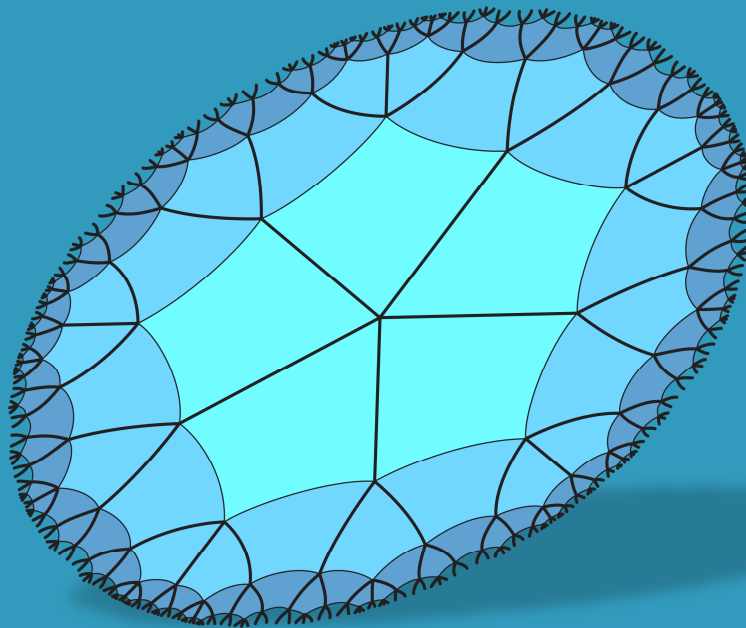


Dimenziók

Matematikai Közlemények

II. kötet



**NyME EMK Matematikai Intézet
Soproni Tudós Társaság
2014**

**Matematika Oktatás és KUtatás
Szeminárium
(MOKUS 2014)**

Konferenciakötet

NymE EMK Matematikai Intézet
Soproni Tudós Társaság

Szerkesztők:

Dr. Závoti József
egyetemi tanár

Dr. Szalay László
intézetigazgató egyetemi docens

Dr. Németh László
egyetemi docens

Nyugat-magyarországi Egyetem
Erdőmérnöki Kar
Matematikai Intézet
9400 Sopron, Ady Endre út 5.



MTA VEAB Soproni Tudós Társaság
9400 Sopron, Csatkai Endre utca 6-8.



Kiadja: NymE EMK Matematikai Intézet és Soproni Tudós Társaság

HU ISSN 2064-2172

Tartalomjegyzék

Egy érdekes térképi vetület matematikai és csillagászati alkalmazásai.....	3
Incomplete Stirling numbers.....	9
A geometriai transzformációk egy speciális esete, a külső tájékozás.....	13
A 3D Helmert transzformáció méretarány-tényezőjének és forgatási mátrixának becslései	19
Trigonometrikus polinom-becslések a gyakorlatban	27
Töréspontok keresése meteorológiai idősorokban, és azok hatásainak vizsgálata.....	35
NymE SSK művész szakos hallgatók térszemlélete az MRT szerint.....	43
Az informatika eszköztárának alkalmazása a matematika és statisztika egyetemi oktatásában	49
A sík- és hegyvidéki erdeifenyő főbb fizikai paramétereinek többváltozós regressziója.....	55
Láncfűrészek paramétereinek összehasonlítása a többváltozós statisztika módszereivel	61
A matematika oktatása a selmeci Akadémián	67

Egy érdekes térképi vetület matematikai és csillagászati alkalmazásai

Péntek Kálmán

Nyme TTK, Matematika és Fizikai Intézet
pentek@ttk.nyme.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. A dolgozat a szférikus csillagászattal foglalkozik és bemutat egy, a Nap égbolton történő mozgását szemléltető forgatható korongot (univerzális asztrolábiumot). A készülék első verzióját Philippe de la Hire (1640-1718) alkotta meg 1701-ben. A készülék modern és átdolgozott változatát e cikk szerzője készítette el. Azokat a legfontosabb csillagászati és földrajzi feladatokat érintjük, amelyek ezen eszközzel könnyen megoldhatóak.

ABSTRACT. In the paper, we present the spherical astronomy tool – called rotatable daily arc plate (universal astrolabe) – which represents the moving of the Sun in the sky. The first version of this tool was made by Philippe de la Hire (1640-1718) in 1701. The modern and improved version was designed by the author of this paper. We present the most important astronomical and geographical processes, which we can easily solve by the using of this tool.

1. Bevezetés

Pergai Apollóniosz (Kr. e. 265-190) görög matematikus és csillagász Alexandriában tevékenykedett, megalkotta a Kónika (Kúpszeletek) c. 8 kötetes művét, s kortársaitól méltán érdemelte ki a Megasz Geometrosz, vagyis Nagy Geométer nevet. Kr. e. 200 körül konstruálta meg a klasszikus planiszférikus asztrolábium nevű csillagászati mérőeszközt. A műszert a középkorban arab matematikusok tökéletesítették és fejlesztették tovább.

Ez az asztrolábium rögzített földrajzi szélességen ábrázolja az égboltot sztereografikus vetületben. Segítségével – mint analóg számítógéppel – megoldhatók szférikus csillagászat klasszikus alapfeladatai. Ezek az eszközök fémből készültek művészi finomságú kivitelben, használatukkal eredményesen tájékozódtak a hajósok a tengeren, de mérnöki, építészeti feladatok megoldása során is eredményesen alkalmazták.



1. ábra. Planiszférikus asztrolábium

Az asztrolábium bármely földrajzi szélességen alkalmazható változatát – az univerzális asztrolábiumot – Gemma Frisius (1508-1588) dolgozta ki. A műszer vetületi rendszere itt is a sztereografikus projekció volt ekvatoriális nézetben. Az univerzális asztrolábium egy másik változatát fejlesztette ki 1551-ben Juan de Rojas y Sarmiento, ő ortografikus vetületi rendszerrel dolgozott szintén ekvatoriális nézetben.



2. ábra. a. A Gemma Frisius-féle univerzális asztrolábium; b. A Juan de Rojas-féle univerzális asztrolábium; c. A Philippe de la Hire-féle univerzális asztrolábium

Mindkét univerzális asztrolábium két rétegben ábrázolja az éggömböt, azonban az égi egyenlítő mentén elhelyezkedő szögskála a sztereografikus projekciónál az asztrolábium korongjának pereme felé ritkul, míg az ortografikus projekciónál a perem felé haladva sűrűsödik. Az univerzális asztrolábiumok használata akkor lett volna lényegesen pontosabb és eredményesebb, ha skálázása a vetületi rendszerben jó közelítéssel lineáris lehetett volna.

A lineáris skálázás problémáját Philippe de la Hire (1640-1718) francia matematikus és csillagász oldotta meg, amikor 1701-ben publikálta a vertikális perspektív projekción alapuló univerzális asztrolábiumát, magát az eszközt pedig Nicholas Bion (1652-1733) műszertervező

konstruálta meg. A csillagászati és navigációs számítások elterjedésével, a logaritmus használatával az asztrólabiumok kezdtek háttérbe szorulni, viszont a Hire vetületét több világtérképen is alkalmazták [3].

A XIX. században a közép- és felsőfokú oktatásban megjelentek az asztrólabiumok szerkesztési elvein alapuló, általában kartonból készült csillagászati taneszközök. Francia és német mintára hazánkban a de Rojas-féle asztrólabiumon alapuló forgatható napi ív korongot fejlesztett ki Lóskay Miklós 1904-ben. A Magyar Földrajzi Intézet által kiadott taneszközhöz az útmutató füzetet Kövesligethy Radó (1862-1934) csillagász készítette el 1903-ban. A Lóskay-féle korong modern változatát e dolgozat szerzője készítette el, azonban a Hire-projekció ismeretében szükségesnek tűnik az eszköz finomítása, átdolgozása [1], [2], [4], [5].

2. A vertikális perspektív projekció

A fejezet címében szereplő eljárás egy olyan leképezés család, amelynek alapfelülete egy egységnyi sugarú gömbfelület (Földgömb, éggömb) egyik félgömbje (Földgömb keleti félgömbje, keleti éggömb), képfelülete a félgömb peremkörének síkja (Földgömb kezdő meridiánjának síkja, éggömb égi meridiánjának síkja). A vetítés centruma pedig az alapfelület félgömbjének szimmetria középpontjából induló, a képfelület körlemezének középpontján áthaladó félegyenesen fekvő, a kiindulási gömbfelület tetszőleges, de rögzített külső, pontosabban nem belső pontja.

Speciálisan, ha a vetítés centruma az alapfelület szimmetria középpontjának éppen átellenes gömbi pontja, akkor a leképezés a közismert sztereografikus projekció. Ha viszont a vetítés centruma a fentiekben szereplő félegyenes mentén minden határon túl eltávolodik a kiindulási gömbfelülettől, akkor jutunk az ortografikus projekcióhoz [6], [7].

A vertikális perspektív projekció vetítési egyenleteinek tárgyalásánál az alapfelület pontjait a Földgömb esetében (λ, φ) földrajzi koordinátákat alkalmazva a

$$P(x, y, z) = P(\cos \varphi \cdot \cos \lambda, \cos \varphi \cdot \sin \lambda, \sin \varphi), \quad (1)$$

$$0^\circ < \lambda < 180^\circ, -90^\circ < \varphi < 90^\circ$$

módon jellemezhetjük.

Ekkor a képfelület (x, z) síkját az $y = 0$ egyenlettel írhatjuk le, a vetítés centrumát pedig a $C(0, -d, 0)$, $d \geq 1$ koordináták jellemzik. Ekkor az alapfelület (1) összefüggésben szereplő P pontjának P' képét úgy határozhatjuk meg, mint a PC vetítésűsugar és az $y = 0$ képsík metszéspontját.

Számításaink eredményeként a

$$P'(x', 0, z') = P'\left(\frac{\cos \varphi \cdot \cos \lambda}{\cos \varphi \cdot \sin \lambda + 1}, 0, \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi \cdot \sin \lambda + 1}\right), \quad (2)$$

$$0^\circ < \lambda < 180^\circ, -90^\circ < \varphi < 90^\circ$$

összefüggések adódnak, tehát esetünkben a vertikális perspektív projekció leképezési egyenletei az

$$x' = \frac{\cos \varphi \cdot \cos \lambda}{\cos \varphi \cdot \sin \lambda + 1}, \quad z' = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi \cdot \sin \lambda + 1} \quad (3)$$

alakban írhatók fel.

Speciálisan a sztereografikus projekció leképezési egyenletei $d \rightarrow 1$, $d \geq 1$ esetben

$$x' = \frac{\cos \varphi \cdot \cos \lambda}{\cos \varphi \cdot \sin \lambda + 1}, \quad z' = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi \cdot \sin \lambda + 1}, \quad (4)$$

az ortografikus projekció leképezési egyenletei $d \rightarrow \infty$, $d \geq 1$ esetben pedig az

$$x' = \cos \varphi \cdot \cos \lambda, \quad z' = \sin \varphi \quad (5)$$

alakot öltik.

Tetszőleges $d \geq 1$ esetén az alapfelület félegyenlítőjének egyik felét azon (λ, φ) földrajzi koordináták jellemzik, amelyekre $0^\circ < \lambda \leq 90^\circ$ és $\varphi = 0^\circ$. Ezen negyedkör vetülete

$$x' = \frac{\cos \lambda}{\frac{\sin \lambda}{d} + 1}, \quad z' = 0, \quad (6)$$

amely a képfelület körlemezének egy sugara és teljesül a $0 \leq x' \leq 1$ egyenlőtlenség is. Vizsgáljuk meg, hogy mekkora d érték esetén képződik le ezen egyenlítő negyedkörének $\lambda = 45^\circ$ értékhez tartozó középpontja a képszakasz felezőpontjára; vagyis milyen d esetén áll fenn a

$$\frac{\cos 45^\circ}{\frac{\sin 45^\circ}{d} + 1} = \frac{1}{2} \quad (7)$$

összefüggés. Egyenletünk megoldásaként könnyen adódik a

$$d = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 1,7071 \quad (8)$$

érték.

Teljesen hasonlóan tetszőleges $d \geq 1$ esetén az alapfelület centrálmeridiánjának egyik felét azon (λ, φ) földrajzi koordináták jellemzik, ahol $\lambda = 90^\circ$ és $0^\circ \leq \varphi < 90^\circ$. Ezen negyedkör vetülete

$$x' = 0, \quad z' = \frac{\sin \varphi}{\frac{\cos \varphi}{d} + 1}, \quad (9)$$

amely mentén a képfelület körlemezének egy, az előző (6) összefüggésben szereplő sugarára merőleges másik sugár, teljesül továbbá a $0 \leq z' \leq 1$ egyenlőtlenség is. Vizsgáljuk meg most is, hogy mekkora d érték esetén képződik le ezen centrálmeridián félkörének $\varphi = 45^\circ$ értékhez tartozó középpontja a képszakasz felezőpontjára, tehát milyen d esetén áll fenn a

$$\frac{\sin 45^\circ}{\frac{\cos 45^\circ}{d} + 1} = \frac{1}{2} \quad (10)$$

összefüggés. Egyenletünk megoldásaként a (7) összefüggéssel analóg módon egyszerűen adódik szintén a

$$d = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 1,7071 \quad (11)$$

érték.

Mindkét esetben tehát azt nyertük, hogy közelítőleg 1,7071 sugárnyi távolságból vetítve teljesül mindkét kirótt feltétel.

Figyeljük meg, hogy a (6) és (9) összevetésével érvényes tetszőleges $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ esetén a

$$z'(90^\circ - \alpha) = \frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{\frac{\cos(90^\circ - \alpha)}{d} + 1} = \frac{\cos \alpha}{\frac{\sin \alpha}{d} + 1} = x'(\alpha) \quad (12)$$

összefüggés. Most 10° -os sűrűséggel kiszámítva ezek értékeit az 1. táblázatot nyerjük.

Megvizsgálva az értékeket megállapíthatjuk, hogy gyakorlatilag 2 tizedes jegy pontossággal a skála mindkét „tengely” mentén a képsíkon lineáris.

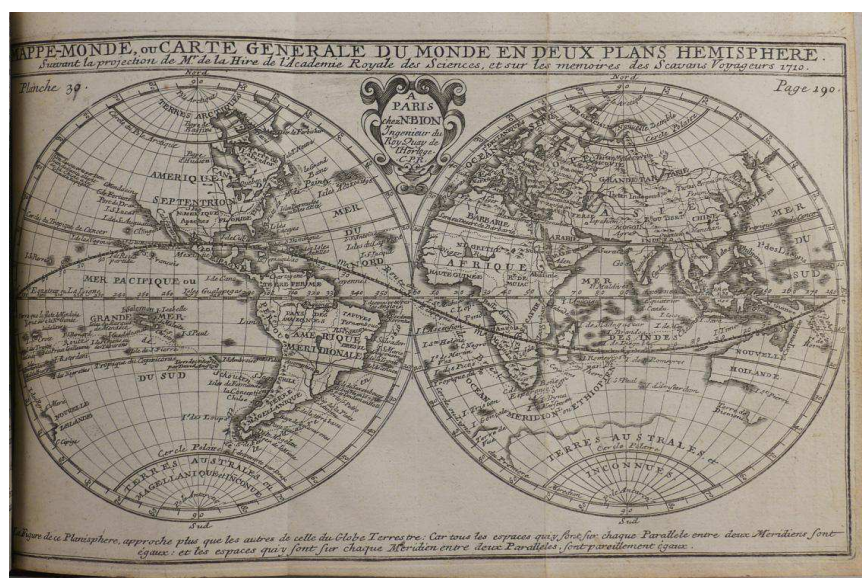
$\alpha[^\circ]$	$z'(90^\circ - \alpha) = x'(\alpha)$
0°	1
10°	0,8939
20°	0,7829
30°	0,6698
40°	0,5565
50°	0,4437
60°	0,3317
70°	0,2206
80°	0,1101
90°	0

1. táblázat

A képsíkban az egyenlítő és centrálmeridián merőleges átmérőpárját megvizsgálva könnyen megállapíthatjuk az alábbi szimmetriákat is:

$$x'(180^\circ - \lambda) = -x'(\lambda), \quad 0^\circ < \lambda \leq 90^\circ \quad \text{és} \quad z'(-\varphi) = -z'(\varphi), \quad 0^\circ \leq \varphi < 90^\circ. \quad (13)$$

A $d = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ értékhez tartozó vertikális perspektív projekciót Philippe de la Hire alkotta meg és írta le 1701-ben. A vetület alapján szerkeszthető asztrolábium és világtérkép is. A földrajzi fokhálózatot megvizsgálva könnyen megállapíthatjuk, hogy az egyenlítő és a centrálmeridián képe egy merőleges átmérőpárként jelenik meg a vetületen, a paralelkörök, valamint a meridiánok képei is ellipszis ívek lesznek.



3. ábra. A Philippe de la Hire-féle világtérkép

A Philippe de la Hire-féle vetület alapján megszerkesztett forgatható napi-ív korong megkonstruálása és a vele való csillagászati oktatás tapasztalatainak megállapítása a közeljövő feladata lesz.

A Philippe de la Hire-féle vetület alapján megépített forgatható csillagászati koronggal számos csillagászati földrajzi feladatot oldhatunk meg könnyedén. Ilyenek például a Nap delelési magasságának és éjféle mélységének meghatározása az év egy tetszőleges napján, a Nap delelési és nyugvási időpontjának meghatározása az év egy tetszőleges napján, a nappal,

a szürkület és az éjszaka időtartamának meghatározása az év egy adott napján. Mindezek és még számos feladat is bármely földrajzi szélességű helyen könnyedén megoldható. E problémák részletes tárgyalása azonban messze meghaladja e dolgozat kereteit. Ezek részletes bemutatásával a jövőben kívánunk foglalkozni.

Irodalomjegyzék

- [1] **Kövesligethy, R.**, Használati utasítás Lóskay Miklósnak a Nap és a csillagok járását a Föld tetszőleges helyén feltüntető napi-ív-korongjához, Magyar Földrajzi Intézet Rt., Budapest (1903) 15.
- [2] **Lóskay, M.**, A Nap és a csillagok járása a Föld tetszőleges helyén, Magyar Földrajzi Intézet Rt., Budapest (1904) 2.
- [3] **Morrison, J. E.**, The Astrolabe, Ed. Janus (2010) 437.
- [4] **Péntek, K.**, Ábrázoló geometriai módszerek alkalmazása a szférikus csillagászatban: az ortografikus meridián projekció, *NymE SEK Tudományos Közleményei XVII. Természettudományok 12* (2010) 27-49.
- [5] **Péntek, K.**, Az ortografikus meridionális vetületi rendszeren alapuló csillagászati készülék: a Nap évi mozgását bemutató forgatható korong, *NymE SEK Tudományos Közleményei XVIII. Természettudományok 13* (2012) 37-64.
- [6] **Snyder, J. P. – Voxland, Ph. M.**, An Album of Map Projections, U.S. Geological Survey Professional Paper 1453, Denver (1989) 249.
- [7] **Stegena, L.**, Vetülettan, Tankönyvkiadó, Budapest (2010) 231.

Incomplete Stirling numbers

Takao Komatsu

School of Mathematics and Statistics
Wuhan University
Wuhan 430072 China
komatsu@whu.edu.cn

ÖSSZEFOGLALÓ. Az előjel nélküli elsőfajú Stirling számok általánosításával a hiányos, előjel nélküli elsőfajú Stirling számokat és az asszociált elsőfajú Stirling számokat definiáljuk. Továbbá vizsgáljuk ezen számok néhány alapvető tulajdonságát.

ABSTRACT. We define two types of incomplete unsigned Stirling numbers of the first kind, named as restricted Stirling numbers of the first kind and associated Stirling numbers of the first kind, by generalizing the (unsigned) Stirling numbers of the first kind. We also investigate some basic properties.

1. Introduction and Stirling numbers of the second kind

Denote $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ the Stirling numbers of the second kind ([3]), determined by

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^i \binom{k}{j} (k-j)^n$$

([3]). In place of the classical Stirling numbers $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$, we substitute the restricted Stirling numbers of the second kind $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{\leq m}$ and associated Stirling numbers of the second kind $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{\geq m}$, respectively.

The restricted Stirling number of the second kind $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{\leq m}$ gives the number of partitions of n elements into k subsets such that none of the blocks contain more than m elements (e.g. [5], [6]). The associated Stirling number of the second kind $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{\geq m}$ gives the number of partitions of an n element set into k subsets such that every block contains at least m elements ([2, p.221], [5], [7]).

Some combinatorial and congruential properties of these numbers can be found in [5], and other properties can be found in the cited papers of [5].

The generating functions of these numbers are given by

$$\sum_{n=k}^{mk} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{\leq m} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left(-1 + \sum_{k=0}^m \frac{t^k}{k!} \right)^k$$

and

$$\sum_{n=mk}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{\geq m} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left(e^x - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} \right)^k,$$

respectively. Since the generating function of $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ is given by

$$\sum_{n=k}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{x^n}{n!} = \frac{(e^x - 1)^k}{k!},$$

we have

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{\leq \infty} = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{\geq 1} = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}.$$

In this paper, we define the restricted and associated Stirling numbers of the first kind by generalizing the (unsigned) Stirling numbers of the first kind, and investigate their basic properties.

2. Associated and restricted Stirling numbers of the first kind

Denote $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$ the (unsigned) Stirling numbers of the first kind, arising as coefficients of the rising factorial

$$x(x+1)\cdots(x+n-1) = \sum_{k=0}^n \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] x^k.$$

In place of the classical (unsigned) Stirling numbers of the first kind $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$, we substitute the (unsigned) restricted Stirling numbers of the first kind $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_{\leq m}$ and the associated (unsigned) Stirling numbers of the first kind $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_{\geq m}$. The associated Stirling number of the first kind $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_{\geq m}$ equals the number of permutations of a set N ($|N| = n$) with k orbits such that each block contains at least m elements ([2, p.256–257], [7]). The restricted Stirling number of the first kind $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_{\leq m}$ equals the number that each block contains at most m elements.

The generating functions of the restricted Stirling numbers of the first kind and the associated Stirling numbers of the first kind are given by the following ([1, p. 467, (12.8)]).

Lemma 1. For $k \geq 1$ and $m \geq 1$, we have

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_{\leq m} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left(x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^m}{m} \right)^k$$

and

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_{\geq m} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left(-\log(1-x) - x - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^{m-1}}{m-1} \right)^k.$$

Since the generating function of $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$ is given by

$$\sum_{n=k}^{\infty} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] \frac{x^n}{n!} = \frac{(-\log(1-x))^k}{k!},$$

we have

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_{\leq \infty} = \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_{\geq 1} = \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right].$$

The unsigned Stirling numbers of the first kind can be calculated by the recurrence relation

$$\left[\begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right] = n \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right] \tag{1}$$

for $k > 0$, with the initial conditions

$$\left[\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right] = 1 \text{ and } \left[\begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} 0 \\ n \end{matrix} \right] = 0$$

for $n > 0$. The restricted and associated Stirling numbers of the first kind can be also calculated by the relations. It is easy to see the initial conditions

$$\begin{aligned} \left[\begin{matrix} 0 \\ \leq m \end{matrix} \right] &= 1 \text{ and } \left[\begin{matrix} n \\ \leq m \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} 0 \\ \leq m \end{matrix} \right] = 0, \\ \left[\begin{matrix} 0 \\ \geq m \end{matrix} \right] &= 1 \text{ and } \left[\begin{matrix} n \\ \geq m \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} 0 \\ \geq m \end{matrix} \right] = 0 \end{aligned}$$

for $n > 0$.

Proposition 1. For $k > 0$, we have

$$\begin{aligned} \left[\begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right]_{\leq m} &= \sum_{i=0}^{m-1} \frac{n!}{(n-i)!} \left[\begin{matrix} n-i \\ k-1 \end{matrix} \right]_{\leq m}, \\ \left[\begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right]_{\geq m} &= \sum_{i=m-1}^{\infty} \frac{n!}{(n-i)!} \left[\begin{matrix} n-i \\ k-1 \end{matrix} \right]_{\geq m}. \end{aligned}$$

Remark. Since

$$\left[\begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right]_{\leq m} = \sum_{i=1}^{n-k+1} \frac{n!}{(n-i)!} \left[\begin{matrix} n-i \\ k-1 \end{matrix} \right] = n \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right],$$

both relations in Proposition 1 are reduced to (1), if $m \geq k + 2$ and if $m = 1$, respectively.

The classical (unsigned) Stirling numbers of the first kind $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$ satisfy the identities:

$$\left[\begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right] = (n-1)!, \left[\begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right] = 1, \left[\begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right] = \binom{n}{2}, \left[\begin{matrix} n \\ n-2 \end{matrix} \right] = \frac{3n-1}{4} \binom{n}{3}, \left[\begin{matrix} n \\ n-3 \end{matrix} \right] = \binom{n}{4} \binom{n}{2}.$$

By the definition or Lemma, we have several basic properties about the restricted Stirling numbers of the first kind.

Lemma 2. For $0 \leq n \leq k - 1$ or $n \geq km + 1$, we have $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_{\leq m} = 0$.

For $k \leq n \leq km$, we have $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_{\leq m} = \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$ ($k \leq n \leq m$), $\left[\begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right]_{\leq m} = 1$, $\left[\begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right]_{\leq m} = \binom{n}{2}$,

$$\left[\begin{matrix} n \\ n-2 \end{matrix} \right]_{\leq m} = \begin{cases} \frac{3n-1}{4} \binom{n}{3}, & (m \geq 3) \\ 3 \binom{n}{4}, & (m = 2) \end{cases}, \left[\begin{matrix} n \\ n-3 \end{matrix} \right]_{\leq m} = \begin{cases} \binom{n}{4} \binom{n}{2}, & (m \geq 4) \\ \frac{5(n+3)}{2} \binom{n}{5}, & (m = 3), \\ 15 \binom{n}{6}, & (m = 2) \end{cases}$$

$$\left[\begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right]_{\leq m} = (n-1)! \quad (1 \leq n \leq m).$$

By the definition or Lemma, we also have several basic properties about the associated Stirling numbers of the first kind.

Lemma 3. For $1 \leq n \leq m - 1$, we have $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_{\geq m} = 0$. We have

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right]_{\geq m} = \begin{cases} 1, & (m = 1) \\ 0, & (m \geq 2) \end{cases}, \quad \left[\begin{smallmatrix} n \\ n-1 \end{smallmatrix} \right]_{\geq m} = \begin{cases} \binom{n}{2}, & (m = 1; m = n = 2) \\ 0, & (\text{otherwise}) \end{cases},$$

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ n-2 \end{smallmatrix} \right]_{\geq m} = \begin{cases} \frac{3n-1}{4} \binom{n}{3}, & (m = 1) \\ 3, & (m = 2, n = 4) \\ 2, & (m = 2, 3; n = 3) \\ 0, & (\text{otherwise}) \end{cases}, \quad \left[\begin{smallmatrix} n \\ n-3 \end{smallmatrix} \right]_{\geq m} = \begin{cases} \binom{n}{4} \binom{n}{2}, & (m = 1) \\ 6, & (2 \leq m \leq 4, n = 4) \\ 20, & (m = 2, n = 5) \\ 15, & (m = 2, n = 6) \\ 0, & (\text{otherwise}) \end{cases},$$

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_{\geq m} = \begin{cases} (n-1)!, & (k = 1) \\ 0, & (2 \leq k \leq m) \end{cases}.$$

References

- [1] **Charalambides, C. A.**, Enumerative Combinatorics (Discrete Mathematics and its applications), Chapman and Hall/CRC (2002).
- [2] **Comtet, L.**, Advanced Combinatorics, Reidel, Dordrecht (1974).
- [3] **Graham, R. L., Knuth, D. E. and Patashnik, O.**, Concrete Mathematics, Second edition, Addison-Wesley, Reading (1994).
- [4] **Komatsu, T.**, Hypergeometric Cauchy numbers, *International J. Number Theory*, 9 (2013) 545-546.
- [5] **Mező, I.**, Periodicity of the last digits of some combinatorial sequences, *J. Integer Seq.*, 17 (2014) Article 14.1.1.
- [6] **Riordan, J.**, Combinatorial identities, John Wiley & Sons, New York (1968).
- [7] **Zhao, F.-Z.**, Some properties of associated Stirling numbers, *J. Integer Seq.*, 11 (2008) Article 08.1.7.

