

## OPTIMÁLIS MUNKAKÍNÁLAT RÁSZORULTSÁGI NYUGDÍJRENDSZER MELLETT<sup>1</sup>

BESSENYEI ISTVÁN  
*PTE Közgazdaságtudományi Kar*

Mivel az optimális munkakínálat meglehetősen bonyolult módon függ a reálbértől és a szociális ellátórendszer paramétereitől, az inter- és intratemporális redistribúciót elemző modellek még a viszonylag egyszerű, homotetikus hasznossági függvény alkalmazása esetén is gyakran lemondanak az optimális munkakínálat analitikus meghatározásáról, s következtetéseiket számítógépes szimuláció segítségével támasztják alá. Fő eredményünk annak megmutatása, hogy az aktív és időskori fogyasztás határhasznát a munkakínálat függvényében fejezve ki az analitikus elemzés is viszonylag egyszerűen elvégezhető. Így könnyen belátható, hogy a reálbér, a nyugdíjszorító, a munkanélküli ellátás, vagy a rászorultsági nyugdíj mértékének megváltozása a munkakínálat rugalmasságának jelentős ingadozásait eredményezheti, továbbá kereseteltitkolásra ösztönözhet. A bemutatásra kerülő mikromodellt a makroszintű egyensúly elemzése egészíti ki, ahol az munkavállalói preferenciák heterogenitását is figyelembe vesszük.

### Bevezetés

Ismert, hogy a munkavállaló számára maximális intertemporális összhasznot biztosító munkakínálat nagysága meglehetősen bonyolult módon függ a reálbértől, illetve a nyugdíjrendszer és munkanélküli ellátás jellegzetességeit meghatározó paramétereiktől. Különösen így van ez rászorultsági nyugdíj esetén, ahol a keresetarányos nyugdíjat, ha az elmarad a rászorultsági küszöbhez tartozó értéktől, erre a minimális szintre egészítik ki. Mivel ebben az esetben az optimalizálás során analitikus eszközökkel nehezen kezelhető, szakadós függvények adódnak, az elemzések során gyakori az analitikus vizsgálatok numerikus szemléltetéssel történő helyettesítése.

Ebben a dolgozatban Simonovits (2012) modelljéből kiindulva az aktív és időskori fogyasztás határhasznát a munkakínálat függvényében fejezzük ki, ami lehetővé teszi a komparatív statikus vizsgálatok egyszerű analitikus eszközökkel történő elvégzését, továbbá a gyakran alkalmazott<sup>2</sup>, ám megle-

<sup>1</sup>Jelen tanulmány a „TÁMOP-4.2.2.C-11/1/KONV-2012-0005” pályázati projekt támogatásával készült. Köszönetemet fejezem ki Kovács Erzsébetnek, Simonovits Andrásnak valamint Cseres-Gergely Zsombornak a dolgozat elkészítéséhez nyújtott útmutatásért és segítségért, mindazonáltal az esetlegesen előforduló hibákért a felelősség a szerzőt terheli. Beérkezett: 2013. július 11. E-mail: [essenyei@tkk.pte.hu](mailto:essenyei@tkk.pte.hu).

<sup>2</sup>P1: Auerbach és Kotlikoff (1987), Feldstein (1987), Simonovits (2012), Valdés-Prieto és Schwarzhaupt (2010)

hetősen speciális homotetikus munkavállalói hasznossági függvény helyett egy általánosabb forma alkalmazását, ahol a bérjövedelem *ceteris paribus* emelkedésével az aktív és időskori fogyasztás aránya is megváltozhat.

Megmutatjuk, hogy az így kapott határhaszon-függvények szakadási helyének elhelyezkedése az adó- és járulékkulcs, valamint a nyugdíjszorító mellett mind a reálbér, mind pedig a rászorultsági küszöb nagyságától függ, s ez az elhelyezkedés döntő szerepet játszik a teljes életpályán értelmezett munkakínálat meghatározása során. Megmutatjuk azt is, hogy munkanélküli ellátás, illetve rászorultsági nyugdíjrendszer esetén a reálbér csekély mértékű emelkedése az optimális munkakínálat változatlanságával éppúgy együtt járhat, mint annak ugrásszerű emelkedésével. Vizsgáljuk továbbá a munkanélkülieknek fizetett járadék és rászorultsági nyugdíj munkakínálatot csökkentő, kereseteltitkolást ösztönző és makroszintű egyensúlytalanságot előidéző hatását. Azonban Simonovits (2011) és (2012) cikkeivel szemben nem foglalkozunk a kormányzat jólét-maximalizálási feladatával. Azért nem, mert vizsgálódásainkat a munkavállalói preferenciák heterogenitásának esetére is kiterjesztjük, és ekkor Arrow (1963) lehetetlenségi tétele szerint az egyéni hasznossági függvények demokratikus elvek alapján nem aggregálhatók társadalmi hasznossági függvényé<sup>3</sup>. Ugyanakkor Arrow lehetetlenségi tételéből nem következik, hogy az inter- és intratemporális redisztribúciós rendszer módosításainak munkakínálatra, illetve makroegyensúlyra gyakorolt hatásait hiábavaló lenne vizsgálni. Dolgozatunk az ilyen jellegű vizsgálódásokhoz kíván hozzájárulni.

A cikk alapvetően neoklasszikus szemléletű, a keynesi típusú nehézségekre, mindenekeelőtt a kényszerű munkanélküliség problémájára csak néhány lábjegyzetben történik utalás. Az első részében ismertetjük a modellt. A második részben azt vizsgáljuk, hogy miként reagál a munkakínálat a reálbér változására. A harmadik részben a kereseteltitkolás feltételeit és a munkavállalói preferenciák heterogenitásának egyensúlyra gyakorolt hatását vesszük szemügyre. A dolgot a legfontosabb következtetéseket összegző, rövid szakasz zárja.

## 1 A modell

A modell Simonovits (2012) és (2011) cikkein alapul, ezért ismertetése során ahol csak lehetséges, az ott alkalmazott jelöléseket követjük. Feltesszük, hogy mindenki egységnyi hosszúságú ideig munkaképes és ezt egy  $\mu$  hosszúságú nyugdíjas időszak követi, ahol  $0 \leq \mu \leq 1$ . A munkaképes időszak potenciális munkakínálata  $T$ , a tényleges munkakínálat pedig:  $l$ , ahol  $0 \leq l \leq T$ . A  $T - l$  különbség a szabadidő. A munkapiaci keresletet az időegységre eső reálbér,  $w$  közvetíti a munkavállalók felé, a munkapiacról érkező további jelzésektől eltekintünk<sup>4</sup>. Mindezek alapján az egyes munkavállalók teljes

<sup>3</sup>Az emiatt adódó nehézségek kiküszöbölése céljából Feldstein (1987) egy paternalista társadalmi jóléti függvényt vezet be, és ezt az eljárást követi Valdés-Prieto és Schwarzhaupt (2010) cikke is a „jóindulatú tervező” feltevését alkalmazva.

<sup>4</sup>Különösen a keynesi típusú modellekben (pl: Benassy (1977), Malinvaud (1977)) gyakori még az  $l \leq \bar{l}$  mennyiségi jelzés szerepeltetése. Ha nem kívánjuk figyelmen kívül

életpályára számított összes bérjövédeme:  $wl$ . Legyen a transzferkulcs, azaz az adó- és járulékkulcs összege  $t$ , ekkor a nettó bérjövédeme:  $(1-t)wl$ , a keresetarányos nyugdíj nagysága pedig  $\beta wl$ , ahol  $\beta$  a nyugdíjszorító. Ha a munkavállaló összes bérjövédeme elmarad a  $\gamma_c$  rászorultsági küszöbértéktől, akkor jövédelmét e küszöbértékre egészítik ki. Hasonlóképpen, ha a keresetarányos nyugdíj elmarad a  $\gamma_d$  rászorultsági küszöbértéktől, akkor ennek megfelelő nyugdíjkiegészítést kap. Simonovits (2012) cikkét követve kizárólag likviditás korlátos háztartásokkal foglalkozunk, ezért a magánmegtakarítástól eltekintünk. Így a munkavállalónak egyetlen döntési változója marad: a munkakínálat, következésképp az aktívkorai fogyasztás ennek függvényében fejezhető ki:

$$c = c(l) = \max(\bar{t}wl, \gamma_c) = \begin{cases} \gamma_c, & \text{ha } \bar{t}wl < \gamma_c \\ \bar{t}wl, & \text{ha } \bar{t}wl \geq \gamma_c, \end{cases} \quad (1)$$

ahol  $\bar{t} = 1 - t$ . A nyugdíjas kori fogyasztás ugyanezen döntési változó függvénye:

$$d = d(l) = \max(\beta wl, \gamma_d) = \begin{cases} \gamma_d, & \text{ha } \beta wl < \gamma_d \\ \beta wl, & \text{ha } \beta wl \geq \gamma_d. \end{cases} \quad (2)$$

Legyen továbbá  $\delta$  a leszámítolási tényező, mely az időskori fogyasztás hasznosságának aktívkorához viszonyított súlyát fejezi ki, és legyen  $0 < \delta \leq 1$ . Modellünkbe az irodalomban szokásos homotetikusnál általánosabb hasznossági függvényt építünk be. Míg például Simonovits (2011) és (2012) Cobb-Douglas típusú munkavállalói preferenciákat tételez fel, Auerbach és Kotlikoff (1987) pedig CES típusút, addig cikkünkben a Gali (2008) könyvében is alkalmazott CRRA hasznossági függvényt vesszük alapul. Így az intertemporális, vagy életpálya-hasznosság  $c(l)$ ,  $d(l)$  és  $T - l$  alábbi függvénye:

$$U(l) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \xi \frac{(T-l)^{1+v}}{1+v} + \mu \delta \frac{d^{1-\phi}}{1-\phi}, \quad (3)$$

ahol  $\xi > 0$  a szabadidő hasznosságának relatív súlyát méri. Hasonló hasznossági függvényt alkalmaz Davig és Leeper (2011), bár  $d$  náluk a háztartás reál pénzvagyonát jelenti, ám ennek a munkakínálat szempontjából nincs jelentősége. A (3) hasznossági függvény előnye, hogy nem feltétlenül homotetikus, következésképp a bérjövédeme megváltozása esetén az aktív- és időskori fogyasztás aránya nem feltétlenül marad változatlan. Ha  $\sigma, \phi < 1$ , akkor  $\sigma = \phi$  esetén függvényünk  $c$ -ben és  $d$ -ben továbbra is homotetikus, így a  $c/d$  hányados konstans marad akkor is, ha a bérjövédeme növekszik,  $\sigma > \phi$  esetén azonban a bérjövédeme növekedésével az aktív- és időskori fogyasztás aránya csökken.  $\sigma < \phi$  esetén pedig növekszik.

Megjegyzendő továbbá, hogy a (3) hasznossági függvény továbbra is jól viselkedő preferenciákat reprezentál. Rögzítve például  $d$  nagyságát, az aktív-

---

hagyni az ebből adódó nehézségeket, akkor jelölje  $T$  a munkaképes időszak potenciális munkakínálatának és a munkapiacra jelen levő mennyiségi korlátnak a minimumát!

kori fogyasztás és szabadidő síkjában adódó közömbösségi görbék negatív meredekségűek, továbbá  $\sigma, \phi > 0$  esetén szigorúan konvexek<sup>5</sup>.

Az optimum elsőrendű feltétele:

$$MU_c + MU_d = c^{-\sigma} c'(l) + \mu \delta d^{-\phi} d'(l) = \xi (T - l)^v = MdU_l, \quad (4)$$

mely szerint az aktív és nyugdíjas kori fogyasztás határhasznainak összege meg kell, hogy egyezzen a munkavállalás határáldozatával,  $MdU_l$ -lel<sup>6</sup>. A határhaszon azonban a mikroökonómiában megszokottól eltérően itt nem a többletfogyasztásból adódó hasznosságnövekmény, hanem a többlet-munkakínálatból adódó többletjövedelem által lehetővé vált aktív ( $MU_c$ ) és nyugdíjas kori ( $MU_d$ ) fogyasztásnövekedés miatt bekövetkező többlethaszon. A határhaszon függvényekből a  $\sigma, \phi$  és  $v$  paraméterek közgazdasági tartalma is egyszerűen adódik, ezek az adott határhaszon munkakínálat szerint vett konstans rugalmasságaiként értelmezhetők. A munkavállalás határáldozati függvényével szemben  $\gamma_c > 0$ , illetve  $\gamma_d > 0$  esetén az aktív és nyugdíjas kori fogyasztás határhasznai a munkakínálat szakadásos függvényei:

$$MU_c = c^{-\sigma} c'(l) = \begin{cases} 0, & \text{ha } \bar{t}wl < \gamma_c \\ (\bar{t}w)^{1-\sigma} l^{-\sigma} & \text{ha } \bar{t}wl \geq \gamma_c \end{cases} \quad (5)$$

és

$$MU_d = \mu \delta d^{-\phi} d'(l) = \begin{cases} 0, & \text{ha } \beta wl < \gamma_d \\ \mu \delta (\beta w)^{1-\phi} l^{-\phi} & \text{ha } \beta wl \geq \gamma_d. \end{cases} \quad (6)$$

E határhaszon-függvények szakadásos jellegéből következik az

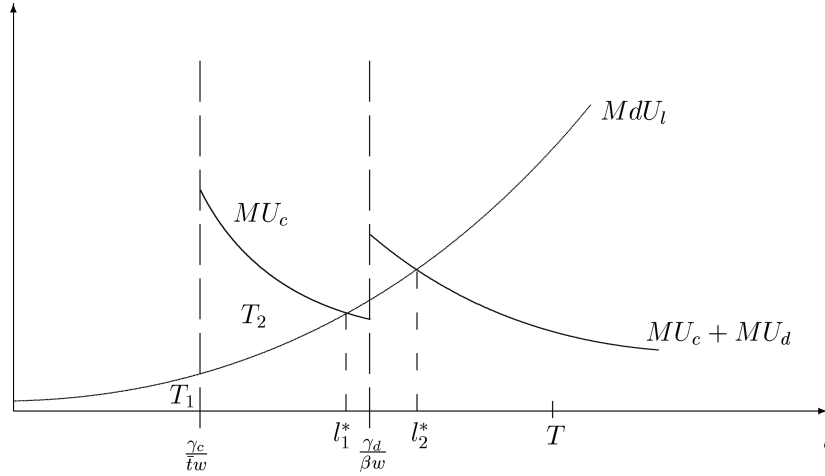
## 1. tulajdonság

Legyen  $\gamma_c/\bar{t} < \gamma_d/\beta$ , ekkor  $l \in \left[ \frac{\gamma_c}{\bar{t}w}, \frac{\gamma_d}{\beta w} \right] \Rightarrow MU_d(l) = 0$ .

Ezek szerint a szakadási helyekhez tartozó munkakínálatok:  $l_c = \frac{\gamma_c}{\bar{t}w}$  és  $l_d = \frac{\gamma_d}{\beta w}$  által meghatározott intervallumon a munkavállalói optimum (4) elsőrendű feltételében csak az aktív kori fogyasztás határhaszonfüggvénye meghatározó, az időskori fogyasztásé nem. Megjegyzendő, hogy  $l < l_c$  esetén az aktív kori fogyasztás határhaszna sem meghatározó,  $l > l_d$  esetén pedig a nyugdíjas kori fogyasztás is meghatározóvá válik. Hasonló tulajdonságot lehetne továbbá megállapítani a fordított,  $\gamma_c/\bar{t} > \gamma_d/\beta$  esetre, mivel azonban meglehetősen csekély annak realitása, hogy a munkakínálat meghatározását az aktív kori fogyasztás nem befolyásolja, csak a nyugdíjas kori, ezen fordított esettel a továbbiakban nem foglalkozunk.

<sup>5</sup>Itt jegyezzük meg, hogy a (3) hasznossági függvény a paraméterek egységnyinél nagyobb értéke esetén is értelmezett, bár nem feltétlenül ad pozitív értéket. Ebben az esetben azonban az említett közömbösségi görbék már nem feltétlenül konvexek.

<sup>6</sup>A jelölésben szereplő  $d$  utal arra, hogy itt negatív határhasznról, azaz határáldozatról (disutility) van szó, az  $l$  alsó index pedig arra, hogy ez a határáldozat közvetlenül a munkavégzésből adódik.



1. ábra. Munkakínálat rászorultsági járadék mellett

Az 1. ábra az optimális munkakínálat meghatározódását mutatja be az elsőrendű optimumkritérium felhasználásával, de a  $(\bar{t}w)^{1-\sigma} l^{-\sigma}$  és  $(\bar{t}w)^{1-\sigma} l^{-\sigma} + (\beta w)^{1-\phi} l^{-\phi}$  határhason-görbéknek csak a releváns darabjait tünteti fel. Legyen  $l_c < l < l_d$ , ekkor az 1. tulajdonság szerint  $MU_d(l) = 0$ , és így:  $MU_c(l) = MU_c(l) + MU_d(l)$ . Ebben az esetben tehát az optimális munkakínálat meghatározása szempontjából  $MU_c$  két szakadási hely közötti darabja releváns. Ha pedig  $l > l_d$ , akkor az 1. tulajdonság miatt az  $MU_c + MU_d$  görbe releváns.

Szemügyre véve az ábrát látható, hogy zérus munkakínálat mellett a (4) optimumfeltétel nem teljesül, azonban a (3) életpálya-hasznosságnak lokális maximuma van. A paraméterek értékétől függ, hogy ez a lokális maximumhely egyben globális-e. Modellünkben tehát megjelenik a munkanélküli ellátás és rászorultsági nyugdíj munkavállalás ellen ösztönző hatása, melynek gazdasági, társadalmi és politikai jelentősége ismert. Amennyiben az egyén úgy dönt, hogy nem fejt ki munkakínálatot, az aktív és nyugdíjas kori fogyasztás révén elért intertemporális összhaszon:

$$U_0 = \frac{\gamma_c^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \frac{\gamma_d^{1-\phi}}{1-\phi},$$

továbbá  $\gamma_c, \gamma_d > 0$  esetén  $U_0 > 0$ . Ez azt jelenti, hogy a munkanélkülieknek fizetett ellátás és a rászorultsági nyugdíj azok számára is pozitív intertemporális összhasznot biztosít, akik egész életükben nem dolgoznak. Vegyük észre továbbá, hogy ebben a helyzetben a munkakínálat kismértékű növelése nem tesz lehetővé magasabb fogyasztást, sőt az életpálya-hasznosságot csökkenti, tehát a zérus munkakínálat a (3) hasznossági függvény lokális maximumhelye.

Pozitív munkakínálat esetén:

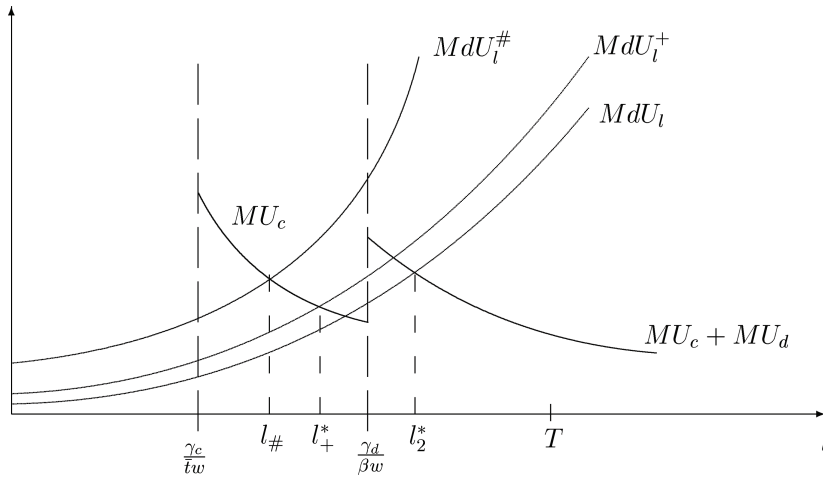
$$U(l^*) = \int_0^{l^*} (MU_c(l) + MU_d(l) - MdU(l)) dl. \quad (7)$$

A (7) összefüggés felhasználásával egyszerűen meghatározható, hogy a (4) optimumfeltételt kielégítő munkakínálatok közül melyik eredményez maximális hasznosságot a teljes életpályán.

Legyen  $T_1 = -\int_0^{l_c} MdU_l dl$ . Ekkora hasznosságvesztést szenvedne el az egyén, ha zérus munkakínálat helyett  $l_c = \gamma_c/(\bar{t}w)$  mértékű munkakínálatot fejtene ki. Legyen továbbá  $T_2 = \int_{l_c}^{l_1^*} (MU_c(l) - MdU(l)) dl$ , ekkora többlet-haszonhoz jutna az egyén, ha zérus munkakínálat helyett  $l_1^*$  mértékű munkát végezne. Látható, hogy  $-T_1 < T_2$ , tehát  $l_1^*$ -nál az intertemporális összhaszon függvényének nem csak lokális maximuma van, hanem  $U(0) = U_0 < U(l_1^*)$ . Hasonló módon látható be, hogy a globális maximumhely  $l_2^*$ -nál található, ekkora lesz tehát a munkakínálat optimális szintje<sup>7</sup>.

Azt, hogy a munkavégzés  $MdU_l$  határállozati függvénye mellett a globális optimum nem a  $l_1^*$ -nál, hanem  $l_2^*$ -nál adódik, úgy értelmezzük, hogy a viszonylag magas bérjövdelem mellett, az így elérhető nagyobb nyugdíj is magasabb munkakínálatra ösztönöz.

A több munkavégzés által elérhető magasabb aktív és időskori fogyasztás ösztönző hatásának illusztrálása céljából megvizsgáljuk, miként reagál az optimális munkakínálat a szabadidő relatív fontosságának, azaz a  $\xi$  paraméter értékének a megváltozására. Ez az érték a 2. ábrán a munka jelzés nélküli  $MdU_l$  határállozati függvénye esetében a legalacsonyabb. Amennyiben ez a függvény fejezi ki a munkavállaló szabadidőhöz való viszonyát, az optimális munkakínálat:  $l_2^*$ .



2. ábra. Munkakínálat  $\xi$  különféle értékei esetén

<sup>7</sup>Ha az ábrán bemutatott helyzettel szemben  $l_2^* > T$  és  $T$  nagyságát a munkapiacra megélvő mennyiségi korlát határozza meg, akkor kényszerű munkanélküliségről beszélünk, mértéke:  $l_2^* - T$ . Nem biztos, hogy ebben az esetben az optimális munkakínálat nagysága  $T$ . Legyen például  $T = l_d$ , ekkor az optimális munkakínálat:  $l_1^* < T$ . Azt kaptuk tehát, hogy a rászorultsági nyugdíj kényszerű munkanélküliség mellett is csökkentheti a munkakínálatot.

Ezzel szemben ha az egyén a munkavégzést kellemetlenebbnek érzékeli, és szabadidőhöz való viszonyát a  $\xi$  paraméter magasabb értéke fejezi ki, a munkavégzés ehhez tartozó  $MdU_l^+$  határáldozati függvénye érvényes. Ebben az esetben a keresetarányos nyugdíj elveszti ösztönző erejét, s csak a bérjövedelem ösztönző hatása marad. Az ábrán jól követhető, hogy munkakínálat az  $l_+^*$  szintre csökken, mert az  $l_+^*$ -nál magasabb munkakínálat ugyan magasabb nyugdíjat, s így magasabb nyugdíjas kori fogyasztást tenne lehetővé az egyén számára, ám ez nem kompenzálná a több munka végzéséből adódó hátrányokat. Az (5) és (6) határhaszon függvényekből az is látszik, hogy  $\sigma \neq 1 \neq \phi$  esetén a kompenzációhoz magasabb reálbérré, illetve nyugdíjszoróra lenne szükség, mert ekkor a határhaszon görbék fölfelé tolódnának. De az  $l_d = \frac{\gamma_d}{\beta w}$  szakadási hely  $\sigma \rightarrow 1 \leftarrow \phi$  esetén is balra tolódná, ezáltal csökkentve a kompenzáció igényét, növelve egyúttal a kompenzáció értékét. Hasonló módon a munkakínálat növelésére ösztönző hatást fejt ki a rászorultsági nyugdíj elegendő mértékű csökkentése a munkavállalói preferenciáktól függetlenül.

Amennyiben az egyén a munkavégzést még erőteljesebben diszpreferálja, s ezt a  $\xi$  paraméter még magasabb értéke mellett az  $MdU_l^\#$  határáldozati függvény fejezi ki, a bér is elveszti ösztönző erejét. Figyelembe véve a (7) összefüggést, a 2. ábrán jól látható, hogy  $U(l_\#) < 0 < U_0$ , ezért  $l = 0$  globális maximumhelyé válik, és a munkakínálat nullára csökken. Hasonló megfontolások tehetők  $\xi$  változatlan értéke mellett a nyugdíjszoró csökkenése esetén. Ebben az esetben az  $MU_d$  görbe origó felé történő elmozdulása csökkenti a munkakínálatot, ám az  $\beta = 0$  esetén is megmarad az  $l_1^*$  pozitív szinten.

A rászorultsági nyugdíjrendszer, illetve a munkanélküli ellátás jelenlétét a modellben  $\gamma_c, \gamma_d > 0$  reprezentálja. A 2. ábra fenti elemzése után nem nehéz észrevenni a rászorultsági nyugdíjrendszer és munkanélküli ellátórendszer által meghatározott  $l_c = \frac{\gamma_c}{\xi w}$  és  $l_d = \frac{\gamma_d}{\beta w}$  pontok egy-egy érdekes tulajdonságát:

- A munkakínálat optimális szintje nem eshet az  $l_c$  pont valamely pozitív sugarú környezetébe,
- és az  $l_d$  pont valamely pozitív sugarú jobb oldali környezetébe sem.

Tehát a munkakínálat változása nem folytonos. Ezt mondja ki a

## 2. tulajdonság

Jelölje  $l^*$  az optimális munkakínálatot, ekkor

$$\exists \Delta_c > 0 : l^* \notin \left[ 0, \frac{\gamma_c}{\xi w} + \Delta_c \right], \quad \text{valamint} \quad \exists \Delta_d > 0 : l^* \notin \left[ \frac{\gamma_d}{\beta w}, \frac{\gamma_d}{\beta w} + \Delta_d \right],$$

ahol  $\Delta_c$  és  $\Delta_d$  a határhaszon függvények alakjától is függ az alábbi módon:

$$\int_{\frac{\gamma_c}{\xi w}}^{\frac{\gamma_c}{\xi w} + \Delta_c} (MU_c(l) - MdU_l(l)) dl - U_0 = 0$$

és

$$\int_{l_1^*}^{\frac{\gamma_d}{\beta w} + \Delta_d} (MU_c(l) + MU_d(l) - MdU_l(l)) dl = 0 .$$

A 2. tulajdonság abból következik, hogy az (1) hasznossági függvénynek  $l_c$ -nél és  $l_d$ -nél lokális minimuma van. Ez könnyen ellenőrizhető a (7) összefüggés felhasználásával.

Vegyük észre, hogy  $\gamma_c = 0$  esetén  $T_1 = 0$ , és így  $\Delta_c = 0$ , továbbá  $\gamma_c = \gamma_d = 0$  esetén  $l_c = l_d = 0$ , és ezért az  $MU_c + MU_d$  görbe minden pozitív munkakínálati érték mellett releváns, következésképp  $\Delta_d = 0$  és így az optimális munkakínálat nagysága a  $[0, T]$  intervallumon minden pozitív értéket fölvehet. Ha tehát sem rászorultsági nyugdíjrendszer, sem pedig munkanélküli ellátás nem létezik, a 2. tulajdonság semmit nem mond.

## 2 Munkakínálat a reálbér függvényében

Áttérünk az optimális munkakínálat  $w$  megváltozására való érzékenységeinek vizsgálatára. Ezt célszerű a  $\sigma \rightarrow 1$  és  $\phi \rightarrow 1$  speciális esettel kezdeni. Ha még feltesszük, hogy  $v \rightarrow -1$ , akkor a (3) hasznossági függvény a gyakran használt

$$U(l) = \ln(\max(\bar{t}wl, \gamma_c)) + \xi \ln(T - l) + \mu\delta \ln(\max(\beta wl, \gamma_d))$$

log-lineáris formára egyszerűsödik, továbbá a releváns tartományokban

$$\max(\bar{t}wl, \gamma_c) = \bar{t}wl \quad \text{és} \quad \max(\beta wl, \gamma_d) = \beta wl ,$$

ezért itt  $MU_c(l) = \frac{1}{l}$ , és  $MU_c(l) + MU_d(l) = \frac{1+\mu\delta}{l}$ . Ebben az esetben tehát az 1. ábrán feltüntetett határhaszon-görbék helyzete  $w$ -től független. Mindazonáltal  $w$  csökkenése esetén az  $l_c = \frac{\gamma_c}{\bar{t}w}$  és  $l_d = \frac{\gamma_d}{\beta w}$  szaggatott egyenesek, azaz a munkakínálat meghatározása szempontjából releváns tartományok határai jobbra tolódnak. Folytonosan csökkentve  $w$  értékét, a globális optimum eleinte az  $l_2^*$  értéken marad, majd  $l_1^*$ -ba ugrik. Még tovább csökkentve a reálbért, egy darabig az  $l_1^*$  értéken marad, majd a  $-T_1 < T_2$  reláció is megfordul, így az optimális munkakínálat a teljes életpályán nullára csökken. Ez a szituáció az önkéntes munkanélküli életforma választásaként is értelmezhető. Mindez azt jelenti, hogy az  $l = S_l(w)$  munkakínálati függvény értékkészlete a  $\{0, l_1^*, l_2^*\}$  háromelemű halmaz. Ennél realisabbnak tűnik egy olyan modell, ahol a reálbér változásával a teljes életpályára számított optimális munkakínálat további értékeket is fölvehet, ezért visszatérünk a (3) hasznossági függvényhez.

$\sigma, \phi < 1$  esetén némileg bonyolultabb a helyzet, mert az (5) és (6) összefüggések szerint ebben az esetben  $w$  csökkenése a határhaszon-függvények releváns darabjainak lefelé történő elmozdulását okozza, és ezzel együtt az 1. ábrán az  $l_1^* = l_1^*(w)$  és  $l_2^* = l_2^*(w)$  lokális maximumhelyek is balra tolódnak, tehát a munkakínálat optimális nagysága csökken. Ugyanakkor a releváns



tartományok határait kijelölő  $l_c = \frac{\gamma_c}{\beta w}$  és  $l_d = \frac{\gamma_d}{\beta w}$  szaggatott egyenesek jobbra mozognak, ami azt jelenti, hogy a 2. tulajdonság által meghatározottakon túlmenően a globális maximumhely semmiképp nem eshet az  $(l_1^*(w_0), l_d = \frac{\gamma_d}{\beta w_0})$  intervallumba, ahol  $w_0$  a reálbér 1. ábrán feltételezett kezdőértékét jelöli. Szintén a 2. tulajdonságból következik, hogy nem eshet a globális maximumhely a  $(0, l_c = \frac{\gamma_c}{\beta w})$  intervallumba sem.

Ez az eredmény, mely szerint a munkakínálat a reálbérnek szakadásos függvénye, azért figyelemre méltó, mert modellünkben a teljes életpályára számított munkakínálatot nem diszkrét változónak tételeztük fel, hanem folytonosnak. Hasonló módon látható be, hogy a munkakínálat a nyugdíjszorzó-  
nak, az adó- és járulékkulcsnak, továbbá a rászorultsági járadékok mértékének is szakadásos függvénye. Megjegyzendő még, hogy az 1. ábra egy olyan helyzetet mutat be, ahol a munkakínálati függvénynek két szakadási helye is van. Könnyű észrevenni, hogy  $\xi$  alacsonyabb értéke esetén az  $MdU_l$  görbe lejjebb tolódná, s csak az  $MU_c + MU_d$  görbével lenne egyetlen metszéspontja. A 2. tulajdonságból következik azonban, hogy a munkakínálat függvénye ekkor is szakadásos, mivel az optimális munkakínálat ebben az esetben is vagy zérus, vagy az  $l_d = \frac{\gamma_d}{\beta w}$  nagyságot meghaladó érték. Hasonló a helyzet  $\xi$  eredeti értéke esetén, ha  $\frac{\gamma_c}{t} = \frac{\gamma_d}{\beta}$ .

Az 1. ábrán bemutatott határhaszon-függvények felhasználásával további komparatív statikus elemzések viszonylag egyszerűen végezhetők. Pusztán eddigi fejtegetéseink ellenőrzése céljából, valamint a rászorultsági nyugdíj nagyságának munkakínálati függvényre gyakorolt hatását illusztrálandó, a 3. ábrán mégis bemutatjuk a munkakínálati függvény néhány számítógépes szimuláció révén készített görbéjét<sup>8</sup>. A szimuláció paraméterértékeit az 1. táblázatban foglaltuk össze, a reálbér értékét 0,01-es lépésközönként változtattuk. Ennek következménye, hogy a 3. ábrán bemutatott két görbe nem szakadásos. A számítógépes szimuláció a szakadási helyeknek egyébként is csupán közelítő meghatározását teszi lehetővé, a pontos meghatározás a 2. tulajdonság alapján történik.

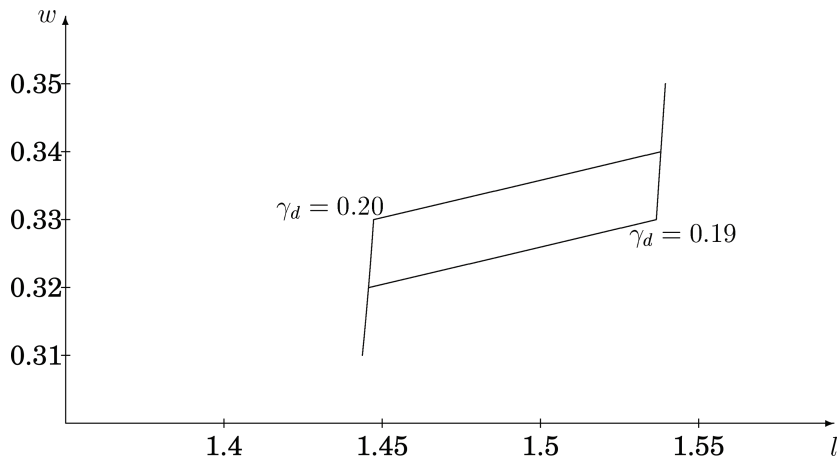
Az ábrán két görbe látható, az egyik a magasabb,  $\gamma_d = 0,2$  rászorultsági nyugdíjérték mellett, a másik pedig az alacsonyabb,  $\gamma_d = 0,19$ -es értéknél. Mint látható, a két görbe csak a  $w \in (0,32, 0,34)$  bértartományban válik szét<sup>9</sup>, tehát a rászorultsági nyugdíj mértékének csak ebben a bértartományban van hatása a munkakínálatra. Itt azonban ez a hatás jelentősnek tűnik.

$\gamma_c$	$\beta$	$\sigma$	$v$	$\phi$	$t$	$\mu$	$\delta$	$\xi$	$T$
0,15	0,4	0,9	-0,9	0,9	0,4	0,5	0,6	0,3	1,9

1. táblázat. A 3. ábrán bemutatott szimulációk paraméterei

<sup>8</sup>A nemlineáris optimalizálási problémák megoldását a GAMS szoftver segítségével végeztük.

<sup>9</sup>Kisebb lépésköz választása esetén az az intervallum rövidebb lenne.



3. ábra. Munkakínálat rászorultsági járadék mellett

A reálbér szinte valamennyi értékénél megfigyelhető, hogy a munkakínálat reálbér szerint vett rugalmassága alig haladja meg a zérus értéket, kivéve  $\gamma_d = 0,19$  esetén a reálbér  $w = 0,32$ -es szintjét,  $\gamma_d = 0,2$  esetén pedig a  $w = 0,33$ -as szintet<sup>10</sup>. Hasonló módon vizsgálható az aktív korban érvényes rászorultsági küszöbérték,  $\gamma_c$  megváltozásának hatása.

$\gamma_c = \gamma_d = 0$  esetén modellünk egyszerű arányos nyugdíjrendszert reprezentál. Ebben az esetben nem fordulhat elő, hogy a munkakínálat optimális szintje teljes életpályán zérus legyen, az  $MU_c + MU_d$  görbe minden pozitív  $l$ -re releváns, a munkakínálat reálbér szerint vett rugalmassága pedig kevésbé változékony.

### 3 A modell két kiterjesztése

Ebben a szakaszban az eddig tárgyalt modell két igen egyszerű kiterjesztését mutatjuk be, melyek akár további kutatások alkalmas kiindulópontjává is szolgálhatnak. A jelen szakasz első pontjában az eddig alkalmazott mikro-szintű elemzést folytatjuk. A második pontban áttérünk makroszintre.

#### 3.1 Kereseteltitkolás

Modellünk eddig tárgyalt változatában a háztartások egyetlen döntési változója a munkakínálat volt, ezzel reagáltak a munkapiac és szociális ellátórendszer által meghatározott környezet változásaira. Ebben a pontban feltesszük, hogy a munkavállaló egy további döntést is hozhat: munkavégzésből származó keresetét bevallhatja, vagy eltitkolhatja. Az egyszerűbb tárgyalás érdekében feltesszük, hogy a döntés a teljes életpályára vonatkozik, a részleges kereseteltitkolás esetétől tehát eltekintünk. Azt vizsgáljuk, hogy a kereseteltitkolás

<sup>10</sup>Itt természetesen ívrugalmasságokról van szó, bár az ábra a pontrugalmasságok eltérését is szemléletesen illusztrálja.

büntetésének hiányát feltételezve, pusztán a szociális ellátórendszer milyen feltételek teljesülése esetén képes a kereset bevallását kikényszeríteni.

Feltesszük továbbá, hogy a munkavállaló két döntése egymástól függetlenül születik, ezért ebben a pontban munkakínálatát adottnak vesszük:  $l^* > 0$ . Amennyiben az egyén keresetét bevallja, úgy aktív és nyugdíjas kori fogyasztása az (1) és (2) összefüggések által meghatározott módon alakul. Továbbra is eltekintve a magánmegtakarítás lehetőségétől<sup>11</sup>, kereseteltitkolás esetén az aktív kori fogyasztás jelentősen megnő:  $c = wl^* + \gamma_c$ . A növekedés egyrészt abból adódik, hogy a be nem jelentett jövedelem nem adózik, másrészt a  $\gamma_c$  jövedelemkiegészítésből. Ugyanakkor nyugdíjas kori fogyasztás:  $\gamma_d$ . Reális feltevés, hogy  $\beta wl^* > \gamma_d$ , és ebben az esetben a nyugdíjas kori fogyasztás kisebb, mint a kereset bevallása esetén.

Behelyettesítve a (3) hasznossági függvénybe kapjuk, hogy akkor érdemes eltitkolni a keresetet, ha

$$\frac{(\bar{t}wl^*)^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \mu\delta \frac{(\beta wl^*)^{1-\phi}}{1-\phi} < \frac{(wl^* + \gamma_c)^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \mu\delta \frac{\gamma_d^{1-\phi}}{1-\phi}$$

teljesül. Bevezetve az  $\alpha_c = \frac{\gamma_c}{wl^*}$  és  $\alpha_d = \frac{\gamma_d}{wl^*}$  változókat, melyek a munkanélküli segély és rászorultsági nyugdíj bérjövedelemhez viszonyított arányát mérik, a kereseteltitkolás fenti feltétele az alábbi formára írható át:

$$(wl^*)^{\phi-\sigma} \left[ (1 + \alpha_c)^{1-\sigma} - \bar{t}^{1-\sigma} \right] > \mu\delta \frac{1-\sigma}{1-\phi} \left[ \beta^{1-\phi} - \alpha_d^{1-\phi} \right]. \quad (8)$$

A fenti feltétel alapján a szociális ellátórendszer valamely paraméterének megváltoztatását akkor tekintjük kereseteltitkolásra ösztönzőnek, ha a bal oldali kifejezés értékét növeli, vagy a jobb oldalon álló kifejezés értékét csökkenti. Mivel a (8) egyenlőtlenség mindkét oldalán pozitív a szögletes zárójelekben szereplő kifejezések értéke, azt mondhatjuk, hogy kereseteltitkolásra ösztönöz a magasabb adó- és járulékkulcs ( $t$ ), az alacsonyabb nyugdíjszorító ( $\beta$ ), a magasabb munkanélküli segély ( $\gamma_c$ ) és rászorultsági nyugdíj ( $\gamma_d$ ). Érdekes továbbá felfigyelni rá, hogy a bér megváltozásának hatása az egyéni preferenciákat kifejező  $\phi - \sigma$  különbségtől függ. Ha azonban feltesszük, hogy az időskori fogyasztás határhasznának fogyasztás szerint vett rugalmassága alacsonyabb, mint ezen rugalmasság aktív korra érvényes értéke, azaz  $\phi < \sigma$ , továbbá  $\sigma < 1$ , akkor az alacsonyabb bér ( $w$ ) is kereseteltitkolásra ösztönöz. Ez a hatás nem mutatható ki  $\sigma = \phi$  esetén, amikor is a munkavállaló aktív és nyugdíjas kori fogyasztása vonatkozásában értelmezett preferenciái homotetikusak.

A kereseteltitkolás tehát lehet racionális döntés, mégis rövidlátó viselkedésnek tekinthető, mivel az aktív kori fogyasztást a nyugdíjas kori rovására növeli. Vegyük észre ugyanakkor, hogy a (8) egyenlőtlenség  $\delta = 1$  mellett is teljesülhet, s a kereseteltitkolás révén nyerhető többlethaszon annál nagyobb, minél nagyobb a  $\sigma - \phi$  különbség. Ez a különbség tehát éppúgy a rövidlátó viselkedéssel áll összefüggésben, mint a leszámítolási tényező.

<sup>11</sup>A magánmegtakarítás lehetőségét is figyelembe véve tárgyalja a problémát Simonovits (2008).

### 3.2 Makro szintű egyensúly heterogén munkavállalói preferenciák esetén

Egyensúlyinak azt a helyzetet tekintjük, amikor az adó- és járulékbefizetések éppen finanszírozzák az aktív korban kapott rászorultsági jövedelmet, továbbá az időskori fogyasztást. Uniform preferenciák feltételezése helyett bontsuk most a munkavállalókat két szektorra oly módon, hogy legyen  $\omega$  a háztartások azon részaránya, melyre  $\xi_2 > \xi_1$ . Ekkor a modell 1. tulajdonsága továbbra is változatlan formában érvényes, a 2. tulajdonságban meghatározott intervallumok határai azonban szektoronként eltérőek, ami eltérő munkakínálatot eredményez. Legyen  $\xi_2$  elegendően nagy ahhoz, hogy a 2. szektorba tartozó egyéneket az aktív kor teljes egésze során visszatartsa a munkavállalástól! Ekkor például a 2. ábrán bemutatott  $MdU_l^\#$  határállozati függvény érvényes. A munkavállalók  $1 - \omega$  része pedig az alacsonyabb  $\xi_1$  paraméterértékkel jellemezhető, ezért munkakínálatuk:  $l_2^* > 0$ . Az egyensúlyi feltételt most az alábbi formában írhatjuk fel:

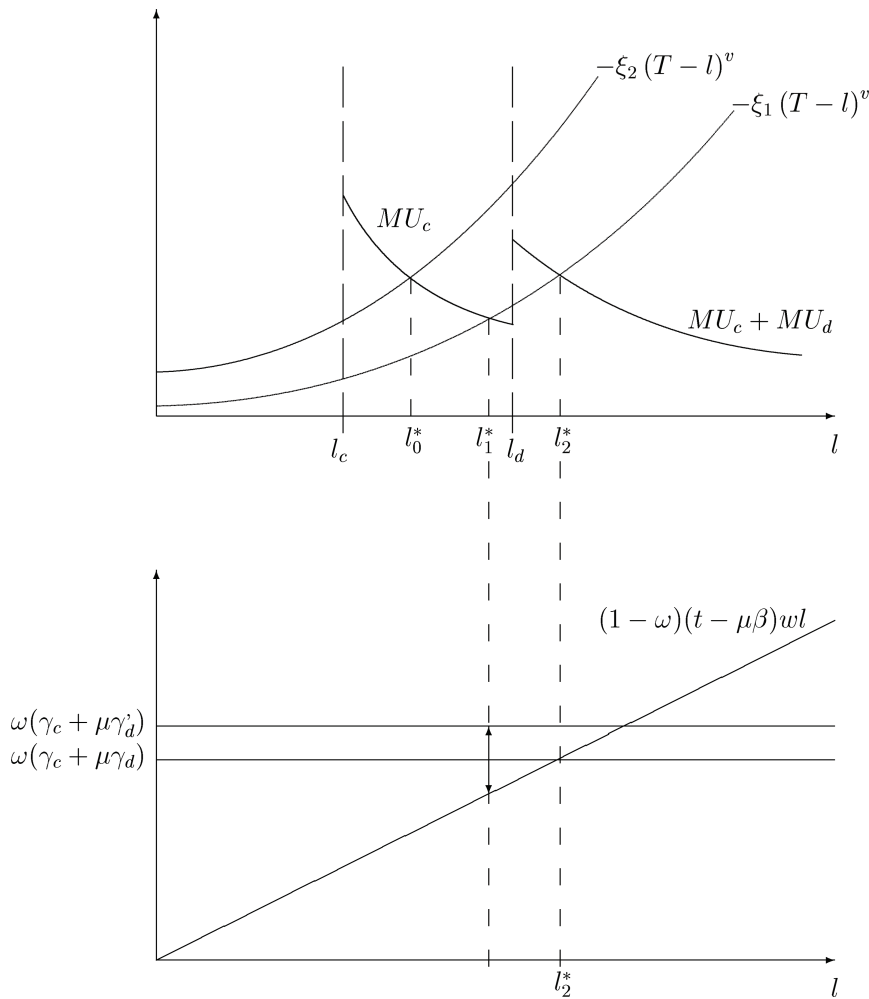
$$(1 - \omega)twl_2^* = (1 - \omega)\mu\beta wl_2^* + \omega(\gamma_c + \mu\gamma_d) ,$$

ahol a bal oldalon az összes adó- és járulékbefizetés áll, melyet a háztartások 1. szektora teljesít. A jobb oldalon álló első tag a háztartások ezen szektorának kifizetett nyugdíj, az utolsó pedig a 2. szektornak aktív és nyugdíjas korban fizetett transzfer. Átrendezve az egyensúly fenti feltételét, egyszerűbb formulához jutunk:

$$(1 - \omega)(t - \mu\beta)wl_2^* = \omega(\gamma_c + \mu\gamma_d) , \quad (9)$$

mely azt fejezi ki, hogy az adó és járulékbefizetések, valamint a jövedelemmel arányos nyugdíj különbségéből kell finanszírozni az aktív- és nyugdíjas kori rászorultsági jövedelmet. Ebből a felírásból már jól látható, hogy  $t < \mu\beta$  esetén az egyensúly csak negatív rászorultsági jövedelem révén jöhetne létre. Modellünkben ez egy olyan fix összegű adó lehetne, melyet a munkaképes vagy nyugdíjas korban lévőknek kellene fizetniük. Ezzel az esettel azonban a továbbiakban nem foglalkozunk, hanem feltesszük, hogy  $t > \mu\beta$ .

