

ALKALMAZOTT MATEMATIKAI LAPOK

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

ALAPÍTOTTÁK

KALMÁR LÁSZLÓ, TANDORI KÁROLY, PRÉKOPA ANDRÁS, ARATÓ MÁTYÁS

FŐSZERKESZTŐ

PÁLES ZSOLT

FŐSZERKESZTŐ-HELYETTESEK

BENCZÚR ANDRÁS, GERENCSÉR LÁSZLÓ, SZÁNTAI TAMÁS

FELELŐS SZERKESZTŐ

VIZVÁRI BÉLA

TECHNIKAI SZERKESZTŐ

KOVÁCS GERGELY

A SZERKESZTŐBIZOTTSÁG TAGJAI

Arató Miklós, Baran Sándor, Bozóki Sándor, Csáji Balázs Csanád, Csendes Tibor, Csirik János, Fazekas István, Forgó Ferenc, Frank András, Fridli Sándor, Friedler Ferenc, Galántai Aurél, Garay Barna, Győri István, Hajdu András, Hartung Ferenc, Hatvani László, Heppes Aladár, Horváth Zoltán, Illés Tibor, Járai Antal, Jelasity Márk, Katona Gyula, Király Tamás, Kis Tamás, Krisztin Tibor, Lovász László, Maksa Gyula, Maros István, Michaletzky György, Pap Gyula, Rásonyi Miklós, Recski András, Rónyai Lajos, Röst Gergely, Simon Péter, Szabó Péter Gábor, Szeidl László, Tallos Péter, Temesi József, Tusnády Gábor

36. kötet

Szerkesztőség és kiadóhivatal: 1055 Budapest, Falk Miksa u. 12.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, és olyan eredeti tudományos cikkeket publikál, amelyek a gyakorlatban, vagy más tudományokban közvetlenül felhasználható új matematikai eredményt tartalmaznak, illetve már ismert, de színvonalas matematikai apparátus újszerű és jelentős alkalmazását mutatják be. A folyóirat közöl cikk formájában megírt, új tudományos eredménynek számító programokat, és olyan, külföldi folyóiratban már publikált dolgozatokat, amelyek magyar nyelven történő megjelentetése elősegítheti az elért eredmények minél előbbi, széles körű hazai felhasználását. A szerkesztőbizottság bizonyos időnként lehetővé kívánja tenni, hogy a legjobb cikkek nemzetközi folyóiratok különszámaként angol nyelven is megjelenhessenek.

A folyóirat feladata a Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai) Osztályának munkájára vonatkozó közlemények, könyvismertetések stb. publikálása is.

A kéziratok a főszerkesztőhöz, vagy a szerkesztőbizottság bármely tagjához beküldhetők. A főszerkesztő címe:

Páles Zsolt, főszerkesztő

1055 Budapest, Falk Miksa u. 12.

A folyóirat e-mail címe: aml@math.elte.hu

A folyóirat honlapja: <http://aml.math.bme.hu>

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért felelősséget nem vállal.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok előfizetési ára évfolyamonként 1200 forint. Megrendelések a szerkesztőség címén lehetségesek.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica,
2. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica.

ELŐSZÓ

BJMT Alkalmazott Matematikai Konferencia, 2016.

Előzmények. 2011-ben született meg szűkkörű szakmai megbeszélések során az a gondolat, hogy időszerű lenne a hazai alkalmazott matematika helyzetének felmérésére egy olyan konferenciát szervezni, amelynek tematikáját *3-4 kiemelt, nagy alkalmazási terület* határozza meg. A helyszín tekintetében a regionális központ szerepét játszó Győr városára esett a választás, a dinamikusan fejlődő Széchenyi István Egyetem, ezen belül Horváth Zoltán professzor közreműködésére számítva.

Ennek nyomán jött létre a *2012. évi győri BJMT Alkalmazott Matematikai Konferencia*, a Bolyai János Matematikai Társulat (BJMT) égisze alatt, az emberi erőforrásokat és anyagi támogatást biztosító Széchenyi István Egyetem és az MTA SZTAKI közreműködésével. A konferencia programja az alábbi 4 alkalmazási terület köré szerveződött:

- Biológia, Orvosi Alkalmazások, Gyógyszeripar,
- Jármű- és Gépipar, Energia,
- Pénzügyi- és Biztosítási Matematika,
- Telekommunikáció és Web Technológiák.

A plenáris és a kiemelt („szemi-plenáris”) előadókat szinte kizárólag a matematika világán kívül eső tudományterületekről vagy alkalmazási területekről hívtuk meg, a képviselt szakma legjobbjait felkérve. A plenáris előadók a fenti témák szerinti felsorolásban Szathmáry Eörs (ELTE), Stépán Gábor (BME), Kovács Levente (Bankszövetség) és Telek Miklós (BME) voltak.

A konferenciáról számos nagyon pozitív visszajelzést kaptunk, amelyek alapján megállapíthattuk, hogy a konferencia elérte célját. Egyfelől a matematikus hallgatóság szembesült azzal, hogy más szakterületek élvonalbeli kutatóinak kiváló matematikai alapképzettségük van, és érzékük van ahhoz is, hogy saját szakterületük problémáiban felismerjék annak esetleges matematikai vonatkozásait. A plenáris és a kiemelt előadók közül többen kifejezték érdeklődésüket a matematikusokkal való együttműködés iránt.

Másrészt megtapasztaltuk azt is, hogy nem csekély azoknak a matematikusoknak a száma, akik amellett, hogy a matematika valamely területén otthonosan mozognak, fogékonyak más tudományterületeken és alkalmazási területeken felmerülő problémák iránt, sőt kifejezetten keresik az együttműködés lehetőségét.

BJMT AMK 2016. Ilyen előzmények után természetesen felmerült az igény, hogy próbáljuk meg újra. Erre négy évvel később, 2016-ban tudtunk vállalkozni, azonos helyszínnel, és a korábbi szervezők körét az akkor még új HU-MATHS-IN, Magyar Ipari és Innovációs Matematikai Szolgáltatási Hálózattal bővítve.

Utóbbinak volt köszönhető, hogy a konferencia első napján részt vett és előadást tartott *Volker Mehrmann* professzor is (TU Berlin), aki az EU-MATHS-IN egyik alapító tagja, a közönséges és algebrai differenciálegyenletek numerikus módszereinek nemzetközileg is vezető szaktekintélye, 2018 óta az EMS elnöke.

Szintén a HU-MATHS-IN meghívottja volt *Richard Varga* professzor, a parciális differenciálegyenletek és a numerikus lineáris algebra kölcsönhatásából született elmélet egyik megalkotója és nemzetközi hírű, magyar származású professzora.

Bővült a korábbi tematika is, ötödikként felvettük a programba a „Társadalmi Kihívások: Demográfia és Környezetvédelem” című témát. A plenáris előadók a témák szerinti sorrendben: Perczel András (ELTE), Fáth Gábor (Morgan Stanley), Bíró József (BME), Benczúr András (MTA SZTAKI), Szirányi Tamás (MTA SZTAKI) és Náray-Szabó Gábor (ELTE) voltak.

A konferencia egy új színfoltja volt az első nap késő délutánjára szervezett, nagy érdeklődéssel kísért kerekasztal beszélgetés „*Az alkalmazott matematika szerepe a kutatásban, a fejlesztésben és az innovációban*” címmel. A panel résztvevői Domokos Gábor (BME), Friedler Ferenc (NKFIH), Pálffy Péter Pál (MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet), Prékopa András (Rutgers University és ELTE), valamint a szinkrontolmáccsal támogatott fent említett Volker Mehrmann professzor voltak, a moderátor szerepét Recski András (BME) vállalta el.

A kerekasztal résztvevői különféle, részben ismert, részben újszerű szempontok, ill. tudománytörténeti példák alapján értékelték az alap kutatások és a célzott kutatások, a matematika és a természettudományok, valamint a matematika és az ipar kapcsolatainak viszonyát. Retrospektív viszonylatban a beszélgetés értelmezhető úgy is, mint az akkor még csekély érdeklődést kiváltó *2014. évi LXXVI. törvény a tudományos kutatásról, fejlesztésről és innovációról c.* törvény értelmező rendelkezéseire történő többszemélyes reflexió. A vita összegzése maga egy külön tanulmány tárgya lehetne, itt most csak a néhány hónappal később elhunyt *Prékopa András* akadémikus, a hazai és nemzetközi operációkutatási kultúra kiemelkedő személyiségének az alábbi tömör, de találó meghatározását idézzük fel:

„*Az alkalmazott matematika a maga problémáit és motivációit a matematikán túl keresi, de eszközeiben és módszereiben döntően a matematikára támaszkodik.*”

Ezen túlmenően - ugyancsak Prékopa Andrásal történt eszmecserék folyamán - felmerült az a gondolat is, hogy a konferencián elhangzott előadások anyagának történő publikálására az *Alkalmazott Matematikai Lapok (AML)* egy különszáma biztosítson lehetőséget. A konferenciát követő egymásba ütköző szervezési feladatok okán ez a terv eredeti formájában meghiúsult, a jelen szám ezt a hiányt van hivatva pótolni Csáji Balázs Csanád közreműködésével.

Visszatekintés. A konferenciát követő sokoldalú eszmecsere egyik eredménye az MTA III. Osztálya szakfolyóirata, az Alkalmazott Matematikai Lapok profiljának bővítése, annak megfogalmazása és elfogadtatása, hogy az AML „kifejezetten támogatja rövid cikkek publikálását, amelyek célja további kutatásokat inspiráló, matematikai kérdéseket is felvető alkalmazási problémák, illetve az utóbbiak által motivált igényes matematikai kérdések rövid, közérthető cikkekben történő bemutatása”. Ezzel párhuzamosan a szerkesztőbizottság is kibővült döntően a fiatalítás jegyében.

A konferencia során a multidiszciplináris kapcsolatokban megmutatkozó fokozott kölcsönös érdeklődés és együttműködési hajlandóság is egy örvendetes fejlemény, de a kulturális különbségek áthidalása vagy a *szellemi jogok* kérdésének rendezése még várhatóan hosszú folyamat lesz.

A konferencia utáni későbbi időszak sem telt el eseménytelenül. A két BJMT Alkalmazott Matematikai Konferencia egy méltó folytatásának tekinthetjük a 2018-ban a Bolyai János Matematikai Társulat által szervezett, mintegy 350 fős, nemzetközi ipari matematikai konferenciát: *The 20th European Conference on Mathematics for Industry (ECMI 2018)*¹.

Megemlíthetők még a stabil szakmai közösséget vonzó, kétévenként rendezett *Magyar Operációkutatási Konferenciák*², és az ELTE TTK által évenként szervezett, a Morgan Stanley és az MSCI által támogatott *Workshops on Understanding the Diversity of Financial Risk*³ c. rendezvények, a Magyar Bioinformatikai Társaság számos rendezvénye, a BME Alkalmazott Matematikai Napok, vagy az MTA SZTAKI által elindított R.E. Kálmán Distinguished Lecturer Program előadásai.

Úgy gondoljuk, hogy a fenti szakmai fórumoknak közös célja lehet a matematikai vonatkozású alap kutatás, ill. az innováció közötti, kiaknázásra váró hatalmas terület feltérképezése és az egymástól elkülöníthető területek közötti kapcsolatok elmélyítése. A hivatkozott 2014. évi törvény terminológiáját kissé árnyalva a sajátos szabadságot élvező alap kutatásokat kiegészítő két lehetséges közvetlen vonatkozási pont a *célzott alap kutatás, ill. az alkalmazott kutatás*. Számos véleményt összegző értelmezésünk szerint az előbbi témaválasztását és irányát egy jól körülhatárolt *alkalmazási terület inspirálja*, míg az utóbbi módszertanában is jelentős mértékben a kiválasztott alkalmazási terület *releváns szakirodalmára támaszkodik*, azt fejleszti tovább az alap kutatásokban szokásos keretek és feltételek között. Az alap kutatások és az alkalmazások sokszínű kapcsolatát illetően lásd az Érintő egy vonatkozó cikkét⁴.

¹<http://ecmi.bolyai.hu/>

²<http://www.mot.org.hu/XXXIII-magyar-operaciokutatasi-konferencia>

³<https://valstat.elte.hu/conf2018/>

⁴<http://www.ematlap.hu/index.php/interju-portre-2019-6/877-ronyai-lajos-szechenyi-dij-2019>

Véleményünk szerint ezek a vonatkozási pontok megnyugtatóan tükrözik a szóban forgó kutatások természetének és az értékelhető kutatói habitusoknak a változatosságát, és irányt szabhatnak a különböző típusú kutatási tevékenységek közötti ésszerű *arányok és összhang* kialakításának. Hogy ezek a törekvések mennyiben lesznek sikeresek, az a jövő titka. Egyelőre zárszóként:

„*Nem a siker elérése a cél, hanem a cél elérése a siker.*” (Bill Gates)

Gerencsér László
a BJMT Alkalmazott Matematikai Konferenciák elnöke
2019. június 21.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok szerkesztősége ezúton is köszöni Gerencsér Lászlónak és Csáji Balázs Csanádnak, hogy e különszám szerkesztőiként segítettek a szám elkészültében. A különszám szerkesztőinek rövid életrajza a cikkeik után olvasható.

SIS TÍPUSÚ JÁRVÁNYTERJEDÉS VIZSGÁLATA HIPERGRÁFOKON

BODÓ ÁGNES

Hipergráfokon történő járványterjedés matematikai vizsgálata kerül bemutatásra. A cél, hogy a modellezés során egyrészt figyelembe lehessen venni, hogy általában a populáció apróbb közösségekből áll, másrészt, hogy a terjedést meghatározó fertőzési ráta nem feltétlenül lineárisan függ a beteg szomszédok számától. Levezetésre kerül a járványterjedésre vonatkozó alapegyenlet tetszőleges hipergráf esetén. Ennek segítségével bevezethető az átlagtér közelítés, mint az alapegyenlet egy lehetséges egyszerűsítése, amely a sztochasztikus szimuláció eredményeivel összevethető. A szimuláció során mind a hipergráf szerkezete, mind a matematikai leírásban alkalmazott paraméterek hatásai vizsgálhatóak.

1. Bevezetés

Történelmünk során számos súlyos járvány sújtotta a világ népességét, többek között a fekete halálnak emlegetett pestis, amely már az 5. században jelen volt, és azóta folyamatosan szedi áldozatait a világ különböző területein, vagy például az 1918-ban felbukkanó spanyolnátha, amely a Föld teljes lakosságának 2-4%-át betegítette meg, és amely csak az 1918-as évben több áldozatot követelt, mint az egész első világháború. Az orvostudomány előrehaladásával folyamatosan fejlődik a járványokkal vívott küzdelem, amelyben nagy szerepet kapnak a járványterjedési modellek.

A járványterjedés matematikai modellezésének kezdetei a 20. század elejére nyúlnak vissza, az első ilyen jellegű mű Kermack és McKendrick 1927-ben megjelent munkája. Az ebben a dolgozatban megjelenő modell még igen kezdetleges volt, azonban az évek során a tudományág folyamatosan fejlődött és az alkalmazott matematika egyik fontos kutatási területévé vált. Ezen modellek segítségével olyan kérdések válaszolhatóak meg, mint például el fog-e terjedni a járvány egy adott populáción belül, és ha igen, akkor várhatóan a populáció hányadát fogja érinteni a fertőzés, de meghatározhatóak olyan mennyiségek is, mint például a reprodukciós szám vagy a kritikus oltási küszöb [3].

2. A modell

A járványterjedés leírására számos dinamika létezik, az egyik legegyszerűbb az úgynevezett SIS típusú járványterjedés, amely olyan fertőzések leírására alkalmas, ahol a betegségen átesett egyedek nem nyernek immunitást, hanem újra fertőzhetővé válnak. Ilyenek általában a nemi úton terjedő betegségek, mint például a kankó. Ezen betegségeknél az egyedek kétféle állapotban lehetnek: egészséges és fertőző, amelyeket a továbbiakban jelöljön S és I (az angol *susceptible* és *infected* szavakból). Egy csúcs állapota kétféleképpen változhat: egy egészséges egyed a fertőző szomszédai hatására fertőzötté válhat, ez a fertőzés folyamata ($S \rightarrow I$), illetve egy fertőző egyed meggyógyulhat, ez a gyógyulás folyamata ($I \rightarrow S$). Mind a fertőzés, mind a gyógyulás folyamatát Poisson-folyamattal írjuk le, amelynek értelmében annak a valószínűsége, hogy kis Δt idő alatt egy egyed S állapotból I állapotba kerül $1 - \exp(-\tau k \Delta t)$, illetve annak, hogy I állapotból S állapotba $1 - \exp(-\gamma \Delta t)$, ahol k jelöli az adott egyed fertőzött szomszédai számát, és τ , γ pozitív számok. A továbbiakban a τk és γ számokat a fertőzési és gyógyulási folyamatok rátáinak nevezzük.

A betegségterjedés matematikai leírásához célszerű megállapítani a kapcsolati struktúrát, amelyet hagyományosan gráfokkal szoktak jellemezni. Legyen tehát adott egy N csúcsú irányítatlan, egyszerű gráf, ahol a gráf csúcsai a populáció egyedeinek felelnek meg. Továbbá két csúcs között akkor van él, ha a fertőzés terjedhet köztük, ami a különböző betegségek esetében más és más lehet, attól függően, hogy például cseppfertőzéssel vagy nemi úton terjedő betegségről van szó.

Megfigyelhető, hogy a betegségterjedés egyes csoportokon belül jóval erősebb, míg a különféle csoportok között kevésbé meghatározó, ilyen csoportra természetes példa egy család vagy egy munkahelyi közösség. Ezen folyamatokat tanulmányozzák az úgynevezett háztartás típusú hálózatok segítségével [2]. Ezen kutatások alapján a járványterjedés során a populációt nem gráffal, hanem úgynevezett hipergráffal, vagy más néven általánosított gráffal reprezentáltuk. A hipergráf egy $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ pár, ahol $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ a hipergráf csúcsait jelöli, $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_M\}$ pedig a hiperéleket, ahol $e_i \subset \mathcal{V}$ teljesül minden $i = 1, 2, \dots, M$ esetén. Hagyományos értelemben vett gráfoktól eltérően hipergráfoknál egy él két-től több csúcst is összeköthet.

A továbbiakban célunk az SIS típusú járványterjedés hipergráfokon való vizsgálata. A hipergráf csúcsai tehát kétféle állapotban lehetnek: S , illetve I . A gyógyulás rátája a gráfos esethez hasonlóan γ maradt, azonban a fertőzés rátáját az alábbiak szerint módosítottuk:

$$\lambda_{SI} = \tau \sum_h f(k_h), \quad (1)$$

ahol az összegzés azon $h \in \mathcal{E}$ hiperélekre történik, amelyek tartalmazzák az adott csúcst, k_h jelöli a fertőzött csúcsok számát a h hiperélben, és f adott függvény. A

hagyományos gráfos megközelítésben, ha f az identitásfüggvény, akkor visszkapjuk a korábban említett $k\tau$ rátát, ahol $k = \sum_h k_h$ a fertőzött szomszédok száma. A modellezés során fontos kérdés volt, hogy az (1) rátában milyen f függvénnyel dolgozzunk. A hipergráfokon való vizsgálat mellett egy másik jelentős változtatás volt ezen f függvény bevezetése, amivel azt a jelenséget szerettük volna figyelembe venni, hogy sok esetben a fertőzés rátája nem lineárisan függ a fertőzött szomszédok számától. Példának okáért biológiai neurális hálózatok modellezésénél egy inaktív neuron aktívvá válásának rátája nem lineárisan függ az aktív szomszédok számától, hanem a tangens hiperbolikus függvényhez hasonló telítődés szerint. Tehát nagyon sok szomszéd nem növeli az átmenet valószínűségét, ami betegségterjedés során is életszerű. Az [1] cikkben a szerzők arra jutottak, hogy a folyamat megértéséhez elegendő a tangens hiperbolikus függvénynél numerikusan könnyebben kezelhető függvény alkalmazása, nevezetesen

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } 0 \leq x \leq c, \\ c, & \text{ha } x > c, \end{cases} \quad (2)$$

amelyet csupán a c küszöbértéknek nevezett paraméter jellemez.

3. Eredmények

3.1. Alapegyenlet és várható értékre vonatkozó egyenletek

Célunk volt gráfokhoz hasonlóan az állapotvalószínűségekre vonatkozó lineáris differenciálegyenlet-rendszer levezetése [5], amelyet alapegyenletnek neveznek. Egy N csúcsú hipergráf során az állapottér az $\{S, I\}^N$ halmaz, ugyanis bármely csúcson ezen kétféle állapotban lehet. Célszerű ezt a halmazt $N + 1$ részhalmazra osztani a fertőző csúcsok száma szerint. A továbbiakban legyen $S^0 = (SSS \dots S)$ az az állapot, ahol a hipergráfban nincs fertőző csúcs. Hasonlóan jelölje S^k azon állapotokat, amelyeknél k fertőző csúcs található a hipergráfban. Végezetül legyen $S^N = (III \dots I)$ az az állapot, ahol minden csúcs fertőző. Az S^k halmaz elemeit jelölje $S_1^k, S_2^k, \dots, S_{c_k}^k$, ahol $c_k = \binom{N}{k}$. Ezen jelölések segítségével felírható a fertőzés és a gyógyulás folyamata, lásd [1].

Az alapegyenlet felírásához jelölje $\mathcal{X}_j^k(t)$ annak a valószínűségét, hogy a rendszer a t időpillanatban S_j^k állapotban van. Továbbá legyen

$$\mathcal{X}^k(t) = (\mathcal{X}_1(t), \mathcal{X}_2(t), \dots, \mathcal{X}_{c_k}(t)), \quad k = 0, 1, \dots, N$$

a k beteget tartalmazó állapotok valószínűségeiből álló vektor. A fenti átmenetek az $\mathcal{X}_j^k(t)$ változókra az alábbi lineáris, állandó együtthatós differenciálegyenlet-rendszert határozzák meg:

$$\dot{\mathcal{X}}^k = A^k \mathcal{X}^{k-1} + B^k \mathcal{X}^k + C^k \mathcal{X}^{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, N,$$

ahol A^0 és C^N nulla mátrixok. Az A^k mátrixok a fertőzés, a C^k mátrixok a gyógyulás folyamatát írják le, amelyek részletes leírása megtalálható az [1] cikkben. Az egyenlet az alábbi alakban is írható:

$$\dot{\mathcal{X}} = P\mathcal{X}, \quad (3)$$

ahol P blokk-tridiagonális mátrix, amelynek főátlójában a B^k mátrixok szerepelnek, a főátló alatt az A^k , a főátló felett pedig a C^k mátrixok.

A (3) alapegyenlet nagy N esetén kezelhetetlenné válik, ezért célszerű az alapegyenletet leegyszerűsíteni, amelynek egyik módja az úgynevezett átlagtér közelítés. Ilyenkor nem az egyes állapotvalószínűségekre írunk fel differenciálegyenleteket, hanem bizonyos várható értékekre, jelen esetben a fertőző és egészséges típusú csúcsok számának várható értékeire, amelyeket $[I]$ és $[S]$ jelöl, ahol

$$[I](t) = \sum_{k=0}^N k \sum_{j=1}^{c_k} \mathcal{X}_j^k(t), \quad [S](t) = \sum_{k=0}^N (N-k) \sum_{j=1}^{c_k} \mathcal{X}_j^k(t).$$

Az egyenletek felírásához vezessük be a következő mennyiségeket: jelölje $N_h(\mathcal{S}_j^k)$ a h hiperélben lévő fertőzött csúcsok számát az \mathcal{S}_j^k állapotban, továbbá legyen

$$N_{SI}^f(\mathcal{S}_j^k) = \sum_{l: \mathcal{S}_j^k(l)=S} \sum_{h: l \in h} f(N_h(\mathcal{S}_j^k)),$$

azaz az \mathcal{S}_j^k állapotban lévő egészséges csúcsokra vonatkozó $\sum_{h: l \in h} f(N_h(\mathcal{S}_j^k))$ értékek összege. Ekkor az $[I](t)$ és $[S](t)$ függvényekre az alábbi differenciálegyenletek írhatóak fel.

3.1. TÉTEL. Az $[I](t)$ és $[S](t)$ várható értékek az alábbi differenciálegyenleteket elégítik ki tetszőleges hipergráf esetén:

$$\dot{[S]} = \gamma[I] - \tau[SI], \quad (4)$$

$$\dot{[I]} = \tau[SI] - \gamma[I], \quad (5)$$

ahol

$$[SI] = \sum_{k=0}^N \sum_{j=1}^{c_k} N_{SI}^f(\mathcal{S}_j^k) \mathcal{X}_j^k(t).$$

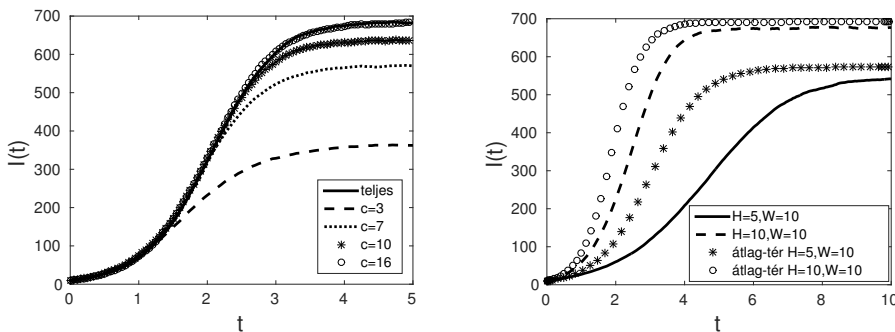
A bizonyítás megtalálható az [1] cikkben.

3.2. Szimulációk

A (4), (5) típusú egyenletek korlátozottak abban az értelemben, hogy nem tudják figyelembe venni a fertőzés útját, azaz hogy a betegség pontosan melyik

egyedről melyik egyedre jut át. Ennek leírásához célszerű megállapítani a kapcsolati struktúrát. A hálózat szerkezetének ismeretében Monte-Carlo-szimulációval lehet vizsgálni a betegség terjedésének folyamatát, például lásd [4].

A gyakorlatban a pontos kapcsolati struktúra feltérképezése általában nehezen kivitelezhető, ezért gyakran alkalmaznak véletlen gráfokat a folyamatok leírására. Ebből fakadóan a szimulációkat különféle véletlen hipergráfokon végeztük. Az első hipergráftípus a valós életnek egy nagyon leegyszerűsített modellje, ahol feltételezzük, hogy minden egyednek van otthona és munkahelye, tehát minden csúcs pontosan két hiperélben szerepel. A második hipergráftípus során a konfigurációs modell segítségével generáltunk véletlen hipergráfokat. A pontos részletek megtalálhatóak az [1] cikkben.



(a) A teljes gráfos és a hipergráfos megközelítés az (1) rátában szereplő függvény c küszöbértékének különböző megválasztásai esetén 16 nagyságú, 500 hiperéllal rendelkező véletlen hipergráfon $\tau = 0,02$, $\gamma = 1$ paraméterek esetén.

(b) A hipergráfos megközelítés $c = 7$ küszöbérték választással, és az átlagtér közelítésnek megfelelő (6) egyenlet megoldása különböző otthon (H) és munkahely mérettel (W) rendelkező hipergráfokon $\tau = 0,18$, $\gamma = 1$ paraméterek esetén.

1. ábra. A fertőzött csúcsok számának időbeli változása $N = 1000$ esetén.

A szimulációk során a folyamatot meghatározó mennyiséget, azaz a betegszám időbeli változását követhetjük nyomon. Egyrészt megvizsgáltuk a (2)-ben definiált f függvény hatását, azaz azt, hogy a küszöbérték változása milyen hatással van a betegszámra. Kétféle megközelítést használtunk: teljes gráfok és hipergráfok. A teljes gráfos megközelítésben minden hiperéllt teljes gráffal helyettesítettünk. Azt az eredményt kaptuk, hogy hipergráftípustól függetlenül a küszöbérték elég nagy értékére a teljes gráfos és a hipergráfos szimuláció közelítőleg megegyezik, lásd az 1a. ábrát. Másrészt megvizsgáltuk a struktúra hatását, azaz azt, hogy a hipergráfok homogenitását változtatva hogyan alakul a betegszám időfüggése. Homogenitás alatt azt értjük, hogy a hipergráf uniform és reguláris. Hipergráftípustól függetlenül arra az eredményre jutottunk, hogy minél homogénebb a folyamatot

leíró hipergráf, annál lassabb kezdetben a járvány terjedése (azaz annál kevesebb kezdetben a betegszám), azonban annál hatékonyabban terjed el idővel a járvány (azaz a betegszám kellő idő elteltével nagyobb lesz). A homogenitás hatása az [1] cikkben van illusztrálva. Végül pedig összehasonlítottuk a szimulációt a várható értékre vonatkozó egyenlettel, lásd az 1b. ábrát, ahol az első hipergráftípusnál az (5) egyenletre az alábbi közelítést írhatjuk fel:

$$\dot{I} = \tau(N - I) \left[f\left(\frac{H - 1}{N}I\right) + f\left(\frac{W - 1}{N}I\right) \right] - \gamma I, \quad (6)$$

ahol H az otthonok, W a munkahelyek méretét jelöli.

Köszönetnyilvánítás

A szerző köszönetét fejezi ki az Országos Tudományos Kutatási Alapprogramok, OTKA (pályázat száma: 115926) támogatásáért.

Hivatkozások

- [1] BODÓ, A., KATONA, Y. G., AND SIMON, L. P.: *SIS Epidemic Propagation on Hypergraphs*, Math. Biol., Vol. **78**, pp. 713-735 (2016).
- [2] HOUSE, T. AND KEELING, M. J.: *Deterministic epidemic models with household structure*, Math. Biosci., Vol. **213**, pp. 29-39 (2008). DOI: [10.1016/j.mbs.2008.01.011](https://doi.org/10.1016/j.mbs.2008.01.011)
- [3] PASTOR-SATORRAS, R., CASTELLANO, C., VAN MIEGHEM, P., AND VESPIGNANI, A.: *Epidemic processes in complex networks*, Rev. Mod. Phys., Vol. **87**, pp. 925-979 (2015). DOI: [10.1103/RevModPhys.87.925](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.87.925)
- [4] SZABÓ-SOLTICZKY, A. AND SIMON, L. P.: *The Effect of Graph Structure on Epidemic Spread in a Class of Modified Cycle Graphs*, Math. Model. Nat. Phenom., Vol. **9** No. **2** pp. 89-107 (2014). DOI: [10.1051/mmnp/20149206](https://doi.org/10.1051/mmnp/20149206)
- [5] TAYLOR, M., SIMON, L. P., GREEN, M. D., HOUSE, T., AND KISS, Z. I.: *From Markovian to pairwise epidemic models and the performance of moment closure approximations*, Math. Biol., Vol. **64** No. **6** pp. 1021-1042 (2012). DOI: [10.1007/s00285-011-0443-3](https://doi.org/10.1007/s00285-011-0443-3)



Berzlánovichné Bodó Ágnes 1991-ben született Szombathelyen. 2009-ben nyert felvételt az Eötvös Loránd Tudományegyetem matematika szakára. Az alapszakos diplomáját 2012-ben szerezte meg, ezt követően 2015-ig az Alkalmazott Matematikus MSc mesterképzésének hallgatója volt. 2014-ben elnyerte a Természettudományi Kar „Kar Kiváló Hallgatója” díját. A diploma megszerzése után 2018-ig az Eötvös Loránd Tudományegyetem Matematika Doktori Iskola, Alkalmazott Matematika Program ösztöndíjas doktoranduszaként tanult, jelenleg doktorjelölt. 2018 szeptemberétől 2019 júniusáig tudományos segédmunkatársként dolgozott az Eötvös Loránd Tudományegyetem Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszékén. Kutatási területe a közönséges differenciálegyenletek és alkalmazásai témakörén belül különféle járványterjedési modellek analitikus és numerikus vizsgálata. Doktori képzésének megkezdése óta három angol nyelvű folyóiratcikke jelent meg és egy magyar nyelvű népszerűsítő cikke.

BODÓ ÁGNES

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék
Numerikus Analízis és Nagy Hálózatok Kutatócsoport
1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C
bodoagi@cs.elte.hu

SIS EPIDEMIC PROPAGATION ON HYPERGRAPHS

ÁGNES BODÓ

Mathematical modeling of epidemic propagation on hypergraphs is considered in this paper. The goal is to model the community structure with greater accuracy and to describe the dependence of the infection pressure on the number of infected neighbours with a nonlinear function. The master equation describing the process is derived for an arbitrary hypergraph. The mean-field equations are introduced as an approximation to the master equation and are compared against the stochastic simulations. Simulation results can be used to analyze the effects of the hypergraph structure and the model parameters.

Keywords: SIS epidemic; mean-field model; exact master equation, hypergraph

Mathematics Subject Classification (2000): 05C65, 60J28, 90B15, 92D30

KÍSÉRLETILEG MEGHATÁROZOTT, BELSŐ DINAMIKÁT TÜKRÖZŐ FEHÉRJESZERKEZETI SOKASÁGOK: ELŐÁLLÍTÁS, ELEMZÉS ÉS BIOLÓGIAI RELEVANCIA

GÁSPÁRI ZOLTÁN

Az utóbbi évtizedekben nyilvánvalóvá vált, hogy a fehérjék térszerkezete mellett belső dinamikájuk is kulcsfontosságú szerepet játszik biológiai funkciójuk meghatározásában és finomhangolásában. A belső mozgások atomi szintű reprezentációjára olyan új modellek kerültek előtérbe, amelyek ugyanannak a molekulának nagyszámú különböző térszerkezeteit tartalmazzák, amelyek közötti különbségek nem elsősorban bizonytalanságból adódnak, hanem azt biztosítják, hogy a szerkezetek összessége megfeleltethető legyen egyes, a belső dinamikára vonatkozó kísérleti paramétereknek. Alább röviden áttekintem az ilyen térszerkezeti sokaságok előállításának főbb módszereit és azok validálásának legfontosabb alapelveit. Végül két, saját kutatásainkból vett példán bemutatom a koncepció alkalmazhatóságát.

1. Bevezetés

A fehérjék az élet alapvető molekulái közé tartoznak. A molekuláris biológia régi alaptétele szerint a fehérjék szekvenciája, azaz az őket felépítő aminosavak sorrendje meghatározza térszerkezetüket, azaz atomjaik egymáshoz képesti térbeli elhelyezkedését. Az utóbbi évtizedekben ez annyival egészült ki, hogy a szekvencia nem csupán a térszerkezetet, hanem annak időbeli átalakulásait, azaz dinamikáját is meghatározza. A jól meghatározott háromdimenziós szerkezettel bíró fehérjék mellett ez igaz az ún. funkcionálisan rendezetlen fehérjékre is, amelyek biológiai feladatukat úgy látják el, hogy nem rendelkeznek egyetlen jól körülírható térszerkezettel. Ezek a fehérjék igen dinamikusak, rövid idő alatt nagyon változatos térbeli elrendeződéseket vehetnek fel, szerkezetük mégsem teljesen véletlenszerű.