A geometriai transzformációk egy speciális esete, a külső tájékozás

Závoti József
MTA CSFK GGI
zavoti@ggki.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. A geometriai külső tájékozás paramétereit a pontok képkoordinátái és a hozzájuk tartozó tárgy- vagy terepkoordináták között fennálló matematikai összefüggésből lehet meghatározni. A feladat megoldására a gyakorlatban már jól bevált közelítő módszereket léteznek. Ezek a matematikai modellek évtizedek óta használatban vannak. Ebben a cikkben javaslatot teszünk a feladat egy újszerű, egzakt megoldására.

ABSTRACT. The parameters of geometric exterior orientation can be determined from the mathematical relation between the image coordinates of the points and the object or terrain coordinates belonging to them. There exist approximation methods for the solution of this problem which have for decades been successfully applied in the practice. In this work we propose a new and exact solution of the problem.

1. Bevezetés

A természetben létező összefüggéseket, törvényeket általában nemlineáris egyenletekkel lehet leírni, amelyeket a gyakorlatban linearizálva, iterációval szokás megoldani. A matematikai problémák linearizálására, iterációval történő megoldására számtalan példát találunk Závoti (1999) dolgozatában. Bizonyos esetekben előfordulhat, hogy a nemlineáris feladatokra egzakt, korrekt megoldásokat lehet adni linearizálás nélkül is. Awange és Grafarend (2002, 2003) tanulmányaikban a 3D, 7 paraméteres hasonlósági transzformációra adtak egzakt nemlineáris megoldást, amelyet Závoti (2005) és Závoti és Jancsó (2006) cikkek módosítva továbbfejlesztettek. Battha és Závoti (2009a, 2009b) további nemlineáris geodéziai feladatokat oldottak meg analitikusan. A geometriai külső tájékozás nemlineáris megoldásával Jancsó (1994, 2004) és Závoti (2011), Závoti és Fritsch (2011) tanulmányai is foglalkoztak.

2. A külső tájékozás matematikai modellje

A geometriai külső tájékozás térbeli képkoordináta-rendszerének a tárgykoordináta-rendszerbe történő transzformációja hat paraméterrel (a projekciós központ 3 koordinátája és a 3 tengely körüli elforgatás szöge) adható meg.

Egy képpontnak a perspektív leképzése a tárgykoordináta-rendszerbe Luhmann (2000) alapján az alábbi egyenlettel írható le:

$$\begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} + \lambda_p \mathbf{R} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ -z \end{bmatrix}, \quad (1)$$

ahol

- $[X_p, Y_p, Z_p]^T$ tárgypontr koordinátái,
- $[X_0, Y_0, Z_0]^T$ vetítési központ koordinátái,
- λ_p minden pontra egyedi, ismeretlen méretarány,
- $\mathbf{R}(\varphi, \omega, \kappa)$ forgatási mátrix,
- $[x_p, y_p, -z]^T$ képvektor és $-z$ kameraállandó,
- $[x_p - x_0, y_p - y_0, -z]^T$ redukált képpont-koordináták, ahol x_0, y_0 a képfőpont koordinátái.

Az \mathbf{R} forgatási mátrix három független értékkel paraméterezhető, amely a három koordináta-tengely körüli ismeretlen szögekkel történő elforgatásból adódik.

Az Awange és Grafarend (2002) tanulmányukban a 3D, 7 paraméteres hasonlósági transzformáció megoldása során az \mathbf{R} forgatási mátrixot a ferdén szimmetrikus \mathbf{S} mátrix felhasználásával a következő módon fejezték ki:

$$\mathbf{R} = (\mathbf{I}_3 - \mathbf{S})^{-1}(\mathbf{I}_3 + \mathbf{S}), \quad (2)$$

ahol \mathbf{I}_3 a 3D egységmátrix. Az \mathbf{S} mátrix az a , b és c paraméterekkel az alábbi módon parametrizálható:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

A (2) és (3) összefüggéseket ebben a tanulmányban is felhasználjuk.

3. A méretarány-tényezők meghatározása

Az ismeretlen paraméterek megoldását három lépésben kívánjuk elvégezni, elsőként a méretarány-tényezőket határozzuk meg.

A (2) összefüggés figyelembevételével a (1) egyenletet balról $(\mathbf{I}_3 - \mathbf{S})$ mátrixszal balról szorozva adódik a következő formula:

$$\begin{bmatrix} 1 & c & -b \\ -c & 1 & a \\ b & -a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & c & -b \\ -c & 1 & a \\ b & -a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} + \lambda_p \begin{bmatrix} 1 & -c & b \\ c & 1 & -a \\ -b & a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ -z \end{bmatrix}. \quad (4)$$

A (4) összefüggést írjuk fel 3 különböző pontra.

$$\begin{aligned}
f_1 &:= +X_0 + cY_0 - bZ_0 + \lambda_1 x_1 - c\lambda_1 y_1 - b\lambda_1 z - X_1 - cY_1 + bZ_1 = 0 \\
f_2 &:= -cX_0 + Y_0 + aZ_0 + c\lambda_1 x_1 + \lambda_1 y_1 + a\lambda_1 z + cX_1 - Y_1 - aZ_1 = 0 \\
f_3 &:= +bX_0 - aY_0 + Z_0 - b\lambda_1 x_1 + a\lambda_1 y_1 - \lambda_1 z - bX_1 + aY_1 - Z_1 = 0 \\
f_4 &:= +X_0 + cY_0 - bZ_0 + \lambda_2 x_2 - c\lambda_2 y_2 - b\lambda_2 z - X_2 - cY_2 + bZ_2 = 0 \\
f_5 &:= -cX_0 + Y_0 + aZ_0 + c\lambda_2 x_2 + \lambda_2 y_2 + a\lambda_2 z + cX_2 - Y_2 - aZ_2 = 0 \\
f_6 &:= +bX_0 - aY_0 + Z_0 - b\lambda_2 x_2 + a\lambda_2 y_2 - \lambda_2 z - bX_2 + aY_2 - Z_2 = 0 \\
f_7 &:= +X_0 + cY_0 - bZ_0 + \lambda_3 x_3 - c\lambda_3 y_3 - b\lambda_3 z - X_3 - cY_3 + bZ_3 = 0 \\
f_8 &:= -cX_0 + Y_0 + aZ_0 + c\lambda_3 x_3 + \lambda_3 y_3 + a\lambda_3 z + cX_3 - Y_3 - aZ_3 = 0 \\
f_9 &:= +bX_0 - aY_0 + Z_0 - b\lambda_3 x_3 + a\lambda_3 y_3 - \lambda_3 z - bX_3 + aY_3 - Z_3 = 0
\end{aligned} \tag{5}$$

Összesen van kilenc ismeretlenünk ($X_0, Y_0, Z_0, a, b, c, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$) és kilenc egyenletünk, így a feladat megoldhatónak tűnik. A nehézség abban rejlik, hogy a feladat az ismeretleneket tekintve nem lineáris. A megoldás folyamán sorozatosan elimináljuk az ismeretleneket. A vetítési központ koordinátáit a megfelelő egyenletek kivonásával kiküszöbölhetjük:

$$\begin{aligned}
f_{14} &:= f_1 - f_4 = +\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 - c\lambda_1 y_1 + c\lambda_2 y_2 - b(\lambda_1 - \lambda_2)z - X_{12} - cY_{12} + bZ_{12} = 0 \\
f_{25} &:= f_2 - f_5 = +c\lambda_1 x_1 - c\lambda_2 x_2 + \lambda_1 y_1 - \lambda_2 y_2 + a(\lambda_1 - \lambda_2)z + cX_{12} - Y_{12} - aZ_{12} = 0 \\
f_{36} &:= f_3 - f_6 = -b\lambda_1 x_1 + b\lambda_2 x_2 + a\lambda_1 y_1 - a\lambda_2 y_2 - (\lambda_1 - \lambda_2)z - bX_{12} + aY_{12} - Z_{12} = 0 \\
f_{47} &:= f_4 - f_7 = +\lambda_2 x_2 - \lambda_3 x_3 - c\lambda_2 y_2 + c\lambda_3 y_3 - b(\lambda_2 - \lambda_3)z - X_{23} - cY_{23} + bZ_{23} = 0 \\
f_{58} &:= f_5 - f_8 = +c\lambda_2 x_2 - c\lambda_3 x_3 + \lambda_2 y_2 - \lambda_3 y_3 + a(\lambda_2 - \lambda_3)z + cX_{23} - Y_{23} - aZ_{23} = 0 \\
f_{69} &:= f_6 - f_9 = -b\lambda_2 x_2 + b\lambda_3 x_3 + a\lambda_2 y_2 - a\lambda_3 y_3 - (\lambda_2 - \lambda_3)z - bX_{23} + aY_{23} - Z_{23} = 0 \\
f_{71} &:= f_7 - f_1 = +\lambda_3 x_3 - \lambda_1 x_1 - c\lambda_3 y_3 + c\lambda_1 y_1 - b(\lambda_3 - \lambda_1)z - X_{31} - cY_{31} + bZ_{31} = 0 \\
f_{82} &:= f_8 - f_2 = +c\lambda_3 x_3 - c\lambda_1 x_1 + \lambda_3 y_3 - \lambda_1 y_1 + a(\lambda_3 - \lambda_1)z + cX_{31} - Y_{31} - aZ_{31} = 0 \\
f_{93} &:= f_9 - f_3 = -b\lambda_3 x_3 + b\lambda_1 x_1 + a\lambda_3 y_3 - a\lambda_1 y_1 - (\lambda_3 - \lambda_1)z - bX_{31} + aY_{31} - Z_{31} = 0
\end{aligned} \tag{6}$$

ahol az alábbi jelöléseket vezettük be:

$$X_{ij} = X_i - X_j, Y_{ij} = Y_i - Y_j, Z_{ij} = Z_i - Z_j, \quad i=1,2,3; \quad j=\text{mod}(i,3)+1. \tag{7}$$

Az f_{14}, f_{47}, f_{71} egyenletekből a b paramétert, illetve az f_{25}, f_{58}, f_{82} egyenletekből az a paramétert kifejezve, adódnak az alábbi képletek:

$$\begin{aligned}
b &= -\left[\lambda_i x_i - X_{ij} - \lambda_j x_j - c(\lambda_i y_i + Y_{ij} - \lambda_j y_j)\right] / \left[Z_{ij} - (\lambda_i - \lambda_j)z\right] \\
a &= +\left[\lambda_i y_i - Y_{ij} - \lambda_j y_j + c(\lambda_i x_i + X_{ij} - \lambda_j x_j)\right] / \left[Z_{ij} - (\lambda_i - \lambda_j)z\right] \\
& \quad i=1,2,3; \quad j=\text{mod}(i,3)+1.
\end{aligned} \tag{8}$$

Az f_{36}, f_{69}, f_{93} egyenleteket így írhatjuk fel:

$$a(\lambda_i y_i + Y_{ij} - \lambda_j y_j) - b(\lambda_i x_{ij} + X_{ij} - \lambda_j x_j) = Z_{ij} + (\lambda_i - \lambda_j)z, \quad i=1,2,3; \quad j=\text{mod}(i,3)+1. \tag{9}$$

Helyettesítsük a (8) egyenleteket a (9) összefüggésekbe, néhány elemi átalakítás után a következő formulákhoz jutunk:

$$\begin{aligned}
& (\lambda_i y_i + Y_{ij} - \lambda_j y_j) \left[\lambda_i y_i - Y_{ij} - \lambda_j y_j + c(\lambda_i x_i + X_{ij} - \lambda_j x_j)\right] \\
& + (\lambda_i x_{ij} + X_{ij} - \lambda_j x_j) \left[\lambda_i x_i - X_{ij} - \lambda_j x_j - c(\lambda_i y_i + Y_{ij} - \lambda_j y_j)\right] = \left[Z_{ij}^2 - (\lambda_i - \lambda_j)^2 z^2\right] \\
& \quad i=1,2,3; \quad j=\text{mod}(i,3)+1.
\end{aligned} \tag{10}$$

További egyszerűsítések után az alábbi egyenletek adódnak:

$$(\lambda_i x_i - \lambda_j x_j)^2 + (\lambda_i y_i - \lambda_j y_j)^2 + (y_i - \lambda_j)^2 z^2 = X_{ij}^2 + Y_{ij}^2 + Z_{ij}^2 \quad i=1,2,3; \quad j=\text{mod}(i,3)+1. \tag{11}$$

A (11) összefüggéseket részletesen kiírva, az alábbi homogén, másodfokú egyenletrendszer oldandó meg a λ_1 , λ_2 és λ_3 ismeretlenekre:

$$\begin{aligned} \lambda_1^2(x_1^2 + y_1^2 + z^2) - 2\lambda_1\lambda_2(x_1x_2 + y_1y_2 + z^2) + \lambda_2^2(x_2^2 + y_2^2 + z^2) &= X_{12}^2 + Y_{12}^2 + Z_{12}^2 \\ \lambda_2^2(x_2^2 + y_2^2 + z^2) - 2\lambda_2\lambda_3(x_2x_3 + y_2y_3 + z^2) + \lambda_3^2(x_3^2 + y_3^2 + z^2) &= X_{23}^2 + Y_{23}^2 + Z_{23}^2 \\ \lambda_3^2(x_3^2 + y_3^2 + z^2) - 2\lambda_3\lambda_1(x_3x_1 + y_3y_1 + z^2) + \lambda_1^2(x_1^2 + y_1^2 + z^2) &= X_{31}^2 + Y_{31}^2 + Z_{31}^2. \end{aligned} \quad (12)$$

A (12) egyenletrendszert vagy analitikusan, vagy numerikusan kell megoldani. Paláncz (2012) cikkében a (12) egyenletrendszer megoldását zárt alakban állította elő. Battha és Závoti (2009) tanulmány a Sylvester-rezultáns felhasználásával adta meg hasonló szerkezetű nemlineáris egyenletrendszer megoldását.

Numerikus algoritmussal, például a Mathematica programrendszerrel a megoldások megkaphatók. További nehézség merülhet fel az egyenletrendszer nemlinearitása miatt: egyszerre több megoldás is adódhat. Több megoldás esetén a paraméterek jelentése miatt a komplex gyököket és a negatív megoldásokat ki lehet zárni. A nemlineáris egyenletrendszer pozitív gyökei közül a helyes megoldás kiválasztása speciális geometriai megfontolásokat igényel. Külön tanulmány fogja tárgyalni a módszer általánosítását tetszőleges számú pontra.

4. A forgatási mátrix a , b , c paramétereinek meghatározása

Második lépésben a forgatási mátrix paramétereinek megoldását írjuk le. Ennek megfelelően ezen fejezet a külső tájékozás normálegyenleteinek levezetését tárgyalja.

Miután a λ_i ismeretlenekre egy nemlineáris egyenletrendszert vezetünk le, és az egyenletrendszert numerikusan megoldottuk, a következőkben a méretarány-tényezőket ismertnek tekinthetjük. Ezzel a külső tájékozási feladatot lineáris egyenletekre vezettük vissza.

A (6) összefüggések felhasználásával az a , b , c ismeretlen paraméterekre felírhatók az alábbi közvetítő egyenletek:

$$\begin{bmatrix} X_{12} - \lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 \\ Y_{12} - \lambda_1y_1 + \lambda_2y_2 \\ Z_{12} - (\lambda_1 - \lambda_2)z \\ X_{23} - \lambda_2x_2 + \lambda_3x_3 \\ Y_{23} - \lambda_2y_2 + \lambda_3y_3 \\ Z_{23} - (\lambda_2 - \lambda_3)z \\ X_{31} - \lambda_3x_3 + \lambda_1x_1 \\ Y_{31} - \lambda_3y_3 + \lambda_1y_1 \\ Z_{31} - (\lambda_3 - \lambda_1)z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (\lambda_1 - \lambda_2)z + Z_{12} & -(\lambda_1y_1 - \lambda_2y_2 + Y_{12}) \\ -[(\lambda_1 - \lambda_2)z + Z_{12}] & 0 & \lambda_1x_1 - \lambda_2x_2 + X_{12} \\ \lambda_1y_1 - \lambda_2y_2 + Y_{12} & -(\lambda_1x_1 - \lambda_2x_2 + X_{12}) & 0 \\ 0 & (\lambda_2 - \lambda_3)z + Z_{23} & -(\lambda_2y_2 - \lambda_3y_3 + Y_{23}) \\ -[(\lambda_2 - \lambda_3)z + Z_{23}] & 0 & \lambda_2x_2 - \lambda_3x_3 + X_{23} \\ \lambda_2y_2 - \lambda_3y_3 + Y_{23} & -(\lambda_2x_2 - \lambda_3x_3 + X_{23}) & 0 \\ 0 & (\lambda_3 - \lambda_1)z + Z_{31} & -(\lambda_3y_3 - \lambda_1y_1 + Y_{31}) \\ -[(\lambda_3 - \lambda_1)z + Z_{31}] & 0 & \lambda_3x_3 - \lambda_1x_1 + X_{31} \\ \lambda_3y_3 - \lambda_1y_1 + Y_{31} & -(\lambda_3x_3 - \lambda_1x_1 + X_{31}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}. \quad (13)$$

A fenti egyenletek alapján a külső tájékozás normálmátrixának elemeit az alábbi képletekkel adhatjuk meg:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \sum_{i=1}^3 \left[\left(\lambda_i y_i - \lambda_{\text{mod}(i,3)+1} y_{\text{mod}(i,3)+1} + Y_{i\text{mod}(i,3)+1} \right)^2 + \left((\lambda_i - \lambda_{\text{mod}(i,3)+1}) z + Z_{i\text{mod}(i,3)+1} \right)^2 \right] \\
a_{12} &= - \sum_{i=1}^3 \left(\lambda_i x_i - \lambda_{\text{mod}(i,3)+1} x_{\text{mod}(i,3)+1} + X_{i\text{mod}(i,3)+1} \right) \left(\lambda_i y_i - \lambda_{\text{mod}(i,3)+1} y_{\text{mod}(i,3)+1} + Y_{i\text{mod}(i,3)+1} \right) \\
a_{13} &= - \sum_{i=1}^3 \left(\lambda_i x_i - \lambda_{\text{mod}(i,3)+1} x_{\text{mod}(i,3)+1} + X_{i\text{mod}(i,3)+1} \right) \left((\lambda_i - \lambda_{\text{mod}(i,3)+1}) z + Z_{i\text{mod}(i,3)+1} \right) \\
a_{22} &= \sum_{i=1}^3 \left[\left(\lambda_i x_i - \lambda_{\text{mod}(i,3)+1} x_{\text{mod}(i,3)+1} + X_{i\text{mod}(i,3)+1} \right)^2 + \left((\lambda_i - \lambda_{\text{mod}(i,3)+1}) z + Z_{i\text{mod}(i,3)+1} \right)^2 \right] \\
a_{23} &= - \sum_{i=1}^3 \left(\lambda_i y_i - \lambda_{\text{mod}(i,3)+1} y_{\text{mod}(i,3)+1} + Y_{i\text{mod}(i,3)+1} \right) \left((\lambda_i - \lambda_{\text{mod}(i,3)+1}) z + Z_{i\text{mod}(i,3)+1} \right) \\
a_{33} &= \sum_{i=1}^3 \left[\left(\lambda_i x_i - \lambda_{\text{mod}(i,3)+1} x_{\text{mod}(i,3)+1} + X_{i\text{mod}(i,3)+1} \right)^2 + \left(\lambda_i y_i - \lambda_{\text{mod}(i,3)+1} y_{\text{mod}(i,3)+1} + Y_{i\text{mod}(i,3)+1} \right)^2 \right]
\end{aligned} \tag{14}$$

Ismert, hogy a normálmátrix szimmetrikus, azaz $a_{21} = a_{12}$, $a_{31} = a_{13}$, $a_{32} = a_{23}$.

A külső tájékozás feladatához tartozó normálvektor mátrix-elméleti megfontolásokkal hasonló módon állítható elő:

$$2 \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^3 \left[(\lambda_i y_i - \lambda_{\text{mod}(i,3)+1} y_{\text{mod}(i,3)+1}) Z_{i\text{mod}(i,3)+1} - (\lambda_i - \lambda_{\text{mod}(i,3)+1}) z Y_{i\text{mod}(i,3)+1} \right] \\ \sum_{i=1}^3 \left[(\lambda_i - \lambda_{\text{mod}(i,3)+1}) z X_{i\text{mod}(i,3)+1} - (\lambda_i x_i - \lambda_{\text{mod}(i,3)+1} x_{\text{mod}(i,3)+1}) Z_{i\text{mod}(i,3)+1} \right] \\ \sum_{i=1}^3 \left[(\lambda_i x_i - \lambda_{\text{mod}(i,3)+1} x_{\text{mod}(i,3)+1}) Y_{i\text{mod}(i,3)+1} - (\lambda_i y_i - \lambda_{\text{mod}(i,3)+1} y_{\text{mod}(i,3)+1}) X_{i\text{mod}(i,3)+1} \right] \end{bmatrix} \tag{15}$$

A normálegyenlet-rendszer megoldására számos módszer ismert a szakirodalomban. A gyakorlati számítások során a szinguláris értékek dekompozícióján alapuló (singular value decomposition, SVD) módszer megfelelően bizonyult a megoldás előállítására.

5. A vetítési központ koordinátáinak meghatározása

A harmadik lépésben a vetítési központ koordinátáit határozzuk meg. A vetítési központ még ismeretlen $[X_0, Y_0, Z_0]^T$ paramétereit a λ_s méretarány-tényező és a forgatási mátrix a, b és c már meghatározott értékeivel a (1) összefüggés felhasználásával nyerhetjük.

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_s \\ Y_s \\ Z_s \end{bmatrix} - \frac{\lambda_s}{1 + a^2 + b^2 + c^2} \begin{bmatrix} 1 + a^2 - b^2 - c^2 & 2(ab - c) & 2(ac + b) \\ 2(ab + c) & 1 - a^2 + b^2 - c^2 & 2(bc - a) \\ 2(ac - b) & 2(bc + a) & 1 - a^2 - b^2 + c^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ -z \end{bmatrix} \tag{16}$$

A (16) összefüggésben az s index mind a képkoordináták, mind a tárgykoordináták esetében az adatrendszer súlypontjára vonatkozik. Valójában mindhárom pontra a (16) egyenleteket megoldjuk, és az X_0, Y_0, Z_0 koordinátákra kapott értékek átlagát vesszük.

Valamennyi paraméter megadásával a külső tájékozás alapfeladata megoldottnak tekinthető.

6. Összefoglaló

A tanulmányban megadtunk egy új matematikai megoldást a külső tájékozás paramétereinek meghatározására. Ahogy a hagyományos eljárásnál is: a megoldás a pontok képkoordinátái és a hozzájuk tartozó tárgy- vagy terepkoordináták között fennálló leképezés összefüggéseinek felhasználásán nyugszik, úgy az új megoldásnak is alapja a pontok képkoordinátái és a hozzájuk tartozó tárgy- vagy terepkoordináták között fennálló kapcsolat. A tanulmányban tárgyalt eljárás a hagyományos megoldási módszer helyett új matematikai megoldási menetet ad meg. Fő eltérés az új és a hagyományos módszer között a méretarány-tényezők kezelésében van: míg a régi módszer indirekt kezeli (nem használja) a méretarányokat, az új módszer minden pont esetén explicite meghatároz egyedi méretarány-tényezőket. A külső tájékozásra újonnan kidolgozott eljárás a hagyományos megoldási módszereknél hatékonyabb, gyorsabb algoritmusra épül, a régi módszer nehézségeit kiküszöböli: nem igényel sem Taylor-sorfejtést, sem közelítő értékeket, sem iterációt. A módszer továbbfejlesztése a külső tájékozásba bevonható pontok számának növelése érdekében a nemlineáris egyenletrendszerek megoldásának kezelésében képzelhető el.

Irodalomjegyzék

- [1] **Awange, J.L., Grafarend, E.W.**, Linearized Least Squares and nonlinear Gauss-Jacobbi combinatorical algorithm applied to the 7 parameter datum transformation C7(3) problem, *Zeitschrift für Vermessungswesen*, 127 (2002) 109-116.
- [2] **Awange, J.L., Grafarend, E.W.**, Closed form solution of the overdetermined nonlinear 7 parameter datum transformation, *Allgemeine Vermessungsnachrichten*, 4 (2003) 130-149.
- [3] **Battha, L., Závoti, J.**, Solution of the intersection problem by the Sylvester-resultant and a comparison of two solutions of the 2D similarity transformation, *Acta Geod. Geoph. Hung.*, 44(4) (2009) 429-438.
- [4] **Battha, L., Závoti, J.**, Az előmetszési probléma és a 2D hasonlósági transzformáció, *Geomatikai Közlemények*, XII (2009) 19-26.
- [5] **Jancsó, T.**, Külső tájékozási elemek meghatározása közvetlen analitikus módszerrel, *Geodézia és Kartográfia*, 46(1) (1994) 33-38.
- [6] **Jancsó, T.**, Durvahiba-szűrés a fotogrammetriai hátrametszés kiegyenlítése előtt, kezdőértékek megadása nélkül, *Geomatikai Közlemények*, VII. (2004) 181-195.
- [7] **Luhmann, T.**, Nahbereichsphotogrammetrie, *Herbert-Wichmann Verlag*, Heidelberg, (2000) 571.
- [8] **Paláncz, B.**, Dixon-rezultáns alkalmazása a fotogrammetriai külső tájékozás megoldása során, *Geomatikai Közlemények*, XV (2012) 85-94.
- [9] **Závoti, J.**, A geodézia korszerű matematikai módszerei, *Geomatikai Közlemények*, II (1999), 149.
- [10] **Závoti, J.**, A 7 paraméteres 3D transzformáció egzakt megoldása, *Geomatikai Közlemények*, VIII (2005) 53-60.
- [11] **Závoti, J., Jancsó, T.**, The solution of the 7-parameter datum transformation problem with- and without the Gröbner basis, *Acta Geod. Geoph. Hung.*, 41(1) (2006) 87-100.
- [12] **Závoti, J.**, A fotogrammetriai külső tájékozás egy új, alternatív megoldása, *Geomatikai Közlemények*, XIV/1 (2011) 55-62.
- [13] **Závoti, J., Fritsch D.**, A first attempt at a new algebraic solution of the exterior orientation of photogrammetry, *Geod. Geoph. Hung.*, 46(3) (2011) 317-325.

A 3D Helmert transzformáció méretarány-tényezőjének és forgatási mátrixának becslései

Závoti József
MTA CSFK GGI
zavoti@ggki.hu

Kalmár János
MTA CSFK GGI
kalmar@ggki.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. A tanulmány a geometria egyik fontos elméleti problémáját tárgyalja: két térbeli koordináta rendszer között keresünk matematikai összefüggést a két rendszerben koordinátáikkal megadott közös pontpárok felhasználásával. A térképészetben, geometriában két koordináta-rendszer közötti áttérés során a legáltalánosabban használt eljárás a 3D, 7 paraméteres Helmert transzformáció alkalmazása.

ABSTRACT. The present work deals with an important theoretical problem of geometry: we are looking for a mathematical dependency between two spatial coordinate systems utilizing common pairs of points whose coordinates are given in both systems. In cartography and geometry the most often used procedure to move from one coordinate system to the other is the 3D, 7 parameter Helmert transformation.

1. Bevezetés

A 3D, 7 paraméteres Helmert datum transzformáció számítógépes algebrai rendszerekkel történő tárgyalásában Awange és Grafarend (2002, 2003a, 2003b, 2003c) években megjelent tanulmányai új irányt adtak a téma kutatásának, Awange et al. (2004) tanulmánya kiterjesztette a megoldási módokat. A hazai szakirodalomban Závoti (2005) tanulmánya az első algebrai megközelítése a feladat megoldásának, amely egyúttal a matematikai modell javítására is javaslatot tett. A Závoti és Jancsó (2006) tanulmánya jó alapötletet adott a nemlineáris probléma lineárisra történő visszavezetésére, amit Závoti (2012) cikk dolgozott ki részletesebben. Az abszolút tájékozási probléma kvaterniókkal történő megoldását Horn (1987) tanulmánya az elsők között tárgyalta, a megoldás eltér a Závoti (2012) cikkben leírtaktól. A Kalmár és Závoti (2013) tanulmány jól összefoglalta a két megoldás különbözőségét.

