \sum_i p_i^c \cdot y_i^c / \sum_i p_i^{c0} \cdot y_i^c = 1 . \quad (\text{E15})$$

Az árakat meghatározó (E6)-(E15) egyenletek ugyanilyen formában jelennek meg egy input-output ármodellben is, azzal a különbséggel, hogy abban a  $p_j^{\text{we}}$ ,  $s_j^d$ ,  $s_j^e$ ,  $s_i^h$ ,  $s_i^m$ ,  $l_j$ ,  $k_j$  változók helyett azonos jelentésű konstans paraméterek szereplnének. Az optimális erőforrás-allokációt eredményező programozási modell duális feladatából kapott árnyékárak összefüggéseiből is ezekhez hasonló egyenletek vezethetők le, de az árnyékárakra kapott összefüggések nem tartalmazhatnának adó- és támogatáskulcsokat, a béreket és profitrátát ágazatonként differenciáló paramétereket és haszonkulcsos nyereséget.

### Az egyensúlyi igazodás és viselkedés feltételeit leíró összefüggések

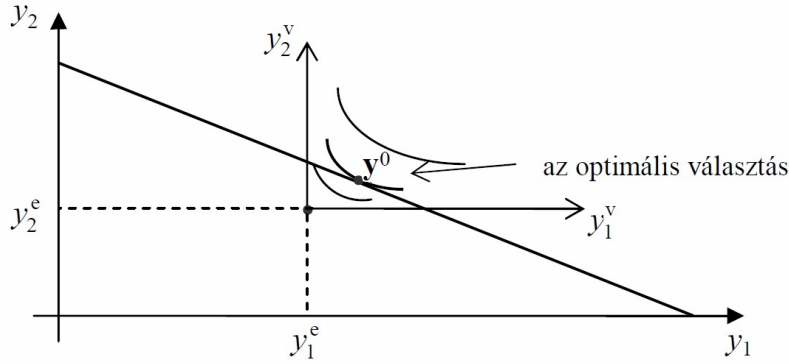
Az eddigi két blokk, a mérlegegyensúlyi és árképzési azonosságok voltaképpen az ÁKM-ekre épülő többszektoros modellek jellemző összefüggéseinek nemlineáris kiterjesztései. Egy sor olyan összetevője a modell endogén változója lesz, amely a lineáris input-output modellekben külső adottság (paraméter vagy exogén változó). Ezek írják le alapvetően a relatív árváltozások által feltételezés szerint beinduló igazodási és viselkedési szabályokat.

A személyes fogyasztás esetén például feltesszük, hogy az árarányok változása következtében, mint a költségminimalizáló fogyasztó esetében, megváltozik a szerkezete. Az ágazati termékek személyes fogyasztását a CGE modellekben jellemzően a Stone (1954) névéhez fűződő lineáris kiadási rendszerrel (LES) ábrázoljuk. Ez egy olyan feltevésen nyugszik, hogy minden termék esetén van egy minimális szint ( $y_i^e$ ), amely megvásárlása mellett a fogyasztók eleve elkötelezték magukat, és csak az e fölötti változó fogyasztás ( $y_i^y$ )

esetében mérlegelnek, hogy a többletjövedelmet hogyan osszák szét különböző termékek között (2. ábra). Stone első fokon homogén Cobb–Douglas-típusú hasznossági függvényt és a kiadás minimalizálását (a hasznosság maximalizálását) feltételezve vezette le ezeket az arányokat ( $s_i^{cv}$ ). Ennek alapján az  $i$ -edik ágazati termék személyes fogyasztói keresletét ( $y_i^c$ ) az alábbi összefüggéssel adhatjuk meg:

$$y_i^c = y_i^e + s_i^{cv}(p_1^c, p_2^c, \dots, p_n^c) \cdot y_{cv}, \quad (E16)$$

ahol  $y_{cv}$  a változó fogyasztás  $y_v(y_1^{cv}, y_2^{cv}, \dots, y_n^{cv})$  aggregáló (Stone esetében Cobb–Douglas-típusú) függvénnyel mért szintje. Az  $s_i^{cv}(p_1^c, p_2^c, \dots, p_n^c)$  függvények pedig nem mások, mint optimális döntés feltételezése mellett (és  $y_{cv} = 1$  esetén) ebből adódó keresleti függvények. Az  $y_v$  függvény, ami nem jelenik meg explicit formában a modellben, voltaképpen a jólét szintjét mérő indexfüggvény szerepét tölti be a CGE modellben, ha  $y_{cv}$  endogén változó. A jóléti optimumot meghatározó programozási modellben ez lenne a célfüggvény.



2. ábra. A Stone-féle LES keresleti rendszer alapjául szolgáló preferenciarendezés két termék esetén

A személyes fogyasztáshoz hasonlóan az ágazati import és export hazai termeléshez viszonyított aránya (ld. fentebb), illetve a munkaerő és az állóeszközök fajlagos, egységnyi kibocsátáshoz viszonyított kereslete is jellemzően az áraktól (árindexektől) függő változó lesz:

$$u_i = s_i^m(p_i^h, p_i^m) / s_i^h(p_i^h, p_i^m) \cdot x_i^h, \quad (E17)$$

$$z_i = s_i^e(p_i^h, p_i^e) / s_i^d(p_i^h, p_i^e) \cdot x_i^h, \quad (E18)$$

$$l_j = l_j(w_j, q_j), \quad (E19)$$

$$k_j = k_j(w_j, q_j). \quad (E20)$$

## A jövedelemelosztás és a költségvetési egyensúly feltételeit leíró összefüggések

Az eddigi (E1)-(E20) egyenlettel definiált rendszerben a potenciális változók száma meghaladja az egyenletek számát. Az egyenletek számával egyenlő endogén változót kijelölve (például az  $x_j, x_j^h, y_i^c, z_j, u_i, l_j, k_j, y_{cv}$  volumenváltozókat és a  $p_i^h, p_i^m, p_i^{hm}, p_i^c, p_j^e, p_j^a, p_j^b, w_j, q_j, w, \pi, v$  árváltozókat) már ebből

az egyenletrendszerből is egy jól determinált modellt kapnánk. Az így nyert modelltől azonban hiányoznak a jövedelemelosztási egyenletek és változók, amelyek a CGE modellek egyik legfontosabb, más makrogazdasági modellektől megkülönböztető, hazai modelljeinkben különösen részletesen kimunkált blokkját képezik. Pontosabban fogalmazva: az (E1)-(E20) egyenletrendszernek a kijelölt változókra kapott megoldásából már levezethető a természetes és értékbeli egyensúllyal összeegyeztethető, azt alátámasztó jövedelemelosztás.

A jövedelemelosztást leíró *költségvetési egyenletekben* megjelennek mindazok a jellegzetes adók, támogatások és egyéb elosztási csatornák (transzferek), amelyeken keresztül a jövedelmek újraelosztása a gazdaságban végbemegy. Ezek felírásához mindenekelőtt be kell vezetni a feltételezett döntéshozókat, gazdasági alanyokat. Modellünkben a reprezentatív gazdasági alanyok a lakosság (h index), az állam (g index), az ágazati termelők (v ill. j index) és a külföld (w index). A jövedelemelosztási csatornák részletes leírásától, ami a CGE modellek egy összetett modulja, itt eltekintünk. Ehelyett csak a gazdasági alanyok elsődleges jövedelmeit és az azokat módosító transzferek egyenlegeit jelenítjük meg az egyes gazdasági alanyokhoz rendelt  $tr^h(\cdot)$ ,  $tr^g(\cdot)$ ,  $tr_j^y(\cdot)$ ,  $tr^w(\cdot)$  függvények segítségével. Ezek a különböző ár- és jövedelemváltozók függvényei, amelyeket itt csak kipontozva  $(\cdot)$  jelzünk.

A transzferek egyenlegeit megjelenítő függvényekről is feltesszük, hogy első fokozaton homogének. A transzferegyenlegek összegének, definíciójuk értelmében (egyik alany adja, a másik kapja), nullának kell lennie. A transzferek a jövedelmek végleges újraelosztását ábrázolják, amelyeket még kiegészít a jövedelmeknek a megtakarítások és hitelek révén megvalósuló ideiglenes elosztása. Ezek egyenlegeit az egyes gazdasági alanyok nettó megtakarításai (nettó hitelpozíciói), az  $S^h$ ,  $S_j^y$ ,  $S^g$  és  $S^w$  potenciális változók segítségével ábrázoljuk a stilizált modell leírásában (pozitív előjelük megtakarítást, a negatív hitelt jelent).

Az egyes gazdasági alanyok (háztartások, termelők, állam, külföld) költségvetési mérlegeinek a tartalma a bennük szereplő változók és paraméterek jelentésének ismeretében könnyen megérthető. A bal oldalán az adott gazdasági alany rendelkezésére álló jövedelem meghatározása, a jobb oldalán kiadásai szerepelnek.

A *háztartások* költségvetési mérlege (a háztartások tőkejövedelme transzferként jelenik meg):

$$\sum_j w \cdot d_j^w \cdot l_j \cdot x_j + tr^h(\cdot) - S^h = \sum_i p_i^c \cdot y_i^c . \quad (\text{E21})$$

A termelők (vállalatok, vállalkozók) költségvetési mérlege:

$$q_j \cdot k_j \cdot x_j + tr_j^y(\cdot) - S_j^y = p_j^b \cdot y_j^a + \sum_i s_{ij}^k \cdot p_i^{hm} \cdot y_i^k , \quad (\text{E22})$$

ahol az  $s_{ij}^k$  paraméterek azt mutatják meg, hogy milyen arányban részesedik a  $j$ -edik ágazat az  $i$ -edik ágazati termékkészletek változásából.