A munkakínálatot meghatározó (4) optimumkritérium és a (9) egyensúlyi feltétel összefüggését a 4. ábra szemlélteti. A felső koordinátarendszer az 1. ábrát ismétli meg azzal az eltéréssel, hogy a munkavégzés határállozati függvényét a munkavállalók mindkét szektorára feltünteti. Az alsó koordinátarendszerben az origóból induló egyenes a nettó adó és járulékbefizetések és munkakínálat között fennálló egyenes arányosságot reprezentálja. Meredekségét az  $(1 - \omega)(t - \mu\beta)$  tényező mellett a reálbér határozza meg. A vízszintes egyenes origótól való távolsága a nyugdíjas időszak hossza mellett a szabadidőt magasabbra értékelő, 2. szektor részarányától, valamint az aktív és nyugdíjas kori rászorultsági jövedelem mértékétől függ. A két egyenes metszéspontjában adódik az  $l_2^*$  egyensúlyi munkakínálat, ami ábránkon a tényleges munkakínálattal egyezik meg.



4. ábra. Egyensúly és egyensúlytalanság

Figyelembe véve, hogy továbbra is teljesülnek az 1. és 2. tulajdonságok, a komparatív statikus elemzés a 4. ábra felhasználásával viszonylag egyszerűen elvégezhető. Számunkra elsősorban a rászorultsági járadékok  $\gamma_c$  és  $\gamma_d$  megváltozásának következményei érdekesek. Amennyiben  $\gamma_d$  értéke  $\gamma'_d$ -re nő, az  $l_d = \frac{\gamma_d}{\beta w}$  szaggatott egyenes jobbra mozog, ami elegendően nagy mértékű növekedés esetén a pozitív munkakínálat optimális szintjének  $l_2^*$ -ról  $l_1^*$ -ra történő csökkenését eredményezi. Ez a csökkenés azért következik be, mert a rászorultsági öregségi nyugdíj elegendően magas szintje esetén a magasabb munkakínálat révén elérhető arányos nyugdíj már nem ösztönöz  $l_2^* - l_1^*$  mértékű többletmunka vállalására. Az alacsonyabb munkakínálat esetén azonban modellünkben már nem áll fenn egyensúly: a deficit mértéke:  $\omega(\gamma_c + \mu\gamma'_d) - (1-\omega)(t-\mu\beta)wl > 0$ , melynek nagyságát az ábra alsó részén feltüntetett függőleges méretnyíl reprezentálja.

Fontos megjegyezni, hogy az iménti komparatív statikus vizsgálat során  $\omega$  értékét mindvégig konstansnak tekintettük, tehát az egyensúly nem azért bomlott meg, mert nőtt a szabadidőt magasabbra értékelő munkavállalók részaránya, hanem azért, mert a rászorultsági nyugdíj emelésével a többletmunka a szabadidőt alacsonyabbra értékelő, 1. szektorba tartozó munkavállalók számára is elvesztette ösztönző hatását.

Az egyensúly most többféleképpen is helyreállítható. Például  $\gamma_c$  megfelelő mértékű csökkenése esetén az  $l_c = \frac{\gamma_c}{t\omega}$  szaggatott egyenes balra történő elmozdulása elegendően nagy lehet ahhoz, hogy a 2. szektor háztartásai is munkát vállaljanak. Munkakínálatuk:  $l_0^*$  lesz, ami lehetővé teszi, hogy senki számára ne kelljen munkanélküli ellátást fizetni<sup>12</sup>, s ez javítja a rendszer egyensúlyát. Az  $l_0^*$  munkakínálat azonban elegendően alacsony ahhoz, hogy az ez alapján fizetett keresetarányos nyugdíj elmarad a  $\gamma_d$  rászorultsági küszöbtől, így a nyugdíjasok  $\omega$  része esetében a keresetarányos nyugdíj kiegészítése szükséges. Megjegyzendő, hogy a nyugdíjrendszer egyensúlyának feltétele ebben az esetben a (9) egyenlet helyett:  $\omega t w l_0^* + (1 - \omega) t w l_2^* = \omega \mu \gamma_d + (1 - \omega) \mu \beta w l_2^*$ , így a 4. ábra már nem használható a makroszintű egyensúly, illetve egyensúlytalanság szemléltetésére. Továbbá  $t w l_0^* < \mu \gamma_d$  esetén a nyugdíjrendszer továbbra is a szabadidőt magasabbra értékelő munkavállalók javára végez jövedelemátcsoportosítást.

Visszatérve a 4. ábrán bemutatott szituációhoz, további érdekes következtetések vonhatók le a modell egyéb paramétereinek megváltozásával kapcsolatban. Nézzük például  $\omega$  növekedésének esetét. Ekkor a teljes populáción belül megnő azoknak a részaránya, akik a szabadidő nagyobb relatív fontossága miatt nem vállalnak munkát. A 4. ábra alsó részén jól leolvasható, hogy ekkor az  $\omega(\gamma_c + \mu\gamma_d)$  egyenes magasabbra kerül, az  $(1 - \omega)(t - \mu\beta)w l$  egyenes meredeksége pedig csökken, így a (9) egyensúlyi feltétel teljesüléséhez magasabb munkakínálatra lenne szükség. Ugyanakkor az 1. szakaszban azt láttuk, hogy  $\xi$  magasabb értéke a munkakínálatot csökkenti, így a szabadidőnek nagyobb relatív fontosságot tulajdonító munkavállalók részarányának növekedésével a makroszintű egyensúly nem tartható fenn.

Modellünkben a szabadidő alacsonyabbra értékelése a munkakínálat magasabb szintjét, így magasabb jövedelmet eredményez, ezért a munkavállalók két szektorra bontásával egyidejűleg magasabb és alacsonyabb jövedelmű egyéneket, szegényeket és gazdagokat különböztettünk meg. A munkanélküli ellátás és a rászorultsági nyugdíj tehát nem csak úgy értelmezhető, hogy a gazdagoktól csoportosít át jövedelmet a szegények felé, hanem úgy is, hogy redistribúció folyik a szabadidőt alacsonyabbra értékelőktől a munkavégzést erőteljesebben diszpreferálóknak számára. Megjegyzendő azonban, hogy amiről itt szó van, az nem az Augusztinovics - Köllő (2007) által említett fordított („perverz”) újraelosztás. Ennek modellezéséhez a (2) fogyasztási függvény alábbi módosítása lenne szükséges:

<sup>12</sup>Ez a következtetés meglehetősen életszerűtlen, ám a modell alapvetően neoklasszikus jellegéből adódik, mely a kényszerű munkanélküliséget figyelmen kívül hagyja. De még e neoklasszikus modell realitását is javítaná, ha a munkavállalókat a  $\xi$  paraméter alapján kettőnél több szektorra bontanánk.

$$d = d(l) = \begin{cases} 0, & \text{ha } twl < \bar{\alpha} \\ \beta wl, & \text{ha } twl \geq \bar{\alpha} \end{cases}$$

ahol  $\bar{\alpha}$  nyugdíjjogosultság megszerzéséhez minimálisan szükséges adó- és járulékbefizetés mértéke. Az így módosított modell elemzése azonban, számos egyéb lehetséges kiterjesztéssel együtt, kívül esik a jelen dolgozat keretein.

## 4 Következtetések

Dolgozatunkban a rászorultsági nyugdíjrendszer munkakínálatra gyakorolt hatását vizsgáltuk, nem hagyva figyelmen kívül a munkanélküli ellátást sem. Megmutattuk, hogy a probléma egyszerű analitikus eszközökkel is hatékonyan vizsgálható még abban az esetben is, ha a homotetikus munkavállalói preferenciákat megjelenítő Cobb-Douglas, vagy CES hasznossági függvény helyett az általánosabb CRRA függvényt alkalmazzuk. A 4. ábra tanulsága szerint ez az egyszerű elemzési apparátus makroszintre is kiterjeszthető.

Megmutattuk azt is, hogy a rászorultsági nyugdíj és munkanélküli segély rendszere jelentős „ingerküszöböt” generál a munkavállalók viselkedésében. Így előfordulhat, hogy a szociális ellátórendszer, illetve a reálbér módosulása nem vált ki érzékelhető reakciót a munkavállaló részéről, de éppígy előfordulhat az is, hogy szokatlan érzékenységgel reagál. E következtetéssel szemben föl lehetne vetni, hogy a 3. ábrán bemutatott munkakínálati függvény egyetlen munkavállaló esetében érvényes lehet, de a munkavállalói preferenciák heterogenitása következtében makroszinten már nem mutatható ki a reálbérre, vagy egyéb paraméterre való érzékenység hasonló változékonysága. Ez minden bizonnyal így is van. Ha azonban föltesszük a hasonló szakképesítéssel, hasonló munkakörökben, esetleg azonos régióban foglalkoztatott munkavállalók preferenciáinak homogenitását, akkor célszerűnek tűnik a cikünkben kimutatott „ingerküszöb” jelenlétével számolni.

Dolgozatunk alapvető módszertani újítása az aktív és időskori fogyasztás határhasznának munkakínálat függvényében történő kifejezése. Ez lehetővé teszi az optimális munkakínálat egyszerű, grafikus eszközökkel történő meghatározását, ami az analitikus elemzést jelentős mértékben leegyszerűsíti, így további komparatív statikus vizsgálatokra is kényelmes lehetőség nyílik. Egyszerűen elemezhető például az adókulcs, vagy a nyugdíjszorító nagyságának munkakínálatra gyakorolt hatása csakúgy, mint a társadalom előregedése, mely a  $\mu$  paraméter növekedése révén lenne a modellbe bevezethető. Ezek a vizsgálódások azonban a jelen dolgozat keretein túlmutatnak.

Láttuk, hogy a magasabb szintű munkanélküli ellátás, illetve rászorultsági nyugdíj csökkenti a munkakínálatot, ugyanakkor kereseteltitkolásra ösztönöz, s így a makroszintű egyensúlyt is rontja. Ebből azonban nem feltétlenül következik az ilyen jellegű ellátások csökkentésének szükségessége. Elegendő ezeket az ellátásokat egy alkalmas szintű munkakínálathoz, pl. minimális szolgálati időhöz kötni<sup>13</sup>. Modellünkben ez a munkakínálat egy pozitív alsó korlátjának bevezetését jelenti. Például meghatározva a munkakínálatra az

<sup>13</sup>Kényszerű munkanélküliség esetén azonban ez a minimális szolgálati idő nem lehet

$l \geq \frac{\gamma c}{\tau w}$  alsó korlátot, a 2. ábrán látható, hogy a szabadidőt igen magasra értékelő  $MdU_l^\#$  határáldozati görbe esetén is az alsó korlátot meghaladó  $l_\#$  optimális munkakínálat adódik. Figyelembe véve a (7) összefüggést az is látható, hogy ez a munkakínálat az alsó korlát némileg alacsonyabb szintje esetén is elérhető. Ugyanakkor azt is látni kell, hogy egy ilyen intézkedés az érintett egyének életpálya-hasznosságát jelentős mértékben csökkenti.

## Irodalom

1. Arrow, K. (1963) *Social Choice and Individual Values*, 2nd edn, Yale University Press, New Haven.
2. Auerbach, A. és L. Kotlikoff (1987) *Dynamic Fiscal Policy*, Cambridge University Press.
3. Augusztinovics M. és Köllő J. (2007) Munkapiaci pálya és nyugdíj, 1970–2020, *Közgazdasági Szemle*, LIV, 2007. június 529–559. o.
4. Benassy, J. P. (1977) Quantity Signals and the Foundations of Effective Demand Theory, *Scandinavian Journal of Economics*, 79, S147–168.
5. Davig, T. és Leeper, E. M. (2011) *Temporarily Unstable Government Debt and Inflation*, NBER Working Paper Series, 16799, Cambridge, MA
6. Feldstein, M. S. (1987) Should Social Security be Means-Tested?, *Journal of Political Economy*, 95. 468–484. o.
7. Gali, J. (2008) *Monetary Policy, Inflation and the Business Cycle*, Princeton University Press.
8. Malinvaud, E. (1977) *The Theory of Unemployment Reconsidered*, Oxford Basil Blackwell.
9. Simonovits A. (2008) Keresetbevallás és nyugdíj – egy elemi modell, *Közgazdasági Szemle*, LV. 2008. május, 427–440. o.
10. Simonovits A. (2011) Rászorultsági vagy alapnyugdíj? Nyugdíjjóváírás? *Közgazdasági Szemle* LVIII. 2011. április. 301–313. o.
11. Simonovits A. (2012) Optimális lineáris adó- és nyugdíjrendszer rugalmas munkakínálat esetén, *Szigma*, XLII. 1-2. 1–14. o.
12. Valdés-Prieto, S. és Schwarzhaupt, U. (2010) A Maximum for Taxable Earnings in Social Insurance: Is it Justified? Employment and Social Protection Conference, Munich.

## OPTIMAL LABOR SUPPLY WITH BASIC INCOME SYSTEM

We consider a linear transfer system, where workers pay pension contributions and personal income taxes and pensioners receive proportional benefits while workers and pensioners enjoy basic income. Every worker maximizes his discounted lifetime utility function, depending on young- and old-age consumption and leisure. Instead of numerical illustrations the paper presents analytical results. We point out that basic income system can cause considerable fluctuations in labor supply.

---

hosszabb, mint a munkapiacom fennálló  $\bar{l}$  mennyiségi korlát. Ellenkező esetben ugyanis az előző szakaszban említett perverz újraelosztás jön létre.



VISSZAVÁSÁRLÁSI KOCKÁZAT ÉRTÉKELÉSE  
KORRELÁLT BIZTOSÍTÁSI KOCKÁZATOKNÁL<sup>1</sup>

SZINI RÓBERT

*Magyar Nemzeti Bank*

A Szolvencia II szabályozás várható bevezetésének hatására az utóbbi években megnövekedett a különböző kockázatok minél pontosabb modellezésének igénye a biztosítók részéről. Cikkünk célja a biztosítók visszavásárlási opcióval érintett területén felmerülő visszavásárlási kockázat modellezési lehetőségeinek, valamint a szakirodalomban már egy ismert modell lehetséges fejlesztésének, továbbgondolásának bemutatása. Ehhez először is röviden bemutatjuk Loisel-Milhaud [2012] eddigi eredményeit, kiegészítve azt a szerzőpáros vizsgálatának fókuszába nem kerülő, saját számításokon alapuló paraméterbecslés eredményeivel. A későbbiekben megmutatjuk, hogyan lehet Grosen-Jørgensen [1999] modelljét egy eltérő, vegyes biztosítási keretrendszerben kezelni és így a visszavásárlást, mint egy biztosítási termékhez kapcsolódó opciót beárzni. Ezt követően pedig bemutatásra kerül, hogyan lehet a módosított keretrendszerben tárgyalt Grosen-Jørgensen [1999] modellbe Loisel-Milhaud [2012] eredményeit beépíteni a stressz időszak során felmerülő visszavásárlási döntések közötti korrelációval kapcsolatban. A cikkben azt állítjuk, hogy az így továbbfejlesztett, kombinált modellel a visszavásárlással, mint az ügyfél által lehívható opcióval rendelkező termék aktuáriusilag korrekt árának (actuarially fair price) meghatározására egy pontosabb, az árat mozgató külső tényezők szélesebb körét megragadó eszközhöz jutunk.

*Kulcsszavak:* visszavásárlási kockázat, aktuáriusilag korrekt ár, modellezés, Szolvencia II

*Journal of Economic Literature (JEL) kód:* C15, C46, C63, G12, G22

## Bevezetés

A biztosítási szektort a tőkepiacok eredménye és működése egyre inkább befolyásolja napjainkban, amelyet nagyrészt a banki és biztosítási tevékenységek, termékek egyre szorosabb összefonódása indukál. A biztosítási ágazat ennek hatására egyre inkább magasabb kockázati szintekkel szembesül, amelynek kezelését és mérését a biztosítók szavatolótőkéjére vonatkozó jelenlegi szabályozás (Szolvencia I) egyre kevésbé tudja lefedni. Ennek hatására az Európai Unió elindította a Szolvencia II projektet, amelynek célja, hogy a

---

<sup>1</sup>Ezúton szeretném megköszönni Dr. Sziüle Borbálának és Inzelt Györgynek, hogy idejüket nem kímélve szakmai és formai tanácsaikkal segítettek a cikk elkészítésében. Beérkezett: 2013. október 6. E-mail: szinir@mb.hu.

biztosítók minimum tőkekövetelményének szintje jobban tükrözze az általuk vállalt kockázatokat.

A Szolvencia II keretrendszer már lehetőséget nyújt olyan kockázattípusok jobb megragadására, számszerűsítésére is, amelyek nem kerültek lefedésre a Szolvencia I által. A visszavásárlási kockázat (surrender risk), azaz jelen cikk témája pontosan ezen, az eredeti szabályrendszer által még nem lefedett kockázattípusok közé tartozik. A szakirodalomban a visszavásárlással, mint egy ügyfél által lehívható opcióval, valamint annak árazásával kapcsolatosan számos cikk született már, amelyek az ár meghatározására különféle módszereket javasolnak. Tak Kuen Siu [2005] például másodrendű, szakaszonként lineáris, közönséges differenciálegyenletek segítségével jut el az aktuáriusilag korrekt árhoz, míg Bacinello [2003] CRR<sup>2</sup> modellt, valamint egy rekurzív algoritmus alkalmazásával kapja a korrekt árat. A szakirodalom azonban még nem foglalkozott az aktuáriusilag korrekt árat meghatározni képes modellek kapcsán az összefüggő (korrelált) biztosítási kockázatokkal, valamint annak modellbe történő beépíthetőségével. A cikkünkben közölt új eredmények egyike viszont pontosan ezzel a témakörrel kapcsolatos.

Cikkünk első szakaszában bemutatjuk a szakirodalom még viszonylag újnak tekinthető eredményeit a stressz időszak során felmerülő visszavásárlási döntések közötti korrelációjával kapcsolatban (Loisel-Milhaud [2012] nyomán), majd a második szakaszban egy módosított keretrendszerben (vegyes biztosítás) tárgyaljuk a visszavásárlási opcióval ellátott termékek aktuáriusilag korrekt árának meghatározására képes Grosen-Jørgensen [1999] modellt. A harmadik szakaszban pedig bemutatjuk, hogyan is vehetőek figyelembe Loisel-Milhaud [2012] eredményei a módosított keretrendszerű Grosen-Jørgensen [1999] modellben, amellyel kapcsolatosan kontrollszámításokat is végzünk.

## 1 A visszavásárlási kockázat sztochasztikus modellje

Az összefoglalóban említett kombinált modell bemutatása előtt, mely jelen cikk fő tárgyát képezi, röviden összefoglaljuk Loisel-Milhaud [2012] modelljének eredményét, valamint annak a kombinált modell matematikai hátterének megértéséhez feltétlenül szükséges alapjait. A részletes lépéseket és alkalmazott összefüggéseket az érdeklődő olvasó megtalálja Loisel-Milhaud [2012] cikkében.

Legyen adott egy tetszőleges biztosítási termék, amelyet az ügyfél a teljes tartam alatt visszavásárolhat. Jelölje a továbbiakban  $\Delta r$  a piacon, egyéb befektetéssel elérhető hozamnak, valamint az adott biztosítási termékhez tartozó szerződésben rögzített hozamnak a különbségét. Legyen  $K_i$  egy olyan indikátor valószínűségi változó, amely 1 értéket vesz fel, ha az  $i$ -edik követénytulajdonos visszavásárol, 0-t pedig, ha nem vásárol vissza. Hasonlóan, jelölje  $M_i$  azt az indikátor valószínűségi változót, amely 1 értéket vesz fel,

---

<sup>2</sup>Cox, Ross, Rubinstein

ha az  $i$ -edik kötvénytulajdonos piackövető magatartású, 0-t pedig, ha nem, továbbá legyen az  $M_i$  valószínűségi változó paramétere  $p_0$ . Legyen továbbá  $K_0$  az az indikátor valószínűségi változó, amely a visszavásárlással kapcsolatos piaci várakozásokat tükrözi (1 értéket vesz fel, ha a piaci viszonyok a visszavásárlást diktálják), valamint jelölje  $K_i^\perp$  az  $i$ -edik kötvénytulajdonos minden, a piaci várakozásokon kívüli információforrása segítségével meghozott döntését a visszavásárlással kapcsolatban (1 értéket vesz fel, ha visszavásárlást diktál minden egyéb információ). A következőkben tegyük fel, hogy  $K_0$  és  $K_i^\perp$  ( $i = 1, \dots$ ) függetlenek, és legyenek azonos eloszlásúak  $p$  paraméterrel, továbbá legyen független  $M_i$  ( $i = 1, \dots$ )  $K_0$ -tól és  $K_i^\perp$ -től ( $i = 1, \dots$ ). Ezen feltételezések felhasználását, valamint szükségességét a modell levezetése során, a megfelelő helyen külön ismertetjük. A visszavásárlással kapcsolatos döntést jelző  $K_i$  indikátor változót az eddigiek alapján a következőképp írhatjuk fel egy adott kötvénytulajdonosra:

$$K_i = M_i K_0 + (1 - M_i) K_i^\perp. \quad (1)$$

Az (1)-ben szereplő  $K_i$  változóról, azaz az egyéni visszavásárlási döntések változójáról feltehető, hogy annak a valószínűsége, hogy értéke 1, az  $\Delta r$  növekvő függvénye.

A következőkben bemutatjuk, hogy portfólió szinten hogyan tudjuk a fentieket alkalmazni, továbbá a fenti paraméterek felhasználásával milyen eloszláshoz jutunk a kötvénytulajdonosok visszavásárlását illetően (Loisel-Milhaud [2012] alapján). Vegyünk egy  $n \geq 2$  kötvénytulajdonosokból álló portfóliót. Jelölje a visszavásárlás mellett döntő szerződők számát  $Z$ , azaz  $Z = \sum_{i=1}^n K_i$ . Továbbá jelölje a piackövető magatartású szerződők számát  $Y$ , így  $Y = \sum_{i=1}^n M_i$ . Most tegyük fel, hogy a piaci várakozások a visszavásárlást képviselik, azaz  $K_0 = 1$ . Ekkor  $Z$  egyenlő  $k \in [0, n]$  egésszel, továbbá az  $Y \leq k$  feltételnek is teljesülnie kell, hisz a piackövető magatartásúakon kívül más is dönthet visszavásárlás mellett. Ehhez hasonlóan, ha  $K_0 = 0$ , akkor  $Y \leq (n - k)$  fog teljesülni, hisz ekkor  $(n - k)$  kötvénytulajdonos nem fog visszavásárolni, akik közül nem biztos, hogy mindenki piackövető magatartású. Ezek és a teljes valószínűség tétele alapján felírhatjuk a  $P(Z = k)$  valószínűséget minden  $0 \leq k \leq n$  esetén:

$$P(Z = k) = P(Z = k \mid K_0 = 0)P(K_0 = 0) + P(Z = k \mid K_0 = 1)P(K_0 = 1). \quad (2)$$

A fenti (2)-es kifejezést általánosabb alakra hozhatjuk a piackövető magatartású kötvénytulajdonosok számának figyelembevételével, valamint kihasználva az alkalmazott változók függetlenségét (a részletes átalakításokért lásd Loisel-Milhaud [2012]), a keresett eloszlás alakja a következő lesz:

$$P(Z = k) = p \sum_{i=0}^k \alpha_{i,k} + (1 - p) \sum_{j=0}^{n-k} \beta_{j,k} \quad (3)$$

$$\alpha_{i,k} = \binom{n}{i} p^i (1 - p)^{n-i} \binom{n-i}{k-i} p^{k-i} (1 - p)^{n-k} \quad (4)$$

$$\beta_{j,k} = \binom{n}{j} p_0^j (1-p_0)^{n-j} \binom{n-j}{k} p^k (1-p)^{n-j-k} \quad (5)$$

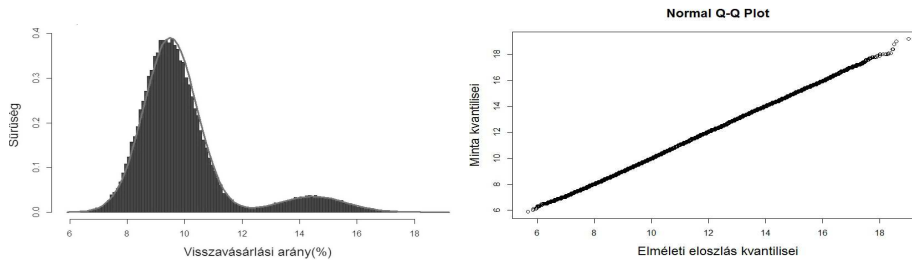
Loisel-Milhaud [2012] cikkükben megmutatják, hogy amennyiben  $p_0 = 0$  és  $n \rightarrow \infty$ , úgy a fenti (3) eloszlás jól közelíthető normális eloszlással, valamint  $p_0 \neq 0$  esetben a keresett eloszlás kétmódusú lesz. A korábbi feltételezésünk hasznát, mely szerint az alkalmazott  $K_0$  és  $K_i^\perp$  ( $i = 1, \dots$ ) változók nem csak függetlenek, hanem azonos eloszlásúak, azonos paraméterekkel, azt a  $p_0 = 0$  eset mellett a (3) kifejezés átalakítása kapcsán láthatjuk (a  $p_0 = 0$  esetén analitikusan is belátható, hogy a fenti (3) eloszlás jól közelíthető normális eloszlással<sup>3</sup>, míg a  $p_0 \neq 0$  esethez tartozó kétmódusú eloszlással való közelítés helyességét csak a szimuláció eredménye alapján tudjuk megállapítani). A későbbiekben ismertetett kombinált modellben ezen eredményeket fogjuk felhasználni, viszont a  $p_0 \neq 0$  eset további vizsgálatokat kíván, mivel a szerzőpáros cikkükben kizárólag a hisztogram alakja alapján vizsgálta ezt az esetet, és nem is kísérelték meg a kétmódusú eloszlás közelítését valamilyen kevert eloszlással, és annak paramétereinek kiszámítására sem tértek ki. A továbbiakban tehát megmutatjuk, hogy a  $p_0 \neq 0$  esethez kapcsolódó eloszlást két normális eloszlás keverése során előálló kevert eloszlás segítségével lehet közelíteni, továbbá megfelelő módszertan segítségével számszerűsítjük a normális eloszlások  $\mu$  és  $\sigma$  paramétereit, valamint a keverés során alkalmazott súly értékét.

Az előzőekben említett feladatot az EM-algoritmus<sup>4</sup> alkalmazásával oldottuk meg, amely az ML becslés iteratív számítására alkalmas. Bilmes [1988] alapján az algoritmusnak két fő felhasználási területe létezik. Az egyik az adathiány esete, amely például a megfigyelések nem megfelelő rögzítéséből fakadhat, a másik terület pedig a likelihood függvény optimalizálásának nehezen kivitelezhető esete, amely során egy további, hiányzó (látens) változó létezését feltéve a likelihood függvény tovább egyszerűsíthető. Jelen esetben mi az utóbbi probléma kapcsán használjuk majd az EM-algoritmust. Az érdeklődő olvasó a cikk függelékében találhat egy rövid módszertani összefoglalót a kérdéses algoritmus kapcsán. Az EM-algoritmus segítségével meghatározott paraméterű eloszlások illeszkedésének jóságát Q-Q plotokkal ellenőriztük, amelyek közül egy kiválasztott paraméterkészlethez tartozó esetet a következő ábra mutat<sup>5</sup>.

<sup>3</sup>Belátható, hogy az  $i, j = 0$  esetben (4) és (5) valószínűségek, amennyiben  $p_0 = 0$ ,  $B(n, p)$  binomiális eloszlásúak, míg  $i, j \neq 0$  esetben az egyes  $\alpha_{i,k}$  és  $\beta_{j,k}$  változók azonosan 0 értékűek. Ennek tudatában a (3) kifejezés jelentősen egyszerűsödik, és eredményként a  $B(n, p)$  eloszlást kapjuk, amely  $n \rightarrow \infty$  esetben a de Moivre-Laplace tétel alapján tart a normálishoz. A fenti egyszerűsítések a kérdéses változók azonos paraméterű eloszlásának feltételezése nélkül nem lennének elvégezhetőek. Az azonos paraméterű eloszlás feltételezése közgazdaságilag is értelmes: hatékony piacokon a piacon hozzá nem férhető információ nem diktálhat tartósan mást, mint a piaci várakozás, mert annak szinte azonnal be kell épülnie a várakozásokba az információ adta előny első kihasználását követően (hatékony piacok elmélete (EMH) alapján).

<sup>4</sup>Expectation-Maximization algorithm

<sup>5</sup>A cikkben szereplő összes számítást az R 3.0.1 szoftverrel végeztük el.



$n = 1000$   $p = 0.1$ ,  $p_0 = 0.05$   $n = 1000$   $p = 0.1$ ,  $p_0 = 0.05$

1. ábra. Illeszkedés vizsgálat

Egyéni vv. valószínűség	Korreláció	$\mu_1$	$\sigma_1$	$\mu_2$	$\sigma_2$	$\alpha$
$p=8\%$	$p_0=5\%$	7.66	0.84	12.64	1.12	0.92
	$p_0=15\%$	6.88	0.79	21.95	1.22	0.91
	$p_0=30\%$	5.65	0.72	35.63	1.51	0.91
$p=15\%$	$p_0=5\%$	14.23	1.08	19.21	1.30	0.85
	$p_0=15\%$	12.76	1.05	27.73	1.42	0.84
	$p_0=30\%$	10.50	0.98	40.56	1.56	0.84
$p=25\%$	$p_0=5\%$	23.77	1.32	28.72	1.51	0.75
	$p_0=15\%$	21.25	1.30	36.27	1.55	0.74
	$p_0=30\%$	17.48	1.20	47.44	1.57	0.74

1. táblázat. A paraméterbecslés eredményei

Az 1. táblázatban összefoglalóan találjuk a  $p_0 \neq 0$  esetekhez tartozó, a fenti eljárások segítségével meghatározott paramétereket. A táblázatból láthatjuk, hogy a  $p$  paraméter leginkább a kevert eloszlás első komponensének várható értékét befolyásolja, amely a  $p_0$  változó, azaz a korreláció növekedésével folyamatosan csökken. A korreláció növekedésével látható, hogy a második komponens várható értéke is folyamatosan nő, azaz a kérdéses eloszlás egyre inkább kétmódusúvá válik. A  $\sigma_1$  paraméterre  $p_0$  növekedése csökkenőleg hat, amely azt jelenti, hogy az első komponens eloszlás egyre inkább csúcsosabbá válik. Az elmondottak a  $\sigma_2$  paraméterre fordítva teljesülnek, azaz  $p_0$  növekedésével nő, így a második komponens eloszlás egyre laposabbá válik. Érdeemes továbbá megemlíteni, hogy mindkét kérdéses paraméter növekedése csökkenőleg hat az első komponens keverési súlyára, azaz egyre hangsúlyosabbá válik a második komponens. A cikkünk harmadik fejezetében ismertetésre kerülő kombinált modellhez a fenti eredményeket, és azok számszerűsítéséhez szükséges módszereket a fentiek alapján most már bátran alkalmazhatjuk.

## 2 A visszavásárlás, mint opció

Ebben a szakaszban a bevezető részben említett kombinált modell alapját képező, a visszavásárlást, mint a kötvénytulajdonos számára a szerződés tartama alatt lehívható opció árazására képes modellt fogjuk bemutatni, azaz

pontosabban annak csakis a kombinált modell megértéséhez nélkülözhetetlen részleteit, lépéseit (az érdeklődő olvasó Grosen-Jørgensen [1999] cikkében találhatja meg a részletes modell bemutatást, leírást). A modell bemutatása a cikk témájához jobban illeszkedő vegyes biztosítás keretrendszerében fog megvalósulni, amelyhez a szükséges, az említett szakirodalomhoz képesti plusz feltételezésekre, paraméterekre részletesen ki fogunk térni a következőkben. Az előző szakasz eredményeinek ezen modellbe történő beépíthetőségeire a harmadik szakaszban térünk ki, a kombinált modell ismertetése során.

Tegyük fel, hogy egy piaci szereplő év elején  $V$  egyszeri díjat fizet a biztosítónak, azaz  $V$  egyszeri összegért vásárol egy biztosítási terméket. Ezt az összeget a biztosító azonnal jóváírja az ügyfele számláján, azaz  $P(0) = V$ , ahol  $P(i)$  az  $i$ -edik év elején az ügyfél számlájának egyenlegét jelenti. Ezt az összeget a biztosító azonnal befekteti, azaz  $S(0) = V$ , ahol  $S(i)$  az  $i$ -edik év elején a biztosító eszközeinek piaci értéke. Feltesszük, hogy a biztosító az eszközeiből egy jól diverzifikált portfóliót épít fel, viszont nem teszünk kikötést annak összetételére. Ehelyett feltesszük, hogy az eszközök piaci értéke geometriai Brown-mozgást követ, azaz képlettel megadva:

$$dS(t) = \mu S(t) dt + \sigma S(t) dW(t), \quad S(0) = V. \quad (6)$$

A (6) összefüggésben a  $\mu$  és  $\sigma$  a drift és volatilitás paraméterei, a  $W(\cdot)$  pedig egy standard Wiener-folyamat egy filtrált valószínűségi mezőn  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$  a  $[0, T]$  véges időintervallumon, ahol  $dW(t) = \epsilon \sqrt{dt}$ ,  $\epsilon \sim N(0, 1)$ . A következőkben jelölje  $T$  a szerződés tartamát, továbbá tegyük fel, hogy a biztosító minden év elején  $r_p$  kamatot ír jóvá a kötvénytulajdonos számláján lévő összegre vonatkozóan, amelynek értékét Grosen és Jørgensen [1999] a következőképp definiálták:

$$r_p(t) = \max \left\{ r_g, \theta \left( \frac{B(t-1)}{P(t-1)} - \gamma \right) \right\} \quad (7)$$

A (7) képletben az  $r_g$  egy garantált hozam, amelyet a biztosító mindenképp nyújt, bárhogyan is alakul az eszközeinek piaci értéke egy adott év alatt. A  $B(t)$ -t a szerzők „puffernek” nevezik és a következőképp definiálják:  $B(t) = S(t+1) - P(t)$ , azaz az eszközök év eleji piaci értékének és az előző év eleji, az ügyfél számláján lévő egyenleg közti különbség. A  $\gamma$  az úgynevezett irányadó „puffer arány”, amely gyakorlatilag egy célzott hányad egy adott időszaki pufferből és az adott időszak eleji számlaegyenlegből képzett hányadosra vonatkozóan és ezt végig konstansnak feltételezünk a  $[1, T]$ -n. A  $\theta$  pedig azt az arányt jelenti, hogy ha az adott időszaki puffernek az év eleji számlaegyenleghez képesti aránya meghaladja a célzott arányt, akkor ebből mekkora részt fog megkapni az ügyfél. Összességében tehát ez az éves bónusz, amelyet említettünk a fejezet elején, hisz a garantált hozam és a befektetés jól teljesítése esetén a fenti módon meghatározott hozam közül az ügyfél mindig a nagyobbakat kapja a (7) összefüggés alapján. Ezek alapján az ügyfél számláján lévő egyenleg alakulásáról pedig a következőt mondhatjuk:

$$P(t) = (1 + r_p(t))P(t-1), \quad t \in [1, T] \quad (8)$$

$$P(t) = P_0 \prod_{i=1}^t (1 + r_p(i)), \quad t \in [1, T]. \quad (9)$$

A (9) összefüggést a (8)  $P_0$ -ra történő rekurzív visszavezetésével kaptuk. A további vizsgálatokhoz helyettesítsük be a (7) összefüggést (8)-ba, ekkor a következőt kapjuk:

$$P(t) = P(t-1) \left( 1 + \max \left\{ r_g, \theta \left( \frac{B(t-1)}{P(t-1)} - \gamma \right) \right\} \right) \quad (10)$$

$$= P(t-1) \left( 1 + r_g + \max \left\{ 0, \theta \left( \frac{S(t) - P(t-1)}{P(t-1)} - \gamma \right) - r_g \right\} \right) \quad (11)$$

A (11) összefüggésből látszik, hogy a garantált hozam miatt van egy lehető legkisebb értéke az ügyfél jövőbeni számlaegyenlegének, ha sohasem tudjuk lehívni a bónusz opciókat. Ez pedig nem más, mint  $P(T) = (1 + r_g)^T P_0$ . Még nem esett szó a visszavásárlásról, mint az ügyfél általi lehívható opcióról. Tegyük fel, hogy a biztosító portfóliójában olyan eszközök vannak, amelyek költségmentesen megbonthatóak és azonnal értékesíthetőek. Ezen feltételezés mellett visszavásárláskor a kötvénytulajdonos a mindenkor aktuális számlaegyenlegét kapja vissza. De vajon mikor fog az ügyfél visszavásárolni? A kérdésre a válasz az, hogy akkor, amikor a jövőbeli kifizetés várható értékének diszkontált értéke kisebb az aktuális számlaegyenlegnél. Azonban tudjuk, hogy egy biztosítási szerződés kapcsán a biztosító oldaláról a költségek nagy része a tartam elején jelentkezik, így ha az ügyfél a tartam elején vásárol vissza, az a biztosító oldaláról nézve semmiképpen nem előnyös, mert a kezdeti költségek akár magasabbak is lehetnek a befektetésen elért többlethozam biztosítónál maradó hányadához képest. Ezt Grosen és Jørgensen [1999] cikkükben nem tárgyalták, viszont az elvégzett számításaim során figyelembe veszem, azaz felteszem, hogy a kötvénytulajdonos az első  $m$  évben nem vásárolhat vissza. A számításokat ez annyiban befolyásolja, hogy az opció értékének meghatározására szolgáló CRR<sup>6</sup> modellben, azon belül is a binomiális fában történő visszafelé haladás során csak az  $m + 1$ -edik év elejéig vesszük a várható érték diszkontált értéke és az aktuális számlaegyenleg közül a nagyobbikat, majd az így kapott értéket a megfelelő  $e^{r^m}$  kifejezéssel diszkontáljuk. Az  $r$  a továbbiakban a kockázatmentes hozamot jelenti.

Tehát amire kíváncsiak vagyunk a következőkben, az a termék valós értéke és annak alakulása különböző paraméterek mellett, valamint arra is kíváncsiak vagyunk, hogy az így kapott érték hogyan oszlik meg a garantált hozam, mint termékkomponens, a bónusz opció és a visszavásárlási opció között. Az előbb említett három komponens közül az első kettő értékét úgy határozzuk meg, hogy feltesszük, nincs visszavásárlás, azaz a számla egyenlegét csak a  $(T + 1)$ -edik év elején kapjuk meg. Ez gyakorlatilag egy európai opciónak felel meg, amelyet csak lejáratkor lehet lehívni. Ennek az európai opciónak az értékéből levonjuk a  $P(T) = (1 + r_g)^T P_0$  minimális értéket, azaz a garantált hozam, mint termékkomponens értékét, így rögtön kapjuk a bónusz

<sup>6</sup>Cox, Ross, Rubinstein

opció értékét is. Ha van visszavásárlás, azaz bármikor hozzájuthat a számla egyenlegéhez az ügyfél, akkor az árazás egy amerikai opció árazásával egyezik meg, amely tetszőleges időpontban lehívható. Ha vesszük az amerikai és az európai opcióra kapott valós érték különbségét, akkor épp a visszavásárlás, mint opció értékét kapjuk.

Grosen és Jørgensen [1999] cikkükben egy megtakarítási típusú biztosítással foglalkoztak, viszont a fejezet elején említett vegyes biztosítás keretrendszeréhez további feltételezésekkel kell élnünk. Feltettem a továbbiakban, hogy a számlán lévő egyenleg csak akkor felvehető, ha az ügyfél még életben van, ha pedig időközben elhalálozik, akkor a vegyes biztosítás kockázati komponense akkora biztosítási összeget fizet, mint amennyi a szerződéskötéskor a várható jövőbeli számlaegyenleg a tartam végén. Ez a feltételezés onnan jött, hogy vegyes biztosítások esetén a kockázati és elérési komponensek biztosítási összegei az esetek túlnyomó részében megegyeznek. A modellben a halálozási valószínűségekről feltesszük, hogy az évek előre haladtával, az egyszerűség kedvéért lineárisan nőnek. Azt, hogy ezeket az európai és amerikai opciók árazásánál miként vettük figyelembe, azt a következőkben tárgyaljuk.

Az európai opció megközelítés szerint az ügyfél a szerződésben rögzített tartam végén  $P(T)$  kifizetésben részesül. A fentieknek megfelelően ezt az értéket kell megfelelően diszkontálni, amelyhez a kockázatmentes hozamot fogjuk felhasználni. A tartam elején a valós érték meghatározása a következő összefüggés alapján történik<sup>7</sup>:

$$Y_0 = E[qe^{-r(T-s)}P(T) | S(0), P(0)], \quad t-1 \leq s < t, \quad t \in [1, T]. \quad (12)$$

A fenti (12) összefüggés levezetését az érdeklődő olvasó megtalálja Grosen-Jørgensen [1999] cikkében. A  $q$  paraméter az adott kötvénytulajdonos túlélési valószínűségét jelenti a teljes tartam alatt, azaz  $q = \prod_{i=1}^T (1 - q_i)$ , ahol  $q_i$  ( $i = 1, \dots, T$ ) az  $i$ -edik évi halandósági valószínűséget jelenti, amelyről az előző fejezetben feltettük az egyszerűség kedvéért, hogy lineárisan nő az évek múlásával. A harmadik szakaszban a (12) számszerűsítését R 3.0.1 szoftverrel végeztem el Monte Carlo szimuláció alkalmazásával. A következetesség érdekében egy rövid, pontokba szedett összefoglalót is közlünk a számítás menetéről, mivel egyrészt eltérünk az eredeti modell keretrendszerétől, másrészt az így kapott eredmények összevetésre kerülnek a kombinált modell eredményeivel a harmadik szakaszban:

1.  $S(0) = V$  kezdőérték mellett szimuláljuk a befektetett eszközök piaci árának egy lehetséges alakulását a  $T$ -edik év végéig
2. (opcionális) figyelembe vesszük, hogy az eszközök piaci ára évközben is változhat, nem csak évente egy alkalommal (Grosen-Jørgensen [1999] eredeti modelljéből ez a lépés hiányzik)
3. lejáratig minden évben meghatározzuk a puffer nagyságát, amelynek segítségével meghatározható az éves  $r_p$  kamat nagysága, ebből pedig következik a minden év elején a számlán rendelkezésre álló összeg nagysága

<sup>7</sup>Grosen-Jørgensen [1999] alapján, kiegészítve túlélési valószínűséggel a kockázati komponenshez.



4. a fentieket megismételjük  $k$ -szor, és minden alkalommal eltávoljuk a szimulált  $P(T)$  értéket
5. kiszámoljuk az adott  $q_i$ -k alapján a  $T$ -edik évre vonatkozó túlélési valószínűséget
6. vesszük a szimulált  $P(T)$ -k átlagának  $\exp(rT)$ -vel diszkontált értékét és megszorozzuk  $q$ -val, így megkapjuk az elérti biztosítás aktuáriusi szempontból korrekt árát (actuarially fair price)
7. a kockázati rész aktuáriusilag korrekt árának kiszámításához vettük a szimulált  $P(T)$ -k átlagát, mint biztosítási összeget és képeztük a kiadások jelenértékének várható értékét
8. a kockázati és elérti komponensek összege adja a termék aktuáriusilag korrekt árát

Az amerikai opció megközelítés szerint van visszavásárlás, azaz a kötvénytulajdonos bármikor hozzájuthat a számláján lévő aktuális egyenleghez. Tegyük fel továbbá, hogy ha  $s$  időpontban ( $t - 1 \leq s < t$ ,  $t \in [1, T]$ ) jelenti be az ügyfél visszavásárlási szándékát, akkor  $P(s) = P(t - 1)$  összegre tart hat igényt, azaz ha év közben szeretne visszavásárolni, akkor az év elején a számláján lévő összeget kapja meg. A (12) összefüggéshez hasonlóan az aktuáriusilag korrekt árát meghatározó képlet ebben az esetben, az  $s$  időpontra vonatkozóan a következő:

$$Y(s) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{s,T}} E[qe^{-r(\tau-s)}P(\tau) | \mathcal{F}_s]. \quad (13)$$

A (13) összefüggésben szereplő  $\mathcal{T}_{s,T}$  az  $\mathcal{F}_s$ -megállási idők osztálya  $[s, T]$ -n, az  $\mathcal{F}_s$   $\sigma$ -algebra pedig  $s$ -edik időpontig felhalmozott információk összessége. A megállási idő nem más, mint egy véletlen időpont, amelynek bekövetkezése a filtrációban szereplő információ alapján eldönthető. A (13) összefüggésben az aktuáriusilag korrekt ár meghatározására az alapötlet a Cox-Ross-Rubinstein (CRR<sup>8</sup>) modell alkalmazása volt, amelynek lényege, hogy az  $S$  árfolyam  $g$  valószínűséggel vagy  $u$ -szorosára nő  $\Delta t$  idő alatt, vagy  $(1 - g)$  valószínűséggel  $d$ -szeresére csökkenhet, ahol  $d = 1/u$ .

