

# fizikai szemle



2021/10

# Fizikai Szemle

MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

A Matematikai és Természettudományi Értesítőt az Akadémia 1882-ben indította  
A Matematikai és Fizikai Lapokat Eötvös Loránd 1891-ben alapította

Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat havonta megjelenő folyóirata.

Támogatók: a Magyar Tudományos Akadémia Fizikai Tudományok Osztálya, az Emberi Erőforrások Minisztériuma, a Magyar Biofizikai Társaság, a Magyar Nukleáris Társaság és a Magyar Fizikushallgatók Egyesülete

Főszerkesztő:  
Lendvai János

Szerkesztőbizottság:

Bíró László Péter, Bokor Nándor, Czitrovszky Aladár, Füstöss László, Gyürky György, Hebling János, Horváth Dezső, Horváth Gábor, Iglói Ferenc, Kiss Ádám, Ormos Pál, Papp Katalin, Simon Ferenc, Simon Péter, Sükösd Csaba, Szabados László, Szabó Gábor, Takács Gábor, Trócsányi Zoltán, Ujvári Sándor

Műszaki szerkesztő:  
Kármán Tamás

A folyóirat e-mailcíme:

[szerkesztok@fizikaiszemle.hu](mailto:szerkesztok@fizikaiszemle.hu)

A lapba szánt írásokat erre a címre kérjük.

A beküldött tudományos, ismeretterjesztő és fizikatanítási cikkek a Szerkesztőbizottság, illetve az általa felkért, a témában elismert szakértő jóváhagyó véleménye után jelenhetnek meg.

A folyóirat honlapja:

<http://www.fizikaiszemle.hu>



A címlapon:

226 darab NAI(TI) egységből álló DALI2 észlelőberendezés a RIKEN kutatóintézetben (lásd Elekes Zoltán írását).

## TARTALOM

Elekes Zoltán: Különleges szigetvilág a neutrongazdag atommagok tengerén 329

*Mit tanulhatunk az extrém rövid élettartamú, nagy  $N/Z$  számmal rendelkező atommagok vizsgálatából?*

Laczik Bálint, Póka György: Tükrös anamorfózis 332

*Az írás a tükrös anamorfózis képkalkotásának összefüggéseit az elemi vektoralgebra eszközeivel, a Maple V. R 13 program segítségével vizsgálja*

Bognár Gergely: A Galilei-per és ami mögötte van 338

*A természettudomány és a vallás szétválásában a per utóéletének fontos szerepe van – állítja a cikk*

## A FIZIKA TANÍTÁSA

Simon Péter: A Mikola-verseny pécsi döntőjének három mérési feladatáról 343

*Érdekes mérési feladatok az utóbbi évek Mikola-versenyeinek pécsi döntőiből*

Tóth Kristóf: A kvantumhatározatlanság a kvantummechanika fénypolarizációs modelljében 349

*A cikk állítása szerint a kvantummechanika modellezésére alkalmas, fotonpolarizációt használó középiskolai tananyagban a határozatlansági elv lényege értelmezhető*

Csontosné Herendi Borbála: Tanítási kísérlet modern „clicker”-ek segítségével 355

*A „clicker” szavazógép alkalmazása felkelti a kevésbé motivált tanulók érdeklődését is*

Beszeda Imre, Stonawski Tamás: Kreatív Fizika Tábor 360

*E különleges nyári tábor célja a gondolkodás és kreativitás fejlesztése, a fizika sokoldalú felfedezése*

## [www.fizikaiszemle.hu/mellekletek](http://www.fizikaiszemle.hu/mellekletek)

Bartos-Elekes István: Számítógépes időközmérés a nagyváradi Ady Endre Líceum Fizikumában

Z. Elekes: A special archipelago in the sea of neutron-rich nuclei

B. Laczik, Gy. Póka: Specular anamorphosis

G. Bognár: The Galilei trial and its background

## TEACHING PHYSICS

P. Simon: Three measurement exercises from the finals of the Mikola Competitions in Pécs

K. Tóth: Quantum uncertainty in the light polarization model of quantum mechanics

B. Csontos-Herendi: Teaching experiment using modern “clickers”

I. Beszeda, T. Stonawski: Creative Physics Camp

## [www.fizikaiszemle.hu/mellekletek](http://www.fizikaiszemle.hu/mellekletek)

I. Bartos-Elekes: Computerized time interval measurement

Fizikai Szemle

MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

megjelenését támogatják:



# KÜLÖNLEGES SZIGETVILÁG A NEUTRONGAZDAG ATOMMAGOK TENGERÉN

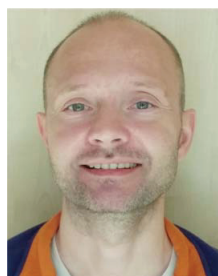
Elekes Zoltán

Atomki, Eötvös Loránd Kutatási Hálózat, Debrecen

A természetben megtalálható kémiai elemek stabil vagy hosszú felezési idejű (több száz év) izotópjainak (körülbelül 200 darab) atommagjaiban a neutronok ( $N$ ) és protonok ( $Z$ ) száma kiegyensúlyozott, arányuk a legkönnyebb hidrogénben 1 és a legnehezebb kaliforniumban is csak 1,6. Az utóbbi évtizedekben a kísérleti technika olyan elképesztő fejlődésen ment keresztül, hogy ma már nagyjából 3200 atommagot ismerünk, amelyek jelentős része extrém  $N/Z$  aránnyal rendelkezik. Sőt, elméleti számolások azt mutatják, hogy az atommagok ezen tengerén olyan feltáratlan területek találhatók, amelyek valószínűleg ugyanennyi atommagot tartalmaznak. Az ilyen egzotikus atommagoknak természetesen rendkívül rövid az élettartama, és felmerül az is, hogy egyáltalán atommagnak tekinthetjük-e a másodperc törtrészéig létező objektumokat. Ez egy messzire vezető kérdés, azonban a területen dolgozó legtöbb kutató, mivel a különlegességekben érdekelt, minden olyan nukleoncsomót atommagnak tekint, amelynek a kísérleti nyomát fel lehet fedezni. Az utóbbi években már a zeptomásodperc ( $10^{-21}$  másodperc) élettartammal rendelkező atommagokról is bebizonyosodott, hogy szerkezettel rendelkeznek, de a yoktomásodperc tartományban is ismerünk körülbelül egy tucat atommagot. Ezek tanulmányozása elengedhetetlen ahhoz, hogy a nukleonokat összetartó erők természetét megfejtjük, mivel szerkezetük jelentősen eltér a stabil atommagokétól, ezért kiváló terepet nyújtanak a versengő elméleti modellek és eltérő megközelítések tesztelésére.

## Az első sziget felfedezése

Az 1940-es években kidolgozott héjmodell és annak kifinomultabb változatai meghatározott pályákra helyezték a nukleonokat, és magyarázatot adtak a kísérletileg tapasztalt mágikus nukleonszámok (8, 20, 28, 50, 82, 126) létezésére. Továbbá az ilyen vagy ezekhez közeli nukleonszámmal rendelkező, a stabilitási völgyben elhelyezkedő atommagok jó leírását adták



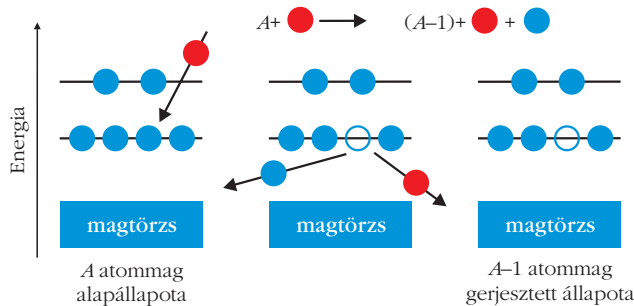
*Elekes Zoltán* az ATOMKI tudományos tanácsadója, a Debreceni Egyetem Fizikai Tudományok Doktori Iskolájának oktatója, témavezetője. Szakterülete az egzotikus atommagfizika és a nukleáris asztrofizika. Magszerkezettel kapcsolatos kísérleteit a japán RIKEN, a német GSI/FAIR és a francia GANIL kutatóintézetekben végezte és jelenleg is végzi. A LUNA nemzetközi együttműködés tagja, ez az olaszországi föld alatti LNGS laboratóriumban az égi objektumokban lejátszódó magreakciókat tárja fel.

[1]. Azonban már a hetvenes években kimutatták, hogy a neutrongazdag  $^{31}_{11}\text{Na}_{20}$  és  $^{32}_{11}\text{Na}_{21}$  atommagok erősebben kötöttek, mint az várható volt a héjmodell alapján. Majd a  $^{32}_{11}\text{Mg}_{20}$  igen alacsony energián megtalált első gerjesztett állapota újabb jelzést adott arra vonatkozóan, hogy az  $N=20$ -as héjefektusok nem a vártak megfelelően alakulnak. Természetesen ezek az anomáliák rögtön kiváltották az elméleti szakemberek érdeklődését. Hamarosan két megközelítés alakult ki. A kísérleti adatokat egyrészt egy úgynevezett *inverziósziget* segítségével sikerült értelmezni, amelyet a  $Z=10-12$ ,  $N=20-22$  tartományban elhelyezkedőnek jósoltak, ahol az atommagok alapállapota deformált, ami ugyan kicsit csökkenti a héjközt, de megőrzi a 20-as neutronszám mágikusságát. Azonban ezek a különleges jelenségek úgy is értelmezhetők voltak, hogy a nukleonpályák energiája megváltozik, ami a héjzáródás megszűnésével jár. Ezzel a megközelítéssel az ezredfordulón japán kutatóknak sikerült megmagyarázni a kísérleti adatokat. Sőt, rámutattak arra is, hogy az inverziósziget határai valószínűleg nem ott vannak és nem olyan élesek, mint azt eredetileg gondolták. Ezen túl a számolások azt is jelezték, hogy máshol (6, 14, 16, 34, ...) viszont várhatók héjzáródások a neutrongazdag atommagok tartományában [2].

## Kísérleti vizsgálatok

A nukleonpályák energetikai viszonyainak feltérképezésére elvileg olyan magreakciót kell alkalmazni, amelyben a bombázó részecske csak a vizsgált pályát szondázza és a többit zavartalanul hagyja. Ezért alacsony energián ( $<10$  MeV/nukleon) általában nukleonátadási reakciókat szoktak használni. Ilyenkor vagy egy egyszerű bombázórészecske (például proton) visz magával egy nukleont az atommagból és egy összetettebb részecske távozik, vagy egy összetettebb részecske (például deuteron) bombázza az atommagot, amely átad egy nukleont az atommagnak.

A stabilitási sávától távoli atommagok rövid élettartama miatt céltárgyat nem lehet belőlük készíteni, ezért magreakciókat rajtuk inverz kinematikában hajtának végre, azaz a vizsgálandó egzotikus atommagokat tartalmazó ionnyalábot hoznak létre és ezt ütköztetik valamilyen stabil céltárggyal. Azonban ahhoz, hogy egyre nagyobb  $N/Z$  arányú atommagok is elérhetővé váljanak a kísérletek számára, létrehozásukkor az energiát is növelni kell (200–1000 MeV/nukleon). Ebben az energiatartományban a nukleonátadási reakciók már nem elég hatékonyak, ezért manapság nukleonkiütési reakciókat alkalmaznak (1. ábra).

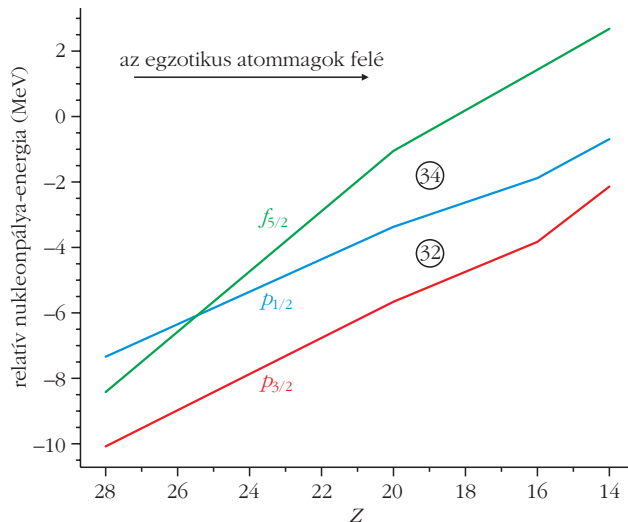


1. ábra. Nukleonkiütési magreakció sematikusa. A kék és piros körök a nukleonokat jelzik, amelyek megegyezők is lehetnek.

Ilyenkor az  $A$  atommag reakcióban részt nem vevő magtörzse feletti pályákon elhelyezkedő, úgynevezett valencianukleonok közül a céltárgy egy nukleonja kiüt egy másikat, így egy eggyel kisebb tömegszámú  $A-1$  atommag keletkezik alap- vagy gerjesztett állapotban, attól függően, hogy a kiütés melyik pályáról történik, illetve kirepül két nukleon is. Az ilyen egyszerű, alacsony energiájú gerjesztett állapot  $\gamma$ -sugárzás kíséretében elbomlik az alapállapotba, és a sugárzás energiája megadja a gerjesztett állapot energiáját.

Az inverziószigetet jól leíró, korábban említett japán héjmodellszámítások (mélyebben érdeklődőknek az irodalomjegyzékben található, az ismeretterjesztésen túlmutató összefoglaló cikket ajánlom [3]) azt mutatták, hogy a 32-es neutronszám környékén a nukleonpályák jelentősen átrendeződnek (2. ábra). A stabilitási vonaltól (nikkelizotópok,  $Z = 28$ ) protonok elvételével az egzotikus atommagok felé haladva, a valenciapályák között már jelentős héjköz alakul ki a kalcium- ( $Z = 20$ ) és az argonizotópoknál ( $Z = 18$ ), ami a 32-es és a 34-es neutronszámok mágiakusságát okozza. Ezt az előrejelzést már csaknem húsz évvel ezelőtt publikálták, de kísérletileg néhány évvel ezelőtt sikerült csak kimutatni először a kalcium-, majd az argonizotópoknál is. A 32-es neutronszám mágiakusságát, illetve arra utaló jeleket is felfedezték, hogy a 34-es héjköz is nagy.

Az utóbbi igazolásának és az előbbi ellenőrzésének érdekében az Atommagkutató Intézet vezetésével ezért célba vettük az  $^{51}_{18}\text{Ar}_{33}$  atommagot, amely 33 neutronnal rendelkezik, és így kiváló terep mind a 32-es, mind pedig a 34-es héjzáródás vizsgálatára, ugyanis első két gerjesztett állapota úgy áll elő, hogy egy neutron a  $p_{1/2}$ , illetve az  $f_{5/2}$  pályára emelünk. A világ vezető magfizikai gyorsítókomplexumában, a japán RIKEN kutatóintézetben nagy energiájú (200 MeV/nukleon)  $^{52}_{19}\text{K}_{33}$  ionnyalábot hoztunk létre, amelyet egy folyékonyhidrogén-céltárgynak ütöztettünk. A céltárgyban lévő protonok az  $^{52}_{19}\text{K}_{33}$  atommagból protonot ütöttek ki. Az így keletkezett  $^{51}_{18}\text{Ar}_{33}$  gerjesztett állapotainak legerjesztődéséből származó  $\gamma$ -sugárzást egy 226 egységből álló észlelő-



2. ábra. Nukleonpályák energiájának változása az egzotikus atommagok felé haladva a 32-es neutronszám környékén.

berendezéssel regisztráltuk. Minthogy a  $\gamma$ -sugárzást egy gyorsan mozgó atommag bocsátotta ki, annak a laboratóriumban mérhető  $E_{\text{lab}}$  energiáját jelentősen megváltoztatta a Doppler-hatás. Ahhoz, hogy visszaálítsuk az eredeti, tömegközépponti  $E_{\text{TKP}}$   $\gamma$ -energiát, az észlelés  $\theta$  szögét, és a kibocsátás pillanatában az ion relatív

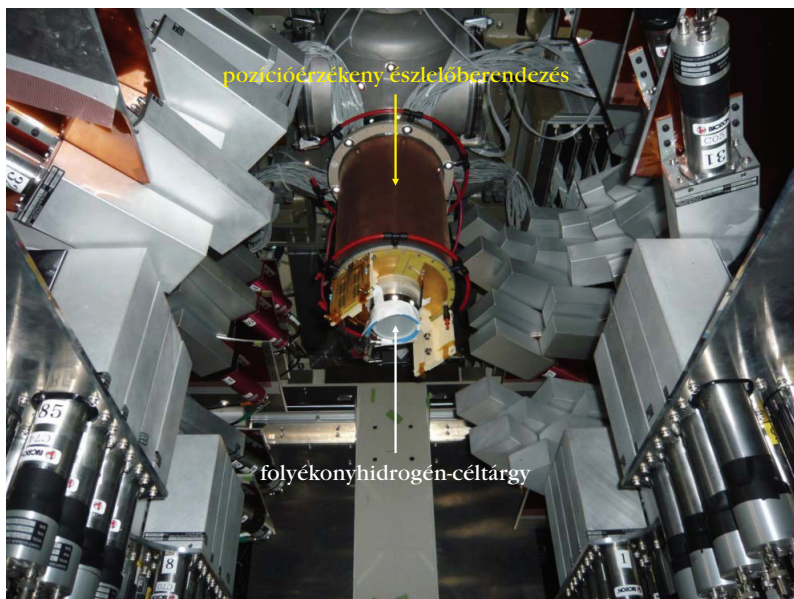
$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

sebességét szükséges ismerni az

$$E_{\text{TKP}} = E_{\text{lab}} \gamma [1 - \beta \cos(\theta)]$$

összefüggés szerint, ami vékony céltárgyak esetén nem jelent problémát.

3. ábra. Folyékonyhidrogén-céltárgy a körülötte lévő pozícióérzékes észlelőberendezéssel és a  $\gamma$ -sugárzást rögzítő detektorokkal (szürke téglatestek).

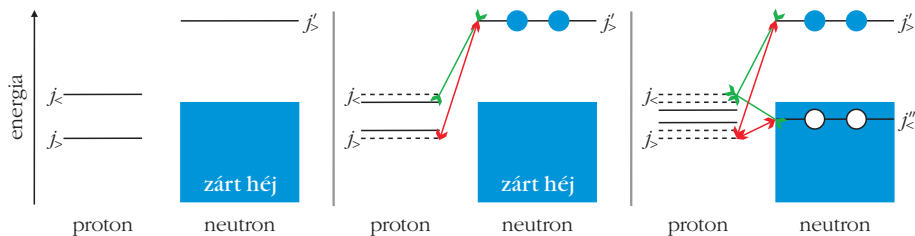


Mivel azonban ilyen egzotikus ionnyalábot jelenleg csak alacsony intenzitással lehet előállítani, a magreakció gyakoriságát úgy lehet emelni, ha a céltárgy hosszát, azaz a céltárgymagok számát növeljük. Esetünkben a céltárgy hossza 10 cm volt, ami azt jelentette, hogy köré egy pozícióérzékeny észlelőberendezést kellett építeni, amely a kirepülő protonok irányát rögzítette, így meghatározhatóvá vált a magreakció pontja (3. ábra).

A kísérlet kiértékelése arra vezetett, hogy az első két gerjesztett állapot nagyon kis valószínűséggel állt elő a protonkiütési magreakcióban, ami azt mutatja, hogy mind a 32-es, mind pedig a 34-es, a héjmodell által megjósolt új neutronhéj-záródás erős az argonizotópoknál, ezzel a húszéves elméleti jóslatot igazolni tudtuk.

### Újabb szigetek felbukkanása

A nukleonok között ható (NN) erőt sorba lehet fejteni multipólusok szerint. A japánok héjmodelljének kulcs-eleme az NN erő úgynevezett tenzorkomponensének a sorbafejtésekor megjelenő első tagja, a monopólus-kölcsönhatás, amely a spin-pálya felhasadást jelentősen csökkenti. A 4. ábrán intuitív módon jelenik ez meg. A

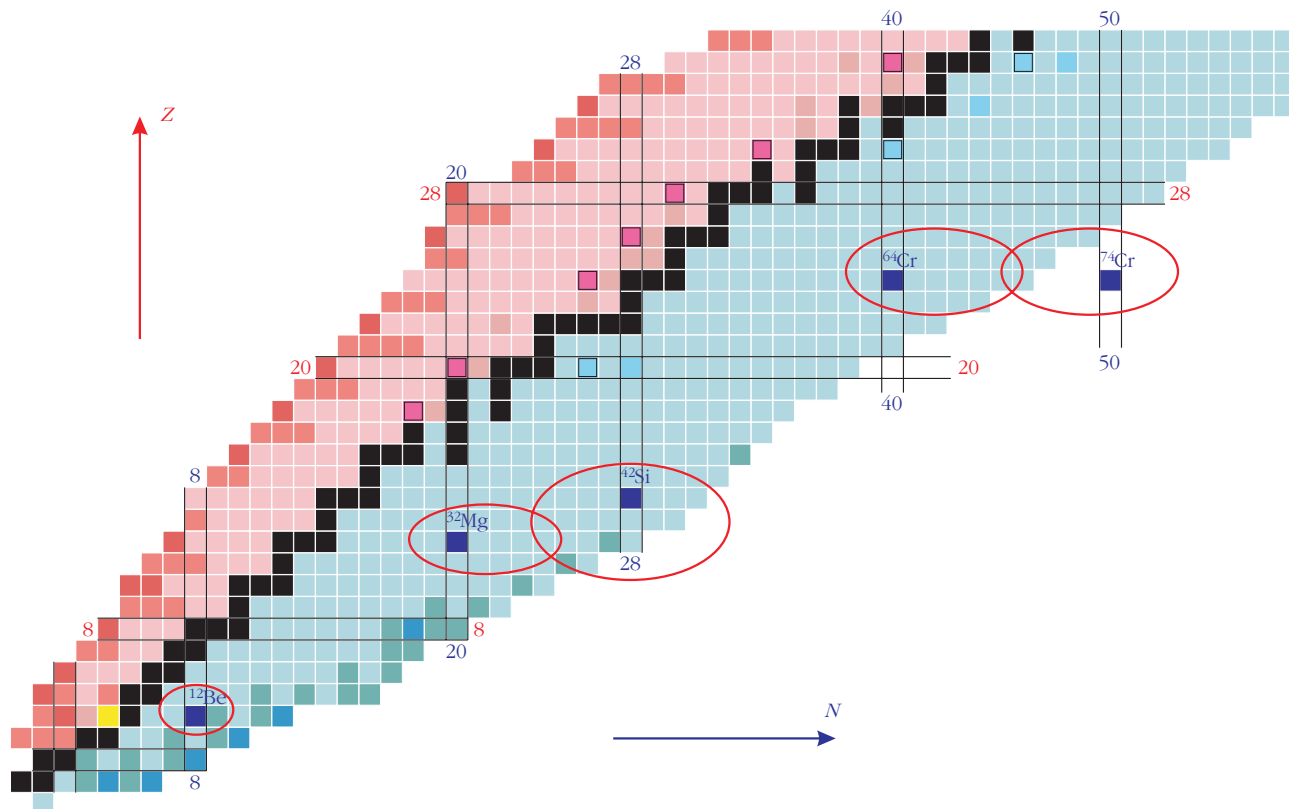


4. ábra. A tenzorerő hatása. A kék teli körök nukleonrészeket, a fehér körök nukleonlyukakat jelölnek. A zöld nyilak vonzó, a pirosak pedig taszító kölcsönhatást jelképeznek a pályák között.

bal oldali képen a spin-pálya kölcsönhatás miatt felhasadt két protonpályát láthatunk:  $j_< = l - 1/2$ ,  $j_> = l + 1/2$ , ahol  $l$  a pálya-impulzusmomentum,  $1/2$  pedig a nukleon spinje (saját-impulzusmomentum). Itt a neutronok zárt héjjal rendelkeznek, amely felett egy neutronpályát tüntettem fel. Ha két valencianeutront helyezünk erre a  $j_>$  neutronpályára (középső kép), akkor működésbe lép a tenzorerő: a  $j_>$  és  $j_<$  pályák között vonzás (zöld nyíl) jelenik meg, tehát a proton spin-pálya partnerek energetikailag közelebb kerülnek egymáshoz. Az effektus lineárisan nő a zárt héjon kívüli pályára helyezett neutronok számával, és maximális nagyságú, ha  $j = j'$ . Például a 2. ábrán megjelenő új héjzáródások is elsősorban az  $f_{7/2}$  protonpálya és az  $f_{5/2}$  neutronpálya között fellépő tenzorerőnek tudhatók be.

A 4. ábra jobb oldalán azt figyelhetjük meg, hogy ha a zárt neutronhéj egy pályájáról ( $j''$ ) két neutront a  $j_>$  pályára helyezünk, akkor egyrészt a korábban tag-

5. ábra. Az atommagok tengere, ahol minden kis négyzet egy atommagot jelöl, amelyek úgy helyezkednek el, hogy a vízszintes tengely a neutronszám, a függőleges tengely pedig a protonszám felel meg. A piros ellipszisek jelölik a különleges inverziós szigetvilágot.



lalt hatás jelenik meg a proton spin-pálya partnereknél. Másrészt azonban ilyenkor a két neutronhiány a zárt héjban gyengébbé teszi a  $j'_<$  és a proton spin-pálya partnerek kölcsönhatását, azaz a két lyuk hatása a  $j'_>$  pályán megegyezik a két részecskéével a  $j'_>$  pályán, így a proton spin-pálya partnerek még közelebb kerülnek egymáshoz. Az ilyen, úgynevezett két-részecske-kétyluk gerjesztések alapvető szerepet játszanak az inverziószigeten lévő atommagok alapállapotainak kialakításában. A zárt héjon túli nukleonok – az energetikai minimumra történő törekvés miatt – a deformáció felé viszik az atommagot, ezért ha egy mag igen messze van a mágikus számoktól, akkor deformációja általában jelentős. Hasonlóan, ha a tenzor-erő következtében egy klasszikus mágikus nukleon-számmal rendelkező atommagban a nukleonpályák úgy rendeződnek át, hogy a nagy héjközök lecsökkennek, akkor a kétrészecske-kétyluk gerjesztések könnyen megjelennek, ami magával hozza az atommag deformációját. Ebből a szempontból az NN erő monopólus tagokon túli tagjai (elsősorban a kvadrupólus) is jelentős hatást fejthetnek ki, tehát a monopólus és az afeletti effektusok érzékeny egyensúly formálja az atommagok szerkezetét.

Ebből következik, hogy egy klasszikus mágikus neutronszám közelében megjelenő inverziószigetet a deformáció megjelenésével lehet azonosítani. Az atommag deformációja kísérletileg nem mérhető mennyiség, mértékére az első gerjesztett állapot energiájából, illetve ezen állapot alapállapotból történő gerjesztési hatékonyságából következtethetnek. Ha alacsony az első gerjesztett állapot energiája és nagy a gerjesztési hatékonyság, akkor általában nagy a deformáció.

A korábban már ismertetett kísérlet keretében nemcsak nukleonkiütési magreakciók jönnek létre, hanem a hidrogéncéltárgyban található protonok rugalmatlan szórás során megpörgethetik a deformált atommagokat, amelyek így az első gerjesztett állapotukba kerülnek. Az onnan történő legerjesztődés során a nukleonkiütéshez hasonlóan  $\gamma$ -sugárzás keletkezik, amelynek intenzitásából a gerjesztés hatékonyságát meg lehet határozni. Ilyen módon vizsgáltuk a 40 neutronnal rendelkező, azaz zárt alhéjú  $^{63}_{23}\text{V}_{40}$  atommagot, és bebizonyítottuk, hogy nagy a deformációja. Így a korábban már felfedezett  $^{64}_{24}\text{Cr}_{40}$  atommag környéki inverziószigetre újabb atommagot sikerült elhelyezni. Az 5. ábrán ezt és a többi szigetet láthatjuk piros ellipszisekkel jelölve. A  $^{12}_4\text{Be}_8$ ,  $^{32}_{12}\text{Mg}_{20}$  és a  $^{42}_{14}\text{Si}_{28}$  környékén található szigeteket már nagyrészt feltárták, azonban a kísérleti technika csak az utóbbi öt évben jutott el arra a szintre, hogy a  $^{64}_{24}\text{Cr}_{40}$  környékén behatóbban vizsgálódhassunk. A  $^{74}_{24}\text{Cr}_{50}$ -nél elméletileg előrejelzett, és a nehezebb atommagoknál esetleg megjelenő szigetek pedig az elkövetkező évekre nyújtanak érdekes terepet, tovább bővítve a szigetvilágot. Ugyan jelenleg azt gondoljuk, hogy értjük az inverziószigetek kialakulásának mechanizmusát, azonban a feltáratlan területek hozhatnak még nem várt meglepetéseket, ahogyan az a múltban oly sokszor előfordult.