Az állam költségvetési mérlege:<sup>5</sup>

$$\begin{aligned} & \sum_j (\tau_j^w \cdot w \cdot d_j^w \cdot l_j + p_j^a \cdot \tau_j^t) \cdot x_j + \sum_i \tau_i^c \cdot p_i^{\text{hm}} \cdot y_i^c + \\ & + \sum_i (\tau_i^m \cdot v \cdot p_i^{\text{wm}} \cdot u_i - \tau_i^e \cdot v \cdot p_i^{\text{we}}(z_i) \cdot z_i) + \text{tr}^g(\cdot) - S^g = \sum_i p_i^{\text{hm}} \cdot s_i^g \cdot y_g. \end{aligned} \quad (\text{E23})$$

A nemzetközi fizetési mérleg (*külföld*):

$$\sum_i v \cdot p_i^{\text{wm}} \cdot u_i + \text{tr}^w(\cdot) - S^w = \sum_i v \cdot p_i^{\text{we}}(z_i) \cdot z_i, \quad \text{azaz} \quad v \cdot d_e + \text{tr}^w(\cdot) = S^w. \quad (\text{E24})$$

Az egyértelmű matematikai megoldás érdekében az egyenletrendszer regulárisá, jól meghatározottá kell tenni, tehát csak annyi endogén változó szerepelhet benne, ahány egyenlet. Egy sor összefüggést csak implicit formában jelenítettünk meg stilizált modellünkben, ezért egy konkrét modellben jóval nagyobb az egyenletek és az endogén változók száma annál, mint ami az (E1)-(E24) egyenletrendszer alapján becsülhető lenne ( $17n + 7$ , ahol  $n$  az ágazatok száma). Egy 8-12 ágazatot megkülönböztető modellben jellemzően több ezer egyenlet jelenik meg.

A potenciális változók száma, különösen, ha figyelembe vesszük az adókulcsok és más elosztási vagy technikai paraméterek (pl. tőkekihasználtság) lehetséges változását is, jóval több, mint ahány egyenlet a fenti modellben szerepel. Jellemzően endogén változókként jelennek meg a termelés, az export és import, a lakossági fogyasztás volumenének ágazati mutatói, a különböző ágazati bontású árindexek. További potenciális változó a közösségi fogyasztás, a beruházás, a munkabérek, a tőke megtérülés (profit) és a valutaárfolyam, a tőkekihasználtság és a foglalkoztatás általános szintje, továbbá az egyes gazdasági alanyok nettó megtakarítás vagy hitel pozíciója, a különböző adókulcsok. Ezek együttes száma jóval meghaladja azoknak az egyenleteknek a számát, amelyekkel a potenciális változók közötti összefüggések elméleti vagy elszámolás-technikai alapon biztonsággal, kellő pontossággal felírhatóak. Értelmeszerűen ilyen összefüggések a különféle mérlegazonosságok, de a termelési technológiák és bizonyos viselkedési, jövedelemelosztási mechanizmusok ábrázolásában is nagyjából ugyanazokkal a megoldásokkal találkozhatunk a különböző CGE modellekben.

A gazdasági összefüggéseknek azonban van egy olyan, viszonylag széles köre, amelyek megfogalmazására meglehetősen eltérő feltevések alkalmazása jöhet szóba. A valutaárfolyam lehet például nominálisan rögzített („inflációs horgony”), valamilyen reálértelmenben szinten tartott (pl. inflációt követő csúszó-leértékelés), avagy egy fizetési mérlegegyenleg célkitűzésnek alárendelt. Általában a végső felhasználás összetevői és az erőforrások kihasználási szintjei, valamint ezek „duálisai”, a főbb jövedelemtulajdonosok (intézményi szektorok) nettó megtakarításának a szintje és az erőforrások árának meghatározása tekintetében van lehetőség markánsan eltérő megoldások közötti választásra. A konkrét elemzés céljától, illetve az elemzők feltevéseitől függően

<sup>5</sup>Mivel a modellben pénz és pénzteremtés nem jelenik meg, így az abból származó monopójövedelem (seigniorage) sem ábrázolható benne.

a modellező viszonylag nagy szabadsági fokkal döntheti el, hogy mely potenciális változókat tekinti endogéneknek, tehát amelyek értékét a modell megoldása határozza meg, illetve exogéneknek, amelyek értékét kívülről kell megadnia. Ezt, a részben elméleti fogantatású, részben az előrejelzési, becslési bizonytalanságokból fakadó alternatív lehetőségek közötti választási dilemmát a CGE modellek *makrolezárási (macro closure)* problémájának nevezik az irodalomban.

### 3 Makrolezárási lehetőségek, alternatív modelváltozatok

Ha a fentebb endogén változónak tekintett  $x_j, x_j^h, y_i^c, z_j, u_i, l_j, k_j, y_{cv}$  volumenváltozók,  $p_i^h, p_i^m, p_i^{hm}, p_i^c, p_j^e, p_j^a, p_j^b, w_j, q_j, w, \pi, v$  árváltozók mellett ugyancsak endogénnek választjuk az  $S^h, S^g, S^w$  és  $S_j^v$  megtakarítási változókat, akkor az (E21)-(E24) egyenletrendszer is egy jól determinált modell lesz. A  $17n + 7$  feltétel mellett ugyanis ugyanennyi endogén változó szerepel benne. Vegyük figyelembe, hogy az  $S^h, S^g, S^w$  és  $S_j^v$  új változók nem szerepeltek az első 20 egyenletblokkban, amelyek, mint erre fentebb utaltunk, önmagukban meghatározzák a bennük szereplő endogén változók értékét. Az endogén változók ilyen kijelölésével kapott modell tehát *(blokk-) rekurzív* módon is megoldható. Nevezetesen, először megoldhatjuk az (E1)-(E20) egyenletrendszert a bennük szereplő változókra, majd kapott értékeiket az (E21)-(E24) költségvetési egyenletekbe behelyettesítve (epilógus formájában) kiszámíthatjuk az  $S^h, S^g, S^w$  és  $S_j^v$  változók velük összhangban levő egyensúlyi értékeit. A modell ilyen módon kapott változatát programozási jellegű lezárásnak nevezhetjük. (Az endogén és exogén változók tekintetében ugyanazt a logikát követi ugyanis, mint amit az erőforrások optimális elosztására felírt programozási modell primális és duális feltételeiben tapasztalhatunk.)

Semmi sem indokolja azonban azt, hogy az adott egyenletrendszerben szereplő potenciális változók közül éppen így jelöljük ki az endogén változókat. Ha felcseréljük egyes változók endogén és exogén szerepét, akkor az endogén változók kijelölésétől függően eltérő modelváltozatokat kaphatunk, amelyekben az egyenletek már jellemzően összefüggő (szimultán) rendszert képeznek. A fenti változatban endogénnek kijelölt változók között bőven vannak olyanok, amelyek értékét előírhatnánk exogén módon is, mert értékük – a modellben explicit módon nem ábrázolt – gazdaságpolitikai eszközökkel kijelölt célértékük közelében tartható. Ilyen például a *devizaárfolyam* ( $v$ ) és az általános *bérszint* ( $w$ ) változója. Más endogén változók, így például a *lakossági megtakarítások* ( $S^h$ ) értéke pedig megadható lenne a modell további változóinak függvényeként (mondjuk a háztartások jövedelmének konstans hányadaként), és helyette egy eddig exogén változót endogénné tehetünk. Hasonlóképpen, egyes értékjellegű változók nemcsak abszolút (nominál- vagy reál-) értékben, hanem relatív módon is meghatározhatók (pl. *költségvetési hiány* a GDP százalékában).

Vegyük észre azt is, hogy nem jelent meg *endogén változóként* ugyanakkor

számos olyan makrogazdasági mutatószám, amelyek nagyságát befolyásolja a többi változó értékének alakulása. Így például a *közösségi fogyasztás szintje* ( $y_g$ ), a *külkereskedelmi mérleg egyenlege* ( $d_e$ ), az *ágazati beruházások* ( $y_j^a$ ) volumene vagy a beruházások *általános szintje* ( $y_a$ , ami nem szerepel önálló változóként a modell fenti specifikációjában, de könnyen bevezethető, ha a beruházások ágazati szerkezetét rögzítjük). Számos indokot lehet felhozni amellet, hogy ezeket endogén változóként kezeljük, amire az  $S^a$  megtakarítási változók és a költségvetési feltételek bevezetése lehetőséget is nyújt.

A fenti példakkal azt kívántuk érzékeltetni, hogy a *makroökonómiai lezárás* problémája jóval összetettebb a számszerűsített általános egyensúlyelméleti modellekben, mint amivel már Walras is szembetalálta magát úttörő általános egyensúlyi modelljében (bővebben ld. Zalai, 2012). Walras modelljében attól jelent meg az eltérő lezárások lehetősége, mert a személyes fogyasztás mellett megjelent a beruházás is a végső fogyasztásban. Itt nemcsak a beruházás jelenik meg elkülönítve, hanem a közösségi fogyasztás is, az export és az import egyenlege, valamint a devizamérleg is, tehát még több változó, amelyek alakulásának magyarázatára nincs elég feltétel a modellben. A potenciális változók száma így jelentősen meghaladja a figyelembe vett és a további lehetséges magyarázó (funkcionális és viselkedési) egyenletek számát.

A bevezetett (E1)-(E24) feltételek jelentős része lassan változó strukturális adottságot tükröző, nehezen áthágható korlátokat képvisel (naturális, az ár- és költségvetési mérlegegyenletek). Ezeknek természetes módon helyük van a modellben. Más részük ugyanakkor ingatag elméleti feltevéseken vagy bizonytalan adatokon nyugvó hipotézis, ami bizonyos exogén változók formájában ölt testet. A modell gazdaságpolitikai célú alkalmazásakor alaposan meg kell gondolni, hogy a makrogazdasági változók közül melyek értékét célszerű vagy reális exogén módon előírni, s melyeket endogénnek tekinteni. Továbbá célszerű eltérő feltevéseken nyugvó makrolezárási lehetőségek mellett elvégezni az elemzéseket, és így is ellenőrizni a következtetések megbízhatóságát.

