ALKALMAZOTT MATEMATIKAI LAPOK

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

35. kötet

Szerkesztőség és kiadóhivatal: 1055 Budapest, Falk Miksa u. 12.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, és olyan eredeti tudományos cikkeket publikál, amelyek a gyakorlatban, vagy más tudományokban közvetlenül felhasználható új matematikai eredményt tartalmaznak, illetve már ismert, de színvonalas matematikai apparátus újszerű és jelentős alkalmazását mutatják be. A folyóirat közöl cikk formájában megírt, új tudományos eredménynek számító programokat, és olyan, külföldi folyóiratban már publikált dolgozatokat, amelyek magyar nyelven történő megjelentetése elősegítheti az elért eredmények minél előbbi, széles körű hazai felhasználását. A szerkesztőbizottság bizonyos időnként lehetővé kívánja tenni, hogy a legjobb cikkek nemzetközi folyóiratok különszámaként angol nyelven is megjelenhessenek.

A folyóirat feladata a Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai) Osztályának munkájára vonatkozó közlemények, könyvismertetések stb. publikálása is.

A kéziratok a főszerkesztőhöz, vagy a szerkesztőbizottság bármely tagjához beküldhetők. A főszerkesztő címe:

Páles Zsolt, főszerkesztő
1055 Budapest, Falk Miksa u. 12.
A folyóirat e-mail címe: `aml@math.elte.hu`
A folyóirat honlapja: `http://aml.math.bme.hu`

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért felelősséget nem vállal.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok előfizetési ára évfolyamonként 1200 forint. Megrendelések a szerkesztőség címén lehetségesek.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica,
2. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica.

Alkalmazott Matematikai Lapok **35** (2018), 1–3

PRÉKOPA ANDRÁS ÉS SZAKDOLGOZATI TÉMÁM

SZÁSZ DOMOKOS

Az ötéves matematikus, ill. alkalmazott matematikus képzés talán csak 1961-ben indult el, így amikor 1959-ben elkezdtem az egyetemet, még matematika-fizika tanári szakosokként indultunk. Az első két év befejezése után lehetőséget kaptunk a fizika szak leadására és ún. alkalmazott matematikus szakon folytatni tanulmányainkat. A Valószínűségszámítás előadást – 15 fős – évfolyamunknak Rényi Alfréd (akkori becenevén és egy idő után évfolyamunknak is: Buba), és hozzá a gyakorlatot Révész Pál (évfolyamunknak is: Pali) tartotta. Párosuk többünkkel igencsak megszerettette a sztochasztika témát. Emellett számosan úgy éreztük, hogy mivel csak három évig vagyunk kizárólag matematikus szakosok, ezért ez alatt a három év alatt kell minél többet megtanulnunk. Én is így voltam ezzel, és e három évben jónéhány valószínűségszámítás témájú speciális előadást vettem fel. Ezek egyike volt a Prékopa András által tartott Sztochasztikus Folyamatok tárgy. Ez annyira bejött nekem, hogy azután Andrástól még Lineáris Programozás és Operációkutatás speciális előadásokat is hallgattam.

Az ún. tiszta matematikától magától is el vagyok bűvölve, és máig is az emberiség egyik legmegdöbbentőbb és leglenyűgözőbb konstrukciójának tartom. Ugyanakkor mindig erősen érdekeltek és foglalkoztattak tudományunknak a matematikán kívüli kérdések által motivált problémakörei. András magától is, részben a nagyszerű Takács Lajossal[1] való együttműködés hatására is, a tiszta valószínűségszámítástól több lépésen keresztül eljutott az Operációkutatáshoz és a Sztochasztikus Programozáshoz. (Jómagam az utóbbi több mint 40 évben a fizika által motivált matematikai elméletekkel foglalkozom.)

Amikor eljött az ideje a szakdolgozati témaválasztásnak, Andrástól is kértem témajavaslatokat. Ő több feladatot vázolt fel, voltak ezek között kérdések mind a sztochasztikus folyamatok mind az operációkutatás témaköréből. Bár őt akkor már elsősorban az utóbbiak érdekelték, én mégis az előbbi csoportból választottam témát: a folytonos idejű térbeli elágazó folyamatok problematikáját.

Itt megállok egy pillanatra. Még hallgatóként kezembe adta András a Stochastic Set Functions című háromrészes cikksorozatát, amelyet kandidátusi disszertációja alapján írt. Ez a cikksorozat rendkívül igényes és messzemenő általánosítása

[1] Takács Lajos, 1924–2015, a valószínűségszámítás és a sorbanállás elmélet kiemelkedő kutatója, az MTA külső tagja. Dolgozott a Tungsramnál, az MTA Matematikai Kutató Intézetében, az ELTE-n, majd 1958-tól az Imperial College-ban, a Columbia Universityn, végül a CASE Western Universityn, Clevelandben.

a Poisson-folyamat fogalmának. Utóbbi akkoriban különösen népszerű volt, mert nemcsak a valószínűségszámítás egyik legalapvetőbb konstrukciója, hanem sarkalatos a szerepe számos kulcsfontosságú elméletben, pl. a valószínűségszámítás határeloszlás tételeinek elméletében, ugyanakkor tömegkiszolgálás alapvető modelljeiben is. (Hazánkban Andráson kívül Aczél János[2], Jánossy Lajos[3], Rényi Alfréd és Takács Lajos is foglalkoztak vele.) András cikkeinek olvastakor számomra igen imponáló volt az az általános és elméletalapító megközelítés, amelyet András itt alkalmazott. Hozzáteszem még mély, mértékelméleten alapuló módszerét is.

Hasonló megközelítés vezethette Andrást a szakdolgozati témám megfogalmazásában. Az elágazó folyamatokat Francis Galton (Darwin unokatestvére) vezette be 1889-ben az angol történelmi családnevek kihalási statisztikájának leírására. (Ebből, a pusztán kuriózumnak tűnő kérdés által motivált modellből egyre általánosabb és alapvetőbb matematikai konstrukció lett, amelynek ma már klasszikus alkalmazásai a szabad neutronok folyamatának leírása az atomerőművekben, vagy éppen a legkülönbözőbb fertőzések terjedésének elemzése.)

Az 1950-es években született Jerzy Neyman és Elisabeth Scott különlegesen népszerű kozmológiai modellje galaxisok statisztikai leírására. Ez már térbeli elágazó folyamat. Náluk az idő még diszkrét volt, és András elsőként vetette fel, hogy érdemes lenne hasonló folyamatokat vizsgálni folytonos időben. Erről értem el az első eredményeket szakdolgozatomban (1964) és 1967-ben megvédett dr. univ. értekezésemben is. Ugyan eredményeim – mai szemmel nézve – meglehetősen elemiek voltak, mégis – számomra fontos – pozitív visszhangjuk volt. Rényi – akkor éppen külföldön – több oldalas levélben reagált rájuk további, kapcsolódó kérdéseket is felvetve. Ezt követően 1967-ben részt vettem Berlinben a Kelet-Német Matematikai Társulat konferenciáján, ahol a diszkrét idejű térbeli elágazó folyamatok nemzetközileg vezető és nagynevű német triója: Kerstan, Matthes és Mecke, a későbbi monográfia szerzői, komoly érdeklődéssel fogadták eredményeimet, és később hivatkozták is dolgozatomat.

Prékopa András előadást tart (az 1960-as évek elején)

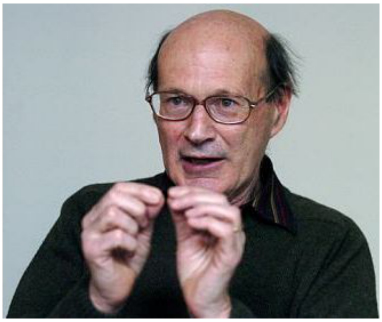
Ezután 1968-ban Moszkvában kezdtem meg aspirantúrám, és tanulmányaim más irányba vittek.

[2]Aczél János, sz. 1924, az MTA külső tagja, a függvényegyenletek elméletének kiemelkedő kutatója, a szegedi, miskolci, debreceni egyetemek professzora, végül 1965-től a University of Waterloo professzora.

[3]Jánossy Lajos, 1912–1978, kiemelkedő fizikus, az MTA rendes tagja, a KFKI igazgatója.

Ugyanakkor ma is örömmel látom viszont a modern sztochasztikai, statisztikus fizikai elméletekben, publikációkban azokat a témákat, fogalmakat, amelyeket az András által bevezetett modell vizsgálata során tanultam.

Szakdolgozatom írását követően ugyan megszakadt a szoros szakmai kapcsolatom Andrással, de így is nyilvánvaló számomra, hogy kifejezetten széles tudású, nagyszabású elméletalapító és világviszonylatban is igen jelentős hatású matematikus volt, akinek igényessége, kultúrája és szorgalma is nagyszerű példa lehet az újabb generációknak.



Szász Domokos 1941-ben született. Matematikus diplomát az ELTE-n szerzett 1964-ben, kandidátusi címet 1971-ben a moszkvai Lomonoszov Egyetemen. Fő érdeklődési területei a szochasztika, a statisztikus fizika, valamint a dinamikai rendszerek elmélete. Utóbbi kettőben nemzetközileg is rangos iskolákat alapított. Több tanítványa professzor hazai, illetve külföldi centrumokban. Az MTA tagja 1990 óta, 2011–17-ig alelnök volt. 1993–96-ig az MTA Matematikai Kutató Intézetének és 1990–2005-ig a BME Matematikai Intézetének igazgatója volt, jelenleg a BME Sztochasztika Tanszék Professor Emeritusa. Az Academia Europaea tagja. Vendégprofesszor: Dartmouth College; Goethe Universität, Frankfurt; Princeton University; University of Toronto. Vendégkutató: IAS (Princeton), IHES (Bures-sur-Yvette), IMPA (Rio de Janeiro), Mittag Leffler Institute (Stockholm), ICERM (Providence, RI). Díjai: Széchenyi-díj, Szent-Györgyi Albert-díj, Magyar Érdemrend Középkereszt. 2014-ben ő tartotta az Abel Science Lecture-t Oslóban.

Alkalmazott Matematikai Lapok **35** (2018), 5–11

OPERÁCIÓKUTATÁS ÉS ALKALMAZOTT MATEMATIKA A SZTAKI-BAN

PRÉKOPA ANDRÁS

1929–2016

Előzmények

1950-ben alapították a Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetét azzal a céllal, hogy az ország számára fontos gyakorlati feladatokat oldjon meg, és ennek kapcsán jelentős mértékben fejlessze az alkalmazásokhoz közel álló matematikai elméleteket, módszereket. Feltételezték, hogy a két évvel korábban államosított ipar alkalmas terep lesz a célkitűzések megvalósítására. Ez azonban nem vált valóra, jóllehet az intézet sok sikeres alkalmazást vitt végbe az orvostudomány, a kémia, a fizika, a mezőgazdaság, a vízgazdálkodás és egyéb területeken. Az intézetet 1955-ben átalakították, az elméleti kutatás lett a legfontosabb cél, nevét is megváltoztatták, az új név MTA Matematikai Kutatóintézet lett. Prékopa András ezekben az intézetekben volt aspiráns, ill. tudományos munkatárs 1952-1956 között (utána az ELTE-n lett adjunktus), 1957-ben ugyanitt szemináriumot indított az új, operációkutatásnak nevezett tudomány eredményének megismerésére és terjesztésére. Az „operációkutatás" elnevezés egy ideig nem volt használható, ugyanis az „ökonometria" ellen párthatározat született, és félő volt, hogy annak művelési tilalmát az operációkutatásra is vonatkoztatják. Helyette azt mondtuk, írtuk, hogy ez „a matematika közgazdasági alkalmazása".

Az operációkutatással egy időben fejlődött a számítástechnika, és joggal reméltük, hogy ezek együttes alkalmazása révén, a korábban alkalmazott matematikai módszerekhez képest sokkal eredményesebb lesz a feladatmegoldás. Ez végül be is jött, nemzetközi viszonylatban is. Az eredményesség felfokozott reményében a Matematikai Kutatóintézet igazgatója, Rényi Alfréd akadémikus, 1959-ben létrehozta Prékopa András vezetésével A Matematika Közgazdasági Alkalmazásai Csoportot. Ez a Valószínűségszámítási Osztály keretében kapott helyet, de önállóan működött, eleinte mindössze négy fővel (Prékopa András, Ziermann Margit, Bod Péter, Székely Gábor). A csoport munkájának jelentős kisugárzó hatása volt, országosan és később nemzetközi viszonylatban is. Kutatási vonatkozásban elsősorban Prékopa András sztochasztikus programozási eredményét, a Prékopa–Ziermann-készletmodellt, alkalmazási vonatkozásban ezeken kívül Bod Péter közgazdásági és Székely Gábor mezőgazdasági számításait lehet megemlíteni. A csoport később bővült, Kovács László Béla, Majthay Antal és Kéri Gerzson személyével. Az elméleti kutató munkában az egyre bővülő létszámban jelenlévő aspiránsok is részt vettek.

Néhány évvel korábban, 1956-ban, létrejött az MTA Kibernetikai Kutató Csoportja a Várban. Kezdetben a hangsúlyt a saját számítógép építésére tették, orosz gépeket másoltak (Ural II., M3), és próbálták alkalmazni gazdasági jellegű feladatokra. Legjelentősebb volt a Kornai–Lipták-féle kétszintű tervezéssel kapcsolatos tevékenységük az 1960-as évek elején. Az egész ország gazdaságát szektorokba osztva, a lokális és az országos célok és kapacitások egyeztetésével akartak részletekbe menő gazdasági tervet kidolgozni. A feladat számítástechnikai jellegű problémáinak megoldására egy csoport szerveződött (a későbbiekben osztállyá alakult és felvette az Operációkutatás nevet).

Kornai kísérlete félbemaradt egyfelől, mert kételyek merültek fel egy ennyire részletekbe menő gazdasági terv realitásában, másfelől azért, mert mint kitűnt, a kétszintű tervezésre alkalmas elegáns és hatékony matematikai elméletek 1960-ban (Dantzig–Wolfe) és 1962-ben (Benders) már megjelentek a szakirodalomban. Ezek számítástechnikai megvalósítása azonban a magyar kutatók számára nem volt hozzáférhető, mint ahogy maguk a korszerű számítógépek sem.

Meg kell még említeni, hogy az 1960-as években gombamódra szaporodni kezdtek a számítástechnikát és az operációkutatást alkalmazni szándékozó intézetek és cégek. Ezek körében legjelentősebb volt az INFELOR, mely a központi Statisztikai Hivatal keretében működött és országos koordináló szerepet kapott. Az ebben az intézetben létrejött Operációkutatási Osztály a harmadik megemlítendő a SZTAKI-beli operációkutatási aktivitás szempontjából. A teljes forráslistát ezzel még nem merítjük ki, azonban terjedelmi okok miatt további részletekbe nem bocsátkozhatunk az előzményeket illetően.

MTA Számítástechnikai Központ 1970–73, MTA SZTAKI 1973–

1970-ben az MTA Számítástechnikai Központ új igazgatót kapott, aki megpróbálta az akkoriban már (központi feladatok híján) egyéni témaválasztások alapján működő intézmény tevékenységet eredményesebbé tenni. Az Operációkutatási Osztály tagjainak többsége (az osztályvezetőt is beleértve) az alkalmazásoktól távoli elméleti matematikával foglalkozott, csupán három-négy kutató foglalkozott operációkutatással. Az igazgatói rendelkezések hatására az osztály felbomlott. Ezt követően Prékopa András Matematikai Kutató-beli csoportja meghívást kapott, hogy menjen át a Számítástechnikai Központba. Prékopa az ajánlatot elfogadta, ugyanis a Matematikai Kutatóban a számítástechnikai berendezések korszerűtlenek voltak, viszont 1970-ben már nem lehetett eredményes operációkutatási munkát végezni megfelelő számítástechnikai háttér nélkül. A Számítástechnikai Központban új Operációkutatási Osztály jött létre, Prékopa András vezetésével. Kevesen maradtak a régiből, és nem mindenki jött el a Matematikai Kutatóból. Az új osztály dinamikusan fejlődött mind létszámban, mind pedig tudományos eredményekben. A teljesség igénye nélkül felsorolok neveket, melyek tulajdonosai 1970-ben, vagy néhány évvel később az osztály munkatársai lettek: Majthay Antal, Kovács László Béla, Kéri Gerzson, Bakó András, Klafszky Emil, Komáromi Éva, Fülöp János, Gerencsér László, Kelle Péter, Rapcsák Tamás, Szántai Tamás, Deák István, Mayer János, Vizvári Béla, Kas Péter, Bíró Miklós, Halász Szilvia, Turchányi Piroska, Kun István.

Prékopa András íróasztalánál könyvei előtt (1980 körül)

1977-ben az intézetet (SZTAKI) az Akadémia átszervezte, főosztályokra tagozódott, és ekkor megalakult az Alkalmazott Matematikai Főosztály, Prékopa András vezetésével. Három osztály alkotta a főosztályt: Operációkutatási Osztály, Numerikus Módszerek Osztálya, Statisztikai Osztály. Az első vezetője Kovács László Béla lett, de a szakmai vezetés továbbra is Prékopa Andrásé maradt. A Numerikus Osztály tagja volt néhány évig Abaffy József, aki nemzetközi viszonylatban is értékelhető, kiváló tudományos eredményeket ért el, továbbá azt, hogy a Statisztikai Osztály eredményesen vett részt az IIASA-val (International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenburg, Ausztria) közös Balaton projektben. A főosztály később a Geofizikai Osztállyal bővült Meskó Attila akadémikus vezetésével, ez azonban néhány év múlva megszűnt. Prékopa András 1985-ben távozott a főosztály éléről, utóda Maros István lett (az INFELOR-ból) és abban az időben került oda Mészáros Csaba is.

Tudományos eredmények

A legjelentősebb tudományos eredmények a sztochasztikus programozás és néhány országos jelentőségű, sikeres projekt vonalán születtek.

I. Sztochasztikus programozási vonatkozásban a vezető kutató Prékopa András volt, tudományos eredményei mellett jelentős volt iskolateremtő szerepe is (Deák István, Szántai Tamás, Gerencsér László, Kelle Péter, Mayer János, Komáromi Éva és mások). Prékopa a sztochasztikus programozás kezdeményezői közé tartozik az ún. valószínűséggel korlátozott sztochasztikus programozási modell legáltalánosabb és legerősebb formája az ő nevéhez fűződik. A sztochasztikus programozási modellek döntési sémákhoz kapcsolódnak, ezekben a döntések és a megfigyelések egymást követik. Ha csupán egy döntés és egy ezt követő megfigyelés történik, a modell statikus, különben dinamikus. A statikus modellekben a valószínűségi korlátozás általában azt jelenti, hogy valószínűségi változókat tartalmazó egyenlőtlenségek együttes teljesülésére előírunk egy 1-hez közeli, minimálisnak tekintett valószínűségi szintet, ezt a követelményt az egyéb feltételek között helyezzük el, majd előírunk egy célfüggvényt, mely a szabad paraméterek optimális megválasztását célozza. A feladat tehát jóval bonyolultabb, mint egy tipikus megbízhatóságelméleti feladat megoldása, ugyanis most nem csupán valószínűséget számítunk, hanem egy arra tett feltétel mellett optimalizálunk is. A valószínűséggel korlátozott elvet Prékopa dinamikus modellek esetére is alkalmazta.

A modellhez kapcsolódó elméleti matematikai eredmények önmagukban is nagy nemzetközi visszhangot keltettek és azokat széles körben alkalmazták a valószínűségelméletben, a statisztikában, a fizikában, a közgazdaságtanban, pénzügyi modellekben, szociológiában, dietetikában stb. A modell algoritmikus és gépi-numerikus megoldásában Deák István, Szántai Tamás, Mayer János, Kelle Péter, Komáromi Éva, Rapcsák Tamás és mások vettek részt. Számos konkrét gyakorlati alkalmazás történt Prékopa András vezetésével: 1. A magyar villamosenergiaipar ötéves terve. 2. Balatoni vízszintszabályozás. 3. Tiszai víztározók optimális méretezése. 4. Dél-Magyarországi árvízi tározó optimális méretezése. 5. Árvízi tározórendszer optimális méretezése. 6. Optimális induló készletek meghatározása. 7. Biztosításmatematikai problémák megoldása. 8. Mérnöki szerkezetek méretezése. 9. Kapacitásméretezés közúti hálózatokban.

További alkalmazások is vannak, melyek azonban nem a SZTAKI keretében történtek.

II. Az 1960-as évek elején született a Matematikai Kutatóintézet Csoportjának tevékenysége révén a Prékopa–Ziermann-féle készletmodell. Ennek az a lényege, hogy ipari üzemek termeléséhez a folyamatos anyagellátást biztosítandó biztonsági (induló) készleteket kell méretezni, mégpedig valamennyi alapanyagra és félkész termékre. A faladat megoldására egy egyszerűbb (Ziermann, Prékopa) és egy igényesebb (Prékopa) modell született. A modellek nagymértékben eltértek az irodalomban közölt modellektől, egyfelől rendkívül gyakorlatiasak voltak, másfelől elméleti feldolgozásuk újszerű matematikai eredmények elérését tette szükségessé (konvergencia mértékterekben a Brown-mozgás folyamathoz). A Prékopa–Ziermann-modell volt az egyetlen sikeres készletmodell, melyet magyarországi viszonylatban alkalmaztak, a keletkezését követő negyedszázad során. Ebből a munkából a SZTAKI Alkalmazott Matematikai Főosztályának Operációkutatási Osztálya is kivette a részét. Az alkalmazás során az alapmodellnek több variánsa született, melyek a modell elméletét is gazdagították. A projektben Prékopa András, Kelle Péter és Gerencsér László vettek részt.

III. A Magyar Villmosenergiaipar napi termelési ütemezésének meghatározása. A feladatot az 1970-es években mintegy tíz évi kutatómunkával oldotta meg egy kutatócsoport Prékopa András vezetésével. A csoport további tagjai Mayer János, Strazicky Beáta, Deák István, Hoffer János, Németh Ágoston és Potecz Béla voltak. A feladatot általánosabban is megfogalmazták, így alkalmas rövidtávú villamosenergia-termelés ütemezésére, hőerőművek rendszerében, a hálózati feltételek figyelembevétele mellett. A hazai esetet tekintve, a napot egyórás ill., félórás periódusokra osztották, és minden egyes periódusra vonatkozólag megmondták, hogy melyik erőmű melyik gépegysége mikor kapcsolódjon be, ill. ki és bekapcsolt állapotában milyen szinten termeljen, hogy a napi termelési költség minimális legyen, adott feltételek mellett. A feltételek között a rendelkezésre álló tüzelőanyag korlátozás mellett sok egyéb is van, ilyen pl. az, hogy egy kikapcsolt generátort néhány óráig nem szabad bekapcsolni; a csomóponti és hálózati feszültség sehol ne legyen túl nagy; de a legfontosabbak azok a hálózati feltételek, amelyek a hálózat teljes fizikájának figyelembevételével biztosítják a csomópontokban jelentkező igények kielégítését. A modell nagyméretű, nemkonvex, vegyes változás determinisztikus (az igényeket elég nagy pontossággal sikerült előre jelezni) matematikai programozási feladat, eredeti formájában komplex számokkal a feltételekben és a célfüggvényben. A feladat megoldási ideje az 1980 körül az Akadémián üzembe állított IBM3031 számítógépen két perc volt, tehát alkalmas a gyakorlatban való bevezetésre. Az eredményeket az 1980-as évek elején bemutattuk az MTA Operációkutatási Bizottságnak és még a riválisok is nagy elismeréssel nyilatkoztak róla. A modellről és a feladat megoldásáról egy terjedelmes magyar nyelvű cikkben számoltunk be. Ennek angol fordítása 2014 júliusában könyv alakban is megjelent a Springernél.

IV. Forgalmi hálózatok fejlesztési és karbantartási problémái. A kutatócsoport vezetője eleinte Klafszky Emil, később Bakó András volt. További résztvevők: Kas Péter, Király László, Kis Dénes (külső), Vásárhelyi Boldizsár (külső), Monigl János (külső) és mások. Városok közúti forgalmát modellezték a körzetekre osztás és a „nehézkedési vonzás", továbbá az ún. forgalom ráterhelés (traffic assignment) módszerével. Meg tudták mondani pl., hogy ha Budapesten egy hidat lezárnak, miként alakul a város forgalma. A modellt az országos úthálózata is megfogalmazták, számszerűsítették és eredményesen alkalmazták az országos tervezésben.

Egy másik idevágó projekt volt az útburkolat menedzsmentjének problémája, hogy ti. a téli leromlás után milyen kezelést célszerű alkalmazni a különböző típusú utakra. A kutatás a későbbiekben a hidak optimális karbantartási ütemezésére is kiterjedt.

V. Eredmények az operációkutatási szoftver területén. E tekintetben elsősorban Maros István munkásságát kell megemlíteni, akihez több bravúros LP-megoldás fűződik. Ezek egy részét még az INFELOR-ban fejlesztette, amikor a Kornai–Lipták-modell alkalmazása félbemaradt, és helyette Makra Tamás ajánlott másikat a Tervhivatal részéről. A feladat sikeres megoldása után Maros István PC-re írt LP-kódja egy nemzetközi összehasonlításban a második helyen végzett (az első helyre egy professzionális szoftvercég kódja került). Ezt ezután több nyugati intézmény is alkalmazta. Angliában egy takarmányozási programcsomagból kiemelték az LP-kódot, és azt a gyorsabb, megbízhatóbb Maros-féle LP-kóddal helyettesítették.

Maros István hasonlóan hatékony megoldási szoftvert készített a minimum költséges hálózati folyam problémára vonatkozóan. Ez húsz évvel ezelőtt megnyerte a Rutgers Egyetemen szervezett versenyt, maga mögé utasítva ünnepelt megoldási algoritmusokat alkalmazó kódokat. Az operációkutatási szoftver másik nagy egyénisége Mészáros Csaba (Maros István tanítványa), aki a belső pontos módszerek számítógépes reprezentációjával ért el jelentős nemzetközi sikereket.

VI. A fentiekben csupán a legfontosabb, legnagyobb hatású elméleti, alkalmazási és számítástechnikai eredmények összefoglalására törekedtem. Terjedelmi okok miatt nem térhettem ki sok egyéb tudományos és alkalmazási eredmény ismertetésére. Megemlítem azonban, hogy sok szép eredmény született diszkrét programozási vonatkozásban (Kovács László Béla, Vizvári Béla), hálózati folyamokkal kapcsolatban (Klafszky Emil, Bakó András, Komáromi Éva, Kas Péter, Király László) és nemlineáris programozás vonatkozásában (Rapcsák Tamás, Fülöp János, Klafszky Emil). A projektek közül a Dunaújvárosi Acélmű termeléstervezési problémájának több főosztályt érintő munkáit kell megemlíteni. Utóbbi tudományos értéke azonban kérdőjeles.

VII. Oktatás. 1968–1985 között a Matematikai Kutató Operációkutatási Csoportja, később az MTA Számítástechnikai Központja, ill. a SZTAKI Operációkutatási Osztálya sikerrel látta el egy teljes operációkutatási mester szintű program működtetését az Eötvös Loránd Tudományegyetem Matematikai Intézetében. A program létrehozója és vezetője Prékopa András volt. Sajnálatos, hogy az utánpótlás nevelése ilyen címen a mai Magyarországon nem folyik.

VIII. A SZTAKI és az MTA Számítástechnikai Központ egykori munkatársai közül tizenöten lettek egyetemi tanárok, ill. nyerték el a tudomány doktora címet, közülük egy az MTA rendes tagja. Munkáik nemzetközileg ismertek és elismertek. Ezt számos dokumentum bizonyítja, melyek közül e helyen csak egyre hivatkozom.

Alex Orden, a matematikai programozás és az operációkutatás egyik kezdeményezője és klasszikusa 1975 szeptemberében Magyarországon járt azzal a feladattal, hogy a National Science Fundation számára helyzetképet adjon az operációkutatási és informatikai kutatási és alkalmazási munkákról, eredményekről. Az USA-ba való visszatérése után beszámolót készített, melyet a SIGMAP (Special Interest Group in Mathematical Programming) folyóiratában megjelentetett. Ebben a SZTAKI Operációkutatási Osztályának munkájáról azt írja, hogy „While the extent and variety of OR activity in the US is much greater than in Hungay, it is difficult to find an American OR unit in which mathematical research, algorithm and computer program development and work on applications of OR coexist in harmony on such an extensive front."

Megjegyzés: A tud. eredmények listájában külön fejezetet érdemel Gerencsér László tevékenysége. Ezt azonban ő saját maga tudja a legjobban összefoglalni, azért nem vettem be az én előzetes anyagomba.

Budapest, 2014. május 31.

Prékopa András

Alkalmazott Matematikai Lapok **35** (2018), 13–28

PRÉKOPA ANDRÁS ERDÉLYI KAPCSOLATAI

KOLUMBÁN JÓZSEF

Babes–Bolyai Tudományegyetem emeritus professzora, az MTA külső tagja

Prékopa András 14 évesen lett a marosvásárhelyi hadapródiskola tanulója. A fegyelemre, a haza szeretetére, becsületre, hűségre és önfeláldozó bajtársiasságra való nevelés kovácsolta össze az iskola közösségét. András életének későbbi mozgatórugói, motivációi és sikerei erre az alapra épültek. Neki köszönhetjük, többek között, a sztochasztikus programozás elméletének kidolgozását és széles körű gyakorlati alkalmazását, valamint a világszinten elismert magyar operációkutatási iskola megalapítását. Rendkívüli matematikai tehetséggel megáldott, nagy munkabírású, céltudatos, tisztán látó, ötletgazdag, kitűnő szervezői és vezetői képességekkel rendelkező tudós volt. Ha feladatai megoldásához nem voltak meg a megfelelő matematikai vagy adminisztrációs feltételek, szívósan addig küzdött, amíg megteremtette azokat. Ez az attitűd jellemezte erdélyi kötődéseit is: állandóan kereste kapcsolataink megerősítésének lehetőségeit, és kezdeményezéseit mindig siker koronázta.

Andrást jó helyre tette le a gólya. Édesapja Szabolcs vármegye legnagyobb bankjának, a Nyíregyházi Takarékpénztár Egyesületnek volt az igazgatóhelyettese. A Prékopa család ősi nyíregyházi iparos, kereskedő és értelmiségi család. Iskoláit András – két és fél év kivételével – Nyíregyházán végezte, ott is érettségizett 1947-ben a Kossuth Lajos Gimnáziumban. Az említett két és fél év alatt a marosvásárhelyi hadapródiskola növendéke volt. Ekkor került először kapcsolatba Erdéllyel, és mivel életére ez az időszak kétségkívül nagy hatással volt, érdemes néhány dolgot tudnunk az említett iskoláról.

A marosvásárhelyi hadapródiskola történetének kezdete az Osztrák-Magyar Monarchia idejére nyúlik vissza, amikor határozat született a Kismartonban levő császári és királyi alreáliskola Marosvásárhelyre való áttelepítéséről. Az 1908–1909-es tanévben Marosvásárhely szélén, a Somostető aljában egy újonnan épült impozáns épületben megindult a tanítás német nyelven. 1920 és 1940 között az épületben román katonaiskola működött, ma pedig ott van az orvosi egyetem székhelye.

1941-ben döntés született az ötéves képzési idejű tisztképző hadapródiskolák felállításáról. Ezekben, a katonai képzésen kívül, meghatározott helyi tantervvel, érettségi vizsgával végződő reálgimnáziumi oktatás is folyt az I–IV. évfolyamon. A IV. évfolyam végén teendő érettségi vizsga elsősorban a katonai akadémiákra, de kiegészítő vizsgák után bármely más egyetemre való felvételre jogot biztosított. Az ötödik évfolyam sikeres elvégzése után a növendékeket zászlósi rendfokozattal felvették a tiszti állományba, de a háború kimenetele miatt erre csak egyszer, 1944 őszén kerülhetett sor. Ilyen iskolák Budapesten, Marosvásárhelyen, Nagyváradon, Pécsett és Sopronban működtek.

A marosvásárhelyi Gyorsfegyvernemi Hadapródiskola történetével kapcsolatban sok adatot találunk az iskola néhány növendékének visszaemlékezéseit tartalmazó, Vécsey László által szerkesztett és Tatabányán 1998-ban kiadott [1] könyvben. Ebből kiderül, hogy egy nagyon komoly, sokoldalú oktatási program szerint működő intézményről van szó, amelyben jól felkészült tanárok foglalkoztak a kamaszkorú tisztnövendékekkel. A tanári testületet nagyrészt pályázati alapon felvett, tanári képesítéssel rendelkező tartalékos tisztek alkották. Andrásnak a matematikát Batár Zoltán tanította, aki később Miskolcon egyetemi tanár lett. Kiss Ernő, az iskola másik matematikatanára, a kolozsvári Bolyai Egyetemen tanárom volt.

A hadapródiskolák annak a kornak legkiválóbb nevelőintézményei közé tartoztak. Fiatal, 14–15 éves fiúkból rövid idő alatt kemény katonákat képeztek, akik mind fizikailag, mind erkölcsileg megállták a helyüket az életben. Az iskola belső élete, működésének rendje a legszigorúbb szabályok precíz betartásával történt. A szigorúság mellett a tanároktól elvárták, hogy igazságosak legyenek, tanítványaik problémáit tárgyilagosan és megértéssel kezeljék. A növendékek nevelésében a kötelességtudat fejlesztése, a tanulmányi, testedzési, fegyelmi elvárások maximális teljesítése volt a cél. A növendékeknek fellépés, megjelenés, tisztaság, szabályos öltözék tekintetében az „abszolútra” kellett törekedniük. Aki fegyelmet fog követelni, úgy éljen maga is! Az a szellem, amely áthatotta az iskolát, tartást, önfegyelmet, fizikai és lelki erőt adott növendékeinek. A háború után közülük sokan élsportolók, olimpiai bajnokok, orvosok, mérnökök, tanárok, jogászok, közgazdászok, írók, újságírók, országos hírű művészek, zeneszerzők, tudományos kutatók, a Magyar Tudományos Akadémia köztestületének tagjai lettek, András pedig a Magyar Tudományos Akadémia, a Mexikói Mérnöki Akadémia és a New York-i Akadémia tagja, világszerte elismert tudós volt, aki úttörő felfedezéseivel örökre beírta nevét a matematika történetébe, és – sok más kitüntetése mellett – Széchenyi-díjas egyetemi tanárként fejezte be életét.

Még nem töltötte be 14. életévét, amikor 1943 augusztusának végén felvételi vizsgára jelentkezett. A több száz kérvényező közül Marosvásárhelyen 93 gyereket vettek fel, akiket 4 osztályba soroltak be. András a páncélosokhoz került. Szeptember 20-ára kellett az I. éveseknek bevonulniuk. A civil ruhát egyenruhára cserélték, becsomagolt ruháikat hazaküldték, és másnap elkezdődött a három héten át tartó újonckiképzés, amelyet az osztálytisztek irányítottak. A kiképzéshez osztályonként egy IV. éves és három III. éves tanulót behívtak nyári szabadságukról, akiknek az volt a feladatuk, hogy három hét alatt fegyelmezett egységet kovácsoljanak a sok kis gyerkőcből.

Az 1943–1944-es tanévben az elméleti oktatás október 11-én kezdődött és május 6-án ért véget. A katonai elméleti és gyakorlati időszak május 8-tól július 29-ig tartott. Ekkor csak katonai tárgyak oktatása folyt. Sok volt a gyakorlati kiképzés, sportfoglalkozás, éleslövészet. Ekkor rendezték meg a labdarúgó-, kézilabda-, atlétikai és úszóversenyeket. Különböző sporttevékenységek és terepgyakorlatok lehetővé tették, hogy a tanulók megismerjék a görgényi és gyergyói hegyek szépségeit is. Andrásnak az erdélyi táj iránti szeretete akkor alakult ki.

Július 30-án Andrásék évfolyama nyári szabadságra ment.

1944 augusztusában, a románok átállása következtében, súlyos helyzet alakult ki Észak-Erdélyben. A szabadságon levő IV. és V. éves növendékeket augusztus 28-án berendelték azzal a céllal, hogy az iskola kiürítésénél segédkezzenek és a román betörés elleni védelemnél igénybe vehetők legyenek. Szeptember 2-án a szovjet hadsereg gyors előretörése miatt a hadvezetőség Erdély védelmét feladta, ezért elrendelték az iskola áthelyezését Vasvárra. Azok a tanulók, akik addig nem érkeztek meg Marosvásárhelyre, október 15-én ott kellett jelentkezzenek. András szeptember 6-án, mielőtt bevonult Vasvárra, átélte Nyíregyháza egyik legszörnyűbb, angolszászok által véghezvitt bombázását. A közelükben sok ház megsemmisült, sokan haltak meg és sebesültek meg a légitámadásban.

Az iskola felszerelése szeptember közepére megérkezett Vasvárra. A vasúti szállítás közben a szerelvényeket szőnyegbombázás érte, aminek következtében az iskola felszerelését nagy anyagi kár érte. A növendékek zöme, a háborús körülmények miatt, csak október végére érkezett oda. A vontatottan induló és időnként megszakadó tanítás, a megszokott, szoros időbeosztás tarthatatlansága és a front közelsége rányomta bélyegét a hangulatra. December 6-án megjött a parancs a németországi kitelepítésre. December 19-én kályhával és ágyakkal ellátott tehervagonokban elindultak Németországba. Andrásék százada a Celle melletti Bergenbe települt, ahová január 3-án érkeztek meg. Lassan kialakult a napirend és az ellátás is elfogadható volt. A heti program: két nap elméleti oktatás, két nap gyakorlati foglalkozás, két nap pedig fagyűjtés a 7 kilométerre levő erdőből. A napirend szerinti elméleti oktatási napokon a polgári tárgyak tanítása is folytatódott.

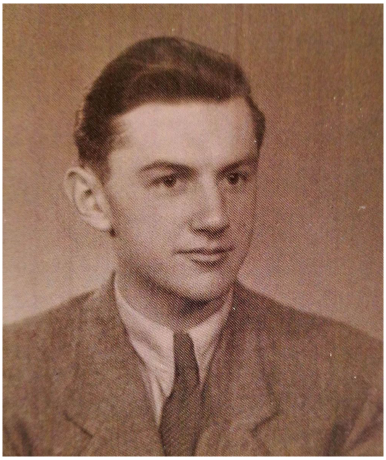
Április elejére az angol hadsereg nagyon megközelítette a tábort, ezért 11-én elindultak északi irányban, gyalogmenetben, több szekeret húzva maguk után. Április 14-én eljutottak Schwarzenbeckbe, ahol másnap bevagoníroztak, s vonattal mentek tovább Dánia felé. Útközben sokszor volt légiriadó, sőt bombázás is, többször hosszú órákra félreállították a szerelvényt. 17-én megérkeztek Dániába, de másnap a szerelvényt visszairányították a németországi Flensburgba. Itt a kirakodás után gyalogmenetben Steinbergbe értek, ahol április 21-től május 3-ig a Bergenben kialakított rend szerint folyt az elméleti és gyakorlati kiképzés. A német fegyverletétellel egy időben az iskola tisztjei a fegyvereket összeszedték és átadták az angoloknak. Ezután délelőttönként rendszeres fegyvernélküli foglalkozást tartottak, míg május 31-én megérkezett az indulási parancs. Hosszabb-rövidebb megszakításokkal (többnyire gyalog) Hammba érkeztek, ahol a táborban a britek osztrák és magyar foglyokat őriztek. Az ellátás itt is silány volt. Mivel a fiúk az éhséget már nem bírták tovább, egyszer néhányan – Andrással együtt – kiszöktek a drótkerítéssel körülvett táborból, és a közeli krumpliföldön krumplit szedtek. Szerencséjükre az őrök, akiknek tűzparancsuk volt, nem vették észre őket.

A hadapródiskola tisztjei a fogság ideje alatt is összetartották a tanulókat, és biztosították azok rendszeres oktatását a polgári tantárgyakból. Tették ezt azért, hogy tanítványaik a szabadulás után folytathassák tanulmányaikat, anélkül, hogy évet veszítsenek. 1945 késő őszén András nem várta meg a fogságból való szabadulás napját, hanem néhány társával megszökött. A hazajutás Németországból igen veszélyes volt a különböző zónák miatt, de a legnehezebb az orosz zónán való átjutás volt. András és társai a Komáromi Erődben alapos ellenőrzésen estek át. Budapestről már egyedül indult vonattal Nyíregyházára. A nagy zsúfoltság miatt a külső lépcsőn fél lábon állva utazott. Karácsony napján érkezett haza, ahol Édesapja halálhíre fogadta. 1944 szeptembere óta semmit sem tudott az otthoniakról, és a családja se tudott róla. Így ért véget András számára a hadapródiskola időszaka. A sok megpróbáltatás ellenére gyakran mondta: ha Nyíregyházán marad, nem biztos, hogy élve megszabadul a háború következményeitől, mert sok iskolatársát az oroszok elvitték, és soha nem tértek haza.

A katonás iskolai nevelés, a menekülés, a hadifogság, az újabb menekülés minden bizonnyal embert formáló tapasztalatok voltak számára. Így András tizenhat és fél éves korára már felnőtt emberré vált, akinek életfelfogása, jelleme, tartása aligha változott azután.

Menekülés közben iskolai dokumentumai elvesztek, ezért hazaérkezése után előbb az első két év osztályvizsgáit le kellett tegye, azután folytathatta középiskolai tanulmányait. „Erről az időszakról szólva, mindig nagy szeretettel emlegette az akkor már nyugdíjas Ambrózy tanár urat, akihez felolvasni járt, mert a tanár úr vak volt. Remek matematika tanár volt, akitől András sokat tanult, és matematikai gondolkodásmódját is befolyásolta." (Széchenyi Kinga)

Az érettségi vizsga után András beiratkozott a Debreceni Tudományegyetemre, mint matematika, fizika és ábrázoló geometria szakos tanárjelölt. Másodéves korától demonstrátorként már más szakos hallgatókat tanított az egyetemen. Matematikus számára előnyös, ha sok önbizalommal, kezdeményező készséggel, céltudatossággal, határozottsággal, kíváncsisággal, szakmája iránti elkötelezettséggel, fantáziával és munkabírással rendelkezik. Ezeknek az erényeknek András bőven birtokában volt, így nem csoda, hogy Rényi Alfréddal könnyen egymásra találtak. Rényi 1949-ben lett a Debreceni Tudományegyetem professzora. A matematika lételeme volt, tele volt ötletekkel, újító gondolatokkal, és 1949-től kezdődően tekintélyes iskolát hozott létre maga körül. Tanítványai közül András időrendben is a legelsők között volt.



Prékopa András egyetemistaként (1950 körül)

Prékopa András Rényi Alfréddal Obervolfachban

András első dolgozata harmadéves egyetemi hallgató korában jelent meg „Egy valószínűségszámítási feladatról” címmel, amelyet 1950-ben, az első magyar matematikai kongresszuson is bemutatott. Az egyetemet 1951-ben végezte el, ez után a Budapesti Műegyetemre irányították, ahol fél évig tanársegéd volt a Vegyészmérnöki Kar Matematika Tanszékén, majd aspiráns lett az Alkalmazott Matematikai Intézetben Rényi Alfréd vezetése mellett. Ezek az évek formálták alkalmazott matematikusi szemléletmódját és hivatástudatát. Az aspirantúrát 1955-ben fejezte be. „Sztochasztikus halmazfüggvények” című disszertációját (amelyet Grünwald Géza-díjjal jutalmazott a Bolyai János Matematikai Társulat) 1956-ban védte meg.

Az aspirantúra után 1956 szeptemberéig az Alkalmazott Matematikai Intézet jogutódjában, a Matematikai Kutató Intézetben tudományos munkatárs volt. Ezután az ELTE TTK Valószínűségszámítási Tanszékén dolgozott 1968-ig, előbb adjunktusi, 1963-tól pedig docensi beosztásban. Legfontosabb oktatási jellegű tevékenysége az operációkutatás ELTE-n való meghonosítása volt. Első, lineáris programozási speciális előadását 1958-ban tartotta. Az 1965. évi egyetemi reformtervben elfogadták az operációkutatási szakirány létesítését, és 1969-ben már végzett is az első évfolyam. 1968-ban elfogadta a Műegyetem ajánlatát és a Villamosmérnöki Kar Matematika Tanszékének egyetemi tanára lett. Később, 1977-ben átment a Gépészmérnöki Kar Matematika Tanszékére, hogy részt vegyen a matematikus- gépészmérnök szakirányú képzésben. Itt dolgozott 1983-ig, amikor visszakerült az ELTE-re, miután ott létrejött az Operációkutatási Tanszék, amelynek vezetőjévé nevezték ki. Volt tanítványai írják, hogy „egyetemi diplomájukat frissen megszerzett hallgatóival azonnal tegeződésre váltott, és közvetlen, gyakran baráti kapcsolatot alakított ki velük”.

András életében az akadémiai intézetekben betöltött mellékfoglalkozású pozíciói legalább olyan fontos szerepet játszottak, mint főállásai. Ezekben az intézetekben a politikai nyomás jóval enyhébb volt és így a párton kívüli professzor könnyebben nyerhetett el vezető beosztást. Az első kutatócsoportja a Matematikai Kutató Intézeten belül létesült 1959-ben „A Matematika Közgazdasági Alkalmazásai" elnevezéssel. 1970-ben átment az Akadémia Számítástechnikai Központjába, ahol 1973-ig az Operációkutatási Osztály vezetője volt. A tudományok doktora fokozatot operációkutatási jellegű disszertációval szerezte meg 1971-ben. Ennek címe: „Sztochasztikus rendszerek optimalizálási problémáiról". 1977-ben az akkor létesített Alkalmazott Matematikai Főosztálynak lett a vezetője. Ezen belül működött az Operációkutatási Osztály, ezt szintén Ő irányította. Az akadémiai intézetekben betöltött pozíciói mellett az ELTE-n az Operációkutatási szakirányt is fenntartotta. Ezt az oktatást 1968 után is változatlanul ő szervezte és végezte, a SZTAKI Operációkutatási Osztályának tagjaival együtt. 1975-ben Alex Orden amerikai professzor így ír az általa vezetett kutatócsoportról: „Jóllehet az amerikai operációkutatási aktivitás mérete és változatossága a magyarországinál sokkal nagyobb, nehéz olyan amerikai kutatóegységet találni, melyben a matematikai kutatás, algoritmus, számítógépes programfejlesztés és az operációkutatás alkalmazásai ily harmóniában élnek együtt, ennyire széles területen". Iskolájának tevékenységéről 1982-ben H. Wacker ausztriai professzor a Zeitschrift für Hochschuldidaktikban ezt írja: „egyik példáját adja azoknak a csoportoknak, nemzetközi viszonylatban, amelyek a matematikus képzésben az elméleti megalapozáson kívül a gyakorlatorientáltságot is megvalósították". András egész tudományos pályafutása alatt óriási érdeklődéssel fordult az alkalmazások felé. Ám e tekintetben elsősorban a tudományos értékű alkalmazások vonzották, melyekben új matematikai eredményeket, újszerű modellalkotást és fontos gyakorlati hasznot lehet elérni.

Prékopa András a Széchenyi-díj jelvényével (1996)

1985-ben elfogadta az Amerikai Egyesült Államokbeli Rutgers Egyetem Operációkutatási Központjának meghívását előbb egy „distinguished visiting professor", majd egy állandó jellegű „Professor II" pozíció betöltésére. Az utóbbi a Rutgers Egyetemen a legmagasabb professzori rangot jelenti.

1977-ben külföldi levelező tagja lett a Mexikói Mérnöki Akadémiának; 1979-ben a Magyar Tudományos Akadémia levelező tagja, rendes tagja pedig 1985-ben lett. Két évvel később tagja lett a New York-i Tudományos Akadémiának is. A fentieken kívül sok más, elismerést jelentő funkciót is betöltött. Alapítója és huszonegy éven át (1964–1985 között) elnöke volt a Bolyai János Matematikai Társulat Alkalmazott Matematikai Szakosztályának. A Bolyai Társulatban kifejtett munkásságáért 1983-ban MTESZ díjban részesült. Létrehozója és tíz éven át elnöke az Akadémia Matematikai és Fizikai Tudományok Osztálya Operációkutatási Bizottságának. Egyik alapítója, majd előbb felelős szerkesztője, később főszerkesztője az Alkalmazott Matematikai Lapoknak.

Tagja számos hazai és nemzetközi folyóirat szerkesztőbizottságának. Elnöke volt a Magyarországon 1963-ban rendezett első nemzetközi jellegű operációkutatási konferenciának, majd ezt követően közel húsz, Magyarországon rendezett, nemzetközi és magyar, főleg operációkutatási jellegű tudományos konferenciának.

Az eddig felsorolt fontos feladatainak listája távolról sem teljes, de elég hosszú ahhoz, hogy elcsodálkozzunk rajta. Tudnunk kell, András soha nem várta, hogy a feladatok keressék meg őt, önmaga kereste meg azokat. Mindig tudta, hol a helye, és mit kell ott tennie. Úgy tűnik, sok-sok év távlatából is gyakran visszaköszönt neki halkan a marosvásárhelyi hadapródiskola.

Első tudományos eredményei a sztochasztikus folyamatokkal és ezek általánosításaival kapcsolatosak. Ezt követően az operációkutatáson belül főleg sztochasztikus programozással foglalkozott. A valószínűséggel korlátozott sztochasztikus programozási modell legfontosabb eredményei az ő nevéhez fűződnek. Erről Deák István, aki az ELTE-n az operációkutatási szakosztály első évfolyamán végzett, a következőket írta: „Amikor 1969-ben véglegessé vált, hogy hozzá mehetek dolgozni, András elhívott az egyetem melletti Múzeum Kávéházba. Kávét ittunk, ő meg egy szalvétára felvázolta azt, amit később STABIL-modellnek nevezett el, vagyis a több feltételre egyszerre megbízhatósági korlátot használó optimalizálási feladatot.” A STABIL-modell kapcsán nyert logkonkavitási eredményeit a matematika számos egyéb ágában is felhasználták (valószínűségelmélet, statisztika, konvex geometria, funkcionálanalízis). A logkonkáv valószínűségi mértékkel kapcsolatos eredményei – mind elméleti, mind gyakorlati szempontból – joggal sorolhatók a legjelentősebb magyar matematikai felfedezések közé.

Ez irányú eredményeit nagydoktori tézisében foglalta össze, és 1971-ben a [17]–[18]-as dolgozataiban publikálta. Egy évvel később András gondolatait Leindler László [16] kiterjesztette arra az esetre, amikor a változók számtani közepe helyett a változók tetszőleges konvex kombinációja szerepel. Ezért az elmélet főeredménye ma Prékopa–Leindler-egyenlőtlenség néven ismert a szakirodalomban. Ez az egyenlőtlenség kiindulópontja volt az analízis és a geometria határán kisarjadzott új matematikai elméletnek, amelyet analitikus konvex geometriának is neveznek. A Prékopa–Leindler-egyenlőtlenség általánosítása a híres Brunn–Minkowski-egyenlőtlenségnek és az integrálokra vonatkozó Hölder-egyenlőtlenség fordítottjának tekinthető. Közel háromnegyed évszázad után kiderült, hogy a Brunn–Minkowski-egyenlőtlenség a dolgok mélyén nem a geometria, hanem inkább az analízis tárgykörébe tartozik. A Prékopa–Leindler-egyenlőtlenség kapcsolatban van az izoperimetrikus feladatokkal, a Szoboljev-egyenlőtlenséggel és az analízis más fontos kérdésével. Euklideszi terekben a Prékopa–Leindner-egyenlőtlenséget

Borell [8], és tőle függetlenül Brascamp és Lieb [9] általánosította, majd Cordero–Erausquin, McCann és Schmuckenschläger [10] Riemann-terekre terjesztette ki. Ebben a témakörben Böröczky Károly [2], [3], Dancs István [11], [12], Ruzsa Imre [19] és Uhrin Béla [11], [12], [20], [21], magyar matematikusok is fontos eredményeket értek el. R. J. Gardner 2002-ben közölt egy összefoglaló cikket ezzel a kérdéskörrel kapcsolatos addigi vizsgálatokról, és irodalomjegyzékében 153 dolgozatot tüntetett fel. Azóta a Prékopa–Leindner-egyenlőtlenséggel kapcsolatos dolgozatok száma egyre nő. Különösen az egyenlőség esetének és az egyenlőtlenség stabilitásának vizsgálata áll ma a figyelem középpontjában.

Újabban három Kolozsváron végzett matematikus is bekapcsolódott a témakör tanulmányozásába, akik szépen fonogatják az András matematikai hagyatékát Erdéllyel összekötő szálakat. Ők a Prékopa–Leindler-egyenlőtlenséget szinguláris geometriák (mint amilyenek a Heisenberg- és a Carnot-csoportok) esetére általánosították és vizsgálták az egyenlőség, valamint a stabilitás kérdését is. Kristály Sándor [14], [15], meghatározta Finsler-tereken a Szoboljev-egyenlőtlenségben, valamint a Heisenberg-féle határozatlansági relációban szereplő legjobb együtthatókat. Balogh Zoltán és Kristály Sándor [4], alkalmazva az optimális tömegszállítás elméletét, Riemann- és Finsler-tereken tanulmányozták azt az esetet, amikor a Borell–Brascamp–Lieb-egyenlőtlenségben egyenlőség áll fenn. Balogh Zoltán, Kristály Sándor és Sipos Kinga [5], [6], [7], megcáfolva egy tévhitet, kimutatták, hogy az optimális tömegszállítás módszere alkalmazható Heisenberg-csoportok esetén is, ha a metrikus mértéktereken korábban használt Lott–Sturm–Villani-féle görbületi feltételt mással helyettesítjük. Igazolták, hogy ez a feltétel – bizonyos Carnot-csoportok esetén – egy Jacobi-determinánsra vonatkozó egyenlőtlenséggel adható meg. A szerzők ezekre az újkeletű dolgozatokra nagyon biztató visszajelzéseket kaptak a témakörben meghatározó jelentőségű matematikusoktól (Villani, McCann, Ambrosio, Cordero-Erausquin), akik az említett eredményeket áttörésnek minősítették.

Az 1960-as évek eleje óta, leginkább szakmai okokból, de néha turistaként is, András többször járt Romániában. Ezekre az utakra, ha lehetett, elkísérte felesége, Kinga Asszony is. Együtt keresték fel Erdély fontosabb városait, Nagyváradtól a Szászföldig, gyönyörködtek ezek „K und K” hangulatot idéző épületeiben. Marosvásárhelyen András lelkesen vezette végig Kingát az általa jól ismert utcákon, megmutatta neki a város legfontosabb épületeit, beleértve az egykori hadapródiskola épületét is. Természetesen a csíkszeredai várat és a csíksomlyói ferencesek templomát sem kerülték el. A szász városok és falvak különleges hangulatát, a Kárpátok fenséges vonulatát szintén együtt csodálták meg először. Később gyerekeiket is elhozták erre az istenáldotta vidékre.

Andrást én 1969 szeptemberében ismertem meg, akkor jártam először Budapesten, egy konferencián való részvétel ürügyén. A konferencián a duális feladatok elméletének axiomatikus felépítéséről tartottam előadást. Mivel én Andrást hírből ismertem és tudtam, hogy operációkutatással foglalkozik, szerettem volna vele beszélni. Felhívtam, és Ő azt javasolta, hogy keressem fel a lakásán. (Akkortájt nagydoktori disszertációján dolgozott, és csak akkor ment be az egyetemre, ha föltétlenül szükséges volt). Rövid látogatásom alatt a dualitási tételekről és az operációkutatás oktatásáról beszélgettünk. Csak a rendszerváltás után találkoztunk újra. Ennek fő oka az volt, hogy azelőtt még nem volt internet, és az egyetemi tantestületi tagok közötti személyes kapcsolatot sem támogatták. Az akkori viszonyok között, rokoni vagy baráti segítség nélkül, fényűzésnek számított néhány napra Kolozsvárról felmenni Budapestre, nem beszélve az utazási engedély megszerzésével járó hercehurcáról. 1989 után fokozatosan kiépült a határon túli magyar tudományos kutatók és egyetemi oktatók támogatásának intézményrendszere, főleg ösztöndíjak és lakhatási lehetőségek biztosításával.

1991 után rendszeresen jártam Budapestre, és ha András otthon volt, mindig találkoztunk. A magyarországi kollégákkal közös kutatási tevékenységeket kezdeményeztünk, aminek következtében robbanásszerűen megszaporodtak a közös tudományos dolgozatok. Ily módon számunkra gyakorlatilag eltűntek a határok.

Időközben a kolozsvári egyetem magyar tagozata megizmosodott. Hosszú csatározás után sikerült elérnünk, hogy minden tantárgyat magyarul is oktathassunk azok számára, akik ezt igényelték. Mivel a rendszerváltás évében az egyetemen már csak néhány magyar oktató dolgozott, szükség volt tehetséges fiatal tanerőkre. Miután ezek doktoráltak és alkalmassá váltak önálló kutatási munkára is, lehetővé vált az egyetem magyar tagozatának relatív függetlenítése. Erre nem kerülhetett volna sor a magyarországi egyetemek rendszeres szakmai segítsége és a magyar állam külhoni fiatalok tudományos tevékenységét támogató hozzáállása nélkül.

A kolozsvári egyetemen bekövetkezett változásokat András mindig figyelemmel kísérte, és ahol lehetett, segített. Ő is vallotta, hogy az erdélyi anyanyelvi egyetemi oktatást az előttünk járó nagyok életművére támaszkodva kell újraszervezni. Szívén viselte a Bolyai-kultusz ápolását és a Bolyaiak hagyatékának teljes feldolgozását. Ezért érdeklődéssel követte Kiss Elemérnek Bolyai János kézirataival kapcsolatos kutatásait. Tudjuk, hogy francia és olasz matematikusok közbenjárása után az MTA 1869-ben Bolyai Farkas és János hátrahagyott írásait kikérte a marosvásárhelyi Református Főtanodától. 1871-ben az MTA kinevezett egy bizottságot a Bolyai-hagyaték átvizsgálására. A bizottság a két Bolyai írásaiból mintegy 10–15 ív terjedelmű anyagot tartott méltónak kiadásra. Az MTA 25 év múlva azzal a megjegyzéssel küldte vissza Marosvásárhelyre a kéziratokat, hogy „ezen iratokban kiadásra alkalmas anyag nem találtatott". Így lett a kéziratok első komoly kutatója a német Paul Stäckel, akinek „Bolyai Farkas és Bolyai János geometriai vizsgálatai" című kétkötetes könyve 1913-ban Lipcsében németül, majd 1914-ben Budapesten magyar fordításban jelent meg. Bár voltak próbálkozások Bolyai János kb. 14 ezer oldalas kézirata matematikai részének további vizsgálatával kapcsolatban, a múlt század utolsó évtizede előtt lényeges eredményt senki sem tudott felmutatni. Ekkor azonban Kiss Elemér marosvásárhelyi matematikus addig nem tapasztalt alapossággal újból elkezdte vizsgálni a Bolyai-hagyatékot, és 15 évi aprólékos, fáradtságos, kitartó munkával sikerült neki egy árnyaltabb, teljesebb Bolyai-képet kialakítania. Olyan eredményeket talált, amelyekről a korábbi Bolyai-irodalom semmit sem tudott. Kiderült, hogy Bolyai János nemcsak geometriával foglalkozott, hanem az algebra, analízis és számelmélet területén is jelentős eredményeket ért el. Ezek egy része Kiss Elemér nagy feltűnést keltő „Matematikai kincsek Bolyai János kéziratos hagyatékából" (Budapest, 1999; angol nyelven: 1999; bővített kiadás: 2005) című könyvében található. Kiss Elemért ezért a rendkívül értékes munkáért 2001-ben – András ajánlására – a Magyar Tudományos Akadémia külső tagjai közé választotta. (Ezt követően András más erdélyi matematikusok akadémiai külső tagságát is támogatta.)

Kiss Elemér rendkívül kedves, jó modorú, nagy munkabírású ember volt. András 17 nappal fiatalabb volt nála és természetükben is sok közös vonás fedezhető fel. Ha ehhez hozzávesszük mindkettőjük rajongását a Bolyaiakért, könnyen megértjük, hogy hamar összebarátkoztak. „Elemért és Ágit mindketten nagyon szeretjük. Olyan emberek, akikkel azonnal úgy éreztük magunkat, mintha mindig is ismertük volna egymást. Ágival most is él a jó és közvetlen kapcsolat." (Széchenyi Kinga).

Ágnes Asszony a következőket írja a két család tizenöt éves barátságáról: „Érdekes, hogy személyesen először Péter fiúnk és felesége ismerkedett meg Andrással egy amerikai magyar rendezvényen, amelyet András szervezett havonta. Itt derült ki, hogy András ismerte Elemér Bolyai Jánossal kapcsolatos kutatási eredményeit. Később, 2002 nyarán a Bolyai-ünnepségekre András meghívta Elemért Budapestre előadónak, több erdélyi matematikussal együtt. Ekkor találkoztak személyesen először. Hamar összebarátkoztak, nemcsak matematikáról beszélgettek, hanem családjainkról is. András elmondta, hogy Marosvásárhelyhez fiatalkori emlékek fűzik, mert itt járt hadapródiskolába. Amikor Elemér hazaérkezett, boldogan mesélt Andrással való találkozásáról."

„2002 novemberében András Bolyai-konferenciát szervezett New Brunswickban is, ahová minket meghívott. Elemér előadása után András ismertette a résztvevőkkel az erdélyi matematikusok érdemeit, vázolva, hogy milyen körülmények között élnek és dolgoznak. Mi itt ismerkedtünk meg Kingával. Rövid idő múlva meghívtak minket ottani lakásukba, ahol nagyon barátságosan fogadtak... András 75. születésnapján a MTA által rendezett ünnepi ülésre és születésnapi vacsorára a Prékopa család minket is meghívott; bensőséges hangulatban köszöntöttük Őt és feleségét, megpecsételve barátságunkat... Mindig érdeklődtek az itthoni ismerősök felől, a Sapientia Egyetem helyzetéről... Temetésekor Elemért Ő búcsúztatta az Akadémia részéről. Elemér halála után sem szűnt meg barátságunk; amikor fiaimnál voltam látogatóban mindig megkerestek Kingával, hol Magyarországon, hol Amerikában. IGAZI BARÁT tesz ilyet." (Kiss Ágnes)

A budapesti bicentenáriumi ünnepségek alkalmával András kezdeményezésére a Magyar Tudományos Akadémián „Bolyai János emlékezete" névvel egy kiállítást rendeztek. A kiállítás rendkívül értékes anyagának teljes másolatát András a marosvásárhelyi Teleki Tékának adományozta. Ezzel tisztelte meg egykori iskolájának székhelyét.

2002. október 1 és 5. között Kolozsváron is nemzetközi Bolyai-konferenciát rendeztünk, ahol a román matematikusok nagy számban vettek részt. A Magyar Tudományos Akadémia üzenetét Császár Ákos professzor olvasta fel. Az egyetem rektora a következő szavakkal fejezte be megnyitó beszédét: „Today, on celebrating 200 years since Bolyai János's birth, we bow respectfully in front of his memory, being aware that the deepest homage to a thinker is to continue his tireless interrogations for a better understanding of the world's structure and to share the highest performance criteria he adopted."

Prékopa András 80. születésnapján (2010)

András a logkonkáv mérték fogalmához a lineáris sztochasztikus optimalizálási feladatokra vonatkozó dualitási tétel kapcsán jutott el. Ez a fontos tétel lényegében egyenértékű Farkas Gyula (1847–1930) kolozsvári matematikus (félévszázaddal a dualitási tétel előtt publikált és lineáris egyenlőtlenségrendszerekre vonatkozó) egyik tételével, amit a külföldiek többsége nem tudott. András sokat tett azért, hogy az operációkutatással foglalkozó matematikusok körében Farkas Gyula eredményei méltó helyre kerüljenek. Több angol nyelvű cikket írt róluk, és elérte, hogy mára az (igényesebb) optimalizáláselméleti szakkönyvek hivatkoznak Farkas Gyulára. A kolozsvári egyetem egyik legnagyobb hatású tanára volt, ezért örökségét mi is ápoljuk. Ma a főépületben mellszobra van, létezik „Farkas Gyula-társaság" és „Farkas Gyula-terem". Halálának 75. évfordulóján nemzetközi konferenciát rendeztünk, amelyen meghívott előadóként András is vendégünk volt. Akkori előadásának címe „Linear Inequalities, Duality Theorems and their Financial Applications".

2010-ben András volt a Bolyai János halálának 150. évfordulója alkalmával rendezett nemzetközi emlékkonferencia szervezőbizottságának elnöke. A nagy sikerű konferenciát két helyen tartották meg: augusztus 30-tól szeptember 1-ig Budapesten a Magyar Tudományos Akadémián és szeptember 2-től szeptember 4-ig Marosvásárhelyen, a Sapientia Egyetemen. A programba beiktattak a nagyközönség számára szóló, történelmi jellegű előadásokat is, hogy minél többen megismerkedjenek a nagy tudós életével és munkásságával, emellett lehetőséget nyújtottak a Bolyai-emlékhelyek meglátogatására. Mintegy kétszáz résztvevő jelenlétében leplezték le azt az emléktáblát, amelyet Bolyai János egykori háza helyén álló ingatlan falára helyeztek el. Erről a helyi sajtó másnap a következőket írta: „Bandi Árpád nyugalmazott, de közéleti tevékenységben fiatalosan nyughatatlan tanárember folyamatos és fáradhatatlan lótás-futása, szervezőmunkája, kilincselései nélkül két fontos Bolyai János-emlékhellyel lennénk szegényebbek Marosvásárhelyen – az eredeti Bolyai-sír kopjafájával és a németvárosi emléktáblával. Bolyai Jánost életében csak kevesen ismerték polgártársai közül, s a mostani táblaavatásra is csak kétszáznyira tellett, s köztük is több volt a tán nem is vásárhelyi…Prékopa András akadémikus és az emléktábla domborművét megalkotó Széchenyi Kinga művésznő Bandi Árpádnak az MTA emlékplakettjét adták át azért az áldozatos munkáért, amit a Bolyai-emlékek megóvása, megismertetése terén kifejtett”. A konferencia bankettjét András javaslatára a résztvevők Bolyai János-vacsorának nevezték el, és elhatározták, hogy ezentúl három évenként rendszeresen tartanak Bolyai-vacsorákat. Az ötlet onnan származott, hogy Széchenyi István halála után Marosvásárhelyen 1860-ban jeles személyek emlékvacsorát tartottak tiszteletére.

Marosvásárhelyi Bolyai konferencia csoportképe (2010)

A második Bolyai-vacsorát 2013 novemberében tartottuk Kolozsváron a Farkas Gyula-emlékérem átadása után. Ezt a kitűntetést 2006 óta évente legfeljebb három személynek adja át egy bizottság a Magyar Tudomány Napja Erdélyben nevű konferencián. A bizottság elnöke a Farkas Gyula Egyesület elnöke, és tagjai közt vannak az Erdélyi Múzeum Egyesület Matematikai és Informatikai szakosztályának elnöke és titkára, a Radó Ferenc Matematikaművelő Társaság elnöke, valamint a Matlap szerkesztőségének képviselője. A Farkas Gyula-emlékérem alapításának célja, hogy a matematikai és informatikai ismeretek magyar nyelvű terjesztésében és a tehetséggondozásban kiemelkedő eredményeket elért tanárok tevékenységét elismerje. Az érem Széchenyi Kinga képzőművésznő alkotása. A szép kivitelű bronzplaketten Farkas Gyula képe és a „Farkas Gyula Díj" felirat szerepel. A Bolyai-vacsorára András meghívott minden Farkas Gyula-emlékéremmel kitűntetett személyt, aki a 2013-as konferencián jelen volt. Így összesen 20 erdélyi kollégának fizette a fogyasztást. Rendkívül gáláns ember volt. Ha hozzánk jött, soha nem jött üres kézzel.

Utolsó kolozsvári látogatása előtt, 2014 tavaszán a következőket írta nekem: „Kedves Jóska! Valószínűleg tudod, hogy előadást tartok Körtesi Péter konferenciáján. Szerdán, május 21-én érkezem Kingával, és pénteken utazunk vissza. Szerda este szeretettel meghívunk vacsorára Németh Sanyival és a feleségével. A helyet válasszátok ki Sanyival, ti ismeritek a kolozsvári lehetőségeket. Nekem a Piramis étterem is jó, de voltunk egyszer a Szentegyház utcában, egy jó vendéglőben, talán az Egyház működteti, vagy bármi más is megfelel, de hangulatos, és lehetőleg magyar hely legyen. Gondolom, este 7-kor találkoznánk a helyszínen. Én viszek magammal kb. 20 db. Appendixet, amit a Farkas Gyula Társaságnak akarok ajándékozni. Elég súlyosak együtt, úgyhogy gondolkodj rajta, ki vinné el a szállodánkból a kívánt helyre. Baráti üdvözlettel, András"

A harmadik Bolyai-vacsorát 2016 novemberében kellett volna megtartanunk. András 2015 decemberében nekem címzett utolsó levele rövid volt: „Köszönöm, Jóska, jó lenne már találkozni, régen láttuk egymást. Ölellek, András". És még egy idézet: „Ami András Marosvásárhelyen töltött katonaiskolás idejét illeti, kétségtelen, hogy nagyon hatott Erdély iránti szeretetének kialakulásához, ami azután életre szólónak bizonyult." (Széchenyi Kinga) Tanúsíthatom, hogy ez az érzés nem maradt viszonzástalan: Erdélyben Andrást nagyon sokan szeretjük és tiszteljük.

Végezetül Széchenyi Kinga Asszonynak sok irányú segítségéért hálámat szeretném közvetíteni. Nélküle ez az írás nem született volna meg.

Hivatkozások

[1] *A marosvásárhelyi Magyar Királyi „Csaba királyfi" Honvéd Gyorsfegyvernemi Hadapródiskola története*, 1941–1945. Szerkesztette: Vécsey László, ISBN: 963-550-645-7, Tatabánya, 1998.

[2] K. M. Ball, K. J. Böröczky: *Stability of some versions of the Prékopa–Leindler inequality*, Monatsh. Math. **163** (2011), no. **1**, 1–14.

[3] K. M. Ball, K. J. Böröczky: *Stability of the Prékopa-Leindler inequality*, Mathematika **56** (2010), no. **2**, 339–356.

[4] Z. Balogh, A. Kristály: *Equality in Borell-Brascamp-Lieb inequalities on curved spaces*, preprint, 2017.

[5] Z. Balogh, A. Kristály, K. Sipos: *Geodesic interpolation inequalities on Heisenberg groups*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **354** (2016), no. **9**, 916–919.

[6] Z. Balogh, A. Kristály, K. Sipos: *Jacobian determinant inequality on Corank 1 Carnot groups with applications*, preprint, 2017.

[7] Z. Balogh, A. Kristály, K. Sipos: *Geometric inequalities on Heisenberg groups*, preprint, 2016.

[8] C. Borell: *The Brunn–Minkowski inequality in Gauss space*, Invent. Math. **30** (1975), 207–216.

[9] H. J. Brascamp and E. H. Lieb: *Some inequalities for Gaussian measures and the long-range order of one-dimensional plasma*, Functional Integration and its Applications, ed. by A. M. Arthurs, Clarendon Press, Oxford, 1975, pp. 1–14.

[10] D. Cordero–Erausquin, R. J. McCann, and M. Schmuckenschläger: *A Riemann interpolation inequality a la Borell*, Brascamp and Lieb, Invent. Math. **146** (2001), no. **2**, 219–257.

[11] S. Dancs and B. Uhrin: *On a class of integral inequalities and their measure- theoretic consequences*, J. Math. Anal. Appl. **74** (1980), 388–400.

[12] S. Dancs and B. Uhrin: *On the conditions of equality in an integral inequality*, Publ. Math. (Debrecen) **29** (1982), 117–132.

[13] R. J. Gardner: *The Brunn–Minkowski inequality*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **39** (2002), no. **3**, 355–405.

[14] A. Kristály: *Metric measure spaces supporting Gagliardo-Nirenberg inequalities: volume non-collapsing and rigidities*, Calculus of Variations and PDE **55** (2016), no. **5**, Art. **112**, 27 pp.

[15] A. Kristály: *Sharp Uncertainty Principles on Riemannian Manifolds: the influence of curvature*, J. Math. Pures Appl. (Liouville Journal), in press.

[16] L. Leindler: *On a certain converse of Hölder's inequality.* II, Acta Sci. Math. (Szeged) **33** (1972), 217–223.

[17] A. Prékopa: *Logarithmic concave measures with application to stochastic programming*, Acta Sci. Math. (Szeged) **32** (1971), 301–315.

[18] A. Prékopa: *On logarithmic concave measures and functions*, Acta Sci. Math. (Szeged) **34** (1973), 335–343.

[19] I. Z. Ruzsa: *The Brunn-Minkowski inequality and nonconvex sets*, Geom. Dedicata **67** (1976), 337–348.

[20] B. Uhrin: *Extensions and sharpenings of Brunn–Minkowski and Bonnesen inequalities*, Intuitive Geometry, Siófok, 1985, ed. by K. Böröczky and G. Fejes Tóth, Coll. Math. Soc. János Bolyai **48**, North-Holland, Amsterdam, 1987, pp. 551–571.

[21] B. Uhrin: *Curvilinear extensions of the Brunn-Minkowski-Lusternik inequality*, Adv. Math. **109** (1994), 288–312.

