

FELOLVASÓ ÜLÉSEK

F/22

**Veszprémi Akadémiai Bizottság
Matematikai és Rendszerelméleti Szakbizottság
felolvasó ülése**

A matematikai modellezésről



**VESZPRÉMI AKADÉMIAI BIZOTTSÁG
VESZPRÉM, 1993**

**VESZPRÉMI AKADÉMIAI BIZOTTSÁG
MATEMATIKAI ÉS RENDSZERELMÉLETI
SZAKBIZOTTSÁGA**

FELOLVASÓ ÜLÉS

F/22

1992

A matematikai modellezésről
(filozófia, koncepciók, alkalmazások a különböző
szakterületeken)

1992. szeptember
Veszprém

A sorozat eddig megjelent kötetei:

- F/1 Hankiss:** Szemléletváltások az orvostudományban
Horváth: A nukleáris kardiológia jelene és jövője a kardiológiai diagnosztikában
- F/2 Sáringer:** A tudományos gondolkodás és a kutatás
Tóth: A Bakony-hegységben folyó faunisztikai kutatások
- F/3 Méhes:** Újszülöttkori szűrővizsgálatok
Salamon: A korszerű baleseti sebészet a specializálódás tudományos és technikai fejlődés tükrében
- F/4 Kuroll:** Az innováció hatása a tudományos kutatómunkára
Horváth: A növényi géncentrumok és a genetikai bázis
- F/5 Illei:** A szüléset feladatainak, módszereinek és lehetőségeinek változása napjainkban
Szántó: A radiológiai diagnosztika információ tartalma
- F/6 Bordás:** A toxikológia jelene és jövője
Sutka: A genetikai kutatások eredményeinek hasznosítása a növénynevelésben
- F/7 Dobos:** A táj ökonómiai értékelése, különös tekintettel a védett területre
Gelencsér: A távérzékelés felhasználása a környezet elemzéséhez
- F/8 Cholnoky:** A gyermekgyógyászat válaszüton
Bán: Az antikoaguláns terápia gyakorlata és lehetőségei
- F/9 Kárpáti-Varga:** A vízi biotechnika és vízminőségvédelmi jelentősége
- F/10 Fazekas:** Az omlasztásos jövesztési technológia elterjedése a magyar bányászatban 1982. évig
- F/11 Hunyadi:** Herbicid rezisztencia a gyomnövényeknél
Kiss: Újabb irányzatok az ingerületkutatásban
- F/12 Hell:** Homogén katalitikus szelektív szintézisek
- F/13 Almádi:** Xerotherm növényfajok vízháztartási konstitúció típusai
- F/14 Pálffy:** Az úrkúti mangánércelőfordulások néhány geológiai és bányászati kérdései
Péntek: Az úrkúti karbonátos mangánérc dúsítás és feldolgozás a melléktermékek egyidejű hasznosításával
- F/15 Török:** Az újszülöttkori sárgaság megítélésének változása az elmúlt három évtizedben
Nikolics: A gyógyszer fizikai sajátosságainak szerepe a kutatásban és a gyártásban
- F/16 Horváth:** A tanulás motivációjának alakulása általános iskolás tanulóknál
- F/17 Fischl:** A kukorica növénykörtana az elmúlt másfél évtized tükrében
Czímber: A gyomnövényekről napjainkban
- F/18 Gógl:** Az epekövesség
Kántor: A Vater-papilla sztenózisáról és sebészeti kezeléséről
- F/19 Széll:** Az anaesthesiológia és intenzív betegellátás időszzerű kérdései és kilátásai országunkban
Mészáros: A transiens cerebrális isémiás attack (TIA) a belgyógyászati gyakorlatban

- F/20 Győri:** Óvodás gyermekek motoros képességeinek kutatási eredményei
Guseo: A sclerosis multiplex epidemiológiai és immunológiai vizsgálatainak
eredményei Fejér megyében (1957-87)
F/21 VEAB felolvasó ülése az MTA közgyűlésén, 1992.

TARTALOM

Almásy Gedeon: A MATEMATIKAI MODELL MINT A FIZIKAI
VALÓSÁG LEKÉPEZÉSE

Blickle Tibor - Mihálykó Csaba - Lakatos Béla - Ulbert Zsolt:
SZEMCEDISZPERZIÓS RENDSZEREK ÁLTALÁNOS
MÉRLEGEGYENLETE

László Zoltán: AZ APRÍTÁSI FOLYAMATOK MATEMATIKAI
MODELLEZÉSÉVEL KAPCSOLATOS EREDMÉNYEK

Kovács Zoltán - Ködmön István: A MODELLEZÉS FEJLŐDÉSE A
MEGBÍZHATÓSÁG-ELMÉLETBEN

A MATEMATIKAI MODELL MINT A FIZIKAI VALÓSÁG LEKÉPEZÉSE (Vitaindító előadás kibővített szövege)

Almásy Gedeon

Az előadás elsődleges célja az volt, hogy megkísérelje megvilágítani és többé -- kevésbé általánosan megfogalmazni a matematikus kollégáknak, hogy mit ért a rendszertechnikus mérnök matematikai modellen. A helyszínen a vitaindító előadás nem provokált lényegbevágó hozzászólásokat, de ezen dolgozat első kéziratának elolvasása után többen tettek rá észrevételeket. Megköszönöm Friedler Ferenc, Jedlovszky Pál, Tóth János és Uhrin Béla barátainak a kézirat átnézése során tett hasznos megjegyzéseit. Ezek jelentős részét felhasználtam egyes állításaim pontosabbá tételére.

Mi a matematikai modell?

A matematikai modell a valóság egy létező, vagy megvalósítható részének célszerű leképezése a matematikának mint leíró nyelvnek objektumaira, úgy hogy a fizika törvényeit ezen matematikai objektumok közötti relációk képviselik. A teljes részletességében beláthatatlanul bonyolult fizikai valóságot matematikailag kezelhető, algoritmizálható objektumokra, leíró elemekre kell leképeznünk.

Ez a kiinduló állításom hallgatólag feltételezi, hogy a fizikai valóság objektumai leképezhetők matematikai objektumokra. Mivel ez az állítás nem általánosan elfogadott, az eredetileg példákat nem tartalmazó előadásomat saját (elkerülhetetlenül mérnöki) szemléletem részletesebb leírásával kibővítettem.

Tekintsük a fizikai tér kiválasztott részében a benne levő összes lehetséges vegyület és más, nem feltétlenül korlátos számú fizikai alakzat (mint pl. adott molekula különböző alakjai, különböző kolloid tulajdonságú csoportjai, stb., stb.), az entalpia és impulzusvektor (minezek együttesen *extenzív leíró elemek*) eloszlását a három fizikai tér dimenzió és az idő terében. Ez annyi eloszlás, ahány extenzív leíró elemet figyelembe vettünk. Természetesen ezek összessége még nem a teljes valóság leképezése, és az adott térrészt csak a mérnöki gyakorlatban gyakori egyszerűsítő feltételezésekkel (erőtereket, a mikrofizikai szerkezetet és még számtalan egyéb, esetleg általunk ismeretlen fizikai tulajdonságot is figyelmen kívül hagyva) írja le. Nem áll távol a mérnöki szemlélettől az a (természetesen soha nem bizonyítható) feltevés, hogy ilyen módon a valóságot az extenzív leíró elemek számának növelésével egyre pontosabban leírhatjuk, akkor is, ha a teljes leíráshoz megszámlálhatóan, vagy akár nem megszámlálhatóan végtelen sokféle ilyen eloszlásra volna szükség. Ez utóbbiban látom a valóság végetelen bonyolultságát, és egyben egyre mélyebb megismerhetőségét. Egy másik leírási lehetőség, hogy az infinitezimális és/vagy kvantált megmaradó mennyiségekhez, mintegy megcímkezve azokat, rendeljük a hely -- idő és esetleg további tulajdonság koordináták halmazát (ezt nevezik az áramlástanban "szubsztanciális" leírásmódnak). Feltehetőleg ezen leírási módok mellett még számos (vagy éppen számtalan) más is lehetséges. Ha ezt a feltételezést elfogadjuk, akkor a fizikai valóság extenzív leíró elemei kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők egy matematikai objektumokból álló halmaz elemeivel. A valóság leírt része ismert okból magát a modellt nem tartalmazhatja.

Leképezésünk első lépéseként *véges számú leíró elemet* választunk ki és a valóság elemeit ezen osztályokba soroljuk. Az alkalmazott leképezés a halmazelmélet fogalomrendszere szerint ui. *osztályozás*: egy bővebb halmaz részhalmazaihoz a képhalmaz egy-egy elemét rendeljük. Ez

utóbbiak a matematikai modellben igen különbözök lehetnek: leggyakrabban, de nem feltétlenül, egész vagy valós számok vagy azok részhalmazai, azok sokdimenziós vektorai, egy vagy több független változós függvények, valószínűségi vagy sűrűség mezők, esetleg két vagy többértékű logikai értékek vagy mindezek halmazai.

Korrekt matematikai modellben a fizika törvényeit a modell objektumai közötti relációk képviselik. Ebből az következik, hogy a modellt akkor nevezhetjük pontosnak, ha a relációk alkalmazásának sorrendje kommutatív olyan értelemben, hogy a valóság egy rész-"halmaz"-ának leképezésével ugyanazt a részhalmazt nyerjük a képtérben, akár először képezzük le a valóságot a modellre és alkalmazzuk rá a modellre értelmezett relációt, akár először alkalmazzuk a valóságbeli relációt (vagyis tekintjük a fizikai világ egy létező vagy lehetséges folyamatát vagy annak egy részhalmazát) és ezt képezzük le a modell elemeinek terére.

Jelölje X a valóság, Z a modell objektumainak halmazát, T a valóságban érvényes fizikai törvényeket, mint a valóság objektumaira értelmezett relációkat, t a modell által képviselt relációkat, G a valóság extenzív leíró elemeinek leképezését a modell elemeire, végül $x \in X$ a relációkat kielégítő valóság objektumok halmazát, $z \in Z$ a modell relációkat kielégítő modell objektumok halmazát. Azt kívánánk tehát, hogy jelöléseinkkel legyen

$$G \circ T = t \circ G,$$

azaz

$$\hat{\beta}_{GT} = G(T(X)) \quad \text{és} \quad \hat{\beta}_{tG} = t(G(X))$$

$$\hat{\beta}_{GT}, \hat{\beta}_{tG} \in Z\text{-vel}$$

$$\hat{\beta}_{GT} = \hat{\beta}_{tG}$$

(lásd a 1. ábrát is). Ezt a kívánságot általában pontosan nem lehet kielégíteni: a modellek többé -- kevésbé mindig pontatlanok.

Az, hogy a *valóság* egy részéről beszélünk, azt jelenti, hogy megkülönböztetjük az általunk vizsgált és a modellel leírni kívánt fizikai objektumot és annak komplementer halmazát, a vizsgált objektum *környezetét*. Mivel a környezet hatását a modellek nagy többségében figyelembe kell venni, és az elvileg a szóbanforgó objektumot kivéve az egész világmindenség, azt is célszerűen le kell képezni lényegében az előbbi gondolatmenetet alkalmazva a *bemenetek* (inputok) és *kimenetek* (outputok) halmazaira. Már itt megjegyezzük, hogy a fizikai valóságban a bemenet és kimenet közötti megkülönböztetésnek nincs jelentősége és ezért a modell bemenetének ill. kimenetének megválasztása célszerűségi kérdés és nem kötődik szükségszerűen a vizsgált objektumba fizikailag belépő ill. kilépő áramok irányához.

A leképezés triviális esetektől eltekintve nem lehet kölcsönösen egyértelmű, mivel az osztályozás művelete csak olyan értelemben megfordítható, hogy egy modell elemhez a valóság egy részét rendeli. Ettől eltekintve is a modellezés alapkérdése a modell pontossága illetve hibája, vagyis az, hogy a modell *milyen mértékben relációtartó*. Ezt a leképezés kommutativitásának hibájára vonatkozó alkalmas egyértelmű távolság definícióval volna célszerű jellemezni.

A matematikai modell létekezésének lépései

A matematikai modellt osztályokba sorolási műveletek sorozatával hozzuk létre. Az alábbi felosztás az előadó saját, gyakorlati tevékenységének elemzéséből adódó szemléletét tükrözi. Az alább felsorolt lépéseket a mellékelt 2. ábra szemlélteti.

A gyakorlati modellalkotás során az alábbi gondolatmenetet addig ismételjük ("iteráljuk"), amíg a kapott modellt a valósággal összevetve a célnak megfelelőt nem találunk. Az ábrán ez az iteráció nem szerepel.

A modellalkotási tevékenységgel kapcsolatban nem foglalkozunk a valóság megismerésével. Feltételezzük, hogy a szükséges ismeretekkel és adatokkal a modell létrehozója rendelkezik.

1-

A valóság leképezésének első fokozata a *szakmai valóságra* való leképezés. Ez az adott tudományág ill. szakma alapvető szemléletét tükrözi és a modellek szintjén a legáltalánosabb. Lényege a leendő alkalmazás szempontjából jelentőséggel nem bíró leíró elemek elhagyása, a fizikai összefüggések konkrét figyelembevétele nélkül.

2-

A valóság leképezésének második fokozata a *kognitív* (megismerési) *modell*-re történő leképezés. A kognitív modell mindazon alapvető extenzív leíró elem és összefüggés összessége, amit a modell alkotója a folyamat leírása szempontjából lényegesnek ítél, függetlenül az így adódó matematikai összefüggések bonyolultságától és algoritmizálási lehetőségeitől.

Annyira *egzak*t egy tudományterület, amennyire *axiomatikus*an *felépített* és amennyire van erre alapozott kognitív modellje. A mérnöki tudományokban az axiómák a sok tapasztalat alapján elfogadott, az adott szakma korlátain belül vitathatatlanak posztulált igazságok (mint pl. a megmaradási törvények).

A konkrét objektumot meghatározó információk összessége a kognitív modell szintjén olyan részletességet igényelne, ami gyakorlatilag megismerhetetlen.

Milyen leíró elemekkel írja le a világot a

- vegyészmérnök:

kémiai elemek, vegyületek tömege, energiája, azok térbeli eloszlása és sűrűsége, nyomás, áramlás, átadás, ...

- biotechnológus:

a fentiekén kívül: mikrobák fajtái, tulajdonság eloszlások, kolloid jellemzők, kompartmentek, ...

- gépészmérnök és sztatikus mérnök:

méretetek, tömeg, impulzus, nyomatékok, erők, elmozdulások, rezgések, ...

- irányítástechnikus:

irányított szakasz, jelek, állapotváltozók, szabályozott körök, ...

A modellt alkotó összefüggések általános érvényű *megmaradási egyenletekből*, *egyensúlyi összefüggésekből* és egyéb, a specifikus *dinamikát leíró összefüggésekből* állnak. Ilyenek a teljesség igénye nélkül az alábbiak.

- A vegyészmérnök számára:

az egyensúlyi és megmaradási egyenletek, a reakciókinetikai összefüggések, a transzportegyenletek, a részecske tulajdonság eloszlás transzportegyenletei

- A biotechnológus számára:

az előzőkön felül a "mikroba kinetika", a mikroba tulajdonságok eloszlásainak transzportegyenletei

- A gépészmérnök és sztatikus mérnök számára:

az energia megmaradási egyenletek, az erő és nyomaték mérlegek, a rugalmas és rugalmatlan deformáció összefüggései, a nyomaték és komponensátadási összefüggések

- Az irányítástechnikus számára:

a Kalman által alkalmazott axiómák, úgy mint az okság törvénye, az időbeli konkatenálhatóság, ill. a folyamatok Markov tulajdonsága. Az adott feladat egyéb, az előzőekben felsorolt alapvető összefüggéseit legtöbbször nem alkalmazzák.

3 -

A kognitív modellt leképezzük *munkamodellé*. Ebben alkalmazzuk az *adott* valóságos objektummal kapcsolatos *kvalitatív* ismereteinket a modell egyszerűsítésére. Az ennek során esetleg felhasználható egyszerűsítési lehetőségek pl. az alábbiak.

- vegyészmérnök:

tökéletesnek tekinthető keveredés, térbeli szimmetriák, teljesen eltolt egyensúlyok, bizonyos kémiai reakciók adott körülmények között nem játszódnak le, ...

- biotechnológus:

egységes mikroba állapotok feltételezése, a mikroba fejlődés szakaszokra bontása, ...