#### Irodalom

1. Elekes Z.: Mágikus számok, nemes atommagok. *Fizikai Szemle* 58 (2008) 98.
2. Dombrádi Zs.: A héjszerkezet átrendeződése egzotikus atommagokban. *Fizikai Szemle* 57 (2007) 221.
3. T. Otsuka és munkatársai: Evolution of shell structure in exotic nuclei. *Reviews of Modern Physics* 92 (2020) 015002.

## TÜKRÖS ANAMORFÓZIS

A művészet és a tudomány egyik látványos találkozása az anamorf kép. A sajátos ábrázolás első példái *Leonardo da Vinci* (1452–1519) *Codex Atlanticus* című vázlatgyűjteményében található. A 16. századtól kezdődően az anamorfikus technikákkal készített

Jelen munkát *Orosz István* grafikusművész Verne Gyuláról készült anamorf képe inspirálta; a szerzők köszönetet mondanak hasznos útmutatásaiért és a 3. ábra publikációs jogának engedélyéért.

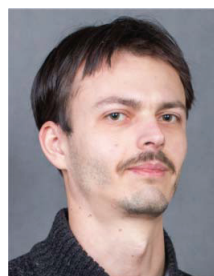


*Laczik Bálint* okleveles gépészmérnök, okleveles matematikus szakmérnök, 1982 és 2017 között a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gyártástudomány és -technológia Tanszékének oktatója, jelenleg nyugdíjas.

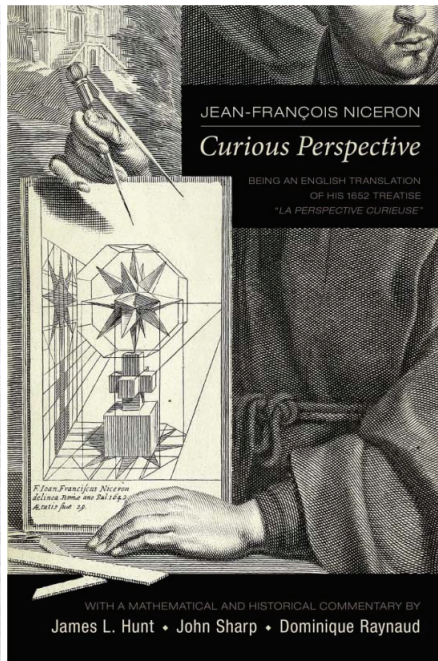
Laczik Bálint, Póka György  
BME Gyártástudomány és -technológia tanszék

festmények és rézkarcok megannyi változata ismeretes.

A tárgykor első, tudományos igényű feldolgozása *Jean-François Nicéron* (1613–1646) minorita szerzetes, matematikus *La Perspective curieuse* című (Paris, 1652) könyvében szerepel. A különleges érdekességű kiadvány gazdagon kommentált, angol nyelvű fordítása 2019-ben jelent meg [1] (1. ábra).



*Póka György* okleveles gépészmérnök, doktori fokozatát 2021. júniusában szerezte. Jelenleg a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gyártástudomány és -technológia Tanszékének adjunktusa, oktató-kutató munkatársa.



1. ábra. Niceron könyvének eredeti és az új kiadás címlapja.

Az anamorfózis a görög „ana” (vissza-) és „morphismos” (változás) szavakból alkotott kifejezés, a rejtett tartalmú képek általános megnevezése. A perspektíva elvű anamorf ábrákon az igazi alkotás csupán egyetlen, speciális nézőpontból szemlélve ismerhető fel. *Erhard Schön* (1491–1542) apró figurákból és tájképrészletekből felépült, furcsa rézkarcat (2. ábra) bal oldalról, erősen megdöntve, ferdén nézve a korszak négy fontos személyének arcképe jelenik meg: legfelül *V. Károly* (1500–1558), alatta *I. Ferdinánd* (1503–1564) Habsburg-házi uralkodók, lejjebb

házánk több köztéri műalkotását.<sup>1</sup> A számítástechnika fejlődésének köszönhetően anamorf képek szerkesztésére számos, többé-kevésbé jól használható programot érhetünk el az Interneten [4].

A jelen összeállítás a tükrös anamorfózis képalkotásának összefüggéseit az elemi vektoralgebra eszközeivel, a Maple V. R 13 matematikai software segítségével vizsgálja.

<sup>1</sup>Andabázi László művei a főváros XVII. kerületében, valamint Gyulán állnak.

2. ábra. Erhard Schön: Vexierbild: Anamorphisches Porträt von Karl V., Ferdinand I., Papst Paul II. und Francis I. (Kupferstichkabinett, Staatliche Museen zu Berlin, [2]).



## Az általános tükörfelületről visszavert fénysugár

Határozzuk meg az általános állású tükörfelületről visszavert fénysugár irányvektorát (lásd a 4. ábrát)! Az egyszerűbb írásmód érdekében a formulákat sorvektorként adjuk meg.

Legyen a tükör  $P$  pontjába eső sugár egyenesének irányvektora  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ , ugyanitt a tükörfelület normálvektora  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ , és a visszavert sugár egyenesének egység irányvektora  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ .

Az elemi optika alaptörvényei szerint

a) a  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{n}$  és  $\mathbf{w}$  vektorok közös síkban fekszenek, továbbá

b) a tükörfelület  $\mathbf{n}$  normálvektora azonos  $\varphi$  szöget zár be a  $\mathbf{v}$  és a  $\mathbf{w}$  vektorokkal.

Az a) törvényt formálisan felírva, a három vektor komplanaritását a vektorokból képzett mátrix determinánsának nulla értéke fejezi ki.

$$\det([\mathbf{v} \ \mathbf{n} \ \mathbf{w}]) = 0 \quad (1)$$

A b./ feltétel a vektorok skalár szorzataival:

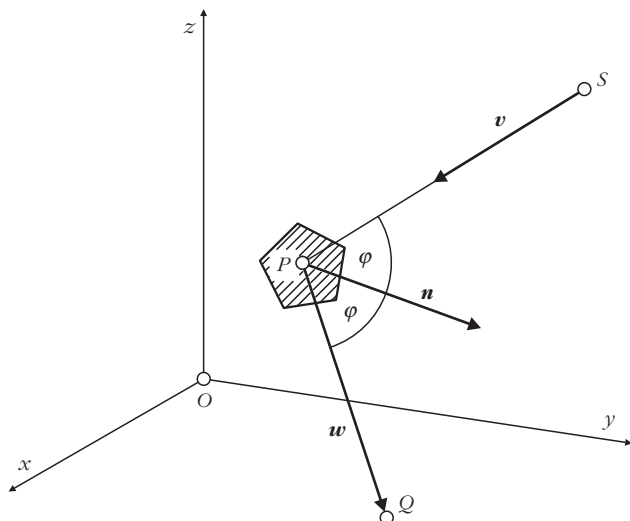
$$\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{v \cdot n} = \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}}{w \cdot n} = \cos \varphi, \quad (2)$$

ahol  $v$  és  $n$  a két vektor hosszát jelenti, valamint

$$\mathbf{w} \cdot \frac{\mathbf{v}}{v} = \cos(2\varphi). \quad (3)$$

Alkalmazva a  $\cos(2\varphi) = 2\cos^2\varphi - 1$  azonosságot, a visszavert sugár  $\mathbf{w}$  irányvektorának komponensei az (1) – (3) összefüggésekből kifejtett lineáris egyenletrendszer megoldásai.

4. ábra. Az általános állású tükörfelületre beeső és visszavert fénysugár.



3. ábra. Orosz István: Verne Gyula [3].

$$w_1 = \frac{v_1 (n_1^2 - n_2^2 - n_3^2) + 2 n_1 (n_2 v_2 + n_3 v_3)}{(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}},$$

$$w_2 = \frac{v_2 (n_2^2 - n_1^2 - n_3^2) + 2 n_2 (n_1 v_1 + n_3 v_3)}{(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}, \quad (4)$$

$$w_3 = \frac{v_3 (n_3^2 - n_1^2 - n_2^2) + 2 n_3 (n_1 v_1 + n_2 v_2)}{(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}.$$

## A hengertükör sugármenetének szerkesztése

A hengertükros anamorfózis képalkotása az ábrázoló geometria Monge-féle két képsíkos technikájával szerkeszthető [5–7].

Az I. képsíkra merőlegesen állított hengertükör palástján az I. síkban fekvő alakzat képe jelenik meg. A megfigyelő a  $S$  pontból szemléli a palást  $P$  pontjában megjelenő, az I. képsíkon fekvő  $Q$  pont tükörképét. Az  $SPQ$  sugármenet szerkesztése az 5. ábrán látható.

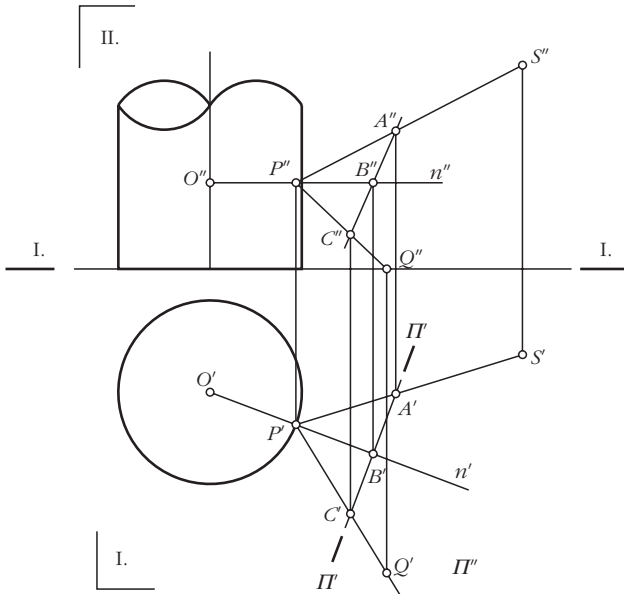
A  $S$  pontból induló fénysugár a  $P$  pontban éri el a tükörpalástot, innen visszaverődve az I. síkban a  $Q$  pontot jelöli ki.

Az  $SP$  sugár vonalán fekvő  $A''$  és  $S''$ , valamint  $A'$  és  $S'$  pontok összetartozó képeivel a sugár egyenesének két képe szerkeszthető. A  $P'$  pontot tartalmazó henger alkotó és a  $A''S''$  egyenes metszéspontja a  $P''$  pont második képsíkra eső képét jelöli ki.

A tükör felületi normálisai merőlegesek a henger tengelyére. A  $P''$  pontban a henger tengelyére állított merőleges a normális  $n''$  képe, a henger tengelyének első képsíkba eső  $O'$  pontján és a  $P'$  ponton át szerkeszthető a normális  $n''$  egyenesének valódi képe.

Vegyük fel a  $A'$  pontot tartalmazó és a normálisra merőleges  $II'$  segédsíkot. A segédsík a normális  $n''$  képe  $B'$  pontban metszi. A  $P'$  pontból induló visszavert sugár  $C'$  pontját az  $A'$  pontnak  $n'$ -re tükrözésével kapjuk





5. ábra. Hengertükörrre beeső és visszavert fénysugar egyenesek szerkesztése [5–7].

meg. A II. képsíkon a  $C''$  pontot az  $A''B''$  egyenesén az  $A''B'' = B''C''$  távolság metszi ki.

A  $P''$  pontot  $C''$ -vel összekötve a visszavert sugár II. képsíkra eső képe adódik, ez a sugár az I. képsík nyomvonalán a  $Q''$  pontot jelöli ki. Végül a  $Q''$  pontot a  $P'C'$  egyenesre levetítve, az anamorfózis  $Q'$  pontjának első síkbeli képét kapjuk meg.

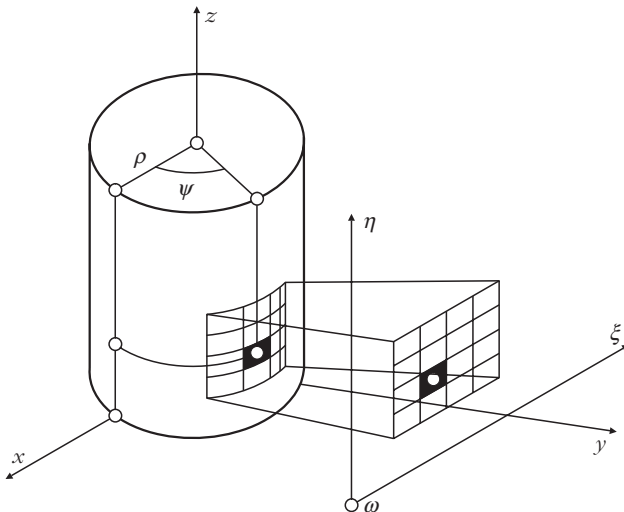
## A hengertükrő sugármenetének vektormodellje

Az  $x$ - $y$  síkon álló körhenger palástfelületének normál egységvektora a  $P = (\rho \cos \psi, \rho \sin \psi, z)$  pontban

$$\mathbf{n} = (\cos \psi, \sin \psi, 0) \quad (5)$$

Behelyettesítve a (4) kifejezésekbe, a  $P$  pontban a  $\mathbf{v}$  irányvektorral a tükörrre beeső, majd a visszaverődő

6. ábra. Párhuzamos vetítés a hengerpalástra.



sugár egyenese  $\mathbf{w}$  egység irányvektorának három komponense:

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{v_1 \cos(2\psi) + v_2 \sin(2\psi)}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}, \\ w_2 &= \frac{v_1 \sin(2\psi) - v_2 \cos(2\psi)}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}, \\ w_3 &= \frac{-v_3}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Legyen adott az  $x$ - $z$  síkkal párhuzamos, tetszőleges  $y$  koordinátájú ponton átmenő síkban fekvő  $\xi = \xi(u)$ ,  $\eta = \eta(u)$  paraméteres alakzat. Az alakzatot a  $z$  tengelyű,  $r$  sugarú henger palástjára „rásimító” transzformáció (6. ábra):

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{\xi}{\rho}, \\ x &= \rho \cos \psi, \\ y &= \rho \sin \psi, \\ z &= \eta. \end{aligned} \quad (7)$$

(Ezt a transzformációt valósítja meg a hengeres hirdetőoszlop palástjára ragasztott plakát.) Szemlélje a megfigyelő az  $S = (X, Y, Z)$  pontból rendszert. Az  $S$  pontból a hengerpalástra simított kép  $P$  pontjához mutató sugár vektora

$$\mathbf{v} = (X-x, Y-y, Z-z). \quad (8)$$

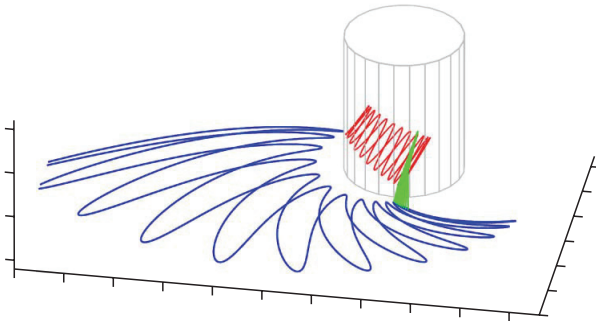
Ugyanez a sugár a hengerfelületről (6) szerint a

$$\begin{aligned} W_1 &= \kappa [v_1 \cos(2\psi) + v_2 \sin(2\psi)], \\ W_2 &= \kappa [v_1 \sin(2\psi) - v_2 \cos(2\psi)], \\ W_3 &= -\kappa v_3 \end{aligned} \quad (9)$$

koordinátákkal leírható  $\mathbf{W}$  irányvektorú egyenes vonalon verődik vissza. A visszavert sugár a  $z = 0$  síkon kijelöli az anamorfózis  $Q$  képpontját, tehát  $\kappa = z/v_3$ .

A műveleteket elvégezve és egyszerűsítve a hengerfelületre „simított” alakzat koordinátáiból a  $x$ - $y$  síkban fekvő anamorf  $Q$  képpont koordinátái:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{\rho \cos\left(\frac{\xi}{\rho}\right)(Z-2\eta) + \eta \left[ \cos\left(\frac{2\xi}{\rho}\right)X + \sin\left(\frac{2\xi}{\rho}\right)Y \right]}{Z-\eta}, \\ Q_2 &= \frac{\rho \sin\left(\frac{\xi}{\rho}\right)(Z-2\eta) + \eta \left[ \sin\left(\frac{2\xi}{\rho}\right)X + \cos\left(\frac{2\xi}{\rho}\right)Y \right]}{Z-\eta}, \\ Q_3 &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$



7. ábra. Lissajou-görbe hengertükrös anamorfózia.

A 7. ábra az  $r = 60$  sugarú tükör palástjára leképezett  $\xi = 35 \cos u$ ,  $\eta = 30 \sin(12u) + 55$  egyenletű,  $\alpha = 28,6^\circ$ -kal elforgatott Lissajou-görbét és hozzá tartozó anamorf képet szemlélteti. A megfigyelőpont koordinátái:  $S = (40, 150, 130)$ .

### Párhuzamosan vetített alakzatok anamorf képei

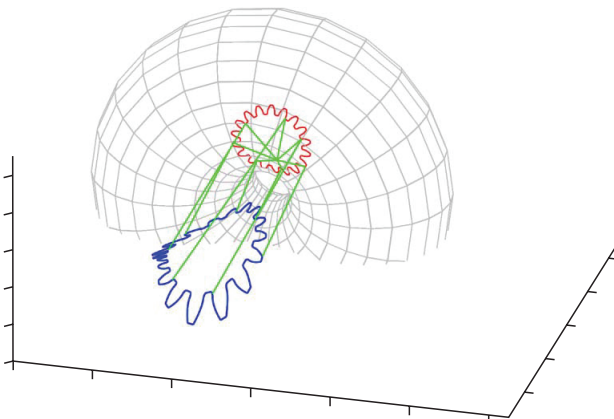
Különösen egyszerű a különféle alakú tükröfelületekre párhuzamos sugarakkal vetített alakzat anamorf képének előállításása. Legyen a tükör körgyűrű alakú, álljon a tükröfelület középpontja az origóban, és szimmetriatengelye essen az  $x$  koordinátatengelybe. A gyűrű sugara  $r$ , a gyűrű középpontja  $R$  távolságra van a szimmetriatengelytől. A felület általános  $p = (p_1, p_2, p_3)$  pontja

$$\begin{aligned} p_1 &= x, \\ p_2 &= \sqrt{r^2 - \left(R - \sqrt{x^2 + z^2}\right)^2}, \\ p_3 &= z \end{aligned} \quad (11)$$

és egységnyi normálisának  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$  vektora

$$n_1 = \frac{\sqrt{r^2 - R^2 + 2R\sqrt{y^2 + z^2} - y^2 - z^2}}{r}, \quad (12a)$$

8. ábra. Körgyűrű alakú tükörre párhuzamosan vetített alakzat anamorf képe.



$$\begin{aligned} n_2 &= y \frac{-R + \sqrt{y^2 + z^2}}{r\sqrt{y^2 + z^2}}, \\ n_3 &= z \frac{-R + \sqrt{y^2 + z^2}}{r\sqrt{y^2 + z^2}}. \end{aligned} \quad (12b)$$

Az  $x$  tengellyel párhuzamos sugarakkal vetítve az  $x$ - $z$  síkkal párhuzamos síkban fekvő  $\xi = \xi(u)$ ,  $\eta = \eta(u)$  alakzatot, az  $(X, Y, Z)$  megfigyelőpontból az alakzat pontjaihoz vezető sugár  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  vektora

$$\begin{aligned} v_1 &= X - \xi, \\ v_2 &= Y - \sqrt{r^2 - \left(R - \sqrt{\xi^2 + \eta^2}\right)^2}, \\ v_3 &= Z - \eta. \end{aligned} \quad (13)$$

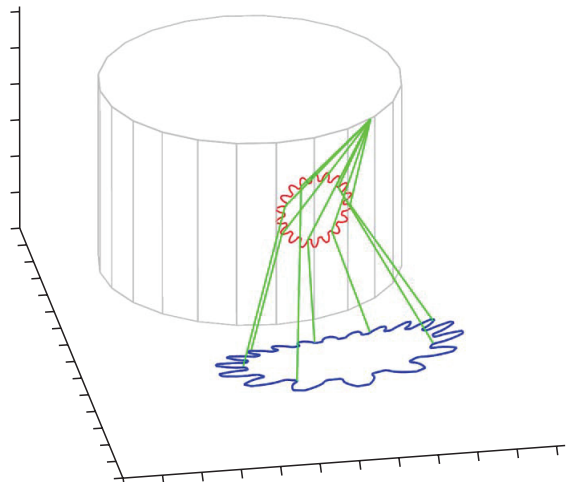
A (4), (10) és (11) formulák alkalmazásával az  $x$ - $y$  síkban fekvő anamorf kép pontjai adódnak.

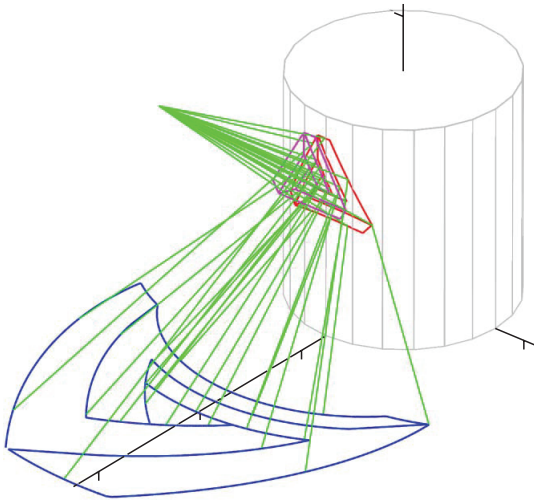
A  $z$  tengelyű,  $r$  sugarú, henger alakú tükörre az  $x$  tengellyel párhuzamos sugarakkal vetítve a  $\xi = \xi(u)$ ,  $\eta = \eta(u)$  síkgörbét, a sugármenet és a felületi normális egyenletei

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \left(\sqrt{\rho^2 - y^2}, y, z\right), \\ \mathbf{v} &= \left(X - \sqrt{r^2 - \xi^2}, Y - \xi, Z - \eta\right), \\ \mathbf{n} &= \left(\frac{\sqrt{\rho^2 - y^2}}{\rho}, \frac{y}{\rho}, 0\right). \end{aligned} \quad (14)$$

A 8. ábra a körgyűrű felületére, a 9. ábra a hengerfelületre párhuzamosan vetített evolvens – a leginkább elterjedt profilú – fogaskerék kontúrjának anamorf képét szemlélteti.

9. ábra. Henger alakú tükörre párhuzamosan vetített alakzat anamorf képe.





10. ábra. Hengertükörre középpontosan vetített alakzat – Penrose-háromszög – anamorf képe.

### Centrálisan vetített ábra anamorf képe

Különösen látványos, természetes hatású képet központos vetítéssel állíthatunk elő (ennek szép példája a 3. ábrán látható Verne Gyula-kép Orosz Istvántól).

Vetítsük a megfigyelő  $S = (X, Y, Z)$  nézőpontjából induló sugarakkal a  $z$  tengelyű,  $r$  sugarú hengerre az  $x = A$  síkban álló,  $r = (A, x, h)$  koordinátákkal adott képet. Az  $r$  képponton átmenő vetítő sugár a hengert a

$$p = (\sqrt{\rho^2 - y^2}, y, z) \quad (15)$$

pontban dőfi. A sugármenet vektoregyenlete:

$$S + \lambda(r - S) = p, \quad (16)$$

ahol  $S, r, p$  a megfelelő pontokba mutató vektorokat jelenti.

A vektoregyenlet  $\lambda, y$  és  $z$  megoldásai zárt alakban kifejezhetők. Alkalmazva a

$$q = \sqrt{\rho^2 [(Y - \xi)^2 + (X - A)^2] - (AY - \xi X)^2} \quad (17)$$

jelölést,

$$y = \frac{Y[A(A - X) + q] + \xi[X(X - A) - q]}{(Y - \xi)^2 + (X - A)^2}, \quad (18)$$

és

$$z = \frac{Z[\xi(\xi - y) + q + A(A - X)]}{(Y - \xi)^2 + (X - A)^2} + \frac{\eta[Y(Y - \xi) - q + X(X - A)]}{(Y - \xi)^2 + (X - A)^2}. \quad (19)$$

Behelyettesítve a (18) és (19) kifejezéseket (16)-ba, megkapjuk a hengerfelületen az  $S$  pontból az  $r$  pontot

vetítő sugár dőfspontját. A (4) és (10) összefüggések alapján, a tükörről visszavert sugár a  $z = 0$  síkon kijelöli a  $Q$  anamorf képpontot.

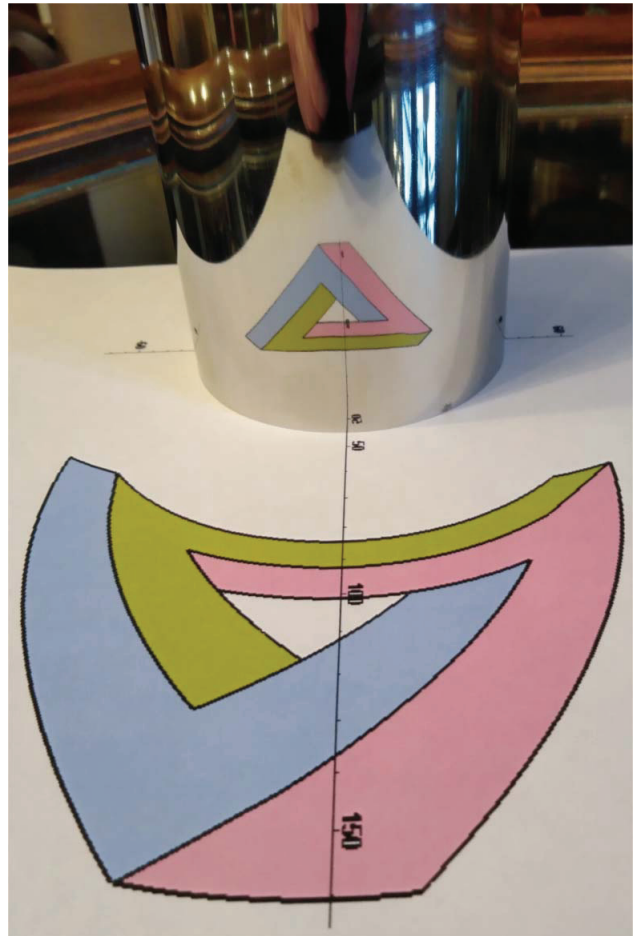
A 10. ábra a hengertükörre centrálisan vetített „lehetetlen alakzat”, a térlátást alaposan próbára tevő Penrose-háromszög centrális vetítését és anamorf ábráját szemlélteti.

A 11. ábrán pedig a megszerkesztett anamorf ábra valóságos hengertükör felülettel visszaállított képe látható.