2. A 3D, 7 paraméteres hasonlósági transzformáció matematikai modellje

Tegyük fel, hogy adott két különböző koordináta-rendszerben mért n közös pont a koordinátáikkal. A 3D, 7-paraméteres (Helmert) térbeli túlhatározott hasonlósági transzformáció a következő modellel adható meg: Euklidészi térben keressük az elsődleges (cél) (X, Y, Z) - és a másodlagos (tárgy) (x, y, z) koordináta-rendszerek közötti leképezést az alábbi formában:

$$s_i = t + \lambda R p_i, \quad i=1,2,\dots,n, \quad (1)$$

ahol

- $s_i = [X_i, Y_i, Z_i]^T$ a célpontok koordináta értékei,
- $t = [X_0, Y_0, Z_0]^T$ az ismeretlen eltolási-vektor,
- λ az ismeretlen méretarány-tényező,
- $R(\alpha, \beta, \gamma)$ a forgatási mátrix,
- $p_i = [x_i, y_i, z_i]^T$ tárgypontok koordináta értékei.

Az R forgási mátrixot a három tengely körüli elforgatás szöge definiálja.

A 3D, 7 paraméteres Helmert transzformáció algebrai megoldása érdekében Awange és Grafarend (2002) az R forgatási mátrixot a ferdén szimmetrikus C' mátrix (5) bevezetésével a következő módon írta fel:

$$R = (I_3 - C')^{-1}(I_3 + C'), \quad (2)$$

ahol I_3 a három dimenziós egységmátrix, és C' mátrix az a , b és c paraméterekkel meghatározott:

$$C' = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Ha az (1) egyenletet a (4) összefüggés alapján az $(I_3 - C')$ mátrixszal balról szorozzuk, akkor a következő alak adódik:

$$\begin{bmatrix} 1 & c & -b \\ -c & 1 & a \\ b & -a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & c & -b \\ -c & 1 & a \\ b & -a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 & -c & b \\ c & 1 & -a \\ -b & a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}, \quad i=1,2,\dots,n. \quad (4)$$

A fenti egyenletek képezik a 3D, 7 paraméteres Helmert transzformáció közvetítő egyenleteit, amelyek ellentmondásait az algebrai megoldás során minimalizálni kell.

3. A méretarány-tényező becslései

Závoti (2012) tanulmányában a súlyponti koordináták bevezetésével megadta az eltolási paraméterek eliminálásának módját. Igazolta, hogy a túlhatározott egyenletrendszer megoldása során az a , b és c paraméterek kiküszöbölésével ezen paraméterek kiesnek és a λ paraméterre egy ismeretlenes, másodfokú, túlhatározott egyenletrendszer áll elő az alábbi formában:

$$\lambda^2 (x_{is}^2 + y_{is}^2 + z_{is}^2) = X_{is}^2 + Y_{is}^2 + Z_{is}^2, \quad i=1,2,\dots,n, \quad (5)$$

ahol

$$\begin{aligned} X_{is} &= X_i - X_s, Y_{12} = Y_1 - Y_s, Z_{is} = Z_i - Z_s & i = 1, 2, \dots, n, \\ x_{is} &= x_i - x_s, y_{is} = y_i - y_s, z_{is} = z_i - z_s & i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

(Megjegyezzük, hogy Awange és Grafarend (2002) tanulmányában a méretarány-tényezőre egy negyedfokú egyenlet adódott.)

A (5) egyenletrendszer túlhatározott, megoldása több féle módon is megadható.

3.1. I. Megoldás:

A fenti egyenletrendszert alakítsuk szorzattá a következő módon:

$$\left(\lambda\sqrt{x_{is}^2 + y_{is}^2 + z_{is}^2} - \sqrt{X_{is}^2 + Y_{is}^2 + Z_{is}^2}\right)\left(\lambda\sqrt{x_{is}^2 + y_{is}^2 + z_{is}^2} + \sqrt{X_{is}^2 + Y_{is}^2 + Z_{is}^2}\right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

Tekintsük a (6) formulában szereplő szorzatok első tényezőit. Megoldandó az alábbi egyenletrendszer:

$$\lambda\sqrt{x_{is}^2 + y_{is}^2 + z_{is}^2} = \sqrt{X_{is}^2 + Y_{is}^2 + Z_{is}^2} \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

Adjuk össze valamennyi egyenletet! Ekkor a túlhatározott egyenletrendszer megoldása során a λ méretarány-tényező értékére az alábbi, a Závoti (2012) cikkben megadott, a tapasztalatból is ismert összefüggés adódik:

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{X_{is}^2 + Y_{is}^2 + Z_{is}^2}}{\sum_{i=1}^n \sqrt{x_{is}^2 + y_{is}^2 + z_{is}^2}}. \quad (8)$$

A szakirodalomban Albertz és Kreiling (1975) publikációja alapján ismert, hogy a λ méretarány-tényező számolható a pontok súlyponti rendszerbeli távolságok összegeinek hányadosaként is. Tehát a (5) másodfokú egyenleteket elsőfokú egyenletekre vezettük vissza.

3.2. II. Megoldás

Tekintsük ismételten a (5) egyenletrendszert és adjuk össze valamennyi egyenletet. Így az alábbi összefüggés adódik:

$$\lambda^2 \sum_{i=1}^n (x_{is}^2 + y_{is}^2 + z_{is}^2) = \sum_{i=1}^n (X_{is}^2 + Y_{is}^2 + Z_{is}^2) \quad (9)$$

A fenti egyenlet szorzattá alakítás nélkül is egyszerűen megoldható. A λ méretarány-tényező értékére – a számunkra fizikai jelentéssel bíró pozitív gyök alapján – az alábbi, a Horn (1987) tanulmányában a kvaterniókkal levezetett összefüggés adódik, amely Závoti (2012) alapján a Bursa-Wolf modell megoldása is:

$$\lambda = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_{is}^2 + Y_{is}^2 + Z_{is}^2)}{\sum_{i=1}^n (x_{is}^2 + y_{is}^2 + z_{is}^2)}}. \quad (10)$$

Tehát jelen esetben is a λ méretarány-tényezőt a másodfokú egyenletekből egyértelműen meghatározhatjuk – a szakirodalomból ismert (Awange és Grafarend (2002)) negyedfokú polinom gyökeinek bonyolult szétválasztási eljárásával szemben.

3.3. III. Megoldás

Térjünk át a súlyponti koordinátákra: (a két koordináta rendszerben \bar{s} és \bar{p} a súlypontot jelöli):

$$\begin{aligned}\Delta s_i &= s_i - \bar{s} \Rightarrow s_i = \Delta s_i + \bar{s}, \\ \Delta p_i &= p_i - \bar{p} \Rightarrow p_i = \Delta p_i + \bar{p}.\end{aligned}\quad (11)$$

Visszaírva a transzformáció (1) képletébe kapjuk:

$$\Delta s_i + \bar{s} = t + \lambda \cdot \mathbf{R} \cdot (\Delta p_i + \bar{p}). \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (12)$$

Átrendezés után adódik:

$$\Delta s_i + \bar{s} = t + \lambda \cdot \mathbf{R} \cdot \bar{p} + \lambda \cdot \mathbf{R} \cdot \Delta p_i. \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (13)$$

A (13) képlet közepe elhagyható, mert az (1) összefüggés az \bar{s} és \bar{p} súlypontokra is igaz, így marad:

$$\Delta s_i = \lambda \cdot \mathbf{R} \cdot \Delta p_i. \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (14)$$

Az ismeretlen t eltolás-vektortól így átmenetileg megszabadultunk, maradnak még a λ és az \mathbf{R} változók. Az (1) formula alapján a Bursa-Wolf modellben t eltolás-vektort átlagolással kaptuk:

$$t = \sum_i \frac{s_i - \lambda \cdot \mathbf{R} \cdot p_i}{n} = \sum_i \frac{s_i}{n} - \lambda \cdot \mathbf{R} \sum_i \frac{p_i}{n} = \bar{s} - \lambda \cdot \mathbf{R} \cdot \bar{p} \quad (15)$$

Áttérve méretarány-tényező vizsgálatára, az egyszerűbb összehasonlíthatóság végett aktualizáljuk (8) képletet a Bursa-Wolf modell jelöléseivel:

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{\Delta s_i^T \cdot \Delta s_i}}{\sum_{i=1}^n \sqrt{\Delta p_i^T \cdot \Delta p_i}}. \quad (16)$$

A λ méretarány-tényező becslésére a (10) és (16) összefüggések alapján van egy lényeges különbség: a (16) képletben előbb van gyökvonás, és utána összegzés, míg (10) formulában fordítva – ezért megállapíthatjuk, hogy a (10) és (16) összefüggések nem ekvivalensek, vagyis a méretarány-tényezőre a két képlet némileg eltérő értéket számolhat. Viszont (10) és (16) képletek egyaránt statisztikai becslések a méretarány-tényezőre (eltérésük a hibaegyenletek felírásából származik), mert fixpontjuk megegyezik. Induljunk ki ugyanis abból, hogy az ideális Helmert transzformáció során minden távolság és képenek hányadosa fix (λ) – ami igaz a súlyponti koordinátákra is, ugyanis a transzformáció során a súlypontot is áthelyeztük, vagyis a súlyponti koordinátákból a súlyponttól való távolságok is levezethetők:

$$\sqrt{\Delta s_i^T \cdot \Delta s_i} = \lambda \cdot \sqrt{\Delta p_i^T \cdot \Delta p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (17)$$

és a távolságok közötti összefüggést a méretarány-tényezővel írhatjuk fel hibamentes esetben:

$$\sqrt{\Delta s_i^T \cdot \Delta s_i} = \lambda \cdot \sqrt{\Delta p_i^T \cdot \Delta p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (18)$$

Ezt követően belátható, hogy (18) összefüggés behelyettesítése (8) képletbe, illetve (16) formulába azonossághoz vezet, vagyis a két statisztikai becslés fixpontja (az elméleti méretarány) megegyezik. Amennyiben (18) képlet alapján felírjuk közvetlenül a hibaegyenleteket:

$$v_i = \sqrt{\Delta s_i^T \cdot \Delta s_i} - \lambda \cdot \sqrt{\Delta p_i^T \cdot \Delta p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (19)$$

akkor a kiegyenlítés az alábbi (de ugyanazon fixpontú), a korábbiaktól eltérő statisztikai becsléshez vezet:

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{(\Delta s_i^T \cdot \Delta s_i) \cdot (\Delta p_i^T \cdot \Delta p_i)}}{\sum_{i=1}^n \Delta p_i^T \cdot \Delta p_i}. \quad (20)$$

A fentiek alapján megállapíthatjuk, hogy a (16) és (20) képletek alapján igaz a következő összefüggés:

$$\frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{\Delta s_i^T \cdot \Delta s_i}}{\sum_{i=1}^n \sqrt{\Delta p_i^T \cdot \Delta p_i}} = \frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{(\Delta s_i^T \cdot \Delta s_i) \cdot (\Delta p_i^T \cdot \Delta p_i)}}{\sum_{i=1}^n \Delta p_i^T \cdot \Delta p_i}. \quad (21)$$

3.4. IV. Megoldás

Határozzuk meg (14) formula maradék vektorait:

$$\Delta v_i = \Delta s_i - \lambda \cdot \mathbf{R} \cdot \Delta p_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (22)$$

Tekintsük a következő optimalizálási feladatot:

$$\min_{\lambda, \mathbf{R}} \sum_i \Delta v_i^T \cdot \Delta v_i = \min_{\lambda, \mathbf{R}} \sum_i (\Delta s_i - \lambda \cdot \mathbf{R} \cdot \Delta p_i)^T \cdot (\Delta s_i - \lambda \cdot \mathbf{R} \cdot \Delta p_i). \quad (23)$$

Mivel \mathbf{R} ortogonális mátrix ($\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}_3$), az egyenlet a következő alakban is felírható:

$$\min_{\lambda, \mathbf{R}} \left\{ \sum_i (\Delta s_i^T \cdot \Delta s_i) - 2\lambda \left(\sum_i \Delta s_i^T \cdot \mathbf{R} \cdot \Delta p_i \right) + \lambda^2 \sum_i (\Delta p_i^T \cdot \Delta p_i) \right\}. \quad (24)$$

A célfüggvény szélsőértékét a λ szerinti parciális derivált eltűnése esetén veszi fel, így kapjuk, hogy

$$\lambda = \frac{\sum_i (\Delta s_i^T \cdot \mathbf{R} \cdot \Delta p_i)}{\sum_i (\Delta p_i^T \cdot \Delta p_i)}. \quad (25)$$

Másrészt a (14) képlet miatt teljesül

$$\frac{1}{\lambda} \Delta s_i = \mathbf{R} \cdot \Delta p_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (26)$$

Ezért (25) összefüggés felírható a

$$\lambda = \frac{1}{\lambda} \sum_i (\Delta s_i^T \cdot \Delta s_i) / \sum_i (\Delta p_i^T \cdot \Delta p_i) \quad (27)$$

alakban is, amiből a szakirodalomban ismert Horn-féle képlet adódik:

$$\lambda = \sqrt{\frac{\sum_i (\Delta s_i^T \cdot \Delta s_i)}{\sum_i (\Delta p_i^T \cdot \Delta p_i)}}. \quad (28)$$

Tehát megadtunk négy levezetést a 3D, 7 paraméteres Helmert transzformáció λ méretarány-tényezőjének megoldására.

4. A Grafarend-féle és a Bursa-Wolf-féle modell R forgatási mátrixának kapcsolata

Az C' ferdén szimmetrikus mátrix az (3) képlete alapján, a (2) összefüggéssel definiált R forgatási mátrix a következő alakban írható fel:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{1+a^2+b^2+c^2} \begin{bmatrix} 1+a^2-b^2-c^2 & 2(ab-c) & 2(ac+b) \\ 2(ab+c) & 1-a^2+b^2-c^2 & 2(bc-a) \\ 2(ac-b) & 2(bc+a) & 1-a^2-b^2+c^2 \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Másrésztől R forgatási mátrix és a \underline{q} kvaternió között az alábbi összefüggés van (Shen és Chen, 2006):

$$\mathbf{R} = (q_0^2 - \mathbf{q}^T \cdot \mathbf{q}) \cdot I_3 + 2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}^T + q_0 \cdot \mathbf{C}(\mathbf{q})). \quad (30)$$

A (30) formulát részletesen a következő formában írhatjuk fel:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Felmerülhet az a kérdés, hogy a (29) és (31) képletekkel adott R forgatási mátrixok milyen esetben egyeznek meg?

Legyen

$$a = \frac{q_1}{q_0}, \quad b = \frac{q_2}{q_0}, \quad c = \frac{q_3}{q_0}. \quad (32)$$

Helyettesítsük a (32) összefüggésekkel adott a , b és c paramétereket a (29) formulába, az alábbi összefüggésekhez jutunk:

$$\mathbf{R} = \frac{q_0^2}{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \begin{bmatrix} \frac{q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}{q_0^2} & 2 \frac{q_1q_2 - q_0q_3}{q_0^2} & 2 \frac{q_1q_3 + q_0q_2}{q_0^2} \\ 2 \frac{q_1q_2 + q_0q_3}{q_0^2} & \frac{q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2}{q_0^2} & 2 \frac{q_2q_3 - q_0q_1}{q_0^2} \\ 2 \frac{q_1q_3 - q_0q_2}{q_0^2} & 2 \frac{q_2q_3 + q_0q_1}{q_0^2} & \frac{q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2}{q_0^2} \end{bmatrix}. \quad (33)$$

A (33) képletben az R forgatási mátrix valamennyi elemének nevezőjéből kiemelve q_0^2 értéket, a mátrix skalárszorzójának számlálóját q_0^2 értékkel egyszerűsítve, és felhasználva, hogy $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$, éppen a (31) összefüggéssel adott azonossághoz jutunk, azaz a (29) összefüggésből a (31) formulát kaptuk meg.

Legyen most

$$q_1 = q_0 a, \quad q_2 = q_0 b, \quad q_3 = q_0 c. \quad (34)$$

Ekkor az

$$1 = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = q_0^2 (1 + a^2 + b^2 + c^2) \quad (35)$$

egyenletből kapjuk az alábbi egyenlőséget:

$$q_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2+c^2}}. \quad (36)$$

Helyettesítsük most (34) és (36) összefüggéseket a (31) formulába, akkor az \mathbf{R} forgatási mátrixra az alábbi alak adódik:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{1+a^2-b^2-c^2}{1+a^2+b^2+c^2} & 2\frac{ab-c}{1+a^2+b^2+c^2} & 2\frac{ac+b}{1+a^2+b^2+c^2} \\ 2\frac{ab+c}{1+a^2+b^2+c^2} & \frac{1-a^2+b^2-c^2}{1+a^2+b^2+c^2} & 2\frac{bc-a}{1+a^2+b^2+c^2} \\ 2\frac{ac-b}{1+a^2+b^2+c^2} & 2\frac{bc+a}{1+a^2+b^2+c^2} & \frac{1-a^2-b^2+c^2}{1+a^2+b^2+c^2} \end{bmatrix}, \quad (37)$$

amely láthatólag megegyezik a (29) összefüggéssel.

Tehát összefoglalva, a Bursa-Wolf q_0, q_1, q_2 és q_3 kvaternió komponensek és a ferdén szimmetrikus \mathbf{C}' mátrix a, b és c paraméterei között az 1. táblázatban összefoglalt összefüggések állnak fenn.

$q_0 = \frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2+c^2}}$	
$q_1 = q_0 a$	$a = \frac{q_1}{q_0}$
$q_2 = q_0 b$	$b = \frac{q_2}{q_0}$
$q_3 = q_0 c$	$c = \frac{q_3}{q_0}$

1. táblázat. Összefüggések a kvaterniók és az a, b és c paraméterek között

5. Összefoglaló

Tanulmányunkban a 3D, 7-paraméteres (Helmert) térbeli nemlineáris hasonlósági transzformáció tárgyalása során megadtunk egy olyan általános modellt, amelyben különböző módon levezethető a transzformáció méretarány-tényezője és a Bursa-Wolf modellt speciális esetként tartalmazza. A módszer lényege a méretarány-tényezőre levezetett túlhatározott egyenletrendszer más-más elven történő megoldásában rejlik. A kidolgozott modell előnye, hogy a méretarány-tényező meghatározásával az eredetileg nemlineáris probléma lineáris feladat megoldására vezethető vissza.

Megmutattuk azt is, hogy a Bursa-Wolf modellben bevezetett kvaterniók és az Awange-Grafarend szerzők által bevezetett ferdén szimmetrikus mátrix elemei között funkcionális kapcsolat van.

Irodalomjegyzék

- [1] **Albertz, J., Kreiling, W.**, Photogrammetric Guide, *Herbert Wichmann Verlag*, Karlsruhe, (1975) 58-60.
- [2] **Awange, J. L., Grafarend, E. W.**, Linearized Least Squares and nonlinear Gauss-Jacobbi combinatorical algorithm applied to the 7 parameter datum transformation C7(3) problem, *Zeitschrift für Vermessungswesen*, 127 (2002) 109-116.
- [3] **Awange, J. L., Grafarend, E.W.**, Closed form solution of the overdetermined nonlinear 7 parameter datum transformation, *Allgemeine Vermessungsnachrichten*, 110 (2003) 130-149.
- [4] **Awange, J. L., Grafarend, E. W.**, Explicit Solution of the Overdetermined Three-Dimensional Resection problem, *Journal of Geodesy*, 76 (2003) 605-616.
- [5] **Awange, J. L., Grafarend, E. W.**, Polinomial Optimization of the 7-Parameter Datum Transformation Problem when Only Three Stations in Both System are Given, *Zeitschrift für Vermessungswesen*, 128 (2003) 266-270.
- [6] **Awange, J. L., Grafarend, E. W., Fukuda, Y.**, Exact solution of the nonlinear 7-parameter datum transformation by Groebner basis, *Bul. di Geodesia e Scienze Affini*, 63 (2004) 117-127.
- [7] **Horn, B.K.P.**, Closed form solution of absolute orientation using unit quaternions, *Journal of the Optical Society of America*, 4 (1987) 629-642.
- [8] **Kalmár, J., Závoti, J.**, A 3D, 7-paraméteres dátum transzformáció megoldása Gröbner-bázisban és a Bursa-Wolf modellben, *Dimenziók Matematikai Közlemények I* (2013) 37-44.
- [9] **Závoti, J.**, A 7 paraméteres 3D transzformáció egzakt megoldása, *Geomatikai Közlemények* 8 (2005) 53-60.
- [10] **Závoti, J., Jancsó, T.**, The solution of the 7-parameter datum transformation problem with- and without the Gröbner basis, *Acta Geod. Geoph. Hung.*, 41(1) (2006) 87-100.
- [11] **Shen, Y.Z., Chen, Y., Zheng, D. H.**, A quaternion-based geodetic datum transformation algorithm, *J Geod* 80, (2006) 233–239
- [12] **Závoti, J., Fritsch, D.**, A first attempt at a new algebraic solution of the exterior orientation of photogrammetry, *Acta Geod. Geoph. Hung.*, 46 (2011) 317-325.
- [13] **Závoti, J.**, A simple proof of the solutions of the Helmert- and the overdetermined nonlinear 7-parameter datum transformation, *Acta Geod. Geoph. Hung.*, 47(4) (2012) 453-464.
- [14] **Závoti, J.**, A 2D és 3D nemlineáris hasonlósági (Helmert) transzformációk megoldásának új levezetése. *Geomatikai Közlemények*, 16 (2013) 7-16.

Trigonometrikus polinom-becslések a gyakorlatban

Kalmár János
MTA CSFK GGI
kalmar@ggki.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. Intézetünkben gyakran előfordul, hogy változó időközönként mért adatsorokból a további adatfeldolgozás sűrűbb mintavételt igényel. Ennek kielégítésére több, ismert approximációs, illetve interpolációs módszert is kipróbáltunk. Tapasztalataink szerint a trigonometrikus polinomokkal történő approximáció jó hatékonysággal alkalmazható a geomágneses bázisvonal becslésére, a mérési hibák kimutatására, és akár egy Excel táblázatkezelővel is kivitelezhető megoldást kínál.

ABSTRACT. In our institute it often occurs, that at varying intervals measured data sets the data processing needs a denser sampling of the data. For that purpose we have tried more known approximation and interpolation methods. According to our experiences the trigonometric polynomial approximation can be used with good effectiveness for estimating geomagnetic base line measurements, for gross error detection, and is a feasible method even by applying an Excel spreadsheet.

1. Bevezetés

Intézetünk több obszervatóriumot üzemeltet, ahol különböző geodéziai és geofizikai mérések folynak, egyrészt nemzetközi és hazai adatbázisok feltöltésére, másrészt az intézeti kutatómunka támogatására. A vizsgált esetben az általában hetente egyszer mért geomágneses bázisvonal adatokból (1. ábra) a további adatfeldolgozáshoz napi értékeket kellett levezetnünk, mely célra több, ismert approximációs, illetve interpolációs módszert is kipróbáltunk: a Hermite és természetes köbös spline végeselem interpolációt, és a közönséges, illetve trigonometrikus polinomokkal történő approximációt.

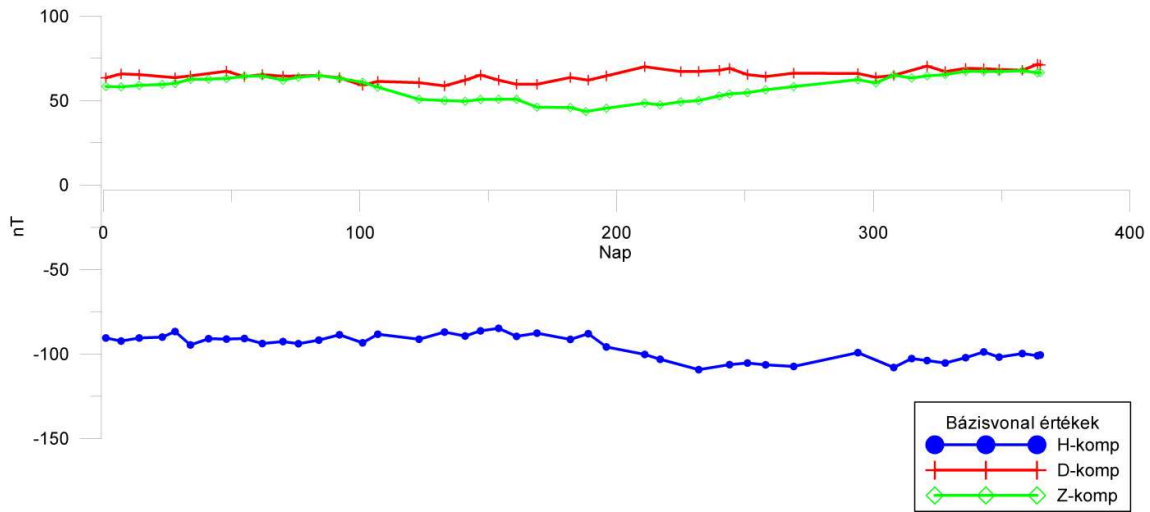
A matematikai analízis [2] garantálja, hogy a felsorolt módszerek határértékben képesek a (folytonosnak és differenciálhatónak feltételezett) keresett függvényt előállítani, azaz bármely hibafeltételt kielégíthetünk a fokszámot elég nagyra választva.

2. A kipróbált becslő eljárások sajátosságai

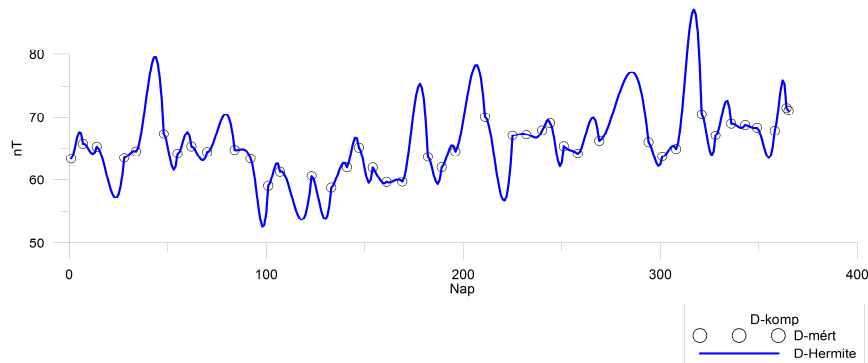
A Hermite típusú interpoláció szakaszonként harmadfokú polinomokkal becsli a keresett függvényt úgy, hogy előírja a polinom illeszkedését a mért adatokra, illetve a deriváltakra a szakaszok végpontjaiban (szakaszonként 4 feltétel a 4 paraméterre). Kivitelezéséhez az alappontokban a derivált értékét lineáris vagy másodfokú függvényillesztéssel szokták becsülni. Sajnos azt tapasztaltuk (2. ábra), hogy ez az interpoláció a szakaszokon belül abnormálisan nagy hullámokat (kilengéseket) okozhat.

A természetes köbös spline interpoláció is szakaszonként harmadfokú polinom függvényt illeszt, az alappontokban biztosítja a mért értékekre illeszkedést, illetve az első és második

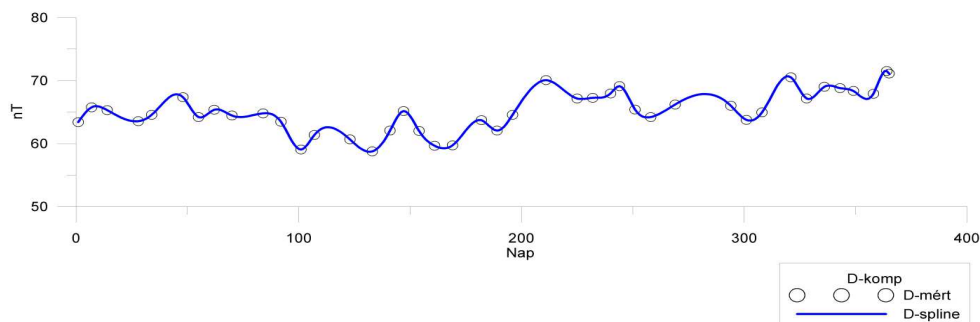
deriváltak folytonosságát a belső mérési pontokban. Nagyon kedvező illeszkedést biztosít (3. ábra), de hátránya, hogy olyan nagyméretű feltételi egyenletrendszerhez (m alappont esetén $4 \cdot (m-1)$ változóhoz) vezet, melynek nincs lokális (kis műveletigényű) megoldása.