Kolumbán József 1935-ben született Gyergyószentmiklóson, ahol elemi iskoláit és gimnáziumi tanulmányait végezte. 1953-ban a csíkszeredai tanítóképzőben érettségizett, 1957-ben a kolozsvári Bolyai Tudomanyegyetem Matematika-Fizika Karán szerzett tanári oklevelet, majd a rákövetkező évben a kolozsvári Victor Babes Egyetemen megszerezte a kutató matematikusi képesítést is. Rövid tekei (Beszterce-Naszód megye) tanárkodás után a Bolyai Tudományegyetem Analízis és Algebra Tanszékére nevezték ki gyakornoknak. Ugyanabban az évben - a Bolyai Egyetem megszűntetése után - a Babes-Bolyai Tudományegyetem Analízis tanszékére nevezték ki, ahol az évek során végigjárta az egyetemi oktatói pálya lépcsőfokait. Matematikai pályafutására döntő hatással volt Tiberiu Popoviciu akadémikus, akinek irányítása alatt írta doktori disszertációját az optimalizálás dualitáselveiről. Nevéhez fűződik a nemlineáris analízis területén elindult kutatómunka a kolozsvári egyetemen. Jelentős eredményeket ért el az egyensúlyfeladatok, variációs egyenlőtlenségek, KKM-tételek, fraktálgeometria és a homogenizáció elmélet témakörében. A kolozsvári egyetem mai magyar matematikusai közül sokan az ő irányításával kezdtek tudományos kutatással foglalkozni. 1972-ben elnyerte az Alexander von Humboldt Alapítvány kutatói ösztöndíját. Ennek keretében másfél évig Lothar Collatz professzor hamburgi intézetében dolgozott. 2001-ben a Magyar Tudományos Akadémia külső tagjává választotta. 2007-ben a Magyar Operációkutatási Társaság Egerváry-díjjal tűntette ki. Az erdélyi matematikusok érdekében kifejtett tevékenységéért, nemzedékeket nevelő oktatói és tudománynépszerűsítő munkásságáért az Erdélyi Múzeum Egyesület 2017-ben az Apáthy István-díjat adományozta neki.

KOLUMBÁN JÓZSEF
e-mail: jokolumban@yahoo.com
telefon: +40-740-276595

TRANSYLVANIAN RELATIONS OF ANDRÁS PRÉKOPA

József Kolumbán

András Prékopa became a student of Marosvásárhely's military school at the age of 14. Education for discipline, love of the homeland, honesty, loyalty and self-sacrificing camaraderie were what forged the school community together. The spirit that permeated the school gave character, self-discipline, physical and spiritual strength to its students. András' motivations and success in the later part of his life were based on these experiences. He was always aware of the right position for him and what he had to do there. We can thank him for, amongst many other things, developing the theory of Stochastic Programming with its broad spectrum of applications, and establishing a globally recognized Hungarian school of Operations Research. Being blessed with exceptional mathematical talents, he was hardworking, single-minded, insightful, rich in ideas, and held good knowledge of organizing and leadership. If the necessary mathematical or administrative conditions were not met in order to solve his problems, he would fight relentlessly until those were established. This attitude was what also characterized András' bonds to Transylvania: he was always looking for opportunities to strengthen our relationship, and his initiatives were always met with success.

Alkalmazott Matematikai Lapok **35** (2018), 29–42

PRÉKOPA ANDRÁS: LINEÁRIS PROGRAMOZÁS I.

A magyar operációkutatás első félidejéről, ahogy én láttam

KOMÁROMI ÉVA

Amiről beszélni szeretnék, azt az alcím foglalja magában. Az 1. táblázat azonban meggyőzően bizonyítja, hogy a két cím szorosan kapcsolódik egymáshoz. Prékopa András Rutgers egyetemi honlapjáról [1] töltöttem le a PhD tanítványairól szóló összefoglaló táblázatot, az 1. táblázat ennek alapján készült. A felsorolt 57 tanítványa 10 különböző országból származott, 3 kontinensen él-élt, legtöbben egyetemi tanárok, vagy kutatók az életük valamelyik szakaszában, 41-en Magyarországon szerezték a fokozatukat, matematikusok mellett mérnökök, orvosok is voltak köztük. Többségükben a magyar operációkutatás tudományos közéletének aktív és meghatározó részesei.

1. Bevezetés

A magyar operációkutatás kezdetét, felfogásom szerint, Prékopa András lineáris programozási kurzusától számíthatjuk, amit 1958-ban indított el az ELTE TTK Valószínűségszámítás Tanszékén. Hamarosan mások is követték, pl. Hosszú Miklós Miskolcon, Krekó Béla a Közgazdasági Egyetemen. Bakó András úgy emlékszik, Stachó Lajostól már hallgatott lineáris programozást a 60-as évek elején, Szegeden. Az első félidő, amelyről itt szó lesz, a Magyar Operációkutatási Társaság megalapításáig terjed, 1991-ig. Ennek az időszaknak is csak egy szeletéről szól a krónika, arról a szeletéről, amelynek résztvevője-tanúja voltam.

Előadásom célja és motivációja: tiszteletadás Prékopa Andrásnak, aki munkássága fontos részének tekintette, hogy ösztönözze, megteremtse, népszerűsítse a magyar operációkutatást, oktatását, intézményeit, alkotói műhelyeit, hogy szorgalmazza működési lehetőségeinek tágítását, és akinek a támogatására tanítványai, munkatársai mindig számíthattak. Tiszteletadás azoknak, akik ebben az izgalmas és felfedező időszakban résztvevők voltak, hozzájárultak az operációkutatás stabil kereteinek a létrehozásához. Szeretnék minél több eseményről hírt adni, közreműködőit névsorba szedni, de ezt a törekvésemet nem koronázhatja teljes siker. Ez nem nagy baj: a krónika tovább írható, a névsor tovább bővíthető, más krónikások személyes történeteivel, szemszögeivel a kép teljesebb lesz.

Azok neveit, akik az általam közelről ismert műhelyekben, tanszékeken működtek, megfordultak, táblázatokban foglaltam össze. E táblázatok nem illusztrációk, hanem a cikk lényegét adják, csak az áttekinthetőség kedvéért különítettem el őket. Az események felidézésében támaszkodom az Alkalmazott Matematikai Lapokban Prékopa András 75. születésnapjára írt méltatásra [2]. Amit elmondok, személyes visszaemlékezés, amely azonban nem csak az én személyemre korlátozódik, sokan segítettek, akiknek ez úton is szeretném kifejezni hálás köszönetemet: Arany Ilona, Bakó András, Bárány Imre, Forgó Ferenc, Fülöp János, Hencsey Gusztáv, Medvegyev Péter, Nagy Tamás és Szántai Tamás.

2. A kezdet: G. B. Dantzig

Az operációkutatást mint tudományágat G. B. Dantzig 1949-ben megjelent Programming in a Linear Structure c. Econometrics cikkétől számítják. Dantzig egy visszaemlékező cikkében [3] felidézi, hogy a matematikusok és közgazdászok körében 1947 előtt teljességgel hiányzott az érdeklődés az optimalizálás iránt. Bár a lineáris egyenlőtlenségrendszerekről a korábbi évtizedekben számos eredmény jelent meg, dualitást kifejező alternatíva tételek is, de nem keltettek különösebb figyelmet. Lényegében kész volt a játékelmélet is, benne a szintén dualitást kifejező nyeregpont fogalmával. Dantzig a Leontief-féle input-output modellt, amelyet a 30-as években már alkalmaztak az amerikai nemzetgazdasági tervezésben, szerette volna általánosítani egy olyan feladatban, amelyet hamarosan lineáris programozási feladatnak neveznek. Szórakoztatóan számol be arról, hogyan fogadta őt Neumann János 1947-ben Princetonban, amikor felkereste, hogy a véleményét kérje a koncepciójáról. Hosszadalmas bevezetője után Neumann annyit mondott: „Ó, hát ez az?" - és tartott neki egy másfél órás előadást a lineáris programok matematikai elméletéről. Dantzig ekkor, Neumanntól hallott először a Farkas-lemmáról és a dualitásról. Az 1947–49-es évek előtt tehát dualitás volt, de optimalizálás még nem. Ekkor azonban a matematikusok és közgazdászok körében tudatosult, hogy születőben van, nemsokára meglesz a számítógép, és ekkor megjelent a célfüggvény. Az operációkutatást, számos al-ágával együtt, a feltételes optimalizálást megalapozó addigi tudományos eredmények, a II. világháborús katonai műveletek során a matematika alkalmazásában szerzett tapasztalatok (innen az elnevezés) és a számítógép megjelenése együttesen indította útjára – az Amerikai Egyesült Államok jelentős anyagi támogatásával. (Jóval később derült ki, hogy Kantorovics a 30-as évek végén már megfogalmazta a lineáris programozási feladatot – és a szállítási feladatot is –, de munkája észrevétlen maradt. Igaz, később ezért és más eredményeiért is Nobel-díjat kapott – ez azonban már egy másik történet.) A II. világháborúban Angliában is bevontak tudósokat a katonai műveletek tervezésébe és az 50-es években ott is komoly támogatást kapott az operációkutatás. Amerikában „operations research" néven, Angliában „operational research" néven terjedt el, a mai napig így hívják a tanszékeket, folyóiratokat, konferenciákat.

Prékopa András kurzusa az amerikai kezdés után 9 évvel indult, ez nem is olyan nagy késés. De mások is felfigyeltek az új területre.

3. A kétszintű tervezés

Legalább ilyen gyorsan ismerték fel az új lehetőségeket a magyar közgazdászok, mindenekelőtt Kornai János. A Kétszintű tervezés (Matematikai módszer a népgazdasági terv javítására) című cikke a Közgazdasági Szemlében 1962-ben jelent meg [4]. A cikkben ismertette és összefoglalta azt a kutatást, amelyet Lipták Tamás matematikussal (aki az 1956-os forradalomban való részvétele miatti börtönbüntetéséből akkor szabadult) végeztek egy széles körű vizsgálat keretében, amelyet az Országos Tervhivatal megbízásából folytatott a Magyar Tudományos Akadémia Számítástechnikai Központja, és amelynek eredményét egy hosszabb tanulmányban már az év tavaszán ismertették [5]. A koncepció a következő volt: a tervgazdaság gyakorlatának megfelelően a központ (a Tervhivatal) mennyiségeket (inputkereteket és outputfeladatokat) oszt el. Az alsóbb szinten dolgozó szervezetek (a szektorok) visszajelentik a nekik kiosztott kvóták és tervfeladatok árnyékárait. Ezek figyelembevételével a központ revideálja a mennyiségi allokációkat. Ez újra és újra ismétlődik, amíg csak közel nem kerülnek egy optimális allokációhoz. Lipták Tamás segítségével Kornai dinamikus lineáris programozási feladat és játékelméleti modell formájában kapcsolta össze az ágazati tervezést a népgazdasági szintű tervezéssel. Ez volt a kiindulópontja nagysikerű könyvének is: A gazdasági szerkezet matematikai tervezése, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 1965.

Személyesen is büszkeséggel tölt el, hogy ennek a nagyszabású kutatásnak és alkalmazásnak a gazdája az MTA Számítástechnikai Központja volt, amelyhez tartozott az operációkutatási alma materem, Dancs István Operációkutatás Osztálya (vagy Közgazdasági Alkalmazások Osztálya volt a neve? – megoszlanak az emlékezők). Az osztály munkatársainak nevei a 2. táblázatban találhatók. Izgalmas időszak volt. Részt vettünk a Kornai János által irányított nagy tervezési feladatban. Számítógépes programokat írtunk és futtattunk eleinte az intézet Ural-2 számítógépén, majd a SZÜV GIER gépén, amely már ALGOL nyelvhez készült fordítóprogrammal és virtuális tárkezeléssel rendelkezett. Szemináriumok keretében feldolgoztunk fontos, azóta klasszikussá vált szerzőket a lineáris és nemlineáris programozás, hálózati feladatok, szállítási feladat és játékelmélet témákban. Magunk is megjelentettük a Szemináriumi Füzetek sorozatot, amelynek a 3. kötetét ketten írtuk Arany Ilonával, a címe: Hálózati feladatok. Mi volt az első két kötet? Volt-e negyedik? Nem sikerült kiderítenem. De megjelent az MTA SZK Közlemények is, a 2. kötet 1967-ben 264 oldalból állt, a 8. és 9. kötetben Klafszky

Emil egy kétrészes cikket publikált a geometriai programozásról, ezt a mai olvasó figyelmébe is ajánlanám, ha hozzáférhető még valahol.

4. SZK → SZTAKI

1970-ben az SZK perszonálunióba került az MTA Automatizálási Kutató Intézettel. Közös igazgatónk Vámos Tibor lett, aki meghívta Prékopa Andrást az Operációkutatás Osztály élére, és megerősítette az Arató Mátyás vezette Valószínűségelmélet és Matematikai Statisztika Osztályt. Vámos Tibor célja és feladata volt egyrészt előkészíteni a két intézet egyesülését, másrészt fogadni az országban akkor legkorszerűbb számítógépet: a CDC 3300-t. 1973-ban létrejött a SZTAKI, korszerű nagy intézmény. Az eseményekről ld. a SZTAKI történetét [6], Strehó Mária és Szász Áron tanulmánya alapján.

Mielőtt folytatnám a SZTAKI történetével, visszakanyarodom a 60-as évekre. Merthogy közben – elsősorban Prékopa András kezdemén yezésére – a Bolyai Társulatban 1963-ban létrejött a Matematika Alkalmazásai Szakosztály, az MTA Matematikai és Fizikai Tudományok Osztálya 1975-ben létrehozta az Alkalmazott Matematikai Lapokat. Az 1965-ben életbe lépő egyetemi reform az ELTE-n az operációkutatást a matematikusképzésen belül külön szakiránnyá emelte. 1968-ban indult el ennek a szakiránynak a graduális szakasza.

5. Az operációkutatás matematikai módszerei tanfolyam (1968–70): fordulópont

A BJMT Matematika Alkalmazásai Szakosztály keretében 1968–70 között Prékopa András nagysikerű kétéves operációkutatási graduális-posztgraduális tanfolyamot szervezett Az operációkutatás matematikai módszerei címmel, amelyen az előadások az egyetemi féléveknek megfelelő időben, minden héten öt napon át, napi négy órában folytak. Egyrészt az ELTE-n életbe lépett egyetemi reformnak megfelelően operációkutatási szakirányt választó matematikushallgatók vettek részt ezen a tanfolyamon, másfelől korábban végzettek, akik szerettek volna megismerkedni az új tudományterülettel. Az előadásokat Prékopa András, Klafszky Emil, Majthay Antal, Kovács László Béla, Éltető Ödön, Arató Mátyás, Tomkó József tartották, az előadók egy része jegyzetet is írt.

Ekkor készült Prékopa András 440 példányban megjelent Lineáris programozás I. című könyve [7], amelyet a mai napig használnak az LP fejezeteinek oktatásában. Megjelenése idején kiemelkedően a legjobb könyv volt a témában, elegáns, egzakt és világos stílusú. Minden fejezet végén nem csak példatár van, hanem az addigi vonatkozó irodalom szinte teljes felsorolása, segítségül a szakirodalomban tájékozódni akaró olvasónak.

Az Operációkutatás Matematikai Módszerei tanfolyamot és ezzel együtt a Lineáris programozás I. könyvet fordulópontnak vélem. Addig kicsit szégyenlősen a matematika közgazdasági alkalmazásai néven emlegették ezt a tudományterületet, Prékopa András tudományszervezési erőfeszítései, az alkalmazások iránti elkötelezettsége kellett ahhoz, hogy maga az „operációkutatás" szó polgárjogot nyerjen nálunk. Nagyjából ez után jöttek létre Operációkutatás elnevezésű tanszékek, kutatócsoportok, tantárgyakat e néven kezdtek meghirdetni, könyveket e címen megjelentetni, konferenciákat tartani – bár a zavar a szó jelentését illetően a nagyközönségben talán máig is fennáll, sajnos.

Az IIASA megalakítása komoly lendületet adott az operációkutatásnak és művelőinek.

6. IIASA (International Institute for Applied Systems Analysis), 1972

A hidegháborúban bekövetkezett politikai enyhülés egyik jeleként alapította az intézetet az USA, a Szovjetunió és 10 másik ország a keleti és nyugati blokkból – köztük Magyarország. A Bécs melletti Laxenburgban, egy elegáns és erre a célra korszerűsített nagy kastélyban helyezték el. Interdiszciplináris kutatóhely lett, világhírű kutatókat hívtak meg hosszabb-rövidebb időre. A nemzetközi kutatócsoportokban nagy számban voltak operációkutatók, de vegyészek, közgazdászok, biológusok is. Számos projekt indult, köztük a Balaton program. A jelentős politikai támogatás bőkezű anyagi támogatással is párosult. Az itt dolgozó nagynevű kutatók magyarországi konferenciákon is részt vettek, előadtak.

Társszervezetét, az MNIIPU-t(Международный научно-исследовательский институт проблем управления) 1976-ban Moszkvában alapították hasonló céllal.

Az akkori szokásoknak megfelelően kijelöltek egy magyar intézményt a két nemzetközi intézettel való kapcsolattartásra, ez a hazai kapcsolat az Országos Tervhivatal Számítóközpontja keretében, illetve később az Országos Vezetőképző Központ keretében működő Rendszeranalízis Osztály volt. A 3. táblázat tartalmazza azok neveit, akik a Rendszeranalízis Osztályon megfordultak 1975–90 között.

A laxenburgi és a moszkvai intézetben is számos magyar kutató dolgozott. A magyar operációkutatók számára lehetőség nyílt meghívásokra, külföldi utazásokra, hazai és külföldi konferenciákon való részvételre, kapcsolatépítésre, tapasztalatszerzésre. Példaként: az 1978–79-es tanévben Moszkvában az MNIIPU-ban dolgoztak kutatóként, egy-másfél éves tanulmányút keretében: Bárány Imre, Kürti Sándor, Nyíri Géza, Pintér János, Vermes Domokos és jómagam.

7. Az MTA SZK-SZTAKI Operációkutatás Osztály 1970–91 között

Az MTA SZTAKI 1973-ban jött létre. A jelentős létszámú intézet beépült a nemzetközi tudományos életbe, elismertséget szerzett, kellő anyagi hátteret, széles körű kapcsolatrendszert hozott létre. Prékopa András a két intézet egyesítése után az MTA SZTAKI Alkalmazott Matematikai Főosztályának alapító főosztályvezetője lett és maradt 1985-ig. Ekkor elfogadta az amerikai Rutgers University meghívását, operációkutatási centrumának, a RUTCOR-nak 30 évig volt vezető professzora, és kezdeményezője jó néhány magyar tanítványa, munkatársa meghívásának a RUTCOR eseményeire, az ottani oktatásban-kutatásban való részvételre. Prékopa egy 1970-es dolgozatában [8] bemutatta (később számos munkájában vizsgálta, továbbfejlesztette) a valószínűséggel korlátozott programozási feladatot, feladatcsoportot. E feladat sokunk érdeklődését hosszú időre orientálta, kutatásban és alkalmazásban egyaránt.

Az 1970-es évek krónikájához tartozik a mátrafüredi matematikai programozási konferenciák elindítása is, az első 1973-ban volt, alapítója, főszervezője és programadója Prékopa András. Az IIASA közelségének is köszönhetően a mátrafüredi konferenciákon a matematikai programozás számos neves egyénisége megfordult: az amerikai Dantzig, Rockafellar, Grigoriadis, Wets, Zionst, Jewell és Bell, az osztrák Burkard, a svájci Kall, a dán Krarup, az orosz Mojszejev, Yeremin és Jevtusenko, a román Dragan, a lengyel Walukewicz és Slovinsky, a cseh Nozicka és Dupacová, a német Körte, Zowe, Guddat és Elster, a francia Houard, a brit Sargent és mások – ld. [2]. Eleinte évenként, majd ritkábban került e konferenciákra sor, az 1996-ban Mátraházán tartott konferencia volt talán az utolsó a sorozatban, ezt Rapcsák Tamás rendezte.

Az Operációkutatás Osztály vezetői ebben az időszakban a következők voltak: Miután létrejött az Alkalmazott Matematikai Főosztály, Prékopa András az osztály vezetését Kovács László Bélának adta át, aki maradt e funkciójában 1984-ig, amikor Koppenhágába ment tanítani. Ekkor Mayer János jött, és 1989-ig vezette az osztályt, közben a főosztály vezetését Maros István vette át, majd mindketten külföldre mentek. Megjött viszont egy külföldi útjáról Rapcsák Tamás, 1989–91 között ő volt az osztály vezetője. Az osztályon 1979-ben 26-an voltak, ekkor volt a legnagyobb létszámú. A 21 év alatt 52 kutató fordult meg az osztályon, az ő neveiket soroljuk fel a 4. táblázatban.

Rapcsák Tamás 1991-ben átszervezte az osztályt, létrehozta az MTA SZTAKI Operációkutatás és Döntési Rendszerek Laboratóriumot. Ebből alakult meg az MTA SZTAKI Operációkutatás és Döntési Rendszerek Kutatócsoport 2009-ben Fülöp János vezetésével. A kutatócsoport egyben kihelyezett egyetemi tanszéke a Corvinus Egyetemnek.

8. A 80-as években alakult operációkutatási tanszékek

Az operációkutatási kurzusokat a legtöbb egyetemen a Matematika Tanszék szervezte. Az ELTE-n, a Közgazdasági Egyetemen és a Miskolci Egyetemen a 70–80-as években önálló operációkutatási tanszékek jöttek létre, ha nem is feltétlenül ezen a néven.

8.1. ELTE Operációkutatás Tanszék

Az előzményekre Vizvári Béla így emlékszik: „Amíg nem volt külön tanszék, addig a Valószínűségszámítás Tanszék látta el az operációkutatási tanszék adminisztrációs feladatait. Rényi Alfréd halála után Mogyoródi József lett a tanszékvezető docensként. A dolog úgy működött, hogy a SZTAKI Operációkutatási Osztályán volt egy összekötő, ő járt át egyeztetni az órákat és a szükséges dolgokat Mogyoródi Józsefhez. Az összekötő először Straziczky Bea volt, majd ezt a feladatot átvettem tőle, és elláttam a tanszék megalakulásáig."

Prékopa András 1983-ban megalapította az ELTE Operációkutatás Tanszékét, amelynek tanszékvezető egyetemi tanára lett. A tanszék azonban jó néhány évig még rendkívül mostoha körülmények között működött (ld. [2]). Prékopa András mellett 1991-ig a tanszék főállású oktatói voltak: Dósa György, Illés Tibor, Kas Péter, Szántai Tamás és Terlaky Tamás.

Prékopa András Rutgers egyetemi távollétében 1988–92 között a tanszék vezetését Szántai Tamás vette át. 1993-ban megalakult az Operációkutatási, Alkalmazott Matematikai és Statisztikai doktori program Prékopa András alapító vezetésével.

8.2. Miskolci Egyetem: Számítástechnikai Tanszék

A Matematika Tanszéken a bányász, kohász, gépész képzésben az 1960-as évektől vizsgaköteles tárgy volt a Matematikai programozás, később az Operációkutatás. 1975-ben megalakult a Matematikai Intézet, ezen belül a Számítástechnikai Tanszék, vezetője 1980–89 között Klafszky Emil. Az 5. táblázatban soroljuk fel azon oktatók-kutatók neveit, akikhez e képzések tartoztak, ld. [9].

8.3. Közgazdaságtudományi Egyetem: A Matematika Közgazdasági Alkalmazásai Tanszék

A tanszék 1980–95 között a Matematikai és Számítástudományi Intézet keretében működött, tanszékvezető egyetemi tanára: Meszéna György. Ebből lett az Operációkutatás Tanszék 1995–2000 között, vezetői: Forgó Ferenc, majd Temesi József. Közben a tanszék tevékenysége kibővült az aktuárius szakirány oktatásával, 2011-ben nevében is megváltozott.

OTKA-kutatás keretében indult az Operációkutatás sorozat, 10 kötete 2002–2010 között jelent meg. A lektorált kötetek szerzői között feltűnnek: Deák István, Fiala Tibor, Hujter Mihály, Nagy Tamás, Klafszky Emil, Rapcsák Tamás, Szántai Tamás, Terlaky Tamás, jómagam mint szerző és szerkesztő – mindegyik név olvasható valamelyik táblázatban. A kötetek megtalálhatók a tanszék honlapján [10] és a MOT honlapján [11] is.

Az egyetemen az 1970–80-as években jelen lévő operációkutató munkatársak neveit a 6. táblázat tünteti fel.

9. Számítóközpontok, intézetek a 60–70-es években és utána, KSH

A 60-as, 70-es években nagy számítóközpontok és velük kapcsolatban álló kutatóintézetek jöttek létre, szinte minden minisztériumban, valamennyien azzal a céllal is, hogy széleskörű ipari, közgazdasági alkalmazásokban vegyenek részt. Ez a kiterjedt kutatási-informatikai hálózat sokba került, de erre a célra ma már elképzelhetetlenül nagyvonalú támogatást adtak e korszakban mindenütt, Magyarországon is. A Tervhivatalról már volt szó, a másik legfontosabb a Statisztikai Hivatal, amelyben a 60-as évek közepén megalakult az INFELOR, később más kapcsolódó intézetek is, amelyek kiváltak, majd egyesültek SZÁMALK csoport néven. 2011-ben visszaemlékező kötet jelent meg A SZÁMALK és elődei címmel Havas Miklós szervezésében és szerkesztésében, két fejezet az operációkutatás krónikájához tartozik:

- Heppes Aladár: A népességnyilvántartó rendszer;
- Maros István: Operációkutatás a SZÁMALK-nál és jogelődeinél.

A könyv és a vonatkozó fejezetek is elolvashatók a [12] honlapon.

10. Konferenciák, kérdések, összefoglalás

A 2017. évi ceglédi konferencia a 32. a Magyar Operációkutatási Konferenciák (MOK) sorában. A Bolyai Társulat mindegyiknek szervezője volt, eleinte a Magyar Közgazdasági Társasággal (MKT), majd az 1968-ban alakult Neumann János Számítógép-tudományi Társasággal, 1990 után a Magyar Operációkutatási Társasággal (MOT) és a Gazdaságmodellezési Társasággal közösen. Hogy az első 31 konferenciát hol és mikor tartották, erről szól a 7. táblázat, amelyet elsősorban Meszéna György és Illés Tibor szíves közlése alapján állítottam össze. Vannak persze eltérések az ő adataik és más visszaemlékezések között is. Vita van az elsőségről is. A táblázatban a lista az 1967-es veszprémi MOK konferenciával kezdődik, összhangban a [2] cikkben foglalt adattal. A szervezők között szerepel Komlósi Sándor, Páles Zsolt, Csendes Tibor, Bod Péter, Ziermann Margit, Jordán Tibor, Temesi József, Illés Tibor, Maros István, Meszéna György, Pongrácz Tibor, Ormós Zsolt. Milyen jelentős konferenciákra emlékszünk még?

- Készletezési és tározási nemzetközi konferencia volt 1971-ben Győrben, ahol már sztochasztikus programozási modellekről is tartottak előadásokat.
- Az IIASA-ban 1984-ben megrendezett Matematikai Programozási Konferenciának Prékopa András és Roger J.-B. Wets volt a fő szervezője, nagyszámú magyar előadó vett részt, az 1986-os Mathematical Programming Study két kötetben publikálta az előadások dolgozat változatát.

- Prékopa András Budapestre hozta az 1976-os Nemzetközi Matematikai Programozási Szümpoziont.

11. Összefoglalás

Dolgozatom a magyar operációkutatás 1958–91 – Prékopa András első, az ELTE-n tartott Lineáris Programozás kurzusa és a Magyar Operációkutatási Társaság megalakulása – közötti időszakának eseményeit, az események résztvevői közül azokat idézi fel, amiket-akiket én láthattam, magam is résztvevőként. A dolgozat visszaemlékezés, a műfaj vonzó, de hiányérzetet is keltő vonásaival. Azt remélem, hogy lesznek majd mások is, akik szintén jelen voltak, látták, hogy történt, és elmesélik, amit ők láttak, válaszolnak a kérdésekre és feltesznek újakat.

12. Táblázatok: műhelyek, résztvevők, események

1. táblázat. Prékopa András PhD tanítványai:

1	W. Aigbe	Prof., Univ. of Ibadan	ELTE	1980
2	H. Bogner	Prof., Univ. of Leipzig, GE	Univ. Leipzig	1975
3	Bakó András	Prof., Óbudai Egy., Budapest	ELTE	1971
4	Boros Endre	Prof., Rutgers University, USA	ELTE	1984
5	Bukszár József	Prof., Virginia Commonw. Univ.	ELTE	1998
6	A. Burkauskas	Lith. Acad. Sci., Vilnius, LH	MTA	1985
7	Deák István	Prof. Corvinus Univ., Budapest	MTA	1971
8	Dinh The Luc	Prof., Univ. Avignon, FR	MTA	1984
9	Fábián Csaba	Prof., Kecskeméti Főiskola	ELTE	1999
10	E. Ferenczy	Prof., Kanada	ELTE	1963
11	Futó Péter	Vállalkozó, Budapest	MTA	1980
12	L. Gao	Kutató, AT&T, USA	Rutgers	2001
13	Gerencsér László	Prof., MTA SZTAKI	ELTE	1970
14	Halász Szilvia	Kutató, AT&T, USA	ELTE	1976
15	T. Heikkinen	Prof., Univ. of Lund, SE	Rutgers	2001
16	X. Hou	Kutató, Pennsylvania, USA	Rutgers	2006
17	Ho Ngoc Luat	VN	MTA	1984
18	Kelle Péter	Prof., Univ. of Louisiana, USA	ELTE	1979
19	Kéri Gerzson	Kutató, MTA SZTAKI	MTA	1978
20	Komáromi Éva	Prof., Corvinus Univ., Budapest	MTA	1980
21	Kopp Mária	Prof., Semmelweis Univ., Budapest	MTA	1982
21	Kopp Mária	Prof.Semmelweis Egy., Budapest	MTA	1982
22	László Zoltán	Prof., Pannon Egy., Veszprém	MTA	1972
23	J. Lee	Drexel University, PA. USA	Rutgers	2015

24	W. Li	Kutató, California, USA	Rutgers	1995
25	T. Liu	Kutató, Pennsylvania, USA	Rutgers	2005
26	J. Long	Kutató, Merck Co., NJ, USA	Rutgers	1995
27	Majthay Antal	Prof., Univ. of Florida, USA	MTA	1969
28	Mayer János	Habil, Dozent, Univ. Zürich, NL	MTA	1976
29	Monhor Davaadorzsín	Prof., Nyugat-Magyarországi Egyetem	MTA	1983
30	A. Móricz	Kutató, Pénzügyminisztérium	ELTE	1970
31	M. Murr	Kutató, AT&T, Princeton	Rutgers	1992
32	Németh Gyula	Kutató, Budapest	ELTE	1969
33	Mádi-Nagy Gergely	Prof., ELTE, Budapest	ELTE	2002
34	O. Myndyuk	Teza Technologies, NY. USA	Rutgers	2016
35	M. Naumova	Dpt. of Math., Rutgers, NJ. USA	Rutgers	2015
36	Ninh Anh	William and Mary Coll., VA. USA	Rutgers	2016
37	M. Oschwald	Igazgató, Erasmus Co., NL	ELTE	1981
38	Pintér János	Pintér Consulting Services, CA	ELTE	1975
39	R. Rao	Prof., Indian Inst. Techn. IN, USA	MTA	1980
40	Rapcsák Tamás	Prof., Hung. Acad. Sci., SZTAKI	MTA	1974
41	Révész Pál	Prof. Techn. Univ. Vienna, az MTA rendes tagja	ELTE	1962
42	Sebestyén Ferenc	Kutató, Budapest	MTA	1970
43	Sebő András	Prof., Univ. Grenoble, FR	MTA	1988
44	Stahl János	Prof., Corvinus Univ. Budapest	MTA	1974
45	Strazicky Beáta	Prof., Szt. István Egy., Budapest	ELTE	1976
46	Stubnya E.	Prof., Techn. Univ. of Budapest	MTA	1979
47	E. Subasi	Prof., Univ. of Florida	Rutgers	2006
48	M. Subasi	Postdoc., Rutgers Univ. NJ, USA	Rutgers	2008
49	Szántai Tamás	Prof., Techn. Univ. of Budapest	MTA	1985
50	Szedmák Sándor	Kutató, Univ. of Southhampton	Rutgers	2003
51	A. Vásárhelyi	Prof., Techn. Univ. of Budapest	MTA	1984
52	Veress Gábor	Prof., Pannon Univ., Veszprém	MTA	1974
53	Vermes Domokos	Prof. Univ.of Washington, Seattle	MTA	1984
54	M. Ünüvar	IBM Research, NY, USA	Rutgers	2012
55	K. Yoda	post doct. sch, DIMACS, NJ. USA	Rutgers	2015
56	Záki István	Oktató, Novi Sad, YU	ELTE	1972
57	Zsuffa István	Prof. Techn. Univ. of Budapest	BME	1962

2. táblázat. Az MTA SZK Operációkutatási Osztály munkatársai 1965–70 között:

Dancs István osztályvezető	Komáromi Éva
Arany Ilona	Lehel Jenő
Bakó András	Matolcsy Tamás
Gehér István	Sonnevend György
Gombos Zoltánné titkárnő	Srajber Benedek
Gyárfás András	Székely Sándor
Harnos Zsolt	Tihanyi Ambrus
Klafszky Emil	Uhrin Béla

3. táblázat. A Rendszeranalízis Osztály munkatársai 1975–90 között:

Dancs István osztályvezető	Komáromi Éva
Alexics György	Klafszky Emil
Balla Ödön	Lőcsey Balázs
Bárány Imre	Magyarkúti Gyula
Csurilla Károly	Medvegyev Péter
Gehér István	Pór András
Fiala Tibor	Tihanyi Ambrus
Harnos Zsolt	Vermes Domokos
Kárpáti Zoltán	Uhrin Béla

4. táblázat. Az MTA SZK-SZTAKI Operációkutatás Osztály munkatársai 1970–91 között:

Prékopa András osztályvezető 1970–77	Kelle Péter
Kovács László Béla o.v. 1984-ig	Keller Krisztina
Mayer János o.v. 1989-ig	Kéri Gerzson
Rapcsák Tamás o.v. 1991-ig	Klafszky Emil
Baján Lászlóné titkárnő	Komáromi Éva
Bakó András	Kun István
Balla Katalin	Majthay Antal
Bene Béla	Maros István
Bernau Heinz	Márton Sándor
Bíró Miklós	Monhor Davaadorzsín
Boros Endre	Mosóczy Zoltán
Borzsák Péter	Móczár Károly
Dabasi Miklós	Mócsi Zoltán
Deák István	Prill Mária
Dinh The Luc	Sebestyén Ferenc
Fülöp János	Sebő András
Gerencsér László	Somos Endre
Gömböcz Lajos	Soós Zsolt
Halász Szilvia	Straziczky Beáta
Harnos Zsolt	Szántai Tamás
Hoffer János	Szekendy Krisztina
Horváth Attila	Telegdi László
Hujter Mihály	Tihanyi Ambrus
Illés Tibor	Turchányi Piroska
Iványi Antal	Uhrin Béla
Kas Péter	Vizvári Béla

5. táblázat. A Miskolci Egyetemen operációkutatást oktatattak-kutattak 1991-ig:

Dormány Mihály	Hujter Mihály
Égertné Molnár Éva	Klafszky Emil
Erdélyi Zoltán	Nagy Tamás
Galántai Aurél	Vincze Endre
Hosszú Miklós	

6. táblázat. A Közgazdasági Egyetemen operációkutatást oktattak-kutattak 1991-ig:

Abaffy József	Meszéna György
Bikics Istvánné	Mikó Gyula
Bod Péter	Stahl János
Chikán Attila	Szentpéteri Györgyné
Forgó Ferenc	Szép Jenő
Gáspár László	Temesi József
Krekó Béla	Varga József
Matits Ágnes	Ziermann Margit

7. táblázat. A Magyar Operációkutatási Konferenciák helye, ideje:

1.	Veszprém	1967	17.	Balatonfüred	1987
2.	Debrecen	1970	18.	Pécs	1988
3.	Pécs	1972	19.	Miskolc	1989
4.	Balatonfüred	1973	20.	Esztergom-kertváros	1991
5.	Győr	1975	21.	Szeged	1993
6.	Gödöllő	1976	22.	Balatonkenese	1995
7.	Pécs	1977	23.	Pécs	1997
8.	Szeged	1978	24.	Veszprém	1999
9.	Győr	1979	25.	Debrecen	2001
10.	Debrecen	1980	26.	Győr	2004
11.	Miskolc	1981	27.	Balatonőszöd	2007
12.	Kőszeg	1982	28.	Balatonőszöd	2009
13.	Balatonfüred	1983	29.	Balatonőszöd	2011
14.	Kaposvár	1984	30.	Balatonőszöd	2013
15.	Sopron	1985	31.	Cegléd	2015
16.	Balatonföldvár	1986	32.	Cegléd	2017

Hivatkozások

[1] http://rutcor.rutgers.edu/Prekopa/pss.html

[2] Prékopa András: *75 éves*, Alkalmazott Matematikai Lapok **21** (2004), 181–194.

[3] Dantzig G. B.: *Linear Programming, appeared in History of Mathematical Programming*, A Collection of Personal Reminiscences (1991), J. K. Lenstra, A. H. G. Rinnooy Kan and A. Schrijver, eds., Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, The Netherlands.

[4] http://www.kornai-janos.hu/Kornai1962\%20Ketszintu\%20tervezes\%20-\%20KSz.pdf

[5] Kornai J., Lipták T.: *Kétszintű tervezés*, MTA Számítástechnikai Központ, 1962. május, sokszorosítva.

[6] https://www.sztaki.hu/tarsadalom/tortenetunk.

[7] Prékopa András: *Lineáris Programozás I. (1968)*, Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest.

[8] Prékopa, A.: *On Probabilistic Constrained Programming*, Mathematical Programming Study **28** (1970), 113–138.

[9] Nagy Tamás: *A Miskolci Egyetemen történtekről*, kézirat, 2017.

[10] http://www.uni-corvinus.hu/index.php?id=21710

[11] www.mot.org.hu/index.php?option=com_content&view=article&id=9&Itemid=143&lang=hu

[12] http://www.szamalkcsoport.hu/download/A_SZAMALK_es_elodei.pdf

Munkácson született 1940-ben. Az ELTE TTK matematika-fizika szakán szerzett diplomát 1963-ban. Az MTA Számítástechnikai Központ, majd SZTAKI Operációkutatás Osztályának kutatója volt, eleinte hálózati feladatokkal, majd valószínűséggel korlátozott LP-feladatok és dualitási kapcsolataik vizsgálatával, megoldásával foglalkozott, kandidátusi értekezését is e témában írta 1984-ben. A moszkvai MNIIPU tudományos kutatója 1978–79-ben, vendégprofesszor a The University of Toledo, Ohio Matematika Tanszékén 1987–88-ban. Széchenyi Professzori Ösztöndíjas 2000–2003 között. A Közgazdasági Egyetem Operációkutatás Tanszékén oktatott 1993 óta, szerkesztője és szerzője az „Operációkutatás” sorozatnak. Számos gazdasági, pénzügyi alkalmazásban, döntéselemzési projektben vett részt, némelyekben programvezetőként, alapító tag az ELTE TTK Operációkutatás, alkalmazott matematika, statisztika doktori programban.

KOMÁROMI ÉVA
e-mail: kordata@t-online.hu

Alkalmazott Matematikai Lapok **35** (2018), 43–55

A KVÁZI-HESSE-MÁTRIX

KOMLÓSI SÁNDOR[1]

Optimumszámítással foglalkozók körében jól ismertek minimum feladatok esetén a konvex modellek előnyös tulajdonságai. A többváltozós függvények klasszikus elméletéből jól ismert, hogy kétszer differenciálható függvények konvexitása egyenértékű a második deriváltjuk, a Hesse-mátrixuk pozitív szemidefinitásával. A múlt század második felében komoly érdeklődés mutatkozott a konvexitás függvénytulajdonság lehetséges és célszerű általánosításait illetően. Ezek közül ebben a tanulmányban a pszeudokonvex függvények másodrendű jellemzését ismertetem a kvázi-Hesse-mátrix segítségével, nevezetesen azt, hogy a pszeudokonvexitást a kvázi-Hesse-mátrix pozitív szemidefinitása jellemzi. Alkalmazásként megmutatom, hogyan lehet a kapott eredményeket törtfüggvények pszeudolinearitásának vizsgálatára felhasználni.

1. Bevezetés

A XXXII. Magyar Operációkutatási Konferencián vált publikussá a Magyar Operációkutatási Társaság (MOT) Elnökségének 2016-os döntése, hogy az Egerváry Jenő emlékplakettel abban az évben az én szakmai-közéleti tevékenységemet jutalmazzák. Mint a MOT egyik alapító tagjának, egykori vezetőségi tagjának, elnökének jól esett az elismerés.

Az elismerés az embert önvizsgálatra is készteti. Vajon mivel érdemeltem ki ezt a megtiszteltetést, és kik segítettek abban, hogy sikeres legyek? Annak ellenére, hogy sokat tanultam szegedi professzoraimtól, a segítség Martos Bélától jött, akit sokáig nem is ismertem személyesen. A nemlineáris programozásról írt könyve [17],

[1] *Komlósi Sándor tudományos eredményei kiemelkedőek, szakmai közéleti hatása jelentős, tevékenysége jelentősen hozzájárult az operációkutatás fejlődéséhez mind hazai, mind nemzetközi szinten. (Életrajza a cikke végén olvasható - a szerk. megj.) A fent ismertetettek miatt úgy döntöttünk, hogy az Egerváry Jenő emlékplakett 2016-os díjazottja Komlósi Sándor.*

A Magyar Operációkutatási Társaság Elnöksége
Esztergom, 2016. december 14.

amely a maga korában világszerte az egyik alapműnek számított, adott számomra útmutatást, hogy merre érdemes tájékozódnom.

Ez a dolgozat az Alkalmazott Matematikai Lapok Szerkesztőbizottságának felkérésére készült, hagyományteremtés céljából. Nem tartalmaz új eredményeket, munkásságom egy szeletét próbálja bemutatni. Azt a szeletet, melyet alapvetően Martos Béla gondolatai inspirálták.

2. Egy elnagyolt pályakép

Programtervező matematikusként diplomáztam Szegeden 1972-ben, de mivel érdeklődésem már hallgató koromban a funkcionálanalízis felé fordult, ezért felmentést kaptam a „program-tervezés" alól. 1972 és 1976 között a JATE Bolyai Intézetében Szőkefalvi-Nagy Béla tanársegédeként kezdtem oktatói és tudományos pályafutásomat. Egyetemi doktori disszertációmat a Von-Neumann-algebrák elméletéből írtam, melyet 1978-ban summa cum laude minősítéssel meg is védtem. Disszertációm írása közben azonban egyre erősödött bennem a kétely, hogy a Szőkefalvi-Nagy Béla által vezetett világhírű Funkcionálanalízis Iskola szakmai színvonalának meg tudok-e majd hosszútávon is felelni. Végül is a távozás mellett döntöttem. Ebben az is segített, hogy komoly hívást kaptam a Pécsi Tudományegyetem éppen azokban az években formálódó Közgazdaságtudományi Karára. 1976 óta – ma már csak emeritusként – ennek a karnak a munkatársa vagyok.

A megváltozott körülmények és a megváltozott feladatok határozott szakmai irányváltást is eredményeztek. A nemlineáris programozás felé fordult az érdeklődésem. Az optimalizálás elmélettel foglalkozók számára jól ismert, hogy a nemlineáris programozás alapproblémája a következő:

$$\begin{gathered} f(\mathbf{x}) \to \min \\ \text{feltéve, hogy} \\ g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m \end{gathered} \tag{NLP}$$

ahol $f(\mathbf{x})$ és $g_i(\mathbf{x})$ n-változós differenciálható függvények. A klasszikus analízisből ismert, hogy amennyiben a feltételi függvények konvexek, akkor a feltételi halmaz zárt és konvex halmaz, ha ráadásul a célfüggvény is konvex, akkor a *lokális optimalitás* szükséges feltételei a *globális optimalitás* elégséges feltételei.

A II. világháború után erősödtek fel azok a kutatások, melyek azt igyekeztek kideríteni, hogy vannak-e olyan, a konvex függvényeknél általánosabb függvényosztályok, melyekkel az (NLP) feladat a konvex esettel megegyező jó tulajdonságokkal rendelkezik. A kezdetekről részletes történeti áttekintést ad Angelo Guerraggio és Elena Molhó cikke [1], melyben külön fejezetben elemzik Neumann János hozzájárulását az adott témakörhöz. A cikkből megtudható, hogy a matematikai irodalomban a kvázikonvexitás/kvázikonkavitás függvénytulajdonság Neumann Jánosnál jelenik meg először [18]. Nem, mint definíció, hanem a mátrixjátékok egzisztencia tételének bizonyításánál, mint egy technikai feltétel. Ezekbe a kutatásokba

– melyeket alapvetően közgazdasági alkalmazások inspiráltak – kapcsolódott be Martos Béla is és vívott ki eredményeivel nemzetközi elismerést.

Szerencsémre az ismerkedést a nemlineáris programozással Martos Béla kiváló könyve alapján kezdtem, és ami azonnal komoly érdeklődést ébresztett bennem, azok az általánosított konvexitással foglalkozó fejezetek voltak. Ezen a területen sikerült szakmai sikereket elérnem. Érdeklődésem két részterület köré összpontosult.

Az egyik azt a kérdéskört vizsgálta, hogyan lehet nemdifferenciálható függvényekre célszerűen kiterjeszteni a differenciálható függvényekre értelmezett pszeudokonvexitás fogalmát. Komoly ösztönzést jelentett számomra, hogy a Mathematical Programming folyóirat leközölte első próbálkozásomat [7]. Ebben a cikkemben a gradiens vektor és az iránymenti derivált szerepét a Dini-deriváltak vették át. A Dini-deriváltak optimalizáláselméletben való alkalmazásáról Giorgio Giorgi olasz professzorral több cikket is írtunk [3,4,5]. Később további általánosított deriváltak szerepét is vizsgáltam a nemdifferenciálható optimalizálás különböző témaköreiben, mely eredményeket a Handbook on Generalized Convexity and Generalized Monotonicity [6] 10. fejezetében össze is foglaltam [13].

A másik, számomra érdekesnek ígérkező terület, a differenciálható pszeudokonvex függvények lokális analízisének kimunkálása volt. Ebben a cikkben az ezen a területen elért eredményeimről adok egy rövid áttekintést. Érdeklődésemet a téma iránt Martos Béla könyve [17] keltette fel, de megerősítést kaptam Rapcsák Tamástól is [19], aki más módszerekkel ugyan, de hasonló problémákat is vizsgált.

Tudományos pályám alakulását számos külső tényező is támogatta. Már a kezdetektől fogva rendszeres résztvevője voltam az MTA SZTAKI-ban Rapcsák Tamás által vezetett operációkutatási és döntéstudományi szemináriumnak, mely abban az időben az operációkutatással foglalkozó kollégák egyik jelentős szakmai „gyűjtőhelye" is volt. Ennek a szemináriumnak egyik fontos mellékterméke lett a Magyar Operációkutatási Társaság megalapítása 1991-ben. Egy cikluson át (2000–2002) a társaság elnökeként is tevékenykedtem.

Számomra meghatározó jelentőségű volt az OTKA megjelenése a tudománytámogatási palettán. Már az első alkalommal, 1986-ban – annak dacára, hogy egyéni pályázó voltam – kaptam annyi támogatást, melynek segítségével lehetővé vált számomra jelentős nemzetközi konferenciákon való részvétel. Az OTKA támogatása további 3 támogatott pályázat révén biztosította számomra később is a nemzetközi jelenlétet.

Pályám alakulása szempontjából különös jelentősége volt az 1990 augusztusában, Bécsben rendezett Nemzetközi Operációkutatási Konferenciának, ahol személyesen is megismerkedhettem Siegfried Schaible akkor éppen Kanadában élő német professzorral. Vele korábban már intenzív levelezésben voltam, nagy tisztelője volt Martos Bélának, és hihetetlen energiával próbálta létrehozni az általánosított konvexitással valamilyen szinten foglalkozó kollégák szakmai közösségét. Oroszlánrésze volt három nemzetközi konferencia létrejöttében és megszervezésében (1980.

Vancouver/Kanada, 1986. Canton/USA, 1988. Pisa). Bécsi találkozásunk alkalmával szóba hozta, hogy jó lenne folytatni, és 3–4 éves gyakorisággal rendszeressé tenni a már megkezdett nemzetközi konferenciákat. Az egyetlen gond, „panaszkodott”, hogy nincs jelentkező a következő találkozó megszervezésére. Gondoltam egy merészet és nagyot, és elvállaltam a *IVth International Symposium on Generalized Convexity* konferencia megszervezését, mely 1992 augusztusában Vörös József kollégám, barátom, a kar akkori dékánja hathatós támogatásával több mint 70 fő részvételével meg is valósult Pécsett, a Pécsi Tudományegyetem Közgazdaságtudományi Karán. Ezen a konferencián Martos Béla is jelen volt, mint a konferencia díszvendége. A konferencia kötetét a Springer Verlag adta ki 1994-ben [11]. A pécsi konferencia sikere nagyban hozzájárult ahhoz, hogy 1994-ben a 15th International Symposium on Mathematical Programming konferencián (Ann Arbor/USA) a jelenlevő kollégákkal megalakítottuk a *Working Group on Generalized Convexity* szakmai közösséget, melynek 1997 és 2000 között elnöke is voltam. Ennek az időszaknak talán a legjelentősebb eredménye az volt, hogy sikerült egy színvonalas kézikönyvet [6] összeállítanunk és egy rangos kiadóval megjelentetni. A társaságnak jelenleg 52 országból 455 regisztrált tagja van. A konferenciák rendszeressé váltak, és külön öröm, hogy 2011-ben Kolozsvár, az idén pedig (2017-ben) Debrecen/Hajdúszoboszló adott otthont az éppen esedékes szakmai találkozóknak.

Visszatekintve pályámon, szívesen emlékezem meg a XXIII. Magyar Operációkutatási Konferenciáról, melynek megrendezését a BJMT felkérésére magamra vállaltam és melyre 1997 októberében került sor a Pécsi Tudományegyetem Természettudományi Karán. A konferencián megemlékeztünk a 150 évvel korábban született Farkas Gyuláról. A konferencia kiadványkötete „*Új utak a magyar operációkutatásban, In memoriam Farkas Gyula*” címmel 1999-ben jelent meg a Dialóg Campus Kiadó gondozásában [12].

3. Többváltozós differenciálható függvények általános konvexitásának lokális jellemzése a kvázi-Hesse-mátrix segítségével

A konvexitás számos általánosítása közül, csak kettőt említek.

3.1. Definíció.

(i) A $g(\mathbf{x})$ (nem feltétlenül differenciálható) függvényt kvázikonvexnek nevezzük a $K \subseteq R^n$ konvex halmazon, ha bármely $c \in R$ esetén az $\{\mathbf{x} \in K : g(\mathbf{x}) \leq c\}$ alsó nívóhalmaz konvex.

(ii) A differenciálható $f(\mathbf{x})$ függvényt *pszeudokonvexnek* nevezzük a K konvex halmazon, ha bármely $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in K$ esetén teljesül az alábbi implikáció

$$f(\mathbf{x}_1) < f(\mathbf{x}_2) \Rightarrow \nabla f(\mathbf{x}_2)^T(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) < 0. \qquad \text{(PCX)}$$

Megjegyzés. A differenciálható függvények esetén a kvázikonvexitás definíciója ekvivalens a következővel: bármely $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in K$ esetén teljesül az alábbi implikáció

$$f(\mathbf{x}_1) \leq f(\mathbf{x}_2) \Rightarrow \nabla f(\mathbf{x}_2)^T(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \leq 0. \tag{QCX}$$

Ráadásul bármely $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in K$ esetén a (PCX) $\Rightarrow$ (QCX) implikáció is teljesül.

Martos Béla [16, 17] több érdekes eredményt e fogalmak pontbeli változataival bizonyított.

3.2. Definíció. (Martos): A differenciálható $f(\mathbf{x})$ függvényt *lokálisan kvázikonvexnek / lokálisan pszeudokonvexnek* nevezzük az $\mathbf{a} \in K$ pontban a K konvex halmazra nézve, ha bármely $\mathbf{x} \in K$ esetén teljesül a (QCXa)/(PCXa) implikáció:

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a}) \Rightarrow \nabla f(\mathbf{a})^T(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \leq 0. \tag{QCXa}$$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a}) \Rightarrow \nabla f(\mathbf{a})^T(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \leq 0. \\ f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a}) \Rightarrow \nabla f(\mathbf{a})^T(\mathbf{x} - \mathbf{a}) < 0. \end{aligned} \tag{PCXa}$$

Martos Béla a „lokális” jelzőt nem a matematikai analízisben megszokott értelemben használja. Az általa is használt fogalmak (a lokális jelző ellenére) az adott függvénynek nem csupán lokális (az adott pont közelében való) viselkedését fejezik ki. A matematikai analízisben nem csak egy pontot rögzítünk, hanem annak egy környezetét is. Első próbálkozásaim egyike volt a matematikai analízis megközelítésmódját alkalmazni kvázikonvex, pszeudokonvex függvények jellemzésére [8].

3.3. Definíció. (Komlósi): A differenciálható $f(\mathbf{x})$ függvényt *lokálisan kvázikonvexnek/ lokálisan pszeudokonvexnek* nevezzük az $\mathbf{a} \in K$ pontban a K konvex halmazra nézve, ha van az $\mathbf{a}$ pontnak olyan G környezete, hogy bármely $\mathbf{x} \in K \cap G$ esetén teljesül az (LQCXa)/ (LPCXa) implikáció:

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a}) \Rightarrow \nabla f(\mathbf{a})^T(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \leq 0. \tag{LQCXa}$$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a}) \Rightarrow \nabla f(\mathbf{a})^T(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \leq 0. \\ f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a}) \Rightarrow \nabla f(\mathbf{a})^T(\mathbf{x} - \mathbf{a}) < 0. \end{aligned} \tag{LPCXa}$$

A definíciókból látszik, hogy lokálisan pszeudokonvex függvény lokálisan kvázikonvex is. Bizonyítható, hogy amennyiben $\nabla f(\mathbf{a}) \neq 0$, akkor az $\mathbf{a}$ pontbeli lokális kvázikonvexitás ekvivalens a lokális pszeudokonvexitással.

Amint az várható, igaz a következő tétel.

3.1. Tétel. (8, 2.4. tétel) *A $K \subseteq R^n$ konvex, nyílt halmazon differenciálható $f(\mathbf{x})$ függvény akkor és csak akkor pszeudokonvex K-n, ha a K halmaz bármely pontjában lokálisan pszeudokonvex K-ra nézve.*

Érdekes módon lokális kvázikonvexitás és kvázikonvexitás között nem áll fenn hasonló kapcsolat. Az $f(x) = -x^2$ függvény R minden pontjában lokálisan kvázikonvex, de $f(x)$ nem kvázikonvex R-en. Ezért a továbbiakban csak a pszeudokonvex esettel fogok foglalkozni.

Először is az (LPCXa) tulajdonságot egy egyszerűbbel helyettesítjük.

3.2. TÉTEL. *Ha $\nabla f(\mathbf{a}) \neq 0$, akkor az (LPCXa) feltétel ekvivalens az alábbi „szintvonal-feltétellel". Bármely $x \in K \cap G$ esetén*

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) \Rightarrow \nabla f(\mathbf{a})^T(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \leq 0. \tag{LSCa}$$

3.1. KÖVETKEZMÉNY. *A differenciálható $f(\mathbf{x})$ függvény akkor és csak akkor lokálisan pszeudokonvex az $\mathbf{a} \in K$ pontban a K konvex halmazra nézve, ahol $\nabla f(\mathbf{a}) \neq 0$, ha van az $\mathbf{a}$ pontnak olyan G környezete, hogy bármely $\mathbf{x} \in K \cap G$ esetén teljesül az (LSCa) implikáció.*

A továbbiakban $f(\mathbf{x})$ lokális pszeudokonvexitását olyan $\mathbf{a} \in K$ pontban vizsgáljuk, ahol $\nabla f(\mathbf{a}) \neq 0$. Az $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$ szintvonalat az implicitfüggvény tétel ([23], 6. fejezet, 3. tétel) segítségével vizsgáljuk. Hogy ezt megtehessük, feltesszük, hogy $f(\mathbf{x})$ folytonosan differenciálható.

Legyen $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{n-1}, \mathbf{d}\}$ egy olyan ortonormált bázis R^n-ben, melyre $\nabla f(\mathbf{a})^T\mathbf{d} \neq 0$. Jelölje B a $\mathbf{b}_i$ oszlopvektorok mátrixát, azaz legyen

$$B = [\mathbf{b}_1 \ \ \mathbf{b}_2 \ \ \ldots \ \ \mathbf{b}_{n-1}].$$

Legyenek $\mathbf{u} \in R^{n-1}$ és $v \in R$ az $\mathbf{x} \in R^n$ vektor koordinátái a $\{B, \mathbf{d}\}$ bázisban, azaz legyen

$$\mathbf{x} = B\mathbf{u} + v\mathbf{d}.$$

A továbbiakban $\mathbf{x}$-et $(\mathbf{u}, v)$-vel azonosítjuk. Tekintsük most az $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$ egyenletet az $f(\mathbf{u}, v) = f(\mathbf{a})$ alakban, ahol $\mathbf{a} = (\mathbf{u}_0, v_0)$. Az implicitfüggvény tétel szerint van $\mathbf{a}$-nak olyan G és van $\mathbf{u}_0$-nak olyan N környezete és van egyetlen olyan N-en értelmezett és ott folytonosan differenciálható $h(\mathbf{u})$ függvény, hogy

(i) minden $\mathbf{u} \in N$-re $(\mathbf{u}, h(\mathbf{u})) \in G$, és $f(\mathbf{u}, h(\mathbf{u})) = f(\mathbf{a})$,

(ii) minden $\mathbf{x} \in G$-re $\nabla f(\mathbf{x})^T\mathbf{d} \neq 0$, és ha $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$, akkor van olyan $\mathbf{u} \in N$, hogy $\mathbf{x} = (\mathbf{u}, h(\mathbf{u}))$.

Ha $f(\mathbf{x})$ kétszer folytonosan differenciálható, akkor $h(\mathbf{u})$ is kétszer folytonosan differenciálható.

3.4. Definíció.

(i) A $H(\mathbf{u}) = \left(-\nabla f(\mathbf{a})^T\mathbf{d}\right) h(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} \in N$ függvényt az $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$ szintvonal $\mathbf{a}$ pontbeli *korrigált implicitfüggvényének* nevezzük.

(ii) A $H(\mathbf{u})$ függvényt *lokálisan konvexnek* nevezzük az $\mathbf{u}_0$ pontban, ha bármely $\mathbf{u} \in N$ esetén

$$H(\mathbf{u}) \geq H(\mathbf{u}_0) + \nabla H(\mathbf{u}_0)^T(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0). \tag{LCX}$$

A korrigált implicitfüggvény szerepe és haszna a következő tételből derül ki ([8], 3.2., 3.6. és 3.8. tételek).

3.3. Tétel.

(i) A folytonosan differenciálható $f(\mathbf{x})$ függvény akkor és csak akkor lokálisan pszeudokonvex az $\mathbf{a} = (\mathbf{u}_0, v_0)$ pontban, ha a $H(\mathbf{u})$ korrigált implicitfüggvény lokálisan konvex az $\mathbf{u}_0$ pontban.

(ii) Ha $f(\mathbf{x})$ kétszer folytonosan differenciálható és lokálisan pszeudokonvex az $\mathbf{a} = (\mathbf{u}_0, v_0)$ pontban, akkor a $\nabla^2 H(\mathbf{u}_0)$ Hesse-mátrix pozitív szemidefinit.

(iii) Ha $f(\mathbf{x})$ kétszer folytonosan differenciálható az $\mathbf{a} = (\mathbf{u}_0, v_0)$ pontban, és a $\nabla^2 H(\mathbf{u}_0)$ Hesse-mátrix pozitív definit, akkor $f(\mathbf{x})$ lokálisan pszeudokonvex $\mathbf{a}$-ban.

Az $f(\mathbf{u}, h(\mathbf{u})) = f(\mathbf{a})$, $\mathbf{u} \in N$ függvényegyenletből nyerhetjük a következő összefüggéseket:

$$\begin{aligned}
\nabla H(\mathbf{u}) &= B^T \nabla f(\mathbf{x}), \\
\nabla^2 H(\mathbf{u}) &= B^T \Bigg[\nabla^2 f(\mathbf{x}) - \frac{1}{\nabla f(\mathbf{x})^T\mathbf{d}} \left(\nabla f(\mathbf{x})\mathbf{d}^T \nabla^2 f(\mathbf{x}) + \nabla^2 f(\mathbf{x})\mathbf{d}\nabla f(\mathbf{x})^T\right) + \\
&\qquad + \frac{\mathbf{d}^T \nabla^2 f(\mathbf{x})\mathbf{d}}{\left(\nabla f(\mathbf{x})^T\mathbf{d}\right)^2} \nabla f(\mathbf{x}) \nabla f(\mathbf{x})^T\Bigg] B,
\end{aligned}$$

ahol $\mathbf{u} \in N$, és $\mathbf{x} = (\mathbf{u}, h(\mathbf{u}))$.

3.5. Definíció. A $\nabla^2 H(\mathbf{u}_0)$ Hesse-mátrixot a kétszer folytonosan differenciálható $f(\mathbf{x})$ függvény $\mathbf{a}$ pontbeli *kvázi-Hesse-mátrixának* nevezzük. Jelölje a továbbiakban $Q_{B,\mathbf{d}}f(\mathbf{a})$ a $\nabla^2 H(\mathbf{u}_0)$ mátrixot.

Az elmondottakból nyilvánvaló, hogy $f(\mathbf{x})$ $\mathbf{a}$ pontbeli kvázi-Hesse-mátrixa nem egyértelmű. Különböző bázisokhoz és azon belül is azok különböző $\{B, \mathbf{d}\}$ particionálásukhoz különböző kvázi-Hesse-mátrixok tartoznak. Bizonyítható, hogy ezek a kvázi-Hesse-mátrixok hasonlóak. Mindegyiknek ugyanaz a sajátérték rendszere, következésképpen valamennyi $Q_{B,\mathbf{d}}f(\mathbf{a})$ kvázi-Hesse-mátrix ugyanabba a definitási osztályba tartozik.

A kvázi-Hesse-mátrixok között vannak egyszerűbb szerkezetűek is. Ha a $\mathbf{d}$ vektor történetesen sajátvektora a $\nabla^2 f(\mathbf{a})$ Hesse-mátrixnak, akkor $B^T\mathbf{d} = \mathbf{0}$, és emiatt

$$Q_{B,\mathbf{d}}f(\mathbf{a}) = B^T\left[\nabla^2 f(\mathbf{a}) + \frac{\mathbf{d}^T\nabla^2 f(\mathbf{a})\mathbf{d}}{(\nabla f(\mathbf{a})^T\mathbf{d})^2}\nabla f(\mathbf{a})\nabla f(\mathbf{a})^T\right]B.$$

Alkalmasan választott $Q_{B,\mathbf{d}}f(\mathbf{a})$ kvázi-Hesse-mátrix segítségével sikerült egységes tárgyalását adnom a pszeudokonvexitás (az irodalomból már ismert) számos másodrendű jellemzésének [8, 9].

Egy további lehetséges alkalmazási terület a törtfüggvények vizsgálata. Ismert, hogy törtlineáris függvények, amennyiben gradiens vektoruk egy konvex halmaz minden pontjában különbözik $\mathbf{0}$-tól, az adott halmazon pszeudolineárisak, vagyis egyidejűleg pszeudokonvexek és pszeudokonkávak. Rapcsák Tamásnak [20] a pszeudolineáris függvényekre vonatkozó vizsgálatai is inspiráltak arra, hogy ennek a függvényosztálynak az elemzését is végezzem el a kvázi-Hesse-mátrixok segítségével.

A továbbiakban kétszer folytonosan differenciálható pszeudolineáris függvényt vizsgálunk az $\mathbf{a}$ pontban olyan $\{B, \mathbf{d}\}$ ortonormált bázis segítségével, ahol $\nabla^T f(\mathbf{a})\mathbf{d} \neq 0$, és $\mathbf{d}$ sajátvektora $\nabla^2 f(\mathbf{a})$-nak $\lambda(\mathbf{d})$ sajátértékkel. Mivel $Q_{B,\mathbf{d}}f(\mathbf{a}) = 0$, ezért

$$B^T\nabla^2 f(\mathbf{a})B = c(\mathbf{d})\mathbf{r}\mathbf{r}^T,$$

ahol $c(\mathbf{d}) = -\dfrac{\lambda(\mathbf{d})}{(\nabla f(\mathbf{a})^T\mathbf{d})^2}$ és $\mathbf{r} = B^T\nabla f(\mathbf{a})$.

Vezessük be a $P = [B \quad \mathbf{d}]$ bázismátrixot. Ekkor, tekintettel a $B^T\mathbf{d} = \mathbf{0}$ összefüggésre,

$$P^T\nabla^2 f(\mathbf{a})P = \begin{bmatrix} B^T\nabla^2 f(\mathbf{a})B & B^T\nabla^2 f(\mathbf{a})\mathbf{d} \\ \mathbf{d}^T\nabla^2 f(\mathbf{a})B & \mathbf{d}^T\nabla^2 f(\mathbf{a})\mathbf{d}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(\mathbf{d})\mathbf{r}\mathbf{r}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \lambda(\mathbf{d})\end{bmatrix}.$$

Ha $\lambda(\mathbf{d}) = 0$, akkor $P^T\nabla^2 f(\mathbf{a})P = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0\end{bmatrix}$. Ebben az esetben $\nabla^2 f(\mathbf{a}) = 0$.

Ha $\lambda(\mathbf{d}) \neq 0$, és $\mathbf{r} = B^T\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, akkor $P^T\nabla^2 f(\mathbf{a})P = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \lambda(\mathbf{d})\end{bmatrix}$. Ebben az esetben $\nabla^2 f(\mathbf{a})$ rangja egy, és pozitív, vagy negatív szemidefinit attól függően, hogy $\lambda(\mathbf{d}) > 0$, vagy $\lambda(\mathbf{d}) < 0$. Vegyük észre, hogy ebben az esetben $\nabla f(\mathbf{a}) = \delta\mathbf{d}$, vagyis $\nabla f(\mathbf{a})$ sajátvektora $\nabla^2 f(\mathbf{a})$-nak.

Ha $\lambda(\mathbf{d}) \neq 0$, és $\mathbf{r} = B^T\nabla f(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$, akkor $P^T\nabla^2 f(\mathbf{a})P$ rangja kettő, $c(\mathbf{d})$ és $\lambda(\mathbf{d})$ különböző előjelű egyszeres sajátértékek. Sylvester inerciatétele szerint $\nabla^2 f(\mathbf{a})$ rangja ugyancsak kettő, egy negatív és egy pozitív sajátértékkel rendelkezik.

3.4. Tétel. *Legyen a kétszer folytonosan differenciálható $f(\mathbf{x})$ függvény lokálisan pszeudolineáris az $\mathbf{a}$ pontban, ahol $\nabla f(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$. Ekkor a $\nabla^2 f(\mathbf{a})$ Hesse-mátrixot az alábbi tulajdonságok egyike jellemzi:*

(i) *rang* $\left(\nabla^2 f(\mathbf{a})\right) = 0$, *azaz* $\nabla^2 f(\mathbf{a}) = 0$,

(ii) *rang* $\left(\nabla^2 f(\mathbf{a})\right) = 1$, $\nabla^2 f(\mathbf{a})$ *(pozitív vagy negatív) szemidefinit,* $\nabla f(\mathbf{a})$ *sajátvektora* $\nabla^2 f(\mathbf{a})$*-nak,*

(iii) *rang* $\left(\nabla^2 f(\mathbf{a})\right) = 2$, $\nabla^2 f(\mathbf{a})$ *indefinit.*

Riccardo Cambini és Laura Carosi [2], majd Rapcsák Tamás [21,22] a

$$q(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^T C\mathbf{x} + \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \gamma}{\mathbf{b}^T\mathbf{x} + \beta}$$

kvadratikus törtfüggvény pszeudolinearitását vizsgálták a $K = \left\{\mathbf{x} \in R^n : \mathbf{b}^T\mathbf{x} + \beta > 0\right\}$ nyílt konvex halmazon, ahol $C \neq 0$ szimmetrikus mátrix. Megmutatták, hogy amennyiben $q(\mathbf{x})$ pszeudolineáris a K nyílt, konvex halmazon, akkor két eset lehetséges:

(i) rang$(C) = 1$, és $q(\mathbf{x}) = \rho\left(\mathbf{b}^T\mathbf{x} + \beta\right) + \dfrac{\sigma}{\mathbf{b}^T\mathbf{x} + \beta} + \tau$, $\rho, \sigma, \tau \in R$ és $\rho\sigma < 0$,

(ii) rang$(C) = 2$, és $f(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T\mathbf{x} + \pi$.

Ezt a karakterizációt a 3.4. tétel segítségével egyszerűbben és gyengébb feltételek mellett is el lehet érni. Törtfüggvények vizsgálatánál azonban komoly technikai nehézséget okoz a Hesse-mátrix kiszámítása. Az alábbi „redukciós tétel" némileg enyhít ezen a problémán.

3.5. Tétel. (15) *Legyenek $g(\mathbf{x})$ és $h(\mathbf{x})$ folytonosan differenciálható függvények az $\mathbf{a} \in R^n$ pontban, ahol $h(\mathbf{a}) > 0$ is teljesül. Az*

$$f(\mathbf{x}) = \frac{g(\mathbf{x})}{h(\mathbf{x})}$$

törtfüggvény akkor és csak akkor lokálisan pszeudolineáris az $\mathbf{a}$ pontban, ha a

$$\phi(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})h(\mathbf{x})$$

segédfüggvény lokálisan pszeudolineáris $\mathbf{a}$-ban.

A $q(x)$ törtlineáris függvény pszeudolinearitása ezzel a módszerrel könnyebben vizsgálható. A redukciós tétel szerint ez a vizsgálat „átjátszható" a

$$\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T Cx + \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \gamma - f(\mathbf{a})\left(\mathbf{b}^T\mathbf{x} + \beta\right)$$

kvadratikus függvény vizsgálatára, melynek Hesse-mátrixa könnyen számítható:

$$\nabla^2\phi(\mathbf{x}) = 2C.$$

Ezek szerint, ha $q(\mathbf{x})$ lokálisan pszeudolineáris az $\mathbf{a} \in K$ pontban, ahol $\nabla q(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$, akkor a 3.4. tétel szerint a C mátrix rangja vagy 1, vagy 2. Egyszerű lineáris algebrai megfontolások segítségével a Cambini-Carosi-tétel állítása gyengébb feltételek mellett is érvényes.

3.6. TÉTEL. [*14, 15*] *Legyen $q(\mathbf{x})$ lokálisan pszeudolineáris az $\mathbf{a} \in K$ pontban, ahol $\nabla q(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$. Ekkor a C mátrix ragja vagy 1, vagy 2.*

(i) *Legyen rang$(C) = 1$. Ha $q(\mathbf{x})$ lokálisan pszeudolineáris egy $\mathbf{a}$-tól különböző $\hat{\mathbf{a}}$ pontban is, ahol $\nabla q(\hat{\mathbf{a}}) \neq \mathbf{0}$, és $q(\hat{\mathbf{a}}) \neq q(\mathbf{a})$, akkor*

$$q(\mathbf{x}) = \rho\left(\mathbf{b}^T\mathbf{x} + \beta\right) + \frac{\sigma}{\mathbf{b}^T\mathbf{x} + \beta} + \tau, \quad \rho,\, \sigma,\, \tau \in R,\ \text{és}\ \rho\sigma < 0,$$

amiből az is következik, hogy $q(\mathbf{x})$ pszeudolineáris a $K = \{\mathbf{x} \in R^n : \mathbf{b}^T\mathbf{x} + \beta > 0\}$ nyílt, konvex halmazon.

(ii) *Ha rang$(C) = 2$, akkor C indefinit, és amennyiben $q(\mathbf{x})$ a K halmaz legalább 3 különböző pontjában – ahol a gradiensek nem tűnnek el, és a függvényértékek különbözőek – lokálisan pszeudolineáris, akkor $q(\mathbf{x})$ lineáris függvény K-n, $q(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T\mathbf{x} + \pi$.*

4. Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom anonim lektoraimnak jobbító javaslataikért és a gépelési pontatlanságaimra történő figyelmeztetéseikért.

Hivatkozások

[1] GUERAGGIO, A., MOLHO, E.: *The origins of quasiconcavity: a development between mathematics and economics*, Historia Mathematica **31** (2004), 62–75.

[2] CAMBINI, R., CAROSI, L.: *On generalized linearity of quadratic functions*, Journal of Global Optimization **30** (2004), 235–251.

[3] GIORGI, G., KOMLÓSI, S.: *Dini Derivatives in Optimization-Part I*, Rivista A.M.A.S.E.S. **15/1** (1992), 3–30.

[4] GIORGI, G., KOMLÓSI, S.: *Dini Derivatives in Optimization-Part II*, Rivista A.M.A.S.E.S. **15/2** (1992), 3–24.

[5] GIORGI, G., KOMLÓSI, S.: *Dini Derivatives in Optimization-Part III*, Rivista A.M.A.S.E.S. **18/1** (1995), 47–63.