A fentiek értelmében tehát az eszközök árfolyamának alakulását egy binomiális fával fogjuk modellezni. Mint azt már az előzőekben említettük, a kötvénytulajdonos akkor fog visszavásárolni, azaz akkor fogja lehívni a visszavásárlási opciót, amint az aktuális számlaegyenleg nagyobb lesz a jövőbeni számlaegyenleg várható értékének diszkontált jelenértékénél (természetesen a vegyes biztosítás keretrendszer miatt figyelembe kell venni a halálozási valószínűségeket is). A következőben feltesszük, hogy az  $S$  minden időszakban  $g$  valószínűséggel  $u$ -szorosára nő, vagy  $(1 - g)$  valószínűséggel  $d$ -szeresére csökken, azaz itt megtartjuk az eredeti cikkben szereplő CRR koncepciót, viszont az időben történő „visszatekintés” (tehát mikor visszafelé haladunk a fában a diszkontálás során) végett nem az egész fát fogjuk számszerűsíteni,

<sup>8</sup>A modellt részleteiben nem tárgyaljuk, arról az érdeklődő olvasó Száz [2009] kötetében olvashat.

hanem szimulációval mindig egy-egy utat fogunk előállítani, amelyen követhetővé válik, hogyan is alakul az egyes időszakok puffer értéke, amiből természetesen következik  $r_p$ , majd  $P$  megfelelő értéke. Ezt pedig  $k$ -szor megismétljük. Az európai opció esetén bemutatott, pontokba szedett lépésekhez hasonlóan itt is közöljük a számítás menetét, visszautalva az európai opció pontjaira, amennyiben az megegyezik az amerikai opció árazásának menetével:

1.  $S(0) = V$  kezdőérték mellett veszünk egy véletlen számot, amely  $g$  valószínűséggel  $u$ ,  $(1-g)$  valószínűséggel  $d$  értéket vesz fel, és előállítjuk a következő időszaki árfolyam értéket (azaz a fában egy lépést megyünk előre)
2. ezt követően az európai opció árazásának 2. és 3. pontja szerint járunk el
3. elindulunk a fában szimulált útvonalon visszafelé, diszkontálva a  $t$ -edik időszaki számlaegyenleget, figyelembe véve a túlélési valószínűséget
4. az előző időszaki számlaegyenleg és a fent képzett érték közül vesszük a nagyobbát, és ezzel haladunk tovább visszafelé az útvonalon
5. (opcionális) feltettük, hogy az első  $m$  évben nem vásárolhat vissza az ügyfél, így az útvonalon a fenti eljárással a  $P(m+1)$  értékig fogunk eljutni, amelyet  $e^{rm}$ -mel diszkontálunk
6. az eddig leírtakat  $k$ -szor megismétljük
7. az elérési komponens aktuáriusilag korrekt árát az egyes szimulált útvonalakhoz tartozó korrekt árak átlagaként számítjuk ki
8. a kockázati rész aktuáriusilag korrekt árának kiszámításához vettük a tartam végi szimulált számlaegyenlegek átlagát, mint biztosítási összeget és képeztük a kiadások jelenértékének várható értékét
9. a kockázati és elérési komponensek aktuáriusilag korrekt árainak összege adja a termék aktuáriusilag korrekt árát

A visszavásárlásra, mint az ügyfél által lehívható opció értékére vonatkozó, különböző paraméterek melletti eredményeket a cikk következő szakaszában bemutatásra kerülő kombinált modell ismertetése után, annak eredményeivel együtt fogjuk közölni.

### 3 A kombinált modell

A bevezetőben említett kombinált modell célja, hogy az első szakaszban ismertetett Loisel-Milhaud [2012] eredményeit figyelembe tudjuk venni a második szakaszban tárgyalt, módosított keretrendszerű Grosen-Jørgensen [1999] modellben, és ezáltal különböző paraméterek melletti számításokat végezhesünk a termék aktuáriusilag korrekt árára vonatkozóan. Az így kapott modellről állítjuk, hogy az egyes paraméterekben bekövetkező változás jobb megragadására, továbbá az árat mozgató külső tényezők szélesebb körének figyelembe vételére egy alkalmasabb eszközt kaptunk.

### 3.1 A modell elméleti háttere

Tekintsünk egy  $n$  ügyfélből álló portfóliót, akik a cikk előző szakaszában ismertett vegyes biztosítási termékbe fektetnek be. A realiztikusság kedvéért feltesszük, hogy az egyes ügyfelek kezdő befizetései különbözőek és  $\mathcal{N}(100, 20)$  normális eloszlást követnek. A biztosító a befizetett összeget azonnal befekteti, és az előző modellhez hasonlóan feltesszük, hogy az eszközök piaci értéke geometriai Brown-mozgást követ (6) szerint. Az év elején jóváírandó  $r_p$  kamat mértéke szintén az előző modellhez hasonlóan (7) alapján történik. Tehát egyéni, azaz ügyfél szinten Grosen-Jørgensen [1999] modelljétől csak a visszavásárlást tekintve térünk el, azaz míg a szerzőpáros szerint akkor vásárol vissza egy ügyfél, ha az aktuális számlaegyenleg nagyobb lesz a jövőbeni számlaegyenleg várható értékének diszkontált jelenértékénél, addig mi Loisel-Milhaud [2012] eredményére támaszkodunk. Feltesszük az előző modellhez hasonlóan, hogy az első két évben az ügyfelek számára nem engedélyezett a visszavásárlás. A tartam további részében azt, hogy az  $n$  ügyfél közül ki vásárol vissza, azt az (1) képlet, avagy a  $K_i$  indikátor valószínűségi változó fogja meghatározni. Ehhez viszont szükségünk van ügyfélszinten egy megfelelő  $M_i$ ,  $K_i^\perp$ , valamint portfóliószinten egy  $K_0$  változóra. Ezen változókról viszont tudjuk, hogy a  $K_0$  és  $K_i^\perp$  változók  $p$  paraméterű, valamint az  $M_i$   $p_0$  paraméterű indikátor változók. Tehát a feladatunk redukálódik megfelelő  $p$  és  $p_0$  változók eőállítására. Először is tekintsük a  $p$  paramétert. A szakirodalom (Loisel-Milhaud-Maume-Deschamps [2010], Loisel-Milhaud [2012]) a visszavásárlások szemléltetésére úgynevezett sigmoid-függvényeket ajánl, amelyek eléggé jellegzetes S alakot vesznek fel. Az S alak jól le tudja írni a visszavásárlások alakulását  $\Delta r$  függvényében: míg a  $\Delta r$  0 közeli, vagy minimális, addig az ügyfelek nem motiváltak a visszavásárlásra, így az S görbe „alsó szára” alacsony visszavásárlási arányt mutat. Egy bizonyos nagyságú  $\Delta r$  érték után a függvény hirtelen erőteljesen növekedni kezd, majd egy maximális visszavásárlási szint elérése után ismét vízszintes alakot ölt (valós feltételezés, hogy a visszavásárlási szándékot nem kizárólag a  $\Delta r$  nagysága mozgatja, biztosan lesz olyan ügyfél, aki egyéb megfontolásból, de magas  $\Delta r$  esetén sem vásárol vissza). A kérdéses függvény talán legegyszerűbb típusa a logisztikus függvény. A számításaink során mi ettől egy eltérő alakot fogunk használni a számos kedvező tulajdonsága miatt. Ezen függvényalakot Enz [2000] használta cikkében, de nem visszavásárlások szemléltetésére, hanem a biztosítási piac fejlettségének (biztosítási penetráció (díjbevétel/GDP)) vizsgálatához. Az Enz [2000] cikkében szereplő függvényalakot és Loisel-Milhaud [2012] ajánlását kombinálva a továbbiakban használt függvényalak a következő lesz:

$$h(\Delta r) = \frac{1}{C_1 + C_2 \cdot C_3^{\Delta r}}. \quad (14)$$

A (14) alak paramétereinek lehetséges értékei, a függvény alakjának változása különböző paraméterezés mellett mind megtalálhatóak Enz [2000] cikkében. Jelen cikkben a fenti alak csak azon kedvező tulajdonságát emeljük ki, amely

miatt kiválasztásra került a kérdéses  $p$  érték modellezése kapcsán. A (14) alak rendkívül jól testre szabható  $C_1, C_2$  és  $C_3$  értékek megfelelő megválasztása esetén, amelynek eredményeképp a függvény maximuma, 0 helyen felvett értéke<sup>9</sup> ( $h(0)$ ), valamint az inflexiós pontja kívánt nagyságú lehet. Ehhez meg kell oldanunk a következő egyenletrendszert  $C_1, C_2, C_3$ -ra<sup>10</sup>:

$$h(0) = \frac{1}{C_1 + C_2} \quad (15)$$

$$\text{maximum} = \frac{1}{C_1} \quad (16)$$

$$\text{inflexiós pont} = \frac{\log(C_1) - \log(C_2)}{\log(C_3)} . \quad (17)$$

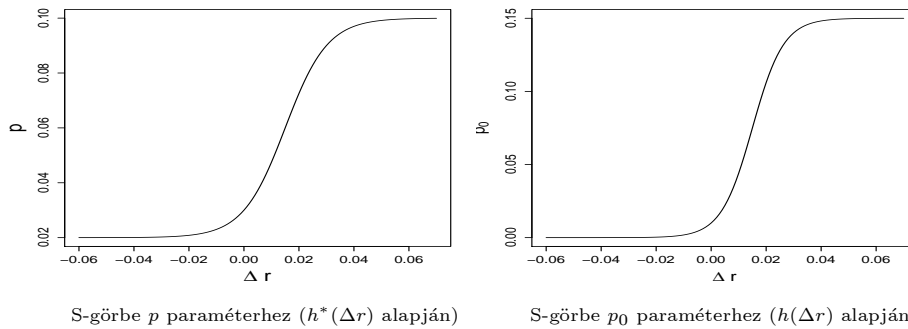
Az előző egyenletrendszer  $C_1, C_2, C_3$ -ra történő megoldása során azt szeretnénk, hogy a minimális  $p$  érték 2%, a maximális  $p$  érték pedig 10% legyen, azaz bármilyen  $\Delta r$  mellett legalább 2% legyen annak az esélye, hogy a piaci várakozások visszavásárlást diktáljanaknak ( $K_0$ ) és az egyes ügyfelek piaci várakozásokon kívüli információforrása segítségével meghozott döntése pozitív eredményt indukáljon a visszavásárlással kapcsolatban ( $K_i^\perp$ ). Hasonló érvelés igaz a maximális 10%-os értékre vonatkozóan. Az S-görbék speciális tulajdonsága miatt, (14) esetén az értékkészlet mindig 0 és a beállított maximum közé fog esni, így a kívánt minimális és maximális érték felvételét úgy oldottuk meg, hogy az egyenletrendszer megoldásakor a maximumot 8%-ra állítottuk be, majd a számszerűsített görbe minden pontját 2%-kal párhuzamosan felfelé eltoltuk, elérve ezzel, hogy a kívánt értékkészlet épp 2% és 10% közé essen (tehát az egyenletrendszer megoldásából  $C_1 = 12.5$ ). Azaz a (14) alak helyett a következő, módosított függvényalakot alkalmaztuk  $p$  modellezésére:

$$h^*(\Delta r) = h(\Delta r) + 0.02 . \quad (18)$$

Visszatérve az egyenletrendszer paraméterezéséhez: a  $h(0)$  értékét az egyenletrendszer megoldása során 1%-ra állítottuk be (azaz  $C_2 = 87.5$ ), amely végül a 2%-os párhuzamos felfelé eltolás miatt 3%-ot vesz fel (lásd 2a. ábra). Az inflexiós pontot 1.5%-ban rögzítettük, amelynek megfelelően a keresett S-görbénk  $-1\%$  körül kezd hirtelen erőteljesen emelkedni, vagyis amikor már a biztosítási termék „előnye” kezd minimálissá válni a piaci hozamhoz képest, majd 1.5%-nál vált konvexből konkávba, és 3% fölötti szinteknél, azaz jelentős különbségek esetén megközelíti a maximumát, azaz a 10%-ot ( $C_3 = 4.57 * 10^{-57}$ ). A kérdéses görbét a 2a. ábrán láthatjuk.

<sup>9</sup>Enz [2000] cikkében minimumot említ a  $h(0)$  kapcsán, ami abban az értelemben minimum, hogy a (14)-ben szereplő  $\Delta r$  helyett egy főre eső GDP-t használ, amely értelmezhetőség szempontjából csakis nemnegatív lehet (ellentétben a  $\Delta r$ -rel), így a 0 helyen felvett érték tekinthető a penetráció alsó határának. Jelen esetben viszont az S-görbe alsó szárának is van jelentősége értelmezési szempontból a  $\Delta r$  lehetséges negatív értéke kapcsán.

<sup>10</sup>Megjegyezzük, hogy az egyenletrendszer megoldása kapcsán a  $C_3 < 1$  feltétel teljesülésére számítunk, mivel ebben az esetben  $h$   $\Delta r$  monoton növekedő függvénye lesz.



2. ábra. A modellben alkalmazott S-görbék

Visszatérve a fenti S-görbe felhasználására: a modellezés során minden egyes ügyfélhez egy  $p$  paraméterű indikátor változó ( $K_i^\perp$ ) segítségével generálunk egy értéket, amely meghatározza, hogy az adott ügyfél a piaci várakozásokon kívüli információforrása alapján hogyan dönt a visszavásárlással kapcsolatban, továbbá generálunk szintén egy  $p$  paraméterű indikátor változót ( $K_0$ ) portfóliószinten, ami eldönti, hogy mi a piaci várakozás. A kérdéses  $p$  paramétert pedig a  $\Delta r$  függvényében a fenti S-görbe fogja megadni.

Az (1) számszerűsítéséhez szükségünk van még az ügyfélszintű,  $p_0$  paraméterű  $M_i$  változókra, amely azt adja meg, hogy az ügyfél piackövetű magatartású-e. A  $p_0$  paraméter meghatározásához az alapötlet az előzőekben ismertetett S-görbe koncepció volt (ezzel is biztosítva, hogy mindkét kérdéses paraméter a  $\Delta r$  növekvő függvényei legyenek), így a következőkben csak a (15)-(17) paraméterezését mutatjuk be. A modellezés során alkalmazott  $p_0$  értékek minimuma és maximuma (azaz az alkalmazott S-görbe értékkészlete) Loisel-Milhaud [2012] cikkében szereplő számítások alapján kerültek kiválasztásra. Loisel-Milhaud [2012] cikkükben különböző  $p$  és  $p_0$  paraméterekre vonatkozóan meghatározták 99.5%-os konfidencia szint mellett a portfólióban lévő, visszavásárlók arányára vonatkozó VaR értékeket, mi pedig azon  $p_0$  paramétereket választottuk ki további felhasználás céljából, amelyekhez racionális mértékű (és nem csak az illusztráció kedvéért szerepeltetett igen magas mértékű) VaR-okat kap a szerzőpáros. Ezt figyelembe véve a maximális  $p_0$  értéket 15%-ban (azaz (16)-ban  $C_1 = 6.67$ ), a minimális értéket pedig természetesen 0%-ban (azaz ebben az esetben nem alkalmaztunk felfelé történő eltolást a görbe pontjait illetően) állapítottuk meg. A  $h(0)$  értéket a  $p$  paraméternél említett 1%-ban állapítottuk meg, mivel a biztosítási termék hozama és a piaci hozam egyenlő volta kapcsán reális feltételezés, hogy a kötvénytulajdonosok egy részének a termék hozamának jövőbeli alakulásával kapcsolatos várakozásai hasonlóak (negatív, azaz visszavásárlást terveznek), így alkalmazható a korrelációt tekintve nem 0 érték (tehát a  $C_2 = 93.33$ ). Az inflexiós pont esetén szintén megfelelőnek találtuk a  $p$  paraméter esetén alkalmazott 1.5%-ot, mivel ha tekintjük a 2b. ábrát, láthatjuk, hogy a kérdéses S-görbe értékkészletének maximumát 3% körül érheti el, és egy 3%-os hozamok közötti különbség semmilyen körülmények között nem tekinthető marginálisnak (így  $C_3 = 4.05 * 10^{-77}$ ). A fenti módon meghatározott  $p$  és  $p_0$  paraméterek se-

gítségével már számszerűsíthető az (1) képlet, és így eldönthető mindenkiről, hogy visszavásárol-e az adott év elején, vagy sem.

A biztosítók, amennyiben az ügyfél visszavásárol, általában nem a teljes összeget térítik vissza ügyfelek számára. A modell építése során ez a valós feltételezés is beépítésre került a következőképpen: visszavásárlás esetén az ügyfél nem a teljes számláján lévő összeget kapja meg, hanem annak egy előre meghatározott részét, továbbá a biztosítónál maradó hányadon a biztosító és a portfólióban maradó ügyfelek 50%-50%-ban osztoznak. Az ügyfelek esetén a visszamaradó rész 50%-a természetesen a portfólió elemszámával osztandó, és a kapott összeget minden ügyfél számláján jóváírjuk (ez is egyfajta kvázi „bónuszként” értelmezhető). Ez az összeg természetesen az  $r_p$  kamatszintet növeli, tehát a Grosen-Jørgensen [1999] modelljében található  $r_p$  a kombinált modell  $r_p$  paraméteréhez képest kisebb/egyenlő lehet. A visszavásárló ügyfél által megkapott hányad kezdő értéke 95%-ban került megállapításra, amely minden második évben 1%-ot emelkedik a tartam során, egészen a 99%-os maximális szintig.

Most már mindent tudunk, hogyan jutunk el a tartam végi, portfólióban maradó ügyfelek számlaegyenlegéig. Ezen egyenlegek diszkontálását az előző szakaszban bemutatott „európai opció” esetéhez teljesen hasonlóan  $qe^{-rT}$ -vel végezzük, ahol a  $q$  a már ismertetett (lineárisan növvő) halálozási valószínűségek alapján számolt teljes túlélési valószínűség,  $T$  a tartam,  $r$  pedig a piaci hozam. Ezen diszkontált számlaegyenlegeknek minden egyes szimulált eset során vesszük az átlagát, majd képezve az egyes szimulált esetekhez tartozó átlagos számlaegyenlegek átlagát, megkapjuk a vegyes biztosítás elérési komponensének aktuáriusilag korrekt árát. A haláleseti komponens árazásánál az előző szakaszhoz hasonlóan feltettük, hogy a vegyes biztosítások két komponenséhez tartozó biztosítási összegek megegyeznek. Ehhez képeztük minden egyes szimulált eset során a tartam végi számlaegyenlegek átlagát, majd ezen szimulált átlagos számlaegyenlegek átlagaként állapítottuk meg a halálozási komponens biztosítási összegét. Innen a komponens aktuáriusilag korrekt ára az előző szakaszban ismertetett módon adódik. A garantált hozam komponens aktuáriusilag korrekt árának meghatározásához szintén az előző szakaszban ismertetett megközelítést alkalmazom:  $P_0(1+r_g)^T e^{-rT} q$ , ahol jelen esetben  $P_0$  az egyes szimulált esetekhez tartozó  $\mathcal{N}(100, 20)$  eloszlásból származó kezdő befizetések átlagának az átlaga.

### 3.2 A számítások eredményei

E szakasz keretein belül bemutatjuk számításaink eredményeit, amelyek a bevezetőben megfogalmazottaknak megfelelően alátámasztják, hogy az egyes paraméterek változásának hatását a kombinált modell jobban megragadja, mint a cikkben ismertetett, vegyes biztosítási keretrendszerben tárgyalt modell (Grosen-Jørgensen [1999] európai és amerikai opció szerinti árazás megközelítéssel). Ezt követően megmutatjuk, hogy az első szakaszban ismertetett paraméterbecslés eredményeit hogyan lehet beépíteni a kombinált modellbe abból a célból, hogy bizonyítani tudjuk azt, hogy a visszavásárlók számá-

nak eloszlását meghatározó (3) összefüggés nem csak, hogy jól közelíthető a paraméterbecslést bemutató szakaszban szereplő eloszlások segítségével, de ezen eloszlások kombinált modellben történő felhasználásával az eredeti kombinált modell által adott aktuáriusilag korrekt ár is szintén jól közelíthető.

Számításaink eredményeit összefoglaltuk a 2. táblázatban, amelyben külön szerepeltettük a garantált hozam, a bónusz és a visszavásárlási komponensek, valamint az elértési és kockázati összetevők aktuáriusilag korrekt árait.

	gar. hozam	bónusz	visszav.	elérési	kockázati	díj összesen
0%	72.66	0	0	72.66	0.88	73.54
	72.66	0	21.19	93.85	0.88	94.73
	72.66	0	0.33	72.99	0.88	73.87
$\theta$ 25%	72.66	14.85	0	87.51	1.06	88.57
	72.66	14.85	7.26	94.77	0.95	95.72
	72.66	14.83	1.42	88.91	1.08	89.99
50%	72.66	25.5	0	98.16	1.19	99.35
	72.66	25.5	3.99	102.15	1.08	103.23
	72.66	25.4	1.81	99.87	1.22	101.09
4%	108.39	14.06	0	122.45	0.99	123.44
	108.39	14.06	0	122.45	0.99	123.44
	108.39	14.05	0.65	123.11	1.00	124.11
$r$ 6%	88.74	19.26	0	108.02	1.07	109.07
	88.74	19.26	0.56	108.58	1.05	109.63
	88.74	19.26	0.31	108.33	1.07	109.4
8%	72.66	25.5	0	98.16	1.19	99.35
	72.66	25.5	3.99	102.15	1.08	103.23
	72.66	25.5	1.71	99.87	1.21	101.08
5%	72.66	28.33	0	100.99	1.22	102.21
	72.66	28.33	4.57	105.56	1.13	106.69
	72.66	28.33	2.53	103.52	1.25	104.77
$\gamma$ 15%	72.66	22.71	0	95.37	1.16	96.53
	72.66	22.71	4.15	99.52	1.03	100.55
	72.66	22.70	3.62	98.99	1.2	100.19
25%	72.66	18.48	0	91.14	1.10	92.24
	72.66	18.48	4.74	95.88	0.96	96.84
	72.66	18.46	2.83	93.95	1.14	95.09
10%	72.66	18.87	0	91.53	1.11	92.64
	72.66	18.87	6.15	97.68	1.03	98.71
	72.66	18.74	3.29	94.69	1.15	95.84
$\sigma$ 20%	72.66	32.55	0	105.21	1.28	106.49
	72.66	32.55	1.39	106.60	1.13	107.73
	72.66	32.53	3.53	108.72	1.32	110.04
30%	72.66	47.48	0	120.14	1.46	121.60
	72.66	47.48	0	120.14	1.46	121.60
	72.66	47.5	1.17	121.33	1.47	122.8
3%	59.94	32.68	0	92.62	1.25	93.87
	59.94	32.68	7.43	100.05	1.13	101.18
	59.94	32.62	3.91	96.47	1.31	97.78
$r_g$ 6%	79.88	22.13	0	102.01	1.17	103.18
	79.88	22.13	1.42	103.43	1.07	104.50
	79.88	20.32	3.32	103.52	1.19	104.71
9%	105.60	13.23	0	118.83	1.17	120.00
	105.60	13.23	0	118.83	1.17	120.00
	105.61	13.22	0.91	119.74	1.18	120.92

2. táblázat. A termékkomponensek értékei

A táblázat utolsó oszlopa adja a termék teljes nettó értékét. Szükséges említenünk az értelmezés kapcsán, hogy a számításokhoz az induló paraméterek a következők voltak (zárójelben jelzem a kombinált modellben szereplő eltéréseket):  $S(0) = 100$  ( $\mathcal{N}(100, 20)$ ),  $r = 8\%$ ,  $T = 10$ ,  $\sigma = 15\%$ ,  $\theta = 0.5$ ,  $\gamma = 0.1$ ,  $r_g = 5\%$ ,  $N = 100$ ,  $q = 0.0005$ , lépésköz=0.00005, szimulációk száma 100 ezer, amerikai opció és kombinált modell esetén  $m = 2$ , kombinált modell esetén a portfólió elemszáma 1000. A 2. táblázat kapcsán minden esetben a fenti paraméterek az irányadók és a táblázat megfelelő részében jelzett paraméter változtatásának a modell eredményeire gyakorolt hatását számszerűsítettük. Ezen paraméterek a táblázat alapján:  $\theta$ ,  $r$ ,  $\gamma$ ,  $\sigma$ , és  $r_g$ . Továbbá az egyes paraméterek esetén a felső sor mindig az európai opcióhoz, a középső sor az amerikai opcióhoz, az alsó pedig a kombinált modellhez tartozó eredményeket tartalmazza.

Jól látható a táblázatból, hogy az amerikai opcióra jellemző árazási technikát igénylő elérési komponens értéke minden esetben nagyobb vagy egyenlő európai társához viszonyítva, amely nem meglepő, hisz ezt vártuk. Egyenlő természetesen akkor lehet, ha a visszavásárlási lehetőség gyakorlatilag értéktelen a kötvénytulajdonos számára. A 2. táblázatból világosan látszik, hogy minél nagyobb  $\theta$  értéke, annál értékesebb mindhárom típusú termék. Ez természetes, hisz ha jól teljesít a befektetés, akkor nagyobb  $\theta$  miatt nagyobb hányadot kap vissza az ügyfél bónuszként, amelyet természetesen a bónusz komponens értékének növekedése is jelez. Azonban ezt a növekedést ellensúlyozza a visszavásárlási komponens értékének csökkenése, hisz minél nagyobb hányadot kap vissza az ügyfél a bónusz komponensnél, annál kevésbé valószínű, hogy vissza fog vásárolni. A kombinált modell esetén, a visszavásárlási komponens értékének kisebb volta (amerikai opció megközelítés megfelelő értékéhez képest) ahhoz köthető, hogy ennél a megközelítésnél a visszavásárló ügyfelek számlaegyenlegének biztosítónál maradó hányadának 50%-a a többi ügyfél számláján visszaosztásra kerül. Ez, mivel extra hozamot nyújthat az ügyfelek számára az európai és amerikai opció megközelítésekhez képest, csökkentheti a visszavásárlás valószínűségét.

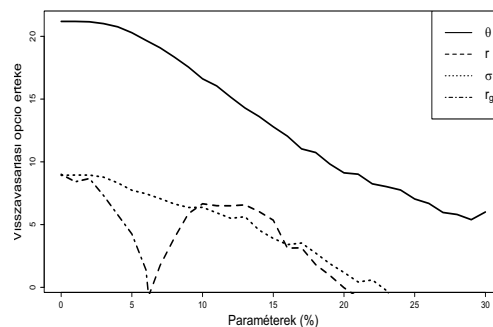
Az  $r$  különböző értékei mellett láthatjuk, hogy ahogy  $r$  növekszik, úgy egyre csökken a garancia értéke, amely természetes, hisz egyre nagyobb értékkel diszkontálunk. A bónusz komponens értéke viszont ezt ellensúlyozza, mivel nagyobb  $r$ -hez nagyobb  $g$  tartozik, azaz nagyobb valószínűséggel fog az eszköz piaci ára növekedni a CRR modellben. Az európai opció esetén pedig elég a (6) összefüggésre vetnünk egy pillantást. Az  $r = 4\%$  mellett az amerikai opció esetén azért láthatunk 0-át a visszavásárlásnál, mert a garancia, azaz  $r_g = 5\%$ , vagyis gyakorlatilag semmilyen körülmények között nem éri meg visszavásárolni, tehát ez a komponens értéktelen. A  $\gamma$  paraméter növekedése esetén ahogyan azt vártuk, a bónusz komponens értéke csökken, hisz csökken annak a valószínűsége, hogy bónuszhoz jutunk. Ezzel egyetemben pedig a termék értéke is csökken. A volatilitás értékének növekedésével a bónusz értéke természetesen nő, míg a visszavásárlás értéke csökken, hisz egyre inkább nem éri meg visszavásárolni. Például  $\sigma = 30\%$  mellett már egyáltalán nem éri meg, azaz az értéke 0 (amerikai opció megközelítés esetén). Az  $r_g$  garantált



hozam növekedése drasztikusan emeli a garancia értékét, a visszavásárlását pedig csökkenti, amelyek okai nem szorulnak magyarázatra.

A kombinált modell eredményei alapján elmondhatjuk, hogy mind az elérési összetevő értéke, mind a teljes díj általában az amerikai opcióként beárazott elérési összetevő értéke és annak teljes díjának szintje alatt marad. Látható, hogy a  $\theta$  és  $\gamma$  paraméter változása olyan szempontból nincs hatással a kombinált modell eredményére, hogy az elmozduljon az európai és amerikai opció megközelítéssel kapott komponensek értékei közül. Viszont az  $r$ ,  $\sigma$  és  $r_g$  paraméterek esetén látható, hogy a kombinált modell többre értékeli egy adott konstrukciót az amerikai opció megközelítéséhez képest, amennyiben az ügyfél számára előnyös változás következik be az előző három paraméterben: amennyiben csökken az  $r$  (tehát a vegyes biztosítás adta lehetőség relatíve „jobb” lesz más piaci lehetőséghez képest), vagy amennyiben nő a  $\sigma$  (nő annak a valószínűsége, hogy nagyobb hozam is elérhető a biztosító befektetésében), vagy nő  $r_g$  (azaz egyre nagyobb garantált hozamot ígér a biztosító), úgy a kapott értékek meghaladják az amerikai opció megközelítéssel kapott értékeket. Azaz általánosságban elmondhatjuk, hogy a sztochasztikus megközelítés modellbe történő beépítésével az egyes paraméterekben bekövetkező változás az ügyfél szempontjából történő konstrukció értékelés során jobb megragadásra kerül az amerikai opció megközelítéséhez képest, azaz a paraméterekben történő változásokat jobban kiemelő és jobban megragadó modellt kaptunk. A fentiek alátámasztását a következőkben többféle grafikonnal fogjuk elvégezni. Ehhez először is tekintsük a 3. ábrát. Ezen azt próbáljuk szemléltetni, hogy hogyan változik a visszavásárlási opció értéke (amerikai opció megközelítéssel és európai megközelítéssel kapott korrekt árak közti különbség) különböző paraméterek mellett. A 2. táblázathoz képest a számítás teljesen hasonlóan történik, így tehát minden egyes függvény a grafikon magyarázatában szereplő paraméter változása kapcsán mutatja a visszavásárlási opció értékét.

Láthatjuk a 3. grafikonon, hogy a folytonos görbe a  $\theta$  paraméter értékének növekedése esetén monoton csökken. Ahogy azt az előzőekben már tisztáztuk, pont erre a monoton csökkenésre számítottunk, hisz  $\theta$  növekedésével egyre nagyobb hányadot kap vissza az ügyfél bónuszként. Míg  $\theta = 0$  mellett a visszavásárlási opció értéke 20.8, addig  $\theta = 30\%$  esetén már csak 6.2 értékű.



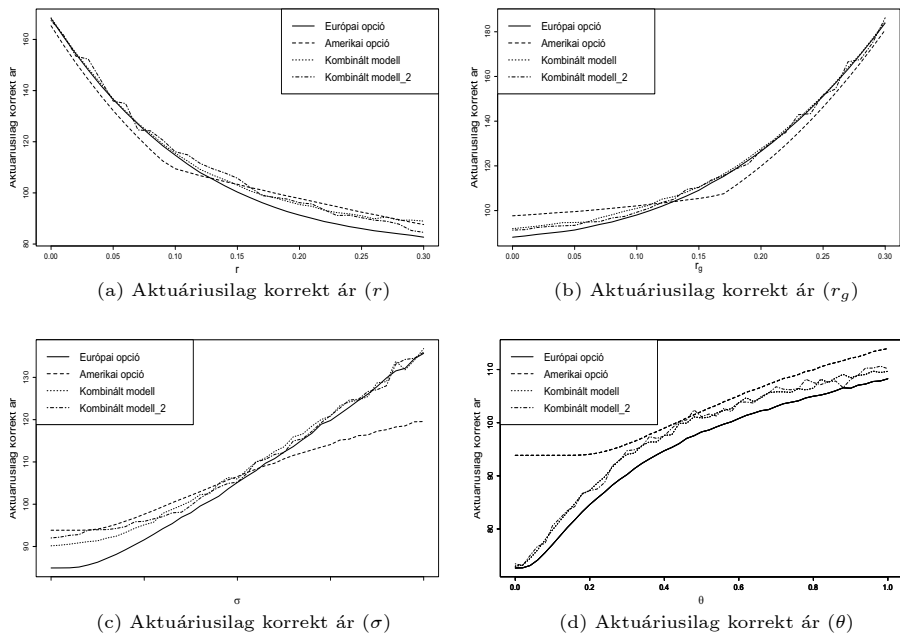
3. ábra. Visszavásárlási opció értékének alakulása

A szaggatott görbénél, azaz az  $r$  paraméter esetén már több újat tudunk mondani, mint amit tudtunk a táblázat értékei alapján. Fent levontuk a következtetést, hogy alacsony  $r$  esetén miért is 0 a visszavásárlási opció értéke, továbbá levontuk azt a következtetést is, hogy  $r$  növekedésével a bónusz opció értéknövekedése ellensúlyozza a garancia komponens értékcsökkenését. Azonban a szaggatott görbéről láthatjuk, hogy ez nem teljesen igaz, hisz a táblázatban 8%-ig vizsgáltuk az  $r$  paraméter változásának hatását, így nem vehettük észre (és az eredeti modell szerzői sem, mivel cikkükben csak táblázatos formában vizsgálták modelljüket, grafikusan nem) a következőt: a görbe a maximumát kb.  $r = 11\%$ -nál veszi fel, onnan kezdve a visszavásárlási opció értéke csökken. Ez azt jelenti, hogy a bónusz opció értéke csak egy ideig növekszik jobban, mint ahogy a garancia komponens értéke csökken, 11%-nál bekövetkezik a fordulópont és 20%-tól már ismét 0 a visszavásárlási opció értéke. A pont-vonal alapú szaggatott görbe alakja abszolút nem meglepő, hisz ahogy azt fent jeleztük,  $r_g$  növekedésével egy bizonyos szint után már soha nem fogja megérni a visszavásárlás. A volatilitás értékének növekedésével a bónusz értéke, ahogy azt fent is jeleztük, nő, míg a visszavásárlás értéke csökken, hisz egyre inkább nem éri meg visszavásárolni. Ezt alátámasztja a  $\sigma$  paraméterhez tartozó görbe alakja, amely kb. 24% körüli  $\sigma$  értéktől kezdve 0 értéket vesz fel, tehát a visszavásárlási opció értékteleenné válik.

Mielőtt elemeznénk a 4. ábrát, előtte még valamit tisztáznunk kell. Cikkünk első szakaszában utaltunk rá, hogy Loisel-Milhaud [2012] eredményei kapcsán végzett paraméterbecsléseink a cikk eme szakaszában felhasználásra kerülnek. Ezt úgy tettük meg, hogy a már megismert kombinált modellt átalakítottuk úgy, hogy már nem egyéni szinten, (1) alapján határozzuk meg, ki vásárolt vissza és ki nem, hanem az első szakaszban ismertetett paraméterbecslési eljárás segítségével meghatározott normális és kevert eloszlásból származtatva. Ezzel az a célunk, hogy belássuk, a Loisel-Milhaud [2012] által bemutatott, a visszavásárlók számának eloszlását meghatározó (3) összefüggés nem csak, hogy jól közelíthető a kérdéses eloszlások segítségével, de ezen eloszlások kombinált modellben történő felhasználásával az eredeti kombinált modell által adott aktuáriusilag korrekt ár is jól közelíthető. A kombinált modell átalakítása a következőképp történik: vesszük a  $p$  és  $p_0$  paramétereket a már ismertetett S-görbék segítségével és  $n$ -et, azaz a még nem visszavásároltak számát. Ezen paraméterek segítségével, az első szakaszban ismertetett módon tudjuk szimulálni az  $n$ -ből visszavásárlók számát, amelyre  $p_0 = 0$  és  $p_0 \neq 0$  eseteknek megfelelően normális és kevert eloszlást illesztünk, és az ismertetett módon ML módszerrel vagy EM-algoritmussal meghatározzuk az illesztett eloszlások paramétereit. A visszavásárlók számát  $p_0 = 0$  esetben az illesztett normális eloszlás várható értékeként azonosítjuk, azaz vesszük a  $\mu$  paramétert. A  $p_0 \neq 0$  esetben a várható érték (keverési súlyokkal súlyozott összege a  $\mu_1$  és  $\mu_2$  paramétereknek) vétele nem elég konzervatív, mivel Loisel-Milhaud [2012] cikkükben pont a kétmódusú eloszlás várható értékének kevésbé informatív voltára hívja fel a figyelmet, mivel a várható értékhez képest nagyobb visszavásárlói szám nagyobb valószínűséggel fordul elő, mint a sima normális eloszlás esetén. Így ebben az esetben a két becsült paraméter átlagát vettük a

visszavásárlók számának meghatározásához. Az  $n$ -ből pedig pontosan ennyi visszavásárlót fogunk véletlen kiválasztással meghatározni minden egyes szimulált esetben. Tekintsük a 4. ábrát.

Ezekon a grafikonokon a négy korrekt ár meghatározási mód segítségével kapott árakat láthatjuk az adott paraméter függvényében (a „Kombinált modell 2” jelzi a fentebb ismertetett, átalakított kombinált modell eredményét). A 4a esetén láthatjuk, hogy kis  $r$  paraméterek mellett, tehát ahol nagyon megéri az adott konstrukcióba fektetni, végig a kombinált modell adja a legmagasabb árat, és az európai opció megközelítéssel kapott ár szintén az amerikai opció megközelítésű felett található. Majd végül egy kellően nagy  $r$  után a 2. táblázat esetén tapasztalt jelenség lép fel: a kombinált modell által kapott ár a másik két koncepció segítségével kapott ár között található. A 4b grafikon ehhez teljesen hasonlóan értelmezhető. A 4c esetén pont fordított helyzetet láthatunk: egy bizonyos  $\sigma$  értéken (21.2%) túl értékeli a kombinált modell legtöbbször az adott konstrukciót és az európai opció megközelítéssel kapott árak is ekkor lesznek magasabbak az amerikai opció megközelítéssel kapottnál. Ez azt jelenti, hogy ilyen magas  $\sigma$  paraméterek esetén egyáltalán nem érdemes visszavásárolni, és mindenképp rosszul jár az, aki mégis ezt teszi (kellően alacsony paraméter esetén pedig szintén a 2. táblázatnál tapasztalt jelenséget láthatjuk). A 4d esetében pedig csak a 2. táblázatnál tapasztaltakat kapjuk vissza, azaz  $\theta$  paraméter bármilyen értéke esetén a kombinált modell által kapott ár mindig a másik két koncepció segítségével kapott ár között található.



4. ábra. Az aktuáriusilag korrekt ár alakulása különböző modellek esetén

Amit viszont még észrevehetünk az az, hogy az átalakított kombinált modell végig a sima kombinált modell eredményét követi minden grafikonon (igaz, kicsit hektikusabban viselkedik a görbéi alapján, de ez betudható annak, hogy az olyan iteratív jellegű algoritmus, mint az EM esetén az eredmények természetesen kis mértékű instabilitást mutathatnak). Látható, hogy mind a 4. grafikon, mind a 2. táblázat értékei a szakasz elején megfogalmazott állításainknak megfelelő eredményt, értékeket mutatnak, alátámasztva cikkünk célkitűzéseit.

## Összefoglalás

Cikkünkben megmutattuk Loisel-Milhaud [2012], a szerződések visszavásárlással kapcsolatos döntései közti korrelációt is figyelembe vevő modellje esetén hogyan is lehet számszerűleg (illesztett eloszlások paramétereinek meghatározása normális és kevert eloszlás esetén) elvégezni az eredeti cikkben szereplő érzékenységvizsgálatot.

Ezt követően Grosen-Jørgensen [1999] cikkében szereplő modellt vizsgáltuk, amely lehetőséget adott arra, hogy a visszavásárlást, mint az ügyfél által lehívható opciót be tudjuk árazni, illetve meg tudjuk mutatni a termék aktuáriusilag korrekt értékében képviselt mértékét. Az eredeti modellt eltérő keretben (vegyes biztosítás) vizsgáltuk, mint azt a szerzők tették, valamint néhány új, gyakorlati jellegű feltétellel és paraméterrel éltünk a modellépítés során.

Végül megmutattuk, hogyan lehet figyelembe venni és beépíteni Loisel-Milhaud [2012] eredményeit az előző modellbe, valamint ennek segítségével összehasonlítást végeztünk a módosított keretrendszerben tárgyalt Grosen-Jørgensen [1999] modell által adott és a kombinált modell által adott aktuáriusilag korrekt árak között. Ezen kívül beláttuk, hogy Loisel-Milhaud [2012] eredményeinek beépítésével kapott aktuáriusilag korrekt árak is közelíthetők egy olyan modell eredményeivel, amelybe a cikkünk első szakaszában ismertetett becslési eljárások kerülnek beépítésre. Összességében az eredmények alapján azt láthatjuk, hogy a kombinált modell képes az ügyfél szempontjából történő konstrukció értékelés során az egyes paraméterekben bekövetkező változás jobb megragadására, így összességében egy, a paraméterek változásának a modell eredményére gyakorolt hatását jobban kiemelő modellt kaptunk.

## Függelék

### EM-algoritmus

Legyen adott egy  $p(\mathbf{x}|\Theta)$  sűrűségfüggvény  $\Theta$  paraméter mellett, valamint legyen egy, az előbbi sűrűségfüggvény által meghatározott eloszlásból származó,  $N$  elemű adathalmazunk, azaz  $X = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\}$ . Tegyük fel, hogy az előbbi

eloszlás kevert és sűrűségfüggvényét a következőképp írhatjuk fel:

$$p(\mathbf{x}|\Theta) = \sum_{i=1}^M \theta_i p_i(\mathbf{x}|\theta_i). \quad (19)$$

A (19) összefüggésben szereplő paraméterek tehát  $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_N, \theta_1, \dots, \theta_N)$ , amelyekre igaz, hogy  $\sum_{i=1}^M \theta_i = 1$ , továbbá az egyes  $p_i$ -k a  $\theta_i$ -k szerint parametrizált sűrűségfüggvények. A fenti képletből láthatjuk, hogy itt  $M$  számú komponens keveréséről van szó  $\theta_i$  keverési súlyok mentén. A paraméterbecsléshez szükséges loglikelihood függvény erre a sűrűségfüggvényre nézve ekkor a következő:

$$\log(L(\Theta|X)) = \log \prod_{i=1}^N p(x_i|\Theta) = \sum_{i=1}^N \log \left( \sum_{j=1}^M \theta_j p_j(x_i|\theta_j) \right). \quad (20)$$

A (20) loglikelihood függvény optimalizálása nehéz feladat, mivel az összeg logaritmus szerepel benne. Ha feltesszük, hogy  $X$  esetén adathiány áll fenn és létezik egy  $Y = \{y_i\}_{i=1}^N$  olyan látens változó, amelynek értékei alapján eldönthető, hogy az adathalmazunk egyes elemei a keverés során felhasznált eloszlások közül melyikből származnak, úgy a kérdéses loglikelihood függvény jelentősen egyszerűsödik, így az optimalizálás is jóval könnyebbé válik. Tehát legyen  $y_i \in 1, \dots, M \forall i$ -re, és jelentse  $y_i = k$  azt, hogy az  $i$ -edik megfigyelés a  $k$ -adik eloszlás komponensből származik. Ekkor a loglikelihood függvény a következő formára egyszerűsödik:

$$\log(L(\Theta|X, Y)) = \log(P(X, Y|\Theta)) = \sum_{i=1}^N \log(\theta_{y_i} p_{y_i}(x_i|\theta_{y_i})). \quad (21)$$

Az EM-algoritmus lényege, hogy (21)-ből kiindulva úgy teszünk, mintha ismernénk a paramétereket (azaz kezdőértékét adunk  $\Theta$ -nak), majd az E-lépés során számszerűsítjük a  $p_{ij} = P(y_j = i) \ i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, N$  valószínűségeket (azaz minden egyes megfigyeléshez kiszámítjuk, hogy mekkora valószínűséggel származik az egyes komponensekből). Az M-lépés során képezzük a látens változók várható értékét (a fenti jelölésekkel  $\sum_{i=1}^M P(Y_j = i) * i, j = 1, \dots, N$ ), majd ezen várható értékek mellett megkeressük azokat a paramétereket, amelyek maximalizálják a loglikelihood függvényt. Ezt az eljárást a konvergenciáig ismétljük.

## Irodalom

1. Bacinello, Anna Rita [2003]: Fair Valuation of a Guaranteed Life Insurance Participating Contract Embedding a Surrender Option. *Journal of Risk and Insurance*, Vol. 70, 461–487
2. Bilmes, A. Jeff [1988]: A Gentle Tutorial of the EM Algorithm and its Application to Parameter Estimation for Gaussian Mixture and Hidden Markov Models. International Computer Science Institute, 2–10.

3. Enz, Rudolf [2000]: *The S-Curve Relation between Per-Capita Income and Insurance Penetration*. The Geneva Papers on Risk and Insurance, Vol. 25, No. 3, 396–406.
4. Grosen, Anders-Løchte Jørgensen, Peter [1999]: Fair Valuation of Life Insurance Liabilities: The Impact of Interest Rate Guarantees, Surrender Options, and Bonus Policies. *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 26, 37–57.
5. Loisel, S.-Milhaud, X.-Maume-Deschamps, V. [2010]: Surrender triggers in life insurance: classification and risk predictions. Working Paper. Elérhető: <http://isfa.univ-lyon1.fr/vmaume/sites/default/files/documents/lapse.pdf>
6. Loisel, Stéphane-Milhaud, Xavier [2012]: From deterministic to stochastic surrender risk models: impact of correlation crises on economic capital. *European Journal of Operational Research*, Vol. 214, 348–357.
7. Siu, Tak Kuen [2005]: Fair valuation of participating policies with surrender options and regime switching. *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 37, 533–552.
8. Száz, János [2009]: *Pénzügyi termékek áralakulása*. Jet Set Tipográfiai Műhely Kft., Budapest.