1. ábra. A három komponensű geomágneses bázisvonal mérések 2013. évi diagramja



2. ábra. A 2013. évi D komponens *Hermite*-féle végeelem becslésének diagramja



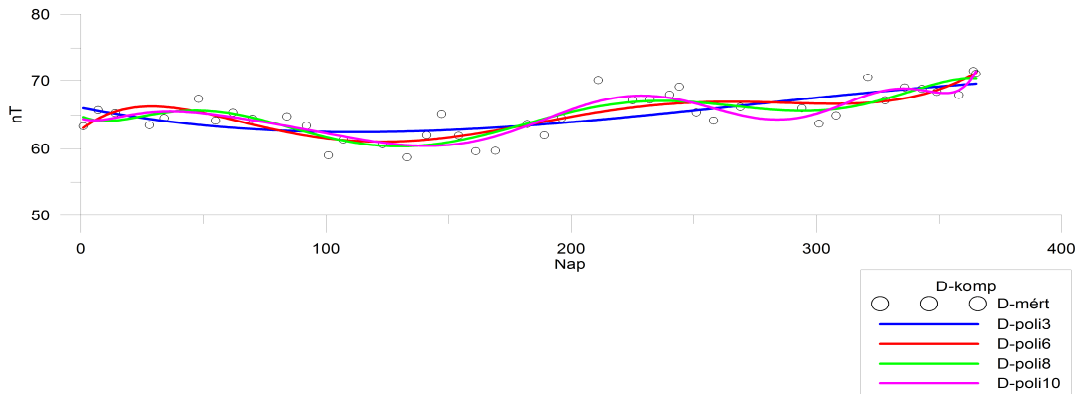
3. ábra. A 2013. évi D komponens köbös *spline* becslésének diagramja

A teljes adatsorra (1) képletű közönséges polinom-interpolációt alkalmazva az összes (m)

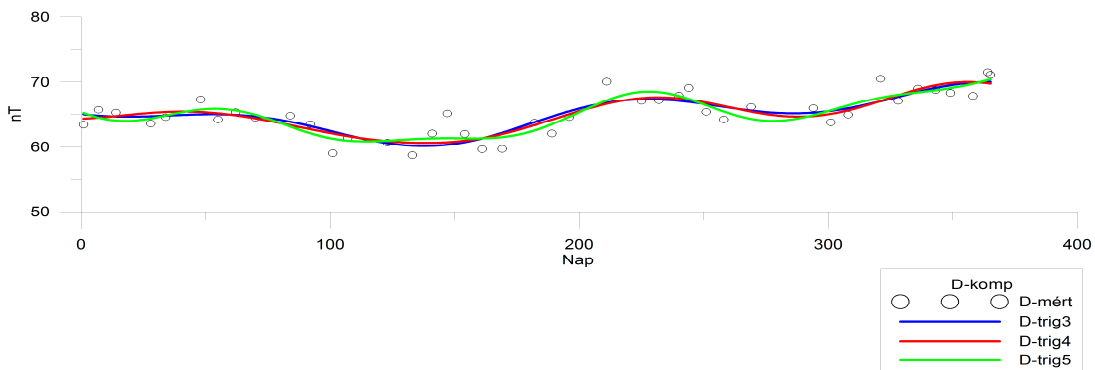
$$f(x) \approx a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n \cdot x^n \quad (1)$$

alapontra illeszkedés feltétele elfogadhatatlanul magas polinom-fokszámhoz ($m-1$), és közel szinguláris mátrixhoz vezet, amit a Hermite interpolációnál látott kiszámíthatatlan kilengések

kísérnek. Viszont ha ötnél kisebb a becslő polinom fokszáma, akkor nagyon leegyszerűsített, az alappontokra rosszul illeszkedő becslést (és görbét) kapunk (4. ábra).



4. ábra. A 2013. évi D komponens 3-6-8-10 fokú polinomos becsléseinek diagramja



5. ábra. A 2013. évi D komponens 3-4-5 fokú trigonometrikus polinom-becsléseinek diagramja

Ha a teljes adatsorra a (2) trigonometrikus polinom-approximációt alkalmazzuk, akkor a trigonometrikus sor fontos (abszolút-értékben legnagyobb a_n, b_n együtthatójú) tagjait kiválasztva kevés bázisfüggvénnyel is jó becslést kapunk (5. ábra).

$$f(x) \approx a_0 + \sum_{n \geq 1} \{ a_n \cdot \cos(n \cdot x) + b_n \cdot \sin(n \cdot x) \} \tag{2}$$

Sajnos az a_n, b_n amplitúdókat tulajdonképpen a Fourier transzformációból ismert képletek szerint kellene számolni:

$$a_0 = \int_{[-\pi; \pi]} f(t) dt / (2\pi); \quad a_n = \int_{[-\pi; \pi]} f(t) \cdot \cos(n \cdot t) dt / \pi; \quad b_n = \int_{[-\pi; \pi]} f(t) \cdot \sin(n \cdot t) dt / \pi.$$

Ezen képletek diszkrét pontokban ismert függvényekre módosított FFT (Fast Fourier Transform) alakjai sem sokkal egyszerűbbek, bár az FFT már több igényes programcsomag (pl. MatLab, Maple V) beépített szolgáltatása. A szokásos eljárás az a_n, b_n amplitúdók FFT meghatározása után az, hogy kiválasztjuk a legnagyobb $|a_n|, |b_n|$ együtthatókat, és a becslő függvényben csak az ezekhez tartozó bázisfüggvényeket szerepeltetjük, mert a többi tagnak már nincs lényeges befolyása az illesztés pontosságára (a \sin és \cos bázisfüggvények mindenütt $[-1; 1]$ korlátosak, ami nem igaz a közönséges polinomokra!).

Az FFT elkerülése végett lazítottunk az elméleti szigoron, és feltételeztük, hogy ismert a becslő trigonometrikus polinom legfontosabb hullámhossza (vagy alapfrekvenciája), és a bázisfüggvényként csak öt, illetve néhány felharmonikusát használjuk. A harmadfokú trigonometrikus polinom-approximációnál pl. a következőképpen néznek ki az illesztési feltételek:

$$y_i = a_0 + a_1 \cdot \cos(x_i) + b_1 \cdot \sin(x_i) + a_2 \cdot \cos(2x_i) + b_2 \cdot \sin(2x_i) + a_3 \cdot \cos(3x_i) + b_3 \cdot \sin(3x_i), \quad i=1, \dots, m. \quad (3)$$

A (3) feltételek alapján a trigonometrikus sor a_n , b_n amplitúdói már FFT nélkül is meghatározhatók ([1], illetve ld. a következő fejezetet), pl. a legkisebb négyzetek módszerét alkalmazva. Érdekes még bevezetni a (3) approximáció hibavektorának dt_3 euklideszi normáját:

$$dt_3 = [\sum_{[1..m]} \{y_i - (a_0 + a_1 \cdot \cos(x_i) + b_1 \cdot \sin(x_i) + a_2 \cdot \cos(2x_i) + b_2 \cdot \sin(2x_i) + a_3 \cdot \cos(3x_i) + b_3 \cdot \sin(3x_i))\}^2]^{1/2}, \quad i=1, \dots, m. \quad (4)$$

A hibavektor dt_3 hossza tájékoztat arról, adott alaphullámhossz és (3) illesztési feltételek mellett milyen pontos a becslés a mérési pontokban. Megfelelő skálázás (alaphullámhossz) hiányában a trigonometrikus becslő-polinom egyrészt rosszul illeszkedik a mérési pontokra, másrészt indokolatlanul sok hullámot tartalmazhat. A geomágneses bázisvonal fizikai természete és az adatsor hossza (1 év) alapján úgy gondoltuk, hogy az a_1 , b_1 paraméterű bázisfüggvények alaphullámhossza kb. 365 nap lesz, és a becslés finomítását majd a felharmonikusok biztosítják az a_2 , b_2 , a_3 , b_3 paraméterekkel. Mindenesetre az alaphullám hosszát átírható paraméternek választottuk, és azt változtatva figyeltük dt_3 viselkedését, hogy a polinom fokszámának emelése nélkül határozzuk meg a legjobb becslést, vagyis dt_3 minimumát kerestük az alaphullámhossz függvényében.

3. Az approximáció megvalósítása Excel táblázatkezelővel

Adatsorainkat legkényelmesebben táblázatkezelővel (pl. *Excel*) dolgozhatjuk fel, de nincs minden feladatra közvetlen megoldás, beépített függvény. Az *Excel* program alaphelyzetben csak lineáris regresszió (egyenes illesztés) alapú becslésre képes, de több dimenzióban is (síkilllesztés a hipertérben), ezért kicsit trükközni kell már a polinomos approximációnál is:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	y_1	x_1	x_1^2	x_1^3	x_1^4	x_1^5	x_1^6	d_1
2	y_2	x_2	x_2^2	x_2^3	x_2^4	x_2^5	x_2^6	d_2
...
m	y_m	x_m	x_m^2	x_m^3	x_m^4	x_m^5	x_m^6	d_m
$m+1$	y	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	

Látható, hogy az y_i ($i=1, \dots, m$) mérési eredményeket az A oszlopba, a mérések x_i időpontjait a B oszlopba, ezek hatványait pedig a C...G oszlopokba írtuk. Írjuk ezután a becslés x idejét és hatványait az $m+1$ -dik sorba B-től G-ig, akkor az A_{m+1} cellában az alábbi képlettel határozhatjuk meg a keresett y függvény x -beli értékét:

$$=\text{TREND}(A1:Am;B1:Gm;B_{m+1}:G_{m+1}).$$

Érdekes kiszámolni a H oszlopban a d_i hibavektor-komponenseket is:

$$=\text{TREND}(A1:Am;B1:Gm;Bi:Gi)-Ai.$$

A H -beli hibavektor hossza egyrészt lehetővé teszi a becslés pontosságának minősítését, másrészt az ott esetleg előforduló (abszolút értékben) kiugróan magas egyedi értékek a mérések durva hibáira utalnak, mert az approximáció közönséges hibái a normális eloszlást követik.

Most pedig áttérünk a trigonometrikus approximáció *exceles* kivitelezésére. Az y_i ($i=1, \dots, m$) mérési eredményeket most is az A oszlopba, a mérések x_i időpontjait a B oszlopba, ezek trigonometrikus bázisfüggvényeit pedig a $C \dots H$ oszlopokba írtuk. Írjuk ezután a becslés x idejét és trigonometrikus függvényeit az $m+1$ -dik sorba B -től H -ig, akkor az A_{m+1} cellában az alábbi képlettel adhatunk trigonometrikus polinom bázisú becslést a keresett y függvény x -beli értékére:

$$=\text{TREND}(A1:Am;C1:Hm;Cm+1:Hm+1).$$

Érdeemes most is kiszámolni az I oszlopban a d_i hibavektor-komponenseket:

$$=\text{TREND}(A1:Am;C1:Hm;Ci:Hi)-Ai.$$

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	y_1	x_1	$\cos(x_1)$	$\sin(x_1)$	$\cos(2x_1)$	$\sin(2x_1)$	$\cos(3x_1)$	$\sin(3x_1)$
2	y_2	x_2	$\cos(x_2)$	$\sin(x_2)$	$\cos(2x_2)$	$\sin(2x_2)$	$\cos(3x_2)$	$\sin(3x_2)$
...
m	y_m	x_m	$\cos(x_m)$	$\sin(x_m)$	$\cos(2x_m)$	$\sin(2x_m)$	$\cos(3x_m)$	$\sin(3x_m)$
$m+1$	y	x	$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(2x)$	$\sin(2x)$	$\cos(3x)$	$\sin(3x)$

Az I oszlopbeli hibavektor hossza egyrészt lehetővé teszi a becslés pontosságának minősítését, másrészt az ott esetleg előforduló (abszolút értékben) kiugróan magas egyedi értékek a mérések durva hibáira utalnak, mert az approximáció közönséges hibái a normális eloszlást követik. A hibavektor hosszát a (4) képlet alapján az I_{m+1} cellába számoltuk ki, mert az x -ek skálázásához (az alaphullámhossz meghatározásához) szükség van a hibavektor minimalizálendő hosszképletére. Az alaphullámhossz kezdő értékét (2π) beírtuk a J_{m+1} cellába, és x vektor (B oszlop) skálázásához olyan lineáris transzformáló képletet használunk, amely B_1 -be 0-t, B_m -be pedig J_{m+1} értékét tölti:

$$Bi = J_{m+1} * (x_i - x_1) / (x_m - x_1). \quad (5)$$

Első kísérleteinket az I_{m+1} cella (hibavektor hossz) minimalizálására a J_{m+1} cella (alaphullámhossz) kézi átírásával végeztük, amit kényelmetlennek találtuk, és megvizsgáltuk, kiváltható-e valamely beépített *Excel* funkcióval. Egy függvény szélsőértékét az *Excel* közvetlenül nem képes meghatározni, viszont rendelkezik iteratív, egyparaméteres egyenletmegoldó képességgel, az ún. *Célértékkereséssel*, ami az *Adatok/Lehetőségelemzés* blokkban található. Ezen funkciónak 3 paramétere van: hol van a megoldandó képlet (I_{m+1})? mi legyen ennek az értéke (0)? és hol van az a változtatható paraméter, amitől a képlet (akárcsak közvetetten) függ (J_{m+1})? Természetesen tisztában voltunk vele, hogy ez az egyenlet tulajdonképpen nem megoldható, mert a hibavektor sose lesz nullvektor, de bízunk benne, hogy az *Excel* ott fejezi majd be az iterációt, ahol a képlet értéke legjobban

megközelíti a nullát, vagyis a minimumban – ez a hullámhossz jól megválasztott kezdőértékénél többnyire teljesült is.

4. A becslések pontosságvizsgálata

Az approximációs módszerek összehasonlításánál arra törekedtünk, hogy azonos paraméterszámú eljárásokat használjunk. A harmadfokú trigonometrikus polinomnak a (2) képlet szerint 7 paramétere van: $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$. Ezért a hatodfokú közönséges polinom-becsléssel {(1) képlet} hasonlítandó össze, mert az is 7 paraméteres: $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$. Hasonlóképpen a negyedfokú trigonometrikus polinom-approximációt a nyolcadfokú polinom-becsléssel vetettük össze, mert mindegyik 9 paraméteres, ezért a dp_6 és dt_3 , illetve dp_8 és dt_4 hibavektor normákat hasonlítottuk össze a becslések relatív pontosságának meghatározásakor.

Legrészletesebben a 2013. évi D komponensen vizsgáltuk az approximációk pontosságát. Azt tapasztaltuk, hogy a becsülő közönséges polinom fokszámát emelve a hibavektor hossza lépésenként eleinte 10%-ot csökkent, de ez a javulás később 3% alá esett.

A 7, 9 és 11 paraméteres ($n=3, 4, 5$ fokú) trigonometrikus polinomokat is illesztettünk a D komponensre a *TREND* függvényvel és alaphullámhossz optimalizálással, és rendre rövidebb hibavektort kaptunk, mint a nekik megfeleltetett, $n=6, 8, 10$ fokú közönséges polinomoknál. A különbség közel 5%-nak adódott, ami úgy is értelmezhető, hogy a közönséges polinom- becslés kettővel több paraméter használata esetén éri el a trigonometrikus polinom-becslés pontosságát. Mindezek mellett az alaphullámhossz meghatározása (és meghatározottsága) elméleti jelentést is hordozhat, hiszen a geomágneses bázisvonal ciklikus tulajdonságának alapfrekvenciáját szolgáltatja. Ezután a 2013. évi H és Z komponenseket is bevontuk a vizsgálatba, és az adódott, hogy az alaphullámhossz a (407; 475) napos intervallumba esik, azon belül is az alacsonyabb értékek minden komponensben a magasabb fokszámú trigonometrikus becsléseknél adódtak. Kiderült, hogy a hibavektorok hossza nem haladja meg a 16 egységet. A *D* adatsornál kapott becslési hibákat az 2. táblázat foglalja össze.

Miután a 2013 évi adatokat így feldolgoztuk, a rendelkezésre álló további 2009-2014 évi adatokat már csak a tizedfokú polinom-becsléssel, illetve a harmad és negyedfokú trigonometrikus polinom-becsléssel vizsgáltuk meg 3 szempont szerint:

- Az alaphullámhossz hogyan változik az évek során?
- A hibavektor hossza hogyan változik az évek során?
- Lehet-e következtetni a hibavektorból a hibás mérésekre?

A vizsgálatok eredményeit az 1. táblázatban foglaltuk össze. Jól látszik, hogy 2012-ben a *D* komponens, 2014-ben pedig a *H* és *D* komponensek hibavektora feltűnően hosszú a többi komponenshez képest.

Ebből arra következtettünk, hogy ezen években a kiugró komponensek durva mérési hibákat tartalmaznak, melyek pozícióját a hibavektorban látható kiugrások révén találtuk meg. Ezután ellenőriztük a mérések eredeti dokumentációját, vajon igaz-e a sejtésünk a durva hibák előfordulását illetően? A kézi egyeztetések révén a 13 gyanús alappontból 11 bizonyult ténylegesen hibásnak, melyek közül tízet töröltünk és egyet javítottunk Szendrői J. munkatársunk segítségével.

A javított mérésekre alkalmazott becslések ezután már jobban illeszkedtek (csökkent a hibavektorok hossza), a *Z* komponens viszont alig változott, mert ott csak egy adatot kellett törölni (részletekért ld. az 1. táblázat).

Nem csak évenként külön, hanem a teljes időtartamra nézve is elvégeztük a komponensek becslését, melynek eredményét az 1. táblázat Össz rovata mutatja be. Kiderült, hogy az alap

hullámhossznál nem egy évből, hanem a teljes mérési adatsorból (6 év) célszerű kiindulni, illetve az összesített Z komponens hibavektorának hossza több mint duplája az éves hibavektorok összhosszának, ami felettébb különös, és arra gondolunk, hogy az évek egymáshoz illesztésekor történt eltolódás okozza a rosszabb illeszkedést.

ÉV		EREDETI MÉRÉSEK					JAVÍTOTT MÉRÉSEK				
		trig3h	trig4h	trig3e	trig4e	poli10	trig3h	trig4h	trig3e	trig4e	poli10
2009	H	465	410	6,8	6,56	6,56	465	410	6,8	6,56	6,56
	D	2480	2480	5,2	4,3	4,26	2480	2480	5,2	4,3	4,26
	Z	380	390	7	6,87	6,98	380	390	7	6,87	6,98
2010	H	350	349	9,09	8,6	8,66	350	349	9,09	8,6	8,66
	D	353	355	4,4	4,26	4,47	353	355	4,4	4,26	4,47
	Z	402	412	9,21	8,69	8,92	402	412	9,21	8,69	8,92
2011	H	402	455	7,63	7,56	7,56	402	455	7,63	7,56	7,56
	D	5000	1467	4,33	4,29	4,27	5000	1467	4,33	4,29	4,27
	Z	600	425	8,9	8,69	8,76	600	425	8,9	8,69	8,76
2012	H	428	2434	9,56	9,09	9,03	428	2434	9,56	9,09	9,03
	D	7211	7211	<u>17,96</u>	<u>17,96</u>	<u>17,95</u>	9958	14091	12,9	12,9	12,9
	Z	856	402	12,18	11,64	11,35	856	446	10,13	9,6	8,81
2013	H	416	412	15,95	15,71	15,5	416	401	14,32	13,55	13,55
	D	462	419	10,8	10,6	10,2	462	419	10,8	10,6	10,2
	Z	475	407	9,04	8,08	8,55	475	407	9,04	8,08	8,55
2014	H	4,22	4,22	<u>13,22</u>	<u>11,51</u>	<u>16,65</u>	3,47	3,47	10,98	6,73	10,04
	D	98	98	32,22	26,63	32,09	94	94	7,85	7,77	9,03
	Z	279	246	3,68	3,6	3,67	279	246	3,68	3,6	3,67
Össz	H	2603	2700	66,95	65,27	64,71	2590	2700	66,01	64,11	63,6
	D	71311	5300	49,3	48,36	49,3	46856	5300	31,59	30,57	30,45
	Z	2226	2100	108,92	102,16	101,26	2226	2052	108,45	101,5	100,8

1. táblázat. A trigonometrikus becslések alaphullám hosszai (trig3h, trig4h), és a hibavektorok (trig3e, trig4e, poli10) nagysága évenként és komponensenként

5. Összefoglalás

Intézetünkben az általában hetente egyszer mért (meghatározott) geomágneses bázisvonal adatokból a további adatfeldolgozáshoz napi becsléseket kell meghatározni, mely célra több, ismert approximációs, illetve interpolációs módszert is kipróbáltunk: a Hermite és a köbös spline végeselem interpolációt, illetve az approximációt közönséges és trigonometrikus polinomokkal.

A köbös (harmadfokú), Hermite féle végeselem interpolációt elvetettük, mert a valóságtól idegen kilengéseket produkált. A hasonlóan harmadfokú spline interpoláció túl sok (szakaszonként 4) paramétert igényel, és a hozzátartozó lineáris egyenletrendszer megoldása nagy műveletigényű, bár kedvező megoldást adott. A közönséges polinom-approximáció csak legalább nyolcadfokú (9 paraméteres) polinom használata esetén tudta visszaadni a adatsorok finomszerkezetét. A trigonometrikus polinomok már harmadfokon (7 paraméterrel) is jó becslést biztosítottak, ha sikerült jól meghatározni az alaphullám hosszát, ami elkerülhetővé tette a Fourier transzformáció elvégzését az amplitúdók számításánál.

Megmutattuk, hogy a becsülő függvények az *Excel* táblázatkezelő eszköztárával is meghatározhatók, és a hibavektorok elemzésével kiszűrhetők a durva mérési hibák is.

Nap	D-mért	poli3	poli6	poli8	poli10	trig3	trig4	trig5
1	63,4	-2,62736	0,262854	-1,31144	-0,99766	-1,6107	-0,92179	-1,83322
7	65,75	0,123026	1,278287	1,537756	1,497195	0,956291	1,275655	1,27093
14	65,3	0,105396	-0,20125	1,079931	0,696843	0,6402	0,574281	1,279636
28	63,55	-0,88831	-2,70628	-1,4485	-1,83881	-1,14953	-1,68986	-0,8047
34	64,55	0,393104	-1,6394	-0,78589	-0,96825	-0,24106	-0,83251	-0,26339
48	67,35	3,754655	1,882802	1,683148	2,031698	2,359762	1,97345	1,57743
55	64,2	0,837415	-0,72551	-1,33021	-0,83868	-0,8042	-0,97486	-1,68279
62	65,35	2,189482	1,020002	0,150372	0,656027	0,433262	0,49909	-0,28306
70	64,45	1,4841	0,815487	-0,17551	0,19705	-0,21685	0,090065	-0,48175
84	64,8	2,085756	2,287374	1,485735	1,393303	0,966857	1,479333	1,699324
92	63,45	0,831279	1,466361	0,931375	0,561551	0,278392	0,746958	1,362363
101	59,05	-3,50095	-2,47013	-2,64327	-3,23491	-3,29442	-2,99922	-2,21591
107	61,35	-1,17813	0,052917	0,125228	-0,53222	-0,4405	-0,30849	0,3876
123	60,65	-1,89947	-0,40394	0,200279	-0,2758	0,077926	-0,22756	-0,30132
133	58,75	-3,86952	-2,40391	-1,62926	-1,79053	-1,43779	-1,88717	-2,43534
141	62,05	-0,65464	0,690215	1,491606	1,620299	1,881914	1,435876	0,743302
147	65,15	2,365542	3,570891	4,329135	4,660527	4,815145	4,441314	3,820385
154	62	-0,89399	0,104338	0,750262	1,269127	1,277275	1,049429	0,688369
161	59,65	-3,37024	-2,61661	-2,13865	-1,51212	-1,65	-1,69013	-1,67122
169	59,7	-3,48373	-3,0415	-2,80411	-2,17458	-2,44761	-2,26373	-1,79947
182	63,7	0,210546	0,11776	-0,07979	0,27946	-0,07264	0,377026	1,202315
189	62,05	-1,62272	-1,9965	-2,41508	-2,31059	-2,61718	-2,12028	-1,40267
196	64,55	0,682226	0,046574	-0,56094	-0,74705	-0,95155	-0,48671	-0,0774
211	70,05	5,729166	4,642158	3,804144	3,068639	3,188507	3,36707	2,841515
225	67,15	2,370154	1,053216	0,274676	-0,60249	-0,24307	-0,41408	-1,35696
232	67,25	2,230096	0,881863	0,235922	-0,51254	-0,12653	-0,42139	-1,22062
240	67,95	2,648802	1,337829	0,91623	0,477985	0,789928	0,436389	0,065542
244	69,1	3,655816	2,392874	2,107042	1,878817	2,111152	1,766558	1,678536
251	65,4	-0,29746	-1,4303	-1,45252	-1,25486	-1,22091	-1,48928	-1,05749
258	64,2	-1,75377	-2,70104	-2,44384	-1,79542	-2,01087	-2,13788	-1,26576
269	66,2	-0,16031	-0,71861	-0,04548	1,196689	0,588589	0,754036	1,906871
294	66	-1,28277	-0,71205	0,359253	1,311722	0,716276	1,266375	1,114646
301	63,75	-3,78606	-2,90839	-1,94806	-1,5542	-1,80911	-1,32474	-1,89412
308	64,95	-2,83533	-1,69092	-0,95097	-1,20961	-1,03863	-0,69594	-1,48187
321	70,5	2,265761	3,716808	3,808922	2,60558	3,410763	3,378675	2,872983
328	67,15	-1,31659	0,14845	-0,1711	-1,41359	-0,61357	-0,8386	-0,91135
336	69	0,277518	1,580433	0,837697	0,168579	0,480609	0,10858	0,563264
343	68,8	-0,13684	0,832009	-0,13479	0,193071	-0,30851	-0,70746	0,048525
349	68,35	-0,7627	-0,25031	-1,20286	0,080598	-1,17167	-1,50162	-0,72874
358	67,9	-1,46143	-1,98047	-2,32633	-0,70216	-2,0276	-2,09048	-1,8451
364	71,5	1,983698	0,511122	1,138855	0,730304	1,467713	1,678008	1,195111
365	71,1	1,558791	-0,09551	0,751041	-0,30899	1,063938	1,325603	0,69561
Hibavektor hossza		14,40	12,00	11,05	10,20	10,80	10,60	9,83

2. táblázat. A polinomos és trigonometrikus becslések hibái a 2013. évi D komponensben

Irodalomjegyzék

- [1] Reichel, L., Ammar, G.S. and Gragg, W.B., Discrete least squares approximation by trigonometric polynomials, *Math. Comp.* 57 (1991) 273-289.
- [2] Newbery, A.C.R., Trigonometric interpolation and curve-fitting, *Math. Comp.* 24 (1970) 869-876.
- [3] Newbery, A.C.R., Interpolation by algebraic and trigonometric polynomials, *Math. Comp.* 20 (1966) 597-599.

Töréspontok keresése meteorológiai idősorokban, és azok hatásainak vizsgálata

Pödör Zoltán

NymE SKK, Informatikai és Gazdasági Intézet
podor@inf.nyme.hu

ÖSSZEFOGLALÓ Az idősorban töréspontként definiálható az a pont, amely mentén az adatsort kettébontva a két részintervallum adatai között statisztikailag is igazolható eltérés mutatható ki. A töréspontok felfedésére több statisztikai eljárás is ismert. Az ilyen idősorok közötti kapcsolatok, pontosan a függő vagy független változóban talált töréspont(ok) miatt nem tekinthetők alapvetően a teljes vizsgálati időszak vonatkozásában stabilnak.

ABSTRACT The point at which the time series is divided in two and differences between the data in the two subintervals can also statistically be confirmed can be defined as a breakpoint. Several statistical procedures are known to detect breakpoints in time series. Such relationships between the time series, exactly because of the breakpoints detected in the dependent or independent variable, may not therefore be considered stable over the whole studied period.

1. Bevezetés

Megfelelő hosszúságú idősorok esetében fennáll annak a lehetősége, hogy a teljes adatsor nem feltétlenül homogén, lehetnek komoly, ugrásszerű változások benne. Ezért az ilyen idősorokat felhasználó elemzések, összefüggés vizsgálatok nem tekinthetők minden esetben a teljes vizsgálati időszak vonatkozásában stabilnak. Különösen igaz ez a természeti környezetünkkel kapcsolatos vizsgálatokban felhasznált adatokra, hiszen mi magunk is tapasztalhatjuk, hogy időjárásunkban, klímánkban változások zajlanak le. A klimatikus komponensek közül leggyakrabban a hőmérsékletváltozás különböző eseteit szokták vizsgálni, mert ez egy olyan környezeti jellemző, aminek változásait a hétköznapi emberek is közvetlen módon érzékelhetik.