- irányítástechnikus:

a fizikai tér diszkrétizálása, linearizálás

A leképezések sorozatában ide sorolhatjuk azt a mérnöki gyakorlatban gyakori egyszerűsítést is, hogy a mindig időbeli és időben elkerülhetetlenül többé-kevésbé változó valóságot az időt független változóként nem tartalmazó sztatikus modellel közelítjük (sztatikus, állandósult állapotot feltételező modell). Ez az időfüggvények valós számokra való leképezésének tekinthető, ami ismét osztályokba sorolási művelet és a mérnöki szemlélet szerint akkor engedhető meg, ha az idő szerinti változások hatásai a modell értelmezési tartományában a megoldandó feladat szempontjából elhanyagolhatók.

A munkamodell kialakításának leglényegesebb szempontja, hogy a kapott modell *algoritmizálható* és *elfogadható idő alatt számítható* legyen.

4-

Ha gyakran ismétlődő feladatról van szó, a gyakorlati felhasználáshoz a munkamodellt tovább kell egyszerűsíteni. Ilyenkor olyan modell struktúrárt kell találni, amelyik lehetőleg kevés paraméterrel, egyszerű algoritmussal (gyakran a futási időn kívül a program terjedelme is lényeges szempont!) éri el a szükséges pontosságot. A célszerű struktúra megkeresésére *elvi* módszert nem ismerünk és olyan valószínűleg nem is létezik. A leggyakoribb megoldás: néhány előre definiált függvény paramétereit optimálisan (?) illetve, azok közül a legjobban illeszkedő közelítő függvényt választjuk. Leggyakoribb a munkamodell linearizálása (ide tartozik dinamikus modellek esetében a Laplace transzformáció alkalmazása is), vagy többváltozós polinommal, racionális törtfüggvénnyel vagy ezek exponenciális vagy logaritmus függvényeivel való numerikus közelítése.

Megjegyzések

Fekete doboz (black-box) modellek

A fent ismertetett lépések kihagyásával, a valóság közvetlen numerikus közelítésével kapott modellt nevezik *fekete doboz (black box) modellnek*. Ide szokás sorolni azokat a modelleket is, amelyeket ugyan a fent leírt lépéseken keresztül nyertünk, de végül is annyira egyszerűsítettünk, hogy együtthatói mögött más fizikai tartalom, mint hogy azok a függő változók függetlenek szerinti parciális deriváltjai, nincsen.

Determinisztikus -- sztochasztikus modellek

Sztochasztikus modellre akkor van szükség, ha a valóság leírandó része olyan folyamatot és/vagy környezeti hatást is tartalmaz, amit a gyakorlati alkalmazás során *elvileg lehetetlen* pontosan előre meghatározni. Ha a valóság

sztochasztikus, az esetleges *determinisztikus modell* annak osztályokba sorolt képe: eloszlásokat számokra, sztochasztikus folyamatokat és feltételes eloszlásokat függvényekre képez le, természetesen ebben az esetben sem lehet általában semmilyen értelemben kölcsönös egyértelműséget várni.

Ha gyakorlati problémáink megoldásával kapcsolatban el is tekintünk a mikrovilág sztochasztikus voltától, a makrovilág valóságát leképezéseink osztályba soroló volta (megszokott mérnöki szóhasználattal elhanyagolásai) miatt is gyakran *találjuk* sztochasztikusnak. A modellalkotás egyik alapvető, de tisztázatlan kérdése, hogy mely hatásokat *szabad* sztochasztikusnak tekinteni. A fizikai megfontolások sokszor nem meggyőzők a folyamatok sztochasztikus voltának alátámasztására vagy megcáfolására és gyakran csak megfigyeléseink hiányosságát mutatják. Ugyanakkor a probléma eldöntésére gyakorlati célokra alkalmas tételt nem ismerünk, mert a matematika erre vonatkozó egzakt tételei a gyakorlatban ki nem számítható improprius integrálokat tartalmaznak. Ezért ma a döntés a modellt létrehozó mérnök *szubjektív* megítélésén múlik, a folyamat megfigyelésére és az észlelések értékelésére alapozva.

Talán a *káoszelmélet* fog egyszer erre a kérdésre az eddigieknél egzaktabb választ adni, legalább is egyszerűbb modellek esetében.

Nem analitikus modellek

A valós világ fizikai folyamatai (beleértve a kémiai és biológiai folyamatokat is) sokszor leírhatók kielégítő pontossággal analitikus függvényekkel. Az objektum leírásában gyakran szükségszerűen előforduló ugrások vagy törések legtöbbször mégis megnehezítik, vagy gyakorlatilag lehetetlenné teszik az analitikus elemzést. Hasonló nehézséget visz a tárgyalásba, ha egyes részmodellek csak

numerikus módszerekkel oldhatók meg. Szerepelhetnek pl. a modellekben olyan, szakaszonként különböző képletekkel leírt összefüggések, amiket egységes, matematikai módszerekkel analizálható képlet alakban praktikusán szintén nem lehet leírni (a spline függvények is ilyenek). Ezért a modellezendő objektumok matematikai modelljei sok esetben nem írhatók le egyetlen képlettel, algebrai egyenletrendszerrel, közönséges vagy parciális differenciálegyenletek vagy integrálegyenletek képletszerű explicit rendszerével, hanem csak meglehetősen összetett, logikai feltételek szerint is elágazó algoritmusokkal.

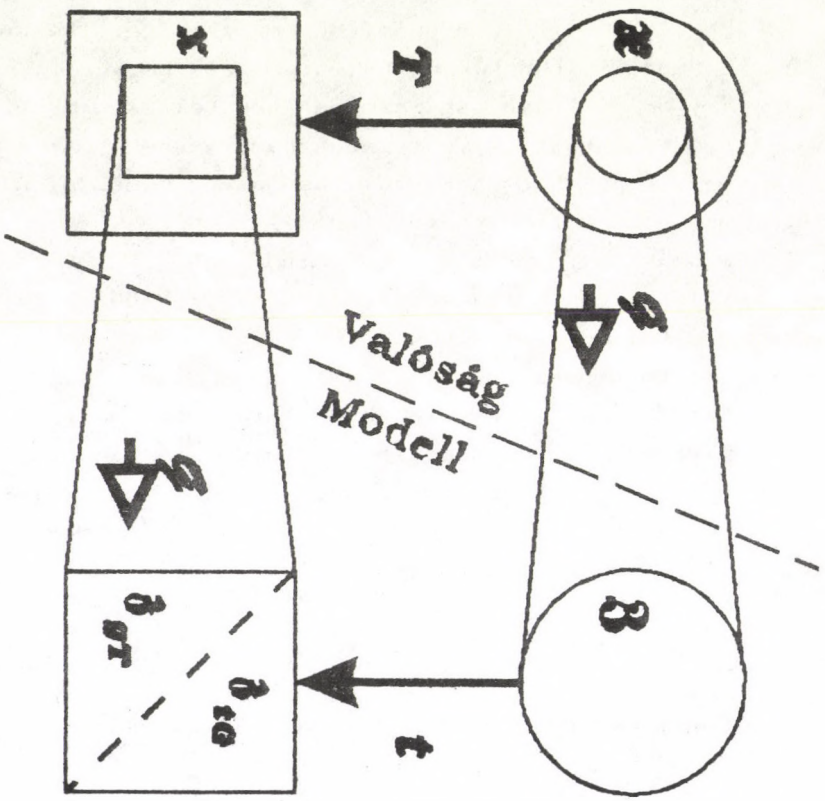
Inverz és részben inverz modellek

Gyakran van szükség tervezési és döntési feladatok megoldásához inverz, vagy részben inverz modellekre. Részben inverz modellen a valóság olyan képét értjük, amely az eredeti modellhez hasonlóan közelítőleg relációtartó, de amelyben a modell független ill. függő változói nem mind azonosak a valós világbeli bemenő ill. kimenő áramokkal, vagy okokkal ill. okozatokkal. Ha egy numerikus modell a leíró mennyiségek közötti egy vagy többváltozós invertálható függvénykapcsolat, akkor inverz modellen értelemszerűen ennek inverzét értjük. De mivel ez a függvénykapcsolat az esetek többségében nem invertálható, pl. azért nem, mert a modell független változóinak száma a függőkénél nagyobb, az invertáláshoz a függő változók megválasztásával egyidejűleg az eredeti függetlenek egy részét továbbra is rögzíteni kell. Tervezési feladatok során az is lehetséges, hogy a fizikai kimenetek (okozatok) egy részét független, más részét függő változónak tekintjük. A tervezési feladatok megoldására szolgáló modell esetében igen előnyös, ha a változók az éppen aktuális feladatnak megfelelően sorolhatók függő -- független osztályokba. Ez lineáris (valós vektorváltozós) modellek esetében nem jelent nehézséget, de nemlineáris esetben általánosan csak numerikus egyenletrendszer megoldó algoritmusokkal valósítható meg.

Modellhiba

A modell hibája a leképezés és a relációk alkalmazásának kommutatív voltától való eltérése; ennek jellemzésére alkalmas módon definiált távolságot volna célszerű tekinteni. Leggyakrabban a valóságos objektum mérésekkel leképezett egyes mennyiségeit és modellel leképezett objektum megfelelő számított mennyiségeit hasonlítják össze és modellhibának ezek különbségének négyzetét tekintik. Az így adódó "távolság" azonban nem teljesen egzakt fogalom és nem tekinthető egyértelmű hibamértéknek, már csak azért sem, mert függ az összehasonlítás alapjául szolgáló önkényesen megválasztott mintavételtől és mértékegység rendszertől, a minták súlyozásától, és mindezekon felül az így kapott különbségek tartalmazzák a mérési hibákat is. Tervezett, fizikailag nem létező objektum esetében még az előbb említett összehasonlításra sincs lehetőség, és a modell hibáját csak a kidolgozása során felhasznált részmodellek hibájából lehet becsülni. Ez a becslés azonban igen gyakran elmarad, egyrészt az összefüggések bonyolultságából adódó nehézségek miatt, másrészt azért, mert sokszor az alkalmazott összefüggések hibája sem ismert.

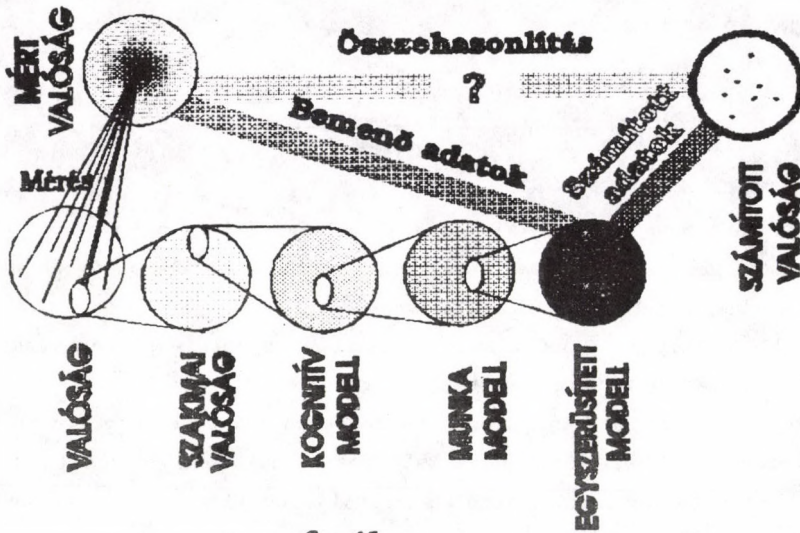
A modellhibával kapcsolatosan felvetődő kérdések egyértelmű elvi tisztázása fontos lenne a matematikai modellek egységes elbírálása és objektív összehasonlítása szempontjából.



1. ábra

A teképezések kommutativitásához
(Jelölések a szövegben)

A matematikai modell létrehozásának fázisai



2. ábra

Szemcsediszperziós rendszerek általános mérlegegyenlete

Blickle Tibor, Mihálykó Csaba, Lakatos Béla, Ulbert Zsolt

Bevezetés

A vegyipari műveletek és kémiai reakciók matematikai modellezésére általánosan elfogadottak az ún. Damköhler egyenletek. Például elsőrendű kémiai reakció esetén:

$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial u(x,t)c(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial K \frac{\partial c(x,t)}{\partial x}}{\partial x} + kc = 0. \quad (1)$$

Az ilyen típusú egyenletek alkalmazásának két feltétele van:

1. Adott x helyen, t időpontban a jellemző értéke - általánosságban $\eta(x,t)$, jelen esetben $c(x,t)$ - jól definiált.
2. Az adott x helyen Δt idő alatt a jellemző egyértelműen meghatározható $\Delta \eta$, esetünkben Δc értékkel változik meg.

Sok esetben - szemcsediszperziós rendszerekben szinte mindig - mind a két feltétel nem teljesül. Például kristályosításnál nem teljesül az első feltétel, mert a szemcséknek méret szerinti eloszlása van - esetünkben a számoosságra írjuk fel - és ezért az ún populációs mérleget használják:

$$\frac{\partial n(x,t,L)}{\partial t} + \frac{\partial u(x,t,L)n(x,t,L)}{\partial x} - \frac{\partial K \frac{\partial n(x,t,L)}{\partial x}}{\partial x} + \frac{\partial L(x,t,L)n(x,t,L)}{\partial L} = 0. \quad (2)$$

Az őrlésnél a kettős feltétel nem teljesül, mert a törés ξ méretről $S(x,t,\xi)$ valószínűséggel történik, és különböző ζ méretre $B(x,t,\xi,\zeta)$ valószínűséggel, így:

$$\frac{\partial v(x, t, L)}{\partial t} + \frac{\partial u(x, t, L)v(x, t, L)}{\partial x} - \frac{\partial K \frac{\partial v(x, t, L)}{\partial x}}{\partial x} +$$

$$+ S(x, t, L)v(x, t, L) - \int_L^L S(x, t, \xi)v(x, t, \xi) \frac{\partial B(x, t, \xi, L)}{\partial L} d\xi = 0.$$

(3)

Modellegyenleteinknél az órlési egyenletből indultunk ki. Megállapítottuk, hogy megfelelő módosítással alkalmas a forgókemencében, gördülő rétegben áramló szemcse leírására, két fázisra alkalmazva a gázok portalanításának modellezésére. A végleges modellünk akkor is alkalmazható, ha a folyamat többfajta szemcse vagy fluidum elem érintkezésének hatására megy végbe, mint pl. a kiegyenlítődés, véges mikrokeveredés, diszperziós kristálynövekedés és a granulálás részfolyamatai.

Matematikailag levezettük az általános modellből, hogy ha a 2. feltétel teljesül, vagyis ha $B(x, t, \xi, \zeta)$ a $\zeta = \xi + \Delta\xi$ helyen Dirac delta, akkor a (2) típusú, ha az 1. feltétel is teljesül, vagyis $n(x, t, L)$ az $L = \bar{L}$ helyen Dirac delta, akkor az (1) típusú egyenleteket kapjuk, így a modell valóban a vegyipari műveletek általános mérlegegyenlet rendszerének tekinthető.

Eredményeinket a következőben mutatjuk be.

A rendszerben végbemenő folyamatokat először egyes szemcsékre írjuk fel, majd erről az elemi modelltől térünk át a rendszer mérlegegyenleteire. A kezelésmódot kiterjesztjük a szemcséken kívül fluidum elemekre is, így lehetőség nyílik a véges mikrokevertségű fluidum rendszerek modellezésére is. Megmutatjuk, hogy a fluidum mérlegegyenletek végtelen mikrokeveredés esetén a megszokott alakba mennek át.

A modellben megkülönböztetjük az elemek "minőségi" tulajdonságait, pl.: szemcse, granulum, folyadék elem, vagy pl. szemcse a gázban, szemcse a folyadékban.

A rendszert az elemi adott folytonos tulajdonságok (jellemzők) szerinti, időtől függő eloszlásai és eloszlás sűrűségei jellemzik, általánosságban:

$$\frac{d\Gamma(\eta, t)}{d\eta} = \gamma(\eta, t).$$

(4)

Ezek a tulajdonságok (η) pl.: L méret, g tömeg, c koncentráció, T hőmér-

séklet.

Az eloszlások fajtái (γ): $n(t, \eta)$ számosság, $v(t, \eta)$ térfogat.

1. Mérlegegyenletek

A rendszerben lévő elemek folyamatokban vesznek részt. A tovább már nem bontható, független folyamatokat elemi folyamatoknak nevezzük. Bizonyítottuk, hogy az összetett folyamatok átalakulási tagjai (q) az elemi folyamatok algebrai összegei.