#### VALUATION OF SURRENDER RISK WITH CORRELATED INSURANCE RISKS

In recent years the claim of insurance companies arises to model different risk types more precisely which comes from the expected implementation of Solvency II Directive. The purpose of this article is to describe the modelling possibilities of surrender risk in surrender option concerned area and a possible way to improve a model known in scientific literature. First of all we introduce shortly the result of Loisel-Milhaud [2012] so far complemented with parameter estimation results based on own calculation which have not been the focus of the authors' investigation. After this we describe how to handle the model of Grosen-Jørgensen [1999] in different mixed insurance framework and calculate the option's price related to the product. Next we show how can the result of Loisel-Milhaud [2012] be built into the model of Grosen-Jørgensen [1999] which is related to the increasing correlation between surrender decisions in a stress period. This paper argues that this improved model can calculate the actuarially fair price of a product with surrender option more accurate and able to capture a wider range of external drivers.

*Keywords:* surrender risk, actuarially fair price, modelling, Solvency II. *Journal of Economic Literature (JEL) code:* C15, C46, C63, G12, G22

## KLASZTERSZÁMOK MEGHATÁROZÁSÁNAK EGY LEHETSÉGES MEGOLDÁSA<sup>1</sup>

RUFF FERENC  
*Szent István Egyetem*

A dolgozat azon problémával foglalkozik, hogy a klaszteranalízis során létrejövő lehetséges megoldások (különböző klaszterszámok) esetén melyiket fogadjuk el az adatbázisban feltételezett csoportok legjobb közelítésének. Ilyen módszerek léteznek, jelen dolgozat egy ilyen eljárás kritikai vizsgálatával, valamint annak továbbfejlesztésével foglalkozik. Az eljárás lényege, hogy a klaszterek középpontja és a középpontok közötti osztópont körüli elemsűrűségekkel definiált index segítségével jellemzi a csoportosítás pontosságát. Ez olyan népszerű algoritmusok, mint pl. a K-means – ahol az algoritmus inputjaként meg kell adni az elvárt klaszterszámot – esetében ad segítséget a döntés meghozatalában.

### 1 Bevezetés

„A klaszterelemzés az alakfelismerés tanító nélküli tanuló algoritmus. Egyszerűen úgy definiáljuk, hogy a klaszterelemzés megfigyelések egyedeit bontja viszonylag homogén csoportokba  $p$  változó értékeinek hasonlósága alapján. A klaszterelemzés az egyedek olyan csoportosítását keresi, amelyekre igaz, hogy egy egyed egy és csakis egy csoporthoz tartozik, és azokhoz az egyedekhez lesz hasonló, amelyekkel egy klaszterbe került, míg a többi klaszterbe tartozó egyedektől különbözik.” [6, 160. old.]

Klasszifikáló elemzésnek valamint numerikus taxonómiának is nevezik, mely az 1950-es években indult fejlődéne [15]. Azóta nagyon sokféle módszert dolgoztak ki a fenti célok megvalósításának érdekében. Az irodalmak között megjelentek összefoglaló jellegű ill. egy-egy szakterület számára íródott művek [2, 9, 16]. Magyar szerzők tollából származó könyvek is találhatók ezek között [5, 6, 7]. Kimondottan a marketingkutató területén történő alkalmazással foglalkozik Simon [14] cikke.

Dolgozatom középpontjában az a probléma áll, hogy ha az elemzőnek kell megadnia a keresett klaszterek számát (az algoritmus inputjaként), akkor a különböző klaszterszám-beállítások esetén kapott eredmények közül milyen módon választhatja ki a „legjobbat”. Ezt az angol nyelvű irodalomban „cluster validation” néven találhatjuk meg, amely alatt olyan kvantitatív elemzést értenek, mely a klaszteranalízis eredményeként létrejött csoportokat vizsgálja [16]. Ennek megoldására sok eljárás született, melyeket Theodoridis és

---

<sup>1</sup>Beérkezett: 2013. január 2. E-mail: [ruff.ferenc@gtk.szie.hu](mailto:ruff.ferenc@gtk.szie.hu).

Koutroumbas [16] három típusba sorol: külső kritérium alapú, belső kritérium alapú valamint relatív kritérium alapú. Egy kicsit más csoportosítást alkalmaz Füstös et al. [6, 205. old.]: „A klaszterek érvényessége (validitása) négy kritérium alapján vizsgálható. Külső követelményként értelmezhető az, ha ismert csoportokba tartozó egyedekből veszünk mintát, és arra végezzük el a klaszterezést. Belső követelménynek tekinthetők azok a mutatók, amelyekkel az eredeti és a származtatott távolságok illeszkedését mérjük. Harmadik megközelítést jelent a megismételhetőség kritériuma, amelynek lényege a kettéosztott megfigyelések klaszterezése és a felosztások összevetése. A klaszterek érvényességének relatív kritériuma az adatmátrix több eljárás szerinti klaszterezését és a felosztások közötti egyezés mérését fogalmazza meg.”

Liu et al. [13] munkájában a klaszterszámok meghatározásával kapcsolatban végrehajtott vizsgálatának célja az volt, hogy megfigyeljék, hogy a vizsgált indexek pontosságára (11 ilyen indexet teszteltek) – amelyek külső információt nem tartalmaztak – milyen hatással van az adatok szerkezete (zajos adatok, sűrűség különbségek, alcsoportok, aszimmetrikus eloszlás). Ezek közül az alcsoportok felismerése okozta a legtöbb problémát az ellenőrzés során, ezen esetben a legtöbb index nem adott helyes eredményt. Egy olyan index – az ún.  $S\_Dbw$  index – volt a 11 között, mely mindegyik esetben helyes döntést hozott. Az eljárást Halkidi és Vazirgiannis [8] dolgozta ki, mely a klaszterek közötti sűrűségkülönbségen alapszik. Ezt fejlesztette tovább Kim és Lee [10] valamint Tong és Tan [17] abba az irányba, hogy robusztusabb<sup>2</sup> legyen, valamint ne csak gömbszimmetrikus klasztereket ismerjen fel. Ennek fontosságára korábban felhívta a figyelmet Legány et al. [12] is, akik megfigyelték, hogy az általuk vizsgált indexek (pl. az  $S\_Dbw$  is) csak jól szeparált, gömbszimmetrikus klaszterek esetén nyújtottak megfelelő segítséget a klaszterek validálásához. Dolgozatomban ezen módszerek vizsgálatával és továbbfejlesztésével foglalkozom.

## 2 Az $S\_Dbw_{new}$ index

Vizsgálatom kiindulópontja a Halkidi és Vazirgiannis [8] által kidolgozott, majd Kim és Lee [10] valamint Tong és Tan [17] által továbbfejlesztett módszer – alapja az  $S\_Dbw$  (Scatter and Density between clusters) index – mely a sűrűségkülönbségek és a szórások alapján rendel hozzá egy adott csoportosításhoz egy valós számot. A különböző csoportosításokhoz tartozó értékek alapján lehet a legjobban illeszkedő megoldást kiválasztani. Itt most csak a legutolsó változattal foglalkozom, mert ez jobb eredményeket ért el a tesztek során, mint az első két változat.

A módszer alapja, hogy a klaszterek közötti hasonlóságot ill. a klaszterek közötti különbséget bizonyos pontok körül kialakított tartományokon belül található megfigyelési egységek számának (mint sűrűségnek) összehasonlítása

---

<sup>2</sup>A kiugró adatokra kevésbé érzékenyen határozza meg a klaszterek számát.



alapján határozták meg [17]. Ők az indexet  $S\_Dbw_{new}$ -nak nevezték (megkülönböztetésül az előzményektől), és ezt a jelölést itt is megtartom.

Legyen adott egy adatbázis, amely  $N$  számú egyedet, mint megfigyelési egységet tartalmaz. Az egyedek tulajdonságait  $k$  db változóval írjuk le. Ezen adatok egy  $N \times k$  méretű mátrixba rendezhetők. Ezen adatbázison futtassunk le egy klaszterező módszert, így kapjuk a megfigyelési egységeink egy csoportosítását ( $c$  db klasztert). Ezen csoportosításhoz fogunk hozzárendelni egy számot, amely az  $S\_Dbw_{new}$  index egy lehetséges értéke. Itt most az említett cikk [17] bemutatása történik.<sup>3</sup>

Az indexnek két összetevője van:  $Dens_{bw}(c)$  – klaszteren belüli sűrűség, valamint  $Scat(c)$  – klaszterek közötti variancia.

$$Dens_{bw}(c) = \frac{1}{c(c-1)} \sum_{i=1}^c \left[ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^c \frac{\text{density}^*(\mathbf{m}_{ij})}{\max\{\text{density}^*(\mathbf{v}_i), \text{density}^*(\mathbf{v}_j)\}} \right] \quad (1)$$

ahol  $c$ : a kialakított klaszterek száma,  $\mathbf{v}_i$ : az  $i$ -edik klaszter középpontja.

$$\text{density}^*(\mathbf{m}) = \sum_{i=1}^{n_m} f^*(\mathbf{x}_i, \mathbf{m}) \quad (2)$$

$\mathbf{x}_i$ : az  $i$ -edik megfigyelési egység,  $\mathbf{m}$ : egy tetszőleges megfigyelési egység,  $n_m$ : a figyelembe vett megfigyelési egységek száma.

$$f^*(\mathbf{x}_i, \mathbf{m}) = \begin{cases} 1, & \text{ha } CI_-^p \leq d(x_i^p, m^p) \leq CI_+^p, \forall p \in \{1, 2, 3, \dots, k\} \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases} \quad (3)$$

$k$ : a megfigyelési változók száma, továbbá

$$CI_{\pm}^p = v_i^p \pm \left( 1.96 \cdot \frac{\sigma_l^p}{\sqrt{n_l}} \right) \quad (4)$$

$v_i^p, \sigma_l^p, n_l$ : a figyelembe vett klaszter  $p$ -edik változójának átlaga ill. szórása, valamint a klaszter elemszáma. Legyen továbbá  $\mathbf{m}_{ij}$  az  $i$ -edik és  $j$ -edik klaszter középpontját összekötő szakasz olyan osztópontja, mely a két klasztert „elválasztja”, és melynek  $p$ -edik komponense:

$$m_{ij}^p = 0.7 \cdot \left( \frac{n_j \cdot v_i^p + n_i \cdot v_j^p}{n_i + n_j} \right) + 0.3 \cdot \left( \frac{\text{density}^*(\mathbf{v}_i) \cdot v_i^p + \text{density}^*(\mathbf{v}_j) \cdot v_j^p}{\text{density}^*(\mathbf{v}_i) + \text{density}^*(\mathbf{v}_j)} \right) \quad (5)$$

$n_i$ : az  $i$ -edik klaszter elemszáma. Az  $\mathbf{m}_{ij}$  számításakor figyelembe veszi a két klaszter elemszámait, valamint a két klaszter középpontja körüli sűrűséget, és a kettő kombinációja<sup>4</sup> adja az osztópontot. E részindex (1. egyenlet) számításának elve tehát, hogy összehasonlítja a klaszterek középpontja körüli,

<sup>3</sup>Ahol az eredeti cikk jelölésrendszere nem volt egészen világos, ott ennek módosítására került sor.

<sup>4</sup>A súlyok (0.7 - 0.3) meghatározása empirikus vizsgálatok tapasztalatai alapján történt [17].

valamint a klaszterközéppontok között kiválasztott pont ( $\mathbf{m}_{ij}$ ) körül elhelyezkedő egyedek számát.

A másik részindex számításának módja:

$$Scat(c) = \frac{1}{c-1} \sum_{i=1}^c \frac{n-n_i}{n} \cdot \frac{\|\sigma^2(\mathbf{v}_i)\|}{\|\sigma^2(\mathbf{S})\|} \quad (6)$$

ahol  $\sigma^2(\mathbf{v}_i)$ : a  $\mathbf{v}_i$  középpontú klaszter variancia vektora<sup>5</sup>,  $\sigma^2(\mathbf{S})$ : az adatbázis variancia vektora,  $\|\cdot\|$ : vektor euklideszi normája.

Ezekből a részindexekből a következő módon adódik az index:

$$S\_Dbw(c) = Dens_{bw}(c) + Scat(c) \quad (7)$$

Legyen  $\mathbf{S}$  olyan adatbázis, mely konvex klasztereket tartalmaz. Futtassunk le ezen, különböző klaszterszám beállításával, egy klaszterező eljárást többször. Belátható, hogy az index akkor vesz fel minimális értéket, ha a klaszterező eljárás a tényleges klasztereket találta meg [8]. Természetesen nem garantált, hogy a klaszterek képzése során a tényleges klaszterek (ha léteznek) valóban előállnak megoldásként. Ekkor is az index minimumát fogadjuk el megoldásként, mivel ez jelenti a legjobb szeparációt [8].

### 3 Az $S\_Dbw_{new}$ index kritikája

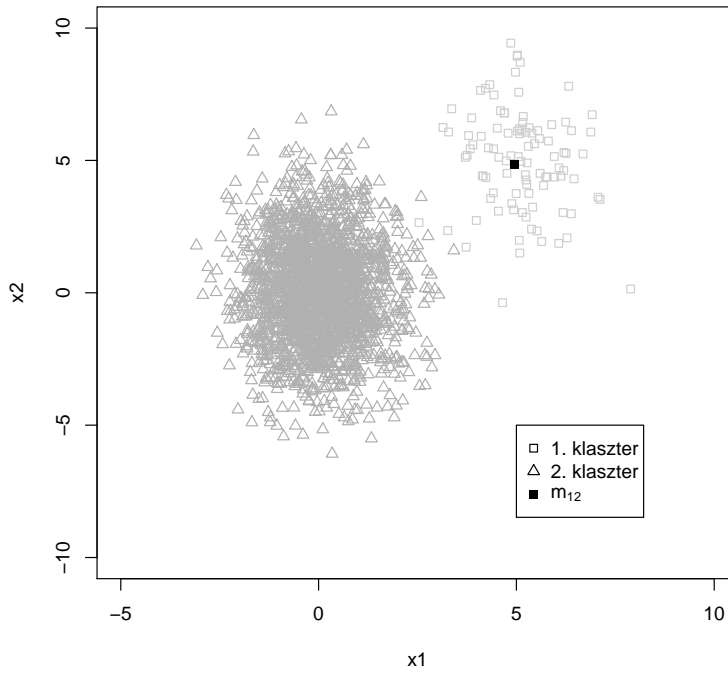
A 3. egyenlet megadja, hogy a „sűrűség” számításánál mely egyedeket kell figyelembe venni, és melyeket nem. Az adott pont környezetének definiálása határozza meg ezt a számot. Látható, hogy a  $CI$  hossza a klaszter számának ( $n$ ) növekedésével csökken<sup>6</sup> (4. egyenlet). Ez pedig azt jelenti, hogy a lecsökkenő területen (még a nagy egyedszám mellett is) kevés egyed található, vagy egyáltalán nem is találunk egyedet. Ezzel pedig a mérés válik lehetetlenné, hiszen nem lesz alkalmas a sűrűbb és ritkább tartományok elkülönítésére.

Következő észrevételem, hogy az  $\mathbf{m}_{ij}$  osztópont (5. egyenlet) számításánál két szempontot vettek figyelembe. Az első fele a két klaszter- középpontot összekötő szakaszt a klaszterek elemszámának arányában osztja, méghozzá úgy, hogy amelyik klaszternek nagyobb az elemszáma, attól távolabb lesz az osztópont. A második rész pedig a klaszter-középpontok körüli sűrűségek arányában osztja a szakaszt úgy, hogy amelyik klaszter esetében a sűrűség nagyobb volt, ahhoz kerül közelebb az osztópont. Ezen két hatás konvex lineáris kombinációjából állították elő  $\mathbf{m}_{ij}$ -t, méghozzá kísérletekből, tapasztalati úton állították be az együtthatókat (0.7 - 0.3). Kísérleteim szerint az így kialakított osztópont a két klaszter eltérő elemszáma esetén jelentősen eltolódhat a kevesebb elemet tartalmazó klaszter közelébe. Szélsőséges esetben a nagy elemszámú klaszter „beletolja” az osztópontot a kevesebb elemet tartalmazó klaszterbe. Ez látható az 1. ábrán, amely esetében az elemszámok aránya 1:20. Az osztópont eltolódásának egyik oka, hogy a nagy elemszám

<sup>5</sup>A koordinátengelyek irányába számolt varianciákból képzett vektor.

<sup>6</sup>A  $CI$  0-hoz tart, ha  $n \rightarrow \infty$ .

miatt a  $CI$  értéke olyan kicsi lett, hogy abba nem került elem, így a sűrűség értéke 0, ami azt jelenti, hogy a második része a képletnek (5. egyenlet) nem kompenzálja az első rész hatását (hiszen ezek itt éppen egymás ellen hatnának). Sőt, mint ahogyan 1. ábrán látható eset háttérében is megfigyelhető volt, ha a kisebb sűrűségű klaszter esetében az adott tartományba véletlenül belekerül egy pont, míg a nagyobb sűrűségű esetében nem, akkor az még jobban növeli a torzító hatást (ld. 5. egyenlet).



1. ábra. Klaszterek középpontja közötti Tong és Tan [17] féle osztópont eltolódása 2 változó esetén. Forrás: saját szerkesztés.

Ezen észrevételeket támasztják alá a következő gondolatmenetek. Az 1. ábra 1. klaszterének adatai:  $\mathbf{v}_1 = (5, 5)^T$ ,  $\sigma = (1, 2)^T$ ,  $n_1 = 100$ , valamint 2. klaszterének adatai:  $\mathbf{v}_2 = (0, 0)^T$ ,  $\sigma = (1, 2)^T$ ,  $n_2 = 2000$ . Keresem annak a valószínűségét, hogy egy megfigyelési egység a klaszterközéppont megfelelő (ld. 3. és 4. egyenlet) környezetébe esik. Jelentse  $\xi_{1x}$  ill.  $\xi_{1y}$  az első klaszterbe tartozó pont  $x$  ill.  $y$  koordinátáját (normál eloszlású valószínűségi változók). Továbbá  $\xi_{2x}$  ill.  $\xi_{2y}$  a második klaszterbe tartozó pont  $x$  ill.  $y$  koordinátáját. Az 1. klaszter esetében ( $x$  és  $y$  irányban):

$$P\left(5 - 1.96 \cdot \frac{1}{\sqrt{100}} < \xi_{1x} < 5 + 1.96 \cdot \frac{1}{\sqrt{100}}\right) = 2\Phi\left(\frac{1.96}{\sqrt{100}}\right) - 1 = 0.155$$

és

$$P\left(5 - 1.96 \cdot \frac{2}{\sqrt{100}} < \xi_{1y} < 5 + 1.96 \cdot \frac{2}{\sqrt{100}}\right) = 2\Phi\left(\frac{1.96}{\sqrt{100}}\right) - 1 = 0.155$$

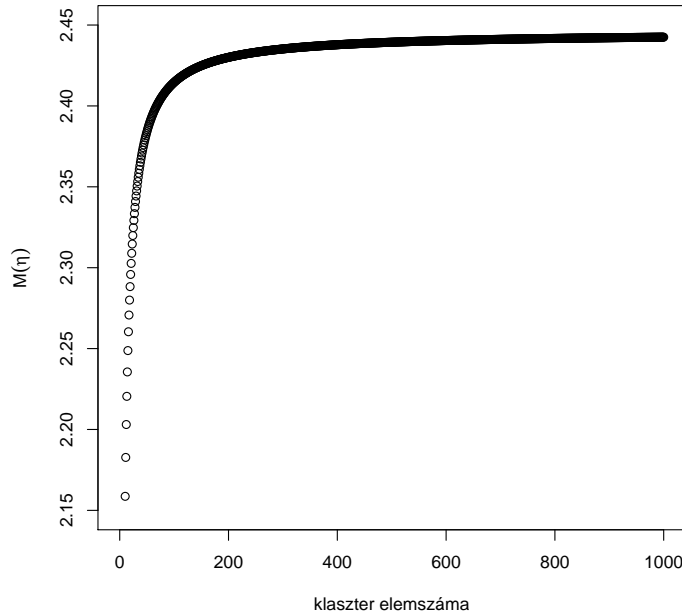
A keresett valószínűség tehát  $p_1 = 0.155^2 = 0.0241$ . Legyen  $\eta_1$  egy diszkrét valószínűségi változó, és jelentse a középpont megadott környezetében található egyedek számát. Ennek várható értéke (binomiális eloszlás esetén):  $M(\eta_1) = n_1 \cdot p_1 = 100 \cdot 0.0241 = 2.41$ . A 2. klaszter esetében ( $x$  és  $y$  irányban):

$$P\left(0 - 1.96 \cdot \frac{1}{\sqrt{2000}} < \xi_{1x} < 0 + 1.96 \cdot \frac{1}{\sqrt{2000}}\right) = 2\Phi\left(\frac{1.96}{\sqrt{2000}}\right) - 1 = 0.034$$

és

$$P\left(0 - 1.96 \cdot \frac{2}{\sqrt{2000}} < \xi_{1y} < 0 + 1.96 \cdot \frac{2}{\sqrt{2000}}\right) = 2\Phi\left(\frac{1.96}{\sqrt{2000}}\right) - 1 = 0.034$$

A keresett valószínűség tehát  $p_2 = 0.034^2 = 0.0012$ . Legyen  $\eta_2$  egy diszkrét valószínűségi változó, és jelentse a középpont megadott környezetében található egyedek számát. Ennek várható értéke (binomiális eloszlás esetén):  $M(\eta_2) = n_2 \cdot p_2 = 2000 \cdot 0.0012 = 2.44$ . Vagyis a 2. klaszter 20-szor annyi elemet tartalmaz, mégis, a középpont megadott környezetében található elemek száma közelítőleg annyi, mint az 1. klaszter esetében, átlagosan 2.44. Annak valószínűsége pedig, hogy egy elem sem esik a megadott környezetbe:  $P(\eta_2 = 0) = (1 - 0.0012)^{2000} = 0.0906$ . Az 1. ábrához tartozó eset (a nagy klaszterben 0, a kicsiben nem 0 a középpont meghatározott környezetében található elemek száma) valószínűsége pedig  $0.0906 \cdot (1 - (1 - 0.0241)^{100}) = 0.088$ , ami nem elhanyagolható, tehát bekövetkezésével számolni kell.



2. ábra.  $M(\eta)$  a klaszter elemszámának függvényében a Tong-féle környezet esetén. Forrás: saját szerkesztés.

Érdekes következmény továbbá, hogy a fent számított két valószínűség ( $p_1$  és  $p_2$ ) közel azonos. Megvizsgáltam tehát a  $M(\eta)$  értékét az  $n$  (klasztorelemek száma) függvényében. A grafikon (2. ábra) egy monoton növekvő függvény képét mutatta. Kiszámítottam a kapott függvény határértékét a végtelenben.

$$\begin{aligned}
 & \lim_{k \rightarrow \infty} \left( 2\Phi\left(\frac{1.96}{\sqrt{k}}\right) - 1 \right)^2 \cdot k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\left( 2\Phi\left(\frac{1.96}{\sqrt{k}}\right) - 1 \right)^2}{k^{-1}} = \\
 & = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2 \left( 2\Phi\left(\frac{1.96}{\sqrt{k}}\right) - 1 \right) \cdot 2\phi\left(\frac{1.96}{\sqrt{k}}\right) \cdot 1.96 \cdot \left(-\frac{1}{2}k^{-\frac{3}{2}}\right)}{-k^{-2}} = \\
 & = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{4\phi\left(\frac{1.96}{\sqrt{k}}\right) \cdot 1.96 \cdot \left(-\frac{1}{2}k^{-\frac{3}{2}}\right) \cdot 1.96 \cdot \phi\left(\frac{1.96}{\sqrt{k}}\right)}{-\frac{1}{2}k^{-\frac{3}{2}}} + \\
 & + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot \left( 2\Phi\left(\frac{1.96}{\sqrt{k}}\right) - 1 \right) \cdot \phi'\left(\frac{1.96}{\sqrt{k}}\right) \cdot 1.96^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}k^{-\frac{3}{2}}\right)}{-\frac{1}{2}k^{-\frac{3}{2}}} = \\
 & = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ 4 \cdot 1.96^2 \cdot \phi^2\left(\frac{1.96}{\sqrt{k}}\right) + 2 \cdot \left( 2\Phi\left(\frac{1.96}{\sqrt{k}}\right) - 1 \right) \cdot \phi'\left(\frac{1.96}{\sqrt{k}}\right) \cdot 1.96^2 \right] = \\
 & = 4 \cdot 1.96^2 \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^2 + 0 \cdot 0 = \frac{2 \cdot 1.96^2}{\pi} \approx 2.4456.
 \end{aligned}$$

Vagyis növelve a klaszterek elemszámát, a középpont adott környezetében található elemek számának várható értéke lényegében konstansnak tekinthető. Ennek oka a korábban már említett terület csökkenése, mely terület a klaszter elemszámával fordítottan arányos.

Végül meghatároztam az  $\eta_2$  valószínűségi változó eloszlását, és annak egy részletét tartalmazza az 1. táblázat (a várható érték környezete<sup>7</sup>). Ebből is látszik, hogy az 1-3 objektum előfordulásának legnagyobb a valószínűsége, a maximuma 2-nél van. Ezáltal a fejezet elején tett megállapításaimat igazoltam.

$y_i$	$P(\eta_2 = y_i)$
0	0.0905
1	0.2177
2	0.2613
3	0.2092
4	0.1255
5	0.0602
$\vdots$	$\vdots$

1. táblázat. Az  $\eta_2$  valószínűségi változó eloszlásának részlete. Forrás: saját számítás.

<sup>7</sup> $y_i$  az  $\eta_2$  valószínűségi változó által felvehető értékeket jelenti. Mivel binomiális eloszlású valószínűségi változóról van szó, ezért  $y_i \in \{0, 1, 2, \dots, 2000\}$

## 4 Az $S\_Dbw_{new}$ index módosítása

### 4.1 A módosított index ( $S\_Dbw^{**}$ )

A kritikai részben megfogalmazott hibák miatt a tartomány megválasztásának módosítását javaslom. Az eredeti javaslat – 3. egyenlet – helyett a következőképpen definiálom az  $f^*$  függvényt, amelyet megkülönböztetésül  $f^{**}$ -nak nevezek:

$$f^{**}(\mathbf{x}_i, \mathbf{m}) = \begin{cases} 1 & \text{ha } m^p - \alpha \cdot D^p \leq x_i^p \leq m^p + \alpha \cdot D^p, \forall p \in \{1, 2, 3, \dots, k\} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \quad (8)$$

ahol  $\mathbf{m}$  egy tetszőleges egyed;  $m^p$  a tetszőleges egyed  $p$ -edik változójának értéke;  $D^p = \min_i(\sigma_i^p)$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, c\}$ , a klaszterelemek  $p$ -edik változójának szórásai közül a minimális;  $\alpha$  egy alkalmasan megválasztott konstans.

A módosítás lényege, hogy az az intervallum, amelyen belül a megfigyelési egységeket keresem, már független az  $n$ -től (a klaszterelemek számától), így egy adott intervallumba eső megfigyelési egységek száma (az adott térrészben) arányos lesz a klaszterek elemszámával. Másrészt, az  $\mathbf{m}_{ij}$  osztópontok esetében a korábban említett torzító hatás is megszűnik.

### 4.2 A klaszterek közötti mérőszám ( $Dens_{bw}^{**}$ ) elemzése

Az 1. egyenlet adja meg a klaszterek közötti sűrűségkülönbség alapján, hogy mely klasztereket tekintünk majd különbözőnek, és melyeket nem tudunk megkülönböztetni. A következő elemzésben két klaszter egymáshoz viszonyított helyének függvényében vizsgálom az index értékét, két változó bevonása mellett.

Legyen adott két klaszter ( $C_1$  és  $C_2$ ). Középpontjaik:  $\mathbf{v}_1 = (0, 0)^T$  és  $\mathbf{v}_2 = (a, 0)^T$ . Mindkettő legyen kör alakú, azonos átmérővel (mindkét irányú szórásuk legyen 1-1). Legyen  $\alpha = 0.5$  (8. egyenlet). Az elméleti megközelítés esetében nem konkrét elemekkel megadott klasztereket vizsgálok, hanem a két klasztert két-két normál eloszlású valószínűségi változóval jellemzem ( $\xi_{1x}$ ,  $\xi_{1y}$ ,  $\xi_{2x}$ ,  $\xi_{2y}$ ). Ilyen feltételek mellett vizsgálom az alábbi három valószínűséget:

$$p_1 = P((0 - 0.5 \cdot 1 < \xi_{1x} < 0 + 0.5 \cdot 1) \wedge (0 - 0.5 \cdot 1 < \xi_{1y} < 0 + 0.5 \cdot 1)) ,$$

mely arányos a  $C_1$  klaszter középpontja körüli  $\alpha \cdot D^1$ , azaz  $0.5 \cdot 1$  sugarú tartományba, valamint ( $y$  irányban) a  $C_1$  klaszter középpontja körüli  $\alpha \cdot D^2$ , azaz  $0.5 \cdot 1$  sugarú tartományba eső pontok számával (mely tartomány egy téglalap).

$$p_2 = P((a - 0.5 \cdot 1 < \xi_{2x} < a + 0.5 \cdot 1) \wedge (0 - 0.5 \cdot 1 < \xi_{2y} < 0 + 0.5 \cdot 1)) ,$$

mely ugyanaz, mint az előbb, csak a  $C_2$  klaszterre vonatkoztatva.

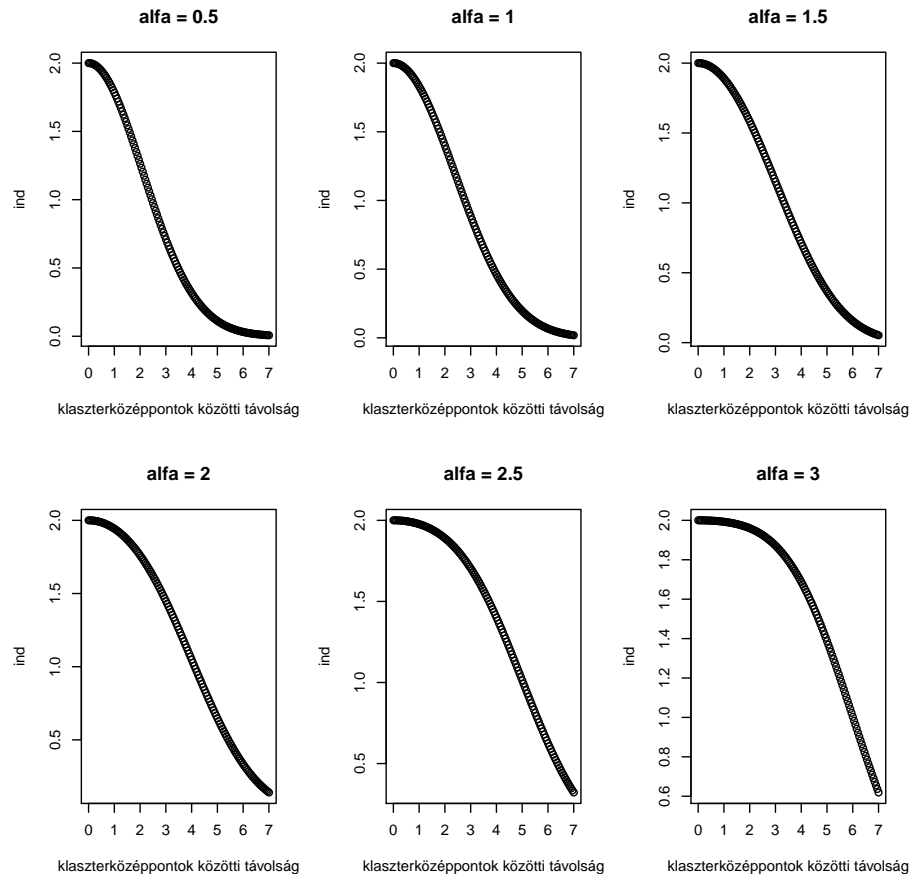
$$p_k = 2 \cdot P\left(\left(\frac{a}{2} - 0.5 \cdot 1 < \xi_{1x} < \frac{a}{2} + 0.5 \cdot 1\right) \wedge (0 - 0.5 \cdot 1 < \xi_{1y} < 0 + 0.5 \cdot 1)\right) ,$$

mely jelentése azonos az előzőekkel, csak a két középpontot összekötő szakasz felezőpontjára vonatkoztatva. A 2-vel való szorzás a két eloszlás azonossága miatt alkalmazható. Ezen mennyiségek segítségével definiálom a következő indexet:

$$ind := \frac{p_k}{\max(p_1, p_2)} \quad (9)$$

mely index arányos az 1. egyenletben megadott  $Dens_{bw}$  indexszel. Értékkészlete a  $[0, 2]$ , hiszen maximális értéket akkor vesz fel, ha a két klaszter középpontja egybeesik.

A definiált index vizsgálata során azt figyeltem, hogy miként változik az index értéke a középpontok távolságának függvényében. A távolság értékét 0-tól 7-ig változtattam (a szórás értéke 1), azaz  $a \in [0, 7]$ . A kapott  $ind(\text{távolság})$  függvényt a 3. ábra első grafikonja ( $\alpha = 0.5$ ) mutatja.

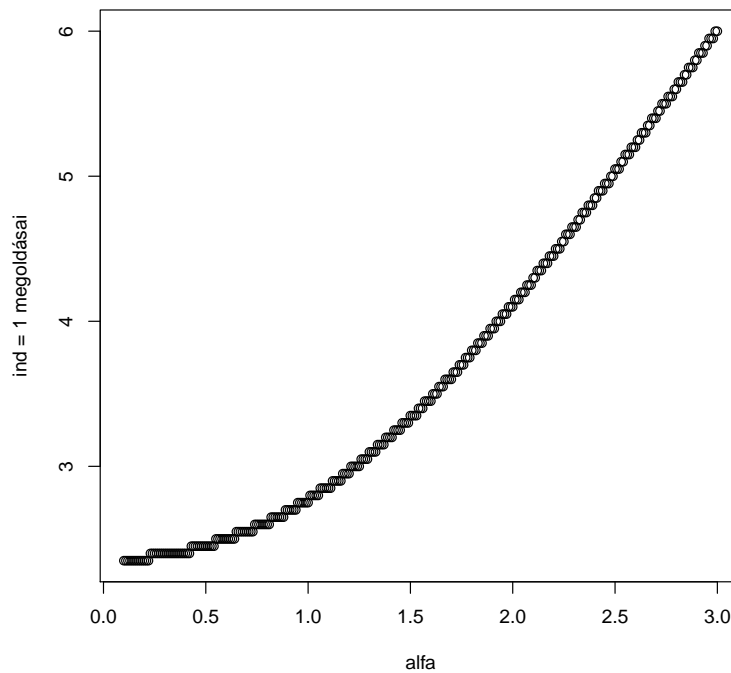


3. ábra. Az „ind” index a klaszterközéppontok közötti távolság függvényében különböző  $\alpha$  paraméterek esetén. Forrás: saját számítás.

A függvény az 1-et, mint függvényértéket az  $x = 2.4$  helyen veszi fel, ami azt jelenti, hogy a két középpont ezen távolsága esetén a két középpont adott környezetében (ld.  $\alpha$ ) ugyanannyi megfigyelési egység található, mint a két középpontot elválasztó osztópont (jelen esetben felezőpont) ugyanazon környezetében. A három pont tehát a sűrűség szempontjából egymástól nem megkülönböztethető. A távolság további növelésével az index értéke (csökkenő ütemben) tovább csökken.

A fenti kísérletben az  $\alpha$  értékét 0.5-nek választottam. Hogy hogyan változnak a függvény értékei más  $\alpha$  paraméterértékek esetén, a 3. ábra további grafikonjai mutatják. Látható, hogy az  $\alpha$  értéket növelve az  $ind = 1$  egyenlet megoldásai – vagyis azon klaszterközéppont távolságok, melyekre az  $ind$  index értéke 1 lesz – is egyre növekednek.

Vagyis célszerű minél kisebb  $\alpha$  értéket választani. Azonban a normál eloszlás esetében az elméleti valószínűségek számolhatók akkor is, ha  $\alpha$  nagyon kicsi, addig a konkrét adatbázis esetén ezek a kicsi intervallumok nem tartalmaznak majd megfigyelési egységeket, vagyis nem lesznek alkalmasak az összehasonlításra. Ennek további vizsgálata céljából megrajzoltam egy függvényt, mely azon klaszterközéppontok távolságát adja meg az  $\alpha$  függvényében, melyek esetében az  $ind$  index értéke 1 lett (4. ábra).



4. ábra. Az  $ind = 1$  eredményt adó klasztertávolságok az  $\alpha$  paraméter függvényében.  
Forrás: saját számítás.



A grafikon azt mutatja, hogy a változó ( $\alpha$ ) növekedésével egyre növekvő mértékben növekszik a függvényérték. Más szóval, minél nagyobb  $\alpha$  értéket választunk, annál távolabbinak kell lennie a két klaszternek, hogy meg tudjuk különböztetni őket<sup>8</sup>. Mivel a függvény monoton növekvő, ezért az optimális értéket az értelmezési tartomány bal oldalán veszi fel. Itt bizonyos tartományonként konstans értéket vesz fel (ezen a részén a növekedés lassúbb), vagyis ezen a részen kell egy alkalmas  $\alpha$  értéket kiválasztani. A továbbiakban legyen ez az érték  $\alpha = 0.4$ , figyelembe véve a korábbi érveket.

További kérdés azonban, hogy a fenti kísérlet eredménye 2 gömbszimmetrikus klaszter esetében lett kiértékelve. Van-e ennek hatása a 4. ábra grafikonjának jellegére? A kísérlet különböző szórás paraméterek mellett megismételve ugyanazt a jellegű görbét adta.

### 4.3 A módosított $S\_Dbw^{**}$ index szerkezetének vizsgálata

A vizsgálat egyik célja, hogy a teljes index értékét a két részindex változásának függvényében figyelhessük meg. Ennek modellezésére egy három klaszterből álló adatbázist készítettem, amelyben két klaszter helyét nem változtattam, a harmadikat pedig kiindulásként az egyik fix klaszterre helyeztem, majd távolítottam tőle az  $x$  tengely mentén (miközben a másik klaszterhez sem közelítettem). A két egymást átfedő klaszter egyszer egynek, majd két különböző klaszternek tekintettem, és vizsgáltam az indexek értékét mindkét változat esetében. A harmadik klaszterre azért volt szükség, hogy minden esetben legyen legalább két klaszter, amire az index számolható.

Először mindhárom ( $C_1, C_2, C_3$ ) klaszter  $x$  és  $y$  irányú szórását azonosra állítom:  $\sigma_{1x} = \sigma_{2x} = \sigma_{3x} = \sigma_{1y} = \sigma_{2y} = \sigma_{3y} = 1$ . A  $\mathbf{v}_1 = (0, 0)^T$ ,  $\mathbf{v}_2 = (d, 0)^T$ , ahol  $d \in [0; 7]$ , továbbá  $\mathbf{v}_3 = (0, -7)^T$  pedig az egyes klaszterek középpontjait határozzák meg. Mindhárom klaszter 1000 megfigyelési egységet tartalmazott. Először a  $C_1$  és a  $C_2$  klasztert összevontam egy klaszterre, majd pedig külön klaszternek tekintettem őket, és mindkét esetben vizsgáltam az indexek értékét, miközben az  $d$  értékét 0-tól 7-ig változtattam bizonyos lépésközönként. Az eredmények a 2. táblázatban láthatók. Az egyes részindexeket, valamint a teljes indexet is párba állítottam a két klaszteres ill. a három klaszteres megoldások esetében. A két utolsó oszlop összehasonlításából látható, hogy az indexek nagyságában kb. 3.5-4 egység távolság ( $3.5 < d < 4$ ) esetén váltás történik. Innentől kezdve tehát a három klaszter tartalmazó megoldást fogadjuk el a másikkal szemben. Vagyis, ha a két klaszter szórása 1-1 egység, akkor középpontjuk kb. 4 egység távolságra kell, hogy legyen, hogy két különböző klaszterként értékelje őket az index. Vagyis nem szükséges teljesen átfedésmentesnek lenniük („jól szeparált”), bizonyos átfedés esetén is felismerhető a kettő különbözősége.

<sup>8</sup>Itt még nem került sor annak vizsgálatára, hogy az index milyen értéke mellett különböztethető meg két klaszter. Erre később kerül sor.

Távolság	$Dens_{bw}^{**}$	$Dens_{bw}^{**}$	$Scat$	$Scat$	$S_{Dbw}^{**}$	$S_{Dbw}^{**}$
$d$	$nc = 2$	$nc = 3$	$nc = 2$	$nc = 3$	$nc = 2$	$nc = 3$
0.0	0.0053	0.3281	0.0592	0.0776	0.0644	0.4057
0.5	0.0000	0.3076	0.0593	0.0790	0.0593	0.3866
1.0	0.0000	0.2266	0.0608	0.0770	0.0608	0.3036
1.5	0.0093	0.2336	0.0671	0.0792	0.0764	0.3128
2.0	0.0156	0.1911	0.0715	0.0782	0.0872	0.2693
2.5	0.0147	0.1774	0.0779	0.0792	0.0926	0.2566
3.0	0.0294	0.1188	0.0871	0.0776	0.1165	0.1964
3.5	0.0777	0.1004	0.0927	0.0744	0.1704	0.1748
4.0	0.0437	0.0408	0.1046	0.0723	0.1483	0.1131
4.5	0.0463	0.0383	0.1140	0.0725	0.1603	0.1108
5.0	0.0756	0.0146	0.1248	0.0693	0.2004	0.0838
5.5	0.1067	0.0099	0.1330	0.0660	0.2397	0.0759
6.0	0.0895	0.0045	0.1444	0.0618	0.2338	0.0662
6.5	0.0806	0.0036	0.1519	0.0600	0.2325	0.0637
7.0	0.1190	0.0056	0.1613	0.0569	0.2803	0.0625

$nc$  : klaszterek száma

2. táblázat. A részindexek és a teljes index értékei a távolság függvényében 2 és 3 klaszter képzése esetén. Forrás: saját számítás.

A 2. táblázat alapján vizsgálhatjuk a két részindexet is, melyek összegeként áll elő az előbb vizsgált index. A  $Scat$  részindex méri a klasztereken belüli szórás értékét. Látható, hogy a két klaszteres számításnál növekszik az értéke, ha növeljük a  $C_1$  és a  $C_2$  klaszterek távolságát (ezt a két klasztert ugyanis egynek tekintjük ekkor). A három klaszteres változat esetében ez a részindex egyre csökken. Magyarázata: míg a három klaszter szórása külön-külön változatlan, addig az összes megfigyelési egység által alkotott „nagy” klaszter szórása növekszik. A 6. egyenlet értelmében a hányadosuk csökken.

Ugyancsak a 2. táblázat alapján vizsgáljuk meg a másik, a  $Dens_{bw}^{**}$  részindexet. A három klaszteres változat eredményeit (3. oszlop) figyelve megállapítható a csökkenő tendencia. Oka: a két távolodó klaszter között egyre kevesebb megfigyelési egység található, ezért a részindex számlálója (ld. 1. egyenlet) csökken, míg nevezője változatlan marad. A két klaszteres változat (2. oszlop) esetében, mivel  $C_1$  és a  $C_2$  klaszter alkot egy klasztert, a két klaszter távolodásakor a részindex nevezője csökken, vagyis a tört értéke növekszik.

A két részindex értéke 3 klaszter figyelembevételével csökken (tehát összegük is csökken), 2 klaszter esetében pedig növekszik (tehát összegük is). Ezen hatások eredményeként egy bizonyos távolságban a két index (utolsó két oszlop) nagyságának viszonya megfordul. Innentől a három klaszteres megoldást választjuk a két klaszteres megoldás helyett.

A szimulációt többféleképpen is elvégeztem. Először a klaszterek minden számítás ( $d$  érték) esetén ugyanazok voltak, és csak az egyik klaszter ( $C_2$ ) elemeinek első változóját növeltem a megadott  $d$  értékkel („A” változat). A második esetben minden egyes távolság esetén új klasztereket állítottam elő a megfelelő paraméterek alapján („B” változat). Mindkét esetben különböző szórás-beállítások mellett is elvégeztem a szimulációt ( $\sigma_{1x}$ -et és  $\sigma_{2x}$ -et változtattam, a többi értékét konstansnak vettem), amint a 3. táblázatban látható.

Kísérlet	$\sigma_{1x}$	$\sigma_{2x}$	Szimulációk száma az adott távolságeredményekkel																
			3.5	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7	7.5	8	8.5	9	9.5	10	10.5	11	
A	1	1	2	8															
A	1	2			4	6													
A	1	3				2	5	2	1										
A	2	2						1	2	6	1								
A	2	3								2	2	3	3						
A	3	3												1	2	3	3	1	
B	1	1	3	7															
B	1	2			2	7	1												
B	1	3					1	7	2										
B	2	2						1	3	4	2								
B	2	3								3	6	1							
B	3	3											1	2	3	3	1		

$\sigma$  : szórás

3. táblázat. A szimulációk száma a három klaszter felismeréséhez szükséges középpontok közötti távolság legkisebb értéke szerint, különböző szórású klaszterek esetén. Forrás: saját számítás.

A szórások növekedése miatt a klaszterközéppontok távolságának is nagyobb tartományt kellett megadni, ez 0–11 egységig terjedt. A két index értéke ismét a fent leírtak szerint változtak (a két klaszteres változat esetében növekedett, a három klaszteres változat esetében csökkent az index értéke  $d$  növekedése esetén), természetesen a szórások értékének változása miatt más-más távolság esetén következett be a váltás.