Az utóbbi évtizedben minden korábbinál nyilvánvalóbbá vált, hogy a fehérjék belső dinamikája, azaz a térszerkezet időbeli megváltozása jelentős szerepet játszik a biológiai funkció betöltésében. A fehérjék belső mozgásai között vannak, amelyek jellemzően néhány ezred, vagy akár milliomod másodperc alatt játszódnak le, és vannak, amelyek akár 10^{-9} másodpercnél is jóval gyorsabban. A gyorsabb mozgásokat tipikusan a molekuláris folyamatok entrópiájához való hozzájárulásuk, a

lassabb, milliszekundum-mikroszekundum időskálájú átrendeződéseket pedig a kémiai reakciók segítéséhez (katalízis), egyéb molekulákhoz való kötéshez szükséges alakváltozások miatt tartjuk fontosnak[7], bár a határvonalak természetesen nem minden esetben élesek. A jelenleg népszerű elmélet, a konformerszelekció szerint egy adott partner, pl. gyógyszermolekula a folytonosan változó szerkezetű fehérjemolekulák közül azokkal létesít kapcsolatot, amelyeknek alakja (és ezzel együtt fizikai-kémiai tulajdonságai, pl. elektromos töltéseinek helyzete) éppen megfelelő a kölcsönhatás kialakításához. Ezáltal a szerkezetváltozásnak megfelelő kémiai egyensúly eltolódik a fehérje-partner komplex irányába, így végül a fehérjék nagy része kötött állapotba kerül.

A fehérjék szerkezetét az őket alkotó atomok 3D koordinátaival adjuk meg. A belső dinamika leírásához több ilyen koordinátakészletet használunk, ez a szerkezeti sokaság, a gyakorlatban ponthalmazok összessége. A különböző ponthalmazokban (szerkezetekben) ugyanazon atom pozícióját leíró koordináták közötti különbségek tükrözik az adott atom mozgékonyágát úgy, hogy közben minden teljes ponthalmaz egy-egy kémiai is reális molekulaszerkezetet ír le.

2. Dinamikus fehérjeszerkezeti sokaságok előállítása és elemzése

A fehérjék minden egyes szerkezetéhez rendelhetünk egy, az atomok egymás közötti helyzetéből származó potenciális energiát. Ideális esetben, ha ismernénk minden lehetséges szerkezetet és azok energiáját, akkor a Boltzmann-eloszlás alapján meg tudnánk határozni az egyes szerkezetek gyakoriságát, és ezáltal a fehérje megvalósuló szerkezeteinek és azok egymáshoz viszonyított gyakoriságának teljes leírását tudnánk nyújtani. A gyakorlatban ez több okból sem megvalósítható. A lehetséges szerkezetek száma csillagászati, egy 100 aminosavból álló fehérje esetében óvatos becslés szerint is nagyságrendben 3^{100} térszerkezetet kellene előállítani és megvizsgálni. Másrészt a potenciális energia pontos kiszámítása is nagyon erőforrásigényes. Ezért jelentősen egyszerűsített fizikai modellek segítségével, az ismert fehérjeszerkezetekre jellemző tulajdonságokat felhasználva próbáljuk meg a várhatóan leggyakoribb, legfontosabb szerkezeteket és azok egymás közötti átmeneteit leírni. Ezen leírás pontosságát növeli, ha megköveteljük, hogy a szerkezetek összessége feleljen meg a kísérletileg meghatározott paramétereknek. Ennek legfontosabb feltétele, hogy ezek a paraméterek a kémiai szerkezet ismeretében becsülhetőek, „visszaszámolhatóak” legyenek, azaz legyen egyértelmű kapcsolat a térbeli szerkezet és az adott paraméter között. A kísérleti paraméterek lehetnek olyanok, amelyek egyenként, minden szerkezetre külön kiszámíthatóak és a szerkezetek összességére vonatkozóan megfelelő módon átlagolnunk kell őket, illetve olyanok, amelyek csak több szerkezet, azaz ponthalmaz együttesére értelmezhetőek. Az elsőre példa az ún. nukleáris Overhauser-effektusból származtatható, a hidrogénatomok közötti távolságokra vonatkozó paraméter, mely minden szerke-

zetre kiszámítható adott atompár esetére, a sokaságra átlagolni pedig nemlineáris módon szükséges (1. egyenlet):

$$r_{avg} = \left(\sum_{i=1}^N r_i^{-6} \right)^{-1/6}, \quad (1)$$

ahol r_i az i . szerkezetben mért távolság, N a szerkezetek száma, r_{avg} pedig a kísérleti adattal összevethető, a szerkezetek sokaságára vonatkozó átlag.

Ezzel szemben az ún. S^2 rendparaméter csak több szerkezeten értelmezhető, egyetlen szerkezeten értéke mindig 1 (2. egyenlet, [4]).

$$S_{ij}^2 = \frac{3}{2} (\langle \hat{x}_{ij}^2 \rangle^2 + \langle \hat{y}_{ij}^2 \rangle^2 + \langle \hat{z}_{ij}^2 \rangle^2 + 2 \langle \hat{x}_{ij} \hat{y}_{ij} \rangle^2 + 2 \langle \hat{x}_{ij} \hat{z}_{ij} \rangle^2 + 2 \langle \hat{y}_{ij} \hat{z}_{ij} \rangle^2) - \frac{1}{2}, \quad (2)$$

ahol \hat{x}_{ij} az i és j atomok mint háromdimenziós pontok közötti vektor irányával megegyező irányú egységvektor x komponense egy szerkezetben, $\langle \hat{x}_{ij} \rangle$ pedig ezek átlaga az összes szerkezetben.

A gyakorlatban a dinamikus sokaságok előállítására két fő megközelítés létezik [2]: a kísérleti adatokkal mint megkötésekkel kombinált, sokaság alapú, ún. molekuladinamikai szimuláció, illetve a nagy szerkezeti sokaságból a paramétereknek való megfelelés alapján válogató szelekciós eljárások. Előbbi megközelítésnél egyszerűen több fehérjeszerkezetben modellezük az atomok elmozdulását olyan módon, hogy az egyidejűleg megvalósuló atomi elrendeződések megfeleljenek a kísérleti paramétereknek. A szelekciós eljárások során nagyszámú, kémiaiailag reális lehetséges atomelrendeződést generálunk, és ezek közül választunk ki szerkezeteket úgy, hogy azok összessége minél jobban teljesítse a mért paramétereket. A szelekciós eljárások lehetnek determinisztikusak vagy sztochasztikusak.

A kapott sokaságok minőségének ellenőrzése, validálása során két szempontot kell érvényesítenünk [1], [8]. Egyrészt elvárás, hogy a szerkezetcsalád minden tagja geometriailag reális legyen, azaz az atomok mint pontok között definiált távolságok és szögek fizikailag és kémiaiailag megfelelőek legyenek, pl. az egymáshoz kémiai kötással kapcsolódó atomok ne legyenek egymástól túl távol, az egymáshoz nem kapcsolódóak túl közel stb. Másrészt természetesen kívánatos, hogy a szerkezetek összessége megfeleljen az adott molekulára mért kísérleti adatoknak, azoknak is, amelyeket felhasználtunk a szerkezetek előállításakor, és azoknak is, amelyeket nem. Ez utóbbi a keresztvalidáció, melynek fontos jelentősége van annak megítélésében, hogy a kapott szerkezeti sokaságok ténylegesen mennyire jó modelljei a valóságban megvalósuló molekuláris szerkezeteknek és elmozdulásoknak, és felhasználhatóak-e biokémiai jelenségek értelmezésére.

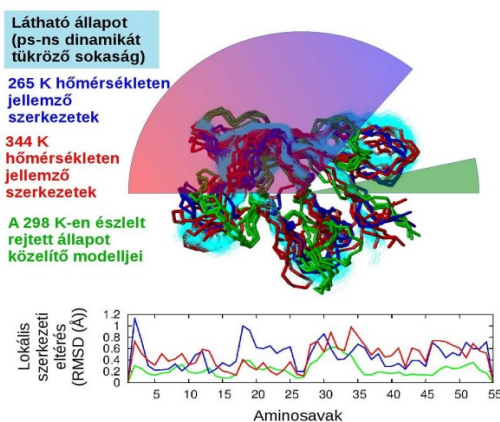
3. Alkalmazások

3.1. A PAF gombaellenes fehérje

A PAF (*Penicillium* antifungal protein) egy ígéretes gombaellenes fehérje, mely szelektíven pusztítja az *Aspergillus* nem fajait. Működési mechanizmusáról ugyanakkor igen keveset tudunk, kötőpartnere nem ismeretes. Erről az 55 aminosavas fehérjéről a Debreceni Egyetemen Batta Gyula vezetésével átfogó NMR-vizsgálatok készültek, amelyek arra utalnak, hogy az NMR-spektroszkópiával közvetlenül észlelhető forma csupán a molekulák mintegy 70%-át képviseli, a maradék kb. 30% a mérések számára „láthatatlan” „sötét anyag”. A molekula szerkezete mind hűtés, mind melegítés hatására megbomlik. Mindemellett sikerült egy, a mérhető formával kémiai egyensúlyban lévő, közvetlenül nem észlelhető állapot detektálása, amely azonban önmagában csupán a „sötét anyag” elenyésző részéért lehet felelős. Kísérleti adatokból származó megkötéseket alkalmazó molekuladinamikai számításokkal [6] előállítottuk az észlelhető állapot gyors, $10^{-12} - 10^{-9}$ másodperces időskálájú dinamikáját leíró térszerkezeti sokaságot, valamint egy megfelelően változatos szerkezethalmazból kiindulva sztochasztikus szelekcióval feltérképeztük a hideg és meleg kitekeredett állapotra jellemző szerkezetek közötti különbségeket. Ezen felül modelleztünk néhány olyan szerkezetet, amelyek együttesen, közelítőleg leírják a fő formával egyensúlyt tartó „rejtett” állapotot. Elmondható, hogy bár a fehérje nem megy át drasztikus szerkezetváltozáson, egyes jól körülhatárolható szerkezeti részei jelentősen és jellegzetes módon különböznek az egyes állapotokban. Ezt az ún. lokális RMSD (root mean square deviation), az egyes atomi pozíciók eltéréseit jellemző mennyiség is jól mutatja (3. egyenlet, 1. ábra). Összességében egy olyan modell állítható fel, ahol számos, közvetlenül nem észlelhető forma tart egyensúlyt a közvetlenül mérhető állapottal. Ezek funkcionális szerepe jelenleg kérdéses [5] (1. ábra).

$$RMSD = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d_i^2}, \quad (3)$$

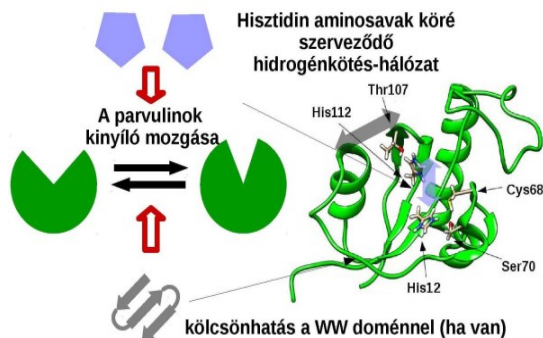
ahol d_i a vizsgált atom távolsága az N darab szerkezetre vonatkozó átlagos pozíciójától az i . szerkezetben.



1. ábra. A PAF gombaellenes fehérje állapotai. A diagramon a lokális RMSD látható, késsel a hideg, pirossal a meleg kitekeredett forma és a szobahőmérsékleten domináns látható állapot különbsége, zölddel a hideg és meleg kitekeredett formák közötti eltérés.

3.2. Parvulin típusú peptidil-prolil izomerázok

Egy újabb, saját kutatásainkból vett példa az ún. parvulin típusú peptidil-prolil izomerázok (fehérjemolekulákban adott molekularészletnél lejátszódó szerkezeti átalakulást segítő fehérjék) összehasonlító vizsgálatából származik. Ezen izomerázok közül egyesek egyrészt segítik más fehérjék szerkezetének megfelelő kialakulását a sejten belül, mások fontos genetikai szabályozó folyamatokban vesznek részt. Munkánk során a molekulacsalád három különböző tagjának gyors, $10^{-12} - 10^{-9}$ másodperces időskálájú dinamikát tükröző szerkezeti sokaságait állítottuk elő, majd elvégeztük ezek összehasonlító elemzését. Megállapítottuk, hogy a vizsgált fehérjék közötti legfontosabb különbség a szerkezet „kinyíló” mozgásának mértékében van. Ez a kinyíló mozgás azon régiót érinti, ahol a parvulinok a partnerfehérjéket megkötik, és azok szerkezeti átalakulását, izomerizációját katalizálják, segítik. Részletesebb vizsgálataink, többek között a szerkezeti sokaságok főkomponens-elemzése és korábbi irodalmi adatok alapján felállítottunk egy olyan modellt, amely szerint ezen kinyíló mozgás jellemzői hozzájárulnak annak meghatározásához, hogy az egyes parvulinok mely partnerfehérjéket ismerik fel és azok átalakulását milyen hatékonyan segítik. Maga a kinyíló mozgás többféle módon befolyásolható, vagy egyes, minden parvulinban megtalálható aminosavak közötti atomi kölcsönhatások, nevezetesen hidrogénkötések adott parvulinra jellemző létrejöttével, vagy olyan, csak bizonyos parvulinokban meglévő további molekularészlet, ún. WW domén segítségével, melyek szintén felismerik a partner molekulákat [3] (2. ábra).



2. ábra. A parvulinok kötőszébenek kinyíló mozgása és az azt szabályozó faktorkok, balra vázlatosan, jobb oldalon egy konkrét parvulinon bemutatva, kiemelve a konzervált hisztidin aminosavak köré szerveződő hidrogénkötés-hálózatot.

Köszönetnyilvánítás

A kutatásokat az NKFI Hivatal támogatta az 104198. számú pályázat segítségével.

Hivatkozások

- [1] ÁNGYÁN, A. F., SZAPPANOS, B., PERCZEL, A., AND GÁSPÁRI, Z.: *CoNSEnsX: an ensemble view of protein structures and NMR-derived experimental data*, BMC Struct. Biol., Vol. **10**, p. 39 (2010). DOI: [10.1186/1472-6807-10-39](https://doi.org/10.1186/1472-6807-10-39)
- [2] ÁNGYÁN, A. F., AND GÁSPÁRI, Z.: *Ensemble-based interpretations of NMR structural data to describe protein internal dynamics*, Molecules, Vol. **18** No. **9**, pp. 10548-10567 (2013). DOI: [10.3390/molecules180910548](https://doi.org/10.3390/molecules180910548)
- [3] CZAJLIK, A., KOVÁCS, B., PERMI P., AND GÁSPÁRI, Z.: *Fine-tuning the extent and dynamics of binding cleft opening as a potential general regulatory mechanism in parvulin-type peptidyl prolyl isomerases*, Sci. Rep. Vol. **7**. art. No. **44504** (2017). DOI: [10.1038/srep44504](https://doi.org/10.1038/srep44504)
- [4] HENRY, E. R., AND SZABÓ, A.: *Influence of vibrational motion on solid state line shapes and NMR relaxation*, J. Chem. Phys., Vol. **82** No. **11**, pp. 4753-4761 (1985). DOI: [10.1063/1.448692](https://doi.org/10.1063/1.448692)
- [5] FIZIL, Á., GÁSPÁRI, Z., BARNÁ, T., MARX F., AND BATTÁ, G.: *“Invisible” conformers of an antifungal disulfide protein revealed by constrained cold and heat unfolding, CEST-NMR experiments and molecular dynamics calculations*, Chem. Eur. J., Vol. **21** No. **13**, pp. 5136-5144 (2015). DOI: [10.1002/chem.201404879](https://doi.org/10.1002/chem.201404879)

- [6] RICHTER, B., GSPONER, J., VÁRNAI, P., SALVATELLA X., AND VENDRUSCOLO, M.: *The MUMO (minimal under-restraining minimal over-restraining) method for the determination of native state ensembles of proteins*, J. Biomol. NMR, Vol. **37**, pp. 117-135 (2007). DOI: [10.1007/s10858-006-9117-7](https://doi.org/10.1007/s10858-006-9117-7)
- [7] VÉRTÉSSY, B., AND OROSZ, F.: *From “fluctuation fit” to “conformational selection”*: evolution, rediscovery, and integration of a concept, BioEssays, Vol. **33** No **1**, pp. 30-34 (2011). DOI: [10.1002/bies.201000068](https://doi.org/10.1002/bies.201000068)
- [8] VRANKEN, W. F.: *NMR structure validation in relation to dynamics and structure determination*, Prog. Nucl. Magn. Reson. Spectrosc., Vol. **82**, pp. 27-38 (2014). DOI: [10.1016/j.pnmrs.2014.08.001](https://doi.org/10.1016/j.pnmrs.2014.08.001)



Gáspári Zoltán 1976-ban született. PhD fokozatát 2004-ben szerezte meg az Eötvös Loránd Tudományegyetemen, szerkezeti biológia szakterületen Perczel András témavezetésével. 2018-ban habilitált a Pázmány Péter Katolikus Egyetemen. 2011-ig tanársegéd, illetve adjunktus az ELTE TTK-n, jelenleg a PPKE ITK docense. Szakterülete a fehérjemolekulák tér szerkezetének és belső dinamikájának vizsgálata NMR-spektroszkópiai és számítási módszerekkel, elsősorban a szinaptikus jelátvitelben részt vevő egyes molekulákra koncentrálva. Pályája során rövid kutatói ösztöndíjak segítségével látogatta meg a Helsinki és a Cambridge-i Egyetemet, valamint két alkalommal nyerte el a Bolyai János Kutatói Ösztöndíjat.

GÁSPÁRI ZOLTÁN

Pázmány Péter Katolikus Egyetem
Információs Technológiai és Bionikai Kar
1083 Budapest, Práter u. 50./A
gaspari.zoltan@itk.ppke.hu

PROTEIN STRUCTURAL ENSEMBLES REFLECTING INTERNAL DYNAMICS: GENERATION, EVALUATION AND BIOMEDICAL RELEVANCE

ZOLTÁN GÁSPÁRI

Protein molecules are dynamic by nature and their internal dynamics is considered as a key factor determining and fine-tuning their mode of action. Motions in the microsecond-millisecond regime are generally considered as governing molecular recognition by changing the shape and surface properties of proteins, whereas dynamics on the picosecond-nanosecond time scale is

primarily thought to contribute to conformational entropy. Getting a detailed, atomic-level description of these motions is a nontrivial task. Currently, the best general approach is to combine molecular mechanics with experimental data obtained for the given protein. The resulting representation is an ensemble of protein conformations whose diversity reflects the motions of the protein occurring at a given time scale[1]. Such ensembles can be generated by molecular dynamics calculations directly restrained with experimental data or by selecting a suitable subset of a large pre-calculated pool of conformations. The resulting ensemble should be carefully evaluated for compliance with experimental parameters with special emphasis on those not included in the generation of the ensemble (cross-validation). Only then can the ensemble be analyzed in terms of biological relevance, whether it can be used to get closer to the understanding of mechanistic details of protein action. Application of the methods on the antifungal protein PAF and parvulin-type peptidyl-proline isomerases are summarized briefly.

Keywords: applied mathematics, molecular dynamics, protein structure.

Mathematics Subject Classification (2000): 92E10,70E99,74E99.

A TÖRTRENDŰ DIFFÚZIÓ MODELLJEI ÉS SZIMULÁCIÓJA

IZSÁK FERENC, SZEKERES BÉLA JÁNOS

A törtrendű diffúzió modelljeit és a kapott egyenletek numerikus megoldását tárgyaljuk. Kitérünk több alkalmazásra, az egyenletek megoldása kapcsán pedig hatékony eljárásokat mutatunk, és megemlíjtjük a terület néhány nyitott problémáját.

1. Bevezetés

A klasszikus diffúzió a természettudományos modellekben igen gyakran megfigyelhető dinamika. Ezt egy diszkrét modellben például az jellemzi, hogy egy részecske t idő alatti elmozdulásnégyzetének $\langle x^2(t) \rangle$ várható értéke arányos az eltelt idővel. A diffúziós folyamat másik alapvető tulajdonsága, hogy az abban részt vevő részecskék Brown-mozgást végeznek, vagyis az adott idő alatt történő elmozdulás normális eloszlású. Az utóbbi évtizedek pontosabb mérési eljárásai lehetővé tették, hogy a fenti összefüggéseket valóban megvizsgálják. Több esetben azt a meglepő eredményt kapták, hogy ezek nem teljesülnek.

A leginkább látványos példák a populációdinamikához köthetők. Ragadozó állatok, illetve egyéb táplálékkereső egyedek mozgását (műholdhoz kapcsolt szenzorokkal) vizsgálva azt kapták, hogy az adott idő alatt mért elmozdulások eloszlása polinomiálisan csökkenő sűrűségfüggvényekkel közelíthető. A tesztelésen túl a polinom fokát is becsülik [5], [9].

Más típusú vizsgálatok azt mutatták, hogy $t^\alpha \sim \langle x^2(t) \rangle$ teljesül valamilyen α állandóval. Amennyiben $\alpha > 1$, a dinamikát szuperdiffúzióknak, ha $\alpha < 1$, akkor szubdiffúzióknak nevezzük.

Szuperdiffúziót észleltek még ionok plazma halmazállapotú közegben történő mozgása esetén [16], továbbá emberek és bankjegyek mozgását nyomon követve [1]. A biokémia témakörébe tartozó számos hasonló megfigyelésről részletes áttekintést ad a [8] munka több táblázata.

2. A törtrendű diffúzió modelljei

A Fick-törvény szerint minden egyes pontban a fluxus sűrűsége az ottani koncentrációgradiens ellentettjével arányos. Ha azonban egy diszkrét modell keretében

gyors mozgású részecskéket is feltételezünk, akkor előfordulhat, hogy a fluxushoz olyan részecskék is hozzájárulnak, amelyek nem a vizsgált pontban vannak. Így a folyamatot nem tudjuk deriváltakkal modellezni, és a megfelelő egyenletek felírásához az ún. nemlokális analízist kell használnunk, ld. [3], [4]. Ez alkalmasnak tűnik a szuperdiffúzió jelenségének modellezésére.

Mivel a diffúziós egyenletben szereplő Laplace-operátor az egydimenziós esetben kétszeres deriváltat jelent, a törtrendű diffúzió kézenfekvő modellje lehet a törtrendű deriváltat tartalmazó parciális differenciálegyenlet. Ezen operátorokra több, egymással nem egyenértékű definíció is született [7] (már Leibniz foglalkozott ezzel); példaként az alábbi $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ esetén olyan $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényekre értelmezzük, amelyekre minden $x \in (a, b)$ esetén a megadott hozzárendelés értelmes, továbbá $n = \lceil \alpha \rceil$.

– A *Riemann–Liouville-derivált*, valamint szimmetrizált verziója:

$$\begin{aligned} \partial_{\text{RL}}^\alpha f(x) &= \partial^n \left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) \, d\tau \right), \\ {}_s\partial_{\text{RL}}^\alpha f(x) &= \frac{1}{2\Gamma(n-\alpha)} \\ &\partial^n \left(\int_a^x (x-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) \, d\tau + (-1)^n \int_x^b (\tau-x)^{n-\alpha-1} f(\tau) \, d\tau \right). \end{aligned}$$

Érdekes feladat belátni, hogy ez egész n esetén azonos a klasszikus deriválttal.

Egy korlátos tartományon adott feladat esetén valamilyen peremfeltételt is meg kell adnunk. A funkcionálanalízis szemszögéből nézve egy differenciáloperátort úgy kell definiálni, hogy rögzítjük annak értelmezési tartományát.

Az $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos Lipschitz-tartományon (amelynek pereme lokálisan egy Lipschitz-függvény grafikonja) homogén Dirichlet-peremfeltétellel definiált $-\Delta_{\mathcal{D}}$ negatív Laplace-operátor értelmezési tartománya a $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ halmaz. Ismert, hogy ennek inverze kompakt, önadjungált és pozitív $(-\Delta_{\mathcal{D}})^{-1} : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ típusú operátorként értelmezhető, amelynek (és így az eredeti $-\Delta_{\mathcal{D}}$ operátornak is) egyértelműen definiálható bármilyen hatványa. Ezek alapján az α -rendű deriváltra egy újabb definíciót adunk.

– A homogén peremfeltételhez tartozó *törtrendű Laplace-operátor*:

$$(\Delta_{\mathcal{D}})^{\frac{\alpha}{2}} f(x) := -(-\Delta_{\mathcal{D}})^{\frac{\alpha}{2}} f(x).$$

A fentieknek megfelelően az ezen témával foglalkozó cikkek nagy részében az egydimenziós esetet elemezve az alábbi feladat numerikus megoldásával foglalkoznak.

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) = {}_s\partial_{x, \text{RL}}^\alpha u(t, x) + g(t, x), & (t, x) \in (0, T) \times (a, b) \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in [a, b] \\ u(t, a) = u_a(t), u(t, b) = u_b(t), & t \in [0, T], \end{cases} \quad (1)$$

ahol $u_0 \in C[a, b]$, $u_a, u_b \in C[0, T]$ és $g \in C([0, T] \times [a, b])$ adott függvények.

Homogén Dirichlet-peremfeltétel esetén pedig adott $u_0 \in C[a, b]$ függvény esetén a következő egyszerű feladatot írjuk fel:

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) = (\Delta_{x, \mathcal{D}})^{\frac{\alpha}{2}} u(t, x), & (t, x) \in (0, T) \times (a, b) \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in [a, b]. \end{cases} \quad (2)$$

3. A modellek vizsgálata

Fontos kérdés, hogy a fenti problémák korrekt kitűzésűek-e. Bár az első modell esetén ezt az állítást tudomásunk szerint nem írták le expliciten, a [6] munkában a jobb oldalon levő operátorra vonatkozó peremérték-feladat egyértelmű megoldhatóságából következik. A második modell esetén $(-\Delta_{\mathcal{D}})^{-1}$ kompaktsága, valamint a [11] könyv 8. fejezetének elmélete ad igenlő választ.

Nem definiáltuk, mit értünk jó, vagy éppen nem jó modellen. Ennek ellenére azt mondhatjuk, hogy az első modellel kapcsolatban több fenntartásunk is lehet. Már is látszik, hogy nincs nyilvánvaló többdimenziós általánosítása, továbbá nem sikerült a maximumelvet sem igazolni, ellentétben a második modellel [10], amely ebből a két szempontból megfelelőbbnek látszik.

Áttekintjük a különböző modellekhez tartozó numerikus módszereket. Az első hatékony eljárást a [12] munkában közzétették, amelynek alap gondolata, hogy el kell tolni a véges differenciában szereplő együtthatókat valamilyen $p \in \mathbb{Z}^+$ paraméterrel:

$$\partial_{\text{RL}}^{\alpha} f(x) \approx \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{\lceil \frac{x-a}{h} \rceil + p} \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(k+1)} f(x - (k-p)h). \quad (3)$$

Ha ugyanis ezt nem tesszük, akkor a térbeli differenciáloperátorok (egyébként pontos) közelítésének és az idő szerinti deriváltra vonatkozó implicit Euler-módszernak a kombinációjából is instabil módszert nyerünk.

A fentiek alapján az (1) és (2)-beli modellekhez használt numerikus módszerek leírásához használjuk az \mathbf{u}^t jelölést, amely $u(t, \cdot)$ közelítése akár egy felosztás pontjaiban, akár egy végeelem térben. Mindkét feladat térbeli diszkretizációja után a $\partial_t \mathbf{u}^t = A_h \mathbf{u}^t$ differenciálegyenletet kapjuk, ahol

- az (1)-beli feladat esetén az A_h mátrixban (3)-beli együtthatók szerepelnek,
- a (2) feladat térbeli diszkretizációja után a fenti A_h mátrixnak egyszerűen választhatjuk a $\Delta_{\mathcal{D}}$ -hez tartozó mátrix $\frac{\alpha}{2}$ -edik hatványát.

Mindkét esetben telt (azaz nem ritka) mátrixot kapunk, amely a nem lokális tulajdonságnak felel meg. A kapott differenciálegyenlet-rendszereket a szokásos közelítő módszerekkel oldhatjuk meg. Az első eset analíziséhez a [12] és [17], a másodikéhoz a [14] és [15] munkákat idézzük.

4. További kérdések, nyitott problémák

Az első problémakör az inhomogén Dirichlet-peremfeltételhez kapcsolódik. Hogyan lehet ezt modellezni, egy ennek megfelelő matematikai feladatot felírni? A kérdés igazán két- és háromdimenziós esetben érdekes. A funkcionálanalízis eszközeivel sem látszik nyilvánvalónak a megoldás, hiszen az inhomogén peremfeltételnek megfelelő értelmezési tartományt véve az nem lesz altér. Ha pedig nem veszünk semmilyen megszorítást, akkor az így kapott Laplace-operátor nem is pozitív, az inverze pedig nem is létezik.

A második problémakör a Neumann-féle peremfeltétel beépítésével kapcsolatos. A gyakorlatban ezt lehet leggyakrabban használni, mert ez a peremen mért fluxusnak felel meg. Ha például zárt térben (kémcső, lombik, tartály) végbemenő anyagtranszportot modellezünk, akkor annak határán mindig homogén Neumann-féle peremfeltételt kell vennünk. Az egydimenziós esetben sikerült a homogén feltételt a modellbe beépíteni [13], azonban a többdimenziós eset és az inhomogén peremfeltételek kezelése továbbra is nyitott kérdés. Megjegyezzük, hogy még a megfelelő elliptikus feladatok esetén is a legfrisebb elméleti eredmények homogén Dirichlet-peremfeltételekre vonatkoznak [2].

Köszönetnyilvánítás

A szerzők köszönetet mondanak kutatásuk támogatásáért, amely jórészt a K112157. sz. OTKA-projekt keretében történt. Szekeres Béla János munkáját az Európai Unió is támogatta, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával az EFOP-3.6.1.-16-2016-0023. pályázat keretében.

Hivatkozások

- [1] BROCKMANN, D., HUFNAGEL, L., AND GIESEL, T.: *The scaling laws for human travel*, Nature, Vol. **439**, pp. 462-465 (2006), DOI: [10.1038/nature04292](https://doi.org/10.1038/nature04292)
- [2] CAFFARELLI, L. A. AND STINGA, P. R.: *Fractional elliptic equations, Caccioppoli estimates and regularity*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, Vol. **33** No. **3** pp. 767-807 (2016), DOI: [10.1016/j.anihpc.2015.01.004](https://doi.org/10.1016/j.anihpc.2015.01.004)
- [3] D'ELIA, M. AND GUNZBURGER, M.: *The fractional Laplacian operator on bounded domains as a special case of the nonlocal diffusion operator*, Comput. Math. Appl., Vol. **66** No. **7**, pp. 1245-1260 (2013), DOI: [10.1016/j.camwa.2013.07.022](https://doi.org/10.1016/j.camwa.2013.07.022)
- [4] DU, Q., GUNZBURGER, M., LEHOUCQ, R., AND ZHOU, K.: *Analysis and approximation of nonlocal diffusion problems with volume constraints*, SIAM Rev., Vol. **54** No. **4**, pp. 667-696 (2012), DOI: [10.1137/110833294](https://doi.org/10.1137/110833294)
- [5] EDWARDS, A. M., PHILLIPS, R. A., WATKINS, N. W., FREEMAN, M. P., MURPHY, E. J., AFANASYEV, V., BULDYREV, S. V., DA LUZ, M. G. E., RAPOSO, E. P., STANLEY, H. E., AND VISWANATHAN, G. M.: *Revisiting Lévy flight search patterns of wandering albatrosses, bumblebees and deer*, Nature, Vol. **449**, pp. 1044-1048 (2007), DOI: [10.1038/nature06199](https://doi.org/10.1038/nature06199)

- [6] ERVIN, V. J. AND ROOP, J. P.: *Variational formulation for the stationary fractional advection dispersion equation*, Numer. Meth. Part. D. E., Vol. **22** No. **3**, pp. 558-576 (2006), DOI: [10.1002/num.20112](https://doi.org/10.1002/num.20112)
- [7] HILFER, R.: *Threefold Introduction to Fractional Derivatives*, in: KLAGES, R., RADONS, G., AND SOKOLOV, I. (Hg.), *Anomalous Transport: Foundations and Applications*, pp. 17-73, Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim (2008). DOI: [10.1002/9783527622979.ch2](https://doi.org/10.1002/9783527622979.ch2)
- [8] HÖFLING, F. AND FRANOSCH, T.: *Anomalous transport in the crowded world of biological cells*, Rep. Prog. Phys., Vol. **76** No. **4**:046602 (2013). DOI: [10.1088/0034-4885/76/4/046602](https://doi.org/10.1088/0034-4885/76/4/046602)
- [9] HUMPHRIES, N. E.: *Environmental context explains Lévy and Brownian movement patterns of marine predators*, Nature, pp. 1066-1069, DOI: [10.1038/nature09116](https://doi.org/10.1038/nature09116)
- [10] JIA, J. AND LI, K.: *Maximum principles for a time-space fractional diffusion equation*, Appl. Math. Lett., Vol. **62**, pp. 23-28 (2016), DOI: [10.1016/j.aml.2016.06.010](https://doi.org/10.1016/j.aml.2016.06.010)
- [11] LARSSON, S. AND THOMÉE, V.: *Partial differential equations with numerical methods*, Vol. **45** von *Texts in Applied Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin (2009), paperback reprint of the 2003 edition. DOI: [10.1007/978-3-540-88706-5](https://doi.org/10.1007/978-3-540-88706-5)
- [12] MEERSCHAERT, M. M. AND TADJERAN, C.: *Finite difference approximations for fractional advection-dispersion flow equations*, J. Comput. Appl. Math., Vol. **172** No. **1**, pp. 65-77 (2004). DOI: [10.1016/j.cam.2004.01.033](https://doi.org/10.1016/j.cam.2004.01.033)
- [13] SZEKERES, B. J. AND IZSÁK, F.: *A finite difference method for fractional diffusion equations with Neumann boundary conditions*, Open Math., Vol. **13**, pp. 581-600 (2015), DOI: [10.1515/math-2015-0056](https://doi.org/10.1515/math-2015-0056)
- [14] SZEKERES, B. J. AND IZSÁK, F.: *Finite difference approximation of space-fractional diffusion problems: the matrix transformation method*, submitted.
- [15] SZEKERES, B. J. AND IZSÁK, F.: *Finite element approximation of fractional order elliptic boundary value problems*, J. Comput. Appl. Math., Vol. **292**, pp. 553-561 (2016), DOI: [10.1016/j.cam.2015.07.026](https://doi.org/10.1016/j.cam.2015.07.026)
- [16] TREUMANN, R. A.: *Theory of super-diffusion for the magnetopause*, Geophys. Res. Lett., Vol. **24** No. **14**, pp. 1727-1730 (1997), DOI: [10.1029/97GL01760](https://doi.org/10.1029/97GL01760)
- [17] ZHOU, H., TIAN, W.-Y., AND DENG, W.: *Quasi-compact finite difference schemes for space fractional diffusion equations*, J. Sci. Comput., Vol. **56** No. **1**, (2013), DOI: [10.1007/s10915-012-9661-0](https://doi.org/10.1007/s10915-012-9661-0)



Izsák Ferenc 1976-ban Zalaegerszezen született. Az ELTE TTK-n szerzett matematikus-német szakfordító diplomát 2000-ben, majd ugyanott az Alkalmazott Matematika Doktori Program keretében 2005-ben PhD-fokozatot. 2008-ban Farkas Gyula-díjat kapott, majd 2015-ben habilitált az ELTE TTK-n. Ezen intézmény oktatója most is, 2004-2009-ig tanársegédként, jelenleg adjunktusként. Közben részmunkaidőben a University of Twente kutatási asszisztense, majd az MTA-ELTE NumNet Kutatócsoport tagja. Jelenlegi fő kutatási területe a parciális differenciálegyenletek numerikus megoldásának

analízise és az ezekkel kapcsolatos modellezés kérdései. Összesen 36 referált tudományos cikk, 1 könyvrészlet és 3 felsőoktatási jegyzet szerzője vagy társszerzője, amelyekre 256 független hivatkozás történt.