Az elemi folyamatokban lejátszódó átalakulásokat két függvénytípussal jellemezzük. A kiindulási elemek, melyek azonos és különböző minőségi tulajdonságúak lehetnek, η folytonos tulajdonságait tartalmazó vektort jelöljük $\underline{\xi}$ - vel. A keletkező elemek szintén azonos és különböző minőségi tulajdonságúak lehetnek. Jelöljük valamely minőségi tulajdonságú keletkező elem η folytonos tulajdonságát ζ - val. A t időpontban az "a" minőségű elemek, melyek η folytonos tulajdonsága ${}_a\xi$, ${}_a^S(\underline{\xi}, t, \Delta t)$ hányada (átalakulási hányad) változik meg, elfogy vagy keletkezik, Δt idő alatt. A Δt idő alatt keletkezett "a" minőségű elemek, melyek η folytonos tulajdonsága ${}_a\zeta$, ${}_a^B(\underline{\xi}, {}_a\zeta, t, \Delta t)$ hányada (változási hányad) ${}_a\zeta$ tulajdonságú. A módszer lényegét egy egyszerű, de szinte minden szemcse-diszperziós műveletet magában foglaló elemi folyamaton mutatjuk be, amikor a folyamat két különböző minőségi tulajdonságú elem között játszódik le, és eredményeként két különböző minőségi tulajdonságú elem keletkezik.

$$\begin{array}{ll} {}_a\gamma({}_a\xi, t) & {}_c\gamma({}_c\zeta, t) \\ {}_b\gamma({}_b\xi, t) & {}_d\gamma({}_d\zeta, t) \end{array}$$

Az S átalakulási hányadok ebben az esetben:

$$\begin{array}{ll} {}_a^S({}_a\xi, {}_b\xi, t, \Delta t), & {}_b^S({}_a\xi, {}_b\xi, t, \Delta t), \\ {}_c^S({}_a\xi, {}_b\xi, t, \Delta t), & {}_d^S({}_a\xi, {}_b\xi, t, \Delta t). \end{array}$$

A B változási hányadok:

$${}_c^B({}_a\xi, {}_b\xi, {}_c\zeta, t, \Delta t), \quad {}_d^B({}_a\xi, {}_b\xi, {}_d\zeta, t, \Delta t).$$

A differencia mérlegek:

$$\begin{aligned}
 & \int_a^{a^{\eta+\Delta_a\eta}} \left[{}_a\gamma({}_a\xi, t+\Delta t) - {}_a\gamma({}_a\xi, t) \right] d_a\xi = {}_aI({}_a\eta, \Delta_a\eta, t, \Delta t) = \\
 & = - \int_a^{a^{\eta+\Delta_a\eta}} \int_{b^{\eta_m}}^{b^{\eta_M}} {}_a\gamma({}_a\xi, t) {}_b\gamma({}_b\xi, t) {}_aS({}_a\xi, {}_b\xi, t, \Delta t) d_b\xi d_a\xi
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{b^{\eta}}^{b^{\eta+\Delta_b\eta}} \left[{}_b\gamma({}_b\xi, t+\Delta t) - {}_b\gamma({}_b\xi, t) \right] d_b\xi = {}_bI({}_b\eta, \Delta_b\eta, t, \Delta t) = \\
 & = - \int_{a^{\eta_m}}^{a^{\eta_M}} \int_{b^{\eta}}^{b^{\eta+\Delta_b\eta}} {}_a\gamma({}_a\xi, t) {}_b\gamma({}_b\xi, t) {}_bS({}_a\xi, {}_b\xi, t, \Delta t) d_b\xi d_a\xi
 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{c^{\eta}}^{c^{\eta+\Delta_c\eta}} \left[{}_c\gamma({}_c\xi, t+\Delta t) - {}_c\gamma({}_c\xi, t) \right] d_c\xi = {}_cI({}_c\eta, \Delta_c\eta, t, \Delta t) = \\
 & = \int_{c^{\eta}}^{c^{\eta+\Delta_c\eta}} \int_{a^{\eta_m}}^{a^{\eta_M}} \int_{b^{\eta_m}}^{b^{\eta_M}} {}_a\gamma({}_a\xi, t) {}_b\gamma({}_b\xi, t) {}_cS({}_a\xi, {}_b\xi, t, \Delta t) {}_cB({}_a\xi, {}_b\xi, {}_c\zeta, t, \Delta t) d_b\xi d_a\xi d_c\zeta
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{d^{\eta}}^{d^{\eta+\Delta_d\eta}} \left[{}_d\gamma({}_d\xi, t+\Delta t) - {}_d\gamma({}_d\xi, t) \right] d_d\xi = {}_dI({}_d\eta, \Delta_d\eta, t, \Delta t) \\
 & = \int_{d^{\eta}}^{d^{\eta+\Delta_d\eta}} \int_{a^{\eta_m}}^{a^{\eta_M}} \int_{b^{\eta_m}}^{b^{\eta_M}} {}_a\gamma({}_a\xi, t) {}_b\gamma({}_b\xi, t) {}_dS({}_a\xi, {}_b\xi, t, \Delta t) {}_dB({}_a\xi, {}_b\xi, {}_d\zeta, t, \Delta t) d_b\xi d_a\xi d_d\zeta
 \end{aligned} \tag{8}$$

Az S és B függvényeknek olyanoknak kell lenniük, hogy

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{I(\eta, \Delta\eta, t, \Delta t)}{\Delta t} = \text{véges} \quad (9)$$

minden elemre. Ez a feltétel általánosságban teljesül, ha

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S}{\Delta t} = \overset{\circ}{S} \text{ véges,} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} B = \overset{\circ}{B} \text{ véges.} \quad (10)$$

Az előbbieket szerint

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \lim_{\Delta\eta \rightarrow 0} \frac{I}{\Delta\eta \Delta t} = \frac{\partial \gamma}{\partial t}. \quad (11)$$

Igy kapjuk a következő populációs mérlegeket:

$$\frac{\partial_a \gamma(a, \eta, t)}{\partial t} = - \gamma(a, \eta, t) \int_{b^{\eta_m}}^{b^{\eta_M}} \gamma(b, \xi, t) \overset{\circ}{S}(a, \eta, b, \xi, t) d_b \xi \quad (12)$$

$$\frac{\partial_b \gamma(b, \eta, t)}{\partial t} = - \gamma(b, \eta, t) \int_{a^{\eta_m}}^{a^{\eta_M}} \gamma(a, \xi, t) \overset{\circ}{S}(a, \xi, b, \eta, t) d_a \xi \quad (13)$$

$$\frac{\partial_c \gamma(c, \eta, t)}{\partial t} = \int_{a^{\eta_m}}^{a^{\eta_M}} \int_{b^{\eta_m}}^{b^{\eta_M}} \gamma(a, \xi, t) \gamma(b, \xi, t) \overset{\circ}{S}(a, \xi, b, \xi, t) \overset{\circ}{C}^B(a, \xi, b, \xi, c, \eta, t) d_b \xi d_a \xi \quad (14)$$

$$\frac{\partial_d \gamma(d, \eta, t)}{\partial t} = \int_{a^{\eta_m}}^{a^{\eta_M}} \int_{b^{\eta_m}}^{b^{\eta_M}} \gamma(a, \xi, t) \gamma(b, \xi, t) \overset{\circ}{S}(a, \xi, b, \xi, t) \overset{\circ}{D}^B(a, \xi, b, \xi, d, \eta, t) d_b \xi d_a \xi \quad (15)$$

Ha csak egyfajta minőségű kiindulási elem vesz részt a folyamatban, az egyenletek a következők:

$$\frac{\partial_a \gamma(a, \eta, t)}{\partial t} = - {}_a \gamma(a, \eta, t) \overset{\circ}{S}(a, \eta, t) \quad (16)$$

$$\frac{\partial_c \gamma(c, \eta, t)}{\partial t} = \int_{a^{\eta_m}}^{a^{\eta_M}} {}_a \gamma(a, \xi, t) \overset{\circ}{S}(a, \xi, t) \overset{\circ}{S}(a, c, \eta, t) d_a \xi \quad (17)$$

$$\frac{\partial_d \gamma(d, \eta, t)}{\partial t} = \int_{a^{\eta_m}}^{a^{\eta_M}} {}_a \gamma(a, \xi, t) \overset{\circ}{S}(a, \xi, t) \overset{\circ}{S}(a, d, \eta, t) d_a \xi \quad (18)$$

Ha csak egyfajta minőségű elem keletkezik akkor $\overset{\circ}{S}(a, \xi, d, \zeta, t) \equiv 0$.

Ha a populációs mérlegeket szorozzuk η^j -vel és integráljuk η_{\min} -től η_{\max} -ig η szerint, a momentum mérlegegyenleteket kapjuk:

$$\frac{d_a M_j(t)}{dt} = - \int_{a^{\eta_m}}^{a^{\eta_M}} \int_{b^{\eta_m}}^{b^{\eta_M}} a^{\eta^j} {}_a \gamma(a, \eta, t) {}_b \gamma(b, \xi, t) \overset{\circ}{S}(a, \eta, b, \xi, t) d_b \xi d_a \eta \quad (19)$$

$$\frac{d_b M_j(t)}{dt} = - \int_{a^{\eta_m}}^{a^{\eta_M}} \int_{b^{\eta_m}}^{b^{\eta_M}} b^{\eta^j} {}_a \gamma(a, \xi, t) {}_b \gamma(b, \eta, t) \overset{\circ}{S}(a, \xi, b, \eta, t) d_b \eta d_a \xi \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{d_c M_j(t)}{dt} &= \int_{c^{\eta_m}}^{c^{\eta_M}} \int_{a^{\eta_m}}^{a^{\eta_M}} \int_{b^{\eta_m}}^{b^{\eta_M}} c^{\eta^j} {}_a \gamma(a, \xi, t) {}_b \gamma(b, \xi, t) \overset{\circ}{S}(a, \xi, b, \xi, t) \cdot \\ &\quad \cdot \overset{\circ}{S}(a, b, \xi, c, \eta, t) d_b \xi d_a \xi d_c \eta \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{d_d M_j(t)}{dt} &= \int_{d^{\eta_m}}^{d^{\eta_M}} \int_{a^{\eta_m}}^{a^{\eta_M}} \int_{b^{\eta_m}}^{b^{\eta_M}} d^{\eta^j} {}_a \gamma(a, \xi, t) {}_b \gamma(b, \xi, t) \overset{\circ}{S}(a, \xi, b, \xi, t) \cdot \\ &\quad \cdot \overset{\circ}{S}(a, b, \xi, d, \eta, t) d_b \xi d_a \xi d_d \eta \end{aligned} \quad (22)$$

2. Speciális esetek

Az egyes szemcsediszperziós műveleteknél különböző speciális feltételek teljesülnek, melyek egyszerűsítik a mérlegegyenleteket. A legfontosabbak a következők: (az egyszerűbb hivatkozások miatt kódokat is megadunk, a levezetéseket nem közöljük).

A) A minőségi tulajdonságok speciális esetei

A1) A folyamat két azonos minőségi tulajdonságú

elem között megv. végbe: "a" = "b"

Ekkor:

$$\frac{\partial_a \gamma(a, \eta, t)}{\partial t} = -_a \gamma(a, \eta, t) \int_{a^{\eta_m}}^{a^{\eta_M}} \gamma(a, \xi, t) \overset{\circ}{S}(a, \eta, a, \xi, t) d_a \xi. \quad (23)$$

Ilyen eset például amikor két primer szemcse granulummá egyesül.

A2) A folyamatban fogyó és keletkező elemek azonos

minőségi tulajdonságúak: "a" = "c"

$$\begin{aligned} \frac{\partial_a \gamma(a, \eta, t)}{\partial t} = & -_a \gamma(a, \eta, t) \int_{b^{\eta_m}}^{b^{\eta_M}} \gamma(b, \xi, t) \overset{\circ}{S}(b, \xi, a, \eta, t) d_b \xi + \\ & + \int_{a^{\eta_m}}^{a^{\eta_M}} \int_{b^{\eta_m}}^{b^{\eta_M}} \gamma(a, \xi, t) \gamma(b, \xi, t) \overset{\circ}{S}(a, \xi, b, \xi, t) \overset{\circ}{B}(a, \xi, b, \xi, a, \eta, t) d_b \xi d_a \xi \end{aligned} \quad (24)$$

Például kristálynövelés.

Ha A1 és A2 is teljesül egyidejűleg, akkor:

$$\frac{\partial {}_a\gamma({}_a\eta, t)}{\partial t} = - {}_a\gamma({}_a\eta, t) \overset{\circ}{S}({}_a\eta, t) + \frac{1}{2} \int_{a^{\eta_m}}^{a^{\eta_M}} \int_{a^{\eta_m}}^{a^{\eta_M}} {}_a\gamma({}_a\xi, t) {}_a\gamma({}_a\hat{\xi}, t) \cdot \overset{\circ}{S}({}_a\xi, {}_a\hat{\xi}, t) \overset{\circ}{B}({}_a\xi, {}_a\hat{\xi}, {}_a\eta, t) d_a\xi d_a\hat{\xi} .$$

(25)

Pl. granulumok egyesülése.

B) Az átalakulások speciális esetei

B1) Egyirányú változás

$$\overset{\circ}{B}({}_a\xi, {}_b\xi, {}_c\zeta, t) = 0, \quad \text{ha} \quad {}_c\zeta \leq {}_a\xi \quad \text{vagy} \quad {}_c\zeta \geq {}_a\xi$$

(26)

Igy:

$$\frac{\partial {}_c\gamma({}_c\eta, t)}{\partial t} = \int_{a^{\eta_m}}^{a^{\eta}} \int_{b^{\eta_m}}^{b^{\eta_M}} {}_a\gamma({}_a\xi, t) {}_b\gamma({}_b\xi, t) \overset{\circ}{S}({}_a\xi, {}_b\xi, t) \overset{\circ}{B}({}_a\xi, {}_b\xi, {}_c\eta, t) d_b\xi d_a\xi ,$$

(27)

vagy:

$$\frac{\partial {}_c\gamma({}_c\eta, t)}{\partial t} = \int_{a^{\eta}}^{a^{\eta_M}} \int_{b^{\eta_m}}^{b^{\eta_M}} {}_a\gamma({}_a\xi, t) {}_b\gamma({}_b\xi, t) \overset{\circ}{S}({}_a\xi, {}_b\xi, t) \overset{\circ}{B}({}_a\xi, {}_b\xi, {}_c\eta, t) d_b\xi d_a\xi .$$

(28)

Például oldás, vagy kristálynövelés, diszperziós áramlás.

B2) Szimmetrikus változás

Ekkor:

$$\overset{\circ}{B}({}_a\xi, {}_b\xi, {}_c\zeta, t) \equiv \overset{\circ}{B}({}_c\xi, {}_b\xi, {}_a\zeta, t) .$$

Ilyen eset pl. a diszperziós keveredés.

B3) Lokális változás

Teljesül A2, B1 és $S \equiv 1$, továbbá

$B(a\xi, b\xi, a\zeta, t, \Delta t)$ a $a\zeta = a\xi + \Delta_a\eta$ helyen Dirac delta, és

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta_a\eta}{\Delta t} = a\overset{\circ}{\eta}(a\xi, b\xi, t) \text{ véges, ekkor:} \quad (29)$$

$$\frac{\partial_a \gamma(a\eta, t)}{\partial t} = \frac{\partial \left[a\gamma(a\eta, t) \int_{b\eta_m}^{b\eta_M} b\gamma(b\xi, t) a\overset{\circ}{\eta}(a\eta, b\xi, t) d_b\xi \right]}{\partial_a \eta} \quad (30)$$

Mint látjuk a 9. feltétel ekkor is teljesül.

Pl. a konvektív áramlás.

B4) Lokális szimmetrikus változás

Teljesül A2; B2 és $S \equiv 1$, továbbá

$aB(a\xi, b\xi, a\zeta, t, \Delta t)$ a $a\zeta = a\xi + \Delta_a\eta$ helyen Dirac delta, és

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\Delta_a\eta)^2}{\Delta t} = aK(a\xi, b\xi, t) \text{ véges, ekkor:} \quad (31)$$

$$\frac{d_a \gamma(a\eta, t)}{dt} = \frac{\partial \left[\int_{b\eta_m}^{b\eta_M} aK(a\eta, b\xi, t) b\gamma(b\xi, t) \frac{\partial_a \gamma(a\eta, t)}{\partial_a \eta} d_b\xi \right]}{\partial_a \eta} \quad (32)$$

Például diffuzív keveredés.