Minden egyes paraméterbeállítás mellett 10-10 futtatást végeztem, és vizsgáltam egyrészt az index növekedését ill. csökkenését a távolság függvényében, másrészt azt a távolságot kerestem, ahol a kétklaszteres eredmény helyett a háromklaszteres eredmény kerül elfogadásra. A 3. táblázat adatai azt mutatják, hogy 10 kísérlet esetén melyik távolság esetén ismerte föl az index a három klaszter jelenlétét.

A táblázat adataiból megállapítható, hogy a három klaszter felismerésének nem feltétele, hogy a klaszterek teljesen szeparáltak legyenek. Az is látható azonban, hogy a szórások növekedése esetén a bizonytalanság is egyre növekszik, tehát a felismerési távolság szórása is nagyobb.<sup>9</sup>

A vizsgálatban használt  $C_3$  klaszter szerepe annyi volt, hogy a  $C_1$  és  $C_2$  összevonása esetén is legyen két klaszterünk, amelyre az index számolható. Ezért ezt a  $C_1$ -től és  $C_2$ -től szeparáltan helyeztem el, a cél ugyanis a  $C_1$  és  $C_2$  közötti átfedés vizsgálata volt.

## 5 Az $S\_Dbw_{new}$ és $S\_Dbw^{**}$ index összehasonlítása

Az összehasonlításhoz szintetikus adatbázisokat használok, melyeken klaszterező eljárásokat futtatok le különböző paraméterbeállítások mellett, és a kapott klasztereken tesztelem a két indexet. Ezt az eljárást követték mindhárom cikkben, amelyek ennek az indexnek kidolgozásával foglalkoztak. Halkidi és Vazirgiannis [8] valamint Tong és Tan [17] elemzésében, többek

<sup>9</sup>A vizsgálatok során a klaszterek elemszáma nem változott.

között, az ún. DBSCAN [1] algoritmust alkalmazták. Ez a módszer a sűrűségek vizsgálatán alapszik, és nagyon hatékony nem konvex, de jól szeparált klaszterek elkülönítésére. Ezen vizsgálat fókuszában azonban a konvex és nem feltétlenül teljesen elkülönülő csoportok felismerése áll, ezért helyette az ún. MCLUST [3, 4] algoritmust választottam. Ez egy modell alapú klaszterezési eljárás, amelynek lényege, hogy az adott adatbázis alapján meghatározza annak az eloszlásnak a paramétereit, amelyből legnagyobb valószínűséggel keletkezhetett egy ilyen adatbázis, és ezen elméleti modell alapján, valószínűségeket számolva, sorolja be a megfigyelési egységeket klaszterekbe. Mindhárom cikkben alkalmazzák a K-means agglomeratív klaszterezési eljárást. Ennek ismertetésére nem térek ki, hiszen az egyik legszélesebb körben alkalmazott algoritmus. Ez lesz a másik klaszterező eljárás, amit alkalmazni fogok.

7 db adatbázison teszteltem az indexeket, melyeket mintavétellel állítottam elő adott paraméterű normál eloszlásokból. A minták konvex csoportokat tartalmaznak, melynek fölismerésében mindkét algoritmus jó eredményeket ért el. Ezen adatbázisok előállításának szempontjai a következők voltak:

- legyen kisebb és nagyobb elemszámú klasztereket is tartalmazó adatbázis,
- legyen sűrűbb és ritkább klasztereket is tartalmazó adatbázis,
- legyen jól szeparált és kevésbé jól szeparált klasztereket is tartalmazó adatbázis.

Az adatbázisok két változót tartalmaztak, hogy az eredmények kiértékelésekor legyen lehetőség annak szemléltetésére is, így lehetőséget teremtve annak jobb megértésére. Természetesen a továbbiakban semmi akadálya annak, hogy többváltozós adatbázisok esetén is teszteljük/alkalmazzuk az indexet, azonban ekkor a szemléltetés nehezebb, vagy nem megoldható.

A 4. táblázat mutatja a létrehozott adatbázisok paramétereit (klaszterek középpontja, szórása, elemszáma). Az első négy esetben 4 klasztert állítottam elő, és az első esetben olyan távol helyeztem el őket, hogy teljesen szeparáltak legyenek. A további 3 esetben közelebb helyeztem őket ill. változtattam az elemszámukat (egyrészt úgy, hogy egyszerre mindegyik kevesebb elemet tartalmazzon, másrészt úgy, hogy különböző legyen az elemszámuk). Az 5. adatbázis egy háromklaszteres elrendezés, melyben K1 és K2 között átfedés van, míg K3 egy távolabb levő klaszter, sűrűségük pedig különböző. A 6. adatbázis tartalmaz ellipszis alakú klasztereket is, ezenfelül a K1 kivételével a többi átfedéseket is tartalmaz, azaz ezen klaszterek közötti elemszám nagyobb, mint az első négy klaszter esetében. Az utolsó adatbázis esetében a K3 elkülönül a többitől, a többi három pedig jobban átfedi egymást, mint az eddigi példákban generált klaszterek esetében.

Természetesen a szimulációval nem lehet minden lehetséges helyzetet ellenőrizni. Itt a cél annak vizsgálata volt, hogy az egymáshoz közelebb levő klaszterek esetében kimutatható különbség van-e a két index eredményei között.

Mindkét módszer (K-means, Mclust) esetében a klaszterek számát 2-től 7-ig változtattam. Ezután összehasonlítottam a besorolásokat a tényleges klaszterbesorolásokkal, és a legtöbb egyezést mutató eredményt választottam legjobbnak. Ezután azt vizsgáltam, hogy a két index melyik besorolást

fogja legjobbként értékelni. Mindegyik esetben 10-10 mintát generáltam (a megadott paraméterek mellett, ld. 4. táblázat), és a kapott eredményeket rendeztem az 5. táblázatba.

	K1			K2			K3			K4		
	$\mathbf{v}_1$	$\sigma_1$	$N_1$	$\mathbf{v}_2$	$\sigma_2$	$N_2$	$\mathbf{v}_3$	$\sigma_3$	$N_3$	$\mathbf{v}_4$	$\sigma_4$	$N_4$
1	(0,0)	(1,1)	500	(7,0)	(1,1)	500	(0,-7)	(1,1)	500	(2,7)	(1,1)	500
2	(0,0)	(1,1)	500	(4,0)	(1,1)	500	(0,-7)	(1,1)	500	(2,5)	(1,1)	500
3	(0,0)	(1,1)	100	(4,0)	(1,1)	100	(0,-7)	(1,1)	100	(2,5)	(1,1)	100
4	(0,0)	(1,1)	500	(4,0)	(1,1)	100	(0,-7)	(1,1)	500	(2,5)	(1,1)	250
5	(2,2)	(1,1)	750	(6,0)	(2,2)	500	(2,-7)	(0.5,0.5)	500			
6	(-4,0)	(1,1)	500	(4,0)	(2,2)	1000	(0,-7)	(3,2)	500	(2,5)	(2,1)	500
7	(0,0)	(1,1)	500	(4,0)	(1,1)	500	(0,-7)	(1,1)	500	(2,2)	(1,1)	500

K1, K2, K3, K4: klaszterazonosító  
 $\mathbf{v}_i$ : az  $i$ -edik klaszter középpontja  
 $\sigma_i$ : az  $i$ -edik klaszter elemeinek  $x$  és  $y$  irányú szórása  
 $N_i$ : az  $i$ -edik klaszter elemszáma

4. táblázat. Az indexek összehasonlításához használt adatbázisok paraméterei.  
 Forrás: saját összeállítás.

	Szimuláció sorszáma	Klaszterek száma					
		KM	T-KM	S-KM	MC	T-MC	S-MC
1. adatbázis	1	4	4	4	4	5	4
	2	4	4	4	4	4	4
	3	4	5	4	4	5	4
	4	3	6	5	4	4	4
	5	4	4	4	4	6	4
	6	4	7	4	4	5	4
	7	4	4	4	4	5	4
	8	4	4	4	4	4	4
	9	4	4	4	4	5	4
	10	4	7	4	4	7	4
2. adatbázis	1	4	4	4	4	6	4
	2	4	4	4	4	5	4
	3	4	7	4	4	7	4
	4	4	6	4	4	4	4
	5	4	5	4	4	7	4
	6	4	5	4	4	5	4
	7	4	6	4	4	4	4
	8	4	6	4	4	6	4
	9	4	7	4	4	5	4
	10	4	6	4	4	6	7
3. adatbázis	1	4	6	4	4	4	4
	2	3	6	2	4	7	4
	3	4	4	4	4	4	4
	4	5	5	5	4	7	6
	5	4	6	4	4	5	4
	6	4	5	5	4	7	7
	7	4	4	4	4	4	4
	8	4	7	4	4	7	4
	9	4	4	4	4	7	3
	10	4	5	4	4	5	6

(a táblázat folytatódik)

5. táblázat. Az indexek összehasonlításának eredményei. Forrás: saját számítás.

	Szimuláció sorszám	Klaszterek száma					
		KM	T-KM	S-KM	MC	T-MC	S-MC
4. adatbázis	1	3	4	3	3	6	3
	2	4	5	4	4	5	4
	3	4	4	3	4	5	4
	4	4	5	4	4	4	4
	5	3	6	3	3	6	6
	6	4	5	4	4	4	4
	7	3	7	3	3	7	6
	8	4	4	4	3	3	3
	9	4	5	4	4	6	4
	10	4	7	6	4	3	4
5. adatbázis	1	3	4	3	4	5	2
	2	3	6	3	3	5	2
	3	3	3	3	4	2	2
	4	3	7	2	3	2	2
	5	3	3	3	2	3	2
	6	3	5	3	3	2	2
	7	3	5	3	4	2	2
	8	3	4	3	4	4	2
	9	3	3	3	4	2	2
	10	3	5	3	3	5	2
6. adatbázis	1	4	5	6	4	7	4
	2	4	7	6	4	7	5
	3	4	6	6	4	7	4
	4	4	7	7	4	7	7
	5	4	7	7	4	6	7
	6	4	4	4	4	7	4
	7	4	6	7	4	6	7
	8	4	7	7	4	7	7
	9	4	5	5	4	6	7
	10	4	6	6	4	5	4
7. adatbázis	1	4	6	2	4	6	2
	2	5	5	2	4	4	2
	3	3	5	2	4	5	2
	4	4	7	2	4	7	2
	5	4	4	2	4	3	3
	6	4	6	2	4	6	2
	7	3	6	2	4	5	2
	8	4	6	2	4	7	2
	9	5	7	2	4	7	2
	10	4	4	2	4	3	2

KM, MC: Legjobb csoportosítás klaszterszáma (K-means, Mclust)

T-KM, T-MC: Tong index eredménye (K-means, Mclust)

S-KM, S-MC: saját index eredménye (K-means, Mclust)

5. táblázat. Az indexek összehasonlításának eredményei (folytatás).

A kapott eredményeket olyan szempont szerint értékeltem, hogy az egyes indexek eltalálták-e az adott algoritmus által előállított megoldások közül a ténylegeshez legközelebb álló megoldást. Az 1. adatbázis tartalmazott jól szeparált klasztereket, mindkét index ebben jó eredményt ért el.

A 2., 3. és 4. adatbázisok esetében az 1. adatbázis klaszterei közelebb kerültek egymáshoz, ill. az elemszámaik is változtak. Ezekben az esetekben megfigyelhető, hogy a lecsökkentett elemszám (3. adatbázis), valamint az egyenlőtlen elemszám esetén (4. adatbázis) a saját index teljesítménye is romlott. A Tong index viszont ezen klaszterelrendezések esetén már nem

tudott elfogadható eredményt adni. Az általam módosított index a legjobb csoportosításnak megfelelő klaszterszámokat többször találta el, mint a Tong index. A találatok különbsége jelentős.

Az 5. adatbázis esetében lényeges különbség van az egyes klaszterek sűrűsége között, továbbá a K3 klaszter elkülönül a másik kettőtől. Az eredmények tanulmányozásából az derül ki, hogy a K-means algoritmus esetében a három-klaszteres elrendezés bizonyult a legjobbnak mind a tíz szimuláció esetén, míg az Mclust algoritmus mindössze 4 esetben adott az eredetihez hasonló megoldást. Az indexeket vizsgálva, a K-means által előállított klaszterek esetében a saját index jobb eredményt ért el (a tíz szimuláció összesítéseként), mint a Tong féle. Ugyanakkor az Mclust által előállított klasztereken végzett szimulációk esetében a saját index mindig a kétklaszteres megoldást részesítette előnyben, és csak egyszer találta el a legjobb csoportosítást. Megfigyelhető még, hogy ezen adatbázis esetén az Mclust algoritmus által előállított klaszterek száma változékony volt, 2, 3 és 4 klaszteres megoldás is előállt.

A 6. adatbázis előállításakor a szórások változtatásával olyan klasztereket is képeztem, amelyek nem kör alakúak. Továbbá elemszámban és sűrűségben is van közöttük különbség. A négy klaszter nem teljesen szeparált egymástól. Mind a K-means, mind pedig az Mclust legjobb besorolása a négyklaszteres megoldás volt (az eredeti adatbázis is ennyi klasztert tartalmazott). Ennek ellenére mindkét index lényegében rossz besorolást határozott meg. A megoldások véletlenszerűnek tűnnek. Vagyis a módosított index alkalmazhatósága ezen adatbázis esetében már szintén megkérdőjelezhető.

A 7. adatbázis esetében a négy klaszterből három átfedi egymást, a negyedik különálló (K3). Ezen klaszterek felismerésében az Mclust algoritmus egyenletes teljesítményt nyújtott K-means-szel szemben. Az Tong-féle index ebben az esetben is sokféle eredményt adott, szinte véletlenszerűen, míg a saját index lényegében a kétklaszteres megoldást mutatta legjobbnak. Ennek az oka, hogy a három egymás mellett levő klaszter olyan közel került egymáshoz, hogy megkülönböztetésük a módosított index használatával nem lehetséges. Ugyanakkor a Tong-féle index eredményeinél jobban hasznosítható eredményt adott.

## 6 Összefoglalás

A vizsgálat alá vont index kritikai elemzése után az index módosítására került sor. A szimulációs kísérletek alátámasztották a 3. fejezetben összefoglalt kritikai megjegyzéseket, végeredményben, hogy a Tong-féle index csak jól szeparált klaszter-elrendezések esetén nyújt megfelelő segítséget a klaszterszám megválasztásához. Az 5. fejezetben végrehajtott szimulációk megmutatták az index továbbfejlesztett változatának alkalmazhatóságát olyan esetekben is, amikor a Tong-féle index eredményeiből használható információ nem származik. Mivel sűrűségkülönbségek alapján számoljuk az index értékét, ezért olyan klaszterelrendezések esetén, amikor a klaszterek annyira közel vannak, hogy a klaszterek között már nincs ritkább terület (ld. 6. adatbázis), az index

már nem alkalmazható, vagy egyáltalán nem tud bizonyos klasztereket megkülönböztetni, és egy másik, ugyanakkor jó megoldást eredményez (7. adatbázis).

A két index vizsgálata azt mutatja, hogy a módosítás eredményeként előállt index alkalmazhatósága szélesebb körű, ugyanakkor a korlátait is megmutatta a szimulációs kísérlet. Egy adott adatbázis esetén, ahol a csoportok meglétét, számát keressük, az adatbázisból vett mintákon való tesztelések eredményének egyezősége vagy változékonysága mutatja az index alkalmazhatóságát.

## Irodalom

1. Ester M., Kriegel H. P., Sander J., Xu. X. (1996): A density based algorithm for discovering clusters in large spatial databases with noise, in: *Proceedings of 2nd International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*, Portland, OR, pp. 226–231.
2. Everitt B. S., Landau S., Leese M., Stahl D. (2011): *Cluster Analysis*, Wiley, 5th ed. 346 p.
3. Fraley C., Raftery A. E. (2002): Model-Based Clustering, Discriminant Analysis and Density Estimation, *Journal of the American Statistical Association*, vol. 97, pp. 611–631.
4. Fraley C., Raftery A. E. (2006): MCLUST Version 3 for R: Normal Mixture Modeling and Model-Based Clustering, Technical Report No. 504. Department of Statistics. University of Washington, pp. 1–56.
5. Füstös L., Kovács E. (1989): *A számítógépes adatelemzés statisztikai módszerei*, Tankönyvkiadó, Budapest, 380 p.
6. Füstös L., Kovács E., Meszéna G., Simonné N. M. (2004): *Alakfelismerés*, Új Mandátum Könyvkiadó, 644 p.
7. Hajdu O. (2003): *Többváltozós statisztikai számítások*, Központi Statisztikai Hivatal, 457 p.
8. Halkidi M., Vazirgiannis M. (2001): Clustering validity assessment: finding the optimal partitioning of a data set, in: ICDM 2001, *Proceedings IEEE International Conference on Data Mining*, IEEE, pp. 187–194.
9. Kaufman L., Rousseeuw P. J. (2005): *Finding groups in data: an introduction to cluster analysis*, Wiley, Hoboken, N.J.
10. Kim Y., Lee S. (2003): A Clustering Validity Assessment Index, in: K. Y. Whang, J. Jeon, K. Shim, J. Srivastava (eds.) *Advances in Knowledge Discovery and Data Mining*, vol. 2637 of Lecture Notes in Computer Science, Springer Berlin, Heidelberg, pp. 562–562.
11. Kovács E., Füstös L., Meszéna G. (2007): *Alakfelismerés: Sokváltozós statisztikai módszerek*, Új Mandátum Könyvkiadó, 660 p.
12. Legány C., Juhász S., Babos A. (2006): Cluster validity measurement techniques, in: *Proceedings of the 5th WSEAS International Conference on Artificial Intelligence, Knowledge Engineering and Data Bases*, World Scientific and Engineering Academy and Society (WSEAS), Stevens Point, Wisconsin, pp. 388–393.
13. Liu Y., Li Z., Xiong H., Gao X., Wu J. (2010): Understanding of Internal Clustering Validation Measures, in: *Proceedings of the 2010 IEEE International*



*Conference on Data Mining*, ICDM '10, IEEE Computer Society, Washington, DC, USA, pp. 911–916.

14. Simon J. (2006): A klaszterelemzés alkalmazási lehetőségei a marketingkutatásban, *Statisztikai Szemle*, vol. 7, pp. 627–650.
15. Sneath P. H. (2005): Numerical Taxonomy, in: D. J. Brenner, N. R. Krieg, J. T. Staley, G. M. Garrity (eds.) *Bergey's Manual of Systematic Bacteriology*, Springer US, Boston, MA, pp. 39–42.
16. Theodoridis S., Koutroumbas K. (2003): *Pattern recognition*, Academic Press, 2nd ed. 689 p.
17. Tong J., Tan H. (2009): Clustering validity based on the improved S-Dbw\* index, *Journal of Electronics (China)*, vol. 26, pp. 258–264.

#### A POSSIBLE SOLUTION OF THE DETERMINATION OF NUMBER OF CLUSTERS

This paper deals with the problem that in the case of cluster analysis we can get many solutions. Which is the best approximation of the – hypothetically existing – groups in the database among these solutions? There are processes trying to answer this question. On one hand this paper is a critical analysis of such a process, and on the other hand tries to develop that. The essence of the method is creating an index which contains the number of elements around the cluster centers and around a dividing point between the cluster centers. By the help of this index the classification accuracy can be characterized. In the case of popular algorithms, such as K-means – where the desired number of clusters has to be given in advance – this (modified) index provides assistance for the decision.



# FOGALMAK, MÓDSZEREK

## PÁROS ÖSSZEHAISONLÍTÁSOKON ALAPULÓ RANGSOROLÁSI MÓDSZEREK<sup>1</sup>

CSATÓ LÁSZLÓ

MTA-BCE „Lendület” Stratégiai Interakciók Kutatócsoport

A páronként összehasonlított alternatívák rangsorolásának problémája egyaránt felmerül a szavazáselmélet, a statisztika, a tudománymetria, a pszichológia és a sport területén. A nemzetközi szakirodalom alapján részletesen áttekintjük a megoldási lehetőségeket, bemutatjuk a gyakorlati alkalmazások során fellépő kérdések kezelésének, a valós adatoknak megfelelő matematikai környezet felépítésének módjait. Kiemelten tárgyaljuk a páros összehasonlítási mátrix megadását, az egyes pontozási eljárásokat és azok kapcsolatát. A tanulmány elméleti szempontból vizsgálja a Perron-Frobenius tétel alapján invariáns, fair bets, PageRank, valamint az irányított gráfok csúcsainak rangsorolásra javasolt internal slackening és pozíciós erő módszereket. A közülük történő választáshoz az axiomatikus megközelítést ajánljuk, ennek keretében bemutatjuk az invariáns és a fair bets eljárások karakterizációját, és kitérünk a módszerek vitatható tulajdonságaira.

*Kulcsszavak:* preferenciák aggregálása, páros összehasonlítás, rangsorolás, karakterizáció

## 1 Bevezetés

A sportrajongók számtalanszor találkozhatnak azzal hírral, hogy a következő hétfőtől érvényes világranglistát egy adott teniszező vezeti. De elgondolkodtunk-e már azon, vajon milyen számítások, megfontolások állhatnak a „hivatalos” sorrend mögött? A feladat megoldása meglehetősen nehéznek tűnik, amennyiben nem találunk olyan játékost, aki a vizsgált időszakban egyértelmű fölényben volt, egyetlen ellenfelétől sem szenvedett vereséget, márpedig legtöbbször ez a helyzet. A rangsor felállításához több szempontot

---

<sup>1</sup>A kutatás a TÁMOP 4.2.4.A/1-11-1-2012-0001 azonosító számú Nemzeti Kiválóság Program – Hazai hallgatói, illetve kutatói személyi támogatást biztosító rendszer kidolgozása és működtetése országos program című kiemelt projekt keretében zajlott. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg. A szerző köszönetet mond az OTKA K-77420 pályázat pénzügyi támogatásáért. Hálával tartozom *Bozóki Sándornak* a kézirat elolvasásért és fontos észrevételeiért, valamint két anonim bírálónak hasznos tanácsaikért. Beérkezett: 2013. július 16. E-mail: laszlo.csato@uni-corvinus.hu.

szükséges figyelembe vennünk. Melyik mérkőzések eredményei alapján dolgozunk? Ez egyszerre jelenthet időbeli és / vagy térbeli (melyik tornákat vizsgáljuk) lehatárolást. A kérdésre adott válasz megadja a vizsgálandó teniszezők körét: olyan sorrendet kell találnunk, melyben minden, az elemzett mérkőzések valamelyikén résztvevő játékos szerepel. Az előbbieket eredménye hordoz információt a két teniszező egymással való kapcsolatáról, ezért biztosan számításba kell venni. Ráadásul ez egy többdimenziós változó: egyszerre különbözhet a mérkőzések száma és azok kimenetele. Lényegében egy olyan függvény definiálása válik szükségessé, amely tetszőleges, egymás elleni teniszmeccs alapján képes a játékosok teljesítményének értékelésére, azok rangsorolására.

Az ehhez hasonló komplex, többszemponútú döntések meghozatala során gyakran nem lehetséges az alternatívák egyetlen, objektív skálán történő értékelése. Amennyiben mégis szükség van ezek rangsorolására, ez sokszor, mint a fenti tenisz világranglistánál, páronkénti összehasonlításuk alapján tehető meg.

Az utóbbi időben hazai szerzőktől több, hasonló témájú cikk született (Kóczy és Strobel, 2010; Csenedes és Antal, 2010; London és Csenedes, 2013; Telcs et al., 2013), ugyanakkor eddig nem született magyar nyelvű (ebben a szerkezetben másnyelven sem) tárgyalás erről a területről. Nem ismerünk olyan áttekintést sem, amelyben egymás mellett szereplnének az itt tárgyalt invariáns, fair bets, internal slackening és pozíciós erő módszerek, valamint az ezekkel kapcsolatos kritikák. Az egységes tárgyalás következtében lehetőségünk nyílik néhány, eddig nem formalizált gondolat megfogalmazására: ilyen Slutzki és Volij (2005) ötlete nyomán a módszerek duális változatának bevezetése, vagy az eljárások részletes elemzése a Kóczy és Strobel (2010) által bevezetett monotonitás és a megfordíthatóság tekintetében; előbbi esetén néhány probléma még megoldásra vár. Végül – tudomásunk szerint először – rámutatunk az egyik eljárás, a legkisebb négyzetek módszerének több, egymástól független „felfedezésére”: Éltető és Köves (1964) statisztikai, Gulliksen (1956) pszichológiai vagy Bozóki et al. (2010) matematikai-döntéseméleti témájú tanulmányára.

A cikk egyszerre tartalmaz irodalmi áttekintést és bizonyos módszerek részletes tárgyalását, emellett néhány alkalmazási lehetőséget is bemutat. Ezért bizonyára lesznek olyan olvasók, akik valamelyik részt túlságosan hosszúnak, unalmasnak tartják, míg egy másikban a részletes kifejtést hiányolják; az ebből fakadó negatív érzéseket a megadott hivatkozások mérsékelhetik. A mindenre kiterjedő tárgyalás már terjedelmi okokból is lehetetlennek tűnik, ráadásul a szerző sem állíthatja magáról, hogy mindegyik területnek szakértője lenne. Ezért a tanulmány egyik legfőbb célja, hogy egyszerre nyújtson támpontot a módszertani háttér iránt érdeklődő elméleti, és a felhasználásra törekvő, gyakorlati problémákkal foglalkozó kutatóknak.

Tárgyalásunk menete a következő. A 2. fejezetben bemutatjuk a páros összehasonlításra alapuló rangsorolás egy modelljét, definiáljuk a feladat megoldására szolgáló pontozási eljárást, és ezek bizonyos tulajdonságait. A 3. fejezet – axiomatikus megközelítésből – áttekintést ad az irodalomban java-

solt módszerekről, és részletesen tárgyalja az invariáns, fair bets, PageRank, internal slackening, valamint a pozíciós erő eljárásokat. Kitérünk az alkalmazásuk mögött meghúzódó gondolatokra, az ismert karakterizációkra, és a módszerek vitatható pontjaira. A modell felhasználásának területeit a 4. fejezet ismerteti, ahol néhány tanácsot is megfogalmazunk a módszertan gyakorlati alkalmazása iránt érdeklődők számára. Eredményeinket és a további kutatási irányokat az 5. fejezetben összegezzük.

## 2 A rangsorolási probléma és megoldása

A feladat megoldásához szükségünk lesz a vizsgált alternatívák (objektumok) halmazára, azok páros összehasonlításainak eredményeire, illetve egy olyan eljárásra, mely a fentiek ismeretében megadja az objektumok sorrendjét. Az első alfejezet a probléma definiálásával, a második a rangsorolás végrehajtásával foglalkozik, míg a harmadik az utóbbira használt eljárásokkal kapcsolatos tulajdonságokat fogalmaz meg.

### 2.1 A páros összehasonlítási mátrix

Az alternatívák halmazát jelölje  $N = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . A rendelkezésre álló információkat egy  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$  páros összehasonlítási mátrixba tömörítjük.<sup>2</sup> Ennek  $r_{ij}$  eleme az  $X_i$  alternatíva  $X_j$  elleni teljesítményét,  $r_{ij} + r_{ji}$  pedig az összehasonlítások számát mutatja, így  $r_{ij}/(r_{ij} + r_{ji})$  egy lehetséges értelmezése, hogy az előbbi ekkora eséllyel bizonyul jobbnak az utóbbinál. A mátrix főátlójában szereplő elemek a feladat megoldása szempontjából lényegtelenek. Ez a modell a következő jelenségek leírására alkalmas:

1. Döntetlenek lehetősége ( $r_{ij} = r_{ji}$ ): a döntéshozó nem képes különbséget tenni két alternatíva között;
2. Eltérő preferenciaintenzitás ( $r_{ij} \geq 0$  tetszőleges): a páros összehasonlítások eredménye nem binárisan (jobb/rosszabb) adott, hanem például gyakorisági alapon – az  $X_i$  alternatíva az esetek 80%-ában bizonyult jobbnak  $X_j$ -nél;
3. Hiányzó összehasonlítás ( $r_{ij} + r_{ji} = 0$ ): két alternatíva egymás elleni teljesítménye ismeretlen;
4. Többszörös összehasonlítás ( $r_{ij} + r_{ji} > 1$ ): egyes alternatívapárok viszonya több alkalommal került meghatározásra (például két teniszező több mérkőzést játszott egymással), esetleg különbözhet az összehasonlítások megbízhatósága;

Ugyanakkor két lehetőséget nem képes megjeleníteni:

<sup>2</sup>Ezt az angol terminológia a *paired comparison matrix* névvel illeti, ami nem ugyanaz, mint az AHP (Analytic Hierarchy Process) módszertanban használt páros összehasonlítás mátrix, azaz *pairwise comparison matrix* (Saaty, 1980).

1. Nem szimmetrikus eredmények: két alternatíva páros összehasonlításakor nem lehet eltekinteni ennek irányától.
2. „Önmagával” vett összehasonlítás.

A fenti esetek egy gráf segítségével szemléltethetők, melynek minden csúcsa egy-egy alternatívának, az élek pedig a köztük levő összehasonlításoknak felelnek meg. Amennyiben az előzőekben említett komplikációk egyike sem áll fenn, olyan teljes irányított gráfról beszélhetünk, ahol az élek irányítása a szigorú preferenciarelációt írja le. Döntetlenek esetén két csúcs között oda-vissza irányú élek keletkezhetnek. Különböző intenzitások mellett súlyozott irányított gráfot kapunk. Hiányzó párok esetén a gráf nem teljes. Többszörös összehasonlításoknál két csúcsot több (akár súlyozott) él is összeköthet. Nem szimmetrikus eredmények következtében a két csúcs közötti élek súlya eltérő lehet attól függően, melyik irányba mutatnak, míg az „önmagával” vett összehasonlítások hurokélekként jelenhetnek meg.

A nem szimmetrikus eredmények beépítése meglehetősen nehéz és ritka, bár jól ismert, hogy például a sportban komoly jelentősége lehet. A fenti keret szinte az összes, szakirodalomban ismert páros összehasonlítás definíciót magában foglalja, talán az egyetlen kivétel a súlyozott irányított gráf esete, mely megengedi az egyes csúcsokhoz tartozó pozitív súlyú hurokéleket (Hering et al., 2005). A 4. fejezetben bemutatott tudományometriai problémákra ez nem feltétlenül igaz, ott az önhivatkozásoknak is lehet jelentősége.

**2.1. Definíció.** A rangsorolási probléma egy  $(N, \mathbf{R})$  pár, ahol  $N = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  az alternatívák halmaza,  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  pedig a páros összehasonlítási mátrix.

Bizonyos esetekben, elsősorban a könnyebb értelmezés okán célszerű lehet a páros összehasonlítások számát és kimenetelét egyaránt magába foglaló  $\mathbf{R}$  mátrix két részre bontása: ekkor azok kimenetele a ferdén szimmetrikus  $\mathbf{A}$  eredménymátrixba ( $\mathbf{A}^\top = -\mathbf{A}$ ) kerül az  $a_{ij} = 2(r_{ij} - r_{ji})$  transzformációval, míg az összehasonlítások számát a szimmetrikus  $\mathbf{M}$  mérkőzésmátrix tartalmazza, tehát  $m_{ij} = r_{ij} + r_{ji}$  (Csató, 2013b). Az így kapott  $\mathbf{A}$  eredménymátrix azonos a Saaty-féle páros összehasonlítás mátrixszal (Saaty, 1980), amennyiben az utóbbi elemenkénti logaritmusait vesszük (Csató, 2012). A 4. fejezetben tárgyalt alkalmazások egy része ezt a formalizmust használja (Csató, 2012; Temesi et al., 2012).

Az  $\mathbf{M}$  mérkőzésmátrix kölcsönösen egyértelműen megfeleltethető a rangsorolási problémához tartozó  $G = (V, E)$  összehasonlítási (multi)gráffal, ahol a csúcsok halmaza  $V = N$ , míg az  $E$  élhalmaz úgy kapható, hogy az  $X_i$  és  $X_j$  csúcs közötti élek száma  $m_{ij} = m_{ji}$ .

## 2.2 Rangsorolás

Az  $\mathbf{R}$  páros összehasonlítási mátrix definiálása után a következő feladatot az alternatívák sorba rendezése jelenti. A rangsor egy, az  $N$  halmazon értelmezett teljes, tranzitív és reflexív bináris reláció. Egyfajta információtömörítés

válik szükségessé: az  $n$  objektum  $n(n-1)/2$  kölcsönös „távolságát” kellene megfelelően leírni a megoldásként kapott rangsorból adódó  $n-1$  különbséggel. Ez  $n=2$  esetén tökéletesen reprodukálható, két alternatíva esetén a páros összehasonlítás kimenetele minden információt megad a sorrendről. Ha viszont ezek száma legalább három, már felmerülhet a Condorcet-paradoxonból ismerős intranzitivitás problémája, amikor  $X_1$  jobbnak bizonyul  $X_2$ -nél,  $X_2$  megveri  $X_3$ -at,  $X_3$  viszont legyőzi  $X_1$ -et.

Moulin (1986) tanácsát követve célszerű elkülönítve vizsgálni a győztes megadásának, illetve egy teljes rangsor felállításának kérdését. Bár Bouyssou (2004) kísérletet tett a két megközelítés egyesítésére a legjobb alternatíva kiválasztásának sorozatos alkalmazása révén, eredményei arra utalnak, hogy az így definiált eljárások szinte mindig megsértenek valamilyen monotonitási tulajdonságot, ezért a probléma megoldására inkább a közvetlen rangsoroló eljárások ajánlottak.

Ezek szintén két csoportba sorolhatók: egy  $f(\mathbf{R}) \in \mathbb{R}^n$  függvény formájában adott *pontozási módszer*, vagy a rangsorolás diszkrét optimalizálási problémaként való felfogása (Kemeny, 1959; Slater, 1961). Az utóbbi megközelítés gyakran matematikai szempontból szép és mély kombinatorikus kérdésekhez, illetve bonyolult algoritmikus problémákhoz vezet (Hudry, 2009), de több szempontból kifogásolható:

1. Nem teljes (hiányos) összehasonlítások esetén a lineáris rendezést gyenge rendezéssel célszerű felváltani, de még ez sem biztosítja egyes elvárható tulajdonságok, például az önkonzisztens monotonitás (self-consistent monotonicity) teljesülését (Chebotarev és Shamis, 1997);
2. A kapott sorrend gyakran nem egyértelmű, többszörös optimumok létezhetnek. Ez nem csak a kisméretű, kevés alternatívát tartalmazó esetekben képzelhető el, a gyakorlati alkalmazások során is komoly problémát jelent (Pasteur, 2010);
3. Nehéz az ilyen módszerek normatív tulajdonságainak vizsgálata (Bouyssou, 2004).

A fenti problémák ellenére kétségtelenül vonzó egy valamilyen szempontból optimális megoldás megadása. A bináris, csak győzelmeket és vereségeket megengedő esetben például kézenfekvő választás azon összehasonlítások számának minimalizálása, ahol a rangsorban hátrébb található alternatíva jobbnak bizonyult egy nála előkelőbb helyen szereplőnél; ez a *minimum violations* néven ismert (Ali et al., 1986).

## 2.3 Pontozási eljárások tulajdonságai

### 2.3.1 Megoldhatóság

Egyelőre tekintsük az általános esetet, amikor az  $\mathbf{R}$  páros összehasonlítási mátrixra semmilyen megkötés sincs. Jelölje  $\mathcal{R}$  a véges  $N \subseteq \mathbb{N}$  objektumhalmazzal rendelkező rangsorolási problémák osztályát.

**2.2. Definíció.** A pontozási eljárás egy  $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  függvény.<sup>3</sup>

Az  $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  és  $g : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  pontozási módszerek *arányosak*,  $f(\mathbf{R}) \propto g(\mathbf{R})$ , ha minden  $\mathbf{R} \in \mathcal{R}$  esetén  $\exists \kappa > 0 : f(\mathbf{R})_i = \kappa g(\mathbf{R})_i$  minden  $X_i \in N$ -re.

Bizonyos esetekben reménytelennek tűnik egy teljes rangsor felállítása: amennyiben két objektum között sehogyan sem található kapcsolat, akkor lehetetlen megállapítani sorrendjüket.<sup>4</sup> A megoldás egyértelműsége azért kívánatos, mert a döntéshozók nehezen tudnának értelmezni több, egymástól eltérő sorrendet – bár a fejezet elején említett információömörítési értelmezés alapján  $n$  növekedésével egyre nagyobb valószínűséggel fordulhat elő, hogy az alternatívák teljesítménye nem mérhető egyetlen dimenzióban. Ez az érv szintén a diszkrét optimalizálási problémaként történő kezelés ellen szól.

A pontozási eljárások által szolgáltatott egyértelmű megoldás létezése tekintetében alapvetően három előfeltételt különböztethetünk meg:<sup>5</sup>

1. Az  $\mathbf{R}$  páros összehasonlítási mátrix irreducibilitása. Ekkor az  $r_{ij}/(r_{ij} + r_{ji})$  hányados valószínűségi interpretációjában egy tetszőleges objektum pozitív eséllyel győzheti le a többiek bármelyikét, amennyiben a nem összehasonlítottak között tetszőleges objektumláncon keresztül teremthető kapcsolat. Ez a szükséges és elégséges feltétel a maximum likelihood (Zermelo, 1929; Bradley és Terry, 1952), az invariáns és a fair bets módszer (Daniels, 1969; Moon és Pullman, 1970) esetén.
2. Az  $\mathbf{M}$  mérkőzésmátrix irreducibilitása, azaz két tetszőleges objektum közvetlenül vagy közvetve összehasonlítható. Más szavakkal, a  $G$  összehasonlítási (multi)gráfnak összefüggőnek kell lennie. Ez az előzőnél gyengébb feltétel szükséges és elégséges a legkisebb négyzetek módszer megoldásának egyértelműségéhez.
3. Az eljárás az egész  $\mathcal{R}$  halmazon jól definiált. Ez a helyzet a pontszám és az általánosított sorösszeg módszereknél, a maximum likelihood kiterjesztett változatánál (Conner és Grant, 2000), vagy a PageRanknél (Brin és Page, 1998).

A három közül intuitív alapon a második tűnik legvonzóbbnak. Egyrészt, ha két alternatíva egyáltalán nem hasonlítható össze, akkor alaptalannak tűnik bármit is mondani a relatív teljesítményükről. Célszerűbb a  $G$  összehasonlítási (multi)gráf összefüggő komponenseit kiválasztani, és a rangsorolást csak ezeken elvégezni. Másrészt, az irreducibilitás megkövetelése aránytalanul korlátozza az egymással összevethető elemek halmazát. Bizonyos mértékben az e halmazon értelmezett pontozási eljárások is általánosíthatók a következő szakaszban bemutatott eljárással (Zermelo, 1929).

<sup>3</sup>A meghatározás némileg pontatlan, mert  $n$  értéke függ a konkrét  $(N, \mathbf{R})$  rangsorolási problémától, azonban nem akartuk tovább bonyolítani a jelöléseket.

<sup>4</sup>Gondoljunk például arra, hogyan hasonlítanánk össze két ország labdarúgó bajnokságának győzteseit, ha nem lennének nemzetközi versenysorozatok, a Bajnokok Ligája és az Európa Liga.

<sup>5</sup>Nem említve a játékelméletben javasolt módszereket, melyek általában a digráfok  $\mathcal{D}$  halmazán értelmezettek.



### 2.3.2 A karakterizációhoz szükséges axiómák

Az invariáns és fair bets módszerek tárgyalásához szükséges az értelmezési tartomány megszorítása.

Azt mondjuk, hogy  $X_i$  közvetve vagy közvetlenül legyőzi  $X_j$ -t, azaz  $X_i \rightarrow X_j$ , ha létezik olyan  $X_i = X_{k_0}, X_{k_1}, \dots, X_{k_T} = X_j$  véges sorozat, melyre  $\prod_{t=0}^{T-1} a_{k_t, k_{t+1}} > 0$ .  $X_i$  és  $X_j$  azonos ligába tartozik, ha  $X_i \leftrightarrow X_j$ , vagyis  $X_i \rightarrow X_j$  és  $X_j \rightarrow X_i$  is fennáll.  $\leftrightarrow$  ekvivalencia-reláció, az  $N$  alternatívahalmaz egy partícióját adja (Slutzki és Volij, 2005). Az ekvivalenciaosztályok ligák, az  $X_i$  objektumot tartalmazó liga jelölése  $[X_i]$ . Az  $(N, \mathbf{R})$  rangsorolási probléma pontosan akkor áll egyetlen ligából, ha az  $\mathbf{R}$  mátrix irreducibilis. Az ilyen problémák halmaza legyen  $\mathcal{R}_N$ .

Az  $X_i$  objektum ligája erősebb  $X_j$ -énél, tehát  $[X_i] \rightarrow [X_j]$ , ha  $X_i \rightarrow X_j$ , miközben  $X_j \not\rightarrow X_i$ . Két liga összehasonlíthatatlan, ha egyik sem erősebb a másiknál, így egy ligákon értelmezett irreflexív, tranzitív, és nem teljes relációt kapunk. A későbbiekben szükség lesz még egy osztályra, amikor a probléma több ligából is állhat, de ezek között létezik egyetlen legerősebb (unique top cycle). Ezen feladatok halmaza legyen  $\mathcal{R}_1$ . Nyilvánvalóan  $\mathcal{R}_N \subseteq \mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}$ . Minden  $X_i \in N$ -re az adott objektumot tartalmazó rész rangsorolási probléma  $([X_i], \mathbf{R}_{[X_i]})$ , ahol  $\mathbf{R}_{[X_i]}$  az  $\mathbf{R}$  mátrix  $[X_i]$ -beli objektumokra korlátozott almátrixa.

**2.3. Definíció.** Egy  $(N, \mathbf{R})$  rangsorolási probléma kiegyensúlyozott (balanced), ha  $r_{i*} = r_{*i}$  minden  $X_i \in N$ -re (Slutzki és Volij, 2006).

**2.4. Definíció.** Egy  $(N, \mathbf{R})$  kiegyensúlyozott rangsorolási probléma szabályos (regular), amennyiben  $r_{i*} = r_{j*}$  minden  $X_i, X_j \in N$ -re (Slutzki és Volij, 2006).

Tehát egy sportbajnokság kiegyensúlyozott, ha minden játékos győzelmeinek és veréseinek száma megegyezik. Ha ez az érték mindegyiküknél azonos, akkor a probléma szabályos. Slutzki és Volij (2005) ezt a tulajdonságot erősen kiegyensúlyozott (strongly balanced) néven említi.

**2.1. Példa** [Slutzki és Volij (2005) alapján]. Legyen  $N = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$  és

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A rangsorolási probléma három ligából áll:  $[X_1] = \{X_1\}$ ,  $[X_2] = [X_3] = [X_4] = \{X_2, X_3, X_4\}$ , valamint  $[X_5] = \{X_5\}$ , tehát nem létezik egyetlen legerősebb liga, a probléma nem  $\mathcal{R}_1$ -beli. Az  $[X_1]$  és  $[X_5]$  ligák erősebbek  $[X_2]$ -nél, míg  $[X_1]$  és  $[X_5]$  nem összehasonlítható. Az  $([X_2], \mathbf{R}_{[X_2]}) \in \mathcal{R}_N$

rész rangsorolási problémában

$$\mathbf{R}_{[X_2]} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

ahol a páros összehasonlítási mátrix már irreducibilis. Az  $(\{X_2, X_3, X_4\}, \mathbf{R}_{[X_2]})$  rangsorolási probléma kiegyensúlyozott, hiszen minden objektum ugyanannyi győzelemmel és vereséggel rendelkezik, viszont nem szabályos, mert ezek száma (sorrendben) 2, 4 és 3.

**2.1. Lemma.** Egy  $(N, \mathbf{R})$  rangsorolási probléma akkor és csak akkor kiegyensúlyozott, ha minden ligája kiegyensúlyozott és nem összehasonlítható (Slutzki és Volij, 2005).

A következőkben az értelmezési tartományt az irreducibilis  $\mathbf{R}$  páros összehasonlítási mátrixszal jellemezhető rangsorolási problémák  $\mathcal{R}_N$  osztályára szűkítjük.

**2.5. Definíció.** Egy  $f : \mathcal{R}_N \rightarrow \mathbb{R}^n$  pontozási módszer *egységes* (uniform), ha minden  $(N, \mathbf{R}) \in \mathcal{R}_N$  szabályos rangsorolási problémára  $f_i(\mathbf{R}) = 1/n$  minden  $X_i \in N$  esetén (Slutzki és Volij, 2006).

Az egységesség szerint, amennyiben minden játékos ugyanannyi győzelemmel és vereséggel rendelkezik, akkor a rangsorban sem teszünk köztük különbséget.

**2.6. Definíció.** Egy  $f : \mathcal{R}_N \rightarrow \mathbb{R}^n$  pontozási módszer *erősen egységes* (strongly uniform), ha minden  $(N, \mathbf{R}) \in \mathcal{R}_N$  kiegyensúlyozott rangsorolási problémára  $f_i(\mathbf{R}) = 1/n$  minden  $X_i \in N$  esetén (Slutzki és Volij, 2006).

Ez a feltétel szigorúbb, mint az egységesség. Az alternatívák megkülönböztethetetlenségének akkor is fenn kell állnia, ha a pozitív és negatív kimenetek aránya azonosan egy.

**2.7. Definíció.** Egy  $f : \mathcal{R}_N \rightarrow \mathbb{R}^n$  pontozási módszer *közömbös*<sup>6</sup> (neutral), ha minden  $(N, \mathbf{R}) \in \mathcal{R}_N$  szabályos rangsorolási problémára és olyan  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  szimmetrikus mátrixra, amelynek minden diagonális eleme 0 és  $(N, \mathbf{R} + \mathbf{Q}) \in \mathcal{R}_N$  is rangsorolási probléma,  $f_i(\mathbf{R}) = 1/n$  fennállásakor  $f_i(\mathbf{R} + \mathbf{Q}) = 1/n$  (Slutzki és Volij, 2006).