IZSÁK FERENC

ELTE TTK Matematikai Intézet
Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék
& MTA Numerikus Analízis és Nagy Hálózatok Kutatócsoport
1117 Budapest, Pázmány P. sétány 1/C.
izsakf@cs.elte.hu



Szekeres Béla János 1987-ben született. 2012-ben diplomázott az ELTE Alkalmazott matematikus MSc szakán. 2017-ben szerzett PhD fokozatot az ELTE TTK Matematika Doktori Iskola, Alkalmazott Matematika Programjában.

Dolgozott az MTA-ELTE Numerikus Analízis és Nagy Hálózatok Kutatócsoportjában, illetve az ELTE Kémia Intézetében tudományos segédmunkatársként.

Kutatási területe a törtrendű parciális differenciálegyenletek numerikus megoldása, ezenkívül a Kémia Intézet munkatársaként több projektben vett részt, jelenleg is foglalkozik kvantumkémiai szimulációkkal. Azt MTMT rendszere szerint 10 közleménye van.

Több konferencián és külföldi intézményben tartott előadást, például Szegeden (CSM3, 2014), a Károly Egyetemen Prágában (13th EFEF, 2015), Tátra-Podbanszkon, (ALGORITMY 2016), Bonnban (13th EFEF, 2016), illetve Budapesten (3rd AMOC 2018 Conference).

Jelenleg az ELTE Informatika Karának Numerikus Analízis Tanszékén dolgozik adjunktusként.

SZEKERES BÉLA JÁNOS

ELTE IK, Numerikus Analízis Tanszék
1117 Budapest, Pázmány P. sétány 1/C.
szekeres@inf.elte.hu

MODELING AND SIMULATION OF FRACTIONAL DIFFUSION

FERENC IZSÁK, BÉLA JÁNOS SZEKERES

A short overview is given on the models of the fractional order diffusion and some numerical methods for the related problems is discussed. We mention more applications and important open problems in this field.

Keywords: fractional order diffusion, fractional Laplacian, matrix transformation methods.

Mathematics Subject Classification (2000): 35R11, 65M06, 65M12.

EPILEPSZIÁS AGYI HÁLÓZATOK EGYSEJT-AKTIVITÁSÁNAK JELLEMZÉSE HAWKES-FOLYAMATOK SEGÍTSÉGÉVEL

PERCZEL GYÖRGY, ERŐSS LORÁND, FABÓ DÁNIEL, GERENCSÉR LÁSZLÓ, HAJNAL
BOGLÁRKA, SZABÓ CSILLA, VÁGÓ ZSUZSANNA, WITTNER LÚCIA

Az epilepszia az egyik leggyakoribb idegrendszeri megbetegedés, mely mintegy 50 millió embert érint világszerte. A betegek életminőségének javítására egy ígéretes, fejlesztés alatt álló technológia az ún. zárt hurkú neurostimulátorok alkalmazása, melyek révén a rohamok kifejlődése jó eséllyel megakadályozható. Az ilyen típusú eszközökben kritikus tényező a rohamok előrejelzése agyi elektromos jelek alapján. Az idegsejtek tüzelési mintázatainak modellezéséhez a pontfolyamatok elmélete által felkínált keretrendszert, ezen belül a Hawkes-folyamatok elméletét alkalmazzuk. Jelen dolgozatban valós idegsejtek tüzelési mintázatait elemezzük, Ozaki – exponenciális válszfüggvényel leírható Hawkes-folyamat esetére kidolgozott – maximum likelihood (ML) módszerének implementálásával és kiterjesztésével.

1. Bevezetés

1.1. Az epilepszia rövid ismertetése

Az epilepszia előfordulási gyakorisága 0,5-1%, mellyel ez az egyik leggyakoribb idegrendszeri megbetegedés. A betegség legfőbb jellegzetességei a visszatérő rohamok, melyek az egyes izomcsoportok körülírt rángásaitól az átmeneti eszméletvesztésen keresztül a legismertebb tónusos-klónusos nagyrohamokig változatos formákban jelentkezhetnek. A gyógyszeres és sebészeti kezelési lehetőségek ellenére a betegek körülbelül 30%-ánál nem érhető el megfelelő rohamkontroll.

A rohamok váratlansága olyannyira befolyásolja a betegek jóllétét, hogy önmagában a rohamszám *csökkenése* kevésbé javítja az életminőségüket – még ritkán jelentkező rosszulletek esetén is az ezektől való félelem szervezi az életüket [12]. Épp emiatt általánosan elfogadott az a feltételezés, hogy egy rohamokat előrejelző rendszer nagyban hozzájárulna az életminőség javulásához, arról nem is beszélve, hogy egy elektromos stimulátor vagy gyógyszeradagoló pumpa hozzákapcsolása révén akár a rohamok kifejlődését is megakadályozhatná [4].

1.2. Zárt hurkú neurostimulátorok az epileptológiában

Az epilepsziás rohamok előrejelzésére számos módszert javasoltak a szakirodalomban, ld. [4]. Ezek tipikusan az agyi elektromos jelek (EEG, electrocorticogram vagy ECoG) elemzésén alapulnak. Fokálisan (egyetlen körülírt agyterületről) induló rohamok esetén feltételezhető, hogy a rohamok idegrendszeri események kaskádjaként fejlődnek ki, ezért – bár a kezdetüket megelőző specifikus jellemzőről nincs tudomásunk – elvileg előrejelezhetők. Ugyan az elmúlt években megfogalmazott statisztikai követelményeket (above chance) néhány módszer teljesítette, a klinikai alkalmazhatóság számára ennél szigorúbb kritériumokra lehet szükség.

Napjainkban egyetlen sebészileg beültethető, zárt hurkú eszköz található a piacon, a Responsive Neurostimulation (RNS, NeuroPace, Mountain View, CA, USA). Ez „mindössze” detektálja, és nem prediktálja a rohamokat, majd stimulálja a roham indulásáért felelős agyterületet. Ezzel szemben a Seizure Advisory System (NeuroVista, Seattle, WA, USA) valódi rohampredikciót céloz meg, de ez a készülék egyelőre nem került kereskedelmi forgalomba [4].

Mivel az eddig megjelent rohampredikciós eszközök döntően a helyi mezőpotenciálok (local field potential, LFP) elemzésén alapulnak, felmerül a kérdés, hogy vajon egyéb, szintén az agyi elektromos aktivitásból származtatható jelek, így az egy-, és soksejt-aktivitás használható-e a rohamok előrejelzésére. A következőkben röviden ismertetjük ezeket és az epilepszia szempontjából releváns jellemzőiket.

1.3. Egysejt-aktivitás az epilepsziában

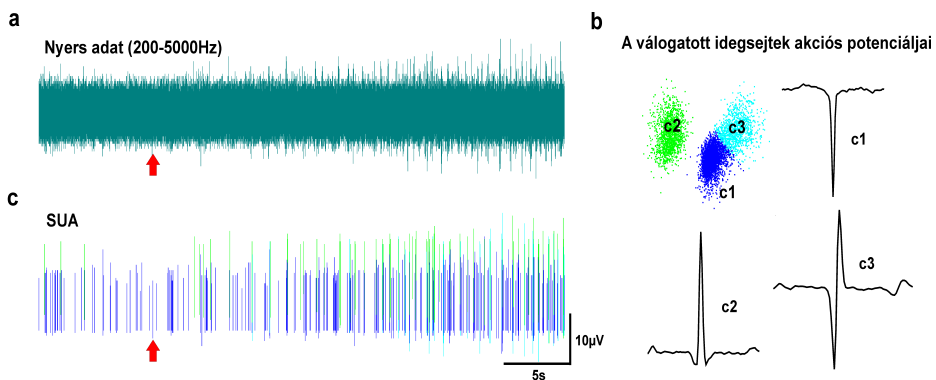
Mivel az idegsejtek egymás között akciós potenciálok (AP) révén kommunikálnak, az egyes sejtek által létrehozott AP-sorozatok alapvető fontosságúak az ideghálózatok működésének megértésében. A sejten kívül regisztrált elektromos jelekből, 200-500Hz feletti felüáteresztő szűrő alkalmazása révén olyan idősorozatokat nyerhetünk, melyek elsősorban a regisztráló elektród közvetlen környezetében található sejtek akciós potenciáljait tartalmazzák (populációs sejtaktivitás, multi-unit activity, MUA). További feldolgozás (spike-sorting) révén ezek az akciós potenciálok, tüzelési mintázatok lényegében egyes sejtekhez rendelhetőek (egysejt-aktivitás, single-unit activity, SUA).

Az epilepsziás rohamok neuronális eredetének egy korai állatkísérletes bizonyítéka a sejtek tüzelési mintázatainak rohaminduláskor megfigyelt változása volt. Egy kurrens, humán mérési eredményeken alapuló elmélet szerint az epilepsziás roham tér-időbeli terjedése két állapottal jellemezhető. A túlserkentett, ún. „iktális core” területen a sejtaktivitás jelentősen megemelkedik, hiperszinkronitást mutat, és a neuronok egymástól elkülönült akciós potenciálok helyett sorozatokban, ún. burst-üzemmódban kezdenek tüzelni. A környező gátolt ún. „iktális penumbra”-ban jóval heterogénebb marad a sejtek tüzelési mintázata [9].

Az általunk mért jellemző sejtaktivitás változást az 1. ábra mutatja be. Ezen az agykéreg egy körülírt területéről induló epilepsziás roham elektromos mintá-

zata látható, a piros nyíl a roham kezdetének időpontját jelöli. Az agykéregbe idegsejtek tüzelésének detektálásra is alkalmas ún. intrakortikális rétegelektroda lett beültetve. Az innen nyert adatsort az (a) ábrarészlet mutatja. A detektált AP-ok morfológiája alapján végzett spike-sorting a (b) ábrarészleten látható. Így a c1, c2, c3 jelölésű idegsejtek aktivitását egyedileg vizsgálhatjuk, ld. (c) ábrarészlet.

A válogatott sejtek aktivitását bemutató ábrarészleten jól látszik, hogy míg egyes neuronok a rohamindulástól függetlenül folyamatosan, „nyugalmi” állapotban is aktívak (c1, sötétkék), addig mások a roham kezdetét követően aktiválódnak (c3, világoskék), vagy azt követően fokozódik az aktivitásuk (c2, zöld).



1. ábra. Epilepsziás roham indulásakor mért sejtaktivitás.

2. Hawkes-folyamatok az egysejt-aktivitás modellezésére

Az akciós potenciálok időpontjai által definiált idősort egy ún. pontfolyamattal modellezzük. Matematikailag ez véletlen események T_n időpontjainak szigorúan növekedő, $0 = T_0 < T_1 < T_2 \dots$ sorozata, amelynek nincs torlódási pontja. A matematikai kezelhetőség szempontjából hasznos megengednünk kétoldali, (T_n) , $-\infty < n < \infty$ folyamatokat is, amelyek értéktartománya $(-\infty, +\infty)$. A témakör kitűnő bevezetését adja [1].

Egy pontfolyamat alternatív leírását adja a számláló folyamat, amelyet egy $(a, b]$ intervallumra az $N(a, b) = \#\{n : a < T_n \leq b\}$ egyenlőséggel definiálunk. Egy pontfolyamat t idő előtti történelmét az

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{N(a, b) : a < b \leq t\}$$

σ -algebra definiálja.

Egy $(f_t) \geq 0, t \geq 0$, ún. jósolható függvény $N(\cdot)$ pontfolyamat szerinti integrálját az

$$\int_0^\infty f_t dN_t = \sum_{n \geq 0} f(T_n)$$

egyenlőséggel definiáljuk. (A jósolhatóság heurisztikus jelentése: f_t előáll, mint \mathcal{F}_t -adaptált, balról folytonos folyamatok limesze.) Megmutatható, hogy az $N(\cdot)$ pontfolyamathoz létezik egy akár jósolhatónak is választható ún. intenzitásfüggvény, amely eleget tesz az alábbi azonosságnak:

$$E \left(\int_0^\infty f_t dN_t \right) = E \left(\int_0^\infty f_t \lambda_t dt \right).$$

Az idegtudományokban kitüntetett szerepe van az ún. öngerjesztő (self-exciting vagy mutually exciting) pontfolyamatoknak, vagy ún. Hawkes-folyamatoknak, ld. [7], továbbá [1], [2], [6] és [5], amelyek az egymással hálózatba kapcsolt idegsejtek akciós potenciáljait modellezzik. Egy kétoldalú, többváltozós $(T_{i,n}), i = 1, \dots, k$, pontfolyamat Hawkes-folyamat, ha az $N_i(\cdot)$ számlálómértéke eltolásinvariáns, és a $\lambda_{i,t}$ intenzitásfüggvénye eleget tesz egy

$$\lambda_{i,t} = \mu_i + \sum_{j=1}^k \int_{-\infty}^t g_{ij}(t-s) dN_{j,s}, \quad \mu_i > 0, g_{ij}(u) \geq 0$$

egyenletrendszernek. Itt μ_i a háttérintenzitásokat jelöli, $g_{ij}(u)$ pedig nemnegatív impulzusválasz-függvényeket (IRF) jelöl. Egyetlen idegsejt tüzelési mintázatának (egysejt aktivitás) modellezésére az egydimenziós Hawkes-folyamatot alkalmazzuk, amelyet implicit módon az alábbi zártkörű rendszer definiál:

$$\lambda_t = \mu + \int_{-\infty}^t g(t-s) dN_s, \quad \mu > 0, g(u) \geq 0. \tag{1}$$

Az (1) egyenlet mindkét oldalának várható értékét véve, a $\bar{\lambda} = E\lambda_t$ jelöléssel $\bar{\lambda} = \mu + c\bar{\lambda}$ egyenletet kapjuk, amelyből a szóbanforgó Hawkes-folyamat létezésének alábbi szükséges (és egyben elégséges, ld. [10]) feltételét kapjuk:

$$c = \int_0^\infty g(t) dt < 1. \tag{2}$$

A Hawkes-folyamatok idegtudományi alkalmazásának, ezen belül az egysejt-aktivitás modellezésének többek között az a megfontolás az alapja, hogy a neuronok burst-üzemmódja egyfajta feedback-hatásra utal. Jelen vizsgáldásunk célja, hogy egyváltozós Hawkes-folyamatok segítségével létrehozunk egy, az idegsejtek tüzelését jól leíró, de egyszerű modellt, és azt statisztikailag értelmezzük. Ilyen

eszközök birtokában várható annak feltérképezése, hogy bizonyos agyi történések – nevezetesen epilepsziás rohamok során – milyen utat járnak be az egyes tüzelési mintázatok paraméterei a paramétertérben. Az ML-beccsléssel (ld. [11]) kapott paraméterekhez tartozó konfidenciaellipszoidok támpontot adhatnak a betegség szempontjából lényeges, különböző agyi állapotok detektálására, ld. [2, 6].

3. Hawkes-folyamatok illesztése

Hawkes-folyamatoknak valós, SUA-adatokhoz történő illesztése céljából tekintjük Hawkes-folyamatok egy paraméteres osztályát, ld. [11]:

$$g(u) = \sigma \cdot e^{au}, u \geq 0, \quad \text{ahol } \sigma > 0, a < 0.$$

Ebben az esetben a (2) stabilitási kritérium azt jelenti, hogy $-\sigma/a < 1$, vagy ekvivalens módon $\alpha := a + \sigma < 0$. Az így definiált α a stabilitásnak egyfajta mértéke (stability margin). Legyen $\eta = (\mu, a, \sigma)$, és tegyük fel, hogy az adatainkat ténylegesen egy Hawkes-folyamat definiálja, amelynek valódi paramétere η^* . Az η^* becsléséhez vegyünk egy tetszőleges megengedett η paramétert, amely tehát kielégíti az $a + \sigma < 0 < \mu$ feltételt, és definiáljunk egy $\lambda_t(\eta)$ intenzitásfüggvényt a

$$\lambda_t(\eta) = \mu + \int_0^t g(t-s, \eta) dN_s = \mu + \int_0^t \sigma \cdot e^{a(t-s)} dN_s \quad (3)$$

egyenlettel. Vegyük észre, hogy ha feltesszük, hogy a valódi pontfolyamatban a 0 időpont előtt nincs esemény, azaz $dN_t = 0$, ha $t \leq 0$, akkor ezen feltétel mellett $\lambda_t(\theta) = \lambda_t(\theta^*)$ minden $t \geq 0$ -ra. A (feltételes) log-likelihood függvény kiszámításának alapja az a matematikailag pontosan megalapozható heurisztika, hogy minimális feltételek mellett egy pontfolyamat lokálisan olyan, mint egy Poisson-folyamat, ld. [1]. Ez alapján kapjuk, ld. [11], ill. [3], hogy a negatív log-likelihood a $[0, T]$ intervallumon, konstanstól eltekintve,

$$L_T(\eta) = \int_0^T \lambda_t(\eta) dt - \int_0^T \log \lambda_t(\eta) dN_t. \quad (4)$$

A $\lambda_t(\eta)$ függvény meghatározásához minden t értékre külön numerikusan ki kell számítani a (3)-beli integrált. Exponenciális válaszfüggvény esetén ez megkerülhető, ugyanis ha a (3) egyenlőségben μ -t átvisszük a baloldalra, majd pedig t szerint „differenciáljuk” az egyenletet, akkor a $T_{n-1} < t \leq T_n$ intervallumon – amelynek belsejében nincs esemény – a (balról folytonos) intenzitásfüggvényre az alábbi kapjuk:

$$\lambda_{T_{n-1}+} = \lambda_{T_{n-1}} + \sigma, \quad \lambda_t(\eta) - \mu = e^{a(t-T_{n-1})}(\lambda_{T_{n-1}+}(\eta) - \mu).$$

Ilymódon az ML-becsléshez szükséges $\lambda_t(\eta)$ függvény a fenti intervallumon explicit kiszámítható a $\lambda_{T_{n-1}}(\eta)$ kezdeti érték ismeretében!

A Hawkes-folyamat természetes, fizikailag értelmezhető jellemzői a stabilitási tőrészhatár és az átlagos intenzitás, így exponenciális válaszfüggvény esetén egy természetes alternatív paraméterezés: $\theta = (\alpha, \sigma, \bar{\lambda})$. A becslés aszimptotikus pontosságának mértékét 95%-os konfidenciaellipsoidokkal jellemezzük. A Fisher-mátrix általános paraméterezés mellett a (4) egyenlet alapján, az η helyett a θ paramétert használva – továbbá egy alkalmas nagy számok erős törvényének érvényességét feltételezve – az alábbi módon számítható:

$$I(\theta^*) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{0 < T_n \leq T} \frac{\lambda_{\theta T_n}(\theta^*) \cdot \lambda_{\theta T_n}^T(\theta^*)}{\lambda_{T_n}^2(\theta^*)},$$

ahol a θ alsó index θ szerinti parciális deriváltat jelöl.

4. Kísérleti eredmények

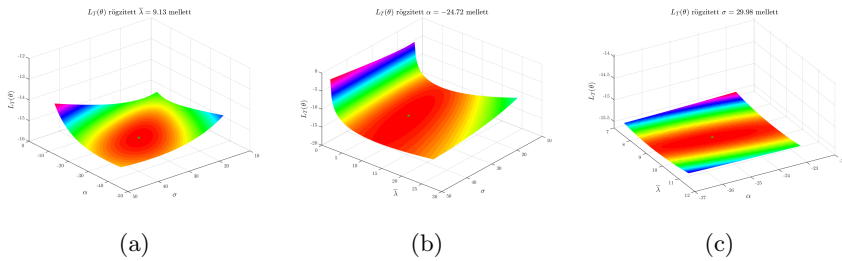
A fenti – MATLAB-környezetben implementált – illesztési módszer működésének vizsgálatához patkányhippokampusz-agyszeletekből származó mintegy 3 perces felvételek egysejt-aktivitását [8] használtuk fel. A kísérletesen megfigyelt 12 SUA-hoz rendelt paraméterhármassok megadják számunkra a paraméterter egy élettani szempontból releváns tartományát. Az 1. táblázatban referenciapéldaként két SUA-hoz tartozó becslült $(\alpha, \sigma, \bar{\lambda})$ Hawkes-paramétereket tüntettük fel, ahol n a tüzelések számát jelöli.

SUA	n	α	σ	$\bar{\lambda}$
3	1639	-24,72	29,98	9,13
5	609	-88,78	24,22	3,39

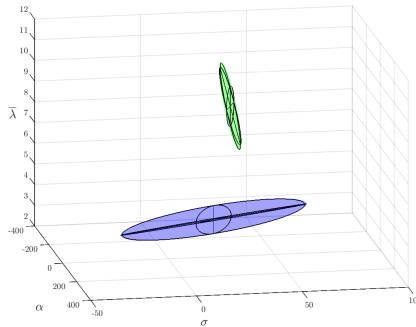
1. táblázat. Két kísérletes SUA Hawkes-paraméterei.

Az első referenciapélda adataihoz tartozó $L_T(\theta)$ költségfüggvényt (negatív log-likelihood függvényt), pontosabban annak metszeteit a 2. ábrán mutatjuk be, a metszeteket a becslült $\hat{\theta}_T$ egy-egy koordinátájának rögzítése mellett véve.

Összevetve az egyes SUA-khoz tartozó konfidenciaellipsoidokat, ld. 3. ábra, ill. azok térfogatait, empirikusan is megerősítést nyert az a tény, hogy kis mintaelemszám, és ebből adódó kis $\bar{\lambda}$ átlagos tüzelési gyakoriság esetén bizonytalanabb a becslés. Megjegyezzük, hogy a megfigyelt SUA-k tüzelési rátája 0,3 és 8,5 Hz között, a kísérleti adatokból becslült $\bar{\lambda}$ átlagos tüzelési gyakoriság pedig 0,36 és 12,88 között változott. Levonható tehát az a következtetés, hogy a tüzelés dinamikájának becslhetősége a feltételezetten rövid, roham előtti periódusban



2. ábra. Egy referenciapéldához tartozó $L_T(\theta)$ költségfüggvény metszetfüggvényei.



3. ábra. A referenciapéldák becslésének 95%-os konfidenciaellipszoidja.

lényegesen függ a vizsgált SUA-tól. A Hawkes-folyamatok fenti osztálya paramétereinek ML-becslését, annak numerikus és statisztikai tulajdonságait fiziológiásan releváns paraméterekkel szimulált adatokon (ld. [11]) teszteltük. A dolgozatban vázolt metodika alkalmazhatóságának végső kritériuma, hogy az epilepsziás rohamok szempontjából releváns agyi állapotokat képes-e elkülöníteni. Ennek eldöntése egy még folyamatban lévő kutatásunk tárgya.

Köszönetnyilvánítás

A kutatás az Ipar 4.0 kutatási és innovációs kiválósági központ, GINOP-2.3.2-15-2016-00002, az Innovatív informatikai és infokommunikációs megoldásokat megalapozó tematikus kutatási együttműködések, PPKE ITK EFOP-3.6.2-16-2017-00013, és az Integrált kutatói utánpótlás-képzési program az informatika és számítástudomány diszciplináris területein, 3.6.3-VEKOP-16-2017-00002 című és

számú pályázati projektek, valamint a Nemzeti Agykutatási Program 2.0 (NAP 2.0: 2017-1.2.1-NKP-2017-00002) támogatásával jött létre.

A dolgozat végén az első szerző PhD-kutatási munkájához közvetlen és folyamatos mentori tevékenységet ellátó társ szerzők életrajzának közlésére szorítkoznak.

Hivatkozások

- [1] BREMAUD, P.: *Point Processes and Queues: Martingale Dynamics*, Springer Verlag, New York (1981). DOI: [10.1002/bimj.4710300220](https://doi.org/10.1002/bimj.4710300220)
- [2] CHORNOBOY, E. S., SCHRAMM, L. P., AND KARR, A. F.: *Maximum likelihood identification of neural point process systems.*, Biological cybernetics, Vol. **59** No. **4-5**, pp. 265-75 (1988). DOI: [10.1007/BF00332915](https://doi.org/10.1007/BF00332915)
- [3] DALEY, D. J. AND VERE-JONES, D.: *An Introduction to the Theory of Point Processes*, Springer Science & Business Media (2013). DOI: [10.1007/b97277](https://doi.org/10.1007/b97277)
- [4] GADHOUMI, K., LINA, J.-M., MORMANN, F., AND GOTMAN, J.: *Seizure prediction for therapeutic devices: A review.*, Journal of neuroscience methods, Vol. **(029)**, pp. 1-13 (2015). DOI: [10.1016/j.jneumeth.2015.06.010](https://doi.org/10.1016/j.jneumeth.2015.06.010)
- [5] GERHARD, F., DEGER, M., AND TRUCCOLO, W.: *On the stability and dynamics of stochastic spiking neuron models: Nonlinear Hawkes process and point process GLMs*, Vol. **13** (2017), DOI: [10.1371/journal.pcbi.1005390](https://doi.org/10.1371/journal.pcbi.1005390)
- [6] HANSEN, N. R., REYNAUD-BOURET, P., AND RIVOIRARD, V.: *Lasso and probabilistic inequalities for multivariate point processes*, Bernoulli, Vol. **21** No. **1**, pp. 83-143 (2015). DOI: [10.3150/13-BEJ562](https://doi.org/10.3150/13-BEJ562)
- [7] HAWKES, A. G.: *Spectra of some self-exciting and mutually exciting point processes*, Biometrika, Vol. **58** No. **1**, pp. 83-90 (1971). DOI: [10.1093/biomet/58.1.83](https://doi.org/10.1093/biomet/58.1.83)
- [8] HOFER, K. T., KANDRÁCS, Á., ULBERT, I., PÁL, I., SZABÓ, C., HÉJA, L., AND WITTNER, L.: *The hippocampal CA3 region can generate two distinct types of sharp wave-ripple complexes, in vitro*, Hippocampus, Vol. **25** No. **2**, pp. 169-186 (2015), DOI: [10.1002/hipo.22361](https://doi.org/10.1002/hipo.22361)
- [9] MERRICKS, E. M., SMITH, E. H., MCKHANN, G. M., GOODMAN, R. R., BATEMAN, L. M., EMERSON, R. G., SCHEVON, C. A., AND TREVELYAN, A. J.: *Single unit action potentials in humans and the effect of seizure activity*, Brain, Vol. **138** No. **10**, pp. 2891-2906 (2015), DOI: [10.1093/brain/awv208](https://doi.org/10.1093/brain/awv208)
- [10] MØLLER, J. AND RASMUSSEN, J. G.: *Perfect simulation of Hawkes processes*, Advances in Applied Probability, Vol. **37** No. **3**, pp. 629-646 (2005). DOI: [10.1239/aap/1127483739](https://doi.org/10.1239/aap/1127483739)
- [11] OZAKI, T.: *Maximum likelihood estimation of Hawkes' self-exciting point processes*, Annals of the Institute of Statistical Mathematics, Vol. **31** No. **1**, pp. 145-155 (1979). DOI: [10.1007/BF02480272](https://doi.org/10.1007/BF02480272)
- [12] SCHULZE-BONHAGE, A. AND KÜHN, A.: *Unpredictability of Seizures and the Burden of Epilepsy*, in: *Seizure Prediction in Epilepsy: From Basic Mechanisms to Clinical Applications*, pp. 1-10 (2008). DOI: [10.1002/9783527625192.ch1](https://doi.org/10.1002/9783527625192.ch1)



Dr. Perczel György 1989-ben született Budapesten. 2015-ben summa cum laude minősítéssel diplomázott a Semmelweis Egyetem Általános Orvostudományi Karán. Még ugyanebben az évben Kvantitatív Modellezés és Informatikai Megalapozás oklevelet szerzett a Pázmány Péter Katolikus Egyetem Információs Technológiai és Bionikai Kara és a Semmelweis Egyetem közös képzése keretében. 2015-től a Pázmány Péter Katolikus Egyetem Roska Tamás Műszaki és Természettudományi Doktori Iskolájának hallgatója, 2018 óta az iskola doktorjelöltje. Kutatási területe Gerencsér

László DSc és Dr. Eröss Loránd PhD témavezetése mellett az extratemporalis epilepsziák biomarkereinek vizsgálata. Részt vesz a Nemzeti Agykutatási Programban (NAP 2.0) és tagja a Magyar Idegtudományi Társaságnak. 2019 januárjától az Országos Klinikai Idegtudományi Intézet idegsebész-rezidense.

PERCZEL GYÖRGY

Pázmány Péter Katolikus Egyetem
Információs Technológiai és Bionikai Kar
1083 Budapest, Práter utca 50/A
Országos Klinikai Idegtudományi Intézet
1145 Budapest, Amerikai út 57.
perczel.gyorgy.miklos@itk.ppke.hu



Dr. Eröss Loránd PhD neurológus, idegsebész, fájdalomterapeuta, főorvos az Országos Klinikai Idegtudományi Intézetben (OKITI). 1990-ben diplomázott a SOTE-n. 1995-ben neurológia, 2000-ben pedig idegsebészet szakvizsgát tett. 2010-ben szerzett egyetemi doktori fokozatot és 2019-ben habilitált a Semmelweis Egyetemen epilepsziasebészeti témában. Nemzetközi fájdalomterapeuta szakképesítéssel rendelkezik. Nevéhez fűződik egy új neuromodulációs műtéti módszer hazai honosítása, egy új epilepsziasebészeti kivizsgálást segítő implantációs metodika kidolgozása, a

robot asszisztált idegsebészeti módszerek bevezetése hazánkban és a Közép-Kelet Európai régióban, illetve számos e témával kapcsolatos tudományos publikáció. Szakterülete az epilepsziasebészet, a fájdalom-, a mozgászavarok- és a spaszticitás sebészeti kezelése, valamint ezen kórképek neuromodulációs kezelése és ennek fejlesztése, kutatása.

ERÖSS LORÁND

Országos Klinikai Idegtudományi Intézet
1145 Budapest, Amerikai út 57.
Pázmány Péter Katolikus Egyetem
Információs Technológiai és Bionikai Kar
1083 Budapest, Práter utca 50/A
l.g.eross@gmail.com



Dr. Fabó Dániel az Semmelweis Egyetem Általános Orvostudományi Karán végzett 2002-ben, ugyanitt szerzett idegtudományi PhD-fokozatot 2008-ban, majd 2011-ben neurológus szakvizsgát. Első munkahelye az OPNI Neurológiai Osztályán volt, aminek megszűnése után, 2007 óta az OKITI Neurológiai Osztályán dolgozik ideggyógyászként. Itt

folyamatosan tagja az epilepszia, illetve epilepszia-sebészeti munkacsoportnak, neurológiai szempontból bevezette az ANT-DBS neuromodulációs kezeléseket epilepsziában, illetve felépítette az intraoperatív neuromonitorozási szolgálatot. 2013 óta kutatócsoportot vezet neurofiziológiai kutatási területen. Kutatási érdeklődése az epilepsziás és alvási EEG oszcillációk, valamint az agyi elektromos és mágneses ingerlések diagnosztikus és terápiás hasznosítása.

FABÓ DÁNIEL

Országos Klinikai Idegtudományi Intézet
1145 Budapest, Amerikai út 57.
fabo.daniel@gmail.com



Gerencsér László egyetemi diplomáját az ELTE TTK matematikus szakán szerezte 1969-ben. 1970-től rövidebb-hosszabb megszakításokkal az MTA SZTAKI-ban dolgozik az operációkutatás, majd a rendszer- és irányításmélet témaköreiben. 1988 és 1991 között vendégprofesszor volt a kanadai McGill Egyetemen (Montreal, Quebec), 1997 és 2001 között pedig Széchenyi Professzori Ösztöndíjasként oktatott az ELTE TTK Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszékén. Itt matematikus szakon elsőként oktatott modern pénzügyi matematikát. Több éven át tanított a Pázmány

Péter Katolikus Egyetem Információs Technológiai és Bionikai Karán is. Témavezetése mellett 8 tanítványa szerzett PhD-fokozatot. Az MTA doktora címet 2000-ben kapta meg. Több cikluson át szerkesztőbizottsági tagja volt a SIAM Journal of Control and Optimization, ill. az IEEE Transactions on Automatic Control folyóiratok szerkesztőbizottságainak. Főbb kutatási területei: sztochasztikus rendszerek, változásdetektálás, pénzügyi idősorok, pontfolyamatok, gépi tanulás, elosztott számítási modellek.

GERENCSÉR LÁSZLÓ

MTA SZTAKI
1111 Budapest, Kende utca 13-17.
gerencser.laszlo@sztaki.mta.hu

HAJNAL BOGLÁRKA

Semmelweis Egyetem
1085 Budapest VIII. Üllői út 26.
Országos Klinikai Idegtudományi Intézet
1145 Budapest, Amerikai út 57.
haboglarka90@hotmail.com

SZABÓ CSILLA

Pázmány Péter Katolikus Egyetem
Információs Technológiai és Bionikai Kar
1083 Budapest, Práter utca 50/A

MTA Természettudományi Kutatóintézet
1117 Budapest, Magyar tudósok körútja 2.
szabo.csilla@itk.ppke.hu



Vágó Zsuzsa az ELTE TTK matematikus szakán végzett 1982-ben, majd ugyanitt szerzett matematikusi PhD-fokozatot 1996-ban. Első munkahelye a Csepel Vas és Fémművek Irányítás- és Számítástechnikai Intézete volt, majd a BME Gépészkar Matematika Tanszékén volt tanársegéd. 1992 és 2006 között az MTA SZTAKI Rendszer- és Irányításelméleti, ill. az Operációkutatás és Döntési Rendszerek Kutatólaboratóriumában dolgozott. 2000 óta a Pázmány Péter Katolikus Egyetem Információs Technológiai és Bionikai Karán dolgozik, ahol több

analízis tárgy oktatási anyagának kidolgozásával és oktatásával bízták meg, melyekhez egyetemi jegyzeteket is írt. Ezeket a tárgyakat azóta is folyamatosan oktatja, jelenleg egyetemi docensként. 2006 és 2015 között a kar tanulmányi dékánhelyettese volt. Kutatási érdeklődése a sztochasztikus rendszerek témaköréhez kötődik (identifikáció, véletlen keresés, pénzügyi idősorok, pontfolyamatok), ilyen témában társszerzője egy TÁMOP-jegyzetnek, és előadója több szabadon választható kurzusnak.

VÁGÓ ZSUZSANNA

Pázmány Péter Katolikus Egyetem
Információs Technológiai és Bionikai Kar
1083 Budapest, Práter utca 50/A
vago@itk.ppke.hu

WITTNER LÚCIA

Országos Klinikai Idegtudományi Intézet
1145 Budapest, Amerikai út 57.

MTA Természettudományi Kutatóintézet
1117 Budapest, Magyar tudósok körútja 2.
wittner.lucia@ttk.mta.hu

MODELING SINGLE-UNIT ACTIVITY OF EPILEPTIC BRAIN
NETWORKS USING HAWKES PROCESSES

GYÖRGY PERCZEL, LORÁND ERŐSS, DÁNIEL FABÓ, LÁSZLÓ GERENCSÉR,
BOGLÁRKA HAJNAL, CSILLA SZABÓ, ZSUZSANNA VÁGÓ, LÚCIA WITTNER

Epilepsy is one of the most common neurological disorder affecting around 50 million people worldwide. For approximately 30% of the patients satisfactory seizure control cannot be achieved with anti-epileptic drugs or surgical interventions. An alternative emerging technology is closed-loop neurostimulation that might prevent the evolution of full-blown seizures, assuming that reliable seizure forecasting is available. With the aid of state-of-the-art microelectrodes single neuron action potentials can be recorded in the living brain giving insight into cellular-level changes during the onset of seizures. The firing patterns of individual nerve cells are modeled via the theory of point processes. In particular, Hawkes processes with exponential response function are fitted using maximum likelihood estimation (MLE) to neuronal spike-trains from rat hippocampal slice preparations. The accuracy and discriminating power of the MLE method is verified using the associated confidence ellipsoids on a large variety of physiologically relevant simulated data.