[6] HADJISAVVAS, N., KOMLÓSI, S., SCHAIBLE, S., (EDS.): *Handbook on Generalized Convexity and Generalized Monotonicity*, Springer, New York, 2005.

[7] KOMLÓSI, S.: *Some properties of nondifferentiable pseudoconvex functions*, Mathematical Programming **26** (1983), 232–237.

[8] KOMLÓSI, S.: *Néhány adalék a kvázikonvex függvények elméletéhez*, Alkalmazott Matematikai Lapok **10** (1984), 107–113.

[9] KOMLÓSI, S.: *On pseudoconvex functions*, Acta. Sci. Math. (Szeged) **57** (1993), 569–586.

[10] KOMLÓSI, S.: *First and second order characterization of pseudolinear functions*, European Journal of Operational Research **67** (1993), 278–286.

[11] KOMLÓSI, S., RAPCSÁK, T., SCHAIBLE, S., (EDS.): *Generalized Convexity*, Proceedings of the IVth International Workshop on Generalized Convexity Held at Janus Pannonius University Pécs, Hungary, August 31 – September 2, 1992, Springer Verlag, Berlin – New York, 1994.

[12] KOMLÓSI, S., SZÁNTAI, T., (SZERK.): *Új utak a magyar operációkutatásban: in memoriam Farkas Gyula*, Dialóg Campus Kiadó, Budapest-Pécs, 1999.

[13] KOMLÓSI, S.: *Generalized Convexity and Generalized Derivatives in: N. Hadjisavvas, S. Komlósi and S. Schaible (eds.)*, Handbook on Genaralized Convexity and Generalized Monotonicity, Springer, New York (2009), 421–463.

[14] KOMLÓSI, S.: *Pszeudolineáris törtfüggvényekről*, SZIGMA 40 (2009), 11–24.

[15] KOMLÓSI, S.: *On pseudolinear fractional functions – the implicit function approach*, Mathematica Pannonica **20** (2009), 257–274.

[16] MARTOS, B.: *Hiperbolikus programozás*, MTA Matematikai Kutató Intézet Közleményei **5** (1960), 383–406.

[17] MARTOS, B.: *Nonlinear Programming: Theory and Methods*, North Holland, Amsterdam, 1975.

[18] VON NEUMANN: *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*, Mathematische Annalen **100** (1928), 295–320.

[19] RAPCSÁK, T.: *Az optimalitás másodrendű feltételeiről*, Alkalmazott Matematikai Lapok **4** (1978), 109–116.

[20] RAPCSÁK, T.: *On pseudolinear functions*, European Journal of Operational Research **50** (1991), 353–360.

[21] RAPCSÁK, T.: *On pseudolinearity of quadratic fractional functions*, Optimization Letters **1** (2007), 193–200.

[22] RAPCSÁK, T., ÚJVÁRI, M.: *Some results on pseudolinear quadratic fractional functions*, CEJOR **16** (2008), 415–424.

[23] *Szőkefalvy-Nagy, Gy., Gehér, L., Nagy, P.*: *Differenciálgeometria*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.

1947. december 18-án született, 1967 és 1972 között a JATE programtervező matematikus szakán folytatott tanulmányokat és diplomázott. 1978-ban doktori címet, 1984-ben kandidátusa tudományos fokozatot szerzett. 1995-ben habilitált. 1972-től 1976-ig a JATE Bolyai Intézetében tanársegéd. 1976-tól a Pécsi Tudományegyetem Közgazdaságtudományi Karának oktatója, 1996-tól egyetemi tanári minőségben, 2012-től pedig professzor emerituszként.

Szakmai érdeklődése az optimalizáláselmélet, nemlineáris programozás, operációkutatás, ezen belül is a nemdifferenciálható optimalizálás, általánosított konvexitás és monotonitás, variációs egyenlőtlenségek. Jelentős eredményeket ért el az optimalizáláselméletben különös fontosságú függvényosztályok (pl. kvázikonvex, pszeudokonvex stb. függvények), illetve azok általánosított deriváltjai vizsgálata terén. Szakmai-tudományos publikációinak száma több mint 60, ezekre – jelen állapot szerint – több mint 400 hivatkozást kapott.

Alapító tagja és elnöke (1997–2000) a Working Group on Generalized Convexity nemzetközi tudományos társaságnak. Alapító tagja, több cikluson át elnökségi tagja, elnöke (2000–2002) a Magyar Operációkutatási Társaságnak, mely 2016-ban Egervári Jenő Emlékplakettel ismerte el szakmai-közéleti tevékenységét. Alapító tagja, elnökségi tagja (2003–2006) a Gazdaságmodellezési Társaságnak, mely 2007-ben Krekó Béla-díjjal tüntette ki. 1986-tól tagja az MTA Operációkutatási Bizottságának, melynek 1999–2002 között alelnöke, 2001–2004-ig közgyűlési doktor képviselője volt. Tagja a Bolyai János Matematikai Társulatnak, 2009-től egy cikluson keresztül alelnöke az Alkalmazott Matematikai Bizottságnak.

DR. KOMLÓSI SÁNDOR ÁKOS
Pécsi Tudományegyetem
Közgazdaságtudományi Kar
e-mail: komlosi@ktk.pte.hu

ON QUASI-HESSE MATRICES

Sándor Komlósi

It is well known that for optimization problems, the convexity/concavity of the problem functions plays crucial role in characterizing and finding optimal solutions. Moreover the convexity/concavity of a given twice differentiable function can be tested by the positive/negative semidefiniteness of its second derivative (which, in the several variable cases, is called the Hessian matrix). Since the second half of the last century there have been devoted many ef-forts to find suitable generalizations for the convexity/concavity property. The present paper reviews some former results obtained by the author on the second order characterization of pseudoconvex and pseudolinear functions by the help of the quasi-Hessian matrix.

Alkalmazott Matematikai Lapok **35** (2018), 57–65

A VALÓSZÍNŰSÉGELOSZLÁS HATÁSA AZ EGYÜTTES VALÓSZÍNŰSÉGI FELTÉTELLEL KORLÁTOZOTT SZTOCHASZTIKUS PROGRAMOZÁSI FELADATOK OPTIMUM ÉRTÉKÉRE[1]

SZÁNTAI TAMÁS

A dolgozat fő célkitűzése annak a vizsgálata, hogy egy együttes valószínűséggel korlátozott sztochasztikus programozási feladat optimum értékében mekkora változásokat eredményezhet, ha megváltoztatjuk az együttes valószínűségeloszlás tipusát, miközben ügyelünk arra, hogy az összes első és második momentum (várható érték, szórás, korreláció) azonos legyen. Három eloszlást tekintünk: a többdimenzós normális eloszlást, a Dirichlet-eloszlást és a Prékopa–Szántai-féle többdimenziós gamma eloszlást. Mivel a Dirichlet-eloszlás komponensei közt mindig negatív, a vizsgált többdimenziós gamma eloszlás komponensei közt mindig pozitív a korreláció, azért ezek az előírt feltételeink mellett egymással nem hasonlíthatók össze. Ezért mindkét eloszlást a többdimenziós normális eloszlással hasonlíthatjuk csak össze. Megadunk egy életszerű tesztfeladatot, melyre nyert numerikus eredményeink azt igazolják, hogy az optimum értékek a választott többdimenziós eloszlások szerint meglehetősen nagy eltéréseket mutathatnak. A nyert eredmények arra is rávilágítanak, hogy azonos típusú együttes valószínűségeloszlás alkalmazása esetén a korrelációs mátrix különbözősége hasonlóan jelentős eltérésekre vezethet az optimum értékekben.

1. Bevezetés

Ebben a cikkben a következő sztochasztikus programozási feladatot fogjuk a benne szereplő valószínűségi változók különböző együttes valószínűségeloszlása

[1] Jelen cikk lényegében az [5] angol nyelven megjelent közlemény magyar fordítása. Azért is szánom ezt az Alkalmazott Matematikai Lapok Prékopa András emlékének szentelt kötetébe, mert 1997-es megjelenése miatt András a [2] könyvében ezeket az eredményeket még nem szerepeltethette. Megismerni is mondhatni véletlenül ismerte meg a 2000-es évek elején, mikor meglepődve látta a címét a pulikációs listámban. Rögtön elkérte tőlem a konferenciakötetet és elolvasva a cikkemet igen érdekesnek találta a benne ismertetett numerikus eredményeket. Hiszem, hogy a mostani magyar nyelvű megjelenése „elősegítheti az elért eredmények minél előbbi, széles körű hazai felhasználását”.

mellett megoldani:

$$P\begin{pmatrix} d_{11}x_1 + \ldots + d_{1n}x_n \geq \beta_1 \\ \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ d_{s1}x_1 + \ldots + d_{sn}x_n \geq \beta_s \end{pmatrix} \geq p$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$$

$$min\,(\ c_1x_1 + \ldots + c_nx_n)$$

ahol $\beta_1, \ldots, \beta_s$ tetszőleges együttes valószínűségeloszlással bírhatnak, csak azzal a feltételezéssel élünk, hogy a komponenseik várható értékei rendre

$$E\left(\beta_1\right) = \mu_1, \ldots, E\left(\beta_s\right) = \mu_s,$$

szórásai rendre

$$D^2\left(\beta_1\right) = \sigma_1^2, \ldots, D^2\left(\beta_s\right) = \sigma_s^2,$$

a korrelációs együtthatóik mátrixa pedig

$$R = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \ldots & r_{1s} \\ r_{12} & 1 & \ldots & r_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{1s} & r_{2s} & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Meg fogjuk vizsgálni azt, hogy a különböző együttes valószínűségeloszlások használata mekkora különbségeket hozhat létre a célfüggvény optimum értékében. A vizsgált együttes valószínűségeloszlások a többdimenziós normális eloszlás, a Dirichlet-eloszlás egy alkalmas transzformáltja és a Prékopa–Szántai-féle többdimenziós gamma eloszlás lesznek. A származtatott nemlineáris programozási feladatokat a Veinott-féle támaszsík algoritmus egy módosított változatával oldottuk meg (lásd [4]). A többdimenziós normális eloszlást ismertnek tételezzük fel, a 2. szakaszban megadjuk a Dirichlet-eloszlást és annak alkalmazási módját; a 3. szakaszban ugyanezt tesszük a többdimenzós gamma eloszlásra, és végül a 4. szakaszban futási eredményeket ismertetünk, melyek segítségével képet kaphatunk az egyes többdimenziós valószínűségeloszlásoknak a célfüggvény optimum értékére gyakorolt hatásáról.

2. A Dirichlet-eloszlás és tulajdonságai

A $\xi_1, \ldots, \xi_s$ valószínűségi változók $\vartheta_1 > 0, \ldots, \vartheta_s > 0, \vartheta_{s+1} > 0$ paraméterű Dirichlet-eloszlásúak, ha az együttes sűrűségfüggvényük

$$f(x_1, \ldots, x_s) = \frac{\Gamma(\vartheta_1 + \ldots + \vartheta_s + \vartheta_{s+1})}{\Gamma(\vartheta_1) \cdots \Gamma(\vartheta_s) \Gamma(\vartheta_{s+1})} x_1^{\vartheta_1 - 1} \cdots x_s^{\vartheta_s - 1} (1 - x_1 - \ldots - x_s)^{\vartheta_{s+1} - 1},$$

ha $x_1 \geq 0, \ldots, x_s \geq 0$ és $x_1 + \ldots + x_s \leq 1$.

Ekkor a $\xi_1, \ldots, \xi_s$ valószínűségi változók várható értékei, szórásnégyzetei és kovariancia együtthatói a következők:

$$\begin{aligned} E(\xi_i) &= \frac{\vartheta_i}{\vartheta_1 + \ldots + \vartheta_s + \vartheta_{s+1}}, \\ D^2(\xi_i) &= \frac{\vartheta_i (\vartheta_1 + \ldots + \vartheta_{i-1} + \vartheta_{i+1} + \ldots + \vartheta_s + \vartheta_{s+1})}{(\vartheta_1 + \ldots + \vartheta_s + \vartheta_{s+1})^2 (\vartheta_1 + \ldots + \vartheta_s + \vartheta_{s+1} + 1)}, \\ \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) &= \frac{-\vartheta_i \vartheta_j}{(\vartheta_1 + \ldots + \vartheta_s + \vartheta_{s+1})^2 (\vartheta_1 + \ldots + \vartheta_s + \vartheta_{s+1} + 1)} \qquad (i \neq j). \end{aligned}$$

Mivel a Dirichlet-eloszlású valószínűségi vektorváltozó minden komponense nulla és egy közti értékeket vesz fel, az együttes valószínűséggel korlátozott sztochasztikus programozási feladatokban ezeknek a komponenseknek egy-egy alkalmas lineáris transzformáltját kell használni. Ezért az alkalmazott valószínűségi korlát a következő alakot ölti:

$$P \begin{pmatrix} d_{11}x_1 + \ldots + d_{1n}x_n \geq \beta_1 = a_1 + (b_1 - a_1)\xi_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ d_{s1}x_1 + \ldots + d_{sn}x_n \geq \beta_s = a_s + (b_s - a_s)\xi_s \end{pmatrix} \geq p,$$

ahol $\xi_1, \ldots, \xi_s$ $\vartheta_1 > 0, \ldots, \vartheta_s > 0, \vartheta_{s+1} > 0$ paraméterű, Dirichlet-eloszlású valószínűségi változók. Minthogy a β_i, β_j valószínűségi változók közti korrelációs együtthatók ugyanazok, mint a ξ_i, ξ_j valószínűségi változók közöttiek, ezért az együttes valószínűségi korlátban a jobboldalon szereplő valószínűségi változók korrelációs mátrixát a $\vartheta_1 > 0, \ldots, \vartheta_s > 0, \vartheta_{s+1} > 0$ paraméter értékek választása meghatározza. Ugyanakkor nyilvánvalóan $E(\beta_i) = a_i + (b_i - a_i) E(\xi_i)$ és $D^2(\beta_i) = (b_i - a_i)^2 D^2(\xi_i)$, ezért a $\beta_i, i = 1, \ldots, n$ valószínűségi változók $E(\beta_i), i = 1, \ldots, n$ várható értékei és $D^2(\beta_i), i = 1, \ldots, n$ szórásnégyzetei az $a_i, b_i, i = 1, \ldots, n$ paraméterek alkalmas megválasztásával rögzíthetőek. Megjegyezzük, hogy ezek a paraméterek a $\beta_i, i = 1, \ldots, n$ valószínűségi változók lehetséges legkisebb, illetve legnagyobb értékeit jelentik.

3. A többdimenziós gamma eloszlás és tulajdonságai

Az egyváltozós gamma eloszlás sűrűségfüggvénye

$$f(z) = \frac{\lambda^{\vartheta} z^{\vartheta-1} e^{-\lambda z}}{\Gamma(\vartheta)}, z > 0$$

és $f(z) = 0$, ha $z \leq 0$, ahol $\lambda > 0, \vartheta > 0$ paraméterek.

Ha $\lambda = 1$, akkor a gamma eloszlást standardnak nevezzük. Ha ξ a fenti sűrűségfüggvénnyel bír, akkor könnyű azt belátni, hogy $\zeta = \lambda\xi$ standard gamma eloszlású. A [3] cikkben a szerzők olymódon vezettek be egy többdimenziós standard gamma eloszlást, hogy vették annak a $\zeta^T = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ véletlen vektornak a többdimenziós eloszlását, amelyet úgy definiáltak, hogy:

$$\zeta = A\eta,$$

ahol A egy olyan $n \times (2^n - 1)$ méretű mátrix, amely oszlopai az összes lehetséges $0, 1$ komponensekből álló, nem azonosan nulla vektorok, és η egy $2^n - 1$ komponensű, független, standard gamma eloszlású komponensekkel bíró véletlen vektor. Megjegyezzük, hogy a cikk szerzői az η valószínűségi vektorváltozó bármelyik η_i komponensére megengedték, hogy a ϑ_i paraméterének nulla legyen az értéke. Ezen nyilván azt kell érteni, hogy $\eta_i \equiv 0$. Ezt az együttes eloszlást és annak empirikus adatokhoz történő illesztésének a módszerét a szerzőik egy olyan hidrológiai alkalmazás kapcsán dolgozták ki, amely során egymást követő időperiódusok vízhozam adatainak ez együttes valószínűségeloszlását kellett leírniuk.

A többdimenziós gamma eloszlású valószínűségi vektorváltozó komponenseivel felírt együttes valószínűségi korlát a mi alkalmazásunkban a következő alakot ölti:

$$P\begin{pmatrix} d_{11}x_1 + \ldots + d_{1n}x_n \geq \beta_1 = \frac{1}{\lambda_1}\xi_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ d_{s1}x_1 + \ldots + d_{sn}x_n \geq \beta_s = \frac{1}{\lambda_s}\xi_s \end{pmatrix} \geq p,$$

ahol a $\xi_1, \ldots, \xi_s$ valószínűségi változók a fent leírt standard gamma együttes eloszlásúak $\vartheta_1 > 0, \ldots, \vartheta_s > 0$ paraméterekkel. Ekkor, ha adottak az $E(\beta_i), D^2(\beta_i)$ és $\mathrm{cov}(\beta_i, \beta_j) \geq 0$ értékek, akkor a $\lambda_1, \ldots, \lambda_s; \vartheta_1, \ldots, \vartheta_s$ paraméterek a következő összefüggésekből számolhatók:

$$E(\beta_i) = E\left(\frac{1}{\lambda_i}\xi_i\right) = \frac{1}{\lambda_i}E(\xi_i),$$

$$D^2(\beta_i) = D^2\left(\frac{1}{\lambda_i}\xi_i\right) = \frac{1}{\lambda_i^2}D^2(\xi_i).$$

Mivel a standard gamma eloszlású ξ_i valószínűségi változókra

$$E(\xi_i) = D^2(\xi_i) = \vartheta_i,$$

azért azt kapjuk, hogy

$$\lambda_i = \frac{E(\beta_i)}{D^2(\beta_i)},$$

$$\vartheta_i = \frac{E^2(\beta_i)}{D^2(\beta_i)}.$$

Mivel a β_i, β_j valószínűségi változók közti korrelációs együttható ugyanaz, mint a ξ_i, ξ_j valószínűségi változók közötti, azért a jobboldali valószínűségi változók $(\beta_1, \ldots, \beta_s)$ közötti korrelációs szerkezet létrehozható azáltal, hogy a $\xi_1, \ldots, \xi_s$ valószínűségi változók standard gamma együttes eloszlását illesztjük az empirikus korrelációs együtthatókhoz.

A Dirichlet-eloszlásról további részletek a [6] könyvben, a többdimenziós gamma eloszlásról pedig a [3] cikkben olvashatók. Az együttes valószínűségi eloszlásfüggvény és parciális deriváltjai értékeinek numerikus meghatározásáról pedig a [2] könyvben talál további részleteket az érdeklődő olvasó.

4. Numerikus eredmények egy teszt feladatra

Tekintsünk egy háromféle kávé keveréket (1. pörkölt kávé, 2. pörkölt kávé és 3. pörkölt kávé) előállító kávépörkölő üzemet. Az üzem szigorú követelményeket fogalmazott meg a háromféle pörkölt kávé keverék fő minőségi tulajdonságait illetően:

	1. pörkölt kávé	2. pörkölt kávé	3. pörkölt kávé
savasság	$\leq 3,5$	$\leq 4,0$	$\leq 5,0$
koffein tartalom	$\leq 2,8$	$\leq 2,2$	$\leq 2,4$
víz tartalom	$\geq 7,0$	$\geq 6,0$	$\geq 5,0$
erősség	$\leq 2,5$	$\leq 3,0$	$\leq 7,8$
aroma tartalom	$\geq 7,0$	$\geq 5,0$	$\geq 4,0$

Az előrejelzések szerint az üzem háromféle pörkölt kávé keverékéből a következő hónap során véletlen mennyiségekre lesz igény az alábbi várható értékekkel és szórásokkal:

	várható érték	szórás
1. pörkölt kávé	3000	1000
2. pörkölt kávé	30000	10000
3. pörkölt kávé	15000	5000

Az egyik hónap első napján az üzem azt látja, hogy 8 különböző típusú nyerskávé áll különböző mennyiségekben a rendelkezésére. A következő táblázat megadja, hogy az egyes nyerskávé-féleségeknek mennyi volt a beszerzési ára; a rendelkezésre álló mennyisége; és hogy az ötféle előírt minőségi tulajdonságot (savasság, koffeintartalom, víztartalom, erősség és aroma) illetően milyen értékkel rendelkeznek:

	ár (eFt/kg)	mennyiség (kg)	savasság (pH)	koffeintartalom (%)	víztartalom (%)	erősség index	aroma index
1	0,35	25000	4,0	1,8	6	2	8
2	0,20	75000	4,5	1,0	5	7	4
3	0,44	5000	3,0	3,0	8	2	7
4	0,41	20000	4,0	2,0	6	2	7
5	0,36	5000	3,5	1,5	6	3	9
6	0,34	4000	3,6	1,1	6	4	7
7	0,36	5000	3,2	1,4	6	3	8
8	0,19	100000	5,1	1,7	5	9	1

Az üzemnek azt kell meghatároznia, hogy a rendelkezésre álló nyerskávékból pörkölés után mennyit használjon az egyes kávékeverékek előállítására. Ehhez egy együttes valószínűséggel korlátozott sztochasztikus programozási feladatot kell megfogalmaznia, amelyben előírt (magas) valószínűséggel megkísérli kielégíteni a kávékeverékekre vonatkozó véletlen igényeket, miközben a lehető legkevesebbet igyekszik kifizetni a felhasznált nyerskávékért. Ennek a sztochasztikus programozási feladatnak a megfogalmazása megtalálható a [4] cikkben és a [2] könyvben is. Ezért ezt itt most nem írjuk fel.

Az összes megoldott tesztfeladatban a $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ valószínűségi változókra azt tesszük fel, hogy

$$
\begin{aligned}
E(\beta_1) &= 3000, \quad & E(\beta_2) &= 30000, \quad & E(\beta_3) &= 15000,\\
D(\beta_1) &= 1000, \quad & D(\beta_2) &= 10000, \quad & D(\beta_3) &= 5000,
\end{aligned}
$$

és az előírt megbízhatósági szint minden esetben $p = 0,9$.

A következő két táblázat a tesztfeladatok egy sorozatának eredményeit adja meg. Mindkét táblázatban az első három oszlop a korrelációs együtthatókat tartalmazza, a következő két oszlop pedig a célfüggvény két különböző együttes valószínűségeloszlás alkalmazása melletti optimum értékét adja meg. Az első táblázat esetében ezek a Dirichlet és a normális eloszlások, míg a második táblázat esetében a gamma és a normális eloszlások. Az utolsó oszlopban mindig a két optimum érték közti eltérés százalékos értéke található a normális eloszláshoz tartozó optimum érték százalékában.

1. táblázat

corr(β_1, β_2)	corr(β_1, β_3)	corr(β_2, β_3)	Dirichlet	normális	eltérés
$-0,41$	$-0,44$	$-0,47$	23540	22407	$5,06\%$
$-0,20$	$-0,21$	$-0,22$	24361	22382	$8,84\%$
$-0,13$	$-0,14$	$-0,14$	24531	22374	$9,64\%$

2. táblázat

corr(β_1, β_2)	corr(β_1, β_3)	corr(β_2, β_3)	gamma	normális	eltérés
$0,0$	$0,0$	$0,0$	23396	22345	$4,70\%$
$0,1$	$0,3$	$0,4$	23085	22200	$3,99\%$
$0,2$	$0,6$	$0,8$	22689	21776	$4,19\%$
$0,8$	$0,8$	$0,8$	22166	21514	$3,03\%$
$0,98$	$0,98$	$0,98$	21131	20775	$1,71\%$

Az eddigi vizsgálataink azt mutatják meg, hogy az együttes valószínűséggel korlátozott sztochasztikus programozási feladatok optimuma mennyire robusztus a feladatokban szereplő véletlen mennyiségek különböző eloszlástípusaira nézve. Megjegyezzük azonban, hogy a két táblázat eredményeiből az is leolvasható, hogy mekkora eltérés lehet az optimum értékek közt akkor is, ha a többdimenziós együttes eloszlás jellegét nem, hanem csak a komponensek közti korrelációkat változtatjuk meg. Így például, ha a legnegatívabban korrelált komponensekkel bíró együttes normális eloszlás eredményét (1. táblázat első sora) viszonyítjuk a legpozitívabban korrelált komponensekkel bíró együttes normális eloszlás eredményéhez (2. táblázat utolsó sora), az eltérés a kisebbik optimum érték százalékában $7,86\%$. Ugyanez a legnegatívabban korrelált komponensekkel (1. táblázat első sora) és a legkevésbé negatívan korrelált komponensekkel bíró (1. táblázat utolsó sora) Dirichlet-eloszlás esetében $4,04\%$. Végül a független komponensekkel bíró (2. táblázat első sora) és a legpozitívabban korrelált komponensekkel bíró (2. táblázat utolsó sora) gamma eloszlás esetében $10,72\%$.

Hasonló vizsgálatokat végzett Chopra és Ziemba ([1]) a portfólió választás problémájára. Megállapították, hogy az optimális portfólióra a legnagyobb hatással a véletlen hozamok várható értékei vannak, második legnagyobb hatással a szórásnégyzeteik és csak harmadsorban vannak hatással a hozamok közti kovarianciák. A cikkünkben nem vizsgáltuk az együttes valószínűséggel korlátozott sztochasztikus programozási feladatokban szereplő véletlen mennyiségek várható értékei, illetve szórásnégyzetei megváltoztatásának a hatását, mert azt triviálisnak tartottuk. Arra azonban kevésbé lehetett számítani, hogy csupán a kovarianciák változtatásával is ilyen nagy százalékkal meg tudnak változni a feladatok optimum értékei.

5. További kutatási lehetőségek

További érdekes kutatási lehetőség lehet az, hogy hogyan változik meg egy együttes valószínűséggel korlátozott sztochasztikus programozási feladat optimum értéke az együttes eloszlás megváltoztatásával, még ha bizonyos számú momentumot nem is változtatunk meg. Az is érdekes kérdés lehet, hogy egyre több momentum rögzítésével maximum mennyire különbözhetnek a különböző eloszlásokkal kapott optimum értékek, valamint, hogy ez a feladat egyéb szerkezeti tulajdonságaitól (például, változók száma, korlátozások száma, konstansok nagysága, speciális struktúra stb.) hogyan függ. Még újabban a jelen cikk szerzője és Kovács Edith konferencia előadásokban megmutatta, hogy kopula függvények által generált függőségi rendszerrel bíró együttes valószínűségeloszlások alkalmazása ugyancsak jelentős hatással lehet az együttes valószínűséggel korlátozott sztochasztikus programozási feladatok optimum értékére. Ezért is és azért is, mert a kopula függvények egyre szélesebb körben nyernek alkalmazást a sztochasztikus modellezésben, fontos lehet ebbben az irányban is kutatásokat folytatni.

Hivatkozások

[1] Chopra, V.K. and Ziemba, W.T.: *The Effect of Errors in Means, Variances, and Covariances on Optimal Portfolio Choice*, Journal of Portfolio Management, Vol. **19** (1993), 6–11.

[2] Prékopa, A.: *Stochastic Programming*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1995)

[3] Prékopa, A. and Szántai, T.: *A new Multivariate Gamma Distribution and its Fitting to Empirical Data*, Water Resources Research, Vol. **14** (1978), 672–678.

[4] Szántai, T.: *A Computer Code for Solution of Probabilistic constrained Stochastic Programming Problems*, in: Numerical Techniques for Stochastic Optimization, ed. Yu. Ermoliev and R. J–B Wets, Springer Series in Computational Mathematics **10** (1988),229–235.

[5] Szántai, T.: *Probabilistic constrained programming and distributions with given marginals*, In: Distributions with given marginals and moment problems, Proceedings of the 3rd Conference on „Distributions with Given Marginals and Moment Problems", held at Czech Agricultural University, Prague, Czech Republic, September 2–6, 1996, eds. Benes, V. Stepan, J. Springer, Dordrecht, Netherlands, (1997), 205–210.

[6] Wilks, S. S.: *Mathematical Statistics*, John Wiley & Sons, New York, London (1962).

Szántai Tamás 1946-ban született. Az ELTE TTK alkalmazott matematikus szakán 1969-ben diplomázott. 1970-ben egyetemi doktori címet, 1985-ben kandidátusi, 1995-ben PhD fokozatot szerzett, 2005-ben habilitált a BME TTK Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskolájában, és elnyerte az MTA doktora címet is. 1976-ban Farkas Gyula-díjat, 2012-ben BME József Nádor Emlékérmet és MOT Egerváry Jenő Emlékplakettet kapott. 2000 és 2003 közt Széchenyi Professzori Ösztöndíjas volt. Az aspirantúrájától és az ELTE TTK Operációkutatási Tanszéken töltött 9 évtől eltekintve mindig a BME-n oktatott.

Jelenleg a BME TTK Differenciálegyenletek Tanszék professor emeritusa. Kutatási területei a sztochasztikus modellezés és optimalizálás. Az MTMT szerint 1 könyv, 4 könyvrészlet, 47 tudományos cikk, 25 konferencia közlemény szerzője, melyekre összesen 447, köztük 391 független hivatkozást kapott. A Commettee on Stochastic Programming vezetőségi tagja volt 1992–2001 között, a BJMT tagja 1969-től, a MOT alapító tagja 1991-től, az NJSZT tagja 1970-től, az MTA Operációkutatási Bizottság tagja 1993-tól és az MTA köztestületi képviselője volt 1995-2001 között.

SZÁNTAI TAMÁS
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Matematika Intézet, Differenciálegyenletek Tanszék
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3–9.
email: szantai@math.bme.hu

PROBABILISTIC CONSTRAINED PROGRAMMING AND DISTRIBUTIONS WITH GIVEN MARGINALS

Tamás Szántai

The paper examines the effect of the joint probability distributions with different marginals on the optimum value of a probabilistic constrained stochastic programming problem. The investigated joint probability distributions are the multivariate normal, the Dirichlet and a multivariate gamma probability distributions. A real life test problem is formulated. Numerical results of this problem show that the optimum values may differ significantly when changing the joint probability distribution of the random parameters involved in the problem. Further interesting research directions are also formulated at the end of the paper.

This paper is a Hungarian version of the paper published by the author in the conference volume [5].

Alkalmazott Matematikai Lapok **35** (2018), 67–79

RÖVIDEN A PERT VALÓSZÍNŰSÉGI MEGKÖZELÍTÉSÉRŐL

MONHOR DAVAADORZSÍN

Amerikában az 1950-es években kezdtek el dolgozni a Polaris Program néven ismertté vált rakétafejlesztési projekten. Ennek keretében született meg a PERT (Program Evaluation and Review Technique) modell, amely a bonyolult projektek tervezésének, összehangolásának és irányításának matematikai modellezésére, valamint ezen belül a véletlen tevékénységi idők megfelelő kezelésére és koordinálására szolgál. A „The US Navy Special Projects Office" fejlesztési programjainak tervezésével és a munka folyamatának kiértékelésében alkalmazandó matematikai módszerek tanulmányozásával, illetve fejlesztésével foglalkozó munkacsoport 1958. január 27-én kezdte meg munkáját, ezért ehhez a dátumhoz kötik a PERT-modell kidolgozásának a kezdetét.

A modellről Malcolm, Roseboom, Clark és Fazar [15] 1959-ben tudományos cikket publikált, az azóta eltelt idő alatt pedig a PERT-modell az operációkutatás egyik fontos eszközévé vált. Az elmúlt közel 60 év alatt terjedelmes irodalom foglalkozott a PERT-tel. A tanulmányok túlnyomó része a PERT numerikus, menedzsment és modellműködtetési aspektusával foglalkozott. Azonban a PERT valószínűségi aspektusával viszonylag kevesen foglalkoztak, bár szép számmal akadnak valószínűségelméleti szempontú tanulmányok is. Jelenleg nincs általánosan elfogadott modell vagy egységes elméleti koncepció a PERT valószínűségelméleti tanulmányozásában, vannak azonban különböző hozzáállások és kezdeményezések.

Jelen dolgozat a PERT-modell valószínűségi megközelítését röviden összefoglaló közlemény, valamint néhány megjegyzésben ismerteti a PERT-modell keletkezésének történetét is.

1. Bevezetés

Az 1950-es években az iparilag, gazdaságilag fejlett országokban – mind a hadiiparban, mind a polgári célú ipari-gazdasági tevékenységekben – felvetődött a többkomponensű, bonyolult projektek tervezése, összehangolása és irányítása matematikai modellezésének és azon belül az időoptimalizálási problémák megoldásának kérdése. E problémakör megoldására két modell született: a CPM (Critical Path Method, magyarul *kritikus út módszer*) és a PERT (Program Evaluation and Review Technique, magyarul *projektek kiértékelési és újratervezési módszere*).

Az azóta eltelt 60 év alatt mindkét modell széles körű gyakorlati alkalmazást nyert, a CPM és a PERT az operációkutatás egyik fontos eszközévé vált.

Egy nagy projektet számos kis részprojektre, vagyis tevékenységre lehet felbontani. E tevékenységek között a megelőzési relációkat úgy szemléltetjük, hogy a tevékenységeket egy irányított gráf éleivel azonosítjuk. Az összes egy csúcsba irányuló tevékenységet be kell fejezni azelőtt, mielőtt bármelyik kifelé irányított tevékenységet elkezdenénk. Ily módon egy projektet alkotó különféle tevékenységek végrehajtásának egymástól való függőségét leíró gráf a következőképpen definiálható.

1.1. Definíció. Az alábbi három tulajdonsággal rendelkező irányított $(N, \mathcal{A})$ gráfot projektgráfnak nevezzük, ha

(i) létezik $s \in N$ úgynevezett kezdőpont és $s' \in N$ úgynevezett végpont;

(ii) az $(N, \mathcal{A})$ irányított gráf hurokmentes;

(iii) minden $x \in N - \{s, s'\}$ esetén van s-ből x-be és x-ből s'-be vezető út.

Ha egy $(N, \mathcal{A})$ projektgráf minden éléhez hozzá van rendelve egy nemnegatív valós szám, akkor a gráfot CPM tervütem hálónak, s e számokat a tevékenységek végrehajtási időinek, vagyis röviden tevékenységi időknek nevezzük.

Ha egy $(N, \mathcal{A})$ projektgráf minden éléhez hozzá van rendelve egy nemnegatív folytonos valószínűségi változó, és a különböző élekhez tartozó valószínűségi változók egymástól függetlenek, akkor a gráfot PERT tervütem hálónak nevezzük. E valószínűségi változókat (véletlen) tevékenységi időknek nevezzük.

A sztochasztikus programozási problémát Prékopa András általában a következőképpen szokta megfogalmazni: a sztochasztikus programozási problémák megfogalmazásakor determinisztikus problémákból indulunk ki, melyek általában lineáris vagy nem lineáris matematikai programozási feladatok. Észrevesszük, hogy a feladatban szereplő bizonyos mennyiségek a valóságban nem determinisztikusak, hanem valószínűségi változók, és emiatt ebben a már megfogalmazott formában nem megfelelők. Olyan új feladatot (modellt) fogalmazunk meg, amelyben már szerepet játszik a véletlen mennyiségek valószínűségi viselkedését leíró valószínűségeloszlás is. Ez az új feladat általában egy matematikai programozási feladat, amelyet sztochasztikus programozási feladatnak nevezünk. Azt a feladatot pedig, amelyből kiindultunk, determinisztikus alapfeladatnak nevezzük (Prékopa és Szántai [25]). Úgy látszik, hogy ez az elv nem csak a sztochasztikus programozási feladatokra korlátozódik, hanem más sztochasztikus optimalizálási modellezésre is, például a PERT-modellre is kiterjeszthető.

A CPM és a PERT tervütem hálókkal kapcsolatos fenti definíciók formailag eltérnek a szokásos megfogalmazásoktól. Az eltérés csupán annyi, hogy a Prékopa-féle gondolkodásmód figyelembevételével a Klafszky [12] által megadott CPM és PERT tervütem hálókra vonatkozó definíciókat kicsit módosítottuk.A definíciókból látható az is, hogy a CPM-modell felfogható a PERT tervütem hálóra vonatkozó sztochasztikus optimalizálási feladat determinisztikus alapfeladataként.

A Prékopa-féle megfogalmazás egyszerűen és világosan megmutatja a sztochasztikus programozási modellalkotási folyamatot, s így módszertani jelentőséggel bír.

A sztochasztikus PERT-tel sokan foglalkoztak, a tanulmányok túlnyomó része a PERT-probléma számítási, menedzsmenti, szervezési, illetve modellműködtetési aspektusára és a PERT által generált determinisztikus modellekre vonatkozik, mely területeknek terjedelmes irodalma van. Ezekhez a problémakörökhöz képest a PERT valószínűségi aspektusával viszonylag kevesen foglalkoztak, bár szép számmal vannak valószínűségelméleti szempontú tanulmányok is. Azonban a PERT-modell valószínűségi vonatkozásai még mindig nem tisztázottak kielégítő módon.

Jelen dolgozat a PERT-modell valószínűségelméleti vonatkozásainak rövid áttekintésével foglalkozik, miközben néhány megjegyzés erejéig kitér a modell kialakulásának történetére is.

2. Megjegyzések a PERT-modell keletkezésének történetéhez

A PERT- és a CPM-módszer keletkezésének története általános értelemben többé-kevésbé ismert. Ezzel kapcsolatban a következő megjegyzést szokták említeni. Az 1950-es években, Amerikában a Polaris Program néven ismertté vált rakétafejlesztési projekt megvalósítása során dolgozták ki a PERT-módszert. Ezzel körülbelül egy időben fejlesztettek ki hasonló módszert az E. I. duPont de Nemoursnál (Newark, Delaware, USA) egy kémiai gyár tervezése kapcsán.

Azonban az ilyen típusú megjegyzések túlságosan általánosak, hiányoznak belőlük olyan konkrét, pontos információk, amelyek elősegíthetnék annak megértését, hogy mi volt a modellalkotást alapvetően meghatározó tényező, s egészen konkrétan hogyan is született a PERT-modell és egyéb hasonló modellek.

A Bolyai János Matematikai Társulat *Az operációkutatás matematikai módszerei* című jegyzetsorozata keretén belül 1969-ben jelent meg Klafszky Emil *Hálózati folyamok* című könyve [12], amely – tudomásom szerint – az első magyar nyelvű mű, amely a hálózati folyamokkal foglalkozik. A könyv konkrét példákkal illusztrálva jól tárgyalja a hálózati folyamok alapvető témaköreit és azok alkalmazásait, s mára már klasszikussá vált. A könyv nyolcadik, *Tervütemezési módszerek* című fejezete alapvetően a CPM-módszerrel foglalkozik, s az utolsó rövid szakasza ad bevezetést a PERT-modellezésbe. Azonban ennek a szakasznak a történelmi megjegyzései nagy részben keveredtek a CPM-módszer keletkezésének történetével. A *Sztochasztikus időtervezési feladat* (PERT) című szakasz végén található rövid megjegyzésben a következő olvasható: „*A CPM (Critical Path Method) és a PERT (Program Evaluation and Review Technique) modelleket az 1950-es évek első felé-*

ben a RAND corporation-nál dolgozták ki. Kezdetben ezeket titkos (secret) eredményekként kezelték, így nem hozták nyilvánosságra. Az első publikációk, amelyek a probléma megoldását nyilvánosságra hozták, Ford [6] és Minty [18] dolgozatai voltak." Mivel ezen megjegyzések kivételével a PERT-ről szóló magyar nyelvű irodalom eddig nem foglalkozott a PERT történetével, azért a későbbiekben is hasznos lehet a történelmi megjegyzések pontosítása, bár valójában csak egy apró észrevételt szeretnék ezzel kapcsolatban megfogalmazni. Ahogyan látni fogjuk a következő szakaszban, a PERT-et nem a RAND Corporationnál dolgozták ki. Ford [6] és Minty [18] dolgozatai nem foglalkoztak a PERT-tel, hanem egyértelműen a CPM-módszerhez kapcsolhatók.

Kall és Wallace [10] könyvében található egy általános megjegyzés: „*...When PERT was introduced in 1959, it was seen as a method for analysing projects with stochastic activity durations. However, the way in which the randomness was treated quite primitive. Therefore, despite historical setting, many people today view PERT as deterministic approach, simply disregarding what the original authors said about randomness.*"

A sztochasztikus programozásban Peter Kall és Stein Wallace ismert, jó szakértők, s tanulságos azon észrevételük, hogy a PERT-re sokan determinisztikus megközelítésként tekintenek. Az alkalmat megragadva megjegyezzük, hogy személyes beszélgetésünk során Prékopa András is úgy vélte, hogy a PERT valószínűségi vonatkozásaiban egyelőre még nincs lényeges eredmény.

Viszont az eredeti PERT valószínűségi megközelítésre vonatkozóan Kall és Wallace „*...was treated quite primitive*". kritikáját kicsit túlzottnak tartom, mert a PERT alkotói viszonylag jól és gyakorlatiasan oldottak meg igen komplikált és nagyméretű projektekben felmerülő, bonyolult véletlen jelenséget. Az eredeti PERT-tervütemháló 3000 körüli számú tevekénységet tartalmazott. Akkoriban ilyen méretnél a véletlenszerűség modellezése igen nehéz feladat lehetett, hiszen a PERT-modell születési idejében a sztochasztikus optimalizálás még gyerekcipőben járt.

A *The Fleet Ballistic Missile Program* (rövidítve *Polaris* vagy *Polaris program*) nevű hadiipari projekt szervezési és kivételezési munkáit az amerikai haditengerészetben kezdték el, és e munka irányítójává William Francis Rabornt (1905-1990), a haditengerészet tisztjét nevezték ki 1955. november 8-án. Raborn admirális szakmailag tapasztalt tengerész, mérnök és műszaki menedzser, ezen túl igen jó szervező egyéniség volt. Ezt követően 1955. november 17-én létrehozták a *The US Navy 'Special Projects Office'*-t (SPO). Az SPO célja a tengeralattjáróról indított ballisztikus rakétarendszer fejlesztése volt. Az ilyen típusú rakétákat nevezik polarisnak, innen ered a *Polaris program* elnevezés. Az 1956. év folyamán az SPO bonyolíttatta a projekt tervezésével, összehangolásával és irányításával kapcsolatos előkészítési, illetve szervezési munkát, és később létrejött egy fejlesztési csoport, amelynek tagjai az SPO tagjaiból, valamint más tanácsadó és fejlesztő cégbeli munkatársakból álltak, feladatuk a Polaris program tervezése, koordinálása, irányítása és kivételezése volt.

A PERT, *Program Evaluation Research Task*, Summary Report Phase 1 [24] kutatási beszámoló a következő mondatokkal kezdődik: „*This report summarizes the work and results of the first phase of Project PERT (Program Evaluation Research Task). The project began on 27 January 1958 with the purpose of studying the application of statistical and mathematical methods to the planning, evaluation, and control of the program of the Navy Special Projects Office...*" Ebből látható, hogy akkoriban a PERT elnevezés a Program Evaluation Research Task kifejezésből képzett betűszó volt. Ez az elnevezés később a *Project Evaluation and Review Technique*-re módosult, de a PERT betűszó ettől nem változott meg.

3. A PERT eredeti valószínűségi megközelítéséről

A PERT kezdeményezői által javasolt valószínűségi megközelítést és annak modellalkotási hátterét a Special Projects Office, Bureau of Naval Weapons Department of the Navy, Washington, D. C. 1958. júliusi *Program Evaluation Research Task Summary Report Phase 1* című 35 oldalas kutatási beszámolóból és az 1959-ben Malcolm et al. [15] által közzétett tudományos cikkből ismerhetjük meg korrekt módon. A [15] cikkben Malcolm et al. az alábbiakat írják:

> *The PERT team felt that the most important requirement for project evaluation at SPO[Special Projects Office] was the provision of detailed, well-considered estimates on the time constraints on future activities. Hence it seemed imperative that each planned acivity, no matter how far into the future, a carefully considered time estimate must be obtained. The qualifications of a person making such an estimate must include a thorough understanding of the work to be done. Furthermore, the time estimates for some activities such as a research and development, are highly uncertain. This uncertainity must be exposed. Ideally for each activity we should have a probability distribution of the times that the activity might require as explained below, we focused attention on a few parameters of the distribution such as the range.*

E szövegkivonat minden egyes mondata egyértelműen leírja azokat a legfontosabb tényezőket, amelyeket mindenképpen figyelembe kellett venniük a modellalkotóknak a PERT tevékenységi idő modellezése során. Azonban a kiegészítés, illetve az elemzés miatt az alábbiakban néhány megjegyzést szeretnék fűzni a szövegkivonathoz. A fentiek alapján némi egyszerűsítéssel elmondható, hogy a PERT-modell eredetileg egy hadiipari kutató és fejlesztő projekt kivételezési idejének optimalizálását célzó sztochasztikus optimalizálási probléma volt, hiszen a valós helyzetből adódóan abból a felismerésből indultak ki, hogy a tevékenységi idők valószínűségi változók. Ezután két alapvető problémát kellett megoldani: (i) a tevékenységi idők modellezésére konkrétan milyen valószínűségi változók a legalkalmasabbak?

(ii) a tevékenységi idők eloszlásának ismeretében hogyan határozzuk meg az egész projekt várható időtartamát?

Azonos körülmények között egymástól függetlenül újra és újra ismétlődő jelenségekben (pl. tömeggyártásban, statisztikai minőség-ellenőrzésben, mérési hibák matematikai feldolgozásában és egyebekben) a statisztikai tesztelés, a paraméterbecslés és egyéb statisztikai döntést támogató statisztikai eljárások jól bevált eszközök. Azonban a kutató-fejlesztő projektek tevékenységei – különösen a Poláris program esetén – nem ilyen ismételhető jelenségek. Éppen ezért, az első probléma megoldásában nem voltak alkalmazhatók az eloszlásfüggvény illesztésére vonatkozó statisztikai módszerek, következésképpen szakértői véleményekre támaszkodva, azaz szubjektív valószínűségi megfontolás alapján döntöttek a béta-eloszlás mellett. Ezt a véleményt támasztják alá a fent említett történelmi tények és a Malcolm et al. [15] azon visszaemlékezése, amely szerint „*this result was derived under the assumption that the beta distibution is an adequate model of the distribution of an activity time. The choice of the beta distribution was dictated by intuition because empirical evidence is lacking.*"

A második problémát, az egész projekt várható időtartamának meghatározását úgynevezett „three-time estimation" bevezetésével oldották meg. Ez a három idő egy tevékenységi időre vonatkozó legrosszabb (leghosszabb) idő, azaz pesszimista időbecslés, a legjobb esetre számító idő (a legrövidebb idő), vagyis optimista időbecslés és a legvalószínűbb idő. Egy adott tevékenység esetén ezt a három időt szakértők véleménye alapján határozták meg. Ha az optimista idő a, a pesszimista idő b, és a legvalószínűbb idő m, akkor a tevékenységi idő eloszlása az $[a, b]$ intervallumon az m módusszal rendelkező béta-eloszlás lesz. Ezután a várható tevékenységi időt $E(t) = \frac{a+4m+b}{6}$ képlettel számították. Ily módon a PERT-modellben az egész projekt várható időtartamának becslése egy determinisztikus tervütem feladattá alakult át.

Az $E(t) = \frac{a+4m+b}{6}$ képlet háttere a következőképpen interpretálható.

$$E(t) = \frac{a+4m+b}{6} = a\frac{1}{6} + m\frac{4}{6} + b\frac{1}{6},$$

ami azt jelenti, hogy az optimista idő, a legvalószínűbb idő és a pesszimista idő rendre $\frac{1}{6}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{1}{6}$ valószínűségi súllyal számított várható értéke megadja a várható tevékenységi időt.

A 2. fejezet végén említettük, hogy a PERT elnevezés eredetileg a *Program Evaluation Research Task* kifejezésből képzett betűszó volt. De eredetileg miért szerepelt a *Research Task* (kutatási feladat) szó a PERT elnevezésben? Már a kezdet kezdetén is, a PERT-módszer nem csak egy nagy kutató-fejlesztő projekt kezelésére, hanem egy teljesen új típusú hadiipari fejlesztés levezénylésére lett létrehozva. Ezért a projekt megvalósításában a tevékenységi idők, illetve időtartamok teljes mértékben előreláthatatlanok, azaz tudományos szakkifejezéssel élve, valószínűségi változók voltak. A projekt új típusú menedzsmentjének modellalkotásában ezeknek a véletlen időtartamoknak a matematikai kezelése egy kutatási feladatként merült fel. Ily módon a *Research Task* szó használata természetes volt, viszont a kifejlesztett modell alkalmazása során a már felállított PERT-modell adatainak és paramétereinek újbóli és újbóli kiértékelésére, illetve módosítására volt szükség. Valószínűleg ezért cserélődött ki a „*Research Task*” a „*Review Technique*” kifejezésre.

4. PERT valószínűségi megközelítése napjainkban: rövid összefoglaló

A PERT-tel foglalkozó valószínűségelméleti szempontú tanulmányokban vannak különböző hozzáállások, illetve kezdeményezések, azonban jelenleg még nincs általánosan elfogadott modell vagy egységes elméleti koncepció.

Az eredeti PERT általánosításaként a béta-eloszlás helyett más eloszlásokat próbáltak alkalmazni, így például a gamma-eloszlást, az exponenciális eloszlást, a normális eloszlást, a lognormális eloszlást, az egyenletes eloszlást és a háromszög eloszlást is többen javasolták (Charnes, Cooper and Thompson [2], Kamburoski [11], MacCrimmon and Ryavec [14], Mohan, Gopalakrishnan, Balasubramanian and Chandrashekar [19], Martin [16], Monhor [20]). E tanulmányok lényege az volt, hogy a tevékenységi időt reprezentáló valószínűségi változókat valamilyen determinisztikus mennyiségekkel helyettesítették, leggyakrabban a várható értékükkel vagy a legvalószínűbb értékükkel, s ezután determinisztikus időtervezési technikát alkalmaztak. Ennek a hozzáállásnak az az előnye, hogy a CPM-módszer numerikusan jól fejlesztett determinisztikus eljárásai rögtön alkalmazhatóvá válnak. Azonban, a „korai és gyors” determinizálásnak, azaz a tevékenységi idő szintjén történő determinizálásnak az a súlyos ára, hogy a projekt egészében rejlő véletlenszerűséget nem tudjuk kellőképpen figyelembe venni.

Ha egy projekt megvalósítási idejének véletlen létét kellőképpen akarjuk figyelembe venni, akkor a tevékenységi időket nem determinizálhatjuk, hanem az egész projekt megvalósításának idejét modellező valószínűségi változó eloszlását vagy legalább annak fontos paramétereit kellene tudnunk figyelembe venni.

Tegyük fel, hogy az $(N, \mathcal{A})$ PERT-tervütemháló kezdőpontjából a befejező pontjába vezető összes utat meghatározzuk, s ezt a halmazat Π-vel jelöljük. Jelölje továbbá $\lambda(\pi_k)$, $k = 1, 2, \ldots, q$, a π_k út véletlen hosszát, azaz a π_k úthoz tartozó tevékenységi idők összegét. Ez azt jelenti, hogy $\lambda(\pi_k)$ nem más, mint a π_k út megvalósítási idejét leíró valószínűségi változó.

Ekkor a

$$\zeta = \max\left\{\lambda(\pi_k) : \pi_k \in \Pi\right\} \tag{1}$$

valószínűségi változót az $(N, \mathcal{A})$ PERT-tervütemháló megvalósítási idejének (completion time) szokás nevezni.

A PERT-tervütemháló kezdőpontjából befejező pontjába vezető összes út száma általában nagyon nagy, és az egyes utak közös éleiből (tevékenységeiből) adódó sztochasztikus függőségek miatt az (1) megvalósítási idő valószínűségi eloszlásának numerikus meghatározása – ha egyáltalán lehetséges – rendkívül nehéz. Egyébként az említett nagy számú út létezésén túl, ha az egyes utakat reprezentáló valószínűségi változók nem függetlenek, azaz sztochasztikus függőségek állnak fent közöttük, akkor csupán csak azok maximumai eloszlásának numerikus meghatározása is nagyon nehéz feladat. Így érthető, hogy a kutatások főiránya a megvalósítási idő várható értékének, valószínűségi eloszlásának approximációja és korlátai meghatározása lett (Birge és Maddox [1], Devroye [3], Dodin [4], Kleindorfer [13], Fulkerson [7], Iida [9], Meilijson és Nádas [17], Monhor [21], Prékopa és Long [26], Prékopa [27], Prékopa, Szántai és Long [28], Robillard és Trahan [29], Szántai [32], Sculli [30]).

Prékopa András és Long [25] kiderítette, hogy ha a tevékenységi idők alulról és felülről korlátos valószínűségi változók, akkor e valószínűségi változók bármilyen relációja esetén viszonylag kevés a kritikus útként a szóba jöhető utak száma. Továbbá közöltek két olyan algoritmust, melyek segítségével a kritikusként szóba nem jöhető utakat eliminálni lehet. Ez az eredmény nemcsak a megvalósítási idő tekintetében, hanem a PERT tanulmányozásának és alkalmazásának több más területén is igen hasznosnak bizonyult (Szántai, Prékopa és Long [27], Szántai [31]).

A PERT megvalósítási idejére vonatkozó különféle közelítések és korlátok hasznos információkkal szolgálnak, azonban ezek nem tudnak azonosítani egy konkrét utat, amely a CPM kritikus út sztochasztikus analógja lenne. E hátrány kiküszöbölésével eddig nemigen foglalkoztak, kivéve egy-két esetet (Elmaghraby [5], Monhor [22]).

Egy rögzített π_k, $k = 1, 2, \ldots, q$ esetén a

$$P\left(\lambda(\pi_k) > \lambda(\pi_{k'}), \quad \forall \pi_{k'} \in \Pi, \pi_k \neq \pi_{k'}\right) \tag{2}$$

valószínűséget Elmaghraby [5] a π_k út kritikussági indexének (*path criticality index*) nevezte el. Nyilván az az út, amelyre a (2) valószínűség maximális, valószínűségi értelemben kritikus út lenne. Ily módon Elmaghraby a CPM determinisztikus kritikus út PERT-beli sztochasztikus megfelelőjét próbálta meg definiálni, s ebben az értelemben ez a próbálkozás egy figyelemre méltó kezdeményezés volt. Azonban, ez a megközelítés két ok miatt sem járható út. Először is, többdimenziós korrelált valószínűségi változók esetén a (2) valószínűség numerikus meghatározása közismerten igen nehéz feladat. Ezért a nagyon magas dimenzió és a korreláltság miatt a π_k út hosszát az összes többi út hosszával összehasonlító valószínűség, azaz a (2) valószínűség numerikus meghatározása vállalhatatlan feladat. Továbbá, a (2) elméletileg sem tud a kitűzött célnak megfelelő valószínűséget eredményezni, hanem annál sokkal kisebb valószínűséget tudna csak adni, amint ez rögtön látható Prékopa és Long [26] eredményéből. Monhor [22] a CPM kritikus út PERT sztochasztikus megfelelőjének egy lehetséges változatával foglalkozott. A CPM esetén az utak hosszainak halmaza nyilván nemnegatív valós számok halmazaként fogható fel, viszont a PERT esetén a valószínűségi változók halmazáról van szó. A halmazstruktúra szemszögéből nézve az első esetben, azaz a CPM esetén a valós számok rendezési relációja révén a determinisztikus utak (pontosabban az utak hosszai) egy teljesen rendezett halmaz. Ezzel szemben valószínűségi változók között nincs ilyen természetes rendezési reláció, két valószínűségi változó szokásos maximuma egy új valószínűségi változót eredményez, más szóval a $max(.,.)$ nem egy bináris reláció, hanem egy bináris művelet. Ezért a PERT megvalósítási ideje nem tud egy olyan konkrét utat adni, amelynek hossza a projekt megvalósítási ideje lenne. Erre az észrevételre alapozva Monhor [22] definiált a $\{\lambda(\pi_k) : k \in \Pi\}$ halmazon egy rendezési relációt, azon feltétel mellett, hogy a $\lambda(\pi_k)$, $k \in \Pi$ utak hosszai többdimenziós normális eloszlásúak. A definícióban csak a korrelált kétdimenziós normális eloszlás valószínűsége szerepel, s annak numerikus meghatározása nem annyira nehéz. Továbbá erre alkalmazható egyszerű valószínűségi korlátok is vannak, pl. Monhor [23]. Elfogadható az a feltétel is, hogy a véletlen utak hosszainak együttes eloszlása többdimenziós normális, hiszen ha a tevékenységi idők nem normális eloszlásúak, akkor is a központi határeloszlás tétel alapján az utak hosszait többdimenziós normális eloszlással közelíthetjük.

Szántai [33] a valószínűséggel korlátozott programozásra alapozva a PERT egy új modelljét állította fel. Ebben a modellben a tevékenységi időket nem determinizálta, hanem ezeket a véletlen időket előírt valószínűségi szinten feltételként szerepeltette, és a projekt időtartamát minimalizálandó célfüggvényként kezelte. Szántai [33], Gouda és Szántai [8] numerikusan is tanulmányozták a modellt, illetve a modellt alkalmazták mind többdimenziós normális, mind Dirichlet-eloszlású tevékenységi idők feltételezése mellett, s érdekes, a gyakorlatban is jól értelmezhető eredményeket értek el.

5. Záró megjegyzések

Ahogyan a harmadik szakaszban említettük, a PERT-modell megalkotásával foglalkozó kutató-fejlesztő munka hivataloson 1958. január 27-én kezdődött. Ez azt jelenti, hogy a folyó év a PERT megszületésének 60. évfordulója – többek között ez adta jelen írás elkészítésének gondolatát. Ezen túl, az Alkalmazott Matematikai Lapok e különszáma Prékopa András professzorom tiszteletének van szentelve, aki jelentősen járult hozzá a PERT valószínűségi aspektusai tanulmányozásához.

A sztochasztikus PERT egy sokoldalú, terjedelmes irodalommal rendelkező terület, ily módon e terület összefoglalása meghaladná szerény erőmet. Ezért egy szűkebb részterületre, a PERT valószínűségi megközelítésére, azon belül is tovább szűkítve, a determinisztikus kritikus út sztochasztikus megfelelőjének kereséséhez direkt, vagy indirekt módon sorolható témakörökre szorítkoztam a jelen dolgozatomban.

6. Köszönetnyilvánítás

A szerző köszönettel tartozik egy anonim bírálónak, aki a jelen dolgozat megfogalmazását nyelvileg javította néhány helyen.

Hivatkozások

[1] Birge, J. R. Maddox, M. J.: *Bounds on expected project tardiness*, Operations Research **43** (1995), 838–850.

[2] Charnes, A. Cooper, W., Thompson, G.: *Critical path analysis via chance constrained and stochastic programming*, Operations Research **12** (1964), 460–470.

[3] Devroye, L. P.: *Inequalities for the Completion Times of Stochastic PERT Networks*, Mathematics of Operations Research **4** (1979), 441–447.

[4] Dodin, B. M.: *Bounding the Project Completion Times in PERT Networks*, Operations Research **33** (1985), 862–881.

[5] *Elmaghraby, S. E. E.*: *On criticality and sensitivity in activity networks*, European Journal of Operational Research **127** (2000), 220–238.

[6] Ford, L. R.: *Network flow theory*, Rand Corp., 1956.

[7] Fulkerson, D. R.: *Expected critical path lengths in PERT networks*, Operations Research **10** (1962), 808–817.

[8] Gouda, A., Szántai, T.: *On numerical calculation of probabilities according to Dirichlet distribution*, Annals of Operations Research **177** (2010), 185–200.

[9] Iida, T.: *Computing bounds on project duration distributions for stochastic PERT networks*, Naval Research Logistics **47** (2000), 559–580.

[10] Kall, P., Wallace, S. W.: *Stochastic Programming*, John Wiley&Sons, Chichester, 1994.

[11] Kamburoski, J.: *Normal distributed activity durations in PERT networks*, Journal of the Operational Research Society **36** (1985), 1051–1057.

[12] Klafszky, E.: *Hálózati folyamok*, Az operációkutatás matematikai módszerei c. tanfolyam jegyzete, szerk. Prékopa András, Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, 1969.

[13] Kleindorfer, G. B.: *Bounding distributions for stochastic acyclic networks*, Operations Research **19** (1971), 1586–1601.

[14] MacCrimmon, K. R. Ryavec, C. ,A.: *An Analytical Study of the PERT Assumptions*, Operations Research **12** (1964), 17–37.

[15] Malcolm, D. G., Roseboom, J. H., Clark, C. E., Fazar, W.: *Application of a Technique for Research and Development Program Evaluation*, Operations Research **7** (1959), 646–669.

[16] Martin, J.: *Distribution of the Time Through a Directed, Acyclic Network, Distribution of the Time Through a Directed, Acyclic Network*, Operations Research **13** (1965), 46–66.

[17] Meilijson, I., Nádas A.: *Convex Majorization with an Application to the Length of Critical Paths*, Journal of Applied Probability **16** (1979), 671–677.

[18] Minty, G. J.: *Comment on the Shortest-Route Problem*, Operations Research **5** (1957), p. 724.

[19] Mohan, S., Gopalakrishnan, H. Balasubramanian, A. Chandrashekar M.: *A lognormal approximation of activity duration in PERT*, Journal of the Operational Research Society **58** (2007), 827–831.

[20] Monhor, D.: *On the application of concentration function to the PERT*, Math. Operationsforsch. u. Statist., Ser., Optimization **14** (1983), 237–244.

[21] Monhor, D.: *An approach to PERT: Application of Dirichlet Distribution*, Math. Operationsforsch. u. Statist., Ser. Optimization **18** (1987) 113–118.

[22] Monhor, D.: *A new probabilistic approach to the path criticality in stochastic PERT*, Central European Journal of Operations Research **19** (2011), 615–633.

[23] Monhor, D.: *Inequalities for correlated bivariate normal distribution*, Probability in Engineering and Informational Sciences **27** (2012), 115–123.

[24] *PERT: Program Evaluation Research Task*, Summary Report Phase **1**, Special Projects Office, Bureau of Naval Weapons, Department of the Navy, Washington, D. C. July 1958.

[25] Prékopa A., Szántai T.: *Többlépcsős sztochasztikus programozási modell tározórendszer irányítására*, Hidrológiai Közlöny **1** (1980), 7–14.

[26] Prékopa A., Long J.: *New Bounds and Approximations for the Probability Distribution of the Length of Critical Path*, RUTCOR Research Report (1992), 16–92.

[27] Prékopa, A.: *Stochastic Programming*, Kluwer Academic Publishers, 1995.

[28] Prékopa, A., Szantai T., Long. J.: *New bounds and approximations for the probability distribution of the length of the critical path, in Dynamic stochastic programming*, ed., by K. Marti., Y. Ermolev and G. Pflug, Springer (2004), 293–320.

[29] Robillard, P., Trahan, M.: *The completion time of PERT networks*, Operations Research **25** (1977), 15–29.

[30] Sculli, D.: *The Completion Time of PERT Networks*, The Journal of the Operational Research Society **34** (1983), 155–158.

[31] Shogan, A. W.: *Bounding distributions for a stochastic pert network*, Networks **7** (1977), 359–381.

[32] Szántai, T.: *PERT alkalmazások*, Aula, Budapest, 2002.

[33] Szántai, T.: *A PERT egy új, sztochasztikus programozási modellje*, Alkalmazott Matematikai lapok **22** (2005).

[34] William Francis Raborn: `www.wikipedia.org/wiki`

Monhor Davaadorzsín mongol születésű magyar matematikus. Egyetemi tanulmányait a Mongol Állami Egyetemen végezte okleveles matematikus, matematikatanárként. Munkahelyei: 1972–1976, 1983–1987: a Mongol Tudományos Akadémia Matematikai Kutatató Intézetében tudományos segédmunkatárs, illetve tudományos munkástárs. 1976–1977: az ELTE Bölcsészettudományi Kar Magyar Nyelvi Lektorátusában magyar nyelvet tanul. 1978–1982: a TMB ösztöndíjasa az MTA SZTAKI-ban. 1988–1991: a KSH SZÜV számítóközpontban matematikus. 1991-től a Soproni Egyetem székesfehérvári Geoinformatikai Karán, illetve az Óbudai Egyetem Alba Regia Műszaki Kar Geoinformatikai Intézetében Egyetemi docens, tanszékvezető, tudományos főmunkatárs, s onnan nem régen nyugdíjba vonult. Közben, 2004-ben Japánban a Kyoto University-n meghívott vendégkutató, 2007-ben a tokiói Hosei University-n vendégprofesszor. Kutatásai fő területe: sztochasztikus optimalizálás, sztochasztikus PERT, valószínűségi egyenlőtlenségek alacsony dimenziós korrelált eloszlásokra vonatkozólag, földkéregmozgás geodinamikai modellezése, geodéziai mérések hibaelmélete, a geodézia és matematika kapcsolatának története. A matematikai tudomány kandidátusa fokozatot 1983-ban szerezte meg. 2 könyv, 3 egyetemi jegyzet és 65 folyóiratcikk szerzője, illetve társszerzője. Idézetek száma 80.

MONHOR DAVAADORZSÍN
Óbudai Egyetem, Alba Regia Műszaki Kar
Geoinformatikai Intézet
8002 Székesfehérvár, Pirosalma u. 1-3.
email: monhor@ella.hu

A SHORT EXPOSITORY OVERVIEW ON PROBABILISTIC APPROACH TO STOCHASTIC PERT

Davaadorjin Monhor

On January 27, 1958, under the direction of The US Navy „Special Projects Office" a research team began to develop a mathematical model for the management of planning and evaluating of the Polaris program. The team developed a new model called „Program Evaluation and Review Technique (PERT)". In 1959 Malcolm et al., [15] published a paper on this model. Since this

publication, PERT has emerged as a successful tool of Operations Research. Over the last 60 years, a voluminous number of papers have been devoted to studies on PERT, and a vast majority of the research has, however, been carried out on the topics of computational, managerial and operational aspects of PERT. The probabilistic nature of the PERT model seems to be still not understood properly, although there has been appeared a number of papers on the topic. The present paper discusses probabilistic aspects of the PERT model in historical setting.

Alkalmazott Matematikai Lapok **35** (2018), 81–124

TÖBBVÁLTOZÓS DISZKRÉT MOMENTUM PROBLÉMÁK ÉS ALKALMAZÁSAIK

MÁDI-NAGY GERGELY

A diszkrét momentum problémák témakörét a 80-as évek végétől Prékopa András kezdte el vizsgálni: megmutatta, hogy a probléma (egy rosszul kondicionált) lineáris programozási feladattal modellezhető. A célfüggvényre tett bizonyos feltételek mellett sikerült a duál megengedett bázisok teljes halmazát az oszlopindexek segítségével leírnia és ez alapján egy numerikusan stabil duál megoldó algoritmust kifejlesztenie. A módszertan lehetőséget nyújtott éles valószínűségi korlátok algoritmikus, illetve képletszerű megadására: ezek jól alkalmazhatóak például eloszlásfüggvény értékeinek becslésére, hálózat megbízhatóságának becslésére, Boole–Bonferroni-típusú korlátok felírására.

A doktori dolgozatomat András témavezetése alatt a diszkrét momentum probléma többváltozós általánosításából írtam. Közös munkánk során, mely a doktori fokozat megszerzése után is folytatódott, a többváltozós eset duál megengedett bázisstruktúráit vizsgáltuk különféle momentumfeltételek mellett, újabb alkalmazásokkal (pl. várható hasznosság becslése) kiegészítve. A többváltozós modellezés segítségével számos alkalmazási területen sikerült az egyváltozós modell eredményeinél erősebb korlátokat adni, illetve lehetőség nyílt vegyes momentumokat használó Boole–Bonferroni-típusú korlátok kidolgozására is.

A cikk közös munkánk eredményeit, és azok továbbfejlesztéseit foglalja össze. A dolgozatot Prékopa András emlékének ajánlom.

1. Bevezetés

1.1. Diszkrét momentum probléma (DMP)

Legyen X egy I tartójú valószínűségi változó, melynek eloszlása nem ismert. Tegyük fel, hogy az X^k hatványok várható értékei viszont ismertek, $k = 1, \ldots, m$. Dolgozatunkban az alábbi *korlátozási momentum probléma* diszkrét, véges tartójú eloszlásokra megszorított változatait vizsgáljuk:

$$\inf(\sup) E[f(X)] = \int_I f(z) dP$$

feltéve, hogy

$$E[X^k] = \int_I z^k dP = \mu_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m,$$

ahol P az ismeretlen, az I, f, μ_k, $k = 0, 1, \ldots, m$ pedig adott.

Momentumokkal kapcsolatos korlátozási feladatok először Bienaymé [3], Chebyshev [12], [13] és Markov [42] dolgozataiban szerepeltek. Korlátozási momentum problémák gyakran merülnek fel a Csebisev-típusú egyenlőtlenségek témakörében: a területen született eredményeknek jó összefoglalását adja Krein és Nudelman [30]. Történeti áttekintést nyújtanak Kjeldsen [29], ill. Prékopa és Alexe [55] dolgozatai.

A 80-as évek végén Prékopa [48], [49], [50], ill. Samuels és Studden [59] egymástól függetlenül vezették be és kezdék el vizsgálni a *diszkrét momentum problémát*, amikor is $I = \{z_0, z_1, \ldots, z_n\}$ véges diszkrét halmaz.

Samuels és Studden a klasszikus megközelítés alapján adtak megoldásokat zárt formulák segítségével, ennek megfelelően módszereik csak kis méretű feladatokra voltak alkalmazhatóak. Ezzel szemben Prékopa egy új lineáris programozási (LP) keretrendszerbe ültette a problémát. Az LP megközelítés segítségével sikerült a DMP-k több fontos esetére általános (és egyszerű) megoldási algoritmust adni, mely segítségével lehetőség nyílt nagy méretű feladatokat is hatékonyan kezelni, másrészt képlettel megadott éles korlátokat kapni.

A DMP tulajdonságai közül az alábbi hármat mindenképp érdemes kiemelni. Egyrészt a véges, diszkrét tartó ismerete a momentum értékeken túl további információt jelent az ismeretlen eloszlásra vonatkozóan. Ennek megfelelően a DMP esetében adott korlátok a klasszikus korlátoknál jóval szorosabbak.

A második fontos tulajdonság, hogy a DMP felírható LP-feladatként. Jelöljük az X valószínűségi változó (ismeretlen) eloszlását az alábbi módon:

$$p_i = P(X = z_i), \qquad i = 0, 1, \ldots, n,$$

és legyen $f(z_i) = f_i$. A DMP-hez tartozó LP-feladat:

$$\begin{aligned} \min(\max) E[f(X)] = f_0 p_0 + f_1 p_1 + \cdots + f_n p_n, &\quad \text{feltéve, hogy} \\ p_0 + p_1 + \cdots + p_n &= \mu_0 (= 1), \\ z_0 p_0 + z_1 p_1 + \cdots + z_n p_n &= \mu_1, \\ z_0^2 p_0 + z_1^2 p_1 + \cdots + z_n^2 p_n &= \mu_2, \\ &\ \vdots \\ z_0^m p_0 + z_1^m p_1 + \cdots + z_n^m p_n &= \mu_m, \\ p_0, p_1, \ldots p_n &\geq 0, \end{aligned} \tag{1}$$

ahol p_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ lesznek a változók. Az $I = \{z_0, z_1, \ldots, z_n\}$ tartó, az $f(z)$, $z \in I$ függvényértékei, ill. a μ_k, $k = 0, 1, \ldots, m$ momentumok pedig paraméterként adottak.

Mivel az (1) lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixa egy rosszul kondicionált Vandermonde-mátrix, ezért a fenti feladat nagyobb méret esetén nem oldható meg általános solverek segítségével. Azonban, az f függvényre tett bizonyos feltételek mellett, Prékopa [50] kifejlesztett egy numerikusan stabil duál szimplex algoritmust. A módszer olyan tételeken alapul, melyek kombinatorikusan megadják az összes duál megengedett bázis oszloprendszert. Az algoritmus lényege vázlatosan: a duálváltozók előjelének elegáns, numerikusan stabil kiszámítása segítségével megadja a bázisból kimenő oszlopot, majd utána a duál megengedett bázisstruktúra ismerete alapján meghatározza a következő bázisba bejövő oszlopot. A duál megengedett bázisstruktúra ismerete lehetőséget nyújt képletszerű korlátok megadására is, lásd Boros és Prékopa [5].

A harmadik hasznos tulajdonság, hogy a DMP optimális megoldása segítségével lehetőség van Bonferroni-típusú, ill. egyéb képletszerű valószínűségi korlátok megadására. Ebben az esetben a hatvány momentum probléma helyett a binomiális momentum problémát érdemes tekinteni.