A modell-lezárási lehetőségeknek vannak bizonyos korlátjai. Ha például az elsődleges erőforrások rendelkezésre álló mennyisége ( $l_s, k_s$ ) és a külkereskedelmi mérleg egyenlege ( $d_e$ ) kívülről adott, akkor ezek rögzített kínálata behatárolja a végső felhasználási lehetőségeket. Nyilvánvaló, hogy egy ilyen *kínálatvezérelt* modellben nem írhatjuk tetszőlegesen elő a végső felhasználás minden összetevőjének a szintjét, legalább egynek endogénnek kell lennie. A szabadon hagyott változók egyensúlyi szintje fog alkalmazkodni a megváltozott külső feltételekhez. (Ha csak a személyes fogyasztás szintje endogén változó, akkor ez ugyanazt a szerepet tölti be az egyensúlyi modellben, mint az erőforrások optimális elosztására felírt programozási modellben a célfüggvény.)

A primális korlátok és a duális változók programozási modellek elemzéséből megismert kölcsönös kapcsolata további olyan természetes korlátokat sugall, amelyeket figyelembe kell venni az endogén-exogén változók kijelölésekor. Általában értelmetlen megoldáshoz vezethet, ha egyidejűleg exogén változónak választjuk valamely elsődleges erőforrás korlátját és árát is. Meg-

mutatható (ld. Zalai, 2012), hogy egy hasonló felépítésű zárt input-output ármódelben a három erőforrás, a munkaerő, a tőke és a deviza egyensúlyi ára ( $w$ ,  $\pi$  és  $v$ ) közül legfeljebb kettő értéke adható meg kívülről, exogén módon, a harmadik változó értékét a másik kettő egyértelműen meghatározza. Az általános egyensúlyi modellek esetében ugyanez a jelenség egy nagyon szűk tartományra korlátozza a harmadik változó lehetséges értékét.

Ilyen és hasonló hüvelykujjszabályok betartása mellett is számos makrolezárási lehetőség kínálkozik. Nézzük meg a legjellegzetesebb lehetőségeket (részletesebben tárgyalja ezeket Taylor, 1979)!

- *Kínálatvezérelt* (vagy *programozási jellegű*) makrolezárásnak nevezhetjük azt a fentebb elsőként említett megoldást, amelyben az elsődleges erőforrások kínálata ( $l = l_s$ ,  $k = k_s$  és  $d_e$ ) kívülről adott, a gazdasági alanyok nettó hitelpozíciója, az export és az import, és valamelyik végső felhasználási tétel, esetünkben a változó személyi fogyasztás szintje ( $y_{cv}$ ) igazodik a modell többi változójához és feltételéhez.
- *Keresletvezérelt* makrolezárásnak tekinthetjük ezzel szemben azt a megoldást, amelyben az  $l$ ,  $k$  és  $d_e$  változók *endogének*, s helyettük a reálbér ( $\omega = w/p_c$ , ahol  $p_c = \mathbf{ps}^c$ ) vagy a lakossági fogyasztás szintje ( $y_{cv}$ ), a profit általános szintje ( $\pi$ ) és a reálárfolyam ( $v = v/p_d$ ,  $p_d = \mathbf{ps}^{zd}$ ) az exogén változók. Ebben az esetben ugyanis az  $l$ ,  $k$  és  $d_e$  változók a nevezett elsődleges erőforrások iránt megmutatkozó (endogén módon meghatározott) keresletet, s nem azok (rögzített) kínálatát mutatják.
- *Neoklasszikus jellegű* makrolezárásról beszélünk olyankor, amikor a beruházások általános szintje endogén változó, és a megtakarítások egy része (például a nemzetközi fizetési mérleg egyenlege és a lakossági megtakarítás) jelenik meg külső adottságként (exogén változóként).
- *Keynesi jellegű* makrolezárásnak nevezzük ezzel szemben az olyat, melyben a beruházások szintje exogén és a megtakarítások egy része az előzőkhöz alkalmazkodó endogén változó. *Keynes* szellemében még azt is feltehetjük, hogy a bérszint külső adottság (ragadós bérek), és a munkaerő kereslete endogén változó.
- *Klasszikus vagy marxi jellegű* makrolezárásnak tekinthetjük mindezekkel szemben az olyan megoldást, amelyben a lakossági fogyasztás és a reálbér általa meghatározott szintje kívülről adott (lásd a klasszikusok szükséges fogyasztás fogalmát), a beruházás és a profitráta szintje viszont endogén.

A választási lehetőségek köre még ennél is szélesebb. Vegyük észre ugyanis, hogy az eddigi megállapításaink függetlenek a helyettesítési, illetve a keresleti-kínálati függvények konkrét alakjától. Sőt attól sem függnek, hogy ezek a neoklasszikus elmélet alapján feltételezett optimalizáló magatartásból levezetett vagy egyszerűen ökonometriai úton becsült függvények, még az egyenletek árhomogenitásához sem kell feltétlenül ragaszkodnia a modell alkalmazójának. Ismertek olyan makroökonómiai megfontolásokkal ötvözött

CGE modellek is (Taylor, 1979), amelyekben az árszint is endogén változó, és egyes névleges változók szintje az általános árszinttől eltérően alakul (például induló értékük változatlan marad). Egy ilyen modellben már az árváltozások is az egyes gazdasági alanyok jövedelempozícióinak megváltozásához vezetnek. Ismertek olyan kísérletek is, amelyek az árszintet úgy teszik endogén változóvá, hogy a CGE modellt kiegészítik egy monetáris makroökonómiai blokkal (Bourguignon–Branson–De Melo, 1989, Révész, 2006).

### Egy példa a lezárási lehetőségek közötti választás illusztrálására

A makrolezárási lehetőségek ismertetését egy, a magyar gazdaságra (1991-es adatok alapján) számszerűsített modellel végzett szimulációval illusztráljuk.<sup>6</sup> Elemzésünkben az alábbi hét fontos makrogazdasági mutató alakulására koncentráltunk (zárójelben a táblázatbeli rövidített megfelelőiket tüntettük fel):

- lakossági fogyasztás ( $y_c$ )
- bruttó beruházás ( $y_a$ )
- külkereskedelmi mérleg egyenlege ( $d_e$ )
- az államháztartás egyenlege ( $S^g$ )
- a deviza reálárfolyama ( $v$ )
- a reálbérek átlagos szintje ( $\omega$ )
- az általános tőkehozadék ( $\pi$ )
- az össztermelés szintje ( $k_d/k_s$ ).

Az utóbbi mutató változása modellünk sajátos specifikációjában megegyezik az állóeszközök kihasználtságának indexével ( $k_d/k_s$ ). A számítások során ugyanis eltekintettünk a tőke és a munka közötti helyettesítés lehetőségétől (változatlan ráfordítási együttthatók). Helyette feltettük, hogy a foglalkoztatás szintje minden ágazatban követi az állóeszközök kihasználtságában bekövetkező változást. A változatlan munkaerő- és tőkeárfordítási együttthatók feltételezése következtében tekinthetjük a kapacitáskihasználás szintjét a teljes termelés volumenindexének.

Négy szimuláció eredményét elemezzük röviden. Mindegyik a forint reálárfolyamának 5 százalékos emelésének (a forint leértékelésének) lehetséges hatásait elemzi, részben közös, részben eltérő feltevések mellett. Pontosabb lenne nem hatásokról beszélni, hanem inkább az adott nagyságú leértékeléssel konzisztens, más gazdasági jellemzőkben bekövetkező változásokról. A lakossági változó fogyasztás ( $y_{cv}$ ) és az állami költségvetés egyenlege ( $S^g$ ) végig endogén változó volt. Az egyes számításokban négy makrogazdasági változó, nevezetesen a beruházások szintje ( $y_a$ ), a reálbérek ( $\omega$ ), az általános tőkehozadék ( $\pi$  profitráta) és a kapacitáskihasználás szintje ( $k_d/k_s$ ) közül felváltva kettőt rögzítve alternatív módokon meghatározottá tettük („lezártuk”) a modellt. A négy változat jellemzői és eredményei az alábbiakban foglalhatók össze (lásd 1. táblázat).

1. Az *első futásban* feltettük, hogy a reálbérek és a beruházások szintje változatlan marad. A deviza leértékelése miatt megdrágul az import, és ennek

<sup>6</sup>Az 1991-es adatokon alapuló példát Zalai (1998) cikkéből vettük át!

költségnövelő hatását az eszközarányos nyereségráta kis mérvű (0,3 százalékpontos) csökkenése ellensúlyozza. Ugyanakkor nő az export (4%) és csökken a felhasznált import mennyisége (a termelési szint több mint 2%-os növekedése ellenére is). Ezek következtében csökken a fizetési mérleg hiánya (15 Mrd Ft-tal). A termelés növekedése a változatlan reálbér, megtakarítási hányad, illetve a közösségi fogyasztás és beruházás feltevésének egyenes következménye. A megnövekedett exportot ugyanis csak többlettermelésből lehet fedezni, ami – a többletfoglalkoztatás révén – még egy enyhe multiplikátor-hatást is kivált (a lakossági fogyasztás 1,2%-kal nő).

2. A *második futásban* a reálbérek helyett a nyereségrátát tekintettük változatlanoknak, a többi tekintetben megőriztük az első futás feltevéseit. Most a reálbér 1,3%-os csökkenése ellensúlyozza a reálárfolyam feltételezett 5%-os növekedését. A megnövekedett export folytán most is nő a termelés. A reálbér csökken ugyan, de a kifizetett bérek tömege nő, és így a lakossági fogyasztás, bár kevésbé, mint az előző futásban, de 0,3%-kal most is nő. Az enyhébb multiplikátorhatás és a termelés kisebb mértékű növekedése csekély mértékben javítja a külkereskedelmi mérleg egyenlegét (újabb 5 Mrd Ft-tal) az előző futáshoz képest.