Keywords: point processes, Hawkes processes, point estimation, maximum likelihood estimation, applications to biology and medical sciences.

Mathematics Subject Classification (2010): 60G55, 62P10, 62F10.

ÖSSZEKAPCSOLT, AXIÁLIS IRÁNYBAN MOZGÓ SZÁL HÁLÓZATOK MEREVSÉGÉNEK JELLEMZÉSE GRÁFOKKAL

NAGY KEM GYULA

Szálakat tartalmazó hálózatok kinematikai jellemzése hozzájárul bizonyos szerves és szervetlen struktúrák, mint a cellulóz nanoszálakat tartalmazó növényi szervek, vagy a kollagén szálakat, illetve ezek kötegeit tartalmazó csontok, különböző szálerősített kompozit anyagok tulajdonságainak mélyebb megértéséhez. E dolgozatban a szálakat olyan egyenes szakaszoknak tekintjük, amelyek csak a szakasz egyenese mentén mozdulhatnak el. A szálak összeköttetéseit rudakkal biztosítjuk, ezek a távolság kényszerek tovább korlátozzák a szálak elmozdulását. Eltekintve a szálak és a rudak alkotta hálózat merevtestszerű mozgásaitól a szálhálózat merevségi gráfjának tulajdonságaival jellemezzük a struktúra infinitezimális merevséget. Szükséges és elégséges feltételt adunk a rudakkal összekapcsolt szálak hálózatának merevségére.

1. Bevezetés

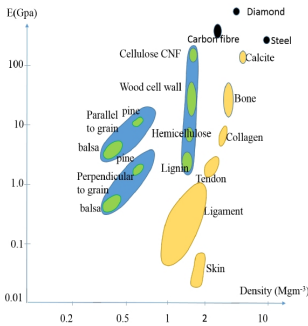
Szálakat tartalmazó hálózatok kutatása felgyorsult, amióta ismert, hogy ezek nagy szerepet játszanak az élő szervezetekben, szövetekben, ill. sejtekben a mechanikai jelek és azokra adott válaszok transzportjában. A szálakat tartalmazó biológiai vagy egyéb, szintén szálakkal merevített hálózatokban a többszörös kapcsolatok felelősek a teljes struktúra vagy egyes részeinek merevségéért [25], [24], [6], [10]. A biológiai szálakhoz kapcsolódó hatalmas irodalomból csak néhányat említünk meg: cellulóz nanoszálak [2], [20], [19]; kollagén szálak kötegei [4], [15]; a bogarak merev vázát alkotó kitin hálózatok [9]. A sejtjeinkben megtalálható aktin szálak, és az ezeket összekapcsoló fehérje szálak [13]; szintén a sejtekben található mikrotubulusok, és az ezeket összekapcsoló gyengébb fehérje szálak [1].

A fenti hierarchikus struktúrák maguk is többnyire szálak szerkezetűek: az alacsonyabb szinteken a szálak kötegekbe rendeződnek, és ezek a kötegek alkotnak vastagabb szálakat. E szálak és a közöttük levő összekapcsoló elemek esetében az a feltétel, hogy merev szakaszként tekintsük ezeket, erősnek tűnhet. Az említett szálak, illetve azok kötegei legtöbb esetben hasonló vagy jobb anyagtulajdonságokkal rendelkeznek, mind a megnyúlás, összenyomás, mind a hajlíthatóság tekintetében,

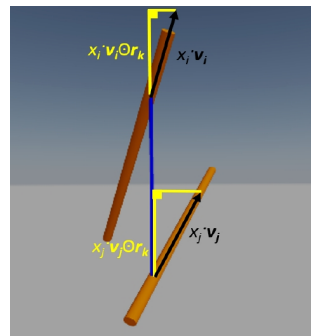
mint egy fenyőfából készített hurkapálca, ld. 1. (a) ábra. A kék (nagyobb, sötétebb) tartományok a növényi cellulóz szájakat tartalmazó struktúrákat jelenítik meg (pl. fás szárú növények), míg a sárga (nagyobb, világosabb) tartományok az állati, emberi kollagén szájakat tartalmazó szövetekhez, szervekhez tartoznak (pl. csontok, ín, bőr) a rugalmassági modulus-sűrűség koordinátarendszerben ábrázolva (mindkét skála logaritmikus). A kék (nagyobb, sötétebb) tartományon belüli legfelső zöld (világosabb) tartományban a cellulóz nanofibrillek CNF-rugalmassági modulusa meghaladja az acélét, ez szintén alátámasztja modellünk azon feltevését, hogy e szájakat tekintjük merev rudaknak. A szájakat összekötő rudak általában gyengébb anyagszerkezeti tulajdonságokkal rendelkeznek, mint maguk a szájak, e modellben azonban ezeket is rudaknak tekintjük.

2. Szálszerkezetek matematikai modelljei

A háromdimenziós térben elhelyezkedő szálak sűrű elrendezése és a köztük lévő viszkózus közeg miatt csak axiális irányban történő elmozdulásokat tekintünk. Tehát a lehetséges elmozdulások a szál irányvektorának, v_i -nek konstansszorosai lehetnek, $x_i \cdot v_i$, ahol \cdot a vektor skalárral történő szorzását jelöli, ezt az 1. (b) ábrán szemléltetjük a sötét nyilakkal. Minden szálnak van egy saját pályája tehát a térben, amely egy rögzített egyenes, ennek mentén a szál egyéb kényszerek hiányában tud mindkét irányban mozogni.



(a) Cellulóz, illetve kollagén szájakat tartalmazó anyagok növények, szervek, szövetek sűrűség-rugalmassági modulus grafikonja.



(b) Két szál lehetséges infinitezimális elmozdulása esetén az elmozdulás vektoroknak az összekötő rúdra (az ábrán függőleges) eső vetületei egyenlők, ha deformálhatatlan elemeket feltételezünk.

1. ábra. A valódi szájak lényeges fizikai tulajdonságai és a matematikai modell által feltételezett deformálhatatlanság szemléltetése.

2.1. Egyetlen rúddal összekötött két szál mozgásai

Amennyiben két szálat ideális (deformálhatatlan) rúd (amelyet szintén szakasz-
nak tekinthetünk) kapcsol össze úgy, hogy a rudat a szálhoz egy bármely irányú
elfordulást megengedő (gömb-) csukló kapcsolja, akkor a rúd merevségének követ-
keztében az egyes szálak elmozdulásvektorainak az összekötő rúd egyenesére eső
merőleges vetületei egyenlők kell legyenek.

Azért állítottuk a két szálat és az összekötő rúdjukat olyan helyzetbe az 1. (b)
ábrán, hogy valódi méretben lássuk a szálak elmozdulásvektorainak vetületeit az
összekötő rúdon. Ha térbelinek tekintjük az ábrát, akkor a rudak infinitezimális
elmozdulásának vektorai nem valódi méretükben látszanak, ha azonban síkbelinek
tekintjük az ábrát, akkor az infinitezimális elmozdulásvektorok valódi méretük-
ben és irányukban látszanak. Mindkét esetben igaz lesz a következő, ha a két
szál mindegyike a saját egyenesé mentén úgy mozdulna el, hogy az infinitezimális
elmozdulásvektoraik összekötő rúdjukra eső merőleges vetülete nem egyezne meg
irány és nagyság szerint is, akkor az összekötő rúd hossza megváltozna, ez azon-
ban ellentmond annak a feltételnek, hogy szálaink, rúdjaink és csuklóink ideálisak.
Tehát, ha az összekötő rúd végpontjai által meghatározott vektort r_k -val jelöljük,
az alábbi feltételt kapjuk:

$$x_i \cdot \vec{v}_i \odot \vec{r}_k = x_j \cdot \vec{v}_j \odot \vec{r}_k, \tag{1}$$

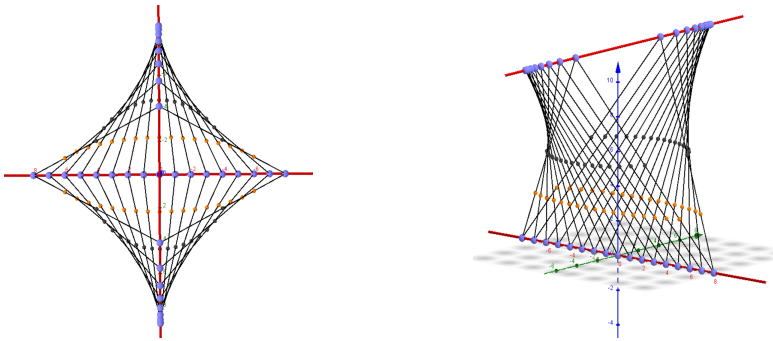
ahol a \odot jel a két vektor skaláris szorzatát jelenti. Ha bármely két szálat összekötő
rúd merőleges az egyik szálra, akkor a szálszerkezetet degeneráltként hívjuk.

Amennyiben a két szálat összekötő rúd merőleges valamelyik, de csak az egyik
szálra, akkor a másik szálnak nem lehetséges nullától különböző elmozdulása. Ha
mindketten merőlegesek a rúdra, akkor mindkét szálnak lehet nem nulla infinite-
zimális elmozdulása, hiszen ekkor x_i és x_j bármekkora lehet, mivel az (1) egyenlet
mindkét oldala nulla. Mivel olyan szerkezeteket keresünk, amelyek infinitezimá-
lis elmozdulásokkal sem rendelkeznek, ezért a fenti eseteket kizárjuk azzal, hogy
ezután nem degenerált szerkezeteket vizsgálunk. A későbbi merevségi tétel megér-
téséhez a következő rész nem szükséges, a lehetséges valós (nem az infinitezimális)
mozgások megértéséhez igen.

2.2. Egyetlen rúddal összekötött két szál valós mozgásai

A két szálat összekötő rúd mozgását szemléltetjük a 2. ábrán, mivel a szálak az
egyenesük mentén mozognak, így nehéz szemléltetni lehetséges helyzeteiket, job-
ban el tudjuk képzelni a teljes mozgást, ha a két szál összekötő rúdjának helyzeteit
mutatjuk meg. Adott, egyetlen rúddal összekapcsolt két szál (nem degenerált) ese-
tén az (1) egyenletnek végtelen sok megoldása lesz. Az ezekhez tartozó mozgó rúd
diszkrét helyzeteit szemlélteti a 2. ábra két különböző nézetben. Az összekötő
rúd (fekete ferde vonalak), felező és egyik negyedelő pontjának néhány lehetséges

helyzetét is jelöltük. A rúd felező pontja (fekete pontok) és egyik negyedelő pontja (narancssárga pontok) által leírt alakzat rendre kör (ha a szálak merőlegesek voltak), illetve ellipszis, amelyek valódi méreteikben látszanak a 2. (a) ábrán. Egy tetszőleges másik irányból vett vetületet (nézetet) látunk a 2. (b) ábrán. Ha az alsó szál és a kapcsolódó csuklója (kék pont) egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, tehát x_i lineárisan változik, akkor az összekötő rúd másik csuklójának helyzete, x_j rezgőmozgásszerűen változik, erre a megfelelő végpontok elhelyezkedéséből következtethetünk. Eközben az összekötő rúd bármely kijelölt fixpontja ellipszispályát ír le.



(a) Mindkét szállal párhuzamos síkra vonatkozó vetület (z tengely irányából nézve). (b) A rúd felező pontja és negyedelő pontjai által leírt kör, illetve ellipszis egy tetszőleges nézetben

2. ábra. Két szálat összekötő rúd lehetséges helyzetei, ill. a rúd végpontjai a megfelelő szálakon, és rendre egy körön és ellipszisen mozgó felezőpontja és negyedelő pontja.

A pályagörbék alakjának igazolása a szálak merőlegessége esetén, és a felezőpontra szorítkozva a KöMaL 2006-os áprilisi számának B. 3906. feladata megoldásaként olvasható [14]. A rúd egyéb fixpontjának, azaz az $a:b$ arányú osztópontjának pályája e feladat megoldásának segítségével hasonlóan meghatározható. A szálak (egyenesek) $a + b$ távolsága és az AB szakasz d hossza között fennáll, hogy $0 < a + b < d$. Ekkor vegyünk fel úgy egy derékszögű koordinátarendszert, hogy az A pontot tartalmazó egyenes pontjait az $y = 0, z = a$ síkok, a B pontot tartalmazó egyenes pontjait pedig az $x = 0, z = -b$ síkok egyenletei, mint egy-egy egyenletrendszer megoldásai adják. Így az AB szakasz $a : b$ arányú osztópontja az x, y síkban helyezkedik el, és egyenlete:

$$\frac{x^2}{b^2 \left(\frac{d^2}{(a+b)^2} - 1 \right)} + x \frac{x^2}{a^2 \left(\frac{d^2}{(a+b)^2} - 1 \right)} = 1. \tag{2}$$

Nem derékszögű szálak esetén a rúd felezőpontja ellipszist ír le, ahogy ezt a

(3) egyenlet mutatja, ahol a szálak távolsága $2d$, a rúd hossza $2l$, és a szálak által bezárt szög felének tangense c :

$$\frac{x^2}{c^2(l^2 - bd^2)} + \frac{x^2}{\frac{c^2}{l^2 - b^2} - 1} = 1. \tag{3}$$

A nem derékszögű szálak esetében a rúd egyéb pontjának pontos pályaleírásától eltekintünk, mivel az ellipszisek főtengelyeinek irányai az osztópontokhoz tartozó arány függvényében változnak, még inkább azért, mert e bevezetés az összekötő rúd teljes mozgását szemléltette, mi pedig infinitezimális elmozdulásokat vizsgálunk, így a fenti megállapításoknak a továbbiakban nem lesz szerepe. Azért vizsgáljuk az infinitezimális elmozdulásokat a merevség szempontjából, mert ezen elmozdulások hiányában szerkezeteink infinitezimálisan merevnek tekinthetők, valamint mert ha már ezeket az elmozdulásokat sem engedik meg a kényszerek, akkor természetesen valós mozgások sem lehetségesek.

2.3. Több rúddal összekötött szálak lehetséges mozgásai

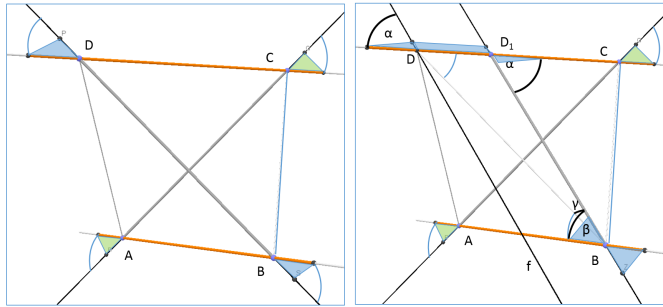
Ha legalább két rúd kapcsolja egymáshoz a szálakat (akár két szálnál többet is), akkor a lehetséges mozgásokat egy, az (1) egyenlethez hasonló egyenletekből álló egyenletrendszer megoldásai írják le. Ebben az x_i ismeretlenek az egyes szálak lehetséges (infinitezimális) elmozdulásai, az egyenletek pedig az egyes rudakhoz tartozó kényszereket fejeznek ki. Az egyes rudak végpontjai által meghatározott vektorokat \vec{r}_k -val jelölve egy 3 szálból és 3 rúdból álló rendszerhez tartozó egyenletrendszer a következő:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 \odot \vec{r}_1 \cdot x_1 - \vec{v}_2 \odot \vec{r}_1 \cdot x_2 &= 0 \\ \vec{v}_1 \odot \vec{r}_2 \cdot x_1 - \vec{v}_3 \odot \vec{r}_2 \cdot x_3 &= 0 \\ \vec{v}_2 \odot \vec{r}_3 \cdot x_2 - \vec{v}_3 \odot \vec{r}_3 \cdot x_3 &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

A fenti egyenletrendszer x_i megoldásai határozzák meg a szerkezet szálaihoz tartozó lehetséges $x_i \cdot \vec{v}_i$ elmozdulásvektorokat. A párhuzamos szálak esetét és a jelen cikkben tárgyalt általános esetet (nem ilyen részletességgel) a [17] dolgozat tárgyalja. Általános helyzetű szálakból és rudakból álló rendszer akkor lesz infinitezimálisan merev, ha a fentihez hasonló egyenletrendszernek csak az $x = \vec{0}$ vektor a megoldása. Az egyenletrendszer együtthatóit a szálak és merevítő rúdjaik térbeli helyzete határozza meg. Előfordulhat, hogy két nem lényegesen különböző konfigurációt tekintve egyiknek létezik, míg a másiknak nem létezik infinitezimális elmozdulása.

2.3.1. Két rúddal összekapcsolt két szál infinitezimális mozgásai

Pédaképpen legyenek az $ABCD$ szabályos tetraéder AB és CD egyenesei a szálak úgy, hogy a szálak végpontoktól mért túlnyúlása legyen azonos, rúdjai pedig AC és BD 3. ábra bal oldali szerkezete.



3. ábra. Balra egy infinitezimálisan nem merev, míg jobbra egy infinitezimálisan merev két százból és két rúdból álló szerkezet látható.

Igazoljuk, hogy ez a szerkezet infinitezimálisan flexibilis (nem merev), vagyis van nem nullától különböző infinitezimális elmozdulása. Tekintsük a DC egyenesen mozgó szál egy infinitezimális elmozdulását a jobb oldali végpontjától a C pontig, ekkor a D pont a szál bal oldali végpontjáig mozdulna. Ekkor az AB szál A csuklója a szál bal oldali végpontjába mozdulna el, így a rudakon az elmozdulások vetületei mind egyenlők lennének, hiszen azok a lehetséges elmozdulások $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ -szorosai. Az ábrán a vékony ívekkel jelölt szögek mindegyike $\frac{\pi}{3}$.

Ha a BD rúd végpontját áthelyezzük a DC szál D_1 -el jelölt, D -hez közelebbi harmadoló pontjába, akkor ilyen infinitezimális elmozdulás nincs, vagyis a rendszer infinitezimálisan is merev lesz. Ekkor az AC rúdra és a BD_1 rúdra egyidejűleg nem teljesülhet az (1). Tegyük fel, hogy mindkét rúdra teljesülne (1), akkor az előbbi elmozdulásokat tekintve $\cos \alpha = \cos \beta$ teljesülne. Ezért, mivel mindkettő hegyesszög, azt kapnánk, hogy $\alpha = \beta$, de ez nem teljesül, mivel $\alpha = \frac{\pi}{3} + \gamma$, azonban $\beta < \frac{\pi}{3} + \gamma$, mivel ezek egy B csúcsú triéder szögei, ezért a gömbháromszögekre vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség igazolja az $\alpha > \beta$ egyenlőtlenséget. Természetesen pontosan kiszámolható a szögek és koszinuszaiuk pontos értéke is. Fentihez hasonló indoklással viszont általánosan igazolható az is, ha D_1 különbözik a D ponttól, a C ponttól és a CD szakasz felezőpontjától, akkor infinitezimálisan merev szerkezetet kapunk. Tehát esetünkben mondhatjuk azt, hogy majdnem mindig merev elrendezést kapunk, tehát a generikus tulajdonság is megjelent, ami azt jelenti, hogy néhány eset kivételével két rúddal összekapcsolt két szál infinitezimálisan merev lesz. A következőkben azt vizsgáljuk, hogy a szálak és rudak általános, azaz generikus térbeli helyzete esetén milyen tényezők befolyásolják a merevséget.

3. Szálak generikus hálózata

Az előző fejezet végén található indoklás bonyolultabb hálózat (több szál összekapcsolva több rúddal) esetén általában nehezen kivitelezhető, ezért ilyenkor a (4) egyenletrendszerhez hasonló egyenletrendszert kell vizsgálni. Az oszlopvektorai lineáris függetlenségéhez szükséges, hogy a szálak és a rudak irányvektorainak skaláris szorzatai lineárisan független rendszert alkossanak. Ezeket viszont a rudak végpontjainak koordinátáiból, illetve a szálak végpontjaiból számolhatjuk. Kelően általános, generikus lesz a hálózat, ha a szálak tartópontjainak és a rudak végpontjainak koordinátáiból álló struktúra algebrailag független lesz a racionális test felett, hiszen ekkor nem lesz esetleges az egyenletrendszer oszlopvektorainak függetlensége, azok között algebrai összefüggés nem lehet. A kizárt lehetőségeket 0, míg a megengedettet 1 valószínűséggel választhatjuk.

3.1. Lehetséges előzmények

Modellünk hasonlít a generikus rúd-csukló szerkezetekhez [16], [22], [12]. A szerzők foglalkoznak a letűzési problémákkal is, amely azt kérdezi, hogy adott szerkezetnek melyik csuklóit kell különböző kényszerekkel „rögzítenünk”, hogy merev szerkezethez jussunk [21], [11]. Bevezethettük volna modellünket úgy, hogy egy rúd-csukló szerkezet néhány rúdját kinevezzük szálnak, és ezek csuklóira írunk elő szál (kinevezés előtt rúd) irányú lineáris kényszereket, hasonlóan a letűzési problémához. A többi rúd pedig továbbra is rúd maradna. Ez a modell azonban több vonatkozásban is különbözne az általunk vizsgálttól. Az említett letűzési probléma esetén a feltételek a csuklókra írnak elő kényszereket, esetünkben pedig a rudakra írjuk elő ezeket. Valószínűleg előbbi elgondolással is megkapható e cikk eredménye, tudtommal nem közöltek ilyen eredményt térben, tehát megválaszolando nyitott kérdésnek tekinthető.

3.2. Kapcsolat a mechanizmusokkal és a tensegrity szerkezetekkel

Bevezethettük volna modellünket a test-rúd (body-bar) struktúrák speciális eseteként úgy is, hogy az egyes test elemeket tekintettük volna szálnak. Ez egy újabb megválaszolando kérdés lehet. A mechanizmusok mozgásainak vizsgálata ([5], [7], [8]) már egyetemi szinten is a szabadsági fok megállapításával szokott kezdődni. A Csebisev-Grübler-Kutzbach-kritérium vizsgálata a kiindulópont, az általunk vizsgált probléma tekinthető speciális, nagyon sok elemből álló mechanizmusként, és tételünk tekinthető a mi speciális problémánkra adott olyan válasznak, amely garantálja a mechanizmus szabadsági fokának gyors áttekinthető meghatározását. A mechanizmus alkotóelemei jelen tárgyalásban egydimenziós szakaszok, ezek közül a szálnak nevezettek két pontja azonos csúszkán mozog, míg a rudaknak nevezettek a végpontjaikban csatlakoznak a szálnakhoz. E felfogásból adódóan további problémák vethetők fel, amelyeknek részletes tárgyalásáról a szerzőnek nincs tudomása, így feltehetően további nyitott kérdések is megfogalmazhatók e

területen. Például körlapok normálisát és középpontját rögzítve a térben, majd ezek kiválasztott pontjait csuklókkal rudak közbeiktatásával egymáshoz rögzítve analóg feladatot kapunk. Szintén nem tárgyalt kérdés, ha a keresztkapcsolatokat létesítő rudak helyett, vagy mellett köteleket, illetve támaszokat is megengedünk, mint lehetséges kényszereket [18], azaz kiterjeszthető-e Recski és Shai [23] eredménye az általunk vizsgált szál szerkezetekre. Sejthetően igen, hiszen mindkét esetben egydimenziós mozgásokat vizsgálunk. Ez a rész a szerkesztő azon kérésére került a cikkbe, hogy próbáljam magasabb kontextusba helyezni a következő eredményt.

3.3. Rudakkal összekapcsolt szálakból álló generikus hálózat merevsége

A 2. fejezet szerint kettő kitérő szál egyetlen összekapcsolt rúddal még nem lesz merev, kettővel összekapcsolva generikus helyzetben már merev lesz.

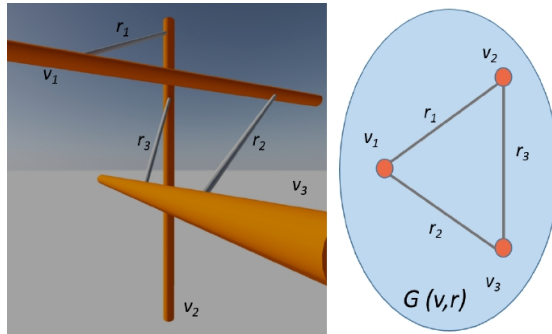
3.1. Definíció. Legyen $G(v, r)$ a generikus helyzetű szálakból és rudakból álló hálózat gráfja. A gráf pontjai feleljenek meg az egyes szálaknak, a gráf élei pedig feleljenek meg a rudaknak, azaz két pont között akkor van m számú él, ha a megfelelő két szál között m darab rúd van.

Így $G(v, r)$ párhuzamos élekkel is rendelkezhet. Szükséges és elégséges feltételt adunk a generikus helyzetű szálakból és rudakból álló hálózat merevségére.

3.1. TÉTEL. *Generikus szálakból és rudakból álló hálózat akkor és csak akkor infinitezimálisan merev, ha $G(v, r)$ minden komponense tartalmaz kört.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy komponenset (összefüggő részgráfot), ha nincsen benne kör, akkor a pontoknak megfelelő szálak együtt tudnak mozogni, mivel a szálakhoz és megfelelő rudakhoz tartozó egyenletrendszer-részletnek, amely a (2) egyenletrendszerrel analóg egyenletrendszer megfelelő elemeiből áll, lesz zérustól különböző megoldása, hiszen ez a részegyenletrendszer eggyel kevesebb egyenletből áll, mint a szálak, azaz az ismeretlenek száma. A komponenshez tartozó rudak száma ugyanis eggyel kevesebb, mint a szálaké a körmentesség miatt, így az oszlopvektorok összefüggő rendszert alkotnak. Másik irány: ha a kiválasztott komponens tartalmaz kört, akkor a kör pontjainak megfelelő szálak és az ezeket összekapcsoló rudaknak megfelelő részegyenletrendszer továbbra is homogén és együtthatóvektorai lineárisan függetlenek a generikusság következtében. Egyszerűbben: a megfelelő részegyenletrendszerben az ismeretlenek száma nem több, mint az egyenleteké. Így a megoldás csak a zérus vektor lehet, tehát a megfelelő szálak nem mozognak.

□



4. ábra. Balra három szál látható páronként összekapcsolva rudakkal, jobbra mellette a szálakból és rudakból álló hálózat $G(v, r)$ gráfja, amely összefüggő, tehát egyetlen komponensből áll, és az tartalmaz kört, ezért a 3.1. tétel következtében a bal oldali hálózat merev, amennyiben generikus.

Példaként hagyjuk el a 4. ábra szerkezetének r_1 rúdját, úgy a szerkezetnek egy véges mozgása a következő: ha v_1 balra, akkor r_2 miatt v_3 előre, r_3 miatt v_2 pedig lefelé mozog. Az r_1 visszahelyezése esetén v_2 hasonlóan lefelé mozdulna, generikus esetben ez a két egyirányú elmozdulás különböző nagyságú lenne, ezért nem is jöhet létre, így a generikus szerkezet merev lesz.

3.1. KÖVETKEZMÉNY. A fenti tétellel egy gyorsan ellenőrizhető feltételt (összefüggőség, körmentesség) adtunk különböző elasztikus szál struktúrákat modellező szimulációs algoritmusok bemeneti struktúráihoz, ezek általában egy, a fentihez hasonló merev struktúrából indulnak, a szálak és a rudak helyén azonban rugókból és dugattyúkból álló, sorosan és/vagy párhuzamosan illesztett elemek találhatók, így közelítve a konkrét szálak valóságos tulajdonságait [1], [4], [15].

3.2. KÖVETKEZMÉNY. A szálak általában több rúddal kapcsolódnak egymáshoz. Érdekes vizsgálni a szerkezet stabilitása, biztonsága érdekében, mi történik akkor, ha néhány szereplő kiesik, tönkremegy. A gráfok pont- és élösszefüggőségére vonatkozó eredmények [3] jól jellemzik a szálak hálózatának biztonságát, hiszen a szálak szétszakadása esetén a pontösszefüggőség, míg a rudak tönkremenetele esetén az élösszefüggőség lesz hasznos jellemző a további vizsgálatokban.

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm Gerencsér László értékes észrevételeit, amelyek segítették a cikket jobbá tenni.

Hivatkozások

- [1] AHMADZADEH, H., SMITH, D. H., AND SHENOY, V. B.: *Viscoelasticity of tau proteins leads to strain rate-dependent breaking of microtubules during axonal stretch injury: predictions from a mathematical model.*, Biophysical journal, Vol. **106** No. **5**, pp. 1123-33 (2014). DOI: [10.1016/j.bpj.2014.01.024](https://doi.org/10.1016/j.bpj.2014.01.024)
- [2] EASTERLING, K. E., HARRYSSON, R., GIBSON, L. J., AND ASHBY, M. F.: *On the Mechanics of Balsa and Other Woods*, Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, Vol. **383** No. **1784**, pp. 31-41 (1982). DOI: [10.1098/rspa.1982.0118](https://doi.org/10.1098/rspa.1982.0118)
- [3] FRANK, A.: *Connections in combinatorial optimization*, Oxford University Press (2011).
- [4] GAUTIERI, A., VESENTINI, S., REDAELLI, A., AND BUEHLER, M. J.: *Hierarchical structure and nanomechanics of collagen microfibrils from the atomistic scale up*, Nano Letters, Vol. **11** No. **2**, pp. 757-766 (2011). DOI: [10.1021/nl103943u](https://doi.org/10.1021/nl103943u)
- [5] GOSSELIN, C. M. AND ANGELES, J.: *Singularity Analysis of Closed-Loop Kinematic Chains*, IEEE Trans. Rob. Autom, Vol. **6** No. **3**, pp. 281-290 (1990). DOI: [10.1109/70.56660](https://doi.org/10.1109/70.56660)
- [6] HEGYI, D., SAJTOS, I., AND SÁNDOR, G.: *Long-Term Strain Measuring of Technical Textiles by Photographic Method*, Materials Science Forum, Vol. **537-538**, pp. 381-388 (2007). DOI: [10.4028/www.scientific.net/MSF.537-538.381](https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.537-538.381)
- [7] HORTOBÁGYI, Z.: *Numerical analysis of inextensional, kinematically in-determinate assemblies*, Periodica Polytechnica Civil Engineering, Vol. **44** No. **1**, pp. 43-55 (2000).
- [8] HUSTY, M. L., PFURNER, M., SCHRÖCKER, H. P., AND BRUNNTHALER, K.: *Algebraic methods in mechanism analysis and synthesis*, Robotica, Vol. **25** No. **6**, pp. 661-675 (2007). DOI: [10.1017/S0263574707003530](https://doi.org/10.1017/S0263574707003530)
- [9] ILNICKA, A. AND LUKASZEWICZ, J. P.: *Discussion Remarks on the Role of Wood and Chitin Constituents during Carbonization*, Frontiers in Materials, Vol. **2** No. **March**, pp. 1-6 (2015). DOI: [10.3389/fmats.2015.00020](https://doi.org/10.3389/fmats.2015.00020)
- [10] INGBER, D. E., WANG, N., AND STAMENOVIC, D.: *Tensegrity, cellular biophysics, and the mechanics of living systems.*, Reports on progress in physics. Physical Society (Great Britain), Vol. **77** No. **4** (2014), 046603. DOI: [10.1088/0034-4885/77/4/046603](https://doi.org/10.1088/0034-4885/77/4/046603)
- [11] JORDÁN, T.: *Rigid and Globally Rigid Graphs with Pinned Vertices Rigid and Globally Rigid Graphs with Pinned Vertices*, Egerváry Research Group on Combinatorial Optimization, Vol. **05**, 1-18 (2009). DOI: [10.2118/0209-018-TWA](https://doi.org/10.2118/0209-018-TWA)
- [12] JORDÁN TIBOR; RECSKI ANDRÁS; SZESZLÉR DÁVID: *Rendszeroptimalizálás*, Typotex (2004).
- [13] KARSAI, Á., MÁRTONFALVI, Z., NAGY, A., GRAMA, L., PENKE, B., AND KELLERMAYER, M.: *Mechanical manipulation of Alzheimer's amyloid β 1-42 fibrils*, Journal of Structural Biology, Vol. **155** No. **2**, pp. 316-326 (2006). DOI: [10.1016/j.jsb.2005.12.015](https://doi.org/10.1016/j.jsb.2005.12.015)
- [14] KÖMAL: *B.3906 matematika feladat*, Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok, Vol. **56** No. **4** (2006).
- [15] LICUP, A. J., SHARMA, A., AND MACKINTOSH, F. C.: *Elastic regimes of subisostatic athermal fiber networks*, Physical Review E, Vol. **93** No. **1** (2016).
- [16] LOVÁSZ, L. AND YEMINI, Y.: *On Generic Rigidity in the Plane*, SIAM. J. on Algebraic and Discrete Methods, Vol. **3** No. **1**, pp. 91-98 (1982). DOI: [10.1137/0603009](https://doi.org/10.1137/0603009)

- [17] NAGY KEM, G.: *Flexibility and rigidity of cross-linked Straight Fibrils under axial motion constraints*, Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials, Vol. **62**, pp. 504-514 (2016), DOI: [10.1016/j.jmbbm.2016.05.032](https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2016.05.032)
- [18] NAGY KEM, G.: *Bracing rhombic structure by one-dimensional tensegrities*, Meccanica, Vol. **52** No. **6**, pp. 1283-1293 (2017). DOI: [10.1007/s11012-016-0477-0](https://doi.org/10.1007/s11012-016-0477-0)
- [19] PARK, Y. B. AND COSGROVE, D. J.: *A revised architecture of primary cell walls based on biomechanical changes induced by substrate-specific endoglucanases.*, Plant physiology, Vol. **158** No. **4**, pp. 1933-43 (2012). DOI: [10.1104/pp.111.192880](https://doi.org/10.1104/pp.111.192880)
- [20] RACZ, I. AND BORSA, J.: *Swelling of carboxymethylated cellulose fibres*, Cellulose, Vol. **4** No. **4**, pp. 293-303 (1997). DOI: [10.1016/S0008-6215\(97\)00173-0](https://doi.org/10.1016/S0008-6215(97)00173-0)
- [21] RECSKI, A.: *A network theory approach to the rigidity of skeletal structures Part I. Modelling and interconnection*, Discrete Applied Mathematics, Vol. **7** No. **3**, pp. 313-324 (1984). DOI: [10.1016/0166-218X\(84\)90007-6](https://doi.org/10.1016/0166-218X(84)90007-6)
- [22] RECSKI, A.: *Matroid Theory and its Applications in Electric Network Theory and in Statics*, Algorithms and Combinatorics, Springer Berlin Heidelberg (1989).
- [23] RECSKI, A. AND SHAI, O.: *Tensegrity frameworks in one-dimensional space*, European Journal of Combinatorics, Vol. **31** No. **4**, pp. 1072-1079 (2010). DOI: [10.1016/j.ejc.2009.09.008](https://doi.org/10.1016/j.ejc.2009.09.008)
- [24] VÄKIPARTA, M., YLI-URPO, A., AND VALLITTU, P. K.: *Flexural properties of glass fiber reinforced composite with multiphase biopolymer matrix*, Journal of Materials Science: Materials in Medicine, Vol. **15** No. **1**, pp. 7-11 (2004). DOI: [10.1023/B:JMSM.0000010091.34422.45](https://doi.org/10.1023/B:JMSM.0000010091.34422.45)
- [25] WOOD, G. C. AND KEECH, M. K.: *The formation of fibrils from collagen solutions. 1. The effect of experimental conditions: kinetic and electron-microscope studies.*, The Biochemical Journal, Vol. **75** No. **3**, pp. 588-98 (1960). DOI: [10.1042/bj0750588](https://doi.org/10.1042/bj0750588)



Nagy Gyula (1960) elemi tanulmányait Buzsákon, illetve Fonyódon végezte. 1984-ben matematika, fizika, ábrázoló geometria szakos középiskolai tanári diplomát szerzett az ELTE-n, előtte és utána katonai szolgálatot teljesített. 1984-1997-ig matematikát oktat a Budapesti Szent István Gimnázium speciális matematika tagozatán. 1990-től matematika, ábrázoló geometria, műszaki informatika, AutoCAD oktatást végez a SZIE Ybl Miklós Építéstudományi Karán, kezdetben főiskolai adjunktusként, jelenleg főiskolai tanárként. Időközben két periódusban az Ábrázolás és Számítástechnika Tanszéket vezeti, számos kari adminisztratív feladatot vállalt. Nős, három gyermeke van. Rúd szerkezetek merevségét kutatja a diszkrét matematika és a statika határterületén. Recski András témavezetésével 1998-ban PhD-fokozatot szerez a BME-n. 2001-2015-ig a KöMaL főszerkesztője. 2016-tól ismét publikál, a strukturális biológia témaköre is érdekli. Közel 60 MTMT-rekordja van közel 40 hivatkozással. 2017-ben habilitált a Pécsi Egyetemen. Biztonságtechnikai mérnök, foglalkozik a problémamegoldó gondolkodás oktatásával.