Az $I \subset \mathbb{N}$ tartójú X valószínűségi változó k-adik binomiális momentumának definíciója:

$$E\left[\binom{X}{k}\right].$$

Tekintsük az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tetszőleges eseményeket. Legyen a $\{0, 1, \ldots, n\}$ tartójú X valószínűségi változó a bekövetkezett események száma. Ekkor X binomiális momentumaira igaz az alábbi egyenlőség (lásd pl. Prékopa [52, 182. old.]):

$$E\left[\binom{X}{k}\right] = S_k = \sum_{0 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}),$$

$k = 1, 2, \ldots$. A binomiális momentum probléma az alábbi módon írható fel:

$$\begin{aligned} \min(\max) f_0 p_0 + f_1 p_1 + \cdots + f_n p_n, \qquad & \text{feltéve, hogy} \\ p_0 + p_1 + \cdots + p_n &= S_0 (= 1), \\ \binom{0}{1} p_0 + \binom{1}{1} p_1 + \cdots + \binom{n}{1} p_n &= S_1, \\ \binom{0}{2} p_0 + \binom{1}{2} p_1 + \cdots + \binom{n}{2} p_n &= S_2, \\ &\vdots \\ \binom{0}{m} p_0 + \binom{1}{m} p_1 + \cdots + \binom{n}{m} p_n &= S_m, \\ p_0, p_1, \ldots p_n &\ge 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Ha az n esemény uniójára, ill. metszetére szeretnénk korlátokat adni, akkor ehhez az alábbi függvényeket kell tekinteni:

$$f(z)=\begin{cases}0, & \text{ha } z=0,\\ 1, & \text{különben,}\end{cases} \quad \text{ill. } f(z)=\begin{cases}1, & \text{ha } z=s,\\ 0, & \text{különben.}\end{cases} \tag{3}$$

Abban az esetben, ha az (1) feladatban $\{z_0, z_1, \ldots, z_n\} = \{0, 1, \ldots n\}$, az (1) és (2) probléma egymásba átképezhető egyszerű nemszinguláris lineáris transzformációk segítségével (lásd Prékopa [48]). Pontosabban, az együtthatómátrixok és a jobboldal vektorai átvihetők egymásba egy nemszinguláris négyzetes mátrixszal, illetve annak inverzével történő szorzás által. Ez egyúttal azt jelenti, hogy egy oszloprendszer pontosan akkor alkot duál megengedett bázist az (1) feladatban, ha ennek bázisváltozóihoz tartozó oszloprendszer a (2) feladatban is duál megengedett bázis. Emiatt Prékopa [50] duál szimplex megoldó módszere közvetlenül alkalmazható a binomiális momentum feladatra is. Ennek segítségével pedig itt is lehetőség nyílik képletszerű korlátok megadására: (3) első függvényének alkalmazásával például korlátok adhatóak az események uniójára az $S_0, S_1, \ldots, S_m$ binomiális momentumok lineáris kombinációinak segítségével. Az így kapott éles Bonferroni-típusú korlátokba nyújt betekintést Prékopa [49], [51], [52], ill. Boros és Prékopa [5].

1.2. Többváltozós diszkrét momentum probléma (TDMP)

A többváltozós diszkrét momentum problémát Prékopa [51] vezette be, majd vizsgálta az [53], [54] dolgozatokban. A TDMP az egyváltozós eset természetes általánosítása az alábbi módon. Legyen $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_s)$ véletlen vektorváltozó. Tegyük fel, hogy X_j tartója egy ismert véges $Z_j = \{z_{j0}, \ldots, z_{jn_j}\}$ halmaz, $j = 1, \ldots, s$. A következőkben az alábbi momentumok bizonyos halmazainak értékei szolgáltatnak majd információt az ismeretlen eloszlásról.

1.1. Definíció. Az $(X_1, \ldots, X_s)$ véletlen vektor $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ *rendű hatványmomentuma* az alábbi várható érték:

$$\mu_{\alpha_1 \ldots \alpha_s} = E\left[X_1^{\alpha_1} \cdots X_s^{\alpha_s}\right],$$

ahol $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ természetes számok. Az $\alpha_1 + \cdots + \alpha_s$ összeget a *momentum (teljes) rendjének* hívjuk.

$\boldsymbol{X}$ (ismeretlen) eloszlására az alábbi jelölést használjuk:

$$p_{i_1 \ldots i_s} = P(X_1 = z_{1i_1}, \ldots, X_s = z_{si_s}), \qquad 0 \le i_j \le n_j,\ j = 1, \ldots, s.$$

Tekintsük a $Z = Z_1 \times \cdots \times Z_s$ halmazt és ezen az $f(\boldsymbol{z})$, $\boldsymbol{z} \in Z$ függvényt.

Legyen $f_{i_1\dots i_s} = f(z_{1i_1},\dots,z_{si_s})$. A TDMP felírható az alábbi LP-feladatként:

$$\begin{aligned}
\min(\max)\ E[f(\boldsymbol{X})] = \sum_{i_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{i_s=0}^{n_s} f_{i_1\dots i_s}p_{i_1\dots i_s}, &\qquad \text{feltéve, hogy} \\
\sum_{i_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{i_s=0}^{n_s} z_{1i_1}^{\alpha_1}\cdots z_{si_s}^{\alpha_s}p_{i_1\dots i_s} = \mu_{\alpha_1\dots\alpha_s} &\qquad (\alpha_1\dots\alpha_s)\in H, \\
p_{i_1\dots i_s}\ge 0 &\qquad \text{minden } i_1,\dots,i_s \text{ esetén.}
\end{aligned} \tag{4}$$

A (4) feladatban $p_{i_1\dots i_s}$, $0\le i_j\le n_j,\ j=1,\dots,s$, ismeretlen változó, míg a többi paraméter (az f függvény és a momentumok) adottak. A fogalom bevezetésekor (Prékopa [53], [54]) H a legfeljebb m-ed rendű momentumok halmaza volt (ahol m egy adott természetes szám), tehát

$$H = \{(\alpha_1,\dots,\alpha_s)|\ 0\le\alpha_j,\ \alpha_j \text{ egész}, \alpha_1+\dots+\alpha_s\le m,\ j=1,\dots,s\}, \tag{5}$$

később ennél általánosabb eseteket is vizsgálunk.

A TDMP egyik legnépszerűbb alkalmazási területe az események Boole-függvényeinek korlátozása. Ezekben esetben a binomiális TDMP-feladatot érdemes tekinteni. Ehhez vezessük be a kereszt-binomiális momentum fogalmát.

1.2. Definíció. A $Z\subset\mathbb{N}^s$ tartójú $(X_1,\dots,X_s)$ véletlen vektor $(\alpha_1,\dots,\alpha_s)$ *rendű kereszt-binomiális momentuma* az alábbi várható érték:

$$S_{\alpha_1\dots\alpha_s} = E\left[\binom{X_1}{\alpha_1}\cdots\binom{X_s}{\alpha_s}\right], \tag{6}$$

ahol $\alpha_1,\dots,\alpha_s$ természetes számok. Az $\alpha_1+\dots+\alpha_s$ összeg ebben az esetben is *a momentum (teljes) rendje.*

Tekintsünk ismét n tetszőleges eseményt. Particionáljuk az események halmazát s darab esemény részsorozatba. A j-edik részsorozatot jelölje $A_{j1},\dots,A_{jn_j}$, $j=1,\dots,s$. Természetesen $n_1+\dots+n_s=n$. Legyen a $Z_j=\{0,1,\dots,n_j\}$ tartójú X_j valószínűségi változó a j-edik sorozatban bekövetkezett események száma, $j=1,\dots,s$. Ekkor

$$E\left[\binom{X_1}{\alpha_1}\cdots\binom{X_s}{\alpha_s}\right] = \sum_{\substack{1\le i_{j1}<\dots<i_{j\alpha_j}\le n_j,\\ j=1,\dots,s}} P[A_{1i_{11}}\cap\dots\cap A_{1i_{1\alpha_1}}\cap\dots\cap A_{si_{s1}}\cap\dots\cap A_{si_{s\alpha_s}}], \tag{7}$$

összhangban $S_{\alpha_1\dots\alpha_s}$ (6) definíciójával. A binomiális TDMP az alábbi LP-feladatként formalizálható:

$$\begin{gathered}
\min(\max) \sum_{i_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{i_s=0}^{n_s} f_{i_1\ldots i_s} p_{i_1\ldots i_s}, \qquad \text{feltéve, hogy} \\
\sum_{i_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{i_s=0}^{n_s} \binom{i_1}{\alpha_1} \cdots \binom{i_s}{\alpha_s} p_{i_1\ldots i_s} = S_{\alpha_1\ldots\alpha_s} \qquad (\alpha_1 \ldots \alpha_s) \in H, \\
p_{i_1\ldots i_s} \geq 0 \qquad \text{minden } i_1, \ldots, i_s \text{ esetén.}
\end{gathered} \tag{8}$$

Ebben az esetben is adható korlát az n esemény uniójára, ill. metszetére az alábbi függvények segítségével:

$$f(z_1, \ldots, z_s) = \begin{cases} 0, & \text{ha } (z_1, \ldots, z_s) = (0, \ldots, 0), \\ 1, & \text{különben,} \end{cases} \tag{9}$$

ill.

$$f(z_1, \ldots, z_s) = \begin{cases} 1, & \text{ha } (z_1, \ldots, z_s) = (n_1, \ldots, n_j), \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Itt is igaz, hogy $Z_j = \{0, 1, \ldots, n_j\}$, $j = 1, \ldots, s$ esetén a hatvány és binomiális TDMP egymásba nemszinguláris négyzetes mátrix szorzással áttranszformálható, és ennek megfelelően az *ekvivalens hatvány és binomiális TDMP-feladatok duál megengedett bázisstruktúrája megegyezik.* Így a binomiális TDMP duál megengedett bázisainak segítségével is lehetőség nyílik valószínűségek becslésére, illetve Bonferroni-típusú egyenlőtlenségek konstrukciójára. Tekintve, hogy az esemény részsorozatok segítségével kapott kereszt-binomiális momentumok több információt nyújtanak az eseményekről, mintha csak az egyváltozós binomiális momentumokat tekintenénk, ezért az itt kapott korlátok a binomiális DMP korlátainál erősebbek lesznek.

A TDMP esetében sajnos eddig semmilyen nemtriviális momentumhalmaz, ill. f függvényre tett feltétel mellett sem sikerült a teljes duál megengedett bázistruktúra felderítése, így az egyváltozós, numerikusan stabil duál szimplex módszert sem sikerült általánosítani. A megoldásra, ill. korlátozásra eddig kétféle megközelítéssel sikerült eredményeket elérni.

Az első megközelítés lényege, hogy bár az összes duál megengedett bázis nem ismert, de az f függvényre tett megfelelő konvexitási feltételek mellett számos duál megengedett bázis kombinatorikusan megtalálható. A duál megengedett bázismegoldások pedig alsó és felső korlátokat szolgáltatnak a célfüggvény értékére (ha nem is az egzakt minimumot, maximumot). Ez egyrészt lehetőséget nyújt képletszerű korlátok megadására, másrészt, ha az ismert bázisok halmaza elég bő, a korlátok is elég szorosak lesznek a gyakorlati alkalmazásokhoz. A területen elért eredményeket tárgyalják többek közt Prékopa [51, 53, 54], Mádi-Nagy és Prékopa [39, 40, 41], Mádi-Nagy [34, 35, 36] dolgozatai.

A másik megközelítés, hogy valahogy jobban kondicionálttá tesszük az együtthatómátrixot. A későbbiekben bemutatunk erre egy olyan megoldást, mely a Vandermonde-típusú mátrix mögötti hatványok helyett ortogonális polinombázisokat használ. A módszer előnye, hogy nem szükséges feltételeket tenni a célfüggvényre, lényegében bármilyen TDMP esetén megtalálhatjuk vele az optimális megoldást. Másrészt viszont, mivel itt nem kombinatorikusan kapott duál megengedett bázisokkal dolgozunk, a módszer nem alkalmas képletszerű korlátok megadására. A módszer leírása Mádi-Nagy [37] dolgozatában található.

A dolgozat további részében bemutatjuk, hogy a fentebb vázolt problémákra milyen megoldásokat, eredményeket találtunk, illetve bemutatjuk a TDMP-pár hasznos alkalmazási területét is, numerikus eredményekkel illusztrálva. A második fejezetben megmutatjuk, hogy a H momentum indexhalmaz általánosításaival milyen módon bővíthető a duál megengedett bázisstruktúrák halmaza, illetve hogy ezek segítségével milyen szoros korlátok adhatóak bizonyos feladatokra. A harmadik fejezet a polinom bázis transzformáción alapuló megoldási algoritmust és annak eredményeit mutatja be. A negyedik fejezetben különféle alkalmazásokat mutatunk be számolási eredményekkel. Az utolsó fejezetben a konklúzión túl megemlítünk pár nyitott kérdést, lehetséges kutatási irányt.

2. Duál megengedett bázisstruktúrák

A fejezetben azokat az eredményeket foglaljuk össze, melyek az (5) indexhalmaz különböző általánosításain mutatnak duál megengedett bázisstruktúrákat. Először röviden bemutatjuk a többváltozós Lagrange-interpoláció elméletét, illetve definiáljuk a Newton-féle alakban szereplő többváltozós osztott differenciákat. Ezek segítségével definiáljuk a diszkrét f függvényekre vonatkozó konvexitási feltételeket, illetve látni fogjuk, hogy a duál megengedett bázis struktúra tételek egyúttal diszkrét Lagrange-interpolációs eredményekként is értelmezhetőek. Utána bemutatjuk az (5) indexhalmaz két általánosítását és az ezekhez tartozó struktúra tételeket. Illusztrációként bemutatunk pár numerikus eredményt is. Végezetül megmutatjuk, hogy hogyan lehetséges a struktúrák alapján többváltozós képletszerű korlátokat megadni.

2.1. A TDMP és a Lagrange-interpoláció kapcsolata

A többváltozós Lagrange-interpoláció jóval bonyolultabb az egyváltozós esetnél, ahol bármely $z_0, \ldots, z_n \in \mathbb{R}$ különböző alappontokra könnyen adható (egyértelmű) n-ed fokú Lagrange-polinom. Egyrészt a többváltozós esetben nehezen megválaszolható az a kérdés, hogy az alappontok milyen geometriai elhelyezkedése esetén létezik az előírt fokszámú tagokkal rendelkező (egyértelmű) Lagrange-polinom. Másrészt, ugyancsak nehézségekbe ütközik a maradéktag áttekinthető struktúrával rendelkező képletének megtalálása.

A többváltozós Lagrange-polinom fokszámára vonatkozóan írjuk fel a következő definíciót.

2.1. Definíció. Legyen $H = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_s)\}$ természetes szám s-esek egy véges halmaza. Legyen $\boldsymbol{z} = (z_1, \dots z_s) \in \mathbb{R}^s$. Akkor mondjuk, hogy $p(\boldsymbol{z})$ *egy H-típusú polinom*, ha változói fokszámai a H halmaz elemei, tehát

$$p(\boldsymbol{z}) = \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in H} c_{\alpha_1 \cdots \alpha_s} z_1^{\alpha_1} \cdots z_s^{\alpha_s},$$

ahol minden $c_{\alpha_1 \cdots \alpha_s}$ valós szám.

Az alappontok geometriai elhelyezkedésével kapcsolatos az alábbi definíció.

2.2. Definíció. Legyen $U = \{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_M\}$ egy $\mathbb{R}^s$-beli pontokból álló halmaz, $H = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_s)\}$ pedig az $(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ természetes szám s-esek egy véges halmaza. Azt mondjuk, hogy U megenged egy H-típusú Lagrange-interpolációt, ha bármilyen $f(\boldsymbol{z})$, $\boldsymbol{z} \in U$ valós függvény esetén létezik $p(\boldsymbol{z})$, H-típusú polinom, melyre

$$p(\boldsymbol{u}_i) = f(\boldsymbol{u}_i), \qquad i = 1, \dots, M.$$

A H-típusú Lagrange-interpolációról, többek közt az (5)-beli H esetére is, jó áttekintést nyújt Gasca és Sauer [18], történeti áttekintésért pedig lásd Gasca és Sauer [19] dolgozatát.

A következőkben kapcsolatot teremtünk a TDMP és a többváltozós Lagrange-interpoláció között. Ehhez írjuk fel a (4) hatvány TDMP-feladatot az alábbi kompaktabb formában (bármilyen adott H indexhalmaz mellett)

$$\begin{array}{rcl} \min(\max) & \boldsymbol{f}^T \boldsymbol{p}, & \qquad \text{feltéve, hogy} \\ A\boldsymbol{p} & = & \boldsymbol{b}, \\ \boldsymbol{p} & \geq & \boldsymbol{0}. \end{array} \tag{10}$$

Használjuk még az alábbi jelöléseket.

2.3. Definíció. $\boldsymbol{b}(z_1, \dots, z_s)$ jelentse azt a vektort, melyet a $\boldsymbol{b}$ vektorból kapunk úgy, hogy eltekintünk a várható értéktől, az X_j argumentumokat pedig z_j-re cseréljük, $j = 1, \dots, s$. Tehát, ha $\boldsymbol{b}$ egy komponense $\mu_{\alpha_1 \cdots \alpha_s} = E[X_1^{\alpha_1} \cdots X_s^{\alpha_s}]$ $((\alpha_1, \dots \alpha_s) \in H)$ volt, akkor neki a $z_1^{\alpha_1} \cdots z_s^{\alpha_s}$ komponens felel meg a $\boldsymbol{b}(z_1, \dots, z_s)$ vektorban.

2.1. Tétel. *Tekintsük a (10) feladat egy B bázismátrixát és legyen I a bázisoszlopok indexhalmaza, tehát*

$$I = \{(i_1, \dots, i_s) |\ a_{i_1 \cdots i_s} \in B\}, \tag{11}$$

ahol $a_{i_1 \cdots i_s}$ jelöli az A mátrix $(z_{1i_1}, \dots, z_{si_s})$ ponthoz tartozó oszlopát. Tekintsük az alábbi (különböző) $\mathbb{R}^s$-beli pontok halmazát

$$U = \{(z_{1i_1}, \dots, z_{si_s})|\ (i_1, \dots, i_s) \in I\}, \tag{12}$$

ekkor

$$L_I(z_1, \dots, z_s) \quad = \quad \boldsymbol{f}_B^T B^{-1} \boldsymbol{b}(z_1, \dots, z_s)$$

az U alapponthalmaz egy egyértelmű H-típusú Lagrange-polinomja.

Bizonyítás. Lásd pl. Mádi-Nagy [35] Theorem 2.1. □

Nem nehéz belátni, hogy a (10) minimum (maximum) feladat duál megengedett bázisa esetén a fenti konstrukció olyan Lagrange-polinomot ad meg, mely a $Z = Z_1 \times \cdots \times Z_s$ tartó pontjain az $f(z_1, \dots, z_s)$ függvényértéket alulról (felülről) becsüli. Ennek következménye az alábbi

2.2. Tétel. *Ha B a minimum (maximum) feladat duál megengedett bázisa, és az I index (11) szerinti, akkor*

$$f(z_1, \dots, z_s) \geq L_I(z_1, \dots, z_s)\ (z_1, \dots, z_s) \in Z,$$
$$(f(z_1, \dots, z_s) \leq L_I(z_1, \dots, z_s)\ (z_1, \dots, z_s) \in Z),$$

amely, a (12) szerinti, $(z_1, \dots, z_s) \in U$ esetén egyenlőséggel teljesül. $f(X_1, \dots, X_s)$ várható értékére pedig az alábbi korlátok adhatók:

$$E[f(X_1, \dots, X_s)] \geq E[L_I(X_1, \dots, X_s)],$$
$$(E[f(X_1, \dots, X_s)] \leq E[L_I(X_1, \dots, X_s)]).$$

Ha a bázis primál megengedett is (tehát optimális), akkor a kapott korlátok élesek.

Bizonyítás. Lásd pl. Mádi-Nagy [35] Theorem 2.3. □

A következő bázisstruktúra tételekben a Lagrange-polinom Newton-féle alakban lesz megadva, tehát az együtthatók az f függvény ún. többváltozós osztott differenciái lesznek. A teljesség kedvéért közöljük az alábbi definíciókat.

2.4. Definíció. Legyen $f(z)$, $z \in \{z_0, \dots, z_n\}$ egy egyváltozós valós függvény, ahol $z_0, \dots, z_n$ különböző valós számok, ekkor az elsőrendű osztott differenciák:

$$[z_i; f] := f(z_i), \text{ ahol } z_i \in \{z_0, \dots, z_n\}.$$

A *k-ad rendű (egyváltozós) osztott differenciák* $(k \geq 1)$ az alábbi rekurzióval definiáltak:

$$[z_i, \dots, z_{i+k}; f] = \frac{[z_{i+1}, \dots, z_{i+k}; f] - [z_i, \dots, z_{i+k-1}; f]}{z_{i+k} - z_i}, \text{ ahol } z_i \in \{z_0, \dots, z_n\}.$$

2.5. Definíció. Legyen $f(\boldsymbol{z})$, $\boldsymbol{z} \in Z = Z_1 \times \cdots \times Z_s$, többváltozós valós diszkrét függvény, és tekintsük az alábbi részhalmazt:

$$\begin{aligned} Z_{I_1 \dots I_s} &= \{z_{1i},\ i \in I_1\} \times \cdots \times \{z_{si},\ i \in I_s\} \\ &= Z_{1I_1} \times \cdots \times Z_{sI_s}, \end{aligned} \tag{13}$$

ahol $|I_j| = k_j + 1,\ j = 1, \dots, s$. Ekkor definiálhatjuk f (13) pontokhoz tartozó $(k_1, \dots, k_s)$ *rendű (többváltozós) osztott differenciáját.* Először tekintsük az első változó szerinti k_1 rendű osztott differenciát, majd ennek a második változóhoz tartozó k_2 rendű osztott differenciáját, és így tovább. Megjegyezzük, hogy a fenti műveleteket bármilyen más (akár vegyes) sorrendben elvégezve a végeredmény ugyanaz lesz. Jelölje

$$[z_{1i},\ i \in I_1; \cdots ; z_{si},\ i \in I_s; f]$$

a megfelelő $I = I_1 \times \cdots \times I_s$ halmazhoz tartozó $(k_1, \dots, k_s)$ rendű osztott differenciát. A $k_1 + \cdots + k_s$ összeget pedig hívjuk az osztott differencia (teljes) rendjének.

Az fenti definíciót illusztrálja az alábbi példa.

2.1. Példa.

$$\begin{aligned} [z_{10}, z_{11}; z_{20}, z_{21}; f] &= \left[z_{20}, z_{21}; \frac{f(z_{11}, z_2) - f(z_{10}, z_2)}{z_{11} - z_{10}} \right] \\ &= \frac{\frac{f(z_{11}, z_{21}) - f(z_{10}, z_{21})}{z_{11} - z_{10}} - \frac{f(z_{11}, z_{20}) - f(z_{10}, z_{20})}{z_{11} - z_{10}}}{z_{21} - z_{20}}. \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy folytonos, megfelelően deriválható függvények esetén a függvény deriváltjai, ill. diszkrét megszorításának osztott differenciái közt hasonló (előjel) összefüggések állnak a többváltozós esetben, mint az egyváltozósban.

2.2. Vegyes momentumok határeloszlások magasabb rendű momentumaival kiegészítve

A (4) hatvány TDMP esetén az (5) képlettel definiált H halmaz esetét Prékopa [53] vizsgálta. Isaacson és Keller [27] többváltozós Lagrange-interpolációs tételét, ill. a TDMP duál megengedett bázisa és a féloldalas interpoláció közti összefüggést felhasználva sikerült találnia a kétváltozós esetben lényegében két különböző, míg magasabb dimenziók esetén lényegében egy duál megengedett bázisstruktúrát. Az eredmény elméleti jelentőségén túl, alkalmas egy megoldó (nagy pontosságú aritmetikát használó) duál szimplex algoritmus kezdeti megengedett bázisának megtalálására (ezzel nagyjából megfelezve a futási időt), illetve képletszerű korlátok konstruálására is.

Mivel a gyakorlatban az egydimenziós határeloszlásoknak általában a magasabb rendű momentumai is rendelkezésre állnak, ill. kiszámíthatóak, ezért következő lépésben Mádi-Nagy és Prékopa [39] a momentumok rendjét mutató H indexhalmazt az alábbi módon bővítette:

$$\begin{gathered} H=\{(\alpha_1,\dots,\alpha_s)|\ 0\le\alpha_j,\ \alpha_j \text{ egész},\ \alpha_1+\dots+\alpha_s\le m,\ j=1,\dots,s; \\ \text{vagy} \\ \alpha_j=0,\ j=1,\dots,k-1,k+1,\dots,s,\ m\le\alpha_k\le m_k,\ k=1,\dots,s.\} \end{gathered} \tag{14}$$

Ebben az esetben a duál megengedett bázsistruktúrák megtalálásához az alábbi jelölésekre és fogalmakra lesz szükség. Tekintsük az alábbi indexhalmazt:

$$I=I_0\cup\left(\cup_{j=1}^s I_j\right), \tag{15}$$

ahol

$$I_0=\{(i_1,\dots,i_s)|\ 0\le i_j\le m-1,\ \text{egészek},\ j=1,\dots,s,\ i_1+\ldots+i_s\le m\}$$

és

$$\begin{aligned} I_j&=\{(i_1,\dots,i_s)|\ i_j\in K_j,\ i_l=0\ l\ne j\} \\ K_j&=\{k_j^{(1)},\dots,k_j^{(|K_j|)}\}\subset\{m,m+1,\dots,n_j\},\ j=1,\dots,s. \end{aligned} \tag{16}$$

A változó halmazokra az alábbi jelölésrendszert vezetjük be:

$$\begin{aligned} Z_{ji}&=\{z_{j0},\dots,z_{ji}\}, \\ Z'_{ji}&=\{z_{j0},\dots,z_{ji},z_j\}, \qquad i=0,\dots,n_j,\ j=1,\dots,s, \\ K_{ji}&=\{k_j^{(1)},\dots,k_j^{(i)}\}, \\ Z_{jK_{ji}}&=\{z_{jk_j^{(1)}},\dots,z_{jk_j^{(i)}}\}, \qquad i=1,\dots,|K_j|,\ j=1,\dots,s, \\ Z_{jK_j}&=Z_{jK_{j|K_j|}},\ j=1,\dots,s. \end{aligned}$$

A $Z_I=\{(z_{1i_1},\dots,z_{si_s})|\ (i_1,\dots,i_s)\in I\}$ alappont rendszerhez rendeljük az alábbi Newton-féle alakban felírt Lagrange-polinomot:

$$\begin{aligned} &L_I(z_1,\dots,z_s)= \\ &=\sum_{\substack{i_1+\ldots+i_s\le m \\ 0\le i_j\le m-1,\ j=1,\dots,s}}[Z_{1i_1};\cdots;Z_{si_s};f]\prod_{j=1}^s\prod_{k=0}^{i_j-1}(z_j-z_{jk})+ \\ &+\sum_{j=1}^s\sum_{i=1}^{|K_j|}\left[Z_{10};\cdots;Z_{(j-1)0};Z_{j(m-1)}\cup Z_{jK_{ji}};Z_{(j+1)0};\cdots;Z_{s0};f\right]\times \\ &\times\prod_{k\in\{0,\dots,m-1\}\cup K_{j(i-1)}}(z_j-z_{jk}), \end{aligned} \tag{17}$$

ahol, definíció szerint, $\prod_{k=0}^{i_j-1}(z_j-z_{jk})=1$, ha $i_j=0$, és $K_{j0}=\emptyset$.

Megjegyezzük, hogy a (17) esetben nem feltétlenül szükséges, hogy az f függvény értelmezési tartománya pontosan Z legyen, elég ha $\mathbb{R}^s$-beli, és tartalmazza a Z halmazt.

A maradéktagot az alábbi módon konstruáljuk:

$$R_I(z_1,\dots,z_s) = R_{1I}(z_1,\dots,z_s) + R_{2I}(z_1,\dots,z_s),$$

ahol

$$\begin{aligned} &R_{1I}(z_1,\dots,z_s) = \\ &= \sum_{j=1}^{s} \left[z_{10};\cdots;z_{(j-1)0};Z_{j(m-1)} \cup Z_{jK_j} \cup \{z_j\};z_{(j+1)0};\cdots;z_{s0};f\right] \times \\ &\times \prod_{k\in\{0,\dots,m-1\}\cup K_j} (z_j - z_{jk}), \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} &R_{2I}(z_1,\dots,z_s) = \\ &= \sum_{h=1}^{s-1} \sum_{\substack{i_h+\cdots+i_s=m \\ 0\le i_j\le m-1,\ j=h,\dots,s}} \left[z_1;\cdots;z_{h-1};Z'_{hi_h};Z_{(h+1)i_{h+1}};\cdots;Z_{si_s};f\right] \times \\ &\times \prod_{l=0}^{i_h} (z_h - z_{hl}) \prod_{h+1}^{s} \prod_{k=0}^{i_j-1} (z_j - z_{jk}) + \\ &+ \sum_{j=h+1}^{s} \left[z_1;\cdots;z_{h-1};Z'_{h0};Z_{(h+1)0};\cdots;Z_{(j-1)0};Z'_{j(m-1)};Z_{(j+1)0};\cdots;Z_{s0}\right] \times \\ &\times (z_h - z_{h0}) \prod_{k=0}^{m-1} (z_j - z_{jk}). \end{aligned}$$

2.3. Tétel. (Mádi-Nagy és Prékopa [39] Th. 3.1) *A fenti jelölések mellett a (17) szerinti polinom valóban a* $Z_I = \{(z_{1i_1},\dots,z_{si_s}) \mid (i_1,\dots,i_s) \in I\}$ *alappont rendszerhez tartozó (14) szerinti* H*-típusú Lagrange-polinom és az* f *értelmezési tartományának bármely* $\boldsymbol{z} = (z_1,\dots,z_s)$ *pontjára igaz, hogy*

$$L_I(z_1,\dots,z_s) + R_I(z_1,\dots,z_s) = f(z_1,\dots,z_s).$$

A fenti interpoláció maradéktagjában az együtthatók $m+1$-edrendű, illetve $m+|K_j|$ rendű osztott differenciák. Ha ezekre előjelfeltételekkel élünk, akkor az alappontok megfelelő megválasztásával biztosítható, hogy a maradéktag előjele minden Z halmazbeli pontra pozitív (negatív) legyen, és ennek megfelelően (4) TDMP-alappontokhoz tartozó oszlopai a minimum (maximum) feladat duál megengedett bázisai legyenek.

Továbbra is tegyük fel, hogy $K_j \subset \{m, m+1, \dots, n_j\}$, és vezessük be az alábbi négy index struktúrát:

$$\begin{array}{lcc} & |K_j| \text{ páros} & |K_j| \text{ páratlan} \\ min & u^{(j)}, u^{(j)}+1, \dots, v^{(j)}, v^{(j)}+1 & m, u^{(j)}, u^{(j)}+1, \dots, v^{(j)}, v^{(j)}+1 \\ max & m, u^{(j)}, u^{(j)}+1, \dots, v^{(j)}, v^{(j)}+1, n_j & u^{(j)}, u^{(j)}+1, \dots, v^{(j)}, v^{(j)}+1, n_j. \end{array} \tag{18}$$

Ezt felhasználva az alábbi struktúratételt fogalmazzuk meg.

2.4. Tétel. (Mádi-Nagy és Prékopa [39] Th. 4.1) *Legyen $z_{j0} < z_{j1} < \cdots < < z_{jn_j}$, $j = 1, \dots, s$. Tegyük fel, hogy az $f(\boldsymbol{z})$, $\boldsymbol{z} \in Z$ függvény $m+1$-ed rendű és minden egyes z_j változó szerinti $m + |K_j|$ rendű osztott differenciája nemnegatív, és K_j (18) valamelyik min struktúráját követi.*

Ezen feltételek mellett a (17) szerinti $L_I(z_1, \dots, z_s)$ egy egyértelmű H-típusú Lagrange-polinom lesz a Z_I alaphalmazon. Ráadásul teljesíti az alábbi egyenlőtlenségeket:

$$f(z_1, \dots, z_s) \geq L_I(z_1, \dots, z_s),\ (z_1, \dots, z_s) \in Z, \tag{19}$$

tehát a (10) feladatban az A mátrix I indexeihez tartozó oszlopaiból álló B mátrix a minimum feladat duál megengedett bázisa. Ennek megfelelően:

$$E[f(X_1, \dots, X_s)] \geq E[L_I(X_1, \dots, X_s)]. \tag{20}$$

Ha B egyúttal primál megengedett is, akkor a fenti (20) egyenlőtlenség éles korlátot ad.

Ha a fenti osztott differenciák nempozitívak, akkor (19) és (20) ellentétes relációs jellel érvényesek.

A fenti gondolatmenetet követve Mádi-Nagy és Prékopa [39] további struktúratételeket is megfogalmaz, egyrészt arra az esetre, mikor a tartók komponenseinek elemei monoton csökkenő sorrendben szerepelnek, másrészt arra az esetre, amikor a (15) és (18) indexstruktúrák az $n_j - i_j$, $j = 1, \dots, s$ indexekre vannak átfogalmazva. Az így kapott duál megengedett bázisstruktúrákat szemlélteti az 1. ábra.

A kétváltozós esetre Mádi-Nagy és Prékopa [39] a duál megengedett bázisoknak ennél bővebb halmazát tudta megadni, a $Z_j = \{z_{j0}, \dots, z_{jn_j}\}$, $j = 1, \dots, s$ halmazok elemei sorrendjeinek megfelelő megválasztásával. A továbbiakban is tegyük fel, hogy az $f(\boldsymbol{z})$, $\boldsymbol{z} \in Z$ függvény $m+1$-ed rendű és minden egyes z_j változó szerinti $m + |K_j|$ rendű osztott differenciája nemnegatív.

Tekintsük először azt az esetet, amikor minimum feladathoz keresünk duál megengedett bázist. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $Z_1 = \{0, 1, \dots, n_1\}$, $Z_2 = \{0, 1, \dots, n_2\}$.

9	$\bullet$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
8	$\bullet$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
7	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
6	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
5	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
4	$\bullet$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
3	$*$	$*$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
2	$*$	$*$	$*$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
1	$*$	$*$	$*$	$*$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
0	$*$	$*$	$*$	$*$	$\bullet$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\bullet$	$\bullet$
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

(a)

9	$\bullet$	$\bullet$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\bullet$	$*$	$*$	$*$	$*$
8	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$*$	$*$	$*$	$*$
7	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$*$	$*$	$*$
6	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$*$	$*$
5	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\bullet$
4	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
3	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
2	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
1	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\bullet$
0	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\bullet$
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

(b)

1. ábra. Az (a) ábra a (10) minimum feladat 2.4. tétel által megadott egyik duál megengedett bázisát, míg a (b) ábra a (10) maximum feladat Mádi-Nagy és Prékopa [39] Th. 4.3 egyik duál megengedett bázisát mutatja. Az I_0 halmaz elemeit $*$, míg az I_1 és I_2 halmaz elemeit $\bullet$ jelöli. Mindkét esetben: $Z_1 = Z_2 = \{0, \ldots, 9\}$. $m = 4,\ m_1 = m_2 = 6.\ K_1 = K_2 = \{4, 8, 9\}$.

Min algoritmus (Mádi-Nagy és Prékopa [39])

A $z_{10}, \ldots, z_{1(m-1)}; z_{20}, \ldots, z_{2(m-1)}$ **sorozatok konstrukciója.**

0. lépés: Legyen $t = 0$, $-1 \le q_1 \le m-1$, $L = (0, 1, \ldots, q_1)$, $U = (n_1, n_1 - 1, \ldots, n_1 - (m - q_1 - 2))$, és legyen $(z_{10}, \ldots, z_{1(m-1)}) =$ (az L, U rendezett halmazok tetszőleges összefésülése). Ha $|U|$ páros, akkor legyen $z_{20} = 0$, $l^0 = 1$, $u^0 = n_2$, ha $|U|$ páratlan, akkor pedig legyen $z_{20} = n_2$, $l^0 = 0$, $u^0 = n_2 - 1$. Ha $t = m - 1$, menjünk a 2. lépésre, különben pedig az 1. lépésre.

1. lépés: Ha $z_{1(m-1-t)} \in L$, akkor legyen $z_{2(t+1)} = l^t$, $l^{t+1} = l^t + 1$, $u^{t+1} = u^t$, ha $z_{1(m-1-t)} \in U$, akkor pedig legyen $z_{2(t+1)} = u^t$, $u^{t+1} = u^t - 1$, $l^{t+1} = l^t$. $t \leftarrow t + 1$. Ha $t = m - 1$, menjünk a 2. lépésre, különben ismételjük meg az 1. lépést.

2. lépés: Stop, megkonstruáltuk a $z_{10}, \ldots, z_{1(m-1)}; z_{20}, \ldots, z_{2(m-1)}$ sorozatokat.

Legyen $0, 1, \ldots, q_2, n_2, \ldots, n_2 - (m - q_2 - 2)$ a konstrukcióban eddig szereplő változók halmaza. Eszerint $(z_{jm}, z_{j(m+1)}, \ldots, z_{jn_j}) = (q_j + 1, q_j + 2, \ldots, n_j - (m - q_j - 1))$, $j = 1, 2$. Ha $m - 1 - q_j$ páros, akkor K_j kövesse (18) min struktúráját, ha pedig $m - 1 - q_j$ páratlan, akkor pedig max struktúrát, $j = 1, 2$. Ezzel befejeztük az I indexhez tartozó duálmegengedett bázis konstrukcióját.

Ha a maximum feladathoz szeretnénk duál megengedett bázisokat találni, akkor a $z_{10}, \ldots, z_{1(m-1)}; z_{20}, \ldots, z_{2(m-1)}$ sorozatok megadásához a Min algoritmusnak csak a 0. lépését kell megváltoztatni, a többi lépés ugyanaz marad. A K_j halmaz megválasztása pedig pont ellenkező módon történik.

Max algoritmus (Mádi-Nagy és Prékopa [39])

A $z_{10}, \dots, z_{1(m-1)}; z_{20}, \dots, z_{2(m-1)}$ sorozatok konstrukciója.

0. lépés: Legyen $t = 0$, $-1 \le q_1 \le m-1$, $L = (0, 1, \dots, q_1)$, $U = (n_1, n_1 - 1, \dots, n_1 - (m - q_1 - 2))$, és legyen $(z_{10}, \dots, z_{1(m-1)}) =$ (az L, U rendezett halmazok tetszőleges összefésülése). Ha $|U|$ páratlan, akkor legyen $z_{20} = 0$, $l^0 = 1$, $u^0 = n_2$, ha $|U|$ páros, akkor pedig legyen $z_{20} = n_2$, $l^0 = 0$, $u^0 = n_2 - 1$. Ha $t = m-1$, menjünk a 2. lépésre, különben pedig az 1. lépésre. Stb.

Maximum feladat esetén, ha $m - 1 - q_j$ páros, akkor K_j kövesse a max struktúrát, különben pedig a min struktúrát.

Általános esetben (ha $Z_j \neq \{0, 1, \dots, n_j\}$) rendezzük Z_j elemeit növekvő sorrendbe, rendeljük hozzá bijektíven ebben a sorrendben a $(0, 1, \dots, n_j)$ halmaz elemeit, és ennek megfelelően hajtsuk végre az algoritmust.

A fenti tételekkel és algoritmusokkal a (14) által definiált momentum indexhalmaz esetén általában már sikerült akkora számosságú duál megengedett bázis halmazt találni, mely segítségével sok esetben lehetőség nyílik elég szoros közvetlen korlátok megadására. Első lehetőség, hogy kiszámoljuk az összes talált bázisra a célfüggvény értékét, majd tekintjük minimum (maximum) feladat esetén ezek közül a legnagyobbat (legkisebbet). Szerencsére, a feladat triviális transzformációja segítségével kiderül, hogy a legszorosabb korlátok keresésekor a K_j halmazok egymástól függetlenül optimalizálhatóak (Mádi-Nagy [34]), ill. még egy észrevétel segítségével látható, hogy ez az optimalizáció elvégezhető Prékopa [50] DMP-feladatot megoldó duál módszerének analógiájára (Mádi-Nagy [36]).

Tekintsük a (10) TDMP-feladatot. Célunk a (15) szerint definiált indexhalmazokhoz tartozó megoldások közül a legjobb megtalálása. Nevezzük a TDMP ezen megoldásait a továbbiakban *Z_I-típusú megoldásoknak.* A továbbiakban feltesszük, hogy

$$z_{j0} = 0, \; j = 1, \dots, s \tag{21}$$

és

$$f(z_{10}, \dots, z_{s0}) = 0. \tag{22}$$

A fenti feltételek nem jelentik az általánosság megszorítását, mivel a tartó, ill. célfüggvény alábbi eltolásával (és a jobboldal vektorának komponenseiből $z_{10}, \dots, z_{s0}$ megfelelő hatványainak levonásával) az eredetivel ekvivalens, (21), (22) feltételeket teljesítő TDMP-feladatot kapunk:

$$\begin{aligned} Z^{converted} &= Z - (z_{10}, \dots, z_{s0}), \\ f^{converted}(\boldsymbol{z}) &= f(z_1 + z_{10}, \dots, z_s + z_{s0}) - f(z_{10}, \dots, z_{s0}). \end{aligned}$$

Az indexhalmazok tekintetében egy másik felosztást alkalmazunk, legyen

$$\begin{aligned} I_0^{int} &= \{(i_1, \dots, i_s) |\; 1 \le i_j \le m-1, \text{ egész}, \, j = 1, \dots, s, \; i_1 + \dots + i_s \le m\}, \\ I_j^{axes} &= \{(i_1, \dots, i_s) |\; 1 \le i_j \le n_j, \text{ egész; } i_l = 0 \; l \neq j \text{ esetén } \}. \end{aligned} \tag{23}$$

9	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○
8	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○
7	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○
6	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○
5	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○
4	●	∗	○	○	○	○	○	○	○	○
3	●	∗	∗	○	○	○	○	○	○	○
2	●	∗	∗	∗	○	○	○	○	○	○
1	●	∗	∗	∗	∗	○	○	○	○	○
0	○	●	●	●	●	●	●	●	●	●
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

2. ábra. A (23) indexhalmazok elhelyezkedése, ha $n_1 = n_2 = 9$, $m = 5$, a (14) H halmaz esetén. Az I_0^{int} halmaz elemeit $*$, az I_1^{axes} és I_2^{axes} elemeit pedig $\bullet$ jelöli.

Ezt a struktúrát mutatja a 2. ábra.

Ha a (10) TDMP együtthatómátrixának oszlopaiból elhagyjuk azokat, melyek indexei nem lehetnek tagjai egyetlen (15) szerint definiált indexhalmaznak sem, majd a maradék oszloprendszert (23) szerint rendezzük az alábbi blokk struktúrát kapjuk:

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c}
\mathbf{0} & \overbrace{}^{Z_{I_1^{axes}}} & \overbrace{}^{Z_{I_2^{axes}}} & & \overbrace{}^{Z_{I_s^{axes}}} & \overbrace{}^{Z_{I_0^{int}}} & \boldsymbol{b} & \\
\hline
0 & \boldsymbol{f}^T_{I_1^{axes}} & \boldsymbol{f}^T_{I_2^{axes}} & \cdots & \boldsymbol{f}^T_{I_s^{axes}} & \boldsymbol{f}^T_{I_0^{int}} & & \\
\hline
1 & 1\cdots 1 & 1\cdots 1 & \cdots & 1\cdots 1 & 1\cdots 1 & \mu_{0\ldots 0} & =1 \\
\hline
0 & \begin{matrix} z_{11}\ldots z_{1n_1} \\ \vdots A^{I_1^{axes}}_{I_1^{axes}} \vdots \\ z_{11}^{m_1}\ldots z_{1n_1}^{m_1} \end{matrix} & 0 & \cdots & 0 & A^{I_1^{axes}}_{I_0^{int}} & \begin{matrix} \mu_{10\ldots 0} \\ \vdots \\ \mu_{m_1 0\ldots 0} \end{matrix} & \boldsymbol{\mu}_{I_1^{axes}} \\
\hline
0 & 0 & \begin{matrix} z_{21}\ldots z_{2n_2} \\ \vdots A^{I_2^{axes}}_{I_2^{axes}} \vdots \\ z_{21}^{m_2}\ldots z_{2n_2}^{m_2} \end{matrix} & \cdots & 0 & A^{I_2^{axes}}_{I_0^{int}} & \begin{matrix} \mu_{01\ldots 0} \\ \vdots \\ \mu_{0m_2\ldots 0} \end{matrix} & \boldsymbol{\mu}_{I_2^{axes}} \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\hline
0 & 0 & 0 & \cdots & \begin{matrix} z_{s1}\ldots z_{sn_s} \\ \vdots A^{I_s^{axes}}_{I_s^{axes}} \vdots \\ z_{s1}^{m_s}\ldots z_{sn_s}^{m_s} \end{matrix} & A^{I_s^{axes}}_{I_0^{int}} & \begin{matrix} \mu_{0\ldots 01} \\ \vdots \\ \mu_{0\ldots 0m_s} \end{matrix} & \boldsymbol{\mu}_{I_s^{axes}} \\
\hline
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A^{I_0^{int}}_{I_0^{int}} & \boldsymbol{\mu}_{I_0^{int}} & \\
\hline
p_{\mathbf{0}} & \boldsymbol{p}^T_{I_1^{axes}} & \boldsymbol{p}^T_{I_2^{axes}} & \cdots & \boldsymbol{p}^T_{I_s^{axes}} & \boldsymbol{p}^T_{I_0^{int}} & & \\
\hline
\end{array}
$$

A fenti struktúra mutatja, hogy az I_0 indexhalmazhoz tartozó valószínűségek az alábbi képlettel egyértelműen adottak:

$$\boldsymbol{p}_{I_0^{int}} = \left(A_{I_0^{int}}^{I_0^{int}}\right)^{-1} \boldsymbol{\mu}_{I_0^{int}}.$$

Innen pedig az is látszik, hogy a feladat az alábbi részfeladatokra esik szét:

$$\begin{aligned} \max(\min) \quad & \boldsymbol{f}_{I_j{}^{axes}}^T \boldsymbol{p}_{I_j{}^{axes}}, \qquad \text{feltéve, hogy} \\ & A_{I_j{}^{axes}}^{I_j{}^{axes}} \boldsymbol{p}_{I_j{}^{axes}} = \boldsymbol{b}_1^{I_j^{axes}} \\ & \boldsymbol{p}_{I_j{}^{axes}} = \text{egy } Z_I\text{-típusú bázismegoldás része,} \end{aligned} \tag{24}$$

ahol

$$\boldsymbol{b}_1^{I_j^{axes}} = \boldsymbol{\mu}_{I_j^{axes}} - A_{I_0^{int}}^{I_j^{axes}} \boldsymbol{p}_{I_0{}^{int}},$$

$j = 1, \ldots, s$. Ez pedig pont azt jelenti, hogy a fentieken alapulva a (16)-beli K_j struktúrák a (24) feladat segítségével $j = 1, \ldots, s$ koordinátánként egymástól függetlenül tesztelhetőek. Részletekért lásd Mádi-Nagy [34].

Tekintsük a (24) szerinti együtthatómátrixszal és jobboldallal felírt feladatot:

$$\begin{aligned} \min(\max) \quad & \boldsymbol{f}_{I_j{}^{axes}}^T \boldsymbol{p}_{I_j{}^{axes}}, \qquad \text{feltéve, hogy} \\ & A_{I_j{}^{axes}}^{I_j{}^{axes}} \boldsymbol{p}_{I_j{}^{axes}} = \boldsymbol{b}_1^{I_j^{axes}}, \\ & \boldsymbol{p}_{I_j{}^{axes}} \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{25}$$

Belátható, hogy a (24) feladatbeli Z_I-típusú bázismegoldás részek a (25) feladat duál megengedett bázisai. Ha az is igaz, hogy a *duál megengedett bázisok nem duál degeneráltak*, akkor a (24) feladat duál megengedett megoldásainak teljes struktúrája megengedi, hogy használjuk Prékopa [50] algoritmusának az alábbi átalakítását:

1. lépés: Tekintsünk egy kezdeti (24) feladatbeli Z_I-típusú bázismegoldás részt, jelölje ennek indexeit $I_B = \{1, \ldots, m-1, i_0, i_1, \ldots, i_{m_j-m}\}$, ahol $m \leq i_0, i_1, \ldots, i_{m_j-m} \leq n_j$. Legyen $K = 0, \ldots, m_j - m$. (A K halmaz különbözik a K_j halmaztól!)

2. lépés: Kimenő oszlop meghatározása: Tekintsünk egy $i_k, k \in K$ indexet. Prékopa [50] szerint a hozzá tartozó p_{i_k} bázisváltozó előjele megegyezik

$$\begin{aligned} & (-1)^{m_j-(q_j+k+1)} \times \\ & \qquad \times \left[b_{m_j}^{I_j^{axes}} - \left(\sum_{J \in I_j^{axes} \setminus \{i_k\}} z_{ji_j} \right) b_{m_j-1}^{I_j^{axes}} + \cdots \right. \\ & \qquad \left. \cdots + (-1)^{m_j-1} \left(\prod_{J \in I_j^{axes} \setminus \{i_k\}} z_{i_j} \right) b_1^{I_j^{axes}} \right], \end{aligned} \tag{26}$$

előjelével, ahol q_j a Min, ill. Max algoritmus paramétere (pl. a 2.4. tétel esetén $q_j = m - 1$). Tehát ha (26)

– negatív, akkor az i_k-adik vektor lesz a kimenő oszlop;

– ha nemnegatív, akkor választani kell egy új $i_k, k \in K$ indexet, és megnézni rá (26) előjelét.

– Ha (26) minden $i_k, k \in K$ esetén nemnegatív, akkor menjünk a 4. lépésre.

3. lépés: Ha a kimenő oszlop megvan, akkor válasszuk azt az egyértelmű (kimenőtől különböző) bemenő oszlopot, melyre a Z_I-típusú bázismegoldás rész struktúra visszaállítódik. Menjünk a 2. lépésre.

4. lépés: Stop, megtaláltuk (24) optimális megoldását.

Megjegyezzük, hogy a duál nemdegeneráltságra elégséges feltétel, hogy a z_j változó szerinti $m + |K_j|$ rendű osztott differenciák szigorúan pozitívak.

Végezetül a különböző módszerek futási idejére tekintsünk egy numerikus példát. Mindegyik algoritmust a szimbolikusan is számolni képes Wolfram Mathematica [62] alatt implementáltuk, ennek oka az alábbi. Szerettük volna a kapott korlátokat az optimumokkal összehasonlítani, viszont a hagyományos solverek a rossz numerikus tulajdonságok miatt nem használhatóak, ezért írtunk ezen a nyelven egy olyan duál szimplex algoritmust, amely szimbolikusan, végig törtalakkal számol. A következőkben az alsó és felső korlátok esetén az összes generált bázist végigpróbáló módszer futási idejét CPU_f, a koordinátánként a K_j halmazokat függetlenül próbálgató módszerét CPU_n, míg a duál módszert is használó algoritmusét pedig CPU_u jelöli. A pontos optimum megtalálásának idejét pedig CPU.

2.2. Példa. A feladat Mádi-Nagy és Prékopa [39] Example 6.6 egyik vizsgált esete. Legyen $Z_1 = Z_2 = \{0, \ldots, 14\}$, $m = 6$, $m_1 = m_2 = 4$, és generáljuk a hatványmomentumokat a Z tartón vett egyenletes eloszlás segítségével. Tekintsük az alábbi függvényt:

$$f(z_1, z_2) = e^{z_1/25 + z_1 z_2/400 + z_2/15}.$$

Eredményeink az alábbiak:

	Érték	CPU_f	CPU_n	CPU_u
Alsó korlát:	2,61202	253	1,76	0,83
Felső korlát:	2,67123	254	1,59	0,69

	Érték	CPU
Dual Min:	2,63549	4596
Dual Max:	2,64247	3156

Látható, egyrészt hogy a duál megengedett struktúrákból származó alsó és felső korlátok viszonylag gyorsan adnak használható korlátokat, másrészt pedig, hogy a legjobb korlátok megtalálására valóban hatékonyan használható a fent leírt módszer.

2.3. Új típusú általánosítás magasabb dimenziójú esetekre

Az előző szakaszban láthattuk, hogy a kétváltozós esetre bemutatott Min és Max algoritmus segítségével a 2.4. tétel, és a többi Mádi-Nagy és Prékopa [39] cikkben szereplő struktúratétel bázisainál jóval nagyobb számosságú duál megengedett bázist generálhatunk. Sajnos magasabb dimenziókra, a (14) indexhalmaz esetén, nem sikerült a módszert általánosítani.

Mádi-Nagy [35] mutatta meg, hogy a módszer, nemnegatív osztott differenciák és minimum feladat esetén, az alábbi indexhalmazra továbbvihető:

$$\begin{aligned} H = \{&(\alpha_1, 0, \ldots, 0, \alpha_j, 0, \ldots, 0) \mid 0 \le \alpha_1, \alpha_j,\ \alpha_1, \\ &\alpha_j \text{ egész}, \alpha_1 + \alpha_j \le m, j = 2, \ldots, s; \} \\ \cup \{&(0, \ldots, 0, \alpha_j, 0, \ldots, 0) \mid m + 1 \le \alpha_j \le m_j, \\ &\alpha_j \text{ egész},\ \ j = 1, \ldots, s\}. \end{aligned} \tag{27}$$

Könnyen látható, hogy (14) és (27) a kétváltozós esetben ugyanazt az indexhalmazt adja.

Ebben az esetben az I indexhalmazt és a későbbiekben használt jelöléseket az alábbi módon definiáljuk.

$$I = \left(\bigcup_{j=1}^{s} I_j \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{s} J_j \right), \tag{28}$$

ahol

$$\begin{aligned} I_1 &= \{(i_1, 0, \ldots, 0) \mid 0 \le i_1 \le m-1,\ \text{egészek}\}, \\ I_j &= \{(i_1, 0, \ldots, 0, i_j, 0, \ldots, 0) \mid 0 \le i_1,\ 1 \le i_j \le m-1,\ \text{egészek},\ i_1 + i_j \le m\}, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad j = 2, \ldots, s, \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} J_j &= \{(0, \ldots, 0, i_j, 0, \ldots, 0) \mid i_j \in K_j\}, \\ K_j &= \{k_j^{(1)}, \ldots, k_j^{(|K_j|)}\} \subset \{m, m+1, \ldots, n_j\}, \\ |K_j| &= mj + 1 - m,\ j = 1, \ldots, s. \end{aligned}$$

A fenti jelölésekkel megfogalmazhatjuk, a 2.3. tételhez hasonlóan, a (27) indexhalmazhoz tartozó H-típusú Lagrange-interpolációs tételt: lásd Mádi-Nagy [35]

Th. 3.1. Bizonyos feltételek, és a (28) szerinti I halmazhoz tartozó Z_I változóhalmaz megfelelő megválasztásával, ebben az esetben is számos duálmegengedett bázis található.

A következőkben az alábbiakat tesszük fel a célfüggvényről.

2.1. Feltételek. Az $f(\boldsymbol{z})$, $\boldsymbol{z} \in Z$ függvény

(a) z_j szerinti $m_j + 1$ rendű osztott differenciái nemnegatívak, $j = 1, \ldots, s$,

(b) a kétváltozós $m + 1$ rendű osztott differenciái is nemnegatívak,

(c) minden másodrendű osztott differenciája nemnegatív.

A fenti feltételek mellett az alábbi algoritmussal a minimum feladathoz számos duál megengedett bázis generálható. Természetesen, ha a fenti osztott differenciák nempozitívak, akkor az alábbi módszerrel a maximum feladathoz kapunk duál megengedett bázisokat.

Min algoritmus

Először, az általánosság megszorítása nélkül, tegyük fel, hogy $Z_j = \{0, 1, \ldots, n_j\}$, $j = 1, \ldots, s$.

0. lépés: Legyen

$$z_{20} = z_{30} = \cdots = z_{s0} = 0, \tag{29}$$

vagy

$$z_{20} = n_2, z_{30} = n_3, \ldots, z_{s0} = n_s. \tag{30}$$

(29) esetén legyen $0 \leq q_1 \leq m$ páros egész, (30) esetén pedig páratlan egész. $L := (0, 1, \ldots, (m-1)-q_1)$, $U := (n_1, n_1-1, \ldots, n_1-(q_1-1))$, $V^0 := \{L, U$ tetszőleges összefésülése $\} = (v^0, v^1, \ldots, v^{m-1})$.

$$(z_{10}, \ldots, z_{1(m-1)}) := V^0.$$

Legyen $j = 2$. Menjünk az 1. lépésre!

1. lépés: Legyen $t = 0$. (29) esetén legyen $l_0 = 1$ és $u_0 = n_j$, különben legyen $l_0 = 0$ és $u_0 = n_j - 1$. Menjünk a 2. lépésre.

2. lépés: Legyen $V^t = \{v^0, v^1, \ldots, v^{m-1-t}\}$, $H^t = \{h^1, \ldots, h^t\}$. Ha $v^{m-1-t} \in L$, legyen $h^{t+1} = l^t$, $l^{t+1} = l^t + 1$, $u^{t+1} = u^t$, ha pedig $v^{m-1-t} \in U$, akkor legyen $h^{t+1} = u^t$, $u^{t+1} = u^t - 1$, $l^{t+1} = l^t$. $t \leftarrow t + 1$. Ha $t = m$, akkor menjünk a 3. lépésre, különben ismételjük a 2. lépést.

3. lépés: Legyen

$$(z_{j1}, \ldots, z_{j(m-1)}) = H^{m-1}.$$

$j \leftarrow j + 1$. Ha $j = s + 1$, menjünk a 4. lépésre, különben pedig az 1. lépésre.

4. lépés: Jelöljük a $z_{j0}, z_{j1}, \ldots, z_{j(m-1)}$ sorozat elemeit a következő módon: $0, 1, \ldots,$

$r_j, n_j, \ldots, n_j - (m - r_j - 2)$. Ekkor a maradék j-edik koordinátákat rendezett halmazként tekintve legyen

$$(z_{jm}, z_{j(m+1)}, \ldots, z_{jn_j}) = (r_j + 1, r_j + 2, \ldots, n_j - (m - r_j - 1)),$$

$j = 1, \ldots, s$. Ha $m - r_j - 1$ páros, akkor K_j kövesse (18) min struktúráját, ha pedig $m - r_j - 1$ páratlan, akkor K_j kövessen max struktúrát. Vége: legeneráltuk az I indexhalmazhoz tartozó duál megengedett bázisstruktúrát.

Általános esetben (ha $Z_j \neq \{0, 1, \ldots, n_j\}$) rendezzük Z_j elemeit növekvő sorrendbe, rendeljük hozzá bijektíven ebben a sorrendben a $(0, 1, \ldots, n_j)$ halmaz elemeit és ennek megfelelően hajtsuk végre az algoritmust.

2.5. Tétel. (Mádi-Nagy [35] Theorem 4.2) *Legyen a* $(z_{j0}, \ldots, z_{jn_j})$, $j = 1, \ldots, s$, *sorozat a fenti Min algoritmus szerinti sorrendben, és kövessen* K_j min (max) *struktúrát, ha* $m - r_j - 1$ *páros (páratlan),* $j = 1, \ldots, s$.

Ekkor a 2.1. feltételek teljesülése esetén az A mátrix I indexhalmazhoz tartozó B oszloprendszere a minimum feladat duál megengedett bázisa lesz. Ha B egyúttal primál megengedett, akkor a kapott korlát éles lesz.

A kapott bázisokat szemlélteti a 3. ábra. A fent vázolt módszerrel kapott numerikus eredmények az alkalmazásokat tartalmazó szakaszban találhatóak.

2.4. Képletszerű korlátok

A duál megengedett bázisstruktúrák, a belőlük származtatott féloldalasan közelítő Lagrange-polinomok segítségével, lehetőséget nyújtanak többváltozós Bonferroni-típusú korlátok felírására. A kétváltozós eredményeket foglalja össze Mádi-Nagy és Prékopa [41].

Legyen $A_1, \ldots, A_N$ és $B_1, \ldots, B_M$ két eseménysorozat ugyanabban a valószínűségi mezőben. Az $\nu_N(A)$, ill. $\nu_M(B)$ valószínűségi változók legyenek a bekövetkezések számai a A_i, ill. B_j események körében.

A cél Bonferroni-típusú korlátok megadása a kétváltozós esetre, amely alatt az alábbi séma szerinti egyenlőtlenségeket értjük:

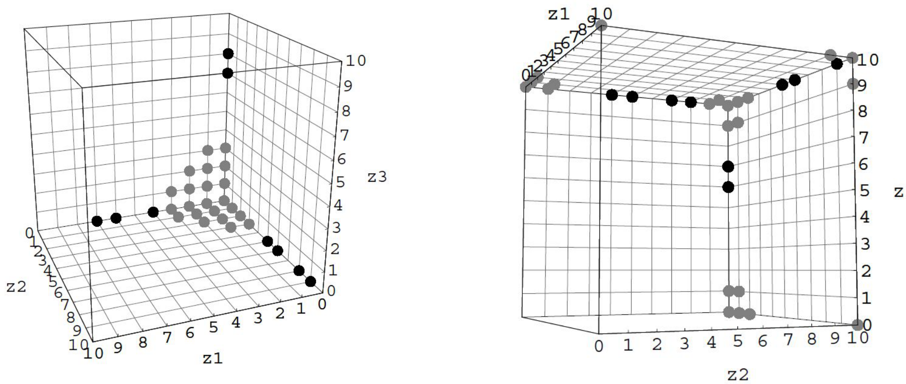
$$\sum_{k \in K} \sum_{t \in T} c_{kt} S_{kt} \leq r(u, v; N, M) \leq \sum_{k \in K} \sum_{t \in T} d_{kt} S_{kt}, \tag{31}$$

ahol

$$K \subseteq \{0, \ldots, N\}, \text{ és } T \subseteq \{0, \ldots, M\},$$

és $r(u, v; N, M)$ az alábbi valószínűségek valamelyikre

$$p(u, v; N, M) = P(\nu_N(A) = u, \nu_M(B) = v),$$
$$q(u, v; N, M) = P(\nu_N(A) \geq u, \nu_M(B) \geq v),$$



(a) (b)

3. ábra. Legyen $Z_j = \{0, \ldots, 10\}$, $j = 1, 2, 3$, $m = 4$, $m_1 = 7$, $m_2 = 8$, $m_3 = 6$. A fentiek a Min algoritmus duál megengedett bázisai, (a): ahol $(z_{j0}, z_{j1}, z_{j2}, z_{j3}) = (0, 1, 2, 3)$, $j = 1, 2, 3$, $K_1 = \{4, 6, 7\}$, $K_2 = \{5, 6, 8, 9\}$, $K_3 = \{7, 8\}$, illetve (b): ahol $(z_{10}, z_{11}, z_{12}, z_{13}) = (0, 1, 10, 2)$, $(z_{j0}, z_{j1}, z_{j2}, z_{j3}) = (10, 0, 9, 1)$, $j = 2, 3$, $K_1 = \{6, 7, 10\}$ $(Z_{1K_1} = \{5, 6, 9\})$, $K_2 = \{6, 7, 9, 10\}$ $(Z_{2K_2} = \{4, 5, 7, 8\})$, $K_3 = \{8, 9\}$ $(Z_{3K_3} = \{6, 7\})$. Az $\bigcup_{j=1}^{s} I_j$ halmaz elemei szürke, míg az $\bigcup_{j=1}^{s} J_j$ halmaz elemei fekete gömbökkel jelöltek.

míg az S_{kt} értékek pedig az eseménysorozatokhoz tartozó, (7) szerinti, binomiális momentumok. Az egyenlőtlenségek c_{kt}, ill. d_{kt} együtthatói pedig olyan valós számok, melyekre (31) teljesül, függetlenül az A_i, ill B_j eseményrendszerek valószínűségi eloszlásától.

A korlátozandó valószínűségek várható értékként is felírhatóak $r(u, v; N, M) = E\left[I_{r(u,v;N,M)}\left(\nu_N(A), \nu_M(B)\right)\right]$ alakban, ahol

$$I_{p(u,v;N,M)}(z_1, z_2) = \begin{cases} 1, & \text{ha } z_1 = u,\ z_2 = v, \\ 0, & \text{különben}, \end{cases} \tag{32}$$

és

$$I_{q(u,v;N,M)}(z_1, z_2) = \begin{cases} 1, & \text{ha } z_1 \geq u,\ z_2 \geq v, \\ 0, & \text{különben}. \end{cases} \tag{33}$$

Mádi-Nagy és Prékopa [41] az (5) indexhalmaznak megfelelő eseteket vizsgálja, tehát ahol az ismert binomiális momentumok rendje legfeljebb m. A $p(0, 0; N, M)$, $q(1, 1; N, M)$ valószínűségekhez tartozó (32), (33) indikátorfüggvények $m+1$ rendű osztott differenciáinak előjele kiszámolható. Ebből kiindulva a duál megengedett bázisstruktúrákat a megfelelő Min és Max algoritmusokkal előállíthatjuk, és így az I indexhalmazhoz tartozó alapponton definiált alulról, ill. felülről közelítő Lagrange-polinomok képletszerűen felírhatóak: lásd Mádi-Nagy és Prékopa [41] Theorem 2.2.

Az így kapott Lagrange-polinomok várható értékeként közvetlenül adódnak az irodalomban ismert, más módszerekkel megkapott egyenlőtlenségek, mint például Galambos és Xu [21] (I) egyenlőtlensége vagy Lee [31] Th. 2 egyenlőtlensége. Az előtte ismert eredményeknél erősebb korlátokat mutat az alábbi példa.

2.3. Példa. (Mádi-Nagy és Prékopa [41] Ex. 3.3) Legyen $m = 4$, és tekintsük a $q(1, 1; N, M)$ valószínűséget. Alkalmazva a Min és Max algoritmusokat legyen:

1. $(z_{10}, z_{11}, z_{12}, z_{13}, z_{14}) = (0, 1, N, 2, 3)$
   $\Longrightarrow (z_{20}, z_{21}, z_{22}, z_{23}, z_{24}) = (0, 1, M, 2, 3)$,
2. $(z_{10}, z_{11}, z_{12}, z_{13}, , z_{14}) = (0, N, 1, N - 1, 2)$
   $\Longrightarrow (z_{20}, z_{21}, z_{22}, z_{23}, , z_{24}) = (0, M, 1, M - 1, 2)$.

A fenti változósorrendeknek megfelelő alsó és felső korlátok az alábbiak lesznek:

1.
$$q(1, 1; N, M) \geq S_{11} - S_{12} - S_{21} + \frac{3}{M} S_{13} + \frac{3}{N} S_{31} + \frac{4}{NM} S_{22}, \tag{34}$$

2.
$$\begin{aligned} q(1, 1; N, M) \leq S_{11} &- \frac{2(NM - N + M - 2)}{NM(M - 1)} S_{12} \\ &- \frac{2(NM - M + N - 2)}{NM(N - 1)} S_{21} \\ &+ \frac{6}{NM(M - 1)} S_{13} + \frac{6}{NM(N - 1)} S_{31} + \frac{4}{NM} S_{22}. \end{aligned} \tag{35}$$

Látható, hogy (34) a klasszikus $S_{11} - S_{12} - S_{21}$ alsó korlátnál erősebb:

$$q(1, 1; N, M) \geq S_{11} - S_{12} - S_{21} + \frac{3}{M} S_{13} + \frac{3}{N} S_{31} + \frac{4}{NM} S_{22} \geq S_{11} - S_{12} - S_{21},$$

míg (35) pedig Galambos és Xu [20] felső korlátjánál ad jobb eredményt:

$$\begin{aligned} S_{11} &- \frac{2(NM - N + M - 2)}{NM(M - 1)} S_{12} - \frac{2(NM - M + N - 2)}{NM(N - 1)} S_{21} + \\ &+ \frac{6}{NM(M - 1)} S_{13} + \frac{6}{NM(N - 1)} S_{31} + \frac{4}{NM} S_{22} = \\ &= \left(S_{11} - \frac{2}{M} S_{12} - \frac{2}{N} S_{21} + \frac{4}{NM} S_{22} \right) - \\ &- \frac{6}{NM(M - 1)} \left[\left(\frac{M - 2}{3} S_{12} - S_{13} \right) + \left(\frac{N - 2}{3} S_{21} - S_{31} \right) \right] \leq \\ &\leq S_{11} - \frac{2}{M} S_{12} - \frac{2}{N} S_{21} + \frac{4}{NM} S_{22}. \end{aligned}$$

3. Polinombázis-transzformáció

A (4) TDMP együtthatómátrixa is rosszul kondícionált, hasonlóan az egyváltozós eset Vandermonde-mátrixához, így a feladat nagyon érzékeny numerikusan: emiatt gyakran nem oldható meg hagyományos LP-megoldó solverek segítségével. Sajnos, mivel ebben az esetben nem ismert a duál megengedett bázisstruktúrák teljes halmaza, a feladat megoldására nem tudunk Prékopa [50] egyváltozós kombinatorikus duál módszeréhez hasonló algoritmust kidolgozni. Szóba jöhet még nagy pontosságú megoldók használata, de ezek óriási hátránya a hosszú futási idő. Ebben a szakaszban bemutatunk egy másik megközelítést, mely segítségével belátható időn belül megoldható a TDMP, ráadásul a célfüggvényre tett bármilyen feltétel nélkül.

Tekintsük az alábbi vektort:

$$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{b}(z_1, \ldots, z_s) = \begin{pmatrix} 1 \\ z_1 \\ z_1^2 \\ \vdots \\ z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \cdots z_s^{\alpha_s} \\ \vdots \\ z_s^m \end{pmatrix}, \text{ ahol } (\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \in H. \tag{36}$$

Ezek után a (4) TDMP A együtthatómátrixának oszlopai az alábbi módon formalizálhatóak:

$$\boldsymbol{a}_{i_1 \ldots i_s} = \boldsymbol{b}(z_{1i_1}, \ldots, z_{si_s}),$$

míg a jobboldal vektora az alábbi módon írható

$$\boldsymbol{b} = E\left(\boldsymbol{b}(X_1, \ldots, X_s)\right).$$

Az ötletet az (5) H indexhalmazra mutatjuk be, tehát amikor a legfeljebb m-ed rendű momentumok adottak. Ekkor (36) $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{z})$ vektorának komponensei a legfeljebb m-ed fokú, s változós polinomok monomiál (legfeljebb m-ed fokú $\boldsymbol{z}$ hatványok) polinombázisai. Tekintsük a fenti polinomok terének egy másik bázisát, jelölje ezt

$$p_{0\ldots0}(\boldsymbol{z}),\ p_{1\ldots0}(\boldsymbol{z}), \ldots,\ p_{\alpha_1\ldots\alpha_s}(\boldsymbol{z}), \ldots,\ p_{0\ldots m}(\boldsymbol{z}). \tag{37}$$

Legyen

$$\bar{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{z}) = \bar{\boldsymbol{b}}(z_1, \ldots, z_s) = \begin{pmatrix} p_{0\ldots 0}(\boldsymbol{z}) \\ p_{1\ldots 0}(\boldsymbol{z}) \\ \vdots \\ p_{\alpha_1\ldots\alpha_s}(\boldsymbol{z}) \\ \vdots \\ p_{0\ldots m}(\boldsymbol{z}) \end{pmatrix}, \text{ ahol } (\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \in H, \tag{38}$$

$$\bar{\boldsymbol{a}}_{i_1\ldots i_s} = \bar{\boldsymbol{b}}(z_{1i_1}, \ldots, z_{si_s}).$$

és

$$\bar{\boldsymbol{b}} = E\left(\bar{\boldsymbol{b}}(X_1, \ldots, X_s)\right).$$

Az $\bar{A}\boldsymbol{p} = \bar{\boldsymbol{b}}$ egyenletrendszer ekvivalens a (4) $A\boldsymbol{p} = \boldsymbol{b}$ egyenletrendszerével, abban az értelemben, hogy létezik egy T invertálható mátrix, melyre

$$\bar{A} = TA \text{ és } \bar{\boldsymbol{b}} = T\boldsymbol{b}.$$

Célunk olyan (37) bázis megtalálása, melyre az $\bar{A}$ mátrix már jobban kondícionált. Ha ilyet találunk, akkor (4) helyett a numerikusan stabilabb

$$\begin{aligned} \min \quad (\max)\boldsymbol{f}^T\boldsymbol{p}, &\qquad \text{feltéve, hogy} \\ \bar{A}\boldsymbol{p} = \bar{\boldsymbol{b}}, & \\ \boldsymbol{p} \geq \boldsymbol{0}, & \end{aligned} \tag{39}$$

feladatot már reguláris solverekkel is megoldhatjuk. Először felsoroljuk, hogy mely polinombázisok esetén várható javulás az együtthatómátrix kondíciójában, majd teszteljük a jelölteket, végül ezek alapján bemutatunk egy numerikusan stabil és emellett hatékony algoritmust, mely egyúttal azt is megmutatja, hogy a kapott megoldás valóban megengedett és optimális megoldása-e az TDMP-feladatnak.

3.1. Kondíciószám, polinombázisok

Ahhoz, hogy a különböző polinombázisokkal felírt együtthatómátrixok tulajdonságait tesztelhessük, szükség van a kondíciószám fogalmára. Tekintsük az alábbi lineáris egyenletrendszert

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

ahol A invertálható, négyzetes mátrix. Tegyük fel, hogy a $\boldsymbol{b}$ jobboldali vektor pontatlanul, $\boldsymbol{e}$ hibavektorral adott, ekkor a megoldás hibás lesz, ennek hibája legyen $\boldsymbol{d}$. Tehát

$$A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}) = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{e}.$$

Az A mátrix kondíciószáma az $\boldsymbol{x}$ megoldás relatív hibája és a $\boldsymbol{b}$ jobboldal relatív hibája hányadosának maximuma. Tehát az A kondíciószáma az alábbi hányados maximuma:

$$\frac{||\boldsymbol{d}||/||\boldsymbol{x}||}{||\boldsymbol{e}||/||\boldsymbol{b}||} = \frac{||A^{-1}\boldsymbol{e}||/||\boldsymbol{x}||}{||\boldsymbol{e}||/||\boldsymbol{Ax}||} = \left(||A^{-1}\boldsymbol{e}||/||\boldsymbol{e}||\right)\left(||A\boldsymbol{x}||/||\boldsymbol{x}||\right).$$

Vegyük észre, hogy a tényezők maximumai rendre az $||A^{-1}||$, ill. $||A||$ mátrixnormák. Ebből következik az alábbi definíció.