### Irodalom

1. J.-F. Nicéron: *Curious Perspective*. Arizona Center for Medieval Renaissance Studies, Tempe, Arizona, 2019.
2. <https://www.jstor.org/stable/community.15724359>
3. <http://utisz-utisz.blogspot.com>
4. [www.anamorphosis.com](http://www.anamorphosis.com)
5. A. Zdziarski, M. Jonak: Cylindrical Anamorphic Images – a Digital Method of Generation. *Techn. Transactions Architecture* 10A-2015
6. F. Di Paola, P. Pedone, L. Inzerillo, C. Santagati: Anamorphic Projection: Analogical/Digital Algorithms. *Nexus Network Journal* 17 (2015) 253–285.
7. Szilágyi Zs.: *Az anamorfózis geometriai aspektusai és építészeti alkalmazása*. TDK dolgozat, BME Építészeti Ábrázolás Tanszék, 2010. [https://www.google.hu/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKEwi\\_9Mq7z5HvAhUO3hoKHTuiiDNYQFjAAegQIAhAD&url=http%3A%2F%2Fwww.epab.bme.hu%2FTDK%2F2010%2FSzilagyizsombor\\_Anamorfosis\\_TDK\\_2010\\_TAMOP.pdf&usg=AOvVaw2rNSiTL4idkvWM2uUakZ\\_d](https://www.google.hu/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKEwi_9Mq7z5HvAhUO3hoKHTuiiDNYQFjAAegQIAhAD&url=http%3A%2F%2Fwww.epab.bme.hu%2FTDK%2F2010%2FSzilagyizsombor_Anamorfosis_TDK_2010_TAMOP.pdf&usg=AOvVaw2rNSiTL4idkvWM2uUakZ_d)

11. ábra. A Penrose-háromszög anamorf képe (a szerzők felvétele).



# A GALILEI-PER ÉS AMI MÖGÖTTE VAN

Bognár Gergely

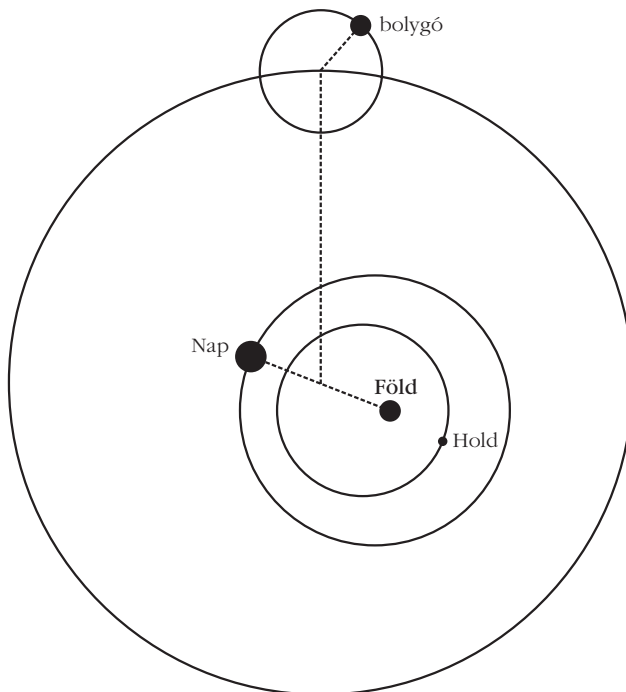
Révai Miklós Gimnázium és Kollégium, Győr

A Galilei-perben sokak a vallás és tudomány eredendő szembenállását vélik felfedezni, és a középkori egyházra úgy tekintenek, mint a tudomány megszületésének legfőbb akadályára. A valóság egészen más! E rövidke írás megpróbál rávilágítani, hogy a Galilei-per nem a természettudományok és vallás eredendő szembenállását példázza.

## Előzmények

A per megértéséhez az első lépés, hogy röviden áttekintjük a *Galileivel* (1564–1642) szemben álló világképet. Galilei korának reneszánsz Itáliájában *Ptolemaiosz* (90–168) égi mozgásokról alkotott elméletét próbálták összeilleszteni az arisztotelészi fizikával. Még mai szemmel nézve is az ókori görögök hatalmas zsenialitásáról tanúskodik a ptolemaioszi rendszer, amely a hétköznapi hiedelemmel ellentétben nem egy naiv elképzelés a világról, amelyben minden égitest Föld körüli körpályán kering. Az ókor tudósai, hogy megmagyarázzák a bolygók mozgását, rendkívül összetett és meglehetősen pontos rendszert alkottak. Ptolemaiosz az égi jelenségek leírására az égbolt egészének napi mozgást tulajdonított. (Egy nap alatt az egész égbolt, beleértve az állócsillagokat, bolygókat, a Napot és a Holdat, megkerüli a Földet.) Ezen mozgáson felül a Hold és a Nap körpályán mozog, amely körpálya középpontja nem esik egybe a Föld középpontjával, hanem attól kis mértékben eltér. Észrevették ugyanis, hogy a Hold és a Nap Földről megfigyelt mérete csekély mértékben változó, és e változást – helyesen – az égitest közelebbi vagy távolabbi helyzetével magyarázták. A bolygók mozgása még összetettebb, egyfelől körpályán mozognak (az úgynevezett excentrikuson), amelynek középpontja szintén körmozgást végez (e kört deferensnek nevezzük), ezen kör középpontja nem a Föld, hanem a Földet és a Napot összekötő egyenesen helyezkedik el [1] (1. ábra).

Elmondható tehát, hogy a ptolemaioszi rendszerben a bolygók, a Nap és a Hold csak napi mozgásukat tekintve mozognak a Föld körül. Ptolemaiosz rend-



1. ábra. A Nap és a bolygók mozgása a ptolemaioszi rendszerben.

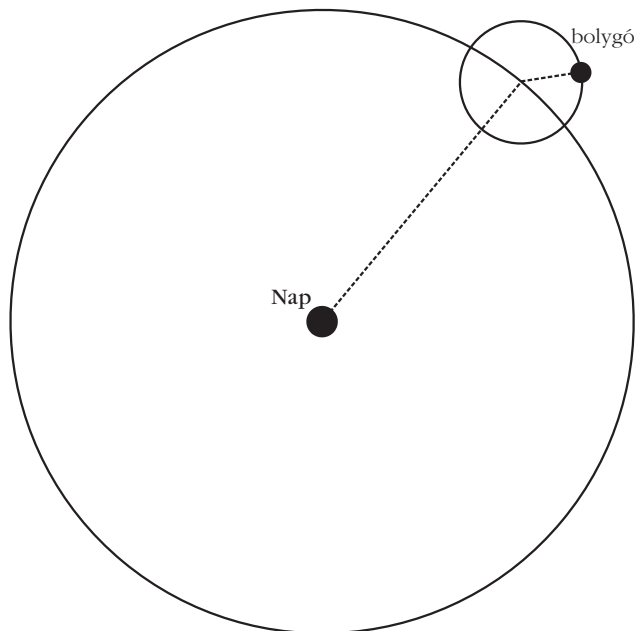
szere a szabad szemmel végzett megfigyeléseket meglehetősen pontossággal írja le, a segítségével készített táblázatok az égi jelenségeket előre megjósolták. Természetesen kérdőjelek, apróbb pontatlanságok és magyarázatra váró jelenségek felmerültek, hasonlóan napjaink fizikájához. Ugyanakkor a középkori muszlim csillagászok kivételével komolyabb kritikák nem fogalmazódtak meg a ptolemaioszi rendszerrel szemben. Mindez nem véletlen, egyáltalán nem túlzás azt állítani, hogy Ptolemaiosz a Földhöz rögzített vonatkoztatási rendszerben jó közelítéssel leírja a bolygók mozgását, és mint tudjuk, a vonatkoztatási rendszerek szabadon választhatók, ezért Ptolemaiosz rendszerét még mai szemmel nézve sem tekinthetjük hibásnak, pusztán csak nem elég pontosnak.

Az arisztotelészi, úgynevezett peripatetikus<sup>1</sup> fizika és a ptolemaioszi leírás között ellentmondásokat fedezhetünk fel. *Arisztotelész* (i. e. 384–322) leírásában a bolygók és minden égitest Föld körüli körmozgást végez, amelynek fenntartója az álló csillagokon túli szférában elhelyezkedő mozdulatlan mozgató. A Föld a mindenség középpontjában helyezkedik el, és minden e körül forog [2]. A peripatetikus hagyományba az excentrikusok még beilleszthetők, feltételezték

<sup>1</sup>Arisztotelész filozófiai iskolájához tartozó, illetve iskolás kötöttség nélkül, sétálva, csoportosan végzett oktatás. A hagyomány szerint Arisztotelész gyakran sétálgatás közben oktatta tanítványait. A görög peripatetikus, járkáló nyomán.



Bognár Gergely 2006-ban végzett az ELTE TTK fizikatanári szakán, illetve 2008-ban a PPKE BTK filozófiaszakán. Jelenleg a győri Révai Miklós Gimnázium és Kollégium fizika–filozófia szakos tanára. Érdeklődési területe a fizika és a filozófia határterületei, és a fizika tanításának módszertana, amelyekkel kapcsolatban több publikációja jelent meg.



2. ábra. Copernicus szerint a bolygók a Nap körül keringenek, és pályájuk körül még plusz körmozgást végeznek.

ugyanis, hogy az egyes szférákban a bolygók újabb körmozgásokat végeznek, ugyanakkor a Földtől, azaz a mindenség centrumától eltérő középpontú bolygópályákról mindez nem mondható el. A két rendszer nyilvánvaló ellentmondása már Ptolemaiosz korában is szembeötlő volt. Feloldása nemcsak tudománytörténeti szempontból érdekes, hanem a per végkimenetelelét tekintve is. Az ókori görögök és az őket követő évezredek hagyományok a csillagászati elméleteket nem tartották feltétlenül igaznak, sokkal inkább hipotéziseknek, amelyekkel a jelenségeket képesek leírni, ugyanakkor azok nem feltétlenül írják le a bolygók valódi mozgását. A jelenségek pontos leírása nem elegendő, szükség van a mozgás okainak feltárására is, és utóbbira csak Arisztotelész fizikája volt képes. Ptolemaiosz rendszere megőrzi ugyan a jelenségeket, de semmit nem mond az okokról, és ezek feltárásának hiányában nem tekinthetjük másnak, mint hipotézisnek. Az arab csillagászok és gondolkodók átvesszik e hagyományt, hasonlóan a középkori skolasztikához, ezért írja Aquinói Szent Tamás (1225–1274) [3]:

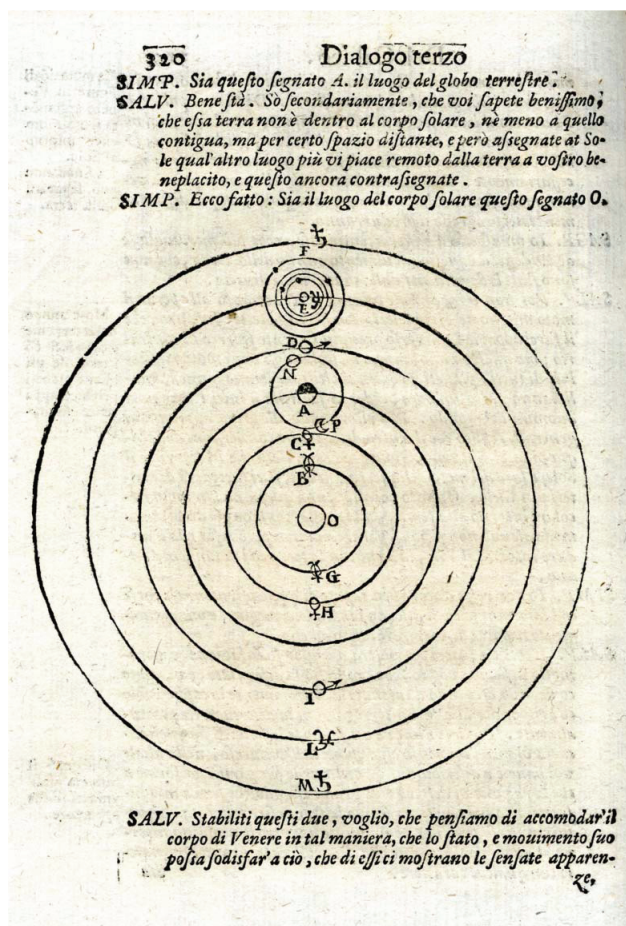
„A csillagászok által elképzelt feltételezések nem szükségszerűen igazak. Bár e feltételezések segítségével, úgy tűnik, képesek vagyunk megőrizni a jelenségeket, mégsem kell azt állítanunk, hogy igazak, mert lehetséges, hogy a csillagok általunk megfigyelt mozgása más módszerrel is leírható, amely módszer egyelőre ismeretlen előttünk.”

A csillagászati elméletek hipotetikus voltát erősítette, hogy az ókori görögök a Hold feletti világra, mint az istenek birodalmára tekintettek, amely az emberek számára kifürkészhetetlen.

Az arisztotelészi fizika paradigmaváltása nem a csillagászat felől érkezett, hanem a keresztény teremtésfelfogás és a peripatetikus hagyomány ellentmondásából. A Sorbonne-on működő késő-skolasztikus

iskola felismerte, hogy a kereszténység néhány dogmája (a világ időbeli keletkezése és a semmiből teremtés tana) nem egyeztethető össze az arisztotelészi fizikával, és ez a tény a peripatetikus hagyományok megkérdőjelezéséhez és az újkori fizika megszületéséhez vezetett. *Jean Buridan* (1301–1362) felismeri a tehetetlenség törvényét és mellette a sebesség relatív voltát. A mozgások leírására használja a lendület fogalmát. Tanítványa, *Nicole Oresme* (1320–1383) felveti a Föld tengely körüli forgásának lehetőségét. A Sorbonne-on működő iskola elhárítja az elméleti akadályokat *Nicolaus Copernicus* (1473–1543) elől, hogy felvesse a heliocentrikus világképet. Külön érdekesség, hogy Copernicust nem a ptolemaioszi rendszer pontatlansága inspirálta, hanem szépségének hiánya. Copernicust, mint reneszánsz embert, magával ragadta *Platón*, és az ideális körök világa, ezért szerette volna kiküszöbölni a ptolemaioszi deferenseket. Copernicus világképében a Föld és a bolygók a Nap körül keringenek, de a bolygók egy excentrikusszerű körmozgást végeznek a pályájukon [4] (2. ábra). A kor szelleméhez igazodva, Copernicus művének bevezetőjében hipotézisként és nem egyedüli igazságként tárja az olvasók elé az új világképet. Tudománytörténészek máig vitatkoznak, hogy Copernicus csak az egyházi

3. ábra. Galilei – *Dialogo...* könyvében szereplő rajz [5] tanúsága szerint – az egyszerűsített kopernikuszi elméletet fogadta el.



cenzorok lefegyverzése miatt tünteti-e fel művét hipotetikusként, vagy saját maga is így gondolta. Könyvének bevezetését, amelyben erről értekezik, feltehetően nem saját maga, hanem *Andreas Osiander* (1498–1552) írta, hogy tartalmával Copernicus menyire azonosult, azt ma már nehéz megmondani. A ptolemaioszi rendszer bukását és a heliocentrikus világkép győzelmét *Tycho de Brahe* (1546–1601) megfigyelései nyomán *Jobannes Kepler* (1571–1630) törvényei szolgáltatták. Külön érdekesség, hogy Kepler munkásságát Galilei ismerte, de nem fogadta el, ragaszkodott a körpályák ptolemaioszi rendszerénél nem sokkal pontosabb, de a szépséget és harmóniát jobban tükröző egyszerűsített kopernikuszi elmélet-hez, amelyben a bolygók a Nap körül körpályákon keringenek [5] (3. ábra).

A Galilei-perек megértésének másik kulcsa a zavaros történelmi háttér feltárása. Galilei a reformáció és ellenreformáció korában élt. A reformáció nemcsak egyházi kérdés volt, átszötte a politika, amelynek eredménye a harmincéves háború lett. Itália és Európa más részein az egyház vizsgálóbizottságokat, inkvizitorokat állít, hogy megvizsgáljon minden eszmét, amely magában hordozhatja egy újabb egyházszakadás veszélyét. Az inkvizíció sokszor helyi politikai érdekeket szolgált, és a keresztény tanítás lényegétől teljesen idegen módon sok szenvedést okozott. Jól ismert, hogy mára a katolikus egyház szembenézett ezen egyáltalán nem csekély eltéréssel. 1981-ben *Szent II. János Pál* pápa vizsgálóbizottságot állított fel a „Galilei-ügy” kivizsgálására. A bizottság eredményeit megismerve 1991-ben a pápa elismerte, hogy az egyház hibát követett el, mind a per elindítása, mind annak lefolytatása közben [6].

## A Galilei-perек történeti leírása

Galilei vehemensen képviselte a kopernikuszi tanokat, ezért nem kell csodálkozni azon, hogy ügye az inkvizíció elé került. Az eljárást ugyanakkor több egyházi személy is ellenezte. Az első perre 1616-ban került sor, amelynek eredményeképpen Galileit elmarasztalták. Az ítéletet követően a heliocentrikus tanokat hirdető művek indexre kerültek. Fontos megemlíteni, hogy az ítéletet nem *V. Pál* (1552–1621) pápa hirdeti ki, hanem *Bellarmino* (1542–1621) bíboros, ezzel a heliocentrikus világkép elítélése nem érintette a katolikusok számára fontos pápai tévedhetetlenség doktrínáját. Az ítéletet kihirdető Bellarmino bíboros levélben engedélyezi Galileinek, hogy dialógus formában mindkét álláspont mellett egyenlő mértékben érvelve írjon a két világrendről. Leszögezi, hogy a csillagászok felfedéseit, beleértve a heliocentrikus világképet is, a korábbi hagyományoknak megfelelően hipotézisként kezelje. Hiszen a ptolemaioszi tanokat és az arisztotelészi fizikát jól ismerők eddig is hipotézisként kezelték. Az 1616-os ítélethez egy Galilei számára ismeretlen záradék került, amelyben Galileinek megtiltják, hogy a heliocentrikus tanokról publikáljon. A záradék

eredete vitatott, aláírással ugyanis senki nem látta el, elképzelhető, hogy a második perben hamisításként került oda, vagy egy túlbuzgó hivatalnok csatolta az ítélet mellé [7]. Galilei 1630-ban megjelenteti leghíresebb művét *Párbeszéd* címmel. A dialógusformát megtartja, azonban egyáltalán nem egyenlő módon érvel a két nézet mellett. A földközpontú nézeteket védelmezőt Simplicio (Együgyű) névvel illeti, e szerep legjobban *VIII. Orbán* (1568–1644) pápára illik, aki bíboros korában komoly érdeklődést mutatott a csillagászat iránt, nagyra becsülte Galilei munkásságát, ugyanakkor a hiányos bizonyítékok miatt nem fogadta el a napközpontú világképet. Galilei ezzel maga ellen hívta ki a sorsot! Az 1616-os ítélet érvényben volt, előkerült az eddig ismeretlen záradék, Bellarmino bíboros már évek óta halott volt, és a pápai tekintély megsértésének megalapozott gyanúja is felmerült. Orbán pápa távol tartotta magát a vizsgálatától, és a személyét ért sérelmeket nem kívánta megtorolni [8]. A közhiedelemmel ellentétben Galileit nem érte fizikai atrocitás. Az 1633-as ítélet után Galilei heliocentrikus tanait visszavonta, műveit indexre helyezték, és élete hátralévő részét házi őrizetben kellett töltenie. Az egyházi vezetők hozzáállásáról sokat elárul, hogy a házi őrizet először Siena érsekénél, majd otthonában töltötte, és Orbán pápa a korábban Galileinek ítélt életjáradékot továbbra is folyósította [7].

## A perек tárgya

Az első per két kérdést vitat meg:

1. A Nap valóban a világmindenség középpontja, és semmiféle mozgást nem végez.

2. A Föld nem a világ közepe, nem mozdulatlan, és éves és napi mozgást is végez.

Mindkét kérdésben elmarasztaló ítélet született. A vizsgálat központi témája bibliai passzusok értelmezése körül forgott, de ennek kapcsán a tudományos megközelítések is helyet kaptak. Az Ó- és az Újszövetségi Biblia keletkezésének idején alapvetően geocentrikus világnézetek uralkodtak, ezért nem csoda, hogy a szentírási szövegekben erre találunk utalásokat:

- „A földet biztos alapra helyezted, nem inog meg az idők folyamán.” (Zsolt 104,5)

- „Szilárd alapot vetettél, nehogy meginogjon a földkerekség.” (Zsolt 93,2)

- „Fölkel a nap, és lemegy a nap, siet vissza arra a helyre, ahol majd újból fölkel.” (Préd 1,5)

- „S a Nap megállt, a Hold is megállt, amíg a nép bosszút nem állt ellenségein.” (Józs 10,14)

A per legfontosabb kérdése, hogy az idézett bibliai szövegeket szó szerint vagy átvitt, allegorikus értelemben kell-e értelmezni. A Tridenti Zsinat (1545–1563) határozatának értelmében, amely a reformáció kapcsán felmerülő bibliaértelmezéseket igyekezett tisztázni, a szó szerinti magyarázatot kell előnyben részesíteni, kivéve, ha a nyilvánvaló tények vagy az egyházatyák tanítása mást nem sugall. Meglepő módon e ponton Galilei sokkal bölcsebb biblikusnak

mutatkozik, mint egyházi ellenfelei. Galilei helyesen rávilágít, hogy a fenti sorok átvitt értelműek. (Korunk biblikus tudósai egyetérténeken Galileivel. A Zsoltárok ugyanis verses formátumú irodalmi alkotások, amelyek célja a vallási tartalmak művészi átadása. A zsoltárok egyes sorait nem lehet önkényesen kiragadni, mert azok költői képekkel gazdagon díszítettek, gyakran hasonlatokkal, metaforákkal tűzdeltek. A Prédikátor könyvéről a zsoltárokhoz hasonlókat mondhatjuk el. Józsué könyvében egy csata leírásának része a Nap és a Hold megállítása, amelyben a napnyugta késleltetésével, az idő megállításával segíti az Úr népének győzelmét.) Galilei éles elmével rávilágít, hogy a Józsué könyvében szereplő sorok szó szerinti értelmezése a ptolemaioszi rendszerben sem vonná maga után az idő megállítását, hiszen a nappalok és éjszakák változásáért az égbolt egészének mozgása a felelős, nem a Nap és a Hold saját mozgása. Az egyházatyáknál a fenti szövegrészekre nem találni utalást, ezért Galilei értelmezését a Szent Officium (vizsgálóbizottság) csak akkor fogadhatta volna el, ha Galilei meggyőző érvekkel képes bizonyítani a kopernikuszi világméretet, és e ponton kapott helyett a tudományos érvelés.

Galilei egyszerre támadja az arisztotelészi fizikát és érvel Copernicus tanai mellett. Az előbbivel kapcsolatos ellenvetései helytállóak, ugyanakkor az utóbbi mellett felhozott érvei nem eléggé meggyőzők. Fontos megjegyezni, hogy az arisztotelészi rendszer ellentmondásai még nem teszik igazzá a heliocentrikus világméretet, sőt a ptolemaioszi rendszer pontatlansága és esetleges hiányosságai sem, ezek csak arra bizonyítékok, hogy a régi elméletek reformra szorulnak.

Tycho de Brahe évtizedes mérései, amelyeket még szabad szemmel végzett, egyértelműen bizonyították, hogy a ptolemaioszi világméret 8 perces hibát vét a bolygók pályájának leírásában, ezzel szemben a kopernikuszi modell pontosabb, de nem tökéletes, valamennyi hibát ezen modell is hordoz, hiszen a bolygók nem kör, hanem ellipszis pályán keringenek a Nap körül. Galilei távcső segítségével megfigyelte a Vénusz fázisait, amelyet a heliocentrikus modellben helyesen értelmezett. Felfedezi a Jupiter körül keringő holdakat, amelyeket mecénásairól Medici-holdaknak nevez el. Galilei a Jupiterben egy mini naprendszert vélte felfedezni, ugyanakkor Ptolemaiosz rendszere sem idegen a Földtől eltérő középpontú köröktől, ezért e felfedezést sem tekinthetjük egyértelmű bizonyítéknak a heliocentrikus világméret mellett, hasonlóan a napfoltokhoz vagy a Hold hegyeihez. E felfedezések fizikatörténeti jelentősége tagadhatatlan, de nem a heliocentrikus modell igazolásában, hanem az égi és a földi fizika egységesítésében játszottak fontos szerepet. Fontos történelmi tény, hogy a vizsgálóbizottság nem az iménti úton érvel Galilei új csillagászati megfigyelései kapcsán, hanem a távcsövek, mint új eszközök hitelességét kérdőjelezi meg, és a felsorolt jelenségeket optikai csalódásnak tekinti. A tudománytörténet véletlen játéka, hogy Galilei két olyan bizonyítékkal is előhozakodik, amelyek kapcsolatba hoz-

hatók a Föld mozgásával, ugyanakkor Galilei magyarázatai teljes mértékben tévesek. Az első az árapály, amelyet Galilei a Föld keringésével és forgásával igyekszik magyarázni. Ismert, hogy e jelenséget a Hold és a Nap gravitációs hatása hozza létre, ugyanakkor a Föld forgásából adódó tehetetlenségi erők is szerepet játszanak. Galilei szerint a tengervíz kicsit „lemerad” a Föld forgása és Nap körüli keringése során, és ez hozza létre az árapály jelenséget [9]. Galilei másik érve a passzátszélre vonatkozik. Valóban igaz, hogy a passzátszél irányát az északi és a déli féltekén a Föld forgásának következtében a Coriolis-erő befolyásolja, ugyanakkor Galilei érvelésének ehhez semmi köze. Hasonlóan a tengervízhez úgy véli, hogy a levegő lemerad a Föld tengely körüli forgásához képest, és ez okozza az Atlanti-óceánon megfigyelhető széljárásokat [10]. Galilei egyik elmélete sem írja le pontosan a jelenségeket, például az árapály értelmezése kapcsán nem kap szerepet a Hold és a Nap helyzete, pedig korábban megfigyelték, hogy a jelenség ciklusi korrelálnak e két égitest helyzetével. Másfelől mindkét jelenségre igaz, hogy azok cáfolják a saját maga által sokszor hivatkozott tehetetlenség törvényét, amely a Föld mozgása szempontjából döntő jelentőségű. Galilei logikai érveket is felsorakoztat, amelyekben hipotetikus kísérleteket végez arra nézve, hogy mi történne, ha a Földet elmozdítanánk a helyéről, e gondolatok nyilvánvalóan ellenőrizhetetlenek, és legfeljebb elgondolkodtatásra intenek az arisztotelészi fizika kapcsán, de semmiképpen nem szolgáltatnak olyan érvet, amely a kopernikuszi rendszer mellett felsorakoztatható [11]. Természetesen, a kopernikuszi rendszer harmóniája, szépsége és a ptolemaioszhoz képesti egyszerűsége komoly érv Galilei kezében. A döntő bizonyíték az álló csillagok parallaxismozgása (a Föld Nap körüli keringése miatt az állócsillagok éves szinten kicsiny ellipszist írnak le) a kor csillagászati eszközeivel megfigyelhetetlen. Végül a vizsgálóbizottság jogosan vethette fel, hogy a Galilei által oly sokszor hivatkozott relativitási elv értelmében a Föld- és Nap-központhú világméret egyaránt helyes értelmezése lehet a világnak, mindebből pedig az is következik, hogy a heliocentrikus világméret hipotézisként kezeljük, amely a korábbi hagyományoknak megfelelően szükségszerűen nem az egyedüli helyes leírása a csillagok mozgásának.

Galilei egyik érve sem tekinthető perdöntőnek. A kétségeket eloszlató bizonyítékok csak Kepler és *Newton* munkássága után álltak rendelkezésünkre, a közvetlen bizonyítással pedig a 19. századig, *Foucault* híres ingakísérletéig (1851) és a *Bessel* által 1837-ben megfigyelt parallaxis jelenségéig kellett várni. Galilei bírának a Tridenti Zsinat határozatának értelmében, perdöntő érvek hiányában nincsen más választása, mint elítélni a heliocentrikus tanokat. A Nap statikus helyzetét, mind a hit, mind a filozófia (mai szóhasználatlal élve a fizika) szempontjából tévesnek, a hit tekintetében pedig károsnak is nyilvánították. A Föld mozgásának kérdését a hit és a filozófia (fizika) szempontjából tévesnek ítélték, de károsnak nem nyilvání-

tották. Galileire nézve, azon túl, hogy e témában nem vagy csak mindkét álláspont mellett egyenlő mértékben érvelve jelentethet meg könyveket, más negatív következményt nem hozott az első ítélet, az ezt követő években szabadon mozoghat és dolgozhat [8].