NAGY KEM GYULA

SZIE

Ybl Miklós Építéstudományi Kar

1146 Budapest, Thököly út 74.

nagy.gyula@ybl.szie.hu

CHARACTERIZATION OF THE CROSS-LINKED FIBRILS UNDER
AXIAL MOTION CONSTRAINTS WITH GRAPHS

GYULA NAGY KEM

The filament networks play a significant role in biomaterials as structural stability and transmit mechanical signs. Introducing a 3D mechanical model for the infinitesimal motion of cross-linked fibrils under axial motion constraints, we provide a graph theoretical model and give the characterization of the flexibility and the rigidity of this framework.

The connectedness of the graph $G(v, r)$ of the framework in some cases characterizes the flexibility and rigidity of these structures. In this paper, we focus on the kinematical properties of fibrils and prove the next theorem for generic nets of fibrils that are cross-linked by another type of fibrils. “If the fibrils and the bars are generic positions, the structure will be rigid if and only if each of the components of $G(v, r)$ has at least one circuit.” We offer some conclusions, including perspectives and future developments in the frameworks of biostructures as microtubules, collagens, celluloses, actins, other polymer networks, and composite which inspired this work.

Keywords: kinematics, graph connectivity, generic, fibril network, cross-link.

Mathematics Subject Classification (2000): 53A17, 52C25, 05C40.

A PÉNZÜGYI TERMÉKEK ÁRA

BANYÁR JÓZSEF

Az ár fogalmát a pénzügyi termékekkel kapcsolatban általában nem használják, vagy ha igen, akkor össze-vissza. Néha azonosítják azt konkrét pénzügyi termékknél, mint pl. a biztosításoknál és az opcióknál azok díjával, vagy úgy tekintenek rá, mint egy nem használt, „szabad” fogalomra, aminek ezért (szinte) tetszőleges értelmet lehet tulajdonítani. Ha jobban megvizsgáljuk azonban a dolgot, akkor arra jutunk, hogy igenis lehet egy, a többi termék és szolgáltatás árával konzisztens árfogalmat alkotni a pénzügyi „termékekre” is, a kulcs ehhez azonban annak felismerése, hogy ezek nem termékek, hanem standardizált szolgáltatáscsomagok. A dolog nehézsége az a sajátosság, hogy a szolgáltatás maga is arra az eszközre vonatkozik, amivel magát az árat mérjük, vagyis a pénzre. A szolgáltatótól pénz áramlik az ügyfél felé, az ügyféltől pénz áramlik a szolgáltató felé az összes pénzügyi szolgáltatásnál. Nem szabad árnak nevezni egyszerűen az egyik pénzáramot, viszont észre kell venni, hogy - várható értékben - az ügyféltől a szolgáltató felé irányuló pénzáram nagyobb, mint a fordított. A különbség - amit szoktak költségnek is nevezni - pont a szolgáltatás árának tekinthető, ha analógiának akármi-lyen javítási szolgáltatást veszünk. S ez az árfogalom konzisztens lesz, viszont nem magától értetődő, hogy hogyan kell azt reprezentálni. A probléma, hogy egy pénzügyi szolgáltatásnak - ellentétben a legtöbb, fizikai dologhoz kötött szolgáltatással - nincs magától értetődő egysége, illetve az, hogy sok olyan pénzügyi „termék” van, aminek szolgáltatási periódusa akár évtizedekig is tarthat. Így speciális árreprezentáció kell, ami viszont épp megegyezik a pénzügyi termékek költségmutatóival, így az ár reprezentációjának kérdése visszavezethető a lehetséges költségmutatók problémájára.

1. Bevezetés

A dolgozat két, mostanában megjelent tanulmányom (az egyiket Vékás Péterrel közösen jegyzem) néhány fontos motívumával foglalkozik (Banyár [2015], Banyár-Vékás [2016]).

Ha kérdéssé fogalmazzuk át a címet, s arra keressük a választ, hogy mi is a pénzügyi termékek ára, akkor a válasz az első pillanatban egyértelműnek és egyszerűnek tűnik, mégpedig:

- a hitelek ára a törlesztőrészlet,
- a biztosításoké a biztosítási díj,
- az opcióké az opciós díj stb.

Ugyanúgy, mint a zsemle vagy a szék ára, és ezzel a kérdést le is zárhatnánk.

2. Bonyodalmak

Sajnos azonban a probléma ennél bonyolultabb, hiszen ha a fenti hipotézisekből indulunk ki, akkor furcsa megállapításokra juthatunk. Ezek szerint ugyanis például a kamatmentes baráti kölcsön nem ingyenes. A fentiek alapján az csak akkor lenne az, ha egyáltalán nem kérnék vissza. Vagyis eszerint az ingyen hitel nem más, mint az ajándék pénz. Ez viszont nyilván nem így van, hiszen a kettőt nem kezeljük szinonimaként, és nagyonis jelentős különbséget érzünk a két dolog között. Az ajándékot nem kell visszaadni, a hitelt viszont igen, vagyis az inkább csak bérlet, tehát a hitelfelvétel pénzberlet. A bérlet ára pedig a bérleti díj, vagyis a hitelkamat (és az esetleg egyéb fizetendő költségek). Tehát a hitelek ára mégsem az egész törlesztőrészlet, hanem csak a kamat (és még egyéb felszámított költségek - ha van ilyen).

De azért nem muszáj elszietnünk azt a megállapítást sem, hogy a pénzügyi termékek ára a kamat, mert abból viszont az következik, hogy a *betételhelyezés* mint pénzügyi "termék" nemcsak, hogy ingyenes banki szolgáltatás, hanem még nekem fizetnek kamatot - hiszen itt fordítva van, mint a hitelnél, én adom bérbe a pénzem a banknak kamatért. Ugyanez igaz a *befektetési jegy* vásárlására, ami így szintén ingyenes (sőt) pénzügyi szolgáltatás, hiszen lényegében ugyanolyan pénzberbeadás, mint a betét.

Itt azonban a pénzügyi intézmény szolgáltatása az, hogy helyettünk adja bérbe a pénzünket, s a bérleti díj, vagyis a kamat egy részét elteszi. Olyasmi szolgáltatást végeznek itt nekünk, mint azok, akik nevünkben kiadják a lakásunkat, beszedik utána a bérleti díjat, ellenőrzik, hogy a bérlők fizetik-e a rezsit, stb., s ennek fejében levonnak valamit a nekünk járó bérleti díjból. Ha mi magunk intéznénk a bérbeadást, a bérleti díj, vagyis ezeknél a pénzügyi termékeknél a kamat, magasabb lenne, így a betét, befektetési jegy stb. ára valójában egyfajta *feláldozott haszon*, a lehetséges és a tényleges hozam különbsége.

Tehát úgy tűnik, hogy a szék és a befektetési jegy ára mégsem ugyanaz. A befektetési jegy ára töredéke annak a pénznek, amennyiért megvásároltam azt, hiszen az erre költött pénzem kamatostul visszakapom (legalábbis általában¹).

¹Természetesen a pénzügyi szolgáltató, akire a pénzemet bízom, csődbe mehet, vagy eleve kezelheti hűtlenül is mások pénzét, így van valamekkora kockázata annak, hogy egyáltalán nem kapom vissza a pénzem. Ez egy érdekes probléma, de jól elkülöníthető attól, amit itt tárgyalok, ezért a továbbiakban ezzel nem foglalkozom.

Amit nem kapok vissza, azért szolgáltatást végeztek, amit különben nekem kellett volna elvégezni. (Sőt, mivel ők ehhez jobban is értenek, mint én, ezt olcsóbban is végezték.)

Ha összehasonlítjuk az eddig vizsgált pénzügyi termékeket, vagyis a betételhelyezést, illetve a befektetési jegy vásárlását a hitelfelvétellel, akkor azt látjuk, hogy két osztályba sorolhatjuk őket.

E két osztály között a fő különbség az ügyfél és a pénzügyi szolgáltató helyzetében van. A hitel esetében először a szolgáltató fizet az ügyfélnek, aztán az a pénzügyi szolgáltatónak, a másik két esetben pedig ez fordítva történik, mintha a pénzügyi szolgáltató lenne a hitelfelvevő (valójában inkább egyfajta „hitelközvetítő”). A továbbiakban a vizsgálódásomat leszűkítem az ilyen jellegű pénzárammal bíró pénzügyi termékekre (annak ellenére, hogy a kiindulópontom a hitelfelvétel volt), de a megállapítások könnyen átfogalmazhatók a hiteltermékekre is.

3. A pénzügyi termékek ára² = A szolgáltatás díja

Amikor azt mondjuk, hogy pénzügyi „termék” ára, akkor nem fogalmazunk precízen, hiszen a háttérben nem termék, hanem szolgáltatás van. Ha a széknél maradunk, akkor a dolog nem annyira a szék vásárlásához hasonlít, hanem ahhoz, amikor a széket javításra adjuk be egy asztaloshoz. A javítás ára sem tartalmazza az egész szék árát! Ennek ellenére, a továbbiakban megtartjuk a „termék” szót, s nem helyettesítjük a bonyolultabb „standardizált szolgáltatáscsomag” kifejezéssel, hiszen ez a pontatlanság másfajta problémát nem okoz.

Tehát a befektetési jegy (UL, pénztár, betét stb.) ára a befektetett pénzem potenciális teljes hozama és a tényleges hozam különbsége.

Ha most bővítjük a vizsgált pénzügyi termékek körét, akkor első ránézésre azt mondhatnánk, hogy akkor ez az árdefiníció nem alkalmazható a nem-életbiztosításokra. Hiszen ezeknél általában nem kapjuk vissza a pénzünket. Emiatt azt mondhatnánk, hogy a biztosítás csak akkor ingyenes, ha kárkifizésként legalább annyit kapok, mint a fizetett díj - ha többet, akkor még jobb is, mint ingyenes. Igaz ez?

Nem igazán, hiszen ez csak az egyes biztosított nézőpontja. Az eddig vizsgált többi pénzügyi terméknél az egyes ügyfél és a szolgáltató nézőpontja egybeesett, de a nem-életbiztosítások esetében már nem. A biztosító nézőpontjából ugyanis azt mondhatjuk, hogy annak minden évben stabilan tervezhető díjbevétele és kárkifizése van, ami nagyrészt egybeesik (az eltérés pont az, ami minket érdekel). Ugyanakkor, ha nem korlátozzuk le magunkat - a végső soron önkényesen megállapított - egy évre, hanem növeljük a vizsgált időtartamot, akkor azt mondhatjuk,

²A dolgozat nem foglalkozik a pénzügyi és biztosítási kockázatokkal, illetve azok ellenértékének a meghatározásával, azt adottnak veszi, jóllehet esetenként nagyon bonyolult ezek meghatározása. Ugyanakkor ez az „ellenérték” nem az „ár”, akkor sem, ha időnként úgy nevezzük. Az ár - véleményem szerint - az, amit ebben a dolgozatban annak nevezek.

hogy az minél hosszabb, annál stabilabb lesz az egyes biztosítottra jutó kárkifizetés is. Vagyis hosszabb távon már nem annyira szembeötlő a biztosító és az ügyfél nézőpontja közti különbség. Az eltérést az oldja fel, hogy a biztosítások esetében a szolgáltatásnál a várható szolgáltatást kell venni. Ez a többi eddig vizsgált pénzügyi termék esetében is igaz, csak ott a várható szolgáltatás és a tényleges közti eltérés szinte nulla, a biztosításban viszont nagyon nagy is lehet. A biztosításban amúgy a várható szolgáltatás nem más, mint

- előzetesen: a nettó díj,
- utólag: a tényleges kárhányad.

Vagyis a biztosítás ára is hasonlóképpen származtatható, mint az előbb vizsgált többi, csak némileg másképp kell azt megfogalmazni, valahogy így: az ügyfél által befizetett díjak + az elérhető (teljes) hozam - a várható kárkifizetés (= nettó díj).

Tehát a *pénzügyi termékek ára általánosabban* nem más, mint

az ügyfél várható, a pénzügyi szolgáltatónak tett befizetései + az azokon elérhető (teljes) hozam - a pénzügyi szolgáltatótól az ügyfél felé irányuló várható kifizetések.

Egyszerűbben megfogva a dolgot:

a pénzügyi termékek ára = a szolgáltató ügyfél felé felszámolt költségei.

Ezt a megfogalmazást pedig már minden további nélkül tudjuk alkalmazni az életbiztosításokra is. Ezek - jellegüket tekintve - a betétek, illetve befektetési jegyek és a nem életbiztosítások kombinációi. Mindkettőtől elsősorban abban különböznek, hogy jellemzően hosszú tartamú szerződések, amelyek egyfajta technikai bonyodalmat okoznak a rövid tartamú termékekhez képest, amikor az ár konkrét megkonstruálásáról van szó.

Ha azt gondolnánk, hogy a biztosítás ára a biztosítási díj stb., ugyanúgy, mint a széknél, akkor azt is gondolhatnánk, hogy az ügyfél már mindent tud, ami őt érdeklí, s nem szükséges számára információt adni arról, hogy mennyi a nettó díj - illetve ennek komplementere: a biztosítás költségrésze. Hiszen a bútorboltban sincs feltüntetve a szék ára mellett, hogy ebből mennyi a fa, a kárpit stb. része. De ha ezt a felfogást elvetjük, s magunkévá tesszük a fentieket, akkor hirtelen teljesen legitimmé válik a biztosítás költségrészének nyilvánosságra hozatala, hiszen végső soron ez lesz számára az árinformáció. Ugyanez a helyzet minden más pénzügyi termék esetében is, vagyis az ügyfél jogosan kíváncsi azok költségeire, hiszen az az ár. S az is jogos kívánsága, hogy ne széttöredezett árinformációk tömegét kapja, hanem egyetlen mutatóban összefoglalt tömör információt. Azt is mondhatjuk ezért, hogy az ár a pénzügyi terméknél nem más, mint egy költségmutató. A kérdés ezért, hogy ezt hogyan lehet, illetve célszerű megkonstruálni?

4. Az ár mint költségmutató megkonstruálása

A költségmutató megkonstruálását - terjedelmi okokból - a fent említett pénzügyi termékek közül leszűkítjük kettőre: a befektetési jegyekre és az életbiztosításokra. A hitelekről fent már beszéltem. A betétek esetében - amelyek költségeinek logikája hasonló a befektetési jegyekhez - az a technikai probléma, hogy elsődlegesen nem a költség mint információ áll rendelkezésünkre, hanem az ügyfélnek fizetendő kamat, s ebből kell előbb magát a költséget a költségmutatóhoz előállítani. A nem életbiztosításokra vonatkozó költségmutató pedig már könnyen előállítható a nála egyszerűbb befektetési jegy, illetve a nála bonyolultabb életbiztosítás példáján. Érdemes még megjegyezni, hogy a befektetési jegyekre és az életbiztosításokra (de nem a betétekre és a nem életbiztosításokra) jelenleg egy közös európai költségmutató fejlesztése folyik. Az e mutató által érintett pénzügyi termékeket összefoglalóan "packaged retail insurance and investment products"-nak, röviden PRIIPs-nek nevezik. (A munka állásáról ld. ESMA, EBA, EIOPA [2015]. Jelen anyag nem követi ennek a dokumentumnak a gondolatmenetét és megoldásait.)

5. Költségmutató rövid tartamú termékekre

A befektetési jegyre vonatkozó költségmutató megkonstruálásakor kihasználhatjuk azt, hogy ez egy relatíve egyszerű termék, határozatlan tartammal (ami a gyakorlatban általában rövid távot jelent), amit nyugodtan vehetünk egy évnél, és ahol a felszámított költségek jól ismertek.

Ha bevezetjük a következő jelöléseket, akkor a rövid (1 éves) tartamú, egyszeri befizetésre szóló befektetési jegyre vonatkozó költségmutató egyszerű lesz:

$$\frac{C}{GP},$$

(= „bruttó díjas változat”) vagy

$$\frac{C}{P},$$

ahol

GP: az ügyfél bruttó befizetése,

P: az ügyfél nettó befizetése = GP-C (költségek nélkül),

C = GP-P: a szolgáltató költsége.

A második képlet (= a „nettó díjas változat”) hozzávetőlegesen megegyezik az EU-ban néhány éve az ezekre a termékekre bevezetett "total expense ratio" (=TER) mutatóval.

Ezt a mutatót (mindkét változatát) kétféleképpen interpretálhatjuk:

1. mint *kamatvesztés* (hozamrét), illetve
2. mint *költséghányadot*.

Igazából ez csak a hosszú tartamú termékekre vonatkozó költségmutatóból visszatekintve látszik, ugyanis a kétféle interpretáció 1 éves tartamnál egybeesik. A több évesnél viszont már nem, ott fontos világosan látni, hogy melyik interpretáció szerint képezzük meg a költségmutatót.

6. Költségmutató hosszú tartamú termékekre

A kamatvesztés-gmutató (mégpedig a nettó díjas változat) egy lehetséges általánosítása több évre és rendszeres éves befizetésekre, rögzített i hozammal, az alábbi egyenlet megoldása r -re:

$$\sum_{j=0}^{n-1} (GP_j - C_j) \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^j = \left(\frac{1}{1+r}\right)^n \cdot \sum_{j=1}^n GP_j.$$

Ez leginkább egy hosszú (n éves) tartamú, rendszeres díjas befektetési alapra vonatkozó költségmutató. Ilyen általában nincs, de az életbiztosítók által értékesített „befektetési egységekhez kötött” (BEK) életbiztosítások ehhez nagyon hasonlóak, azzal az eltéréssel, hogy ott a „költség” egy része egy haláleseti életbiztosítás díja lesz, vagyis igazából nem költség. Ha mégis annak tekintjük, akkor kaphatunk ezekre a konkrét életbiztosításokra egy nem tökéletes, de kielégítő költségmutatót. Pontosan így járt el 2009-ben a Magyar Biztosítók Szövetsége (MABISZ [2009]), amelyik erre a speciális életbiztosításra „teljes költségmutató” (TKM) névvel bevezetett egy ilyen mutatót.

Ezt némiképpen lehet tovább általánosítani, ha feltesszük, hogy van egy garantált éves i hozam:

$$\sum_{j=0}^{n-1} (GP_j - C_j) \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^j = \left(\frac{1}{1+r}\right)^n \cdot \sum_{j=1}^n GP_j \cdot (1+i)^{n-j}.$$

Ekkor a költségmutató nem r , hanem $r - i$ lesz (a MABISZ TKM speciális, $i = 0\%$ -os garantált hozamot feltételez). Az is látható, hogy a MABISZ-mutató megoldása $n = 1$ -re: $r = \frac{C}{GP-C}$ lesz, ami nagyjából a TER-nek megfelelő mutató. Hosszabb tartamokra már egyre kompromisszumosabban tudjuk ezt az egyezőséget megkapni. Például $n = 2$ -re (de egyetlen befizetésre): $r \approx \frac{C}{GP-C}$ lesz.

Ez a mutató azonban túl egyszerű ahhoz, hogy az összes életbiztosításra ki lehessen terjeszteni. A BEK-biztosítások többsége esetében a haláleseti szolgáltatás, és így annak a díja is elenyésző, emiatt nem okoz túl nagy problémát, ha azt -

amúgy helytelenül - költségnek tekintjük. Az úgynevezett hagyományos életbiztosításoknál azonban ez már nagy probléma, így célszerűbb, ha itt áttérünk a bruttó díjas alváltozatra. Ennek egy elég általános képlete az alábbi:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{n-1} {}_j|p_x \cdot GP_j \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^j = \\ = & \sum_{j=0}^{n-1} {}_j|p_x \cdot AB_j \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^j + \sum_{j=0}^{n-1} {}_j|q_x \cdot DB_j \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^{j+1} + {}_n|p_x \cdot MB_n, \end{aligned}$$

ahol p a túlélési, q a halálozási valószínűség (x éves belépési korú biztosítottra, j éves „halasztással”), AB , DB és MB a járadék-, haláleseti- és elérési szolgáltatás.

A költségmutató itt: $i - r$ lesz, ahol i a garantált hozam, ami a képletben nem jelenik meg külön, hanem tudjuk, hogy a biztosító által ígért AB , DB és MB szolgáltatások kalkulálása során már „beszámították” azt.

A két változat különbsége, hogy az előző, nettó díjas változat esetében a tartalékra, itt viszont a teljes befizetett díjra vetítjük a kamatvesztéséget.

Ez tehát a kamatvesztés/hozamrés típusú költségmutató. De hogyan néz ki hosszabb tartamra a költséghányad típusú változat (amit - ugyanúgy, mint a hozamrés típusút - vetíthetünk nettó és bruttó díjra egyaránt)? A bruttó díjra vetített költséghányad típusú költségmutató képlete:

$$\begin{aligned} & (1-c) \cdot \sum_{j=0}^{n-1} ({}_j|p_x \cdot GP_j \cdot \left(\frac{1}{1+i}\right)^j) = \\ = & \sum_{j=0}^{n-1} ({}_j|p_x \cdot AB_j \cdot \left(\frac{1}{1+i}\right)^j) + \sum_{j=0}^{n-1} ({}_j|q_x \cdot DB_j \cdot \left(\frac{1}{1+i}\right)^{j+1}) + \\ & + ({}_n|p_x \cdot MB_n \cdot \left(\frac{1}{1+i}\right)^n), \end{aligned}$$

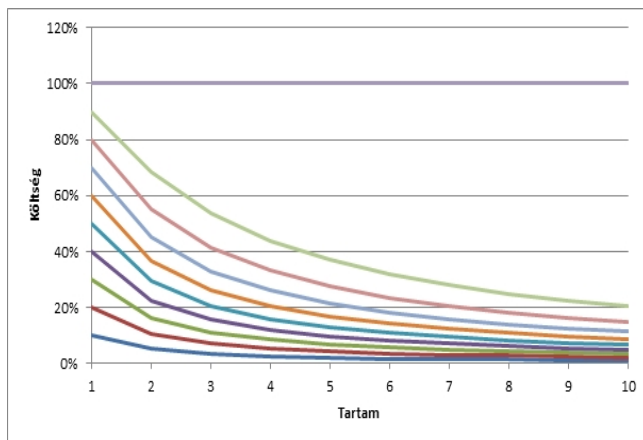
ahol a költségmutató - vagyis az ár: c .

Fontos különbség a hozamrés típusú mutatóhoz képest, hogy itt r helyett i („beépített hozam” = „technikai kamatláb”) szerepel.

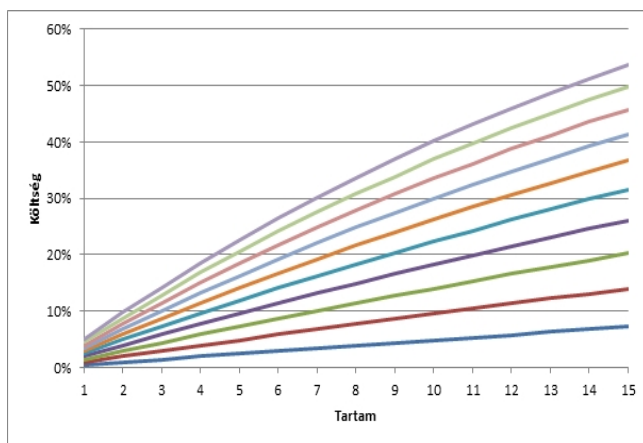
7. Összefüggés a költséghányad és a hozamrés típusú mutatók között

A költséghányad és a hozamrés típusú mutató kölcsönösen megfeleltethető egymásnak. A kettő közti összefüggést az alábbi ábrák mutatják:

A költséghányadok hozamréssé transzformált értéke a tartam függvényében



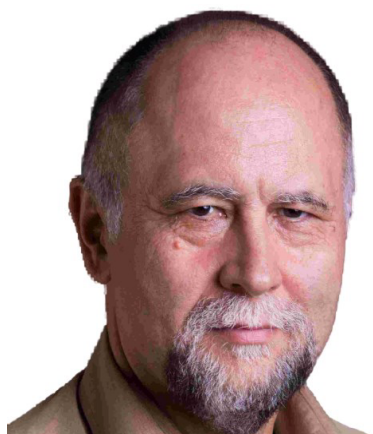
1. ábra. 10%, 20%, ..., 90%, 100% költséghányadokat transzformáltunk át hozamréssé. Egyéves tartamnál a kettő egybeesik, de a tartam növekedésével egyre kisebb lesz az ugyanahhoz a költséghányadhoz tartozó hozamrés.



2. ábra. Ez a fordított transzformációt mutatja, vagyis itt a kamatrést transzformáljuk költséggrésszé. Látható, hogy a 0,5%, 1%, ..., 4,5%, 5% nagyságú kamatrések a tartam növekedésével egyre nagyobb költséggrészeknek felelnek meg.

Hivatkozások

- [1] BANYÁR JÓZSEF: *Általános költségmutató(k) pénzügyi termékekre*, Sigma, Vol. **XLVI** No. **3-4**, pp. 187-217 (2015).
- [2] BANYÁR JÓZSEF - VÉKÁS PÉTER: *A pénzügyi termékek ára*, Közgazdasági Szemle, Vol. **LXIII**, április, pp. 380-406 (2016).
- [3] ESMA, EBA, EIOPA [2015]: *Joint Consultation Paper PRIIPs Key Information Documents* - <https://eiopa.europa.eu/Pages/Consultations/EBA-EIOPA-and-ESMA-Consultation-Paper-on-the-PRIIPs-Key-Information-Documents.aspx> - Letöltés: 2016. július 25.
- [4] MABISZ [2009]: *TKM mutató* - <http://www.mabisz.hu/hu/tkm.html> - Letöltés: 2016. július 25.



Banyár József 1961-ben született. Habilitált egyetemi docens, a Budapesti Corvinus Egyetem Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszékének oktatója. PhD-jét 2011-ben a BCE-n szerezte (értekezése címe: *A kötelező öregségi járadékok lehetséges modelljei*), ugyanitt habilitált 2017-ben. A BCE elődjénél, a Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetemen végzett 1985-ben matematikus közgazdász szakon, s ugyanitt (akkor BKÁE) szerzett 2000-ben aktuáriusi diplomát is. A BCE-nél (illetve elődjénél) 1985 óta dolgozik matematika, politikai gazdaságtan, mikroökonómia tanszékeken, illetve a Biztosítási Oktató és Kutató

Csoportnál. Dolgozott aktuáriusként és vezetőként biztosítónál, illetve a pénzügyi felügyeletnél az elnök biztosítási- és nyugdíjtanácsadójaként. Több könyve, illetve tankönyve jelent meg angol és magyar nyelven, az MTMT-ben jelenleg több mint 100 publikációja található. Fő kutatási területe jelenleg: nyugdíjelmélet, pénzügyi fogyasztóvédelem.

BANYÁR JÓZSEF

Budapesti Corvinus Egyetem
1093 Budapest, Fővám tér 8.
jbanyar@uni-corvinus.hu

THE PRICE OF FINANCIAL PRODUCTS

JÓZSEF BANYÁR

The concept of “price” in connection with financial product is generally not used, or if still, indiscriminately. Sometimes it refers to the premium of some financial products as insurances and options, or it is regarding as a “free”, underused concept, which can be used in almost any, arbitrary meaning. But, if we examine the matter more detailed, we could concluded, that it is possible to create a price concept also for financial ”products” which is consistent with the price of other products or services. The key to this is to recognize, that these are not “products” but standardized service bundles. The topic’s main difficulty is that specialty that the (financial) service itself refers to the same tool with which the price itself is measured: the money. At all financial services money flows from the provider towards the client and vice versa. It is not allowed simply to call as price one of these flows (from the client towards the provider), but it have to recognized, that - in expected value - the flow from the client is larger than the opposite. The difference - which can be called as cost - is just the price, if we use as analogy any repair service. Another problem, that financial service - contrary to the most other services linked to physical object - has not obvious unit, and that there are many financial “products”, whose service period can last even decades. So we need a special price representation, which in turn just equal to the cost indicators of the financial products, so the problem of the representation of the price can be originated in the problem of possible cost indicators.

Keywords: cost indicators, price

Mathematics Subject Classification (2000): 62P05, 91B24

DISZKRÉT KOCKÁZATI MODELL ÁLTALÁNOS BEFIZETÉSI RÁTA MELLETT

GYÖRFI-BÁTORI ANDRÁS, MIHÁLYKÓ CSABA, MIHÁLYKÓNÉ ORBÁN ÉVA

A publikációban egy Sparre Andersen-kockázati folyamatot vizsgálunk. Egy diszkrét modellel foglalkozunk, amelyben általános befizetési rátát feltételezünk. A Gerber–Shiu-függvény egy diszkrét változatra általános esetben differenciaegyenletet adunk meg, a differenciaegyenlet megoldásának egyértelműségére feltételt adunk. Az egyenletet negatív binomiális káreloszlás esetén egy másik egyenletre transzformáljuk, amelynek megadjuk a megoldását. Eredményünket példával illusztráljuk.

1. Bevezetés

Az üzleti életben működő vállalatoknak, így a biztosítótársaságoknak is fontos, hogy üzleti környezetükből fakadó kockázataik felismerhetőek és kezelhetőek legyenek, ne veszélyeztessék működésüket. A biztosítók kockázata az általuk kínált szolgáltatás sztochasztikus természetén alapszik. Ezen kockázatok felmérése mind a biztosítótársaságok szempontjából, mind pedig a velük szerződést kötött ügyfelek számára fontos, hiszen nekik sem érdekük, hogy a társaság fizetéképtelenné váljon. Hasonló kérdések vetődnek fel ipari rendszereknél közbülső tárolók alkalmazása esetén is (lásd például [7]).

A kockázati folyamatok vizsgálata a huszadik század elején kezdett intenzíven fejlődni. Kezdőpontként Lundberg munkáját érdemes említeni 1903-ból. Később, 1957-től, nagyrészt az úgynevezett Sparre Andersen-modellt használták, amelyben a kárigények között eltelt idő eloszlását exponenciális eloszlás helyett általánosnak tekintették. Folytonos eloszlások esetén nagy áttörést hozott a Gerber–Shiu-féle diszkontált büntetőfüggvény [3] bevezetése, mivel így egyetlen függvény segítségével lehet számolni a tönkremenés valószínűségét és a tönkremenési idő várható értékét, sőt a tönkremenés idejének szórását is. A Gerber–Shiu-függvény matematikai tulajdonságainak elemzésével, speciális esetekben kiszámolásával számos publikáció foglalkozik ([3], [1], [8], [9]).

A diszkrét kockázati modellekre kevesebb figyelem jut, mint a folytonosakra, bár gyakorlati szempontból nagyobb a jelentőségük. Az irodalomban megtalálható publikációk többnyire egységnyi befizetési rátát feltételeznek, és a kárigények ennek többszöröseit teszik ki. A Gerber–Shiu-függvény diszkrét megfelelőjét

Cheng és társai írták fel 2000-ben [2]. Számos speciális esetben található eredmény vele kapcsolatban [6]-ban és az ott hivatkozott cikkekben. Li [5]-ben olyan esettel foglalkozott, amikor a károk között eltelt idő véletlen nagyságú. Ekkor a szerző rekurziót adott meg a Gerber–Shiu-függvényre. A folytonos esetben Albrecher és munkatársai adtak kváziexplicit megoldást 2010-ben olyan feltételezések mellett, hogy a károk között eltelt idő és a károk nagysága eloszlása sűrűségfüggvényének Laplace-transzformáltja racionális törtfüggvény. Megjegyezzük, hogy az irodalomban megtalálható publikációk nem foglalkoznak a felírt differencia/differenciálegyenlet megoldásának egyértelműségével, csupán adnak egy megoldást. Ezzel kapcsolatban elvi problémát jelent, hogy az egyenleteknek számos esetben nem egyértelmű a megoldása, így a megtalált megoldás nem biztos, hogy a keresett függvénnyel azonos.

Jelen cikkben általánosítjuk Li eredményeit Albrecher és társai által vizsgált irányban haladva. Általános károk közti időeloszlást és kárigényeloszlást alkalmazva vizsgáljuk a Gerber–Shiu-függvény egy speciális esetére felírt egyenlet egyértelmű megoldhatóságát, és negatív binomiális eloszlású kárigények esetén megadjuk a függvényt. A vizsgált modell annyiban is általánosabb a szokásosnál, hogy nem tételezzük fel, hogy a kárigények a befizetési ráta egész számú többszörösei. Eredményünket egy példán illusztráljuk.

2. A vizsgált modell

Vizsgáljuk a biztosítótársaság kasszájában levő pénzösszeget az idő függvényében. A biztosítótársasághoz időegységenként beérkező pénzmennyiséget jelölje $k \in \mathbb{N}^+$, a kezdőtőkét pedig $n \in \mathbb{N}$. Legyen $V(t)$ a biztosítótársaság kasszájában lévő pénzmennyiség a t . időpillanatban, ahol t nemnegatív egész szám. Jelölje $N(t)$ a bekövetkező károk számát a t . időpillanatig, és legyen Z_l a biztosítótársasághoz beérkező l . kárigény nagysága. Mindkettő véletlen mennyiség, és tegyük fel, hogy egymástól is függetlenek, valamint a Z_l , $l = 1, 2, \dots$ valószínűségi változók nemnegatív, egész értékűek és azonos eloszlásúak. Ekkor t idő eltelte után a társaság pénzmennyisége az alábbi:

$$V(t) = n + k \cdot t - \sum_{l=1}^{N(t)} Z_l, t = 0, 1, \dots$$

Jelölje $u(n)$ annak a valószínűségét, hogy n kezdőtőkéről indulva a biztosítótársaság csődbemegy, azaz a tőkéje 0 alá csökken:

$$u(n) = P(n + k \cdot t - \sum_{l=1}^{N(t)} Z_l < 0, \text{ valamely } t = 0, 1, 2, \dots \text{ esetén}). \quad (1)$$

Negatív n érték esetén értelemszerűen $u(n) = 1$.