3.1. Definíció. Az invertálható, kvadratikus A mátrix kondíciószáma

$$\kappa(A) = ||A^{-1}|| \cdot ||A||.$$

Polinombázisok esetére, függvények közelítésével kapcsolatban, más típusú kondíciószámok is értelmezhetőek, lásd pl. Lyche és Peña [33], Skeel [60].

A vizsgálandó polinombázisok első csoportja az ortogonális polinomok családjából származik. Ennek oka, hogy számos tétel szól ortogonális bázisok alkalmazásáról Vandermonde-típusú mátrixok kondíciószámával kapcsolatban, lásd pl. Gautschi [22], Blyth, Luo és Pozrikidis [4], Li [32]. Ezen tételek fokuszában általában az interpolációs pontok optimális helyzetének megadása áll, annak érdekében, hogy a Vandermonde-típusú mátrix kondíciószáma minél jobb legyen. Sajnos a TDMP megoldása során *a bázis folyton változik, ennek megfelelően az oszlopokhoz tartozó pontrendszer sem marad állandó.* Éppen ezért szükséges, hogy az alkalmazott polinombázisok kondíciószámra gyakorolt hatását legalább numerikusan leteszteljük.

Az egyváltozós ortogonális polinomokat vezeti be az alábbi definíció.

3.2. Definíció. A $p = \{p_0, \dots, p_n\}$ polinomrendszert – ahol p_i foka i, $i = 0, \dots, n$ – *ortogonális polinom*nak nevezzük az $[a, b]$ intervallumon (ahol $a = -\infty$, ill. $b = +\infty$ is megengedett), ha létezik egy $w(z)$ ($w(z) \geq 0, z \in [a, b]$) súlyfüggvény, melyre $\langle p_i, p_j \rangle = 0, i \neq j$, ahol

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(z)g(z)w(z)dz.$$

Legyen

$$c_i = \langle p_i, p_i \rangle,\ i = 0, 1, 2, \dots$$

Ha $c_i = 1$ minden i esetén, akkor p *ortonormális* polinomrendszer.

Az egyváltozós ortogonális polinomok többváltozós megfelelőit az alábbi módon konstruálhatjuk:

$$p_{\alpha_1 \dots \alpha_s}(z_1, \dots, z_s) = p_{\alpha_1}(z_1) \times \dots \times p_{\alpha_s}(z_s) \tag{40}$$

ahol $(\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in H$, ahol H (5) szerint definiált. Belátható, hogy a fenti polinomok is ortogonálisak az I^s kockára történő integrálás és $w(z_1) \times \dots \times w(z_s)$

súlyfüggvény esetén, ahol I az egyváltozós polinom ortogonalitási intervalluma. Ez egyúttal biztosítja, hogy (40) bázisa a legfeljebb m-ed fokú s változós polinomoknak.

A következőkben a Legendre-, első- és másodfajú Csebisev-polinomok többváltozós általánosításait vizsgáljuk. Mivel ezen polinomok esetén az ortogonalitási tartomány $[-1,1]^s$, ezért szükséges a Z halmazt is ennek megfelelően skálázni.

A fentieknek megfelelően a Legendre-polinom képlete

$$P_{\alpha_1\dots\alpha_s}(z_1,\dots,z_s)=P_{\alpha_1}\left(\frac{2z_1-(z_{10}+z_{1n_1})}{z_{1n_1}-z_{10}}\right)\times\dots\times P_{\alpha_s}\left(\frac{2z_s-(z_{s0}+z_{sn_s})}{z_{sn_s}-z_{s0}}\right),$$

ahol $(\alpha_1,\dots,\alpha_s)\in H$, ahol H (5) szerint definiált, és $P_\alpha(z)$ az α-adik egyváltozós Legendre-polinom.

Az elsőfajú Csebisev-polinom alakja

$$T_{\alpha_1\dots\alpha_s}(z_1,\dots,z_s)=T_{\alpha_1}\left(\frac{2z_1-(z_{10}+z_{1n_1})}{z_{1n_1}-z_{10}}\right)\times\dots\times T_{\alpha_s}\left(\frac{2z_s-(z_{s0}+z_{sn_s})}{z_{sn_s}-z_{s0}}\right),$$

ahol $T_\alpha(z)$ az α-adik egyváltozós elsőfajú Csebisev-polinom.

Az másodfajú Csebisev-polinom

$$U_{\alpha_1\dots\alpha_s}(z_1,\dots,z_s)=U_{\alpha_1}\left(\frac{2z_1-(z_{10}+z_{1n_1})}{z_{1n_1}-z_{10}}\right)\times\dots\times U_{\alpha_s}\left(\frac{2z_s-(z_{s0}+z_{sn_s})}{z_{sn_s}-z_{s0}}\right),$$

ahol $U_\alpha(z)$ az α-adik egyváltozós másodfajú Csebisev-polinom.

Lyche és Peña, [33] Theorem 5.1 szerint, polinomokra értelmezett kondíciószám tekintetében a Bernstein-polinomokon alapuló bázisrendszer, bizonyos tartományokon optimális. Ezért, az ortogonális polinomokon túl, ennek az alábbi többváltozós, megfelelően skálázott változatát is figyelembe vesszük:

$$B_{\alpha_1\dots\alpha_s}(z_1,\dots,z_s)=\frac{m!}{\alpha_1!\cdots\alpha_s!(m-\alpha_1-\dots-\alpha_s)!}\left(\frac{z_1-z_{10}}{z_{1n_1}-z_{10}}\right)^{\alpha_1}\times$$

$$\dots\times\left(\frac{z_s-z_{s0}}{z_{sn_s}-z_{s0}}\right)^{\alpha_s}\times\left(1-\frac{z_1-z_{10}}{z_{1n_1}-z_{10}}-\dots-\frac{z_s-z_{s0}}{z_{sn_s}-z_{s0}}\right)^{m-\alpha_1-\dots-\alpha_s},$$

ahol $(\alpha_1,\dots,\alpha_s)\in H$, ahol H (5) szerint definiált.

3.2. Megoldó algoritmus, numerikus tesztek

Mivel a (4) és (39) feladatok közti polinombázis-transzformáció ugyancsak rosszul kondicionált feladat (lásd Farouki [17]), ezért a (4) megoldására az alábbi algoritmust használjuk.

Megoldó algoritmus

1. lépés: Hajtsuk végre a (4) és (39) feladatok közti polinombázis-transzformációt nagy pontosságú aritmetika segítségével.

2. lépés: Oldjuk meg a (39) feladatot valamely reguláris LP-megoldó duál szimplex módszerével.

3. lépés: Tekintsük a bázisoszlopok indexeinek rendszerét. Ezen oszlopokat kiválasztva ellenőrizzük a bázis duál, ill. primál megengedettségét nagy pontosságú aritmetika segítségével, majd számoljuk ki a célfüggvény értéket.

Bár a fenti algoritmus is használ nagy pontosságú aritmetikát, de mindössze csak két lépésben. Ennek köszönhetően a futási idő lényegesen rövidebb lesz, mintha egy (duál) szimplex módszer összes lépését számoltuk volna nagy pontossággal.

A következőkben empírikus tesztek segítségével szeretnénk megtalálni azt a polinombázist, melyre a (39) feladatbeli $\bar{A}$ mátrix kondíciószáma a lehető legkisebb. ∞-normájú kondíciószámokat használunk, mivel ez jellemzi legjobban a (duál) szimplex módszer numerikus érzékenységét (tekintve a primál/duál változók előjeleit).

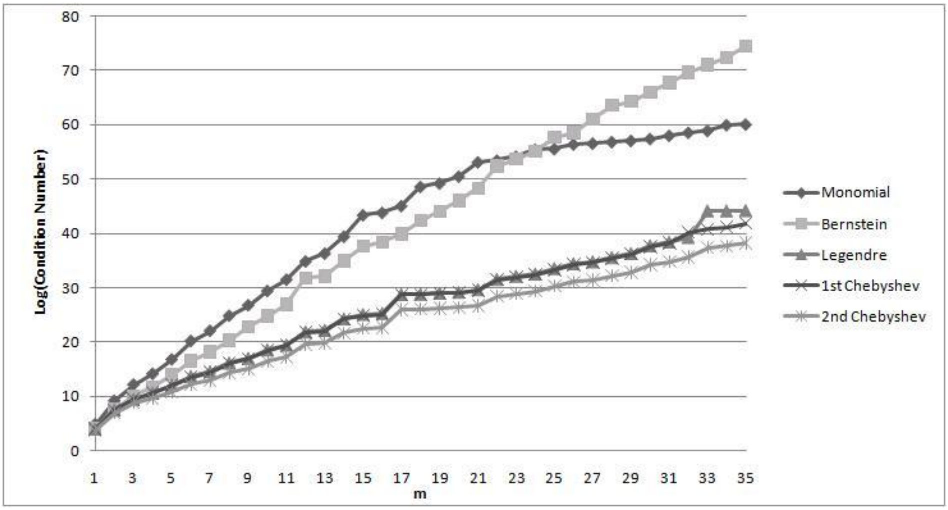
Mivel nem tudjuk előre, hogy a szimplex algoritmus az $\bar{A}$ mátrix mely bázisain halad végig (nyilván ez függ többek közt a célfüggvénytől is), ezért a 3.1. példában véletlenszerűen választunk bázismátrixokat, és számoljuk ki ezek kondíciószámát. Azt várjuk, hogy az alacsonyabb átlagos kondíciószám esetén majd a szimplex módszer is megbízhatóbban fut le.

3.1. Példa. Válasszunk ki a $[0,1]^s$ kocka pontjai közül $\binom{m+s}{s}$ darabot véletlenszerűen, egyenletes eloszlással. Konstruáljuk meg a (38) szerinti $\bar{\boldsymbol{b}}$ oszlopokból álló mátrixot. Ha a mátrix nemszinguláris, akkor rakjuk be a vizsgálandó mintába. 100 elemű mintát generáltunk, kiszámoltuk a végtelen normájú kondíciószámokat, és vettük ezek átlagát, minden egyes polinombázisra. Az $s = 2$ esetén kapott eredményeket mutatja a 4. ábra.

Megjegyezzük, hogy $s = 3$ esetén is hasonló eredményeket kaptunk. Látható, hogy bár mindegyik kondíciószám exponenciálisan növekszik, de az ortogonális polinomok a monomiál-, ill. Bernstein-bázisok kondíciószámait körölbelül azok gyökére csökkentették. Tehát a teszt tanulsága szerint az *ortogonális polinombázisok segítségével lényegesen csökkenthető a kondíciószám.* Megjegyezzük, hogy mind az $s = 2$, mind az $s = 3$ esetben a másodfajú Csebisev-polinom teljesített a legjobban.

A következő példában egy konkrét feladatra mutatjuk meg a különböző polinombázisok esetén kapott megoldások minőségét. Megjegyezzük, hogy Mádi-Nagy [37] több feladatot is vizsgál, hasonló eredményekkel.

3.2. Példa. Legyen $Z = \{0,1,\ldots,10\} \times \{0,1,\ldots,20\} \times \{0,1,\ldots,30\}$. Legyen X, Y_1, Y_2 és Y_3 Poisson-eloszlású valószínűségi változó rendre $\lambda = 0,1,\ 0,2,\ 0,3,$



4. ábra. Átlagos kondíciószámok a maximális m momentumrend függvényében ($s = 2$).

0, 05 paraméterekkel. Definiáljuk a momentumokat generáló vektort az alábbi módon

$$(min(X + Y_1, 10), min(X + Y_2, 20), min(X + Y_3, 30))\,.$$

A célfüggvény legyen

$$f(z_1, z_2, z_3) = \sin(z_1 + z_2 + z_3).$$

A minimum feladat eredményei az alábbiak,

m	Monomiál	Bernstein	Legendre	1. Csebisev	2. Csebisev
1	$-0,16301713$	$-0,16301713$	$-0,16301713$	$-0,16301713$	$-0,16301713$
2	$0,20039622$	$0,20039622$	$0,20039622$	$0,20039622$	$0,20039622$
3	$0,25350547$	$0,25350547$	$0,25350547$	$0,25350547$	$0,25350547$
4	$\underline{0,27167527}$	$\underline{0,26575235}$	$\underline{0,27316847}$	*0,27315366*	*0,27206079*
5	$\underline{0,26469815}$	$\underline{0,28452612}$	$\underline{0,28228435}$	*0,28214106*	*0,28526692*
6	$\underline{0,28393933}$	$\underline{0,28696505}$	$\underline{0,28816140}$	*0,28789129*	*0,28822397*

a maximum feladaté pedig ezek:

m	Monomiál	Bernstein	Legendre	1. Csebisev	2. Csebisev
1	$0,71525034$	$0,71525034$	$0,71525034$	$0,71525034$	$0,71525034$
2	$0,47997864$	$0,47997864$	$0,47997864$	$0,47997864$	$0,47997864$
3	$0,31651723$	$0,31651723$	$0,31651723$	$0,31651723$	$0,31651723$
4	*0,31049303*	*0,31108264*	*0,31197905*	*0,31242441*	*0,31244058*
5	$\underline{0,30509224}$	*0,30263923*	*0,30359098*	*0,30272386*	*0,30352714*
6	*0,29666626*	*0,29609722*	*0,29760208*	*0,29873506*	*0,29855087*

– Az aláhúzott eredmények már a (39) feladat $\bar{A}\boldsymbol{p} = \bar{\boldsymbol{b}}$ egyenletrendszerének sem megoldásai. Legendre-polinomok esetén az infizibilis segédváltozó nagyságrendje 10^{-7}, monomiálbázisok esetén viszont 10^2, amely már nagyon távol esik a megengedett megoldástól.

– A ferdén szedett eredmények nem primál, de duál megengedettek, tehát nem éles alsó, illetve felső korlátokat adnak a célfüggvényre.

Látható, hogy a *minimum feladatra csak a Csebisev-polinomok adtak használható eredményt.*

Az algoritmus utolsó lépései bázisainak kondíciószámai az alábbiak:

m	Monomiál	Bernstein	Legendre	1. Csebisev	2. Csebisev
1	$8.E+00/2.E+01$	$1.E+02/7.E+02$	$4.E+01/2.E+02$	$4.E+01/2.E+02$	$6.E+01/3.E+02$
2	$3.E+02/4.E+02$	$2.E+05/3.E+05$	$3.E+04/3.E+04$	$3.E+04/3.E+04$	$6.E+04/5.E+04$
3	$3.E+05/6.E+03$	$4.E+07/1.E+07$	$2.E+06/7.E+05$	$2.E+06/7.E+05$	$1.E+06/2.E+06$
4	$9.E+07/3.E+07$	$3.E+08/2.E+08$	$1.E+07/1.E+06$	$4.E+06/7.E+05$	$4.E+06/2.E+06$
5	$2.E+11/1.E+12$	$3.E+09/2.E+09$	$7.E+06/7.E+06$	$3.E+06/7.E+06$	$2.E+07/2.E+07$
6	$1.E+16/2.E+12$	$1.E+10/4.E+10$	$3.E+07/2.E+08$	$2.E+07/2.E+07$	$6.E+07/4.E+07$

A fentiek is azt mutatják, hogy nagyobb m értékek esetén az ortogonális polinomokhoz tartozó kondíciószámok lényegesen kisebbek.

A példák jól illusztrálják, hogy

– ortogonális polinombázis használatával a bázismátrixok kondíciószáma drasztikus mértékben csökkenthető,

– így lehetőség nyílik olyan TDMP-feladatok megoldására, melyek eddig reguláris solverek segítségével nem voltak megoldhatóak.

– A Megoldó algoritmus, túl azon, hogy hatékony keretrendszert biztosít más polinombázisok használatára, lehetőséget nyújt a megoldás primál, ill. duál megengedettségének tetszőleges pontosságú vizsgálatára is.

A tesztekhez az ILOG CPLEX 9 [25] solverét használtuk, míg a nagy pontosságú számolásokhoz a Wolfram Mathematica [62] programnyelvet. Azóta a fenti algoritmus Java nyelven megírt, Mosek [43] solvert és Apfloat [1] tetszőleges pontosságú aritmetikai csomagot használó, implementációjának forráskódja is megtalálható a Numerical MDMP [46] github projektben.

4. Alkalmazások

4.1. A hatványmomentum problémához köthető alkalmazások

4.1.1. Várható hasznosság

Egy (bármennyiszer differenciálható) $u(z)$, $z \geq 0$ hasznossági függvénytől a legtöbb esetben minimum azt megköveteljük, hogy legyen szigorú monoton növekvő, tehát legyen $u'(z) > 0$. A hasznossági függvényt kockázatkerülőnek hívjuk, ha $u''(z) < 0$ is teljesül, tehát ha a függvény szigorúan konkáv.

Pratt [47] és Arrow [2] közgazdasági szempontból indokolták a csökkenő kockázatkerülés fontosságát. Az abszolút kockázatkerülés Arrow–Pratt-mértéke:

$$-\frac{u''(z)}{u'(z)}.$$

A csökkenés szükséges feltétele, hogy $u'''(z) > 0$. Általánosabban megkövetelhetjük, hogy

$$(-1)^{n-1}u^{(n)}(z) > 0,\ n = 1, 2, \ldots \tag{41}$$

A (41) feltételrendszert teljesítő hasznossági függvényeket Caballe és Pomansky [10] dolgozata *kevert hasznossági függvényeknek* nevezi. Hasznossági függvényekre hasonló, de szigorúbb feltételeket vezetett be Chander [11], a közgazdasági indokokról lásd Ingersoll [26] dolgozatát.

A többváltozós hasznossági függvények területe is széles körben kutatott, bevezető irodalomként lásd pl. Keeney és Raiffa [28], Dyer és Sarin [16], Dyer, Fishburn, Steuer, Wallenius és Zionts [15]. A legtöbb esetben a többváltozós hasznossági függvény egyváltozós hasznossági függvények szorzatai egyszerű összegeként áll elő. Azonban az irodalomban nem nagyon található olyan kellően tág, analítikusan felírható függvénycsalád, mely a gyakorlatban is jól illeszthető. A következőkben definiált, többváltozós függvénycsalád lényegében bármilyen egyváltozós, megfelelő konvexitási tulajdonságokkal bíró hasznossági függvényekből megkonstruálható, ráadásul rendelkezik mind a többváltozós hasznossági függvények általánosságban megkövetelt tulajdonságaival, mind a kevert tulajdonság többváltozós általánosításával.

A többváltozós hasznossági függvénycsaládot írja le az alábbi definíció.

4.1. Definíció. Legyen $k \geq 1$ és $D = \{(z_1, \ldots, z_s) | e^{g_j(z_j)} > 2,\ j = 1, \ldots, s\}$. Az u hasznossági függvényt a következő módon definiáljuk:

$$u(z_1, \ldots, z_s) := log\left[k(e^{g_1(z_1)} - 1) \cdots (e^{g_s(z_s)} - 1) - 1\right], \tag{42}$$

ahol $(z_1, \ldots, z_n) \in D$, és az alábbi feltételek teljesülnek:

$$\begin{aligned} g_j'(z_j) &> 0, \\ g_j^{(i)}(z_j) &\geq 0, \text{ ha } i > 1 \text{ és páratlan}, \\ g_j^{(i)}(z_j) &\leq 0, \text{ ha } i \text{ páros}, \qquad j = 1, \ldots, s. \end{aligned}$$

A $g_j(z_j)$ függvények választhatóak például az alábbiak közül:

$$\begin{aligned} a \log\left(1 + \tfrac{z}{b}\right), &\quad \text{ahol } a > 0,\ b > 0, \\ ae^{-bz}, &\quad \text{ahol } a > 0,\ b > 0, \\ a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0, &\quad \text{megfelelően választott együtthatókkal.} \end{aligned}$$

4.1. TÉTEL. (Prékopa és Mádi-Nagy [56], Th. 2.1) *A (42) függvény konkáv a D halmazon.*

4.2. TÉTEL. (Prékopa és Mádi-Nagy [56], Th. 2.2) *Minden $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_s) \in D$ esetén igaz, hogy*

$$\frac{\partial^{i_1+\cdots+i_s} u(z_1, \ldots, z_s)}{\partial z_1^{i_1} \cdots \partial z_s^{i_s}} > 0, \text{ ha } i_1 + \cdots + i_s \text{ páratlan,}$$

és

$$\frac{\partial^{i_1+\cdots+i_s} u(z_1, \ldots, z_s)}{\partial z_1^{i_1} \cdots \partial z_s^{i_s}} < 0, \text{ ha } i_1 + \cdots + i_s \text{ páros.}$$

4.1. Példa. (Prékopa és Mádi-Nagy [56], Ex. 3.2) Tekintsük az alábbi függvényt,

$$u(z_1, z_2, z_3) = log\left[(e^{1.75z_1+3} - 1)(e^{1.25z_2+2} - 1)(e^{0.75z_3+1} - 1) - 1\right] (z_1, z_2, z_3) \in Z,$$

ahol

$$Z = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) \times (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) \times (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).$$

A momentumokat az alábbi valószínűségi változók segítségével generáljuk:

$$X_1 = \min(X + Y_1, 9),\ X_2 = \min(X + Y_2, 9),\ X_3 = \min(X + Y_3, 9),$$

ahol X, Y_1, Y_2, Y_3 Poisson-eloszlású valószínűségi változó rendre $1; 2; 2,5; 3$ paraméterekkel. Megjegyezzük, hogy így X_1, X_2, X_3 nem függetlenek.

A maximum másodrendű vegyes momentumokon és ezenfelül magasabb rendű marginális momentumokon alapuló eredményeket foglalja össza az alábbi táblázat:

m	m_1	m_2	m_3	Minimum	Maximum
2	2	2	2	$18,466954935$	$18,572924791$
2	4	4	4	$18,532630264$	$18,550298509$
2	6	6	6	$18,541879509$	$18,544391959$
2	8	8	8	$18,543136443$	$18,543344110$

Ha a vegyes momentumok maximális rendjét $m = 4$-re emeljük, a kapott eredmények így változnak:

m	m_1	m_2	m_3	Minimum	Maximum
4	4	4	4	$18,532852070$	$18,550297658$
4	6	6	6	$18,541926465$	$18,544391052$
4	8	8	8	$18,543148260$	$18,543343503$

A fenti táblázatok jól illusztrálják a (14) momentumrendhalmaz létjogosultságát: kellően szoros korlátok gyakran elérhetőek csak a figyelembe vett marginális momentumok rendjének növelésével, és így kevésbé van szükség az (általában nehezebben kiszámolható) vegyes momentumok maximális rendjének növelésére.

4.1.2. Többváltozós momentumgeneráló függvények korlátozása

Az X valószínűségi változó momentumgeneráló függvénye:

$$M(t) = E[e^{tX}],\ t \in \mathbb{R}.$$

Ha $M(t)$ véges a nulla egy nyílt J környezetében, akkor a momentumgeneráló függvény egyértelműen determinálja X eloszlását. Könnyen látható, hogy ez esetben $M^{(n)}(t) = E[X^n e^{tX}],\ t \in J$, ebből pedig következik, hogy $M^{(n)}(0) = E[X^n], n = 1, 2, \ldots$

Az $X_1, \ldots, X_s$ valószínűségi változók együttes momentumgeneráló függvénye:

$$M(t_1, \ldots, t_s) = E[e^{t_1 X_1 + \cdots + t_s X_s}].$$

Hasonlóan az egyváltozós esethez, ha M véges az origó egy nyílt környezetében, akkor egyértelműen meghatározza az $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_s)$ véletlen vektor eloszlását. További tulajdonságai, hogy $M(0, \ldots, 0, t_i, 0, \ldots, 0) = M_i(t_i),\ i = 1, \ldots, s$, és

$$\frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots \alpha_s} M}{\partial {t_1}^{\alpha_1} \cdots \partial {t_s}^{\alpha_s}}(0, \ldots, 0) = \mu_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}.$$

A témakörről bővebben lásd pl. Ross [58].

Tegyük fel, hogy $\boldsymbol{X}$ diszkrét, véges tartójú, ismertek az (5) szerinti hatványmomentumai, és szeretnénk becslést adni a momentumgeneráló függvény értékére egy adott $(t_1, \ldots, t_s)$ helyen. Egyváltozós esetben Ibrahim és Mugdadi [24] készített hasonló, momentumon alapuló becsléseket.

Rögzített $(t_1, \ldots, t_s) \geq \mathbf{0}$ esetén az $e^{t_1 z_1 + \cdots + t_s z_s}$ összes osztott differenciája nemnegatív. Hasonlóan, ha $(t_1, \ldots, t_s) \leq \mathbf{0}$, akkor páros (páratlan) $m+1$ esetén az $m+1$-edik osztott differenciák nemnegatívan (nempozitívak) lesznek. Ennek megfelelően $M(t_1, \ldots, t_s) = E[e^{t_1 X_1 + \cdots + t_s X_s}]$ becslésére az eddig ismertetett TDMP-korlátozási módszereinket használhatjuk. Ezt illusztrálja az alábbi példa.

4.2. Példa. (Mádi-Nagy és Prékopa [40]) A Min és Max algoritmusok segítségével adunk korlátokat az alábbi $M(t_1, t_2)$ kétváltozós momentumgeneráló függvényre, a $(t_1, t_2) = (0,04; 0,05)$ helyen. A momentumokat az X_1, X_2 független egyenletes eloszlású, $Z_1 = Z_2 = \{0, \ldots, 14\}$ tartójú valószínűségi változók segítségével állítottuk elő. A számolásokat Wolfram Mathematica [62] segítségével végeztük, a nagy pontosságú duál szimplex módszert a struktúratételek által adott kezdőbázissal indítva. A momentumok maximális rendjétől függően az alábbi eredményeket kaptuk:

m	Lower	CPU	Upper	CPU
2	$1,91194$	$0,28$	$1,98564$	$0,28$
3	$1,94560$	$0,58$	$1,95640$	$0,56$
4	$1,95009$	$1,18$	$1,95108$	$1,19$
5	$1,95051$	$2,59$	$1,95060$	$2,59$
6	$1,95053$	$6,11$	$1,95056$	$6,13$

Megjegyezzük, hogy az ILOG CPLEX [25] a magasabb rendű esetekben már itt is infizibilitást adott, dacára annak, hogy a példa konstrukciója miatt létezik megengedett megoldás.

4.2. Valószínűségi korlátok

4.2.1. Eloszlásfüggvények becslése

A többváltozós eloszlásfüggvényre (CDF) az alábbi módon is tekinthetünk

$$F(x_1, \ldots, x_n) = P(\xi_1 < x_1, \ldots, \xi_n < x_n) = 1 - P(A_1 \cup \cdots \cup A_n), \tag{43}$$

ahol

$$A_i = \{\xi_i \geq x_i\}, \; i = 1, \ldots, n.$$

Tegyük fel, hogy a CDF értékei m dimenzióig könnyen számolhatóak (általában $n >> m$), tehát az alábbi valószínűségek adottak:

$$P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}), \quad 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n, \; k \leq m.$$

Ezek alapján már számolhatóak alsó és felső korlátok a (43) eloszlásfüggvényre, a (9) szerinti célfüggvénnyel rendelkező (8) binomiális TDMP segítségével. A módszer olyan esetekben tud hasznos lenni, amikor magasabb dimenziókra már nehezen, vagy egyáltalán nem számolható ki CDF értéke integrálással.

Az alábbi példában összehasonlítjuk a különböző módszerekkel kapott alsó és felső korlátokat egy adott Dirichlet-eloszlás esetére. További eloszlásfüggvény-korlátozási példák találhatóak Bukszár, Mádi-Nagy és Szántai [7] dolgozatában.

A következőkben, a momentum feladatokon túl, az összehasonlításba bevesszük Bukszár és Prékopa [8], Bukszár és Szántai [9] és Bukszár [6] gráfelméleti alapokon nyugvó ún. *multifa (Multitree)* korlátaiból számított eredményeket is. A fenti cikkekben tárgyalt módszerek hatékony és emiatt népszerű eszközrendszernek bizonyultak a CDF-korlátozás területén.

Mivel az A_i eseményeket többféleképpen oszthajuk rész-eseménysorozatokra, ezért a momentum alapú korlátok közt külön vizsgáljuk az egyváltozós DMP alapján kapott *egyváltozós (Univariate)* korlátokat, a kétváltozós DMP Min és Max algoritmusaiból kapott *kétváltozós (Bivariate)* korlátokat, a többváltozós Min algoritmusból adódó *többváltozós (Multivariate)* korlátokat, illetve a többváltozós DMP egzakt optimumait szolgáltató másodfajú Csebisev-polinombázist használó *polinom (Polynomial)* korlátokat.

Mivel ebben az esetben a binomiális momentumok úgy számolódnak, hogy minden egyes metszetvalószínűséget kiszámolunk, majd ezeket összeadjuk, így nagyobb m esetén már ez a számítás is tekintélyes futási idővel, ill. egyre nagyobb numerikus pontatlansággal jár. A multifa korlátok nagy előnye, hogy a korlátozás során nincs szükség mindegyik metszetvalószínűség ismeretére, így magasabb rendű momentumok során is jól használhatóak.

A következő példa Bukszár, Mádi-Nagy és Szántai [7] dolgozatából származik, kiegészítve a polinom korlátok eredményeivel. További hasonló példák találhatóak Mádi-Nagy és Nagy [38] dolgozatában. Nem túl magas dimenziókra a Dirichlet-eloszlás CDF-értékei jól számolhatóak Gouda és Szántai [23] implicit rekurzív algoritmusával. Ezt alkalmazzuk a következő példában is, a futási időknél külön jelezve a binomiális momentumok kiszámolásainak idejét (multifa korlátok esetén a valószínűségek kiszámolása az algoritmus futása alatt történik).

4.3. Példa. A Dirichlet-eloszlás paraméterei és argumentumai az alábbiak:

index	ϑ értékek	x értékek	index	ϑ értékek	x értékek
1	1,5	0,1	11	1,5	0,1
2	1,4	0,2	12	1,4	0,2
3	1,3	0,2	13	1,3	0,2
4	1,2	0,2	14	1,2	0,2
5	1,1	0,2	15	1,1	0,2
6	1,2	0,3	16	1,2	0,1
7	1,3	0,2	17	1,3	0,2
8	1,4	0,1	18	1,4	0,1
9	1,2	0,2	19	1,2	0,2
10	1,3	0,1	20	1,3	0,1
			21	2,1	

$m = 3$ esetre a Dirichlet-CDF-korlátai:

	Korlát értéke	CPU (s)
Multifa alsó	0,290188	0,02
Multifa felső	0,377891	1,41
Egyváltozós alsó	0,366196	1,22+0,00
Egyváltozós felső	0,385005	1,22+0,00
Kétváltozós alsó	0,366196	1,22+0,01
Kétváltozós felső	0,382324	1,22+0,02
Többváltozós alsó	0,366196	1,22+0,02
Polinom alsó	0,366196	1,18+9,23
Polinom felső	0,378233	1,18+8,99

Látható, hogy a legjobb felső korlátot a multifa módszer adta, míg alsó korlát tekintetében a momentum feladatok működtek hatékonyabban. Felső korlátok esetében jól követhetőek a különböző módszerek, elméleti szinten is elvárt, hatékonyság különbségei. Látható, hogy a polinom felső korlát már nagyon közel esik a multifa módszer eredményéhez. Mivel más esetekben is hasonló nagyságrendű eltérést tapasztaltunk, ezért ha nem akarunk több különböző algoritmust használni, a polinom módszer egyszerre lehet alkalmas megfelelő alsó és felső korlátok megadására. Ráadásul ehhez rendelkezésre áll a githubon megtalálható Numerical MDMP [46] implementáció.

Magasabb rendű esetekben viszont már gondot jelenthet, hogy a momentumok kiszámításához rengeteg metszetvalószínűségre van szükség. Ezt is illusztrálják az $m = 5$ eset Dirichlet-CDF-korlátai:

	Korlát értéke	CPU (s)
Multifa alsó	0,345615	14,15
Multifa felső	0,368858	119,46
Egyváltozós alsó	0,367014	27116,96+0,00
Egyváltozós felső	0,367021	27116,96+0,00
Kétváltozós alsó	0,367014	27116,96+0,13
Kétváltozós felső	0,367019	27116,96+0,60
Többváltozós alsó	0,367014	27116,96+0,06
Polinom alsó	0,367014	27116,96+21,26
Polinom felső	0,367019	27116,96+28,56

A legszorosabb korlátokat ebben az esetben a momentum módszerek segítségével kapjuk, viszont a feladathoz szükséges momentumok kiszámítási ideje drasztikusan megnőtt. A multifa korlátok nagy előnye, hogy csak az algoritmus során felmerült viszonylag kevés számú metszetvalószínűség kiszámítására van szükség, és emiatt magasabb rendű feladatok esetén is belátható időn belül eredményt kapunk.

Összefoglalva: nagyobb m értékek esetén csak a multifa módszerek segítségével kaphatunk korlátokat, amik m növekedésével várhatóan egyre szorosabbak lesznek. A polinom alsó és felső korlátok eredményei azon esetekben lehetnek hasznosak, ha a valószínűségek eleve csak kevés esemény metszetére számolhatóak, vagy ha már az általuk adott korlátok alacsony m érték mellett is elég szorosak.

4.2.2. Hálózatok megbízhatósága

Tekintsük az alábbi aciklikus $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ digráfot. Legyen $\mathcal{N} = \{c_1, \dots, c_n\}$ a pontok és $\mathcal{A} \subset \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ az élek halmaza. Legyen c_1 a forrás, c_n a nyelő. A hálózat megbízhatósága alatt azt értjük, hogy mekkora valószínűséggel vezet hibátlan élekből álló út a forrástól a nyelőig.

A korlátozási feladat az alábbi módon fogalmazható meg. Legyen a forrástól a nyelőig vezető utak halmaza $P_1, \dots, P_N$, és jelentse A_i azt az eseményt, hogy a P_i utak összes éle hibátlan, $i = 1, \dots, N$. Ekkor a hálózat megbízhatósága:

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_N).$$

Annak a valószínűségét, hogy pár út mindegyike hibátlan élekből áll (tehát pár A_i esemény metszetének valószínűségét) ki lehet belátható időn belül számolni.

4.4. Példa. Tekintsük az alábbi 8 pontú, 16 élű hálózatot: $\mathcal{N} = \{c_1, \dots, c_8\}$ és $\mathcal{A} = \{(c_1, c_2), (c_1, c_3), (c_1, c_4), (c_1, c_5), (c_2, c_3), (c_2, c_5), (c_2, c_6), (c_3, c_4), (c_3, c_5), (c_4, c_6), (c_4, c_7), (c_5, c_6), (c_5, c_8), (c_6, c_7), (c_6, c_8), (c_7, c_8)\}$.

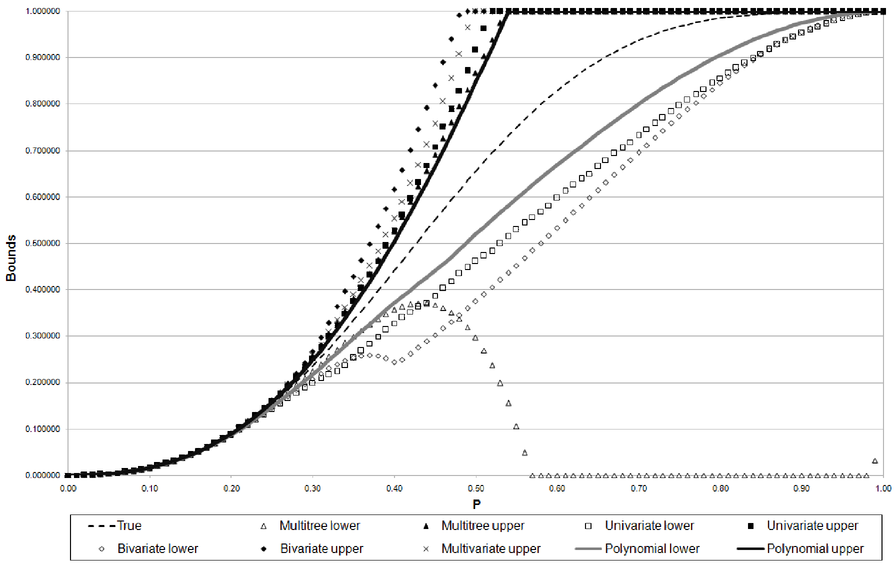
Tegyük fel, hogy az élek egymástól függetlenül, p valószínűséggel hibátlanok. Ebben az esetben csak 23 út létezik a forrásból a nyelőbe, és az összehasonlítás kedvéért a pontos megbízhatóság is kiszámolható az alábbi képlettel:

$$p^2 + 6p^3 + 5p^4 - 18p^5 - 33p^6 + 26p^7 + 129p^8 - 108p^9$$
$$-273p^{10} + 605p^{11} - 547p^{12} + 279p^{13} - 84p^{14} + 14p^{15} - p^{16}$$

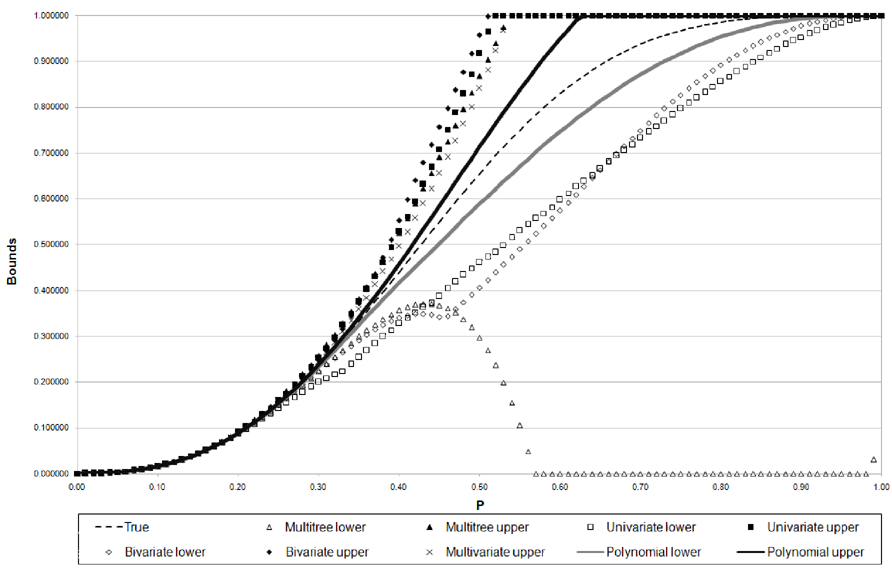
Az előző szakasz módszereit hasonlítjuk össze ebben az esetben is, az eredmények grafikus illusztrációja látható az 5. és 6. ábrákon. Az eredmények azt mutatják, hogy az $m = 3$ esetben általában a legjobb korlátot a polinom módszer adja, kivéve ha $0 \leq p \leq 0,36$, amikor a multifa korlát erősebb. Az $m = 5$ esetben végig a polinom korlát a legszorosabb.

Részletekért lásd Bukszár, Mádi-Nagy és Szántai [7], ill. Mádi-Nagy és Nagy [38].

A fenti két példában a számolások multifa korlátok esetén Fortran nyelven, az egyváltozós, kétváltozós és többváltozós korlátok esetén C++ nyelven (lásd [45]), polinom korlátok esetén pedig Java nyelven Mosek solverrel (lásd [46]) történtek.



5. ábra. A hálózat megbízhatósága $m = 3$ esetén.



6. ábra. A hálózat megbízhatósága $m = 5$ esetén.

5. Összefoglalás, további kutatási irányok

A dolgozat összefoglalta a többváltozós diszkrét momentum probléma fogalmait, megoldási módszereit, alkalmazási területeit. Sok esetben ismerjük a duál megengedett bázisok kellően nagy számosságú halmazát, ezek segítségével pedig közvetlen, akár képletszerű korlátokat adhatunk, illetve kezdőbázisként is használhatjuk őket duál szimplex megoldó algoritmusokhoz. Ismertettünk egy módszert, mellyel lényegében bármilyen TDMP-feladat numerikusan stabilan megoldható. Bemutattuk, hogy a TDMP közvetlenül alkalmas speciális függvények várható értékének becslésére, illetve a binomiális momentumokon keresztül valószínűségek korlátozására.

Az egyik legfontosabb módszertani nyitott kérdés, hogy

– létezik-e olyan (gyakorlatban is használható) TDMP-feladat, mely esetén a duál megengedett bázisstruktúrák teljes halmaza leírható.

Érdekes, még nem vizsgált területek lehetnek például:

– hogyan lenne használható a TDMP 'k-out-of-r' típusú hálózati megbízhatóságok becslésére, ill. esetleg más sztochasztikus hálózati feladatok (pl. PERT) esetén,

– a TDMP és a többváltozós Lagrange-interpoláció kapcsolatának vizsgálata,

– nem egzakt momentum információkkal rendelkező TDMP-feladatok vizsgálata.

Mások által folytatott diszkrét momentum problémával kapcsolatos kutatások közül érdekes irány például a nem feltétlenül egész kitevőjű hatványmomentumok használata, lásd Ninh és Prékopa [44]. A másik intezíven kutatott irány, hogy unimodalitást feltételezve az eloszlásról, hogyan javíthatóak a korlátok, lásd pl. Subasi et al. [61]. Prékopa András egyik utolsó publikációjában (Prékopa, Ninh és Alexe [57]) két társszerzőjével közösen nagyon szép kapcsolatot tárt fel a diszkrét és a folytonos korlátozó momentum problémák között.

Hivatkozások

[1] Apfloat: http://www.apfloat.org/apfloat_java/

[2] Arrow, K.: *Essays in the Theory of Risk Bearing,* Chap. **3**, Amsterdam: North-Holland (1970)

[3] Bienaymé, I.: *Considérations a l'appui de la découverte de Laplace sur la loi de probabilité dans la méthode des moindres carré*, C. R. Acad. Sci. Paris, **37** (1853), 309–326.

[4] Blyth, M. G., H. Luo and C. Pozrikidis: *A comparison of interpolation grids over the triangle or the tetrahedron*, J Eng Math **56** (2006), 263–272.

[5] Boros, E. and A. Prékopa: *Closed form two-sided bounds for probabilities that at least r and exactly r out of n events occur*, Math. Oper. Res. **14** (1989), 317–342.

[6] Bukszár, J.: *Hypermultitrees and sharp Bonferroni inequalities*, Mathematical Inequalities & Applications **6(4)** (2003), 727–743.

[7] Bukszár, J., G. Mádi-Nagy and T. Szántai: *Computing Bounds for the Probability of Union of Events by Different Methods*, Annals of Operations Research **201(1)** (2012), 63–81.

[8] Bukszár, J. and A. Prékopa: *Probability Bounds with Cherry Trees*, Mathematics of Operations Research **26(1)** (2001), 174–192.

[9] Bukszár, J. and T. Szántai: *Probability bounds given by hypercherry trees* Optimization Methods and Software **17** (2002), 409–422.

[10] Caballe, J. and A. Pomansky: *Mixed Risk Aversion*, Journal of Economic Theory **71** (1996), 485–513.

[11] Chander, P.: *Repetitive Risk Aversion*, Economic Theory **29** (2006), 701–711.

[12] Chebyshev, P.: *Sur les valeurs limites des intégrales*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **19** (1874), 157–160.

[13] Chebyshev, P.: *Sur deux théorèmes relatifs aux probabilités*, Acta Math. **14** (1890), 305–315.

[14] Chen, T. and E. Seneta: *A Refinement of Multivariate Bonferroni-Type Inequalities*, J. Appl. Probab. **37(1)** (2000), 276–282.

[15] Dyer, J. S., P. C. Fishburn, R. E. Steuer, J. Wallenius and S. Zionts: *Multiple Criteria Decision Making, Multiattribute Utility Theory: The Next Ten Years*, Management Science **38** No. **5** (1992), 645–654.

[16] Dyer, J. S., R. K. Sarin: *Measurable Multiattribute Value Functions*, Operations Research **27** (1979), 810-822.

[17] Farouki, R. T.: *Legendre-Bernstein basis transformations*, Journal of Computational and Applied Mathematics **119** (2000), 145–160.

[18] Gasca, M. and T. Sauer: *Polynomial interpolation in several variables*, Adv. Comput. Math. **12** (2000), 377–410.

[19] Gasca, M. and T. Sauer: *On the history of multivariate polynomial interpolation*, J. Comput. Appl. Math. **122** (2000), 23–35.

[20] Galambos, J. and Y. Xu: *Some Optimal Bivariate Bonferroni-Type Bounds*, Proc. of the American Mathematical Society **117(2)** (1993), 523–528.

[21] Galambos, J. and Y. Xu: *Bivariate Extension of the Method of Polynomials for Bonferroni-type Inequalities*, J. Multivariate Analysis **52** (1995), 131–139.

[22] Gautschi, W.: *The Condition of Vandermonde-like Matrices Involving Orthogonal Polynomials*, Linear Algebra and its Applications **52/53** (1983), 293–300.

[23] Gouda, A. A. and T. Szántai: *On numerical calculation of probabilities according to Dirichlet distribution*, Annals of Operations Research **177(1)** (2010), 185–200.

[24] Ibrahim A., A., A. R. Mugdadi: *Bounds of moment generating functions of some life distributions*, Statist. Papers **46** No. **4** (2005), 575–585.

[25] ILOG CPLEX: `http://www-01.ibm.com/software/integration/optimization/cplex/`

[26] Ingersoll Jr., J. E.: *Theory of Financial Decision Making*. Totowa: Rowman and Littlefield (1987)

[27] Isaacson, E. and H. B. Keller: *Analysis of Numerical Methods*. Wiley, New York (1966)

[28] Keeney, R. L. and H. Raiffa: *Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs*, New York: Wiley (1976)

[29] Kjeldsen, T. H.: *The early history of the moment problem*, Historia Math. **20** (1993), 19–44.

[30] Krein, M. G. and A. A. Nudelman: *The Markov Moment Problem and Extremal Problems*. Translations of Mathematical Monographs **50**, AMS, Providence, RI, (1977)

[31] Lee, M.-Y.: *Improved bivariate Bonferroni-type inequalities*, Statistics and Probability Letters **31** (1997), 359–364.

[32] Li, R-C.: *Asymptotically Optimal Lower Bounds For the Condition Number of a Real Vandermonde Matrix*, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications **28(3)** (2006), 829–844.

[33] Lyche, T. and J. M. Peña: *Optimally stable multivariate bases*, Advances in Computational Mathematics **20** (2004), 149–159.

[34] Mádi-Nagy, G.: *A method to find the best bounds in a multivariate discrete moment problem if the basis structure is given*, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica **42(2)** (2005), 207–226.

[35] Mádi-Nagy, G.: *On Multivariate Discrete Moment Problems: Generalization of the Bivariate Min Algorithm for Higher Dimensions*, SIAM Journal on Optimization **19(4)** (2009), 1781–1806.

[36] Mádi-Nagy, G.: *Application of the Solution of the Univariate Discrete Moment Problem for the Multivariate Case*, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica **47(4)** (2010), 485–504.

[37] Mádi-Nagy, G.: *Polynomial bases on the numerical solution of the multivariate discrete moment problem*, Annals of Operations Research **200(1)** (2012), 75–92.

[38] Mádi-Nagy, G. and Z-Cs. Nagy: *Sharp Bounds of the Multivariate Discrete Moment Problem: Approximations of CDF Values and Reliability Levels*, RUTCOR Research Report 6-2013 (2013)

[39] Mádi-Nagy, G. and A. Prékopa: *On Multivariate Discrete Moment Problems and their Applications to Bounding Expectations and Probabilities*, Mathematics of Operations Research **29(2)** (2004), 229–258.

[40] Mádi-Nagy, G. and A. Prékopa: *Bounding Expectations of Functions of Random Vectors with Given Marginals and Some Moments: Applications of the Multivariate Discrete Moment Problem*, Mathematical Inequalities and Applications **14(1)** (2007), 101–122.

[41] Mádi-Nagy, G. and A. Prékopa: *Bivariate Bonferroni-type inequalities based on multivariate Lagrange interpolation*, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica **52(1)** (2015), 21–39.

[42] Markov, A.: *On Certain Applications of Algebraic Continued Fractions*, Ph.D. thesis, St. Petersburg, Russia (1884)

[43] MOSEK: `https://mosek.com/`

[44] Ninh, A. and András Prékopa: *The discrete moment problem with fractional moments*, Operations Research Letters **41(6)** (2013), 715–718.

[45] Numerical Applications: `http://math.bme.hu/~gnagy/appl/applications.htm`

[46] Numerical MDMP: `https://github.com/gmnagy/numerical-mdmp`

[47] Pratt, J. W.: *Risk aversion in the small and in the large*, Econometrica **32** (1964), 122–136.

[48] Prékopa, A.: *Boole-Bonferroni inequalities and linear programming*, Oper. Res. **36** (1988), 145–162.

[49] Prékopa, A.: *Sharp bounds on probabilities using linear programming*, Oper. Res. **38** (1990), 227–239.

[50] Prékopa, A.: *The discrete moment problem and linear programming*, Discrete Appl. Math. **27** (1990), 235–254.

[51] Prékopa, A.: *Inequalities on expectations based on the knowledge of multivariate moments*, in Stochastic Inequalities, M. Shaked and Y. L. Tong, eds., Lecture Notes Monogr. Ser. **22**, Inst. Math. Statist., Hayward, CA, (1992), 309–331.

[52] Prékopa, A.: *Stochastic Programming*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands (1995).

[53] Prékopa, A.: *Bounds on probabilities and expectations using multivariate moments of discrete distributions*, Studia Sci. Math. Hungar. **34** (1998), 349–378.

[54] Prékopa, A.: *On Multivariate Discrete Higher Order Convex Functions and Their Applications*, RUTCOR Research Report, 39-2000, Piscataway, NJ, (2000).

[55] Prékopa, A. and G. Alexe: *Dual Methods for the Numerical Solution of the Univariate Power Moment Problem*, RUTCOR Research Report, 14–2003, Piscataway, NJ, (2003).

[56] Prékopa, A. and G. Mádi-Nagy: *A class of multiattribute utility functions*, Econom. Theory **34** (2008), 591–602.

[57] Prékopa, A., A. Ninh and G. Alexe: *On the relationship between the discrete and continuous bounding moment problems and their numerical solutions*, Annals of Operations Research **238(1–2)** (2016), 521–575.

[58] Ross, S. M.: *Introduction to Probability Models*, Wiley, New York (2002).

[59] SAMUELS, S. M. AND W. J. STUDDEN: *Bonferroni-type probability bounds as an application of the theory of Tchebycheff system*, in Probability, Statistics and Mathematics, Papers in Honor of Samuel Karlin, Academic Press, Boston, (1989), 271–289.

[60] SKEEL, R. D.: *Scaling for Numerical Stability in Gaussian Elimination*, Journal of the Association for Computing Machinery **26(3)** (1979), 494–526.

[61] SUBASI, M. M., E. SUBASI, A. BINMAHFOUDH, A. PRÉKOPA: *New bounds for the probability that at least k-out-of-n events occur with unimodal distributions*, Discrete Applied Mathematics, to appear. (2017)

[62] WOLFRAM MATHEMATICA: `http://www.wolfram.com/`

Mádi-Nagy Gergely 1997-ben végzett az ELTE matematikus szakán, majd itt is doktorált alkalmazott matematikából, Prékopa András témavezetése alatt.
A szerző tudományos pályafutása során több ösztöndíjat is elnyert, melyek segítségével egy évet Londonban (TEMPUS-ösztöndíj), egy évet pedig Tübingenben (DAAD-ösztöndíj) töltött, illetve ifjúsági OTKA-pályázata segítségével a Rutgers Egyetemen volt látogató. Fiatal kutatóként Farkas Gyula-díjban részesült.
A szerző az ELTE Operációkutatási Tanszékének, illetve a BME Matematikai Intézetének adjunktusa, 2018 májusától pedig a Morgan Stanley kockázati modellező munkatársa.

MÁDI-NAGY GERGELY
ELTE Operációkutatási Tanszék
e-mail: gmnagy@gmail.com

MULTIVARIATE DISCRETE MOMENT PROBLEMS AND THEIR APPLICATIONS

GERGELY MÁDI-NAGY

The multivariate discrete moment problem was introduced by András Prékopa in the late 80's. He showed that the problem can be modeled as a (poorly conditioned) linear programming problem. Under certain conditions of the objective function, it was possible to describe the complete set of the dual feasible bases, and on this basis, to develop a numerically stable dual solving algorithm. The methodology provides us with numerical as well as closed-form sharp probability bounds. They can be used e.g. for estimating cumulative distribution function values, bounding network reliability, and constructing Boole-Bonferroni type inequalities.

I wrote my Ph.D. thesis under the supervision of András Prékopa on the topic of multivariate generalization of the discrete moment problem. During our joint work, which continued after the PhD degree, we studied the feasible basis structures of the multivariate case with different moment conditions, supplemented by new applications (e.g. expected utility estimation). With multivariate modeling, it has been possible to give better bounds than the results of the univariate model in many applications, and to develop Boole-Bonferroni-type inequalities using mixed moments.

This article summarizes the results of our joint work and their further developments. I recommend the paper to memory of András Prékopa.

Alkalmazott Matematikai Lapok **35** (2018), 125–144

MIRE JÓK A STABIL PÁROSÍTÁSOK?

(Stabil párosítások és alkalmazásaik)

FLEINER TAMÁS

A stabil párosítás fogalmát 1962-ben Gale és Shapley vezették be. A fogalom rendkívül sikeresnek bizonyult nem csupán az ún. kétoldalú piacokra történő gyakorlati alkalmazhatósága miatt, hanem azért is, mert több, elméleti szempontból érdekes probléma esetében eredményes a stabil párosításokra (illetve azok általánosítására) alapozott megközelítés. Az alábbiakban azt mutatjuk be, hogy a stabil párosítások létezése és azok struktúrája hogyan köthető Knaster és Tarski egy fixponttételéhez, és milyen időnként meglepő alkalmazásai vannak az így kapott eredményeknek. A jelen munka alapja a 2017-ben Cegléden rendezett XXXII. Magyar Operációkutatás Konferencián elhangzott, hasonló című előadás.

1. Bevezetés

Sokat idézett cikkükben Gale és Shapley vetették fel az alábbi problémát [18]. Képzeljük el, hogy n férfi és n nő mindegyike sorba rendezi az ellentétes nem képviselőit aszerint, hogy számára az adott illető hányadikként jön szóba mint házastárs. Ha a fenti szereplők n házaspárt alkotnak, akkor az így meghatározott párosítás instabil, ha található olyan férfi és nő, akik egymást az említett sorban kölcsönösen előbbre helyezték, mint a házastársukat. Természetes cél úgy összeházasítani a példában szereplő személyeket, hogy az imént leírt instabilitás ne lépjen fel. Ez a gondolat több általánosítási lehetőséget rejt magában. Elképzelhető, hogy az egyes játékosok nem egy, hanem több házastársat keresnek. Ennek egy gyakorlati szempontból is érdekes változata az egyetemi felvételi probléma, aholis férfiak és nők helyett az egyetemi szakok és az oda jelentkezők alkotják a két, egymást sorba rendező halmazt, továbbá az egyetemi szakok mindegyike rendelkezik egy, a felvehető hallgatók számát felülről korlátozó kvótával. Ebben a modellben egy felvételi séma (aholis minden jelentkezőt legfeljebb egy szakra vesznek fel, és egyetlen szak sem lépi túl a kvótáját) akkor lesz instabil, ha van olyan szak és hallgató, hogy a szak szívesen felvenné e hallgatót (esetleg azon az áron, hogy egy számára kevésbé értékes hallgatót elutasít), és az említett hallgató pedig jobban jár, ha a felvételi séma által előírt helyett erre a szakra nyer felvételt. Érdemes megemlíteni, hogy a Magyarországon a felvi.hu által meghatározott vonalhúzásból adódó felvételi séma éppen ezt a fajta instabilitást zárja ki.

Elképzelhető az is, hogy nem minden férfi-nő (vagy szak-jelentkező) pár valósulhat meg, azaz a lehetséges házaspárokat (felvételeket) leíró gráf nem teljes páros gráf. Sőt: ennek a gráfnak még csak párosnak sem kell lennie. Erre az általánosításra vezet az a szobatárs probléma, ahol – mondjuk – kétágyas kollégiumi szobákban kell elhelyezni néhány tanulót, akik mindegyike aszerint rendezte sorba a lehetséges szobatársait, hogy mennyire szívesen lakna egy szobában az adott személlyel. Itt egy szobabeosztás instabilitása azt jelenti, hogy található két kollégista, akik szívesebben laknának együtt, mint a beosztás szerinti szobatársukkal.

További, a gyakorlati alkalmazás szempontjából is érdekes általánosítási lehetőség, ha nem követeljük meg az egyes részvevőktől, hogy szigorú sorrendet határozzanak meg lehetséges párjaikon, így a döntetlenek is megengedettek. Az egyetemi felvételi problémában például a jelenkezőknek ugyan szigorú sorrendet kell felállítaniuk a jelentkezéseik között, ám az egyetemi szakok esetében megengedett, hogy két jelentkezőt egyformán értékeljenek, hiszen kizárólag a felvételi pontszám dönt, ami minden további nélkül megegyezhet.

Visszatérve az eredeti problémára: Gale és Shapley az ún. lánykérő algoritmus segítségével igazolták, hogy mind a házassági, mind az egyetemi felvételi problémában mindig létezik stabil megoldás. Knuth könyvében Conwaynek tulajdonítja azt az észrevételt, hogy a stabil párosítások hálót alkotnak [28]. Ez a megfigyelés később elengedhetetlenül fontosnak bizonyult számos további, stabil párosításokkal kapcsolatos eredményhez. A stabil párosítások vizsgálata egyébként számos tudományterület eszköztárát felhasználja: Knuth már említett [28] könyvét egyfajta algoritmuselméleti bevezetőnek szánta azzal, hogy egy kézzelfogható példán szemléltessen számos, az algoritmusok tervezéséhez és analíziséhez szükséges módszert. A ma már klasszikus bonyolultságelméleti és további algoritmikus vonatkozások tekintetében érdemes megemlíteni még Gusfield és Irving könyvét is [20]. A stabil párosításokon történő optimalizálás is természetes feladat, és ehhez különféle poliéderes módszerek bizonyulnak hasznosnak [41, 36, 5, 33, 1, 40, 11]. A gyakorlati alkalmazások kapcsán pedig a játékelméletből ismerős fogalmak és módszerek bukkannak fel, elég talán csak Roth és Sotomayor könyvét említeni [35].

Mai tudásunk alapján bátran kijelenthető, hogy Gale és Shapley a stabil párosítás fogalmának bevezetésével jóval többet ért el, mint a cikkükben megfogalmazott célt, azaz a matematikai-játékelméleti gondolkodásmód népszerűsítését. A munkájuk nyomán indult kutatás eredményeiből világossá válik, hogy mind a gyakorlati alkalmazások, mind pedig az elméleti jelentőségű eredmények okán kivételesen jól eltalált és használható fogalommal van dolgunk. Az előbbi tényt a stabil párosítások elméletében és a mechanizmustervezésben kifejtett munkásságukért 2012-ben Rothnak és Shapleynek ítélt közgazdasági Nobel-emlékdíjnál talán nem is kell jobban indokolni, míg az utóbbira példa lehet Galvinnak a Dinitz-sejtésre adott, lényegében stabil párosításokat felhasználó bizonyítása [19] vagy Király váratlan áttörést hozó közelítő algoritmusa [25].

Érdemes még néhány szót szólni az általánosításokkal kapcsolatos eredményekről. Az általánosított stabilitásfogalom manifesztálódhat részben rendezett halmazok közös antiláncában vagy matroidok közös függetlenjében [14], de definiálható hálózati folyamok stabilitása is a közgazdaságtanból ismert ellátási láncok egyfajta modelljeként [12]. A stabil folyammodell szorosan kapcsolódik Ostrovskyéhoz, ami bizonyos tekintetben általánosabb, másfelől speciálisabb az előbbinél [30]. Minden esetre a közgazdász-szakirodalomban komoly áttörést hozott, és számos további eredmény kiindulópontja lett.

A stabil párosításoknak mára már komoly irodalma van. A tudomány 2013 körüli állását csak az algoritmikus vonatkozások tekintetében foglalja össze Manlove impozáns könyve [29]. A jelen munka egy ennél sokkal szerényebb célt tűz ki maga elé: az olvasót egy unortodox módszer alkalmazásába vezeti be, és mutat rá annak néhány érdekes vonatkozására. Mintegy mellékesen igyekszik megváltoztatni a stabil párosítások „történelméről" alkotott képet is. Emlékezetes, hogy Gale és Shapley 1962-ben publikálták az első cikket a témában. Később Roth mutatott rá arra, hogy a lánykérő algoritmus egy változata már 1952 óta alkalmazásban van az USA-ban [32], a stabil párosítások ismert történelme tehát inkább ekkortól kezdődik. Mi arra teszünk kísérletet, hogy még korábbra, konkrétan 1928-ra datáljuk a történet kezdetét, amikoris Knaster és Tarski egy monoton halmazfüggvényekről szóló fixponttételt publikáltak (akkor még bizonyítás nélkül) [27]. Később, 1955-ben Tarski igazolt egy hálóelméleti általánosítást, aminek alkalmazhatóságát különféle, analízisből ismert középértéktételek levezetésével illusztrálta [39]. Kiderült, hogy a tételnek már a véges esetben is nemtriviális következményei vannak. Világosan megmagyarázza ugyanis, hogy miért is működik a lánykérő algoritmus, illetve a fixpontok hálótulajdonságából közvetlenül levezethetővé válik a stabil párosítások hálótulajdonsága. A stabil párosítások és a monoton leképezések fixpontjai közti kapcsolatot a Kelso és Crawford munkája nyomán bevezetett kiválasztási függvények alkalmazása teremti meg [24].

Terjedelmi okok miatt nem térünk ki a részletekre, csak megemlítünk néhány további, stabil párosítások általánosításaival kapcsolatos jelentős eredményt. Sokáig kérdés volt, hogy egy nem feltétlenül páros gráfban eldönthető-e polinomidejű algoritmussal a stabil párosítás létezése. A pozitív válasz Irvingtől származik, aki a lánykérő algoritmus lépéseiből álló első fázis után ún. rotációkat eliminál algoritmusa második fázisában, míg végül stabil párosítást talál, ha egyáltalán van ilyen a gráfban [23]. Tan később kiterjesztette Irving algoritmusát, és ennek segítségével igazolta stabil félpárosítások létezését, amelyek $\frac{1}{2}$ súlyú éleket is tartalmazhatnak [38]. Az is kiderült, hogy pontosan akkor van stabil párosítás egy gráfban, ha minden stabil félpárosítás stabil (egész)párosítás. Aharoni és Fleiner arra mutattak rá, hogy a stabil félpárosítás létezése a Scarf-lemma következményeként is felfogható, a Scarf-lemma pedig tekinthető a Brouwer-féle fixponttétel egy rokonának [3]. Ilyenformán a stabil párosítások fixpontokként is kezelhetők, páros gráf esetén egy monoton halmazfüggvény, nempáros gráf esetén egy ennél bonyolultabb leképezésként. Cechlárová és Fleiner a stabil b-párosítás keresésére adtak eljárást Irving algoritmusának általánosításával [8]. Biró szerzőtársaival a stabil párosítások változását vizsgálta abban az esetben, ha egy új játékos jelenik meg a piacon. Eredményei segítségével nempáros gráf esetén is definiálható egyfajta barát-ellenség viszony a játékosok között aszerint, hogy ha az egyikük távozik, akkor ettől a másik helyzete javul-e vagy romlik [6].

A jelen munka az alábbiak szerint épül fel. Az 1.1. részben a stabil párosításokkal kapcsolatos alapvető terminológiát tisztázzuk, és egy kevéssé ismert bizonyítást adunk a Gale–Shapley-tételre. Az 1.2. részben tárgyaljuk a további modellek szempontjából alapvető fontosságú kiválasztási függvényeket és azok számunkra fontos tulajdonságait. Az 1.3. részben arra mutatunk rá, hogy a lánykérő algoritmus kulcsa Tarski fixponttétele. Ez a megfigyelés rendkívül hatékony eszköznek bizonyul különféle általánosítások és kiterjesztések igazolásához. Ilyenekre látunk példát a 2. részben, aholis matroidokra, ill. részbenrendezésekre mutatunk be stabilitásjellegű eredményeket. Ezután a 3. részben különféle kernelek hálótulajdonságával kapcsolatban mutatunk rá néhány érdekes tényre. Az ezt követő 4. rész további, időnként meglepő alkalmazásokra mutat be néhány példát. A Tarski-féle fixponttétel szerint monoton leképezés fixpontjai hálót alkotnak, ezért bizonyos stabil párosítás poliéderekre közvetlenül alkalmazható Hoffman-hálópoliéderekről szóló egyik eredménye. Az 5. részben ennek segítségével adjuk meg különféle általánosított stabil párosítás poliéderek egyfajta implicit karakterizációját. Ugyanitt említjük meg a stabil b-párosítás poliédernek egy kevésbé implicit leírását is, amely a stabil b-párosítások egy meglepő tulajdonságát aknázza ki. Végül a 6. rész foglalja össze az áttekintett anyagot.

1.1. Stabil párosítások

Legyen $G = (V, E)$ gráf, és legyen minden v csúcsra adott a v-re illeszkedő élek $E(v)$ halmazának egy $\preceq_v$ lineáris rendezése, amit preferenciarendezésnek is szokás nevezni. Azt mondjuk, hogy az e él *jobb* a v számára az f élnél, ha $e \preceq_v f$ teljesül. Élek egy $M \subseteq E$ halmaza *párosítás*, ha az M-beli éleknek nincs közös csúcsa, azaz $d_M(v) \leq 1$ teljesül minden $v \in V$ csúcsra. Tetszőleges $b : V \to \mathbb{N}$ korlátok esetén az $M \subseteq E$ halmazt *b-párosításnak* nevezzük, ha $d_M(v) \leq b(v)$ teljesül G minden v csúcsára. Világos, hogy a párosítás a b-párosítás speciális esete, mégpedig $b \equiv 1$ esetén. Azt mondjuk, hogy az M párosítás *dominálja* az $e = uv$ élt, ha M-nek van olyan m éle, amire $m \preceq_u f$, vagy $m \preceq_v f$ teljesül. Hasonlóan, az M b-párosítás *b-dominálja* az $e = uv$ élt, ha M-nek vannak olyan $m_1, \ldots, m_k$ élei, amire $m_i \preceq_u f$ teljesül minden $1 \leq i \leq k = b(u)$ esetén, vagy $m \preceq_v f$ teljesül minden $1 \leq i \leq k = b(v)$ esetén. Az e él akkor *blokkolja* az M (b-)párosítást, ha M nem (b-)dominálja e-t. Végül M akkor *stabil* (b-)párosítás, ha nincs blokkoló él, azaz, ha M minden M-en kívüli élt dominál. Ha például G

egy páratlan kör, és valamilyen körüljárás szerint minden csúcs a körüljárásban korábbi élt preferálja a későbbihez képest, akkor könnyen látható, hogy G-nek nincs stabil párosítása. Páros gráfok esetén azonban nem ez a helyzet, és ezt az alábbi tétel garantálja.

1.1. TÉTEL. (Gale és Shapley [18]) *Tetszőleges G páros gráfon tetszőleges preferenciák esetén létezik stabil párosítás.*

Gale és Shapley valójában a fenti tételt a $K_{n,n}$ teljes páros gráfra igazolták, azonban ezt az eredményt kiterjesztve azt is megmutatták, hogy mindig létezik stabil b-párosítás, ha $b \equiv 1$ teljesül a páros gráf egyik színosztályán. Gale és Shapley bizonyítása a lánykérő algoritmus, ami a probléma tetszőleges bemenetéhez hatékonyan talál egy stabil párosítást. Az algoritmus működése (fiú-lány-házasság terminológiában) az alábbi. Először minden fiú megkéri a számára legszimpatikusabb lány kezét. Ha minden fiú más-más lányt kér meg, akkor a lánykérésekből házasságok lesznek, és ez stabil. Ha azonban van olyan lány, akit egynél több fiú kér meg, úgy az ilyen lányok a legjobb kérőjük kivételével minden más kérőjüket kikosarazzák. Ha történt kikosarazás, úgy a fiúk ismételten megkérik a legszimpatikusabb olyan lány kezét, aki még nem kosarazta ki az adott fiút. Előbb utóbb nem lesz kikosarazás: ekkor az utolsó lánykérésekből házasságok lesznek, és az így kapott párosítás az algoritmus outputja.

Gale és Shapley cikkükben megjegyzik, hogy a tárgyalt eredmény kiváló ellenpélda arra a közkeletű vélekedésre, miszerint minden valamirevaló matematikai levezetés óhatatlanul nehéz számításokat és/vagy különféle obskurus képleteket tartalmaz. A lánykérő algoritmus leírása, ill. helyességének igazolása például mentes mindezektől, mégis egyértelműen egy „tisztességes" matematikai bizonyítás. Mindezt nem vitatva, az alábbiakban rámutatunk az algoritmus helyességének egy unortodox bizonyítására. Ez egyetlen, nempáros gráfokra is érvényes, apró megfigyelésen alapul.

1.1. LEMMA. *Legyen $G = (V, E)$ (nem feltétlenül páros) gráf minden v csúcsához megadva a $\preceq_v$ preferenciarendezés a v-re illeszkedő élek $E(v)$ halmazán, valamint tegyük fel, hogy $e \prec_v f$ teljesül arra az $e = uv$ élre, ami első az u szerinti $\preceq_u$ rendezés szerint. Ekkor G-ben a stabil párosítások halmaza megegyezik a $G - f$ gráf stabil párosításainak halmazával.*

A lemma szerint tehát „ingyen" törölhetünk G-ből bizonyos éleket anélkül, hogy ettől akár csak egy stabil párosítás is eltűnne vagy keletkezne. Páros gráf esetén ezekkel a lépésekkel előbb-utóbb oda jutunk, hogy nem lehet további élt törölni, ezért mind a fiúk, mind a lányok más-más lányt, ill. fiút szerepeltetnek a preferenciasorrendjük élén. Könnyen látható, hogy ilyenkor mind a fiúk legjobb választásai, mind a lányok legjobb választásai egy-egy stabil párosítást határoznak meg az éltörlések utáni gráfban, így persze az 1.1. lemma többszöri alkalmazása miatt az eredeti G gráfban is. Sőt, az is azonnal látszik a gondolatmenetből, hogy a lánykérő algoritmus által szolgáltatott stabil párosítás *fiúoptimális*, ami azt jelenti, hogy abban minden fiú a számára stabil párosításban elérhető legszimpatikusabb lányt kapja feleségül. De az is következik mindebből, hogy ez az eljárás minden lány a számára lehető legrosszabb olyan férjet szolgáltatja, aki stabil párosításban az adott lány párja lehet.

A fent vázolt bizonyítás minimális módosítással igazolja a lánykérő algoritmus b-párosításokra történő értelemszerű kiterjesztésének helyességét, valamint azt is, hogy a megtalált stabil b-párosítás a fenti értelemben optimális lesz az ajánlatokat tevő oldal számára.

Gráfelméleti módszerekkel nem nehéz a fiúoptimális párosítás létezésének azt az általánosítását sem igazolni, amely szerint a stabil (b-)párosítások hálót alkotnak az alábbiak szerint. Ha M_1 és M_2 stabil (b-)párosítások, és minden fiú az $M_1 \cup M_2$-ből szabadon választja magának a (b-)párosítás él(eke)t, akkor az így választott élek ismét stabil (b-)párosítást alkotnak.

1.2. Kiválasztási függvények

Stabil párosítások és általánosításaik vizsgálatakor rendkívül hasznos segédeszköz a kiválasztási függvény fogalma, mely segítségével könnyen leírható az egyes játékosok preferenciája. Az alább leírt tárgyalásmód unortodoxiája a determinánsokra alapozott felépítés. Tetszőleges E alaphalmaz esetén az $\mathcal{F} : 2^E \to 2^E$ leképezés

- *kiválasztási függvény*, ha van olyan $\mathcal{D} : 2^E \to 2^E$ leképezés, amelyre $\mathcal{F}(X) = X \cap \mathcal{D}(X)$ teljesül az E minden X részhalmazára (az ilyen $\mathcal{D}$ leképezést az $\mathcal{F}$ *determinánsának* nevezzük), ill.
- *monoton*, ha $\mathcal{F}(X) \subseteq \mathcal{F}(Y)$ teljesül $X \subseteq Y \subseteq E$ esetén, valamint
- *antiton*, ha $\mathcal{F}(X) \subseteq \mathcal{F}(Y)$ teljesül $Y \subseteq X \subseteq E$ esetén, végül
- *komonoton*[1], ha $\mathcal{F}$ olyan kiválasztási függvény, aminek van antiton determinánsa[2].

Világos, hogy $\mathcal{F}$ pontosan akkor kiválasztási függvény, ha $\mathcal{F}(X) \subseteq X$ teljesül minden $X \subseteq E$ esetén, továbbá, hogy egyazon kiválasztási függvénynek számos különböző determinánsa létezhet, $\mathcal{F}$ például mindig determinánsa saját magának. A „tankönyvi” példa komonoton kiválasztási függvényre a fiúk kiválasztási függvénye a Gale–Shapley-modellben.

[1] Az angol nyelvű szakirodalomban „substitutable” tulajdonságnak nincs frappáns magyar neve, ezért most a komonoton kifejezést használjuk, utalva arra, hogy a ki nem választott elemek által definált kiválasztási függvény monoton.