B5) Kötött változás

$$A \overset{\circ}{c} B(a\xi, b\xi, c\zeta, t) \text{ a } c\zeta = \zeta^x \text{ helyen Dirac delta} \quad (33)$$

Egyes esetek, ha a jellemző:

$\alpha)$ a méret, és ζ^x állandó - kristály góc képződés

β) a méret, és $\zeta^X = {}_a\xi$ - portalanítás

γ) a tömeg, és $\zeta^X = {}_a\xi + {}_b\xi$ - granulum képződés

Például a β) esetben:

$$\frac{\partial {}_c\gamma({}_c\eta, t)}{\partial t} = {}_a\gamma({}_c\eta, t) \int_{b^{\eta_m}}^{b^{\eta_M}} {}_b\gamma({}_b\xi, t) {}_c\overset{\circ}{S}({}_c\eta, {}_b\xi, t) {}_c\overset{\circ}{B}({}_c\eta, {}_b\xi, {}_c\eta, t) d_b\xi \quad (34)$$

B6) Független mértékű változás

A B függvény nem függ ${}_a\xi$ -től, ekkor:

$$\frac{\partial {}_c\gamma({}_c\eta, t)}{\partial t} = \int_{b^{\eta_m}}^{b^{\eta_M}} {}_b\gamma({}_b\xi, t) {}_c\overset{\circ}{B}({}_b\xi, {}_c\eta, t) \int_{a^{\eta_m}}^{a^{\eta_M}} {}_a\gamma({}_a\xi, t) {}_c\overset{\circ}{S}({}_a\xi, {}_b\xi, t) d_a\xi d_b\xi \quad (35)$$

Például granulumok szétesése.

C) Az eloszlás speciális esetei

C1) Egyenletes eloszlás

$${}_a\gamma({}_a\xi, t) = {}_a\bar{\gamma}(t) \quad (36)$$

$$\frac{\partial {}_c\gamma({}_c\eta, t)}{\partial t} = {}_a\bar{\gamma}(t) \int_{a^{\eta_m}}^{a^{\eta_M}} \int_{b^{\eta_m}}^{b^{\eta_M}} {}_b\gamma({}_b\xi, t) {}_c\overset{\circ}{S}({}_a\xi, {}_b\xi, t) {}_c\overset{\circ}{B}({}_a\xi, {}_b\xi, {}_c\eta, t) d_b\xi d_a\xi \quad (37)$$

Például ${}_a\xi$ a hely, és teljesen kevert a rendszer.

C2) A ${}_a\gamma({}_a\xi, t) \underset{a^{\eta_m}}{a^{\eta_M}} \delta({}_a\xi - \bar{a}^{\eta})$ helyen Dirac delta

Ekkor:

$$\frac{\partial {}_b\gamma({}_b\eta, t)}{\partial t} = - {}_b\gamma({}_b\eta, t) {}_b\overset{\circ}{S}({}_a\xi, {}_b\eta, t) \quad (38)$$

P1. teljes kiegyenlítődés (mikrokeveredés).

Megmaradás

Az átalakulási függvényekre feltételt ad az, hogy adott momentumok összegére megmaradás van.

3. Alkalmazások

3.1 Kristálynövelés, granulum felületi növekedése, hő- és anyagátadás

A folyamatok sémája:

$$\begin{array}{cc} {}_a\gamma({}_a\eta, t) & {}_a\gamma({}_a\eta, t) \\ {}_b\gamma({}_b\eta, t) & {}_b\gamma({}_b\eta, t) \end{array}$$

tehát az A2 feltétel teljesül.

Kristálynövekedésnél ${}_a\gamma({}_a\eta, t) \equiv {}_a n({}_a^L, t)$ és ${}_b\gamma({}_b\eta, t) \equiv {}_b v({}_b^c, t)$ a folyadék elemek koncentráció szerinti térfogateloszlása. Egyirányú változás: B1.

A populációs mérlegek:

$$\begin{aligned} \frac{\partial {}_a n({}_a^L, t)}{\partial t} = & - {}_a n({}_a^L, t) \int_{{}_b^{c_m}}^{{}_b^{c_M}} {}_a \overset{\circ}{S}({}_a^L, {}_b\xi, t) {}_b v({}_b\xi, t) d_b\xi + \\ & + \int_{{}_a^L}^{{}_a^L} \int_{{}_b^{c_m}}^{{}_b^{c_M}} {}_a n({}_a\xi, t) {}_b v({}_b\xi, t) {}_a \overset{\circ}{S}({}_a\xi, {}_b\xi, t) {}_a \overset{\circ}{B}({}_a\xi, {}_b\xi, {}_a^L, t) d_b\xi d_a\xi \end{aligned} \quad (39)$$

$$\frac{\partial {}_b^v({}_b^c, t)}{\partial t} = -{}_b^v({}_b^c, t) \int_{a^L_m}^{a^L_M} {}_b^{\circ}S({}_a^{\xi}, {}_b^c, t) {}_a^n({}_a^{\xi}, t) d_a \xi +$$

$$+ \int_{a^L_m}^{a^L_M} \int_{b^C_m}^{b^C_M} {}_a^n({}_a^{\xi}, t) {}_b^v({}_b^{\xi}, t) {}_b^{\circ}S({}_a^{\xi}, {}_b^{\xi}, t) {}_b^{\circ}B({}_a^{\xi}, {}_b^{\xi}, {}_b^c, t) d_b \xi d_a \xi$$

(40)

Megmaradás:

$$\frac{\pi}{6} \frac{d {}_a^M_3}{dt} + \frac{d {}_b^M_1}{dt} = 0$$

(41)

A 39, 40, 41 egyenletek a diszperziós kristálynövekedés matematikai modellje, nulla mikrokeveredésű oldat rendszerben.

Lokális kristálynövekedésnél teljesül B3. Ekkor:

$$\frac{\partial {}_a^n({}_a^L, t)}{\partial t} = \frac{\partial \left[\int_{b^C_m}^{b^C_M} {}_a^n({}_a^L, t) {}_a^{\circ}\eta({}_a^L, {}_b^{\xi}, t) {}_b^v({}_b^{\xi}, t) d_b \xi \right]}{\partial {}_a^L}$$

(42)

$$\frac{\partial {}_b^v({}_b^c, t)}{\partial t} = \frac{\partial \left[\int_{a^L_m}^{a^L_M} {}_a^n({}_a^{\xi}, t) {}_b^{\circ}\eta({}_a^{\xi}, {}_b^c, t) {}_b^v({}_b^c, t) d_a \xi \right]}{\partial {}_b^c}$$

(43)

Megmaradásból:

$$-{}_b^{\circ}\eta({}_a^{\xi}, {}_b^c, t) = \frac{\pi {}_a^{\circ}\eta({}_a^{\xi}, {}_b^c, t) {}_a^L^2}{6}$$

(44)

Így:

$$\frac{\partial {}_b v({}_b c, t)}{\partial t} = \frac{-\partial \left[\int_{a^L m}^{a^L M} {}_a n({}_a \xi, t) \frac{\pi}{6} {}_a \xi^2 {}_a \eta({}_a \xi, {}_b c, t) {}_b v({}_b c, t) d_a \xi \right]}{\partial {}_b c} \quad (45)$$

A 42, 45 egyenletek a homogén kristálynövekedés matematikai modellje nulla mikrokeveredésű oldat rendszerben.

Ha az oldatfázisban a mikrokeveredés végtelen nagy, akkor teljesül rá C2, és így:

$$\frac{\partial {}_a n({}_a L, t)}{\partial t} = - \frac{\partial \left[{}_a n({}_a L, t) {}_a \eta({}_b \bar{c}, {}_a L, t) \right]}{\partial {}_a L} \quad (46)$$

$$\frac{\partial {}_b \bar{c}(t)}{\partial t} = \int_{a^L m}^{a^L M} {}_a n({}_a \xi, t) {}_a \xi^2 \frac{\pi}{6} {}_a \eta({}_a \xi, {}_b \bar{c}, t) d_a \xi \quad (47)$$

A 46 és 47 egyenlet a homogén kristálynövekedés matematikai modellje végtelen mikrokeveredésű oldat rendszerben.

Primer szemcséknek a granulum felületére való épülése:

${}_a \gamma({}_a \eta) \equiv {}_a n({}_a L)$ és ${}_b \gamma({}_b \eta) \equiv {}_b v({}_b L)$ az ${}_b L$ méretű primer szemcsék térfogata. Teljesül A2, B1, B3, a megmaradás:

$$\frac{\pi}{6} \frac{d {}_a M_3}{dt} + \frac{d {}_b M_0}{dt} = 0 \quad (48)$$

$$\frac{\partial {}_a n({}_a L, t)}{\partial t} = - \frac{\partial \left[\int_{b^L m}^{b^L M} {}_a n({}_a L, t) {}_a \eta({}_a L, {}_b \xi, t) {}_b v({}_b \xi, t) d_b \xi \right]}{\partial {}_a L} \quad (49)$$

$$\frac{\partial {}_b v({}_b L, t)}{\partial t} = - \frac{\partial \left[\int_{a^L m}^{a^L M} {}_a n({}_a \xi, t) {}_a \eta({}_a \xi, {}_b L, t) \frac{\pi}{6} {}_a \xi^2 {}_b v({}_b L, t) d_a \xi \right]}{\partial {}_b L} \quad (50)$$

A 49 és 50 egyenlet a primer szemcsék granulum felületére épülésének

tehát teljesül A1 és A2.

A megmaradás:

$${}_a \xi + {}_a \hat{\xi} = {}_a \bar{\zeta} + {}_a \tilde{\zeta} \quad (56)$$

és

$$\frac{d M_1(t)}{dt} = 0 \quad (57)$$

így:

$$\begin{aligned} \frac{\partial {}_a \gamma(\eta, t)}{\partial t} = & - {}_a \gamma(\eta, t) \int_{\eta_m}^{\eta_M} S(\eta, {}_a \xi, t) {}_a \gamma({}_a \xi, t) d {}_a \xi + \\ & + \frac{1}{2} \int_{\eta_m}^{\eta_M} \int_{\eta_m}^{\eta_M} S({}_a \xi, {}_a \hat{\xi}, t) \gamma({}_a \xi, t) \gamma({}_a \hat{\xi}, t) B({}_a \xi, {}_a \hat{\xi}, \eta, t) d {}_a \hat{\xi} d {}_a \xi + \\ & + \frac{1}{2} \int_{\eta_m}^{\eta_M} \gamma({}_a \xi, t) \gamma(2\eta - {}_a \xi, t) S({}_a \xi, 2\eta - {}_a \xi, t) B({}_a \xi, 2\eta - {}_a \xi, \eta, t) d {}_a \xi \end{aligned} \quad (58)$$

Az 58. egyenlet a kiegyenlítődés matematikai modellje.

A véges mikrokevertségű extrakció amely a nulla mikrokevertségű extrakció átalakulási tag mellett a mikrokeveredés átalakulási tagjait is figyelembe veszi az 52. és 58. egyenlet alapján a következő:

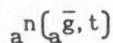
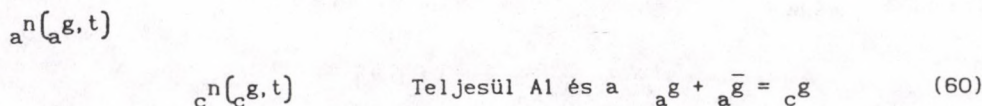
$$\begin{aligned} \frac{d {}_a v({}_a^c, t)}{dt} = & - {}_a v({}_a^c, t) \int_{a^c_m}^{a^c_M} S({}_a^c, {}_a \xi, t) {}_a v({}_a \xi, t) d {}_a \xi + \\ & + \frac{1}{2} \int_{a^c_m}^{a^c_M} \int_{a^c_m}^{a^c_M} S({}_a \xi, {}_a \hat{\xi}, t) {}_a v({}_a \xi, t) {}_a v({}_a \hat{\xi}, t) B({}_a \xi, {}_a \hat{\xi}, {}_a^c, t) d {}_a \hat{\xi} d {}_a \xi + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_{a^c_m}^{a^c_M} \gamma(a\xi, t) \gamma(2_a c - a\xi, t) \overset{\circ}{S}(a\xi, 2_a c - a\xi, t) \overset{\circ}{B}(a\xi, 2_a c - a\xi, a^c, t) d_a \xi - \\
& - \frac{\partial_a \overset{\circ}{\eta}(a^c, b^c, t)}{\partial_a c} a^v(a^c, t)
\end{aligned} \tag{59}$$

Az 53 és 59 egyenlet a véges mikrokevertségű extrakció matematikai modellje.

3.3 Primer szemcsékből granulum képződés

A folyamat sémája:



megmaradás miatt B5 teljesül, így:

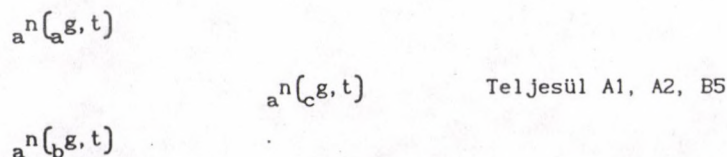
$$\frac{\partial_a n(a^g, t)}{\partial t} = - a^n(a^g, t) \int_{a^g_m}^{a^g_M} a^n(a\xi, t) \overset{\circ}{S}(a^g, a\xi, t) d_a \xi \tag{61}$$

$$\frac{\partial_c n(c^g, t)}{\partial t} = \int_{a^g_m}^{a^g_M} a^n(a\xi, t) a^n(c^g - a\xi) \overset{\circ}{S}(a\xi, c^g - a\xi, t) \overset{\circ}{B}(a\xi, c^g - a\xi, c^g, t) d_a \xi \tag{62}$$

Az 61 és 62 egyenlet a primer szemcsék egyesülésének matematikai modellje.

3.4 Granulumok egyesülése

A folyamat sémája:



$$\frac{\partial {}_a n({}_c g, t)}{\partial t} = -{}_a n({}_c g, t) \int_{a^{g_m}}^{a^{g_M}} {}_a n({}_a \xi, t) \overset{\circ}{S}({}_c g, {}_a \xi, t) d_a \xi +$$

$$+ \int_{a^{g_m}}^{a^{g_M}} {}_a n({}_a \xi, t) {}_a n({}_c g - {}_a \xi, t) {}_a \overset{\circ}{S}({}_a \xi, {}_c g - {}_a \xi, t) {}_c \overset{\circ}{B}({}_a \xi, {}_c g - {}_a \xi, {}_c g, t) d_a \xi \quad (63)$$

A 63 egyenlet a granulumok egyesülésének matematikai modellje.

3.5 Portalanítás

A folyamat sémája:

$${}_a v({}_a L, t) \quad {}_c v({}_c L, t)$$

A megmaradás miatt teljesül B5, a $\overset{\circ}{B}({}_a L, {}_c L, t)$ az ${}_a L = {}_c L$ helyen Dirac delta.

Igy:

$$\frac{\partial {}_a v({}_a L, t)}{\partial t} = -{}_a \overset{\circ}{S}({}_a L, t) {}_a v({}_a L, t) \quad (64)$$

$$\frac{\partial {}_c v({}_c L, t)}{\partial t} = {}_a \overset{\circ}{S}({}_a L, t) {}_c v({}_c L, t) \quad (65)$$

A 64, 65 egyenlet a gáz portalanítás matematikai modellje.

3.6 Granulumok szétesése

A folyamat sémája:

${}_a v({}_a L, t) \quad {}_c v({}_c L, t)$ A keletkező primér szemcsék eloszlása az eredeti ${}_c \tilde{v}({}_c L)$ normált eloszlás, és ez megegyezik $\overset{\circ}{B}({}_c L, t)$ - vel, független L-től, így teljesül B6.

A megmaradás miatt:

$${}_a^{\circ}S = {}_c^{\circ}S \quad (66)$$

így

$$\frac{\partial {}_a v({}_a L, t)}{\partial t} = - {}_a^{\circ}S({}_a L, t) {}_a v({}_a L, t) \quad (67)$$

$$\frac{\partial {}_c v({}_c L, t)}{\partial t} = {}_c \tilde{v}({}_c L, t) \int_{{}_a L_m}^{{}_a L_M} {}_a^{\circ}S({}_a L, t) {}_a v({}_a L, t) d {}_a L \quad (68)$$

A 67 és 68 egyenletek a granulomok szétesésének matematikai modellje.