Legyen $T_V(n)$ a tönkremenési idő n kezdőtőke esetén, amennyiben tönkremegy a biztosítótársaság, azaz

$$T_V(n) = \begin{cases} \min \{t \geq 0 : t \in \mathbb{N}\}, & V(t) < 0, \\ \infty, & \text{ha } V(t) \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Legyen

$$ET(n) = E(T_V(n) \cdot 1_{(T_V(n) < \infty)}),$$

$$D^2T(n) = E(T_V^2(n) \cdot 1_{(T_V(n) < \infty)}) - E^2(T_V(n) \cdot 1_{(T_V(n) < \infty)}),$$

feltéve, hogy a várható érték és a szórásnégyzet véges. Vezessük be továbbá a Gerber–Shiu-féle diszkontált függvény diszkrét verzióját abban a speciális esetben, amikor a Gerber–Shiu-függvény nem függ a csőd nagyságától és a csőd bekövetkezése előtt felhalmozott tőke értékétől:

$$\varphi(n, z) = E(z^{-T_V(n)} \cdot 1_{(T_V(n) < \infty)}), \quad z \geq 1. \quad (2)$$

Látható, hogy $\varphi(n, z)$ minden $n \in \mathbb{N}$ és $z \geq 1$ esetén 0 és 1 közé esik, azaz $\varphi(n, z)$ jól definiált. Látható, hogy $n < 0$ esetén $\varphi(n, z) = 1$. Minden rögzített z esetén n -ben és rögzített n esetén z -ben monoton fogy. Továbbá fennáll, hogy

$$\varphi(n, 1) = u(n), \quad ET(n) = -\frac{\partial \varphi(n, z)}{\partial z} \Big|_{z=1}, \quad (3)$$

$$D^2T(n) = \frac{\partial^2 \varphi(n, z)}{\partial z^2} \Big|_{z=1} - ET(n) - (ET(n))^2. \quad (4)$$

Legyen $t_0 = 0$, és jelölje az $(l - 1)$. és az l . kárigény között eltelt időt t_l , $l = 1, 2, 3, \dots$ A t_l valószínűségi változókról feltételezzük, hogy egymástól és a Z_l valószínűségi változóktól is függetlenek és azonos eloszlásúak. A károk között eltelt idő eloszlását jelölje $f(j) = P(t_l = j)$, $j = 0, 1, \dots$, míg a károk nagyságának eloszlását $g(i) = P(Z_l = i)$, $i = 1, 2, \dots$ A t_l lehetséges értékeinél megengedjük a $j = 0$ értéket, de a károk nagysága csak pozitív egész szám lehet. Az irodalomban vizsgált eseteknél ez többszöröse az egységnyi idő alatt befizetett pénzmennyiségnek, mi most annak törtrészét is megengedjük. Mind a t_l , mind a Z_l valószínűségi változók esetén véges szórást feltételezünk.

A folyamat viselkedését alapvetően befolyásolja, hogy az egységnyi idő alatt befizetett és a kifizetett pénzösszeg várható értéke hogy viszonyul egymáshoz. Az

$$E(Z_l) < k \cdot E(t_l) \quad (5)$$

egyenlőtlenség azt fejezi ki, hogy a befizetett pénzmennyiség várható értéke több a kifizetettnél, ezt nettó profit feltételnek nevezik. A nagy számok erős törvénye és a Chung–Fuchs-tétel alkalmazásával belátható, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u(n) = 0, \text{ ha } E(Z_l) < k \cdot E(t_l),$$

$$u(n) = 1 \quad \forall n \geq 0, \text{ ha } k \cdot E(t_l) \leq E(Z_l).$$

3. A $\varphi(n, z)$ -re vonatkozó összefüggések

Az első kárkifizetés időpontja és a kárkifizetés nagysága szerinti feltételes várható érték alkalmazásával (2)-re az alábbi egyenlet írható fel:

$$\varphi(n, z) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{n+jk} \varphi(n + jk - i, z) f(j) g(i) z^{-j} + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=n+jk+1}^{\infty} f(j) g(i) z^{-j}, \quad (6)$$

ezért (3), (4) miatt az

$$X(n, z) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{n+jk} X(n + jk - i, z) f(j) g(i) z^{-j} + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=n+jk+1}^{\infty} f(j) g(i) z^{-j} \quad (7)$$

egyenlet megoldására vagyunk kíváncsiak. A (7) egyenlet megoldása azonban általánosan nem egyértelmű. Például $z = 1$ esetén a konstans 1 sorozat kielégíti az egyenletet. Mi a korlátos, sőt a 0-hoz tartó megoldásokat keressük. Ezzel kapcsolatban az alábbi állítás bizonyítható a kontrakciós elv segítségével:

3.1. TÉTEL. *Ha $f(0) < 1$, akkor minden $1 < z$ esetén (7)-nek pontosan egy megoldása van a korlátos sorozatok körében. Ha $z = 1$, akkor (5) teljesülése esetén a (7) egyenletnek pontosan egy megoldása van a nullához tartó sorozatok körében.*

3.1. KÖVETKEZMÉNY. *Ha $1 < z$, akkor $f(0) < 1$ esetén (7) korlátos megoldása a (2) által definiált $\varphi(n, z)$ függvény, míg $z = 1$ esetén, ha a nettó profit feltétel teljesül, akkor az egyetlen zéróhoz konvergáló megoldása az (1) által definiált $u(n)$.*

Ezek alapján a (7) differenciaegyenlet ilyen megoldásait keressük.

Az alapegyenlet általános megoldása nem ismert. A számos vizsgált speciális eset közül (lásd [4]) tekintsük most a negatív binomiális eloszlások esetét. Ekkor az alábbi állítás bizonyítható ([4]):

3.2. TÉTEL. *Legyen a károk közt eltelt idők eloszlása általános, míg a kárigények eloszlása (eggyel eltolt) negatív binomiális eloszlás a $2 \leq s$ és $0 < q < 1$ paraméterrel, azaz*

$$g(i) = \binom{i + s - 2}{s - 1} q^{i-1} (1 - q)^s, \quad i = 1, 2, \dots$$

Ekkor (6) az alábbi alakba transzformálható:

$$\varphi(n, z) = \sum_{r=1}^s \binom{s}{r} q^r \cdot (-1)^{r+1} \varphi(n-r, z) + (1-q)^s \sum_{j=0}^{\infty} \varphi(n-1+kj, z) \cdot f(j) \cdot z^{-j}. \quad (8)$$

A Rouché-tétel segítségével belátható, hogy a (8) egyenlet karakterisztikus egyenletének $1 < z$ esetén pontosan s darab egynél kisebb abszolút értékű gyöke van, míg $z = 1$ esetén legfeljebb s az abszolút értékben egynél kisebb gyökök száma. A gyökök ismeretében $\varphi(n, z)$ felírható a szokásos módon, speciálisan egyszerűes gyökök esetén ezek n -edik hatványai lineáris kombinációjaként. A gyököket $\mu_i(z)$ -vel jelölve ekkor a $c_i(z)$ együtthatókra az alábbi összefüggések teljesülnek ($l = 1, 2, \dots, s$):

$$c_1(z) \frac{\mu_1^{l-1}(z)}{(\mu_1(z) - q)^l} + c_2(z) \frac{\mu_2^{l-1}(z)}{(\mu_2(z) - q)^l} + \dots + c_s(z) \frac{\mu_s^{l-1}(z)}{(\mu_s(z) - q)^l} = \left(\frac{1}{1 - q} \right)^l. \quad (9)$$

Ez egyértelműen megoldható, és megoldásával megkaphatjuk $\varphi(n, z)$ -t.

4. Alkalmazás

Egy biztosítótársasághoz naponta érkezik 3 millió forint bevétel a biztosított felektől. Tételezzük fel, hogy az előző kárigényhez viszonyítva 0,35 valószínűséggel aznap, 0,25 valószínűséggel a következő nap, 0,4 valószínűséggel 2 nap múlva érkezik legközelebb kárigény. Tegyük fel, hogy a károk nagysága negatív binomiális eloszlású $s = 2$ paraméterrel, és átlagosan naponta 2,5 millió forintot kell kifizetni. Válasszuk időegységnek az 1 napot, pénzegységnek az 1 millió Ft-ot.

Jelen példában $k = 3$, $f(0) = 0,35$, $f(1) = 0,25$, $f(2) = 0,4$. Felhasználva a negatív binomiális eloszlás várható értékének képletét, $q = 0,4286$.

A $\varphi(n, z)$ -re vonatkozó egyenlet az alábbi:

$$\begin{aligned} \varphi(n, z) &= 2q\varphi(n-1, z) - q^2\varphi(n-2, z) + \\ &(1-q)^2 \cdot (\varphi(n-1, z) \cdot 0,35 + \varphi(n+2, z) \cdot 0,25 \cdot z^{-1} + \varphi(n+5, z) \cdot 0,4 \cdot z^{-2}). \end{aligned} \quad (10)$$

(10) karakterisztikus egyenlete

$$0,1306\mu(z)^7 + 0,0816\mu(z)^4 \cdot z - \mu(z)^2 \cdot z^2 + 0,9715\mu(z) \cdot z^2 - 0,1837 \cdot z^2 = 0. \quad (11)$$

Ennek $z = 1$ esetén két megfelelő gyöke a $\mu_1 = -0,2564$ és $\mu_2 = 0,7315$, a hozzájuk tartozó konstansok (9) alapján $c_1 = -0,0185$ és $c_2 = 0,7315$. Tehát

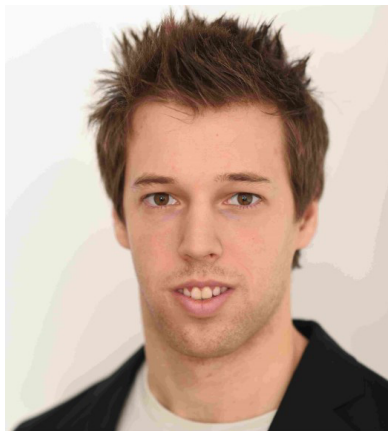
$$\varphi(n, 1) = u(n) = c_1 \cdot \mu_1^n + c_2 \cdot \mu_2^n = -0,0185 \cdot (-0,2564)^n + 0,7315 \cdot 0,7315^n.$$

Köszönetnyilvánítás

A kutatást részben az EMMI ÚNPK-16-1-1. számú Új Nemzeti Kiválóság Programja, részben a VKSZ_12-1-2013-0088 Felhó alapú intelligens informatikai szolgáltatások kialakítása az IBM Magyarországi Kft. és a Pannon Egyetem együttműködésében című projekt támogatta. A támogatásokat a szerzők köszönik.

Hivatkozások

- [1] ALBRECHER, H., CONSTANTINESCU, C., PIRSIC, G., REGENSBURGER, G., AND ROSENKRANZ, M.: *An algebraic operator approach to the analysis of Gerber–Shiu functions*, Insurance: Mathematics and Economics, Vol. **46** No. **1**, pp. 42-51 (2010). DOI: [10.1016/j.insmatheco.2009.02.002](https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2009.02.002)
- [2] CHENG, S., GERBER, H. U., AND SHIU, E. S.: *Discounted probabilities and ruin theory in the compound binomial model*, Insurance: Mathematics and Economics, Vol. **26** No. **2**, pp. 239-250 (2000). DOI: [10.1016/S0167-6687\(99\)00053-0](https://doi.org/10.1016/S0167-6687(99)00053-0)
- [3] GERBER, H. U. AND SHIU, E. S.: *On the time value of ruin*, North American Actuarial Journal, Vol. **2** No. **1**, pp. 48-72 (1998). DOI: [10.1080/10920277.1998.10595671](https://doi.org/10.1080/10920277.1998.10595671)
- [4] GYÖRFI-BÁTORI, A.: *Diszkrét kockázati folyamatok matematikai és számítógépes elemzése alkalmazásokkal*, PE-MIK OTDK dolgozat, URL: <https://drive.google.com/open?id=0B8Fej12XGLu1VUh2Nmp0S2NjN2M> (2017).
- [5] LI, S.: *On a class of discrete time renewal risk models*, Scandinavian Actuarial Journal, Vol. **2005** No. **4**, pp. 241-260 (2005). DOI: [10.1080/03461230510009745](https://doi.org/10.1080/03461230510009745)
- [6] LI, S., LU, Y., AND GARRIDO, J.: *A review of discrete-time risk models*, RACSAM-Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas, Vol. **103** No. **2**, pp. 321-337 (2009). DOI: [10.1007/978-90-313-7627-8_103](https://doi.org/10.1007/978-90-313-7627-8_103)
- [7] MIHÁLYKÓ, C. AND ORBÁN-MIHÁLYKÓ, É.: *Sizing Intermediate Storages in Discrete Models under Stochastic Operational Conditions*, Periodica Polytechnica Chemical Engineering, Vol. **60** No. **3**, pp. 192-200 (2016). DOI: [10.1016/j.repl.2016.06.044](https://doi.org/10.1016/j.repl.2016.06.044)
- [8] MIHÁLYKÓ, É. O. AND MIHÁLYKÓ, C.: *Mathematical investigation of the Gerber–Shiu function in the case of dependent inter-claim time and claim size*, Insurance: Mathematics and Economics, Vol. **48** No. **3**, pp. 378-383 (2011). DOI: [10.1016/j.insmatheco.2011.01.005](https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2011.01.005)
- [9] ORBÁN-MIHÁLYKÓ, É. AND MIHÁLYKÓ, C.: *Necessary and sufficient condition for the boundedness of the Gerber–Shiu function in dependent Sparre Andersen model*, Miskolc Mathematical Notes, Vol. **15** No. **1**, pp. 159-170 (2014). DOI: [10.1215/9780822399674-007](https://doi.org/10.1215/9780822399674-007)

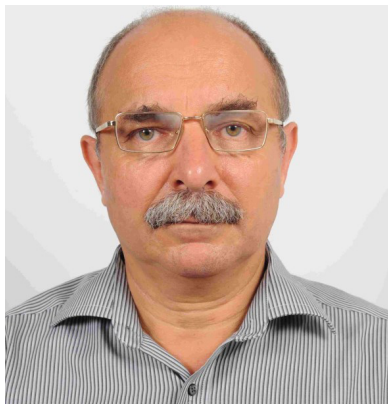


Gyórfi-Bátori András 1995-ben született Kaposváron. Egyetemi tanulmányai során az alapképzést a Pannon Egyetem Műszaki Informatikai Karán végezte mérnökinformatikus szakon, majd a mesterképzést a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Villamosmérnöki Karán végezte szintén mérnökinformatikus szakon, kitüntetéses diplomával. A matematikát már az általános iskolában és gimnáziumban is versenyszerűen űzte, és több országos versenyen is kiemelkedő eredményeket ért el. Az egyetemen ugyan az informatikai szakot választotta, de a matematikaversenyeket, és a matematikában való kutatást nem hagyta abba, így jutott

el odáig, hogy az Országos Tudományos Diákköri Konferencián egy matematikai és informatikai témában első helyet szerezzen. Az egyetem végzetével az Interticket Kft.-nél helyezkedett el programozó és matematikai modellező szakemberként.

GYÓRFI-BÁTORI ANDRÁS

Pannon Egyetem
Matematika Tanszék
8200 Veszprém, Egyetem u. 10.
gyorfi.batori.andras@gmail.com



Dr. Mihálykó Csaba 1962-ben született Veszprém-ben. 1987-ben szerzett az Eötvös Loránd Tudományegyetemen okleveles matematikus végzettséget, majd 1996-ban alkalmazott matematika területén PhD-t ugyanott. 1994-ben Farkas Gyula-émlékdíjat, 2000-ben Bolyai János Kutatási Ösztöndíjat, 2019-ben Mestertanár Aranyérmet kapott. 1987 óta dolgozik Veszprém-ben a Pannon Egyetemen, illetve jogelődjein, jelenleg a Matematika Tanszéken egyetemi docensként. Kutatási területei: kockázati folyamatok, döntésmélet, matematikai modellezés. Eddig több mint 135 tudományos közle-

ménye jelent meg, ezek közül 51 tudományos folyóiratban. Összes független hivatkozásainak száma meghaladja a 220-at, Hirsch-indexe 8.

MIHÁLYKÓ CSABA

Pannon Egyetem
Matematika Tanszék
8200 Veszprém, Egyetem u. 10.
mihalyko@almos.uni-pannon.hu

Mihálykóné Orbán Éva arcképe és életrajza a szám egy másik cikkénél jelenik meg, mely cikknek szintén szerzője.

ORBÁN-MIHÁLYKÓ ÉVA

Pannon Egyetem
Matematika Tanszék
8200 Veszprém, Egyetem u. 10.
orbane@almos.uni-pannon.hu

A DISCRETE SPARRE ANDERSEN RISK MODEL WITH GENERAL
INCOME RATE

ANDRÁS GYŐRFI-BÁTORI, CSABA MIHÁLYKÓ, ÉVA ORBÁN-MIHÁLYKÓ

A discrete Sparre Andersen risk process with general income rate is investigated. A discrete version of the Gerber-Shiu function is introduced and a difference equation is set up for it. The existence and the uniqueness of its solution is investigated and an analytical solution is given in the case when the claim size has negative binomial distribution. An example is given for illustrating the computations.

Keywords: risk process, discrete model, negative binomial claim size distribution, analytical solution.

Mathematics Subject Classification (2000): 91B30, 39A60.

ÁLTALÁNOSÍTOTT THURSTONE-MÓDSZER ALKALMAZÁSOKKAL

MIHÁLYKÓNÉ ORBÁN ÉVA, MIHÁLYKÓ CSABA, KAJTÁR PATRIK

Publikációnkban egy páros összehasonlítási módszert mutatunk be, amely segítségével több döntési kategóriát megengedve tudjuk elemezni az összehasonlítási eredményeket. A cikkben példát is mutatunk az alkalmazásra, amely során női teniszcsillagok rangsorát állítjuk fel egymás ellen játszott mérkőzéseik alapján.

1. Bevezetés

Páros összehasonlításokat gyakran alkalmaznak a döntéelméletben objektumok összehasonlításakor abban az esetben, ha az összehasonlítás kritériuma valamilyen nehezen skálázható szubjektív szempont. Számos példát tartalmaz az alkalmazásra például [10] és az általa hivatkozott publikációk. Magyar kutatók is intenzíven foglalkoznak a területtel [2].

A páros összehasonlítási módszerek két fő csoportba sorolhatók. Az egyikbe tartozók páros összehasonlítás mátrixon alapulnak. A mátrix $a_{i,j}$ eleme úgy interpretálandó, hogy az i -edik és a j -edik objektum összehasonlításakor az i -edik elem „hányszorosán” jobb, mint a j -edik. A módszert Saaty dolgozta ki, és AHP néven ismert [9]. A kiértékelés leggyakrabban használt módszere a sajátvektor módszer. Ennek előnye a könnyű kivitelezhetőség, valamint az, hogy a koordináták súlyokként is értelmezhetők, ezáltal többszintű döntést tesznek lehetővé. Hátránya, hogy ilyen formájában csak teljes összehasonlítás esetén működik, valamint az objektumok egyenlőségének tesztelése nem kidolgozott. Nem teljes összehasonlítás esetén is működő módszer például a logaritmikus legkisebb négyzetek módszere (LLSM), amely egy optimalizációs problémához vezet, s egy lineáris egyenletrendszer megoldását igényli. [2]-ben a szerzők szükséges és elégséges feltételt fogalmaznak meg LLSM alkalmazásakor nemteljes összehasonlítás esetére a paraméterek egyértelmű meghatározására.

A másik gyakran alkalmazott eljárás során az értékelendő objektumok mögé egy-egy látens valószínűségi változót képzelnek, és az értékelés során a valószínűségi változók különbségéről döntenek. A látens valószínűségi változók eloszlásának különbségére Thurstone normális eloszlást javasolt, de a leggyakrabban

logisztikus eloszlást használnak [3]. Legtöbbször két kategóriát engednek meg (jobb/rosszabb), azonban a mögöttes gondolatmenet általánosítható több döntési kategóriára is. Döntetlent is megenged pl. [8], illetve több kategóriát is alkalmaz [1]. Széleskörű áttekintést ad a látens valószínűségi változókkal kapcsolatos modellekről [4]. A leggyakrabban alkalmazott megoldási módszer ezen modellek esetén az, hogy a paraméterekre egy lineáris egyenletrendszeret állítanak fel, amelynek egyik oldalán a kategóriák becsült valószínűségeinek valamely függvénye áll. Az eredmények közti inkonzisztencia az egyenletrendszer pontos megoldását általában nem teszi lehetővé, csak a megoldás legkisebb négyzetek módszerével történő közelítését. A megoldást többnyire abban az esetben adják meg, amikor minden objektum minden más objektummal össze van hasonlítva. A becsült paraméterek egyértelmű létezése a valószínűségek függvényének képezhetőségétől is függ, megoldhatóságra vonatkozó tételek több kategória megengedése esetén nem találhatók. A hiányzó összehasonlításokból adódó problémákat [4] külön megemlíti.

Mi visszanyúlunk Thurstone eredeti gondolatához. Normális eloszlású látens valószínűségi változókat feltételezünk, az objektumok sorrendjének a várható értékek sorrendjét tekintjük. Több döntési kategóriát is megengedünk. Az egyes kategóriák bekövetkezésének valószínűségeit a paraméterek függvényében felírjuk. A paramétereket maximum likelihood (ML) becsléssel becsüljük. Ez a becslési módszer nemteljes összehasonlítások esetén is természetes módon működik. Publikációnkban bemutatjuk az általános modellt, és néhány esetben elégséges feltételt adunk az ML-becslés létezésére és egyértelműségére. Az ML-becslések aszimptotikus normalitása alapján a várható értékekre konfidenciaintervallumok konstruálhatók. Az ML-becslések további előnye, hogy hozzájuk kapcsolódóan a hipotézisvizsgálatok is kidolgozottak. Emellett a várható értékek súlyokká konvertálhatók, így lehetővé válik többszintű döntések kivitelezése is.

2. Az általános modell

Legyen a rangsorolandó objektumok száma n , jelöljük őket $1, 2, \dots, n$ -nel. Az i -edik objektumhoz tartozó látens valószínűségi változó legyen ξ_i , $i = 1, 2, \dots, n$. A lehetséges döntési kategóriák száma legyen s ($2 \leq s$), és a döntéseket jelölje C_1, C_2, \dots, C_s . Ezek egymást páronként kizárják. Nekik megfelelően a valós számok halmazát s darab diszjunkt részintervallumra (I_k , $k = 1, 2, \dots, s$) osztjuk, $I_j \cap I_k = \emptyset$, ha $j \neq k$ és $\mathbb{R} = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_s$. Ha az i -edik és a j -edik objektum összehasonlításánál a döntés C_k , akkor $\xi_i - \xi_j \in I_k$. Feltételezzük, hogy $\xi_i \sim N(m_i, \sigma^2)$, $i = 1, 2, \dots, n$ független valószínűségi változók. Ezzel a feltételezéssel más publikációkban is találkozhatunk. Az m_i , $i = 1, 2, \dots, n$ várható értékek sorrendje adja meg az objektumok sorrendjét.

Az általánoság további korlátozása nélkül feltételezhető, hogy $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ekkor a döntések az $\eta_{i,j} = \xi_i - \xi_j \sim N(m_i - m_j, 1)$, $i = 1, \dots, n-1$, $j = i+1, \dots, n$ valószínűségi változókról szólnak. A különbségekre független megfigyeléseket tételezünk fel.

Jelölje $A_{i,j,k}$ azt a számot, ahány döntés a C_k kategóriát jelöli meg az i . és a j . objektum összehasonlítása során, és álljon az A háromdimenziós mátrix az $A_{i,j,k}$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$, $j = i + 1, \dots, n$, $k = 1, 2, \dots, s$ elemekből. Az intervallumokat meghatározzák a végpontjaik, ezeket jelöljük az alábbi módon:

$$-\infty = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{s-1} < a_s = \infty.$$

Használva a $\Phi(-\infty) = 0$ és $\Phi(\infty) = 1$ megfeleltetést, ahol Φ a standard normális eloszlásfüggvény, a likelihood függvény az alábbi:

$$L(A|m_1, \dots, m_n, I_1, \dots, I_s) = L(A|m_1, \dots, m_n, a_1, \dots, a_{s-1}) = \tag{1}$$

$$\prod_{k=1}^s \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=i+1}^n (\Phi(a_k - (m_i - m_j)) - \Phi(a_{k-1} - (m_i - m_j)))^{A_{i,j,k}},$$

amit $m = (m_1, \dots, m_n)$ -ben valamint (a_1, \dots, a_{s-1}) -ben maximalizálva kapjuk a paraméterek maximum likelihood becslését.

A modellben természetes módon feltételezzük a szimmetriát, azaz $a_i = -a_{s-i}$, $i = 1, 2, \dots, [s/2]$. A becslt várható értékekből exponenciális transzformáció és normálás után súlyok képezhetők. A várható értékek azonosságának tesztelésére a likelihood hányados próba alkalmazható. A becslések létezésére és egyértelműségére a következő fejezetben speciális esetekben elégséges feltételeket adunk.

3. Speciális esetek

Ebben a fejezetben a legfontosabb speciális eseteket mutatjuk be, és ezekben elégséges feltételt adunk az ML-becslés létezésére és egyértelműségére. Ennek kulcsmotívuma egy gráf összefüggősége, amelyben a csúcsok mindig az értékelendő objektumok, az élek viszont más-más feltételek teljesülése esetén vannak behúzva. Példát említünk arra, amikor a modell természetes módon használható.

1. A klasszikus Thurstone-modell - jobb/rosszabb opciók esete: $s = 2$

Ebben az esetben két kategória van a döntésre, a jobb és a rosszabb, ami két intervallumot jelent az $a_1 = 0$ ponttal elválasztva. Az ML-becslés létezésével és egyértelműségével kapcsolatban az alábbi állítást bizonyítottuk:

3.1. TÉTEL. *Definiáljuk a GR_2 gráfot a következőképpen: az i . és j . objektum akkor legyen összekötve, ha $0 < A_{i,j,1} \cdot A_{i,j,2}$. Legyen $m_1 = 0$. Ha a GR_2 gráf összefüggő, akkor (1)-nek létezik maximuma, és a maximumhely egyértelmű.*

Ezt a modellt alkalmaztuk gyártási hibák összehasonlításánál [5].

2. Jobb, egyforma, rosszabb opciók esete: $s = 3$

Ebben az esetben az i . és a j . objektumot egyformának tekintjük, ha a látens valószínűségi változók egymástól való eltérése nem halad meg egy bizonyos szintet. A számegyenes 3 részre van osztva, a szimmetria miatt egy osztópont bevonása és becslése szükséges. Az ML-becslés létezésével és egyértelműségével kapcsolatban az alábbi állítást bizonyítottuk [7]:

3.2. TÉTEL. *Legyen $s = 3$ vagy $s = 4$. Tegyük fel, hogy valamely $i_1 < j_1$ esetén $0 < A_{i_1, j_1, k}$, valamely $1 < k < s$ esetén. Továbbá tegyük fel, hogy valamely $i_2 < j_2$ esetén $0 < A_{i_2, j_2, k}$, és $0 < A_{i_2, j_2, l}$ fennáll valamely $|k - l| > 1$ pár esetén. Legyen a GR_3 gráf az alábbi módon definiálva: az (i, j) $i < j$ csúcspár akkor van összekötve, ha $0 < A_{i, j, k}$ valamely $k = 2, 3, \dots, s - 1$ esetén, vagy $0 < A_{i, j, 1} \cdot A_{i, j, s}$. Rögzítsük az $m_1 = 0$ értéket. Ha a GR_3 gráf összefüggő, akkor az (1) likelihood függvény maximuma létezik és egyértelmű.*

A modell jól alkalmazható olyan sportágak esetében, ahol döntetlennel vagy győzelemmel, vereséggel végződhetnek a mérkőzések. Működik nem teljes összehasonlítások esetén is, így olyan játékosok rangsora is elkészíthető, akik között voltak olyanok is, akik soha nem játszottak egymás ellen.

3. Sokkal jobb, jobb, rosszabb, sokkal rosszabb opciók esete: $s = 4$

Ebben az esetben az egyforma nem megengedett, viszont ha a különbség abszolút értéke meghalad egy szintet, akkor az egyik objektumot sokkal jobbnak/sokkal rosszabbnak tekintjük a másiknál. Ebben az esetben a szimmetria miatt a három osztópont egy paraméterrel megadható. Az ML-becslés létezésével és egyértelműségével kapcsolatos tétel megegyezik a 3.2 tétellel $s = 4$ esetén. A módszer jól alkalmazható például olyan sportágak esetén, ahol döntetlen ugyan nem lehet a mérkőzések kimenetele, de nagy győzelem, vagy súlyos vereség definiálható. Ilyen sportág lehet például a tenisz. A jobb/sokkal jobb besorolást itt és más esetekben is a terület szakértőire lehet bízni. Példát a 4. fejezetben mutatunk.

4. Sokkal jobb, jobb, egyforma, rosszabb, sokkal rosszabb opciók esete: $s = 5$

Ebben az esetben két objektum egyforma, ha a látens valószínűségi változók különbsége abszolút értékben nem halad meg egy szintet. Ha azonban egy ennél nagyobb szintet is meghalad, akkor sokkal jobb/sokkal rosszabb értékelés alakul ki. A 4 osztópont két a_i változó bevezetését igényli. A likelihood függvény maximumának létezésével és egyértelműségével kapcsolatban az alábbi tételt bizonyítottuk:

3.3. TÉTEL. *Tegyük fel, hogy valamely $i_1 < j_1$ esetén $0 < A_{i_1, j_1, 3}$, valamint valamely $i_2 < j_2$ esetén $0 < A_{i_2, j_2, 2}$, vagy $0 < A_{i_2, j_2, 4}$, továbbá valamely $i_3 < j_3$ esetén $0 < A_{i_3, j_3, 1}$, és $0 < A_{i_3, j_3, 5}$ fennáll. Legyen a GR_5 gráfban az (i, j) $i < j$ csúcspár összekötve, ha $0 < A_{i, j, 3} \cdot A_{i, j, k}$ valamely $k = 1, 2, 4, 5$ esetén, vagy $0 < A_{i, j, 2} \cdot A_{i, j, 4}$, vagy $0 < A_{i, j, 1} \cdot A_{i, j, 4}$, vagy $0 < A_{i, j, 2} \cdot A_{i, j, 5}$. Ha a GR_5 gráf összefüggő, akkor $m_1 = 0$ rögzítése után az (1) likelihood függvény maximuma létezik és egyértelmű.*

A modellt alkalmaztuk fényforrások összehasonlítása esetén és a kapott eredményeket publikáltuk a [6] publikációban.

4. Alkalmazás

Most mutatunk egy egyszerű alkalmazást $s = 4$ esetén női tenisz világklasszisták összehasonlítására. Kiemelkedő női tenisz játékosok voltak, a világranglistát is vezették a következő személyek: Chris Evert (#1), Steffi Graf (#2), Martina Navratilova (#3), Szeles Mónika (#4) és Serena Williams (#5). A női tornákon többnyire olyan mérkőzéseket játszanak, ahol az eredmények 2:0, 2:1, 1:2 vagy 0:2. Ezeket tekintettük a 4 kategóriának. Az 5 teniszező egymás ellen játszott ATP-mérkőzéseinek végeredményeit a <http://www.wtatennis.com/head2head/> honlapról töltöttük le. Az egymás elleni eredményeket az 1. táblázat első fele tartalmazza. A meccsek eredményei azt mutatják, hogy Szeles Navratilova kivételével mindenkinél gyengébb, viszont Navratilova jobb, mint Evert és jobb, mint Graf. Így az egymás elleni eredmények inkonzisztensek, nem adnak könnyen megállapítható sorrendet. Bár nem mindenki játszott mindenkivel, de az ML-becslés létezésének és egyértelműségének feltételei könnyen láthatóan teljesülnek. A likelihood függvényt numerikusan optimalizáltuk, és a várható értékek ML-becslésére sorrendben az alábbi eredményeket kaptuk: $\hat{m}_5 = 0,374, \hat{m}_3 = 0,084, \hat{m}_2 = 0,066, \hat{m}_1 = 0, \hat{m}_4 = -0,067$. A belőlük $w_i = \exp(\hat{m}_i) / \sum_{j=1}^5 \exp(\hat{m}_j)$ transzformációval kialakított súlyvektor $\underline{w} = (0,180, 0,193, 0,196, 0,169, 0,262)$. Az egymás elleni eredmények becsült valószínűségeit az 1. táblázat második fele tartalmazza.

Játékosok		Az eredmények				A becsült valószínűségek				
„A”	„B”	2:0	2:1	1:2	0:2	2:0	2:1	1:2	0:2	„A” győz
1	2	6	0	1	6	0,289	0,185	0,190	0,336	0,474
1	3	23	14	13	30	0,283	0,184	0,191	0,342	0,467
1	4	2	0	1	0	0,336	0,191	0,184	0,289	0,527
1	5	0	0	0	0	0,194	0,160	0,192	0,454	0,354
2	3	4	5	3	6	0,306	0,187	0,189	0,318	0,493
2	4	5	5	2	3	0,361	0,192	0,180	0,267	0,553
2	5	0	1	1	0	0,212	0,167	0,193	0,428	0,379
3	4	4	3	5	5	0,367	0,193	0,179	0,261	0,560
3	5	0	0	0	0	0,218	0,168	0,193	0,421	0,386
4	5	0	1	2	2	0,176	0,154	0,190	0,480	0,330

1. táblázat. Az egymás elleni eredmények és a becsült valószínűségek.

Összefoglalva elmondhatjuk, hogy szigorúan csak az egymás elleni mérkőzések eredményeit figyelembe véve, a bemutatott módszerrel elvégezve a kiértékelést, a vizsgált női teniszklasszisok sorrendje Williams, Navratilova, Graf, Evert és Szeles. Összehasonlítóképpen megemlítjük, hogy a [2]-ben vizsgált LLSM segítségével kiértékelve az eredményeket, a páros összehasonlítás mátrixba a nyert és veszített meccsek arányát írva, a $\underline{w}^{LLSM} = (0,149, 0,222, 0,153, 0,133, 0,343)$ súlyokhoz jutunk. Így a játékosok rangsora Williams, Graf, Navratilova, Evert, Szeles. Tehát a két módszer mind súlyokban, mind sorrendben különböző eredményt szolgáltat.

Köszönetnyilvánítás

A szerzők köszönetüket fejezik ki az EFOP-3.6.1-16-2016-00015. számú projekt anyagi támogatásáért.