[2] A komonoton tulajdonság szokásos definíciója azt kívánja meg, hogy tetszőleges $X \subseteq E$ és $e \in E$ esetén $X \cap F(X+e) \subseteq F(X)$ teljesüljön. Ez szemléletesen azt jelenti, hogy ha egy lehetőség nem érdekel bennünket, akkor a választék bővülésétől ugyanez a lehetőség nem válik értékessé.

1.1. Példa. Legyen $G = (V, E)$ véges páros gráf, melynek színosztályait a fiúk F, ill. lányok L halmaza alkotja, és tartozzék minden $v \in V$ csúcshoz egy $\preceq_v$ lineáris rendezés a v-re illeszkedő élek $E(v)$ halmazán. Ekkor tetszőleges $X \subseteq E$ élhalmazból a fiúk által kiválasztott élek $\mathcal{F}_F(X)$ halmaza nem más, mint azon X-beli $e = fl$ élek halmaza, amelyre e az f fiú számára a legjobb él X-ben a $\preceq_f$ rendezés szerint.

Az 1.1. példában szereplő kiválasztási függvény egy könnyen láthatóan antiton determinánsa például a $\mathcal{D}_F(X) := \bigcup_{v \in F} \bigcap_{e \in X \cap E(v)} \mathcal{D}_F(v, e)$ leképezés, ahol $e \in E(v)$ esetén $\mathcal{D}_F(v, e) := \{e' \in E(v) : e' \preceq_v e\}$ azon élek halmaza, amelyek v számára a $\preceq_v$ preferencia szerint jobbak e-nél. A fenti példabelihez hasonlóan definiálható a lányok $\mathcal{F}_L$ kiválasztási függvénye és az ahhoz tartozó $\mathcal{D}_L$ determináns.

1.1. Megfigyelés. Az $S \subseteq E$ pontosan akkor stabil párosítás a $G = (V, E)$ páros gráfban, ha vannak olyan $X, Y \subseteq E$ élhalmazok, amelyekre $\mathcal{D}_F(X) = Y$ és $\mathcal{D}_L(Y) = X$ teljesül.

Kiválasztási függvényeknek a mi szempontunkból alapvető fontosságú tulajdonságai az alábbiak. Az $\mathcal{F} : 2^E \to 2^E$ kiválasztási függvény

- *IRC* tulajdonságú, ha tetszőleges $\mathcal{F}(X) \subseteq Y \subseteq X$ esetén $\mathcal{F}(X) = \mathcal{F}(Y)$ teljesül,
- *útfüggetlen*, ha $X, Y \subseteq E \Rightarrow \mathcal{F}(X \cup Y) = \mathcal{F}(X \cup \mathcal{F}(Y))$,
- *növekedő*, ha $X \subseteq Y$ esetén $|\mathcal{F}(X)| \leq |\mathcal{F}(Y)|$ áll.

1.2. Megfigyelés. Legyen E véges halmaz és $\mathcal{F} : 2^E \to 2^E$ komonoton kiválasztási függvény. Ekkor $\mathcal{F}$ pontosan akkor IRC tulajdonságú, ha $\mathcal{F}$ útfüggetlen. Továbbá, ha $\mathcal{F}$ növekedő, akkor $\mathcal{F}$ útfüggetelen (és így IRC tulajdonságú) is egyúttal.

1.2. Lemma. (Fleiner, Jankó [16]) *Legyen E véges halmaz és $\mathcal{F} : 2^E \to 2^E$ komonoton kiválasztási függvény. Ekkor $\mathcal{F}$ pontosan akkor útfüggetlen, ha $\mathcal{F}$-nek létezik olyan $\mathcal{D}$ antiton determinánsa, amelyre*

$$\mathcal{D}(X) = \mathcal{D}(\mathcal{F}(X)) \text{ teljesül tetszőleges } X \subseteq E \text{ esetén.} \tag{1}$$

1.3. Tarski fixponttétele és a Gale–Shapley-algoritmus

Az $(L, \preceq)$ részbenrendezett halmazt (avagy posetet) *hálónak* nevezzük, ha bármely $x, y \in L$ elemnek van egy $x \wedge y$-nal jelölt legnagyobb alsó, és egy $x \vee y$-nal jelölt legkisebb felső korlátja. Ha a részbenrendezés világos a szövegkörnyezetből, akkor a beszélhetünk L hálóról. Az L háló akkor *teljes*, ha tetszőleges $X \subseteq L$

halmaznak van egy $\bigwedge X$-szel jelölt legnagyobb alsó és egy $\bigvee X$-szel jelölt legkisebb felső korlátja. Teljes háló esetén 0, ill. 1 jelöli a háló legkisebb és legnagyobb elemét, azaz $0 = \bigwedge L$, ill. $1 = \bigvee L$. Világos, hogy minden véges háló teljes, ám ez fordítva nem igaz, pl. az egész számok véges részhalmazai ugyan hálót alkotnak a tartalmazkodásra, de ennek a halmaznak nincs legnagyobb eleme, így ez a háló nem teljes. Az előző, 1.2. részben definiált fogalmak minden további nélkül definiálhatók hálókon azzal, hogy a $\subseteq$ reláció a háló $\preceq$ rendezésének, a $\cap$ és $\cup$ műveletek pedig a $\wedge$ és $\vee$ hálóműveleteknek felelnek meg. Teljes hálókról szól Tarski alábbi fixponttétele.

1.2. Tétel. (Tarski [39]) *Ha $(L, \preceq)$ teljes háló, és $\mathcal{F} : L \to L$ monoton leképezés, akkor $\mathcal{F}$ fixpontjainak halmaza nem üres, továbbá $\mathcal{F}$ fixpontjainak halmaza teljes hálót alkot a $\preceq$ rendezésre nézve.*

Megemlítjük, hogy a számunkra legfontosabb $(L, \preceq) = (2^E, \subseteq)$ esetre az 1.2. tételt Knaster és Tarski bizonyították [27]. Ugyancsak érdemes megfigyelni, hogy véges L háló esetén a legkisebb fixpont megkapható, mint a $0 \preceq \mathcal{F}(0) \preceq \preceq \mathcal{F}(\mathcal{F}(0)) \preceq \ldots$ lánc legnagyobb eleme. (Hasonlóan, a legnagyobb fixpont az $1 \succeq \mathcal{F}(1) \succeq \mathcal{F}(F(1)) \succeq \ldots$ lánc legkisebb eleme.) Tarski az 1.2. tétel alkalmazását végtelen hálókon különféle középértéktételek levezetésével illusztrálta. A másik jól ismert alkalmazás, a Cantor–Bernstein-tétel bizonyítása szintén végtelen hálók segítségével történik. Azonban az 1.2. tételnek már véges hálókon is izgalmas következményei vannak.

1.1. Következmény. ([10]) *Ha $\mathcal{F}, \mathcal{G} : 2^E \to 2^E$ komonoton kiválasztási függvények, akkor találhatók az E-nek olyan X, Y részhalmazai, melyre $Y = \mathcal{D}_\mathcal{F}(X)$ és $X = \mathcal{D}_\mathcal{G}(Y)$ teljesül, ahol $\mathcal{D}_\mathcal{F}$, ill. $\mathcal{D}_\mathcal{G}$ az $\mathcal{F}$, ill. a $\mathcal{G}$ egy-egy antiton determinánsa. Továbbá az ilyen tulajdonásgú (X, Y) párok hálót alkotnak a $\preceq$ rendezésre, ahol $(X_1, Y_1) \preceq (X_2, Y_2)$, ha $X_1 \subseteq X_2$ és $Y_2 \subseteq Y_1$.*

Az 1.1. következmény motiválja az alábbi definíciót.

1.1. Definíció. Legyenek $\mathcal{F}, \mathcal{G} : 2^E \to 2^E$ komonoton kiválasztási függvények. Az E alaphalmaz K részhalmazát *$\mathcal{FG}$-kernelnek* nevezzük, ha léteznek olyan $X, Y \subseteq E$ halmazok, valamint az $\mathcal{F}$ és a $\mathcal{G}$-nek olyan $\mathcal{D}_\mathcal{F}$ és $\mathcal{D}_\mathcal{G}$ antiton determinánsai, amelyekre

$$K = X \cap Y,\ Y = \mathcal{D}_\mathcal{F}(X) \text{ és } X = \mathcal{D}_\mathcal{G}(Y) \tag{2}$$

teljesül.

Az 1.1. definícióban szereplő antiton determinánsok bár általában sokféleképp választhatók, útfüggetlen kiválasztási függvények esetén nem játszanak lényeges szerepet a definícióban. Ezt mutatja az alábbi lemma.

1.3. Lemma. ([10]) *Legyenek $\mathcal{F}, \mathcal{G} : 2^E \to 2^E$ útfüggetlen és komonoton kiválasztási függvények, K egy $\mathcal{FG}$-kernel, $\mathcal{D}_\mathcal{F}$ és $\mathcal{D}_\mathcal{G}$ pedig az $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ tetszőleges,* *az (1) tulajdonsággal rendelkező antiton determinánsai. Ekkor léteznek olyan X, Y részhalmazai E-nek, amelyre (2) teljesül.*

Az 1.2. és az 1.3. lemmák miatt útfüggetlen kiválasztási függvényekre az 1.1. következmény megfogalmazható a determinánstól független módon az alábbiak szerint.

1.2. Következmény. ([10]) *Ha $\mathcal{F}, \mathcal{G} : 2^E \to 2^E$ útfüggetlen, komonoton kiválasztási függvények, akkor létezik $\mathcal{FG}$-kernel, továbbá az $\mathcal{FG}$-kernelek hálót alkotnak arra a $\preceq_\mathcal{F}$ részbenrendezésre, amire $X \preceq_\mathcal{F} Y$ pontosan akkor teljesül, ha $\mathcal{F}(X \cup Y) = X$. Ráadásul az $\mathcal{FG}$-kerneleken a $\preceq_\mathcal{F}$ részbenrendezés pontosan a fordítottja a $\preceq_\mathcal{G}$ részbenrendezésnek.*

Ha a fentieken túl az $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ kiválasztási függvények növekedők is, akkor tetszőleges K_1, K_2 $\mathcal{FG}$-kernelek esetén $K_1 \vee K_2 := \mathcal{F}(K_1 \cup K_2)$ és $K_1 \wedge K_2 := \mathcal{G}(K_1 \cup K_2)$ szintén $\mathcal{FG}$-kernelek, továbbá

$$\chi(K_1) + \chi(K_2) = \chi(K_1 \vee K_2) + \chi(K_1 \wedge K_2) \tag{3}$$

teljesül ezen kernelek karakterisztikus függvényeire.

Illusztrációként álljon itt egy példa az 1.2. következmény kernel létezéséről szóló részének alkalmazására.

1.2. Példa. (Kürschák József Matematikai Tanulóverseny, 2007, 3. feladat) Legyen H a sík rácspontjainak tetszőleges véges halmaza. Ekkor H-nak bizonyosan létezik olyan K részhalmaza, melyre az alábbi tulajdonságok teljesülnek:

1. a sík bármely tengelypárhuzamos (azaz függőleges vagy vízszintes) egyenese K-t legfeljebb 2 pontban metszi,
2. $H \setminus K$ bármely pontja rajta van egy K-beli végpontokkal rendelkező, tengelypárhuzamos szakaszon.

Az 1.1. megfigyelésből és az 1.1. következményből azonnal adódik Gale és Shapely 1.1. tétele. Ennél azonban több is látszik. Az 1.1. megfigyelés miatt a stabil párosítások megegyeznek az $\mathcal{FG}$-kernelekkel, amelyek pedig egy monoton leképezés fixpontjaival azonosak. Az 1.2. tétel miatt a fixpontok teljes hálót alkotnak, így van a fixpontok között legkisebb és legnagyobb is. Innen közvetlenül adódik, hogy a stabil párosítások között van fiúoptimális (amelyben minden fiú a legjobb olyan partnert kapja, amelyet stabil párosításban megkaphat, és egyúttal minden lány a lehetséges legrosszabb stabil partnerével van párosítva), és lányoptimális is (amely szerepcserével definiálható). Az is kiderül, hogy a Gale–Shapley-algoritmus tekinthető az imént említett monoton függvény iterációjának (ami – mint láttuk – a legkisebb, ill. legnagyobb fixpontot találja meg). Blair hálótulajdonságról szóló eredményét sem nehéz igazolni az 1.2. következmény felhasználásával.

1.3. Tétel. (Blair [7]) *Legyen* $G = (V, E)$ *egy* F *és* L *színosztályokkal rendelkező páros gráf, és legyen* $\mathcal{F}_v : 2^{E(v)} \to 2^{E(v)}$ *IRC tulajdonságú, komonoton kiválasztási függvény minden* $v \in V$ *csúcsra. Legyen*

$$\mathcal{F}(X) := \bigcup\{\mathcal{F}_v(X \cap E(v) : v \in F\}, \text{ és } \mathcal{G}(X) := \bigcup\{\mathcal{F}_v(X \cap E(v) : v \in L\} .$$

Ekkor az $\mathcal{FG}$*-kernelek (teljes) hálót alkotnak a* $\preceq_F$ *részbenrendezésre nézve, ahol* $X \preceq_F Y$ *pontosan akkor teljesül, ha* $\mathcal{F}(X \cap Y) = X$.

2. Kernel-típusú eredmények

A bevezetésben leírt fixpont-alapú megközelítés segítségével számos korábbi eredményt kiterjeszthetünk, ill. általánosíthatunk. A $P_1 = (E, \leq_1)$ és $P_2 = (E, \leq_2)$ véges posetek K közös antiláncát P_1P_2*-kernelnek* mondjuk, ha bármely $e \in E$ elemre van olyan $k \in K$ elem, amelyre $e \leq_1 k$ vagy $e \leq_2 k$ teljesül. Sands Sauer és Woodrow [37] eredményéből könnyen levezethető az alábbi tétel első része. (Igaz továbbá az is, hogy a Sands–Sauer–Woodrow-tétel levezethető a 2.1. tétel első részéből.)

2.1. Tétel. ([10]) *Tetszőleges* $P_1 = (E, \leq_1)$ *és* $P_2 = (E, \leq_2)$ *véges posetek esetén létezik* P_1P_2*-kernel. Továbbá, a* P_1P_2*-kernelek hálót alkotnak a* $\prec_1$ *rendezésre nézve, ahol* $A \prec_1 A'$ *pontosan akkor teljesül két* P_1*-beli antiláncra, ha* A *minden elemének van* A'*-beli felső korlátja.*

A 2.1. tétel azon múlik, hogy a részhalmazhoz annak maximumait rendelő leképezés komonoton útfüggetlen kiválasztási függvény. A 2.1. tétel első részét illusztrálja az alábbi példa.

2.1. Példa. (Kürschák József Matematikai Tanulóverseny, 2016, 2. feladat) A pozitív egész számok tetszőleges véges A halmazának van olyan B részhalmaza, amelyre fennáll az alábbi két feltétel.

- Ha b_1 és b_2 a B különböző elemei, akkor sem b_1 és b_2, sem pedig $b_1 + 1$ és $b_2 + 1$ nem egymás többszörösei, továbbá
- az A halmaz tetszőleges a eleméhez van B-nek olyan b eleme, amelyre a osztója b-nek, vagy $(b + 1)$ osztója $(a + 1)$-nek.

Aharoni, Berger és Gorelik igazolták a 2.1. tétel egy súlyozott változatát [2], melynek kimondásához néhány definícióra van szükség. Legyen $P = (V, \leq)$ véges poset, $w : V \to \mathbb{N}$ egy igényfüggvény, $f : V \to \mathbb{N}$ pedig egy súlyfüggvény. Tetszőleges $v \in V$ esetén legyen $f^{\uparrow}_{\leq}(v) = \max\{f(c_1) + f(c_2) + \ldots : v = c_1 < c_2 < \ldots\}$ a v-ből induló láncok összsúlyának maximuma. A fenti f súlyfüggvény $(\leq, w)$-*független*, ha

– bármely $c_1 < c_2 < \ldots < c_k$ lánc esetén $\sum_{i=1}^{k} f(c_i) \leq \max\{w(c_i) : 1 \leq i \leq k\}$ teljesül, és

– bármely $v \in V$ esetén $f(c_1) \cdot f_{\leq}^{\uparrow}(v) \leq f(c_1) \cdot w(c_1)$ áll fenn.

(Az első feltétel azt jelenti, hogy egyetlen lánc összsúlya sem haladja meg a lánc elemeinek maximális igényét, míg a második szerint pozitív súlyú c_1 elemből induló lánc összsúlya nem haladhatja meg c_1 igényét.) Könnyen látható, hogy az $(\leq, 1)$-független súlyfüggvények pontosan az antiláncok karakterisztikus vektorai.

A fenti f súlyfüggvény w-*dominálja* a P poset c_1 elemét, ha létezik olyan $c_1 < c_2 < \ldots < c_k$ lánc, amelyre $w(c_1) \leq \sum_{i=1}^{k} f(c_i)$ teljesül, azaz van olyan c_1-ből induló lánc, melynek összsúlya eléri c_1 igényét. Legyenek most $P_1 = (V, \leq_1)$ és $P_2 = (V, \leq_2)$ a V közös alaphalmazon két véges poset, és legyen $w_1, w_2 : V \to \mathbb{N}$ két igényfüggvény. E posetek (w_1, w_2)-*kernelén* olyan $f : V \to \mathbb{N}$ súlyfüggvényt értünk, amely egyszerre $(\leq_1, w_1)$-független és $(\leq_2, w_2)$-független, valamint$f$ a V alaphalmaz minden v elemét P_1-ben w_1-dominálja, vagy P_2-ben w_2-dominálja. Érdemes megfigyelni, hogy az $(1, 1)$-kernel épp a korábban definiált kernellel esik egybe. Immár kimondhatjuk a korábbban említett súlyozott kernelekről szóló tételt.

2.2. Tétel. (Aharoni, Berger, Gorelik [2]) *Legyenek* $P_1 = (V, \leq_1)$ *és* $P_2 = (V, \leq_2)$ *véges posetek, és legyen* $w : V \to \mathbb{N}$ *egy igényfüggvény. Ekkor e poseteknek létezik* (w, w)*-kernele.*

Az 1.2. tétel az 1.1. következményének hálókra történő kiterjesztésével és alkalmas hálók megfelelő kiválasztási függvényeit definiálva a 2.2. tétel általánosítható az alábbiak szerint.

2.3. Tétel. (Fleiner, Jankó [16]) *Legyenek* $P_1 = (V, \leq_1)$ *és* $P_2 = (V, \leq_2)$ *véges posetek, és legyen* $w_1 : V \to \mathbb{N}$ *és* $w_1 : V \to \mathbb{N}$ *igényfüggvények. Ekkor e poseteknek létezik* (w_1, w_2)*-kernele, továbbá a* (w_1, w_2)*-kernelek hálót alkotnak a súlyfüggvények azon* $\preceq_1$ *részbenrendezésére, amelyre* $f \preceq_1 g$ *akkor áll, ha* $f_{\leq_1}^{\uparrow} \leq g_{\leq_1}^{\uparrow}$.

Részbenrendezéseken kívül más struktúrákon is igazolhatók kernel típusú eredmények. Legyenek $\mathcal{M}_1 = (E, \mathcal{I}_1)$ és $\mathcal{M}_2 = (E, \mathcal{I}_2)$ matroidok, valamint $\leq_1$ és $\leq_2$ a közös E alaphalmazuk lineáris rendezései. E két matroid közös K függetlenjét $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2$-*kernelnek* nevezzük, ha tetszőleges $e \in E \setminus K$ elemhez valamely $i \in \{1, 2\}$-re létezik az $\mathcal{M}_i$ matroidnak olyan C köre, amelyre $C \subseteq K \cup \{e\}$ és $c \leq_i e$ teljesül minden $c \in C - e$-re.

2.4. Tétel. ([10]) *Tetszőleges* $\mathcal{M}_1 = (E, \mathcal{I}_1)$ *és* $\mathcal{M}_2 = (E, \mathcal{I}_2)$ *matroidok esetén létezik* $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2$*-kernel. Ha* $K_1, K_2 \subseteq E$ $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2$*-kernelek, akkor a* $K_1 \cup K_2$ *halmazból a* $\leq_i$ *szerint* $\mathcal{M}_i$*-n futtatott mohó algoritmus* $i = 1, 2$ *esetén* $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2$*-kernelt választ ki. E két operáció meghatározta műveletek az* $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2$*-kernelek* *halmazán olyan hálót definiálnak, amelyben érvényes a (3) tulajdonság, továbbá tetszőleges* K_1, K_2 $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2$*-kernelekre fennáll, hogy* $span_{\mathcal{M}_1} K_1 = span_{\mathcal{M}_1} K_2$*, és* $span_{\mathcal{M}_2} K_1 = span_{\mathcal{M}_2} K_2$.

A 2.4. tétel kulcsa az 1.2. következmény mellett az, hogy a matroid részhalmazán futtatott mohó algoritmussal meghatározott kiválasztási függvény egyszerre komonoton és növekedő.

3. Kernelek struktúrája

Ebben a részben különféle $\mathcal{FG}$-kerneleknek struktúráját vizsgáljuk. Az 1.2. következmény második részének a hálótulajdonságon túl egy másik következménye az, hogy $\mathcal{FG}$-kernelek hatékonyan kikeresztezhetők.

3.1. Tétel. ([10]) *Legyenek* $\mathcal{F}, \mathcal{G} : 2^E \to 2^E$ *növekedő, útfüggetlen és komonoton kiválasztási függvények, és legyenek* $K_1, K_2, \ldots, K_m$ *tetszőleges* $\mathcal{FG}$*-kernelek. Ekkor létezik* $\mathcal{FG}$*-kernelek egy* $K^1 \preceq_{\mathcal{F}} K^2 \preceq_{\mathcal{F}} \ldots \preceq_{\mathcal{F}} K^m$ *lánca, amelyre teljesül, hogy* $\sum_{i=1}^m \chi(K_i) = \sum_{i=1}^m \chi(K^i)$*, továbbá, hogy* $1 \leq j \leq m$*-re* $K^j = \mathcal{F}(supp(\sum_{i=1}^m \chi(K_i) - \sum_{i=1}^{j-1} \chi(K^i)))$.

Stabil b-párosítások esetén a 3.1. tétel különösen egyszerű alakot ölt, ám ehhez hasznos ismerni a Roth–Sotomayor-féle összehasonlítási tételnek (Comparability Theorem) [34] Baïou és Balinski által adott alábbi általánosítását.

3.2. Tétel. (Baïou és Balinski [4]) *Legyen* $G = (V, E)$ *páros gráf, minden* v *csúcsra legyen* $\preceq_v$ *lineáris rendezés a* v*-re illeszkedő élek* $E(V)$ *halmazán, valamint legyen* $b : V \to \mathbb{N}$*. Ha* S_1 *és* S_2 *stabil* b*-párosítások és* $v \in V$*, akkor az alábbi két lehetőség valamelyike áll fenn.*

- $S_1(v) = S_2(v)$ *vagy*
- $|S_1(v)| = |S_2(v)| = b(v)$ *és* $S_1(v) \cup S_2(v)$ *halmaz* $\preceq_v$ *szerint legjobb* $b(v)$ *eleme vagy* $S_1(v)$ *vagy* $S_2(v)$.

A 3.2. tétel egy következménye, hogy bárhogy is adunk meg k db stabil b-párosítást és egy v csúcsot, a b-párosítások v-re illeszkedő élhalmazain v-nek lineáris rendezése van. Stabil b-párosításokra tehát az alábbi állítás szerint érvényes, hogy ha egy páros gráf k megadott stabil b-párosításából az egyik színosztályából mindenki a számára i-edik legjobb hozzárendelést választja, akkor stabil b-párosítást kapunk.

3.3. Tétel. ([9]) *Legyen* $G = (V, E)$ *egy* B *és* G *színosztályokkal rendelkező páros gráf, minden* v *csúcsra legyen* $\preceq_v$ *lineáris rendezés a* v*-re illeszkedő élek* $E(V)$ *halmazán, valamint legyen* $b : V \to \mathbb{N}$*. Legyenek* $S_1, S_2, \ldots, S_k$ *stabil*

b-párosítások, és legyen $1 \leq i \leq k$. Jelölje az $S_1(v), S_2(v), \ldots, S_k(v)$ élhalmazok $\preceq_v$ szerinti sorrendjét $S^1(v), S^2(v), \ldots, S^k(v)$. Ekkor $S^i := \bigcup\{S^i(v) : v \in B\}$ stabil b-párosítás.

A fenti 3.3. tételt stabil párosítások esetére Teo és Sethuraman lineáris programozási eszközök felhasználásával igazolták [40], majd Klaus és Klijn (állításuk szerint a 3.3. tételt nem ismerve) adtak a miénkhez nagyon hasonló rövid bizonyítást egy speciális esetben [26].

Stabil b-párosításoknak van egy kevésbé ismert, ám rendkívül hasznos, ún. splitting tulajdonsága, ami például a stabil b-párosítás poliéder lineáris leírásához jön kapóra.

3.4. Tétel. ([11]) *Legyen a $G = (V, E)$ véges gráf minden v csúcsához megadva egy $\preceq_v$ lineáris rendezés a v-re illeszkedő élek $E(V)$ halmazán, valamint legyen $b : V \to \mathbb{N}$. Ekkor minden $v \in V$ csúcsra létezik egy olyan $E(v) = E_1(v) \cup \ldots \cup E_{b(v)}(v)$ partíció, melyre $|E_i(v) \cap S| \leq 1$ teljesül tetszőleges S stabil b-párosításra, v csúcsra és $1 \leq i \leq b(v)$ indexre.*

A 3.4. tételből igazolható, hogy tetszőleges csúcspreferenciákkal és csúcskorlátokkal ellátott G gráfhoz létezik egy olyan G' gráf, amelyből G megkapható bizonyos csúcshalmazok összeolvasztásával, és G minden stabil b-párosítása a G' egy stabil párosításnak felel meg. Bár e G' gráf hatékonyan előállítható G, a $\preceq_v$ preferenciák és a b csúcskorlátok ismeretében, ez a megfigyelés sajnos nem alkalmas arra, hogy a stabil b-párosítás keresését stabil párosítás keresésére vezessük vissza. Nem igaz ugyanis, hogy G' minden stabil párosítása G egy stabil b-párosításából adódik.

4. Alkalmazások

Ebben a részben a stabil párosításokról szóló, ismert és kevésbé ismert tételek néhány alkalmazását mutatjuk be. Viszonylag könnyen látható, hogy a Tarski-féle fixponttétel egyik sztenderd alkalmazása, a Cantor–Bernstein-tétel levezethető a (szintén a Tarski-féle fixponttétellel bizonyítható) stabil párosítás tétel végtelen változatából. Mivel a Cantor–Bernstein-tétel tekinthető a Mendelsohn–Dulmage-tétel végtelen változatának, nem meglepő, hogy ez utóbbi is igazolható stabil párosításokkal. A Mendelsohn–Dulmage-tétel matroidos általánosítása, a Kundu–Lawler-tétel pedig könnyen bizonyítható a matroidkernelekre vonatkozó 2.4. tételből. Korábban említettük, hogy az alábbi, gráfkernelekről szóló eredmény is levezethető Tarski-féle fixponttétel segítségével.

4.1. Tétel. (Sands, Saurer és Woodrow [37]) *Ha E_1 és E_2 két hurokélt nem tartalmazó irányított élhalmaz a V ponthalmazon, akkor létezik a V pontjainak olyan U részhalmaza, melyre teljesül az alábbi két tulajdonság.*

– *Két különböző U-beli csúcs között nem vezet sem E_1-beli, sem E_2-beli út, illetve*

– *bármely $v \in V \setminus U$ csúcsból vezet U-beli csúcsba E_1-beli vagy E_2-beli út.*

A Gale–Shapley-tétel egy talán kevésbé kézenfekvő alkalmazása Pym alábbi linking tételének bizonyítása.

4.2. Tétel. (Pym [31]) *Legyen a $D = (V, E)$ digráfban $\mathcal{P}$ és $\mathcal{Q}$ pontdiszjunkt irányított utak egy-egy halmaza. Ekkor létezik pontdiszjukt irányított utak egy $\mathcal{R}$ halmaza úgy, hogy*

– *minden $\mathcal{P}$-beli út kiindulópontjából indul $\mathcal{R}$-beli út, és minden $\mathcal{R}$-beli út kiindulópontja kiindulópontja egy $\mathcal{P}$-beli vagy $\mathcal{Q}$-beli útnak, és*

– *minden $\mathcal{Q}$-beli út végpontjában végződik $\mathcal{R}$-beli út, és minden $\mathcal{R}$-beli út végpontja végpontja egy $\mathcal{P}$-beli vagy $\mathcal{Q}$-beli útnak, valamint*

– *minden $\mathcal{R}$-beli út egy $\mathcal{P}$-beli út (esetleg üres) kezdőszeletének és egy $\mathcal{Q}$-beli út (esetleg üres) végszeletének összefűzésével jön létre.*

Stabil párosítások egyik legismertebb alkalmazása Galvinnak a Dinitz-sejtésre adott bizonyítása [19], mely a „Proofs from the book" című könyvben is megjelent. Galvin módszere az alábbi módon terjeszthető ki nem páros gráfokra.

4.3. Tétel. ([13]) *Legyen $G = (V, E)$ gráf, $c : E \to \{1, 2, \ldots, k\}$ pedig G egy k élszínezése. Legyen adott minden $e \in E$ élhez egy k méretű $L(e)$ színlista. Ha G egyetlen páratlan körének éleihez tartozó színlistáknak sincs közös eleme, akkor van G-nek olyan l élszínezése, amelyre minden élt a saját listájából színezünk, azaz $l(e) \in L(e)$ teljesül G minden e élére.*

Létezik Galvin tételének és a páros gráfok egyenletes színezéséről szóló tételnek is egy közös általánosítása.

4.4. Tétel. ([15]) *Legyen $G = (V, E)$ páros gráf, $c : E \to \{1, 2, \ldots, k\}$ pedig G éleinek egy tetszőleges színezése k színnel. Adott továbbá minden $e \in E$ élhez egy k méretű $L(e)$ színlista. Ekkor található G minden e éléhez egy $l(e) \in L(e)$ szín úgy, hogy az l színezés az alábbi értelemben jobb legyen a c színezésnél. A G bármely v csúcsára és bármely $n_1, n_2, \ldots, n_i$ színre léteznek $m_1, m_2, \ldots, m_j$ színek valamely $j \leq i$-re úgy, hogy a v-ből a c színezés szerint legalább annyi él kapja meg az $m_1, \ldots, m_j$ színek valamelyikét, mint ahány v-ből induló él az l színezés szerint az $n_1, \ldots, n_i$ színek valemelyikét kapja.*

A matroidkerneleknek egy gyakorlati szempontból is érdekes alkalmazásával zárjuk ezt a részt. Ehhez definiáljuk a 2LCSM-problémát (a rövidítés a szakirodalomban használt „2-sided laminar classified stable matching" megnevezésre utal).

Legyen $G = (V, E)$ páros gráf, melynek minden v csúcsához adott egy $\preceq_v$ lineáris rendezés $E(v)$-n, egy $\mathcal{C}_v$ lamináris halmazrendszer $E(v)$-n, valamint minden $C \in \mathcal{C}_v$ halmazra az $l(C) \leq u(C)$ alsó és felső korlátok. A G éleinek M részhalmaza akkor *lu-párosítás*, ha $l(C) \leq |M \cap C| \leq u(C)$ teljesül minden v csúcsra és $C \in \mathcal{C}_v$ halmazra. Az M lu-párosítás akkor *lu-dominálja* az $e \in E \setminus M$ élt, ha van e-nek olyan v végpontja és olyan $C \in \mathcal{C}_v$ halmaz, amelyre $|M \cap C| = u(C)$ és $m \preceq_v e$ teljesül minden $m \in M \cap C$ esetén. Az M lu-párosítás pedig akkor *lu-stabil*, ha minden $E \setminus M$-beli élt lu-dominál. A 2LCSM-probléma pedig az lu-stabil párosítás létezésének eldöntése. Ezzel a megközelítéssel általánosíthatjuk a Huang által bevezetett LCSM-problémát [22], melynek motivációja az egyetemi felvételi probléma egy, a gyakorlatot jobban közelítő leírása: szemben ugyanis a stabil b-párosítás problémával, a jelen modell kezelni tudja az olyasfajta feltételt is, amely szerint az egyes egyetemi szakok csak bizonyos minimális létszám elérésekor indulhatnak el, ill. bizonyos egyetemi szakok (a saját egyéni kvótájukon túl) közös kvótával is rendelkeznek. A 2LCSM-probléma egy lehetséges megoldása az alábbi eredmény alapján történhet.

4.5. Tétel. (Fleiner, Kamiyama [17]) *A $G = (V, E)$ gráfon megadott 2LCSM-problémához polinom időben konstruálhatók az $\mathcal{M}_1$ és $\mathcal{M}_2$ matroidok azzal a tulajdonsággal, hogy ha létezik lu-stabil párosítás, akkor az lu-stabil párosítások halmaza megegyezik az $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2$-kernelek halmazával. Igaz továbbá, hogy egy M $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2$-kernel pontosan akkor lu-stabil párosítás, ha M lu-párosítás.*

A 4.5. tétel szerint tehát elegendő egyetlen M $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2$-kernelt találni: ha M lu-párosítás, akkor kész vagyunk, hisz M lu-stabil, ha pedig M nem lu-párosítás, akkor egyáltalán nem létezik lu-stabil párosítás.

5. Stabil párosítás poliéderek

Természetes kérdés a stabil párosítás és a maximális súlyú párosítás keresésének az az ötvözete, amelyben adott élsúlyozás mellett kell a stabil párosítások halmazából egy maximális súlyút keresni. Egy természetesen kínálkozó út a stabil párosítások karakterisztikus vektorai feszítette politópon történő optimalizálás, és ehhez ennek a politópnak egy jó karakterizációjára, tipikusan egy lineáris leírására van szükség. Az első lépést Vande Vate tette meg azzal, hogy teljes páros gráf esetén megadott egy ilyen leírást [41]. Ezt követte Rothblum, aki tetszőleges páros gráfra adott karakterizációt [36], majd Baïou és Balinski adták meg páros gráf esetén a stabil b-párosítás politóp exponenciálisan sok feltételt tartalmazó leírását abban az esetben, amikoris a b korlát az egyik színosztályon azonosan 1-gyel egyenlő [5].

Az $\mathcal{FG}$-kernelek hálóstruktúrájának ismeretében azonban az előbbieknél sokkal általánosabb esetekben (például matroidkernelek esetében) is megadható lineáris karakterizáció, mégpedig Hoffman hálópoliéderekre igazolt tételeinek segítségével [21]. Néhány jelölésre lesz szükségünk. $\mathcal{F}, \mathcal{G} : 2^E \to 2^E$ kiválasztási függvények esetén jelölje $\mathcal{K}_{\mathcal{FG}}$ az $\mathcal{FG}$-kernelek halmazát, ill.

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\mathcal{FG}} &:= conv\{\chi(K) : K \in \mathcal{K}_{\mathcal{FG}}\},\\
\mathcal{P}_{\mathcal{FG}}{}^{\uparrow} &:= \mathcal{P}_{\mathcal{FG}} + \mathbb{R}^E_+,\\
\mathcal{P}_{\mathcal{FG}}{}^{\downarrow} &:= (\mathcal{P}_{\mathcal{FG}} + \mathbb{R}^E_-) \cap \mathbb{R}^E_+,\\
\mathcal{A}_{\mathcal{FG}} &:= \{A \subseteq E : |A \cap K| \leq 1 \quad \forall K \in \mathcal{K}_{\mathcal{FG}}\},\\
\mathcal{B}_{\mathcal{FG}} &:= \{B \subseteq E : |B \cap K| \geq 1 \quad \forall K \in \mathcal{K}_{\mathcal{FG}}\}
\end{aligned}$$

rendre az $\mathcal{FG}$-kernel politópot, annak felszálló burkát, a pozitív ortánsban alatta levő részt, az $\mathcal{FG}$-kernelek antiblokkoló, valamint blokkoló halmazait. Egy $x \in \mathbb{R}^E$ vektor és $Z \subseteq E$ esetén alkalmazzuk az

$$\widetilde{x}(Z) := \sum\{x(z) : z \in Z\}$$

jelölést. Ennek segítségével ki tudjuk mondani az alábbi eredményt.

5.1. Tétel. ([10]) *Ha $\mathcal{F}, \mathcal{G} : 2^E \to 2^E$ növekedő és komonoton kiválasztási függvények, akkor*

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\mathcal{FG}}{}^{\uparrow} &= \{x \in \mathbb{R}^E : x \geq 0, \quad \widetilde{x}(B) \geq 1 \quad \forall B \in \mathcal{B}_{\mathcal{FG}}\},\\
\mathcal{P}_{\mathcal{FG}}{}^{\downarrow} &= \{x \in \mathbb{R}^E : x \geq 0, \quad \widetilde{x}(A) \leq 1 \quad \forall A \in \mathcal{A}_{\mathcal{FG}}, \quad x(e) = 0 \quad \forall e \in E \setminus \bigcup \mathcal{K}_{\mathcal{FG}}\},\\
\mathcal{P}_{\mathcal{FG}} &= \{x \in \mathbb{R}^E : x \geq 0, \quad \widetilde{x}(B) \geq 1 \quad \forall B \in \mathcal{B}_{\mathcal{FG}}, \quad \widetilde{x}(A) \leq 1 \quad \forall A \in \mathcal{A}_{\mathcal{FG}}\}.
\end{aligned}$$

Az 5.1. tételben szereplő lineáris feltételek egy előnye, hogy a megfelelő lineáris programozási problémában fellépő mátrixokban csak 0 és 1 szerepel. Hátrányuk azonban, hogy a lineáris feltételek implicitek, és akár exponenciálisan sok is lehet belőlük. Mindazonáltal a szeparációs probléma könnyen megoldható, így sztenderd technikák alkalmazhatók az adott poliédereken történő optimalizációra. Stabil b-párosítások esetén azonban a 3.4. tétel segítségével jóval konkrétabban megadhatók a politópot leíró blokkerek és antiblokkerek.

5.2. Tétel. ([11]) *Legyen $G = (V, E)$ páros gráf, minden v csúcsra legyen $\preceq_v$ lineáris rendezés $E(v)$-n, valamint legyen $b : V \to \mathbb{N}$. Jelölje $\mathcal{P}(G, b)$ a G-beli stabil b-párosítások karakterisztikus vektorainak konvex burkát, valamint $1 \leq i \leq b(v)$ esetén $E_i(v)$ jelölje az $E(v)$ a 3.4. tétel szerinti részhalmazát. Ekkor*

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(G, b) = \{x \in \mathbb{R}^E : x \geq 0,&\\
&\widetilde{x}(E_i(v)) \leq 1 \quad \forall v \in V, \quad \forall 1 \leq i \leq b(v),\\
&\widetilde{x}(\Phi_{i,j}(uv)) \geq 1 \quad \forall uv \in E \quad \forall 1 \leq i \leq b(u), \quad \forall 1 \leq j \leq b(v)\}\ ,
\end{aligned}$$

ahol $\Phi_{i,j}(uv) = \{uv\} \cup \{uv' \in E_i(u) : uv' \leq_u uv\} \cup \{u'v \in E_j(v) : u'v \leq_v uv\}\ .$

6. Konklúzió

Jelen munka áttekintést adott a stabil párosításokkal és általánosításaikkal kapcsolatos néhány problémáról és alkalmazásról. Rámutattunk arra, hogy számos korábbról ismert jelenség jól magyarázható, ill. általánosítható kiválasztási függvények bevezetésével és Knaster és Tarski fixponttételének segítségével.

Köszönetnyilvánítás

Jelen munka az OTKA K108383 és az MTA KEP-6/2017 sz. kutatási projektek támogatásával készült. A szerző egyúttal köszönetet mond az MTA-ELTE Egerváry kutatócsoportnak.

Hivatkozások

[1] Hernán Abeledo and Yosef Blum: *Stable matchings and linear programming*, Linear Algebra Appl. **245** (1996), 321–333.

[2] Ron Aharoni, Eli Berger, and Irina Gorelik: *Kernels in Weighted Digraphs*, Order **31(1)** (2014), 35–43.

[3] Ron Aharoni and Tamás Fleiner: *On a lemma of Scarf*, J. Combin. Theory Ser. B **87(1)** (2003), 72–80.

[4] Mourad Baïou and Michel Balinski: *Many-to-many matching: stable polyandrous polygamy (or polygamous polyandry)*, Discrete Appl. Math. **101(1-3)** (2000), 1–12.

[5] Mourad Baïou and Michel Balinski: *The stable admissions polytope*, Math. Program **87(3, Ser. A)** (2000), 427–439.

[6] Péter Biró, Katarína Cechlárová, and Tamás Fleiner: *The dynamics of stable matchings and half-matchings for the stable marriage and roommates problems*, International Journal of Game Theory **36(3-4)** (2008), 333–352.

[7] Charles Blair: *The lattice structure of the set of stable matchings with multiple partners*, Math. Oper. Res. **13(4)** (1988), 619–628.

[8] Katarína Cechlárová and Tamás Fleiner: *On a generalization of the stable roommates problem*, ACM Trans. Algorithms **1(1)** (2005), 143–156.

[9] Tamás Fleiner: *Some results on stable matchings and fixed points*, Technical report, EGRES report TR-2002-8, ISSN 1587-4451, December 2002. `http://www.cs.elte.hu/egres`.

[10] Tamás Fleiner: *A fixed-point approach to stable matchings and some applications*, Math. Oper. Res. **28(1)** (2003), 103–126.

[11] Tamás Fleiner: *On the stable b-matching polytope*, Math. Social Sci. **46(2)** (2003), 149–158.

[12] Tamás Fleiner: *On stable matchings and flows*, Algorithms **7(1)** (2014), 1–14.

[13] Tamás Fleiner: *List colourings with restricted lists*, Technical Report QP-2017-01, Egerváry Research Group, Budapest, 2017. www.cs.elte.hu/egres.

[14] Tamás Fleiner: *Stable and crossing structures*, August, 2000, PhD dissertation, http://www.renyi.hu/~fleiner.

[15] Tamás Fleiner and András Frank: *Balanced list edge-colourings of bipartite graphs*, Technical Report TR-2010-01, Egerváry Research Group, Budapest, 2010. www.cs.elte.hu/egres.

[16] Tamás Fleiner and Zsuzsanna Jankó: *On weighted kernels of two posets*, Order **33(1)** (2016), 51–65.

[17] Tamás Fleiner and Naoyuki Kamiyama: *A matroid approach to stable matchings with lower quotas*, Math. Oper. Res. **41(2)** (2016), 734–744.

[18] D. Gale and L. S. Shapley: *College admissions and stability of marriage*, Amer. Math. Monthly **69(1)** (1962), 9–15.

[19] Fred Galvin: *The list chromatic index of a bipartite multigraph*, J. Combin. Theory Ser. B **63(1)** (1995), 153–158.

[20] Dan Gusfield and Robert W. Irving: *The stable marriage problem: structure and algorithms*, MIT Press, Cambridge, MA, 1989.

[21] A. J. Hoffman: *On lattice polyhedra. III. Blockers and anti-blockers of lattice clutters*, Math. Programming Stud. **(8)** (1978), 197–207. Polyhedral combinatorics.

[22] Chien-Chung Huang: *Classified stable matching*, In Proceedings of the Twenty-First Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, pages 1235–1253, Philadelphia, PA, 2010. SIAM.

[23] Robert W. Irving: *An efficient algorithm for the „stable roommates" problem*, J. Algorithms **6(4)** (1985), 577–595.

[24] Jr. Kelso, Alexander S. and Vincent P. Crawford: *Job matching, coalition formation, and gross substitutes*, Econometrica **50** (1982), 1483–1504.

[25] Zoltán Király: *Better and simpler approximation algorithms for the stable marriage problem*, Algorithmica **60(1)** (2011), 3–20.

[26] Bettina Klaus and Flip Klijn: *Median stable matching for college admissions*, Internat. J. Game Theory **34(1)** (2006), 1–11.

[27] Bronisław Knaster: *Un théorème sur les fonctions d'ensembles*, Ann. Soc. Polon. Math. **6** (1928), 133–134.

[28] Donald E. Knuth: *Stable marriage and its relation to other combinatorial problems*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997. An introduction to the mathematical analysis of algorithms, Translated from the French by Martin Goldstein and revised by the author.

[29] David F Manlove: *Algorithmics of matching under preferences*, volume 2. World Scientific, 2013.

[30] Michael Ostrovsky: *Stability in supply chain networks*, American Economic Review **98(3)** (2006), 897–923.

[31] J. S. Pym: *A proof of the linkage theorem*, J. Math. Anal. Appl. **27** (1969), 636–638.

[32] Alvin E. Roth: *The evolution of the labor market for medical interns and residents: A case study in game theory*, J. of Political Economy **92** (1984), 991–1016.

[33] Alvin E. Roth, Uriel G. Rothblum, and John H. Vande Vate: *Stable matchings, optimal assignments, and linear programming*, Math. Oper. Res. **18(4)** (1993), 803–828.

[34] Alvin E. Roth and Marilda Sotomayor: *The college admissions problem revisited*, Econometrica **57(3)** (1989), 559–570.

[35] Alvin E. Roth and Marilda A. Oliveira Sotomayor: *Two-sided matching*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990. A study in game-theoretic modeling and analysis.

[36] Uriel G. Rothblum: *Characterization of stable matchings as extreme points of a polytope*, Math. Programming **54(1, Ser. A)** (1992), 57–67.

[37] B. Sands, N. Sauer, and R. Woodrow: *On monochromatic paths in edge-coloured digraphs*, J. Combin. Theory Ser. B **33(3)** (1982), 271–275.

[38] Jimmy J. M. Tan: *A necessary and sufficient condition for the existence of a complete stable matching*, J. Algorithms **12(1)** (1991), 154–178.

[39] Alfred Tarski: *A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications*, Pacific J. of Math **5** (1955), 285–310.

[40] Chung-Piaw Teo and Jay Sethuraman: *The geometry of fractional stable matchings and its applications*, Math. Oper. Res. **23(4)** (1998), 874–891.

[41] John H. Vande Vate: *Linear programming brings marital bliss*, Oper. Res. Lett. **8(3)** (1989), 147–153.

Fleiner Tamás 1971-ben született Budapesten. A budapesti Fazekas Gimnázium speciális matematika tagozatán tett érettségit követően okleveles matematikus diplomát szerzett az ELTÉ-n, majd az amszerdami CWI-ben töltött 4 év után "Stable and crossing structures" című disszertációját az eindhoveni TU/e egyetemen 2000-ben védte meg. Egy évig az MTA RAMKI fiatal kutatója, majd Magyary Zoltán posztdoktori ösztöndíjas az ELTE Operációkutatási Tanszékén. 2003-tól Bolyai-ösztöndíjasként a BME Számítástudományi és Információelméleti Tanszék adjunktusa, 2006-tól docense, 2014-ben pedig habilitál. Kutatási területe a diszkrét matematika és közgazdaságtan határterülete, 65 tudományos közlemény szerzője, több mint 300 független hivatkozással. Több OTKA-pályázat témavezetője, nemzetközi kutatások résztvevője, a Kürschák József Matematikai Tanulóverseny szervezőbizottságának elnöke. Jelenleg a BME-n és az AIT-n oktat, társasházi közös képviselő, kerékpár- és varrógépműszerész, valamint gerillakertész.

FLEINER TAMÁS
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Számítástudományi és Információelméleti Tanszék
1117, Budapest, Magyar tudósok körútja 2.
és MTA KTK (1097 Budapest, Tóth Kálmán u. 4)
fleiner@cs.bme.hu

WHAT ARE STABLE MATCHINGS GOOD FOR? (STABLE MATCHINGS AND THEIR APPLICATIONS)

Tamás Fleiner

The notion of a stable matching have been introduced by Gale and Shapley in 1962. The notion turned out to be extremely succesful not only for its applicability to two-sided market economies but also because the approach based on (generalized) stable matchings led to success in case of several theoretical problems. The present work demonstrates how the existence and structure of stable matchings are related to a fixed point theorem by Knaster and Tarski and what kind of sometimes surprising applications are implied by the hence obtained results. This work is based on the invited talk given on the 23rd Hungarian Operations Research Conference organized in 2017 at Cegléd.

Alkalmazott Matematikai Lapok **35** (2018), 145–182

ERŐSEN POLINOMIÁLIS PIVOT ALGORITMUSOK A MAXIMÁLIS FOLYAM FELADATRA

ILLÉS TIBOR, MOLNÁR-SZIPAI RICHÁRD

Prékopa András és Klafszky Emil munkássága előtt tisztelegve

A dolgozatban bemutatjuk a maximális folyam feladat javítóutas algoritmusaitól eredeztethető cimkézéses technika felhasználását és továbbfejlesztését a feladat különböző polinomiális pivot algoritmus variánsainak létrehozására. Egységes rendszerben tárgyaljuk a 90-es évek primál és duál szimplex algoritmusait [6, 27] és az MBU-algoritmus variánsait [33, 34, 40], külön hangsúlyt fektetve a gyakorlati feladatok modellezése során gyakran előforduló nem nulla alsó korlátok kezelésére. Az algoritmusokat mozdony hozzárendelési feladatokon végzett számításokon hasonlítjuk össze.

1. Bevezető

A hálózati folyam modell egy felettébb népszerű optimalizálási modell, köszönhetően annak, hogy intuitív, mégis a gyakorlatban széles körben alkalmazható. Ennek megfelelően rendkívül sok publikáció foglalkozik vele, számtalan jobbnál jobb algoritmust javasolva, mind elméleti, mind gyakorlati hatékonyságukat tekintve.

A hálózati folyam természetes modellje olyan problémáknak, ahol egy rendszerben anyag áramlik bizonyos keletkezési helyektől bizonyos felhasználási helyek felé. Az előbbi helyeket forrásoknak, az utóbbiakat nyelőknek nevezzük. Anyag alatt sokféle dolgot érthetünk: lehet szó csővezetékben áramló folyadékról, utcákon mozgó járművekről, vagy számítógépes hálózaton közvetített információról. A hálózat egyes csomópontjai között az anyag szállítására alkalmas médiumok vannak (cső, utca, kábel). Ezek a legegyszerűbb modellben egyirányú áramlást engednek meg, és rendelkeznek egy kapacitással, amit az időegység alatt átvihető maximális anyag mennyiségének tekinthetünk. Folyamnak nevezzük az anyag áramlásának egy olyan leírását, ami eleget tesz ezen kapacitásoknak, és a forrásoktól és nyelőktől különböző csomópontokon csak átáramlás történik, illetve megfelelnek a forrásokból kifolyó és nyelőkbe befolyó mennyiségekre tett esetleges egyéb korlátoknak.

Egy speciális hálózati folyam feladat a maximális folyam feladat, ahol a hálózat egy forrást és egy nyelőt tartalmaz, és szeretnénk meghatározni a forrásból a nyelőbe elszállítható maximális mennyiséget, vagyis valamilyen értelemben az egész hálózat „kapacitását” (több forrás és több nyelő esetén a kapacitás keresése szintén visszavezethető erre a problémára). Megjegyezzük, hogy a fenti példákban a „nulla folyam”, vagyis amikor semmi sem történik a hálózatban, egy megengedett folyam, de bonyolultabb modellek esetén már megengedett folyam keresése sem triviális.

Az egyik első hálózati folyam feladatot Tolstoi írta fel 1930-ban [51], aki egy szállítási terv optimalizálására javasolt egy módszert. Ez lényegében a negatív súlyú körök kiküszöbölésére jött rá. Logisztikai jellegű feladatok modellezésére napjainkban is használunk hálózati folyam modelleket, ilyen például a tehervontatás optimalizálása [7, 32, 44], avagy a buszközlekedésé [5]. A hálózati folyam modell tulajdonságaival, algoritmusaival és alkalmazásaival több, nagyobb lélegzetvételű mű is foglalkozik: [2, 20, 31, 37, 38, 45].

A fejezet hátralevő részében röviden összefoglaljuk a javítóutas algoritmusokat, illetve kitekintünk egyéb hatékony algoritmusokra. A 2. fejezetben ismertetjük a primál, illetve duál szimplex algoritmust maximális folyam feladaton, illetve ezek polinomiális változatait. A 3. fejezetben foglalkozunk a nem nulla alsó korlátok esetén felmerülő problémákkal, bemutatjuk az első fázis feladatot, illetve a fízibilitási MBU-algoritmust, mint primál induló megoldást előállító algoritmusokat. A 4. és 5. fejezetben ismertetjük a primál, illetve duál MBU-algoritmust, és az ezek polinomialitásának belátásához szükséges technikákat. A 6. fejezetben a mozdony hozzárendelési feladaton összehasonlítjuk az ismertetett algoritmusokat.

1.1. Javítóutas algoritmusok

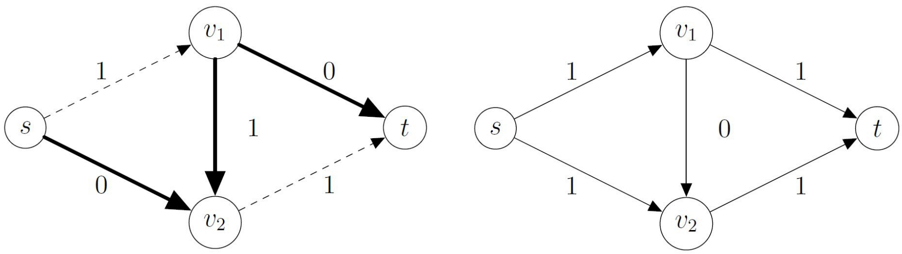
Az egyik alkalmazási terület természetesen a tényleges hálózatok kapacitásának vizsgálata. A problémával foglalkozó egyik első cikkben [17] Ford és Fulkerson motivációként egy, a szovjet vasúthálózat kapacitásának felmérésével foglalkozó jelentést nevez meg [28], mely jelentés egyébként 1999-ig titkos volt [46].

A matematikailag szabatos megfogalmazáshoz tekintsünk egy $G = (V, E)$ összefüggő, irányított gráfot egy kitüntetett $s \in V$ forrással és $t \in V$ nyelővel, valamint egy $u : E \to \mathbb{R}_\oplus$ kapacitásfüggvénnyel. Ekkor a feladat egy olyan $x : E \to \mathbb{R}$ függvény keresése, melyre

$$\begin{aligned} &\sum_{(s,v)\in E} x(s,v) \to \max \\ \forall v \in V\backslash\{s,t\} : \quad &\sum_{(w,v)\in E} x(w,v) = \sum_{(v,w)\in E} x(v,w) \\ \forall e \in E : \quad &0 \le x(e) \le u(e). \end{aligned}$$

Itt az s-ből t-be eljutó mennyiséget a forrásból kimenő folyam mennyiségeként írtuk fel, ez a köztes csúcsokra érvényes megmaradási egyenletek miatt meg kell, hogy egyezzen a nyelőbe érkező folyam mennyiségével. A feladat felírásából az is rögtön látszik, hogy egy lineáris programozási feladattal állunk szemben.

Természetes ötlet, hogy az $x \equiv 0$ folyamból kiindulva keressünk olyan $s \to t$ irányított utat, melyen nincsen telített él. Ekkor egy pozitív értékkel meg tudjuk növelni a folyamot ezen út mentén, ami továbbra is megengedett marad. Könnyen mutatható azonban példa olyan megengedett folyamra, ahol ilyen út nem található, de a folyamérték mégsem optimális. Tekintsük az 1a ábrát, ahol minden él kapacitása 1. Itt az első lépésben az $s \to 1 \to 2 \to t$ utat használtuk, és elakadtunk, noha a feladat optimuma nyilvánvalóan 2. Az 1b ábrán látható optimális megoldást ekkor úgy kaphatjuk meg, hogy az $s \to 2 \leftarrow 1 \to t$ úton „javítunk" 1-et, ahol javítás alatt az előreéleken növelést, míg a visszaéleken csökkentést értünk.



(a) egy javítóút

(b) a javítás után

1. ábra. Javítóutas módszer

Javítóút alatt tehát egy olyan s-ből t-be menő P irányítatlan utat értünk, melynek előreéleire $x < u$, visszaéleire pedig $x > 0$. Ekkor az úton

$$\delta = \min_{e \in P} \left\{ \begin{array}{ll} u(e) - x(e), & \text{ha } e \text{ előreél,} \\ x(e), & \text{ha } e \text{ visszaél} \end{array} \right\} > 0$$

mennyiséget tudunk javítani.

A javítóút már tényleg megfelelő objektum a folyam optimalitásának vizsgálatára:

1.1. Lemma. *Az x megengedett folyam pontosan akkor optimális, ha nem található a gráfban javítóút.*

Bizonyítás vázlat: Optimális folyamhoz természetesen nem létezhet javítóút. A másik irány belátásához tekintsük azon csúcsok S halmazát, melyek elérhetők s-ből javítóút segítségével. Ekkor belátható, hogy az S-ből $V \backslash S$-be menő élek telítettek, és értékük megegyezik a folyam értékével, tehát az $(S, V \backslash S)$ vágáson nem lehet több folyamot átvinni, mint amennyit x átvisz, így x-nek maximálisnak kell lennie. $\square$

A bizonyítás gondolatából kijön továbbá Ford és Fulkerson híres maximális folyam–minimális vágás tétele is:

1.1. Tétel. (Ford, Fulkerson [18]) *Az s-ből t-be szállítható maximális folyam értéke megegyezik az s és t csúcsokat elválasztó vágások minimális értékével.*

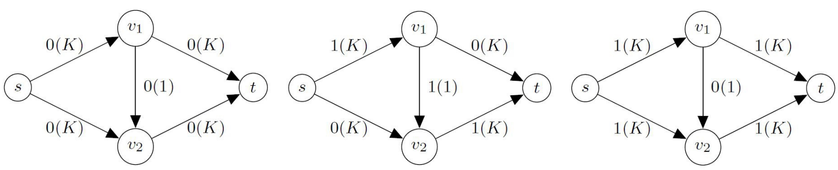
A tétel elméleti jelentőségén túl egy olyan, a feladat méretéhez viszonyítva kis méretű „tanú” létezését garantálja, mellyel nagy feladatok esetén is könnyen ellenőrizhető az adott folyam optimalitása.

Ford és Fulkerson eredményeiből látszik, hogy az általuk felírt javítóutas algoritmus (1. algoritmus) korrekt eredményt ad, ha megáll. Egész kapacitásokkal rendelkező folyam esetén a talált javítóúton mindig legalább 1-et tudunk javítani, így az algoritmus tényleg megáll, viszont irracionális kapacitások mellett az algoritmus végessége nem garantált. Erre Ford és Fulkerson könyve [19] is hoz egy példát, de a legkisebb ilyen hálózat mindössze 6 csúcsot és 8 élt tartalmaz [52].

1. Algoritmus. Javítóutas algoritmus

Ford–Fulkerson(G, c, s, t)
    Legyen $\mathbf{x}$ egy megengedett folyam ▷ például $\mathbf{x} = \mathbf{0}$
    amíg találunk javítóutat s-ből t-be,
        javítsunk az úton
    vége
    Megállunk, $\mathbf{x}$ optimális folyam.
vége

Azonban egész kapacitásokkal rendelkező hálózat esetén sem kielégítő az algoritmus. A fenti gondolatból adódó elméleti futásidő $\mathcal{O}(|E|K)$, ahol K a legnagyobb kapacitás a hálózatban. Tekintsük például a korábban látott egyszerű hálózatot, némileg megnövelt kapacitásokkal (2a ábra).



(a) indulás (b) első javítás után (c) második javítás után

2. ábra. Ford–Fulkerson-algoritmus szerencsétlen útválasztással.

Itt első javítóútnak az $s \to 1 \to 2 \to t$ utat választva 1-et tudunk javítani az $(1, 2)$ él kapacitása miatt (2b ábra). Majd az $s \to 2 \leftarrow 1 \to t$ javítóutat választva ismét csak 1-et tudunk javítani (2c ábra). Ezt a lépéspárt K-szor ismételve eljutunk a maximális folyamhoz, ahol K egység folyik az $s \to 1 \to t$ és az $s \to 2 \to t$ utakon.

1.2. Polinomiális javítóutas algoritmusok

Az előző példát (2. ábra) tehát 2 javítóúttal is meg lehet oldani, amik ráadásul rövidebbek is, mint a példában használt utak. Ez azért is érdekes, mivel az algoritmus egy kézenfekvő implementációjában szélességi kereséssel keresve javítóutat mindig egy lehető legrövidebb javítóutat használunk, így az előző példát hatékonyan oldjuk meg.

Az 1970-es évek elején Edmonds és Karp [16], illetve tőlük függetlenül Dinic [15] is belátta, hogy ez nem csak kényelmes, de hatékonyabb is:

1.2. Tétel. (Edmonds, Karp [16]; Dinic [15]) *Ford és Fulkerson algoritmusa (1. algoritmus) minden lépésben egy lehető legrövidebb javítóutat használva legfeljebb* $\frac{1}{2}|V| \cdot |E|$ *javítás után véget ér.*

A tétel bizonyításának fő felismerése, hogy a csúcsoknak a forrástól vett, javítóúton való távolsága az algoritmus során nem csökkenhet, ha mindig egy legrövidebb javítóút mentén javítunk. Ezt a távolságot szokták a v csúcs $d(v)$ „címkéjének” is nevezni, ami így az algoritmus során monoton növekszik.

Ha az (i, j) él az általunk használt javítóúton fekszik, akkor $d(i) + 1 = d(j)$, mivel egy legrövidebb javítóutat használunk. Ha ez az él telítődik a javítás során, akkor legközelebb csak visszaélként használhatjuk, vagyis ekkor $d'(j) + 1 = d'(i)$ fog teljesülni. A j csúcs címkéjének monoton növekedéséből így azt kapjuk, hogy $d'(i) \geq d(i) + 2$. Mivel egy csúcs címkéje legfeljebb $|V| - 1$ lehet, vagy végtelen, így az él legfeljebb $\frac{1}{2}|V|$-szer telítődhet, és hasonló érveléssel $\frac{1}{2}|V|$-szer csökkenhet 0-ra. Mivel minden javításnál van legalább egy ilyen él, így legfeljebb $|V| \cdot |E|$ javítás törtönhet. Több munkával (például figyelembe véve a nyelőtől való távolságot is) bizonyítható az $\frac{1}{2}|V| \cdot |E|$ korlát is.

A címkézési technikát és a bizonyítás gondolatmenetét később többen is felhasználták, így érdemes összefoglalni, hogy milyen lépésekből áll:

- A csúcsok egy korlátos címkézésének bevezetése.
- A címkék monotonitásának megmutatása.
- Annak megmutatása, hogy címkék rendszeresen növekednek is.
- Korlát adása a lépések számára.

A legrövidebb javítóutas algoritmus tehát erősen polinomiális. Naivan implementálva minden javításhoz szükségünk van egy javítóút megkeresésére ($\mathcal{O}(|E|)$ lépés), illetve a kapott, legfeljebb $|V|$ hosszú úton a javítás elvégzésére ($\mathcal{O}(|V|)$ lépés). Így az algoritmus futásideje $\mathcal{O}(|V| \cdot |E|^2)$.

Itt tehát a javítóutak keresgélése viszi el az idő nagy részét. Dinic a javítások számának megbecsülése mellett egy ügyesebb implementációt is javasolt, lényegében az összes k hosszú javítóutat egyszerre keresi meg. Egy $\mathcal{O}(|E|)$ lépésszámú szélességi kereséssel felépíthető egy szintezett gráf, amelyen $\mathcal{O}(|V| \cdot |E|)$ lépéssel talál egy blokkoló folyamot. A blokkoló folyam eredeti hálózathoz adása után a legrövidebb javítóút hossza legalább 1-gyel nő, így ilyen segédfeladatból kevesebb, mint $|V|$ darabot kell megoldani, így $\mathcal{O}(|V|^2|E|)$-re csökken az algoritmus futásideje.

1.3. Egyéb algoritmusok

Új megközelítést jelentett az úgynevezett előfolyamokra épülő módszer. Az előfolyam a folyamnál gyengébb struktúra: ugyanúgy megköveteljük a kapacitások betartását, de a közbülső csúcsokra csak annyit kötünk ki, hogy a bejövő mennyiség legalább annyi legyen, mint a kimenő. A módszer a javítóutas algoritmusokkal ellentétes irányból közelíti meg a problémát. Míg ott a folyam struktúrát minden lépésben megőrizve növeltük a folyam értékét a maximumig, addig az előfolyamos algoritmusoknál a forrásból kiáramló mennyiség optimális, vagy a fölötti szinten tartása mellett lépkedünk előfolyamokon, amíg a struktúra meg nem javul.

Karzanov 1974-es cikke [36] számít a módszer alapművének. A Dinic által bevezetett részfeladatokat gyorsabban megoldva $\mathcal{O}(n^3)$ lépésszámú algoritmust sikerült létrehoznia. Így minden fázis után egy valódi folyamot kapunk.

Későbbi előfolyam algoritmusoknál, egészében kezelve a feladatot, csak az algoritmus végén kapunk valódi folyamot. Különösen érdekes számunkra Goldberg és Tarján előfolyam algoritmusa [24, 25]. Ez a csúcsoktól a nyelőig vezető javítóút távolságát becslő címkézést használ. Minden lépésben egy kisebb címkéjű csúcs felé tol folyamot az algoritmus, illetve ha egy aktív csúcsnak (ahol több a bejövő folyam, mint a kimenő) nincs ilyen szomszédja, akkor újracímkézi azt. Bebizonyítható, hogy némi rendszerezettséggel (például FIFO-szabállyal választva az aktív csúcsok közül) legfeljebb $\mathcal{O}(n^2)$ újracímkézés és $\mathcal{O}(n^3)$ tolás történik az algoritmusban. Mivel egy tolás műveletigénye konstans, szemben a javítóutas algoritmusoknál használt $\mathcal{O}(n)$ hosszú úton történő javítással, így az algoritmus teljes műveletigénye is $\mathcal{O}(n^3)$. A két jellemző művelet alapján „push-relabel" algoritmusként is hivatkozzák az ehhez hasonló algoritmusokat az angol nyelvű szakirodalomban.

Ezek az előfolyamos algoritmusok már nemcsak az elméleti lépésszám, de különböző tesztfeladatokon mért futásidő tekintetében is jobban teljesítettek mint a korábbi javítóutas algoritmusok [1, 3, 14]. Itt jegyeznénk meg, hogy az elméleti lépésszám tovább javítható speciális adatstruktúrák használatával [22, 47, 48], de a gyakorlatban ez sokszor az algoritmus lassulásához vezet.

Szintén kombinatorikus megközelítés eredménye Hochbaum úgynevezett *pszeudófolyam* algoritmusa [29]. Ez az előfolyam algoritmusnál általánosabb módon megengedi a közbülső csúcsokra a megmaradási egyenletek bármelyik irányban történő megsértését. Az induló megoldás folyamértéke legalább a maximális folyam értéke, majd a többlettel rendelkező csúcsokból a szükséglettel rendelkező csúcsok felé terelve próbálja a pszeudófolyamot szokásos folyammá alakítani a folyam értékét nem csökkentve. Amikor ez már nem lehetséges, akkor a pszeudófolyam egyszerűen visszaalakítható egy maximális folyammá. Az algoritmus az előfolyam algoritmusoknál használt technikákkal polinomiálissá tehető, továbbá létezik egy pivotalgoritmus variánsa is.

2. Pivot algoritmusok

A maximális folyam feladat, és általánosabban a minimális költségű hálózati folyam feladat felfogható lineáris programozási feladatként is. Vezessünk be egy (t, s) élt, amin az összes nyelőbe érkező folyamot visszavezetjük a forrásba, $E^* := E \cup (t, s)$ és $G^* := (V, E^*)$. Ekkor a csúcsokra vonatkozó megmaradási egyenletek egységesebbé válnak, és a célfüggvény felírható a (t, s) élen folyó folyam maximalizálásaként:

$$\begin{aligned} & \max x_{t,s} \\ \forall v \in V: \quad & \sum_{(w,v)\in E^*} x_{w,v} - \sum_{(v,w)\in E^*} x_{v,w} = 0 \\ \forall e \in E: \quad & l_e \le x_e \le u_e. \end{aligned} \tag{1}$$

A csúcsokra vonatkozó egyenletek röviden $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ alakba írhatók, ahol A a G^* gráf illeszkedési mátrixa. Ismert, hogy egy n csúcsú összefüggő gráf illeszkedési mátrixának rangja $n-1$, továbbá a mátrix valamely $n-1$ oszlopa pontosan akkor lineárisan független, ha az oszlopoknak megfelelő élek feszítőfát alkotnak a gráfban.

Következésképpen (1) egy B bázisa megfelel G^* egy T feszítőfájának, a fán kívüli élek folyamértéke megegyezik az alsó vagy felső korlátjukkal, ebből is következik, hogy T mindig tartalmazza a (t, s) élt. Így egy feszítőfához több bázismegoldás is tartozik, szokás a változókat három részre osztani: (B, L, U), ahol B a bázisban levő változók, L az alsó korláton, U pedig a felső korláton levő bázison kívüli változók.

Irányított gráf illeszkedési mátrixáról ismert továbbá, hogy teljesen unimoduláris, vagyis minden négyzetes részmátrixának determinánsa 0, 1 vagy -1. Ebből egész jobboldal esetén következik (például a Cramer-szabály alapján), hogy a feladat bármely bázismegoldása egészértékű, ami bizonyos alkalmazásoknál felettéb hasznos tulajdonság.

Primál megengedett bázismegoldásnak egy olyan bázismegoldást nevezünk, ahol az $l_e \le x_e \le u_e$ korlátok is teljesülnek. A bázison kívüli változókra ez automatikusan teljesül, vagyis primál nem megengedett változó csak a bázisban lehet.

A duál megengedett bázismegoldások karakterizálásához hagyjuk el a (t, s) élt a T feszítőfából. Ekkor a feszítőfa két összefüggő részre esik, jelöljük S-sel az s csúcsot tartalmazó részfát, és Z-vel a t csúcsot tartalmazót. Egy *bázismegoldás duál megengedett*, ha az $S \to Z$ élekre $x_e = u_e$, míg a $Z \to S$ élekre $x_e = l_e$

teljesül. Ennek belátásához írjuk fel az (1) feladat duálisát:

$$\begin{aligned} & \min \sum_{e \in E} u_e \lambda_e - l_e \mu_e \\ \forall (v,w) \in E: \quad & \pi(w) - \pi(v) + \lambda_{v,w} - \mu_{v,w} \geq 0 \\ & \pi(s) - \pi(t) \geq 1 \\ \forall e \in E: \quad & \lambda_e, \mu_e \geq 0. \end{aligned}$$

Elég meggondolnunk, hogy a duális feladat következő megoldása megengedett, valamint komplementáris a primál feladat fenti struktúrájú megoldásának eltérésváltozóira (λ az $\mathbf{u} - \mathbf{x}$ eltérésekre, μ pedig az $\mathbf{x} - \mathbf{l}$ eltérésekre):

$$\pi(v) = \begin{cases} 1, & \text{ha } v \in S, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$\lambda_{v,w} = \begin{cases} 1, & \text{ha } v \in S \text{ és } w \in Z, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$\mu_{v,w} = \begin{cases} 1, & \text{ha } v \in Z \text{ és } w \in S, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Így egy adott T feszítőfához tartozó bázismegoldásban a duál nem megengedett változók azon $S \to Z$ élekhez tartozó változók, melyekre $x_e = l_e$, és azon $Z \to S$ élekhez tartozó változók, melyekre $x_e = u_e$. Optimális megoldás esetén az (S, Z) vágás egy a Ford–Fulkerson-tétel által garantált minimális vágás.

2.1. Primál és duál szimplex módszer

A lineáris programozási feladat pivot algoritmussal történő megoldása során bázismegoldásról „szomszédos" bázismegoldásra lépünk, egy ilyen lépést nevezünk pivotálásnak. Ehhez ki kell választanunk egy, a bázisba belépő, és egy onnan kilépő változót úgy, hogy a csere után is bázismegoldásunk legyen. Ez folyam problémák esetén a feszítőfa struktúra megtartását jelenti.

Primál szimplex módszer esetén egy primál megengedett bázismegoldásból indulunk, egy duál nem megengedett változó lép be a bázisba, és a primál hányadosteszt segítségével választott változó lép ki a bázisból, így egy primál megengedett bázismegoldást kapunk, mely célfüggvényértéke nem romlott. Ezt a lépést addig ismételjük, amíg duál megengedett, és egyben optimális megoldást nem kapunk (vagy belátjuk, hogy a célfüggvény nem korlátos). Ez véges sok lépés után megtörténik, amennyiben teszünk valamit a ciklizálás elkerülése érdekében. Erre természetesen működnek az általános lineáris programozási feladatoknál alkalmazott szabályok

(Bland-szabály [9], lexikografikus szabály [10], s-monoton szabályok [11],...), de léteznek speciálisan hálózati folyamokra kifejlesztett megoldások is [12, 39].