Galilei második pere tudományos kérdéseket nem feszegetett. Tárgya kifejezetten az első per határozatának semmibevételéről és a pápai hatalom megsértéséről szólt. A per során Galileit fizikai atrocitás nem érte. Galilei a *Dialógus* című munkájában az első per határozatát egyértelműen megszegte, a pápai hatalom megsértése miatt ugyanakkor nem vonták felelősségre (ennek valószínűleg komolyabb következményei lettek volna). Az ítélet után Galilei megtört, tudásunk szerint csillagászzal többet nem foglalkozott. A második per tudománytörténeti jelentősége jóval csekélyebb, mint az elsőé, még akkor is, ha Galilei életében a második per eredményezett nagyobb változásokat.

## A Galilei-perek tanulsága

Nemcsak naivítás, de tudománytörténeti szempontból tudatlanság lenne az első perre úgy tekinteni, amelyben a tudományos tényeket a vak hit elhomályosította. Galilei korában még egyáltalán nem voltak döntő érvek a heliocentrikus világkép mellett. A per pontosan abban a korban játszódott, amikor a két világnézet mellett egyenlő mértékben lehetett érvelni. Ráadásul a korábbi évszázadokban a csillagászati elméletekre hipotézisként tekintettek, s ha Galilei nem állította volna, hogy a bolygók valóban Nap körüli pályákon keringenek, és elmélete nem több a jelenségeket pontosabban leíró hipotézisnél, a perre bizonyára nem kerül sor.

A per a megszületőben lévő természettudomány és a vallás első találkozása akkor, amikor a természettudomány még nem körvonalazta önmagát. Ne csodálkozzunk azon, hogy a természettudomány első szárnycsapásai és a vallás szembekerülnek egymással.

Mindez nem az eredendő ellentétet példázza, hanem a két különböző terület határainak lefeketetését. Tudomány és vallástörténeti szempontból a Galilei-per egy szerencsétlen eset, ugyanakkor pozitív hozadékkal is bír. A pert követő évszázadokban a természettudósok nem bonyolítottak vallási kérdésekbe, és a keresztény vallás is került a természettudományos megnyilatkozásokat. A két terület szétválasztásában a per utóéletének fontos szerep jutott. A természettudományok szekularizálódtak, és – Galilei perét kivéve – a katolikus egyház hivatalosan nem foglalt állást természettudományos kérdésekben. *Darwin* evolúciós elmélete keresztény körökben ugyan felháborodást keltett, és kisebb protestáns egyházak el is utasították-e tanokat, katolikus oldalon, talán éppen a Galilei-perek következtében elszenvedett hitelvesztésből tanulva, a természetes szelekciót elutasító hivatalos megnyilvánulás soha nem történt. A per nem a vallás és a természettudomány szembenállásának emblemikus esete, hanem a két külön megismerési terület elválasztására hívja fel figyelmünket.

## Irodalom

1. Simonyi K.: *A fizika kultúrtörténete*. Akadémiai Kiadó, Budapest (2011) 100–102.
2. Arisztotelész: *Az égbolt*. Akadémiai Kiadó, Budapest (2009).
3. Duhem, P.: *A jelenségek megőrzése*. Kairosz Kiadó, Budapest (2005), 61–83.
4. Simonyi K., idézett mű, 184–191.
5. Galilei, G.: *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo Tolemaico, e Copernicano*. Giovanni Batista Landini, Fiorenza (1632) 320.
6. II. János Pál beszéde. In: A Galilei ügy: a fájdalmas félreértés immár a múlté ... *Fizikai Szemle* 43/7 (1993) 276–280.
7. Taján M. T.: Megkezdődik Galilei Pere az inkvizíció előtt. in: Rubikon [http://www.rubicon.hu/magyar/nyomtathato\\_verzio/1633\\_aprilis\\_12\\_megkezdodik\\_galilei\\_pere\\_az\\_inkvizicio\\_elott/](http://www.rubicon.hu/magyar/nyomtathato_verzio/1633_aprilis_12_megkezdodik_galilei_pere_az_inkvizicio_elott/)
8. Jáki Sz. L.: *A Galilei-ügy tanulságai*. Kairosz Kiadó, Budapest (2009).
9. Galilei G.: Párbeszéd a két világrendszeréről, a ptolemaioszi és a kopernikuszi rendszerről. *Kriterion Könyvkiadó, Bukarest*, (1983) 215–226.
10. Galilei G.: idézett mű, 209–211.
11. Galilei G.: idézett mű, 37–77.

## HELYREIGAZÍTÁS

A *Fizikai Szemle* 2021. szeptemberi számában megjelent *Az elképesztő gyenge erő* című cikkembe hibás mondat került. A *Paritásértés* rész (295. oldal) második bekezdésében „A pionbomlásnál keletkező pozitív müon, amely antirészecske lévén, természetesen jobbra polarizált, pozitronra és neutrínókra bomlik, ...” kezdetű mondat eleje helyesen így hang-

zik: „A pionbomlásnál keletkező pozitív müon, dacára annak, hogy antirészecske, az impulzusmomentum megmaradása miatt balra polarizált, és pozitronra és neutrínókra bomlik, ...”.

A hibát a már megjelent cikkben vettem csak észre, és az olvasó szíves elnézését kérem.

Horváth Dezső

Szerkesztőség: 1092 Budapest, Ráday utca 18. földszint III., Eötvös Loránd Fizikai Társulat. Telefon/fax: (1) 201-8682

A Társulat Internet honlapja <http://www.elft.hu>, e-postacíme: [elft@elft.hu](mailto:elft@elft.hu)

Kiadja az Eötvös Loránd Fizikai Társulat, felelős kiadó Groma István főtájtár, felelős szerkesztő Lendvai János főszerkesztő.

Kéziratokat nem őrzünk meg és nem küldünk vissza. A szerzőknek tiszteletpéldányt küldünk.

Nyomdai előkészítés: Kármán Stúdió, nyomdai munkálatok: OOK-PRESS Kft., felelős vezető: Szathmáry Attila ügyvezető igazgató.

Terjeszti az Eötvös Loránd Fizikai Társulat, előfizethető a Társulatnál vagy postautalványon a 10200830-32310274-00000000 számú egyszámlán.

Megjelenik havonta (nyáron duplaszámmal), egyes szám ára: 1000.- Ft (duplaszámé 2000.- Ft) + postaköltség.

HU ISSN 0015–3257 (nyomtatott) és HU ISSN 1588–0540 (online)





# A MIKOLA-VERSENY PÉCSI DÖNTŐJÉNEK HÁROM MÉRÉSI FELADATÁRÓL

Simon Péter  
Pécsi Leőwey Klára Gimnázium,  
PTE TTK Fizikai Intézet

A Mikola Sándor Országos Középiskolai Tehetségkutató Fizikaverseny Magyarország legnépszerűbb fizikaversenye. Az első fordulóban több mint háromezer 9–10. évfolyamos középiskolás diák írja meg az öt feladatból álló feladatlapot. Akik ezt legalább 50%-osan teljesítik, bejutnak a második fordulóra, ahol szintén három órán át gondolkozhatnak a versenyzők, de most négy feladaton. A második fordulóban 600-800 diák szokott részt venni, közülük a legjobb 50 kilencedikes kerül be a verseny gyöngyösi döntőjébe, míg a legjobb 50 tizedikes Pécssett vetélkedik. A Mikola-verseny döntője két részből áll. Az egyik nap négy számításos feladatot tartalmazó feladatlapot kell megoldani, a másikon egy mérési feladatot kell elvégezni és róla jegyzőkönyvet készíteni. Az utóbbi évek néhány „gyöngyösi méréséről” a *Fizikai Szemle* múlt havi számában olvashattunk. Ebben a cikkben arra vállalkozunk, hogy bemutassunk az utóbbi évek pécsi Mikola-mérései közül hármat.

Sokan vallják, hogy a fizika tantárgy népszerűbbé válna, ha több kísérletet, mérést integrálnánk a tananyagba. A jelenségek megfigyelése, vizsgálata, leírása természetesen segíti a megértést. Az önálló mérés mégsem kedvelik a diákok. A személyes tapasztalaton túl ezt támasztja alá például az, hogy a *KöMaL* fizika feladatok (G, P) kategóriájába körülbelül hétszer annyian diák nevez be, mint a mérési versenybe. A Mikola-döntőre való készülés során is nagyobb súllyal szerepel az elméleti feladatok megoldása. Ennek ellenére nem hanyagolhatja el a mérést az, aki kimagasló eredményt szeretne elérni a versenyen, hiszen az értékelésnél 3:2 az elméleti forduló (60 pont) és a mérés (40 pont) aránya.

Köszönetet mondok *Honyek Gyulának* és *Koncz Károlynak*, akik annak idején szakmailag lektorálták a mérési feladatlapokat.



Simon Péter (1968) 1992-ben végzett az ELTE matematika–fizika tanári szakán. 1997 óta a Pécsi Leőwey Klára Gimnáziumban tanít. 2005-től a PTE TTK Fizikai Intézetében tanárszakos hallgatókat oktat. Tagja a Fizika OKTV-bizottságnak, vezeti a Mikola-versenybizottságot. Több tankönyv, példatár társszerzője. 2018-ban Rátz Tanár Úr Életműdíjat kapott.

## Kötélsúrlódás vizsgálata

2014. május elején a kötélsúrlódást kellett vizsgálnia a Pécssett versenyző diákoknak [1]. Rendelkezésre állt egy nagyobb szeg nehezékkal, 1 doboz (100 db) gémkapocs, valamint fonál, végein egy-egy hurokkal.

A mérés menete a következő volt. Az asztalon nyugvó szeg elmozdulását a ráhelyezett nehezék akadályozta meg. A fonalat átvettük a szegen, és a hurkolt végeire egy-egy gémkapocsot erősítettünk. Ez volt a kiindulási helyzet. A gémkapocsok ekkor nyugalomban voltak. A versenyzőnek egyesével további gémkapocsokat kellett helyeznie a jobb oldali hurokra egészen addig, míg azok még éppen egyensúlyban (nyugalomban) maradtak. Ekkor egy gémkapocsot kellett tenni a bal oldali hurokra, majd a jobb oldali hurokra megint annyit, hogy az egyensúly még éppen megmaradjon. Az utolsó két lépést még legalább ötször meg kellett ismételni. A jegyzőkönyv megírása során a diákoknak öt feladatot kellett elvégezniük.

Először a vizsgált egyensúlyi helyzetek esetén a jobb és bal oldali hurkokra akasztott gémkapocsok  $N_1$  (bal oldali) és  $N_2$  (jobb oldali) számát kellett megszámlálni. A mért adatokat táblázatba kellett foglalni, valamint  $N_2$ -t kellett ábrázolni  $N_1$  függvényében!

A mért adatokat az *1. táblázat*, míg a vizsgált függvény grafikonját az *1. ábra* tartalmazza.

Hengeres felületen átvetett vagy feltekercselt fonál a súrlódásnak (kötélsúrlódás) köszönhetően nyugalomban maradhat akkor is, ha a fonál két végét különböző nagyságú erő terheli. A két erő hányadosának viszont van egy legnagyobb értéke:

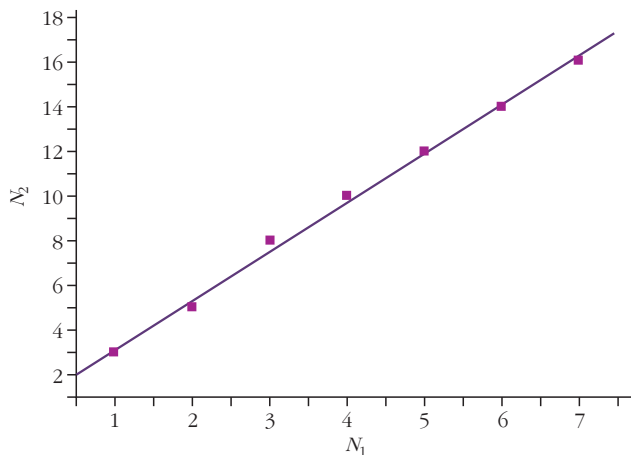
$$F_2 : F_1 = e^{\mu_0 \alpha},$$

ahol  $e$  az Euler-féle szám, a  $\mu_0$  a tapadó súrlódás tényezője, az  $\alpha$  a kötélnak a hengeren lévő részéhez (körív) tartozó középponti szöge radiánban. Ezt természetesen egy tizedikes diáknak nem kell tudnia, ezért ez az ismeret szerepelt a feladatlapon. Ennek

*1. táblázat*

**A gémkapocsok  $N_1$  és  $N_2$  száma**

$N_1$	1	2	3	4	5	6	7
$N_2$	3	5	8	10	12	14	16



1. ábra. Az  $N_1$ - $N_2$  függvény és a trendegyenes.

ismeretében kellett meghatározni a fonál és a szeg közötti  $\mu_0$  tapadási súrlódási tényezőt. Az erő egységét most érdemes az 1 db gémpapocra ható nehézségi erővel egyenlőnek venni. A fonál végein ébredő erő ( $F$ ) egyenesen arányos a ráakasztott gémpapocok ( $N$ ) számával. Emiatt lehet használni az előbbi grafikont. A mérési pontokra illeszkedő egyenes meredeksége 2,18; kevesebb, mint 3%-os relatív hibával. Ezután egy exponenciális egyenletet kellett megoldani:

$$2,18 = e^{\mu_0 \pi}$$

(A fonál  $\alpha = \pi$  középponti szögű köríven fekszik a szegre.) Vegyük mindkét oldal természetes alapú logaritmusát, valamint használjuk fel a hatvány logaritmusára vonatkozó azonosságot:

$$\ln 2,18 = \mu_0 \pi \Rightarrow \mu_0 = \frac{\ln 2,18}{\pi} = 0,248.$$

Volt olyan diák, aki nem ismerte a logaritmus fogalmát. Ügyes keresgéssel megtalálhatjuk azt a kitevőt, amelyre e-t emelve (körülbelül) 2,18-at kapunk. A keresgélést a 2. táblázat dokumentálja. A keresett kitevő: 0,78.

$$0,78 = \mu_0 \pi \Rightarrow \mu_0 = \frac{0,78}{\pi} = 0,248.$$

Figyelembe véve, hogy a trendegyenes meredekségét 3%-os pontossággal mértük, a keresett tapadási súrlódási együttható  $\mu_0 = 0,25 \pm 0,02$ .

Ezután a szegen átvett fonalat körbe kellett tekereni egyszer a szegen, azaz másfél fordulatot,  $3\pi$  szögnyit tekeredett a fonál. A bal oldali hurokra egy, majd kettő, végül három gémpapocot kellett akasztani, a jobb oldalra pedig mindegyik esetben annyit, hogy a rendszer még éppen egyensúlyban maradjon. A mért adatokat táblázatba kellett írni. A korábban leírtak alapján, illetve a már kiszámolt  $\mu_0$  tapadó súrlódási tényező felhasználásával elméleti úton is ki kellett számolni az  $N_1 = 1, 2, 3$  számokhoz tartozó  $N_2$  értéket. Ezután össze kellett hasonlítani a mért, illetve a számolt értékeket.

2. táblázat

A kitevő „keresése”							
kitevő	0,5	0,6	0,7	0,75	0,77	<b>0,78</b>	0,79
hatványérték	1,65	1,82	2,01	2,12	2,16	<b>2,18</b>	2,20

Az elmélet szerint:

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{\mu_0 3\pi} = (e^{\mu_0 \pi})^3 = 2,18^3 = 10,36.$$

Ennek alapján azt várnánk, hogy a jobb oldalra helyezett gémpapocok száma rendre ( $N_2 = 10,36 \cdot N_1$ ): 10,36, azaz 10; 20,72 azaz 21; 31,08, azaz 31 ... legyen. A mérések szerint viszont: 10; 18; 26 ... gémpapocsszámot kaptunk.

A mért és számolt értékek csak a legkisebb terhelés esetén adnak jó egyezést (3. táblázat). A mért és számított értékek közötti legnagyobb eltérés 16%.

A negyedik kérdés a versenyzőnek ismét azt a képességét mérte, hogy az eddig megszerzett új ismeretet (kötélsúrlódás elmélete) hogyan tudja alkalmazni a mért adatok felhasználásával. Azt kellett kiszámolni, hogy mekkora  $\alpha$  középponti szög esetén lesz a fonál egyik végén megjelenő erő a másik végén megjelenőnek a kétszerese. Erre a kérdésre is kétféle módon lehetett válaszolni. Vagy egy exponenciális egyenletet kellett megoldani, vagy „ügyes keresgéssel” megtalálni azt a kitevőt, amelyre e-t emelve (körülbelül) 2-t kapunk.

$$\ln 2 = \mu_0 \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\ln 2}{\mu_0} \approx 2,8 \text{ rad} \approx 160^\circ.$$

Az utolsó feladatban az előzőek segítségével egy mérési eljárást kellett kidolgozni az asztalon lévő fémhenger tömegének meghatározására. Minden korábban használt eszközt, a korábban kiszámolt  $\mu_0$  tapadó súrlódási tényező értékét, valamint azt az információt lehetett felhasználni, hogy egy gémpapoc tömege,  $m_0 = 0,365$  g.

Akasszuk a fonál egyik végére a fémhengert, a másik végére egy gémpapocot. Ha a fonalat így ráhelyezzük a szegre, és azt elengedjük, akkor az nem marad egyensúlyban: a fémhenger lefelé, a gémpapoc felfelé gyorsul. Ekkor a fonálnak a hengeren lévő részéhez (körív) tartozó középponti szög  $\alpha = \pi$ . Tekerjük meg a fonalat még egyszer a szeg körül, ekkor  $\alpha = 3\pi$ . A helyzet változatlan. Most ismét tekerjük meg a fonalat a szeg körül, ekkor  $\alpha_1 = 5\pi$ . A helyzet ismét változatlan. Az  $\alpha_2 = 7\pi$  esetén viszont a tes-

3. táblázat

Számolt és mért értékek másfél fordulatnyi fonál esetén			
$N_1$	1	2	3
$N_2$ számolt	10,4	20,7	31
$N_2$ mért	10	18	26

tek egyensúlyban maradnak a fonál végein. Összefoglalva:  $N = 1$  gémkapocs mellett  $\alpha_1$  középponti szög esetén nincs egyensúly,  $\alpha_2$  középponti szög esetén egyensúly van. A 2. feladatrészben megismert összefüggés szerint:

$$F_1 = N m_0 g e^{\mu_0 \alpha_1},$$

$$F_2 = N m_0 g e^{\mu_0 \alpha_2}.$$

A vizsgált fémtest  $M$  tömegére a következő reláció írható fel:

$$m_1 = N m_0 e^{\mu_0 \alpha_1} < M < N m_0 e^{\mu_0 \alpha_2} = m_2.$$

A továbbiakban  $N = 2, 3, \dots$  mellett is határozzuk meg  $\alpha_1, \alpha_2, m_1, m_2$  értékeket. Az adatainkat a 4. táblázatba foglaltuk.

A keresett  $M$  tömeget  $m_1$ -gyel alulról,  $m_2$ -vel felülről tudjuk becsülni.  $M$  legnagyobb alsó és a legkisebb felső becslése ( $N = 13$ , illetve 14-nél vastagítva látszik):

$$49,1 \text{ g} < M < 52,9 \text{ g}.$$

A keresett tömeg  $M = 51 \pm 1,9 \text{ g}$ . (A relatív hiba kisebb, mint 4%.) A vizsgát fémhenger mérleggel mért tömege 50 g.

A döntőben résztvevő 50 diák a megszerezhető 41 féle pontszámból 15 félért szerzett. A legkisebb pontszám 6, a legnagyobb 39 volt. Az átlagpontszám 27, a leggyakoribb pontszám (módusz): 33 (9 darab), míg a medián: 31.

## A légköri ózonréteg által biztosított fedettség vizsgálata

2017. május elején egy természeti jelenséget kellett a versenyzőknek vizsgálniuk egy modellkísérlet segítségével [2]. A vizsgálat elvégzéséhez csupán két hagyományos dobókocka állt rendelkezésre.

A vizsgált probléma a következő volt. A magaslégtörő ózon ( $O_3$ ) az ultrabolya sugárzás hatására keletkezik. Az ózonpajzs védelmet biztosít a földi életnek. Ózonréteg hiányában az UV-B sugárzás felbontaná az élő sejtekben lévő kémiai kötések, az UV-C sugárzás pedig már a vízmolekulákat is. A sztratoszférikus ózon vastagságát Dobson-egységekben mérik: 1 DU (Dobson-unit) lenne a légkör ózontartalmának vastagsága, ha a benne lévő összes ózon normál állapotban 0,01 mm vastag réteget alkotna. Az 1970-es években fedezték fel, hogy az ózonréteg vékonyodik, amit mesterséges eredetű vegyszerek légkörbe kerülésével magyaráztak. Az Antarktisz feletti sztratoszférában 1955-ben 320 Dobson-egységet mértek, 1975-ben 280-at, majd 1995-ben 90 DU-ra süllyedt az ózonréteg vastagsága. A folyamat megállítására érdekében 1985-ben nemzetközi intézkedési terv született, amelynek hatására a földi ózonréteg vastagsága 2005-re elérte a minimumát. Azóta nem csökken, sőt vastagodik, az

4. táblázat

### A keresett tömeg $m_1$ alsó és $m_2$ felső becslései

$N$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$m_1$ (g)	$m_2$ (g)
1	$5\pi$	$7\pi$	18	85
2	$5\pi$	$7\pi$	36	170
3	$3\pi$	$5\pi$	11	53,85
4	$3\pi$	$5\pi$	15	72
5	$3\pi$	$5\pi$	19	90
6	$3\pi$	$5\pi$	23	107
7	$3\pi$	$5\pi$	26	126
8	$3\pi$	$5\pi$	30	...
9	$3\pi$	$5\pi$	...	...
10	$3\pi$	$5\pi$	...	...
11	$3\pi$	$5\pi$	...	...
12	$3\pi$	$5\pi$	45,35	215
13	$3\pi$	$5\pi$	<b>49,1</b>	233
14	$\pi$	$3\pi$	11,1	<b>52,9</b>

előrejelzések szerint pedig legkésőbb 2050-re ismét az 1980-as évek szintjére nő.

Az első két kérdés azt kívánta ellenőrizni, hogy a versenyzők mennyire sajtútották el az ózonréteg egység és a fedettség fogalmát. A földi légkör normális ózontartalma 300 DU körüli érték. Körülbelül hány ózonmolekula ( $O_3$ ) van a légkör  $1 \text{ m}^2$  alapterületű függőleges levegőoszlopában?

Írjuk fel a vizsgált gázra a  $pV = NkT$  állapotegyenletet, majd fejezzük ki  $N$ -et:

$$N = \frac{p(A d)}{k T} = \frac{10^5 \text{ Pa} \cdot 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 273 \text{ K}} = 7,96 \cdot 10^{22} \approx 8 \cdot 10^{22}.$$

Az ózonmolekulát modellezzük úgy, mintha a káros sugárzással szembeni átlagos hatásos keresztmetszete egy  $a = 10^{-11} \text{ m}$  oldalú négyzet lenne. Elméletileg maximumán hány-szoros lefedettséget biztosíthatna  $1 \text{ m}^2$ -en az előző feladatrészben kiszámolt mennyiségű ózonmolekula?

Egy darab ózonmolekula az  $1 \text{ m}^2$ -es felület

$$\frac{1}{10^{11} \cdot 10^{11}} \text{-ed}$$

részét fedi le. A terület lefedettségét jelölje  $L$ :

$$L = \frac{N}{10^{11} \cdot 10^{11}} \approx 8.$$

Mivel a véletlenszerűen elhelyezkedő ózonmolekulák egymással akár többszörösen is átfedésben

lehetnek, ezért a valóságban létrejövő lefedettség, illetve fedetlenség valószínűségi függvényekkel írható le. A következőkben a véletlenszerű folyamatokat dobókockákkal végzett modellkísérletekkel vizsgáljuk.

Egy  $6 \times 6$ -os négyzetet 36 kicsi négyzet alkot. Két dobókocka segítségével véletlenszerűen válasszunk ki a 36 kicsi négyzet közül egyet, és azt „sátirozzuk be” (vagy egy pont berajzolásával jelöljük ki). Ezt összesen 36-szor végezzük el. Hány százalékos a nagy négyzet lefedettsége? A 36 kicsi négyzet hány százaléka maradt fedetlenül?

A két (zöld és fehér) dobókockával dobott számok jelölik a  $6 \times 6$ -os négyzet megfelelő sorait, oszlopait. Hogy a többes „sátirozás” is szépen látszódjon, nem sátirozom, hanem csak jelölöm a „kisorsolt” kis négyzetet (2. ábra). A  $6 \times 6$ -os négyzet lefedettsége:  $L_1 = 22/36 \approx 0,61 = 61\%$ . A fedetlenül maradt terület aránya:  $F_1 = 14/36 \approx 0,39 = 39\%$ .

Az előző feladatrészben elvégzett modellkísérlet ismételjük meg még négyszer, majd az elvégzett öt kísérletsorozat alapján határozzuk meg, hogy a 36 kicsi négyzet átlagosan hány százaléka maradt fedetlenül!

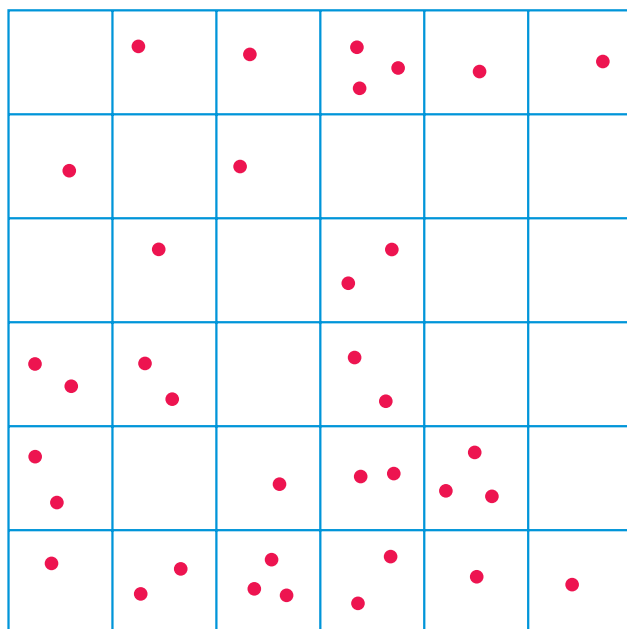
Az elvégzett 5 mérés alapján a fedetlenség átlaga:

$$F_{\text{átlag}} = \frac{14 + 13 + 14 + 14 + 11}{5 \cdot 36} = 0,36.$$

(A négy besátirozott  $6 \times 6$ -os négyzetet terjedelmi okokból nem közöljük.)

Az ötödik kérdésre az eddig szerzett adatok feldolgozásával lehetett válaszolni. Ha egy kísérletsorozatban nem 36 dobást végzünk, hanem 72-t, akkor milyen arányú fedetlenségre számíthatunk? Előző mérésorozatainkból válasszunk ki kettőt-kettőt, amelyeket egyesítve igazoljuk vagy cáfoljuk a sejtésünket!

2. ábra. 36 kis négyzet fedettsége 36 „sorsolás” után.



A 2-szer 36 kicsi négyzet „besátirozása” után az átlagosan fedetlenül maradt terület aránya:

$$F_{\text{átlag}} = \frac{5 + 2 + 6 + 4 + 6 + 6 + 4 + 4 + 4 + 5}{10 \cdot 36} = \frac{46}{360} = 0,127.$$

Az lehet a sejtés, hogy a második 36 dobást követően fedetlenül maradt terület aránya megegyezik az első 36 dobás után fedetlenül maradt területarány négyzetével. Ellenőrzés:

$$0,36^2 = 0,134 \approx 0,127.$$

Az eltérés körülbelül 5%, ami elfogadhatónak mondható. Jelölje  $N_0$  a kis négyzetek számát,  $N$  a sátirozások számát, ekkor a fedetlenül maradt terület aránya:

$$F = 0,36^{\frac{N}{N_0}}.$$

Az utolsó kérdésre az imént felismert törvényszerűség segítségével adhatunk választ. Adjuk meg a fedetlenség arányát az Antarktison 1995-ben! Most az

$$\frac{N}{N_0} = \frac{90}{300} \cdot 8 = 2,4$$

és ebből a fedetlenség

$$F = 0,36^{2,4} \approx 0,09.$$

Az Antarktison a fedetlenség az 1995. évben körülbelül 9% volt.