Hivatkozások

- [1] AGRESTI, A.: *Analysis of ordinal paired comparison data*, Applied Statistics, Vol. **41** No. **2**, pp. 287-297 (1992). DOI: [10.2307/2347562](https://doi.org/10.2307/2347562)
- [2] BOZÓKI, S., FÜLÖP, J., AND RÓNYAI, L.: *On optimal completion of incomplete pairwise comparison matrices*, Mathematical and Computer Modelling, Vol. **52** No. **1**, pp. 318-333 (2010). DOI: [10.1016/j.mcm.2010.02.047](https://doi.org/10.1016/j.mcm.2010.02.047)
- [3] BRADLEY, R. A. AND TERRY, M. E.: *Rank analysis of incomplete block designs: I. The method of paired comparisons*, Biometrika, Vol. **39** No. **3/4**, pp. 324-345 (1952). DOI: [10.1093/biomet/39.3-4.324](https://doi.org/10.1093/biomet/39.3-4.324)
- [4] CATTELAN, M.: *Models for paired comparison data: A review with emphasis on dependent data*, Statistical Science, Vol. **39** No. **3/4**, pp. 412-433 (2012). DOI: [10.1214/12-STS396](https://doi.org/10.1214/12-STS396)
- [5] ORBÁN-MIHÁLYKÓ, É., BOGNÁR, F., ÉS MIHÁLYKÓ, C.: *Meghibásodások kockázati tényezőinek statisztikai kiértékelése szubjektív vélemények alapján*, A karbantartás új szerepe című nemzetközi konferencia kiadványa, pp. 161-173 (2016).
- [6] ORBÁN-MIHÁLYKÓ, É., KOLTAY, L., SZABÓ, F., CSUTI, P., KÉRI, R., AND SCHANDA, J.: *A New Statistical Method for Ranking of Light Sources based on Subjective Points of View*, Acta Polytechnica Hungarica, Vol. **12** No. **8**, pp. 195-214 (2015). DOI: [10.12700/APH.12.8.2015.8.11](https://doi.org/10.12700/APH.12.8.2015.8.11)
- [7] ORBÁN-MIHÁLYKÓ, É., MIHÁLYKÓ, C., AND KOLTAY, L.: *Generalization of the Thurstone method for multiple choices and incomplete paired comparisons*, Central European Journal of Operations Research, Vol. **27**, No. **1**, pp. 133-159 (2019). DOI: [10.1007/s10100-017-0495-6](https://doi.org/10.1007/s10100-017-0495-6)
- [8] RAO, P. V. AND KUPPER, L. L.: *Ties in paired-comparison experiments: A generalization of the Bradley-Terry model*, Journal of the American Statistical Association, Vol. **62** No. **317**, pp. 194-204 (1967). DOI: [10.2307/2282923](https://doi.org/10.2307/2282923)
- [9] SAATY, T. L.: *How to make a decision: the analytic hierarchy process*, European Journal of Operational Research, Vol. **48** No. **1**, pp. 9-26 (1990). DOI: [10.1016/0377-2217\(90\)90057-I](https://doi.org/10.1016/0377-2217(90)90057-I)
- [10] UREÑA, R., CHICLANA, F., MORENTE-MOLINERA, J. A., AND HERRERA-VIEDMA, E.: *Managing incomplete preference relations in decision making: a review and future trends*, Information Sciences, Vol. **302**, pp. 14-32 (2015). DOI: [10.1016/j.ins.2014.12.061](https://doi.org/10.1016/j.ins.2014.12.061)



Dr. Mihálykóné dr. Orbán Éva 1964-ben született Pápán. 1987-ben végzett az Eötvös Loránd Tudományegyetemen okleveles matematikusként. 1991-ben egyetemi doktori címet szerzett a Veszprémi Egyetemen, majd 2004-ben PhD-fokozatot informatika tudományterületen a Pannon Egyetemen. 1987 óta dolgozik Veszprémben a Pannon Egyetemen, illetve jogelődjein, jelenleg a Matematika Tanszéken egyetemi docensként. Kutatási területei: kockázati folyamatok, döntéelmélet, sztochasztikus modellezés. 60 tudományos közleménye jelent meg, közülük 27 folyóiratcikk, melyekre összességében 90 független hivatkozást kapott.

MIHÁLYKÓNÉ ORBÁN ÉVA

Pannon Egyetem
Matematika Tanszék
8200 Veszprém, Egyetem u. 10.
orbane@almos.uni-pannon.hu

Mihálykó Csaba arcképe és életrajza a szám egy másik cikkénél jelenik meg, mely cikknek szintén szerzője.

MIHÁLYKÓ CSABA

Pannon Egyetem
Matematika Tanszék
8200 Veszprém, Egyetem u. 10.
mihalyko@almos.uni-pannon.hu



Kajtár Patrik mérnökinformatikusként végzett a veszprémi Pannon Egyetemen (2017), majd ugyanitt elvégezte a mérnökinformatikus MSc-képzést is egy évvel később (2018). Eközben szoftverfejlesztő mérnökként, majd projektmenedzserként dolgozott a veszprémi Continentalnál. Jelenleg vezetés és szervezés mesterszakot végez a Pannon Egyetemen és projektmenedzserként dolgozik a budapesti AIMotive-nál, ahol mesterséges intelligencia gyorsító chip kutatás-fejlesztési projekteit vezeti.

KAJTÁR PATRIK

Pannon Egyetem
Matematika Tanszék
8200 Veszprém, Egyetem u. 10.
kajtarpatrik96@gmail.com

A GENERALIZATION OF THE THURSTONE METHOD WITH APPLICATIONS

ÉVA ORBÁN-MIHÁLYKÓ, CSABA MIHÁLYKÓ, PATRIK KAJTÁR

In this paper we present a generalization of Thurstone's method for multiple choices. We apply the maximum likelihood method for the estimation of the parameters. In special cases we present sufficient conditions for the existence and uniqueness of the maximizer. We also present practical cases for the applications and we also present an example for the evaluation of female tennis players' results.

Keywords: paired comparison, Thurstone method, maximum likelihood estimation, testing hypotheses, confidence interval.

Mathematics Subject Classification (2000): 62J15, 62H15.

NAVIGÁCIÓ HÁLÓZATOKBAN BOLYAI JÁNOS GEOMETRIÁJA SEGÍTSÉGÉVEL

BÍRÓ JÓZSEF, GULYÁS ANDRÁS, RÉTVÁRI GÁBOR, KÖRÖSI ATILA,
HESZBERGER ZALÁN, MAJDÁN ANDRÁS

Ebben a tanulmányban röviden összefoglaljuk a Bolyai János Matematika Társulat 2016. évi Alkalmazott Matematikai Konferenciáján elhangzott előadás lényegét, amely a különböző komplex hálózatokban történő navigációról szól. Jelen cikkben kiemelt figyelmet fordítunk az ún. skálafüggetlen hálózatokra, amelyekhez sok szempontból Bolyai János hiperbolikus geometriája jobban illeszkedik, mint az euklideszi tér. Röviden megmutatjuk, hogy a hiperbolikus geometria segítségével hogyan lehet meghatározni azokat a minimalisztikus (adott csomópontok esetén a lehető legkevesebb élt tartalmazó) hálózatokat, amelyek maximális mértékben navigálhatóak. Arról is értekezünk, hogy ezek a navigációs vázak strukturálisan hasonlóak számos valós hálózathoz és nagy mértékben benne is vannak azokban.

1. Bevezetés

A hálózattudomány paradigmája, hogy a bennünket körülvevő legkülönbözőbb technológiai és természetben előforduló hálózatok (pl. internet, legijáratok hálózata, szavak szomszédossági hálózata, emberi agy strukturális hálózata) egységes keretrendszerben vizsgálhatók, felfedhetők a legkülönbözőbb topológiájú hálózatok közös vonásai, meghatározhatók a hálózati funkciók szempontjából lényeges tulajdonságaik.

A valóságban előforduló hálózatokban a navigáció alapvető fontosságú funkció. Technológiai hálózatokban ez általában azt jelenti, hogy a hálózat struktúrája alapján meg kell határozni azokat az útvonalakat, amelyek mentén a csomópontok között gazdaságosan és hatékonyan lehet az információt, utasokat, árut továbbítani. Közösségi/ismeretségi hálózatokban a navigáció kapcsán gondolhatunk pl. arra, hogy nem triviális feladat útvonalat találni ismeretségi kapcsolatokon keresztül egy számunkra ismeretlen emberhez. Biológiai hálózatokban is megfigyelhetők olyan jel-, energia- vagy információátviteli folyamatok, amelyek hálózatszintű navigációs koordinációra utalnak. Vannak olyan hálózatok is, amelyekről intuitíve érezzük, hogy valamilyen módon navigálhatóak, de nagyon nehéz (vagy közvetlenül

nem is lehetséges) tetten érni ezt a funkciót. Ilyen pl. a szavak szomszédossági hálózata, amely a fejünkben lévő mentális lexikon egyfajta lenyomatának is tekinthető. Amikor pl. beszélünk, agyunk a mentális lexikonban navigál, és ez rendkívül gyors, azonban a szavak hálózatán ezt a navigációt közvetlenül nem tudjuk megfigyelni.

A hálózattudományban az ún. mohó navigáció népszerű és sokat vizsgált funkció. A népszerűség oka valószínűleg az, hogy rendkívül egyszerű, a hálózati csomópontokról feltételezi, hogy nem ismerik a teljes topológiát, csak a velük közvetlen összeköttetésben lévőkről tudnak valamit. Stanley Milgram 1967-es kisvilág kísérletében demonstrálta, hogy emberek közötti ismeretségi hálózatban hatékonyan terjeszthető információ, amely a hálózat kisvilág tulajdonságának és a mohó navigációnak tulajdonítható. A mohó navigáció röviden úgy jellemezhető, hogy a hálózatban minden csomópont az információt annak a szomszédjának adja tovább, aki a célhoz a „legközelebbinek” tűnik. A modellezés szintjén ez implicite feltételezi egy rejtett metrikus tér jelenlétét, és az ezen történő távolságszámítás alkalmazását. Először Jon Kleinberg mutatta meg egy egyszerű, hosszú kapcsolatokat is tartalmazó euklideszi rácsmodellen, hogy a csomópontok a koordináták alapján történő mohó navigáció segítségével hatékonyan találnak rövid útvonalakat más csomópontokhoz [4].

2. Mohó navigáció hálózatokban

A mohó navigáció kapcsán fontos gráfelméleti kérdés, hogy egy véges összekötött irányítatlan gráf beágyazható-e valamilyen metrikus térbe oly módon, hogy bármely két pontja között legyen mohó útvonal. A válasz megadása előtt definiáljuk a mohó beágyazhatóság fogalmát.

2.1. Definíció. Mohó beágyazás: Egy G irányítatlan gráf mohó beágyazása egy metrikus (X, d) térbe jelentse azt az $f : V(G) \rightarrow X$ leképezést, amely rendelkezik a következő tulajdonsággal: minden különböző $s, t \in V(G)$ csúcspárhoz létezik egy s -sel szomszédos u csúcs, amelyre $d(f(u), f(t)) < d(f(s), f(t))$.

Ez azt jelenti, hogy ha egy gráf mohón beágyazható, akkor bármely két forrás-cél csúcspár között létezik olyan útvonal, amelyen a forrásból indulva és végighaladva, minden lépésben közelebb kerülünk a célhoz. Számos eredmény született arra vonatkozóan, hogy adott tulajdonságú gráfokat milyen metrikus térbe lehet mohón beágyazni. Egy jelentős negatív eredmény, hogy minden véges dimenziós normalizált vektortérhez található olyan gráfok, amelyek abba mohó módon nem ágyazhatóak be. Speciális esetként ez pl. azt jelenti, hogy számos gráf az euklideszi síkba nem ágyazható be.

A fentiek fényében talán meglepőnek tűnhet a következő tétel:

2.1. TÉTEL. ([5]) Minden összekötött véges gráf mohón beágyazható a hiperbolikus síkba.

Ez úgy interpretálható, hogy minden gráfhoz található kétdimenziós hiperbolikus koordináták, amelyekkel a csomópontokat felcímkézve a gráfban a mohó útvonalválasztás megvalósítható. E nagyon általános eredmény hátrányaként mindenképpen meg kell említeni, hogy a tétel nem mond semmit az útvonalak hosszáról (két csomópont közötti mohó útvonal hány lépést tartalmaz), a csomópontok és az élek útvonalterheléséről (hány mohó útvonal halad rajtuk keresztül). Egy adott hálózatban a kialakítandó útvonalválasztás szempontjából ezek fontos műszaki jellemzők.

A fenti eredmények és az a tény, hogy a valóságban előforduló hálózatok nem akármilyenek, motiválták a következő (a mohó beágyazás szempontjából duálisnak tekinthető) problémakör felvetését. Tekintsük a hiperbolikus síkon a lehető legegyszerűbb és legkevesebb paramétert használó hálózatgeneráló módszereket és az általuk előállított hálózatokat. Ezek a hálózatok vajon rendelkeznek-e a mohó navigálhatóság tulajdonságával. Milyen egyéb tulajdonságokkal rendelkeznek, hasonlítanak-e pl. a valóságban előforduló hálózatokhoz?

Egy ilyen nagyon egyszerű hiperbolikus generatív modell a következő [6]: Egy R sugarú hiperbolikus körlapon helyezünk el egyenletesen véletlenszerűen N pontot, majd minden pontot kössünk össze a nála R -nél nem távolabbi pontokkal. Az így kialakult hálózatokról megmutatható, hogy számos valós hálózathoz hasonlóan fokszámeloszlásuk skálafüggetlen, kisvilág tulajdonságúak és klaszterezettségük pedig magas. Az is kimutatható, hogy az így generált hálózatok szinte 100%-os mértékben mohón navigálhatóak (azaz bármely két csomópont között létezik mohó útvonal). Külön érdekes megfigyelés, hogy a mohó útvonalak rövidek és a hiperbolikus síkon közel vannak a geodetikus vonalakhoz. Ezek az eredmények számos további, a hiperbolikus geometria és a komplex hálózatok mélyebb megértését célzó kutatást inspiráltak. Talán az egyik legjelentősebb műszaki kutatási irányvonal annak vizsgálata, hogy az internet AS (autonomous System) szintű útvonalválasztó rendszerének teljes cseréje milyen feltételekkel és hatékonysággal lenne lehetséges [2]. Erre vonatkozóan kísérleti rendszer építése is folyamatban van [9].

3. Mohó navigációs vázhálózatok

Ebben a fejezetben bemutatjuk a hálózatok mohó navigációja terén elért saját eredményeinket. A korábbi fejezetben ismertetett generatív modell alapján úgy tűnik, hogy a hasonló tulajdonságú valós hálózatok beágyazhatók a hiperbolikus síkba oly módon, mintha egy bizonyos paraméterű generatív hiperbolikus véletlen modell megvalósulásai lennének. Az irodalomból ismertek ilyen beágyazási algoritmusok, ezek leírásától most eltekintünk, csak annyit jegyzünk meg, hogy a beágyazások alapja lehet pl. a Markov-lánc Monte-Carlo-módszer [7]. A beágyazás eredményei a valós hálózat csomópontjaihoz rendelt kétdimenziós hiperbolikus koordináták.

Mind a beágyazott hálózatok, mind pedig a generatív modellek esetén felvethető a következő kérdés: Csupán a csomópontok koordinátái alapján (egy pillanatra elfelejtve a csomópontok közötti éleket) meghatározható-e az a minimális számú élt tartalmazó hálózat, amely 100%-os mértékben mohó navigálható. Egy ilyen maximálisan navigálható minimalisztikus vázhálózat létezése fontos szerepet kaphat a navigálható hálózatokban, amelyről egy kicsit később részletesebben is értekeziünk. A következőkben bemutatunk egy nagyon egyszerű, bármely metrikus térben működő hálózatformáló navigációs játékot, amelynek egy Nash egyensúlya a hiperbolikus sík esetén éppen a fent keresett navigációs vázhálózat.

3.1. Definíció. Hálózatformáló navigációs játék:

Stratégiák. A stratégiák tere egy $u \in \mathcal{P}$ játékos számára, amely szerint más játékosokhoz éleket húz a hálózatban, legyen $S_u = 2^{\mathcal{P} \setminus \{u\}}$. Legyen s egy vektor ebben a térben: $s = (s_0, s_1 \dots s_{N-1}) \in (S_0, S_1 \dots S_{N-1})$, és $G(s)$ legyen az a gráf, amelyet s generál, azaz $G(s) = \bigcup_{i=0}^{N-1} (i \times s_i)$.

Kiadás. A játékosok célja minimalizálni a kiadásait, azaz

$$c_u = \sum_{\forall u \neq v} d_{G(s)}(u, v) + |s_u|, \quad u, v \in \mathcal{P},$$

ahol

$$d_{G(s)}(u, v) = \begin{cases} 0, & \text{ha } \exists u \rightarrow v \text{ mohó útvonal } G(s)\text{-ben,} \\ \infty & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A fenti hálózatformáló navigációs játék Nash-egyensúlyairól megmutatható, hogy egyben szociális optimumot is biztosítanak, így meghatározásuk visszavezethető egy minimális halmazfedési problémára [3]. Mivel több Nash-egyensúly is van, vizsgálatainkban mindig azt az egyensúlyi hálózatot határoztuk meg, amely az élek hosszának összegét is minimalizálja. Ez teljesen összhangban van az ún. éllokalitás elvvel [8] [4] [1], amely sokszor a valós hálózatokban megfigyelhető magas klaszterezettség egyik kiváltó oka lehet.

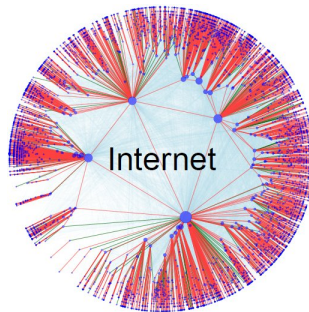
A hiperbolikus sík esetén a fenti játék Nash-egyensúlyi hálózatáról számos érdekes és fontos tulajdonságot bizonyítottunk analitikusan, amelyeket nagy számú numerikus vizsgálat eredményei is alátámasztottak [3]. Megmutattuk, hogy minden Nash-egyensúlyi hálózat tartalmaz egy bizonyos hálózati topológiát, és benne van egy másik bizonyos hálózati topológiában. Ennek fontos következménye pl. az, hogy a Nash-egyensúlyi hálózat átlagos fokszáma 1 és 4 között van, a numerikus vizsgálatok alapján az átlagos fokszám 2,29. Bebizonyítottuk, hogy az egyensúlyi hálózat fokszámeloszlása jó közelítéssel hatványfüggvény, klaszterezettségi együtthatója pedig 0,447 körüli érték, azaz ezekben a strukturális jellemzőkben is hasonlítanak a valóságban megfigyelhető hálózatokhoz.

Megvizsgáltuk azt a kérdést is, hogy a hiperbolikus síkba beágyazott valós hálózatok esetén a csak a koordináták alapján generált Nash-egyensúlyi hálózat milyen mértékben van benne az eredeti valós hálózatban. A vizsgált hálózatok az USA

	Internet	Metabolikus	Szavak	Repterek
Csomópontok	4919	602	4065	283
Élek	28361	2498	38631	1973
Nash egyensúlyi vázháló élek	5490	743	4634	328
Tartalmazás	83%	87%	71,5%	84%
Navigációs sikerességi arány	87%	85%	81%	89%

1. táblázat

légitforgalmi hálózata, az internet AS szintű topológiája, egy metabolikus hálózat és a szavak egy bizonyos szomszédossági hálózata voltak. Az 1. táblázat mutatja a csomópontok és élek száma mellett a tartalmazást, amely azt jelenti, hogy a Nash-egyensúlyi hálózat élei közül hány százalék van benne az eredeti hálózatban is. A navigáció sikerességi aránya azt jelenti, hogy az eredeti hálózatban a beágyazás után a csomópontpárok hány százaléka között létezik mohó útvonal. Megfigyelhető, hogy a Nash-egyensúlyi hálózatok nagy mértékben benne vannak a valós hálózatokban, amely összhangban van a magas navigációs sikerességi aránnyal is. Randomizált nullmodellek segítségével azt is igazoltuk, hogy a magas tartalmazási arány nem lehet a véletlen műve.



1. ábra. Az internet AS topológia élei (halványkék), a Nash-egyensúlyi hálózat élei (a pirosak részei az eredeti internet topológiának, a zöldek nem).

Köszönetnyilvánítás

A cikkben szereplő kutatások az OTKA FK_17 123957., KH_18 129589., K_17 124171. pályázatok támogatásával valósultak meg. Heszberger Zalánt az MTA Bolyai János Kutatási Ösztöndíj, valamint az UNKP-19-4 Új Nemzeti Kiválóság Program keretében az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatta. A támogatókért a szerzők köszönetüket fejezik ki.

Hivatkozások

- [1] BOGUNA, M., KRIOUKOV, D., AND CLAFFY, K. C.: *Navigability of complex networks*, Nature Physics, Vol. **5** No. **1**, pp. 74-80 (2009). DOI: [10.1038/nphys1130](https://doi.org/10.1038/nphys1130)
- [2] BOGUNÁ, M., PAPADOPOULOS, F., AND KRIOUKOV, D.: *Sustaining the internet with hyperbolic mapping*, arXiv preprint arXiv:1009.0267. DOI: [10.1038/ncomms1063](https://doi.org/10.1038/ncomms1063)
- [3] GULYÁS, A., BÍRÓ, J. J., KÖRÖSI, A., RÉTVÁRI, G., AND KRIOUKOV, D.: *Navigable networks as Nash equilibria of navigation games*, Nature communications, Vol. **6**. DOI: [10.1038/ncomms8651](https://doi.org/10.1038/ncomms8651)
- [4] KLEINBERG, J. M.: *Navigation in a small world*, Nature, Vol. **406** No. **6798**, pp. 845-845 (2000). DOI: [10.1038/35022643](https://doi.org/10.1038/35022643)
- [5] KLEINBERG, R.: *Geographic routing using hyperbolic space*, in: *INFOCOM 2007. 26th IEEE International Conference on Computer Communications. IEEE*, pp. 1902-1909, IEEE (2007). DOI: [10.1109/INFCOM.2007.221](https://doi.org/10.1109/INFCOM.2007.221)
- [6] KRIOUKOV, D., PAPADOPOULOS, F., KITSACK, M., VAHDAT, A., AND BOGUNÁ, M.: *Hyperbolic geometry of complex networks*, Physical Review E, Vol. **82** No. **3**, (2010), 036106. DOI: [10.1103/PhysRevE.82.036106](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.82.036106)
- [7] PAPADOPOULOS, F., KITSACK, M., SERRANO, M. Á., BOGUNÁ, M., AND KRIOUKOV, D.: *Popularity versus similarity in growing networks*, Nature, Vol. **489** No. **7417**, pp. 537-540 (2012). DOI: [10.1038/nature11459](https://doi.org/10.1038/nature11459)
- [8] WATTS, D., DODDS, P., AND NEWMAN, M.: *Identity and search in social networks*, Science, Vol. **296** No. **5571**, p. 1302 (2002). DOI: [10.1126/science.1070120](https://doi.org/10.1126/science.1070120)
- [9] ZHANG, L., AFANASYEV, A., BURKE, J., JACOBSON, V., CROWLEY, P., PAPADOPOULOS, C., WANG, L., ZHANG, B., *et al.*: *Named data networking*, ACM SIGCOMM Computer Communication Review, Vol. **44** No. **3**, pp. 66-73 (2014). DOI: [10.1145/2656877.2656887](https://doi.org/10.1145/2656877.2656887)



Bíró József 1968-ban született. 1993-ban végzett a BME Villamosmérnöki Karán okleveles villamosmérnöként, PhD fokozatát 1998-ban kapta meg. Doktori disszertációjának témája mesterséges neurális hálózatok távközlési alkalmazásai. Jelenleg a BME Villamosmérnöki és Informatikai Kar Távközlési és Médiainformatikai Tanszék egyetemi tanára, valamint a karon működő Villamosmérnöki Tudományok Doktori Iskola vezetője. Bíró József habilitációs doktori és MTA doktori címét 2009-ben kapta meg. Kétszer nyerte el az MTA

Bolyai János Kutatási Ösztöndíját. Kutatási területe kommunikációs hálózatok és informatikai rendszerek matematikai modellezése, nagy hálózatok geometriája.

BÍRÓ JÓZSEF

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Távközlési és Médiainformatikai Tanszék
1117 Budapest, Magyar tudósok krt. 2.
biro@tmit.bme.hu



Dr. Gulyás András 2002-ben szerzett informatikus oklevelet a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem (BME) Villamosmérnöki és Informatikai Karán. PhD fokozatát 2008-ban kapta meg. Jelenleg tudományos főmunkatárs és kutatási témavezető a BME Villamosmérnöki és Informatikai Kar Távközlési és Médiainformatikai Tanszékén. Kutatási területe a hálózat kutatás és az útvonalkutatás.

GULYÁS ANDRÁS

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Távközlési és Médiainformatikai Tanszék
1117 Budapest, Magyar tudósok krt. 2.
gulyas@tmit.bme.hu

Rétvári Gábor arcképe és életrajza a szám egy másik cikkénél jelenik meg, mely cikknek szintén szerzője.

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Távközlési és Médiainformatikai Tanszék
1117 Budapest, Magyar tudósok krt. 2.
retvari@tmit.bme.hu

Kőrösi Attila arcképe és életrajza a szám egy másik cikkénél jelenik meg, mely cikknek szintén szerzője.

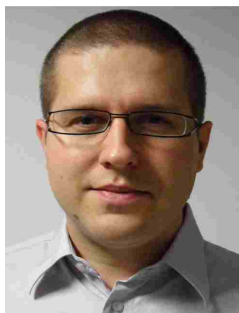
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Távközlési és Médiainformatikai Tanszék
1117 Budapest, Magyar tudósok krt. 2.
korosi@tmit.bme.hu



Heszberger Zalán 1997-ben végzett okleveles villamosmérnökként, ill. PhD oklevelét 2007-ben kapta meg a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemen. Doktori disszertációjának témája a kevés-paraméteres forgalombecslő eljárások fejlesztése és teljesítményelemzése. Jelenleg egyetemi docensként tevékenykedik a Távközlési és Médiainformatikai Tanszéken, ahol oktatási tevékenysége az internet hálózati kommunikációs technológiája és annak matematikai modellezése köré csoportosul. Tudományos kutatásaiban a jövő internet technológiák és protokollok hálózattudományi és információelméleti megközelítéseivel foglalkozik.

HESZBERGER ZALÁN

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Távközlési és Médiainformatikai Tanszék
1117 Budapest, Magyar tudósok krt. 2.
heszi@tmit.bme.hu



Majdán András a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemen szerzett mérnök informatikus diplomát, majd később PhD-abszolutóriumot. Főbb kutatási területei az adattömörítés, a teljesítményanalízis, memóriák elhasználódásának optimalizálása és a hálózattudomány. Az egyetemen a Távközlési és Médiainformatikai Tanszéken tanársegédként dolgozik. Főbb oktatót anyagai közé tartozik az IP alapú hangtovábbítás, a hálózati címfordítás és a virtuális magánhálózatok. Jelenleg a doktori disszertációját írja.

MAJDÁN ANDRÁS

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Távközlési és Médiainformatikai Tanszék
1117 Budapest, Magyar tudósok krt. 2.
majdan@tmit.bme.hu

NAVIGATION IN NETWORKS BY THE BOLYAI-LOBACHEVSKY HYPERBOLIC GEOMETRY

JÓZSEF BÍRÓ, ANDRÁS GULYÁS, GÁBOR RÉTVÁRI, ATTILA KŐRÖSI,
ZALÁN HESZBERGER, ANDRÁS MAJDÁN

In this paper we briefly overview greedy navigation issues in networks. We argue that in case of scale-free and small-world networks with high clustering the Bolyai-Lobachevsky hyperbolic geometry is suitable for greedy geometric navigation. We also highlight that Nash equilibrium networks that have the smallest possible number of links required to maintain 100% navigability, form skeletons of real networks and share with them their basic structural properties.

Keywords: navigation, complex networks, Bolyai-Lobachevsky hyperbolic geometry.

SZIMMETRIA ÉS KONFIDENCIA

CSÁJI BALÁZS CSANÁD

A cikkben áttekintjük az SPS (Sign-Perturbed Sums) becslési módszert, amely a zaj szimmetriáját kihasználva egzakt, nem aszimptotikus konfidenciatartományokat tud konstruálni regressziós modellek pontbecslései köré.

1. Bevezetés

Regressziós modellek becslése zajos megfigyelési adatokból (pl. idősorokból) fontos statisztikai probléma, amely számos területen előkerül, például a rendszer identifikációban, jelfeldolgozásban, gépi tanulásban és a pénzügyi matematikában.

A standard módszerek – például az előrejelzési hiba-, maximum likelihood- és korrelációs módszer [5] – tipikusan *pontbecsléseket* szolgáltatnak. Gyakorlati szempontból is fontos kérdés, hogy mennyire bízhatunk a kapott becslésben, amelyre egy lehetséges válasz, hogy megadott valószínűségű *konfidenciatartományt* építünk a becslés köré. Az ilyen halmazok konstrukciójának klasszikus módja az, ha a pontbecslés határeloszlását hívjuk segítségül [5]. Az aszimptotikus eredményeken alapuló megközelítések azonban nem nyújtanak szigorú garanciákat véges mintaszám esetén, hacsak nem teszünk erős statisztikai feltevéseket a rendszerről.

A dolgozat célja a nemrég kidolgozott SPS (Sign-Perturbed Sums) módszer [3] bemutatása, amely minimális statisztikai feltevésekkel képes regressziós modellek pontbecslései köré egzakt, nem aszimptotikus konfidenciahalmazokat építeni.

Az SPS egy *félparametrikus* becslési módszer, mivel egy parametrikus (akár dinamikus) modelltől indul ki, de a folyamatot hajtó zajra nézve nem tételez fel paraméterezést. Először az egyszerű lineáris regresszió esetére mutatjuk be a módszert, majd kiterjesztjük dinamikus rendszerekre is a konstrukciót.

2. Konfidenciahalmazok lineáris regressziós problémákhoz

Adott egy bemenet-kiment párokból álló minta, $\mathcal{D}_n \triangleq \{(\varphi_1, Y_1), \dots, (\varphi_n, Y_n)\}$,

$$Y_t \triangleq \varphi_t^T \theta^* + N_t,$$

$t \in \{1, \dots, n\}$, ahol Y_t a kimenet (magyarázott változó), φ_t a bemenet (magyarázó változó, regresszor) és N_t pedig a (nem megfigyelhető) zaj, a t -edik megfigyelés esetén. A cél az ismeretlen, „igazi” θ^* paraméter becslése. Feltesszük, hogy a bemenetek, $\{\varphi_t\} \subset \mathbb{R}^d$, determinisztikusak, $\theta^* \in \mathbb{R}^d$ konstans, és a zaj, $\{N_t\}$, független, szimmetrikus (a nulla körül) eloszlású¹ (valós értékű) valószínűségi változókból áll; azaz N_t és $-N_t$ eloszlása megegyezik minden t -re. Az egyszerűség kedvéért szintén feltesszük, hogy $n > d$ és a $\Phi \triangleq [\varphi_1, \dots, \varphi_n]$ mátrix teljes (sor) rangú.

2.1. Legkisebb négyzetek becslés- és konfidenciaellipszoidjai

Az egyik standard pontbecslés a jól ismert *legkisebb négyzetek* (LS) becslés,

$$\hat{\theta}_n \triangleq \arg \min_{\theta \in \mathbb{R}^d} \mathcal{V}(\theta | \mathcal{D}_n) = \arg \min_{\theta \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} \|Y - \Phi^T \theta\|_2^2,$$

ahol $Y \triangleq [Y_1, \dots, Y_n]^T$. A *normálegyenlet* megoldásával megkapható $\hat{\theta}_n$, azaz

$$\nabla_{\theta} \mathcal{V}(\hat{\theta}_n | \mathcal{D}_n) = \Phi \Phi^T \hat{\theta}_n - \Phi Y = 0,$$

aminek a fenti feltételek mellett az analitikus megoldása $\hat{\theta}_n = (\Phi \Phi^T)^{-1} (\Phi Y)$.

Fontos kérdés, hogy mennyire megbízható a kapott pontbecslés. Erre egy válasz, ha tudunk például egy megadott $p \in (0, 1)$ valószínűségű $\hat{\Theta}_{\mathcal{D}_n, p}$ konfidencia-tartományt készíteni $\hat{\theta}_n$ köré, azaz amelyre $\hat{\theta}_n \in \hat{\Theta}_{\mathcal{D}_n, p}$, és $\mathbb{P}(\theta^* \in \hat{\Theta}_{\mathcal{D}_n, p}) \geq p$.

Ilyen halmazok konstrukciójára egy standard módszer [5], ha kihasználjuk, hogy az LS-becslés (átskálázott) hibája aszimptotikusan Gauss-eloszlású, azaz

$$\sqrt{n} (\hat{\theta}_n - \theta^*) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2 R^{-1}), \quad \text{ahogy } n \rightarrow \infty,$$

amely fennáll pl., ha korlátosak a regresszorok, és létezik egy olyan pozitív definit R mátrix, amely az $R_n \triangleq \frac{1}{n} \Phi_n \Phi_n^T$ határértéke², valamint $\{N_t\}$ független, azonos eloszlású (f.a.e.) változókból áll, amelyekre $\mathbb{E}[N_t] = 0$, és $\mathbb{E}[N_t^2] = \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < \infty$.

A pontbecslés határeloszlásának felhasználásával egy adott p valószínűséghez $\hat{\theta}_n$ középpontú (közelítő) konfidenciaellipszoid konstruálható,

$$\tilde{\Theta}_{n, p} \triangleq \left\{ \theta \in \mathbb{R}^d : (\theta - \hat{\theta}_n)^T R_n (\theta - \hat{\theta}_n) \leq \frac{q \hat{\sigma}_n^2}{n} \right\}, \quad (1)$$

¹A függetlenség gyengíthető, a szimmetria a kritikus az SPS-hez. Számos nevezetes eloszlás lehet ilyen, például Gauss, Laplace, Cauchy, Bernoulli, Student t, egyenletes.

²Itt kivételesen – a határérték miatt – expliciten kiírtuk, hogy Φ függ n -től.

ahol $p = F_{\chi^2(d)}(q)$, itt $F_{\chi^2(d)}$ a d szabadságfokú χ^2 -eloszlás eloszlásfüggvénye, és $\hat{\sigma}_n^2$ a zaj varianciájának becslése az LS-megoldás reziduálisainak segítségével,

$$\hat{\sigma}_n^2 \triangleq \frac{1}{n-d} \sum_{t=1}^n (Y_t - \varphi_t^T \hat{\theta}_n)^2.$$

Ekkor nyilván $\hat{\theta}_n \in \tilde{\Theta}_{n,p}$, valamint $\mathbb{P}(\theta^* \in \tilde{\Theta}_{n,p}) \approx p$. Az így kapott konfidencia halmazok azonban véges minták esetén nem garantáltak, és csak heurisztikus megközelítésnek tekinthetők; kis mintaszám esetén tipikusan pontatlanok [5].

2.2. SPS lineáris regresszió esetén

Most rátérünk az SPS-módszer [3] ismertetésére, amellyel minimális statisztikai feltevésekkel véges minták esetén is garantált konfidenciatartományokat konstruálhatunk az LS-becslés köré. Első közelítésben tekinthetünk az SPS-re úgy, mint egy hipotézisvizsgálatra, amely egy adott θ paraméter esetén azt a nullhipotézist vizsgálja, hogy $\theta = \theta^*$, a $\theta \neq \theta^*$ alternatív hipotézissel szemben.

A *bootstrap*- és *Monte-Carlo*-tesztek alap gondolatához hasonlóan abból indulunk majd ki, hogy ha $\theta = \theta^*$, akkor egyrészt (i) megkaphatjuk a zajváltozók pontos értékét a rendszer „invertálásával”, valamint (ii) a zaj eloszlásának bizonyos regularitását kihasználva (a jelen esetben a szimmetriát) alternatív mintákat generálhatunk, amelyek statisztikailag „hasonlóan viselkednek” majd, mint az eredeti minta. Ha azonban $\theta \neq \theta^*$, akkor a rendszer invertálásával kapott zajbecslések torzítottak lesznek, és így az alternatív minták statisztikailag „eltérően viselkednek” majd, mint az eredeti minta. Azt, hogy mennyire „hasonlóan viselkednek” a generált (perturbált) értékek az eredeti mintához viszonyítva, a minták skalár értékű kiértékelése után egy rangteszttel döntjük majd el.

Első lépésként bevezetünk m (véletlenített) kvadratikusan $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt,

$$Z_i(\theta) \triangleq \|R_n^{-\frac{1}{2}} \Phi \Lambda_i (Y - \Phi^T \theta)\|_2^2,$$

$i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$, ahol $\Lambda_0 \triangleq I$, és $\Lambda_i \triangleq \text{diag}(\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,n})$, ha $i \neq 0$; $\{\alpha_{i,t}\}$ független, azonos eloszlású Rademacher-valószínűségű változók³; a $\text{diag}(\cdot)$ függvény pedig egy diagonális mátrixot képez az argumentumaiból. A Z_0 -t *referenciafüggvénynek*, míg a többi $\{Z_i\}$ függvényt *előjelperturbált* függvényeknek nevezzük.

Vegyük észre a kapcsolatot a $\{Z_i\}$ függvények definíciója és a költségfüggvény gradiense, $\nabla_{\theta} \mathcal{V}$, között. A $\{Z_i\}$ függvényeket interpretálhatjuk úgy, hogy \mathcal{V} gradiensében a reziduálisok előjelét véletlenítjük Rademacher-változók segítségével, majd a kapott vektor „nagyságát” kiértékeljük egy súlyozott norma segítségével.