Vagyis, ha egy szabályos feladatban az alternatívák értékelése teljesen azonos, és ezt úgy módosítjuk, hogy az új összehasonlításoknak minden objektum éppen a felét nyeri meg, akkor továbbra is egyenlően lesznek rangsorolva.

**2.1. Állítás.** Egy  $f : \mathcal{R}_N \rightarrow \mathbb{R}^n$  pontozási módszer akkor és csak akkor erősen egységes, ha egységes és közömbös (Slutzki és Volij, 2006).

<sup>6</sup>A *neutral* kifejezés szokásos magyar fordítása semleges. Itt azért nem ezt használom, mert a rangsorolási irodalomban számos más helyen különböző jelentéssel jelenik meg ez a fogalom (Chebotarev és Shamis, 1999), és a magyarul célszerűnek tartottam eltérően elnevezni ezeket.

**2.8. Definíció.** Egy  $f : \mathcal{R}_N \rightarrow \mathbb{R}^n$  pontozási módszer *gyengén additív* (weakly additive), ha minden  $(N, \mathbf{R}) \in \mathcal{R}_N$  szabályos rangsorolási problémára és olyan  $\mathbf{Q}$  szimmetrikus mátrixra, amelynek minden diagonális eleme 0 és  $(N, \mathbf{R} + \mathbf{Q}) \in \mathcal{R}_N$  is rangsorolási probléma,  $f_i(\mathbf{R})$  és  $(r_{i*})$  arányosságából  $[f_i(\mathbf{R}) \propto (r_{i*})]$  következik  $f_i(\mathbf{R} + \mathbf{Q})$  és  $(r_{i*} + q_{i*})$  arányossága  $[f_i(\mathbf{R} + \mathbf{Q}) \propto (r_{i*} + q_{i*})]$  (Slutzki és Volij, 2006).

A gyenge additivitás szerint, ha egy szabályos rangsorolási problémában az alternatívák értékelése a győzelmeik számával azonos, és néhány párosításban új, döntetlen kimenetelű mérkőzéseket játszanak le, akkor azok relatív viszonyát továbbra is a győzelmek aránya határozza meg.

**2.9. Definíció.** Egy  $f : \mathcal{R}_N \rightarrow \mathbb{R}^n$  pontozási módszer *invariáns a referencia intenzitásra* (invariant to reference intensity), ha minden  $(N, \mathbf{R}) \in \mathcal{R}_N$  rangsorolási problémára és  $\mathbf{\Lambda} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  pozitív diagonális elemekkel rendelkező diagonális mátrixra  $f(\mathbf{R}) = f(\mathbf{R}\mathbf{\Lambda})$  (Slutzki és Volij, 2006).

A referencia intenzitásra való invariancia értelmében az objektumok vereségeinek arányos (de a vizsgált alternatívától függő) változtatása nem befolyásolja azok sorrendjét. Például weblapok rangsora nem változik, amennyiben valamelyik oldal az összes, általa megadott referencia számát konstansszorosára változtatja.

**2.10. Definíció.** Egy  $f : \mathcal{R}_N \rightarrow \mathbb{R}^n$  pontozási módszer *fordítottan arányos a vereségekkel* (inversely proportional to losses), ha minden  $(N, \mathbf{R}) \in \mathcal{R}_N$  kiegyensúlyozott rangsorolási problémára és  $\mathbf{\Lambda} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  pozitív diagonális elemekkel rendelkező diagonális mátrixra  $f_i(\mathbf{R}\mathbf{\Lambda})/f_j(\mathbf{R}\mathbf{\Lambda}) = \lambda_{jj}/\lambda_{ii}$  minden  $X_i, X_j \in N$  esetén (Slutzki és Volij, 2006).

A vereségekkel való fordított arányosság azt követeli meg, hogy egy, az alternatívák közötti sorrend meghatározására alkalmatlan kiegyensúlyozott rangsorolási problémában a vereségek számát konstansszorosára változtatva az objektumok értékelése ezzel fordított arányban változik. Egyetlen pontozási eljárás sem lehet egyszerre invariáns a referencia intenzitásra és fordítottan arányos a vereségekkel, hiszen a vereségek számának arányos módosítása eltérő következményekkel jár a két tulajdonság esetén, bár utóbbi feltételei szigorúbbak.

### 2.3.3 Az értelmezési tartományt kiterjesztő tulajdonságok

A következő tulajdonságok lehetővé teszik az irreducibilis páros összehasonlítási mátrixot eredményező,  $\mathcal{R}_N$ -beli rangsorolási problémák halmazán értelmezett pontozási módszerek kiterjesztését a teljes  $\mathcal{R}$  osztályra.

Legyen  $\mathcal{P}_N$  az  $N$ -en értelmezett lehetséges rangsorok, azaz reflexív és tranzitív (de nem feltétlenül teljes) bináris relációk halmaza. A *rangsorolási módszer* egy  $\succeq : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{P}_N$  függvény, minden  $(N, \mathbf{R}) \in \mathcal{R}$  rangsorolási problémához egy  $N$ -en értelmezett  $\succeq_{\mathbf{R}}$  rangsort rendel. Az egyszerűség kedvéért, ha ez nem okoz félreértést, a feladatra utaló  $\mathbf{R}$  alsó indexet elhagyjuk.  $\succeq$  egyben meghatározza az alábbi relációkat:

1.  $X_i \succ X_j$ , azaz  $X_i$  jobb  $X_j$ -nél, ha  $X_i \succeq X_j$  és  $X_j \not\succeq X_i$ ;
2.  $X_i \sim X_j$ , azaz  $X_i$  és  $X_j$  azonos erősségű, ha  $X_i \succeq X_j$  és  $X_j \succeq X_i$ ;
3.  $X_i \perp X_j$ , azaz  $X_i$  és  $X_j$  nem összehasonlítható, ha  $X_i \succeq X_j$  és  $X_j \succeq X_i$  egyike sem áll fenn.

*2.1. Megjegyzés.* Minden  $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  pontozási eljárás meghatároz egy  $\succeq^f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{P}_N$  rangsorolási módszert az  $f(\mathbf{R})_i \geq f(\mathbf{R})_j \Rightarrow X_i \succeq^f X_j$  definícióval. A kapott rangsor egyértelmű és teljes,  $X_i \perp^f X_j$  nem lehetséges. Arányos pontozási eljárások ugyanazt a rangsorolási módszert generálják.

**2.11. Definíció.** Egy  $\succeq \in \mathcal{P}_N$  rangsor *egyenletes* (flat), ha  $X_i \sim X_j$  minden  $X_i, X_j \in N$ -re (Slutzki és Volij, 2005).

**2.12. Definíció.** Egy  $\succeq \in \mathcal{P}_N$  rangsor *kvázi egyenletes* (quasi-flat), ha  $X_i \sim X_j$  vagy  $X_i \perp X_j$  minden  $X_i, X_j \in N$ -re (Slutzki és Volij, 2005).

**2.13. Definíció.** Egy  $\succeq : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{P}_N$  rangsorolási módszer *domináns* (dominant), ha minden  $(N, \mathbf{R}) \in \mathcal{R}$  rangsorolási problémára és  $X_i, X_j \in N$  objektumra  $[X_i] \rightarrow [X_j]$  esetén  $X_i \succeq_{\mathbf{R}} X_j$  (Slutzki és Volij, 2005).

Eszerint egy erősebb ligába tartozó objektum biztosan megelőzi az összes gyengébb ligában szereplőt.

**2.14. Definíció.** Egy  $\succeq : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{P}_N$  rangsorolási módszer *kvázi teljes* (quasi-complete), ha minden  $(N, \mathbf{R}) \in \mathcal{R}$  rangsorolási problémára és  $X_i, X_j \in N$  objektumra  $X_i \not\prec X_j$  és  $X_j \not\prec X_i$  akkor és csak akkor, ha  $X_i \perp_{\mathbf{R}} X_j$  (Slutzki és Volij, 2005).

Vagyis két objektum pontosan akkor nem hasonlítható össze, ha két, az erősebb reláció szerint egymással kapcsolatban nem álló ligában találhatók. Amennyiben legalább az egyik közvetve legyőzte a másikat, már sorrendbe kell állítani őket. A dominancia és a kvázi teljesség megkövetelésével a reducibilitásért felelős ligák rendezése egyértelműen elvégezhető.

A harmadik axióma egy újabb lépést tesz abba az irányba, hogy miként kell rangsorolni egy adott liga szereplőit. Egy adott  $\succeq_{\mathbf{R}}$  rangsor esetén jelölje  $\succeq_{\mathbf{R}} | [X_i]$  annak az  $[X_i]$  halmazra való szűkítését.

**2.15. Definíció.** Egy  $\succeq : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{P}_N$  rangsorolási módszer *szétválasztható* (separability), ha minden  $(N, \mathbf{R}) \in \mathcal{R}$  rangsorolási problémára és  $X_i \in N$  objektumra  $\succeq_{\mathbf{R}} | [X_i] = \succeq_{\mathbf{R}[X_i]}$  (Slutzki és Volij, 2005).

Tehát egyfajta függetlenséget tételezünk fel: az adott ligában érvényes rangsor nem függ a többi liga lététől, elhelyezkedésétől. Ennek megfelelően egy domináns, kvázi teljes és szétválasztható rangsorolási módszert elegendő az irreducibilis rangsorolási problémák  $\mathcal{R}_1$  osztályán definiálni, ezt követően természetes módon kiterjeszthető a teljes  $\mathcal{R}$  halmazra (Slutzki és Volij, 2005).

Adott  $(N, \mathbf{R}) \in \mathcal{R}$  rangsorolási probléma és  $\sigma : N \rightarrow N$  permutáció esetén legyen  $(N, \sigma \mathbf{R})$  az a rangsorolási probléma, melyben  $(\sigma \mathbf{R})_{ij} = \mathbf{R}_{\sigma(i), \sigma(j)}$ .

**2.16. Definíció.** Egy  $\succeq: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{P}_N$  rangsorolási módszer *névtelen* (anonymity), ha minden  $(N, \mathbf{R}) \in \mathcal{R}$  rangsorolási problémára és  $\sigma: N \rightarrow N$  permutációra  $\sigma(i) \succeq_{\mathbf{R}} \sigma(j)$  esetén  $i \succeq_{\sigma\mathbf{R}} j$  (Slutzki és Volij, 2005).

A névtelenség vagy anonimitás a szavazáselméletben gyakran használt tulajdonság, amely azt írja elő, hogy a módszer eredménye ne függjön a szavazók, alternatívák, játékosok stb. nevéől.

A következő axióma két, azonos objektumhalmazzal rendelkező probléma aggregálásával kapcsolatos. Az  $(N, \mathbf{R})$  és  $(N, \mathbf{Q})$  rangsorolási problémák összegét jelölje  $(N, \mathbf{R} + \mathbf{Q})$ .

**2.17. Definíció.** Egy  $\succeq: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{P}_N$  rangsorolási módszer teljesíti *kvázi egyenletesség őrzés* (quasi-flatness preservation) axiómát, ha minden  $(N, \mathbf{R}) \in \mathcal{R}$  és  $(N, \mathbf{Q}) \in \mathcal{R}$  rangsorolási problémára, ahol  $\succeq_{\mathbf{R}}$  kvázi egyenletes,  $\succeq_{\mathbf{Q}}$  akkor és csak akkor kvázi egyenletes, ha  $\succeq_{\mathbf{R}+\mathbf{Q}}$  kvázi egyenletes (Slutzki és Volij, 2005).

Tehát, ha két különböző probléma egyikében sem tehető különbség az alternatívák között (azaz egyenlően rangsoroltak vagy nem összehasonlíthatók), akkor ez az aggregált problémára is igaz. Megfordítva, amennyiben legalább az egyik rangsorolási problémában létezik szigorú reláció két objektum között, akkor ez a kettő összegére szintén teljesülni fog.

Az utolsó, hatodik tulajdonság már ismerős lehet 2.3.2. alfejezetből.

**2.18. Definíció.** Egy  $\succeq: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{P}_N$  rangsorolási módszer teljesíti *negatív reakció a vereségekre* (negative responsiveness to losses) axiómát, ha minden  $(N, \mathbf{R}) \in \mathcal{R}_1$  irreducibilis rangsorolási problémára, ahol  $\succeq_{\mathbf{R}}$  egyenletes, és  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_i)_{i \in N}$  diagonális mátrixra, ahol  $(\lambda_i)_{i \in N}$  pozitív és  $(N, \mathbf{R}\mathbf{\Lambda}) \in \mathcal{R}$ ,  $i \succeq_{\mathbf{R}\mathbf{\Lambda}} j$  akkor és csak akkor, ha  $\lambda_i < \lambda_j$  (Slutzki és Volij, 2005).

A negatív reakció alapján, ha egy egyenletes rangsort eredményező páros összehasonlítási mátrixban az alternatívák vereségeit egy-egy pozitív konstanssal megszorozzuk, a kialakuló sorrendet fordított arányosság révén ennek nagysága fogja meghatározni. Az ötlet azon alapul, hogy a módosítás nem befolyásolja sem egy objektum győzelmeinek számát, sem pedig vereségeinek eloszlását. Azaz, amennyiben a módszer egy adott objektum győzelmeit az őt megverő alternatívák között a vereségek arányában osztja szét, akkor az elszenvedett kudarcok  $\lambda_i$ -vel szorzása nem befolyásolja a többi objektum relatív rangsorát. Ennek megfelelően csak az  $X_i$  objektum relatív pozíciója változik, mégpedig a szorzó konstanssal fordított arányban.

### 2.3.4 Manipuláció és megfordíthatóság

Számos olyan helyzet van, ahol a rangsorolandó objektumok maguk is képesek befolyásolni a megfigyelt eredményeket. Ilyenkor érdemes megvizsgálni, vajon a rangsorolási módszer tényleg minél jobb teljesítmény elérésére ösztönzi-e a résztvevőket. A sportban például szokatlan, ha egy játékos szándékosan vereségre játszik; elrettentő példaként szolgálhat a londoni olimpia női páros tollaslabdaversenye (Pauly, 2013). A tudományos életben szintén nemkívánatos

következményekkel járhat, amikor egy kutató vagy folyóirat a kedvezőbb tudományometriai mutatók megszerzése érdekében befolyásolni próbálja az általa megadott hivatkozásokat vagy a cikkek terjedelmét. Itt is felmerült már a manipuláció gyanúja (Smith, 1997). Az önhivatkozásoktól eltekintve ennek legegyszerűbb esete, a további, felesleges referenciák elhelyezése, melyek utólagos ellenőrzése, felülvizsgálata meglehetősen nehézkesnek tűnik.

Tekintsük azt az  $\mathbf{R}$  páros összehasonlítási mátrixot, ahol  $r_{ij}$  a  $X_j$  folyóirat  $X_i$ -re való hivatkozásait adja meg (hiszen egy addicionális referencia az  $X_i$  újság számára kedvező). Az önhivatkozásokkal nem foglalkozunk, a mátrix főátlójának nincs jelentősége. Azt mondjuk, hogy egy rangsorolási eljárás monoton, ha egy addicionális hivatkozás nem javítja az ezt megadó folyóirat helyezését és a másikat sem rontja.

**2.19. Definíció.** Legyen  $(N, \mathbf{R}) \in \mathcal{R}$  és  $(N, \mathbf{R}') \in \mathcal{R}$  két rangsorolási probléma, melyekre  $r'_{ij} > r_{ij}$  valamely  $(X_i, X_j)$  párra, de  $r_{kl} = r'_{kl}$  minden  $(X_k, X_l) \neq (X_i, X_j)$  esetén. Egy  $\succeq: \mathcal{R} \rightarrow \cup_{N \subseteq \mathcal{N}} \mathcal{P}_N$  rangsorolási módszer *gyengén (erősen) monoton*, ha minden  $X_k \in N$ -re  $X_i \succeq_{\mathbf{R}} X_k$  esetén  $X_i \succeq_{\mathbf{R}'} X_k$  ( $X_i \succ_{\mathbf{R}'} X_k$ ) és minden  $X_k \in N$ -re  $X_k \succeq_{\mathbf{R}} X_j$  esetén  $X_k \succeq_{\mathbf{R}'} X_j$  ( $X_k \succ_{\mathbf{R}'} X_j$ ) (Kóczy és Strobel, 2010).

Ehhez hasonló monotonitási tulajdonságokat már korábban is megfogalmaztak, ezek azonban csak az első,  $X_i \succeq_{\mathbf{R}'} X_k$  ( $X_i \succ_{\mathbf{R}'} X_k$ ) reláció fennállását követelték meg az összehasonlítások számának változatlanlansága, állandó  $r_{ij} + r_{ji}$  mellett (Rubinstein, 1980; Bouyssou, 1992).

Az irányított gráfok esetén természetes módon merül fel az a kérdés, hogy mi történik a rangsorral, amikor minden páros összehasonlítás irányát megfordítjuk. Ekkor érthető az alábbi feltétel megkövetelése.

**2.20. Definíció.** Legyen  $(N, \mathbf{R})$  egy tetszőleges rangsorolási probléma. Egy  $\succeq: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{P}_N$  rangsorolási módszer *megfordítható* (inversion), ha  $X_i \succeq_{\mathbf{R}} X_j$  fennállásakor  $X_i \preceq_{\mathbf{R}^\top} X_j$  minden  $X_i, X_j \in N$ -re (Chebotarev és Shamis, 1998).

Tehát az összes eredmény megfordításával az alternatívák sorrendje pontosan az ellenkezőjére változik. Chebotarev (1994, Property 7) ezt az axiómát némileg erősebb formában, pontozási eljárásokra megfogalmazva, *transzponálhatóság* (transposability) néven vezeti be.

A megfordíthatóság révén megadható egy tetszőleges pontozási módszer párja, amit a lineáris programozás analógiájára, Slutzki és Volij (2005) nyomán, az eljárás duáljának nevezünk.

**2.21. Definíció.** Egy tetszőleges  $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  pontozási eljárás *duálja* az a  $g: \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  pontozási módszer, amire  $g(\mathbf{R})_i = f(\mathbf{R}^\top)_i$  minden  $\mathbf{R} \in \mathcal{R}$  esetén.

Egy pontozási eljárás duáljának duálja éppen az eredeti módszer.

*2.2. Megjegyzés.* A  $g$  függvény szempontjából a kisebb érték a kedvezőbb, ezért az általa meghatározott  $\succeq^g: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{P}_N$  rangsorolási módszer:  $g(\mathbf{R})_i \leq g(\mathbf{R})_j \Rightarrow X_i \succeq^g X_j$ .

Vagyis egy pontozási eljárás által meghatározott  $\succeq^f$  rangsorolási módszer esetén értelmezhetjük ennek  $\succeq^g$  duálját is.

**2.1. Következmény.** Egy  $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  pontozási eljárás által generált  $\succeq^f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{P}_N$  rangsorolási módszer akkor és csak akkor megfordítható, ha minden  $(N, \mathbf{R}) \in \mathcal{R}$  esetén a  $g : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  duál pontozási eljárás által generált  $\succeq^g : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{P}_N$  rangsorolási módszerrel azonos eredményt ad.

**2.2. Állítás.** Az  $\succeq^f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{P}_N$  rangsorolási eljárás akkor és csak akkor megfordítható, ha  $\succeq^g : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  duál megfelelője is az.

*Bizonyítás.* Ha  $\succeq^f$  megfordítható, akkor  $X_i \succeq_{\mathbf{R}}^f X_j \Rightarrow X_j \preceq_{\mathbf{R}^\top}^f X_i$ , azaz  $f(\mathbf{R})_i \geq f(\mathbf{R})_j \Rightarrow f(\mathbf{R}^\top)_i \leq f(\mathbf{R}^\top)_j$  minden  $X_i, X_j \in N$  és  $\mathbf{R} \in \mathcal{R}$  mellett. Mivel  $f(\mathbf{R})_i \geq f(\mathbf{R})_j \Leftrightarrow g(\mathbf{R})_i \leq g(\mathbf{R})_j$  és  $f(\mathbf{R}^\top)_i \leq f(\mathbf{R}^\top)_j \Leftrightarrow g(\mathbf{R}^\top)_i \geq g(\mathbf{R}^\top)_j$ , valamint  $g(\mathbf{R})_i \leq g(\mathbf{R})_j \Rightarrow X_i \succeq^g X_j$ , ebből éppen a kívánt  $X_i \succeq_{\mathbf{R}}^g X_j \Rightarrow X_j \preceq_{\mathbf{R}^\top}^g X_i$  implikáció adódik minden  $X_i, X_j \in N$  és  $\mathbf{R} \in \mathcal{R}$  esetén. A másik irány abból következik, hogy a duál duálja az eredeti módszer.  $\square$

Egy pontozási eljárás által generált rangsorolási módszer monotonitása kapcsolatba hozható annak duálisával, ahogy azt az alábbi eredmény szemlélteti.

**2.3. Állítás.** Egy  $\succeq^f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{P}_N$  megfordítható rangsorolási eljárás akkor és csak akkor gyengén (erősen) monoton, ha  $\succeq^g : \mathcal{R} \rightarrow \cup_{N \subseteq N} \mathcal{P}_N$  duál megfelelője is az.

*Bizonyítás.* A 2.1. következményből adódik. A bizonyításban kulcsszerepet játszik  $\succeq^f$  megfordíthatósága, mert ez garantálja az

$$\left( X_i \succeq_{\mathbf{R}}^g X_k \Leftrightarrow X_i \succeq_{\mathbf{R}}^f X_k \right) \Rightarrow \left( X_i \preceq_{\mathbf{R}^\top}^f X_k \Leftrightarrow X_i \preceq_{\mathbf{R}}^g X_k \right)$$

és a többi, hasonló jellegű implikáció fennállását.  $\square$

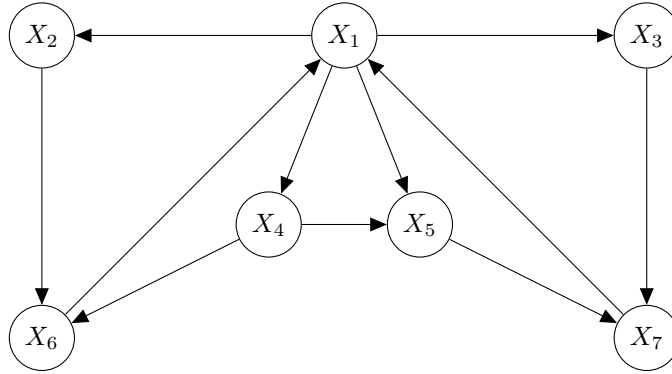
### 2.3.5 Önkonzisztens monotonitás

Az önkonzisztens monotonitás (self-consistent monotonicity) (Chebotarev és Shamis, 1997) azt követeli meg, hogy a rangsorban a nem rosszabb alternatívák ne hátrébb, a biztosan jobbak pedig szigorúan előrébb kerüljenek. Mikor lehet két objektum között ilyen kapcsolatot találni? Először is, a velük összehasonlított objektumok erejét kell összevetni, amit éppen a vizsgált rangsorolási módszer biztosít (erre utal az önkonzisztens elnevezés). Másrészt, az egyik objektum akkor lesz legalább olyan jó, mint a másik, ha nem rosszabb ellenfelei ellen legalább olyan eredményes volt, mint a másik. Előfordulhat, hogy ellenfelek egymással való összehasonlítása nem szükséges, mert a páros összehasonlítás kimenetele valamelyik extrémumot veszi fel, azaz  $r_{ij} > 0$  és  $r_{ji} = 0$  vagy fordítva.

A körülményes formális definíció helyett a részletek iránt érdeklődő olvasó figyelmébe ajánljuk a Chebotarev és Shamis (1999) és a González-Díaz et al.

(2014) cikkeket. Csató (2013c) magyar nyelven, részletesen tárgyalja ezt az axiómát. Az alábbi példa illusztrálja az önkonzisztens monotonitás által előírt feltételeket.

**2.2. Példa** (Chebotarev és Shamis, 1999). A feladat jobb áttekinthetősége érdekében célszerű az eredmények vizuális megjelenítése; az 1. ábrán szereplő gráfban az irányított élek a győztestől a vesztes felé haladnak. Ezt a megoldást a későbbiekben is használni fogjuk.



1. ábra. A 2.2. példa rangsorolási problémája

Az önkonzisztens monotonitás által megkövetelt néhány feltétel:

1.  $X_6 \succeq X_7 \Rightarrow X_2 \succeq X_3$  és  $X_7 \succeq X_6 \Rightarrow X_3 \succeq X_2$   
 $X_2$  és  $X_3$  egyaránt kikapott  $X_1$ -től, és azonos mértékben győzte le  $X_6$ -ot, illetve  $X_7$ -et. Ez azt jelenti, hogy az utóbbi objektumpár rangsorbeli viszonya egyértelműen eldönti az előbbiét.
2.  $X_6 \succeq X_7 \Rightarrow X_4 \succ X_5$   
 $X_4$ -nek két legalább olyan erős ellenfele volt, mint  $X_5$ -nek, mindkétten vereséget szenvedtek  $X_1$ -től,  $X_4$  viszont nem gyengébb alternatívát győzött le, emellett  $X_5$ -öt is megverte.
3.  $(X_2 \succeq X_3 \text{ és } X_4 \succeq X_5) \Rightarrow X_6 \succeq X_7$   
 $X_6$  és  $X_7$  egyaránt legyőzte  $X_1$ -et, és kikaptak másik két objektumtól, ezek azonban  $X_6$  esetén ( $X_2$  és  $X_4$ ) legalább olyan erősek voltak, mint  $X_7$ -nél ( $X_3$  és  $X_5$ ).
4. A fenti implikációk szigorú formában is felírhatók:  
 $X_6 \succ X_7 \Rightarrow X_2 \succ X_3$  és  $X_7 \succ X_6 \Rightarrow X_3 \succ X_2$   
 $(X_2 \succeq X_3 \text{ és } X_4 \succ X_5) \Rightarrow X_6 \succ X_7$   
 $(X_2 \succ X_3 \text{ és } X_4 \succeq X_5) \Rightarrow X_6 \succ X_7$ .

Vagyis  $X_6 \sim X_7$ , ezért  $X_2 \sim X_3$  sem lehetséges, mert  $X_6 \sim X_7 \Rightarrow (X_2 \sim X_3 \text{ és } X_4 \succ X_5) \Rightarrow X_6 \succ X_7$ , ami ellentmondás. Az önkonzisztens monotonitás ugyanakkor nem mond semmit  $X_2$  és  $X_3$ ,  $X_6$  és  $X_7$ , vagy  $X_2$  és  $X_6$  viszonyáról, jóllehet úgy érezzük, a  $X_6 \succ X_7$  sorrend logikusabbnak tűnik.



Ennek oka, hogy a gráf két izomorf részre bontható az  $\{X_1, X_2, X_4, X_6\}$ , illetve  $\{X_1, X_3, X_5, X_7\}$  csúcsokkal és a köztük levő élekkel, amiből csak a  $X_4 \rightarrow X_5$  irányított él marad ki, ez pedig az első részgráf, illetve az egymásnak megfelelő pozíciójú objektumok fölényét ( $X_2 \succ X_3$ ,  $X_4 \succ X_5$  és  $X_6 \succ X_7$ ) sugallja.

### 3 Néhány pontozási eljárás

#### 3.1 Axiomatikus szempontú áttekintés

A 2.2. alfejezetben felsorolt érvek alapján Bouyssou (2004) tanulmányának végén azt ajánlja, érdemes lenne elkezdni a pontozási módszerek alapos vizsgálatát. Az ez irányú kutatások egyelőre kezdeti szakaszban vannak, semmiképpen sem tekinthetők lezártak. Legígéretesebbnek egyfajta axiomatikus megközelítés alkalmazása tűnik: néhány kívánatos vagy elvárt tulajdonság definiálásával jól láthatóvá válnak azok ellentmondásai, kölcsönös kapcsolatai, illetve az egyes módszerek eltérései. Ez hasonlít a kooperatív játékelmélet elosztási koncepciói esetén követett megközelítéshez: a 2012-ben közgazdasági Nobel-díjat nyert Lloyd S. Shapley nevéhez fűződő *Shapley-értékre* (Shapley, 1953) már számos axiomatizáció született, nem is említve a különböző játékosztályokon megfigyelhető eltéréseket (Pintér, 2009).

Az első, közvetlenül adódó megoldási lehetőség a sorösszegek alapján történő rangsorolás (Borda, 1781; Copeland, 1951). A módszert Rubinstein (1980) karakterizálta bajnokságokban (tournament), ahol minden összehasonlítás kimenetele ismert és az egyik alternatíva egyértelműen jobbnak bizonyult a másiknál, nincsenek döntetlenek vagy eltérő preferenciaintenzitások. Amennyiben az összehasonlítások száma minden  $(X_i, X_j)$  alternatíva-pár esetén azonos, azaz  $r_{ij} + r_{ji} = r_{kl} + r_{lk}$  tetszőleges  $X_i, X_j, X_k, X_l \in N$  objektumnégyes mellett, akkor *körmérkőzéses* (round-robin) problémáról beszélhetünk. A szavazási modellel foglalkozó irodalomban legalább három axiomatizáció létezik a sorösszeg módszerre ebben az esetben (Young, 1974; Hansson és Sahlquist, 1976; Nitzan és Rubinstein, 1981; Bouyssou, 1992). Ezek az itt tárgyalt általános esetben nem érvényesek, ráadásul hiányzó és többszörös összehasonlítások mellett alkalmazása erősen vitatható (González-Díaz et al. 2014) de például a hiányzó összehasonlítások döntetlenként való kezelésével ez a nehézség elvileg feloldható (Telcs et al., 2013). Ezzel azonban eltérünk az eredeti feladattól, így különböző megoldásokat kaphatunk.

A páros összehasonlítási mátrix bizonyos transzformáltjain és a Perron-Frobenius tételén (mely szerint egy nemnegatív, valós, négyzetes és irreducibilis mátrixban a domináns sajátértékhez tartozik az egyetlen, szigorúan pozitív sajátvektor) alapul az *invariáns* és a *fair bets* (Daniels, 1969; Moon és Pullman, 1970), vagy az előbbi egy perturbált változatának megfelelő *Page-Rank* módszer (Brin és Page, 1998). Ezeket az eljárásokat, valamint Slutzki és Volij (2005) és Slutzki és Volij (2006) karakterizációit részletesen bemutatjuk a 3.2. és a 3.3. szakaszban, az invariáns módszer gráfelméleti, ordinális tulajdonságokon alapuló axiomatizációjával (Altman és Tennenholtz, 2005)

azonban nem foglalkozunk.

A játékelméleti irodalomban hasonló feladatként merül fel egy irányított gráf csúcsainak rangsorolása. Ebben a környezetben könnyen érthető a lokális és globális pontozási eljárások megkülönböztetése: előbbiek az irányított gráf helyi struktúráját vizsgálják (a csúcsok értékelésénél csak azok közvetlen kapcsolatait, a bemenő és kimenő élek számát veszik figyelembe), utóbbiak viszont az egész gráfot tekintik (Herings et al., 2005). Ez egyúttal egy jól ismert axióma, az irreleváns összehasonlításoktól való függetlenség megjelenését indukálja (Rubinstein, 1980; González-Díaz et al., 2014). Rubinstein (1980) eredményének általánosítására van den Brink és Gilles (2003) tanulmánya tett kísérletet. A számos megoldási javaslat közül érdemes megemlíteni az invariáns és fair bets módszerekkel szoros kapcsolatban álló  $\lambda$  eljárást (Borm et al., 2002), és a *pozíciós erőt* (positional power) (Herings et al., 2005); ezeket a 3.4.1. és a 3.4.2. alfejezetekben tárgyaljuk.

A különböző pontozási eljárásokra definiálása mellett viszonylag kevesebb az egyszerre több módszert axiomatikus megközelítéssel vizsgáló munka. Laslier (1997), a lehetséges karakterizációkra is kitérve, számos megoldási koncepciót részletesen elemez, ugyanakkor vizsgálatát körmérkőzéses bajnokságokra korlátozza, ezért jelen cikk szempontjából kevésbé releváns. Chebotarev és Shamis (1998) cikke kiváló áttekintést nyújt az ismert axiomatizációkról, több szempont szerint csoportosítja az ezekhez szükséges tulajdonságokat (összesen több mint 40 módszert tárgyal). Altman és Tennenholtz (2008) pedig belátja, hogy az irányított gráfokra nem létezik olyan pontozási eljárás, amely egyszerre rendelkezne jó lokális és globális tulajdonságokkal.

Chebotarev és Shamis (1999) az önkonzisztens monotonitás (Chebotarev és Shamis, 1997) szempontjából vizsgálja a pontozási eljárások két osztályát, bizonyítva, hogy minden győzelem-vereség kombinálásán (win-loss combining) alapuló eljárás megsérti azt. Ebbe a csoportba tartozik az invariáns és fair bets eljárás, illetve a játékelméleti irodalomban használt módszerek többsége. Ugyanakkor található néhány olyan, győzelem-vereség egyesítő (win-loss unifying) eljárás, amely teljesíti ezt a feltételt. Közülük kiemelkedik az egyik klasszikus módszer, a *maximum likelihood* (Zermelo, 1929; Bradley és Terry, 1952). Az eljárás széles körben ismert és elterjedt, azóta is születnek ezzel kapcsolatos új eredmények: Conner és Grant (2000) a módszer kiterjesztésére tesz kísérletet, míg Conner és Grant (2009) egy új monotonitási tulajdonságról mutatja meg, hogy az általánosított eljárás teljesíti azt.

Az axiomatikus megközelítés a pontozási eljárások által meghatározott rangsorolási módszerek összehasonlítására is alkalmazható (González-Díaz et al., 2014). Az eredmények alapján kiemelkedően teljesít a Zermelo-féle maximum likelihood, amely azonban egy bonyolult nemlineáris egyenletrendszer megoldását kívánja, ezért számítási szempontból nem tekinthető tökéletes választásnak. Egy másik, elméleti szempontból vonzó eljárás az *általánosított sorösszeg* (generalized row sum) módszer (Chebotarev, 1989, 1994). Ez pontozási eljárások egy olyan parametrikus családja, mely egyik határértékként a sorösszeget, másikként pedig a *legkisebb négyzetek* (least squares) módszerét (Horst, 1932; Mosteller, 1951; Morrissey, 1955; Gulliksen, 1956; Kaiser és

Serlin, 1978) adja. Kiszámítása egy lineáris egyenletrendszer megoldásával történik, ennek köszönhetően bizonyos esetekben egy megfelelően választott gráfon is értelmezhető (Shamis, 1994).

Bár a legkisebb négyzetek módszere szintén megsérti az önkonzisztens monotonitás axiómáját, egyszerűsége okán mégis széles körben használják. Belátható, hogy az eljárás ekvivalens a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok esetén alkalmazott *LLSM* módszerrel (Bozóki et al., 2010; Csató, 2012), illetve a statisztikában használt EKS-eljárással.<sup>7</sup> Úgy tűnik, a párhuzamosan folyó kutatások eddig nem nagyon ismerték fel ezt az azonosságot, a megoldás egyértelműségének két független bizonyítása is létezik (Kaiser és Serlin, 1978; Bozóki et al., 2010). Ez azonban egyáltalán nem tekinthető rendkívülinek. Az invariáns módszer legalább három különböző alkalommal került bevezetésre (Daniels, 1969; Moon és Pullman, 1970; Pinski és Narin, 1976), a maximum likelihood esetén ugyancsak két alapművet szokás említeni (Zermelo, 1929; Bradley és Terry, 1952). Kóczy és Nichifor (2013) sem említi, hogy az invariáns módszer hibáinak korrigálására javasolt eljárás azonos a korábbról ismert fair bets módszerrel, így a szerzők valószínűsíthetően más úton jutottak erre a következtetésre. Hasonló esetek más tudományterületen sem ismeretlenek: a stabil házasság probléma megoldására szolgáló Gale-Shapley algoritmust (Gale és Shapley, 1962) a gyakorlati felhasználók már a módszer publikálása előtt felfedezték.

A közelmúltban – González-Díaz et al. (2014) úttörő tanulmányától eltekintve – a legkisebb négyzetek módszere mégis viszonylag kevés figyelmet kapott, holott az általánosított sorösszeg módszerrel való szoros kapcsolata azt sugallja, kedvező axiomaticus tulajdonságokkal bírhat. Közeli rokonságban van a játékelméleti pozíciós erő fogalmával is, emellett a számítás menete, a PageRank módszerhez hasonlóan, szemléletesen értelmezhető gráfokon (Csató, 2013b).

Témánk részben érintkezik a tudományometriában használt eljárások irodalmával, noha Slutzki és Volij (2006), illetve González-Díaz et al. (2014) óvatosságra int az eredmények egymásra történő átvihetősége tekintetében (lásd a 3.2.1. szakasz utolsó bekezdését). Mindenesetre érdemes említést tenni Palacios-Huerta és Volij (2004) karakterizációs eredményeiről, illetve Kóczy és Strobel (2010) axiomaticus tárgyalásáról; az utóbbi által bevezetett egyik tulajdonságot, a monotonitást mi is használni fogjuk.

## 3.2 Az invariáns és fair bets módszerek

### 3.2.1 Az eljárások matematikai háttere

Jelölje az  $\mathbf{R}$  páros összehasonlítási mátrix  $\sum_j r_{ij}$  sorösszegeit és  $\sum_i r_{ij}$  oszlopösszegeit, vagyis az  $j$  objektum győzelmeinek, illetve vereségeinek számát,  $r_{i*}$  és  $r_{*j}$ . Legyen  $\mathbf{C}$  az oszlopösszegekből képzett diagonális mátrix.

**3.1. Definíció.** Az  $I(\mathbf{R})$  *invariáns* módszer (Daniels, 1969; Moon és Pull-

<sup>7</sup>Utóbbiról bővebben a 4. fejezetben olvashatunk.

man, 1970; Pinski és Narin, 1976) a

$$v_i = \sum_{j=1}^n \frac{r_{ij}}{r_{*j}} v_j \quad \text{minden } X_i \in N\text{-re,}$$

mátrixjelölésekkel  $v = \mathbf{RC}^{-1}v$  egyenletrendszer (irreducibilis  $\mathbf{R}$  mátrix mellett normalizálástól eltekintve egyértelmű)  $I(\mathbf{R}) = v$  megoldása.

**3.2. Definíció.** Az  $F(\mathbf{R})$  *fair bets* módszer (Daniels, 1969; Moon és Pullman, 1970) a

$$\sum_{j=1}^n r_{ji} v_i = \sum_{j=1}^n r_{ij} v_j, \quad \text{vagy} \quad v_i = \sum_{j=1}^n \frac{r_{ij}}{r_{*i}} v_j \quad \text{minden } X_i \in N\text{-re,}$$

azaz a  $\mathbf{C}v = \mathbf{R}v$  egyenletrendszer (irreducibilis  $\mathbf{R}$  mátrix esetén normalizálástól eltekintve egyértelmű)  $F(\mathbf{R}) = v$  megoldása.

Látható, hogy mindkettőnél szükség van a végső  $v_i$  súlyok normalizálására, erre leggyakoribb a  $\sum_{i=1}^n v_i = 1$  választás. Tetszőleges  $(N, \mathbf{R})$  rangsorolási problémára  $I(\mathbf{R}) \propto \mathbf{CF}(\mathbf{R})$ , vagyis a két vektor az alternatívák ugyanazon sorrendjét eredményezi. Irreducibilis  $\mathbf{R}$  mellett mindkét vektor pozitív,  $I(\mathbf{R})$  az  $\mathbf{RC}^{-1}$ , míg  $F(\mathbf{R})$  a  $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{R}$  mátrix 1 sajátértékéhez tartozó jobboldali sajátvektor.

A fair bets módszer neve a következő megfontolásból adódik. A  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  értékeket tekintsük fogadási tétek egy sorozatának úgy, hogy az  $X_i$  alternatívára kötött fogadás esetén  $v_j$  összeg nyerhető, amennyiben  $X_i$  legyőzi  $X_j$ -t, és  $v_i$  összeget kell fizetni akkor, ha  $X_i$  vereséget szenved  $X_j$ -től (tehát ez utóbbi független a győztes kilététől). Ekkor az  $F(\mathbf{R})$  vektorral a fogadás igazságos, mert a várható  $\sum_{j=1}^n r_{ji} v_i$  kifizetés pontosan megegyezik a várható  $\sum_{j=1}^n r_{ij} v_j$  veszteséggel. Az invariáns módszer esetén pedig  $v_i$  az az összeg, amit ez az igazságos fogadás fizet az  $X_i$  alternatíva győzelmekor. További interpretációk találhatók a Chebotarev és Shamis (1999), illetve a Slutzki és Volij (2006) tanulmányokban.

Érdeemes más szempontból is megvizsgálni a két eljárást. Az invariáns módszernél az  $X_i$  alternatíva  $v_i$  pontszáma attól függ, mennyi juttatást (például hivatkozást) kap a többitől. Ez weblapok, cikkek rangsorolásánál lehet előnyös, ahol a referenciák megadása ingyen van: ha egy folyóirat többet hivatkozik egy másikra, a rá való hivatkozások száma nem csökken. Ezzel szemben a fair betsnél az objektumok győzelmeinek és vereségeinek száma kiegyensúlyozott, mint egy sportbajnokságban, ahol a kettő egymást kizáró lehetőség.

Ennek megfelelően Slutzki és Volij (2006) az invariáns módszer alkalmazását ajánlja folyóiratok, weblapok és cikkek rangsorolásánál (gyakorlatilag a tudománymetriában), mivel így az értékelés csak az adott objektumra vonatkozó hivatkozások számától függ, további referenciák megadása nem érinti negatívan azt. Az  $X_i$  alternatíva  $X_j$ -vel szembeni jobb teljesítménye, azaz  $r_{ij}$  növekedése biztosan kedvező  $X_i$  számára, azonban a tudománymetriában,

ahol ez a  $X_j$  által adott,  $X_i$ -re vonatkozó hivatkozások számának növekedését jelenti, nem feltétlenül érinti hátrányosan  $X_j$ -t (González-Díaz et al., 2014). Ezzel szemben a Kóczy és Nichifor (2013) által – többek között az invariáns módszer helyett – javasolt eljárás éppen a fair bets-szel azonos, bár ezt a cikk nem mondja ki.

### 3.2.2 Karakterizáció irreducibilis esetben

Az előző alfejezet alapján már látható, miért jelent nehézséget a rangsorolási eljárások közötti választás. Első ránézésre ugyanis egyáltalán nem világos, mi alapján tekinthető jobbnak az invariáns vagy a fair bets módszer: mindkettő egy-egy igazságossági koncepciót képvisel, melyek közül objektív szempontból egyik sem tűnik a másiknál rosszabbnak. Ilyen kérdések eldöntésében nyújthat segít az axiómatikus tárgyalás, melynek során olyan tulajdonságokat keresünk, melyek leszűkítik az előírásuk mellett szóba jöhető eljárások körét. Ez a csökkenés néha olyan mértékű, hogy végeredményként az üres halmazt kapjuk, például az Arrow-féle lehetetlenségi tételben (Arrow, 1951). Optimális esetben éppen egyetlen módszer marad (karakterizáció).

Az invariáns és fair bets módszerek karakterizációjával kapcsolatos első kihívás az értelmezési tartomány megválasztása. A rangsorolási problémák egy adott osztályán érvényes axiomatizáció nem feltétlenül igaz egy szűkebb vagy bővebb halmazon, a kiválasztott tulajdonságok pedig kivezethetnek a megengedett értelmezési tartományból.

Tekintsük az  $\mathcal{R}_N$  halmazt; itt mind az invariáns, mind a fair bets módszer jól definiált. A 2.3.1. szakaszban bemutatott tulajdonságok vonatkozásában a következőket tudjuk:

**3.1. Lemma.** *Az invariáns és a fair bets módszer egységes (Slutzki és Volij, 2006).*

**3.2. Lemma.** *A fair bets módszer erősen egységes (Slutzki és Volij, 2006).*

**3.1. Következmény.** *A fair bets módszer közömbös (Slutzki és Volij, 2006).*

**3.3. Lemma.** *Az invariáns módszer gyengén additív (Slutzki és Volij, 2006).*

**3.4. Lemma.** *Az invariáns módszer invariáns a referencia intenzitásra (Slutzki és Volij, 2006).*

**3.5. Lemma.** *A fair bets módszer fordítottan arányos a vereségekkel (Slutzki és Volij, 2006).*

A fenti axiómák már elegendőek ahhoz, hogy mindkét eljárást karakterizálhassuk. Jelölje  $\mathcal{R}_N(N)$  a rögzített  $N$  alternatívahalmazzal rendelkező irreducibilis rangsorolási problémák halmazát.

**3.1. Tétel.** *Legyen  $n \geq 2$ . Az invariáns módszer az egyetlen olyan  $\mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  pontozási eljárás, ami egységes, gyengén additív és invariáns a referencia intenzitásra (Slutzki és Volij, 2006).*

**3.2. Tétel.** *Legyen  $n \geq 2$ . A fair bets módszer az egyetlen olyan  $\mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  pontozási eljárás, ami egységes, közömbös és fordítottan arányos a vereségekkel.*

A tételekben szereplő három-három tulajdonság független, azaz közülük bármely kettőt kiválasztva található olyan, az invariáns, illetve a fair bets eljárástól különböző pontozási módszer, ami mindkettőt kielégíti (így a harmadikat értelemszerűen megsérti).

A fair bets eljárásnak létezik egy alternatív karakterizációja is, melyben az  $N$  alternatívahalmaz nem rögzített. Ez azon alapul, hogy a több objektummal rendelkező rangsorolási problémák – alkalmas feltételek megkövetelésével – visszavezethetők a kétszereplős esetre, ahol a megoldás triviális (Slutzki és Volij, 2006).