Érdeemes vizsgálni a megismert modellkísérlet matematikai hátterét. A dobókockákkal való minden egyes dobás után a 36 kicsi négyzet valamelyikének kiválasztásának valószínűsége  $1/36$ . Érdeemes analógiát keresni a modellkísérlet és a radioaktív bomlás között. A radioaktív bomlásokat leíró  $\lambda$  bomlási állandó annak a valószínűségét adja meg, hogy az  $N$  darab radioaktív mag közül valamelyik a következő másodpercben elbomlik. Az analógiát felhasználva mondhatjuk, hogy az  $1/36$  most a bomlási állandó szerepét játssza. A bomlási törvény két alakja ismert:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = -\lambda N, \text{ illetve } N(t) = N_0 e^{-\lambda t}.$$

Dobjunk 36-szor ( $t = 36$ ), és használjuk a második összefüggést. Ekkor a lefedetlen kis négyzetek száma:

$$N(t = 36) = 36 \cdot e^{-\frac{1}{36} \cdot 36} = \frac{36}{e} \approx 13,2.$$

A lefedetlenség aránya:

$$\frac{1}{e} \approx 0,368.$$

A versenyen résztvevő 45 diák a megszerezhető 41 féle pontszámból 15 félért szerzett. A legkisebb pont-

szám 14, a legnagyobb 35 volt. Az átlag pontszám 28,2, leggyakoribb pontszám (módusz): 26 (7 darab), a medián: 29.

## Lengések vizsgálata

2018. május elején egy szép mechanikai mérést kellett a diákoknak elvégezniük [3]. Rendelkezésre állt Bunsen-állvány rögzítődíóval, szeg, alumíniumcső (hossza  $L = 50$  cm, tömege  $m = 66$  g, külső átmérője  $D = 16$  mm, belső átmérője  $d = 13$  mm), hosszabb madzag zsinórfékkal, mérőszalag, stopper.

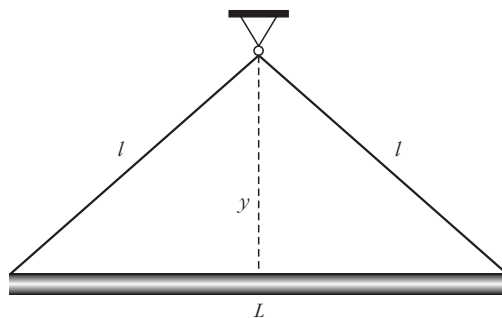
A vizsgált probléma a következő volt. A hosszabb madzagot átbújtattuk a csövön, majd a végeit zsinórfékkal kötöttük össze. Ezután a csövet a madzaggal a Bunsen-állványhoz erősített szegre akasztottuk (3. ábra). A felfüggesztett csövet vízszintes helyzetéből lengésbe hoztuk úgy, hogy függőleges síkban az egyensúlyi helyzetéből kissé kitérítettük, majd magára hagytuk. A lengő cső a két szélső helyzet között időben ismétlődő mozgást végzett.

Lengésidőnek azt az időtartamot nevezzük, amely alatt a lengő test az egyik szélső helyzetből indulva eljut a másikba, majd visszaér a kiindulási helyzetbe. Az egyensúlyban lévő, vízszintes,  $L$  hosszúságú cső egy egyenlő szárú háromszög alapjának, míg a cernaszálak az  $l$  hosszú szárnak tekinthetők. A háromszög magassága  $y$ .

Az első feladatként mérésekkel kellett meghatározni az alumíniumcső  $T$  lengésidjét kis kitérések és különböző  $y$  magasságok mellett. A mérés pontossága növelhető, ha akár 50 teljes lengés idejét mérjük, majd ebből számolunk lengésidőt. A mért adatokat az 5. táblázatba írtuk, és ábrázoltuk a  $T$  lengésidőt az  $y$  magasság függvényében (4. ábra).

Ezután a mért adatok alapján kellett meghatározni, hogy mekkora  $y$  magasság esetén lesz a cső kis lengéseinek  $T$  periódusideje a lehető legkisebb, és mekkora ebben az esetben a lengésidő. Aki az első feladatrésznél az  $y$  magasságot nem elegendően tág intervallumról választotta, még pótolhatta további mérésekkel és megtalálhatta a mért  $T$  periódusidő minimumát és annak helyét.

A 4. ábra grafikonja, illetve az 5. táblázat alapján megállapítható, hogy  $y = 11,8$  cm (és környezetében) legkisebb a cső lengésideje, értéke  $T = 1,04$  s.



3. ábra. A mérési elrendezés.

A harmadik részfeladatban elméleti levezetéssel kellett meghatározni azt, amit korábban a mérési adatokból olvastunk le, azaz mekkora  $y$  magasság esetén lesz a cső kis lengéseinek  $T$  periódusideje a lehető legkisebb, és mekkora ebben az esetben a lengésidő?

A tizedikes diákoknak ehhez a következő segítséget adtuk:

„A csövet kis lengések esetén fizikai ingának tekinthetjük. A fizikai inga lengésidjét a következő képlet segítségével számolhatjuk ki:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{mgs}}$$

Az  $m$  a test tömege,  $g$  a nehézségi gyorsulás,  $s$  a lengő test tömegközéppontjának távolsága a felfüggesztési ponttól.  $\Theta$  a lengő test tehetetlenségi nyomatéka a felfüggesztési pontra vonatkozóan. A test súlypontján átmenő  $t_1$  tengelyre vonatkozó  $\Theta_s$  ismeretében a  $t_1$ -gyel párhuzamos, tőle  $d$  távol lévő  $t_2$  tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték (Steiner-tétel):

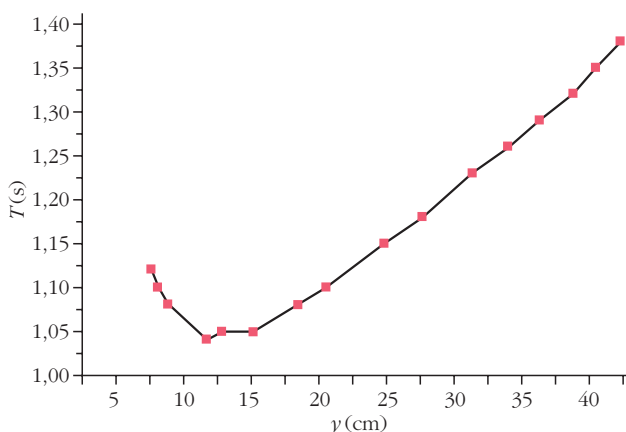
$$\Theta = \Theta_s + m d^2.$$

A rúd esetében

$$\Theta_s = \frac{1}{12} m L^2,$$

ha a tengely a rúdra merőleges, és a rúd elhanyagolható keresztmetszetű.”

4. ábra. A  $T$  lengésidő az  $y$  magasság függvényében.



Alkalmazzuk a fizikai inga lengésidejének képletét:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{mgs}}$$

A  $\Theta$  tehetetlenségi nyomaték meghatározása az  $m$  tömegű,  $L$  hosszú rúd tömegközéppontján átmenő, a rúdra merőleges tengelyre vonatkozóan összefüggés és a Steiner-tétel felhasználásával:

$$\Theta = \frac{1}{12} mL^2 + my^2,$$

ahol  $s = y$ , majd ezt a fizikai inga lengésidejének képletébe írva:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{12} mL^2 + my^2}{mgy}} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{1}{12} \frac{L^2}{y} + y}.$$

A gyökjel alatti kifejezés alulról való becsléséhez használjuk a számtani és mértani közép közötti összefüggést:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab},$$

az egyenlőség akkor igaz, ha  $a = b$ . A lengésideőre alkalmazva az előbbi összefüggést:

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{1}{12} \frac{L^2}{y} + y} \geq \\ &\geq \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{2 \sqrt{\frac{1}{12} \frac{L^2}{y} y}} = \frac{2\pi}{\sqrt[4]{3}} \sqrt{\frac{L}{g}}. \end{aligned}$$

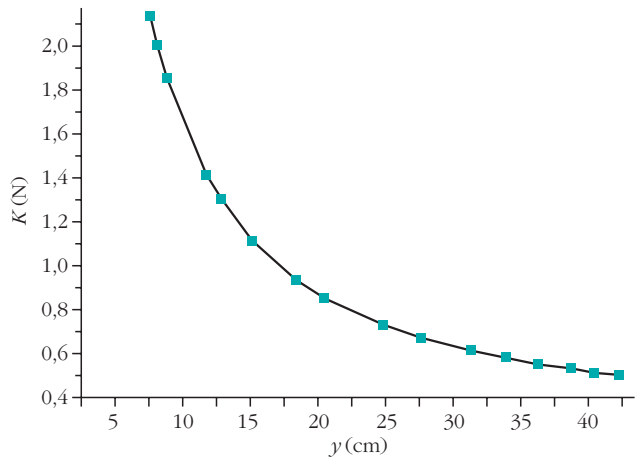
A  $T$  lengésideő minimális értékű, ha

$$\frac{1}{12} \frac{L^2}{y} = y \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{12}} L.$$

Az  $L = 50$  cm hosszú csőhöz tartozó  $y_{\min} = 14,4$  cm. Az összefüggés alapján ekkor  $T = 1,08$  s.

A negyedik kérdés a mért, illetve elméletileg levezetett értékek közötti eltérés okára kérdezett rá. Az elméleti leírásban nem vettük figyelembe a cső átmérőjét. A mérés során az időt igen pontosan tudtuk mérni, viszont az  $y$  magasságot főleg a kisebb értékeknél csak nagy relatív hibával. Ezek magyarázhatják a mért, illetve elméletileg levezetett értékek közötti körülbelül 4%-os eltérést.

Az utolsó feladatrész megoldásához ismét elméleti megfontolásokra volt szükség, és a korábban mért adatokat is új szempont alapján kellett feldolgozni. A feladat a cérnában ébredő  $K$  erő nagyságára vonatkozó összefüggés levezetése volt az  $y$  magasság függvényében, amikor a cső vízszintes helyzetben, nyugalomban van. Az első feladatrészben mért  $y$  magasságok esetén ki is kellett számolni  $K$  értékeit.



5. ábra. A  $K$  erő nagysága az  $y$  magasság függvényében.

Az egyenlő szárú háromszögre vonatkozó geometriai megfontolás alapján, és az erők egyensúlyát figyelembe véve felírható egy-egy trigonometriai összefüggés:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2y}{L}, \quad \sin \alpha = \frac{mg}{2K}.$$

Használjuk fel a következő összefüggéseket:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad (\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1.$$

Ezek után adódik:

$$K(y) = \frac{mg}{2} \sqrt{\left(\frac{L}{2y}\right)^2 + 1}.$$

Az ébredő kötél erő értékeit a korábban már mért  $y$  magasságokban ki lehet számolni és ábrázolni (5. ábra). A grafikon kis  $y$  értékekhez tartozó része  $1/y$ -nal arányos, hiszen a gyökjel alatti 1 elenyésző a másik, négyzetes taghoz képest, míg  $y$  értékét növelve a gyökjel alatti 1 lesz a domináns és így  $K$  aszimptotikusan  $(mg/2)$ -höz tart, azaz a „függőleges” dupla cérna egy-egy szára a cső fél súlyát tartja.

A versenyen résztvevő 47 diák a megszerezhető 41 pontszámból 24 félért szerzett. A legkisebb pontszám 7, a legnagyobb 40 volt. Az átlagpontszám 27,3, leggyakoribb pontszám (módusz): 26 (4 darab), medián: 28.



A Mikola-verseny egyrészt célt ad több ezer diáknak a fizika elmélyültebb tanulásához, másrészt kiválasztja a legtehetségesebbeket. A verseny döntőjén a legjobbak a számítási feladatok megoldása mellett mérési feladattal is foglalkoznak. Igyekszünk mindig olyan mérési problémát adni a tanulóknak, amelyek kellően motiválók és a megoldásuk során új ismereteket fedeznek fel a versenyzők.

#### Irodalom

1. A 2014. évi pécsi Mikola-mérés feladatlapja, [https://drive.google.com/file/d/1G5\\_47swFb\\_5Uj\\_R\\_gbUbG8ICY-ldwUEA/view](https://drive.google.com/file/d/1G5_47swFb_5Uj_R_gbUbG8ICY-ldwUEA/view)
2. A 2017. évi pécsi Mikola-mérés feladatlapja, [https://drive.google.com/file/d/1JPicQ4URh0-bQUEF\\_ZR1\\_eDunh-zdpo/view](https://drive.google.com/file/d/1JPicQ4URh0-bQUEF_ZR1_eDunh-zdpo/view)
3. A 2018. évi pécsi Mikola-mérés feladatlapja, <https://drive.google.com/file/d/1a41TQH0CMXpVd1GySoLJnTovdwFpFiC/view>

# A KVANTUMHATÁROZATLANSÁG A KVANTUMMECHANIKA FÉNYPOLARIZÁCIÓS MODELLJÉBEN

Tóth Kristóf  
Czuczor Gergely Bencés Gimnázium  
és Kollégium, Győr

Írásomban rámutatok arra, hogy a kvantummechanika alapjainak fénypolarizációra épülő középiskolai bemutatása során a határozatlansági elv megszokott matematikai alakja nem merülhet fel. Megmutatom azonban, hogy a polarizáción alapuló tananyagban egyszerre pontosan nem mérhető mennyiségek szórásai középiskolai módszerekkel is meghatározhatók, így a kvantumhatározatlanság elvi alapja ebben a modell-quantummechanikában tanítható.

## Bevezetés

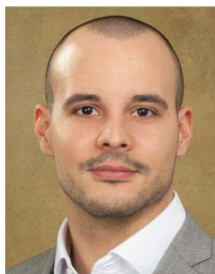
A kvantummechanika felsőfokú matematikai formalizmusra épül, ezért a középiskolai feldolgozása, ezen belül a határozatlansági elv pontos megfogalmazása kényes feladat, amelynek megoldására több megközelítés ismert. *Tóth Eszter* tankönyve például a hullámformalizmust tekinti, a határozatlansági elvet az elektron hullámcsomag mivoltán keresztül szemlélteti. Más feldolgozások (ilyenek a mai magyar középiskolás könyvek) pedig kvalitatív magyarázatokat adnak a törvény bemutatására [1]. Azonban léteznek a

középszintű kvantummechanikának olyan megközelítései is, amelyek a kvantummechanika sokszínű megközelítéséből a vektorformalizmust választják, amelyet a legegyszerűbb, kétállapotú rendszereken keresztül építenek fel. Utóbbira a legnépszerűbb a fénypolarizáció jelenségének értelmezése fotonokkal [2–4]. Az erre alapuló középiskolai tananyag honlapon tanításra alkalmas formában már magyarul is hozzáférhető [5]. *Dirac*ig nyúlik vissza a polarizáció jelenségének felhasználása a kvantummechanika bevezetésére [6], ami magyar egyetemi tankönyvben is fellelhető [7].

A fénypolarizációt használó megközelítések a kvantumszámítógépek megjelenése miatt egyre népszerűbbek. Éppen a közelmúltban jelent meg egy számítógépes játék [8], ahol fényjelenségekkel oldhatunk meg kvantumos logikai problémákat. A fénypolarizáción alapuló tananyag a Stern–Gerlach-kísérletet fordítja le a fotonokra éppen azért, mert fényvel szemléletes kísérleteket lehet végezni. Azonban fontos megjegyezni, hogy a kvantummechanika felépítése a fénypolarizáción keresztül nem adja vissza sem a foton korrekt fizikai leírását, sem a kvantummechanika teljes matematikai formalizmusát. Nem ad teret például a kvantumos összefonódás értelmezésének, és amint itt megmutatom a kvantumhatározatlanság általánosan érvényes megfogalmazásának. Ezért a tananyagot inkább „modell kvantummechanikának” érdemes nevezni, amely segítségével a középiskolában is érthetővé válnak az alaptörvények és bizonyos számítási módszerek.

Általában, amikor a kvantummechanika feldolgozását tárgyaljuk, először érdemes megfogalmazni, hogy mi a kvantummechanika célkitűzése. A mikrovilágra vonatkozó értelmes kérdésfelvetés az, hogy ha egy vizsgált kvantumrendszer valamely fizikai mennyiségét megmérjük, akkor a különböző lehetséges mérési eredményeket mekkora valószínűséggel fogjuk megkapni. Ehhez három jól elkülöníthető lépést kell követnünk. Elsőként meg kell határozni a kezdeti állapotot, ami többnyire az állapotfüggvény megadását jelenti. Másodszor megadjuk a kezdeti állapot változását az idővel. Végül mérést végzünk az így előálló állapotban, és meg tudjuk becsülni a mérés lehetséges kimeneteleinek valószínűségeit. A középső lépés – a dinamikai feladat megoldása – magas szintű matematikát (általában parciális differenciálegyenlet megoldását) igényli, ezért a középiskolai tárgyalásban nem lehet célkitűzés. Az állapot meghatározása és a rajta végzett mérés mate-

Köszönetemet szeretném kifejezni *Tél Tamásnak* és *Vincze Miklósnak* a [2–4] tananyag értelmezése és magyarrá fordítása kapcsán folytatott hasznos eszmecsereért. Külön köszönettel tartozom témavezetőimnek *Tél Tamásnak* és *Cynolter Gábornak* a cikk alapjául szolgáló gondolataim meghallgatásáért, ezekhez fűzött kitérő megjegyzéseikért. Továbbá köszönöm *Tél Tamásnak* a szórás középiskolás ismertetésében nyújtott egyszerűsítésekért, számításaim ellenőrzéséért. Ezenfelül köszönöm *Tasnádi Péternek*, hogy megmutatta, hogy elsőként *Dirac* javasolta a fénypolarizáció jelenségét a kvantummechanika bevezetésére. Ezenfelül köszönettel tartozom a cikk egyik bírálójának, *Patkós Andrásnak*, a személyes konzultációért és a cikkhez fűzött fontos javaslataiért, amelyek a korrekt fizikai értelmezésben és az általánosításban nyújtottak segítséget. Mindemmel a cikk másik bírálójának, *Trócsányi Zoltánnak* is hálás vagyok az alapos átolvasásért és a cikk olvashatóbbá tételéért. Legvégül köszönettel tartozom fizikatanár kollégáimnak, *Tóth István Konstantinnak*, *Ruff Lászlónak* és *Csonka Lászlónak* a cikk átolvasásáért. A tanulmány elkészítését a Magyar Tudományos Akadémia Tantárgypedagógiai Kutatási Programja támogatta.



*Tóth Kristóf* 2020-ban végzett az ELTE-n, mint középiskolai matematika- és fizikatanár. Jelenleg az ELTE Fizika Tanítása Program elsőéves doktorandusz hallgatója, a győri Czuczor Gergely Bencés Gimnázium és Kollégium fizikatanára és az MTA–ELTE Fizika Tanítása Kutatócsoport tagja. Kutatási területe a kvantummechanika és kvantuminformatika tanítása.

matikai leírása azonban a kétállapotú rendszerek esetén egyszerű mátrixok szorzását jelenti, aminek szabályait a középiskolában is be lehet mutatni. Ennek tükrében a kvantummechanika fénypolarizáció keresztlül történő felépítése különösen alkalmas fontos kvantummechanikai jelenségek, fogalmak és elvek tisztázására. Az utóbbiak közé tartozik a határozatlansági elv.

A határozatlansági elv a mikrovilág lenyűgöző törvénye. Ezen alapvetően matematikai képlet fizikai értelmezése azonban változatos lehet a középiskolában. Írásomban ezért bemutatok néhány gyakran elhangzó kijelentést, amelyek esetenként ellentmondani látszanak egymásnak. Bemutatok egy kevésbé közismert megközelítést, amelynek középiskolai feldolgozása lehetséges. Tapasztalatom szerint az itt bemutatásra kerülő irány egyre népszerűbb mérnöki körökben. Cikkem elsősorban tanár kollégáimnak és érdeklődő fizikusoknak szól, ezért nyelvezetem az egyetemen tanult fizika eszköztárát is használja. Azonban a levezetések nem feltételeznek magasabb szintű matematikai ismereteket, és így azok, valamint a mögöttük megjelenő értelmezések – megfelelően tálalva – a középiskolások számára is érthetők lehetnek, ezzel bővítve a jelenlegi hazai kvantummechanika tanításával kapcsolatos kutatásokat [1].

## A határozatlansági elv

Ha egy általános kvantummechanikáról szóló egyetemi tankönyvet fellapozunk, akkor a Heisenberg-féle határozatlansági elvvel kétszer is szembetaláljuk magunkat. Első ízben megismerhetjük azt, hogy egy szabad elektront olyan hullámcsomagként írhatunk le, amelyet végtelen sok szinuszhullám szuperpozíciójaként lehet előállítani. Ezért az elektronhoz végtelen sok hullámhosszérték rendelhető, és így a de Broglie-törvény értelmében végtelen sok lendületértéket társíthatunk hozzá. Ha túlságosan lokalizált a hullámcsomag, akkor szélesebb lendületsokaságot tartalmaz, és fordítva: ha nagy térrészt „foglal” el az elektron, akkor lendületét elvileg pontosabban tudjuk meghatározni [1]. Azaz érvényes a középiskolából is jól ismert  $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar/2$  egyenlőtlenség, ahol  $\hbar$  a redukált Planck-állandó és a  $\Delta$  a fizikai mennyiségek *elvi mérési bizonytalanságát* jelöli. Ez a megközelítés burkoltan a Fourier-transzformációt fogalmazza meg, és így középiskolás szinten legfeljebb elfogadható, de fel nem fogható.

Bár a határozatlansági elv a mérés elvi bizonytalanságáról tesz kijelentést, a gyakorlatban az adott állapothoz tartozó fizikai mennyiség szórásának jelentése, hogy az azonos állapotú részecskesokaságon elvégzett mérések eredményei átlagosan mennyire szóróznak a várható érték körül [1].

Ha továbbhaladunk kvantummechanikai tanulmányainkkal, megismerhetjük a határozatlansági elv általános matematikai alakját, amely bármely két fizikai mennyiségre felírható. Ha a két fizikai mennyiség

$A$  és  $B$ , akkor a határozatlansági elv az ezekhez rendelt operátorok  $\Delta \hat{A}$  és  $\Delta \hat{B}$  szórására fogalmaz meg egyenlőtlenséget:

$$\Delta \hat{A} \cdot \Delta \hat{B} \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle|,$$

ahol jobb oldalon az operátorok  $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$  *kommutátorának* várható értéke szerepel. Fontos, hogy az egyenlőtlenség bal oldalán szereplő szórások és a jobb oldalon szereplő várható érték is *adott állapotban* értendő, és általában nem minden állapotról feltétlenül ugyanazt az értéket kapjuk, azonban az egyenlőtlenség *minden állapotra érvényes* [1]. Az egyenlőtlenségnek pontos matematikai bizonyítása van.

Ha az  $\hat{A}$  és  $\hat{B}$  operátor helyére a hely és a lendület operátorát helyettesítjük, akkor felhasználva az  $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$  kommutátort, visszakapjuk a határozatlansági elv fent említett alakját:  $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2$ . Az így megjelenő határozatlansági elv hagyományos alakja különleges, mert a két fizikai mennyiséghez rendelhető operátor felcserélési összefüggése az egységoperátorral arányos, amelynek átlaga nem függ az állapottól. Így az alsó korlát állapottól függetlenül mindig  $\hbar/2$ . Ez annak következménye, hogy kanonikusan konjugált fizikai mennyiségpárról van szó.<sup>1</sup>

## A határozatlansági elv értelmezése

Ha szemügyre vesszük az általános képletet, akkor az alábbi lehetőségeket olvashatjuk belőle ki:

1. Ha  $\hat{A}$  és  $\hat{B}$  felcserélhető, akkor a jobb oldalon nulla áll. Ez nem túl izgalmas, a klasszikus fizikában a legtöbb mennyiség ilyen (ha a mérést zavaró egyéb körülmények hatását nem vesszük figyelembe).

2. Ha  $\hat{A}$  és  $\hat{B}$  nem felcserélhető (azaz a két fizikai mennyiségnek nincs közös sajátfüggvényrendszere), attól még a kommutátoruk várható értéke bizonyos állapotokban lehet nulla. Például akkor, ha az egyik fizikai mennyiség szórása pontosan nullává tehető, amire később példát mutatunk a fotonpolarizáción alapuló tananyagban.<sup>2</sup>

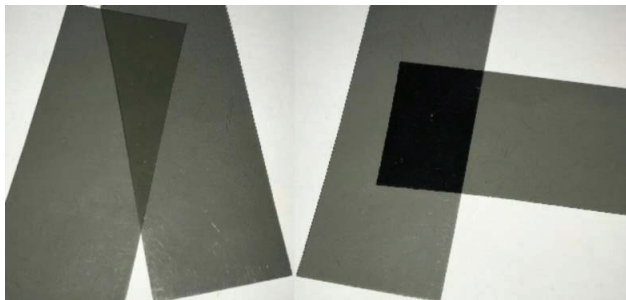
3. Ha  $\hat{A}$  és  $\hat{B}$  nem felcserélhető és a kommutátoruk várható értéke semmilyen állapotban sem nulla. Ilyen a hely és a lendület szórásának kapcsolata.

Nyilvánvaló, hogy a második eset általánosabb, mint a szokásosan hangoztatott harmadik. A már említett [2–5] tananyag részletesen elemzi a kvantumha-

<sup>1</sup>Az általános határozatlansági egyenlőtlenség levezetésénél a jobb oldalon a két operátor antikommutátorának várható értékével arányos tag is megjelenik [1]. A hely és lendület határozatlanságára vonatkozó esetben ez a tag állapotfüggő. Természetesen ennek elhanyagolásával az egyenlőtlenség továbbra is érvényes (csak élesebben), viszont hasznosabbá válik a képlet, mert a jobb oldal az elhanyagolás után már állapotfüggetlen lesz.

<sup>2</sup>Visszaemlékezések szerint Marx György professzor vizsgáin rákérdezett erre az atom s-állapotára vonatkozóan. Ugyanis ebben az állapotban az impulzusmomentum mindhárom komponensét pontosan ismerjük, mégpedig nulla értéket vesznek fel, ezért a kommutátorok várható értéke is nulla.





1. ábra. A kísérletek igazolják, hogy a polarizátorlemezeken áthaladó fény intenzitása függ a lemezek egymással bezárt szögétől.

tározatlanság második esetét, azonban olyan formában, amely a hazai szakmai közösségnek első körben furcsa lehet. Ahhoz, hogy megértsük miért van így, előbb röviden vázolom a tananyag felépítését.

## A határozatlansági elv a fotonok polarizációs állapotára vonatkozóan

Első lépés a fénypolarizáció jelenségének felfedezése, amely során felismerhetjük, hogy a polarizátorlemezeken áthaladó fény intenzitása arányos a polarizátorlemezek által bezárt szöggel (1. ábra).

Ezután a polarizátorlemezekon áthaladó fény intenzitását mérésrel mennyiségileg is megfogalmazhatjuk, így kapjuk meg a Malus-törvényt:

$$I_T = I_0 \cos^2 \theta,$$

ahol  $I_0$  a két polarizátorlemezen áthaladó fény intenzitásának maximuma, ami akkor áll elő, ha a két polarizátorlemez egyirányú,  $I_T$  pedig a két lemezen áthaladó fény intenzitása, ha a két lemez  $\theta$  szöget zár be.

Ha feltételezzük, hogy a fénynyalábot oszthatatlan fotonok alkotják, és a fényintenzitás arányos a fotonok számával, akkor a Malus-törvényt megfogalmazhatjuk fotonszámra is:

$$N_T = N_0 \cos^2 \theta,$$

ahol  $N_0$  az áthaladó fotonok maximális száma (amely szintén megegyező állású polarizátorlemezek esetén igaz), míg  $N_T$  az áthaladó fotonok száma, ha a két lemez  $\theta$  szöget zár be. Egyszerűbben úgy is fogalmazhatunk, hogy egy polarizátorlemez a beeső polarizált fotonok számát  $\cos^2 \theta$  részére csökkenti.