3. A *harmadik futás* abban különbözik az elsőtől, hogy itt a beruházások helyett a termelés (pontosabban a kapacitáskihasználtság) szintjét tekintettük változatlanoknak. Mivel tehát a termelés nem nő és a reálbérek szintje is változatlan, a lakossági fogyasztás alig változik, a közösségi fogyasztást pedig eleve változatlanoknak feltételeztük. Ilyen felvételek mellett az export természetesen csak a beruházások terhére nőhet, amelyek szintje 12,7%-kal csökken. A leértékelés az előző két futáshoz képest jobban javítja a külkereskedelmi mérleget (a javulás mértéke ezúttal 40 Mrd Ft, 62 helyett 22 Mrd Ft deficit).

Változó	induló érték	1. futás	2. futás	3. futás	4. futás
Lakossági fogyasztás (%)	100	1,2	0,3	0,2	1,8
Külkereskedelmi egyenleg (Mrd Ft)	-62	-47	-42	-22	<b>-62</b>
Költségvetés egyenlege (Mrd Ft)	15	7	1	-6	14
Beruházás általános szintje (%)	100	<b>0,0</b>	<b>0,0</b>	-12,7	7,5
Reálbérszint (%)	100	<b>0,0</b>	-1,3	<b>0,0</b>	<b>0,0</b>
Nettó tőkemegtérülési ráta (%)	<b>3,0</b>	2,7	3,0	2,7	2,7
Össztermelés (%)	100	2,0	1,6	<b>0,0</b>	3,2

1. táblázat. Főbb makrogazdasági változók egymással konzisztens változása  
(a vastagon szedett számok rögzített értékek)

4. A *negyedik futásban* olyan kérdésre kerestünk választ, amely gyakran volt gazdaságpolitikai viták tárgya az elmúlt évtizedekben. A magyar gazdaság importigényes felhasználási szerkezete miatt a növekedés kedvezőtlenül hat a külkereskedelmi mérlegre. Ez a negatív hatás a számszerűsített modellben is jelentkezik. Ennek jellemzésére kiszámoltuk, hogy az 5%-os leértékelés önmagában kereskedelmimérleg-javító hatását a termelés mekkora növekedése semlegesítené. Most tehát a beruházás helyett a kereskedelmi mérleg egyenlegét tekintettük változatlanoknak. Felvételeink mellett a termelés mintegy

3,5%-os növekedése már semlegesítené a forint 5%-os leértékelésének hatását. A termelés növekedését ebben a futásban részben az import helyettesítése és az export növekedése, részben a lakossági fogyasztás (a már tárgyalt multiplikátorhatás) 1,8%-os és a beruházás 7,5%-os növekedése generálja.

A modellünkkel végzett elemzésekből az adódik, hogy az 1990-es évek eleji magyar gazdaságban – változatlan közfogyasztási szint és jövedelemelosztási mechanizmusok mellett – a termelés 3,2%-os növekedése a fogyasztás 1,6%-os, a beruházások 20%-os növekedésével és a kereskedelmi mérleg 40 Mrd forintos romlásával együtt alkotott volna egy konzisztens gazdaságpolitikai alternatívát (lásd a 3. és 4. futás különbségét). A futásokból azt is láthatjuk, hogy változatlan hatékonysági paraméterek mellett egy 5%-os reálleértékelés a reálbér 1,3%-os, vagy a 3%-osnak feltételezett átlagos tőkearányos nyereségrész 0,3 százalékpontos csökkenésével lett volna összeegyeztethető.

Példánkkal nemcsak a makrolezárási lehetőségek közötti választásnak az eredményre gyakorolt hatását kívántuk érzékeltetni, hanem egyúttal azt is, milyen típusú gazdaságpolitikai elemzésekre és következtetésekre levonására alkalmasak a CGE modellek. Több éven át folytatott, aktuális statisztikai adatokkal kalibrált, megfelelő szakértői becslésekkel alátámasztott modelljeinkkel folytatott különböző elemzéseink alapján meggyőződhattünk arról is, hogy a főbb strukturális jellemzők állandósága következtében modelljeink kielégítő pontossággal képesek megbecsülni a gazdaságpolitikai intézkedések várható hatásait.

## 4 A HUMUSGE modellek sajátosságai

A HUMUSGE modell első változata Zalai Ernő irányításával készült el a IIASA-ban hazai munkatársak bevonásával 1981-84 között (ld. Zalai, 1983). Az 1980-as évek vége felé csatlakozott a munkálatokhoz e cikk másik szerzője is, és azóta – jelentős részben továbbra is nemzetközi együttműködésben és megbízásoknak eleget téve – folyamatosan és lényeges mértékben tovább alakult a kezdeti modell és annak megoldó algoritmusai. A korai modellek megoldására az Országos Tervhivatal Tervgazdasági Kutatóintézetének és Számítástechnikai Központjának munkatársai terveztek Poór András irányításával egy dekompozíciós, iteratív eljárást és készítették el annak Fortran programját (ld. Sivák – Tihanyi – Zalai, 1984). A kezdeti modell sajátos szerkezete lehetővé tette a modell megoldásának dekomponálását, ami nagyon szellemes és hatékony algoritmust eredményezett, de ugyanakkor korlátozta a modell továbbfejlesztését. Ezért az 1990-es években áttértünk az addigra kifejlesztett GAMS programcsomag használatára.

A gazdasági átalakulás, az EU-csatlakozás speciális jelenségei a szokásos CGE modellektől számos tekintetben eltérő, azokat meghaladó modell(család) kialakulásához vezetett. A hasonló típusú – más országokban, mások által kidolgozott – modellekkel összevetve modelljeink előnyös megkülönböztető vonásai között az alábbiak emelhetők ki, mint a szokásosnál részletesebben kidolgozott összetevők:

- a külkereskedelmi szektor (megkülönböztetett viszonylatok, keresleti és kínálati tényezők szimultán figyelembe vétele, az import-helyettesíthetőség főbb felhasználói területek szerinti megkülönböztetése);
- a lakosság (jövedelmeinek és fogyasztásának) tíz háztartáscsoportra való felbontása;
- a jövedelemelosztás és újraelosztás részletes ábrázolása;

A jövedelemelosztást modellünk különösen részletesen ábrázolja. Ágazati mélységben nyomon követi a működési eredmény felosztását is, és figyelembe veszi a különféle természetbeni vagy kötött felhasználású támogatásokat is. Sajátos megoldás, hogy több transzfer esetében az államot közvetítőként ábrázoljuk: bizonyos fizetések egyszerűen keresztülfolynak rajta (az SNA kézikönyv „routing through”-nak nevezi ezt). Erre olyan esetekben kerül sor, amikor nem állapítható meg, vagy közgazdaságilag nincs jelentősége, hogy ki-kinek fizette az adott transzfert. Így például a külföldre menő illetve onnan jövő transzfereket az állam fizeti, illetve bevételezi (a kamatokat viszont éppen fordítva, a pénzüzetek). A modell lezárása dönti el, hogy az ágazatok által felvett (nettó) hitelekre vagy az ágazati beruházásokra adunk meg explicit viselkedési függvényeket, míg a másik tétel nagysága reziduum módjára alakul ki.

- a fentivel összefügg az adórendszer elemeinek részletes kibontása;
- a CGE modellekben az adókulcsok egy részét, szemben például az input-output modellekkel, endogén módon is meghatározhatjuk, valamilyen más (fedezeti, orientációs, elosztási stb.) kritérium teljesítését biztosító feltétel mellett. A nyereségadókat ágazatonként differenciáltan, egy fix alapszint és egy marginális adókulcs segítségével határozzuk meg;
- nem piactisztító egyensúlyi áralakulás figyelembe vételének lehetősége az elsődleges erőforrások (munkaerő, tőke) piacán;

Az általános egyensúlyi modellek elméletének megfelelően a CGE modellekben az ágazatokat feltevés szerint nyereségüket maximalizáló, és így egyidejűleg a költségeket minimalizáló képzetes termelők képviselik (reprezentatív termelők). A kibocsátások, illetve a ráfordítások szerkezetét tehát az adott árak mellett hozott optimális döntések határozzák meg. A komparatív statika módszerét alkalmazva fel kell tehát tennünk, hogy az induló állapot, ami rendszerint a megfigyelt állapot, szintén optimális allokáció volt.

Mi azonban időnként megengedjük, ha alapos okunk van feltenni, hogy az induló állapot – valamilyen intézményi korlát miatt – nem volt optimális. Ilyenkor az optimálistól való eltérés feltételezett mértéke alapján becsljük meg a modell vonatkozó paramétereit. (Például: az importot korlátozó adminisztratív korlátok miatt az import hazai kínálatához viszonyított aránya a bázis megoldásban 10 százalékkal alacsonyabb volt az árányok által indokolt optimális aránynál.) A modellel végzett elemzések során ezért arra a kérdésre is választ kaphatunk, hogyan hatna a jelzett intézményi korlátok elmozdítása a gazdaság jellemzőire.

Egy másik lehetséges eltérést a szigorúan neoklasszikus megközelítéstől az optimális alkalmazkodást lelassító intézményi korlátok (súrlódási tényezők) figyelembe vételének a lehetősége adja.



A relatív árak megváltozása következtében egy adott, optimálisnak tekintett állapotból az új optimális állapotba történő elmozdulás – az alkalmazkodást lassító súrlódási erők (pl. korábban megkötött egyezmények) következtében – részleges lehet csupán. Az ilyen fajta részleges alkalmazkodást ábrázolhatjuk a neoklasszikus formák módosítása révén, oly módon, hogy megkülönböztetjük a CES helyettesítési függvény rugalmassági paraméterét és az összetevők arányát az árarányaik függvényében kifejező formula rugalmassági paraméterének értékét. Ha az utóbbi kisebb, akkor az elmozdulás iránya egybeesik az optimális választás által diktálttal, mértéke viszont elmarad attól.