A megfelelő hosszúságú meteorológiai adatsorokban a töréspontok vizsgálatának módszerét egy meteorológiai adatsor, a töréspontok vizsgálatának fontosságát fák éves növekedési adatai és a klimatikus komponensek közötti összefüggéseken keresztül mutatjuk be. Az összefüggés vizsgálatok módszertani háttérének pontos bemutatása, definiálása és az eredmények bemutatása nem része jelen munkának, így erre nem térünk ki. Arra kívánunk rávilágítani, hogy egy-egy ilyen töréspontnak milyen fontos szerepe lehet ezekben a vizsgálatokban, mert sok esetben azok erősségét, de akár irányát is befolyásolhatja.

2. Anyag és módszer

2.1. A felhasznált adatok

Egy mintaterület havi meteorológiai adatait (csapadékösszeg mm-ben és átlag hőmérséklet °C-ban mérve), felhasználva mutatjuk, be a töréspont keresés módszertanát és annak néhány eredményét. A meteorológiai adatok mellé ugyanezen terület éves átlagos fanövekedési adatait hozzávéve és ezek összefüggéseit – a kapott töréspont figyelembe vételével – vizsgálva támasztjuk alá a töréspontok fontosságát az összefüggés vizsgálatokban. A meteorológiai és növekedési adatok 1983-2007 vonatkozásában állnak rendelkezésre, így 25 éves idősorokat vizsgáltunk. Megjegyezzük, hogy a meteorológiai adatok ennél hosszabb intervallumban is rendelkezésre álltak, azonban a növekedési adatok miatt egységesítettük a felhasznált idősorokat.

2.2. Töréspont keresés néhány módszere

Töréspontok kimutatására többféle módszer is ismert a statisztikában [3], mint például

- a szórások minimalizálásának módszere,
- az anomáliák kumulatív összegzése,
- a Pettitt-féle nemparaméteres próba,
- a jel-zaj arány vizsgálata,
- a részátlagok összevetése Student-féle t -próbával.

A módszerek mindegyikének a lényege, hogy a rendelkezésre álló teljes adatsort egy-egy adott év mentén kettébontjuk és az alkalmazott módszertől függő statisztikai próbával, módszerrel vizsgáljuk, hogy az így kapott két részidőszak megfelelő jellemzői között kimutatható-e statisztikailag is igazolható, szignifikáns eltérés. Az idősorok felbontása során figyelemmel kell lenni arra, hogy a kapott részidőszakok hossza egy előre definiált minimum értéket elérjen a statisztikailag korrekt összevethetőség miatt. Ezen minimumérték meghatározása részben függ a rendelkezésre álló adatsor hosszától, részben pedig statisztikai értelemben is megfelelő kell, hogy legyen. A továbbiakban röviden ismertetjük az egyes módszerek lényegét.

2.2.1. Szórások minimalizálásának módszere

Az eljárás lényege, hogy a potenciális töréspontok mindegyikére vonatkozóan meghatározzuk az általuk definiált két-két (1-es és 2-es indexszel jelölve) részidőszak közös szórásnégyzetét:

$$S^2 = \frac{(n_1-1)\sigma_1^2 + (n_2-1)\sigma_2^2}{n_1+n_2-2}. \quad (1)$$

Ezt követően kiszámítjuk a teljes, rendelkezésre álló adatsor szórásnégyzet értékét is, $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$ és ezt vetjük össze χ^2 -próba segítségével az aktuálisan vizsgált két részidőszak közös szórásával. Az alkalmazott statisztika

$$\chi^2 = (n-1) \frac{\sigma^2}{S^2} \quad (2)$$

alakú, ahol σ^2 a teljes, rendelkezésre álló időszak, S^2 pedig a két részidőszak közös szórásnégyzete, n pedig a minta elemszáma. Az így definiált próbastatisztika megközelítőleg $n-1$ szabadsági fokú χ^2 eloszlást követ [1].

Azt a pontot tekinthetjük a jelöltek közül tényleges töréspontnak, ahol a χ^2 -érték maximális (lokálisan), mert ezekben a pontokban tér el a két részidőszak közös szórása lefele a teljes időszak szórásához képest.

2.2.2. Anomáliák kumulatív összegzése

Általánosan megfogalmazva azt mondhatjuk, hogy anomáliának tekinthetjük azt, ami az átlagostól eltér. Természetesen nem mindegy, hogy egy adat mennyire tér el az átlagtól, például outlier, kiugró adatok definiálásának egy jól bevált módja az átlagtól legalább az interkvartilis terjedelem (IQR) másfélszeresével való eltérés mérték.

Meteorológiai adatsorok esetében – általános anomáliavizsgálat kapcsán – is az anomáliának az átlagtól való eltérését tekintjük, ezt azonban jelentősen befolyásolhatja a klimatikus idősorokban tapasztalható havi, évszakos trendek és ciklusok jelenléte. Utóbbiakat megfelelő technikákkal ki kell küszöbölni az adatsorokból az anomáliák definiálása előtt, illetve az éves bontás mellett a vizsgálatokat havi szinten is célszerű elvégezni.

Általános értelemben az x_i ($1 \leq i \leq n$) adathoz tartozó anomália az alábbi egyszerű módon definiálható: $a_i = x_i - \bar{x}$, $1 \leq i \leq n$, ahol n az adatsor hossza, \bar{x} pedig a teljes adatsor átlaga. Ezek alapján minden potenciális töréspontra meghatározzuk az anomáliák kumulált értékét:

$$A_{szum} = \sum_{j=1}^k a_j, \quad k < n. \quad (3)$$

Azt a pontot tekinthetjük töréspontnak, ahol ez az összeg extrém nagy vagy éppen extrém kicsi. A módszernek két nagy hátránya is van, az egyik hogy az idősorok részletesebb és bonyolultabb előkészítést igényelnek, mint a többi módszer esetében, illetve nem teljesen definiált az sem, hogy a kumulált anomáliák esetében mit tekintünk extrém nagyknak, illetve extrém kicsi értéknek.

2.2.3. Pettitt-féle nemparaméteres próba

A próba lényege, hogy minden potenciális töréspont esetében kiszámítjuk az

$$X_k = 2R_k - k(n - 1) \quad (4)$$

próbastatisztika értékét, ahol $R_k = \sum_{j=1}^k r_j$ és r_j az x_j elem – rangkorellációk esetéhez hasonlóan definiált – rangszáma. A teljes minta elemszáma n , és $k = 1, 2, \dots, n$. A töréspont az a k pont lehet, ahol az X_k értéke maximális vagy minimális, attól függően, hogy a tapasztalt ugrásszerű változás fel- vagy lefele irányul-e.

Annak eldöntésére, hogy a módszer által adott X_k érték valóban tényleges, statisztikai értelemben is kimutatható töréspontot határoz-e meg ki kell számítani az annak valószínűségét adó, az X_k értékhez tartozó szignifikanciaszintet. Ezt az alábbi összefüggés szolgáltatja [2]:

$$\alpha = 2e^{-\frac{6(X_{extrem})^2}{n^3+n^2}}, \quad (5)$$

ahol x_{extrem} az X_k extrém értékéhez tartozó elemszámnak felel meg. Ha az α értéke kisebb volt, mint 0,05, az x_{extrem} értékhez tartozó pont által elválasztott részek eltérésének valószínűsége meghaladta a 95%-ot, azaz szignifikáns a felfedett töréspont. A módszer a 2.2.5. nemparaméteres változatának tekinthető.

2.2.4. Jel-zaj arány vizsgálata

A determinisztikus modellezés esetében feltételezünk az idősor vonatkozásában egyfajta állandóságot, ez a tartósnak tekinthető tendencia, a szezonális és a ciklikusság, míg a véletlent egy zavaró tényezőnek, zajnak tekintjük. Ez a fajta megközelítés – szemben a sztochasztikus modellezéssel – ezért inkább leíró jellegű, a hosszabb távú hatások feltérképezésben erős, a véletlennel kevésbé foglalkozik.

A statisztikai szakirodalomban a hosszú távú, potenciálisan előre jelezhető változásokat jelnek (ami mérhető, tervezhető), míg a természetes változékonyságot zajnak tekintjük.

Töréspont kereshető ezen két komponens idősorban történő előfordulási arányainak vizsgálatával is. A jel–zaj arány becslésére többféle módszer létezik, köztük például az alábbi, Yamamoto által ajánlott és alkalmazott [2]

$$\alpha = 2e^{\frac{-6(X_{extrem})^2}{n^3+n^2}}, \quad (6)$$

ahol \bar{x}_1 , \bar{x}_2 és σ_1 és σ_2 a két vizsgált részidőszak átlagai és szórásai. Töréspontnak a jel–zaj arány maximumát produkáló választópontot tekinthetjük, vagyis ahol $A_{jel/zaj}$ a maximális értéket veszi fel. A töréspontot a gyakorlatban akkor tartjuk reálisnak, ha $A_{jel/zaj} \geq 0,5$.

2.2.5. Részátlagok összevetése Student-féle t -próbával

A módszer alkalmazhatóságának feltétele, hogy a vizsgált adatsorok normális eloszlásúak legyenek, amit például a Kolmogorov-Szmirnov, vagy a Shapiro-Wilk teszttel vizsgálhatunk.

Az átlagok összevetésére a próba során generált t -érték alkalmazható:

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{S \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}, \quad (7)$$

ahol \bar{x}_1 és \bar{x}_2 a két minta átlagát, n_1 és n_2 azok elemszámát, S pedig a két minta közös szórását jelenti. Utóbbi a két részminta szórásának (σ_1 és σ_2) ismeretében az alábbi módon könnyen számítható:

$$S = \sqrt{\frac{(n_1-1)\sigma_1^2 + (n_2-1)\sigma_2^2}{n_1+n_2-2}}. \quad (8)$$

Minden egyes potenciális töréspont által meghatározott két részszerkezethez kiszámítjuk a Student-féle t -próbához tartozó t -értéket, a választópontot pedig az első lehetséges értéktől egy-egy évvel mozgatjuk előre az utolsó lehetséges értékig. Az így kapott $|t|$ értékek sorozatából a maximális mutatja azt a pontot, évet, amely mentén az idősort kettéválasztva, a két részsorozat átlaga között maximális az eltérés mértéke. Amennyiben ez az eltérés statisztikailag kimutathatóan szignifikáns is az adott megbízhatósági szinten, akkor mondhatjuk, hogy ez a pont egy töréspont a vizsgált adatsor tekintetében.

Amennyiben a vizsgált idősorban statisztikailag alátámasztva trendszerű és törépszerű változás is kimutatható, akkor feltétlenül kérdés, hogy hogyan tudjuk meghatározni, hogy a kimutatott változás inkább egy folyamat következménye, vagy valóban egy hirtelen, ugrásszerű változás történt-e a kijelölt évben.

A kérdés eldöntéséhez össze kell hasonlítani a vizsgált folyamatot leíró lineáris trend és a kapott töréspont jellemzőit, pontosabban az eltérés négyzetösszegeket (SS). Illesszünk az idősorunkra regressziós egyenest, legyen ez $x_{trend} = mt + b$ alakú trendvonal. Határozzuk meg a trendegyenes adott pontokhoz tartozó helyettesítési értékeit, jelöljük ezeket $x_{trend,i} = mt_i + b$ -vel, $1 \leq i \leq n$ az n adatot tartalmazó adatsor esetében. Képezzük ezek eltérését az adott pont tényleges x_i értékeitől, majd számítsuk az eltérés négyzetösszeget,

$$SS_{trend} = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{trend,i})^2. \quad (9)$$

Adott ekkor továbbá az idősorban kimutatott töréspont által meghatározott két részidőszak és azok átlagai (\bar{x}_1 és \bar{x}_2). Az első részidőszak elemei x_1, x_2, \dots, x_k , míg a másodiké $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$. Állítsuk elő a két részidőszakra külön-külön az egyes tényleges mérési adatok és a részidőszak átlagának különbségeit és képezzük ebből az eltérés négyzetösszegeket:

$$SS_{tp} = \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}_1)^2 + \sum_{j=k+1}^n (x_j - \bar{x}_2)^2. \quad (10)$$

Az illeszkedések jóságának, pontosságának összehasonlítására képezzük a két eltérés négyzetösszeg hányadosát: $h = \frac{SS_{trend}}{SS_{tp}}$ -t. A kapott h hányados értéke alapján meghatározható, hogy melyik eljárás ad pontosabb eredményt, hiszen ha $h > 1$, akkor a töréspontok által meghatározott átlagok, ha $h < 1$, akkor a teljes adatsorra illesztett trendvonal illeszkedik jobban a vizsgált adatsorra.

3. Eredmények, következtetések

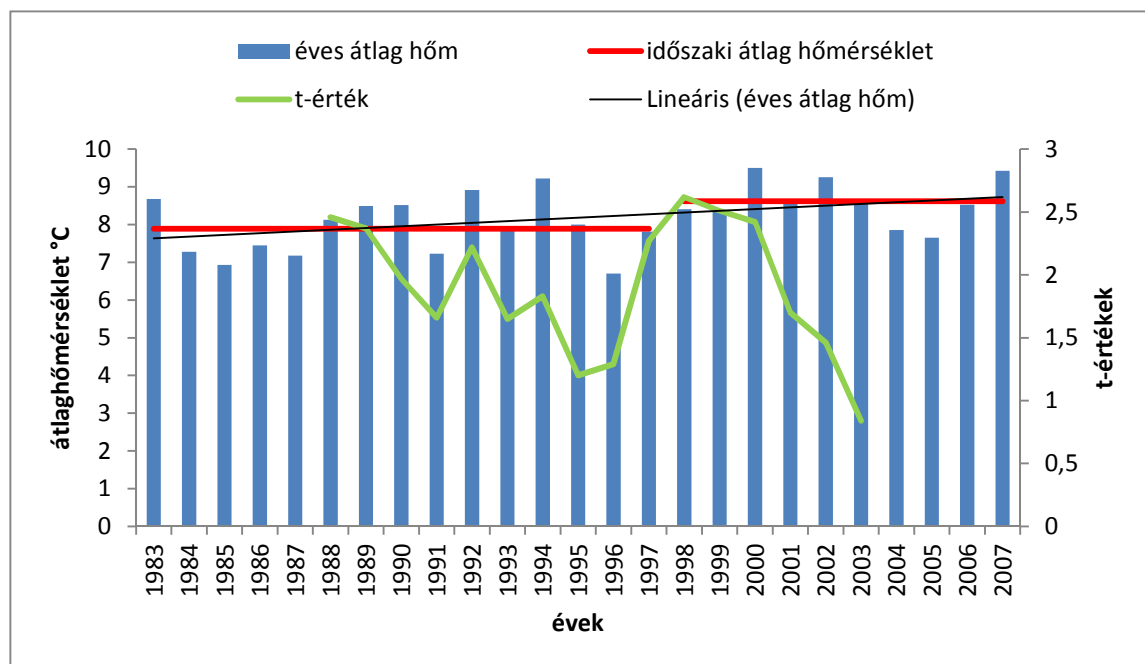
3.1. Töréspont keresés

A 2. fejezetben bemutatott módszerek közül a részátlagok t -próbával történő összevetését alkalmaztuk (az alapadatok normalitásának ellenőrzését követően). A töréspont keresést mind a csapadék, mind a hőmérséklet adatsorokra elvégeztük, illetve éves, havi és évszakos bontásban is vizsgáltuk az idősorokat. A minimális intervallum hosszát 5 évben definiáltuk, így a potenciális töréspontok száma 22. A munkában csak az éves adatokra vonatkozó eredmények szerepelnek, mert az összefüggés vizsgálatok is éves szinten kerültek végrehajtásra.

Az éves átlaghőmérsékletek vonatkozásában a töréspont 1998-ra adódott (1. táblázat), mely statisztikailag valóban egy ugrásszerű, hirtelen változás.

év	átlag előtte (°C)	átlag mögötte (°C)	eltérés (°C)
1998	8,01	9,05	1,04

1. táblázat. Töréspont az éves átlaghőmérséklet adatsorban



1. ábra. Töréspont az éves átlaghőmérséklet vonatkozásában

A csapadék adatsor esetében a maximális t -érték (1,46) 2000-ben adódott, azonban $p = 0,16$ érték mellett, így ezt nem tekinthetjük szignifikáns eltérésnek az általunk kijelölt 95%-os szinten (de még 90%-os szinten sem). Az éves csapadékösszeg tekintetében nem jellemző a komoly változása, azonban annak éven belüli eloszlásában már komoly átrendeződés érzékelhető. Utóbbit támasztják alá a hónapok és évszaki csapadékösszegek vizsgálatára vonatkozó eredmények.

3.2. Összefüggés vizsgálatok

Az éves átlagos növekedési adatsor és a hőmérséklet közötti összefüggésekkel kapcsolatos eredményeket jelenítünk meg. Az elemzések teljesebbé tételéhez alkalmaztuk a CReMIT módszert [4] speciális hőmérséklet adatsorok képzéséhez. Ennek lényege, hogy a szimpla havi adatok mellett különböző időszaki hőmérséklet átlagokat is képeztünk és ezeket is összevetettük a növekedési adatokkal, mint függő paraméterrel. Ehhez a továbbiakban az alábbi jelöléseket alkalmazzuk: a az aktuális, p az előző, pp a kettővel korábbi éve összefüggéseire, szám pedig a hónapra utal. Például $p10-a2$: előző év októberétől adott év februárig tartó időszak átlaghőmérséklete. Az alkalmazott összefüggés vizsgálat szignifikancia vizsgálatával egybekötött lineáris korreláció-analízis.

mettől	meddig	1983-2007	1985-1998	1999-2007
$H.p8$	$H.p11$	-0,53		-0,69
$H.p10$	$H.p11$	-0,65		-0,73
$H.p5$	$H.p6$	-0,43		
$H.a4$	$H.a5$		0,65	
$H.a6$	$H.a8$	-0,41		-0,6
$H.a7$	$H.a8$			-0,69

2. táblázat. Összefüggés a részidőszakokban, hőmérséklet

Az összefüggés vizsgálatokat a teljes időszak (1985-2007) és a töréspont keresés eredményeként kapott év (1998) mentén kettébontott időszakokra (1985-1998 és 1999-2007) is elvégeztük. A táblázatban csak a 90%-os szinten statisztikailag szignifikáns eredményeket jelenítettük meg. Azt vizsgáltuk, hogy mennyire hasonlóak, vagy eltérőek a kapott eredmények. A 2. táblázatban szereplő korrelációs értékek alapján jól látható, hogy az első részidőszakban alig adódott szignifikáns kapcsolat. A teljes időszak tekintetében már több, bár inkább közepes erősségűnek nevezhető összefüggés látszik. Ugyanakkor a második részidőszakban már erősnek mondható összefüggéseket láthatunk jellemzően ugyanazon időszakokra, mint a teljes időszak vonatkozásában. Fontos megjegyezni, hogy a 2. táblázat csak néhány, önkényesen kiemelt időszakot mutat, de a többi vizsgált intervallum tekintetében is hasonló eredmények fogalmazhatóak meg.

4. Összefoglaló

A dolgozat az idősorokban töréspontok keresésére vonatkozó jellemző statisztikai módszereket mutatja be röviden. Egy konkrét példán alkalmaztuk a részátlagok összevetésén alapuló eljárást és vizsgáltuk ennek jelentőségét fák növekedésére vonatkozó összefüggés vizsgálatokban. A bemutatott eredmények arra hívják fel a figyelmet, hogy az alkalmazott elemzési módszer tekintetében (lineáris korrelációanalízis) a független paraméterekben bekövetkező változások komoly hatással bírnak az összefüggés vizsgálatok kimenetére. Azt is

látható, hogy a hosszabb vizsgálati időszakra vonatkozó összefüggések, kapcsolatok nem feltétlenül állnak fent annak egy-egy rövidebb részintervallumára, sőt akár az összefüggések irányát tekintve is bekövetkezhetnek változások.

Irodalomjegyzék

- [1] **Dévényi, D., Gulyás, O.**, Matematikai statisztikai módszerek a meteorológiában. Tankönyvkiadó, Budapest (1988) p. 443.
- [2] **Mares, I., Mares, C.**, Statistical methods for estimating the signal to noise ratio. *In: Contemporary Climatology (Proceedings of the meeting of the Commission on Climatology of the International Geographical Union)*. Brno. (1994) 373–379.
- [3] **Molnár, J.**, A légnyomási mező szerkezete és módosulása a Kárpát-medence térségében. Doktori értekezés, Debrecen (2003) p. 170.
- [4] **Pödör, Z., Edelényi, M., Jereb, L.**, Systematic Analysis of Time Series – *CReMIT. Infocommunication Journal*, VI(1) (2014) 16-22.

Nyme SSK művész szakos hallgatók térszemlélete az MRT szerint

Németh László

Nyme EMK Matematikai Intézet
nemeth.laszlo@emk.nyme.hu

Horváth Tibor

Nyme EMK Matematikai Intézet
horvath.tibor@emk.nyme.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. A dolgozatban az Nyme SSK művész szakos hallgatóinak az Ábrázoló geometria tantárgy keretein belüli térszemléletének fejlődésére következtetünk a Mental Rotation Test (MRT) alkalmazásával, amely a forgatási elképzelés képességet méri.

ABSTRACT. In this article, we examine the spatial rotation ability of the art students at Nyme SSK according to Mental Rotation Test (MRT) and we draw conclusions of the development of their spatial ability. The MRT survey was joined to the Descriptive Geometry lessons.

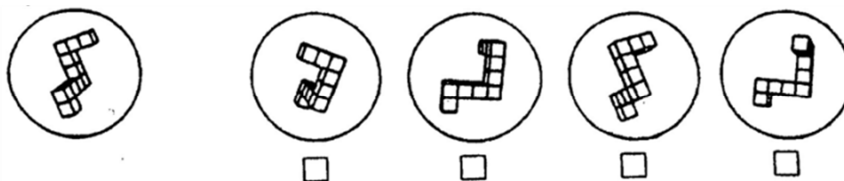
1. Bevezetés

Mindenki számára lényeges a jó térbeli tájékozódás, különösen a vizuális ábrázolás terén. A jó műszaki szakember, a jó művész egyik legfontosabb képessége a fejlett térszemlélet. Napjainkban a számítógépes CAD rendszerek maximális kihasználása is szintén megköveteli a térszemléletet. Habár arra nézve, hogy pszichológiai-módszertani szempontból mit értsünk pontosan a térszemlélet kifejezés alatt, még nincs megállapodás. Ennek a képességnek az általános mérésére nincs lehetőség, de néhány mérési módszerrel lehet rá következtetni. A szakemberek a térszemlélet egyes részeinek, a térszemlélethez köthető speciális feladatmegoldó képességek mérésére többféle módszert dolgoztak ki. Ezek közül az egyik a Mental Rotation Test (MRT), melyet 1971-ben Shepard és Metzler [6] vezetett be a térbeli forgatás elképzelésének mérésére. Számos egyetemen készítettek már felmérést az MRT alkalmazásával. Az utóbbi hazai felmérések eredményeiről [1], [3]-ban olvashatunk. E dolgozatban mi is ezzel a teszttel foglalkozunk részletesebben. Megvizsgáljuk, hogy a Nyugat-magyarországi Egyetem Simonyi Károly Műszaki, Faanyagtudományi és Művészeti Kar művészeti alapszakos hallgatóinak a teszt eredményei mennyit javultak az Ábrázoló geometria tantárgy keretein belül, és ezt a fejlődést összehasonlítjuk néhány korábbi, más egyetemen mért eredménnyel. A térszemlélet vizsgálat történetéről, módszereiről egy rövid összefoglalót találhatunk [1] és [2]-ben.

2. Az MRT felmérés körülménye, kiértékelésének módszerei

A 2013-14-es tanévben a Nyugat-magyarországi Egyetem Simonyi Károly Műszaki, Faanyagtudományi és Művészeti Kar Építőművészet, Formatervezés és Tervezőgrafika

alapszakos hallgatók térszemléletét, illetve a térszemléletük fejlődését vizsgáltuk a „forgatás elképzelése” képességük alapján a Mental Rotation Test segítségével. A hallgatók az ábrázoló geometriát két szemeszteren keresztül tanulták heti két gyakorlati órában. A két félév során a két-képsíkos-, az axonometrikus- és a centrális ábrázolással, alakzatok vetületeivel, síkmetszeteinek és áthatásainak szerkesztésével és az árnyékszerkesztési technikákkal ismerkedtek meg. A hallgatók az őszi szemeszter első óráján és a tavaszi szemeszter utolsó óráján írták meg az MRT-t. A teszt egy A4-es lap mindkét oldalán 10-10 feladtból álló feladatlap. Minden kérdés egy alakzatnak négy lehetséges elforgatottját ábrázolja, melyek közül kettő helyes, kettő pedig rossz. Az 1. ábra egy tesztkérdést mutat. A hallgatóknak egy-egy oldal kitöltésére csak 3, összesen 6 perc állt rendelkezésére.



1. ábra. MRT egy kérdése. A bal oldali ábrának két elforgatottja szerepel a jobb oldali ábrák között

A teszt régebbi szakirodalomban található kiértékelésénél („Answer Key for MRT”) 2 pont járt egy feladat megoldására, ha mindkét válasz jó volt, 1 pont, ha csak egy választ adott a teszt kitöltője és az jó volt, minden további esetben nem járt pont. Az utóbbi időben a szakemberek egy kicsit változtattak a kiértékelés pontozásán ([1], [3]). Ez a következő:

- 2 pont, ha mindkét válasz helyes,
- 3/4 pont, ha az egyik válasz helyes, a másik nem,
- 5/4 pont, ha csak egy válasz van és az helyes,
- az egyéb esetekben nem jár pont.

A kapott összpontszámot egészen kerekítjük, a hibátlanul kitöltött teszt pontszáma így 40. A tesztek kiértékelésénél mi is az utóbbit, az [1]-ben bevezetett realisabb pontozást alkalmaztuk. A hallgatók a pontozási szabályt nem ismerték a teszt megírásánál, csak azt az instrukciót kapták, hogy két válasz helyes, és csak amiben biztosak azt jelölik meg.

3. MRT kiértékelése

A szeptemberi teszt megírásánál összesen 54, míg májusin 49 hallgató volt jelen. A tesztek átlagpontszáma 19.19, illetve 23.98 volt. A korábbi kutatások alátámasztják, hogy a nemek között a térszemlélet különböző ([4]). A továbbiakban mi is nem csak összesítve, hanem nemek szerinti bontásban is vizsgáljuk a tesztek eredményeit. A nemek szerinti átlagpontszámok és szórások az 1. táblázatban láthatók.

	szeptember			május			átlagértékek különbsége
	fő	átlag	szórás	fő	átlag	szórás	
férfiak	13	21.54	7.13	9	30.11	6.90	8.57
nők	41	18.44	5.84	40	22.60	6.50	4.16
összesen	54	19.19	6.31	49	23.98	7.19	4.79

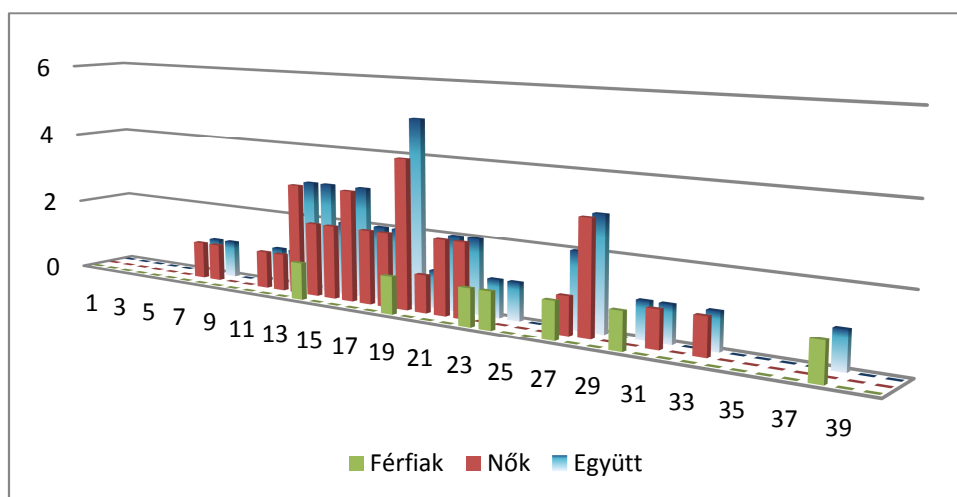
1. táblázat. Az MRT átlag pontszámai

A továbbiakban csak azokat a hallgatókat vesszük figyelembe a vizsgálat során, akik mindkét tesztet megírták. Összesen 40 ilyen hallgató volt, ebből 7 férfi és 33 nő. Az eredmények a 2. táblázatban találhatóak.