Itt jutunk el arra a pontra, amikor feltehetjük azt a kérdést, hogy *mi történne, ha egy vízszintes irányban tartott polarizátorlemezre kizárólag egyetlen 30°-osan polarizált foton esne?* Ekkor a Malus-törvény azt jósolná, hogy a fotonok  $\cos^2 30^\circ = 3/4$  része halad át, azaz  $3/4$  db foton (2. ábra), ami ellentmond a fotonok oszthatatlanságának. A helyes válasz ekkor az, hogy a jelenség leírása *valószínűségi* jóslatokkal lehetséges, jelen esetben a foton  $p(\theta) = \cos^2 \theta = \cos^2 30^\circ = 75\%$  valószínűséggel halad át a polarizátorlemezen.

Értelmezzük a fenti jelenséget most a kvantummechanika matematikai eszköztárával, amelyhez hasonló feladat egyetemi feladatgyűjteményben is előkerül [9]. Legyen a két fizikai mennyiségünk két adott irányra vett polarizáció, amelyet a két polarizátorlemez rögzít: egy 30°-os irányú ( $A$ ) és egy vízszintes irányú ( $B$ ). Az ezekhez rendelhető operátorok saját kezűleg egyszerűen elkészíthetők. A 30°-os irányhoz az

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix},$$

a vízszintes irányhoz pedig a

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

mátrix rendelhető hozzá. Csupán arra kell figyelniük, hogy az  $\hat{A}$  operátort úgy írjuk fel, hogy a lehetséges sajátértékük  $\pm 1$  legyen. A  $+1$  mért érték jelenti a fotonok biztos áthaladását a polarizátorlemezen, a  $-1$  pedig a biztos elnyelődését. Továbbá az operátor sajátvektorai éppen azt a két állapotot jelölik, amelyek a polarizátorlemezen történő biztos áthaladásnak és biztos elnyelődésnek felelnek meg, azaz a

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \text{ és a } \begin{bmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

polarizációs állapotvektorok legyenek (az első a 30°-os, míg a második a 120°-os polarizációs iránynak megfelelő állapotvektor). Példánkban áthaladás esetén a foton a

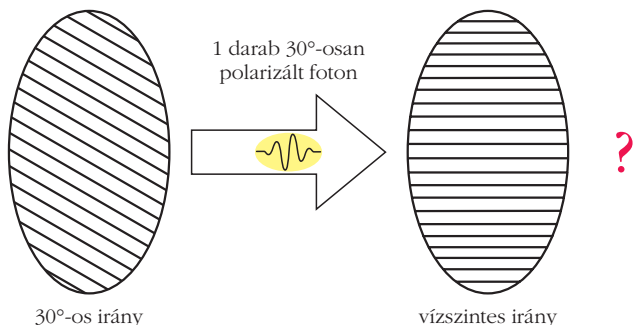
$$|\psi\rangle \rightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

állapotváltozást szenved el. Ugyanígy megalkotható a  $\hat{B}$  operátor:  $\pm 1$  sajátértékek mellett a két sajátvektor

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ és } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A kapott mátrixokat egyszerűen általánosíthatjuk a vízszintessel tetszőleges  $\phi$  szöget bezáró polarizációjú polarizátorlemezre is:

2. ábra. Ha egy vízszintes irányú polarizátorlemezre egy 30°-osan polarizált foton esik, akkor a foton  $\cos^2 30^\circ = 75\%$ -os eséllyel halad át.



$$\hat{X} = \begin{bmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ \sin 2\phi & -\cos 2\phi \end{bmatrix}.$$

A fotonok polarizátorlemezekén történő áthaladásának valószínűségi jellege miatt az azonos állapotú fotonokaság áthaladásának jellemzésére további statisztikai fogalmakat is használhatunk, például a szórást. Az áthaladást a polarizátorlemezen a +1, az elnyelést pedig a -1 mért sajátérték jellemzi, ezért, ha a fotonnyaláb minden részecskéje 100%-os valószínűséggel halad át a polarizátorlemezen (mert polarizációs iránya megfelel a polarizátorlemez irányának), akkor mindig a +1 mért értéket kapjuk, azaz a szórás nulla. Ugyanez az eset áll fenn 0%-os áthaladásnál is: a mért érték mindig -1, ezért a szórás ismét nulla. Ha azonban az egyes fotonok  $0 < p < 1$  eséllyel haladnak át, akkor mindkét lehetséges értéket mérhetjük, ezért a statisztikai sokaságra szórás számolható. Ezen adathalmaz szórása akkor a legnagyobb, ha a mért értékek átlagától az egyes kimenetek átlagosan a legjobban eltérnek, azaz amikor 50%-os eséllyel halad át a foton. Összefoglalva: minél bizonytalanabb a jóslatom az egyes fotonok áthaladására (vagy át nem haladására), annál nagyobb a szórás is.

Most nézzük meg a fenti példára a határozatlansági elvet:

$$\hat{A} \cdot \hat{B} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix},$$

$$\hat{B} \cdot \hat{A} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

és így

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

Jól látható, hogy a kommutátoruk nem tűnik el, vagyis az operátorok nem cserélhetők fel. Ez természetes, hiszen nincs közös sajátfüggvényrendszerük, mert a két operátorhoz tartozó sajátvektorok eltérők. A polarizáció alapuló középiskolai tananyagban a fel nem cserélhetőségről egyszerű kísérlettel is meggyőződhetünk, mert a polarizátorlemezek sorrendje sem felcserélhető.<sup>3</sup>

Legyen egy foton tetszőleges polarizációs állapota

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix},$$

ahogy azt a 3. ábra szemlélteti. Ebben az állapotban a kommutátor várható értéke

<sup>3</sup>Ez azért is bevilágító, mert a fénypolarizáció jelenségén keresztül megsejthetjük, hogy a fotonok leírására olyan algebra kell választanunk, amelyben van nem-kommutatív művelet, amire az egyetem első évében már látunk példát, mégpedig a mátrixok szorzását.

$$\begin{aligned} \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle &= \langle \psi | [\hat{A}, \hat{B}] | \psi \rangle = [x \ y] \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \\ &= [\sqrt{3} \ y \ -\sqrt{3} \ x] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \sqrt{3} \ x y - \sqrt{3} \ x y = 0. \end{aligned}$$

Így az  $\hat{A}$  és  $\hat{B}$  operátoroknak megfelelő mennyiségek  $\Delta A$ ,  $\Delta B$  szórására fennálló határozatlansági egyenlőtlenség:

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq 0$$

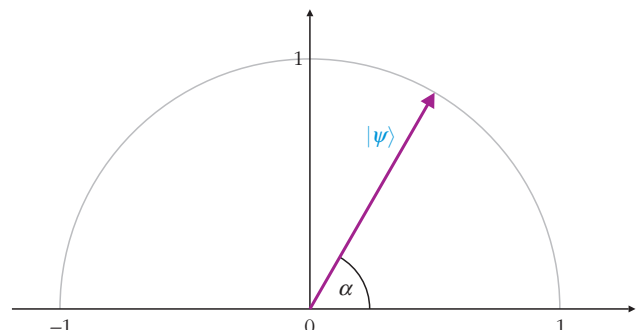
bármely állapotban. Sőt ugyanez igaz bármilyen más polarizátorlemez-pozícióhoz rendelhető operátorra is.

Felmerül a kérdés, hogyan lehet értelmezni a kapott eredményt, mert ez nem a „megszokott” határozatlansági egyenlőtlenség, hiszen a jobb oldalon nulla áll. Azaz példánkban *nem* igaz az, hogy az egyik mennyiség pontosítása egy adott mértéken túl kizárólag a másik mennyiség rovására történhet.

Hozzászoktunk, hogy a határozatlansági egyenlőtlenség jobb oldalán nullától határozottan különböző mennyiség áll. Ekkor megdöbbenő, mégis a hullámcsomag értelmezéséből könnyen következő szemléletes képet kapunk a határozatlansági elv értelmezésére. Abból kiindulva, hogy neves tankönyvek sem hangsúlyozzák élesen, hogy a határozatlansági egyenlőtlenség mindig adott kvantumállapotban értendő, továbbá az ismeretterjesztő könyvek csak a harmadik esetet tárgyalják [1], a második és harmadik eset különbségének elemzése izgalmas kaland.

A fent levezetett, polarizációra vonatkozó határozatlansági egyenlőtlenség „furcsasága” abból adódik, hogy az egyik polarizátorlemez szerinti mérés szórása pontosan nullává tehető (ha az egyes fotonok éppen megfelelő polarizációs állapotúak). Ráadásul egyik szórás sem képes végtelenné válni, mert a rendszer kétállapotú, így mindkét szórás csak *véges* értéket vehet fel. Ezért a határozatlansági egyenlőtlenség jobb oldalán olyan függvénynek kell lennie, amely bizonyos állapotokban eltűnik, éppen ott, ahol az egyik szórás nulla. Úgy tűnik, a véges állapotú rendszerekben a kvantumhatározatlanság úgy fogalmazható meg, hogy *ha az egyik mennyiség szórása nulla, akkor a másiké biztosan nem az.*

3. ábra. A foton polarizációs állapotát egy  $\alpha$  irányú egységvektorral reprezentálhatjuk.



A  $\Delta A \cdot \Delta B \geq 0$  egyenlőtlenség, ahol a jobb oldalon az állapottól függetlenül azonosan nulla áll, nem fejezi ki teljesen a határozatlanságot, hiszen a képlet megengedi, hogy a két szórás egyszerre tűnjön el. A hagyományos határozatlansági elvvel szemben ez az egyenlőtlenség közvetlenül nem mutat rá a lényegre: *két nem felcserélhető fizikai mennyiség szórása egyszerre sosem lehet nulla*. Ráadásul látni fogjuk, a két fizikai mennyiség szórása egymástól függetlenül változik, így az is megtörténhet, hogy az állapotot úgy változtatjuk, hogy mindkét szórás *egyszerre csökken!* Erre a későbbiekben egyszerű, középiskolások által is érthető példát hozok.

## A fizikai tulajdonság értelmezése

A klasszikus fizikában a *fizikai tulajdonság* alapvető jelentéssel bír, azonban a mikrovilágban a szuperpozíció jelensége miatt előfordulhat, hogy egy objektumra nem tudunk egyértelmű állításokat megfogalmazni. Például egy elektron helyzetére nem mondhatjuk azt, hogy az adott  $x$  hely piciny környezetében van, mert azonos körülmények között megismételt mérések során máshol is megtalálhatom az ugyanolyan állapotú elektronokat, azonban sok esetben azt sem mondhatom biztosra, hogy nincs az  $x$  hely piciny környezetében, mert néha viszont megtalálom az elektronokat ott. Egyet mondhatunk: az elektronfelhő az összes lehetséges helyének szuperpozíciójában van. *A kvantummechanikai furcsaságok egyik meglepő tapasztalata éppen az, hogy nagyszámú azonos mérés ismétlése esetén képesek vagyunk olyan fizikai tulajdonságok mérésére, amelyekkel az egyes részecskék nem is rendelkeznek*. A továbbiakban ezért szeretnék pár fogalmat tisztázni *Leonard Eisenbud* [10] könyvét követve, mielőtt a határozatlanság második esetét értelmezzük.

Egy fizikai rendszer **mérhető tulajdonságának** ismerete annyit jelent, mint ismerni a rendszerre vonatkozó jól definiált ismételt mérés kimenetelét, amely a kérdéses tulajdonságra kérdez rá.

A fénypolarizáció példáján ez azt jelenti, hogy egy foton akkor polarizált  $45^\circ$ -os irányban, ha az „áthalad-e az összes ugyanilyen módon preparált foton a  $45^\circ$ -os irányú polarizátorlemezen?” kérdésre *mindig* „igen” a válasz. Természetesen ekkor azt is mondhatjuk, hogy „a foton nem rendelkezik a  $135^\circ$ -os polarizációs irányval”, mert az „áthalad-e az összes ugyanígy preparált foton a  $135^\circ$ -os polarizátorlemezen?” kérdésre *mindig* a „nem” választ kapjuk. Azonban azt már *nem* mondhatom, hogy egy  $45^\circ$ -osan polarizált foton *nem* rendelkezik a vízszintes polarizációs tulajdonsággal, mert ha ez a foton ráesik egy vízszintes irányú polarizátorlemezre, akkor a foton *lehet*, hogy áthalad. De azt sem mondhatom, hogy ez a foton rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, mert a foton néha elnyelődik.

Másik példa: a merev falú dobozba zárt elektronra igaz az a tulajdonság, hogy az elektron rendelkezik az adott térrészben tartózkodás tulajdonságával, mert a

„megtalálom-e a részecskét a dobozban?” kérdésre mindig „igen”-nel felelek. Természetesen ekkor a „dobozon kívül levés” tulajdonságával már nem rendelkezik. Azonban a mérés „az adott  $x$  hely piciny környezetében van” tulajdonságra felelhet statisztikusan „igen”-nel és „nem”-mel is,<sup>4</sup> ezért ezek a tulajdonságok az azonos állapotú részecskesokaságra nem ruházhatók rá.

Az  $A$  és  $B$  fizikai tulajdonságok **egymást kizárók**, ha a „rendelkezik-e az azonos módon preparált részecskesokaság az  $A$  tulajdonsággal” kérdésre a mérés eredménye mindig „igen”, míg a „rendelkezik-e az azonos módon preparált részecskesokaság a  $B$  tulajdonsággal” kérdésre pedig a mérés mindig a „nem” választ adja. A fénypolarizáció jelenségében ilyen például a vízszintes és a függőleges irányú polarizációs tulajdonság, mert ha egy fény függőlegesen polarizált, akkor vízszintesen nem az. Hasonló továbbá egy az elektron két lehetséges elkülönülő helytartománya is. Ha megmértem, hogy az elektron két rés közül az egyikre megy át, akkor a másikon biztosan nem ment át. Azaz, ha az egyikre igen a válasz akkor a másakra nem. Jól tudjuk, hogy a hullámfüggvény éppen ilyen egymást kizáró helyeknek megfelelő állapotok végtelen szuperpozíciójaként áll elő, azaz ezek a lehetséges helyek *ortogonális állapotokat* jelentenek. Sőt bármilyen mérhető fizikai mennyiséghez tartozó bázisvektorok egymást kizáró tulajdonságnak feleltethetők meg, mert azok egymásra ortogonálisok.

Az  $A$  és  $B$  fizikai tulajdonságok **összeegyeztethetők**, ha ez a két tulajdonság egyszerre érvényes a részecskékre, tehát egyszerre mérhető. Ilyen például a fotonnak két egymással ellentétes polarizációs iránya. Ez pedig a két fizikai tulajdonsághoz tartozó méréshez rendelt operátorok *közös sajátvektorainak* (közös bázisnak) következménye.

Az  $A$  és  $B$  fizikai tulajdonságok **nem összeegyeztethetők**, ha a két tulajdonság nem jellemezheti egyszerre a részecskét, egyszerre nem mérhető. Például nem mondhatom azt, hogy egy függőleges irányú polarizációs tulajdonsággal rendelkező foton rendelkezik a  $45^\circ$ -os irányú polarizációs tulajdonsággal. Sőt, ha esetleg valahogyan meg is oldom azt, hogy immár a foton rendelkezzen ezzel a tulajdonsággal, akkor már nem mondhatom azt, hogy függőlegesen polarizált. Azaz a két tulajdonság nem fér össze, mert ezek olyanok, hogy az őket definiáló mérésekhez rendelt operátoroknak nincs közös bázisa. Ha az egyik tulajdonságra „igen” a válasz, akkor a másakra „talán”.

A *határozatlansági elv* ebben az értelmezésben azt fejezi ki, hogy *vannak olyan fizikai tulajdonságpárok, amelyek nem összeegyeztethetők*, matematikai megfogalmazásban nincs közös bázisuk. Így az egyik fizikai tulajdonságra vonatkozó fizikai mennyiség mindig szór, ezért is hívhatjuk ezt határozatlanságnak vagy bizonytalanságnak.

<sup>4</sup>Itt feltételezzük azt, hogy az adott  $x$  piciny környezete nem azt a helyet jelöli, ahol az elektront leíró  $\Psi$  hullámfüggvény zérus.

Úgy gondolom, hogy a határozatlanság megközelítése a fizikai tulajdonság fogalmán keresztül általánosabban értelmezi a határozatlansági törvényt, amit a középiskolás diákok is megérthetnek a fénypolarizáció jelenségén keresztül.

## A polarizáció szórásának meghatározása középiskolai módszerekkel

Diákjaink első feladata megérteni azt, hogy a polarizációs mérések két kimenetelre vezethetnek: vagy áthalad a foton (+1), vagy elnyelődik (-1). Hogy melyiket mérjük, függ a foton  $\alpha$  polarizációs szögétől. Ha ez közel van a polarizátorlemez irányához, akkor nagy valószínűséggel +1 értéket kapunk. A helyzet hasonló a matematikaórákon is megjelenő fejvagyírás dobáshoz, de „cinkelt” érmevel, amely esetleg nagyobb valószínűséggel fordul az egyik oldalra, mint a másikra, ezért az átlag nem feltétlenül nulla. A Malus-törvény alapján tudjuk, hogy egy foton áthaladásának valószínűsége  $p = \cos^2\alpha$ , elnyelődésének valószínűsége pedig  $(1-p) = \sin^2\alpha$ . Ez alapján középiskolai eszközökkel számolhatunk várható értéket és szórást. A várható érték jelentése, hogy átlagosan körülbelül mit mérnénk a két lehetséges (+1 és -1) kimenetelekből.

Ha a foton a vízszinteshez képest  $\alpha$  szögben polarizált, akkor a mért értékek várható értéke a vízszintes, B polarizátorlemez esetén:

$$\begin{aligned}\langle B \rangle &= p \cdot (+1) + (1-p) \cdot (-1) = 2p - 1 = \\ &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos(2\alpha).\end{aligned}$$

Valóban, az  $\alpha = 0$  esetben mindig teljesen biztosan +1-et, míg  $\alpha = \pi/2$  esetén pedig mindig teljesen biztosan -1-et mérünk.

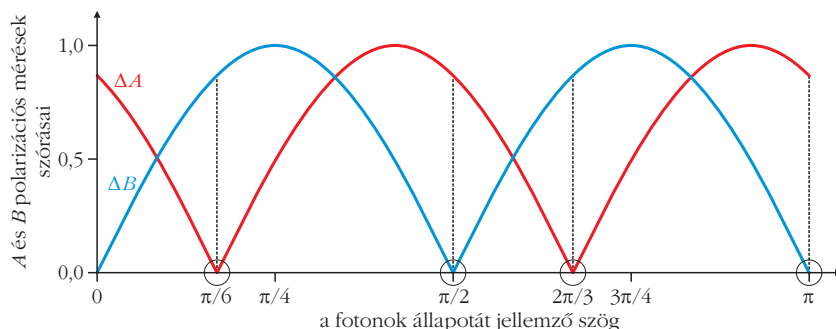
A szórásnégyzet (variancia) esetén a várható értéktől mért eltérés négyzetét kell átlagolnunk, azaz

$$(\Delta B)^2 = p \cdot (1 - \langle B \rangle)^2 + (1-p) \cdot (-1 - \langle B \rangle)^2.$$

A  $\langle B \rangle = 2p - 1$  eredményt felhasználva a szórásnégyzet így

$$(\Delta B)^2 = 4p \cdot (p - 1) = 4 \cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha = \sin^2(2\alpha).$$

4. ábra. A fotonok állapotára vonatkozó két szórás egymástól függetlenül változik, ezért az állapotot változtatva mindkét fizikai mennyiség szórása akár egyszerre csökkenhet is.



A szórás maga tehát

$$\Delta B = |\sin(2\alpha)|.$$

Hasonlóképpen elvégezhetjük ezt a számítást az A polarizátorlemezre is, ahol az áthaladás valószínűségéhez szükséges szöget a foton polarizációs irányát jellemző  $\alpha$  szög és a polarizátorlemez helyzetét jellemző  $30^\circ$ -os szög eltérése adja:  $\theta = \alpha - 30^\circ$ . Így

$$\Delta A = |\sin(2\alpha - 60^\circ)|,$$

általában pedig ha X polarizációs iránya a vízszinteshez  $\phi$  szöget zár be, akkor  $\Delta X = |\sin(2\alpha - 2\phi)|$ . Tehát a polarizátorlemez helyzetének változtatása a függvénygörbe vízszintes eltolásaként jelenik meg. A kapott két szórás függ a fotonok polarizációs állapotától. A kapott szórásfüggvényeket a 4. ábra szemlélteti.

A 4. ábra legfontosabb tanulsága, hogy amikor az egyik szórás eltűnik, a másik nullától eltérő véges értéket ( $\sqrt{3}/2$ ) vesz fel. Ezeket az állapotokat karikák jelölik az ábrán. Látjuk azt is, hogy a szórások a fotonok állapotának függvényében egymástól függetlenül változnak. Az ábra azt is szemlélteti, hogy a kétállapotú rendszerek szórása mindig véges, ezért nem is lehetséges, hogy a végtelenbe „elszálljanak”. Ez viszont a megszokott értelmezésbe, miszerint „az egyik fizikai mennyiség szórásának 0-hoz közelítése a másik fizikai mennyiség szórásának teljes elmosódottságával járna” nem illik bele. Az így kapott határozatlansági egyenlőtlenség pusztán abból következik, hogy az egyik fizikai mennyiséghez rendelt operátornak biztosan van véges szórása.

## Összegzés

Írásomban rámutattam, hogy a középiskolában tanított, valamely részecske helyének és lendületének egyszerre elvégzett mérésére vonatkozó határozatlansági egyenlőtlenség az általános határozatlansági elv különleges esete. A határozatlansági egyenlőtlenség mindig a két fizikai mennyiségnek a kvantumrendszer valamilyen állapotában mért átlagértékeire vonatkozik, ezért az egyenlőtlenség jobb oldalán nem mindig áll nullától különböző érték.

A határozatlansági elv lényege az, hogy léteznek olyan fizikai mennyiségek, amelyek nem mérhetők egyszerre tetszőleges pontossággal, ami megengedi, hogy bizonyos állapotokban a mért mennyiségek elvi szórásának szorzata nulla legyen. Például kétállapotú rendszeren mért mennyiségek mérésének szórása sosem lehet végtelen, ezért, ha van olyan állapot, amelyen az egyik mennyiség elvi szórása nulla, akkor

a határozatlansági egyenlőtlenség jobb oldalán olyan függvénynek kell állnia, amely bizonyos állapotokban eltűnik (pontosan ott, ahol az egyik mennyiség mérésének szórása nulla).

Bemutattam, hogy a kvantummechanika modellezésére alkalmas fotonpolarizációt használó tananyagban a határozatlansági elv lényege értelmezhető, mert a polarizátorlemezek alkalmazásának sorrendje nem felcserélhető. Így modellezhető velük az a helyzet, hogy az egyik polarizátorlemezen az áthaladásnak mindig van nemnulla szórása, és az egyiké (és csakis az egyiké) lecsökkenthető pontosan nullára (ha a két polarizátorlemez polarizációs iránya nem egyirányú, illetve nem merőleges). Ugyanakkor a polarizáción alapuló tananyagból levezethető  $\Delta A \cdot \Delta B \geq 0$  egyenlőtlenség a hely és lendület egyidejű mérésére vonatkozó bizonytalanságot nem képes kifejezni. A polarizáción alapuló tanításban ezért a szórások szimultán eltűnésének lehetőségét érdemes hangsúlyozni, és csupán megemlíteni érdemes, hogy vannak olyan mennyiségpárok, ahol a határozatlansági egyenlőtlenség jobb oldalán nullától különböző mennyiség áll.

## Irodalom

1. A cikk szerzője által áttanulmányozott magyar nyelvű határozatlansági relációt említő középiskolás tankönyvek és ismeretterjesztő irodalmak, ezenfelül a kvantummechanikát feldolgozó egyetemi könyvek, jegyzetek és a téma tanításával kapcsolatos cikkek megtalálhatók a <http://theorphys.elte.hu/fiztan/QMirrod> honlapon.
2. M. Michelini, R. Ragazzon, L. Santi, A. Stefanel: *Quantum physics as a way of thinking: an educational proposal*. Physics teacher education beyond 2000, Girep book of selected papers, Elsevier, Paris (2001) 479–482.
3. M. Michelini, R. Ragazzon, L. Santi, A. Stefanel: Proposal for quantum physics in secondary school. *Physics Education* 35/6 (2000) 406–410.
4. Gesche Pospiech, Marisa Michelini, Alberto Stefanel, Lorenzo Santi: Central features of quantum theory. In *Physics education, in Frontiers of Physics Education*. R. J.-Sepic et al eds., Zlatni, Rijeka, (2008) 93–101.
5. Lásd a honlapom: <https://kvantummechanikus.wordpress.com/> (2020. 10. 01.)
6. P. A. M. Dirac: *The Principles of Quantum Mechanics*. 4th ed., Clarendon, Oxford (1958).
7. Patkós András: *Bevezetés a kvantumfizikába: 6 előadás Feynman módorában*. Typotex, Budapest (2012).
8. <https://quantumgame.io/> (2020.10.26.)
9. Gálfi László, Rácz Zoltán: *Elméleti fizikai példatár 3*. Tankönyvkiadó, Budapest (1983) 10–11.
10. Leonard Eisenbud: *The conceptual foundations of quantum mechanics*. AMS Chelsea Publishing, American Mathematical Society, Providence, RI, USA (2007).

# TANÍTÁSI KÍSÉRLET MODERN »CLICKER«-EK SEGÍTSÉGÉVEL

Csontosné Herendi Borbála  
Tóth Árpád Gimnázium, Debrecen

Gyakorló fizikatanárként gyakran tapasztalom a tanulók nagy részének motivátlanságát, érdektelenségét. Amikor ötleteket kerestem, hogy miként lehetne érdekessé, figyelemfelkeltővé tenni a fizikaórát, és közben hasznos tudást átadni, azzal szembesültem, hogy a javasolt módszerek nagy része vagy a tehetséggondozásra vonatkozik, vagy pedig csak pillanatnyi élményhez juttatja a diákokat, míg a mélyebb megértés elmarad (a látványos kísérletek például érdeklik őket, de nem érznek igényt a megértésükre). Ezért arra gondoltam, hogy olyan tanítási

módszert keresek, amely a kevésbé vagy egyáltalán nem érdeklődő tanulók figyelmét is fenntartja, emellett hasznos tudást közvetít és elősegíti az ismeretek elsajátítását.

Évekkel ezelőtt Franciaországban voltam szakmai gyakorlaton, ahol lehetőségem nyílt egy középiskolai osztály fizikaóráiba bepillantani. Ott találkoztam először a „clicker”-ekkel. A „clicker” – vagy szavazógép – olyan digitális eszköz, amelynek segítségével a diák a kivetítőn megjelenő tesztkérdésre válaszol. A diákok egyéni válaszai, illetve a válaszokról készült összesítések a kijelzőn olvashatók, így az osztályban közösen meg tudják beszélni, hogy kinek mi volt a hibája, mi lett volna a helyes megfejtés. Azt láttam, hogy a francia diákok, az idősebbek is, nagyon szívesen tanultak ezzel a módszerrel, és mivel pontokat szerezhetek, a versenyzés élménye is megjelent az órákon. Később – már itthon – találkoztam a Kahoot! nevű szoftverrel, amely lényegében a „clicker”-ek programjához hasonló felületet biztosít, a tanulók pedig okostelefonjuk vagy számítógép segítségével tudnak „szavazni”. Saját tanítványaimmal egyszer-kétszer kipróbáltam az összefoglaló órákon és azt tapasztaltam, hogy ezt a munkaformát nagyon élvezik, még az olyan diákok is, akik egyébként szinte sosem követik a fizikaórát,

Ezúton köszönöm témavezetőm, Horváth Ákos (ELTE TTK Atomfizikai Tanszék) e cikk elkészüléséhez nyújtott segítségét.



Csontosné Herendi Borbála 2016-ban végzett a Debreceni Egyetemen francia–fizika szakos tanárként. Jelenleg a debreceni Tóth Árpád Gimnáziumban tanít fizikát, valamint 2018 óta az ELTE Fizika Tanítása doktori program hallgatója. Kutatási területe az élményalapú fizikaoktatás, amely segítséget nyújthat a fizika iránt kevésbé fogékony diákok motiválásában, hogy tudásukat gyarapítsák.

lelkesedéssel vetették magukat a versengésbe. Mindezek vezettek oda, hogy tanulmányozni kezdtem a „clicker” felhasználásának lehetőségeit, és azt találtam, hogy nagyon sok, különböző módszer létezik a tanórákba való beépítésére.