3.7 Órlés

A folyamat sémája:

${}_a v({}_a L, t)$ ${}_a v({}_b L, t)$ teljesül A2 és B1 és a megmaradás miatt

$$\int_{{}_a L_m}^{{}_a L_M} {}_c^{\circ}B({}_a L, {}_a \xi, t) d {}_a \xi = 1 \quad (69)$$

$${}_a^{\circ}S = {}_c^{\circ}S \quad (70)$$

így:

$$\frac{\partial {}_a v({}_a L, t)}{\partial t} = - {}_a^{\circ}S({}_a L, t) {}_a v({}_a L, t) + \int_{{}_a L}^{{}_a L_M} {}_a^{\circ}S({}_a \xi, t) {}_a^{\circ}B({}_a \xi, {}_a L, t) {}_a v({}_a \xi, t) d {}_a \xi \quad (71)$$

A 71 egyenlet az órlés matematikai modellje.

3.8 Áramlás

A folyamat sémája:

${}_a v({}_a x, t)$ ${}_a v({}_a \bar{x}, t)$, teljesül A2.

A bevezetésnél B6 teljesül:

$${}_1\overset{\circ}{S}(t) {}_1\overset{\circ}{B}(x, t) \quad (72)$$

Az elvezetésnél B5 teljesül:

$${}_a v(x, t) {}_2\overset{\circ}{S}(x, t) \quad (73)$$

Diszperziós áramlás B1 teljesül:

$$-{}_3\overset{\circ}{S}(x, t) {}_a v(x, t) + \int_{x_m}^{x_M} {}_3\overset{\circ}{S}(\xi, t) {}_a v(\xi, t) {}_3\overset{\circ}{B}(\xi, x) d\xi \quad (74)$$

Diszperziós keveredés B2 teljesül:

$$-{}_4\overset{\circ}{S}(x, t) {}_a v(x, t) + \int_{x_m}^{x_M} {}_4\overset{\circ}{S}(\xi, t) {}_a v(\xi, t) {}_4\overset{\circ}{B}(\xi, x) d\xi \quad (75)$$

A mérlegegyenlet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial {}_a v(x, t)}{\partial t} = & {}_1\overset{\circ}{S}(t) {}_1\overset{\circ}{B}(x, t) - {}_a v(x, t) {}_2\overset{\circ}{S}(x, t) - {}_3\overset{\circ}{S}(x, t) {}_a v(x, t) + \\ & + \int_{x_m}^{x_M} {}_3\overset{\circ}{S}(\xi, t) {}_a v(\xi, t) {}_3\overset{\circ}{B}(\xi, x) d\xi - {}_4\overset{\circ}{S}(x, t) {}_a v(x, t) + \int_{x_m}^{x_M} {}_4\overset{\circ}{S}(\xi, t) {}_a v(\xi, t) {}_4\overset{\circ}{B}(\xi, x, t) d\xi \end{aligned} \quad (76)$$

$M_0(t)$ - ra megmaradás van, így

$$\frac{dM_0(t)}{dt} = {}_1\overset{\circ}{S}(t) \int_{x_m}^{x_M} {}_1\overset{\circ}{B}(\xi, t) d\xi - \int_{x_m}^{x_M} {}_a v(\xi, t) {}_2\overset{\circ}{S}(\xi, t) d\xi \quad (77)$$

Következmény:

$$\int_{x_m}^{x_M} {}_3\overset{\circ}{B}(x, \xi) d\xi = \int_{x_m}^{x_M} {}_4\overset{\circ}{B}(x, \xi) d\xi = 1 \quad (78)$$

Speciális esetek:

Ha C1 teljesül: x mentén teljes keveredés

A 77. egyenletből

$$\frac{d\bar{v}(t)}{dt} = \frac{1}{x_M - x_m} \left[\int_{x_m}^{x_M} \overset{\circ}{S}(t) \overset{\circ}{B}(\xi, t) d\xi - \bar{v}(t) \int_{x_m}^{x_M} \overset{\circ}{S}(\xi, t) d\xi \right] \quad (79)$$

Ha B3 és B4 teljesül: homogén áramlás

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial \overset{\circ}{K}(x, t) v(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \quad (80)$$

A be- és elvezetés peremfeltétel

Ha C2 teljesül: teljes mikrokeveredés

Legyen η a folyamat jellemzője és $v(x, t, \eta)$ a sűrűségfüggvény, mely az η szerinti teljes mikrokeveredés miatt az $\eta = \bar{\eta}$ helyen Dirac delta.

Ekkor:

$$\frac{\partial \bar{\eta}(t)}{\partial t} = - \frac{\partial \overset{\circ}{K}(x, t) \bar{\eta}(t)}{\partial x} + \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} \frac{\partial \bar{\eta}(t)}{\partial x} \quad (81)$$

3.9 Összetett folyamatok

Dinamikus kristálynövelés 46., 47., 80., 81. egyenlet felhasználásával:

$$\frac{\partial \overset{a}{n}(\overset{a}{L}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \overset{a}{K}(x, t) \overset{a}{n}(\overset{a}{L}, t)}{\partial x} - \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} \frac{\partial \overset{a}{n}(\overset{a}{L}, t)}{\partial x} = - \frac{\partial \overset{a}{\eta}(\overset{b}{c}, \overset{a}{L}, t) \overset{a}{n}(\overset{a}{L}, t)}{\partial \overset{a}{L}} \quad (82)$$

$$\frac{\partial \overset{a}{b} \bar{c}(t)}{\partial t} + \frac{\partial \overset{a}{K}(x, t) \overset{a}{b} \bar{c}(t)}{\partial x} - \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} \frac{\partial \overset{a}{b} \bar{c}(t)}{\partial x} = \int_{L_m}^{\overset{a}{L} M} \overset{a}{n}(\overset{a}{\xi}, t) \overset{a}{\xi}^2 \frac{\pi}{6} \overset{a}{\eta}(\overset{a}{\xi}, \overset{b}{c}, t) d \overset{a}{\xi} \quad (83)$$

Dinamikus extrakció 54, 55, 81 egyenlet felhasználásával:

$$\frac{\partial {}_a\bar{c}(t)}{\partial t} + \frac{\partial {}_a\dot{x}(x,t) {}_a\bar{c}(t)}{\partial x} - \frac{\partial {}_aK(x,t)}{\partial x} \frac{\partial {}_a\bar{c}(t)}{\partial x} = -\overset{\circ}{\eta}({}_a\bar{c}, {}_b\bar{c}, t) \quad (84)$$

$$\frac{\partial {}_b\bar{c}(t)}{\partial t} + \frac{\partial {}_b\dot{x}(x,t) {}_b\bar{c}(t)}{\partial x} - \frac{\partial {}_bK(x,t)}{\partial x} \frac{\partial {}_b\bar{c}(t)}{\partial x} = \overset{\circ}{\eta}({}_a\bar{c}, {}_b\bar{c}, t) \quad (85)$$

Összefoglalás

Fizikai modellből kiindulva általános mérlegegyenlet rendszert adunk meg. Megmutattuk, hogy különböző speciális feltételek esetén egyszerűbb egyenletrendszereket kapunk. Az általános modellt számos konkrét szemcse-diszperziós folyamatra alkalmaztuk.

AZ APRÍTÁSI FOLYAMATOK MATEMATIKAI MODELLEZÉSÉVEL KAPCSOLATOS
ÚJABB EREDMÉNYEK

A véletlen aprítási folyamatok matematikai modellezésével mintegy 20 éve foglalkozom. Kezdetben mérnök kollégáim gyakorlati problémáival kapcsolatban ötletszerűen foglalkoztam egy-egy speciális modellel. Később ezek megoldásaival szerzett tapasztalataimat rendszereztem és összegyűjtöttem azokat az aprítási modelleket, melyek megoldása zárt, vagy egy jól számolható végtelen függvénysor alakjában megadható. Ezekből szeretnék most válogatni abban a reményben, hogy ebből az alkalmazók ötleteket nyerhetnek gyakorlati problémáik megoldásához.

1. Az aprítási folyamatok matematikai modellezésének alapelvei.

Az általános értelemben vett aprítás egy az időben kifejlődő véletlen folyamat. A gyakorlati problémák közös jellemzője:

- A $t=0$ időpontban ismerjük az anyag valamely x -mérete szerinti kezdeti eloszlását.
- A törési folyamat során minden részecske bizonyos valószínűséggel legalább két részre törik.
- Ha a rendszer zárt (forrás és nyelő mentes), akkor érvényes valamilyen anyagmegmaradási törvény.

Ilyen folyamat például a közúzás, a gabonaörlés, a diszpergálás vagy a láncmolekulák bomlása.

Bár az anyagok atomos szerkezete miatt fizikailag minden aprítási folyamat diszkrét állapotváltozásokon megy át, a matematikai modellezés során a folytonos állapotváltozásokat is megengedjük. Mivel a folyamatban az idő is lehet diszkrét vagy folytonos, a modelleknek négy alaptípusa van. Ezek állapot- és idő szerint: diszkrét-diszkrét, diszkrét-folytonos, folytonos-diszkrét és folytonos-folytonos.

Az előzőekben leírt túl általános aprítási folyamatok halmazát a megoldhatóság reményében szűkítsük le az alábbi követelményekkel:

- A folyamat Markov-típusú. (Durván megfogalmazva: az időben következő állapot csak a közvetlenül előtte lévő állapottól függ.)

- Az x -méretű részecskék törésének valószínűsége az időben homogén.

- A törés során keletkező törmelék eloszlása az időtől nem függ.

A fentiek alapján megfogalmazható sztochasztikus modellek pontos megoldása szinte reménytelen feladat. Ez egyebek között ugyanis azt jelentené, hogy például a diszkrét állapotú modelleknél minden lehetséges x_1 méretre és minden t -re ismerjük a méret $\xi(x_1, t)$ számszerinti eloszlását, azaz ismerjük a

$$P(\xi(x_1, t) = k) = p_k(x_1, t) \text{ valószínűségeket.}$$

Ezért a gyakorlatban megelégszünk a modell determinisztikus változatának megoldásával, megelégszünk a folyamat $M(\xi(x, t)) = f(x, t)$ várható értékének meghatározásával. A valóságnak ez a leegyszerűsített változata azonban felvet egy elvi problémát: a pontos eloszlás alapján számított törés várható értéke megegyezik-e a várható értékbe koncentrált tömeg törésének várható értékével. Szerencsére ez így van. Fontossága miatt ezt a tulajdonságot a diszkrét állapotú - diszkrét idejű folyamatokra be is bizonyítjuk.

Evidens, hogy ezt a tényt elég egy tetszőleges x -méret aprítása során eltávozó mennyiségre belátnunk, hiszen a teljes folyamat ilyen típusú elemi lépésekből építhető fel.

Tegyük fel tehát, hogy egy x -méretű részecske számszerinti eloszlását a $t=n$ időpontban a ξ_n valószínűségi változó írja le, $P(\xi_n=i)=p_i$, $i=0,1,2,\dots$

Ekkor
$$P(\xi_{n+1}=k | \xi_n=i) = \binom{i}{k} (1-p)^k p^{n-k}, \quad (k \leq i).$$

A teljes valószínűség tételét felhasználva

$$P(\xi_{n+1}=k) = \sum_{i=k}^{\infty} P(\xi_{n+1}=k | \xi_n=i) P(\xi_n=i) = \sum_{i=k}^{\infty} \binom{i}{k} (1-p)^k p^{i-k} \cdot p_i$$

Ennek alapján

$$\begin{aligned}
 M(\xi_{n+1}) &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P(\xi_{n+1}=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \sum_{i=k}^{\infty} \binom{i}{k} (1-p)^k p^{i-k} p_i = \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} p_i \sum_{k=0}^i k \binom{i}{k} (1-p)^k p^{i-k} = \sum_{i=0}^{\infty} p_i i (1-p) = (1-p)M(\xi_n). \quad (1)
 \end{aligned}$$

Ebből látható, hogy az $(n+1)$ -ik törési periódusban eltávozott részecskék számának várható értéke $pM(\xi_n)$. E mennyiség azonban megegyezik az $M(\xi_n)$ -számú részecske p -valószínűséggel való törése során eltávozó mennyiség várható értékével (binomiális eloszlás!), amit bizonyítani akartunk.

Ezzel beláttuk, hogy az $M(\xi(x,t)) = f(x,t)$ várható értékkel megfogalmazott determinisztikus törési modellek a méreteloszlás várható értékére pontos megoldást adnak.

2. Egy egyszerű diszkrét állapotú diszkrét idejű modell.

Rényi Alfréd 1950-ben publikált egy dolgozatot, amelyben bebizonyította, hogy a közútszórás során elég általános feltevések mellett a törmelék eloszlása aszimptotikusan lognormális eloszlású és ezt a tulajdonságot állítólag a gyakorlat is igazolta. A Rényi cikke nyomán akkoriban divat volt mindenféle törési folyamatra ráhúzni a lognormális eloszlást. Az első találkozásom az aprítási folyamatokkal akkor volt, amikor egy kollégám azzal a problémával fordult hozzám, hogy az őrlménye nem akar lognormális eloszlást követni. Ekkor elővettem Rényi munkáját és először is adtam rá egy lényegesen egyszerűbb bizonyítást.

A modell szerint kezdetben egy darab egységnyi tömegű részecskénk van. Ezután minden törési periódusban minden x -tömegű részecske p valószínűséggel két $\frac{x}{2}$ tömegű darabra török. Így az n -ik törési periódus után bizonyos véletlen számú $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^n}$ tömegű részecskénk lesz.

Jelölje $g_n(k)$ az $\frac{1}{2^k}$ tömegű részecskék számának várható értékét akkor a modell feltételei, valamint (1) alapján

$$\begin{aligned} g_{n+1}(0) &= (1-p) g_n(0) \\ g_{n+1}(1) &= (1-p) g_n(1) + 2p g_n(0) \\ &\vdots \\ g_{n+1}(n) &= (1-p) g_n(n) + 2p g_n(n-1) \\ g_{n+1}(n+1) &= 2p g_n(n) \end{aligned} \quad (2)$$

Mivel $g_0(0) = 1$ a (2) rekurzió egyértelműen megoldható. A megoldáshoz használjuk fel a generátorfüggvény módszert. Ennek lényege az, hogy a $g_n(k)$, $(k=0,1,2,\dots,n)$ együtthatókkal megalkotjuk a $G_n(x) = \sum_{k=0}^n g_n(k)x^k$ polinomot, majd a rekurzió alapján meghatározzuk. Szorozzuk be (2) alatti egyenletek mindkét oldalát rendre $1, x, \dots, x^n, x^{n+1}$ függvényekkel és adjuk össze az így kapott azonosságokat. Ekkor kapjuk:

$$G_{n+1}(x) = (1-p) G_n(x) + 2px G_n(x) = (1-p+2px) G_n(x),$$

illetve $G_0(x) = 1$.

Mivel n tetszőleges volt

$$\begin{aligned} G_n(x) &= (1-p+2px) G_{n-1}(x) \\ &\vdots \\ G_1(x) &= (1-p+2px) \cdot 1 \end{aligned}$$

így

$$G_n(x) = (1-p+2px)^n \quad (3)$$

Mivel $g_n(k)$ a $G_n(x)$ polinom k -fokú tagjának együtthatója, ezért a binomiális tétel alapján

$$g_n(k) = \binom{n}{k} (2p)^k (1-p)^{n-k}$$

Ha áttérnénk a számszerinti eloszlásról tömegszerinti eloszlásra, azaz mindkét oldalt elosztjuk $\sum_{k=0}^{\infty} g_n(k) = (1+p)^n$ -nel, akkor

$$m_n(k) = \binom{n}{k} \left[\frac{2p}{1+p} \right]^k \left[\frac{1-p}{1+p} \right]^{n-k}$$

binomiális eloszlást kapjuk. Mivel $n \rightarrow \infty$ esetén a binomiális eloszlás a centrális határeloszlás-tétel miatt a normális eloszláshoz tart és az $\left[\frac{1}{2^k} \right]$ méret logaritmus $-k \ln 2$, ezért a méret-szerinti eloszlás várható értéke aszimptotikusan lognormális eloszlással írható le.

Nyilvánvaló, hogy az aprítási folyamatoknál a két egyenlő tömegű részre való törés túlságosan speciális kikötés, ezért igazán jó egyezés a gyakorlattal nem várható.

Sokkal természetesebb, ha törés során minden méretet megengedünk. Ehhez azonban már célszerű a folytonos állapotú modellekkel foglalkozni. Ezek megoldása során persze sosem kaptam lognormális eloszlást, de néhány esetben bekövetkezett a matematikai statisztikával foglalkozók végzete, amely szerint egy mintára, főleg ha kicsi a minta elemszáma, minden eloszlást rá lehet húzni. Ez lehet gondolom az oka annak is, hogy a lognormális eloszlás sok aprítási folyamatnál bevált a gyakorlatban.