A művész szakos hallgatók átlagpontszáma a felmérés elején szeptemberben 19.63, a felmérés végén májusban 25.08 volt. Ez egy 5 és fél pontos javulásnak felel meg. A férfi hallgatók átlagpontszáma mindkét alkalommal jóval magasabb volt a női hallgatótársaiknál. Előbbiek esetében, a két felmérés eredményeinek különbsége 7.71 pont, míg utóbbiaknál ez alacsonyabb, 4.97 pont. A felmérés szerint a nők a tanév végére érték el a férfiak tanév eleji pontszámát. Habár a 7 fő nem sok, így nem lehet messzemenő megállapításokat tenni, de úgy tűnik, hogy az MRT szerint a férfi művész szakos hallgatók térszemlélete, forgatási elképzelése meghaladja nő társaikét, s egy év alatti fejlődésük is nagyobb léptékű azokénál.

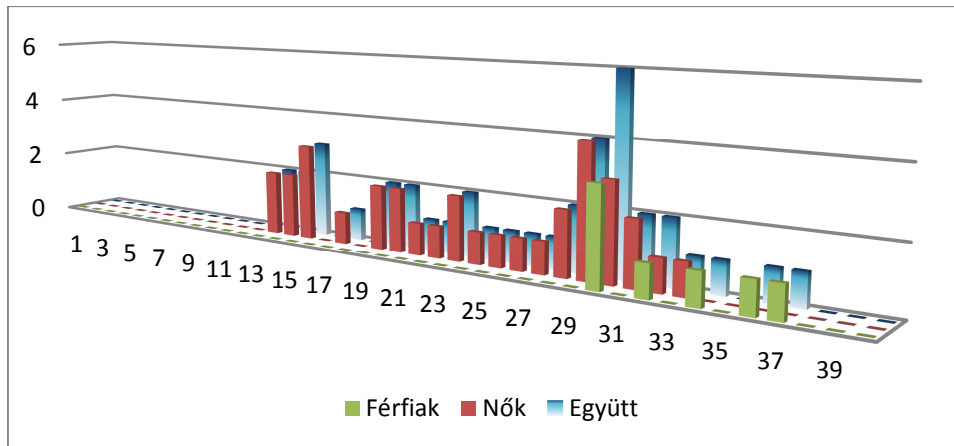
	szeptember		május		átlagértékek különbsége
	átlag	szórás	átlag	szórás	
férfiak (7 fő)	25.00	7.17	32.71	2.76	7.71
nők (33 fő)	18.48	6.20	23.45	6.32	4.97
együtt (40 fő)	19.63	6.85	25.08	6.83	5.45

2. táblázat. Az MRT átlag pontszámái a mindkét dolgot megírt hallgatók között

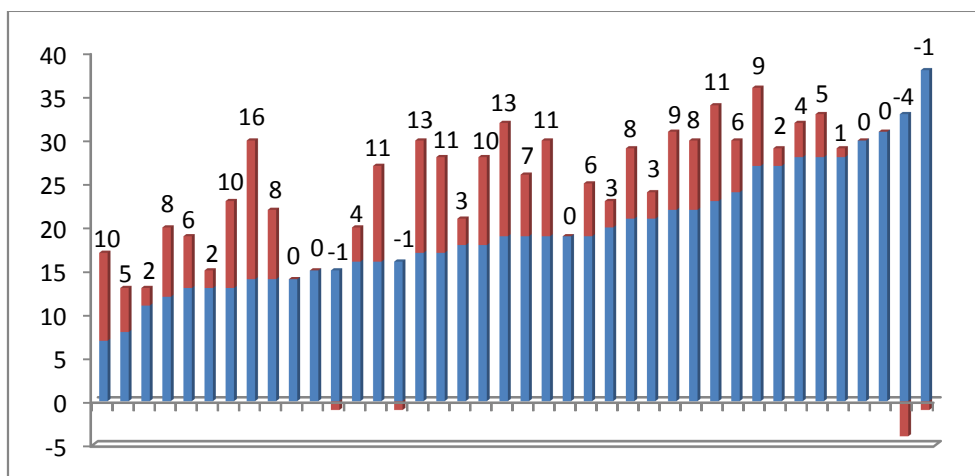


2. ábra. Az MRT eredmények (1. felmérés)

A 2. és 3. ábra mutatja, hogy szeptemberben, illetve májusban milyen pontszámokat értek el a hallgatók. Az első sorban a férfiakét, a másodikban a nőket és a harmadikban az összesített értékeket látjuk. Szeptemberben a férfiak pontszámát tekintve elég nagy a minta terjedelme (14 és 38 pont közötti), míg májusban közülük már senki sem volt 30 pont alatt. A legalacsonyabb pontszámot tekintve, ez több mint kétszeres javulást jelent. A nők esetében, a második felmérésre a pontszámok terjedelme csökkent, az ekkor kapott legalacsonyabb pontszám (13 pont) közel kétszerese volt az őszinek (7 pont). Ugyanakkor a legmagasabb érték nem változott (33 pont). A minta szórásában kismértékű növekedés figyelhető meg, a pontszámok eloszlása egyenletesebb, súlypontja a felső tartományba helyeződött át. Az összpontszámok az előbbieket eredményeként, szintén jelentős eltolódást mutatnak a jobb értékek irányába.



3. ábra. Az MRT eredmények (2. felmérés)



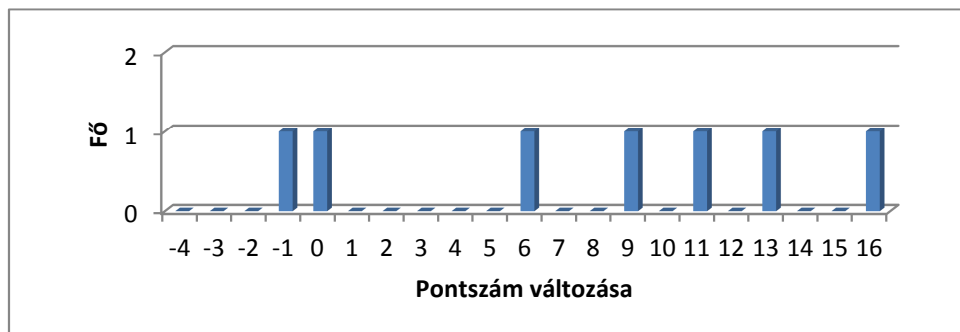
4. ábra. Az MRT eredmények eltérése a két felmérés között, hallgatónként

A 4. ábra a szeptemberi és májusi felmérés eredménye közötti pontszámbeli különbséget mutatja, hallgatónként. Láthatjuk, hogy a hallgatók döntő része a második felmérés alkalmával több pontot ért el, mint először, sok esetben a javulás jelentős mértékű. A magasabb kezdőpontszámmal a javítások kisebbek, de ez egyértelmű is. Néhányan egy vagy néhány ponttal kevesebbet értek el. Ennek okát nehéz kideríteni, lehet figyelmetlenség, nemtörődomség (nincs tétje a felmérésnek) vagy például fakadhat tippszerű kitöltés alkalmazásából. Statisztikai számolások alapján, legfeljebb két lehetőséget választva a feladatlap véletlenszerű kitöltésével is átlagosan 14 pontot el lehet érni.

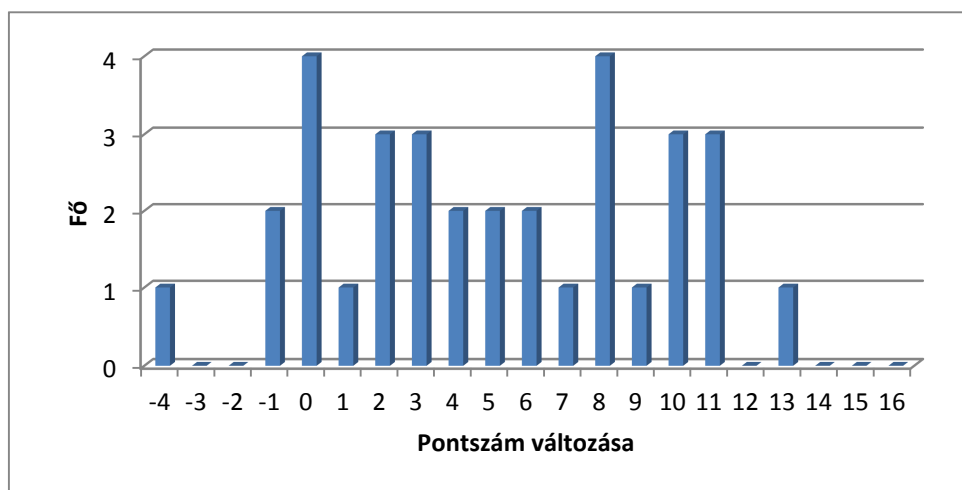
Az 5-7. ábra mutatja a fejlődést nemenként és összesítve. Férfiaknál a legnagyobb javulás 16 pont, míg nőknél 13. Előbbiek 71.4%-a ért el a korábnál magasabb pontszámot, utóbbiaknál 78.8%-uk javított. Érdekes látni, hogy a férfiak esetében a legkisebb javulás 6 pont, ez bizonyára az alacsony minta-elemszámból adódik. Az összesített adatokat tekintve, látható, hogy a vizsgált 40 hallgató több mint ötöde (22.5%-a) ugyanolyan, vagy alacsonyabb pontszámot szerzett májusban (2. felmérés), mint előző év szeptemberében (1. felmérés).

Mi lehet az oka a férfiak eredményének? Hogyan lehet 16 ponttal jobb tesztet írni egy évvel később? Ilyen mértékű javulás érhető el egyénileg, két félév alatt, míg mások térszemlélete a második teszt alapján is nagyon gyengének mondható? E kérdések megválaszolása jelenleg még nem kellően megalapozott, tekintve a férfiak esetében alacsony minta-elemszámot (7 fő). Talán javítható lenne a felmérés megbízhatósága, ha valamilyen

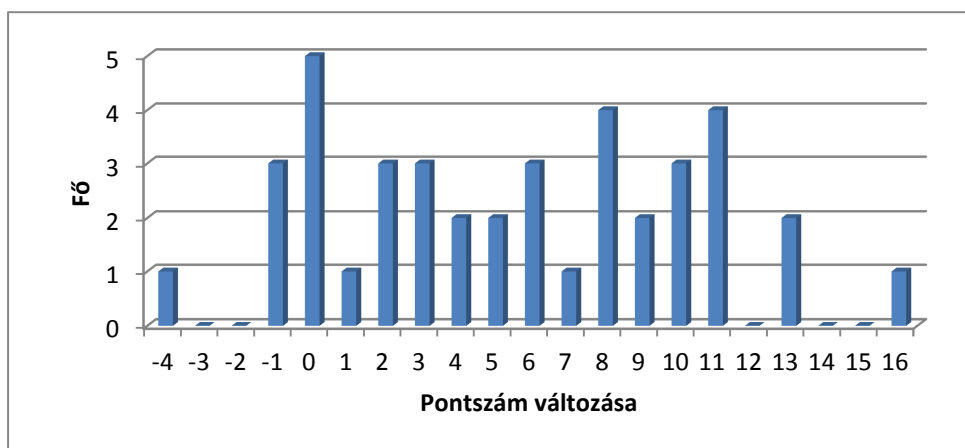
módon növelnék a felmérésben részt vevő hallgatók motiváltságát a teszt kitöltésével kapcsolatban, például a legjobb eredményt elérők jutalomban részesülnek. Így nem csak egy számukra feleslegesnek tűnő, a gyakorlat idejéből 7-8 percet elvevő foglalkozásként tekintenének rá.



5. ábra. Az MRT eredmények változása férfiaknál



6. ábra. Az MRT eredmények változása nőknél



7. ábra. Az MRT eredmények változása összesítve

4. Az eredmények összehasonlítása korábbi eredményekkel

A felmérés eredményeit összevetjük az egyetemünkön és más egyetemen korábban mért eredményekkel, akkor azt mondhatjuk, hogy a művész szakos hallgatók átlagos eredménye, fejlődése egy kicsit jobbnak mondható az átlagosnál, a fiúk eredménye, fejlődése viszont nagyon jónak tekinthető. Természetesen a művész szakos hallgatók térszemléletét, akár csak a többi hallgató esetén nem csak az ábrázoló geometria fejlesztette, hanem több hasonló, térszemlélet fejlesztő tantárgy is. A művész szakos hallgatók a két félév során ábrázoló geometriával töltött összes óraszámuk nem több, mint más hallgatók esetén, akik térszemléletének változását egy félév alatt vizsgálták, de az egy év alatt több lehetőségük volt a térszemlélet fejlesztő feladatok megoldására.

Az SSK faipari mérnök és ipari tervezőmérnök hallgatók egy féléves felmérés eredményének hasonló átlagpontszámok: szeptemberben férfiak 23.73, nők 16.00, együtt 21.32 pont; decemberben 27.8, 21.00, 26.37, ugyanebben a sorrendben. A fejlődés átlagosan 5 pont minden esetben. Az Ybl való felmérés pontszámok hasonlóak, habár a fejlődés valamivel kisebb mértékű. Részletek a [3]-ban találhatóak.

5. Összefoglaló

A NymE SKK művész BSc hallgatói körében került sor két alkalommal (2013 szeptember és 2014 május) a Mental Rotation Test (MRT) elvégzésére. Az eredmények kiértékelése során csak a mindkét felmérésben részt vevő hallgatók pontszámait vettük figyelembe (40 fő). Az értékelés során, a nők és férfiak esetében külön-külön és együtt is vizsgáltuk a javulás mértékét. A hallgatók átlagosan 5.45 %-os javulást értek el, a férfiak ebben nagyobb szerepet játszottak. Ugyanakkor ők csupán 17.5 %-át adták a mintának, így a rájuk vonatkozó átlag- és szórás adatok megbízhatósága erősen kérdéses. A felmérés megbízhatóságát tovább kell növelni, például a hallgatók valamilyen formában történő ösztönzésével. Összességében elmondható, hogy a két féléves ábrázoló geometria oktatás kimutatható mértékben pozitív hatással van a hallgatók térszemléletére.

Irodalomjegyzék

- [1] BÖLCSKEI, A., KOVÁCS, A. ZS., KUŠAR, D., New Ideals in Scoring the Mental Rotation Test, *Ybl Journal of Built Environment*, Volume 1, Issue 1 (2013) 59-69.
- [2] BÖLCSKEI, A., KOVÁCS, A. ZS., Measurement of Spatial Abilities of Architect Students at Ybl Faculty by Mental Cutting Test (Hun), *Debreceni Műszaki Közlemények* 2 (2012) 35-44.
- [3] KOVÁCS, A. ZS., NÉMETH, L., Development of spatial ability according to mental rotation test at SKF and YBL, *Ybl Journal of Built Environment*, Volume 2, Issue 1 (2014) 18-29.
- [4] NÉMETH, B., HOFFMANN, M., Gender differences in spatial visualization among engineering students, *Annales Mathematicae et Informaticae*, 33 (2006) 169-174.
- [5] NÉMETH, B., Measurement of development of spatial ability by Mental Cutting Test, *Annales Mathematicae et Informaticae*, 34 (2007) 123-128.
- [6] SM Shepard, R. N., Metzler, J., Mental Rotation of Three-Dimensional Objects, *Science, New Series*, Vol. 171, No. 3972 (1971) 701-703.

Az informatika eszköztárának alkalmazása a matematika és statisztika egyetemi oktatásában

Bischof Annamária

Nyme KTK Közgazdasági és Módszertani Intézet
bischof@ktk.nyme.hu

Hoschek Mónika

Nyme KTK Közgazdasági és Módszertani Intézet
hmonika@ktk.nyme.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. Az információs társadalom térnyerése folytán az oktatásban is elvárásnak tekinthető az informatika eszköztárának alkalmazása. A kor kihívásaira válaszul az NYME Közgazdaságtudományi Karán a 2010/11-es tanévtől kezdődően a statisztika oktatása számítógépes környezetben történik. Gyakorlatokon a diákok előre elkészített feladatsorokat oldanak meg az Excel program segítségével.

Ennek tapasztalatairól, az időközben felismert problémákról, azok lehetséges okairól adunk képet. Mindehhez összefoglaljuk az általános és középiskolai, valamint az egyetemi informatikaoktatás témánkat érintő területeit és annak változásait. Valamint lehetőségeket fogalmazunk meg a matematikaoktatás – statisztikához hasonló – „gépesítéséhez”.

ABSTRACT. The headway of information society in education it is a requirement to apply tools of computer sciences. As an answer of the time challenge in University of West Hungary at the Faculty of Economics from academic year 2011/2011 the lecture of the statistic courses are computerized. On practices students solve put-up exercises by using Excel. We size up experiences, problems recognized meanwhile and possible reasons of this. With this end in view we summarize fields of computer sciences tough in elementary, secondary and higher educational level. Moreover we frame possibilities of computerization of mathematics, as we did with statistics.

1. Az informatikaoktatás kezdetei

Magyarországon a köz- és felsőoktatás oktatási programjainak már az 1980-as évek óta része az informatikai ismeretek tanítása. Kezdetben 4. generációs „kis” gépeken (ZX Spectrum, HP, Videoton TVC, Commodore, Primo, stb.) zajlott a tárgy oktatása fakultációk, szakkörök keretében. Az itt feldolgozott ismeretanyag többnyire a BASIC programozási nyelv elsajátítása, önálló programok készítése volt.

Az 1990-es évektől jelentős változás következett be az eddigiekben. Hazánk iskoláiban is megjelentek, majd teret hódítottak a PC-k. Az egyetemeken már a nem informatika szakos hallgatóknak is órarendi órák keretében tanították az informatikai alapismereteket, valamint felhasználói ismereteket (DOS, Norton, SAS, dBase, stb.)

2. Táblázatkezelő programok

Ezzel párhuzamosan rohamos fejlődésnek indult mindenhol a számítógépek alkalmazása a „köznapi” munkában. Az egyik fontos felhasznált programtípus a táblázatkezelő programok voltak.

Az első, az 1979-es, Dan Brickin és Bob Frankston által készített VisiCalc volt, mely egyaránt futott APPLE II. és IBM PC gépeken is. Ezt követte 1984-től 1992-ig a LOTUS. Ez már DOS operációs rendszerre készült, és WYSIWYG rendszerű („what you see is what you get”, „azt kapod, amit láatsz”) volt. A LOTUS mellett 1988-tól terjedt el a Microsoft QUATTRO programja, mely már MS Windows operációs rendszerrel rendelkező gépekre készült. 1985-től, ill. 1987-től (Mac OS, majd MS Windows alapokon) pedig gyakorlatilag egyeduralmukodóvá vált az EXCEL.

Ez a tény vonta maga után logikus következményként, hogy az oktatásba is ezen program került bevonásra ekkortól.

2.1. Az EXCEL lehetőségei

Az MS OFFICE programcsomag részeként értékesített EXCEL számos lehetőséget biztosít a felhasználóknak:

- A cellákban numerikus és szöveg típusú adatok tárolhatók.
- Hivatkozásokat használva számítási képletek definiálhatók.
- A számítások eredményei azonnal megjelennek a képernyőn.
- Az adatok megváltoztatásával a képletek eredményeit automatikusan újra számolja a program.
- Beépített függvények széles választéka használható.
- Diagramm-készítő varázsló.

Ezek a jellemzők nagyon jól használhatóvá teszik az Excelt az egyetemi statisztika példák megoldásában is. Bischof Annamária kolléganőnk az ELTE-n folytatott informatika tanulmányai során (2002-2005) hasznos ötletet látott arra, hogyan lehetne mindezt hatékony, de mégis praktikus, hallgatóbarát módon beépíteni az oktatásba.

Ezen kívül számos felhasználási lehetőséget kínálnak az EXCEL lehetőségei a matematika oktatásában is. Nagyon jól használható a program egyrészt önellenőrzésre, a mechanikus számolás kiváltására pl. mátrixműveletek végzésekor. De komolyabb lehetőségek is rejlenek a programban. Például különböző numerikus matematikai számítások végezhetők a SOLVER eszköztár segítségével.

Karunkon többször is történt arra próbálkozás, hogy választható tantárgy keretében ilyen jellegű ismereteket is tanítsunk hallgatóinknak, azonban kellő számú jelentkező híján törekvéseink mindig kudarcba fulladtak.

3. Közgazdászképzés Sopronban

A közgazdászképzés Sopronban 1995-ben indult meg. Az első évfolyam levelező képzés keretében kapta meg a szükséges ismereteket. A statisztika tárgyat ekkor még Miskolcra érkezett oktatók tanították 2+1 félévben. Az általános statisztika 2 féléve és a gazdaságstatisztika tárgyak a módszertani szigorlat részét képezték (a valószínűségszámítás és operációkutatás tárgyak mellett).

Az első nappali képzésben tanuló hallgatók 1996-ban kezdték el az egyetemet. Ennél az évfolyamnál a statisztika tárgy oktatását Prof. dr. Závoti József és Dr. Melega Tiborné vette át. A Közgazdaságtudományi Kar 2000-es létrejöttékor külön Matematikai és Statisztikai Intézet is alakult.

A statisztika tárgy oktatásában jelentős változást hozott a Bologna-rendszer 2006-os bevezetése. Ekkortól amellet, hogy jelentősen lecsökkent az általános statisztika tárgyak óraszám, megszűnt a gazdaságstatisztika tárgy.

A miskolci oktatók által tanított tananyaghoz a saját hozott feladatok és saját képletgyűjtemény tartozott. Závoti tanár úr az előadásinak anyaga mellett kötelező irodalomnak előírta az akkori érvényes statisztika tankönyvet¹. Az intézet munkatársai összeszerkesztett, év elején közreadott feladatokkal várták a hallgatókat. A számonkérés a félév során az elméleti anyagból és gyakorlati feladatokból állt és az előadás keretében 1,5 órában lehetett megírni.

3.1. Az első fejlesztések

A statisztika tárgy fejlesztése akkor kezdődött, amikor a képletek már saját, megvásárolható képletgyűjteménybe lettek egybeszerkesztve. Ezzel egy időben a gyakorlati feladatok terén is történt fejlesztés. Benedek Judit és Dr. Szalay László elkészítették a Statisztika I tárgy feladatgyűjteményét². Ebben az egyes fejezetekre lebontva voltak megtalálhatóak a példák. Néhány teljesen kifejtett, levezetett és elmélettel alátámasztott, megoldott feladat után javasolt feladatok is elérhetőek benne. (A javasolt feladatok megoldásai megtalálhatóak a könyv végén.) Ez a két változás jelentősen megkönnyítette a tanulást, tanítást.

Az oktatást segítették az írásvetítő fóliára előre kidolgozott feladatok is. Ezek segítségével a hosszabb feladatok kiszámításának ideje jelentősen lecsökkent.

3.2. A számítógép bevonása a statisztika oktatásába

A fóliákra írt anyagok az Excel program segítségével készültek. Így merülhetett fel az egész gyakorlati oktatás modernizálásának ötlete, vagyis a számítógépes környezetbe való áthelyezése. Az ötlet magvalósítását a kar számítógépes termeinek kapacitása hátráltatta. A 2010/11-es tanév őszére azonban ezek a gondok elhárultak, így megkezdődhetett a Statisztika I. és II. tárgyak számítógépen való oktatása 15 fős gyakorlati csoportokban.

A kérdés már csak az maradt, hogy hogyan, milyen program segítségével lehetne a legkönnyebben, legerősebben a statisztikát bemutatni a hallgatóknak. A Microsoft Excel programra (pontosabban annak akkor rendelkezésünkre álló 2003-as verziójára) esett a választás több ok miatt is:

- Az írásvetítő fóliák anyagai is ezzel a programmal készültek.
- A zárthelyi dolgozatok és vizsgák feladatainak megoldó kulcsai is Excellel készültek.
- Az egyetemeknek és a hallgatóknak (amennyiben rendelkeztek jogtiszt Windows operációs rendszerrel) a program ingyenesen hozzáférhető volt.
- Az első félév során az informatika tárgy keretében a hallgatók már megszerezhettek olyan alapismereteket a programról, ami a statisztikaoktatást is segítette.

Attól a félévtől kezdődően nemcsak a tanítás, de a számonkérés módszertana is megváltozott. Az elméleti tudásukról a hallgatók továbbra is az előadás keretében papíron megírt elméleti dolgozaton adhattak számot. A gyakorlati rész azonban a gyakorlati órán, számítógépen került megírásra. A két rész együtt alkotott egy zárthelyi dolgozatot.

A tananyag ütemezése is módosult. Az első gyakorlati órán az informatikai ismereteket frissítették fel a hallgatók. A fájl az egyszerűbb függvények ismétlése mellett a formázásokra, sorozatok kialakítására, diagramok készítésére is emlékeztette a diákokat. Ezen alapvető kompetenciák meglétéről aztán a harmadik gyakorlati óra elején számot is kellett adniuk egy

¹ Hunyadi-Mundruczó-Vita: Statisztika, AULA, Budapest, 2001.

² Benedek Judit - Dr. Szalay László: Statisztika Feladatgyűjtemény I. Sopron, 2001.

rövid „beugró” dolgozat keretében. Akinek ez a dolgozat, vagy a pótlása nem sikerült, az nem kapott aláírást a tárgyból. A félév során a gyakorlatok menete követte az előadásét. Az órák elején a <http://titanic.nyme.hu/~bischof> oldalról kellett letölteni az aktuális feladatsort. A megoldott fájlokat az óra végén a hallgatók elvihették (elküldhették e-mailben) haza.

A dolgozatok előtt minta-feladatsorok kerültek fel a tárhelyre. Maga a dolgozat is itt volt megtalálható rejtetten, így a zárthelyik kezdetén innen kellett letölteni. A kész dolgozatokat aztán már e-mailben küldték el a hallgatók a gyakorlati tanáraiknak.

A dolgozatok írása során felmerülő legnagyobb technikai problémát a különböző levelezőrendszerek lassúsága okozta, hiszen amíg a tanár nem jelzett vissza, hogy a dolgozat a fiókjába megérkezett, addig nem lehetett a zh-t befejezni. Néhány esetben ez eltartott akár 15-20 percig is, ami a következő tanóra kezdetét kedvezőtlenül befolyásolhatta.

A 2012/13 tanév második felében – a Microsoft fejlesztéseinek köszönhetően – az addig használt Excel 2003-t az egyetem gépein lecserélték az Excel 2010-es verziójára. Ennek következtében az őszi félévről a tavaszi félévre kellett a hallgatóknak átállniuk az új programra. A változások nemcsak a kezelőfelületet érintették, hanem a statisztikához használt függvényeket is. Módosultak függvények nevei, illetve néhány esetben az addig nem megfelelően működő függvények helyett újakat tettek be, megkönnyítve ezzel a számításokat. A képletgyűjteményben lévő eloszlások értékeit tartalmazó táblázatok adatai az új függvényeknek köszönhetően pontosabban meghatározhatóvá váltak.

3.3. Változások 2013-tól

Az óraszámok csökkentése, az új mintatanterve bevezetése a Karon a 2013/14-es tanévtől kedvezőtlenül érintette a statisztika tárgyat is. Ez az oktatás, a tananyag átgondolását vonta maga után. Így először is a hallgatók ismereteinek felfrissítésére szolgáló bevezető „excel-óra” és annak számonkérése maradt el. Az ezzel nyert idővel lehetett kompenzálni a kiesett heti óraszámot. Az elméleti óraszám csökkentése miatt már nem volt megengedhető, hogy ott írják a diákok az elméleti dolgozatot. Így a dolgozatírás menete szintén átalakult: attól kezdődően a gyakorlati óra első 20 percében írják az elméletet és aztán következik az egy óras gyakorlati rész.

Másik fontos változás volt, hogy az egyetem titanic nevű szerverén megszüntették a tárterületeket, így az addig jól bevált feladatletöltési lehetőség megszűnt. Ez hozta a legújabb változtatási lehetőséget/kényszert. A tananyagok jelentős átszerkesztés után kerültek fel a Kar Moodle alapú e-learning rendszerébe.