- a háztartási döntések ábrázolása;

A neoklasszikus alapú CGE modellek a háztartások döntését többnyire a fogyasztás és a szabadidő közötti választás problémájaként ábrázolják. Ezen belül a fogyasztást az egyes fogyasztási cikkek aggregátumaként írják le, majd ezt az aggregált fogyasztást és a szabadidőt ismét egy újabb helyettesítési függvény segítségével aggregálják. Ha bevonjuk a környezetminőséget is a jólét komponensei közé, akkor felmerül a beágyazás sorrendjének a problémája. Nevezetesen az, hogy a jólét három fő összetevője közül melyik kettő van szorosabb helyettesítési viszonyban egymással. A környezetgazdasági szakemberek többsége úgy véli, hogy a szabadidő eltöltésének minősége alapvetően függ a környezet állapotától, ezért mi is ezt a két tényezőt kapcsoltuk össze egy CES aggregátumban, a magasabb szinten pedig ez az aggregátum versenyez az aggregált fogyasztással, szintén egy CES függvény segítségével. Természetesen a háztartások döntéseit nem csak az ortodox neoklasszikus elmélet alapján lehet ábrázolni. A munkaerő kínálatát például többnyire exogén változóként kezeljük.

Külön problémát okoz a háztartási szektor 10 rétegre bontott ábrázolása. A jóléti függvényt és a háztartások ezzel kapcsolatos döntését az általános gyakorlatnak megfelelően csak az aggregált, az összes háztartást képviselő, ún. „reprezentatív” fogyasztóra specifikáljuk mi is. Természetesen a fogyasztás, a szabadidő és a környezetminőség iránti aggregált szinten meghatározott keresleteket le kellett bontanunk rétegekre. Ehhez egy a bázisévből számszerűsített (de természetesen paraméterként kívülről tetszőlegesen módosítható) bérreszesedési együtthatómátrixot használunk fel, ami azt mutatja meg, hogy az egyes ágazatokban felmerülő bérköltségek milyen hányada kerül az egyes rétegekhez;

- a nemzetközi gyakorlathoz képest erőteljesebben igyekeztünk a modellek megbízható statisztikai adatok alapján történő számszerűsítésre (ezekről bővebben ld. *Zalai – Révész, 2000, Révész, 2003, Révész, 2003a, Révész – Takács, 2011*);
- a makroökonómiai lezárás általánosítása.

Az elmúlt 15 évben a HUMUS modellel olyan kérdésköröket sikerült érdemben vizsgálni, mint például

- a külkereskedelmi reorientáció,
- az importliberalizálás,
- a világpiacon olajár-változások,

- stabilizációs intézkedéscsomagok (1995 és 2006-08),
- az élelmiszergazdaság ár- és szerkezetváltozásai,
- a támogatásleépítési program bevezetése,
- a környezeti adók bevezetése,
- a paksi erőmű gazdasági és környezeti hatását.

Az utóbbi kapcsán megjegyezzük, hogy – mint már említettük – a gazdaság (economy), az energiaszektor (energy) és a környezet (environment) közötti kölcsönhatások elemzése a CGE modellek egy kiemelt alkalmazási területe. Az EU Bizottság támogatásával kifejlesztett GEM-E3 referenciamodell (ld. Capros et al., 1997) fejlesztésében végzett közös munkánk tapasztalatai alapján a HUMUSGE modellt is alkalmassá tettük fenti típusú elemzések elvégzésére. Ez modellünk ma is lényeges fejlesztések alatt álló része. A modell jelenlegi változatában figyelembe vesszük a levegőszennyezés ágazatonként, energiafajtként és szennyezőanyagokként meglehetősen különböző kiinduló koefficienseit, az energia és az erőforrások illetve az egyes energiaforrások egymás közötti helyettesítési lehetőségeit, az emissziót csökkentő technológiákat, valamint az emisszióra vonatkozó adókat és hatósági limiteket is. A környezeti modul részletes ismertetésétől itt eltekintünk. Erről és a kapott modellel végzett elemzésünkről egy későbbi cikkben tervezünk beszámolni.

Noha fentebb csak modelljeink hazai alkalmazásait soroltuk fel, érdemes megemlíteni, hogy modellünket az elmúlt években, a bécsi IHS gazdaságkutató intézettel együttműködve, adaptáltuk az osztrák gazdaságra is (ld. Balabanov – Révész – Zalai, 2007). Ennek során a modell, különösen annak energia-környezeti modullel további érdekes elemekkel gazdagodott.

## 5 A CGE modellek adatbázisa

A statikus (egy-időszakos) általános egyensúlyi modelleket rendszerint egy adott bázisév statisztikai adatai alapján kalibrálják. A modell a gazdaság legkülönbözőbb folyamatairól igényel adatokat, de az ágazati bontási igényt leszámítva viszonylag kevés adatra van szükség.<sup>7</sup>

A modellhez szükséges fontosabb adatok az ágazati termékmérlegek, a költség-jövedelem mérlegek, a termékekhez kapcsolódó különféle pénzügyi hidak, az erőforrás-állományok és készletek, illetve adott specifikációtól függően a beruházási mátrix és a lakossági jövedelmek és fogyasztás rétegenkénti bontása. Ezeket az adatokat az alábbiakban vázolt fontosabb statisztikák tartalmazzák. Az elsősorban a nemzeti számlák és az input-output táblák adatain alapuló adatokat rendszerint az ún. *társadalmi elszámolási mátrixban* (SAM) foglalják össze.

A modell adatokkal való feltöltése azonban gyakran megoldhatatlannak látszó nehézségekbe ütközik. A gazdasági rendszerváltozást és EU-csatlakozást követő statisztikai rendszerváltozás a modellezés adatokkal való ellátását

<sup>7</sup>A CGE modellek adatigényeivel kapcsolatos kérdésekbe részletesebben betekintést nyújt Révész és Zalai (2000), illetve Révész és Takács (2011) cikke.

is érintette. Ennek mind kedvező, mind kedvezőtlen hatásai jelentősek. Miközben javultak a pénzügyi rendszerrel (devizafolyamatokkal, bankrendszerrel stb.) kapcsolatos információk, egyidejűleg lényegesen romlottak, számos esetben meg is szűntek a reálfolyamatokkal kapcsolatos statisztikák.

A jövedelemelosztási adatok tekintetében a kedvező és kedvezőtlen folyamatok nagyjából kiegyenlítik egymást, többnyire azért, hogy az ágazati bontások megszűnését az aggregált adatok javulása ellensúlyozta. A strukturális változások és intézkedések hatásainak kimutatására alkalmas többszektoros modellezés szempontjából azonban e két változás mérlege kedvezőtlen.

A termelési függvények számszerűsítését, s ezáltal a kapacitáskorlátokat figyelembe vevő egyensúlyi modellek gyakorlati alkalmazását jelentősen előmozdíthatja két újítás. Egyrészt az, hogy a KSH 2000-től kezdődően ágazati bontásban publikálja az állóeszközök állományának PIM-módszerrel becsült értékeit. Másrészt pedig az, hogy a 2005. évi Ágazati Kapcsolatok Mérlegében az amortizáció és a foglalkoztatottak létszámának ágazati bontású adatai is megjelentek, bár az ún. egyenértékes létszám adatokra lenne szükség<sup>8</sup>.

A nemzeti vagyoni vonatkozó kimutatások (beleértve a háztartások fogyasztásként elszámolt tartós javainak értékét is) is meggyérültek. Az elméleti igényrel definiált és mért adatok hiánya pedig a statisztikai rendszer régi adóssága.

A gazdaság különféle részterületeiről (termelési-, felhasználási, áralakulási és jövedelemelosztási folyamatairól) a CGE modellek által igényelt adatok fő forrásait az alábbiakban ismertetjük.

### Az Ágazati Kapcsolatok Mérlege (ÁKM)

A többszektoros modellek alapvető adatforrása az Ágazati Kapcsolatok Mérlege (ÁKM). Ennek szerkezete közismert, de az kevésbé, hogy előállításánál számos kiegészítő táblázat is készül, amelyek ismerete a modell számszerűsítéséhez szintén szükséges. Ezen táblázatok közül az importmátrix, a belföldi és import termékadók és terméktámogatások (pénzügyi hidak) mátrixa, valamint a fogyasztás transzformációs mátrixa a legfontosabb. (Ez utóbbi a fogyasztást ágazati eredet és szükséglet kategóriák szerinti bontásban ábrázolja.)

A pénzügyi hidak táblázatai alapvetően a termékek felhasználói árai és termelői árai közötti viszony becslésére szolgálnak. Elvben ide sorolhatók az exporttámogatások is, ezeknek azonban a statisztikákban nincs megadva az ágazati bontása. Szerencsére az utóbbi időben nyílt exporttámogatásban csak az élelmiszeripar és a mezőgazdaság termékei részesülnek. Így is nehéz azonban reálisan megbecsülni az exporttámogatások megoszlását, amin keresztül közvetve, a világpiacon és belföldi árak arányát is becsljük.

Az ÁKM-ek személyes fogyasztási oszlopa csak a hazai fogyasztást mutatja, és nem a rezidensek fogyasztását (ami a hazai fogyasztástól a turisták

<sup>8</sup>Mégpedig úgy, hogy az egyéni vállalkozókat, őstermelőket, részmunkaidősöket, segítő családtagokat stb. is megfelelő mértékben (a hazánkban jellegzetes fiktív álláshalmazt kiszűrve) kellene beszámítani a statisztikába.

fogyasztásával tér el). Ez a korrekció csak ágazati bontás nélkül, egy összegben jelenik meg az ÁKM-ben.

Az ÁKM-ek alsó szárnya tartalmazza a hozzáadott érték felbontását. Ez a felbontás azonban lényegében csak az elsődleges jövedelemelosztás fázisát mutatja be, a direkt adók, különféle transzferek (kamatok, osztalék, felhalmozási juttatások stb.) és a hitelpozíciók változásának értékét nem.