Az invariáns módszer egy másik, gráfelméleti axiómákon alapuló karakterizációját adta meg Altman és Tennenholtz (2005).

### 3.2.3 A fair bets módszer alternatív axiomatizációja

Az előzőekben látott mindkét karakterizációban szerepel az egységesség követelménye, ami intuitívan kevésbé vonzó, túlságosan erősnek tűnő tulajdonság, mert egyértelműen megmondja, milyen értékelővektort kell kapni egy szabályos rangsorolási probléma esetén (Slutzki és Volij, 2005). Ez egy sokkal természetesebbnek tűnő névtelenségi követelménnyel is kiváltható, aminek azonban ára van: az axióma erejének kihasználáshoz ki kell bővíteni a vizsgált rangsorolási problémák halmazát, szükségessé válik a nem összehasonlíthatóság bevezetése. Ez egyben azt is jelenti, hogy a rangsorolás a továbbiakban nem írható le egy  $f : \mathcal{R}_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  értékelőfüggvénnyel, ez ugyanis nem teszi lehetővé a nem összehasonlítható ligák kezelését.

**3.3. Definíció.** A  $\succeq^{fb} : \mathcal{R}_1 \rightarrow \mathcal{P}_N$  fair bets rangsorolási módszert az  $F(\mathbf{R})$  fair bets pontozási eljárás generálja:  $X_i \succeq_{\mathbf{R}}^{fb} X_j \Leftrightarrow F(\mathbf{R})_i \geq F(\mathbf{R})_j$  minden  $(N, \mathbf{R}) \in \mathcal{R}_1$  rangsorolási problémára (Slutzki és Volij, 2005).

A fair bets rangsorolási módszer karakterizációjához a 2.3.3. alfejezetben bemutatott tulajdonságok szükségesek.

**3.3. Tétel.**  $\succeq^{fb}$  az egyetlen  $\succeq : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{P}_N$  domináns, kvázi teljes, szétválasztható, névtelen, kvázi egyenletesség őrző és a vereségekre negatívan reagáló rangsorolási módszer (Slutzki és Volij, 2005).

A hat axióma egymástól független, bármelyik ötöt kiválasztva található olyan módszer, ami ezek mindegyikét kielégíti, de nem azonos a fair bets-szel. Ha a vizsgálódás körét olyan problémákra szűkítjük, ahol csak egyetlen vagy több, nem összehasonlítható liga szerepel, tehát egyik csoport sem erősebb a másiknál, akkor az eljárás karakterizációja a dominancia megkövetelése nélkül is érvényes (Slutzki és Volij, 2005).

Legyen  $\mathbf{R}^\top$  a transzponált páros összehasonlítási mátrix, ahol a korábbi győzelmek vereségnek, a vereségek győzelmeknek számítanak.

**3.4. Definíció.** A  $\succeq^{dfb} : \mathcal{R}_1 \rightarrow \mathcal{P}_N$  duál fair bets rangsorolási módszert a duál fair bets pontozási eljárás generálja:  $X_i \succeq_{\mathbf{R}}^{dfb} X_j \Leftrightarrow F(\mathbf{R}^\top)_i \leq F(\mathbf{R}^\top)_j$  minden  $(N, \mathbf{R}) \in \mathcal{R}_1$  rangsorolási problémára (Slutzki és Volij, 2005).

Az eljárásra Slutzki és Volij (2005) ad egy lehetséges interpretációt. A fair bets eljárás – a jobb oldali sajátvektor használata következtében – nagyobb súlyt ad az erősebb játékosok elleni győzelmeknek, mint a gyengébbekkel szembeni vereségeknek, mert a

$$v_i = \sum_{j=1}^n \frac{r_{ij}}{r_{*i}} v_j$$

egyenletben változatlan  $r_{*i} = \sum_{j=1}^n r_{ji}$  mellett  $X_i$  számára kedvező az  $r_{ij}$  eredmények olyan átcsoportosítása, amely a nagyobb  $v_j$  értékelésű (jobb) ellenfelekkel szemben javítja a összehasonlítások kimenetelét. A duál fair bets-nél a megfelelő egyenlet

$$v_i = \sum_{j=1}^n \frac{r_{ji}}{r_{i*}} v_j,$$

vagyis állandó  $r_{i*} = \sum_{j=1}^n r_{ij}$  mellett  $X_i$ -nek az  $r_{ij}$  eredmények olyan átcsoportosítása kedvez, amely az erősebb, nagyobb  $v_j$  értékelésű ellenfelekkel szemben rontja a összehasonlítások kimenetelét. Ilyen értelemben a fair bets módszer egyfajta szubjektív értékítéletet hordoz, melynek használata elég nehezen indokolható, legfeljebb azzal érvelhetünk, hogy ezáltal – például a sportban – nagyobb az ösztönzés a „meglepő”, a papírformát borító eredmények elérésére. Ezzel szemben a duál fair bets a kiszámíthatóságot, jó előrejelezhetőséget díjazza.

A dominancia, kvázi teljesség és szétválaszthatóság megkövetelésével a fair bets és a duál fair bets (valamint az invariáns és a duál invariáns) módszerek egyértelműen kiterjeszthetők az összes rangsorolási problémára. A 3.3. tétel bizonyításából látszik, de intuitív alapon is várható, hogy a vereségekre való negatív reakció központi szerepet játszik a karakterizációban. Analóg módon definiálható a győzelmekre való pozitív reakció.

**3.4. Tétel.**  $\succeq^{dfb}$  az egyetlen  $\succeq: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{P}_N$  domináns, kvázi teljes, szétválasztható, névtelen, kvázi egyenletelesség őrző és a győzelmekre pozitívan reagáló rangsorolási módszer (Slutzki és Volij, 2005).

Tehát a másik öt tulajdonság megkövetelése esetén már nem írható elő egyszerre mindkettő, a vereségekre történő negatív és a győzelmekre történő pozitív reakció teljesülése kizárja egymást, kivéve a triviális kétszereplős esetet, ahol a fair bets és duálja azonos.

### 3.3 A PageRank módszer

A Google keresőmotor alapját jelentő PageRank algoritmus (Brin és Page, 1998) a páros összehasonlításokon alapuló rangsorolás irodalmában is egyre népszerűbb: előbbire a GoogleScholar kereső szerint több mint 10 ezer, utóbbira pedig több mint 5 ezer hivatkozás van.

A PageRank módszer irányított (multi)gráfokon történő interpretációja igen szemléletes. Az algoritmus egy átlagos felhasználó viselkedését modellezi: kezdetben minden csúcs azonos fontosságú, majd a szörfölő a más csúcsokba mutató irányított élek mentén véletlenszerűen kattint a weblapon található linkekre. Ugyanakkor, előre megadott  $d \in [0, 1]$  valószínűséggel, az is megtörténhet, hogy a linkek mellőzésével azonos valószínűséggel választ egy új oldalt.

Legyen az irányított gráf csúcsainak halmaza  $N$ ,  $G \subseteq N \times N$  pedig egy ezen értelmezett irreflexív bináris reláció. A  $G$  gráf legalább gyengén összefüggő, vagyis a neki megfelelő irányítatlan gráf összefüggő. Jelölje  $P_i = \{X_j \in N : (X_j, X_i) \in G\}$  az  $X_i$  csúcs elődeinek halmazát,  $p_i = |P_i|$  ezek számát. Hasonlóan, legyen  $S_i = \{X_j \in N : (X_i, X_j) \in G\}$  az  $X_i$  csúcs követőinek halmaza, míg  $s_i = |S_i|$  ezek száma.

Formálisan a

$$P_i = \frac{d}{n} + (1-d) \sum_{j=1}^n \frac{w_{ji}}{s_j} P_j \quad \text{minden } X_i \in N\text{-re}$$

egyenletrendszer megoldását keressük, ahol  $n = |N|$  az irányított gráf csúcsainak száma,  $w_{ji}$  a  $X_j$  csúcsból  $X_i$ -be mutató él súlya. Alapesetben nincs szó súlyozásról, két csúcs között legfeljebb egy irányított él lehet, azaz  $w_{ij} \in \{0, 1\}$ . Ugyanakkor ennek bevezetése semmilyen nehézséget sem okoz, úgy kell tekinteni, mintha a két érintett csúcs között több él lenne. Bizonyos alkalmazásokban a kimenő élekkel nem rendelkező csúcsokból véletlenszerűen választva egy másikba kerülünk, az egyenlet jobb oldalán még szerepel egy további  $(1-d) \sum_j \delta(S_j) P_j$  tag, ahol  $\delta(S_j) = 1 \Leftrightarrow S_j = 0$  és  $\delta(S_j) = 0$  egyébként (Radicchi, 2011).

A PageRank módszer könnyen visszavezethető az  $(N, \mathbf{R})$  rangsorolási problémára, egyedül arra kell figyelni, hogy ennek definíciójában az  $(X_i, X_j)$  irányított él létezése  $X_i$ -nek kedvezőtlen, míg  $X_j$ -nek kedvező, azaz  $r_{ij} = w_{ji}$  és  $r_{ji} = w_{ij}$ .

Ha eltekintünk az exogén paramétertől, azaz  $d = 0$ , akkor a PageRank pontosan megegyezik az invariáns módszerrel.  $d > 0$  esetén egyrészt nincs szükség a súlyok normalizálására, másrészt a megoldás reducibilis  $\mathbf{R}$  mátrixok esetén is létezni fog.

Érdemes megjegyezni, hogy más pontozási eljárásoknak is létezik a PageRank-hez hasonló, bár első ránézésre talán kevésbé vonzó gráfinterpretációja, példaként említhető az általánosított sorösszeg (bizonyos esetekben) (Shamis, 1994), vagy a legkisebb négyzetek módszere (Csató, 2013b). Utóbbinál nem törődünk az élek irányításával, azok csak a csúcsok kezdeti pontszámában játszanak szerepet, a PageRank-nél viszont éppen fordítva, a kezdeti értékelések lesznek azonosak, és az iteráció során vesszük figyelembe a páros összehasonlítások kimenetelét.



### 3.4 Irányított gráfok csúcsainak rangsorolása

Most két olyan eljárást mutatunk be, melyeket a súlyozatlan irányított gráfok  $\mathcal{G}$  osztályán definiáltak. A játékelméleti irodalom jelöléseivel összhangban – a PageRank módszer értelmezésével szemben – ezúttal az  $(X_i, X_j)$  irányított él létezése az  $X_i$  csúcsnak lesz kedvező, és a  $X_j$ -nek kedvezőtlen, így az  $\mathbf{R}$  páros összehasonlítási mátrix a  $G$  irányított gráf szomszédsági mátrixa lesz. A jelölések egyszerűsítése érdekében kizárólag az előbbit használjuk. Ennek megfelelően  $\mathbf{R} \in \mathcal{G}$  akkor és csak akkor, ha  $r_{ij} \in \{0, 1\}$  minden  $X_i, X_j \in N$ -re. Hasonlóképp,  $\mathcal{G}_N$  az irreducibilis,  $\mathcal{G}_1$  pedig az egyetlen legerősebb ligával rendelkező súlyozatlan irányított gráfok osztálya.

#### 3.4.1 Internal slackening

Slikker et al. (2012) a gráf csúcsainak rangsorolására egy iteratív eljárás családot javasol, a  $\lambda^\alpha$  pontozási módszer egy  $\alpha \in (0, \infty)$  paraméter függvénye. Kezdetben minden csúcs súlya azonos, majd azok aktuális pontszáma szétosztásra kerül az összes, 1 súllyal szereplő elődje (ahonnan irányított él megy az adott csúcsba), és az  $\alpha$  súllyal szereplő önmaga között.

Legyen  $\beta^{\alpha,0} = (1/n)\mathbf{e}$ , ahol  $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$  és  $e_i = 1$  minden  $X_i \in N$ -re, így az iteratív formula:

$$\beta^{\alpha,t}(\mathbf{R})_i = \sum_{j \in S_i} \frac{\beta^{\alpha,t-1}(\mathbf{R})_j}{p_j + \alpha} + \alpha \frac{\beta^{\alpha,t-1}(\mathbf{R})_i}{p_j + \alpha} \quad \text{minden } X_i \in N\text{-re.}$$

**3.5. Definíció.** A  $\lambda^\alpha : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^n$  *internal slackening* pontozási eljárás ennek a sorozatnak a határértéke, vagyis  $\lambda^\alpha(\mathbf{R}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \beta^{\alpha,t}(\mathbf{R})$ .

$\alpha = 1$  esetén ez a  $\lambda$  pontozási eljárással egyezik meg (Borm et al., 2002). Tehát  $\lambda^\alpha$  a következő egyenletrendszer megoldásaként kapható a  $\sum_{i \in N} \lambda_i^\alpha = 1$  normalizálás mellett:

$$\lambda^\alpha(\mathbf{R})_i = \sum_{j \in S_i} \frac{\lambda^\alpha(\mathbf{R})_j}{p_j + \alpha} + \alpha \frac{\lambda^\alpha(\mathbf{R})_i}{p_j + \alpha} \quad \text{minden } X_i \in N, \mathbf{R} \in \mathcal{G}\text{-re.}$$

A feladatnak nem minden irányított gráf esetén létezik egyértelmű megoldása, ez csak akkor biztosított, ha  $\mathbf{R} \in \mathcal{G}_N$ , a páros összehasonlítási mátrix irreducibilis. Ugyanakkor könnyű kiterjeszteni az egyetlen legerősebb ligával rendelkező  $\mathcal{G}_1$  osztályra; a gyengébb ligák szereplői automatikusan nulla értékelést kapnak (Slikker et al., 2012). A módszer számítását segíti a következő eredmény.

**3.5. Tétel** (Slikker et al., 2012). *Legyen  $\mathbf{R} \in \mathcal{G}_1$  és  $\alpha \in (0, \infty)$ . Ekkor*

$$\lambda^\alpha(\mathbf{R}) \propto \left( \lambda^1(\mathbf{R})_i \frac{2(p_i + \alpha)}{(1 + \alpha)(p_i + 1)} \right)_{i \in N}.$$

**3.2. Következmény.** *Ha  $\lambda^1(\mathbf{R})_i \geq \lambda^1(\mathbf{R})_j$  és  $p_i = p_j$  az  $X_i, X_j \in N$  alternatívákra valamilyen  $\mathbf{R} \in \mathcal{G}_1$  páros összehasonlítási mátrix esetén, akkor  $\lambda^\alpha(\mathbf{R})_i \geq \lambda^\alpha(\mathbf{R})_j$  tetszőleges  $\alpha \in (0, \infty)$ -re.*

A 3.5. tétel révén lehetővé válik az eljárás kiterjesztése az  $\alpha = 0$  és  $\alpha \rightarrow \infty$  határesetekre, vagyis a  $\lambda^0 : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  és  $\lambda^\infty : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  módszerek bevezetése, ahol:

$$\lambda^0(\mathbf{R})_i = \frac{\lambda^1(\mathbf{R})_i \frac{2p_i}{p_i+1}}{\sum_{j \in N} \lambda^1(\mathbf{R})_j \frac{2p_j}{p_j+1}} \quad \text{minden } X_i \in N, \mathbf{R} \in \mathcal{G}_1\text{-re;}$$

$$\lambda^\infty(\mathbf{R})_i = \frac{\lambda^1(\mathbf{R})_i \frac{2}{p_i+1}}{\sum_{j \in N} \lambda^1(\mathbf{R})_j \frac{2}{p_j+1}} \quad \text{minden } X_i \in N, \mathbf{R} \in \mathcal{R}_1\text{-re.}$$

Ha az  $\mathbf{R}$  szomszédsági mátrix irreducibilis (azaz a hozzá tartozó  $G$  irányított gráf erősen összefüggő), akkor az internal slackening módszer szoros kapcsolatban áll az invariáns és fair bets eljárásokkal.

**3.6. Tétel.** *Legyen  $\mathbf{R} \in \mathcal{G}_N$ . Ekkor  $\lambda^0(\mathbf{R}) = I(\mathbf{R})$  és  $\lambda^\infty(\mathbf{R}) = F(\mathbf{R})$  (Slikker et al., 2012).*

A 3.2. következményből és a 3.6. tételből adódik az alábbi eredmény.

**3.3. Következmény.** *Ha  $\lambda^1(\mathbf{R})_i \geq \lambda^1(\mathbf{R})_j$  és  $p_i = p_j$  az  $X_i, X_j \in N$  alternatívákra valamilyen  $\mathbf{R} \in \mathcal{G}_N$  páros összehasonlítási mátrix esetén, akkor  $I(\mathbf{R})_i \geq I(\mathbf{R})_j$  és  $F(\mathbf{R})_i \geq F(\mathbf{R})_j$ .*

A gráf interpretáció segítségével az internal slackening módszer kiterjeszhető a teljes  $\mathcal{G}$  osztályra, ahol több legerősebb liga (multiple top cycles) is létezhet (Slikker et al., 2012). Ezáltal kiküszöbölhető a fair bets (és az invariáns) módszerek egyik jelentős hátránya, a nem összehasonlítható ligák megjelenése.

A fair bets és invariáns módszerekhez hasonlóan itt is felmerülhet a kérdés, miért az adott alternatívát legyőzők között osztjuk szét a pontszámát. Analóg módon bevezethető a  $\delta\lambda^\alpha : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^n$  duál internal slackening módszer,  $\delta\lambda^\alpha(\mathbf{R}) = \lambda^\alpha(\mathbf{R}^\top)$ , ami a következő egyenletrendszer megoldásaként kapható a  $\sum_{i \in N} \lambda_i^\alpha = 1$  normalizálás mellett:

$$\delta\lambda_i^\alpha(\mathbf{R}) = \sum_{j \in P_i} \frac{\delta\lambda_j^\alpha(\mathbf{R})}{s_j + \alpha} + \alpha \frac{\delta\lambda_i^\alpha(\mathbf{R})}{s_i + \alpha} \quad \text{minden } i \in N, \mathbf{R} \in \mathcal{G}\text{-re,}$$

hiszen az elődök és követők szerepe felcserélődik.

Ezúttal is kimondható egy, a 3.5. tételhez hasonló állítás, amivel tetszőleges  $\alpha$ -ra kiszámítható a duál internal slackening módszer értékelővektora.

**3.7. Tétel.** *Legyen  $G \in \mathcal{R}_1$  és  $\alpha \in (0, \infty)$ . Ekkor*

$$\delta\lambda^\alpha(\mathbf{R}) \propto \left( \delta\lambda_i^1(\mathbf{R}) \frac{2(s_i + \alpha)}{(1 + \alpha)(s_i + 1)} \right)_{i \in N}.$$

Itt szintén a kisebb értéke kedvezőbb. A 3.6. tétel szerint  $\delta\lambda^0(\mathbf{R}) = DI(\mathbf{R})$  és  $\delta\lambda^\infty(\mathbf{R}) = DF(\mathbf{R})$ , ezeken kívül a duál lambda eljárással fogunk foglalkozni ( $\alpha = 1$ ).

Az invariáns és fair bets módszerek analógiájára az internal slackening módszer szintén kiterjeszhető a súlyozott irányított gráfok  $\mathcal{R}$  osztályára, bár ennek lehetőségét Slikker et al. (2012) nem említi.

### 3.4.2 Pozíciós erő

Az internal slackening módszer  $\mathcal{R}$ -re kiterjesztett változata ugyan lehetővé teszi a legerősebb ligák értékelését, a gyengébb ligákon belül azonban továbbra sem ad rangsort. Erre kínál egy megoldást a *pozíciós erő* (positional power) (Herings et al., 2005), ami egyszerre veszi figyelembe az irányított gráf lokális és globális struktúráját: amennyiben az  $X_i$  csúcs dominálja  $j$ -t, a rögzített  $c$  értékelés mellett az utóbbi erejének  $1/a$  hányadát is megkapja. Egy kiválasztott csúcs ereje az alábbi képlettel számítható:

$$x_i = \sum_{j \in S_i} \left( c + \frac{1}{a} x_j \right) \quad \text{minden } X_i \in N\text{-re.}$$

Az eddig tárgyalt módszerekkel ellentétben ez nem egy homogén egyenletrendszer, nincs szükség normalizálásra. Jelölje  $\mathbf{s}$  a követők, az egyes csúcsokból kiinduló élek számának vektorát, ami a  $\mathbf{C}$  mátrix főátlójában szereplő elemekből képzett vektorral azonos. Ekkor a megoldandó feladat

$$(\mathbf{E} - (1/a)\mathbf{R}) \mathbf{x} = c\mathbf{s},$$

ahol  $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $e_{ii} = 1$  minden  $X_i \in N$ -re. Az egyenletrendszernek mindig létezik egyértelmű megoldása, ha  $a > n-1$ , így  $c = 1$  mellett  $a = n$  választása maximalizálja a globális struktúra, a követők értékelésének hatását ( $a \rightarrow \infty$  esetén a megoldás  $\mathbf{s}$ -hez konvergál, így csak a követők száma számít) (Herings et al., 2005).

**3.6. Definíció.** Az  $x : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^n$  *pozíciós erő* az

$$x(\mathbf{R}) = (\mathbf{I} - (1/n)\mathbf{R})^{-1} \mathbf{s}$$

egyenletrendszer  $x(\mathbf{R})$  megoldása.

Tehát a pozíciós erő minden súlyozatlan irányított gráfra egyértelmű. A  $\delta x : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^n$  *pozíciós gyengeség* (positional weakness) az irányított gráf összes élének megfordításával kapott gráfra kiszámított pozíciós erővel egyezik meg:  $\delta x(\mathbf{R}) = p(\mathbf{R}^\top)$ , ahol ismét a kisebb érték lesz kedvezőbb (Herings et al., 2005). Ez a korábbiakhoz hasonlóan tekinthető a duál pozíciós erőnek. A kettő különbsége az  $x^{Cp} : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  *Copeland pozíciós erő*, azaz  $x^{Cp}(\mathbf{R}) = x(\mathbf{R}) - \delta x(\mathbf{R})$ .

A pozíciós erő kiterjeszthető olyan súlyozott irányított gráfokra, melyekben többszörös hurokélek is előfordulhatnak (Herings et al., 2005). Utóbbiak megengedése egy új irányt jelentene a páros összehasonlításokon alapuló rangsorolásban, azonban a cikkben is csak említés szintjén szerepel, ezért mi sem tárgyaljuk.

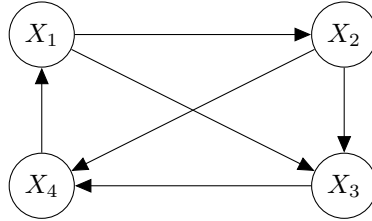
## 3.5 Példa

Egy példán keresztül illusztráljuk a bemutatott módszereket.

**3.1. Példa** (Slutzki és Volij, 2005; Slikker et al., 2012). Legyen  $N = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$  és

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A rangsorolási probléma a 2. ábrán látható.



2. ábra. A 3.1. példa rangsorolási problémája

Az  $s$  pontszám módszer alapján az alternatívák rangsora  $(X_1 \sim X_2) \succ (X_3 \sim X_4)$ , mert az első kettő 2-2, a többi pedig 1-1 győzelemmel rendelkezik. A fair bets értékelővektor  $F(\mathbf{R}_1)^\top = (v_1, v_2, v_3, v_4) = (4, 3, 1, 2)/10$ , tehát a rangsor  $X_1 \succ X_2 \succ X_4 \succ X_3$ . A transzponált probléma  $\sum_{j \in N} r_{ij} v_i = \sum_{j \in N} r_{ji} v_j, \forall X_i \in N$  egyenletrendszerének megoldása  $v^\top = (v_1, v_2, v_3, v_4) = (2, 1, 3, 4)/10$ , vagyis a duál fair bets rangsor  $X_2 \succ X_1 \succ X_3 \succ X_4$ . Az eltérés oka a különböző megközelítés: a fair bets nagyobb súlyt ad az erősebb ellenfelek felett aratott győzelmeknek, mint a gyengébb ellenfelekkel szembeni vereségeknek, míg a duál fair bets éppen ennek fordítottját írja elő. A példában a fair bets rangsor  $X_3$ -mal szemben  $X_4$ -nek kedvez, mert az  $X_1$  (erős játékos) felett aratott győzelem értékesebb, mint az  $X_3$  (gyenge játékos) elleni vereség, míg az  $X_3$ -mal szembeni vereség kevésbé súlyos, mint az  $X_2$ -től elszenvedett. Hasonlóan vezethető le az  $X_1 \succ X_2$  reláció. A duál fair bets módszer éppen ennek az ellenkezőjét csinálja, ott az azonos pontszámmal rendelkező objektumok viszonya az ellenkező irányba dől el.

Az invariáns módszerrel kapott értékelővektor  $I(\mathbf{R}_1)^\top = (4, 3, 2, 4)/13$ , vagyis a rangsor  $(X_1 \sim X_4) \succ X_2 \succ X_3$ . Ez még jobban felértékeli azt az  $X_4$  objektumot, amelynek sikerült legyőznie  $X_1$ -et. Például folyóiratok rangsorolásánál gondolhatjuk azt, hogy  $X_4$ -re azért nem hivatkozik  $X_2$  és  $X_3$ , mert előbbi annyival magasabban áll a képzeletbeli mércén, miután a mindkettejükénél jobb  $X_1$  újságban szerepel egy referencia  $X_4$ -re. Ugyanez a duál invariáns eljárásnál  $DI(\mathbf{R}_1) = (4, 2, 3, 4)/13$ , tehát a sorrend  $X_2 \succ X_3 \succ (X_1 \sim X_4)$ . Itt  $X_3$  is megelőzi  $X_1$ -et annak eredményeként, hogy az utóbbi vereséget szenvedett a gyengének számító  $X_4$  objektumtól: bizonyos alkalmazásokban célszerű lehet a duál fair betsnél jobban büntetni az ilyen teljesítményt.

Az internal slackening pontozási eljárás két extrémális pontja a 3.6. tétel értelmében a fair bets és az invariáns módszer.  $\alpha = 1$  esetén a  $\lambda$  módszer (Borm et al., 2002) értékelővektora  $\lambda^1(\mathbf{R}_1) = (8, 6, 3, 6)/23$ , azaz a rangsor

$X_1 \succ (X_2 \sim X_4) \succ X_3$ . A duál  $\lambda$  módszer eredménye  $(6, 3, 6, 8)/23$ , vagyis a sorrend  $X_2 \succ (X_1 \sim X_3) \succ X_4$ . Mindkettő indokolhatónak tűnik. A fair bets-szel szemben a lambda módszernél előbbre került az  $X_4$  objektum, azonban még nem ért el az invariáns módszerhez hasonló kiemelkedő pozíciót. Ugyanígy, a duális eljárás jobban bünteti  $X_1$ -et, mint a duál fair bets, de nem annyira, mint a duál invariáns. Ez látható a többi, a 3.5. tétel segítségével számítható  $\alpha$  értékre is:

$$\begin{aligned} \lambda^\alpha(\mathbf{R}_1) &\propto \left( 8 \cdot \frac{2+2\alpha}{2+2\alpha}, 6 \cdot \frac{2+2\alpha}{2+2\alpha}, 3 \cdot \frac{4+2\alpha}{3+3\alpha}, 6 \cdot \frac{4+2\alpha}{3+3\alpha} \right) = \\ &= \left( 8, 6, 3 \cdot \frac{4+2\alpha}{3+3\alpha}, 6 \cdot 2 \cdot \frac{4+2\alpha}{3+3\alpha} \right) \end{aligned}$$

Ebből már könnyen meghatározhatók a különböző  $\alpha$  értékek melletti rangsorok:

$$\succ_{\mathbf{R}_1}^\lambda = \begin{cases} (X_1 \sim X_4) \succ X_2 \succ X_3, & \text{ha } \alpha = 0 \\ X_1 \succ X_4 \succ X_2 \succ X_3, & \text{ha } 0 < \alpha < 1 \\ X_1 \succ (X_2 \sim X_4) \succ X_3, & \text{ha } \alpha = 1 \\ X_1 \succ X_2 \succ X_4 \succ X_3, & \text{ha } 1 < \alpha. \end{cases}$$

Hasonlóan, a 3.7. tétel révén tetszőleges  $\alpha$  értékre megadható a duál internal slackening módszer eredménye:

$$\begin{aligned} \delta\lambda^\alpha &\propto \left( 6 \cdot \frac{4+2\alpha}{3+3\alpha}, 3 \cdot \frac{4+2\alpha}{3+3\alpha}, 6 \cdot \frac{2+2\alpha}{2+2\alpha}, 8 \cdot \frac{2+2\alpha}{2+2\alpha} \right) = \\ &= \left( 6 \cdot \frac{4+2\alpha}{3+3\alpha}, 3 \cdot \frac{4+2\alpha}{3+3\alpha}, 6, 8 \right), \end{aligned}$$

amiből a különböző  $\alpha$  értékek melletti rangsorok:

$$\succ_{\mathbf{R}_1}^{\delta\lambda} = \begin{cases} X_2 \succ X_3 \succ (X_1 \sim X_4), & \text{ha } \alpha = 0 \\ X_2 \succ X_3 \succ X_1 \succ X_4, & \text{ha } 0 < \alpha < 1 \\ X_2 \succ (X_1 \sim X_3) \succ X_4, & \text{ha } \alpha = 1 \\ X_2 \succ X_1 \succ X_3 \succ X_4, & \text{ha } 1 < \alpha. \end{cases}$$

Végezetül számoljuk ki a csúcsok pozíciós erejét és gyengeségét, valamint a Copeland pozíciós erőt. Ezúttal csak a rangsorokat közöljük, melyek a fenti sorrendben a következők:  $X_1 \succ X_2 \succ X_4 \succ X_3$ ,  $X_2 \succ X_1 \succ X_3 \succ X_4$ , valamint  $X_2 \succ X_1 \succ X_4 \succ X_3$ . Utóbbi értékelővektorával kapcsolatban érdemes megjegyezni, hogy – amint azt Herings et al. (2005) bizonyítja – a Copeland pozíciós erők összege nulla, ráadásul a példában  $x^{Cp}(\mathbf{R}_1)_4 = -x^{Cp}(\mathbf{R}_1)_1$  és  $x^{Cp}(\mathbf{R}_1)_3 = -x^{Cp}(\mathbf{R}_1)_2$ , ami egyfajta szimmetrikus viszonyra utalhat. A pozíciós erő a fair betshez, a pozíciós gyengeség a duál fair betshez hasonlóan értelmezhető. A kettő eredőjeként alakul ki a Copeland pozíciós erő, némileg furcsa végeredménnyel. Miközben  $X_2$  jobbnak bizonyul  $X_1$ -nél a kiegyensúlyozottabb teljesítmény okán, ugyanez a mezőny alján,  $X_3$  és  $X_4$  viszonyában éppen ellenkező következményekkel jár. Ez a megközelítés a sportban vonzóknak tűnhet: a jó játékosokat akkor díjazzuk, ha nem szenvednek el váratlan vereségeket, míg a gyengébbeket inkább akkor, amikor sikerül meglepetést okozniuk. A vizsgált példából kapott intuitív benyomás elméleti alátámasztása természetesen még további kutatást igényel.

### 3.6 A bemutatott módszerek néhány problémája

Ahogy azt a 3.1. példa mutatja, a rangsorolási módszerek kiválasztásában célszerű lehet az axiomatikus megközelítés alkalmazása, intuitív alapon nehéz kiválasztani a megfelelő eljárást. Az előzőekben bemutatott invariáns és a fair bets módszerek karakterizációit, azonban az ehhez szükséges tulajdonságok – a monotonitással, megfordíthatósággal, vagy az önkonzisztens monotonitással szemben –, valószínűleg éppen az axiomatizáció céljából lettek kitalálva.<sup>8</sup>

Ennek megfelelően az alfejezetben a 2.3.4. és a 2.3.5. szakaszokban tárgyalt tulajdonságokkal foglalkozunk, melyek alapján bármelyik bemutatott módszer kritizálható. A lista messze nem teljes, a téma iránt érdeklődő olvasóknak ajánljuk a Chebotarev és Shamis (1998) és a González-Díaz et al. (2014) cikkeket.<sup>9</sup> A tárgyalás szinte kizárólag a negatív eredményekre fókuszál, aminek alapvetően két oka van. Egyrészt szeretnénk felhívni a figyelmet a módszer korlátaira. Másrészt úgy véljük, a nem teljesen kitöltött esetre ismert karakterizációs eredmények korlátozott száma miatt célszerűbb a módszerek hibái alapján választani: amennyiben ezek mindegyikéről sikerül kimutatni, hogy a konkrét alkalmazásban nem okoznak problémát, használatuk megalapozottnak tekinthető.

#### 3.6.1 Manipuláció

**3.1. Állítás** *Az invariáns módszer nem monoton* (Kóczy és Strobel, 2009).

*Bizonyítás.* Ellenpéldát adunk.

**3.2. Példa.** Legyen  $N = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ , illetve

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{R}'_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Az invariáns értékelővektor  $I(\mathbf{R}_2) = (30, 24, 22, 21)/97$ , így a rangsor  $X_1 \succ X_2 \succ X_3 \succ X_4$ , majd a  $X_4$  alternatíva két újabb vereséget szenved el  $X_1$  ellen. Amennyiben az eljárás nem manipulálható, az első és utolsó helyzeteknek nem szabad változnia. De  $I(\mathbf{R}'_2) = (54, 32, 34, 35)/155$ , tehát  $X_1 \succ X_4 \succ X_3 \succ X_2$ , az  $X_4$  objektum a második helyre ugrott előre. A probléma oka, hogy az  $X_1$  elleni vereségek számának növekedése az arányosság megtartása miatt csökkenti a többi értékét, a legerősebb  $X_1$  objektum helyzetének további javulása pedig „magával húzza”  $X_4$ -et. Sőt,  $X_4$ -nek nem csak

<sup>8</sup>Slutzki és Volij (2005) a tanulmány bevezetésében megemlíti, hogy a fair bets módszer karakterizációjában érdemes lenne a monotonitás Rubinstein (1980)-féle, természetes követelményt jelentő változatát használni, ez azonban a szerzők bevallása szerint nem segít a reprezentációs tétel megfogalmazásában, ehelyett a némileg kétségesebb a nemnegatív reakció a vereségekre tulajdonságot választják.

<sup>9</sup>Terveim szerint készülő doktori értekezésemben is részletesen ki fogok térni erre a témára.

a relatív értékelése javul, hanem az abszolút is, mivel  $21/97 < 35/155$ . Ennek akkor lehet jelentősége, ha az értékeléseket nem rangsorolásra használjuk, hanem valamilyen szűkös erőforrás elosztásáról szóló döntésnél.  $\square$

**3.3. Példa.** Létezik ennél kisebb méretű ellenpélda is. Legyen  $N = \{X_1, X_2, X_3\}$ , illetve

$$\mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{R}'_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Az invariáns értékelővektor  $I(\mathbf{R}_3) = (14, 16, 15)/45$ , így a rangsor  $X_2 \succ X_3 \succ X_1$ , majd az  $X_1$  alternatíva egy újabb vereséget szenved el  $X_2$  ellen. Amennyiben az eljárás nem manipulálható, az első és utolsó helyezetteknek nem szabad változnia. Ehhez képest  $I(\mathbf{R}'_3) = (21, 26, 20)/67$ , tehát  $X_2 \succ X_1 \succ X_3$ , az  $X_1$  objektum, rosszabb teljesítménye ellenére, a második helyre ugrott előre. A probléma oka hasonló a korábbihoz, és  $14/45 < 21/67$  következtében ismét javul  $X_1$  abszolút értékelése is.

**3.4. Következmény.** A PageRank módszer nem monoton.

Tehát Slutzki és Volij (2006) ajánlását érdemes óvatosan kezelni, erősen megfontolandó az invariáns (PageRank) módszer tudományometriai alkalmazása. Ez bizonyos sportágaknál is gondot okozhat, például egy tenisz örökranglista esetén megtörténhet az a furcsaság, hogy valaki jobban járt volna, ha több vereséget gyűjt össze egy kiemelkedő játékos ellen (Radicchi, 2011).

Az invariáns módszer nem monotonitására – véletlen generált mátrixokkal – könnyű ellenpéldát találni, a fair bets eljárásra és a két duálra azonban nem sikerült ilyet adnunk.

**1. Sejtés.** A duál invariáns, fair bets és duál fair bets módszerek mindegyike monoton.

A monotonitás meglehetősen szoros összefüggésben van a *nemnegatív reagálás a győzelemre* (nonnegative responsiveness to the beating relation) tulajdonsággal, amit a fair bets eljárás teljesít, ez is alátámaszthatja a fenti sejtést (González-Díaz et al., 2014).

**3.2. Állítás.** A lambda módszer nem monoton.

*Bizonyítás.* Bemutatunk egy minimális méretű, nem túl nagy értékeket tartalmazó ellenpéldát.

**3.4. Példa.** Legyen  $N = \{X_1, X_2, X_3\}$ , illetve

$$\mathbf{R}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{R}'_4 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A lambda módszer értékelővektora  $\lambda^1(\mathbf{R}_4) = (20, 16, 21)/57$ , így a rangsor  $X_3 \succ X_2 \succ X_1$ , majd az  $X_1$  alternatíva egy újabb vereséget szenved el

$X_2$  ellen. Amennyiben az eljárás nem manipulálható, a második és harmadik helyezetteknek nem szabad változnia. Ehhez képest  $\lambda^1(\mathbf{R}'_4) = (25, 24, 24)/73$ , tehát  $X_1 \succ (X_2 \sim X_3)$ , az  $X_1$  objektum lett a győztes:  $X_1$  gyengébb teljesítményének hatására  $X_2$  helyzete javul, ami negatívan hat  $X_3$  értékelésére. Itt azonban  $X_1$  abszolút súlya csökken, mert  $20/57 > 25/73$ , bár ennek mértéke nyilvánvalóan kisebb, mint  $X_3$ -é.  $\square$

**3.5. Példa.** A 3.4. példa alapján az a gyanúnk támadhat, hogy a lambda módszer alkalmazásakor a monotonitás  $r'_{ij} > r_{ij}$  feltétele által (elvileg) negatívan érintett  $X_i$  objektum abszolút értékelése mindig csökken (szemben az invariáns eljárással, lásd a 3.2. és a 3.3. példákat), ez azonban nem igaz. Legyen  $N = \{X_1, X_2, X_3\}$ , illetve

$$\mathbf{R}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{R}'_5 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Itt  $2 = (r_5)'_{12} > (r_5)_{12} = 1$ , de  $\lambda^1(\mathbf{R}_4) = (78, 80, 85)/243$  és  $\lambda^1(\mathbf{R}_5) = (91, 100, 90)/281$ , azaz  $X_3 \succ_{\mathbf{R}_5}^{\lambda^1} X_1$  és  $X_1 \succ_{\mathbf{R}'_5}^{\lambda^1} X_3$ , valamint  $78/243 < 91/281$ . A 3.2. állítás bizonyításában ezt a példát is megadhattuk volna, de az ott szereplő egyszerűbb, kisebb számokat tartalmaz.

A 3.6. tétel szerint szoros kapcsolat áll fenn az invariáns, lambda és fair bets módszerek között, ezért az 1. sejtés tükrében, érdemes megnézni az eddig vizsgált példákat internal slackening eljárás minden  $\alpha \in (0, \infty)$  paraméterértékére.

*3.1. Megjegyzés.* Az  $\mathbf{R}_3$  és  $\mathbf{R}'_3$  mátrixok mellett  $\lambda^1(\mathbf{R}_3) = (7, 8, 6)/21$  és  $\lambda^1(\mathbf{R}'_3) = (28, 39, 24)/91$ , vagyis  $p(\mathbf{R}_3)^\top = (2, 2, 5)$  és  $p(\mathbf{R}'_3)^\top = (3, 2, 5)$  következtében

$$\lambda^\alpha(\mathbf{R}_2) \propto \left( 7 \cdot \frac{4+2\alpha}{3+3\alpha}, 8 \cdot \frac{4+2\alpha}{3+3\alpha}, 6 \cdot \frac{10+2\alpha}{6+6\alpha} \right),$$

és

$$\lambda^\alpha(\mathbf{R}'_2) \propto \left( 28 \cdot \frac{6+2\alpha}{4+4\alpha}, 39 \cdot \frac{4+2\alpha}{3+3\alpha}, 24 \cdot \frac{10+2\alpha}{6+6\alpha} \right).$$

Az eljárás akkor nem erősen monoton, ha  $X_1 \preceq_{\mathbf{R}_3}^{\lambda^\alpha} X_2$ , de  $X_1 \succeq_{\mathbf{R}_3}^{\lambda^\alpha} X_2$ , vagy  $X_1 \preceq_{\mathbf{R}_2}^{\lambda^\alpha} X_3$ , de  $X_1 \succeq_{\mathbf{R}_3}^{\lambda^\alpha} X_3$ , vagy  $X_2 \succeq_{\mathbf{R}_3}^{\lambda^\alpha} X_3$ , de  $X_2 \preceq_{\mathbf{R}_3}^{\lambda^\alpha} X_3$ . Itt  $7(4+2\alpha)/(3+3\alpha) \leq 8(4+2\alpha)/(3+3\alpha)$  minden  $\alpha \geq 0$  esetén teljesül a 3.2. és a 3.3. következmények alapján, míg a  $28(6+2\alpha)/(4+4\alpha) \geq 39(4+2\alpha)/(3+3\alpha)$  feltétel  $\alpha \geq 0$  mellett lehetetlen. Ugyanakkor  $7(4+2\alpha)/(3+3\alpha) \leq 6(10+2\alpha)/(6+6\alpha)$ , ha  $\alpha \leq 1/4$ , és  $28(6+2\alpha)/(4+4\alpha) \geq 24(10+2\alpha)/(6+6\alpha)$  tetszőleges  $\alpha \geq 0$ -ra, következésképp  $\alpha \leq 1/4$  fennállásakor (például az invariáns módszernél) a  $\lambda^\alpha$  pontozási eljárás manipulálható. Végül  $8(4+2\alpha)/(3+3\alpha) \geq 6(10+2\alpha)/(6+6\alpha)$ , amennyiben  $\alpha \geq 1/5$ , de  $39(4+2\alpha)/(3+3\alpha) \leq 24(10+2\alpha)/(6+6\alpha)$  semmilyen  $\alpha \geq 0$  mellett sem teljesül.

A fentiek alapján nyitott kérdés, hogy az internal slackening módszer pontosan milyen  $\alpha$  értékek mellett nem monoton:  $\alpha = 0$  (invariáns) és  $\alpha = 1$



(lambda) mellett a 3.1. és a 3.2. állítások szerint biztosan nem az, utóbbi viszont valószínűleg nem éles korlát. Az 1. sejtés alapján a fair bets módszer, az  $\alpha \rightarrow \infty$  eset már monoton.

Az 1. sejtés alapján logikusnak tűnik, hogy a duál fair bets és duál invariáns módszerek „között” (lásd a 3.7. tételt) elhelyezkedő duál lambda módszer is mentes a manipulációtól; itt sem sikerült ellenpéldát találnunk.

**2. Sejtés.** *A duál lambda módszer monoton.*

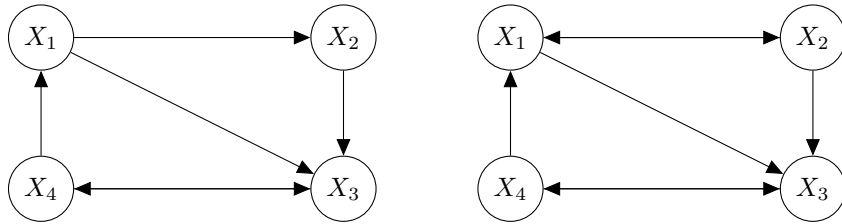
Az 1. és a 2. sejtések alapján megfogalmazható egy újabb megézés.

**3. Sejtés.** *A duál internal slackening módszer tetszőleges  $\alpha \geq 0$  esetén monoton.*

Az internal slackening módszert Slikker et al. (2012) kizárólag súlyozatlan irányított gráfok esetén tárgyalja, ezért érdemes megvizsgálni, az  $\mathcal{R}_N$ -nél szűkebb  $\mathcal{G}_N$  halmazon találunk-e ellenpéldát.

**3.3. Állítás.** *A lambda módszer az erősen összefüggő, súlyozatlan irányított gráfok  $\mathcal{G}_N$  osztályán sem monoton.*

*Bizonyítás.*  $n = 3$ -ra nem találtunk ellenpéldát.



(a) Az  $(N, \mathbf{R}_6)$  rangsorolási probléma

(b) Az  $(N, \mathbf{R}'_6)$  rangsorolási probléma

3. ábra. A 3.6. példa rangsorolási problémái

**3.6. Példa.** Legyen  $N = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ , illetve

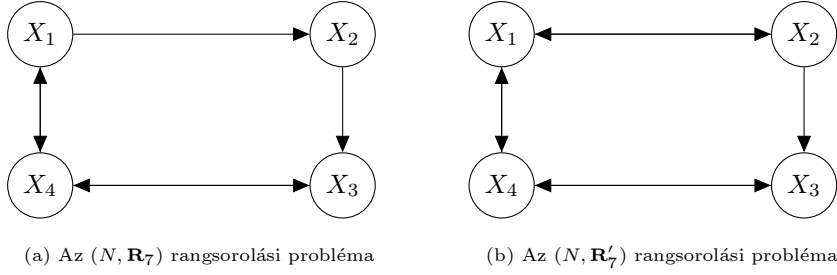
$$\mathbf{R}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{R}'_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A két rangsorolási probléma a 3. ábrán látható. A lambda módszer értékelővektora  $\lambda^1(\mathbf{R}_6) = (2, 1, 2, 3)/8$ , így a rangsor  $X_4 \succ (X_1 \sim X_3) \succ X_2$ , majd  $X_1$  vereséggel zár  $X_2$ -vel szemben. Amennyiben az eljárás nem manipulálható,  $X_1$  nem előzheti meg  $X_3$ -at. Ehhez képest  $\lambda^1(\mathbf{R}'_6) = (3, 3, 2, 3)/11$ , tehát  $(X_1 \sim X_2 \sim X_4) \succ X_3$ , az  $X_1$  objektum (holtversenyben) győztes lett. Ráadásul  $X_1$  abszolút súlya is emelkedik, mert  $1/4 < 3/11$ .  $\square$

Már csak a pozíciós erő monotonitásának vizsgálata maradt hátra.