A „clicker” hivatalos nevén Classroom Response System vagy röviden CRS az Egyesült Államokban és Nyugat-Európában elterjedt oktatási eszköz, aktívan használják a köz- és felsőoktatásban egyaránt. A kaliforniai Vanderbilt Center for Teaching igazgatója, *Derek Bruff* könyvében arról ír, hogy nem csak a különböző tantárgyak óráin használhatók hatékonyan, de alkalmazásukra egy tantárgyon belül is nagyon változatos módszerek vannak [1]. Többszörös feleletválasztó kérdéseket javasol, amelyeknek egy vagy több jó megoldása is létezik. Ezek lehetnek ismétlődő kérdések, amelyek egy olvasmányra vagy előzetesen megtanult ismeretre kérdeznek, fogalmi megértésre vonatkozó kérdések, amelyekre a válaszok tartalmazzák a jellemző tévképzeteket. Lehetnek a megszerzett elméleti tudás alkalmazását mérő kérdések, kritikus gondolkodást fejlesztő kérdések vagy éppen olyanok, amelyekre nem létezik helyes válasz, hanem a diákok véleményét szeretnénk felmérni egy adott problémával kapcsolatban. A felsorolást még folytathatnánk, de ennyiből is kitűnik, hogy a kérdéstípusok nagyon széles palettájáról válogathatunk. Ezekről függően, sokféle tevékenységet valósíthatunk meg a tanóra során. Egyszerűbb esetekben az eszköz alkalmas lehet a házi feladat visszakerdezésére, összefoglalásra, de arra is, hogy folyamatában kérdezzünk rá egy-egy feladat megértésére. Összetettebb munkát és felkészülést igényel például egy olyan típusú tanóra, amelyen a tanár adaptívan alakítja az óra menetét, vagyis bizonyos időközönként kérdést tesz fel a diákoknak és a válasznak megfelelően adja meg a következő feladatot vagy magyarázatot. Szintén nagyon jól használható a CRS vitaindító kérdések feltevésére. Az olvasottak alapján a „clicker”-ek sokoldalúan és eredményesen alkalmazhatók a diákok motivációjának és érdeklődésének felkeltésére, fenntartására, az órán való tényleges részvételi arány növelésére, a tanulók (köztük a visszahúzó-dóbbak) aktivizálására és a megértés elmélyítésére. Ha a gyerekek a kérdések megválaszolásakor még pontokat is gyűjtenek, akkor a versenyszellemet és ha csoportokban adjuk ki a feladatot, akkor a kooperativitást is erősítjük.

Ha az óránkon valamilyen „clicker” szoftvert szeretnénk használni, nagyon széles palettáról válogathatunk. A Kahoot! talán a legismertebb, és a digitális oktatás kezdete óta fejlesztik, van olyan lehetősége is, hogy a diákok a saját eszközükön a kérdést is, nem csak a válaszlehetőségeket láthassák. Ha a Socrative-t használjuk, akkor a kvízkérdéseken kívül rövid választ igénylő kérdéseket is a diákoknak feltehetünk, de egyébként a Kahoot!-hoz hasonlóan működik, csakúgy, mint a Quizziz. Sokszor hasznos lehet, ha a kérdést vagy kérdéseket nem kell előre elkészítenünk, hanem lehetőségünk van az órán spontán mó-

don felmerült kérdést feltenni a diákoknak. Erre alkalmas lehet a <https://www.strawpoll.me> oldal, ahol nem szükséges regisztrálnunk sem, hanem a kérdés begépelése után már meg is oszthatjuk a diákokkal a kérdés linkjét. Nagyon sok funkciója van a Mentimeternek is, többek között az, hogy prezentációt készíthetünk az előadásunkhoz vagy a tanórához és a prezentáció diái között szerepel a hallgatóságnak felteendő kérdés is.

*Bernáth László* [2], valamint *Roediger* és *Karpicke* [3] cikkeiben olvastam az előhívásos tanulásról, illetve annak előnyeiről, ezért úgy gondoltam, hogy a számtalan CRS-sel megvalósítható módszer közül elsőként ezt fogom kipróbálni. Az előhívásos tanulás lényege, hogy a megtanulásra váró tananyagrészt ne úgy próbáljuk meg rögzíteni a diákokban, hogy a tanulnivalót újból elolvastatjuk velük, hanem úgy, hogy a témával kapcsolatos kérdéseket teszünk fel. Így az elhangzást követően egyből, aktívan hívják elő memóriájukból. A kutatók azt mutatják, hogy ezzel a módszerrel hatékonyabban rögzül az új ismeret a hosszútávú memóriában. Szintén a tananyag könnyebb megjegyzését és elsajátítását segíti, hogy a diákok az új anyagrészt lényegében kétszer hallják az óra folyamán: egyszer a magyarázat során, azután pedig az óra végi visszakerdezés alkalmával. Ezeket az eredményeket nagyon érdekesnek találtam, ezért úgy határoztam, saját diákjaimmal – eszközként használva a Kahoot!-ot – kipróbálom. A kísérlet lényege, hogy az óra eleji számonkéréseket elhagytam, vagyis nem a tananyag ismételt elolvasására, hanem az előhívásra fektettem a hangsúlyt. Minden óra végén az aznap tanultakkal kapcsolatban három kérdést tettem fel. A témakört lezáró dolgozatban pedig megvizsgáltam, hogy van-e különbség a kísérleti módszerrel és anélkül tanult anyagrészekhez kapcsolódó feladatmegoldások eredményessége között.

Tanítási kísérletemmel arra a kérdésre kerestem a választ, hogy a fent említett módszer, vagyis a „clicker”-ekkel támogatott előhívásos tanulás hatékonyan elősegíti-e a tananyag megértését és rögzítését. Emellett arra is kíváncsi voltam, hogy mi a tanulók véleménye erről a tanulási formáról.

## A tanítási kísérlet leírása

Tanítási kísérletemet egy kisvárosi gimnázium által tanított 9. évfolyamos osztályában végeztem a 2019 novemberében. A tanulók hatosztályos képzésben vesznek részt, vagyis már harmadik éve az iskola tanulói, ennyi idő alatt alkalmas volt képességeik és motiváltságuk alapos megismerésére. Az osztályba 31 tanuló jár, általában véve jó képességűek, de csak kevesen vannak köztük, akik érdeklődnek a fizika iránt. A tanulók körülbelül fele angol, a másik fele matematika tagozatos, de a heti két óra fizikát nem csoportbontásban tanulják. A megértéssel sokszor adódnak problémáik, de van igényük arra, hogy a nehezebb anyagrészeket addig gyakoroljuk,

1. táblázat

## Példa egy kísérleti, „B” típusú órára

Az óra címe:	Vízszintes hajítás
Az óra témája:	Különböző irányú sebességek vektori összegzése. Vízszintes hajítás jelenségének megvizsgálása példákon keresztül. Vízszintes hajítás fizikájának megbeszélése, először különve a függőleges és vízszintes mozgást, majd összekapcsolni a kettőt. Eredő sebesség meghatározása a sebességek vektori összeadásával, Pitagorasz-tétel alkalmazása.
Feltett kérdések és válaszlehetőségek:	<ol style="list-style-type: none"> <li>Ha egy folyóban evezünk át az egyik partról a másik partra, befolyásolja-e az evezési sebességet a folyó sebessége? <ol style="list-style-type: none"> <li>igen</li> <li>nem</li> </ol> </li> <li>Vízszintes hajítás esetén mennyi a test gyorsulása? <ol style="list-style-type: none"> <li><math>g</math></li> <li>függőlegesen <math>g</math>, de vízszintesen bármennyi lehet</li> <li>a vízszintes és függőleges gyorsulások vektori összege</li> <li>nagysága és iránya folyamatosan változik</li> </ol> </li> <li>Milyen irányú a vízszintesen elhajított test sebessége földet éréskor? <ol style="list-style-type: none"> <li>a Föld középpontja felé mutat</li> <li> vízszintes</li> <li>a függőleges és vízszintes sebesség vektori összegének irányába mutat</li> <li>parabola</li> </ol> </li> </ol>

amíg magabiztosnak nem érzik magukat. Ez a hozzáállás a 9. év kezdetével kicsit (feltehetően a serdülőkor miatt) negatív irányba tolódott, de az osztály nagy részével továbbra is jól tudok együtt dolgozni az órákon.

A vizsgált időszakban a kinematika témakörével foglalkoztunk, összesen 19 tanórán. Az első 11-en hagyományos módon dolgoztunk. Ezalatt az egyenes vonalú egyenletes, a változó és az egyenes vonalú egyenletesen változó mozgásról volt szó. A témakör második felében, 8 órában a kezdősebességgel rendelkező változó mozgásokat tanultuk, a szabadesést, a hajításokat, valamint a körmozgást. Ezeken az órákon alkalmaztuk a kísérleti módszert. A hagyományos órák (a továbbiakban „A” óra) általában szóbeli vagy írásbeli számonkéréssel kezdődtek, amelyek során az előző órán tanultakat kérdeztem vissza. Ezután megbeszéljük a házi feladatot, ha volt, illetve válaszoltam a nehezen érthető feladatokkal, anyagrészekkel kapcsolatos kérdésekre. Majd feldolgoztuk az új tananyagot kísérlet, tanulói tevékenység, számolási feladat stb. útján. Esetenként az egész óra a gyakorlásról szólt. A kísérleti órákon (továbbiakban „B” óra) nem történt óra elején számonkérés és házi feladatot sem adtam. Az óra többi része hasonlított az „A” órákhoz, annyi eltéréssel, hogy minden „B” óra végén a Kahoot! segítsé-

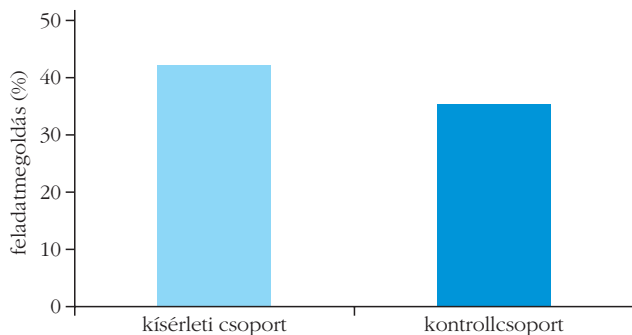
gével, az aznapi anyaggal kapcsolatban három kérdést tettem fel a diákoknak. A három kérdésre adott jó válaszokkal pontokat szerezhetek. A diákok motiválása érdekében egy rendszert találtam ki nekik: minden jó válasz 1 pontot ért, és aki az első öt között végzett, további 1 bónuszpontot kapott. Az így összegyűlt pontokat tetszés szerint felhasználhatták, előre megbeszélte módon beválthatták számukra értékes „dolgokra”: felelésmentes óra, javítási lehetőség, témazáró dolgozatnál plusz pont, plusz egy jegy stb.

Az 1. táblázat segítségével nézzünk meg egy példát egy konkrét „B” órára! A kérdések és a válaszlehetőségek megalkotásánál odafigyeltem arra, hogy a kérdések olyan anyagrészekre vonatkozzanak, amelyek lehetőleg egyenletes időközönként jelentek meg az órán, ne forduljon elő, hogy az óra első 5 percében elhangzottakból kérdezek kettőt, és csak egyet a végéből. A válaszoknál igyekeztem (amennyire a feleletválasztós kérdések engedik) változatos lehetőséges kérdések. Viszont minden esetben csak egy helyes megoldás volt. A rossz válaszok kitalálásakor figyelembe vettem, hogy milyen tévképzetek fordulhatnak elő. Így, amennyiben több diák választja a hibás megoldást, lehetőség nyílik a tisztázásra. Például az 1. táblázatban a 3. kérdésre az osztály fele a *parabola* választ adta.

A témakör végén, a 8. „B” órát követően témazáró dolgozatot írtam velük. Ez három részből állt, az elsőben kilenc tesztkérdés volt, melyből három az „A” és hat a „B” órák tananyagához kapcsolódott. A második rész grafikonelemzés volt, ez az „A” órákhoz tartozott. A harmadik részben számítási feladatokat tartalmazott, amelyek közül kettő az „A”, kettő a „B” órákhoz köthető. Az elért pontszámok alapján megnéztem, hogy eredményesség tekintetében van-e eltérés az „A” és „B” órák szerinti feladatok megoldásaiban, azaz sikerült-e a kísérleti módszerrel javítani a tanulók teljesítményét. Várakozásommal ellentétben az „A” órákhoz tartozó feladatok százalékosan jobb eredményt mutattak, mint a „B” órákhoz tartozók. Feltételezésem szerint ez azért történhetett, mert a témakör második fele nehezebb volt. Ezt alátámasztandó egy másik 9. évfolyamos osztállyal is megírtam ugyanazt a dolgozatot, úgy, hogy velük végig „A” típusú, hagyományos órákat tartottam a témakör feldolgozása során. Ez a másik osztály létszámban, képességekben és motiváltságban is valamelyest elmarad a kísérleti osztályhoz képest, viszont náluk is megfigyelhető volt, hogy a témakör második feléhez tartozó feladatok megoldása gyengébben sikerült.

A témazáró dolgozat ellenőrzése után kérdőívet tölttettem ki a gyerekekkel, hogy megtudjam a véleményüket az új módszerről. A kérdések a következők voltak:

- Segítettek a kérdések a tananyag megértésében?
- Könnyebb volt emlékezni azokra, amelyek a Kahoot!-os kérdésekben is benne voltak?
- Élvezhetőbb volt így az óra?



1. diagram. A kísérleti és a kontrollcsoport témazáró dolgozatának eredményessége.

- Dolgozatnál könnyebben eszedbe jutott a válasz azokra a kérdésekre, amelyeket a Kahoot!-tal tanultunk?
- Mi a véleményed erről a módszerről? Mi volt benne jó és mi volt rossz?
- Ha nem lehetett volna pontokat gyűjteni és beváltani őket, akkor is szívesen csináltad volna a Kahoot!-os kérdéseket óra végén?

## Eredmények, következtetés

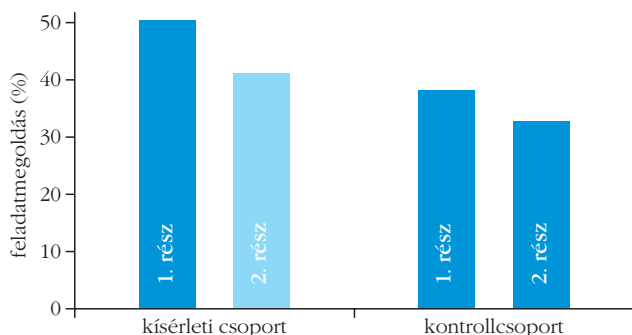
Először kísérletem számokkal mérhető eredményét mutatom be. A benne résztvevő osztály és a kontrollcsoport témazáró dolgozatainak százalékos eredményét az 1. diagram mutatja. Leolvasható, hogy a kísérleti osztály eredménye jobb lett, hiszen egy jobb képességű osztályról van szó, nekik 42,18% lett az átlageredményük, míg a kontrollcsoporté 35,45%.

Ahogy az korábban is említettem, az „A” óra szerinti feladatok mind a két osztálynak könnyebben mentek, valószínűleg azért, mert a témakör első fele egyszerűbb volt a második felénél, százalékos értéket a 2. diagram mutatja.

Ezen eredményekből nem csak az látszik, hogy az „A” óra szerinti kérdések könnyebbnek bizonyultak, hanem az is kiderül, hogy az „A” óra szerinti feladatok megoldásánál a két osztály közötti eltérés nagyobb volt, vagyis a kísérleti, Kahoot!-módszer nem növelte a két osztály közti különbséget.

Kísérletem hatékonyságát megvizsgálva arra a következtetésre jutottam, hogy önmagában a módszer

2. diagram. Eredmények Kahoot!-tal (világos) és anélkül (sötét) a témazáró első és második részében a két csoportban.



alkalmazása nem elég a tanult anyag elmélyítésére. Valószínűleg szükség van arra is, hogy az óra eleji számonkéréseket továbbra is megtartsuk, az előhívás az ismétléssel együtt és nem azt kiváltva vezethet hosszú távú eredményre.

Az effajta óra végi ellenőrzésektől és pontgyűjtéstől azt is vártam, hogy a diákok figyelme az óra folyamán tartósabban fennmarad, hiszen több pontot szeretnének majd összegyűjteni, hogy azután jutalmakra válthassák azokat. Sajnos, azonban egy-két alkalom után a lelkesedésük abbamaradt, ami a figyelmet illeti, bár lelkesen vettek részt az óra végi játékban, de sokan csak találmokra jelöltek be válaszokat, így próbáltak pontot gyűjteni. Azok a tanulók, akik egyébként is figyeltek az órákon, továbbra is jelen voltak, viszont nem hatott motiváló erővel ez a módszer azokra, akik korábban sem vettek részt aktívan a tanulási folyamatban. Egyesek egyenesen büszkék voltak arra, hogy egész órán mással foglalkoztak, mégis sikerült tippeléssel egyébként szemmel láthatóan élvezték, oldott, közvetlen és vidám hangulat jelent meg a fizika-órák végén.

A tanulók kérdőívek alapján megismert véleménye nincs teljesen összhangban a dolgozatuk eredményével. Úgy gondolom, hogy válaszaikkal több esetben önmaguknak mondanak ellent, hiszen az osztály nagy része úgy gondolta, hogy segített neki a Kahoot! a megértésben és könnyebben tud emlékezni a tanultakra, viszont a dolgozatnál nem jutottak jobban eszébe a „B” órás kérdésekre adandó válaszok. Viszont többen voltak azok, akik csak a jutalmazási rendszer miatt csinálták szívesen, és saját bevallásuk szerint az volt a Kahoot! legfőbb előnye, hogy pontokat gyűjt-hettek.

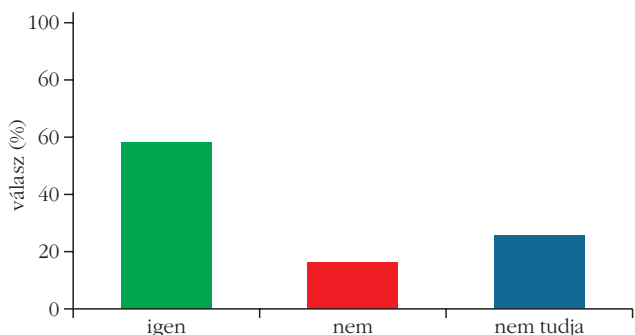
A kérdőív egyes kérdéseire adott válaszok megoszlását a 3–7. diagramok mutatják.

A kérdőívben a diákok véleményét is megkérdeztem. Ezek körül idézek néhányat:

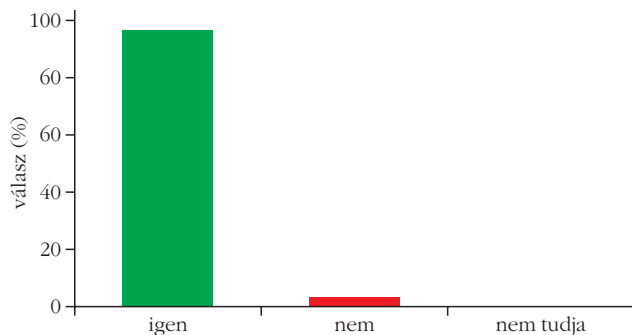
„Szerintem jó volt, hogy segített a megértésben és jó hangulatot hozott az osztályba. Rossz volt, hogy kevés idő volt a kérdések megválaszolására, néhány osztálytárs átment örülte tőle.”

„Jó volt, mivel küzdöttem a pontokért, egy célért, meg az órai anyagot úgy mond összefoglalta. Sajna nem volt jó, mivel nem maradtak meg bennem a

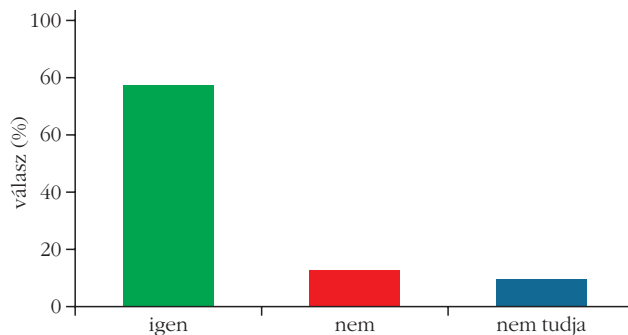
3. diagram. Segített a Kahoot! a tanyag megértésében, elsajátításában?



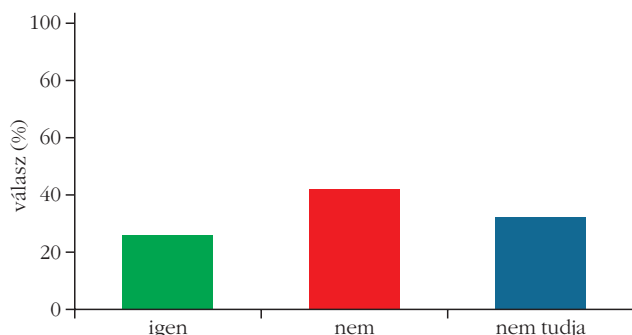




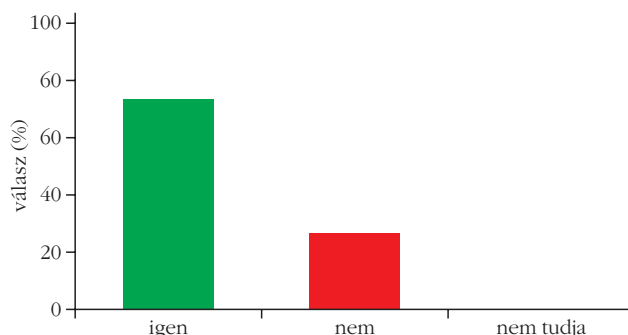
4. diagram. Élvezetesebb volt a Kahoot! használatával tartott fizikaóra?



5. diagram. Könnyebb volt emlékezni arra, amit a Kahoot! segítségével tanultunk?



6. diagram. Dolgozatnál jobban eszedbe jutottak a Kahoot!-tal tanult kérdésekre a válaszok?



7. diagram. Ha nem járt volna érte pont, akkor szívesen csináltad volna?

kérdések és nem volt nagyon fegyelmezett a hangulat a doga közben.”

„Jó, mert ez is arra motivált, hogy órán jegyezzük meg az adott képletet stb., mert a jó válaszokra kapunk pontokat, amit később beválthatunk »hasznos« dolgokra.”

„Jó, mert nem paráztam rá annyira a dolgozatra, mert tudtam, hogy ha nagyon rosszul sikerül, akkor is feljebb tudom húzni a jegyemet. De ebben az volt a rosszabb, hogy egy kicsit kevésbé készültem.”

Vizont – sajnos – nem mindenkinek jelentett élményt. Ha valaki például mindig csak a leírt tananyagot tanulja meg a megértés igénye nélkül, akkor neki ez a fajta módszer inkább negatív tapasztalatokat hoz:

„Rossz volt, mert olyan kérdések szerepeltek a Kahoot!-ban ami a könyvben nincs megmagyarázva, vagy nincs is a tankönyvben, a kérdések nem az anyaggal kapcsolatosak.”

Ezek a válaszok is jól mutatják, hogy a tanulók komolyan vették a kérdőívet, igyekeztek átgondolt, őszinte véleményt adni, ezzel is hozzájárulva a bemutatott módszer értékeléséhez.

Ha már tanulás megkönnyítése szempontjából nem bizonyult teljes mértékben hasznosnak ez a módszer, legalább az órákat élvezhetőbbé tette. Egyedül egy tanuló nyilatkozott úgy, hogy nem csinálta szívesen az óra végi Kahoot!-os feladatokat. Ami viszont szintén érdekes tapasztalat, hogy a kérdőívekben és személyes elbeszélgetések alkalmával csak egy tanuló mondta, hogy élvezetes volt, hogy a telefonját használhatta. Az élményt számukra a versengés jelentette. Úgy gondolom, hogy mi, tanárok

sokszor azon a véleményen vagyunk, hogy mindenképpen okostelefonokat és interaktív eszközöket kell használnunk, mert ez rendkívüli módon motiválni fogja a diákokat. A tanulónak olyan szempontból ez nem számít, hogy ők ezen eszközök jelenlétét természetesnek veszik, használatuk nem számít extra motivációnak. Valóban szükség van az IKT eszközökre, de nem azért, mert ezzel motiválhatjuk őket, hanem azért, mert tanítványaink hétköznapjainak ezen eszközök jelentős mértékben részei, és a nem-használatukkal érhetünk el érdektelenséget. Önmagában az, hogy készítünk egy prezentációt, vagy valamilyen digitális segédanyagot használunk a tanórán, sok esetben igen komoly felkészülést igényel, és nem jelent akkora újdonságot, nem vált ki olyan lelkesedést a tanulókból, mint amire a befektetett munka mennyisége alapján számíthatnánk. Szükségesek ezek az eszközök, de ne gondoljunk rájuk csodaszerként, önmagában a telefon, számítógép nem lelkesíti őket. A kulcs, úgy gondolom, az, hogy mire használjuk az eszközöket, a hangsúlyt sokkal inkább a módszerre kell helyezni és szükséges, de természetes eszközként tekinteni a digitális segédletekre.

#### Irodalom

1. D. Bruff: *Teaching with Classroom Response System: Creating Active Learning Environments*. San Francisco, USA: Jossey-Bass (2009).
2. L. Bernáth: Tanulás és emlékezés. In K. N. Kollár és É. Szabó (szerk.): *Pedagógusok pszichológiai kézikönyve*. Osiris Kiadó, Budapest (2017).
3. H. L. Roediger, J. D. Karpicke: Test-Enhanced Learning: Taking Memory Tests Improve Long-Term Retention. *Psychological Science* 17/3 (2006) 249–255.

# KREATÍV FIZIKA TÁBOR

## Nyári tábor a fizika iránt érdeklődő tehetségek, a jövő mérnökei számára

Beszeda Imre, Stonawski Tamás  
Nyíregyházi Egyetem

Mertünk nagyot álmolni! Arra gondoltunk, hogy a pancsikolás és a napozás helyett/mellett lehet tartalmas és csábító egy fizika köré szerveződő nyári tábor. A tábor ötlete 2018-nál már jóval korábban felmerült, de nem sikerült kielégítően felmérni, hogy lenne-e rá érdeklődés, és ha igen, milyen létszámban jelentkeznének a fizikát kedvelő diákok. A résztvevők számától függően kell ugyanis a programokat és a foglalkozásvezetők létszámát és feladatait meghatározni. Korábban is foglalkoztunk táborok és versenyek szervezésével, lebonyolításával, ahol sok fiatal sikerült megszólítanunk a fizikával kapcsolatosan. Ilyen volt hosszú éveken keresztül a Fizika Kémia Nyáritábor fizikás programjainak szervezése és megtartása, vagy az országos Bródy Fizika Kísérletverseny (ami 2015-ben kétnapos volt), de egy teljes nyári tábor lényegesen nagyobb felelősséggel és szervezéssel jár. A meghívók elküldése és a plakátok kihelyezése előtt tehát több lehetőséget is figyelembe vettünk elsősorban a tábor létszáma és összetétele miatt.

Egyik fő elvünk *Rousseau* közhellyé vált jelszava volt: „Vissza a természethez!”. A természet itt nem mint környezet, hanem tevékenységünk szerves részeként jelenik meg. Mivel a tábor ötlete Nyíregyházán született, a legközelebbi, természeti látnivalókban gazdag, de ugyanakkor mégiscsak érintetlen tájegységet a zempléni Pusztafalun találtuk meg. Az első táborot 2018-ban hatnaposra – vasárnaptól péntekig – terveztük, és a továbbiakban is ennél az időtartamnál maradtunk.

A zempléni táborban valóban a szó klasszikus értelmében természetismerettel foglalkoztak a tanulók, az érzékszervi tapasztalatok mellé társult az értelmi

---

Ezúton szeretnénk köszönetet mondani első számú támogatóknak, az NI Hungary Kft.-nek, hogy minden évben buszt biztosított a tanulók táborba jutásához és a foglalkozások (LEGO-robot, MyDAQ, forrasztás) megtartásában nyújtott közreműködéséért.