Az ÁKM-ek az ágazati termékek készleteinek változását csak összevontan mutatják ki, ezek felhasználói területenkénti megoszlására vonatkozó információk csak korlátozottan állnak rendelkezésünkre. (Itt az anyag- és saját termelésű készletek szerinti bontásra utalhatunk.) A helyzetet bonyolítja, hogy az ÁKM a készletfelhalmozás oszlopában „tünteteti el” a statisztikai eltérést („egyéb nem specifikált felhasználás”) is.

### A nemzeti számlák

A jövedelemelosztásra vonatkozóan némiképp részletesebb adatokkal szolgálnak a nemzeti számlák. Ezekben az egyes intézményi szektorokra bontva számos transzfer és adónem megjelenik, azonban többnyire csak aggregáltan, ágazati bontás nélkül. A nemzeti számlák a bankszektorról is viszonylag részletes információt adnak, de nem különítik el a Nemzeti Bankot a kereskedelmi bankoktól. Viszont egyedül a nemzeti számlák, illetve a velük együtt publikált pénzügyi számlák mutatják be az átértékelések, az adósságleírások és az árfolyamváltozás hatására az egyes területeken bekövetkező passzív vagyenváltozásokat.

### Az állami költségvetési beszámoló

Ez a beszámoló sok adózással és támogatással kapcsolatos adatot tartalmaz, beleértve az olyan háttéradatokat is, mint például a vállalati nyereség és az adókedvezmények alakulása. Legnagyobb hátránya az, hogy ezeket a kategóriákat nem eredmény, hanem pénzforgalmi szemléletben mutatja be, és az alkalmazott bontás sokszor nem megfelelő (különösen a lakossági adók és illetékek, a helyi adók és az elkülönített alapokba való befizetések esetében). A beszámoló nem mutatja be a KSH-ban szokásosan definiált fiktív jövedelemadó tételeket sem (mint például az el nem számolt amortizáció, a beruházási áfa, vagy a költségvetési intézmények nyereségérdekelt tevékenységének nem társasági adóként megjelenő adója).

Ezen túlmenően a beszámolók az államháztartás egyes részeinek eszközforrás mérlegeit és az államadósság szerkezetét is bemutatják. A központi költségvetésnek a követelései azonban többnyire hiányoznak belőlük.

## 6 Befejezés

Dolgozatunkban áttekintettük a CGE modellezési irányzat kialakulásának történetét, a modellek közgazdaságtani és matematikai jellemzőit, a modellek adatigényét és azok forrásait, és röviden érintettük a hazai alkalmazásaikat is.

Összefoglalásként azt mondhatjuk, hogy a számszerűsített általános egyensúlyi modellezés „egyensúlyi” jellege nemcsak a termék-, erőforrás-, jövedelem- stb. mérlegek egyensúlyának követelményére vonatkozatható, hanem kiegyensúlyozott figyelmet igényel a modellezőtől is a felmerülő gazdaságelméleti, statisztikai, matematikai, számítástechnikai problémák, valamint a technológiára, a gazdasági mechanizmusra, a gazdasági szereplők viselkedésére vonatkozó empirikus ismeretek irányában. Erre a kiegyensúlyozott figyelemre különösen szükség van az alapmodell kiterjesztései során. A modell új modulokkal való kibővítése során meg kell találni az egyensúlyt a modell elméleti koherenciája és gyakorlati relevanciája között. Ha ezeket szem előtt tartjuk, akkor elmondhatjuk, hogy egy olyan korszerű modellezési eszköz és ismeret birtokában vagyunk, amely jól kamatoztatható a gazdaság különféle szférái, többek között a gazdaság, az energiaszektor és a környezet kölcsönös összefüggéseinek elemzésében (lásd például Morris, Révész, Fucskó and Zalai, 1999). A már említett készülő cikkünkben a modell egy ilyen kiterjesztéséről és alkalmazásáról fogunk beszámolni.

## Függelék: A stilizált CGE modell egyenleteinek és alkalmazott jelöléseinek listája

(E1) *Egyensúly a kibocsátás és a kapacitás között:*

$$x_j = x_j(x_j^h, z_j) .$$

(E2) *A termékpiacon egyensúlya:*

$$x_i^{\text{hm}}(x_i^h, u_i) = \sum_j a_{ij} \cdot x_j + y_i^c + s_i^g \cdot y_g + \sum_j b_{ij} \cdot y_j^a + y_i^k \quad (i = 1, 2, \dots, n) .$$

(E3) *A munkaerőpiac egyensúlya:*

$$\sum_j l_j \cdot x_j = l .$$

(E4) *Az állóeszközpiac egyensúlya:*

$$\sum_j k_j \cdot x_j = k .$$

(E5) *A külkereskedelmi (deviza-) mérleg egyensúlya:*

$$\sum_i (p_i^{\text{wm}} \cdot u_i - p_i^{\text{we}}(z_i) \cdot z_i) = d_e ,$$

(E6) *Az ágazati termelői árak indexe:*

$$p_j^a = \sum_i p_i^{\text{hm}} \cdot a_{ij} + w_j \cdot l_j + q_j \cdot k_j + p_j^a \cdot (\pi_j^c + \tau_j^t) .$$

(E7) *Az import hazai árindexe:*

$$p_i^m = (1 + \tau_i^m) \cdot v \cdot p_i^{\text{wm}} .$$

(E8) *Az átlagos hazai felhasználói árindex:*

$$p_i^{\text{hm}} = p_i^h \cdot s_i^h(p_i^h, p_i^m) + p_i^m \cdot s_i^m(p_i^h, p_i^m) .$$

(E9) A fogyasztói árak indexei:

$$p_i^c = (1 + \tau_i^c) \cdot p_i^{hm} .$$

(E10) Az export értékesítésének árindexe:

$$p_j^e = (1 + \tau_j^e) \cdot v \cdot p_j^{we}(z_j) .$$

(E11) A hazai kibocsátás átlagos termelői árindexe:

$$p_j^a = p_j^h \cdot s_j^d(p_j^h, p_j^e) + p_j^e \cdot s_j^e(p_j^h, p_j^e) .$$

(E12) Az ágazati állóeszközök árindexe:

$$p_j^b = \sum_i p_i^{hm} \cdot b_{ij} .$$

(E13) Az állóeszközök költségindexe:

$$q_j = p_j^b \cdot (r_j^d + \pi \cdot d_j^\pi) .$$

(E14) A munkaerő költségindexe:

$$w_j = (1 + \tau_j^w) \cdot w \cdot d_j^w .$$

(E15) Az árszint rögzítése:

$$(p_c :=) \sum_i p_i^c \cdot y_i^c / \sum_i p_i^{c0} \cdot y_i^c = 1 .$$

(E16) A fogyasztói kereslet:

$$y_i^c = y_i^e + s_i^{cv}(p_1^c, p_2^c, \dots, p_n^c) \cdot y_{cv} ,$$

(E17) Az import kereslete:

$$u_i = \tau_i^{mh}(p_i^h, p_i^m) \cdot x_i^h .$$

(E18) Az export kínálata:

$$z_i = r_i^{ed}(p_i^h, p_i^e) \cdot x_i^h .$$

(E19) A munkaerő (fajlagos) kereslete:

$$l_j = l_j(w_j, q_j) .$$

(E20) Az állóeszközök (fajlagos) kereslete:

$$k_j = k_j(w_j, q_j) .$$

(E21) A háztartások költségvetési mérlege:

$$\sum_j w \cdot d_j^w \cdot l_j \cdot x_j + tr^h(\cdot) - S^h = \sum_i p_i^c \cdot y_i^c .$$

(E22) A termelők (vállalatok, vállalkozók) költségvetési mérlege:

$$q_j \cdot k_j \cdot x_j + tr_j^v(\cdot) - S_j^v = p_j^b \cdot y_j^a + \sum_i s_{ij}^k \cdot p_i^{hm} \cdot y_i^k .$$

(E23) Az (állami) költségvetési mérleg:

$$\begin{aligned} & \sum_j (\tau_j^w \cdot w \cdot d_j^w \cdot l_j + p_j^a \cdot \tau_j^t) \cdot x_j + \sum_i \tau_i^c \cdot p_i^{hm} \cdot y_i^c + \\ & + \sum_i (\tau_i^m \cdot v \cdot p_i^{wm} \cdot u_i - \tau_i^e \cdot v \cdot p_i^{we}(z_i) \cdot z_i) + tr^g(\cdot) - S^g = \sum_i p_i^{hm} \cdot s_i^g \cdot y_g . \end{aligned}$$

(E24) A nemzetközi fizetési mérleg:

$$\sum_i v \cdot p_i^{wm} \cdot u_i + tr^w(\cdot) - S^w = \sum_i v \cdot p_i^{we}(z_i) \cdot z_i, \quad \text{vagy: } v \cdot d_e + tr^w(\cdot) = S^w .$$