3. Folytonos állapotú és folytonos idejű aprítási modellek

Az aprítási folyamatok időben és méretben való folytonos megfogalmazása a törési folyamatok egy jelentős részében az "atomos" méret kicsisége miatt gyakorlatilag pontos. A matematikai modell megalkotása az alábbi elvekre épül:

- Ismerjük a $t=0$ -ban a kezdeti tömegeloszlást.
- Az x tömegű szemcsék törése valószínűleg Δt idő alatt $a(x)\Delta t + o(\Delta t)$, $a(x) \geq 0$.
- Ha egy y méretű részecske eltörik, akkor a törmelék valamilyen

$b(x,y)$ sűrűségfüggvény szerint oszlik el ($0 \leq x \leq y$),

$$\int_0^y b(x,y) dx = 1.$$

Ennek alapján ha a rendszer zárt (nyelő és forrásmentes), az általánosság megszorítása nélkül két modell típust alkothatunk meg.

Ha a $t=0$ -ban csak egy darab $x=1$ tömegű részecskénk volt és $f(x,t)$ jelenti a $0 \leq x < 1$ tömegű részecskék várható értékét t -ben, akkor

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = -a(x) f(x,t) + \int_x^1 a(y) b(x,y) f(y,t) dy + a(1) b(x,1) e^{-a(1)t},$$

ha $(0 \leq x < 1)$, illetve

$$\frac{\partial f(1,t)}{\partial t} = -a(1) f(1,t), \quad \text{ha } x = 1. \quad (4)$$

Ez utóbbi megoldása $f(1,t) = e^{-a(1)t}$ szolgáltatja az előző egyenlet forrás-típusú tagját.

A másik modell típusnál azt feltételezzük, hogy az induló eloszlás $f(x,0) = f_0(x)$, $\int_0^1 f_0(x) dx = 1$ folytonos a $[0,1]$ -ben. Ekkor a modell alakja

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} &= -a(x) f(x,t) + \int_x^1 a(y) b(x,y) f(y,t) dy, \\ 0 \leq x \leq 1, \quad f(x,0) &= f_0(x) \end{aligned} \quad (5)$$

A két modell keverhető is. Ha a kezdő feltétel $(1-p)f_0(x)$, $0 \leq x < 1$ és p ha $x = 1$, akkor ha $f_1(x,t)$ és $f_2(x,t)$ jelenti a két tiszta modell megoldását az eredeti kezdő feltételekkel, akkor

$$(1-p)f_1(x,t) + pf_2(x,t) \quad \text{a kevert modell megoldása.}$$

Mindkét modellben $a(x)$, $b(x,y)$ és $f_0(x)$ megválasztása a $a(x) \geq 0$, $\int_0^1 b(x,y) dx = 1$ és $\int_0^1 f_0(x) dx = 0 \vee 1$ feltételek teljesedésén kívül elvileg tetszőleges. A gyakorlatban azonban érthető módon a folytonos függvények köréből merítünk. Ekkor mindig igaz az alábbi négy tétel:

- (I) A modellnek van megoldása és a megoldás egyértelmű.
- (II) A megoldás nem negatív.
- (III) Érvényes a tömegmegmaradás.
- (IV) Ha $a(x) > 0$, minden $x > 0$ -ra, akkor $\lim_{t \rightarrow \infty} f(x,t) = 0$,
minden $x > 0$ -ra.

Az első három tétel nem szorul magyarázatra, a negyedik tétel azt a szemléletes tényt mondja ki, ha $a(x) > 0$, akkor minden $x > 0$ tömeg részecske $t \rightarrow \infty$ esetén elfogy.

4. A
$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = -a(x)f(x,t) + \int_x^1 a(y)b(x,y)f(y,t)dy + a(1)b(x,1)e^{-a(1)t}$$

(4) modell megoldás speciális $a(x)$, $b(x,y)$ függvényekkel.

Ebben a fejezetben $a(x) = x^p$, $p \geq 0$ és $b(x,y) = q \frac{x^{q-1}}{y^q}$, $q > 0$

esetekkel foglalkozunk és minden p, q -ra megadjuk a modell analitikus megoldását.

a./ Ha $p = 0$ és $q > 0$ tetszőleges akkor $\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = \dot{f}(x,t)$ jelöléssel a megoldandó feladat

$$\dot{f}(x,t) = -f(x,t) + \int_x^1 \frac{qx^{q-1}}{y^q} f(y,t)dy + qx^{q-1} e^{-t}$$

Keressük a megoldást $f(x,t) = qx^{q-1} e^{-t} g(x,t)$ alakban. Ekkor $g(x,t)$ -re az alábbi egyenletet kapjuk.

$$\dot{g}(x,t) = q \int_x^1 \frac{g(y,t)}{y} dy + 1, \quad g(x,0) = 0, \quad 0 \leq x < 1,$$

kezdőfeltétel mellett.

(6)

A jobboldal integrál szerkezete miatt célszerű a $g(x, t)$ függvényt

$g(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (\ln x)^n t^{n+1}$ alakban keresni. Mivel $g(x, 0) = 1$ ezért $C_0 = 1$. A C_n , $n \geq 1$ meghatározásához helyettesítsük be $g(x, t)$ -t (6) -ba és a jobboldalon végezzük el az integrálást:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) C_n \ln^n x t^n = -q \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{(\ln x)^{n+1}}{(n+1)} t^{n+1} + 1$$

Innen

$$1 \cdot C_0 = 1$$

$$2 \cdot C_1 = -\frac{q}{1} C_0$$

$$3 \cdot C_2 = -\frac{q}{2} C_1$$

\vdots

$$(n+1) C_n = -\frac{q}{n} C_{n-1}, \dots$$

Azaz

$$C_n = (-1)^n \frac{q^n}{n! (n+1)!},$$

így

$$g(x, t) = t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-qt \ln x)^n}{n! (n+1)!},$$

és

$$f(x, t) = q x^{q-1} t e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q t \ln x)^n}{n! (n+1)!}$$

Mivel a jobboldalon levő sor konvergens, $f(x, t)$ megoldás!

Megjegyzés: könnyű belátni, hogy $f(x, t) + \dot{f}(x, t)$ megoldása az (5) modellnek $f_0(x) = q x^{q-1}$ kezdőfeltétel mellett.

$$b. / a(x) = x^p, \quad p > 0; \quad b(x, y) = q \frac{x^{q-1}}{y^q}, \quad q > 0.$$

Ekkor a megoldandó feladat

$$\dot{f}(x, t) = -x^p f(x, t) + q x^{q-1} \int_x^1 y^{p-q} f(y, t) + q x^{q-1} e^{-t}$$

Keressük a megoldást $f(x,t) = q x^{q-1} e^{-t} g(x,t)$ alakban, akkor $g(x,t)$ -re az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\dot{g}(x,t) = (1-x^p) g(x,t) + q \int_x^1 y^{p-1} g(y,t) dy + 1,$$

a $g(x,0) = 0$, $0 \leq x < 1$; $g(1,0) = 1$ kezdőfeltétel mellett. (7)

Mivel $g(x,0) = 0$, $\dot{g}(x,0) = 1$, $\ddot{g}(x,0) = (1-x^p)(1 + \frac{q}{p})$ és

... $\dot{g}(x,0) = (1-x^p)^2(1 + \frac{q}{p})(1 + \frac{q}{2p})$ érezzük hogy a megoldás

$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (1-x^p)^n t^{n+1}$ alakú. Sőt ha $g(x,t) = t e^{(1-x^p)t} h[(1-x^p)t]$ helyettesítést elvégezzük, és $z = (1-x^p)t$ változót bevezetjük, akkor $h(z) - t$ a

$$zh''(z) + (2+z)h'(z) + (1 - \frac{q}{p})h(z) = 0 \quad (8)$$

lineáris homogén másodrendű differenciálegyenlet megoldása adja, $h(0) = 1$ kezdőfeltétel mellett. A (8) -t úgy kapjuk, hogy (7) egyenlet mindkét oldalát x -szerint deriváljuk majd $g(x,t)$ helyébe beírjuk a megadott függvényt. Keressük a (8) megoldását $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ alakban. Ekkor kapjuk

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)C_n z^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} nC_n z^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} nC_n z^n + (1 - \frac{q}{p}) \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n = 0.$$

Rendezve:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)C_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (\frac{q}{p} - 1 - n) z^n, \quad C_0 = 1.$$

A megfelelő fokszámú tagok együtthatóit összehasonlítva:

$$C_0 = 1 \quad \text{ezért}$$

$$C_0 = 1$$

$$1 \cdot 2 C_1 = (\frac{q}{p} - 1) C_0$$

$$2 \cdot 3 C_2 = (\frac{q}{p} - 2) C_1$$

$$n(n+1) C_n = (\frac{q}{p} - n) C_{n-1}, \dots$$

A $\frac{q}{p} = \rho$ jelöléssel $C_0 = 1$, $n > 1$ esetén

$$C_n = \frac{(\rho-1)(\rho-2)\dots(\rho-n)}{n!(n+1)!}.$$

Ha bevezetjük $\frac{\rho(\rho-1)\dots(\rho-n)}{(n+1)!} = \left[\begin{matrix} \rho \\ n+1 \end{matrix} \right]$ szimbólumot C_n minden n -re egységesen

$$C_n = \frac{1}{\rho} \left[\begin{matrix} \rho \\ n+1 \end{matrix} \right] \frac{1}{n!}.$$

Mivel $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ sor minden z -re konvergens, ezért

$$h(z) = \frac{1}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\begin{matrix} \rho \\ n+1 \end{matrix} \right] \frac{z^n}{n!}.$$

Így az eredeti feladat megoldása

$$f(x,t) = p x^{q-1} t e^{-x^p t} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\begin{matrix} \rho \\ n+1 \end{matrix} \right] \frac{[t(1-x^p)]^n}{n!} \quad (9)$$

Nagyon érdekesen alakul a (9) megoldás, ha $\rho = \frac{q}{p}$ egész szám. Ekkor látható, hogy a ρ -ik tagtól kezdve a C_n együtthatók zérusak és ezért (9) kifejezésben véges (ρ -tagu) függvéynyos szerepel.

$$f(x,t) = p x^{q-1} t e^{-x^p t} \sum_{n=0}^{\rho-1} \left[\begin{matrix} \rho \\ n+1 \end{matrix} \right] \frac{[t(1-x^p)]^n}{n!}.$$

Írjunk fel néhány ilyen megoldást is.

- Ha $p=q$, azaz $\rho=1$, akkor

$$f(x,t) = p x^{p-1} t e^{-x^p t}$$

- Ha $q=2p$, azaz $\rho=2$, akkor

$$f(x,t) = p x^{2p-1} t e^{-x^p t} (2+t(1-x^p))$$

- Ha $q=3p$, azaz $\rho=3$, akkor

$$f(x,t) = p x^{3p-1} e^{-x^p t} \left[3+3t(1-x^p) + \frac{t^2(1-x^p)^2}{2} \right], \text{ és így tovább.}$$

Különösen érdekes a $p=q=1$ eset. Ekkor

$$f(x,t) = t e^{-xt}$$

Ekkor az $f(x,t)$ megoldás idő-szerinti deriválásával az (5) modell minden $f_0(x) = p x^{p-1}$ típusú megoldását megkapjuk.

Például $f + \dot{f} = e^{-xt}(1+t(1-x))$ az $f_0(x) = 1$ kezdőfeltételnek, míg

$f - \dot{f} = e^{-xt}(2x+t(1-x^2))$ az $f_0(x) = 2x$ kezdőfeltételnek felel meg, és így tovább.

Könnyű ellenőrizni, hogy a 4. fejezetben kapott összes megoldás kielégíti az (I)-(IV). tételekben megfogalmazott tulajdonságokat.

$$5. \quad A \quad \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = -a(x)f(x,t) + \int_x^1 a(y)b(x,y)f(y,t)dy$$

(5) modell megoldása tetszőleges $f(x,0) = f_0(x)$, $0 \leq x \leq 1$ kezdőfeltétel mellett.

Mielőtt az analitikus megoldásra vezető speciális esetekkel foglalkoznánk, megjegyezzük: ha a modellnek van megoldása akkor

$$f(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x) \frac{t^n}{n!}, \quad \text{ahol } v_0(x) = f_0(x).$$

$$v_{n+1}(x) = -a(x)v_n(x) + \int_x^1 a(y)b(x,y)v_n(y)dy$$

Ez a formula a speciális esetek vizsgálatában az integrálások miatt nem igen használható, inkább a megoldás létezése, konvergencia-problémák szempontjából előnyös.

Bár az (5) modell ugyan hasonlít a (4) modellhez, a kezdőfeltétel eltérése miatt az (5) esetében ritkábban tudunk analitikus megoldást felírni. A továbbiakban két esetet vizsgálunk.

a./ Az $a(x)$, $b(x,y)$ tetszőleges, $f_0(x) = b(x,1)$.

Ha az $a(x)$, $b(x,y)$ függvényekkel a (4) modell megoldható, azaz $f(x,t)$ kielégíti a

$$\dot{f}(x,t) = -a(x)f(x,t) + \int_x^1 a(y)b(x,y)f(y,t)dy + a(1)b(x,1)e^{-a(1)t}$$

egyenletet, akkor $\dot{f}(x,t)$ kielégíti a

$$\ddot{f}(x,t) = -a(x)\dot{f}(x,t) + \int_x^1 a(y)b(x,y)\dot{f}(x,t)dy - [a(1)]^2 b(x,1)e^{-a(1)t}$$

egyenletet.

Ha a két egyenletet összevetjük, látható, hogy $f(x,t) + \frac{1}{a(1)}\dot{f}(x,t)$ megoldása az (5) modellnek az $f_0(x) = f(x,0) + \frac{1}{a(1)}\dot{f}(x,0) = b(x,1)$ kezdőfeltétel mellett. Ez azt jelenti, hogy a (4) modell analitikusan megoldható eseteiből az (5) modell analitikus megoldásait kapjuk speciális $f_0(x) = b(x,1)$ kezdőfeltétellel.

Megjegyzés: $f - \frac{1}{[a(1)]^2}\ddot{f}$, $\dot{f} + \frac{1}{[a(1)]^3}\ddot{\dot{f}}$, ... megoldások további

speciális kezdőfeltételeket adnak.

b./ $a(x) = x^p$, $b(x,y) = q \frac{x^{q-1}}{y^q}$, $\frac{q}{p} = \rho$ egész, $f_0(x)$ tetszőleges ρ -szor integrálható függvény.

Ha követjük az előző fejezet b./ pontjában alkalmazott eljárást és a megoldást $f(x,t) = q x^{q-1} e^{-x^p t} g(x,t)$ alakban keressük, akkor a megoldandó feladat

$$e^{-x^p t} \dot{g}(x,t) = q \int_x^1 y^{p-1} e^{-y^p t} g(x,t), \quad \text{ahol } g(x,0) = g_0(x) = \frac{f_0(x)}{q x^{q-1}}.$$

Megmutatjuk: ha $\frac{p}{q} = \rho$ egész, akkor

$$g(x, t) = \sum_{n=0}^{\rho} \left[\begin{matrix} \rho \\ n \end{matrix} \right] t^n v_n(x), \quad \text{ahol}$$

$$v_0(x) = g_0(x), \quad v_{n+1}(x) = \int_x^1 p y^{p-1} v_n(y) dy. \quad (10)$$

Erről legegyszerűbben mindkét oldal x -szerinti deriválásával győződhetünk

meg. Ekkor $\frac{\partial \dot{y}(x, t)}{\partial x} = \dot{g}(x, t)$ jelölés alkalmazásával azt kell kimutatnunk, hogy

$$-p x^{p-1} t \dot{g}(x, t) + \dot{g}(x, t) + q x^{p-1} g(x, t) = 0$$

A behelyettesítést elvégezve és felhasználva, hogy $v'_n(x) = -p x^{p-1} v_{n-1}(x)$, ($n \geq 1$) kapjuk:

$$-\sum_{n=1}^{\rho} \left[\begin{matrix} \rho \\ n \end{matrix} \right] n t^n v_n(x) - \sum_{n=1}^{\rho} \left[\begin{matrix} \rho \\ n \end{matrix} \right] n t^{n-1} v_{n-1}(x) + \rho \sum_{n=0}^{\rho} \left[\begin{matrix} \rho \\ n \end{matrix} \right] t^n v_n(x) = 0$$

Ekkor csak $t^k v_k(x)$, ($k=0, 1, \dots, \rho$) tagok együtthatóiról kell kimutatni, hogy zérusak. De

$$k=0 \text{ esetén } - \left[\begin{matrix} \rho \\ 1 \end{matrix} \right] 1 + \rho \left[\begin{matrix} \rho \\ 0 \end{matrix} \right] = 0$$

$$k=\rho \text{ esetén } - \left[\begin{matrix} \rho \\ \rho \end{matrix} \right] \rho + \rho \left[\begin{matrix} \rho \\ \rho \end{matrix} \right] = 0$$

A többi esetben is teljesedik a feltétel, mert

$$- \left[\begin{matrix} \rho \\ k \end{matrix} \right] k - \left[\begin{matrix} \rho \\ k+1 \end{matrix} \right] (k+1) + \rho \left[\begin{matrix} \rho \\ k \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} \rho \\ k \end{matrix} \right] [-k - \rho + k + \rho] = 0$$

Eredményeink alapján az 5. b. feladat megoldása

$$f(x, t) = q x^{q-1} e^{-x^p t} \sum_{n=0}^{\rho} \left[\begin{matrix} \rho \\ n \end{matrix} \right] t^n v_n(x)$$

Ha ρ kicsi egész szám, például $\rho=1$, azaz $p=q$ akkor a megoldás egyszerű alakot vesz fel:

$$f(x,t) = p x^{p-1} e^{-x^p t} \left[\frac{f_0(x)}{p x^{p-1}} + t \int_x^1 f_0(y) dy \right]$$

Végezetül szeretnénk néhány megjegyzést tenni a (4)-(5) modellek kibővítéséről, ha egy forrástagot is figyelembe veszünk. Ez műszakilag folyamatos betáplálás melletti aprítást jelent.