Maximális folyam feladat esetében egy T feszítőfához tartozó primál megengedett bázismegoldással kezdünk (ilyen megoldás keresésének nehézségeit a 3. fejezetben részletezzük). Kiválasztunk egy p duál nem megengedett változót, ez szükségszerűen az (S, Z) vágás egy éle. A $T \cup \{p\}$ élhalmaz tartalmaz egy p-n és (t, s)-en is átmenő P kört. A kilépő élt ebből a körből kell választanunk, hogy helyreálljon a bázis struktúra (pivot táblán p oszlopában pontosan a kör éleinek megfelelő változók együtthatója nem nulla). A primál hányadostesztnek ebben az esetben megfelel a javítóutaknál látott δ kiszámítása: tekintsük a P kört a (t, s) éllel egyező irányítással, ekkor legyen

$$\delta = \min_{e \in P} \left\{ \begin{array}{ll} u_e - x_e, & \text{ha } e \text{ előreél,} \\ x_e - l_e, & \text{ha } e \text{ visszaél} \end{array} \right\} \geq 0.$$

P előreélein δ-t növelve, visszaélein δ-t csökkentve továbbra is megengedett folyamot kapunk. Egy olyan q élt kivéve a bázisból, ahol δ felvette a minimumát, pedig egy hozzá tartozó feszítőfát, hiszen x_q értéke ekkor u_e vagy l_e lesz. Az új feszítőfa tehát $T' = T \cup \{p\} \setminus \{q\}$. A folyam értéke, vagyis $x_{t,s}$ értéke δ-val növekedett, ami a javítóutas algoritmusokkal ellentétben lehet 0 is (degenerált pivot).

---

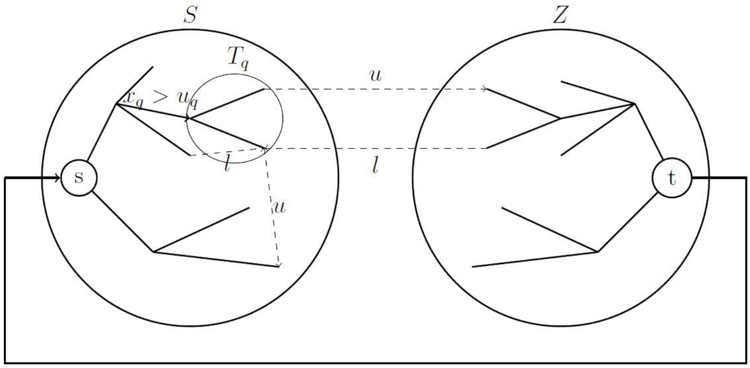
2. Algoritmus. Hálózati primál szimplex algoritmus

Legyen x egy megengedett bázismegoldás.
amíg x nem duál megengedett
    p tetszőleges duál nem megengedett él.
    $P := T \cup \{p\}$-ben található kör, (t, s)-sel egyező irányítással.
    Meghatározzuk δ-t és q-t.
    Módosítjuk a folyamértékeket P-n.
    Az új bázis $T \cup \{p\} \setminus \{q\}$.
vége

Duál szimplex módszer esetén duál megengedett bázismegoldásból indulunk, egy primál nem megengedett változó lép ki a bázisból, és duál hányadosteszt segítségével választjuk ki a belépő változót. Így duál megengedett bázismegoldásokon haladunk, amíg az primál megengedett nem lesz (vagy belátjuk, hogy a feladatnak nincs primál megengedett megoldása). Ciklizálás elleni szabályok segítségével itt is biztosítható a véges futásidő.

Maximális folyam feladat esetében egy T feszítőfához tartozó duál megengedett bázismegoldással kezdünk. Kiválasztunk egy q primál nem megengedett élt. q elhagyásával T két részre esik, legyen T_q a (t, s) élt nem tartalmazó részfa. Ekkor a belépő élnek össze kell kötnie T_q-t $T \setminus T_q$-val, továbbá lehetővé kell tennie, hogy

q-t a megfelelő irányban módosíthassuk. Például tekintsük azt az esetet, amikor $x_q > u_q$, és q a $T \backslash T_q$ részfából a T_q részfába megy. Ekkor a lehetséges belépő élek a $T_q \to T \backslash T_q$ irányú $x = u$ folyamértékű élek, illetve a $T \backslash T_q \to T_q$ irányú $x = l$ élek (lásd 3. ábra). Ezek közül duál hányadosteszttel választunk: az (S, Z) vágásbeli élekre ez 1, míg a többire 0, így ez utóbbiakat preferáljuk. A belépő él kiválasztása után a kialakuló körön annyit javítunk, hogy a kilépő él folyamértéke a megfelelő korláttal egyezzen meg ($x_q > u_q$ esetén u_q-val, $x_q < l_q$ esetén l_q-val).



3. ábra. Lehetséges belépő élek a duál szimplex algoritmusban.

Amennyiben nem találunk belépő élt, úgy a feladatnak nincs megengedett megoldása. Ez nulla alsó korlátú maximális folyam feladat esetén nem lehetséges, így ez a helyzet ott nem fordulhat elő. Nemnulla alsó korlát esetén ez a helyzet előállhat, a részleteket a 3. fejezetben tárgyaljuk.

---

3. Algoritmus. Hálózati duál szimplex algoritmus

Legyen x egy duál megengedett bázismegoldás.
amíg x nem primál megengedett
    q tetszőleges primál nem megengedett él.
    Legyen P a lehetséges belépő élek halmaza.
    ha $P \subseteq (S, Z)$ **akkor**
        Legyen $p \in P$ tetszőleges.
    egyébként
        Legyen $p \in P \backslash (S, Z)$ tetszőleges.
    vége
    Módosítjuk a folyamértékeket a kialakuló körön.
    Az új bázis $T \cup \{p\} \backslash \{q\}$.
vége

2.2. Polinomiális primál szimplex módszer maximális folyam feladatra

Bár a primál szimplex módszer fent leírt szemléletes értelmezése tulajdonképpen egyidős a szimplex módszerrel (már Dantzig 1963-as lineáris programozási könyvében is leírásra került [13]), erősen polinomiális változatot csak 1990-re publikáltak belőle.

Átnézve a primál szimplex algoritmus pszeudókódját (2. algoritmus), láthatjuk, hogy számottevő döntési lehetőségünk a belépő él kiválasztásánál van. A kilépő él lényegében egyértelmű, ha a felső korlátok kellően változatosak, így a továbbiakban sem vezetünk be szabályt arra nézve, hogy több lehetséges kilépő él esetén melyiket választjuk.

Goldfarb és Hao eredménye [26, 27] tényleg egy, a belépő él kiválasztására adott szabály, lényegében a legrövidebb javítóutas algoritmus során alkalmazott „címkézés” (forrástól való távolság a redukált gráfban) hozzáigazítása a szimplex módszer bázis struktúrájához. Megjegyezzük, hogy a fejezet további részében 0 alsó korlátokat feltételezünk, az algoritmus értelemszerűen módosítható alsó korlátos feladatra, plusz munkát csak egy kiinduló primál megengedett bázis megoldás keresése jelent (amiről többet a 3. fejezetben szólunk).

2.1. Definíció. (pszeudo-javítóút) Legyen az i. pivotálás előtti megengedett bázismegoldásunk x^i, a T^i feszítőfa mellett. Ekkor egy v csúcsból w csúcsba vezető élsorozat pszeudo-javítóút, ha a következő típusú élekből áll:

- T^i-n kívüli előreél $x^i_e = 0$ folyamértékkel,
- T^i-n kívüli visszaél $x^i_e = u_e$ folyamértékkel,
- $T^i \setminus \{(t,s)\}$-beli él tetszőleges irányban.

Láthatjuk, hogy a pszeudo-javítóút a javítóút fogalmának bővítése a bázisbeli élek tetszőleges használatával.

2.2. Definíció. (címkézés) Egy v csúcs címkéje az i. pivotálás előtt a legrövidebb s-ből v-be menő pszeudójavítóút hossza.

Ezen címkék kiszámítása egy egyszerű szélességi kereséssel történhet (4. algoritmus).

4. Algoritmus. Goldfarb–Hao-címkézés

$d_i(s) = 0$, lista $= \{s\}$
amíg lista $\neq \emptyset$
    v legyen a lista első eleme
    minden $(v,w) \in E$, $((v,w) \in T_i$ vagy $x_{v,w} = 0)$, w címkézetlen
        $d_i(w) = d_i(v) + 1$
        w a lista végére kerül

vége
minden $(w, v) \in E$, $((w, v) \in T_i$ vagy $x_{w,v} = u_{w,v})$, w címkézetlen
$d_i(w) = d_i(v) + 1$,
w a lista végére kerül
vége
töröljük v-t a listáról
vége

Az i. pivotálás során lehetséges belépő élek C^i halmaza az (S, Z) vágás megfelelő élei (S-ből Z-be menő $x_e^i = 0$, illetve Z-ből S-be menő $x_e^i = u_e$ folyamértékű élek), ezek közül egy olyat választunk ki, melynek S-beli végpontjának címkéje minimális (5. algoritmus).

---

5. Algoritmus. Címkézéses primál szimplex (Goldfarb, Hao)

T^1 tetszőleges feszítőfa, $x^1 \equiv 0$, $i = 1$.
Goldfarb–Hao-címkézés
amíg $d_i(t) \neq \infty$
válasszunk belépő élt: egy minimális S-beli címkéjű él
válasszunk kilépő élt: primál hányados teszt
végezzük el a pivotálást, $i = i + 1$.
Goldfarb–Hao-címkézés
vége

Megjegyzés: a címkézést nem feltétlenül kell minden pivotálásnál újraszámolni [27]. Ez némileg javít az implementáció műveletigényén, de pivotálások számán nem, így a részletekbe nem megyünk bele.

Az így pontosított algoritmus már erősen polinomiális lesz:

2.1. Tétel. (Goldfarb, Hao [27]) *Goldfarb és Hao algoritmusa (5. algoritmus) legfeljebb nm pivotálással megtalálja a maximális folyam feladat egy optimális bázismegoldását.*

A részletes bizonyítás megtalálható az eredeti cikkben. Vázlatosan a legrövidebb javítóutas algoritmusoknál ismertetett sémát követi: belátja a címkék monotonitását, illetve rendszeresen bekövetkező valódi növekedését; ebből és a címkézés korlátosságából felső becslést ad a pivotálások maximális számára. Mivel a monotonitási lemma különböző változatai még többször elő fognak kerülni, így ennek a részletes bizonyítását ismertetjük.

2.1. Lemma. (Goldfarb, Hao [27]) *Goldfarb és Hao algoritmusa (5. algoritmus) során a csúcsok címkéi monoton növekednek, vagyis minden $z \in V$-re és minden i-re $d_i(z) \leq d_{i+1}(z)$.*

Bizonyítás: Legyen az i. pivotálásnál belépő él $p = (v, w)$, és tegyük fel, hogy $x^i_p = 0$ (vagyis $v \in S_i$ és $w \in Z_i$). Az $x^i_p = u_p$ eset hasonlóan bizonyítható.

Figyeljük meg, hogy $d_i(w) = d_i(v)+1$. Egyrészt a címkézés definíciója alapján $d_i(w) \leq d_i(v) + 1$. Másrészt ha $d_i(w) \leq d_i(v)$ lenne, akkor a legrövidebb s-ből w-be vezető pszeudójavítóút első (S, Z) vágásbeli éle lehetséges belépő él, és kisebb S-beli címkével rendelkezne, mint p, evvel ellentmondva p választásának.

Ha az s-ből z-be vezető pszeudo-javítóút hossza csökkent, akkor létezik olyan él, amit a pivotálás után olyan irányból tudunk használni, ahogyan a pivotálás előtt nem tudtuk. Vizsgáljuk meg tehát, hogy hogyan változik az élek „használhatósága”.

A $T_i \cap T_{i+1}$-beli éleket mindkét címkézésnél mindkét irányban lehet használni, a $\overline{T_i \cup T_{i+1}}$ éleknek pedig nem változott a folyamértéke, így mindkét címkézésnél ugyanabban az irányban lehet őket használni.

Ha a kilépő él is p, akkor p-t az i. címkék meghatározásánál csak előreélként, míg az $i + 1$. címkék meghatározásánál csak hátraélként lehet használni. Vagyis z címkéje csak akkor csökkenhetett, ha az $i + 1$. pivotálás előtti állapot szerinti legrövidebb s-ből z-be menő pszeudójavítóút visszaélként használja p-t.

Ha a kilépő él $q \neq p$, akkor p-t az i. címkék meghatározásánál csak előre irányban, míg az $i+1$. címkékhez mindkét irányban használhatjuk. A kilépő q élt pedig az i. címkék meghatározásnál mindkét irányban, míg az $i + 1$. címkékhez csak az egyik irányban tudjuk használni. Tehát ebben az esetben is csak úgy csökkenhet z címkéje, ha az új legrövidebb pszeudójavítóút visszaélként használja p-t.

De ekkor a következő egyenlőtlenség-láncnak kéne fennálnia:

$$\begin{aligned} d_{i+1}(z) = d_{i+1}(w) + 1 + d_{i+1}(v, z) &\geq d_i(w) + 1 + d_i(v, z) \\ &= d_i(v) + 2 + d_i(v, z) \geq d_i(z) + 2, \end{aligned}$$

ahol $d_j(v, z)$ a legrövidebb x^j melletti $v \to z$ pszeudo-javítóút hossza. A lépések indoklásai rendre:

1. Megállapítottuk, hogy a legrövidebb x^{i+1} melletti $s \to z$ pszeudo-javítóút $s \to w \xrightarrow{p} v \to z$ alakú.

2. A legrövidebb x^{i+1} melletti $s \to w$ és $v \to z$ pszeudó-javítóutak nem használhatják visszafele a (v, w) élt, így ezek az utak legalább olyan hosszúak, mint x^i melletti párjuk.

3. Itt felhasználjuk, hogy $d_i(w) = d_i(v) + 1$.

4. Háromszög egyenlőtlenség: $d_i(z) \leq d_i(v) + d_i(v, z)$.

Vagyis ebben az esetben sem csökkent z címkéje. □

Az algoritmus egyszerű adatstruktúrákkal implementálható $\mathcal{O}(nm^2)$ műveletigénnyel, illetve az újracímkézés szükségességére figyelve $\mathcal{O}(n^2m)$ műveletigénnyel.

Az úgynevezett dinamikus fa adatstruktúrát [48] alkalmazva pedig a futásidő levihető $\mathcal{O}(nm \log n)$-re [23], ami már egy logaritmikus faktortól eltekintve megegyezik az előfolyamos algoritmusok lépésszámával.

2.3. Polinomiális duál szimplex módszer maximális folyam feladatra

Az első maximális folyam feladaton erősen polinomiális duál szimplex változat Orlintól származik [41]. Ez az algoritmus az általánosabb minimális költségű hálózati folyamra adott hatékony algoritmust. Ebben a fejezetben egy későbbi, de egyszerűbb algoritmust mutatunk be az Armstrong, Chen, Goldfarb és Jin szerzőktől [6], amely szintén a csúcsok egy címkézésével biztosítja a polinomialitást.

Az egyszerűbb tárgyalás érdekében bázisfolyamok helyett bázis előfolyamokkal dolgozunk. Egy $\mathbf{x} : E \to \mathbb{R}$ függvény *előfolyam*, ha minden élre $0 \leq x_e \leq u_e$ teljesül, illetve minden $v \in V \backslash \{s\}$ csúcsra a csúcs $e(v) := \sum_{(w,v)\in E} x_{w,v} - \sum_{(v,w)\in E} x_{v,w}$ *többlete* nemnegatív. Egy csúcsot *aktív*nak nevezünk, ha $e(v) > 0$. Az előfolyam bázis előfolyam, ha minden $e \notin T$ élre $x_e = 0$, vagy $x_e = u_e$.

Minden bázis előfolyam visszaalakítható egy nem feltétlenül primál megengedett bázis folyammá az aktív csúcsokban levő többletek forrásba való visszatolásával (a feszítőfában levő egyértelmű $s \to v$ úton csökkentjük a folyamértéket $e(v)$-vel). Ez fordítva nem igaz, hiszen egy tetszőleges nem megengedett bázisfolyam hasonló átalakításánál kialakulhatnak $e(v) < 0$ csúcsok is.

Az algoritmus során a T feszítőfát s gyökérrel fogjuk elképzelni. Az s csúcsot legfelülre rakva (mint a valós fáknál szokás) mindegyik feszítőfabeli él „felfelé” vagy „lefelé” mutató él. Az algoritmus során többletet mindig a forrás felé, felfelé fogunk tolni, egy bázisbeli él „felfelé mutató reziduális kapacitásán” felfelé élek esetén az $u_e - x_e$, míg lefelé élek esetén az x_e értéket értjük. T_v-vel jelöljük a feszítőfa v gyökerű részfáját (de megtartva a $Z = T_t$ és S jelöléseket is), illetve $pred(v)$-vel jelöljük a $v \neq s$ csúcs fölötti bázisbeli élt (a T-beli $v \to s$ út első élét).

Az algoritmus során duál megengedett bázis előfolyamokon haladunk. Kezdő megoldásnak megfelel a következő: T legyen egy $S = \{s\}$ és $Z = V \backslash \{s\}$ részekkel rendelkező feszítőfa, illetve legyen minden $(s, v) \in E$ élre $x_{s,v} = u_{s,v}$, majd az így kialakuló többletekből toljunk fel a fán annyit, amennyit lehet.

Duál szimplex algoritmusként először a q kilépő élt választjuk ki. Ez $q = pred(v)$ lesz, egy tetszőleges v aktív csúcsra ($e(v) > 0$). Ezután a belépő él a T_q részfából kimenő, reziduális kapacitással rendelkező él kell, hogy legyen. Ezek közül egy címkézési technikával választunk.

Legyen $A_{T,x} = \{(v, w) : (v, w) \in T$ vagy $(w, v) \in T$, vagy $x_{v,w} = 0$, vagy $x_{w,v} = u_{w,v}\}$, és $\widehat{A}_{T,x} = A_{T_x} \backslash \{(s, t)\}$. Egy $d : V \to \mathbb{N}$ címkézést *helyes címkézésnek* nevezünk, ha $d(t) = 0$, $d(s) = n$, és minden $(v, w) \in A_{T,x}$ esetén $d(v) \leq d(w) + 1$. Ekkor könnyen látható, hogy $d(u)$ egy alsó becslés a legrövidebb $u \to t$ irányított út hosszára $A_{T,x}$-ben, ha az (s, t) él hossza n, és minden más él hossza 1. Az algoritmus végig egy helyes címkézéssel dolgozik, a fenti legrövidebb utakkal kapott „egzakt” címkézés helyett, így az implementáció lépésszáma javul, az algoritmus helyességének bizonyítása viszont némileg bonyolultabbá válik. Ezzel a címkézéssel olyan élek belépése „megengedett”, amelyen a címkézés szoros, vagyis

$$v \in T_q, w \notin T_q, x_{v,w} = 0, \text{ és } d(v) = d(w) + 1,$$
$$v \notin T_q, w \in T_q, x_{v,w} = u_{v,w}, \text{ és } d(w) = d(v) + 1.$$

Egy ilyen belépő éllel (és a q kilépő éllel) elvégzett pivotálás az előfolyamos technológiával annak felel meg, hogy a feszítőfában kicseréljük a kilépő élt a belépő élre, majd a v aktív csúcsból s felé toljuk a lehető legtöbb folyamot az új $v \to s$ feszítőfabeli úton.

---

6. Algoritmus. Címkézéses duál szimplex (Armstrong, Chen, Goldfarb, Jin)

T egy tetszőleges feszítőfa $S = \{s\}$ részfával.
Az (S, Z) vágás élei legyenek duál fízibilisek, más bázison kívüli élre legyen $x_e = 0$.
Toljuk a többleteket s felé.
Legyen $d(s) = n$, $d(t) = 0$, $d(v) = 1$ minden $v \in V \setminus \{s, t\}$.
amíg létezik $g \in V$ aktív csúcs
    Legyen g egy aktív csúcs, $q = pred(g)$.
    amíg nincs p belépő élünk
        Legyen $v \in T_q$ olyan, hogy $d(v) = \min_{w \in T_q} d(w)$.
        ha létezik v-hez illeszkedő *megengedett* belépő él **akkor**
            Legyen p egy v-hez illeszkedő megengedett él.
        egyébként
            Legyen $d(v) = d(v) + 1$.
        vége
    vége
    $T = T \cup \{p\} \setminus \{q\}$, toljuk g többletét s felé.
vége

2.2. Tétel. (Armstrong, Chen, Goldfarb, Jin [6]) *A 6. algoritmus legfeljebb $2nm$ pivotálással helyesen megoldja a maximális folyam feladatot.*

Röviden összefoglaljuk a bizonyítás lépéseit.

Az első, bizonyítást érdemlő állítás szerint a csúcsok címkézése minden ciklus elején (az aktív csúcs kiválasztásakor) helyes. Ez kezdetben természetesen igaz, a fennmaradását pedig a legkisebb címkéjű csúcs vizsgálata garantálja.

Továbbá a duál fízibilitás is fennmarad az algoritmus során. Kezdetben ez is teljesül, később pedig akkor változhat, ha az (S, Z) vágásból származik a belépő él. Ilyenre viszont csak akkor fanyalodunk, ha a Z-beli megengedett belépő élek elfogytak, hiszen a $Z \setminus T_q$-beli csúcsok címkéje kisebb, mint n, míg az S-beli csúcsoké legalább n marad. Így az aktív csúcsok elfogyásával optimális megoldást kapunk.

Végül a pivotálások számára kapott korlát a következő lemmán alapul:

2.2. Lemma. *Tegyük fel, hogy a 6. algoritmus során* (u, v) *egy pivotálás során belép a bázisba, legyen* d *a pivotálás előtti címkézés. Tegyük fel, hogy később kilép, majd még később ismét belép a bázisba, ezen pivotálás előtti címkézés legyen* d'. *Ekkor* $\min\{d'(u), d'(v)\} \geq \min\{d(u), d(v)\} + 1$.

Mivel a címkék monoton nőnek, és felülről korlátosak, így egy él legfeljebb $2n$-szer léphet be a bázisba, vagyis tényleg legfeljebb $2nm$ pivotálás történhet.

Az algoritmus implementálható $\mathcal{O}(n^2 m)$ futásidővel, illetve némi változtatással a műveletigény levihető a kombinatorikus előfolyam algoritmusok által gyakran elért $\mathcal{O}(n^3)$ futásidőre. A „pivotálások” száma ez utóbbi esetben is $\mathcal{O}(nm)$, viszont az aktív csúcsból nem toljuk el a többletet teljesen s-ig, így egy pivotálás $\mathcal{O}(1)$ időt vesz igénybe ([6], Algoritmus 3).

3. Nem nulla alsó korlátú feladatok

Ebben a fejezetben olyan maximális folyam feladatokat tekintünk, ahol a folyam alsó korlátja nem feltétlenül nulla, hanem egy l függvénnyel adott:

$$\begin{aligned} & \max x_{t,s} \\ \forall v \in V: \quad & \sum_{(w,v)\in E^*} x_{w,v} - \sum_{(v,w)\in E^*} x_{v,w} = 0 \\ \forall e \in E: \quad & l_e \leq x_e \leq u_e. \end{aligned} \tag{2}$$

A primál és duál hálózati szimplex algoritmusok működését a 2. fejezetben nemnulla alsó korlátokkal írtuk le.

Primál szimplex algoritmus esetén (2. és 5. algoritmus) az $x = 0$ folyammal és egy tetszőleges T feszítőfával indultunk el. Nem nulla alsó korlát esetén találnunk kell egy primál fízibilis bázismegoldást, ezek után mindkét algoritmus ugyanúgy működik tovább, a pivotálások számára adott korlát is változatlan marad a második algoritmusnál.

Duál szimplex algoritmus esetén (3. és 6. algoritmus) egy tetszőleges duál fízibilis bázismegoldással indulunk. Ilyet egyszerű konstruálni. Vegyünk egy tetszőleges T feszítőfát, állítsuk az (S, Z) vágásbeli éleket duál fízibilis folyamértékre, állítsuk a többi bázison kívüli él folyamértékét az alsó vagy felső korlátjára, majd számítsuk ki a bázisbeli élek folyamértékét. Így valóban duál fízibilis bázismegoldást kapunk, a bázisbeli élek primál fízibilitása persze nem biztosított. Ez a címkézés nélküli, általános duál hálózati szimplex algoritmushoz megfelelő induló megoldás, azonban a címkézéses duál szimplex algoritmus [6] egy speciális duál megengedett megoldással indult, ami garantálta, hogy a folyam átírható előfolyam formára. Sajnos jelen esetben ez nem feltétlenül igaz.

Továbbá mivel nem nulla alsó korlátok esetén nem feltétlenül létezik megengedett megoldása a feladatnak, így a duál jellegű algoritmusokban valahol szerepelnie kell egy megállási feltételnek, ahol az algoritmus azt mondja, hogy a feladat nem megoldható, és leáll. Valóban, a duál szimplex algoritmusnál (3. algoritmus) lehetséges, hogy a kiválasztott kilépő élhez nem létezik lehetséges belépő él.

Legyen például a kilépő q élre $x_q > u_q$, és mutasson q az alatta levő T_q részfába. Ekkor lehetséges belépő él nemlétezése azt jelenti, hogy minden más T_q-ba befelé mutató élre $x_e = u_e$ (ezek bázison kívüli élek), illetve a T_q-ból kifelé mutató élekre $x_e = l_e$. T_q csúcsaiba (a megmaradási egyenleteket összegezve) ugyanannyi folyam folyik be, mint ki, tehát:

$$\sum_{(v,w):\overline{T}_q \to T_q} x_{v,w} = \sum_{(v,w):T_q \to \overline{T}_q} x_{v,w}.$$

Itt felhasználva a folyamértékekre vonatkozó információinkat (a bal oldalon $x_q > u_q$):

$$\sum_{(v,w):\overline{T}_q \to T_q} u_{v,w} < \sum_{(v,w):T_q \to \overline{T}_q} l_{v,w}.$$

Vagyis a T_q halmazból több folyamot kell kivinnünk, mint amennyit be lehet vinni. Tehát ha az algoritmus elakad a belépő él választásánál, akkor a feladat tényleg infízibilis. Sőt, erre kapunk egy egyszerűen ellenőrizhető bizonyítékot is a T_q halmazban. Ilyen halmaz létezése egyébként karakterizálja a hálózati folyam feladat megoldhatóságát:

3.1. Tétel. (Gale [21], Hoffman [30]) *A hálózati folyam feladatnak pontosan akkor létezik megengedett megoldása, ha minden $Q \subseteq V$ csúcshalmazra*

$$\sum_{(v,w):\overline{Q} \to Q} u_{v,w} \geq \sum_{(v,w):Q \to \overline{Q}} l_{v,w}.$$

3.1. Első fázis feladat

Visszatekintve a feladat felírására (2), természetes ötlet bevezetni az $x'_e = x_e - l_e$ változókat (és legyen $x'_{t,s} = x_{t,s}$), hiszen így az x' változókra nulla alsó korlátot kapunk. A csúcsokra vonatkozó egyenletek azonban megváltoznak:

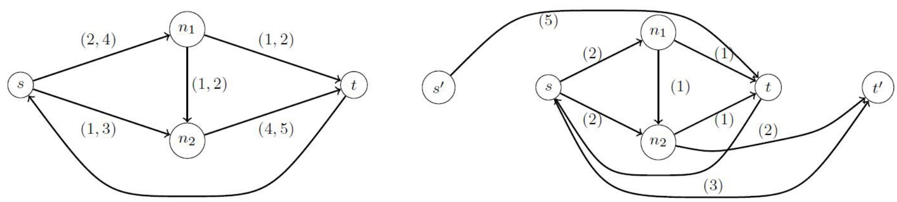
$$\forall v \in V: \sum_{(w,v)\in E^*} x'_{w,v} - \sum_{(v,w)\in E^*} x'_{v,w} = \sum_{(v,w)\in E^*} l_{v,w} - \sum_{(w,v)\in E^*} l_{w,v}. \tag{3}$$

Itt (3) jobboldalát $b(v)$-vel jelölve a következő lineáris programozási feladatot kapjuk:

$$\begin{aligned} & \max x'_{t,s} \\ \forall v \in V: \quad & \sum_{(w,v)\in E^*} x'_{w,v} - \sum_{(v,w)\in E^*} x'_{v,w} = b(v) \\ \forall e \in E: \quad & 0 \le x'_e \le u_e - l_e. \end{aligned}$$

Itt $b(v)$ értelmezhető úgy, mint a csúcs igénye, illetve negatív érték esetén mint a csúcsban lévő $-b(v)$ többlet. Természetesen $\sum_{v\in V} b(v) = 0$ fennáll. Ismert módszer ilyen feladatok megengedett megoldásának előállítására a következő visszavezetés.

Vezessünk be két új csúcsot, jelölje őket s' és t'. Húzzuk be az (s', v) élt, ha $b(v) < 0$, és legyen ezen él felső korlátja $-b(v)$. Hasonlóan, húzzuk be a (v, t') élt, ha $b(v) > 0$, és legyen ezen él felső korlátja $b(v)$. Az új élek alsó korlátja mindkét esetben legyen 0. Tekintsük a 4. ábrán látható példát.



(a) az eredeti feladat (b) átalakítás után

4. ábra. Alsó korlátos feladat átalakítása.

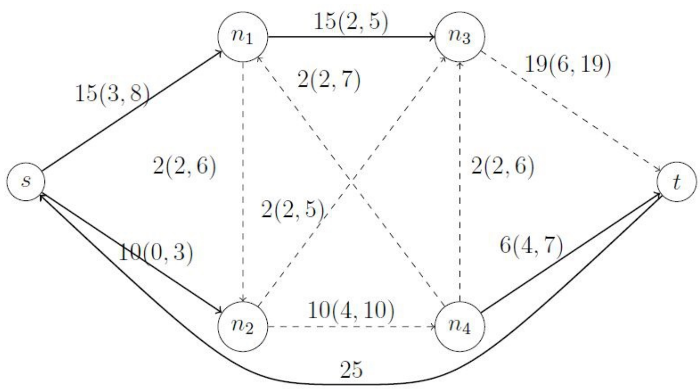
Könnyen látható, hogy 4a egy tetszőleges megoldása átalakítható 4b egy megoldásává az alsó korlátok levonásával, illetve az új élek folyamértékének a felső korláton való megválasztásával. Ekkor egyben 4b egy maximális $s' \to t'$ folyamát is kapjuk, hiszen például az s'-ből induló élek egy vágást alkotnak. Ennek megfelelően az eredeti feladatnak pontosan akkor van megengedett megoldása, ha az átalakított feladatot mint maximális folyam feladatot megoldva, a kapott folyam telíti az újonnan bevezetett éleket. Ebben az esetben az alsó korlátok visszaadásával és az új élek elvételével az eredeti feladat egy megengedett megoldását kapjuk.

Tehát megengedett megoldást előállíthatunk egy kicsit nagyobb ($n + 2$ csúcsú és legfeljebb $m + n$ élű, tehát nagyságrendileg nem nagyobb) maximális folyam feladat megoldásával. Amennyiben ezt pivotalgoritmussal végezzük, úgy a kapott megoldás is könnyen bázismegoldássá alakítható.

3.2. Fízibilitási MBU-algoritmus

Egy másik, lineáris programozásbeli megközelítéssel indulhatunk egy tetszőleges (nem feltétlenül primál vagy duál megengedett) bázisból, majd a primál nem megengedett éleket egyenként „kijavíthatjuk”. Amennyiben a pivotalgoritmus során mindig egy kiválasztott nem megengedett élre koncentrálunk, és figyelünk arra, hogy primál megengedett élek ne váljanak nem megengedetté, akkor a fízibilitási MBU [8] egy specializációját kapjuk. Mivel a fízibilitási MBU során a valódi célfüggvénnyel nem foglalkozunk, felfoghatjuk úgy is az algoritmust, mintha az éppen kijavítani kívánt él folyamértékét maximalizálnánk ($x < l$ esetén, illetve az él megfordítását $x > u$ esetén) a nem megengedett éleket nem figyelembe véve a δ kiszámolásánál, és az algoritmust megállítjuk, amint élünk elérte a fízibilis intervallumot. Az élek kijavítását Goldfarb és Hao [26, 27] már ismertett címkézési technikájával (5. algoritmus) végezve erősen polinomiális algoritmust kapunk a feladatra [33].

Példaként tekintsük az 5. ábrát. Itt a zöld és kék élek alkotják a maximális folyam feladat bázisát. A jelenlegi bázismegoldás több primál nem megengedett élt is tartalmaz, ezek közül a kékkel jelölt (s, n_1) élt választottuk ki, őt javítjuk ki először.



5. ábra. MBU fízibilitási algoritmus.

Szeretnénk, ha a $(g, h) = (s, n_1)$ él kilépne a bázisból. Ekkor a feszítőfa két részre szakadna: $G = \{s, n_2, n_4, t\}$, illetve $H = \{n_1, n_3\}$. Mivel csökkenteni szeretnénk (s, n_1)-et, így olyan $G \to H$ él léphet be a bázisba, amelyen tudunk növelni (vagyis amelyre $x = l$), vagy olyan $H \to G$ él, amelyen tudunk csökkenteni (vagyis amelyre $x = u$). A megfelelő élek $\{(n_2, n_3), (n_3, t), (n_4, n_1), (n_4, n_3)\}$, közülük kell egy címkézés segítségével választanunk.

A primál szimplex algoritmus címkézéses változatához (5. algoritmus) hasonlóan szeretnénk címkézni. Jelen esetben az (s, n_1) élt szeretnénk csökkenteni, amit az (n_1, s) „él” növeléseként is felfoghatunk, vagyis a (t, s) él szerepét az (n_1, s) él veszi át. Így tehát érdemes a címkézést az s csúcsból indítani, illetve jelen esetben az (s, n_1) él nem használható, ellenben a (t, s) él igen.

Általánosan, a (g, h) primál nem megengedett élhez történő címkézés megegyezik a 4. algoritmusban leírtakkal, annyi különbséggel, hogy a (t, s) él használható, de a (g, h) él nem, illetve a címkézés kiindulópontja $x_{g,h} > u_{g,h}$ esetén a g, míg $x_{g,h} < l_{g,h}$ esetén a h csúcs.

Az algoritmus vázlata a következő:

7. Algoritmus. Megengedett folyam keresése az MBU-algoritmussal [33]

T tetszőleges feszítőfa, x egy T-hez tartozó bázismegoldás.
amíg létezik nem megengedett él
    Legyen (g, h) egy primál nem megengedett él.
    amíg (g, h) nem megengedett
        Címkézés (g, h)-hoz.
        ha $d(h) = \infty$ $(d(g) = \infty)$ **akkor**
            Nincs megengedett megoldás, megállunk.
        vége
        Belépő él: egy minimális címkéjű lehetséges belépő él.
        Kilépő él: primál hányadosteszt a megengedett változókon.
        Végezzük el a pivotálást.
    vége
vége

Egy (g, h) él kijavításához legfeljebb nm pivotra van szükség (amennyiben nem akad el az algoritmus infízibilitás miatt), ennek bizonyítása nagyrészt megegyezik a címkézéses primál szimplex algoritmusnál [27] leírtakkal. Az algoritmus elején legfeljebb $n - 2$ primál nem megengedett változónk lehet (a feszítőfa $n - 1$ élből áll, és (t, s) nem lehet infízibilis). Mivel a kilépő élt mindig a megengedett éleken való primál hányadosteszttel választjuk, így az algoritmus során nem válhat már megengedett él nem megengedetté. Ebből következően legfeljebb $n - 2$ javítási ciklus történik az algoritmusban, vagyis a pivotálások számára a következő korlátot kapjuk:

3.2. Tétel. (Illés, Molnár-Szipai [33]) *A 7. algoritmus $\mathcal{O}(n^2 m)$ pivotálással megtalálja a maximális folyam feladat egy megengedett megoldását, vagy kimutatja, hogy a feladat nem megoldható.*

Megjegyezzük, hogy az algoritmus nem használja, hogy a (t, s) élt maximalizáljuk, tetszőleges célfüggvényű hálózati folyamhoz használható megengedett cirkuláció keresésére.

4. Primál MBU szimplex algoritmus

A primál MBU szimplex algoritmus [4] ötlete a primál szimplex algoritmushoz képest a következő. Egy tetszőleges duál nem megengedett változó kiválasztása után hányadosteszttel kiválasztjuk a kilépő változót, de nem végezzük el rögtön a pivotálást. Ekkor ugyanis duál megengedett változók duál infízibilissé válhatnak. Ezt elkerülendő, végzünk egy duál hányadostesztet a kilépő változó során, és amennyiben kisebb duál hányadost kapunk, mint az eredetileg kiválasztott duál nem megengedett változón, akkor inkább ezt a pivotot lépjük meg.

---

8. Algoritmus. Primál MBU szimplex algoritmus LP-feladaton [4]

---

x primál megengedett bázismegoldás.
amíg létezik duál nem megengedett változó
  Legyen x_{p^*} egy duál nem megengedett változó („vezérváltozó”).
  amíg x_{p^*} duál nem megengedett
    Primál hányadosteszt p^* oszlopában a primál megengedett változókon:

$$q = \arg\min \left\{ \frac{\overline{b}_q}{\overline{a}_{q,p^*}} \ : \ \overline{a}_{q,p^*} > 0, \overline{b}_q \geq 0 \right\}.$$

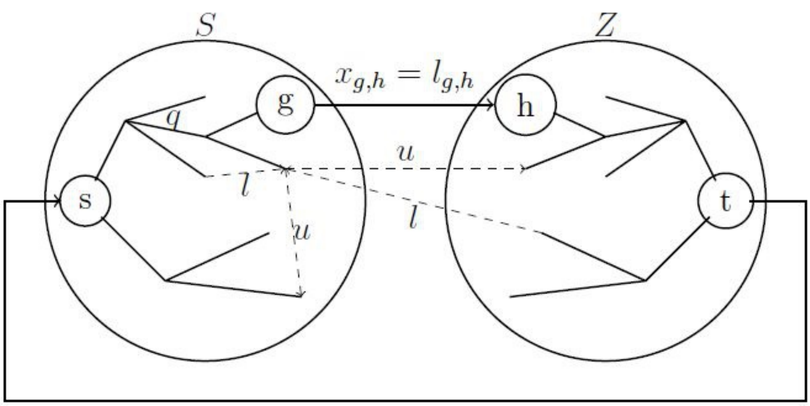
    Ha nem létezik q, melyre $\overline{a}_{q,p^*} > 0$ és $\overline{b}_q \geq 0$, akkor a feladat duál nem megengedett.
    Legyen $\vartheta_1 = |\overline{c}_{p^*}|/\overline{a}_{q,p^*}$.
    Végezzünk duál hányadostesztet q sorában a duál megengedett változókon:

$$p = \arg\min \left\{ \frac{\overline{c}_p}{|\overline{a}_{q,p}|} \ : \ \overline{c}_p \geq 0, \overline{a}_{q,p} < 0 \right\}.$$

    Legyen $\vartheta_2 = \overline{c}_p/|\overline{a}_{q,p}|$.
    ha $\vartheta_2 < \vartheta_1$ **akkor**
      Pivotáljunk $a_{p,q}$-n.
    egyébként
      Pivotáljunk $a_{p^*,q}$-n.
    vége
  vége
vége

Felmerülhet bennünk, hogy mivel a primál hányadostesztet a vezérváltozó oszlopán végeztük, de a $\vartheta_2 < \vartheta_1$ esetben nem ő lép be a bázisba, így a primál megengedettség nem feltétlenül marad fenn. Ez így is van, az algoritmus némileg meglepő tulajdonsága viszont az, hogy a vezérváltozó bázisba való belépése ($\vartheta_2 \geq \vartheta_1$) után, ami valamilyen ciklizálás elleni technika használata esetén véges sok pivotálás után megtörténik, a bázis ismét primál megengedetté válik. Továbbá a vezérváltozó bázisba lépésével a duál nem megengedett változók száma legalább 1-gyel csökkent, hiszen a duál hányadosteszt garantálja, hogy már duál megengedett változók nem válnak infízibilissé az algoritmus során. Így a duál megengedett változók halmaza „monoton módon növekszik”, innen az algoritmus elnevezése (monotonic build up simplex algorithm).

Nézzük meg, hogyan változik az algoritmus, ha maximális folyam feladatra alkalmazzuk! A maximális folyam feladat primál megengedett bázismegoldásának struktúráját már ismerjük a primál szimplex algoritmusnál leírtakból. Ismerjük a duál nem megengedett él fogalmát, ilyen csak az (S, Z) vágásban lehet. A primál hányadosteszt a vezérváltozó belépésével kialakuló körben való javítás szűk keresztmetszetét választja ki. A 6. ábrán $x_{g,h}$ alsó korláton levő vezérváltozóval láthatunk egy példát.



6. ábra. Primál MBU hálózati szimplex

A duál hányadostesztnél történik lényeges egyszerűsödés a lineáris programozáshoz képest. A kilépő q élhez tartozó lehetséges p belépő élek duál hányadosa 0 (ha a p él S-en belül van), illetve 1 lehet (ha p az (S, Z) vágásban van). Mivel a vezérváltozó duál hányadosa is 1, így csak akkor nem engedjük a vezérváltozót belépni, ha létezik S-en belüli belépő él (Z-n belüli, ha $q \in Z$). Ha több ilyen lehetséges belépő él létezik, akkor címkézéssel fogunk köztük dönteni.

9. Algoritmus. Primál MBU-SA maximális folyam feladaton, címkézéssel [34]

x primál megengedett bázismegoldás.
amíg létezik duál nem megengedett él
    Legyen (g, h) egy duál nem megengedett él („vezérváltozó”).
    amíg (g, h) duál nem megengedett
        Legyen q a primál hányadosteszttel kapott kilépő él.
        ha létezik q részfáján belüli lehetséges p belépő él **akkor**
            Válasszunk közülük minimális címkéjűt.
            Pivotáljunk: belép p, kilép q.
        egyébként
            Pivotáljunk: belép (g, h), kilép q.
        vége
    vége
vége

Vegyük észre, hogy egy (g, h) vezérváltozóhoz tartozó ciklus során végig S-en vagy Z-n belüli élek lépnek be (q helyzetétől függően), így az S és Z halmazok nem változnak, amíg a vezérváltozó be nem lép a bázisba, és a ciklus véget ér. Így tehát az S és Z részfát kezelhetjük külön egy cikluson belül, bevezethetünk külön címkézést a két részgráfon.

Tegyük fel, hogy $g \in S$ és $h \in Z$, ellenkező esetben g és h szerepe felcserélődik. Ha $v \in S$, akkor a $d(v)$ címke legyen a legrövidebb pszeudo-javítóút hossza v-ből g-be S-en belül, és ha $v \in Z$, akkor legyen a legrövidebb pszeudo-javítóút hossza h-ból v-be Z-n belül.

4.1. A primál MBU hálózati szimplex polinomialitása maximális folyam feladatra

Feladatunk egy vezérváltozó-ciklus lépésszámának megbecsülése, hiszen a duál megengedett élek számának monoton növése miatt legfeljebb annyi ciklus lesz, ahány duál nem megengedett él volt a kezdő bázismegoldásban ($\mathcal{O}(m)$).

A bizonyítás gondolatmenete azonos a korábban látott gondolatmenettel: megmutatjuk, hogy a címkék monoton növekednek, korlátosak, illetve egy él két bázisba való belépése között ténylegesen nőtt legalább az egyik csúcsának címkéje. Mivel a címkék egy h-tól, vagy g-be vezető legrövidebb pszeudo-javítóút hosszaként vannak definiálva, tényleg felülről becsülhetők n-nel, hiszen legrosszabb esetben is létezik egy, a feszítőfán belüli út, ami legfeljebb ilyen hosszú.

4.1. Lemma. (Monotonitás) *Tegyük fel, hogy a maximális folyam feladatot a 9. algoritmussal oldjuk meg. Egy vezérváltozó cikluson belül bármely $v \in V$ csúcsra és i iterációra igaz, hogy $d^{i+1}(v) \geq d^i(v)$.*

A lemma bizonyítása hasonló a 2.1. lemma bizonyításához (monotonitási lemma a Goldfarb–Hao-címkézéssel), részletei (az alfejezet többi állításának bizonyításával együtt) megtalálhatók a szerzők [34] cikkében. A címkék tényleges növekedéséről szóló lemma a következő alakú:

4.2. LEMMA. (Fő lemma) *Tegyük fel, hogy a maximális folyam feladatot a 9. algoritmussal oldjuk meg. Ha egy vezérváltozó-cikluson belül (v, w) belépett az i. pivot során, kilépett a $i < j$. pivot során, majd ismét belépett a $j < k$. pivot során, akkor $d^{k+1}(v) + d^{k+1}(w) \geq d^i(v) + d^i(w) + 2$ teljesül (ahol $d^m(v)$ az m. pivotálás előtti címke).*

A lemma bizonyítása két részre bomlik aszerint, hogy a bázisba való két belépés során azonos irányban történt-e a belépés, vagyis ha például $(v, w) \in S$, és az i. pivot után v volt közelebb g-hez, akkor ugyanez igaz-e a k. pivot során történő belépés után is. Ezt a továbbiakban „felső csúcsnak” fogjuk nevezni, ami egybevág az elképzeléssel, hogy a két részfa a g, illetve h csúccsal van „fellógatva”. Mindkét eset alapja a következő „részfa lemma” (4.3. lemma), de az egyik esetben szükség van a „megfordítási lemmára” (4.4. lemma) is.

4.3. LEMMA. (Részfa lemma) *Tegyük fel, hogy a maximális folyam feladatot a 9. algoritmussal oldjuk meg. Ha (v, w) belépett a bázisba az i. pivot során w felső csúccsal, és ez így marad az $i \leq j$. pivot elvégzése után is, akkor minden $z \in T_v^{j+1}$ csúcsra $d^{j+1}(z) \geq d^i(w) + 1$.*

A lemma bizonyítása során teljes indukciót használunk, illetve kihasználjuk, hogy a lehetséges belépő élek közül mindig a minimális címkéjűt választjuk.

4.4. LEMMA. (Megfordítási lemma) *Tegyük fel, hogy a maximális folyam feladatot a 9. algoritmussal oldjuk meg. Ha (v, w) belépett a bázisba az i. pivot során w felső csúccsal, és ez az $i < j$. pivot során megváltozik, akkor $d^{j+1}(w) \geq$ $\geq d^i(w) + 1$.*

A két segédlemmából összerakható a fő lemma bizonyítása, aminek birtokában már könnyen bizonyítható a következő felső korlát a pivotálások számára:

4.1. TÉTEL. *A címkézéses primál MBU szimplex algoritmus (9. algoritmus) legfeljebb $2nm^2$ pivotálással megoldja a maximális folyam feladatot.*

5. Duál MBU szimplex algoritmus

A duál MBU szimplex algoritmus [4] a primál MBU szimplex algoritmus duálisa. Röviden összefoglalva egy duál megengedett megoldásból indul, és egyenként kijavítja a primál nem megengedett változókat. Egy ilyen változó kijavítása során elveszhet a duál megengedettség, de a változó kilépésével helyreáll.

Az algoritmus pszeudo-kódja szintén nagyon hasonlít:

---

10. Algoritmus. Duál MBU szimplex algoritmus LP-feladaton [4]

---

x duál megengedett bázismegoldás.
amíg létezik primál nem megengedett változó
    Legyen x_{q^*} egy infízibilis változó („vezérváltozó”).
    amíg x_{q^*} infízibilis
        Duál hányadosteszt q^* sorában a duál megengedett változókon:

$$p = \arg\min \left\{ \frac{\overline{c}_p}{|\overline{a}_{q^*,p}|} \; : \; \overline{a}_{q^*,p} < 0, \overline{c}_p \geq 0 \right\}.$$

        (Ha nem létezik p, melyre $\overline{a}_{q^*,p} < 0$ és $\overline{c}_p \geq 0$, akkor a feladat nem megoldható.)
        Legyen $\vartheta_1 = \overline{b}_{q^*}/\overline{a}_{q^*,p}$.
        Végezzünk primál hányadostesztet p oszlopában a primál megengedett változókon:

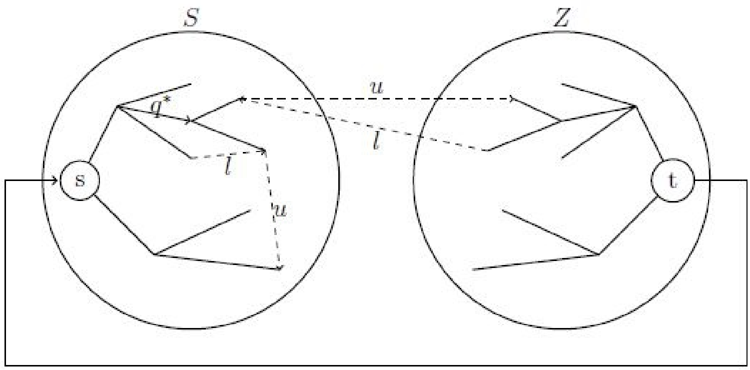
$$q = \arg\min \left\{ \frac{\overline{b}_q}{\overline{a}_{q,p}} \; : \; \overline{b}_q \geq 0, \overline{a}_{q,p} > 0 \right\}.$$

        Legyen $\vartheta_2 = \overline{b}_q/\overline{a}_{q,p}$.
        ha $\vartheta_2 < \vartheta_1$ **akkor**
            Pivotáljunk $a_{p,q}$-n.
        egyébként
            Pivotáljunk a_{p,q^*}-on.
        vége
    vége
vége

A $\vartheta_2 < \vartheta_1$ esetben elromolhat a duál megengedettség, hiszen a duál hányadostesztet q^* során végeztük, nem pedig q során, de a vezérváltozó kilépésével a duál megengedettség helyreáll. Így a duál MBU-algoritmus során a primál megengedett változók halmaza monoton növekszik, az utolsó ciklus után pedig optimális megoldást kapunk (ha fízibilis a feladat).

Ez két okból is szerencsés a mi helyzetünkben. Egyrészt kiinduló duál megengedett megoldást könnyen adhatunk nem nulla alsó korlátok esetén is. Másrészt a kijavítani kívánt primál infízibilis élek száma kezdetben $\mathcal{O}(n)$, hiszen ők csak a feszítőfában tartózkodhatnak, vagyis kevesebb ciklusra lesz szükség, mint a primál MBU-algoritmus esetében.

Mennyivel egyszerűsödik az algoritmus, ha maximális folyam feladatra alkalmazzuk? A vezérváltozónk egy infízibilis él a feszítőfában. Mint kilépő élt tekintve, a lehetséges belépő élek duál hányadosa 0 vagy 1 attól függően, hogy a vezérváltozó részfáján belül van, vagy az (S, Z) vágás egy telített éle. Tehát belépő élnek csak akkor választunk vágásbeli élt, ha más nincs, ettől eltekintve szabadon választhatunk. Végül a primál hányadosteszt eldönti, hogy a kialakuló körből kiléphet-e a vezérváltozónk a többi él megengedettségének megsértése nélkül. A 7. ábrán egy példát láthatunk a $q^* \in S$ és $x_{q^*} > u_{q^*}$ esetben.



7. ábra. Duál MBU hálózati szimplex

A belépő él kiválasztásában van némi szabadságunk, megfelelő címkézési technikával polinomiális futásidőt remélhetünk. A címkézés során figyelembe kell vennünk, hogy a duál hányadosteszt szerint a nem vágásbeli éleket kell preferálnunk. Ez első ránézésre jelentősen megnehezíti a dolgunkat. Tekintsük viszont az MBU-algoritmus korrektségére vonatkozó bizonyítást ([4], 1. tételének átírása a duál MBU-algoritmusra):

5.1. Tétel. *Tekintsük a duál MBU-algoritmus q^* vezérváltozó ciklusában történő $\vartheta_2 < \vartheta_1$ típusú pivotok egy sorozata után előálló megoldást. Ekkor a jelenlegi bázismegoldásra a következő három tulajdonság teljesülni fog:*

a) $\bar{b}_{q^*} < 0$.

b) Ha $\bar{c}_j < 0$, *akkor* $\bar{a}_{q^*,j} > 0$.

c) $\max_j \left\{ \frac{|\bar{c}_j|}{\bar{a}_{q^*,j}} : \bar{c}_j < 0 \right\} \leq \min_p \left\{ \frac{\bar{c}_p}{|\bar{a}_{q^*,p}|} : \bar{c}_p \geq 0, \bar{a}_{q^*,p} < 0 \right\}$.

Az a) tulajdonság szerint a vezérváltozó infízibilis marad, amíg a ciklus végén ki nem lép a bázisból (egy $\vartheta_1 \geq \vartheta_2$ típusú pivotálással).

A b) tulajdonság szerint a ciklus során duál infízibilissé vált változók akkor sem lehetnének lehetséges belépő élek, ha ezt egyébként nem kötöttük volna ki.

A c) tulajdonság szerint egy tetszőleges lehetséges belépő változó duál hányadosa legalább annyi, mint egy tetszőleges duál infízibilis változó duál hányadosának abszolút értéke. Vagyis ha elvégeznénk a pivotálást egy tetszőleges lehetséges belépő élen és a vezérváltozón, akkor helyreállna a duál fízibilitás (persze a primál hányadosteszt figyelembe vétele nélkül néhány változó fízibilitása elromolhatna).

Átírva a c) egyenlőtlenséget maximális folyam feladatra a következőt kapjuk:

$$\max_j\{1 : \overline{c}_j = -1\} \leq \min_p\{\overline{c}_p : \overline{c}_p \geq 0, \overline{a}_{q^*,p} = -1\}.$$

Itt a bal oldal $-\infty$, ha nincsen még duál infízibilis él a jelenlegi megoldásban. Ha viszont létezik legalább egy ilyen él, akkor a bal oldal 1, és így az egyenlőtlenség szerint minden lehetséges belépő él redukált költsége legalább 1, vagyis ekkor már csak vágásbeli élek vannak.

Végül figyeljük meg, hogy ha a belépő változó a vágásból származott, vagyis $\overline{c}_p = 1$, akkor a kilépő változó új redukált költsége $\overline{c}'_q = \overline{c}_q - \frac{\overline{c}_p}{\overline{a}_{q,p}} = 0 - \frac{1}{1} = -1$.

Összefoglalva, ha a vezérváltozó ciklusa során egyszer elfogynak a $\overline{c}_p = 0$ típusú belépő élek, akkor kiválasztunk egy $\overline{c}_p = 1$ típusú belépő élt, de ekkor a kilépő él duál infízibilis lesz, és így a következő pivotálás során sem lesz már $\overline{c}_p = 0$ belépő élünk. Tehát a vezérváltozó ciklusa két részre bomlik, egy $\overline{c}_p = 0$ és egy $\overline{c}_p = 1$ részre.

Az első részben lényegében csak q^* részgráfjában dolgozunk, így a szokásos címkézést megszoríthatjuk erre a részre. Amikor elfogynak a 0 hányadosú belépő élek, akkor elkezdhetjük az egész gráfot címkézni anélkül, hogy az ilyen élek újbóli felbukkanásától kéne tartanunk. A címkézés megegyezik a fízibilitási MBU-algoritmusnál (7. algoritmus) leírtakkal. Így a következő algoritmust kapjuk:

11. Algoritmus. Duál MBU-SA maximális folyam feladaton címkézéssel [40]

x duál megengedett bázismegoldás.
amíg x nem primál megengedett
    Legyen q^* egy primál nem megengedett él („vezérváltozó”).
    Fízibilitási MBU-címkézéssel q^* részgráfján
    ha q^* infízibilis **akkor**
        Fízibilitási MBU-címkézéssel az egész gráfon
    vége
    ha q^* infízibilis **akkor**
        A feladat infízibilis, megállunk
    vége
vége
A jelenlegi megoldás optimális, megállunk

A fízibilitási MBU-algoritmusra belátott lépésszám korlátokból könnyen összerakható a 11. algoritmus lépésszámbecslése:

5.2. Tétel. (Molnár-Szipai [40]) *A címkézéses duál MBU-algoritmus legfeljebb $2n^2m$ pivotálással megoldja a maximális folyam feladatot.*

6. Mozdony hozzárendelési probléma

A MÁV-TRAKCIÓ Zrt. (2014 óta a MÁV-START része) és a BME Optimalizálási Csoportja egy kutatás-fejlesztési projekt keretében vizsgálta a következőkben ismertetett mozdony hozzárendelési problémát [35]. A vállalat vasúti vontatási feladatok ellátásával foglalkozik. A személyszállítás területén a megrendelő a MÁV-START, míg teherszállítás esetén számos cég foglalkozik vasúti fuvarozással. A MÁV-TRAKCIÓ Zrt. megállapodik a megrendelővel, hogy az ő vasúti kocsikra pakolt szállítmányát egy adott helyen és időben felveszi, majd a saját mozdonyai segítségével elszállítja egy másik adott helyre és időre.

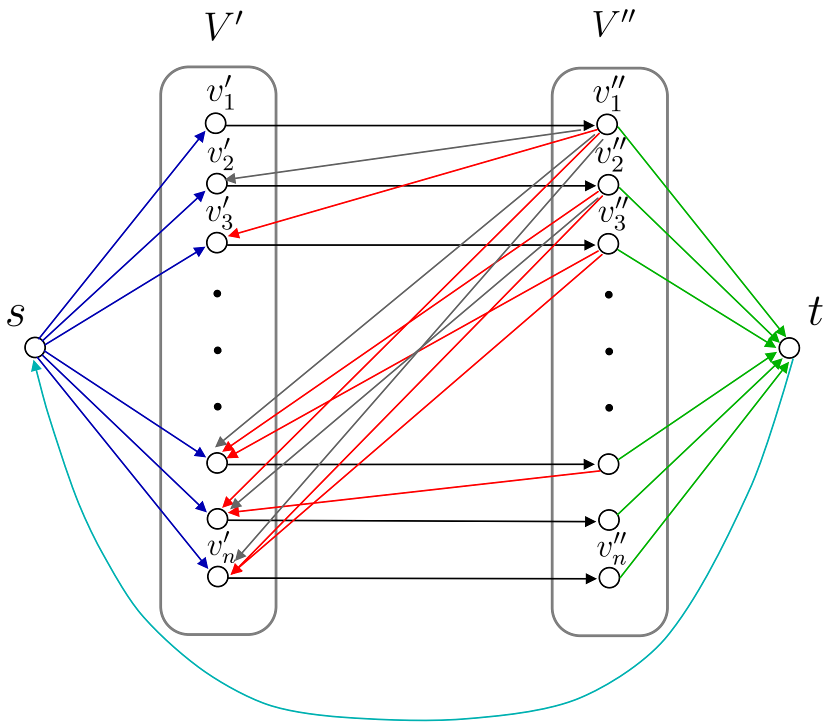
A teherszállítást a személyszállítással szemben az jellemzi, hogy a megrendelések többféle bizonytalanságot mutatnak: (i) gyakoriak a késések, (ii) előfordulnak lemondások, (iii) időnként a szállítás időpontjához nagyon közel adják le a megrendelést. Mindezek negatívan befolyásolják az optimális tehervontatás megszervezését. A teherszállítás esetén, mivel nem menetrend alapú a közlekedés megszervezése, szükségszerű az ún. *gépmenetek* nagyobb számának a használata. A tehervonatok közlekedtetése esetén kétféle logikus cél merülhet fel: 1. minél kevesebb mozdony segítségével végezzük el a feladatot, 2. minél kevesebb gépmenet kilométert fussanak a mozdonyaink. Matematikai szempontból az első esetben maximális folyam feladatot kapunk, míg a második esetben minimális költségű folyam feladatot. Ezeket a feladatokat megoldó, specializált algoritmusok jelentősen eltérnek egymástól. Mivel ebben a tanulmányban nem célunk a vasút optimalizálási feladat részletekbe menő tárgyalása és megoldása, így mi csak azzal az esettel foglalkozunk, amikor a cél minél kevesebb mozdony segítségével elvégezni a vontatást. Tehát a vasút optimalizálási problémát csak a maximális folyam feladat polinomiális pivot algoritmusai hatékonyságának illusztrálására használjuk fel. Az optimalizálási feladatot tehát egy maximális (illetve minimális) folyam feladatként fogalmazzuk meg, és arra az egyszerűbb kérdésre keressük a választ, hogy legalább hány mozdonyra van szükség az elvállalt vontatások elvégzéséhez.

A matematikai modell

Legyen a teljesítendő megbízások halmaza V. Minden $v \in V$ megbízáshoz rendelkezésünkre állnak a következő adatok: indulási hely, indulási idő, érkezési hely, érkezési idő, használható mozdonytípusok. A felépített matematikai modell egy hálózati folyam, melyben minden v megbízásnak megfelel egy v' és v'' csúcs, illetve egy (v', v'') él. Ha egy mozdony a v megbízás teljesítése után képes elvégezni a w megbízást, akkor felveszünk egy (v'', w') élt. Ez akkor teljesül, ha a v elvégzése után van elég idő az esetleges gépmenetre v érkezési helyéről w indulási helyére (d), illetve a szerelvények összerakására, ellenőrzésre (τ „technikai idő"):

$$t_v^{\text{érk}} + d(p_v^{\text{érk}}, p_w^{\text{ind}}) + \tau \leq t_w^{\text{ind}}.$$

Bevezetünk továbbá egy s forrást és t nyelőt, és felveszünk minden v-re egy (s, v') és (v'', t) élt. Végül bevezetünk egy (t, s) élt. Az így kapott hálózati folyamot szemlélteti a 8. ábra.



8. ábra. Minimális költségű hálózati folyam modell

Látható, hogy egy 1 értékű s-ből t-be menő folyam megfeleltethető egy úgynevezett mozdonyfordulónak, vagyis egy mozdony által elvégzett feladatsorozatnak. Megkövetelve, hogy mindegyik (v', v'') típusú élen legalább 1 legyen a folyamérték, a modell megengedett egészértékű megoldásai leírják a valós feladat megoldásait.

A modellről részletesebben [32]-ben olvashatunk.

Implementáció és eredmények

Jellemző méretű feladat a havi terv. Mivel a személyzetnek 15 nappal a hónap kezdete előtt meg kell adni egy beosztástervet, így a következő hónap tervét a jelenlegi hónap közepén rendelkezésre álló adatok alapján kell optimalizálni. Ez persze szükségessé tesz későbbi változtatásokat, de a módszer hatékonyságát jól méri.

A teszteléshez három mozdonytípus (V43, M62, M63) három havi (szeptember, október, november) megrendeléseit használtuk. Induló bázismegoldásként azt a megoldást használtuk, ahol mindegyik feladatot egy külön mozdony vontat el. Megjegyezzük, hogy csak a legfeljebb 3 nappal későbbi feladatokat kötöttük össze a modellezésnél leírtak szerint; evvel a megoldás minősége várhatóan nem romlik, viszont a gráf mérete jelentősen csökken. Kétféle induló bázismegoldást használtunk. Az első induló megoldásban minden feladatot külön mozdony vontat, míg a második megoldásban egy egyszerű mohó heurisztikával javítottunk ezen (ez a legnagyobb modell esetén is kevesebb, mint 6 másodperc alatt lefutott). Az így kapott modellek dimenzióit a 9. ábra tartalmazza.

Mozdonytípus	feladatok száma	csúcsok száma	élek száma	2. induló megoldás
szeptember V43	2850	5702	726338	93 mozdony
szeptember M62	1450	2902	175145	65 mozdony
szeptember M63	1789	3580	292260	63 mozdony
október V43	2901	5804	738650	94 mozdony
október M62	1400	2802	163437	59 mozdony
október M63	1780	3562	285932	59 mozdony
november V43	2816	5634	716115	90 mozdony
november M62	1403	2808	164792	62 mozdony
november M63	1742	3486	278817	60 mozdony

9. ábra. Használt adathalmazok.

Az algoritmusokat C#-ban implementáltuk. Teszteltük a szimplex algoritmust minimál index és Goldfarb–Hao-címkézés szerinti belépő él választással. Teszteltük az MBU-algoritmust minimál index, illetve Goldfarb–Hao-címkézéssel választott vezérváltozóval, kombinálva a belépő él minimál index, illetve címkézés szerinti választásával. Az eredmények, mind a pivotálások száma, mind a futásidő (perc:másodperc, illetve pivotálások száma) a 10. ábrán találhatóak az első induló megoldással, a 11. ábrán a második induló megoldással. A tesztelés egy Intel Core i7-3630QM processzoron történt.

	szimplex min	*szimplex GH*	*MBU min/min*	*MBU GH/min*	*MBU min/cmke*	*MBU GH/cmke*
szept. 43	42:43	**12:47**	30:15	32:58	36:56	40:08
	327720	352432	**62771**	97677	361617	330575
szept. 62	2:40	**1:10**	4:18	2:21	2:38	2:36
	80969	86627	45476	**31666**	83518	81258
szept. 63	6:49	**2:33**	8:02	5:36	7:09	6:54
	127084	143782	52859	**40505**	129703	133742
okt. 43	44:01	**12:30**	30:16	35:47	47:09	40:05
	329907	357003	**64011**	104258	365251	336215
okt. 62	2:20	**1:03**	3:14	1:50	2:21	2:28
	76010	81628	36450	**25149**	79154	77389
okt. 63	6:39	**2:34**	10:09	5:38	7:02	6:19
	125990	142162	62604	**41392**	146698	131238
nov. 43	43:58	**12:06**	26:54	30:56	48:24	38:22
	325876	347392	**55468**	92563	351603	327108
nov. 62	2:21	**1:03**	3:09	1:49	2:38	2:24
	76050	81848	37760	**28858**	78040	77873
nov. 63	6:10	**2:24**	11:22	6:00	6:24	5:57
	119792	138085	72000	**39418**	136417	126316

10. ábra. Eredmények primitív induló megoldással.

A mozdony hozzárendelési feladatból egyszerű struktúrájú, de nagyon degenerált feladatokat kapunk. Az iterációk jelentős száma, mondhatnánk túlnyomó többsége, primál degenerált iteráció.

Egy oszlopon belül jól megfigyelhető a feladat méretének hatása mind a futásidőre, mind a pivotálások számára. A legtöbb oszlop az élek számában lineáris pivotszámot mutat (kivétel talán az első táblázat harmadik oszlopa). Például a második induló megoldással, minimál indexes szimplex algoritmussal (időben leggyorsabb algoritmus) kapott pivotszámokra négyzetes értelemben leginkább illeszkedő $a + b \cdot m^c$ görbe a $6711 + 0{,}007 \cdot m^{1{,}1}$, míg a Goldfarb–Hao-szimplexre (legkevesebb pivotálás) a $2434 + 0{,}011 \cdot m^{0{,}98}$.

A heurisztikus induló megoldás jelentősen csökentette az elvégzett pivotálások számát. Míg az első induló megoldás esetén a minimál indexes MBU-algoritmusoknak (3. és 4. algoritmus) jelentősen kevesebb iterációra volt szükségük, míg a második induló bázisnál a Goldfarb–Hao-szimplex pivotszáma tűnik csak ki a többi algoritmus közül.

	szimplex min	*szimplex GH*	*MBU min/min*	*MBU GH/min*	*MBU min/cmke*	*MBU GH/cmke*
szept. 43	**2:45**	3:48	14:52	16:11	26:17	21:34
	27630	**8721**	28291	28073	21276	22281
szept. 62	**0:20**	0:21	1:14	1:16	2:04	1:51
	11223	**4113**	11271	10921	9672	10126
szept. 63	**0:41**	0:43	2:46	2:51	4:33	4:24
	14708	**4904**	14967	14716	11633	12553
okt. 43	**2:44**	3:51	14:32	15:13	23:58	24:07
	28178	**8798**	28747	28549	21649	23491
okt. 62	**0:17**	**0:17**	1:04	1:05	1:22	1:37
	10369	**3765**	10595	10390	8326	9315
okt. 63	**0:36**	0:40	2:20	2:28	3:28	3:39
	13490	**4820**	13700	13213	10768	11042
nov. 43	**2:14**	3:41	14:13	14:16	21:33	21:26
	26280	**8695**	26948	26976	20561	21960
nov. 62	**0:19**	**0:19**	1:15	1:12	1:29	1:29
	10970	**4005**	11266	10846	8655	9117
nov. 63	**0:39**	0:42	2:34	2:36	3:39	3:44
	14028	**5002**	14118	13909	11245	11859

11. ábra. Eredmények heurisztikus induló megoldással.

Összehasonlítva a szimplex- és az MBU szimplex algoritmusok iterációs számait és futási idejeit, két megállapítást tehetünk: 1. Mivel az MBU szimplex algoritmus két hányadostesztet végez, és bonyolultabb, így nem meglepő, hogy jelentősen elmaradnak a futási idejei a szimplex variánsokétól. 2. Mivel az MBU szimplex algoritmusnál a duál megengedetté vált változók azok is maradnak, így a triviális bázisról indítva, sokszor van olyan variánsuk, amelyik sokkal kevesebb iterációval oldja meg a feladatot. Ezt az előnyüket a heurisztikus, közel optimális bázisról indítva már elveszítik.

A szimplex algoritmusvariánsokat összehasonlítva elmondható, hogy a triviális bázisról indulva a Goldfarb–Hao-féle címkézésnek jelentős hatása van abban, hogy jobb futási idők legyenek, közel azonos iterációszám mellett. A második, heurisztikus bázis esetén ez az előny eltűnik, és általában a minimál indexes szimplex algoritmus produkálja a leggyorsabb futásokat, annak ellenére, hogy a Goldfarb–Hao-féle címkézést használó szimplex algoritmus iterációszáma, a másik változat iterációs számának 25–35%-át produkálja csupán.

Érdekességképpen megjegyezzük, hogy a heurisztikus bázisról indítva az algoritmusokat az MBU szimplex variánsok iterációszámban mutatkozó sikeressége eltűnik, hiszen az összes algoritmusvariáns közel azonos iterációszámot produkál, kivéve a Goldfarb–Hao-féle címkézést használó szimplex algoritmust, amelyik iterációszámok tekintetében minden más algoritmusnál jobban teljesít.

Mindkét bázis esetén megállapítható, hogy az itt vizsgált feladatok esetén a szükséges lépésszám, az iterációk száma az összes algoritmusváltozat esetén jelentősen kisebb, mint az erősen polinomiális algoritmusváltozatok elméleti korlátja. Érdekességképpen jegyeznénk meg, hogy az MBU-szimplexvariánsok között az első bázison a legkisebb iterációszámot egyetlen egyszer sem produkálta az elméletileg erősen polinomiális variáns (a 6. algoritmus). Sőt a második bázis esetén sem volt olyan feladat, amelyik esetén az elméletileg erősen polinomiális MBU-szimplexváltozat (6. algoritmus) produkálta volna a legkisebb lépésszámot.

A szimplexvariánsok között már érdekesebb a verseny. A Goldfarb–Hao-féle címkézést használó szimplex algoritmus erősen polinomialitása ismert [27]. Annak ellenére, hogy az első bázis esetén, a feladatok megoldásához szükséges iterációk száma mindig magasabb volt, mint a minimál indexes szimplex algoritmusnál, a futási idők mindig kisebbek voltak. Ezzel szemben a heurisztikus bázisról indulva a minimál indexes szimplex algoritmus bizonyult gyorsabbnak, de a Goldfarb–Hao-féle címkézést használó szimplex algoritmus iteráció száma jelentősen kisebb volt.

A futásidők elemzésénél óvatosságra intjük az olvasót, ugyanis a futásidőt erősen befolyásolja az implementáció minősége (más tényezők mellett), hiszen számos olyan területe van a szimplex- és MBU szimplex algoritmusnak, ahol az ügyes implementációnak (pl. címkézés, minimál index kiválasztása egy halmazból) komoly hatása lehet a futásidőre. Általánosságban talán annyi mégis elmondható, hogy a címkézést használó algoritmusok a korrekt pivot pozíció megtalálásához több számítást végeznek, ami a legügyesebb implementációk esetén is növelheti a futásidőt. Ez főleg a második induló megoldással kapott eredményeken figyelhető meg.

7. Összefoglalás és további kutatási irányok

A dolgozat első felében összefoglaltuk a maximális folyam feladatra adott polinomiális primál és duál szimplex algoritmusok [6, 27] előzményeit és technikáit. Megmutattuk, hogy a gyakorlatban gyakran előforduló nem nulla alsó korlátok esetében mit lehet tenni. Az egyik megoldás egy segédfeladat megoldása megengedett megoldás keresésére, míg a másik a fízibilitási MBU-algoritmus, melyről megmutattuk, hogy szintén van polinomiális változata. Ezután beláttuk, hogy a primál és duál MBU szimplex algoritmusok is polinomiálissá tehetők a megfelelő címkézési technika alkalmazásával.

A primál és duál szimplex algoritmusokkal ellentétben az MBU szimplex algoritmusok áthaladnak se nem primál, se nem duál fízibilis bázismegoldásokon. A duál MBU-algoritmus további előnye, hogy alsó korlátos feladat esetén is első fázis feladat nélkül elindítható.

Érdekes lenne további lineáris programozási pivot algoritmusok [50] polinomialitását megvizsgálni maximális folyam feladatra. Az első, természetes jelölt ilyen vizsgálatra a criss-cross algoritmus [49] lenne, amelyiknél a gond a nem strukturáltan előforduló se nem primál, se nem duál bázisok jelentkezése. További általánosítási irány a feladatosztály bővítése lehetne. Minimális költségű hálózati folyam feladat esetén elveszik a redukált költségek egyszerű struktúrája, vajon így is polinomiálissá tehetők a lineáris programozás területéről ismert pivot algoritmusok? A primál és duál szimplex algoritmusoknak létezik ilyen variánsa [42, 43], bár jóval bonyolultabb technikával igazolható az erősen polinomialitás, mint a maximális folyamnál látottak.

Hivatkozások

[1] R. K. Ahuja, M. Kodialam, A. K. Mishra, and J. B. Orlin: *Computational investigations of maximum flow algorithms*, European Journal of Operational Research **97** (1997), 509–542.

[2] R. K. Ahuja, T. L. Magnanti, and J. B. Orlin: *Network Flows*, Prentice Hall, New Jersey, 1993.