Jelölés	Jelentése
$a_{ij}$	input-output ráfordítási együtthatók
$b_{ij}$	tőkelekötési, illetve beruházási együtthatók
$d_e$	a külkereskedelmi mérleg hiánya (pozitív értéke deficitet jelent)
$d_j^{\pi}$	az ágazati tőkearányos jövedelmeket differenciáló tényezők
$d_j^w$	az ágazati béreket differenciáló tényezők
$k$	az állóeszközök (tőke) rendelkezésre álló vagy keresett mennyisége
$l$	a munkaerő rendelkezésre álló vagy keresett mennyisége
$l_j, k_j$	munkaerő- és tőkeigényességi együttható a $j$ -edik ágazatban
$L_j, K_j$	a munkaerő, illetve tőke felhasználása a $j$ -edik ágazatban
$p_c$	a változó fogyasztás (fogyasztói kosár) árindexe
$p_i^h, p_i^e$	az ágazati kibocsátás hazai (h) illetve külföldi (e) értékesítési árindexe
$p_i^{hm}$	a hazai/import kompozit ágazati termékek értékesítési árindexe
$p_i^m$	az import hazai értékesítési árindexe
$p_i^{we}, p_i^{wm}$	az ágazati termékek világpiaci árindexei export, illetve import esetén
$p_j^a$	a hazai/export kompozit ágazati kibocsátás termelői árindexe
$p_j^b$	az ágazati állóeszközök (beruházások) árindexe
$\pi$	nettó tőkemegtérülési (profit-) ráta
$\pi_j^c$	haszonkulcsos nyereségráták
$q_j$	az ágazati állóeszközök költségindexe
$r_i^{mh} = u_i/x_i^h$	az import aránya a hazai kínálathoz
$r_j^{ed} = z_j/x_j^h$	az export aránya a hazai kínálathoz
$r_j^d$	az ágazati állóeszközök amortizációs rátája
$s_i^{cv}$	a lakossági fogyasztás változó részének arányai
$s_i^g$	a kormányzati fogyasztás arányai
$s_i^h, s_i^m$	a hazai kibocsátás (h) és az import (m) részesedése a hazai kínálatban
$s_j^d, s_j^e$	a hazai (d) és külföldi (e) értékesítés részesedése az összkibocsátásban
$\tau_i^c, \tau_i^m, \tau_j^e$	fogyasztási adók, vámok és exportadók ágazati kulcsai
$\tau_j^t, \tau_j^w$	a termelői adók és bérjárulékok ágazati kulcsai
$u_i$	az ágazati termékek importja
$v$	a deviza névleges árfolyama
$w$	a munkabérek névleges szintje
$x_i^h$	az ágazati kibocsátások hazai kínálata
$x_{ij}$	az $i$ -edik kompozit ágazati termék $j$ -edik ágazatban felhasznált mennyisége
$x_j$	ágazati kibocsátások
$y_{cv}$	a lakossági fogyasztás változó részének szintje
$y_g$	kormányzati fogyasztás szintje
$y_i^c, y_i^e, y_i^v$	a teljes, rögzített és változó lakossági fogyasztás mennyisége az $i$ -edik (kompozit) ágazati termékekből ( $y_i^c = y_i^e + y_i^v$ )
$y_j^a$	az ágazati beruházások szintje
$z_j$	az ágazati kibocsátások exportja

## Irodalom

1. Adelman, I. and S. Robinson (1978) *Income Distribution Policy in Developing Countries: A Case Study of Korea*. Oxford University Press, New York.
2. Armington, P. S. (1969) A Theory of Demand for Products Distinguished by Place of Production. IMF Staff Paper, No. 16, p. 159–176.
3. Augusztinovics Mária (szerk.) (1979) *Népgazdasági modellek a távlati tervezésben*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.
4. Balabanov, T., T. Révész and E. Zalai (2007) A Guide to ATCEM-E3: Austrian Computable Equilibrium Model for Energy-Economy-Environment in-

- teractions. *Institut für Höhere Studien*, Bécs (kutatási jelentés az osztrák államvasutaknak).
5. Bergman L. (1982) A system of computable general equilibrium models for a small open economy. *Mathematical Modelling*, Vol. 3, Issue 5, pp. 421–435.
  6. Bergman L., D. Jorgenson and E. Zalai (ed's) (1990) *General Equilibrium Modeling and Economic Policy Analysis*. Basil Blackwell, New York.
  7. Bourguignon, F., W. H. Branson, J. De Melo (1989) Macroeconomic Adjustment and Income Distribution: A Macro-Micro Simulation Model. Working Paper, *World Bank*.
  8. Capros, P., T. Georgakopoulos, D. van Regemorter, S. Proost, T. Schmidt, and K. Conrad (1995) Using the GEM-E3 Model to Study the Double Dividend Issue. Paper prepared for the Conference Organized by the EC and CCI de Paris.
  9. Capros, P. et al. (1997) *The GEM-E3 Model: Reference Manual*, European Commission DG XII.Brussels and the National Technical University of Athens.
  10. Chenery, H. B. and W. J. Raduchel (1971) Substitution in planning models. in: Chenery, H. B. (ed.), *Studies in Development Planning*, Cambridge, MA: Harvard University Press
  11. Chenery, H. B. and H. Uzawa (1958) Non-Linear Programming in Economic Development. in Arrow, K. J., L. Hurwicz and H. Uzawa, eds., *Studies in Linear and Non-Linear Programming*. Stanford. U. Press.
  12. Dervis, K., J. de Melo and S. Robinson (1982) *General Equilibrium Models for Development Policy*. Cambridge University Press, Cambridge.
  13. Dixon, P. B., B. R. Parmenter, G. J. Ryland and J. Sutton (1977) ORANI, a general equilibrium model of the Australian economy: Current specification and illustrations of use for policy analysis. *Australian Government Pub. Service*, Canberra.
  14. Dixon, P. B., B. R. Parmenter, J. Sutton and D. P. Vincent (1982) *ORANI: A Multisectoral Model of the Australian Economy*. North-Holland, Amsterdam.
  15. Dixon, P. B. (2007) Evidence-based Trade Policy Decision Making in Australia and the Development of Computable General Equilibrium Modelling. Centre of Policy Studies and the IMPACT project, Working Paper No. G163.
  16. Ganczer Sándor (szerk.) (1973) *Gazdasági tervezés és programozás*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.
  17. Ginsburgh, V. and J. Waelbroeck (1976) Computational Experience with a Large General Equilibrium Model. In: Łoś, J. and Łoś, M. W. (eds) *Computating Equilibria: How and Why*. North-Holland, Amsterdam–New York.
  18. Ginsburgh, V. and J. Waelbroeck (1981) *Activity Analysis and General Equilibrium Modeling*. North-Holland, Amsterdam.
  19. Hertel, T. W. (ed.) (1997) *Global Trade Analysis: Modeling and Applications*. Cambridge University Press, Cambridge.
  20. Johansen, L. (1960) *A Multisectoral Study of Economic Growth*. Contributions to Economic Analysis 21, North-Holland Publishing Company.
  21. Jorgenson, D. W. (1984) Econometric Methods for Applied General Equilibrium Analysis. In H. Scarf and J. Shoven (eds.) *Applied General Equilibrium Analysis*. pp. 139–203, Cambridge University Press, Cambridge.
  22. Jorgenson, D. W. and P. J. Wilcoxon (1993) Reducing U.S. Carbon Emissions: An Econometric General Equilibrium Assessment. *Resource and Energy Economics*, Vol. 15, No. 1, March, pp. 7–26.



23. Kornai János (1965) *A gazdasági szerkezet matematikai tervezése*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, (második kiadás éve: 1973).
24. Leontief, W. (1937) Interrelation of Prices, Output, Savings and Investment. A Study in Empirical Application of the Economic Theory of General Interdependence. *The Review of Economics and Statistics*, Vol. XIX No. 3 pp. 109–132.
25. Lysy, F. and Taylor, L. (1977) A Computable General Equilibrium Model for the Functional Income Distribution: Experiments for Brazil, 1959–71. Washington, D.C.: *World Bank*.
26. Morris, G., Révész T., Fucskó J. és Zalai E. (1999) Integrating Environmental Taxes on Local Air Pollutants with Fiscal Reform in Hungary: Simulations with a Computable General Equilibrium Model. *Environmental and Development Economics*, no. 4, pp. 537–564.
27. Piggott J., J. Whalley (szerk.) (1985) *New developments in applied general equilibrium analysis*. Cambridge University Press.
28. Pyatt, G. and Round, J. I. (szerk.) (1985) Social Accounting Matrices: A basis for planning. *World Bank*, Washington DC. (sokszorosítás)
29. Regemorten, D. et al. (2002) The Role of Innovation and Policy Design in Energy and Environment for a Sustainable Growth in Europe (TCH-GEM-E3), Research Project ENG2-CT-1999-00002, funded by the European Community under the 5th Framework Programme (1998–2002), Final Report.
30. Révész Tamás (2001) Költségvetési és környezetpolitikák elemzése általános egyensúlyi modellekkel. Budapesti Közgazdaságtudományi Egyetem, *Ph.D. értekezés*.
31. Révész Tamás (2003) A szakágazati és intézményi szektoros bontású modellezési adatbázis. *Statisztikai Szemle*, 81(2), 101–126. o.
32. Révész Tamás (2003) A gazdaságmodellezési adatbázis szakágazati adatai. *Statisztikai Szemle*, 81(3), 221–236. o.
33. Révész Tamás (2006) SOCIO-LINE, A fenntartható fejlődés modellje (második változat), A gazdaságelemzés módszerei 2006/I., *Ecostat Gazdaságelemző és Informatikai Intézet*, ISSN: 1419-4007, ISBN: 963235012X.
34. Révész Tamás és Takács Tibor (2011) A SOCIO-LINE modell 2005. évi adatbázisának készítésekor szerzett tapasztalatok I-II. *Statisztikai Szemle*, 89(2) 141–160. old., 89(3) 253–274. o.
35. Révész Tamás és Zalai Ernő (2000) A magyar gazdaságstatisztikai adatforrások és az alkalmazott egyensúlyelméleti modellezés. *Statisztikai Szemle*, 78. évf. 2-3. sz., 97–117. o.
36. Scarf, H. E. (1973) *The computation of economic equilibria*. Yale University Press, New Haven.
37. Scarf, H. E. and T. Hansen (1973) *The Computation of Economic Equilibria*. Cowles Foundation for Research in Economics at Yale University, Monograph No. 24, New Haven, CT and London, UK: Yale University Press
38. Scarf, H. E. and J. B. Shoven (1984) *Applied general equilibrium analysis*. Cambridge University Press, Cambridge.
39. Shoven J. B. and J. Whalley (1984) Applied general equilibrium models of taxation and international trade: an introduction and survey. *Journal of Economic Literature*, vol. 22(3), pp. 1007–51.
40. Shoven J. B. and J. Whalley (1992) *Applying General Equilibrium*. Cambridge University Press, Cambridge.