6. A folytonos aprítási modell stacionárius megoldása állandó (egységnyi) intenzitású, $x=1$ tömegű forrástag esetén.

A folytonos aprítási modellek jelöléseit megtartva először is adjuk meg a forrástag nagyságát a $t > 0$ időpillanatban, ha a rendszer kezdetben üres volt. Ekkor az

$$\dot{f}(1,t) = -a(1) f(1,t) + 1$$

differenciálegyenletet megoldva kapjuk

$$f(1,t) = \frac{1}{a(1)} \left[1 - e^{-a(1)t} \right]$$

Ekkor a (4) modell alapján a megoldandó feladat

$$\dot{f}(x,t) = -a(x) f(x,t) + \int_x^1 a(y) b(x,y) f(y,t) dy + b(x,1) (1 - e^{-a(1)t})$$

Ha csak a stacionárius megoldás érdekes $f(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(x,t)$, akkor az alábbi feladat megoldását keressük:

$$-a(x)f(x) + \int_x^1 a(y)b(x,y)f(y)dy + b(x,1) = 0 \quad (11)$$

A (11) explicit megoldás az integrálban szereplő $b(x,y)$ tényező x -től való függése nehezíti meg. Ezért szép megoldást csak polinom alakú $b(x,y)$ esetén remélhetünk. Nézzünk meg néhány esetet.

a./ Legyen $a(x)$ tetszőleges deriválható függvény, $a(x) > 0$ minden

a./ Legyen $a(x)$ tetszőleges deriválható függvény, $a(x) > 0$ minden $x > 0$ -ra és $b(x,y) = \frac{1}{y}$, akkor

$$-a(x) f(x) + \int_x^1 \frac{a(y)}{y} f(y) dy + 1 = 0$$

megoldása

$$f(x) = \frac{1}{x \cdot a(x)}, \quad x > 0. \quad (12)$$

b./ Ha $a(x) = x^p$, $b(x,y) = q \frac{x^{q-1}}{y^q}$, akkor a

$$-x^p f(x) + q x^{q-1} \int_x^1 y^{p-q} f(y) dy + q x^{q-1} = 0$$

feladat megoldását $f(x) = c x^n$ alakban keresve

$$f(x) = \frac{q}{x \cdot a(x)} ! \quad (13)$$

eredményt kapjuk.

Érdekes, hogy mindkét esetben konstanstól eltekintve ugyanazt a megoldást kaptuk, és a megoldás lényegében csak a törési valószínűségtől függ. Ez a tény világosabbá válik, ha felírjuk a stacionárius modell általános megoldását.

$$c./ A \quad -a(x)f(x) + \int_x^1 a(y)b(x,y)f(y)dy + b(x,1) = 0$$

feladat általános megoldása

$$f(x) = \frac{1}{a(x)} \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x), \quad \text{ahol}$$

$$v_1(x) = b(x,1); \quad v_{n+1}(x) = \int_x^1 b(x,y)v_n(y)dy,$$

amennyiben a $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ sor konvergens. (14)

Behelyettesítve és az integrálást elvégezve:

$$- \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) + \sum_{n=2}^{\infty} v_n(x) + v_1(x) = 0,$$

tehát $f(x)$ valóban megoldás.

Láthatjuk, hogy az $\frac{1}{a(x)}$ tényező minden megoldásban szerepel.

A $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ összegzése zárt alakba már nehezebb feladat, bár csak

$b(x,y)$ -től függ. Egyszerűbb esetben azért elvégezhető az összegzés.

Legyen az a./ esetnek megfelelően $b(x,y) = \frac{1}{y}$.

$$\text{Akkor } v_1(x) = 1, \quad v_2(x) = \int \frac{1}{y} = -\ln x$$

$$v_3(x) = \int \frac{1}{x} - \frac{\ln y}{y} dy = \frac{1}{2!} \ln^2 x$$

$$\vdots$$
$$v_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} (\ln x)^{n-1}$$

$$\text{Így } \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} (\ln x)^{n-1} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}.$$

$$\text{Tehát } f(x) = \frac{1}{a(x)} \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) = \frac{1}{x a(x)}.$$

Látjuk, hogy ugyanaz az eredmény jött ki mint a 6.a./ pontban.

Megjegyzés: mivel $v_n(x)$ n -számú azonos eloszlású, egymástól független valószínűségi változó szorzatának sűrűségfüggvénye, $n \rightarrow \infty$ esetén $v_n(x)$ lognormális eloszláshoz tart. Ugyanis $\ln(\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n) = \ln \xi_1 + \ln \xi_2 + \dots + \ln \xi_n$ és így érvényesül a centrális határeloszlástétel. Tehát a lognormális eloszlásnak mégis csak van valami szerepe az aprítási folyamatokban.

A figyelmes olvasó észrevehette, hogy nem sokat foglalkoztam az egzisztencia kérdésekkel. Elfogadtam sok esetben azt az alkalmazói személetet, amely szerint a természet folyamatait jól leíró matematikai modell megoldható, hiszen a valóságban megjelenik a megoldás. Ezt a hiányt azzal pótoltam, hogy sok feladat megoldását sikerült zárt alakban felírnom. Így ezek a modellek beépíthetők elemként egy összetettebb modellbe, kiiktatva ezzel a numerikus becslések hibáját.

Dr. Kovács Zoltán - Ködmön István

A MODELLEZÉS FEJLŐDÉSE A MEGBÍZHATÓSÁGELMÉLETBEN

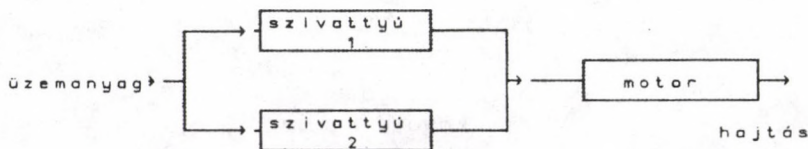
A modellezési eljárások többsége arra irányul, hogy megvizsgálja valamely rendszer elem ill. rendszer működését. Tanulmányunkban a fordított megközelítést alkalmazzuk. Tehát nem azt vizsgáljuk, hogy mi történik akkor, ha egy rendszer működik, hanem azt, hogy mi történik amikor **nem** működik. Tekintettel arra, hogy kétállapotú rendszerekben a rendszerállapotokat számbavéve a működik és a nem működik állapoton kívül más kategóriák nincsenek, így a nemműködés vizsgálatából is fontos információkat nyerhetünk a működés hatékonyságára vonatkozóan.

A megbízhatóságelmélet az a tudományág, amely meghatározza a berendezésekben fellépő meghibásodások keletkezésének törvényszerűségeit, ezek előrejelzésének módjait, a megbízhatóság növelésének lehetőségeit a tervezés, a tárolás és a felhasználás időszakában, továbbá a megbízhatóság ellenőrzésének módjait. [4]

Grafikus modellezés

Hagyományos és jól ismert modellezési eljárás az a módszer, amelyben a rendszereket egymástól független megbízhatóságú elemekből felépülőeknek tekintjük. Ezen modellek grafikus megjelenítésének lehetséges módjai:

- megbízhatósági blokkdiagram (1. ábra),
- megbízhatósági logikai diagram (2. ábra),
- Ishikawa diagram (3. ábra).



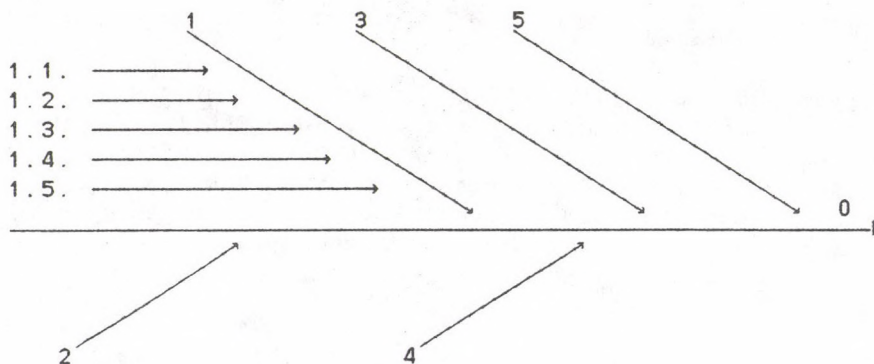
1. ábra

Megbízhatósági blokkdiagram

A megbízhatósági blokkdiagramban a négyszögek a berendezések, elemek fizikai mivoltára utal, az elemek között lévő kapcsolatok megadásával a vizsgálandó rendszer struktúráját, topológiáját írja le. A megbízhatósági logikai diagram a működést, ill. nemműködést reprezentálja ÉS, VAGY kapcsolatok megadásával. Az Ishikawa diagram az ok - okozati összefüggések hierarchikus leírását mutatja be.



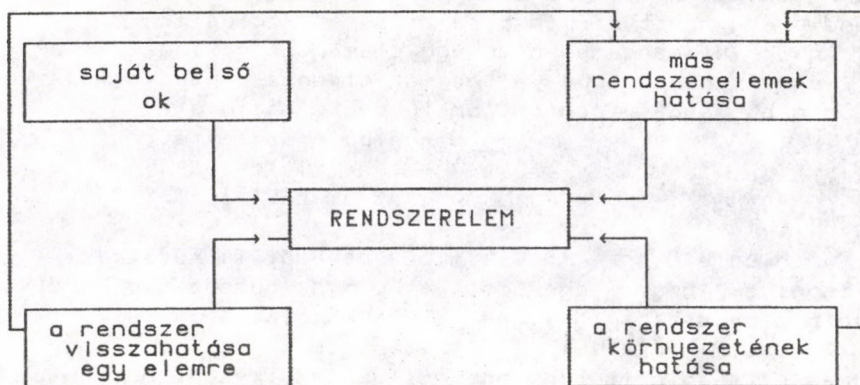
2. ábra
Megbízhatósági logikai diagram



3. ábra
Ishikawa diagram

Mivel az elemek függetlenségét feltételező modellek a valóságban csak szűk körben alkalmazhatóak, kissé

idealisztikusnak tűnnek. A valóság minél jobb megközelítése érdekében a megbízhatósági modellekben a rendszert felépítő elemek függőségének a figyelembe vétele nélkülözhetetlen. Ezt igazolják a rendszerek üzemeltetési tapasztalatait rögzítő dokumentumok (berendezésnapló, műszaknapló), amelyekből nyilvánvaló, hogy a rendszerelemek egymásra hatással vannak. Hogyan alakul ki a függőség? (4. ábra)



4. ábra
Hatások egy rendszerelem működésére

Első helyen említendő a rendszerelem saját belső tulajdonságainak a megnyilvánulása a megbízhatósági viselkedésében. Ha csak ezek a hatások lépnek fel, akkor az elemet független megbízhatóságúnak tekintjük. A bekövetkező eseményeket kiváltó okok mögött gyakran a rendszerelem egy további részegységének a megbízhatósági viselkedésével kapcsolatos esemény áll, azonban ez a részegység már nem jelenik meg elemként a rendszer megbízhatósági modelljében. Az, hogy mit tekintünk rendszerelemnek és mit belső oknak, bizonyos mértékig önkényes, csak a vizsgálati cél által behatárolt. A saját, belső hatások következtében fellépő meghibásodások az ú.n. elsődleges, primer hibák (failure), amely fogalmat a szakirodalom a hibafák kapcsán használja, megkülönböztetésül az ú.n. másodlagos, szekunder hibáktól (fault). [7]

Más rendszerelem hatása az előzőekben tárgyalt okok hatásmechanizmusához hasonlóan érvényesül. Ebben az esetben az ok nem a rendszerelemen belül, hanem azon kívül található

és a rendszerben egy másik rendszerelemnél is megjelenik. A hatások eredménye a két rendszerelemnél különböző lehet, pl az egyik meghibásodik, a másik csak felfüggeszti működését.

Éppúgy mint az egyes elemek, a rendszer egésze is lehet hatással egy adott elemre. Ez gyakran szándékosan a rendszerbe beépítve "programozottan" történik főként biztonsági és gazdaságossági megfontolások miatt. Ilyennek tekinthető pl. a villamoshálózat túlterhelés elleni védelme.

Az elemek megbízhatósága függ a belőlük felépülő rendszer környezetétől is, hiszen a környezet hatása a rendszerre mindig egy adott elemén keresztül realizálódik.

Annak elemzésére, hogy egy elem meghibásodása miként hat az egész rendszerre elterjedt eljárás a hibafa módszer. A hibafa egy gyűjtőfogalom, amely tartalmazza a :

- hibalefutási fát,
- védelmi fát és az
- ok okozati gráfot.

A hibalefutási fa - mint nevéből is következik - azt vizsgálja, hogy egy adott elem meghibásodása miként vonul végig a rendszeren, milyen "láncreakciók" alakulnak ki.

A védelmi fa ezzel ellentétben nem a hibákra öszpontosít, hanem azt szolgáltatja, hogy milyen védekezési mechanizmusok indulnak be egy adott elem meghibásodásának eredménye képpen.

Az ok okozati összefüggés kapcsán a rendszerelméletektől kissé szokatlan megközelítési mód érvényesül a megbízhatóság elméletben. Azzal, hogy az elem meghibásodásának az okát is vizsgáljuk, feltételezzük azt, hogy az elemnek van belső szerkezete. A modellünkben az elem belső szerkezetét nem írjuk le, de az oksági vizsgálattal utalunk rá.

Bool algebra alkalmazása

Független megbízhatóságú elemekből felépülő rendszerek esetén a rendszereredő számításának lehetséges módja a Bool - algebrára épülő szorzási szabály. A számítási modell jellegzetességei az alábbiakban foglalható össze:

- A rendszer minden alkatrésze csak két lehetséges állapotban lehet: teljesen működőképes, vagy meghibásodott.
- A rendszer véges (megszámlálható) számú alkatrészt tartalmaz.
- A rendszer alkatrészei egymástól sztochasztikusan függetlenek, azaz meghibásodásaik nincsenek egymással korrelációban.

- Érvényes a monotoniatulajdonság. Ez azt jelenti, hogy egy már meghibásodott rendszer további alkatrészek meghibásodása következtében nem válik ismét működőképesé (nincsenek öngyógyulási jelenségek).
- Ha a rendszer már nem tartalmaz lényegtelen alkatrészeket, akkor tovább nem redukálható.
- Egyszerű szerkezetek túlélési valószínűségei a következőkben ismertetésre kerülő négy képlettel számíthatók.