**3.4. Állítás.** *A pozíciós erő nem monoton.*

*Bizonyítás.*  $n = 3$ -ra nem találtunk ellenpéldát.



4. ábra. A 3.7. példa rangsorolási problémái

**3.7. Példa.** Legyen  $N = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ , illetve

$$\mathbf{R}_7 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{R}'_7 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A két rangsorolási probléma a 4. ábrán látható. A pozíciós erő értékelővektora  $x(\mathbf{R}_7) = (708, 324, 404, 724)/223$  (ez a vektor nem 1-re normalizált), így a rangsor  $X_4 \succ X_1 \succ X_3 \succ X_2$ , majd az  $X_1$  alternatíva vereséggel zár  $X_2$  ellen. Amennyiben az eljárás nem manipulálható,  $X_1$  nem léphet előrébb a rangsorban. Ugyanakkor  $x(\mathbf{R}'_7) = (48, 44, 24, 44)/13$ , azaz  $X_1 \succ (X_2 \sim X_4) \succ X_3$ , az  $X_1$  objektum lett a győztes.  $X_1$  gyengébb teljesítményének hatására  $X_2$  helyzete sokat javul, ez pedig negatívan hat  $X_4$  értékelésére.

Ez a rangsor elég furcsának tűnik, mert az  $X_3 \rightarrow X_2$  irányított él behúzásával egy olyan problémát kapunk, ahol az objektumok helyzete teljesen szimmetrikus. Valóban, ekkor  $p(\mathbf{R}''_7) = (4, 4, 4, 4)$ , ami azt sugallja, hogy  $\mathbf{R}''_7$ -ben  $X_2$ -nek kellene elsőnek,  $X_3$ -nak pedig utolsónak lennie. A pozíciós gyengeségek  $\delta x(\mathbf{R}'_7) = (44, 24, 44, 48)/13$  és  $\delta x(\mathbf{R}''_7) = (4, 4, 4, 4)$ , így  $x^{Cp}(\mathbf{R}'_7) = (4, 20, -20, -4)/13$  és  $x^{Cp}(\mathbf{R}''_7) = (0, 0, 0, 0)$ . Tehát intuíciónkkal a Copeland pozíciós erő van összhangban.  $\square$

A másik két kapcsolódó eljárás manipulálhatóságát nem tudtuk bizonyítani.

**4. Sejtés.** A pozíciós gyengeség és Copeland pozíciós erő módszerek monotonok.

Összességében úgy tűnik, a monotonitás miatt az invariáns (PageRank) módszer helyett célszerűbb a fair bets eljárás, vagy a duálok használata. Amennyiben mégis az előbbi mellett döntünk, célszerű kitérni arra, miként lehet elkerülni az ebből fakadó problémákat.

### 3.6.2 Megfordíthatóság

**3.5. Állítás.** Az invariáns (PageRank), fair bets,  $\lambda$ , internal slackening és pozíciós erő módszerek nem megfordíthatók.

*Bizonyítás.* A 3.1. példában szereplő irányított gráfon egyik eljárás sem teljesíti a megfordíthatóság 2.1. következményben megkövetelt feltételét, miszerint a pontozási eljárás duálja azonos rangsort eredményez. A fair bets módszerre ezt már González-Díaz et al. (2014, Example 4.4) is belátta.  $\square$

Ebből a 2.2. állítás alapján adódik a következő eredmény.

**3.5. Következmény.** *A duál invariáns, duál fair bets, duál  $\lambda$ , duál internal slackening és pozíciós gyengeség (duál pozíciós erő) módszerek nem megfordíthatók.*

**3.6. Állítás.** *A Copeland pozíciós erő megfordítható.*

*Bizonyítás.* A módszer definíciójából adódik:  $x^{Cp}(\mathbf{R})_i \geq x^{Cp}(\mathbf{R})_j \Leftrightarrow x(\mathbf{R})_i - \delta x(\mathbf{R})_i \geq x(\mathbf{R})_j - \delta x(\mathbf{R})_j \Leftrightarrow x(\mathbf{R}^\top)_i - \delta x(\mathbf{R}^\top)_i \leq x(\mathbf{R}^\top)_j - \delta x(\mathbf{R}^\top)_j \Leftrightarrow x^{Cp}(\mathbf{R}^\top)_i \leq x^{Cp}(\mathbf{R}^\top)_j$ .  $\square$

A fair bets módszer alkalmazása elleni egyik legjelentősebb érv a megfordíthatóság hiánya González-Díaz et al. (2014). A Copeland pozíciós erőhöz hasonló ötlettel ez könnyedén kiküszöbölhetőnek tűnik: elég lenne bevezetni a fair bets és a duál fair bets értékelővektorok különbségét.

### 3.6.3 Önkonzisztens monotonitás

Alaposabban tanulmányozva a 3.1. példában kapott rangsorokat, feltűnő, hogy mindegyikben fennáll az  $X_2 \succ X_3$  összefüggés. Ez nem tekinthető pusztán véletlennek, nehéz lenne a fordított sorrend mellett érvelni. Ugyanis mindkét objektum vereséget szenvedett  $X_1$ -től, viszont legyőzte  $X_4$ -et, ilyen tekintetben tökéletesen azonos teljesítményt mutatva. Ellenben  $X_2$  jobbnak bizonyult  $X_3$ -nál, így logikusnak tűnik szigorúan előrébb rangsorolni. Többek között ez is egy, az önkonzisztens monotonitás által előírt követelmény egy pontozási eljárás által adott sorrendre vonatkozóan.

Eszerint a tárgyalt módszerek bizonyos esetekben teljesítik az önkonzisztens monotonitást. Általánosan azonban nem ez a helyzet.

**3.8. Tétel.** *Az invariáns, duál invariáns, fair bets, duál fair bets, lambda, duál lambda, internal slackening, duál internal slackening, pozíciós erő, pozíciós gyengeség és Copeland pozíciós erő módszerek nem önkonzisztens monotonok (Chebotarev és Shamis, 1999).*

*Bizonyítás.* A tételben szereplő mindegyik módszer győzelem-vereség kombináló pontozási eljárás, így nem teljesíthetik az önkonzisztens monotonitást (Chebotarev és Shamis, 1999, Theorem 8). A 2.2. példában az  $(X_i, X_j)$  irányított élt  $r_{ij} = 1$  reprezentálhatja, a páros összehasonlítási mátrix többi eleme pedig 0. Ekkor az invariáns eljárásra  $(X_6 \sim X_7) \succ (X_2 \sim X_3)$ , duáljára  $(X_2 \sim X_3) \succ X_6 \succ X_7$ , a fair betsnél  $(X_2 \sim X_3) \sim (X_6 \sim X_7)$ , duáljánál pedig  $(X_2 \sim X_3) \succ X_6 \succ X_7$ . A  $\lambda$  módszer esetén  $(X_6 \sim X_7) \succ (X_2 \sim X_3)$ , duáljára  $(X_2 \sim X_3) \succ X_6 \succ X_7$ .  $p_2 = p_3 = 1$  és  $s_2 = s_3 = 1$  alapján  $X_2$  és  $X_3$  elődeinek és követőinek száma azonos, valamint  $X_2 \sim^{\lambda^1} X_3$  és  $X_2 \sim^{\delta\lambda^1} X_3$ , ezért a 3.2. következmény szerint  $X_2 \sim^{\lambda^\alpha} X_3$

és  $X_2 \sim^{\delta\lambda^\alpha} X_3$  tetszőleges  $\alpha > 0$ -ra. Végül a pozíciós erő alkalmazásakor  $(X_6 \sim X_7) \succ (X_2 \sim X_3)$ , a pozíciós gyengeségnél  $(X_2 \sim X_3) \succ X_6 \succ X_7$ , míg a Copeland pozíciós erőben  $(X_2 \sim X_3) \succ X_6 \succ X_7$ . Utóbbi és az eljárások duál változatai valamivel jobban teljesítenek, mert az  $X_2 \sim X_3$  és  $X_6 \sim X_7$  feltételekből csak az előbbit sértettek meg, az eredeti változatok viszont mindkettőt.  $\square$

*3.2. Megjegyzés.* Az önkonzisztens monotonitásra adott ellenpélda néhány esetben a szükségesnél bonyolultabb, például a fair bets módszer már  $n = 5$  esetén megsérti azt (González-Díaz et al., 2014).

A 3.8. tétel egyben azt is mutatja, hogy a 3.6.2. szakasz végén említett út, az eredeti és duál értékelővektorok különbségének képzése csak a megfordíthatóság megteremtésére alkalmas, az önkonzisztens monotonitás megsértésének kiküszöbölésére nem (ahogy a pozíciós erőnél is látszik), hiszen mindegyik módszernél fennáll az  $X_2 \sim X_3$  döntetlen viszony.

#### 3.6.4 Az értelmezési tartomány kérdése

A 3.2.3. alfejezetben bemutattuk a fair bets módszer egy lehetséges kiterjesztését reducibilis  $\mathbf{R}$  páros összehasonlítási mátrixokra, ami értelemszerűen megtehető az invariáns és az internal slackening eljárások, illetve ezek duáljai esetén is. Itt két, ezzel kapcsolatos kritikus pontot tárgyalunk.

A párhuzamos ligák nem összehasonlíthatósága azért vitatható, mert ez még nem jelenti azt, hogy a kettő között semmilyen kapcsolat sem található: egy  $G$  irányított gráf erős összefüggőségének hiányában irányítatlan változata még lehet összefüggő. A 2.1. példában igény mutatkozhat az  $[X_1]$  és  $[X_5]$  ligák közötti különbségtételre, amit az imént tárgyalt önkonzisztens monotonitás követelménye is támogat, miszerint  $X_1$  egyértelműen jobbnak tekinthető  $X_5$ -nél, ugyanis mindketten legyőzték  $X_3$ -at és  $X_4$ -et, de az előbbi  $X_2$ -t is. Slikker et al. (2012) meg is mutatja, hogy az internal slackening módszer kiterjeszthető az ilyen, több legerősebb ligát tartalmazó esetekre. Ugyanakkor ezen általánosítások mindegyike a korábinál bonyolultabb tárgyalást igényel, jelentős mértékben rontja az áttekinthetőséget. Így, amennyiben ilyen irányú igény merül fel, célszerű az általánosabb értelmezési tartományt megengedő eljárásokhoz, a pozíciós erőhöz, az általánosított sorösszeghez vagy a legkisebb négyzetek módszeréhez fordulni.

A másik kérdés, hogy minden esetben jó megoldás jelent-e az, ha a gyengébb liga legjobb tagja is hátrébb kerül, mint az erősebb leggyengébb résztvevője?

**3.8. Példa** (Conner és Grant, 2000). Legyen  $N = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$  és

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 99 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 99 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vagyis  $X_1$  nagymértékben jobbnak bizonyult  $X_2$ -nél (100-ból 99-szer legyőzte),  $X_3$  pedig a  $X_4$ -nél. A két halmaz közötti átjárást, az összefüggőséget az biztosítja, hogy  $X_1$  egyszer  $X_4$ -et is megverte. Ekkor a két liga  $\{X_1, X_2\}$  és  $\{X_3, X_4\}$ , ebben a természetes sorrendben. Emiatt az  $X_2$  alternatíva  $X_3$  elé fog kerülni a rangsorban, ez azonban egyedül  $X_1$  és  $X_4$  összehasonlításának a másik kettőhöz képest kevésbé megbízható kimenetelén alapul. Amennyiben figyelembe vesszük az  $r_{14}$  elem erős bizonytalanságát, sokkal logikusabbnak tűnik az  $X_1 \succ X_3 \succ X_2 \succ X_4$  sorrend felállítása. Néhány módszernél ez érvényesül is, például a legkisebb négyzetek által szolgáltatott, 0-ra normalizált értékelővektor (25, -24, 24, -25).

Chebotarev (1994) ugyancsak ezzel érvel az általánosított sorösszeg használata mellett: irreducibilis páros összehasonlítási mátrixok esetén a különböző ligák között csak a körmérkőzéses esetben létezik egyértelmű sorrend.

## 4 Alkalmazások

### 4.1 A páros összehasonlítások felhasználásának néhány területe

Országok gazdasági teljesítményének mérésekor elengedhetetlen az eltérő ár-színvonalból adódó különbségek kiszűrése. Bár az egyes fogyasztási javak és szolgáltatások árai elvben jól mérhetők, az aggregáció során nem egyértelmű, milyen termékszerkezettel kell azokat összesúlyozni. Tekintsük a vizsgált országok  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  és a termékek  $M = \{1, 2, \dots, m\}$  halmazát, legyen a  $k \in M$  fogyasztási jószág ára a  $i \in N$  országban  $p_k^i$ , mennyisége pedig  $q_k^i$ . A leggyakrabban használt Fisher-index (Fisher, 1922) az  $i$  és  $j$  ország árszínvonalának összehasonlítására (a  $p$  felső index arra utal, hogy az árakat vetjük össze egymással):

$$F_{i/j}^p = \left( \prod_{\ell \in N} \frac{\sum_{k \in M} q_k^\ell p_k^i}{\sum_{k \in M} q_k^\ell p_k^j} \right)^{1/n}$$

Ez a mutató rendelkezik a reciprocitási tulajdonsággal ( $F_{j/i}^p = 1/F_{i/j}^p$ ), ugyanakkor semmi sem garantálja tranzitivitását ( $F_{i/k}^p = F_{i/j}^p \cdot F_{j/k}^p$ ), a multiplikatív módon felírt páros összehasonlítás mátrix inkonzisztens lehet. Ennek kezelésére többnyire a legkisebb négyzetek eljárást használják, ami a vásárlóerő-paritás számításában – kidolgozói nevéből – *EKS*-módszerként ismert (Éltető és Köves, 1964; Szulc, 1964). Az azóta eltelt 50 évben sem módosítottak érdemben a kiindulási alapokon. Itt az egyenlő súlyozás módosítása jelenthet új kutatási irányt, miután a magas szinten aggregált adatok megbízhatóságáról számos információ áll rendelkezésre, például a  $\sum_{k \in M} q_k^\ell p_k^i / \sum_{k \in M} q_k^\ell p_k^j$  hányadosok eltérése különböző  $\ll N$  országokra az egyes országok termékszerkezetének hasonlóságát is mutathatja (Rao és Timmer, 2003).

A tudományos teljesítmények számszerűsítésére felmerülő igények kielégítése gyakran folyóiratok / tudományos kutatók / szakmai műhelyek egymásra

való hivatkozásai alapján történik. Ezek a referenciák megadják egy kiválasztott objektumpár összehasonlításának eredményét, melyek segítségével képet kapunk azok jelentőségéről. Ehhez még az sem szükséges, hogy a kiválasztott folyóiratok azonos tudományterületekről származzanak: elegendő lehet, ha bármely kettő között találunk olyan láncot, ami alapján feltárható azok relatív fontossága. Itt azonban megjelenik egy új tényező, a vizsgált időszak alatt megjelent cikkek száma: egy hosszabb folyóiratra értelemeszerűen nagyobb valószínűséggel érkeznek külső hivatkozások.

A jól ismert impakt faktor (Garfield, 1955) egyáltalán nem tesz különbséget a hivatkozások között, amit többen komoly hibának tekintenek (Rétallér és Tasnádi, 2013). Pinski és Narin (1976) az invariáns módszer egy, a megjelent cikkek számával korrigált változatát vezette be a folyóiratok rangsorolására, az általuk adott eljárást Palacios-Huerta és Volij (2004) karakterizálta. Kóczy és Nichifor (2013) megmutatta, hogy mindkettő érzékeny a cikkek darabolására, ezért egy ezt kiszűrő módosítást javasolt, mely azonos a fair bets módszerrel. Kóczy és Strobel (2010) egy másik eljárást, a *tournament* módszert ajánlja az invariáns módszer hibáinak kiküszöbölésére. Ez nem veszi figyelembe a megjelent cikkek számát, ezért – számos más, a 3.1. alfejezetben említett eljárás mellett – egyszerűen beilleszthető a mi tárgyalásunkba. Hasonló kérdések merülnek fel weblapok rangsorolásánál, ilyen elven alapul a Google keresőmotorjának működése is (Brin és Page, 1998).

A feladat nem ismeretlen a pszichológiában sem, az elsők között bukkant fel a Thurstone (1927) cikkben. A későbbiekben több pszichológus játszott úttörő szerepet a rangsorolási módszerek kidolgozásában (Gulliksen, 1956; Kaiser és Serlin, 1978). E területen azért lehet hasznos a páros összehasonlítások bevezetése, mert a kísérleti alanyok gyakran nem képesek abszolút skálán értékelni az egyes tényezőket, csak azok relatív viszonyának megbízható leírása várható tőlük.

Hasonló problémák jelentkezhetnek egy konferenciára beérkezett absztraktok elfogadásakor: mivel egy-egy értékelésre felkért szakember csak az általa kapott dolgozatokat látja, nem tudja megítélni a teljes mezőny erejét. Ennek következtében az általa adott pontszám nem ritkán erősen szubjektív, vannak szigorú és engedékeny bírálók, az ebből eredő torzítások kiszűrésében pedig a páros összehasonlítási módszertan nyújthat segítséget (Bozóki et al., 2013). A megközelítést borszakértők értékelésére is alkalmazták (London és Csendes, 2013). Ugyanez érvényes a napjainkban egyre népszerűbb internetes termékértékelő és -összehasonlító oldalak esetében. Jiang et al. (2011) a Netflix prize (<http://www.netflixprize.com>) adatbázist használta filmek rangsorolására, a páros összehasonlítások kimenetelét egy-egy kiválasztott néző értékelései alapján meghatározva, miáltal az eljárás alkalmas a beérkező vélemények különböző skálázásának kiküszöbölésére.

Sok, több százas vagy ezres nagyságrendű, egymástól többé-kevésbé független egyéni döntés alapján nagy biztonsággal állíthatók fel különböző sorrendek. A módszertant felsőoktatási intézmények felvételizői preferenciák segítségével történő rangsorolására használta Avery et al. (2013), egy nemrég megjelent hazai cikkben is hasonló megközelítéssel találkozunk (Telcs et al.,

2013). Machado et al. (2012) pedig kórházak értékelését javasolta az orvos-rezidensek választásainak felhasználásával.

Szavazási modellekben ezzel analóg feladatot jelent a preferenciák aggregálása: itt a két, egymással versengő alternatívára leadott szavazatok megosztása képviselheti a páros összehasonlítás eredményét (Chebotarev és Shamis, 1998).

Végül az egyik klasszikus alkalmazási terület a sport. Zermelo (1929) tanulmányát számos olyan cikk követte, mely a gyakorlatban felmerülő különböző problémák megoldására tett kísérletet: Radicchi (2011) például egy tenisz örökranglista felállítását javasolta a PageRank-módszer alkalmazásával. Más megközelítéssel ugyanerre tett kísérletet Temesi et al. (2012). Csató (2013a) a svájci rendszerben<sup>10</sup> lebonyolított 2010-es férfi (open) sakkolimpián résztvevő csapatok rangsorolását végezte el egy páros összehasonlítási modell segítségével, megmutatva, hogy az alternatív sorrendek több szempontból kedvezőbb tulajdonságokkal bírnak, mint a hivatalos végeredmény. A sportbeli alkalmazások előnyei között említendő a hatalmas mennyiségben, kis utánajárással elérhető, kevés szubjektív elemet tartalmazó adatok felhasználásának lehetősége.

## 4.2 Megoldási keret a gyakorlatban felmerülő problémákhoz

Az alkalmazások során gyakran kérdéses, hogy a páros összehasonlítások ismert kimenetelei pontosan milyen  $\mathbf{R}$  mátrixot eredményeznek. Többnyire az összehasonlítások számának megadása jelenti a kisebb problémát: például egy svájci rendszerű versenyenél nyilvánvaló, hogy a lejátszott mérkőzések mindegyike azonosan egy súllyal szerepel, míg a többi alternatívapár esetén az összehasonlítások hiányoznak (Csató, 2013a).

A többszörös összehasonlítások, a súlyozás számos megfontolásból adódhat, például:

1. Egymásra való hivatkozásoknál: a vizsgált időszak alatt bármennyi referencia születhet egy adott cikkre vagy folyóiratra;
2. Nemzetközi árszínvonal-összehasonlításnál a két ország termékkosarának eltérése szolgáltatott információt a Fisher-index megbízhatóságáról (Rao és Timmer, 2003);
3. A sportbajnokságok, szavazások vagy pszichológiai vizsgálatok gyakran  $m$  számú fordulóra bonthatók, melyek mindegyikében egy alternatívapár legfeljebb egyszer kerül összehasonlításra. Ilyenkor logikus választásnak tűnik az ezek kimeneteleit leíró  $\mathbf{R}^{(p)}$ ,  $p = 1, 2, \dots, m$  mátrixok olyan megválasztása, hogy  $r_{ij}^{(p)} + r_{ji}^{(p)} = 1$  teljesüljön, amennyiben az  $X_i$  és  $X_j$  objektumok összehasonlításra kerültek, illetve  $r_{ij}^{(p)} + r_{ji}^{(p)} = 0$ , ha

<sup>10</sup>A svájci rendszer gyakori módszere a versenyek lebonyolításának olyan sportokban, ahol nem körmérkőzéses rendszerben játszanak és valahogy össze kell párosítani a fordulóban az egymás ellen játszó játékosokat vagy csapatokat.

nem. Többnyire azonban ekkor is az általunk használt, aggregált  $\mathbf{R} = \sum_{p=1}^m \mathbf{R}^{(p)}$  mátrixot szokás vizsgálni (González-Díaz et al., 2014). Ez nem véletlen: Chebotarev és Shamis (1999) bizonyítja, hogy egyetlen, az egyéni  $\mathbf{R}^{(p)}$  mátrixokon alapuló rangsoroló eljárás sem elégíti ki a 2.3.5. alfejezetben bemutatott önkonzisztens monotonitás tulajdonságot, ha az alternatívák közötti összehasonlítások száma nem azonos.

Temesi et al. (2012) egy tenisz örökranglista felállítására tett kísérletet a legjobb játékosok egymás elleni mérkőzései alapján. Utóbbiak száma tükrözheti a páros összehasonlítás megbízhatóságát, a cikk azonban eltekintett ennek kezelésétől. Az ok elsősorban az adatokban keresendő: például egy 16 : 0-s egymás elleni mérleg azt jelentené, hogy a súlyozott esetben óriási jelentősége lenne ennek a tökéletes, más játékosok számára lényegében megismételhetetlen dominanciának. Ehelyett (az egyik kódolásban) az  $\mathbf{A}$  eredménymátrixon keresztül került beépítésre ez az információ.

Az összehasonlítások számának meghatározása után még mindig hátravan azok kimenetelének definiálása. Erre számtalan stratégia választható, mindenestre célszerű több lehetséges kódolást párhuzamosan vizsgálni és egymással összevetni. Csató (2013a) például megmutatja, hogy az eredményül kapott sorrend nem érzékeny a különböző intenzitású győzelmek matematikailag elfogadható (monoton) transzformációira. Optimális esetben, a rangsorolási eljárások axiomatikus tulajdonságainak figyelembevételével, lehetőség nyílik a gyakorlati példában megfigyelt eredmények átkódolásának elméleti alátámasztására is (Csató, 2012).

A Közgazdasági Szemle márciusi számában Telcs et al. (2013) a felvételizők preferenciái alapján végezte el felsőoktatási intézmények rangsorolását: az ezek közötti páros összehasonlítások kimenetele a beadott jelentkezési lapok segítségével adható meg. Azonban korántsem egyértelmű, vajon mikor lehet két csúcsot összekötni, mikor mondhatjuk azt, hogy az egyik egyetem egyértelműen jobb a másiknál. A szerzők az alábbi feltételezésekkel éltek:

1. Nincs különbség a preferenciák erőssége között;
2. A közvetett preferenciák is számítanak (az első helyen megjelölt intézmény jobb a harmadiknál, negyediknél stb.);
3. A megjelölt szakok preferáltak az összes kihagyotthoz képest („A nem megjelölt szakok kevésbé preferáltak, mint bármelyik megjelölt”);
4. A nem megjelölt szakok egyenrangúak, a köztük levő viszony döntetlennek minősül.

Ezek közül az első kettő aligha vitatható. A harmadik pont, a megjelölt objektumok összes kihagyotthoz képesti előnyben részesítése tekintetében már inkább indokolt az óvatosság. Több dolog is visszatarthat egy felvételizőt az általa legjobbnak gondolt szak megjelölésétől, például a további szakokra történő jelentkezés pénzületi (és adminisztrációs) költségei, a magas pontszámok miatt számára eleve elérhetetlen helyek kihagyása,



vagy az egyetemre járás járulékos költségeinek (szállás, étkezés) nagysága. Ez indokolja, hogy Avery et al. (2013) hasonló vizsgálata az intézmények közötti preferenciákat csak a megadott választási halmazon belül értelmezi, valamelyik szakot akkor tekinti jobbnak egy másiknál, ha előrébb szerepel a felvételiző jelentkezési lapján. Végül a negyedik feltevés, a nem megjelölt objektumok egyenrangúként besorolását mellőzve – a hiányzó összehasonlítások megengedésével – célszerű lehet a két alternatíva összehasonlításának eredményét ismeretlennek tekinteni, vagyis az  $r_{ij}^{(p)} = r_{ji}^{(p)} = 0,5$  helyett az  $r_{ij}^{(p)} = r_{ji}^{(p)} = 0$  megoldást alkalmazni.

Összességében a gyakorlati alkalmazások egyik központi kérdése a valóságból származó megfigyelések matematikai nyelvre fordítása, ezért a páros összehasonlítási problémák megoldása során az alábbi lépések követését ajánljuk:

1. A matematikai módszerek alkalmazhatóságának ellenőrzése: például, ha a kiválasztott objektumok képesek befolyásolni a páros összehasonlítások eredményét, ösztönözve voltak-e a minél jobb eredmény elérésére (lásd a 3.6. alfejezetet);
2. Az egyes alternatívapárokra elvégzett összehasonlítások számának megadása;
3. A páros összehasonlítások kimenetelének kódolása;
4. A rangsorolási eljárás kiválasztása, lehetőség szerint az axiomatikus megközelítés tükrében;
5. A kapott sorrendek érzékenységvizsgálata a kiinduló hipotézisek szempontjából;
6. Az eredmények elemzése, összehasonlítása a már ismert rangsorokkal, megoldásokkal.

A folyamat természetesen nem egyirányú, szekvenciális. Az adatok elemzése rámutathat a kiinduló feltevés vagy a matematikai kódolás és a kiválasztott rangsorolási módszerek korlátaira, ráadásul az összehasonlítások súlyozása sem mindig függetleníthető azok kimenetelének meghatározásától (Temesi et al., 2012). A keret néha szűkíthető is, statisztikai jellegű vizsgálatokban például az első lépés értelemszerűen kimarad.

## 5 Összefoglalás

Tanulmányunkban a páros összehasonlításokon alapuló rangsorolás egy általános modelljét és ennek gyakorlati alkalmazásait tekintettük át. Részletesen tárgyaltunk néhány pontozási eljárást, az invariáns (PageRank), fair bets, internal slackening és pozíciós erő módszereket. Bemutattuk az internal slackening által az invariáns és fair bets eljárások között teremtett kapcsolatot,

illetve az utóbbiak egy karakterizációját. Ugyanakkor azt találtuk, hogy más tulajdonságok szempontjából bizonyos módszerek alkalmazása vitatható. A monotonitás megsértése miatt az alternatívák ellenérdekelték lehetnek a jobb teljesítmény elérésében, ami elsősorban akkor előnytelen, ha lehetőségük van a páros összehasonlítások kimenetelének befolyásolására. A megfordíthatóság követelménye szerint a rangsorolási probléma „ellentettjét” véve, az alternatívák rangsorának is az ellenkezőjére kell változnia. Ezen axióma alapján bevezettük a pontozási eljárások duálisát, és azt találtuk, hogy azok jellemzően jobban teljesítenek a monotonitás szempontjából, bár itt még maradt néhány nyitott probléma. Ezt a két tulajdonságot egyedül a Copeland pozíciós erő teljesíti, az önkonzisztens monotonitás által előírt intuitív feltételt viszont, az összes többihez hasonlóan, megsérti. A pozíciós erő kivételével a többi módszernél nehézséget jelenthet az értelmezési tartomány korlátozott volta is.

A terület egyik legfontosabb kérdése az ideális pontozási eljárás megtalálása, ebben az axiomatikus tárgyalás kínál segítséget. Számos eljárásnak egyelőre nem ismert a karakterizációja, a meglevő eredmények pedig több szempontból vitathatók. Ezért inkább normatív alapon célszerű döntenie: ha sikerül megindokolni, miért nem jelentenek problémát az egyes kritikus tulajdonságok, akkor a választás kevésbé kifogásolható. Az újabb reprezentációs tételek megalkotásának nehézsége miatt egyelőre az elvárt axiómák összegyűjtése, továbbiakkal történő kiegészítése tűnhet ígéretesnek (González-Díaz et al., 2014).

Az alkalmazások szempontjából tanulságos lehet a különböző módszerek valós és szimulált példákon keresztül történő összevetése, amiből adott esetben kiderülhet, hogy két, látszólag eltérő eljárás valójában nem is áll olyan távol egymástól. A rangsoroláselmélettel foglalkozó kutatások gyakran nem titkolt célja célja az elméletileg megfelelően alátámasztott módszerek bevezetése a napi gyakorlatba, a nem ritkán erősen vitatható heurisztikus eljárások helyett vagy mellett. Erre ösztönözhet a laikusok számára fekete dobozként viselkedő matematikai formulák közérthetővé tétele, ami például a gráfinterpretációkon keresztül érhető el (Shamis, 1994; Brin és Page, 1998; Slikker et al. 2012; Csató, 2013b).

## Irodalom

1. I. Ali, W. D. Cook és M. Kress. On the minimum violations ranking of a tournament. *Management Science*, 32(6):660–672, 1986.
2. A. Altman és M. Tennenholtz. Ranking systems: the PageRank axioms. In *Proceedings of the 6th ACM conference on Electronic commerce*, pages 1–8, 2005.
3. A. Altman és M. Tennenholtz. Axiomatic foundations for ranking systems. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 31(1):473–495, 2008.
4. K. J. Arrow. *Social choice and individual values*. Wiley, New York, 1951.
5. C. N. Avery, M. E. Glickman, C. M. Hoxby és A. Metrick. A revealed preference ranking of U.S. colleges and universities. *The Quarterly Journal of Economics*, 128(1):425–467, 2013.

6. J. C. Borda. Mémoire sur les élections au scrutin. *Histoire de l'Académie Royale des Sciences*, 1781.
7. P. Borm, R. van den Brink és M. Slikker. An iterative procedure for evaluating digraph competitions. *Annals of Operations Research*, 109(1-4):61–75, 2002.
8. D. Bouyssou. Ranking methods based on valued preference relations: A characterization of the net flow method. *European Journal of Operational Research*, 60(1):61–67, 1992.
9. D. Bouyssou. Monotonicity of 'ranking by choosing': A progress report. *Social Choice and Welfare*, 23(2):249–273, 2004.
10. S. Bozóki, J. Fülöp és L. Rónyai. On optimal completion of incomplete pairwise comparison matrices. *Mathematical and Computer Modelling*, 52(1-2):318–333, 2010.
11. S. Bozóki, L. Csató, L. Rónyai és J. Tapolcai. Robust peer review decision process. Kézirat, 2013.
12. R. A. Bradley és M. E. Terry. Rank analysis of incomplete block designs: I. The method of paired comparisons. *Biometrika*, 39(3-4):324–345, 1952.
13. S. Brin és L. Page. The anatomy of a large-scale hypertextual web search engine. *Computer networks and ISDN systems*, 30(1):107–117, 1998.
14. P. Yu. Chebotarev. Generalization of the row sum method for incomplete paired comparisons. *Automation and Remote Control*, 50(3):1103–1113, 1989.
15. P. Yu. Chebotarev. Aggregation of preferences by the generalized row sum method. *Mathematical Social Sciences*, 27(3):293–320, 1994.
16. P. Yu. Chebotarev és E. Shamis. Constructing an objective function for aggregating incomplete preferences. In A. Tangian és J. Gruber (szerk.): *Constructing Scalar-Valued Objective Functions*, volume 453 of *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, pages 100–124. Springer Berlin Heidelberg, 1997.
17. P. Yu. Chebotarev és E. Shamis. Characterizations of scoring methods for preference aggregation. *Annals of Operations Research*, 80:299–332, 1998.
18. P. Yu. Chebotarev és E. Shamis. Preference fusion when the number of alternatives exceeds two: indirect scoring procedures. *Journal of the Franklin Institute*, 336(2):205–226, 1999.
19. G. R. Conner és C. P. Grant. An extension of Zermelo's model for ranking by paired comparisons. *European Journal of Applied Mathematics*, 11(3):225–247, 2000.
20. G. R. Conner és C. P. Grant. Neighborhood monotonicity, the extended Zermelo model, and symmetric knockout tournaments. *Discrete Mathematics*, 309(12):3998–4010, 2009.
21. A. H. Copeland. A reasonable social welfare function. Seminar on Applications of Mathematics to social sciences, University of Michigan, 1951.
22. L. Csató. A paired comparisons ranking and Swiss-system chess team tournaments. Magyar Közgazdaságtudományi Egyesület VI. éves konferencia, 2012. [http://media.coauthors.net/konferencia/conferences/7/LLSM\\_Buch\\_ranking\\_.pdf](http://media.coauthors.net/konferencia/conferences/7/LLSM_Buch_ranking_.pdf).
23. L. Csató. Ranking by pairwise comparisons for Swiss-system tournaments. *Central European Journal of Operations Research*, 21(4):783–803, 2013.
24. L. Csató. A graph interpretation of the least squares ranking method. 2013b. <http://www.sztaki.mta.hu/~bozoki/csatolaszlo/Csato-AGraphInterpretation-2013-manuscript.pdf>. Benyújtva.

25. L. Csató. Páros összehasonlításon alapuló pontozási eljárások monotonitása: önkonzisztencia és önkonzisztens monotonitás – Adalékok a pontozási eljárások axiomatikus tárgyalásához. Műhelytanulmány, Budapesti Corvinus Egyetem, Budapest, 2013c. <http://unipub.lib.uni-corvinus.hu/1399>.
26. T. Csendes és E. Antal. PageRank based network algorithms for weighted graphs with applications to wine tasting and scientometrics. In *Proceedings of the 8th International Conference on Applied Informatics*, pages 209–216, 2010.
27. H. E. Daniels. Round-robin tournament scores. *Biometrika*, 56(2):295–299, 1969.
28. Ö. Éltető és P. Köves. Egy nemzetközi összehasonlításoknál fellépő indexszámítási problémáról. *Statisztikai Szemle*, 42(5):507–518, 1964.
29. I. Fisher. *The making of index numbers: a study of their varieties, tests, and reliability*. Houghton Mifflin, Boston, 1922.
30. D. Gale és L. S. Shapley. College admissions and the stability of marriage. *The American Mathematical Monthly*, 69(1):9–15, 1962.
31. E. Garfield. Citation indexes for science. A new dimension in documentation through association of ideas. *Science*, 122:1123–1127, 1955.
32. J. González-Díaz, R. Hendrickx és E. Lohmann. Paired comparisons analysis: an axiomatic approach to ranking methods. *Social Choice and Welfare*, 42(1):139–169, 2014.
33. H. Gulliksen. A least squares solution for paired comparisons with incomplete data. *Psychometrika*, 21(2):125–134, 1956.
34. B. Hansson és H. Sahlquist. A proof technique for social choice with variable electorate. *Journal of Economic Theory*, 13(2):193–200, 1976.
35. P. J.-J. Herings, G. van der Laan és D. Talman. The positional power of nodes in digraphs. *Social Choice and Welfare*, 24(3):439–454, 2005.
36. P. Horst. A method for determining the absolute affective value of a series of stimulus situations. *Journal of Educational Psychology*, 23(6):418–440, 1932.
37. O. Hudry. A survey on the complexity of tournament solutions. *Mathematical Social Sciences*, 57(3):292–303, 2009.
38. X. Jiang, L.-H. Lim, Y. Yao és Y. Ye. Statistical ranking and combinatorial Hodge theory. *Mathematical Programming*, 127(1):203–244, 2011.
39. H. F. Kaiser és R. C. Serlin. Contributions to the method of paired comparisons. *Applied Psychological Measurement*, 2(3):423–432, 1978.
40. J. G. Kemeny. Mathematics without numbers. *Daedalus*, 88(4):577–591, 1959.
41. L. Á. Kóczy és A. Nichifor. The intellectual influence of economic journals: quality versus quantity. *Economic Theory*, 52(3):863–884, 2013.
42. L. Á. Kóczy és M. Strobel. The invariant method can be manipulated. *Scientometrics*, 81(1):291–293, 2009.
43. L. Á. Kóczy és M. Strobel. The world cup of economics journals: A ranking by a tournament method. IEHAS Discussion Papers 1018, Institute of Economics, Hungarian Academy of Sciences, 2010.
44. J.-F. Laslier. *Tournament solutions and majority voting*. Springer Berlin, 1997.
45. S. J. Liebowitz és J. P. Palmer. Assessing the relative impacts of economics journals. *Journal of Economic Literature*, 22(1):77–88, 1984.

46. A. London és T. Csenedes. HITS based network algorithm for evaluating the professional skills of wine tasters. Carpathian Applied Mathematics Workshop 2013. <http://www.inf.u-szeged.hu/~csenedes/saci13107.pdf>.
47. M. P. Machado, R. Mora és A. Romero-Medina. Can we infer hospital quality from medical graduates' residency choices? *Journal of the European Economic Association*, 10(6):1400–1424, 2012.
48. J. W. Moon és N. J. Pullman. On generalized tournament matrices. *SIAM Review*, 12(3):384–399, 1970.
49. J. H. Morrissey. New method for the assignment of psychometric scale values from incomplete paired comparisons. *Journal of the Optical Society of America*, 45(5):373–378, 1955.
50. F. Mosteller. Remarks on the method of paired comparisons: I. The least squares solution assuming equal standard deviations and equal correlations. *Psychometrika*, 16(1):3–9, 1951.
51. H. Moulin. Choosing from a tournament. *Social Choice and Welfare*, 3(4):271–291, 1986.
52. S. Nitzan és A. Rubinstein. A further characterization of Borda ranking method. *Public Choice*, 36(1):153–158, 1981.
53. I. Palacios-Huerta és O. Volij. The measurement of intellectual influence. *Econometrica*, 72(3):963–977, 2004.
54. R. D. Pasteur. When perfect isn't good enough: Retrodictive rankings in college football. In J. A. Gallian (szerk.): *Mathematics & Sports*, Dolciani Mathematical Expositions 43, pages 131–146. Mathematical Association of America, 2010.
55. M. Pauly. Can strategizing in round-robin subtournaments be avoided? *Social Choice and Welfare*, DOI 10.1007/s00355-013-0767-6, 2013.
56. G. Pinski és F. Narin. Citation influence for journal aggregates of scientific publications: theory, with application to the literature of physics. *Information Processing & Management*, 12(5):297–312, 1976.
57. M. Pintér. A Shapley-érték axiomatizálásai. *Alkalmazott Matematikai Lapok*, 26:289–315, 2009.
58. F. Radicchi. Who is the best player ever? A complex network analysis of the history of professional tennis. *PloS one*, 6(2):e17249, 2011.
59. D. S. P. Rao és M. P. Timmer. Purchasing power parities for industry comparisons using weighted Elteto-Koves-Szulc (EKS) methods. *Review of Income and Wealth*, 49:491–511, 2003.
60. O. Réthallér és A. Tasnádi. Az impakt faktor és jelentősége a közgazdaságtudományban. Műhelytanulmány (working paper), Budapesti Corvinus Egyetem, Budapest, 2013. <http://unipub.lib.uni-corvinus.hu/1281>.
61. A. Rubinstein. Ranking the participants in a tournament. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 38(1):108–111, 1980.
62. T. L. Saaty. *The analytic hierarchy process: planning, priority setting, resource allocation*. McGraw-Hill International Book Co., New York, 1980.
63. E. Shamis. Graph-theoretic interpretation of the generalized row sum method. *Mathematical Social Sciences*, 27(3):321–333, 1994.
64. L. S. Shapley. A value for  $n$ -person games. In H. W. Kuhn és A. W. Tucker (szerk.): *Contributions to the Theory of Games Volume II*, pages 307–317. Princeton University Press, Princeton, 1953.

65. P. Slater. Inconsistencies in a schedule of paired comparisons. *Biometrika*, 48 (3-4):303–312, 1961.
66. M. Slikker, P. Borm és R. van den Brink. Internal slackening scoring methods. *Theory and Decision*, 72(4):445–462, 2012.
67. G. Slutzki és O. Volij. Ranking participants in generalized tournaments. *International Journal of Game Theory*, 33(2):255–270, 2005.
68. G. Slutzki és O. Volij. Scoring of web pages and tournaments—axiomatizations. *Social Choice and Welfare*, 26(1):75–92, 2006.
69. R. Smith. Journal accused of manipulating impact factor. *British Medical Journal*, 314(7079):461, 1997.
70. B. Szulc. Indekszy dla porównan wieloregionalnych. *Przegląd Statystyczny*, 3: 239–254, 1964.
71. A. Telcs, Zs. T. Kosztyán és Á. Török. Hallgatói preferenciasorrendek készítése az egyetemi jelentkezések alapján. *Közgazdasági Szemle*, LX(3):290–317, 2013.
72. J. Temesi, L. Csató és S. Bozóki. Mai és régi idők teniszé – A nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok egy alkalmazása. In T. Solymosi és J. Temesi (szerk.): *Egyensúly és optimum. Tanulmányok Forgó Ferenc 70. születésnapjára*, pages 213–245. Aula Kiadó, Budapest, 2012.
73. L. L. Thurstone. A law of comparative judgment. *Psychological Review*, 34 (4):273–286, 1927.
74. R. van den Brink és R. P. Gilles. Ranking by outdegree for directed graphs. *Discrete Mathematics*, 271(1-3):261–270, 2003.
75. H. P. Young. An axiomatization of Borda’s rule. *Journal of Economic Theory*, 9(1):43–52, 1974.
76. E. Zermelo. Die Berechnung der Turnier-Ergebnisse als ein Maximumproblem der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Mathematische Zeitschrift*, 29(1):436–460, 1929.

#### RANKING METHODS BASED ON PAIRED COMPARISONS

The ranking of the alternatives or selecting the best one are fundamental issues of social choice theory, statistics, psychology and sport. Different solution concepts, and various mathematical models of applications are reviewed based on the international literature. We are focusing on the definition of paired comparison matrix, on main scoring procedures and their relation. The paper gives a theoretical analysis of the invariant, fair bets and PageRank methods, which are founded on Perron-Frobenius theorem, as well as the internal slackening and positional power procedures used for ranking the nodes of a directed graph. An axiomatic approach is proposed for the choice of an appropriate method. Besides some known characterizations for the invariant and fair bets methods, we also discuss the violation of some properties, meaning their main weakness.

*Keywords:* preference aggregation, paired comparison, ranking, characterization

# CONTENTS

BESSENYEI, ISTVÁN: Optimal labor supply with basic income system . . . . .	97
SZINI, RÓBERT: Valuation of surrender risk with correlated insurance risks . . . . .	113
RUFF, FERENC: A possible solution of the determination of number of clusters . . .	135

## CONCEPTS, METHODS

CSATÓ, LÁSZLÓ: Ranking methods based on paired comparisons . . . . .	155
--	-----

# TARTALOM

BESSENYEI ISTVÁN: Optimális munkakínálat rászorultsági nyugdíjrendszer mellett .....	97
SZINI RÓBERT: Visszavásárlási kockázat értékelése korrelált biztosítási kockázatoknál .....	113
RUFF FERENC: Klaszterszámok meghatározásának egy lehetséges megoldása .....	135
FOGALMAK, MÓDSZEREK	
CSATÓ LÁSZLÓ: Páros összehasonlításokon alapuló rangsorolási módszerek .....	155



# SZIGMA

## Matematikai-közgazdasági folyóirat

A Gazdaságmodellezési Társaság lapja

Főszerkesztő:

BESSENYEI ISTVÁN

PTE Közgazdaságtudományi Kar, H-7622 Pécs, Rákóczi út 80.

Tel.: 72/501-599, Fax: 72/501-553

e-mail: [essenyei@ktk.pte.hu](mailto:essenyei@ktk.pte.hu)

Társzerkesztők:

FÜLÖP JÁNOS

e-mail: [fulop@oplab.sztaki.hu](mailto:fulop@oplab.sztaki.hu)

HUNYADI LÁSZLÓ

e-mail: [laszlo.hunyadi@office.ksh.hu](mailto:laszlo.hunyadi@office.ksh.hu)

KOMLÓSI SÁNDOR

e-mail: [komlosi@ktk.pte.hu](mailto:komlosi@ktk.pte.hu)

KOVÁCS ERZSÉBET

e-mail: [erzsebet.kovacs@uni-corvinus.hu](mailto:erzsebet.kovacs@uni-corvinus.hu)

VÍZVÁRI BÉLA

e-mail: [vizvari@cs.elte.hu](mailto:vizvari@cs.elte.hu)

Szerkesztőbizottság:

CSERHÁTI ILONA, FORGÓ FERENC, LIGETI CSÁK, MELLÁR TAMÁS,  
MESZÉNA GYÖRGY, SISAKNÉ FEKETE ZSUZSA, SZÉP KATALIN,  
TEMESI JÓZSEF, VÖRÖS JÓZSEF

Terjeszti a Gazdaságmodellezési Társaság. A kiadvány megjelenését az MTA  
Könyv- és Folyóiratkiadó Bizottsága támogatta.

ISSN 0039-8128

[www.sigma.ktk.pte.hu](http://www.sigma.ktk.pte.hu)