41. Stone, J. R. N. (1954) Linear Expenditure Systems and Demand Analysis: An Application to the Pattern of British Demand. *The Economic Journal*, Vol. 64, No. 255, pp. 511–527.
42. Stone, J. R. N. and J. A. C. Brown (1962) *A Computable Model of Economic Growth*. Cambridge, UK: Cambridge Growth Project.
43. Taylor, L. and S. L. Black (1974) Practical general equilibrium estimation of resource pulls under trade liberalizations. *Journal of International Economics*, 4(1), pp. 37–58
44. Taylor, L. (1975) Theoretical foundations and technical implications. In: Blitzer, C. R., Clark, P. C. and Taylor, L. (ed's) *Economy-wide models and development*. Oxford University Press, Oxford.
45. Taylor L., E. L. Bacha, E. A. Cardoso, F. J. Lysy (1979) *Models of growth and distribution in Brazil*. Oxford University Press, New York.
46. Sivák, J., A. Tihanyi, E. Zalai (1984) On the Solution of a Computable General Equilibrium Model. CP-84-23, IIASA, Luxemburg.
47. Zalai Ernő (1983) Egyensúly és optimum: A makrogazdasági modellezés két irányzatának összevetése. *Közgazdasági Szemle*, 2. sz. 157–175. o.
48. Zalai Ernő (1998) Általános egyensúlyi modellek alkalmazása gazdaságpolitikai elemzésekre. *Közgazdasági Szemle*, 12. sz., 1065–81. o.
49. Zalai Ernő (2011) *Matematikai közgazdaságtan I. – Általános egyensúlyi modellek és mikroökonómiai elemzések*. Akadémia Kiadó, Budapest.
50. Zalai Ernő (2012) *Matematikai közgazdaságtan II. – Többszektoros modellek és makrogazdasági elemzések*. Akadémia Kiadó, Budapest.

#### AN OVERVIEW OF COMPUTABLE GENERAL EQUILIBRIUM MODELING

The paper overviews the historical development, the standard structure, the data requirements and their sources as well as the potential applications of computable general equilibrium (CGE) models with special regard to the Hungarian experience. The first section describes how the CGE models evolved from the merge of applied input-output analysis (Leontief, Johansen, Stone) with the abstract models of general equilibrium (Arrow–Debreu, Scarf) and became standard tools of macroeconomic policy analysis. The second section presents the main building blocks and skeleton of a stylized CGE model. (Its mathematical statement can be found in the appendix together with a list of notation.) The third section discusses the often neglected issue of macro closure and alternative model variants. Finally, the last two sections describe the Hungarian experience with CGE models and the main data sources used for their calibration.

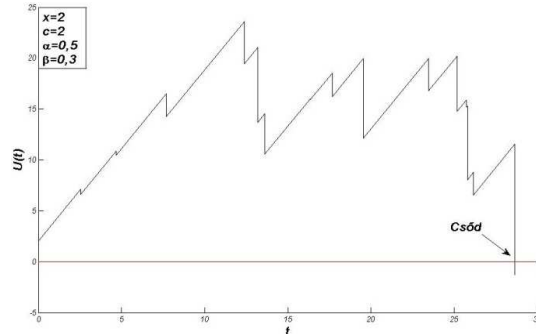
## HELYREIGAZÍTÁS

Tisztelt Olvasó!

Folyóiratunk műszaki szerkesztése során minden esetben igyekszünk a lehető legnagyobb gondossággal eljárni, ennek ellenére előfordul, hogy hibázunk. Ez történt a Szigma legutóbbi, 2011/3-4. számának nyomdába küldése során is, amikor Szabó Tibor, Mihálykóné Orbán Éva és Mihálykó Csaba „Biztosítótársaságok tartalékképzési folyamatának vizsgálata adó- és osztalékfizetés mellett” című cikkéből a 128. oldalon az 1. ábra lemaradt. A következő oldalon a hiányzó ábrával együtt közöljük előző számunk 128. oldalát.

A Szigma folyóirat szerkesztőségének munkatársai a történetek miatt sajnálkozásukat fejezik ki, és kérik a Szerzők és Olvasók elnézését. Azon leszünk, hogy hasonló hiba a jövőben ne fordulhasson elő.

Bessenyei István



1. ábra. A tartalék változása az idő függvényében

Természetesen érdekes a tönkremenés ideje is, amelyet a következőképpen írhatunk fel:

$$T_U = \begin{cases} \inf\{t \geq 0 : u(t) < 0\}, & \text{ha létezik } 0 \leq t, \text{ amelyre } U(t) < 0 \\ \infty, & \text{ha } 0 \leq U(t) \text{ minden } 0 \leq t \text{ esetén,} \end{cases} \quad (4)$$

vagyis ha a biztosítótársaság tönkremegy, akkor a tönkremenés idejének a legelső olyan időpillanatot tekintjük, amikor a tartalék értéke 0 alá csökken, azaz tartozása lesz az ügyfelek felé. Ha ez sosem történik meg, akkor a tönkremenés idejét végtelennek definiáljuk.

Az 1. ábrán bemutatjuk a fent definiált kockázati folyamat egy lehetséges realizációját.

Az ábrán a folyamatot  $x = 2$  kezdőtőkéről indítottuk. A tartalék értéke egyenesen,  $c = 2$  intenzitással nőne (2 meredekségű szakaszok), amennyiben nem érkeznének be véletlen időpontokban véletlen nagyságú kárigények (függőleges ugrások). A realizáció során mind az időközök, mind pedig a kárigények generálására exponenciális eloszlást használtunk,  $\alpha = 0,5$  és  $\beta = 0,3$  paraméterrel. Az ábráról leolvasható a csőd időpontja, ami  $T_U(2) = 28,66$  időegység.

## 2.2 Osztalékfizetés

### 2.2.1 Az osztalékfizetés általános leírása

Módosítsuk az alapmodellt oly módon, hogy a tulajdonosok számára osztalékot fizetnek a társaság tartalékából a kockázati folyamatok irodalmában általánosan elfogadott módon (Gerber & Shiu, 2006, Ming & Junyi, 2007, Avanzi, 2007).

Jelölje  $D(t)$  a  $t$  ideig kifizetett nominális, vagyis az inflációval nem igazított osztalék értékét. Ekkor a tartalék értéke a  $t$  időpontban  $D(t)$  értékével csökken, vagyis

$$R_D(t) = U(t) - D(t), \quad t \geq 0. \quad (5)$$

# CONTENTS

SIMONOVITS, ANDRÁS: Optimal Linear Tax and Pension System with Flexible Labor Supply .....	1
FÜZI, ÁKOS – MÁDI-NAGY, GERGELY: Electricity Purchasing Strategy Tools ..	15
CSERCSEK, DÁVID – KÓCZY, Á. LÁSZLÓ: Efficiency and Stability in Power Transmission Networks: A Game-Theoretic Approach .....	43
BERDE, ÉVA: Infinitely Repeated Outsourcing .....	59
CONCEPTS, METHODS	
RÉVÉSZ, TAMÁS – ZALAI, ERNŐ: An Overview of Computable General Equilibrium Modeling .....	73

# TARTALOM

SIMONOVITS ANDRÁS: Optimális lineáris adó- és nyugdíjrendszer rugalmas munkakínálat esetén .....	1
FÜZI ÁKOS – MÁDI-NAGY GERGELY: Villamosenergia beszerzést támogató modellek .....	15
CSERCSEK DÁVID – KÓCZY Á. LÁSZLÓ: Hatékonyság és stabilitás nagyfeszültségű elektromos hálózatokban: egy játékelméleti megközelítés .....	43
BERDE ÉVA: Végtelen sokszor ismételt kiszereződés .....	59

## FOGALMAK, MÓDSZEREK

RÉVÉSZ TAMÁS – ZALAI ERNŐ: A számszerűsített általános egyensúlyi (CGE) modellekről .....	73
---	----

# **SZIGMA**

## **Matematikai-közgazdasági folyóirat**

**A Gazdaságmodellezési Társaság lapja**

Főszerkesztő:

**BESSENYEI ISTVÁN**

PTE Közgazdaságtudományi Kar, H-7622 Pécs, Rákóczi út 80.

Tel.: 72/501-599, Fax: 72/501-553

e-mail: [essenyei@ktk.pte.hu](mailto:essenyei@ktk.pte.hu)

Társzerkesztők:

**FÜLÖP JÁNOS**

e-mail: [fulop@oplab.sztaki.hu](mailto:fulop@oplab.sztaki.hu)

**HUNYADI LÁSZLÓ**

e-mail: [laszlo.hunyadi@office.ksh.hu](mailto:laszlo.hunyadi@office.ksh.hu)

**KOMLÓSI SÁNDOR**

e-mail: [komlosi@ktk.pte.hu](mailto:komlosi@ktk.pte.hu)

**KOVÁCS ERZSÉBET**

e-mail: [erzsebet.kovacs@uni-corvinus.hu](mailto:erzsebet.kovacs@uni-corvinus.hu)

**VÍZVÁRI BÉLA**

e-mail: [vizvari@cs.elte.hu](mailto:vizvari@cs.elte.hu)

Szerkesztőbizottság:

CSERHÁTI ILONA, FORGÓ FERENC, LIGETI CSÁK, MELLÁR TAMÁS,  
MESZÉNA GYÖRGY, SISAKNÉ FEKETE ZSUZSA, SZÉP KATALIN,  
TEMESI JÓZSEF, VÖRÖS JÓZSEF

Terjeszti a Gazdaságmodellezési Társaság. A kiadvány megjelenését az MTA  
Könyv- és Folyóiratkiadó Bizottsága támogatta.

ISSN 0039-8128

[www.sigma.ktk.pte.hu](http://www.sigma.ktk.pte.hu)