Az elemek kapcsolódási rendjének megfelelően a rendszer eredő megbízhatóságát az elemek megbízhatóságából az alábbiak szerint számolhatjuk: [3]

- soros kapcsolás (5. ábra)

$$P(t) = \prod_{i=1}^n p_i(t)$$

- párhuzamos kapcsolás (6. ábra)

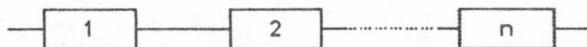
$$P(t) = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - p_i(t)]$$

- soros - párhuzamos kapcsolás (7. ábra)

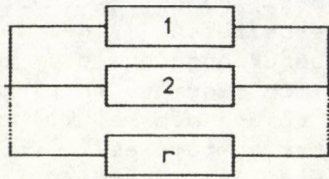
$$P(t) = \prod_{j=1}^n [1 - \prod_{i=1}^{m_j} (1 - p_{i,j}(t))]$$

- párhuzamos - soros kapcsolás (8. ábra)

$$P(t) = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - \prod_{j=1}^{m_i} p_{i,j}(t)]$$

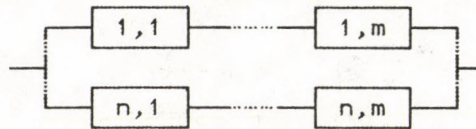


5. ábra
Soros kapcsolású rendszer



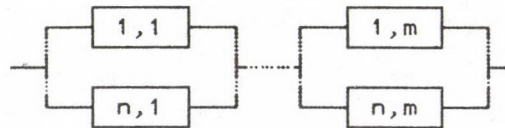
6. ábra

Párhuzamos kapcsolású rendszer



7. ábra

Párhuzamos - soros elrendezés



8. ábra

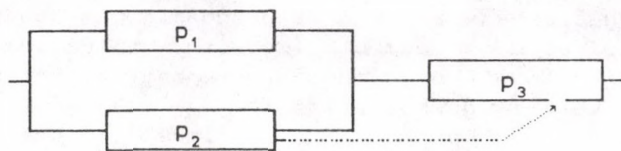
Párhuzamos - soros elrendezés

A valós rendszerek esetén azonban igen gyakran nem használhatóak ezek a formulák: a rendszer bonyolultsága nem teszi lehetővé a soros és párhuzamos részekre való bontást, a függőség figyelembe vételével használhatatlanná válnak a képletek, olyan működési feltételeket szabunk, amely túlmutat a képletek alkalmazhatóságán stb. Ezen problémák megoldásának egyik módja az igazságtáblázat alkalmazása.

Az igazságtáblázat

Az igazságtáblázat: a rendszert felépítő elemek lehetséges állapotainak kombinációjából adódó rendszerállapotok számbavétele. Mivel az elemek állapotát tekintve csak két kategóriát különböztetünk meg (működik, nem működik), így n elemű rendszer esetében 2^n a lehetséges rendszerállapotok száma. A rendszer eredő működési valószínűségét a működőképes rendszerállapothoz tartozó állapotvalószínűségeknek az összege szolgáltatja. Tekintsünk egy egyszerű példát az igazságtáblázat használatára.

Legyen egy három elemű rendszerünk, melyben az egyes elemek működési valószínűségei $p_1=0,8$, $p_2=0,9$, $p_3=0,95$. Rendszerünk topológiája az alábbi:



Az ábrán feltüntetett szaggatott vonal a függőséget jelképezi. Tehát ha a 2. berendezés bármilyen okból leáll, az maga után vonja a 3. berendezés leállítását is.

Ha a függőséget nem vesszük figyelembe a rendszereredő számítására alkalmazható a szorzási szabály. Ennek megfelelően

$$p_r = [1 - (1 - p_1) \cdot (1 - p_2)] \cdot p_3 = 0.931$$

Most alkalmazzuk ugyanerre az esetre az igazságtáblázatot. A táblázatban a " - " jel a berendezés állását, a " + " jel a berendezés működését jelzi. A rendszer állapotvalószínűségét a berendezések állapotaihoz tartozó valószínűségek szorzata adja. Pl. a táblázat első sorában mind a három berendezés áll, így a rendszer állapotvalószínűsége:

$$p_a = (1 - 0.8) \cdot (1 - 0.9) \cdot (1 - 0.95) = 0.001$$

A táblázat hatodik sorában az 1. és a 3. berendezés üzemel, a 2. áll. Ehhez az állapothoz tartozó valószínűség:

$$p_a = 0.8 \cdot (1 - 0.9) \cdot 0.95 = 0.076$$

Berendezés			Rendszerállapot	Állapotval.	Kumulált működési val.
1	2	3			
-	-	-	állás	0.001	
+	-	-	állás	0.004	
-	+	-	állás	0.009	
+	+	-	állás	0.036	
-	-	+	állás	0.019	
+	-	+	működés	0.076	0.247
-	+	+	működés	0.171	$0.076 + 0.171 = 0.247$
+	+	+	működés	0.684	$0.247 + 0.684 = 0.931$

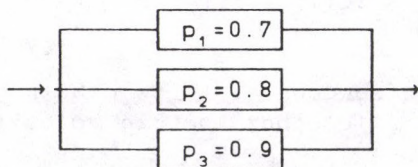
Ebben az egyszerű esetben az igazságtáblázat használata bonyolultabb mint a szorzási szabály alkalmazása. Ezzel a példával csupán az igazságtáblázat használatát kívántuk bemutatni.

Ha figyelembe vesszük a példában előírt függőséget is, a szorzási szabály már nem alkalmazható, az igazságtáblázattal azonban megoldható a feladat. Ennek megfelelően a következőképpen alakul az igazságtáblázat:

(Az előző táblázathoz képest a változást keretbe foglaltuk.)

Berendezés			Rendszerállapot	Állapotval.	Kumulált működési val.
1	2	3			
-	-	-	állás	0.001	
+	-	-	állás	0.004	
-	+	-	állás	0.009	
+	+	-	állás	0.036	
-	-	[-]	állás	0.001	
+	-	[-]	állás	0.004	
-	+	+	működés	0.171	0.171
+	+	+	működés	0.684	$0.171 + 0.684 = 0.855$

Jól alkalmazható az igazságtáblázat olyan esetekben is, amelyek kapcsán bizonyos feltételekhez szabjuk a rendszer működését. Példának okáért tekintsük az alábbi három elemű rendszert:



Feltételként szabjuk azt, hogy a rendszerünket csak abban az esetben tekintjük működőképesnek, ha legalább két eleme működik. A rendszer működési valószínűségének számítása:

Berendezés			Rendszerállapot	Állapotval.	Kumulált működési val.
1	2	3			
-	-	-	állás	0.006	
+	-	-	állás	0.014	
-	+	-	állás	0.024	
-	-	+	állás	0.054	
+	+	-	működés	0.056	0.056
+	-	+	működés	0.126	$0.056 + 0.126 =$ 0.182
-	+	+	működés	0.216	$0.182 + 0.216 =$ 0.398
+	+	+	működés	0.504	$0.398 + 0.504 =$ 0.902

Ha a feltételt nem vesszük figyelembe a szorzási szabállyal számítható a rendszereredő, amelynek értéke 0.994.

Szimuláció

A továbbiakban egy olyan modellezési módszer leírása következik, melynek segítségével a technológiai rendszerek megbízhatóságának modellje az eddig alkalmazott módszereknél sokkal jobban írja le a valóságot. Részletes leírás található [4] - ben.

A modellben elem mindaz, ami a rendszer megbízhatóságát a benne lezajló változások következményeként befolyásolja. Az elemekhez az alábbi jellemzőket rendeljük hozzá:

- hibamentes működési idők eloszlása, ez lehet lefutás szerint:
 - teljes,
 - csonkított,
 - százalékosan csonkított,
- az eloszlás jellege szerint:
 - determinisztikus,
 - egyenletes,
 - normális,
 - exponenciális,
 - Weibull,
 - lognormális,
 - stb.

- állásidők eloszlása,
 - spontán módon bekövetkező,
 - tervszerűen bekövetkező,
- mennyiségi kapacitás,
- minőségi kapacitás,

A modellben a kapcsolat fogalma is átértékelődik. Kapcsolatnak nevezzük a hatások érvényesülési módját. A hagyományos blokkvázlatban a kapcsolatot az elemek közötti vonalak jelzik, ezek azonban a hatásokról nem mondanak semmit. A modell az alábbi kapcsolatleíró részekkel bővül:

- a lehetséges működési utak megadása,
- a hatás jellege,
 - működést felfüggeszti,
 - a meghibásodását idézi elő,
 - meghibásodás nélkül a cseréjét idézi elő,

A hatás érvényesülhet:

- mindig,
- csak működés esetén,

Az időzítést tekintve lehet,

- azonnali,
- késleltetett,

A megvalósulás szerint:

- determinisztikus,
- sztochasztikus,

A fokozatok száma szerint:

- egyfokozatú,
- többfokozatú, továbbgyűrűző.

Az ismertett modell elkészítése alapvetően két esetben válik szükségessé:

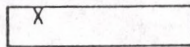
- grafikus megadás leíró modellként,
- input, számításokhoz.

Az első alapozza meg a másodikat. Ezért a grafikus (szimbolikus) leírást úgy kellett kialakítani, hogy:

- az ember számára szemléletes legyen, lehessen következtetni a vizsgálandó rendszer tulajdonságaira
- tartalmazza mindazokat az adatokat, amelyek a számításokhoz szükségesek.

Ennek megfelelően állt össze a jelölésrendszer, ami a finomabb modellezés miatt bonyolultabb, mint amit a hagyományos blokkdiagram-technika igényel. (téglalapok+vonalak)

Jelölésrendszer a modellek leírásához



Rendszerelem
X: azonosító sorszám

X_K Környezeti hatást reprezentáló elem
 X_R Elem(ek)re történő rendszer visszahatást reprezentáló elem

————— Működési útban szereplő kapcsolat az elemek között

M: $\rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow$
 $\rightarrow X \rightarrow$
 $\rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow$ Az alternatív működési utak megadása. A vonalak között az elemek azonosítói.

-----> Működési útban nem szereplő, hatás jellegű kapcsolat a típus és az esetleges valószínűség feltüntetése
H=p H: a hatás eredménye:

	Csak működés esetén	Mindig
A működés fel-függesztése az állás idejére	L	T
Tönkretétel	R	E
Közös csere	U	M

p: a hatás érvényesülésének valószínűsége
 $0 \leq p \leq 1$ alapértelmezés $p=1$

-----T t----- Késleltetett hatás
t: a késleltetés ideje

Q (x, y, v, z) Eloszlás megadása

Q: az eloszlás típusa, lehet
E : egyenletes
Exp.: exponenciális
W : Weibull
N : Normális
L : Lognormális
D : egy determinisztikus érték megadása
következik

x: a változó típusa
 t_m : működési idő
 t_a : állásidő
 t_{ocs} : csonkulás esetén az állásidő

- y: az első paraméter
- v: a második paraméter
- z: csonkítási érték. Opcionális.

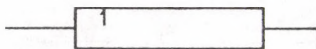
Az y és v paraméterek különböző eloszlások esetén:

Q	y	v
Exp	λ	-
W	α	β
N	m	σ
L	m	σ
E	a	b

Példák a jelölésrendszer alkalmazására

1. Egy elem hibamentes működési idejének eloszlása exponenciális, $\lambda = 0,001$. Az állásidő normális eloszlású, várható értéke 10 óra, szórása 5.

A modell



$$M : \xrightarrow{1} \xrightarrow{1}$$

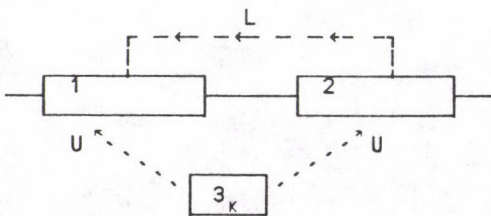
$$1 : \text{Exp}(t_m, 0,001)$$

$$N(t_a, 10, 5)$$

2. Az előzővel sorba kapcsolunk még egy elemet, aminek hibamentes működési ideje Weibull eloszlású, $\alpha = 0,006$, $\beta = 2$. Az állásidő 10 óra.

A második elem javítása idejére az elsőt kikapcsolják. 500 óránként a két elemet azonos időben kicserélik, aminek időigénye 5 óra.

A modell:



$$M : \xrightarrow{1} \xrightarrow{2} \xrightarrow{2}$$

$$1 : \text{Exp}(t_m, 0,001)$$

$$N(t_a, 10, 5)$$

$$2 : W(t_m, 0,006, 2)$$

$$D(t_a, 10)$$

$$3 : D(t_m, 500)$$

$$D(t_a, 5)$$

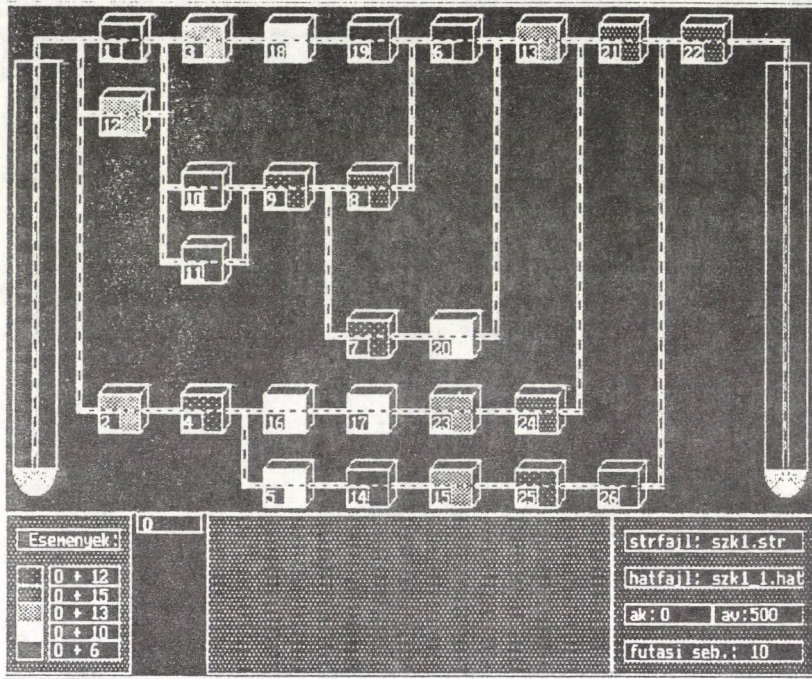
Az előzőekben vázolt modell sztochasztikus, működtetése Monte - Carlo szimulációval történik. A kutatómunka jelenlegi fázisában egy olyan program áll rendelkezésre, amely a megbízhatósági modell lényeges elemeit képes kezelni, és alkalmas arra, hogy a technológiai rendszerek megbízhatóságára szimulációs futtatásokat végezzünk. A program szolgáltatja az eredmények:

- elvégzett kísérletek száma,
- szimulált idő,
- tényleges összes működés,
- elméleti összes működés,
- összes állásidő saját okból,
- összes állásidő összes okból,
- összes állás,
- tervszerű állás,
- tényleges átlagos működés,
- elméleti átlagos működés,
- átlagos állásidő saját okból,
- átlagos állásidő összes okból
- hibamentes működési valószínűség,
 - elméleti,
 - teljes,
 - saját,
 - függő.

A szimulációs programhoz készült egy animációs interface is, hogy az események bekövetkezése, a rendszer működése jobban érzékelhető legyen. [6] Így a folyamat dinamikussá tételével a modell és a szimulációs eljárás oktatásba való bevezetése is könnyebbé, a hallgatók számára könnyebben feldolgozhatóvá válik. Egy ilyen megjelölt rendszerképet mutat a 9. ábra.

A megbízhatósági modellezés alkalmazási területei:

- karbantartás - tervezés, szervezés,
- konstrukció kialakítás, módosítás,
- biztonságtechnika,
- termelésstervezés, kapacitás meghatározás,
- minőségbiztosítás.



9. ábra
Egy szimulált rendszer megjelenítése

Irodalom

1. Abdon, G. H.: Program Gives Reliability Analysis of Parallel Manufacturing Systems
Industrial Engineering 1989. febr. 51-52
2. Gordon, G. : System simulation
Preutice - Hall, Inc.
Englewood Cliffs, N. J. 1969
3. Gruhn, G. - Kafarov, V.V. : Zuverlässigkeit von Chemieanlagen
VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie
Leipzig, 1979
4. Kovács Z.: A megbízhatóság és karbantartás egyes kérdései technológiai rendszerek esetén
Kandidátusi értekezés
Veszprém, 1990
5. Kovács Z. - Milos Vitek : Rendszer megbízhatóság számítása igazságtáblázat alkalmazásával
Minőség és Megbízhatóság 1991 / 4. 43 - 44 o.
6. Ködmön I. : Rendszerek megbízhatósági viselkedésének szimulációja
Diplomadolgozat
Veszprém, 1992
7. Nagy I.: Vegyipari rendszerek üzemzavar elemzése hibafával
Magyar Kémikusok Lapja 41. (1986) 12. 441-447.