Köszönjük a Meló-Diák Tanszközpontum Kft.-nek, hogy eszközökkel támogatta tevékenységünket.

**További képeket és videókat** lásd <https://kreativfizika.webnode.hu/kepek-es-videok> és a <https://www.facebook.com/kreativfizika> oldalakon.



*Beszeda Imre*, matematika–fizika–számítás-technika szakos középiskolai tanár, anyagtudományi mérnökfizikus, a Nyíregyházi Egyetem Műszaki és Agrártudományi Intézet fizikatanára. 2006 óta foglalkozik tudomány- (elsősorban fizika-) népszerűsítéssel és tehetséggondozással. A Kreatív Fizika Tábor megálmodója és szervezője.

megismerés, ami mély és a későbbiekben is mozgósítható tudást eredményez a kiszőkített tankönyvekkel szemben.

A tábor elsődleges célja a gondolkodás és kreativitás fejlesztése, saját ötletek megvalósítása, manuális munka végzése, kézügyesség fejlesztése, szerszámok használatának gyakorlása, a fizika sokoldalú felfedezése. Azt kívántuk elérni, hogy a diákok úgy tekintsenek a fizikára, mint ami érdekes és hasznos, hiszen a fizika mindennapi életünkben is tetten érhető (erre azért a táborban rá is játszottunk: „hiszen minden fizika”). A foglalkozások egy része közvetlenül a természeti környezethez kötődött, mint például vízimalom-készítés, sárkányeregetés, tájékozódás terepen, hangszer- és szoborkészítés, vetélkedők és színdarabok, alapfokú csillagászati ismeretek a szabad ég alatt fényszennyezés nélkül stb. (A környezet megfigyelése, széljárás, a patak vízhozamának becslése, termékek keresése, térképek ismerete, tájolás.) Fontos annak megtanítása, mit szabad elvenni a természeti környezetünktől és mit nem (például tűzfát az elszáradt letört ágakból kell gyűjteni, de nem feltétlenül egy helyről; tilos az élőlények begyűjtése, a patak teljes felduzzasztása). A műhelymunkák nagy része egy tetővel rendelkező, de nyitott épület volt, a tábor alatti völgyre nyíló kilátással. Itt, illetve a konyhahegyiségben tartottuk az elektronikai, robotépítő- és programozó foglalkozásokat, a 3D-tervezést és -nyomtatást, látványos fizikai kísérleteket, bemutatókat és más gyakorlati foglalkozásokat, fizikai projekteket (Stirling-motor-, sárkány- és hajtógép-építés).

A tábor előnye, hogy be tudjuk mutatni, hogy hol és miként jelenik meg a fizika a mindennapokban, a természetben, a zenében, a hétköznapiakban, gondolkodásunkban. A legkomplexebb feladat mégis az eszközépítés volt a fizika segítségével, ami több napon át is tartott, és többen szabadidejükben is folytatták az építést.

A tábor résztvevőinek száma mindhárom évben 40-50 főre rúgott, létszámstopot nem alkalmaztunk. A diákokat a tábornytás után életkor szerinti heterogén



*Stonawski Tamás* a Nyíregyházi Egyetemen főiskolai adjunktus. Doktori címét 2016-ban az ELTE Fizika Tanítása doktori program keretében szerezte. Kutatási területe a digitális média alkalmazása a tanulói kreativitás, problémamegoldás és önálló kísérletezés fejlesztésére általános és középiskolában.

csoporthoz osztottuk (10–18 évesek). A csapatok céljait a táborban a pontgyűjtésben és a versengésben határoztuk meg. A tábor végén egyéni és csoportos értékelésre, jellemzésre is sor került.

2018-ban a résztvevőket négy csapatba osztottuk, amelyek egymással párhuzamosan négy munkahelyen négy foglalkozásvezetővel forgószínpadszerűen dolgoztak, másfél vagy 3 óránként helyszínt cseréltek, így biztosítottuk, hogy a csapatok ugyanazokat a feladatokat végezzék el. A feladatok mellett projekteket is hirdettünk, amelyek akár több napon át is tartottak, és a tanulók egyénileg osztották be hozzá a szabadidejüket.

2019-től továbbra is életkor szerinti vegyes csapatokkal dolgoztunk, de a szakmai foglalkozásokat korosztályok szerint szerveztük az előző év tapasztalatai alapján (a tábor végén a diákok által kitöltött válaszlappokat is figyelembe vettük).

## Projektek és műhelyek

Az alábbi projektjellegű feladatok közül több olyan is volt, amelyeket mindhárom évben végrehajtottunk, és olyan is, amit csak egyszer.

### *A fizika kapcsolata a technikával, elektronikával, informatikával:*

- hajítógép tervezése + megépítése a biztosított anyagok és szerszámok segítségével, egy mintadarab alapján;
- hajítógépverseny: a csapatoknak saját hajítógépükkel egy tenisz- vagy szivacs labdát kell minél nagyobb távolságra eldobniuk (a pontok a hajítás távolságával egyenesen arányosak), illetve célba dobó versenyt is szerveztünk (2020-ban a kisebbek számára egy pingponglabda hajítására alkalmas mini hajítógép-építés volt a feladat fakanál és a lehető legegyszerűbb alapanyagok felhasználásával);
- „hangszereket” készítettünk mindenféle hétköznapi és újrahasznosított anyagból (pohár, kólásflakon, szívószál, műanyag csövek, slag stb.) utána zenélés, „koncert”;
- üvegpalackhangszer készítése: vízzel felhangolt üvegpalackokból álló sorozat készítése és zenedarab gyakorlása, majd bemutató koncert;
- „fegyverkészítő” műhely: köpöcső készítése egyszerű anyagokból (vékony műanyag cső, szeg, papírlap és szigetelőszalag) és célba lövés;
- célba dobás dobócsillaggal;
- Stirling-motor műhely: Stirling-motor tervezése és készítése egy konzervdobozból készült szétszerelhető Stirling-motor minta alapján, a biztosított anyagok és szerszámok felhasználásával;
- szélkerék építése – fakultatív feladat volt, a helyszínen adott anyagok és lehetőségek függvényében;
- vízimalom építése – fakultatív feladat volt, a helyszínen adott anyagok és lehetőségek függvényében;
- sárkánykészítő műhely: papírsárkány készítése nád és a biztosított újrahasznosított anyagok – pél-

dául pillepalackok – és eszközök felhasználásával, majd röptetés a faluszélen levő domboldalon; a verseny szempontjai: szépség, illetve kié repül hosszabb ideig;

- vízrakétaműhely: vízrakéta tervezése és építése pillepalackból, majd fellövése akár ejtőernyővel kombinálva → a versenyen több pontot kap, akié tovább tartózkodik a levegőben;
  - kaleidoszkópkészítés: egy kész modellt, valamint az alapanyagokat, alkatrészeket (egyszerű anyagok, mint például tükörfóliák és papírcső, papírlapok) a Meló-Diák Tanszékcentrum Kft. támogatásával biztosítottuk a résztvevők számára;
  - eszközkészítő műhely: „idomított henger” készítése a kisebbek számára;
  - a „fizika szobrának” elkészítése – fakultatív feladat volt és minden csapat fantáziájára volt bízva a téma, az alkotás, a helyszín és a felhasznált alapanyagok;
  - éjszakai csillagászati bemutató (idén szerencsére tiszta volt az égbolt);
  - kezdő elektromosságtani műhely a kisebbek (5–7. osztályosok) számára, ahol a feladat egyszerű áramkörök összerakása egyszerű alkatrészekből (vezetékek, áramforrás, izzólámpa, villanymotor, LED) és a működés vizsgálata; de voltak többen, akik kartonpapírból ventilátort is készítettek a villanymotor tengelyére;
  - kezdő LEGO-robot programozás 5–7. osztályosok számára (egyszerű vonalkövető robotok programozása és tesztelése a pályán);
  - középhaladó LEGO-robot programozás 7–9. osztályosok számára;
  - forrasztás: az NI Hungary Kft. munkatársa által vezetett foglalkozás, ahol egyszerű áramkörben egyszerű forrasztási feladatot kellett megoldani; az áramkört a résztvevők hazavihették magukkal;
  - Arduino elektronikaműhely, ahol megismerkedtünk az elektronika, mikrokontrollerek és a programozás alapjaival: LED villogtatása, fényerősség-szabályozás, motorfordulatszám-szabályozás, különböző érzékelők kipróbálása (távolságmérő, levegő hőmérséklet- és páratartalom-mérő, pulzuszámoló stb.) és közben persze egy kicsit angolul is tanultunk... (kezdő szinten azok számára, akik az előző évben nem voltak a táborban, illetve középhaladó szinten a többieknek);
  - myDAQ haladó elektronikaműhely a nagyobbak számára (szintén az NI Hungary Kft. támogatásával);
  - 3D-tervezés és -nyomtatás alapjainak megismerése, egyszerű alkatrészek tervezése és kinyomtatása, amit haza is vihetek magukkal.
- A foglalkozások közben természetesen a fizikai háttérrel, a működés elméletét is megtárgyaltuk, de a beszélgetések sokszor még a kirándulások közben is folytatódtak!

### *Okoseszközök, IKT eszközök a „fizikaórán”:*

- folyamatos videódokumentáció: mindenki fotózta és videózta a saját és a csapata tevékenységét, munkáját, és közben közösen elkészítettek egy PR-



A hajítógépversenyen a precízen elkészített eszközök mellett az ügyességre is szükség volt.

filmet, hogy „mi tetszett a táborban”, amit a csütörtök esti táborzárón közösen megtekintettünk;

- pályaelemző műhely: mérések és kiértékelés okostelefon és számítógép nyújtotta lehetőségekkel, például az elhajított dobócsillag röppályájának elemzése videóanalízissel, a Tracker nevű programmal, a szoftver megismerése és a kapcsolódó elméleti háttér megbeszélése.

#### *Fizika kvízvetélkedő és színdarabok:*

- „Nosza legyél te is fizikus” kvízműsor csütörtök délután/este (a Legyél te is milliomos kvízzjátékhoz hasonló, de csapatokban játszottuk és csak fizikával kapcsolatos kérdések jelentek meg);
- „fizikaóra” kísérletekkel: a csapatoknak kellett egy-egy fizikaórát bemutatniuk, a megvalósítás a csapatokra volt bízva;
- színdarab megírása és előadása megadott szempontok, kulcsszavak felhasználásával.

#### *A szabadidő irányított eltöltése, ügyességi, társasjáték-feladatok:*

- ördöglatok kirakása (és az egyszerűbbek elkészítése vasdrótból), kockajátékok, kártyajátékok, számháború, rókavadászat, lábtenisz, futball, Blokus és egyéb társasjátékok, túrázások, valamint rengeteg olyan szabadidős program (csocsó, pingpong, sport, játékok stb.), amelyeket részben az Öreg Bence Turistaház és Erdei Iskola biztosított a tábor résztvevői számára.

Továbbá *kísérletbemutató rendbogyó fizikaórákat* is tartottunk, ahol tanári demonstráció keretében érdekes, látványos fizikai kísérleteket mutatunk be az érdeklődés felkeltése céljából. A kísérletek nagy része otthon is fellelhető egyszerű anyagokkal és eszközökkel elvégezhető „csináld magad” típusú kísérlet, amelyeket – a folyékony nitrogén kivételével – a diákok maguk is kipróbálhatnak, megismételhetnek otthon. A témakörök a folyékony nitrogénes kísérletektől, pillepalack-robbantáson és fagyikészítésen, lézeres, fénytani, elektromosságtani kísérleteken át a hangtani kísérletekig sokféle témakört felöleltek.

Az alábbiakban néhány konkrét foglalkozás tematikája, részletesebb bemutatása található.

### Hajítógép építő műhely

A feladat egy saját készítésű, működőképes hajítógépmodell megtervezése és megépítése, amely képes egy kisméretű tárgy (például valamilyen kisméretű labda) kilövésére. A hajítógép többféle elven működhet (például trebuchet, ballista, katapult), amelyek működési elvét, a kapcsolódó fizikai ismereteket és felépítését megbeszéljük. A csapatoknak számba kell venniük a rendelkezésre álló anyagokat és szerszámokat (ezeket,

illetve egy mintát is biztosítunk a csapatok számára), majd meg kell tervezniük a modellt, a munkafolyamatot. Utána a csapat közösen elkészíti a hajítógépmodellt, majd kipróbálják, tesztelik a hajtás távolságát, a célba lövés pontosságát, hiszen ilyen feladatokban is össze kell mérniük „tudásukat”, munkájukat. Minden résztvevő sokat fejlődött anyag- és szerszámismeret, szerszámhasználat és kezűgyesség terén!

Az értékelés szempontjai: a munka, a megvalósítás ötletessége, a modell szépsége, a hajtás távolsága és a célba lövés pontossága.

Az elkészült hajítógépeket a gyerekek hazavihették.

### Vízrakéta-építő műhely

A feladat – az előbbi elvekhez hasonlóan – egy saját készítésű, működőképes vízrakétamodell megtervezése és megépítése. Fontos szempont az újrahasznosítás: a lehető legtöbb anyagot, alkatrészt újrahasznosított anyagból igyekszünk biztosítani. A cél, hogy a vízrakéta a lehető legmagasabbra emelkedjen. Mivel magasságot nem tudunk mérni, ezért a levegőben tartózkodás idejét mérjük, vagyis az a rakéta lesz a „nyertes”, amelyik a leghosszabb ideig marad a levegőben. Az építés előtt, illetve közben megbeszéljük a működés elvét, a kapcsolódó fizikai ismereteket, a felépítést. Elgondolkodunk azon is, hogy mi lenne egy ejtőernyő hatása, hogyan módosítaná a rakéta mozgását, a repülés idejét, illetve, hogy miként lehet megoldani az ejtőernyő felszerelését. Számba kell venniük a rendelkezésre álló anyagokat és szerszámokat – ezeket minden csapat számára biztosítjuk –, majd meg kell tervezniük a modellt. Utána a csapat közösen elkészíti a rakétát/rakétákat, majd kipróbálják, tesztelik az indításokat, a szükséges vízmennyiséget, a levegőnyomás hatását, hiszen a „vízrakéta-versenyen” is összemérik „tudásukat”, munkáikat.

Az értékelés szempontjai: a munka, a megvalósítás ötletessége, a modell szépsége, a repülés időtartama.

Ezen a műhelyen is sokat fejlődtek anyag- és szerszámismeret, szerszámhasználat és kezűgyesség terén.

A vízrakétákat természetesen hazavitték.



Hangszerkészítés és zenélés üres üvegekkel. A hangolás mobiltelefonnal történt.

### Hangszerkészítő műhely

A feladat saját készítésű, működőképes „hangszerek” (például furulya, tilinkó, trombita, tuba, dudu stb.), megtervezése és megépítése lehetőleg hulladék-, illetve újrahasznosított vagy olcsón, egyszerűen beszerezhető anyagokból (pohár, üveg, kólásflakon). A hangszerkészítés előtt, illetve közben megbeszéljük azok működési elveit, a kapcsolódó fizikai ismereteket, felépítésüket. Számba vesszük a rendelkezésre álló anyagokat és szerszámokat (ezeket minden csapat számára biztosítjuk), majd meg kell tervezniük és el kell készíteniük a hangszereket.

A hangszerek kipróbálása, hangolása és kellő mennyiségű gyakorlás után minden csapat megtanul és begyakorol néhány zeneszámot, hogy a tábor végén egy „fizikakonzertet” tudjanak előadni.

Egy pillanatkép a köpöcsőversenyről.



A csapatok rátermettségének, kreativitásának függvényében a felhasznált/felhasználható anyagok körét lehet szélesíteni: amit a csapat kitalál/talál és fel tud használni; illetve feladat lehet „új hangszer” fejlesztése is, amit be kell mutatni, meg kell szólaltatni és zenélni is rajta.

Az értékelés szempontjai: a hangszerek „szépsége”, a ráfordított munka mennyisége és minősége, majd pedig a koncert élvezhetősége – természetesen semmit nem kell szigorúan venni, hiszen a feladatok elvégzésén, gyakorlásán, tanuláson és kikapcsolódáson van a hangsúly.

Ez a műhely is jó lehetőséget nyújtott az anyag- és szerszámhasználat és kezűgyesség fejlesztésére.

### „Fegyverkészítő” műhely

A feladat néhány saját készítésű, működőképes „fegyvermodell” megtervezése és megépítése, az elkészített „fegyverek” vizsgálata fizikus szemmel: melyik hatékonyabb, erősebb, melyik a pontosabb, könnyebben kezelhető stb. Eddig minden évben köpöcsövet készítettünk – elsősorban a kisebbekkel, majd ezekkel célba lövő versenyt rendeztünk. A munka során megbeszéljük a működési elveket, a kapcsolódó fizikai ismereteket. Számba vesszük a rendelkezésre álló anyagokat és szerszámokat (amelyeket mi biztosítunk), majd elkészítik és kipróbálják, belövik a „fegyvereket”. Utána célba lövő versenyen kell összemérniük „tudásukat” és munkájukat.

Az értékelés szempontjai: a megvalósítás ötletessége, a munka szépsége, de elsősorban a célba lövés pontossága.

### LEGO-robot műhely

2019-ben az NI Hungary Kft. jóvoltából a LEGO-robotok világába is betekintést kaptak a résztvevők. Az építőelemek, működésük és a programozási környezet megismerése után egyszerű vonalkövető robotok programozása és tesztelése volt a feladat. 2020-ban pedig saját robotokkal oldottunk meg hasonló feladatokat két csoportban: a kezdő szintű (fiatalabb) résztvevők számára egyszerű vonalkövető robotok programozása, a pályán való haladás tesztelése, míg a középhaladó táborlakók számára a pályán végighaladáson túl egyéb (szókásos) feladatokat is meg kellett oldani, mint például oldalra kikanyarodás, tárgyak mozgatása stb.

### Arduino elektronika műhely

Alapvető ismeretek áttekintése/átismétlése: elektromos mennyiségek (feszültség, áramerősség, ellenállás, vezetőképesség, kapacitás stb.) jelei, mértékegységei, mérőszámai, mérési módszerei, analóg és digitális mérőműszerek, méréshatárok, polaritás,



Az NI Hungary Kft. munkatársai által vezetett, népszerű LEGO-robot foglalkozás.

mérőműszerek az áramkörben. Áramkörök, áramköri elemek (áramforrás, feszültségforrás, egyen- és váltakozó feszültség, izzólámpa, villanymotor, ohmos ellenállás, potenciométer, fotoellenállás, termisztor, kapacitás, tekercs, transzformátor, LED, dióda, tranzisztor stb.) használatos jelölései. Ezen alkatrészek bekötése az áramkörbe, jellemzői, használatuk, alkalmazásaik.

Mikrokontrollerek (Arduino) használata, megismerkedünk az elektronika és a programozás alapjaival: LED villogtatása, fényerősség-, motorfordulatszám-szabályozás, különböző érzékelők kipróbálása (távolságmérő, levegőhőmérséklet- és páratartalom-mérő, pulzuszámoló stb.) és közben persze egy kicsit angolul is tanulunk...

Fejlesztőkörnyezet, a C programozási nyelv. Digitális kimenetek programozása: LED villogásának vezérlése mikrokontrollerrel. Soros kommunikáció. Teljesítményszabályozás. Analóg és digitális bemenetek. Érzékelők (fotoellenállás, UH-távolságmérő, IR-detektor, hőmérséklet, páratartalom stb.).

Az XD nevű csapat az Arduino-foglalkozáson 2018-ban.



2018-ban mindenki – 8 fős csoportokban – részt vett egy alapszintű foglalkozáson. A legtöbb résztvevőnek nagyon tetszett, sok újat tanultak.

A tábor után kitöltött elégedettségmérő kérdőív tapasztalatai alapján viszont 2019-től korosztályonként terveztük ezeket a foglalkozásokat is – a legkisebbeknél nem „erőltettük” ezt a témát, hanem számukra *elektromosságtan műhely* indítottuk.

## Elektromosságtan műhely

2019-től szervezzük a kisebbek számára. Cél az alapvető ismeretek áttekintése: elektromos mennyiségek (feszültség, áramerősség, ellenállás) jelei, mértékegységei, mérő-

számai. Elektromos mennyiségek mérési módszerei, digitális multiméterek, méréshatárok, polaritás, mérőműszerek az áramkörben. Áramforrások, áramkörök, áramköri elemek (izzólámpa, villanymotor, ohmos ellenállás, LED) bekötése az áramkörbe, áramkörök összerakása és vizsgálata.

Tulajdonképpen e téma szerves részét képezi a forrasztás is, aminek gyakorlására az NI Hungary Kft. biztosított számunkra USB-ről meghajtható egyszerű LED-es villogó áramköröket, amelyeken minimális forrasztással véglegesíteni lehetett az áramkört, amit azután a résztvevők hazavihettek magukkal.

## Stirling-motor készítő műhely

Ez a projekt idén jelent meg először. A feladat a lehető legtöbb újrahasznosított anyag (például konzervdoboz, fémlemezdarabok, üdítő kupak, lufi, drótdarabok stb.) felhasználásával készíthető működő Stirling-motor tervezése és készítése egy konzervdoboz-

ból és egyéb hulladékokból készült szétszerelhető Stirling-motor minta alapján. Az anyagokat, szerszámokat és minden egyéb szükséges kelléket (konzervdoboz, ugyanilyen átmérőjű befőttesüveg-tető, drótok, lemezek, sorkapcsok, rézcső tollbetét, 2,5 mm-es acéldrót, acélgyapot, borosüveg dugók, lufi, festékszóró kupak, rossz CD-lemezek, locsolócsatlakozók, szilikongumi, szigetelőszalag stb.) biztosítottunk.

Ez a projekt szintén rengeteg lehetőséget nyújtott az anyag- és szerszámhasználat, kezűgyesség, gondolkodás és a kitartás fejlesztésére, különösen azon kevesek számára, akik extra időt és munkát nem sajnálva (a többi fog-



Egyszerű áramkör összerakása forrasztással – az NI Hungary Kft. munkatársának vezetésével.

lalkozást „elhanyagolva”) napokon keresztül a Strirling-gép tökéletesítésére szentelték majdnem az összes idejüket.

## Táborzárás, értékelés, eredményhirdetés

A tábor végén, csütörtök este, a csapatok által előadott színdarabok, illetve a „fizikaórák” bemutatása után értékeltük az egyes csapatok munkáit, teljesítményét, és külön az egyéni munkákat, teljesítményeket is, majd ezek alapján osztottuk ki a díjakat. Igaz, hogy csak jelképes díjakat, de nagyon örültek, akik kapták.

## Túrák, vetélkedő, értékelés és konklúzió

A táborban olyan diákok találkoztak és dolgoztak együtt, akiknek hasonló az érdeklődési körük, az új kapcsolatok kialakításánál az alkalmazkodó, kezdeményező és kommunikációs készségük is sokat fejlődött. Barátokat szereztek a feladatok, versenyek során, akikkel év közben is tartják a kapcsolatot.

A csapatszellem növeli az önbizalmat, az önértékelést is. A személyiségfejlődésre nagy hatással van, hogy a tanulók szüleik nélkül is kipróbálhatják magukat egy új közösségben. Az egyéni feladatok az önállóságra nevelnek. A jó közérzet elengedhetetlen feltétele a testmozgás és a szabad levegő. A patakmenti rókavadászat (elrejtett rókás kártyákat kerestek) a reggeli után

indította be a „tábori vérkeringést”. A túrák alkalmat adtak a közös beszélgetésekre, ilyenkor nem volt csapatszelekció. A kütyüket csak funkcionálisan használhatták (mérés, videózás, fényképezés, esti beszámoló az otthoniaknak), használatuk egyébként is zavaró lett volna több feladat során. Számunkra az volt a legfontosabb, hogy sikerült kialakítani a valahová tartozás élményét: a diákokkal folyamatosan tartjuk a kapcsolatot a facebookon.

Úgy gondoljuk, és a tapasztalatok, visszajelzések messzemenőkéig igazolják is, hogy a fentebb megfogalmazott célokat maradéktalanul sikerült teljesítenünk, ami arra ösztönöz minket, szervezőket, hogy a jövőben is folytassuk ezt a munkát, és újabb utakat, lehetőségeket is keressünk (például a 2020-as Bródy Fizikaversenyt is online szerveztük meg). Terveink szerint évközi versenyeket és kísérleteket is indítunk, amelyek nyereségei között természetesen a legfontosabb a következő Kreatív Fizika Táborban való részvétel. A 2020. évi Öveges-verseny döntőjében a 8. osztályosok első helyezetteje ingyenes részvételt kapott a táborban.

## Tervek, a jövő

Az évközi kapcsolattartást is fontosnak tartjuk, így 2020. ősszel online Kreatív Fizika Versenyt (kísérletezés és eszközkészítés) szerveztünk és hirdettünk, aminek főnyereménye ingyenes tábori részvétel lesz. Reméljük, hogy a törzstagok mellett újak is kipróbálják magukat a fizika színpadán.

## Irodalom

[www.facebook.com/kreativfizika/](https://www.facebook.com/kreativfizika/)  
<https://kreativfizika.webnode.hu/>

Kreatív Fizika 2021. – online verseny hirdetése: <https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSdmSgfDmrJxpdJwCDppWMRXvQZT5nNbZiUWTGgbKx78AIBggA/viewform>

Kreatív Fizika Tábor 2020. elégedettségmérés kérdőív: <https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLScNo9BVxhv4ubGx8i61zQmIkS-tBL2KX5rW710FVBMmuFGg3Q/viewform>

Online Bródy Fizika Kísérletverseny 2020. versenyfelhívás és jelentkezési lap: [https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLScj6mvXDzFga7W39p\\_nsAqrldwOnbaoAeXDZSYis7CGJGyIw/viewform](https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLScj6mvXDzFga7W39p_nsAqrldwOnbaoAeXDZSYis7CGJGyIw/viewform)

Mindig volt egy bátor mag, akik akár a hideg Izra tóba is beugrottak.



# 31. IFJÚSÁGI TUDOMÁNYOS ÉS INNOVÁCIÓS TEHETSÉGTKUTATÓ VERSENY



## AZ IFJÚ FELTALÁLÓKAT ÉS TUDÓSJEJELŐLTEKET KERESSÜK!

A verseny támogatói:

Fő támogató: Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal támogatásával, az NKFI Alap

Kiemelt támogató: Nemzeti Tehetség Program | Magyar Tudományos Akadémia  
Szellemi Tulajdon Nemzeti Hivatala | Magyar Tehetségsegítő Szervezetek Szövetsége

Kiemelt szponzor: AUDI HUNGARIA Zrt.

Jelentős támogató: Magyar Suzuki Zrt. | B. Braun Medical Kft. | Tungsram Operations Kft. | Richter Gedeon Vegyészeti Gyár Nyrt. | Ericsson Magyarország Kft. | Egis Gyógyszergyár Zrt. | 77 Elektronika Műszeripari Kft. | Sanatmetal Kft. | Kárpát-medencei Tehetségkutató Alapítvány

Támogató: Innomed Medical Zrt. | NI a Virtuális Műszerezésért Alapítvány  
BHE Bonn Hungary Elektronikai Kft. | Értelmiségi Szakszervezeti Tömörülés

Szakmai-stratégiai partner: Klebelsberg Központ, Startup Campus

Médiatámogatók: Fő támogató:  MS Támogató:  



Részletes felhívás: [www.innovacio.hu](http://www.innovacio.hu)  
További információ: tel.: 06-1-430-3330  
[innovacio@innovacio.hu](mailto:innovacio@innovacio.hu)

Fővédnök:

Dr. Palkovics László  
innovációs és technológiai miniszter

Novák Katalin  
családokért felelős tárcanálküli miniszter

Védnök:

Dr. Maruzsa Zoltán  
köznevelésért felelős államtitkár

Dr. Birkner Zoltán  
az NKFIH elnöke

A projekt a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és  
Innovációs Hivatal támogatásával,  
az NKFI Alapból valósul meg.

## Beküldési határidő: 2021. november 25., 15 óra



AZ NKFI ALAPBÓL  
MEGVALÓSULÓ  
PROJEKT

AZ INNOVÁCIÓ LENDÜLETE