[3] R. J. Anderson and J. C. Setubal: *Network Flows and Matching: First DIMACS Implementation Challenge, chapter Parallel and sequential implementations of maximum-flow algorithms*, American Mathematical Society, 1993.

[4] K. M. Anstreicher and T. Terlaky: *A monotonic build-up simplex algorithm for linear programming*, Operations Research **42** (1994), 556–561.

[5] V. Árgilán, J. Balogh, J. Békési, B. Dávid, G. Galambos, M. Krész, and A. Tóth: *Ütemezési feladatok az autóbuszos közösségi közlekedés operatív tervezésében: Egy áttekintés*, Alkalmazott Matematikai Lapok **31** (2014), 1–40.

[6] R. D. Armstrong, W. Chen, D. Goldfarb, and Z. Jin: *Strongly polynomial dual simplex methods for the maximum flow problem*, Mathematical Programming **80** (1998), 17–33.

[7] Zs. Barta: *Vasút optimalizálási problémák: matematikai módszerek és modellek*, Diplomamunka, Budapesti Muszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, 2011.

[8] F. Bilen, Zs. Csizmadia, and T. Illés: *Anstreicher–Terlaky type monotonic simplex algorithms for linear feasibility problems*, Optimisation Methods and Software **22(4)** (2007), 679–695.

[9] R. G. Bland: *New finite pivoting rule for the simplex method*, Mathematics of Operations Research **29(6)** (1981), 1039–1091.

[10] A. Charnes: *Optimality and degeneracy in linear programming*, Econometrica **20** (1952), 160–170.

[11] Zs. Csizmadia, T. Illés, and A. Nagy: *The s-monotone index selection rules for pivot algorithms of linear programming*, European Journal of Operational Research **221(3)** (2012), 491–500.

[12] W. H. Cunningham: *Theoretical properties of the network simplex method*, Mathematics of Operations Research **4(2)** (1979), 196–203.

[13] G. B. Dantzig: *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1963.

[14] U. Derigs and W. Meier: *Implementing Goldberg's max-flow algorithm: A computational investigation*, Zeitschrift für Operations Research **33** (1989), 383–403.

[15] E. A. Dinic: *Algorithm for solution of a problem of maximum flow in networks with power estimation*, Soviet Math. Doklady **11** (1970), 1277–1280.

[16] J. Edmonds and R. M. Karp: *Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problems*, Journal of ACM **19** (1972), 248–264.

[17] L. R. Ford and D. R. Fulkerson: *A simple algorithm for finding maximal network flows and an application to the Hitchcock problem*, Technical report, Research Memorandum RM-1604, The RAND Corporation, Santa Monica, California, 1955.

[18] L. R. Ford and D. R. Fulkerson: *Maximal flow through a network*. Canadian Journal of Mathematics **8** (1956), 399–404.

[19] L. R. Ford and D. R. Fulkerson: *Flows in Networks*, Princeton University Press, Princeton, NJ., 1962.

[20] A. Frank: *Connections in Combinatorial Optimization*, volume **38** of Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications. Oxford University Press, 2011.

[21] *D. Gale*: *A theorem on flows in networks*, Pacific Journal of Mathematics **7(2)** (1957), 1073–1082.

[22] *Z. Galil and A. Namaad*: *An* $\mathcal{O}\left(nm\log^2 n\right)$ *algorithm for the maximum flow problem*, Journal of Computer and System Sciences **21** (1980), 203–217.

[23] A. V. Goldberg, M. D. Grigoriadis, and R. E. Tarjan: *Use of dynamic trees in a network simplex algorithm*, Mathematical Programming **50** (1991), 277–290.

[24] A. V. Goldberg and R. E. Tarjan: *A new approach to the maximum flow problem*, In Proceedings of the 18th ACM Symposium on the Theory of Computing, pages 136–146, 1986.

[25] A. V. Goldberg and R. E. Tarjan: *A new approach to the maximum flow problem*, Journal of the ACM **35** (1988), 921–940.

[26] D. Goldfarb and J. Hao: *A primal simplex algorithm that solves the maximum flow problem in at most nm pivots and* $\mathcal{O}(n^2m)$ *time*, Mathematical Programming **47** (1990), 353–365.

[27] D. Goldfarb and J. Hao: *On strongly polynomial variants of the network simplex algorithm for the maximum flow problem*, Operations Research Letters **10** (1991), 383–387.

[28] T. E. Harris and F. S. Ross: *Fundamentals of a method for evaluating rail net capacities*, Technical report, Research Memorandum RM-1573, The RAND Corporation, Santa Monica, California, 1955.

[29] *D. S. Hochbaum*: *The pseudoflow algorithm: A new algorithm for the maximum-flow problem*, Operations Research **56(4)** (2008), 992–1009.

[30] A. Hoffman: *Some recent applications of the theory of linear inequalities to extremal combinatorial analysis*, Proceedings Symposium Applied Mathematics **10** (1960), 113–128.

[31] T. Illés: *Lineáris optimalizálás elmélete és pivot algoritmusai*, Technical report, ELTE Operations Research Report, 2013-03.

[32] T. Illés, M. Makai, and Zs. Vaik: *Combinatorial optimization model for railway engine assignment problem*, In L. G. Kroon and R. H. Möhring, editors, Proceedings of the 5th Workshop on Algorithmic Methods and Models for Optimization of Railways, 2006.

[33] T. Illés and R. Molnár-Szipai: *On strongly polynomial variants of the MBU-simplex algorithm for a maximum flow problem with non-zero lower bounds*, Optimization **63** (2014), 39–47.

[34] T. Illés and R. Molnár-Szipai: *Strongly polynomial primal monotonic build-up simplex algorithm for maximal flow problems*, Discrete Applied Mathematics **214** (2016), 201–210.

[35] T. Illés and R. Molnár-Szipai: *Mozdonyhozzárendelés a vasúti teherszállításban*, Érintő Elektronikus Matematikai Lapok, 2017 június.

[36] A. V. Karzanov: *Nakhozhdenie maksimal'nogo potoka v seti metodom predpotokov („determining the maximal flow in a network by the method of preflows")*, Doklady Akademii Nauk SSSR **215(1)** (1974), 49–52.

[37] E. Klafszky: *Hálózati folyamok*, Bolyai János Matematikai Társulat, 1969.

[38] E. Lawler: *Kombinatorikus optimalizálás: hálózatok és matroidok*, Műszaki kiadó, 1982.

[39] I. Maros: *A practical anti-degeneracy row selection technique in network linear programming*, Annals of Operations Research **47** (1993), 431–442.

[40] R. Molnár-Szipai: *Dual MBU simplex algorithm for maximum flow problems (elfogadva)*, Acta Univ. Sapientiae Mathematica, 2017.

[41] J. B. Orlin: *Genuinely polynomial simplex and non-simplex algorithms for the minimum cost flow problem*, Technical report, Technical Report 1615-84, Sloan School of Management, MIT, Cambridge, MA., 1984.

[42] J. B. Orlin: *A polynomial time primal network simplex algorithm for minimum cost flows*, Mathematical Programming **78** (1997), 109–129.

[43] J. B. Orlin, S. Plotkin, and E. Tardos: *Polynomial dual network simplex algorithms*, Mathematical Programming **60** (1993), 255–276.

[44] F. Piu and M. G. Speranza: *The locomotive assignment problem: a survey on optimization models*, International Transactions in Operational Research **21(3)** (2014), 327–352.

[45] A. Prékopa: *Lineáris programozás 1*, Bolyai János Matematikai Társulat, 1968.

[46] A. Schrijver: *On the history of the transportation and maximum flows problems*, Mathematical Programming **5** (2002), 126–131.

[47] Y. Shiloach: *An $\mathcal{O}(nI \log^2 I)$ maximum flow algorithm*, Technical report, STAN-CS-78-702, Computer Science Department, Stanford University, Stanford, CA, 1978.

[48] D. D. Sleator and R. E. Tarjan: *Adata structure for dynamic trees*, Journal of Computer and System Sciences **26** (1983), 362–391.

[49] T. Terlaky: *A convergent criss-cross method*, Math. Oper. und Stat. ser. Optimization **16** (1985), 683–690.

[50] T. Terlaky and S. Zhang: *Pivot rules for linear programming: a survey on recent theoretical developments*, Annals of Operations Research **46(1)** (1993), 203–233.

[51] A. N. Tolstoi: *Planirovanie Perevozok, Sbornik pervyi*, chapter Metody nakhoždeniya naimen'šego summovogo kilometraža pri planirovanii perevozok v prostranstve, pages 23–55. Transpechat' NKPS, 1930.

[52] U. Zwick: *The smallest networks on which the Ford–Fulkerson maximum flow procedure may fail to terminate*, Theoretical Computer Science **148** (1995), 165–170.

Illés Tibor az ELTE TTK-n kapta matematikus diplomáját 1987-ben, egyetemi doktori címét 1989-ben, majd Phd fokozatát 1996-ban. Először az MTA-SZTAKI kutatója, majd 1990-től 2016-ig az ELTE Operációkutatás Tanszék oktatója. 2010 óta a BME TTK egyetemi docense, 2011-től a BME Differenciálegyenletek Tanszék vezetője. Kutatási területei a lineáris és nemlineáris programozás és ezek ipari és gazdasági alkalmazásai. Több, mint 60 közleményére 500-nál is több hivatkozást kapott, h-indexe 12. Témavezetésével, közel 60 hallgató készítette el szakdolgozatát 2 magyar és 2 külföldi egyetemen. Négy hallgatója szerzett doktori fokozatot.

Díjai és ösztöndíjai: Farkas Gyula-emlékdíj (1991), DAAD-ösztöndíj (1998), Bolyai Farkas-ösztöndíj (2001), Bolyai János kutatási ösztöndíj (2000–2003). Több alapkutatási és fejlesztési projektnek volt résztvevője vagy vezetője Magyarországon és külföldön, beleértve piacvezető hazai és külföldi nagyvállalatok számára végzett projekteket is.

Alapító tagja a Magyar Operációkutatási Társaságnak (1991) és az európai folytonos optimalizálók munkacsoportjának (EUROPT WG, 2000). Az EUROPT WG tiszteletbeli koordinátora (2003) és a MOT elnöke (2011–2014) és alelnöke (2014–2017). Tagja a BJMT-nek és a BJMT Alkalmazott Matematika Szakosztályának, titkára 1991 és 1993 között. Az EURO Végrehajtó Bizottságának tagja 2011-től. Az MTA Operációkutatási Tudományos Bizottságának 2005 óta tagja, 2008–2010 között a titkára. Az MTA Közgyűlésének választott képviselője 2013 óta.

ILLÉS TIBOR
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
illes@math.bme.hu

Molnár-Szipai Richárd 1988-ban született. Alkalmazott matematikusként végzett a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemen. Kutatási területe a hálózati folyam modellek elmélete, és kombinatorikus algoritmusainak kapcsolata a lineáris programozás algoritmusaival. Jelenleg szoftverfejlesztő mérnökként dolgozik a Mentor Graphicsnál.

MOLNÁR-SZIPAI RICHÁRD
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
mricsi@math.bme.hu

STRONGLY POLYNOMIAL PIVOT ALGORITHMS FOR MAXIMAL FLOW PROBLEMS

Tibor Illés and Richárd Molnár-Szipai

In this article we describe labelling techniques applied to the maximum flow problem. These can be traced back to the shortest augmenting path algorithm, and later used to prove the polynomiality of various pivot algorithms. We discuss the primal and dual simplex algorithms, as well as variants of the MBU algorithm in a unified system, with an added emphasis on handling nonzero lower bounds that arise frequently in applications. We compare the algorithms on railway engine assignment problems.

Alkalmazott Matematikai Lapok **35** (2018), 183–196

HISZTERÉZIS, ÚTFÜGGŐSÉG, POTENCIÁLIS KIBOCSÁTÁS[1]

DR. MELLÁR TAMÁS

A hiszterézis a fizikából átvett fogalom, a közgazdászok már elég régóta használják, de csak a mostani válság után kezdett széles körben terjedni. A tanulmány első két része röviden bemutatja a hiszterézis mikro- és makromechanizmusait. Majd a harmadik rész a potenciális kibocsátás és a hiszterézis kapcsolatát vizsgálja meg. Végül a negyedik rész a potenciális kibocsátási pálya meghatározásának új lehetőségeit villantja fel a hiszterézis mechanizmus figyelembe vétele alapján.

1. A hiszterézisről

Az elmúlt 150 esztendőben a közgazdászok nagyon sok fogalmat vettek át a fizikából. Ebben az átvételben élenjáró szerepet töltöttek be a 19. század végén és a 20. század első harmadában a neoklasszikus iskola képviselői, majd a múlt század hetvenes éveitől kezdődően pedig az újklasszikus közgazdászok. (Ez a két irányzat képezi a közgazdasági gondolkodás fő irányát, kiegészítve a legutóbbi időkben az újkeynesi-újklasszikus szintézissel.) A nem főirányú közgazdaságtan idegenkedve tekintett ezekre az átvételekre, mert úgy vélte, hogy ezáltal gyengül a közgazdaság-tudomány társadalomtudományi jellege, miközben pedig a statikus egyensúlyi szemléletmód erősödik. A sors érdekes fintora, hogy a nem főirányhoz tartozó közgazdászok ugyancsak a fizikában találták meg az egyik legjobb fegyvert a neoklasszikus-újklasszikus irányzattal szemben. Ez pedig a hiszterézis jelensége.

A hiszterézis jelenségét több természettudományi ágban is megfogalmazták, a fizikában a mágnesesség vizsgálatánál került az érdeklődés előterébe, amikor a megfigyelések azt mutatták, hogy az egyes tárgyak emlékeznek a korábbi mágnesezettségükre, az nem múlik el nyomtalanul a mágneses hatás megszűnése után sem.[2] A közgazdasági alkalmazások a leggyakrabban erre a mágnesességnél megfigyelt hatásmechanizmusra hivatkoznak (Cross [1993], Göcke [2002]). Általánosan tekintve a hiszterézis olyan hatás, amely

[1]Ez a tanulmány a XXXII. Magyar Operációkutatási Konferencián (Cegléd, 2017. június 15.) elhangzott előadás írott változata.

[2]Ewing [1881] a névadója a hiszterézisnek, ő volt az, aki kísérleti úton elsőként felfedezte azt a mágnesesség kapcsán. Preisach [1935] pedig az első volt, aki felállított egy modellt a mágneses hiszterézis leírására.

1. tovább fennmarad, a kiváltó ok megszűnése után is;
2. késleltetéssel érvényesül;
3. eredményeként a rendszer nem tér teljesen vissza az eredeti állapotába.

Ez a három jellemző nem egyeztethető össze az általános gazdasági egyensúly neoklasszikus-újklasszikus elméletével, amely a kereslet-kínálat-ár piaci mechanizmus negatív visszacsatolásos rendszerére épít. A statikus egyensúlyi doktrína szerint az egyensúly egy olyan egyedi, létező (meghatározható) állapot, amelyhez a piaci rendszer gravitál, s ha valamilyen külső zavaró hatás eredményeként megbomlik az egyensúly, akkor az gyorsan helyreáll. Ez az általános egyensúlyelmélet jól ismert hármas kritériuma: egzisztencia, unicitás, stabilitás.

Az egyensúlyelmélet első kritikusai között volt Káldor [1934], aki rámutatott arra, hogy egy adott induló állapotnak megfelelő egyensúlyi helyzet csak akkor érhető el, ha a gazdasági folyamatok időigény nélkül, egy szempillantás alatt lebonyolódnak. Ha ugyanis az egyensúlyi konvergencia időt vesz igénybe, akkor menet közben folyamatosan változik a gazdaság állapota (a kereslet, a kínálat, a készletek, a kapacitáskihasználás stb.) és szükségképpen nem az eredeti, kiinduló állapotnak megfelelő egyensúlyi állapot valósul meg.

Maga a konvergenciafolyamat időbeli lezajlása, annak sorrendisége komoly befolyással bír a bekövetkező eredményre. Ebből viszont két egymással összefüggő fontos jellemző következik a gazdasági folyamatokra: a *többes egyensúly* és az *útfüggőség*. Az egyensúly megvalósulása felé megtett gazdasági tranzakciók, és az ennek következtében kialakuló közbülső (múltbeli) állapot, befolyással bír arra vonatkozóan, hogy milyen egyensúlyi helyzet felé mozdul a rendszer. De így maga az egyensúlyi állapot is változó lesz, semmiképpen sem egyedi (unikális) a gazdasági állapot dinamikus változása következtében. Káldor szerint az általános egyensúlyi doktrína csak akkor valósulhatna meg a maga tiszta formájában, ha létezne egy walrasi Kikiáltó, aki az egy helyre összegyűjtött eladók és vásárlók tranzakcióit koordinálná, és a tényleges kontraktusok csak az egyensúlyi ár létrejötte után mennének végbe. Az általános egyensúlyelmélet ezen statikus, stacioner jellegét Kornai [1971] bírálta igen erőteljesen.

A gazdasági folyamatok időigénye és a késleltetési hatások következtében kialakulhatnak olyan anomáliák, amelyek még a negatív visszacsatolásos túlkereslet-ár mechanizmus mellett sem hozzák el az egyensúlyt. Jó példa erre a régről ismert *pókháló tétel*. Amikor a kínálat létrejöttének hosszabb időigénye van, akkor a termelés beindításakor a döntéshozó csak a jelenlegi árat ismeri, de azt a jövőbeli árat, amely majd akkor fog érvényesülni, amikor a terméke elkészül, azt nem. Ezért csak feltételezésekkel élhet a jövőbeli áralakulásról, ami viszont meghiúsítja az ármechanizmus egyensúlyteremtő szerepét (Káldor [1934]). A gyakorlatból jól ismert a mezőgazdasági árak termékek árainak és termelési mennyiségeinek ciklikus alakulása.

A posztkeynesi közgazdászok a hetvenes-nyolcvanas években egyre erőteljesebben adtak hangot annak a meggyőződésüknek, hogy a gazdasági folyamatok *nem ergodikus* jellegűek (Davidson [1982-83]), szemben a hagyományos (unikális, stabil) egyensúlyi felfogás feltételezésével. Samuelson [1964] feltételezése arra vonatkozóan, hogy a gazdasági folyamatok ergodikus jellegűek, vagyis hogy az időbeli és a térbeli statisztikai átlagok és szórások nem térnek el egymástól, széles utat nyitott az egyensúlyi modellezés és az ökonometriai vizsgálatok felé. Nem nehéz észrevenni, hogy az ergodicitás feltételezésében is az előzőekben már érintett neoklasszikus statikus felfogás érhető tetten, vagyis hogy a korábbi tranzakciók nem számítanak, a piac mindig megtisztítja magát, és minden újabb időperiódusban reprodukálja önmagát, adott technikai-technológiai feltételek között. Valójában azonban a gazdasági szereplők száma és összetétele állandóan változik, a piacok sohasem tisztulnak meg teljesen, mindig vannak készletek és kapacitástartalékok, a résztvevők állandóan tanulnak, folyamatosan adaptálódnak a változó körülményekhez (Mellár [2016]). S természetesen számolni kell a véletlen hatásokkal is, amelyek a legtöbb esetben nem jelezhetők előre, ugyanakkor viszont hatásuk igen jelentős lehet. Az általános bizonytalanság ellehetetleníti a statikus, determinisztikus működést (Bélyácz [2017]).

A fejlődésgazdaságtan megjelenése és térnyerése új értelmezést adott az útfüggőségnek, nevezetesen hogy ha az egyes gazdaságok valamilyen konkrét irányba elindulnak, akkor számukra bizonyos lehetőségek (utak) bezárulnak, míg mások kinyílnak. A kevésbé fejlett országok könnyen kerülhetnek ördögi körbe, megrekedve egy alacsony egyensúlyi szinten. A tradicionális technika alkalmazása, rögzült intézmények és magatartási formák nem teszik lehetővé a kitörést az elmaradott állapotból. Viszont, ha valamilyen kedvező külső hatás következtében át tudják lépni a fejletlenség küszöbét, akkor már lehetővé válik számukra, hogy a fejlett technika alkalmazása révén érvényre jusson a növekvő hozadék és így a gazdaság egy magasabb szintű egyensúlyi pályára álljon (Krugman [1997]). A fejlődési folyamat azonban nem folyamatos és nem szabályszerűen lezajló folyamat. Gyakran előfordul, hogy egy hosszú stagnálási folyamat után jön a nagy ugrás és fordítva: egy nagy külső sokk hatására kerülhet a gazdaság olyan lecsúszott helyzetbe, amely tartósan is fennmaradhat, a sokk elmúlása után is.

2. A hiszterézis mechanizmusai

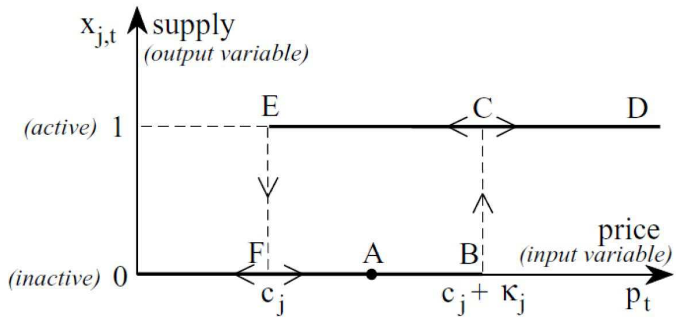
A hiszterézis jelensége elég gyakran felbukkan a gazdaság működésében, mondhatnánk azt is, hogy legalább annyira tipikus, mint a klasszikus kereslet-kínálat-ár mechanizmus. A hiszterézis működési mechanizmusának két meghatározó jellemzője van: az *aszimmetrikus* jelleg és az *irreverzibilitás*. Az aszimmetrikus jelleg azt jelenti, hogy a gazdasági aktorok különböző módon reagálnak az eltérő irányú sokkokra, az irreverzibilitás pedig azt, hogy a gazdasági egység, vagy a gazdasági folyamat nem tér vissza az eredeti állapotába a sokk megszűnése után. A hiszterézis dinamikáját az ún. *hiszterézis operátor* határozza meg, amelyet eredetileg a fizikában a mágneses mezők vizsgálata során alkalmaztak. Ennek matematikai megfogalmazását Mayergoyz [1985] adta meg.

Illusztrációként tekintsük át a Göcke [2002] által megfogalmazott piacra lépés dilemmáját az ár és a költségek függvényében! Tegyük fel, hogy a kisvállalatok számára az ár külső adottság, tőlük függetlenül a piac alakítja ki. Az ő döntésük arra korlátozódik, hogy az adott piaci ár ismeretében piacra lépjenek-e, vagy sem. Ha a piaci ár elég magas ahhoz, hogy fedezze a termelési költségeket (a termékegységre jutó állandó és változó költséget), akkor belépnek a piacra. Ha a piaci ár túl alacsony az előállítási költségekhez képest, akkor a termelő nem fog kapcsolódni a piachoz. Előállhat viszont olyan eset, amikor az ár olyan közbülső értéket vesz fel, amely ugyan fedezi a vállalkozás egységre jutó változó költségét, de az állandó költségét nem. Ebben az esetben a vállalat viselkedése attól fog függni, hogy a piacon van, vagy sem. Ha aktív a piacon, akkor ennél a közbülső árnál nem fog kilépni a piacról, mert a bennmaradással az állandó költségeinek egy része legalább megtérül, s nem veszik el mind, mivel az állandó költségeket már ki kellett fizetnie. Viszont, ha a termelőnk nincs a piacon, akkor ez a közbülső ár nem fogja arra ösztönözni, hogy belépjen, mert nem térülnének meg a költségei. Így tehát a vállalkozás számára más és más lesz a belépési és a kilépési ár. A vállalkozó döntési egyenlete a következőképpen formalizálható:

$$x_{j,t} = \begin{cases} 1, & \text{ha } x_{j,t-1} = 1 \text{ és } p_t \geq c_j; \\ 1, & \text{ha } x_{j,t-1} = 0 \text{ és } p_t \geq c_j + \kappa_j; \\ 0, & \text{ha } x_{j,t-1} = 1 \text{ és } p_t \leq c_j; \\ 0, & \text{ha } x_{j,t-1} = 0 \text{ és } p_t \leq c_j + \kappa_j. \end{cases}$$

ahol x_j a j-edik vállalat piaci aktivitását, c_j az átlagos változó, κ_j az átlagos állandó költségét, p pedig az exogén módon adott piaci árat jelöli.

Az 1. ábra szemléletesen mutatja a hiszterézis jelenség aszimmetrikus és irreverzibilis tulajdonságát. A B pontban lévő vállalkozás egy kis áremelkedés hatására be fog lépni a piacra, és az ár változatlanul maradása vagy csökkenése esetén inaktív fog maradni. Ugyanezen kiinduló árnál a C pontnál lévő aktív vállalkozás nem fog változtatni a pozícióján, akár pozitív, akár negatív irányba változik kis mértékben az ár. Hasonlóképpen az E pontban lévő vállalkozás az árcsökkenés hatására ki fog lépni, míg az F pontnál lévő inaktív vállalkozás ugyanezen induló árnál nem fog reagálni semmilyen irányú kismértékű árváltozásra. Ha egy negatív külső sokk következtében az ár az A pontról az F pont alá esik, akkor az aktív vállalatok ki fognak lépni a piacról, mert még változó költségeik sem térülnek meg. Viszont a sokk megszűnése után az ár hiába áll vissza az A szintre, az inaktívvá vált vállalatok nem fognak ismét visszatérni a piacra.



1. ábra. A belépési és a kilépési ár különbsége.

Ez a példa azt sugallja, hogy az árak változásai egy bizonyos sávban nem idéznek elő semmilyen változást a piacon. Példánknál maradva, ha az ár c_j és $c_j + \kappa_j$ között fluktuál, akkor ennek semmilyen következménye nem lesz, mert a piacon lévők nem akarnak kilépni, a kint lévők pedig nem akarnak belépni. Makroszinten azonban nem ez a helyzet, mert a különböző vállalatoknak eltérő a költségszerkezete, s így mindegyiknél máshol lesz a belépési és kilépési küszöb. Ez viszont azt eredményezi, hogy kismértékű árváltozásnak is lehet jelentős hatása, mivel több vállalat is áteshet a kritikus ponton. A hatás erőssége makroszinten nyilván attól függ, hogy milyen az eloszlása a vállalatonként eltérő belépési és kilépési áraknak. Ha sok vállalat van a küszöbértékekhez közel, akkor akár a kis sokkoknak is jelentős hatása lehet makroszinten: ez az *erős hiszterézis* jelensége.

A mindennapi gazdasági életben gyakran alakulnak ki olyan helyzetek, amelyek a hiszterézis jelenségét produkálják. Ezek közül most csak kettőt említünk. Elsőként a beruházási döntések (Dixit [1992]) példáját mutatjuk be. A mainstream elmélet tanítása szerint, ha az ár meghaladja a hosszú távú átlagköltséget, akkor ez a vállalkozókat beruházásra sarkallja, és fordítva: ha az ár az átlagköltség alatt van, akkor a vállalat elhalasztja a beruházási tevékenységét. A valóságban azonban egészen más a helyzet. Mivel a beruházás elindításának vannak egyszeri költségei, ezért a vállalat csak akkor kezd bele, ha lényegesen magasabb az ár a termelési költségeknél (ha a várt hozamráta igen jelentősen meghaladja a piaci kamatlábat). Ekkor lát csak biztosítékot arra, hogy a többletköltségei megtérüljenek. Viszont az árak csökkenése esetén nem hagy fel azonnal a beruházási tevékenységgel, csak akkor, amikor már a piaci ár annyira lecsökken, hogy a változó költségei sem térülnek meg.

A másik példa a külföldi piacra lépés, az exportpiacra lépés az árfolyam alakulásának függvényében (Amable és társai [1994], Delgado [1991]). A vállalatok belépése egy külföldi ország piacára a devizaárfolyamtól függ. Ez a belépés azonban bizonyos egyszeri többletköltséggel jár, amelyet nyilván szeretne a belépő vállalat visszanyerni, így aztán csak akkor kezd exportálni, ha elég magas számára a külföldi deviza árfolyama. Viszont ha már belépett, akkor az előzőnél alacsonyabb árfolyam mellett is bent marad a külföldi ország piacán, mivel a belépési költséget már egyszer kifizette.

Makroszinten is kimutathatók a hiszterézis működési mechanizmusai és azonosíthatók az azt kiváltó okok. Ezek közül talán a legismertebb a humán tőke leépülése, amely azért állhat elő, mert ha az emberek hosszabb időn keresztül munkanélküliek, akkor kiesnek a gyakorlatból, a mindennapi rutinból, nem tudják követni a folyamatos technikai fejlődést, és ráadásul a tétlenség időszakában gyakran káros szenvedélyek rabjaivá válnak. Így aztán hiába tér vissza a jó konjunktúra, ezek az emberek nem, vagy csak nagyon lassan tudnak visszatérni a munkapiacra (Phelps [1972], Cross [1987]).

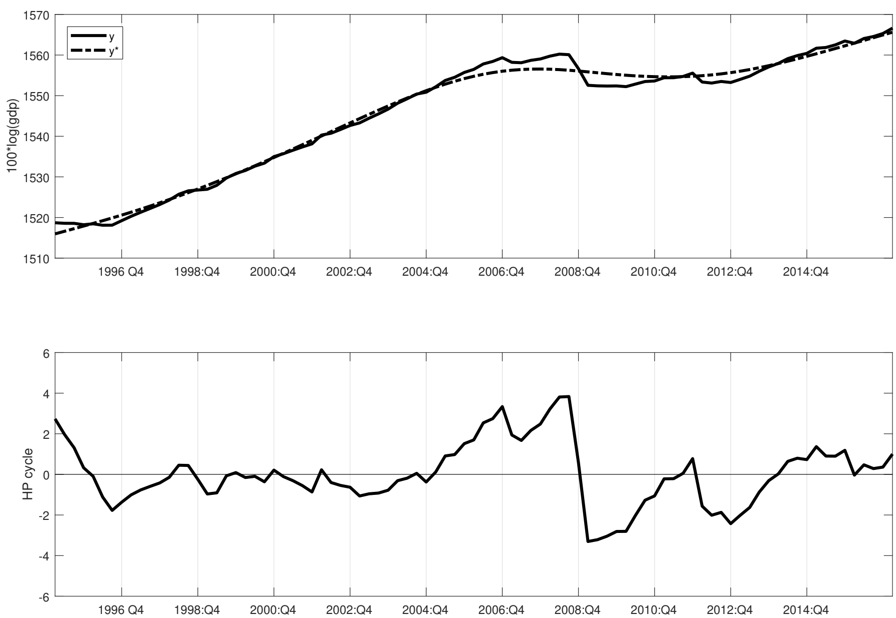
A tőkeképződés vonatkozásában hasonló folyamat figyelhető meg, a kereslet visszaesése következtében a termelők visszafogják a beruházásaikat, sokszor még az elhasznált eszközök pótlásáról sem gondoskodnak. Ezért aztán a fellendülés során gyorsan növekvő kereslethez nem tudnak megfelelő módon alkalmazkodni (Bassi – Lang [2016]). A beruházások visszaesése egyben a technikai fejlődés lassulását is előidézi, a recesszió időszakában gyakori, hogy jelentősen csökkentik a kutatás-fejlesztési kiadásokat is. Ezért aztán a kereslet későbbi felfutásával nem tud lépést tartani a technikai fejlesztés, az csak időkéslekedéssel fog felzárkózni (Dutt [2006]).

Tipikus jelenség a gazdasági válság után a mérlegkiigazítás. A korábbi euforikus hangulat a visszájára fordul: míg a fellendülés időszakában jelentős mennyiségű hitelt vesznek fel a gazdasági szereplők, és ezért többet költenek, mint amennyi a jövedelmük, tehát erősítik a konjunktúrát, addig a visszaesés időszakában a hitelek visszafizetésére koncentrálnak, a jövedelmeiknél jóval kevesebbet költenek, és ezzel hozzájárulnak a válság elhúzódásához. A visszaesés ugyancsak komoly hatást gyakorol az intézményi háttérre is, a kormányzati szervek létszámára (leépítés), működési módjára, a szabályozás szakszerűségére. Mindezek nem tudnak egy csapásra megváltozni, amikor növekszik a kereslet, csak nagyon lassan és fokozatosan tudja elérni a régi állapotot és ezzel párhuzamosan, csak nagyon lassan tér vissza újból a bizalom a gazdasági szereplők körébe. A Benczúr–Kónya [2013] szerzőpáros egy kis, nyitott gazdaság példáján keresztül mutatja be a mérlegalkalmazkodás ezen sajátos mechanizmusait.

3. A potenciális kibocsátás és hiszterézis

A hiszterézis makroszintű érvényesülését és annak elméleti jelentőségét már évtizedekkel ezelőtt felismerte Phelps [1972], amikor a természetes munkanélküliség rátájának meghatározása kapcsán annak útfüggőségét hangsúlyozta. A későbbiekben a Blanchard–Summers [1987] szerzőpáros is hasonló konklúzióra jutott, amikor az amerikai és az európai munkanélküliségi ráták közötti nagy különbségre kerestek magyarázatot. Az említett szerzők szerint a hosszú időn keresztül fennálló munkanélküliség megemeli a munkanélküliség természetes rátáját. S mivel Európában a hetvenes években igen magas (az amerikai szintet jóval meghaladó) munkanélküliségi ráta alakult ki az olajválság következtében, ezért megemelkedett a munkanélküliség természetes rátája, amely aztán tovább éreztette a hatását, a már nem válságos nyolcvanas években is.

Ezek a felismerések azonban nem gyakoroltak komoly befolyást a közgazdasági gondolkodás fő irányára. Sem a munkanélküliség természetes rátája, sem az *Okun-törvény* alapján vele szoros kapcsolatban lévő potenciális kibocsátás (potenciális GDP) meghatározásánál nem tulajdonítottak különös jelentőséget a változók korábbi értékeinek. Az volt az uralkodó nézet, hogy a potenciális (hosszú távon fenntartható, egyensúlyi, trend) pálya a gazdasági szereplők optimalizáló döntései és a technológiai fejlődés által meghatározott, s ettől a pályától a gazdaság csak a zavaró külső sokkok hatására térhet el. Ez az eltérés azonban csak rövid ideig tarthat, mert az egyensúlyteremtő piaci erők gyorsan működésbe lépnek, és hamarosan visszatérítik a gazdaságot a hosszú távú egyensúlyi pályájához (Woodford [2003], Gali [2008]). Jól látható tehát egyfelől, hogy ebben a felfogásban a potenciális pálya vonala független a gazdaság valóságosan megtett útjától, másfelől pedig a tényleges GDP nem térhet el jelentősen és tartósan a potenciális pályától.



2. ábra. A tényleges, a potenciális (Hodrick–Prescott trend) kibocsátás és az output gap (kibocsátási rés) alakulása a magyar gazdaságban 1995 és 2016 között.

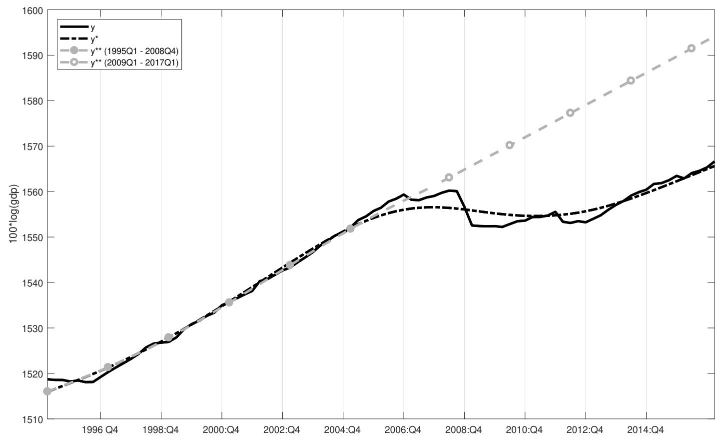
A főirányú közgazdaságtan imént vázolt doktrínája hosszú időn keresztül volt uralkodó pozícióban, mígnem a 2008-ban kitört válság, és az azt követő tartós stagnálás és lassuló növekedési ütem új megvilágításba helyezte a kérdést. Az elmúlt években egyre több olyan tanulmány látott napvilágot, amely a válság következtében előállt új tények ismeretében az egyensúlyi doktrína átértékelését vetette fel a hiszterézis bekapcsolásával. Jó áttekintést ad ezekről a tanulmányokról az MNB [2016] összefoglaló jelentése. Érdemes megemlíteni, hogy még a DSGE-modelleket is elkezdték módosítani annak érdekében, hogy a válság következtében megjelenő tartós módosító hatásokat (permanens sokkokat) figyelembe vehessék (Cacciatore, M. – R. Duvaland – G. Fiori [2012]).

Ha rátekintünk a magyar adatokra (lásd 2. ábra), akkor innen is leolvasható, hogy a főirányú közgazdaságtan egyensúlyi pálya hipotézise 1996–2008 között helytálló lehetett, de az azt követő időszakban már nem. Azért nem, mert a válság időszakában kialakult jelentős output gap (eltérés a tényleges és a potenciális kibocsátás között) nem hagyta érintetlenül magát a potenciális pályát sem, amely igazodni kényszerült a lecsökkent GDP-értékekhez.

A magyar tapasztalatok távolról sem egyedülállóak, a fejlett világ nagy részén igen hasonló jelenségek voltak megfigyelhetők. A 2008-as válság egyik fontos tanulsága lett, hogy a válság után a gazdaságok nem tértek vissza az eredeti egyensúlyi pályájukra, lásd bővebben Ball [2014], Blanchard – Cerutti – Summers [2015]. A válság következtében szinte mindenütt lefelé tolódott a potenciális kibocsátási pálya. De nemcsak szintbeli eltolódás történt, hanem a potenciális növekedési ütem is csökkent, vagyis a pálya meredeksége is csökkent. Az aggregált kereslet válság alatti visszaesése nemcsak a GDP jelentős csökkenését eredményezte, hanem a potenciális kibocsátását is. Ezt követően hiába emelkedett a válság után az aggregált kereslet a régi szintjére, a termelés nem állt vissza a régi szintre. A válság következtében előállt nemzetgazdasági veszteség kettős: egyfelől a nagy negatív output gap miatti veszteség (a tényleges GDP jelentős mértékben elmaradt a potenciálistól), másfelől pedig a potenciális pálya módosulásából adódó veszteség (a potenciális növekedési ütem csökkenése). Magyarország a 2008–13-as időszakban ily módon az éves GDP-jének mintegy 30 százalékát vesztette el (Ball [2014]). A 3. ábra grafikusan mutatja be a magyar esetet (Ball számítási metodikája alapján), az y^{**} az eredeti, válság előtti, az y^{*} pedig az új, a válság után módosult potenciális pályát jelöli.

4. A potenciális pálya meghatározása

A potenciális egyensúlyi növekedési pálya szilárd alapokon álló pontos meghatározása igen fontos nemzetgazdasági szempontból. A gazdaságpolitika erőteljesen támaszkodik a tényleges és a potenciális kibocsátás különbségeként előálló kibocsátási rés mutatószámra. Ez jelzi ugyanis a keresleti nyomás erősségét, és



3. ábra. A magyar gazdaság 2008-as válság következtében elszenvedett kibocsátási vesztesége.

ennek megfelelően lehet visszafogó vagy élénkítő gazdaságpolitikai akciókat indítani. Ugyancsak fontos a kibocsátási rés a monetáris politika számára, az inflációs célkövetés során használatos Taylor-szabály egyik fontos vezérlési változója.

A potenciális kibocsátási pálya lényegében az egyensúlyi növekedési pályát jelenti. A kérdés csak az, hogy miként értelmezendő maga az egyensúly. A fogalom megalkotója Okun (1981) a potenciális kibocsátás meghatározását a munkanélküliség természetes rátája alapján képzelte. Vagyis ebben a felfogásban, az egyensúlyi kibocsátás azt a termelési szintet jelenti, amikor nincs kényszerű munkanélküliség. Később, a Phillips-görbe megjelenése után, az egyensúly fő meghatározó elemévé az infláció vált, pontosabban annak konstans volta (ez volt a NAIRU-koncepció). A reál üzleti ciklusok megjelenésével a potenciális kibocsátás növekedési modell alapú meghatározása vált egyre elterjedtebbé: a Ramsey-Solow növekedési modell dinamizálása technológiai sokkokkal. Majd ezt követően a már említett DSGE-konszenzus modell jött: lassú áralkalmazkodás, ezért a sokkok átmenetileg letérítik a gazdaságot az egyensúlyi pályáról

Az eddigiekben az egyensúlyi pálya meghatározásának három iránya volt megkülönböztethető. Ezek közül a legrégebbi és talán a legegyszerűbb a trendalapú meghatározás. A trendalapú módszereken belül a legnépszerűbb a Hodrick – Prescott-filter alapján történő meghatározás:

$$\min_{\bar{Y}} \left\{ \sum_{t=1}^{T} (Y_t - \bar{Y}_t)^2 \; + \lambda \sum_{t=2}^{T-1} \left(\left(\bar{Y}_{t+1} - \bar{Y}_t\right) - \left(\bar{Y}_t - \bar{Y}_{t-1}\right) \right)^2 \right\}.$$

Népszerűségét, az egyszerűségén túl, valószínűleg annak köszönheti, hogy itt kalibrálhatóvá válik az output–gapek nagysága. A későbbiekben a termelési oldalú, a termelési tényezők rendelkezésre állása alapján történő meghatározás jellemző. A termelési függvény alapú meghatározás egy példája:

$$\bar{Y}_t = \bar{A}_t \cdot K_t^{\alpha} \cdot \left[\bar{L}_t \cdot \left(1 - \frac{NAIRU}{100}\right)\right]^{1-\alpha}.$$

A legutóbbi időkben egyre inkább elterjedt az egyensúly többdimenziós értelmezése és ennek megfelelően a többváltozós módszerek alkalmazása: állapottér reprezentáció, Kálmán-filter (lásd erről bővebben Mellár – Németh [2018]).

A hiszterézis elmélet középpontba kerülése következtében valószínűleg jelentősen módosulni fog a potenciális kibocsátás meghatározása. Hogy miként, azt most még nem lehet pontosan előrejelezni. Annyi azonban már látszik, hogy két irányba is el lehet indulni az új meghatározás felé: 1. a potenciális kibocsátás meghatározása a múltbeli értékek és a véletlen sokkok alapján, 2. a tényleges GDP olyan szétválasztása trend és ciklikus elemre, amelyben a ciklikus sokkok kimutatható hatást gyakorolnak a trendre.

Az elsőként említett irányvonal a következő egyenlettel jellemezhető tömören:

$$\bar{Y}_t = a\bar{Y}_{t-k} + bZ_{t-1} + c\epsilon_{t-j}.$$

A magyarázó egyenlet három elemű: (i) a potenciális kibocsátás az előző időszaki potenciális kibocsátásoktól függ (ez utal az útfüggőségre), (ii) a potenciális kibocsátás függ a strukturális tényezőktől (a gazdasági állapotváltozóktól, technológiától, a gazdasági szereplők optimalizáló magatartásától), és (iii) függ a korábbi véletlen sokkoktól (a korábbi túlkeresleti állapotoktól, output-gapektől). Az egyenletből a hagyományos egyensúlyi felfogás is felírható, ha az "a" és "c" paramétert nullának vesszük, mert ekkor a strukturális elemek (vagyis a hosszú távú egyensúlyi pálya) határozzák meg a potenciális kibocsátást. Egyébként még az $a < 1$ eset is megfeleltethető a hagyományos felfogásnak, mivel itt a potenciális pálya korábbi értéke fokozatosan elenyészik.

Amennyiben viszont a Z változótól eltekintünk, akkor már a hiszterézis felé mozdulunk el. A $k = c = 1$, $j = 0$ és $\epsilon \sim N(0, \sigma)$ feltételezés esetén egy *véletlen bolyongási* (random walk) folyamatot kapunk a potenciális kibocsátásra. Erre a konklúzióra jutott a Blanchard – Summers [1987] szerzőpáros a munkanélküliség természetese rátája európai vizsgálata során, illetve Smitt – Grohé – Uribe [2003] neoklasszikus, kis nyitott gazdasági modelljével. Amable és szerzőtársai [1994] szerint azonban a véletlen bolyongás nem tekinthető valódi hiszterézis folyamatnak, mert az egységgyököt tartalmazó összefüggés lineáris kapcsolatot tételez, nincs benne strukturális törés, és nem teljesül az irreverzibilitás feltétele sem. Ugyanis, az

$$\bar{Y}_t = \bar{Y}_{t-1} + \epsilon_t$$

véletlen bolyongási folyamat esetében könnyen belátható, hogy egy adott nagyságú negatív sokk hatását a következő időszak ugyanilyen nagyságú pozitív sokkja teljes egészében ellensúlyozni képes.

A hiszterézis folyamatának jobb megragadásához juthatunk, ha a véletlen tényezőt az output-gappel helyettesítjük. Tehát, ha azt tételezzük fel, hogy a korábbi pozitív vagy negatív, kormányzati vagy külső gazdasági sokkok, a túlkeresleti vagy túlkínálati állapotok maradandó hatást gyakorolnak a potenciális kibocsátásra. Ennek a megfontolásnak az értelmében vegyük például az

$$\bar{Y}_t = a\bar{Y}_{t-1} + bGAP_{t-1} \tag{1}$$

meghatározást. Ha a potenciális kibocsátás és az output-gap értékei egymástól független becslések eredményei, akkor az (1) becslőfüggvényként is alkalmazható. A magyar gazdaságra úgy alkalmaztuk ezt a becslőfüggvényt, hogy a potenciális kibocsátás értékeit többváltozós állapottér modellel becsültük (Mellár – Németh [2018]), az output-gap értékeit pedig az MNB és az OECD adatbázisaiból vettük át. A becslések eredményeként a „b" paraméterre szignifikáns pozitív értéket kaptunk, mind a két gap-adatsor esetében.

A másik irányú közelítés a potenciális kibocsátás új meghatározása felé, a GDP idősorának felbontása trendre és ciklikus összetevőre. A GDP-idősorok általában nem stacionáriusak, egy sztochasztikus trendből és egy ciklikus részből összeálló ARIMA-folyamatként jellemezhetőek (Campbell – Mankiw [1987]). Így ennél az irányvonalnál a kiindulópont:

$$Y_t = \bar{Y}_t + Y_t^C.$$

Ha leválasztjuk az Y^C ciklikus részt, akkor megkapjuk a trendet, amely esetünkben a potenciális kibocsátás lesz. A ciklikus rész meghatározásához nem támaszkodhatunk biztos elméleti összefüggésekre, ezért feltételezésekkel kell élni a folyamat jellemzői tekintetében. A Jaeger-Parkinson [1989] szerzőpáros a kapacitáskihasználás időbeli alakulására támaszkodva határozta meg a ciklikus részt, s úgy találta, hogy a ciklikus összetevő $AR(2)$-es folyamatot követ. A magyar adatok alapján mi azt találtuk, hogy a negyedéves ipari kapacitáskihasználások alakulása $AR(1)$-es folyamattal jellemezhető. A ciklikus rész így a következőképpen határozható meg Magyarország esetében:

$$Y_t^C = \phi_1 Y_{t-1}^C + \epsilon_t^C.$$

Az ϵ^C hibatag itt a ciklikus sokkokat jelzi. A hiszterézis feltétel akkor teljesül, ha a θ értéke szignifikánsan pozitív a becslőfüggvényünkben:

$$\Delta\bar{Y}_t = c + \epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1}^C.$$

Ez azt jelenti, hogy az előző időszaki output-gap hatással van a potenciális kibocsátás alakulására. A magyar adatok alapján azt kaptuk, hogy a kapacitáskihasználás 1 százalékpontnyi eltérése a potenciális növekedési ütemet $0,05$ százalékponttal változtatja meg egy időszakkal később és $0,04$ százalékponttal két időszakkal később. Ez első látásra elég jelentéktelen mértéknek számít, de ha a potenciális kibocsátás átlagos növekedési üteméhez viszonyítjuk, ami közelítőleg $0,5\%$, akkor már nem ennyire elenyésző a hatás. A két negyedéves hatás majdnem eléri az átlagos növekedési ütem 1/5-ét. A hatás értékelése tekintetében érdemes még azt is figyelembe venni, hogy a válság éveiben igen jelentős 6–8 százalékpontos kapacitáskihasználás-csökkenések voltak, amelyek a becslésünk alapján $0,5$–1 százalékponttal csökkenthették a potenciális növekedési ütemet időszakonként. Természetesen a kapott eredmények használhatósága jelentősen függ attól, hogy a ciklikus hatást mennyire sikerült jól megragadni az $AR(1)$-es folyamattal.

Végezetül rövid összegzésként az mondható el, hogy komoly változások zajlanak a makroökonómiában a 2008-as válság tapasztalatai alapján. Egyre nagyobb figyelem irányul a hiszterézis jelenségre, és annak rövid- és hosszútávú hatásaira. Valószínűsíthető, hogy újból polgárjogot nyert az aktív monetáris és fiskális politika mint gazdaságpolitikai eszköz. Ugyanis a piaci rendszer egyensúlyteremtő erőire számító gazdaságpolitika olyan károkat okozott, amelyek nagy része elkerülhető lett volna. A makro-közgazdasági szemléletmód változásának következtében feltételezhető, hogy a potenciális kibocsátás meghatározásának módszerei is változni fognak, az ismert régiek mellé vagy helyettük újak jönnek. Várhatóan felértékelődnek a múltbeli tényszámokon alapuló potenciális kibocsátás-meghatározások.

Hivatkozások

[1] Amable, B. – Henry, J. – Lordon, F. – Topol, R.: *Strong Hysteresis versus Zero Root Dynamics*, Economic Letters Vol. **44** No. **1–2** (1994), 43–47.

[2] Ball, Laurence M.: *Long-term Damage from the Great Recession in OECD Countries*, Working Paper No. **20185**, NBER Cambridge May 2014.

[3] Bassi, Federico – Lang, Dany: *Investment Hysteresis and Potential Output: A Post-Keynesian-Kaleckian-Agent-Based Approach*, Economic Modelling Vol. **52** (2016), Part A pp. 35–49.

[4] Blanchard, Olivier J. – Summers, Lawrence H.: *Hysteresis in Unemployment*, European Economic Review Vol. **31** No. **1-2**,(1987), pp. 288–295.

[5] Blanchard, Oliver – Cerutti, Eugenio – Summers, Lawrence: *Inflation and Activity – Two Explorations and their Monetary Policy Implications*, IMF Working Paper, WP/15/230 2015.

[6] Bélyácz Iván: *Az ergodicitás vitatott szerepe a (pénzügyi) közgazdaságtanban*, Gazdaság és Pénzügy, **4**. évf. **1.** szám (2017), 3–58.

[7] Benczúr Péter – Kónya István: *Kamatfelár, hitelválság és mérlegalkalmazkodás egy kis, nyitott gazdaságban*, Közgazdasági Szemle **60** (2013), 940–964.

[8] Cacciatore, M. – R. Duvaland – G. Fiori: *Short-Term Gain or Pain? A DSGE Model-Based Analysis of the Short-Term Effects of Structural Reforms in Labour and Product Markets*, OECD Economics Department Working Papers No. **948**, OECD Publishing, 2012 Paris.

[9] Cross, Rod B.: *Hysteresis and Instability in the Natural Rate of Unemployment*, The Scandinavian Journal of Economics Vol. **89** No. **1** (1987), pp. 71–89.

[10] CROSS, ROD B.: *On the Foundations of Hysteresis in Economic Systems*, Economics and Philosophy Vol. **9** No. **1** (1993), pp. 53–74.

[11] DAVIDSON, PAUL: *Rational expectations: a fallacious foundation for studying crucial decision-making process*, Journal of Post Keynesian Economics Vol. **5** No. **2** (Winter, 1982–83.), 182–198.

[12] DIXIT, A.: *Investment and hysteresis*, Journal of Economic Perspectives Vol. **6** No. **1** (Winter, 1992.), 107–132.

[13] DELGADO, FRANCISCO A.: *Hysteresis, menu costs, and pricing with random exchange rates*, Journal of Monetary Economics Vol. **28** (1991), 461–484.

[14] DUTT, AMITAVA K.: *Aggregate Demand, Aggregate Supply and Economic Growth*, International Review of Applied Economics Vol. **20** No. **3** (2006), pp. 319–336.

[15] EWING, JAMES A.: *On the Production of Transient Electric Currents in Iron and Steel Conductors by Twisting Them When Magnetised or by Magnetising Them When Twisted*, Proceedings of the Royal Society of London Vol. **33** (1881), pp. 21–23.

[16] GALÍ, JORDI: *Monetary Policy, Inflation and the Business Cycle: An Introduction to the New Keynesian Framework*, Princeton: Princeton University Press, 2008.

[17] GÖCKE, M.: *Various concepts of hysteresis applied in economics*, Journal of Economic Surveys Vol. **16** No. **2** (2002), 167–188.

[18] JAEGER, A. – PARKINSON, M.: *Testing for Hysteresis in Unemployment an Unobserved Components Approach*, Forschungbericht/ Research Memorandum No. **260**, November 1989.

[19] KALDOR, NICHOLAS: *A Classificatory Note on the Determinateness of Equilibrium*, The Review of Economic Studies Vol. **1** No. **2** (Feb., 1934), pp. 122–136.

[20] KORNAI JÁNOS: *Anti-equilibrium*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest 1971.

[21] KRUGMAN, PAUL: *Development, Geography, and Economic Theory*, The MIT Press, Cambridge Massachusetts 1997.

[22] MAYERGOYZ, ISAAK D.: *Mathematical Models of Hysteresis*, IEEE Transactions on Magnetics Vol. **22** No. **5**, pp. 603–608

[23] MELLÁR TAMÁS: *Szolgálólányból királycsináló – avagy az ökonometriai makroökonómiai térhódítása?*, Közgazdasági Szemle **63**. évf. 2016. március, 285–306.

[24] MELLÁR TAMÁS – NÉMETH KRISTÓF: *A kibocsátási rés becslése többváltozós állapottér modellekben (Szuperhiszterézis és további empirikus tapasztalatok)*, Közgazdasági Szemle **65**. évf. **6**. szám, 2018. június, 557–591.

[25] *Növekedési Jelentés*, Nemzeti Bank, Budapest 2016.

[26] OKUN, ARTHUR M.: *Prices and Quantities*, A Macroeconomic Analysis, The Brookings Institution, Wahington D. C. 1981.

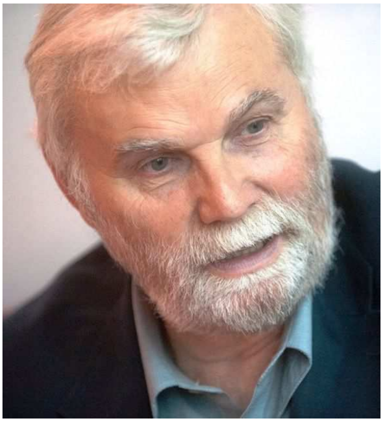
[27] PHELPS, E. S.: *Inflation Policy and Unemployment Theory*, Macmillan, London 1972.

[28] PREISACH FERENC: *Über die magnetische Nachwirkung*, Zeitschrift für Physik Vol. **94** No. **5–6** (1935), pp. 277–302.

[29] Setterfield, Mark: *Path Dependency, Hysteresis and Macrodynamics*, In: Arestis, Philip – Sawyer, Malcolm (eds.): *Path Dependency and Macroeconomics*, London: Palgrave Macmillan (2009), pp. 37–79.

[30] Schmitt-Grohé S. – M. Uribe: *Closing small open economy models*, Journal of International Economics Vol. **61** (2003), 163–185.

[31] Woodford, Michael: *Interest and Prices: Foundations of a Theory of Monetary Policy*, Princeton: Princeton University Press 2003.



Mellár Tamás közgazdász, a Pécsi Tudományegyetem Közgazdasági Karának jogelődjén végzett 1977-ben, majd ugyanitt kezdte egyetemi oktatói pályáját is. A rendszerváltozás előtt vendégkutató volt az amerikai Princeton Universityn. A rendszerváltozás után tudományos igazgatóként tevékenykedett a Privatizációs Kutatóintézetben, majd kormány-főtanácsadóként segítette az első szabadon választott, Antall-kormány munkáját. Ezt követően a Budapesti Corvinus Egyetemen oktatott egyetemi docensként, majd egyetemi tanárként. 1998 és 2003 között a Központi Statisztikai Hivatal elnöki tisztét töltötte be. 2008-tól ismét Pécsett tanít, elsősorban a mester- és doktori képzésben vesz részt. 2010 és 2011 között a Századvég Gazdaságkutatási Intézet kutatási igazgatója volt. Kutatási területe a makro-gazdaságpolitika, a heterodox közgazdaságtan és az elmaradottság-modernizáció témaköre. Tudományos publikációinak száma meghaladja a 150-et. Számos tudományos testület tagja, 2007-től az MTA doktora. Munkáját több alkalommal ismerték el tudományos kitüntetésekkel.

MELLÁR TAMÁS
e-mail: mellart@ktk.pte.hu, mellart1954@gmail.com

HYSTERESIS, PATH DEPENDENCE AND POTENTIAL OUTPUT

Tamás Mellár

The concept of hysteresis is taken from physics, economists have been using it for quite some time, but it only started to spread widely after the crisis. The first two parts of the study briefly present the micro- and macro-mechanisms of hysteresis. Then the third part examines the relationship between the potential output and hysteresis. Finally, the fourth part reveals new possibilities for determining the potential output (growth) path based on the mechanism of hysteresis.

UTÓSZÓ

A 2017. június 14-16. között Cegléden megrendezett XXXII. Magyar Operációkutatási Konferenciához kapcsolódóan az Alkalmazott Matematikai Lapok két kötetet jelentet meg. Az Alkalmazott Matematikai Lapok szerkesztőbizottságának vezetői a különszámok gondozására vendégszerkesztőket kértek fel Bozóki Sándor, Fleiner Tamás, Illés Tibor és Tasnádi Attila személyében.

A jelenlegi első kötettel Prékopa András emléke előtt tisztelgünk. A kötet szerzői Prékopa András tanítványai és/vagy munkatársai, valamint a konferencia plenáris előadói.

Szász Domokos, aki Prékopa András vezetésével készítette el egyetemi tanulmányait lezáró diplomamunkáját, nagyon személyes hangvételű írásban emlékezik vissza az 1960-as évek elejére, Prékopa András hatására és a diplomamunkájának a szakmai összefüggéseire.

Prékopa András számára a személyes kutatáson túl a csapatépítés, az operációkutatás magyarországi műhelyeinek a megerősítése, elfogadtatása mindig is cél volt. Kéziratban maradt írásában erről a tevékenységéről emlékezik meg érdekes, nem mindenki számára ismert tények és adatok felsorolásával. Valószínűleg jó kiindulási pontot adva a magyar operációkutatás közelmúltját kutatni vágyók számára.

Prékopa András mindig is fontosnak tartotta a magyarság egységét, így számára természetes volt a határon túli magyarok szakmai segítése. Nem meglepő, hogy komolyan kötődött Erdélyhez, és mindig is igyekezett szakmai kapcsolatokat kiépíteni erdélyi magyar matematikusokkal. Kolumbán József nagyon sok érdekes részletet elevenít fel Prékopa András és az erdélyi matematikusok kapcsolatáról.

Prékopa András iskola teremtő tevékenységét és a magyar operációkutatás fejlődését járja körül Komáromi Éva visszaemlékezésében. Komáromi Éva cikke sokkal többről szól, mint ahogyan a címe és alcíme alapján képzelnénk. Rendszerezi, összegzi a magyar operációkutatás első félidejét, ahogyan ő írja, nagyon sok adatot szolgáltatva tömören azok számára, akik majd a magyar operációkutatás fejlődésének részleteit szeretnék kifejteni. Talán már valamelyik következő Alkalmazott Matematika Lapban vagy Magyar Operációkutatási Konferencián.

A történeti visszaemlékezéseket életszerűbbé tevő fényképeket Prékopa Andrásné Széchenyi Kinga, Kolumbán József és Hujter Mihály tették közölhetővé a számunkra.

Prékopa András plenáris előadást tart a XXIX. Magyar Operációkutatási Konferencián, Balatonőszödön, 2009 júniusában. Fotó: Hujter Mihály.

Alapvetően fontos egy közösség életében, hogy megemlékezzen díjazottjairól, kiemelkedő teljesítményt nyújtó kollégáiról, a szakmai közösségért dolgozókról. Komlósi Sándort a Magyar Operációkutatási Társaság 2016-ban Egerváry Jenő emlékéremmel tüntette ki. A díj átadására csak 2017-ben, a XXXII. Magyar Operációkutatási Konferencián került sor, Cegléden. Az Alkalmazott Matematika Lapok különszámának szerkesztői úgy gondolták, hogy ebből az alkalomból felkérik Komlósi Sándort egy összefoglaló dolgozat írására, amely egy-egy számára fontos és mások számára is érdekes területet dolgoz fel. A különszám szerkesztői csak remélni tudják, hogy hagyományt teremtenek, és évről-évre olvashatunk majd érdekes összefoglaló cikkeket az újabb és újabb Egerváry díjazottak tollából.

Szántai Tamás megvizsgálta, hogy egy együttes valószínűséggel korlátozott sztochasztikus programozási feladat optimum értékében mekkora változásokat eredményezhet, ha megváltozik az együttes valószínűségeloszlás típusa, az összes első és második momentum (várható érték, szórás, korreláció) változatlansága mellett.

Prékopa András nemcsak a magyar operációkutatásért tett sokat, hanem a szocializmus évei alatt számos szocialista országból jövő fiatal tehetséget segített hozzá érdekes kutatási témához és kiváló munkakörülményekhez. Közülük többen nemzetközi karriert futottak be, mint például Dinh The Luc, a többcélfüggvényes optimalizálás világhírű szakértője. Mások a magyarországi szakmai körökben találták meg szakmai érvényesülésük lehetőségét. Közéjük tartozik Monhor Davaadorzsín, aki a PERT-modell valószínűségi aspektusait tárgyaló munkával emlékezik meg témavezetőjéről.

Mádi-Nagy Gergely mint az egyik utolsó Magyarországon PhD-fokozatot szerzett Prékopa-tanítvány, a többváltozós diszkrét momentum problémákról írt egy izgalmas összefoglaló dolgozatot, amelyik alapján nagyon is úgy tűnik, hogy a magyar operációkutatók, Prékopa András tetten érhető hatására, komoly eredményekkel gazdagították ezt a területet.

Fleiner Tamás a stabil párosításokat és azok általánosításait vizsgálva bemutatja, hogy egy, az egyetemi felvételi problémából származó feladat megoldásának milyen szerteágazó következményei vannak, és maga a feladat milyen váratlan módon kapcsolódik Knaster és Tarski egy méltatlanul elhanyagolt fixponttételéhez.

Illés Tibor és Molnár-Szipai Richárd a folyamalgoritmusból származó címkézéses technikát és annak továbbfejlesztését mutatja be, és alkalmazza ezt különböző pivot algoritmusokban. Kiderül, hogy az MBU-algoritmus megfelelő címkézési technika alkalmazásával polinomidejűvé tehető. Egy konkrét – a mozdony hozzárendelési – feladaton végzett számítások illusztrálják a munkát.

Mellár Tamás, a 2017. évi Krekó Béla-díj nyertese bemutatja a hiszterézis közgazdasági alkalmazásait, foglalkozik a potenciális kibocsátás és a hiszterézis kapcsolatával.

Végezetül szeretnénk felsorolni, hogy az elmúlt időszakban az operációkutatási szakmai közösség milyen cikkekkel, kötetekkel és eseményekkel emlékezett meg Prékopa Andrásról, a kutatóról, tanárról és iskolateremtő egyéniségről:

- Boros Endre, Maros István: *Megemlékezés - Prékopa András 1929-2016*, Magyar Tudomány **178**. évf. **4**. szám (2017) 497-500.[1]
- Deák István, Szántai Tamás: *Emlékezés professzor Prékopa András akadémikusra, halálának első évfordulóján*, Magyar Tudomány **178**. évf. **12**. szám (2017) 1599-1605.[2]
- Az Acta Polytechnica Hungarica folyóirat a 2018-ban megjelent **15**. évf. **1**. kötetével tisztelgett Prékopa András emléke előtt.[3]
- Az Annals of Operations Research folyóirat *Stochastic Modeling and Optimization in Memory of András Prékopa* címmel különszámot jelentet meg Boros Endre, Michael Katehakis és Andrzej Ruszczyński szerkesztésével.[4] [5]
- A 2016-ban Esztergomban megrendezett *VOCAL Optimization Conference: Advanced Algorithms* konferencia 4 szekcióval tisztelgett Prékopa András emléke előtt.

[1] http://www.matud.iif.hu/2017/04/13.htm
[2] http://www.matud.iif.hu/MaTud-2017-12.pdf
[3] http://www.uni-obuda.hu/journal/Preface%5F80.pdf
[4] http://rutcor.rutgers.edu/CfP%20Andras%20Prekopa.pdf
[5] https://link.springer.com/journal/volumesAndIssues/10479

- *In Memoriam Andras Prekopa (1929-2016)* címmel emlékezik az Institute of Operations Research and the Management Sciences (INFORMS) OR/MS Today Vol. **43** No. **5** cikke.[6]
- 2014-ben Prékopa András kapta az INFORMS President's Award kitüntetését, amelyről az INFORMS OR/MS Today Vol. **41** No. **6** *Prékopa garners INFORMS President's Award* című cikke számolt be.[7]
- Prékopa András 80. születésnapjára az Annals of Operations Research folyóirat különszámot jelentetett meg *Stochastic modeling and optimization* címmel, Vol. **200** No. **1** (2012).[8] [9]
- Prékopa András 75. születésnapjára az Alkalmazott Matematikai Lapok **21**. évf. (2004) 181-214. o. cikke jelent meg.[10]
- 2003-ban Prékopa András kapta az EURO Gold Medalt.[11]
- Prékopa András életrajza 1992-ben: Szigma, **23**. évf. **3-4**. szám (1992) 119-124. oldal.[12]

Bozóki Sándor
Fleiner Tamás
Illés Tibor
Tasnádi Attila

Az Alkalmazott Matematika Lapok szerkesztősége ezúton is köszöni Bozóki Sándornak, Fleiner Tamásnak, Illés Tibornak és Tasnádi Attilának, hogy e különszám vendég szerkesztőiként segítettek a szám elkészültében.

Fleiner Tamás és Illés Tibor rövid életrajzai a kötetben megjelenő saját cikkeik után olvashatóak.

---

[6] https://www.informs.org/ORMS-Today/Public-Articles/October-Volume-43-Number-5/INFORMS-News-In-Memoriam-Andras-Prekopa-1929-2016

[7] https://www.informs.org/ORMS-Today/Public-Articles/December-Volume-41-Number-6/Prekopa-garners-INFORMS-President-s-Award

[8] Előszó (1-2. o.): https://link.springer.com/article/10.1007/s10479-012-1209-z

[9] Tudományos munkásság összefoglalása (3-7. o.): https://link.springer.com/article/10.1007/s10479-012-1210-6

[10] http://real-j.mtak.hu/461/1/ALKMAT%5F21.pdf

[11] https://www.euro-online.org/media%5Fsite/bulletins/bulletin%5FJan30%5F2004.pdf (3-4. oldal)

[12] http://www.szigma.ktk.pte.hu/index.php/letoltesek/1992-xxiii-evfolyam-3-4/tarsasagi-hirek-a-magyar-operaciokutatasi-tarsasag-eletebol/let%C3%B6lt%C3%A9s

Bozóki Sándor 1978-ban született Kiskunmajsán. Az ELTE alkalmazott matematikus mesterszakán 2001-ben, majd matematika tanári szakán 2003-ban végzett. PhD-fokozatát a Budapesti Corvinus Egyetemen szerezte 2006-ban Rapcsák Tamás témavezetése mellett.
2001 óta tagja az MTA SZTAKI Operációkutatás és Döntési Rendszerek Kutatócsoportjának (2007 óta tudományos főmunkatárs), és szintén 2001 óta oktat a Budapesti Corvinus Egyetem MTA SZTAKI-ba kihelyezett Gazdasági Döntések Tanszékén, majd 2006 óta az Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszéken (2012 óta egyetemi docens). Vendégoktatóként oktat, ill. oktatott a CEU-n, az ELTE-n és a BME-n is.

Az MTA Matematikai Tudományok Osztálya Operációkutatási Tudományos Bizottságának titkára, valamint szerkesztőbizottsági tag az Alkalmazott Matematikai Lapok és a Society and Economy in Central and Eastern Europe folyóiratokban.

Fő kutatási területei a többszempontú döntési modellek és a kapcsolódó optimalizálási feladatok, valamint a többváltozós polinomrendszerek. 30 cikkére több mint 300 független hivatkozás ismert.

BOZÓKI SÁNDOR
MTA SZTAKI
e-mail: bozoki.sandor@sztaki.mta.hu

Tasnádi Attila 1969-ben született, okleveles közgazda (BCE-GTK, 1993), okleveles programtervező matematikus (ELTE-TTK, 1997), PhD (BCE, 2000), dr. habil. (BCE 2009) és MTA doktor (2013).
Elismerései: Bolyai János Kutatási ösztöndíj, Farkas Gyula-emlékdíj, Bolyai-plakett, MTA „Lendület” kutatócsoportvezető, Rapcsák Tamás-díj és PADS vezető kutató. A BCE-en egyetemi tanár, egy évet volt posztdoktorandusz a Bonni Egyetemen. Kutatási területei az oligopol játékok és a társadalmi választások elmélete.

Három könyv, 31 angol nyelvű (ebből 25 WoS) és 10 magyar nyelvű szakcikk szerzője. Scopus szerinti hivatkozásainak száma 155, h-indexe 8.

A Society and Economy főszerkesztője.

TASNÁDI ATTILA
Budapesti Corvinus Egyetem
e-mail: attila.tasnadi@uni-corvinus.hu

Az Alkalmazott Matematikai Lapok megjelenését támogatja
a Magyar Tudományos Akadémia Könyv- és Folyóiratkiadó Bizottsága.

A kiadásért felelős a BJMT főtitkára
Szedte és tördelte Éliás Mariann

Nyomta a Synra Nyomda és Kiadó Kft., Budapest
Felelős vezető: Szűcs Ernőné

Budapest, 2018
Megjelent 18 (A/5) ív terjedelemben
100 példányban
HU ISSN 0133-3399

ÚTMUTATÁS A SZERZŐKNEK

Az Alkalmazott Matematikai Lapok csak magyar nyelvű dolgozatokat közöl. A közlésre szánt dolgozatokat e-mailen az `aml@math.elte.hu` címre kérjük elküldeni az ábrákat tartalmazó fájlokkal együtt. Előnyben részesülnek a LaTeX-ben elkészített dolgozatok.

A kéziratok szerkezeti felépítésének a következő követelményeket kell kielégíteni:

Fejléc: A fejlécnek tartalmaznia kell a dolgozat címét és a szerző teljes nevét.

Kivonat: A fejléc után egy, képletet nem tartalmazó, legfeljebb 200 szóból álló kivonatot kell minden esetben megadni.

Fejezetek: A dolgozatot címmel ellátott szakaszokra kell bontani, és az egyes szakaszokat arab sorszámozással kell ellátni. Az esetleges bevezetésnek mindig az első szakaszt kell megnevezni.

A dolgozatban előforduló képleteket a dolgozat szakaszokra bontásától független, folytatólagos arab sorszámozással kell azonosítani. Természetesen nem szükséges minden képletet számozással ellátni, csak azokat, amelyekre a szerző a dolgozatban hivatkozni kíván.

Mind az ábrákat, mind a lábjegyzeteket szintén folytatólagos arab sorszámozással kell ellátni. Az ábrák elhelyezését a dolgozat megfelelő helyén ábraazonosító sorszámokkal kell megadni. A lábjegyzetekre a dolgozaton belül az azonosító sorszám felső indexkénti használatával lehet hivatkozni.

Az esetleges definíciókat és tételeket (segédtételeket és lemmákat) szakaszonként újrakezdődő, ponttal elválasztott, kettős számozással kell ellátni. Kérjük a szerzőket, hogy ezeket, valamint a tételek bizonyítását a szövegben kellő módon emeljék ki.

Irodalomjegyzék: A dolgozatok szövegében az irodalmi hivatkozás számait szögletes zárójelben kell megadni, mint például [2] vagy [1, 7–13].

Az irodalmi hivatkozások formája a következő: Minden hivatkozást fel kell sorolni a dolgozat végén található irodalomjegyzékben, a szerzők, illetve a társszerzők esetén az első szerző neve szerint alfabetikus sorrendben úgy, hogy a cirill betűs szerzők nevét a Mathematical Reviews átírási szabályai szerint latin betűsre kell átírni. A folyóiratban megjelent cikkekre [1], a könyvekre [2] a következő minta szerint kell hivatkozni:

[1] Farkas, J.: *Über die Theorie der einfachen Ungleichungen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **124**, (1902) 1–27.

[2] Zoutendijk, G.: *Methods of Feasible Directions*, Elsevier Publishing Company, Amsterdam and New York (1960), 120 o.

Szerző adatai: Az irodalomjegyzék után, a kézirat befejezéseképpen fel kell tüntetni a szerző teljes nevét és a munkahelye (esetleg lakása) pontos címét, illetve e-mail címét.

Idegen nyelvű kivonat: Minden dolgozathoz csatolni kell egy angol nyelvű összefoglalót.

A szerzők a dolgozatukról 20 darab ingyenes különlenyomatot kapnak. A dolgozatok után szerzői díjat az Alkalmazott Matematikai Lapok nem fizet.

TARTALOMJEGYZÉK

INDEX