Az egyes témakörök felépítése úgy módosult, hogy minimális elméleti bevezető után a korábbinál jóval több példa került egy fájlba. Ezen kívül az otthoni gyakorlás megkönnyítése érdekében minden példa megoldása is fel lett töltve a rendszerbe. Zh-k előtt minta-feladatsorok megoldására van lehetőség.

Maguk a dolgozatok is itt lettek elhelyezve elrejtett formában. A dolgozat írása előtt a gyakorlati tanár a rejtett fájl „mutat”-ra állítja, így a hallgatók letölthetik a megoldandó anyagot. A visszatöltés is az e-learning rendszerbe történik egy feladat mappába, ahonnan a feltöltés után az oktató le tudja hívni és kijavítani azokat. A kapott pontszám is berögzíthető ide, így azonnal megtudhatják a diákok az eredményeiket. Az e-learning rendszer dolgozat írása során való használatának a legnagyobb előnye, hogy a visszatöltés gyors, így nem kell várni a levelezőrendszerre.

4. „Felemás” informatikai ismeretek

A sok változtatás és fejlesztés ellenére még mindig vannak olyan problémák, amelyek az informatikai ismeretekből, illetve pontosabban ezek hiányából adódnak.

Annak ellenére, hogy a mai egyetemisták már az Y, sőt a Z generáció gyermekei, és a számítógép-használat büvkörében nőnek fel, informatikai ismereteik felemásak.

Tudnak szörfölni a neten, látszólag könnyedén boldogulnak az okostelefonokkal, de valójában többnyire komoly gondot okoz számukra egy mappa létrehozása a számítógép valamely meghajtóján, vagy egy fájl csatolása egy olyan e-mailhez, melynek tárgyat is adnak meg.

Mi okozhatja ezt? Miért lehet az, hogy annak ellenére, hogy ezek a fiatalok sokszor napi 4-6 órát töltenek a „neten lógva”, és már egy pár perces várakozásnál is előveszik a „mobiljukat”, hogy ne unatkozzanak, mégsem tökéletesek még az alapvető informatikai ismereteik sem? Mint a bevezetőben már írtunk róla, Magyarországon az informatika oktatása majd három évtizedes múltra tekint vissza. Ennek tükrében pedig tényleg érthetetlennek tűnhet ez a jelenség!

4.1. NAT és Nat

A diákok szervezett formában már az általános iskolában, majd a középiskolákban is részesülnek informatika oktatásban. A közoktatás alapelveit, céljait, legfontosabb feladatait megfogalmazó iskolai alapidokumentum, a NAT (később Nat) már a 90-es évek elejétől besorolja az alkalmazott ismeretek körébe az informatikát. Ma pedig a tíz önálló műveltségterület egyike az Informatika.

A 2004-es Kerettanterv általános iskolákra és gimnáziumokra vonatkozó informatika óraszámait láthatjuk az 1. táblázatban. (Forrás: Nemzeti Erőforrás Minisztérium, 3. számú melléklet a 17/2004. (V.20.) OM rendelethez.)

Évfolyam	Óraszám
1-4.	3. és 4. osztályban heti 0,5-0,5 óra VAGY 4. osztályban heti 1 óra
5.	Heti 0,5 óra
6-8.	Évfolyamonként heti 1-1 óra
1-8. évfolyamok összesen:	Heti 4,5 óra
9.	Heti 1,5 óra
10.	Heti 1 óra
11.	Heti 1,5 óra
12.	Heti 2 óra
9-12. évfolyamok összesen:	Heti 6 óra

1. táblázat. A Kerettanterv informatika óraszámai– 2004

4.2. Informatika kerettantervek változásai – 2012

Ehhez képest jelentős változás következett be 2012-ben. Az oktatási államtitkárság és az Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet (OFI) új koncepciója az lett, hogy az informatikai ismeretek nagy részét más tantárgyak keretei közé integrálva kell oktatni.

A Kerettanterv hivatalos álláspont szerint „az informatikaórákon elsajátított alapok lehetővé teszik azt, hogy a tanuló a más tantárgyak tanulása során készített feladatok

megoldásakor informatikai tudását alkalmazza. Az informatika tantárgy feladata a formális úton szerzett tudás rendszerezése és továbbfejlesztése, a nem formális módon szerzett tudás integrálása, a felmerülő problémák értelmezése és megoldása.”

Ennek következtében az informatikaórák száma jelentős mértékben csökkent. Az elsőtől tizenkettedik évfolyamig 7 tanévre kevesebb, mint heti egy tanórás tárgy lett az informatika (2. táblázat. Forrás: EMMI, 51/2012. (XII. 21.) számú EMMI rendelet 2. melléklete, Módosítva a 34/2014. (IV. 29.) EMMI rendelet 3. mellékletének megfelelően).

Ez azt jelenti, hogy a gimnáziumokban, ahol már komoly ismeretanyag elsajátítására lennének képesek a tanulók, egyharmad részére csökkent a tantárgy óraszám a korábbiakhoz képest. Az informatika műveltségterületre szükséges óráknak kevesebb, mint a fele lett kimondott informatikaóra.

Évfolyam	Óraszám
1-4.	4. osztályban heti 1 óra
5-6.	Összesen heti 1 óra
7-8.	Összesen heti 2 óra
1-8. évfolyamok összesen:	Heti 4 óra
9-10.	Összesen heti 2 óra
9-12. évfolyamok összesen:	Heti 2 óra

2. táblázat. Informatika ma a közoktatásban

5. Összefoglaló

Mindez azonban nem csak a mi, hanem sok más oktatással foglalkozó szakember szerint sem volt jó döntés. Hiszen az integrált informatikaoktatásnak sem a személyi, sem a szervezeti, sem az anyagi feltételei nem állnak rendelkezésre a mai magyar iskolarendszerben. A nem informatika szakos tanárok informatikai műveltsége vegyes képet mutat. Sokan nem tudják közülük készség szintjén használni a számítógépet, alkalmazni a felhasználói programokat (szövegszerkesztő, táblázatkezelő, prezentációkészítő programok). Így részükről legfeljebb az elvárás fogalmazódik meg a tanulóik felé a különböző tanórákra az informatikával támogatott anyagok elkészítésére, érdemleges segítséget azonban nem tudnak nyújtani a felkészüléshez, az anyagok elkészítéséhez.

Ezen kívül – tapasztalataink szerint – nem csak a tanároknak nincs sokszor saját használatú számítógépük, de azok a diákok sem jutnak gyakorlási lehetőséghez, akiknek nincs otthon a családjukban számítógép. Ugyanis az iskolákban nincsenek nyilvánosan, a tanórákon túl is hozzáférhető számítógépek.

Mindennek lehet az a korábban említett visszásság a következménye, hogy a „technikai” jellegű, szinte mindennapinak mondható informatikai ismereteik is hiányosak a mai egyetemi hallgatóknak. Ezzel rontva a különböző szaktárgyak, köztük a statisztika oktatásának eredményességét.

A sík- és hegyvidéki erdeifenyő főbb fizikai paramétereinek többváltozós regressziója

Csanády Viktória

NymE EMK Matematikai Intézet
csanady.viktoria@emk.nyme.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. A sík- és hegyvidéki erdeifenyő főbb fizikai paramétereinek többváltozós regresszióját egy egyváltozós regresszió előzi meg. Ez egyben az alkalmazott tangens hiperbolikus függvény alkalmazásának tesztelése. Kimutatható segítségével a fő szöveti részek eltérése a sűrűség és nyomószilárdság kapcsolatában. Az ezt követő többváltozós regresszió a nyomószilárdság kapcsolatát elemezi a sűrűség és pásztaarány függvényében. A sík- és hegyvidéki erdeifenyő esetén kapott regressziós együtthatók jellemzik az anyagok eltéréseit. Leírják megfelelő szorossággal a vizsgált fizikai paraméterek kapcsolatát.

ABSTRACT. The multivariate regression has been preceded by the one variate regression. This has been at the same time a verification of the suitability of the applied hyperbolic tangent function. By means of that function the differences of the main anatomical parts can be revealed with respect to the relationship between density and compressive strength. The multivariate regression that follows analyses the compressive strength as a function of the density and the latewood-earlywood proportion. In the case of the Scotch pine on lowlands and highlands the received regression coefficients characterize the deviations of the materials. They describe at an adequate tightness the relationship of the examined physical coefficients.

1. Bevezetés

Mint ismeretes tény, az ország területének 19 százalékát borítja erdő, melynek további megoszlása: lombos erdő 85, fenyőerdő pedig 15 százalék [3]. Fafaj szerint a tölgy vezet a teljes erdőterület 21,9 százalékával, majd az akác következik 20,2 százalékkal, a harmadik helyen pedig a fenyő áll. A fenyőerdők egyharmada síkvidéken, az Alföldön található, állományalkotói 98 százalékában erdei- és feketefenyő. Mivel a síkvidéki fenyő mostoha körülmények között növekszik, szerkezetében, illetve fizikai- mechanikai tulajdonságaiban eltér a hegyvidéki termőhelyűtől. A nagy tömegben kitermelhető anyagmennyiség miatt feltétlenül szükséges, hogy ismert legyen az eltérések mértéke, valamint az anyag anizotrópiája miatt az egyes jellemzők kapcsolatának változása. Fontos továbbá, hogy jellemezhető legyen az egyes vizsgált tulajdonságok egymásra hatása megfelelő matematikai módszerrel.

2. Anyag és módszer

Első lépésként egy kismintás kísérletre került sor, melynek tárgya a síkvidéki erdeifenyő makroszkópos szerkezeti részeinek – geszt, szijács és juvenilis fa – sűrűség-nyomószilárdság függvénykapcsolata újszerű, nem lineáris meghatározása volt. Ezt követte egy 200-200 mintaelemű fővizsgálat a sík- és hegyvidéki erdeifenyőre, egy nem lineáris többváltozós regresszió alkalmazásával. Vizsgálati jellemzőként a sűrűség, mint univerzális anyagjellemző, a pásztaarány (korai/kései), mint az évgyűrű szerkezet fő jellemzője [6] és a nyomószilárdság, mint a faanyag legfontosabb szilárdsági tulajdonsága került kiválasztásra. A fizikai értelemben is alkalmas többváltozós függvény: $\sigma(\rho;K)$. A függvény illesztése mindkét különböző származású fenyő mintára megtörtént, az eredmények összevethetők, elemezhető a független változók hatása a függő változóra, illetve ezek domináns szerepe a függvénykapcsolatban.

3. Eredmények kiértékelése

3.1. A kismintás elővizsgálat

Mindhárom makroszkopikus részre vonatkozóan a sűrűség – nyomószilárdság kapcsolatának vizsgálatára egy alkalmas regressziós modell igénye merült fel. Egy olyané, melynek a lehetőségekhez mérten jól kell követnie a mérési adatok pontthalmazát. Jellemezze a függvényt aszimptotikusság, korlátosság, ami révén a függő változó értékei, jelen esetben a nyomószilárdság még fizikailag értelmezhető határok között marad. Rendelkezzen a függvény egy olyan jellegzetes ponttal, melynek koordinátái, mint speciális átlagértékek összevethetők az egyes illesztések során. A felsorolt igények miatt elutasítható a gyakorlatban eddig előforduló lineáris függvény illesztése [2], és a még ritkábban alkalmazott polinomiális függvényeké, melyek valójában fizikailag nem értelmezhetők, és nem jellemzik a két változó, nevezetesen a sűrűség és nyomószilárdság kapcsolatát helyesen, bár lehet, hogy csak tisztán statisztikai szemszögből nézve szoros korreláció mutatható ki velük a változók között. Mérlegelve ezen tényeket, keresni kellett egy olyan fizikailag is és statisztikailag is megfelelő függvényt, amely az említett feltételeknek eleget tesz. Kedvezőnek bizonyult az alábbi modell [1]:

$$\sigma = a \cdot th(d(\rho - b)) + c, \quad (1)$$

melynek inflexiós pontja $P(b;c)$.

Az eredményeket az 1. táblázat tartalmazza. (EF: erdeifenyő, síkvidék)

	a	b	c	d	r
EF _{gest}	8,793	477,5	36,199	0,0149	0,8056
EF _{szijács}	12,687	546,6	53,457	0,0247	0,7486
EF _{juvenilis}	12,397	494,4	46,283	0,0149	0,7571

1. táblázat. Az elővizsgálat regressziós eredményei.

A kismintás elővizsgálatok eredményeiből röviden a következőket lehet összefoglalni: Az illesztett függvény nemcsak hogy jól leírja, illetve követi a sűrűség függvényében változó nyomószilárdságot megfelelő illeszkedés mellett, hanem ugyanekkor inflexiós pontjával kimutatható a három anatómiai rész különbözősége. Az eltérések, illetve a szijács - juvenilis fánál mutakozó labilitás azt indokolja, hogy mind a fővizsgálat során, mind pedig a

felhasználás szempontjából célszerű a mintaanyag gesztből történő vétele a juvenilis rész kihagyásával.

3.2. A sík- és hegyvidéki erdeifenyő vizsgálata (nagy mintás vizsgálat)

A regressziós függvény kiválasztása nehéz és időigényes feladat, mivel egy fizikai értelemben is alkalmas $(\rho; K) \mapsto \sigma(\rho; K)$ modell szükséges a változók kapcsolatának jellemzésére. Mind e mellett az illesztett függvénnyel szembeni követelmények a következők:

- 1.) Az illesztett függvény adjon meg egy speciális átlag adathármaszt a ρ , K és σ vonatkozásában mindkét anyagra.
- 2.) Az illesztett függvény adja meg az egységnyi ρ változására eső σ változás értékét (növekedési mérték) mindkét anyagra.
- 3.) Az illesztett függvény adja meg az egységnyi K változásra eső σ változás értékét (csökkenési mérték) mindkét anyagra.
- 4.) Az illesztett függvény adja meg a σ technológiailag elfogadható legalsó és legfelső értékét, valamint az intervallum nagyságát mindkét anyagra nézve.
- 5.) Az illesztett függvény deriváltjai segítségével legyen meghatározható, hogy a növekedési mérték értékéhez milyen ρ határértékek (ρ_{\min} ; ρ_{\max}) tartoznak (technikailag értelmezhető ρ intervallum).
- 6.) Az illesztett függvény deriváltjai segítségével legyen meghatározható, hogy a csökkenési mérték értékéhez milyen K határértékek (K_{\min} ; K_{\max}) tartoznak (technikailag értelmezhető K intervallum).
- 7.) Az illesztett függvényben előforduló együtthatók fizikailag és technológiailag értelmezhetők és megfelelően dimenzionálhatók legyenek.
- 8.) Az illesztett függvény minél több olyan együtthatót tartalmazzon, melyek a kétféle faanyag vizsgálatánál eltérő értékeket mutatnak.
- 9.) Egymagában a magas korreláció nem elegendő, e mellett az illesztett modellnek eleget kell tennie a fent felsorolt nyolc feltételnek is együttesen.

Mint ismeretes az előző vizsgálatnál a sűrűség és nyomószilárdság vonzatában megfelelő modellnek bizonyult a tangens hiperbolikus függvény, melynek kiválasztását aszimptotikus mivolta, valamint korlátossága indokolta. Ezt figyelembe véve a kétváltozós $(\rho; K) \mapsto \sigma(\rho; K)$ regressziós függvény parciális függvényekből, illetve azok összevonásából kialakítható, így a $\rho \mapsto \sigma(\rho; K_0)$ kapcsolatban használható ismét a tangens hiperbolikus függvény, melynek alkalmazását a vetületi ponthalmaz is alátámasztotta. A $K \mapsto \sigma(\rho_0; K)$ parciális függvény meghatározásában is a korlátosság valamint az aszimptotikusság vezérelt. A vetületi ponthalmaz itt nem ad segítséget a jelentős szórtsága miatt, feltételezni kell tehát, hogy a K értékének mérési pontossága kedvezőtlenebb volt. Ez nyilvánvalóan bizonytalanságot okozhat, amit a vetületi ponthalmazban több szélsőséges helyzetű mérés is alátámaszt. Mindezek ellenére a $K \mapsto \sigma(\rho_0; K)$ esetében is a már említett tangens hiperbolikus bizonyult kedvezőnek a felsorolt tulajdonságai miatt. A fentiek figyelembevételével az illesztendő kétváltozós függvény két tangens hiperbolikus függvényből lett kialakítva megfelelő transzformációk felhasználásával.

Az illesztésnél felhasznált regressziós függvény alakja:

$$\sigma = a_1 \operatorname{th}(0,00627(\rho - a_3)) - 2,565 \operatorname{th}(a_5(K - a_6)) + a_7. \quad (2)$$

Az illesztés eredményeinek közzlése előtt bizonyítható, hogy a modell eleget tesz a követelményrendszernek:

- 1.) Az illesztett függvény megad egy speciális átlag adathármast a ρ , K és σ vonatkozásában mindkét faanyagra:

$$\bar{\rho}^* = a_3 ; \bar{K}^* = a_6 ; \bar{\sigma}^* = a_7 .$$

- 2.) Az illesztett függvény megadja az egységnyi ρ változására eső σ változás értékét (növekedési mérték) a speciális átlag adathármashoz tartozó helyen mindkét faanyagra (a parciális deriváltak alapján):

$$N_m = \sigma'_\rho(\bar{\rho}^*) = a_1 a_2 .$$

- 3.) Az illesztett függvény megadja az egységnyi K változásra eső σ változás értékét (csökkenési mérték) a speciális átlag adathármashoz tartozó helyen mindkét faanyagra (a parciális deriváltak alapján):

$$C_m = \sigma'_K(\bar{K}^*) = a_4 a_5 .$$

- 4.) Az illesztett függvény megadja a σ technológiailag elfogadható legalsó és legfelső értékét, valamint az intervallum nagyságát mindkét anyagra nézve:

$$\sigma_{\min} = a_7 - a_1 - a_4 ; \sigma_{\max} = a_7 + a_1 + a_4 ; \sigma_{\text{int}} = 2(a_1 + a_4) .$$

- 5.) Az illesztett függvény deriváltjai segítségével meghatározható, hogy a növekedési mérték értékéhez milyen ρ határértékek ($\rho_{\min} ; \rho_{\max}$) tartoznak (technikailag értelmezhető ρ intervallum).

Az $\frac{N_m}{10}$ értékhez az alábbi összefüggéssel számíthatók az értékek:

$$10 = ch^2(a_2(\rho - a_3)) .$$

- 6.) Az illesztett függvény deriváltjai segítségével meghatározható, hogy a csökkenési mérték értékéhez milyen K határértékek ($K_{\min} ; K_{\max}$) tartoznak (technikailag értelmezhető K intervallum).

A $\frac{C_m}{10}$ értékhez az alábbi összefüggéssel számíthatók az értékek:

$$10 = ch^2(a_5(K - a_6)) .$$

- 7.) Az illesztett függvényben előforduló együtthatók fizikailag és technológiailag értelmezhetők és megfelelően dimenzionálhatók.

- 8.) Az illesztett függvény elegendő olyan együtthatót tartalmaz, melyek a kétféle faanyag vizsgálatánál eltérő értékeket mutatnak.

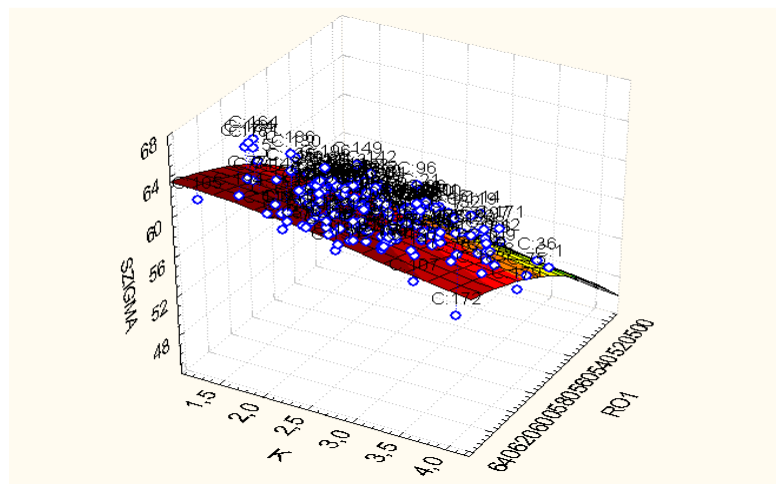
- 9.) A magas korreláció mellett az illesztett modell eleget tesz a felsorolt nyolc feltételnek.

Mind a síkvidéki, mind pedig a hegyvidéki erdeifenyő vizsgálata során az előzőekben felírt modell került alkalmazásra. Az eredményeket a 2. táblázat tartalmazza. A felületeket a pontthalmazokkal a síkvidéki fenyőnél az 1. ábra a hegyvidékinél a 2. ábra demonstrálja.

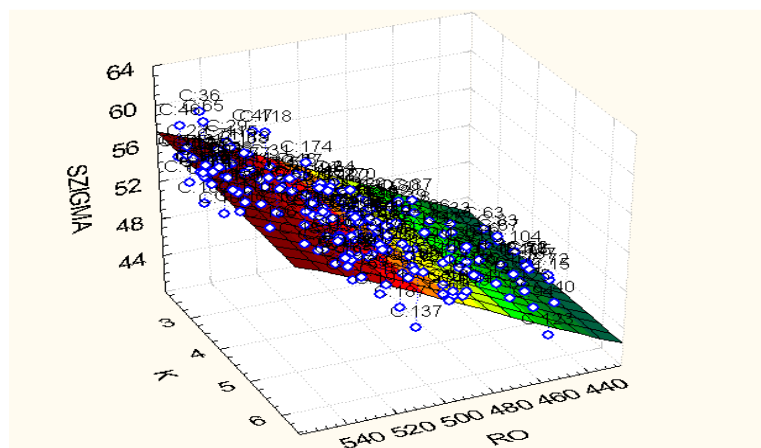
	a_1	a_3	a_5	a_6	a_7	R
Síkvidéki erdeifenyő	29,7093	419,4039*	0,65208	3,1328*	34,969*	0,8449
Hegyvidéki erdeifenyő	18,9087	483,9016*	2,24991	17,451*	46,443*	0,8906

2. táblázat. A sík és hegyvidéki erdeifenyő regressziós eredményei

Megjegyzés: A jelölt értékek (*) egyúttal a felület úgynevezett síkpontjának koordinátái $S(\rho; K; \sigma(\rho; K))$.



1. ábra. A síkvidéki erdeifenyőre illesztett felület



2. ábra. A hegyvidéki erdeifenyőre illesztett felület

Az illesztésnél adódó korrelációs együtthatók $R_{síkvidéki} = 0,8449$, $R_{hegyvidéki} = 0,8906$ kielégítőek, annál is inkább, hiszen itt már egy felületről van szó. A parciális korrelációs együtthatók vizsgálatából (4), (5) egyértelműen kimutatható mindkét faanyagra, hogy a kapcsolatban a sűrűség a domináló tulajdonság, a pásztaarány befolyása kisebb, de a síkvidéki

anyagánál jelentős mértékű, így nem hagyható figyelmen kívül a szerepe. A felületek különbözősége arra utal, hogy jelentős az eltérés a két származáshelyi anyag között. Ezt alátámasztják az úgynevezett síkpont koordináták, melyek fizikailag értelmezhető jellemző adatát adják a sűrűségnek valamint a nyomószilárdságnak. A pásztaarány a hegyvidéki erdeifenyő esetén túl magas értéket mutat, ami egyben azt jelzi, hogy itt rendkívül jelentős az eltérés a síkvidéki anyaghoz képest. Különbség mutatkozik a sűrűség és a nyomószilárdság vonatkozásában is, ami természetesen a hegyvidéki erdeifenyő javára írható. Az egységnyi ρ változásra eső σ változás értéke (növekedési mérték) a síkpontban arra utal, hogy a hegyvidéki erdeifenyő szilárdsági szempontból kedvezőbb, a változás mértéke kisebb. Az egységnyi K változásra eső σ változás mértéke (csökkenési mérték) a síkpontban vizsgálva ismét csak a jelentős különbségre utal a két faanyag között, de ez nem mértékadó érték. A követelményekben felsoroltaknak megfelelően számíthatók az intervallumok, a vizsgált jellemzők határértékei, ennek módja a leírtaknak megfelelően történhet.

4. Következtetés

A kapott eredményeket figyelembe véve javasolható, szemben az eddigi irodalmakban előforduló regressziós modellek helyett, az összetettebb modell használata. A nyomószilárdság-sűrűség kapcsolatából nem célszerű eliminálni a pásztaarányt, és így szükséges a kétváltozós tangens hiperbolikus függvény alkalmazása. Segítségével megadhatók a különböző technológiai intervallumok a sűrűség és nyomószilárdság esetében, valamint az illesztett felület síkpont koordinátái egy újszerű, nem aritmetikai átlaggal jellemzik a vizsgált anyagi tulajdonságokat. Ezen kívül ismeretet kapunk az adott pontban az egységre jutó fizikai jellemző változási sebességéről, ami felhasználás szempontjából fontos tényező lehet.

Irodalomjegyzék

- [1] **Csanády, V.**, Számítógépekre konvertált nem hagyományos regressziós eljárások faipari – erdészeti kutatási és műszaki problémákhoz. Műszaki doktori értekezés, Sopron, EFE (1993).
- [2] **Kolmann, F.**, Technologie des Holzes und der Holzwerkstoffe. Springer Verlag, Berlin (1951).
- [3] **Molnár, S.**, Faanyag-ismerettan. Mezőgazdasági Szaktudás Kiadó, Budapest (1999).
- [4] **Orbay, L.**, A többváltozós regressziószámítások alapja és fagazdasági alkalmazása, EFE, Sopron (1990).
- [5] **Pelz, D. R.**, Einführung in die biologische Statistik für Forststudenten. Teil II. Freiburg, (1989).
- [6] **Wimmer, R.**, Beziehungen zwischen Jahrringparametern und Rohdichte von Kiefernholz. Holzforschung und Holzverwertung, Nr.4 (1991).

Láncfűrészek paramétereinek összehasonlítása a többváltozós statisztika módszereivel

Horváth-Szováti Erika
NymE EMK Matematikai Intézet
hsze@emk.nyme.hu

Összefoglaló. A főkomponens-analízis és faktoranalízis sok esetben hatékonyan használható a kísérletek kiértékelésében. A két módszer nagyon hasonlít egymásra, de van közöttük néhány fontos különbség. A két eljárást egy műszaki területről vett példa segítségével szeretnénk bemutatni.

Abstract. The principal component analysis and factor analysis can be used effectively in many cases, evaluation of the experiments. The two methods are very similar, but there are some important differences between them. We want these two methods with an example in a technical area to illustrate.

1. Bevezetés

A többváltozós statisztika módszerei közül a főkomponens-analízis (*Principal component analysis; PCA*) és faktoranalízis (*Factor analysis; FA*) alkalmazására mutatunk egy példát. Ezeknek az eljárásoknak a használata akkor javasolt, ha nagyszámú független változóval dolgozunk, mert ilyenkor elvész az ábrázolhatóság előnye, és lecsökken a változók tényleges függetlenségének valószínűsége. A független változók között kölcsönös, többirányú összefüggések lehetnek, azaz multikollinearitás állhat fenn. Mind a *PCA*, mind a *FA* esetén ugyanaz a cél: dimenziószám csökkentés a legkisebb információvesztés mellett. Ezt úgy érhetjük el, hogy kevesebb számú új változót vezetünk be (közben a varianciát maximalizáljuk). Az új változókat *PCA* esetén nem mindig lehetséges azonosítani, *FA* alkalmazásakor viszont elvárás, hogy megnevezzük őket. Ezt követően az új változók (főkomponensek/faktorok) alkotta új bázisban a régi változók és a mérési eredmények koordinátáit felírjuk, ebből próbálunk következtetéseket levonni, illetve így az adathalmaz ábrázolása kényelmesebb és sokkal több információt hordoz. A példára vonatkozó számításokat a *STATISTICA 11* programcsomag segítségével végeztük.

Mind a *PCA*, mind a *FA* kiindulhat a kovariancia-, illetve korrelációs mátrix elemzéséből. Mindkét esetben a kovariancia-/korrelációs-mátrix sajátértékei alapján határozzuk meg a főkomponensek, illetve faktorok számát. A *PCA* és *FA* módszerei között lényeges eltérések is vannak. A főkomponensek az eredeti változók olyan lineáris kombinációi, amelyek minél nagyobb számú eredeti változóval állnak szoros korrelációban. Mivel legtöbbször az eredeti változók is nagyon sokfélék, így a lineáris kombinációik csak ritkán értelmezhetők. A faktoranalízis az adathalmaz mögött meghúzódó lineáris háttér-összefüggéseket tételez fel, és a faktorok az új „háttérváltozók”. A faktorokat mindenképpen értelmeznünk kell, ebben segítenek a különböző rotációs eljárások. Ilyenkor a háttérváltozók koordináta-rendszerét addig forgatjuk, amíg olyan helyzetbe nem kerül, hogy a mérési eredmények koordinátái csak egy-egy tengely (faktor) irányában rendelkeznek magas koordinátákkal, így a faktorok

értelmezhetővé válnak. A *STATISTICA 11* programcsomag több különböző típusú faktorrotációt tesz lehetővé. A legismertebb derékszögű faktorrotációs eljárások a *varimax*, *quartimax* és *equamax* forgatás, a ferdeszögű forgatások közül leggyakoribbak a *direct oblimin* és *promax* forgatások. Legtöbbször a *varimax* rotációt használjuk, ez szinte mindig célravezető. A faktorok számának viszonylag szubjektív meghatározásából, illetve a választható sokféle forgatásból adódóan a faktoranalízis modelljének nagyon nagyszámú alternatív megoldása van.

2. Láncfűrészek műszaki paramétereinek és árának összehasonlítása PCA és FA segítségével

Husqvarna benzines láncfűrészek műszaki paramétereit és árát hasonlítjuk össze főkomponens-analízis és faktoranalízis segítségével. A következő változókat vettük be a vizsgálatba:

- Var1: lökettérfogat (cm³);
- Var2: teljesítmény (kW);
- Var3: teljesítmény (LE);
- Var4: a motor fordulatszáma alapjáraton (fordulat/perc);
- Var5: a motor maximális fordulatszáma (fordulat/perc);
- Var6: láncsebesség maximális teljesítményen (m/s);
- Var7: egyenértékű vibrációs szint (ahv, eq) elülső fogantyú (m/s²);
- Var8: egyenértékű vibrációs szint (ahv, eq) hátsó fogantyú (m/s²);
- Var9: zajszint (dB(A));
- Var10: hangteljesítményszint (LWA; dB(A));
- Var11: tömeg (kg);
- Var12: ár (Ft).

Mind a *PCA*, mind a *FA* alkalmazhatósága ellenőrizhető a korrelációs mátrix értékeinek vizsgálatával. Kíváncsi, hogy minél több korreláció abszolút értéke legyen magasabb, mint 0,3. Ezt a 12x12-es mátrixot itt nem közöljük, csupán az észrevételt, hogy szinte csak a Var5 és Var9 változók sorában (oszlopában) vannak az előbbi kritériumnak nem megfelelő elemek, a többi érték a változók között erős, vagy közepesen erős lineáris korrelációs kapcsolatot mutat.

2.1. Az adatok elemzése PCA-val

A korrelációs mátrix sajátértékei és a kumulatív variancia segítségével dönthető el, hogy hány főkomponenssel dolgozunk tovább (1. táblázat). Ebben az 1-nél nagyobb sajátértékek száma, illetve a minimum kb. 80%-os kumulatív variancia a meghatározó. Ezek alapján esetünkben 2 főkomponenszt érdemes választani, a két főkomponens együtt a teljes adathalmaz varianciájának 85%-át magyarázza. A változók és a főkomponensek közötti korreláció értékeit (vagyis a factorsúlyokat) a 2. táblázat mutatja. Ez alapján azt mondhatjuk, hogy a vizsgált változók két csoportba (főkomponensbe) sorolhatók. Az első főkomponenssel nagyon szoros negatív korrelációt mutatnak a Var1, Var2, Var3, Var11, Var12 változók, szoros negatív korrelációt a Var6, Var7, Var8 változók, és az első főkomponens erős pozitív korrelációban áll a Var4 változóval. A második főkomponens a Var5 és Var9 változókkal van erős negatív korrelációban.

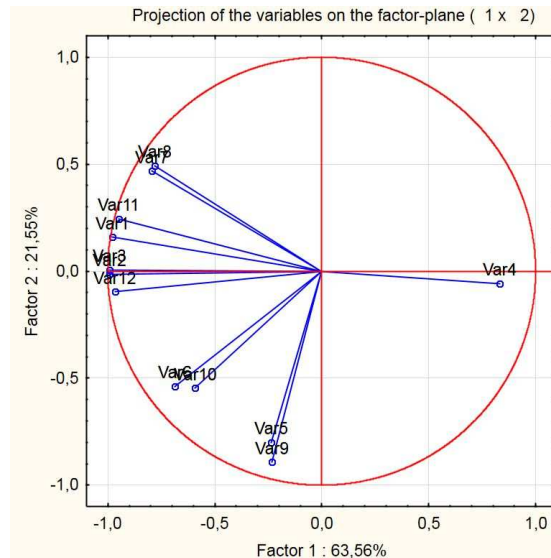
Eigenvalues of correlation matrix, and related statistics Active variables only				
Value number	Eigenvalue	% Total variance	Cumulative Eigenvalue	Cumulative %
1	7,627127	63,55939	7,62713	63,5594
2	2,585850	21,54875	10,21298	85,1081
3	0,880319	7,33600	11,09330	92,4441
4	0,424628	3,53857	11,51792	95,9827
5	0,287477	2,39564	11,80540	98,3783
6	0,088861	0,74051	11,89426	99,1188
7	0,044033	0,36695	11,93830	99,4858
8	0,034643	0,28869	11,97294	99,7745
9	0,012806	0,10672	11,98574	99,8812
10	0,011746	0,09788	11,99749	99,9791
11	0,002432	0,02027	11,99992	99,9993
12	0,000079	0,00066	12,00000	100,0000

1. táblázat. A korrelációs mátrix sajátvektorainak sajátértékei

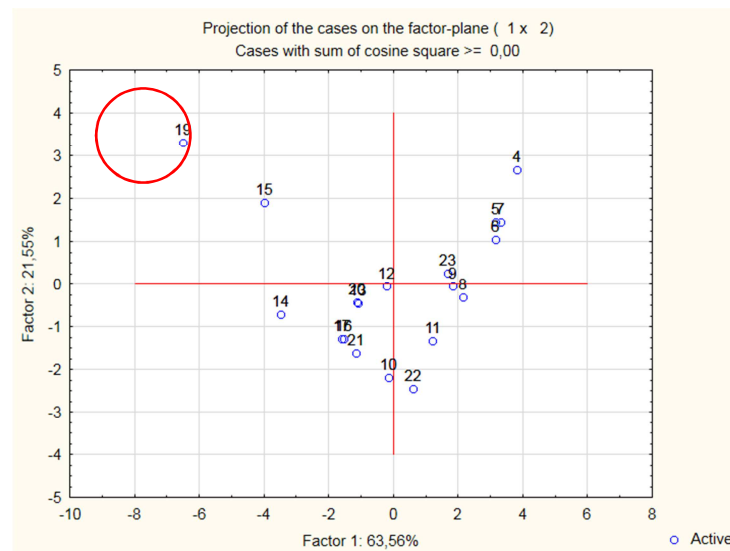
A főkomponensek elnevezésével a további elemzés egyszerűbb lenne, de ez azonban nem feltétlenül szükséges. Az elnevezés akkor könnyebb, ha a faktorok csupán egy-két változóval mutatnak szorosabb (akár negatív, akár pozitív) kapcsolatot. Esetünkben a főkomponensek értelmezése nem ilyen egyértelmű, az első főkomponenst esetleg „negatív robusztusság” főkomponensnek, a másodikat „fülkímélőség mértéke” főkomponensnek nevezhetjük. A változók faktor-koordinátáit egységkörön ábrázolva a 1. ábrán láthatjuk. A változók közötti lineáris korreláció mértéke a vektorok által közbezárt szög koszinuszával arányos. Például a Var5-Var9, Var6-Var10, Var1-Var11, Var 2-Var3-Var12, Var7-Var8 változók vektorai kicsi szöveget zárnak be, közöttük nagyon szoros a pozitív korreláció. Amely vektorok között 90° a közbezárt szög, azok a változók korrelálatlanok, de nem feltétlenül függetlenek. Ez azt jelenti, hogy nincs közöttük lineáris kapcsolat, viszont egyéb függvénykapcsolat lehetséges. Esetünkben például a Var1 és Var11 vektorok közelítőleg merőlegesek a Var5 és Var9 vektorokra, ez alapján mondhatjuk, hogy ezek a változók korrelálatlanok egymással. A Var2-Var3 és a Var4 változók vektorai közelítőleg 180° -os szöveget zárnak be egymással, közöttük a korreláció értéke -1 . Az egyes mérések faktor-koordinátái az 2. ábrán láthatjuk. Ez sok információt hordoz, pl. a legrobusztusabb és egyben az összes közül „legfülkímélőbb” fűrész a 19. sorszámú, a legzajosabb a 22., amely egy közepesen robusztus fűrész, a 4. sorszámú pedig csak egy kis hobbifűrész, és minimális az általa kibocsátott zajterhelés, és így tovább.

Factor coordinates of the variables		
Variable	Factor 1	Factor 2
Var1	-0,978678	0,159274
Var2	-0,991602	-0,013815
Var3	-0,991131	0,005830
Var4	0,830783	-0,057137
Var5	-0,237294	-0,799889
Var6	-0,687961	-0,537629
Var7	-0,795482	0,467865
Var8	-0,780855	0,494073
Var9	-0,233723	-0,892897
Var10	-0,592591	-0,546530
Var11	-0,949116	0,244617
Var12	-0,966831	-0,096539

2. táblázat. A változók és a faktorok közötti korreláció (faktorsúlyok)



1. ábra. A változók faktor-koordinátái egységkörön ábrázolva



2. ábra. A változók faktor-koordinátái a faktorok síkjában ábrázolva

2.2. Az adatok elemzése FA-val

A 2. táblázatban lévő sajátértékeket alapján 2 faktort érdemes választani (2 db egynél nagyobb sajátérték van). A programcsomag által felkínált *scree-test* grafikont is meg szoktuk vizsgálni (itt hely hiányában nem közöljük), amelynek a „könyöke” a 3-as sajátértéknél látható, így ez alapján 3 faktort választanánk. A döntést az alapján hozzuk meg, hogy a vizsgálat során kapott 2 vagy 3 faktor értelmezhető jobban. A vizsgált adathalmaz esetében az elemzés lépéseinek többféle variációját (2, illetve 3 faktor, különböző forgatások) kipróbáltunk. A faktorok értelmezhetősége, illetve a fizikai (gépészeti) ismereteink alapján a kétfaktoros modell és a varimax rotáció mellett döntöttünk. A kapott eredmény az 5. táblázatban látható. Az első faktor a Var1-Var2-Var3, Var7-Var8, Var11-Var12 (lökettérfogat, kétféle teljesítmény és kétféle vibrációs adat, valamint a tömeg és az ár) változókkal nagyon erős pozitív, a Var4 (fordulatszám alapjáraton) változóval nagyon erős negatív korrelációban van. A második faktor a Var5-Var6 és Var9-Var10 (maximális fordulatszám, maximális láncsebesség, valamint zajszint és hangteljesítményszint)

változókkal viszonylag szoros pozitív korrelációban áll. (Megjegyezzük, hogy a második faktor oszlopában a Var10-nél lévő 0,6976 érték majdnem eléri a többi pirossal kiemelt, 0,7-nél nagyobb értéket, így ezt is figyelembe vettük.) Ezek alapján a következő módon nevezzük el a faktorokat: 1. faktor: teljesítmény-ár faktor, 2. faktor: zajterhelési faktor. Az egyes motorfűrészeknek ebben a kétfaktoros rendszerben lévő koordinátáit a 6. táblázat mutatja. Ebből leolvasható, hogy a teljesítmény-ár faktor (1. faktor) tekintetében legnagyobb koordinátával a 19. sorszámú, legkisebvel a 6. sorszámú motorfűrész rendelkezik. A 2. faktor-koordináták (zajterhelést mutató faktor) közül legnagyobb a 22. motorfűrész koordinátája, legkisebb pedig a 4. sorszámúé. Tehát a *FA* során kapott eredmény összhangban van a *PCA*-val kapott eredménnyel.

		Factor Loadings (Varimax raw) (motorfűrészek)	
		Extraction: Principal components (Marked loadings are >,700000)	
Variable	Factor 1	Factor 2	
Var1	0,981902	0,138017	
Var2	0,942932	0,307156	
Var3	0,948306	0,288255	
Var4	-0,810376	-0,191718	
Var5	-0,010502	0,834279	
Var6	0,497655	0,717409	
Var7	0,898422	-0,211011	
Var8	0,892223	-0,240377	
Var9	-0,041485	0,922047	
Var10	0,403933	0,697637	
Var11	0,978968	0,047747	
Var12	0,894751	0,378818	
Expl.Var	7,184080	3,028896	
Prp.Totl	0,598673	0,252408	

3. táblázat. Faktorsúlyok kétfaktoros modell esetén, varimax rotáció

		Factor Scores (motorfűrészek)	
		Rotation: Varimax raw Extraction: Principal components	
Case	Factor 1	Factor 2	
4	-0,821657	-1,99525	
5	-0,819273	-1,20563	
6	-0,900248	-0,96009	
7	-0,881303	-1,21540	
8	-0,798061	-0,04291	
9	-0,641048	-0,17487	
10	-0,354525	1,31215	
11	-0,660770	0,65486	
12	0,070805	0,04880	
13	0,296651	0,38089	
14	1,072381	0,80045	
15	1,734104	-0,70547	
16	0,301177	0,92195	
17	0,318815	0,93370	
19	2,860845	-1,26529	
20	0,312018	0,37123	
21	0,103923	1,08214	
22	-0,662828	1,39699	
23	-0,531005	-0,33824	

4. táblázat. Faktorsúlyok kétfaktoros modell esetén, varimax rotáció

Mindenképpen szólnunk kell arról, hogy a faktoranalízis megbízhatósága a reziduális korrelációs mátrixszal vizsgálható, amely a mért adatok közötti, és a felállított modell segítségével számított értékek közötti korrelációkat hasonlítja össze. Ha a mátrixban a főátlón kívül nincs túl sok 0,1-nél lényegesen nagyobb érték (ezeket pirossal jelöli a program), akkor megállapítható, hogy a modell jól reprodukálja a mérési eredményeket. Példánkban a reziduális korrelációs mátrixot kielégítőnek találjuk (ennek közlése itt a terjedelmi korlátok miatt nem lehetséges), így a felállított modell megbízhatónak mondható.

3. Összefoglalás

Napjainkban legtöbb tudományterületen szinte elképzelhetetlenek a nívósabb publikációk statisztikai alkalmazások nélkül. A főkomponens-analízis és faktoranalízis a többváltozós adathalmazok vizsgálatában nagy segítséget nyújthat. Az eljárások matematikai hátterének vázlatos megismerése – különös tekintettel a közöttük lévő hasonlóságokra és különbségekre nagyon fontos, ezek hiányában a programcsomag felhasználója nehezen tudja értelmezni a kapott eredményeket és mindvégig bizonytalanságot fog érezni. Szeretnénk, ha a matematikai ismeretek szükségességét a szakmai tárgyakat oktató kollégáink közül is egyre többen felismernék, és ezáltal már az alapszintű matematika tananyagtól kezdve alaposabb tanulásra buzdítanák hallgatóinkat.

Irodalomjegyzék

- [1] **Fazekas, I.** (szerk.), Bevezetés a matematikai statisztikába, egyetemi jegyzet, Kossuth Egyetemi Kiadó, Debrecen (1997).
- [2] **Füstös, L., Meszéna, Gy., Simonné Mosolygó, N.**, A sokváltozós adatelemzés matematikai módszerei, Akadémiai Kiadó, Budapest (1986).
- [3] **Münnich, Á., Nagy, Á., Abari, K.**, Többváltozós statisztika pszichológus hallgatók számára. Bölcsész Konzorcium, Debrecen (2006). (<http://psycho.unideb.hu/statisztika> ISBN 9639704040.)
- [4] STATISTICA 11, STATISTICA statisztikai adatelemző, analitikai szoftvercsalád, StatSoft.
- [5] STATISTICA 11 software HELP.
- [6] **Sváb, J.**, Többváltozós módszerek a biometriában. Mezőgazdasági Kiadó, Budapest (1979).
- [7] **Szücs, I.** (szerk.), Alkalmazott statisztika. Agroinform Kiadó, Budapest (2002).
- [8] **Jahn, W. – Vahle, H.**, A faktoranalízis és alkalmazása. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó (1974).

A matematika oktatása a selmeci Akadémián

F. Nagy Györgyi
NymE EMK Matematikai Intézet
fuh@emk.nyme.hu

Összefoglaló. Ismert tény, hogy a 18. században Európában több olyan iskolát alapítottak, melyek a mai főiskolák és egyetemek elődei. Ezek között volt a Selmeci Bányászati Iskola, melyet 1735-ben alapítottak (280 éve). Abból fejlődött ki a Bányászati Akadémia. A Bányászati Akadémia Matematika–Fizika–Mechanika tanszékét 1765. augusztus 13-án (250 éve) alapították [1].

Abstract. The University of West Hungary has grown out of the Mining Academy and Forestry School of Selmechánya in Slovakia. The first was founded in 1735, the second one by the Queen Maria Theresa 1770. The Department of Mathematics-Physics-Mechanics was founded in 1765.

1. A kezdetek

A Selmeci Bányászati Iskola első tanára Mikoviny Sámuel kora egyik legkitűnőbb mérnöke volt [2]. Mikoviny az első évben "*Mathematica*" cím alatt számtannal, mértannal, mérési, gépészeti, mechanikai, építészeti, bányászati tudományokkal és rajzzal foglalkozott, a fenti gyűjtőnév alatt a folyamszabályzással, térképészettel és építészettel kapcsolatos tudnivalókat adta elő. Ebből is látható, hogy a matematika akkor nem azt jelentette, amit ma és a matematikus inkább mérnököt (minthogy a geométer térképészt) jelentett.

Az akkori matematika pontosabb meghatározásához "*mathematica pura*" az elméleti matematikához (geometria nélkül) a "*mathematica applicata*" pedig a mai alkalmazott matematikához hasonlítható.

Az iskola szabályzata, az "*Instructio*" volt [3]. Az előírta az oktatáshoz használt könyveket is. Ezek egy részét ma a Soproni, illetve a Miskolci Műemlékkönyvtárban őrzik. A legrégebbi mű a *Die sechs erste Bücher Euklids*, Basel 1562 [4].

A Selmeci Bányászati Iskola hallgatói által használt könyvekben, érdekes az anyag tárgyalása, azért is, mert még nem nagyon használtak betűszámánt, az egész elmélet gyakran két személy párbeszédében van bemutatva.

Mikoviny Sámuel tanítványai közül külön megemlíthető Delius, Traugott Christof, aki a Selmeci Bányászati Iskolában 1750 körül végzett. 1770-ben nevezték ki már az Akadémia tanárává. Fő műve, mely évtizedeken keresztül a bányászsképzés alapkönyve volt [5].

2. Az Akadémia

A 18. században az összesített "műszaki tudomány" a *montanisztikum* volt. Ennek fejlődése közben fejlődnie kellett a Bányászati Iskolának is, és 1762-ben megkezdődött a felsőfokú bányász–kohász–erdész képzés megszervezése. Az Akadémia, mint egyetemi jellegű intézet, alapszabályzatát Mária Terézia királynő 1770-ben hagyta jóvá.

Az Akadémia alapításakor beszerezték az oktatáshoz szükséges könyveket, segédeszközöket is. Ezek egy része Sopronban, a másik pedig Miskolcon van. Valószínűleg ez volt a világ első műszaki jellegű könyvtára mintahogyan az Akadémia is a világ első – ma is "működő" – műszaki jellegű főiskoláinak egyike volt.

Az Akadémia szabályzata a "Systema" volt [6].

Matematikát az első évben oktattak, mert "a *matézis minden bányászati, kohászati tudományhoz szükséges, és a bányamérésnek, gépészetnek és az egész bányászatnak-kohászatnak alapját képezi*".

Az első könyvek közül, melyek ma is megtalálhatók Sopronban, a szerzők neve mellett gyakran az akkori Európa tudományos társaságainak egész sora van feltüntetve, pl. Karsten, Wencesl. Joh. Gustav [7]. A szerzőről: „*Der Phil. Doctor, Hofrath und Professor der Mathematik und Naturlehre auf der Universitaet zu Halle, der Churfl. Akademie der Wissenschaften in München, der Hollandischen Gesellschaft der Wissenschaften in Harlem, und der Königl. Daenischen Gesellschaft in Kopenhagen, auch der ökonomischen Gesellschaft in Leipzig Mitgliede.*“

Abból a tényből, hogy a kör kerületének és átmérőjének az aránya még nem volt nevesítve, a feladatok megoldásának a leírása igen bonyolultnak bizonyult (pl. 1878-1879. old.).

Már a 18. század utolsó évtizedeiben a selmeci Akadémián kibővítették a tananyagot differenciál- és integrálszámítással, bár kezdetben nem kötelező jelleggel. Az 1800-as évektől a főhatóság ezt betiltotta, mert az oktatott tananyagoknak szorosan igazodnia kellett a bányászat szükségéhez.

A könyvtárak állományával foglalkozó művek említik a 18. század grandiózus művét, melyben megtalálható "minden, ami az *emelőgépek leírásához, előállításához és működtetéséhez szükséges*" [8]. (Jacob Leupold, *Mathematico u. Mechanico*, Königl. Preussischen Commerzien-Rath, der Königl. Preuss. und Saechs, wie auch Forlischen Societaet der Wissenschaften Mit-Glied.)

Érdekes az elején az újjakkal való számolás bemutatása (1. ábra).

Ezekben a könyvekben sok olyan mechanikai alapokon működő, alapos matematikai megfontolást igényelő berendezés leírása található, melyek megvalósítása még technikai nehézségekbe ütközött. Ilyenek például a különböző emelőgépek. Selmecebánya környékét állandóan fenyegette a bányákat elárasztó víz.

Hell Máté Kornél és Hell József Károly főgépmesterek egész sor vízemelőgépet épített. Ezek gyakran Mikoviny matematikai tudásának és tanácsainak segítségével lettek jobbak.

3. A Matematika–Fizika–Mechanika tanszék

Az 1765. augusztus 13-án alapított Matematika–Fizika–Mechanika tanszék első tanára Boda (Poda) Miklós páter volt és mechanikával foglalkozott. Műveiben megörökítette a Selmecebánya környékén felépített bányagépek leírását, működését. Sajnos a műveit nem sikerült megtalálni a Műemlékkönyvtárban [9], [10].

A Műemlékkönyvtár könyvei között olyan szerzőket is megtalálunk, akik az egyetemes magyar matematika jó hírnévéhez is hozzájárultak.

- PASQUICH JÁNOS [11]. Inkább csillagászként volt ismert. Sokat levelezett Gauss-szal. Lipszében jelentette meg József Mitterpacher Analízisét.
- SEGNER JÁNOS ANDRÁS. Aki az első olyan magyar matematikus, aki világhírnevet szerzett. 1725-től Jenában tanult orvostudományt és természettudományokat. Tanulmányai után néhány évet Magyarországon töltött, majd Halléban telepedett le. Az egyik munkája címlapjáról idézem: "*erster Lehrer der Mathematik und Naturlehre bey der Königl. Friedrichs Universiaet zu Halle, Mitgliede der Kaiserlichen Academie zu Petersburg, der Königl. Societaet zu London und der Königl. Academie der Wissenschaften zu Berlin*".

Ki kell emelni, hogy Segner munkái előtt a matematika tankönyvek nem törekedtek a pontos bizonyítások és definíciók leírására. A kivételek pontosan a már említett szerzők – Sturm (1707), Käster (1758), Karsten (1767-1778).

A Soproni műemlékkönyvtárban Segner János András latin nyelvű munkája található [12]. Ebben érdekes a komplex számok tárgyalása, valamint a teljes differenciál és magasabb deriváltak kiszámítása (amit ma is így lehet oktatni).

4. Összefoglaló

A Selmeci Bányászati iskolát 1735-ben alapították (280 éve). Abból fejlődött ki a Bányászati Akadémia. Az Akadémia Matematika–Fizika–Mechanika tanszékét 1765. augusztus 13-án (250 éve) alapították.

Több névváltoztatás után az Akadémia 1920-ban Sopronba költözött. Itt talált otthonra, és több átalakulás után 1962 óta az Erdészeti és Faipari Egyetem címet viselte. Jelenlegi karai a Nyugat-Magyarországi Egyetem keretében működnek.

Az Akadémiával Sopronba költöztetett könyvek a Műemlék könyvtárban tekinthetők meg. Ezek közül néhányat itt megemlégtünk.

Irodalomjegyzék

- [1] **Mihalovits, J.**, Die Gründung der ersten Lehranstalt für technische Bergbeamte in Ungarn, Sopron (1938).
- [2] **Faller, J.**, Mikoviny Sámuel szerepe a selmeci bányásztörténetében, B.K.L. (1939).
- [3] Instruction – Instrukció, Selmecbánya 1735 – Miskolc (1984).
- [4] Die sechs ersten! Bücher Euklids, Basel (1562).
- [5] **Delius, T. C.**, Anleitung zu der Bergbaukunst nach der Theorie und Ausübung, nebst einer Anhandlung von den Grundsätzen der Berg-Kammeral-wissenschaft für die Keiserl. Königl. Schemnitzer Bergakademie, Wien (1773).
- [6] Systema Academiae Montanisticae, Selmecbánya 1770 – Miskolc (1985).
- [7] **Karsten, W. J. G.**, Lehrbegriff der gesamten MATHEMATIK. Der erste Teil. Die Rechenkunst und Geometrie. Zweite Auflage, Greiswald (1782).
- [8] **Leopold, J.**, Theatri Machinarum, oder Schau-Platz der Wasser-Künste. Maschinen die Wasser in die Höhe zu treiben oder aus der Tiefe zu erheben, Leipzig (1724).
- [9] **Boda, N.**, Kurzgefasst Beschreibung der, bey dem Bergbau zu Schemnitz in Nieder-Hungarn errichteten Maschinen, Prag (1771).
- [10] **Boda, N.**, Berechnung der Luftmaschine, Wien (1771).
- [11] **Pasquich, J.**, Differential und Integralrechnung nebst Anwendung auf die merkwürdigsten krummen Linien, Leipzig (1791).
- [12] **Segner, J. A.**, Cursus mathematici. 1–5. Hala Magdeburgica, Halle (1756-68).

Der Alten Finger-Rechnung. Tab. I.

\mathcal{A} 1 	\mathcal{M} 10 	\mathcal{E} 100 	\mathcal{H} 100 	\mathcal{F} 6 	\mathcal{G} 60 	\mathcal{E} 6000 	\mathcal{B} 600
\mathcal{B} 2 	\mathcal{N} 20 	\mathcal{B} 2000 	\mathcal{M} 200 	\mathcal{G} 7 	\mathcal{Z} 70 	\mathcal{G} 7000 	\mathcal{S} 700
\mathcal{C} 3 	\mathcal{O} 30 	\mathcal{D} 3000 	\mathcal{N} 300 	\mathcal{J} 8 	\mathcal{D} 80 	\mathcal{B} 8000 	\mathcal{A} 800
\mathcal{D} 4 	\mathcal{P} 40 	\mathcal{D} 4000 	\mathcal{O} 400 	\mathcal{Z} 9 	\mathcal{K} 90 	\mathcal{I} 9000 	\mathcal{X} 900
\mathcal{E} 5 	\mathcal{R} 50 	\mathcal{E} 5000 	\mathcal{P} 500 	\mathcal{L} 100000 	\mathcal{R} 10000 	\mathcal{M} 200000 	
\mathcal{B} 20000 	\mathcal{A} 30000 	\mathcal{N} 300000 	\mathcal{O} 400000 	\mathcal{D} 40000 	\mathcal{E} 50000 		
\mathcal{P} 500000 	\mathcal{E} 60000 	\mathcal{Q} 600000 	\mathcal{G} 70000 	\mathcal{B} 700000 	\mathcal{B} 80000 		
\mathcal{S} 800000 	\mathcal{I} 90000 	\mathcal{O} 900000 	\mathcal{U} 1000000 	<p><i>Rechen-Taffel vermittelst der Finger und Hände wie solche bey dem Beda ent- lehnet.</i></p> <p style="text-align: right;"><i>Jh. Arithmet.</i></p>			

1. ábra