³Azaz 1 és -1 értékeket vehetnek fel, mindegyiket $1/2$ valószínűséggel.

Ha $\theta = \theta^*$, akkor $Y - \Phi^T \theta^* = N$, ahol $N = [N_1, \dots, N_n]^T$, és a szimmetriafeltevésből tudjuk, hogy N és $\Lambda_i N$ eloszlása minden i -re megegyezik. Ekkor

$$Z_0(\theta^*) = \|R_n^{-\frac{1}{2}} \Phi N\|_2^2 \stackrel{d}{=} \|R_n^{-\frac{1}{2}} \Phi \Lambda_i N\|_2^2 = Z_i(\theta^*),$$

de a $\{Z_i(\theta^*)\}$ valószínűségi változók természetesen nem teljesen függetlenek. Be lehet látni azonban, hogy *feltételesen* f.a.e. tulajdonságúak az $\{|N_t|\}$ által generált σ -algebrára nézve. Ekkor viszont *felcserélhetőek* is, és így minden lehetséges rendezésük⁴, $Z_{i_0}(\theta^*) \prec \dots \prec Z_{i_{m-1}}(\theta^*)$, ugyanolyan $1/m!$ valószínűséggel áll elő.

Ha azonban $\theta \neq \theta^*$, akkor már ez a felcserélhetőségi tulajdonság nem áll fenn, és $Z_0(\theta)$ egyre nagyobb valószínűséggel fogja dominálni a többi $\{Z_i(\theta)\}_{i \neq 0}$ változót, ahogy egyre távolabb kerülünk az igazi paramétertől, azaz ahogy $\|\theta^* - \theta\|_2 \rightarrow \infty$.

Ahhoz, hogy össze tudjuk mérni a referenciafüggvény értékét az előjelperturbált függvényekével, szükségünk lesz a referenciafüggvény *normalizált rangjára*,

$$\mathcal{R}(\theta) \triangleq \frac{1}{m} \left(1 + \sum_{i=1}^{m-1} \mathbb{I}(Z_0(\theta) \prec Z_i(\theta)) \right),$$

ahol $\mathbb{I}(\cdot)$ egy indikátorfüggvény; tehát 1, ha az argumentuma (egy formula) igaz, és 0 máskülönben. Tegyük fel, hogy $p = 1 - q/m$ alakban írható, ahol $0 < q < m$, és q, m egész számok. Ekkor az SPS-teszt elfogadja a nullhipotézist, ha $\mathcal{R}(\theta) \leq p$, és elutasítja, ha $\mathcal{R}(\theta) > p$. Mivel mind m , a referencia- és előjelperturbált függvények száma, mind q szabad paraméterek (a felhasználó által meghatározott), így tetszőleges racionális⁵ $p \in (0, 1)$ valószínűséghez készíthető egy SPS-teszt.

A fentiek szellemében az SPS-konfidenciatartományt így definiálhatjuk:

$$\widehat{\Theta}_{n,p} \triangleq \{ \theta \in \mathbb{R}^d : \mathcal{R}(\theta) \leq p \}.$$

Bebizonyítható [3], hogy az így kapott (véletlenített) konfidenciahalmaz *egzakts*,

$$\mathbb{P}(\theta^* \in \widehat{\Theta}_{n,p}) = p.$$

A konfidenciahalmaz egzaktsága annak ellenére fennáll, hogy nem használtuk ki a zaj konkrét eloszlását, sőt, még azt is megengedtük, hogy minden megfigyelésre különböző eloszlású zaj hasson, amelyeknek akár végtelen varianciája is lehet.

Az SPS konfidenciahalmazai *csillagkonvexek*, ahol az LS-beclés egy csillagközpont [3]. Tehát minden $\theta \in \widehat{\Theta}_{n,p}$ és $\beta \in [0, 1]$ -re, $\beta \theta + (1 - \beta) \hat{\theta}_n \in \widehat{\Theta}_{n,p}$.

⁴A „ \prec ” egy szigorú teljes rendezés, amit a standard „ $<$ ”-ből úgy kapunk, hogy egyenlő értékek esetén véletlenszerűen döntjük el, hogy melyiket tekintjük kisebbnek; formális def. lásd [3].

⁵További véletlenítéssel könnyen kiterjeszthető a teszt irracionális valószínűségekre is, azonban ennek elhanyagolható a gyakorlati jelentősége, ezért ismertetésétől eltekintünk.

Az SPS-konfidenciahalmazok *erősen konzisztensek* [2], azaz aszimptotikusan egy valószínűséggel semmilyen hamis paraméterértéket nem tartalmaznak; a halmaz θ^* körüli tetszőleges kicsi gömb belsejébe kerül, ahogy a mintaszám növekszik,

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} \{ \hat{\Theta}_n \subseteq B_\varepsilon(\theta^*) \} \right) = 1,$$

minden $\varepsilon > 0$, ahol $B_\varepsilon(\theta^*) \triangleq \{ \theta \in \mathbb{R}^d : \|\theta - \theta^*\|_2 \leq \varepsilon \}$. A konzisztencia gyenge plusz feltevések mellett fennáll, pl. mind a zaj szórásnégyzete, mind a regresszorok normája tarthat a végtelenhez, ha a növekedésük bizonyos ráta alatt marad [2].

Hatékony *külső approximációs ellipszoid* is konstruálható az SPS-halmazokhoz:

$$\hat{\Theta}_{n,p} \subseteq \{ \theta \in \mathbb{R}^d : (\theta - \hat{\theta}_n)^T R_n (\theta - \hat{\theta}_n) \leq r^* \},$$

amelyek gyorsan (polinomiális időben) – *szemidefinit programozási* feladatok megoldásával – számolhatóak. Vegyük észre, hogy az így kapott konfidenciaellipszoidoknak ugyanaz lesz a középpontja (ti. az LS-beclés), és az alakját meghatározó mátrixa, mint (1) esetén, csak az ellipszoidok sugara fog különbözni. Azonban, míg a határeloszláson alapuló ellipszoidok csak heurisztikák, az SPS-halmaz külső approximációján alapuló ellipszoidok garantált konfidenciával rendelkeznek [3].

3. Konfidenciahalmazok dinamikus rendszerekhez

Az alapvető célkitűzés az SPS-módszer megalkotásakor az volt, hogy *dinamikus rendszerek* pontbecslései köré tudjunk nem aszimptotikus garanciákkal rendelkező konfidenciahalmazokat készíteni. A lineáris regressziós eset egy természetes általánosítása, ha *általános lineáris (dinamikus) rendszereket* [5] vizsgálunk, azaz

$$Y_t \triangleq G(z^{-1}; \theta^*) U_t + H(z^{-1}; \theta^*) N_t,$$

ahol G és H (stabil) lineáris szűrők, H stabilan invertálható, z^{-1} a késeltetés („lag”) operátor, $\theta^* \in \mathbb{R}^d$ az „igazi” paraméter, $G(0; \theta^*) = 0$, $H(0; \theta^*) = 1$, $\{U_t\}$ a (megfigyelt) bemenetek, $\{N_t\}$ a (nem megfigyelt) független és szimmetrikus zaj, a bemenetek és a zaj függetlenek, valamint a rendszer kezdeti állapota ismert [4].

Ekkor az *előrejelzési hibák* vektora⁶ $\hat{\varepsilon}(\theta) \triangleq [\hat{\varepsilon}_1(\theta), \dots, \hat{\varepsilon}_n(\theta)]^T$, ahol $\hat{\varepsilon}_t(\theta) \triangleq H^{-1}(z^{-1}; \theta) (Y_t - G(z^{-1}; \theta) U_t)$ minden t -re; valamint teljesül, hogy $\hat{\varepsilon}_t(\theta^*) = N_t$.

Egy tipikus költségfüggvény az előrejelzési hibák négyzetösszege [5], azaz

$$\mathcal{V}(\theta | \mathcal{D}_n) = \frac{1}{2} \hat{\varepsilon}^T(\theta) \hat{\varepsilon}(\theta), \quad \text{ekkor} \quad \Psi(\hat{\theta}_n) \hat{\varepsilon}(\hat{\theta}_n) = 0,$$

⁶Tegyük fel, hogy pont annyi adatunk van, hogy n hibatagot kiszámolhassunk.

ahol a $\hat{\theta}_n$ az *előrejelzési hibabecslés*, $\Psi(\theta) \triangleq [\psi_1(\theta), \dots, \psi_n(\theta)]$, és $\psi_t(\theta)$ pedig a t -edik előrejelzési hiba gradiense. Ismert, hogy ez a gradiens $\psi_t(\theta) = W(z^{-1}; \theta) Y_t + K(z^{-1}; \theta) U_t$ alakban is írható, ahol W és K (vektorértékű) lineáris szűrők [5].

Ha megpróbáljuk ugyanazt a konstrukciót használni, mint a . fejezetben, az sajnos erre az általános esetre nem fog működni, a $Z_0(\theta^*)$ -nak *nem ugyanaz lesz az eloszlása*, mint a többi $\{Z_i(\theta^*)\}_{i \neq 0}$ -nek, így az igazi paraméterhez tartozó függvényértékek felcserélhetőségéhez vezető érvelés sem marad érvényben [4].

A probléma a rendszer dinamikusságából fakad; azaz abból, hogy ha a zajt perturbáljuk, az – a lineáris regressziós esettől eltérően – hatással van az előrejelzési hibák gradiensére is. A megoldást alternatív kimeneti trajektóriák generálása jelenti, amelyeket a perturbált előrejelzési hibákkal hajtunk meg:

$$\bar{Y}_{i,t}(\theta) \triangleq G(z^{-1}; \theta) U_t + H(z^{-1}; \theta) (\alpha_{i,t} \hat{\varepsilon}_t(\theta)),$$

$i \in \{1, \dots, m-1\}$, és a jelölés egyszerűsítése miatt bevezetjük, hogy minden t -re $\bar{Y}_{0,t}(\theta) \triangleq Y_t$. Az alternatív trajektóriákkal perturbált gradienseket számolhatunk,

$$\bar{\psi}_{i,t}(\theta) \triangleq W(z^{-1}; \theta) \bar{Y}_{i,t}(\theta) + K(z^{-1}; \theta) U_t,$$

$i \in \{0, \dots, m-1\}$, amelyekkel eljutunk az SPS működőképes általánosításához:

$$Z_i(\theta) \triangleq \|Q_i^{-\frac{1}{2}}(\theta) \Psi_i(\theta) \Lambda_i \hat{\varepsilon}(\theta)\|_2^2,$$

ahol $\Psi_i(\theta) \triangleq [\bar{\psi}_{i,1}(\theta), \dots, \bar{\psi}_{i,n}(\theta)]$, és $Q_i(\theta) \triangleq \frac{1}{n} \Psi_i(\theta) \Psi_i^T(\theta)$. Bebizonyítható, hogy az ezekkel a függvényekkel konstruált SPS-halmazok már *egzakt* konfidenciával rendelkeznek [4]. A konstrukció kiterjeszthető *visszacsatolt* (pl. szabályozóval rendelkező) rendszerekre [4], valamint *nemlineáris* (pl. GARCH) modellekre is [1].

4. Konklúzió és nyitott problémák

A dolgozatban röviden bemutatottuk az SPS-módszert, amely minimális statisztikai feltevésekkel képes regressziós modellek adott pontbecslései köré véges minták esetén is garantált – tipikusan egzakt – konfidenciatartományokat készíteni.

Ugyan az SPS-módszer viselkedését már elég jól ismerjük lineáris regressziós problémákon, de még sok nyitott kérdés van vele kapcsolatban például dinamikus rendszerek esetén. Ilyen kérdés az SPS-teszt másodfajú hibájának jellemzése és hatékony külső approximációk konstruálása különböző dinamikus modellekhez.

Köszönetnyilvánítás

Csáji B. Cs. munkáját az MTA Bolyai János Kutatási Ösztöndíja, valamint az ED_18-2-2018-0006. és 125698. számú NKFIH-pályázatok támogatásával végezte.

Hivatkozások

- [1] CSÁJI, B. CS.: *Score Permutation Based Finite Sample Inference for Generalized Auto-Regressive Conditional Heteroskedasticity (GARCH) Models*, in: Proceedings of the 19th International Conference on Artificial Intelligence and Statistics (AISTATS), Cadiz, Spain, pp. 296-304 (2016).
- [2] CSÁJI, B. CS., CAMPI, M. C., AND WEYER, E.: *Strong Consistency of the Sign-Perturbed Sums Method*, in: Proceedings of the 53rd IEEE Conference on Decision and Control, Los Angeles, California, pp. 3352-3357 (2014). DOI: [10.3182/20140824-6-ZA-1003.02704](https://doi.org/10.3182/20140824-6-ZA-1003.02704)
- [3] CSÁJI, B. CS., CAMPI, M. C., AND WEYER, E.: *Sign-Perturbed Sums: A New System Identification Approach for Constructing Exact Non-Asymptotic Confidence Regions in Linear Regression Models*, IEEE Trans. on Signal Proc., Vol. **63** No. **1**, pp. 169-181 (2015). DOI: [10.1109/TSP.2014.2369000](https://doi.org/10.1109/TSP.2014.2369000)
- [4] CSÁJI, B. CS. AND WEYER, E.: *Closed-Loop Applicability of the Sign-Perturbed Sums Method*, in: Proceedings of the 54th IEEE Conference on Decision and Control, Osaka, Japan, pp. 1441-1446 (2015). DOI: [10.1109/CDC.2015.7402413](https://doi.org/10.1109/CDC.2015.7402413)
- [5] LJUNG, L.: *System Identification: Theory for the User*, 2nd edn., Prentice-Hall, Upper Saddle River (1999). DOI: [10.1109/MRA.2012.2192817](https://doi.org/10.1109/MRA.2012.2192817)



Csáji Balázs Csanád a SZTAKI tudományos főmunkatársa, 1976-ban született. Első diplomáját programtervező matematikusként szerezte az ELTE-TTK-n 2001-ben, majd filozófia szakos bölcsész diplomát szerzett az ELTE-BTK-n 2006-ban. Tanulmányai alatt 3-5 hónapos részképzésekben vett részt az Eindhoveni Műszaki Egyetemen (Hollandia, 2001), a British Telecomnál (Nagy Britannia, 2002) és a Johannes Kepler Egyetemen (Ausztria, 2003). PhD-fokozatát az ELTE Informatikai Karán védte meg 2008-ban. Doktorálása után a Louvaini Katolikus Egyetemen (Belgium) volt posztdoktori kutató,

majd 2009-től a Melbourne-i Egyetemen (Ausztrália) dolgozott, ahonnan 2013-ban tért haza. Csáji Balázs Csanád eredményeit több díjjal jutalmazták, például elnyerte az Ausztrál Kutatási Tanács (ARC) Discovery Early Career Researcher Award (DECRA) díját, valamint az MTA Matematikai Tudományok Osztályának Gyires Béla-díját. Összesen 70 referált tudományos cikk szerzője, kutatási területe a gépi tanulásban és rendszer identifikációban fellépő sztochasztikus modellek valószínűségelméleti és statisztikai vizsgálata.

CSÁJI BALÁZS CSANÁD

Magyar Tudományos Akadémia
Számítástechnikai és Automatizálási Kutatóintézet
1111 Budapest, Kende utca 13-17.
csaji.balazs@sztaki.mta.hu

SYMMETRY AND CONFIDENCE

BALÁZS CSANÁD CSÁJI

In this article we briefly overviewed the SPS (Sign-Perturbed Sums) method which was recently developed by Marco Campi, Erik Weyer and Balázs Csanád Csáji. The main draw card of SPS is that it can construct non-asymptotically guaranteed confidence regions for parameters of regression models under minimal statistical assumptions. The fundamental assumption of the SPS method is that the noises affecting the system are distributed symmetrically about zero, but their distributions may change over time.

We started with investigating classical linear regression problems. We recalled the standard least-squares (LS) estimate with its confidence ellipsoids, whose construction is based on the asymptotic Gaussianity of the estimate. We argued that such ellipsoids do not come with rigorous finite sample guarantees and are imprecise for small samples.

Then, we presented the construction of SPS confidence regions for linear regression problems. We highlighted that these regions have (i) exact confidence probabilities; are (ii) star convex with the LS estimate as a star center; are (iii) strongly consistent, that is, for every ball around the true parameter, the confidence regions are asymptotically (as the sample size tends to infinity) almost surely remain inside the ball (thus every false parameter value will be eventually excluded); and (iv) efficient ellipsoidal outer-approximations can be constructed for them by solving semidefinite programming problems. The SPS ellipsoids have the same center (i.e., the LS estimate) and kernel matrix as the classical ellipsoids of the LS theory, only their radii are different. However, while the ellipsoids of the classical theory (based on limiting distributions) are just heuristics for finite samples, the SPS ellipsoids have rigorous non-asymptotic guarantees.

Finally, we generalized the SPS construction for general linear (dynamical) systems. We discussed that a straightforward generalization would not work, as the noises affecting the system and the outputs are not independent for dynamical systems. It was shown that the proper generalization should be built using alternative output trajectories, which are constructed using perturbed prediction error sequences. The resulting SPS confidence regions also have exact confidence probabilities, and the construction can be generalized for closed-loop and certain non-linear systems (such as GARCH models), as well.

There are several open problems concerning the SPS method, especially for its construction for dynamical systems: for example, building efficient outer-approximations for various types of dynamical systems and analyzing the type II errors of SPS tests.

Keywords: confidence regions, resampling methods, linear regression, time series.

Mathematics Subject Classification (2000): 62F25, 66G09, 62J05, 62M10.

A CSOMAGTOVÁBBÍTÁS SKÁLÁZHATÓSÁGA: KORLÁTOK ÉS OPTIMUMOK

KÖRÖSI ATTILA, RÉTVÁRI GÁBOR

A számítógépes hálózatok egyik legalapvetőbb feladata az információ-továbbítás, ennek egy módja, amikor az útvonal mentén a köztes csomópontok döntenek el lépésről lépésre, hogy merre továbbítsák a csomagot. Éppen ezért egy elemi probléma, hogy ennek a megvalósításához mennyi információt kell eltárolni a hálózatban. Számos eredmény született már a témában, azonban azok jellemzően azt vizsgálták, hogy legrosszabb esetben minimálisan hány bitet kell eltárolni. Ebben a cikkben azonban egy új megközelítés révén ehelyett azt vizsgáljuk, hogy különböző konkrét hálózatokban mennyi információ szükséges. Mind analitikus, mind szimulációs vizsgálataink során azt tapasztaltuk, hogy a gyakorlatban elterjedt hálózatokban jellemzően lényegesen alacsonyabb a szükséges információmennyiség, mint a legrosszabb esetben.

1. Bevezetés

Napjainkban a számítógépes hálózat fogalma már nem jelent egyet az internettel, számos más formában is találkozhatunk velük, ilyenek például adatközpontok is. Bármilyen formájával találkozunk, mindenhol első számú feladata az információ továbbítása. Ennek két legegyszerűbb módja a forrásalapú csomagtovábbítás, mikor a csomag feladója előre eldönti a csomag útvonalát, azt belekódolja a csomagba, és a hálózatban a többi pont az útvonal mentén csak egyszerűen kiolvassa, hogy merre kell továbbítani. Illetve a köztes pontok alapján történő csomagtovábbítás, mely esetben a feladó a csomagba csupán a forrás és a cél csomópont azonosítóját írja a csomagra, és ezen információ alapján a köztes pontok maguk döntenek el, merre továbbítják a csomagot.

Mindkét módszernek megvan az előnye és a hátránya. A forrásalapú továbbításnál a feladónak ismernie kell a teljes hálózati topológiát, a köztes pontoknak azonban nem szükséges semmilyen számítást végezniük, mindent a feladó intéz. Ezzel szemben a köztes pont alapú megoldásnál a feladat terhe és az információtárolás is megoszlik a hálózatban, viszont figyelni kell arra, nehogy végtelen ciklusba kerüljön egy csomag.

Az internet az utóbbi mechanizmussal működik, és ebben a munkában a továbbiakban mi is csak ezzel fogunk foglalkozni. Attól függően, hogy milyen metrika szerint optimalizáljuk az útvonalainkat, a köztes pontoknak a soron következő pont megválasztásához esetleg elég csak a célállomást figyelembe venni, vagy a forrással is kalkulálnia kell. Például ha a legrövidebb utat keressük, akkor a forrástól teljesen független a további útvonal, azonban ha a legszélesebb útvonalat keressük, akkor az útvonal múltja is szempont lehet, konkrétan ha a legrövidebb legszélesebb útvonalon szeretnénk haladni, akkor számít a forrás is.

A továbbiakban az egyszerűség kedvéért legrövidebb útvonalakat fogunk keresni, így elég lesz a döntést a forrástól függetlenül, a cél csomópont függvényében meghozni. Ez a modellünkben azt jelenti, hogy minden csomópontnak le kell tárolnia egy n hosszú tömböt, ahol az i -edik elem az i -edik csomópont irányába adja a következő lépést. Ez a tömb felfogható egy n karakterből álló szövegnek is, ahol a karakterek a lehetséges következő lépések, szomszédok. Ezt a szöveget kell tömöríteni, ha minimalizálni szeretnénk a csomagtovábbításhoz szükségesen letárolt információt.

Természetesen, már sokan vizsgáltak hasonló kérdéseket, a „compact routing” terület kimondottan azzal foglalkozik, hogy alsó-felső korlátokat adjon a csomagtovábbításhoz szükséges információ mennyiségéről. [4]-ben megmutatták, hogy adott d -re mindig létezik olyan n pontú, legfeljebb d fokú gráf, hogy $\Omega(n^2 \log d)$ információt kell a gráfban tárolni. Ezt természetesen nem kívánjuk megcáfolni, de úgy gondoljuk, hogy a gyakorlatban előforduló gráfok esetében nem ilyen rossz a helyzet.

A következő fejezetben pontosan bemutatjuk a használt modellt. A 3. fejezetben ismertetünk pár elméleti eredményt, míg a 4. fejezetben szimulációs eredményekről és a további lehetséges kutatási irányokról ejtünk pár szót.

2. Modell

A továbbiakban a következő modellben fogunk dolgozni. Adott egy n pontú G gráf, amiben bármely két pont között definiáljuk az optimális útvonalat. Ezekről az utakról feltesszük, hogy minden v pont esetén a v -be menő optimális útvonalak uniója G egy feszítő fája, vagyis a köztes pontok számára az optimális utak csak a céltől függenek, ilyen például a legrövidebb utak rendszere. Ezen útvonalválasztó megvalósításához feltesszük, hogy minden u csomópontban van egy adatstruktúra, mely minden v csomópontra megadja, hogy u -nak melyik szomszédja felé kell továbbítani, amennyiben v a célpont. Feltehetjük, hogy a csomópontokat 1-től n -ig felszámozzuk, így a köztes pontokhoz tartozó struktúra lehet egy n hosszú tömb, mely i -dik eleme az i irányába menő út következő pontja.

Ezek után ez a tömb felfogható egy n hosszú szövegnek is, ahol a karakterek a szomszédokhoz tartozó azonosítók, mi pedig azt szeretnénk megállapítani, hogy

mennyi tárhelyre van szüksége ezeknek a szövegeknek. A szövegek tárolásigényének és tömörítésének irodalma elég bőséges, és nagy múltra tekinthet vissza. A fő eredmények viszonylag egyszerűek és széles körben ismertek.

Amennyiben a szövegre vonatkozó információk kimerül abban, hogy n hosszú és a karakterek Σ halmazának d az elemszáma, úgy értelemeszerűen $n \log d$ bitre van szükség. Amennyiben ismert az egyes karakterek eloszlása, úgy már tudunk entrópiára tömöríteni: $H_0 = \sum_{c \in \Sigma} \frac{n_c}{n} \log \frac{n}{n_c}$, ahol n_c darab c karakter van a szövegben, ez esetben $nH_0 + o(n)$ bit szükséges [2]. Amennyiben struktúra is van a szövegben, úgy elképzelhető, hogy magasabb rendű entrópiára is tömöríthető: $H_k = \sum_{q \in \Sigma^k} \sum_{c \in \Sigma} \frac{n_{qc}}{n} \log \frac{n}{n_{qc}}$, ahol az n_{qc} azt mondja meg hányszor követi a q -t c . Itt is és a továbbiakban \log függvény alatt a kettes alapú logaritmust értjük.

3. Analízis

3.1. Teljes gráf véletlen élsúlyokkal

Ebben a fejezetben azt a modellt vizsgáljuk meg, melyben a hálózat egy teljes gráf, azonban a pontok közötti élek hosszai független azonos exponenciális eloszlást követő valószínűségi változók. Mivel folytonos eloszlásúak, ezért azon elemi események halmaza, melyben van két pont, mik között létezik több legrövidebb út, null mértékű.

3.1. TÉTEL. *Az entrópia várható értéke $\log e$.*

Bizonyítás. A nulladrendű entrópia kiszámolásához, arra van szükségünk, hogy meg tudjuk mondani, melyik szomszédot hány célpont felé használja az adott pont. Ennek eloszlása megegyezik a pontból kiinduló legrövidebb utak fájában a gyökérről logó részfák méretének eloszlásával.

3.1. SEGÉDTÉTEL. *A legrövidebb utak fájának a gyökérből tekintett részfák méretének eloszlása megegyezik a kínai étterem asztalméret eloszlásával.*

Bizonyítás. A legrövidebb utak fáját megkaphatjuk Dijkstra algoritmusának segítségével, elindulunk az s pontunkból, ő lesz a fa gyökere, és megkeressük a belőle kiinduló legrövidebb élt, ez tartozzon a v_1 ponthoz. A következő lépésben megkeressük azt a v_2 pontot, aki a második legközelebb van s -hez. v_2 -t vagy közvetlenül s -ből érjük el, vagy v_1 -en keresztül.

Ennek a keresésnek egy szemléletes módja, ha az élekre véletlen exponenciális idejű csörgőórákat képzelünk el, melyek csörgési ideje az élek hosszát jelenti. Ennek megfelelően, első lépésben elindítjuk az órákat az s -ből kiinduló éleken. Az elsőnek megcsörrenő él végpontja lesz v_1 , ebben a pillanatban elindítjuk az órákat a v_1 -ből kiinduló éleken is, miközben az s -ből kiindulókon még mindig futnak az órák. Ekkor nyilván a következőnek megszólaló él végpontja lesz v_2 , és attól függően,

hogy s -ből vagy v_1 -ből indult az él, oda kötjük be a fában. Ezt az eljárást folytatva megkapható a legrövidebb utak fája.

Az exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonságát felhasználva megtehetem, hogy amikor az első él megcsörren, és elindítom az órákat a v_1 -ből kiinduló éleken, akkor az s -ből kiinduló többi élen újraindítom az órákat. Ezzel az eloszlásokon nem változtattam, azzal a megkötéssel, hogy nyilván hozzá kell adnom az élhosszakhoz az újraindítás időpontját is. Ez azt is jelenti, hogy amennyiben minket csak az érdekel, hogy melyik pont hova kötődik be a fában, úgy azt tapasztaljuk, hogy ugyanannyi eséllyel fognak megszólalni az s -ből kiinduló élekre rakott órák, mint a v_1 -ből kiinduló élekre rakottak.

Tehát az új pontok a fa régebbi pontjaihoz egyenletes eloszlással kötődnek be, a részfák a méretükkel arányos valószínűséggel bővülnek. Új részfa akkor keletkezik, ha az új pont s -hez kötődik, ami v_k esetén $1/k$ valószínűséggel következik be. Ez pedig pontosan a kínai étterem növekedési modellje. \square

Az entrópia eloszlásának kiszámításához szükség lenne a részfák méretének eloszlására is, mi azonban megelégszünk a várható entrópiával, ahhoz pedig elég a különböző méretű részfák várható darabszáma.

3.2. SEGÉDTÉTEL. Várhatóan $1/k$ darab k méretű részfa lesz.

Ebből könnyen számolható a várható entrópia egy pontban: $H_0 = \sum \frac{n_i}{n} \log \frac{n}{n_i}$, ahol n_i az i -edik szomszédhoz tartozó részfa mérete. Ez átírható a következő alakba: $H_0 = \sum X(k) \frac{k}{n} \log \frac{n}{k}$, ahol $X(k)$ a k méretű részfák száma. $X(k)$ -ről viszont már tudjuk, hogy értéke várhatóan $1/k$, ez alapján H_0 várható értéke is számolható:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}H_0 &= \sum \mathbf{E}X(k) \frac{k}{n} \log \frac{n}{k} = \sum \frac{1}{k} \frac{k}{n} \log \frac{n}{k} = \frac{1}{n} \sum \log \frac{n}{k} = \frac{1}{n} \log \frac{n^n}{n!} \\ &\sim \log n - \log n + \log e = \log e, \end{aligned}$$

hiszen $\log n! \sim n \log n - n \log e$. \square

Ebből az is kiszámolható, hogy egy pont várhatóan $\ln n$ pont felé fog továbbítani, ami várhatóan $n \log \ln n$ bitet jelentene csomópontonként, ha nem vesszük figyelembe az eloszlást. Az entrópia segítségével viszont várhatóan $n \log e$ környékére tömöríthetőek a csomópontokhoz tartozó útvonalválasztó tömbök.

3.2. Szabályos gráfstruktúrák egységnyi élsúlyokkal

Az előző példával ellentétben ebben a részben olyan gráfokról esik szó, melyekben az élek egységnyi hosszúak, ebből következően két pont között jellemzően több legrövidebb út is van, ami azt is jelenti, hogy nem egyértelmű a következő pont számtalan célpontra vonatkozólag. Ha véletlenszerűen választanánk ezek közül,

akkor jellemzően egyenletes lenne a következő pontok eloszlása is, illetve a magasabb rendű entrópiával se mennénk sokra. Ezért a továbbiakban erre figyelni kell, hogy ügyesen válasszuk meg a következő pontokat.

Az 1. táblázat tartalmazza az ide vonatkozó eredményeinket. Fákat, d dimenziós hiperkockákat, négyzetrácsokat és tóruszokat vizsgáltunk. Az I oszlop azt mutatja, mennyi a szükséges várható információ, ha véletlenszerűen választunk a legrövidebb utak közül. A H_0 oszlop a nulladrendű entrópiát jelöli, ahol az értékeket úgy kaptuk meg, hogy a lehetséges következő pontok között felállítunk egy prioritást, és ez által lesznek gyakoribb meg ritkább szomszédok a tömbben. Továbbá a H_1 oszlop jelöli az elsőrendű entrópiát, itt figyelünk a csomópontok megfelelő számozására is. Fák esetében ez elérhető mélységi számozással, míg a többiek esetén ez elérhető a koordinátázásból adódó felsorolással. Végül az utolsó oszlopban az irodalomban ismert korlátok szerepelnek.

1. táblázat. Entrópia különböző speciális struktúrájú gráfokra

Gráfosztály	I	\bar{H}_0	\bar{H}_1	Compact routing
n pontú fa	$\frac{\log n}{n} \longleftrightarrow \frac{\log e}{2}$	$\frac{\log e}{2}$	$2 \frac{\log n}{n}$	$\frac{\log n}{n}$ [3]
d dim. hiperkocka	$\log d$	2	$d \frac{\log n}{n}$	$d \frac{\log n}{n}$ [5]
d dim. rács	$\log(2d)$	$\frac{\log e}{2}$	$d \frac{\log n}{n}$	$d \frac{\log n}{n}$ [5]
d dim. tórusz	$\log(2d)$	1	$(d+1) \frac{\log n}{n}$	$d \frac{\log n}{n}$ [5]

4. Szimulációs eredmények, távlati célok

Az elméleti eredmények azt sugallják, hogy már ezzel az egyszerű módszerrel is a minimálisához közeli eredmények érhetőek el. Sajnálatos módon a fentiek felül más gráfokra egyelőre nem sikerült analitikus korlátokat találnunk. Ezek a kezdeti eredmények elég ígéretesnek tünnek ahhoz, hogy szimulációs vizsgálat alá vonjunk a gyakorlatban előforduló gráfokat. Az elméleti példákban a szabályos struktúrákhoz természetesen adódott a csomópontok megfelelő felszámozása, azonban a gyakorlatban szükségünk volt valamilyen heurisztikára, amivel csökkenthettük a magasabb rendű entrópiákat. Többféle módszerrel is próbálkoztunk, jellemzően azt próbáltuk elérni, hogy a közeli pontok közeli sorszámot kapjanak, így a távolabbi pontok következő pont tömbjében azonos karakterekből álló részsorozatok jöhetnek létre, amiknek jellemzően kicsik a magasabb rendű entrópiáik.

Az 2. táblázatban különböző AS-gráfokra vonatkozó eredmények láthatók, az AS-gráfok az internet autonóm rendszerei (Autonomous System) [1]. Az eredményekből látható, hogy pusztán az eloszlás figyelembevételével már könnyen felére csökkenthető a szükséges tárhely, továbbá magasabb rendű entrópia figyelembevételével még az is jelentősen tovább csökkenthető.

2. táblázat. AS-gráfok címzési méretei

Gráf	n	m	\bar{I}	\bar{H}_0	\bar{H}_1
3-core	12 905	235 102	3	1,6	1,02
5-core	5328	186 570	3,95	2,4	1,56
7-core	3729	169 594	4,41	2,51	1,66
9-core	3006	158 898	4,90	2,73	1,53
17-core	1685	128 718	5,55	2,99	1,33

A továbbiakban szeretnénk folytatni az analitikus vizsgálatokat, több gráfosztályra is szeretnénk analitikus korlátokat adni az entrópiaértékekre, illetve szeretnénk találni egy jó felszámozást, ami általános gráfokra kellően csökkenti a magasabb rendű entrópiákat.

Köszönetnyilvánítás

Jelen munka részben az OTKA FK123957 támogatással készült, továbbá a szerzők szeretnék megköszönni a BME TMIT tanszékének támogatását.

Hivatkozások

- [1] *The CAIDA AS Relationships Dataset (2013-08-01)*, <http://www.caida.org/data/active/as-relationships>.
- [2] COVER, T. M. AND THOMAS, J. A.: *Elements of information theory*, Wiley-Interscience (1991). DOI: [10.1002/0471200611](https://doi.org/10.1002/0471200611)
- [3] FRAIGNIAUD, P. AND GAVOILLE, C.: *Routing in Trees*, in: *ICALP '01*, pp. 757-772 (2001). DOI: [10.1007/3-540-48224-5_62](https://doi.org/10.1007/3-540-48224-5_62)
- [4] GAVOILLE, C. AND PÉRENNÈS, S.: *Memory Requirement for Routing in Distributed Networks*, in: *ACM PODC*, pp. 125-133 (1996). DOI: [10.1145/248052.248075](https://doi.org/10.1145/248052.248075)
- [5] VAN LEEUWEN, J. AND TAN, R. B.: *Interval Routing*, *Comput. J.*, Vol. **30** No. **4**, pp. 298-307 (1987). DOI: [10.1093/comjnl/30.4.298](https://doi.org/10.1093/comjnl/30.4.298)



Kőrösi Attila 2007-ben szerezte meg diplomáját matematikából, majd doktorandusz lett a BME-TMIT tanszékén, és csatlakozott a HSN Laborhoz, ahol kamatoztatva gráf- és valószínűségszámítás-elméleti ismereteit, különböző kutatói projekteken vett részt. Kezdetben P2P-segédletű Video-on-Demand rendszerek hatékonyságán dolgozott. Később főleg hálózatokkal foglalkozott, azokon belül is főleg hálózatok kialakulásával, illetve útvonalkereséssel. Jelenleg az akadémiai világtól némileg eltávolodva, tőzsdei előrejelzésekkel foglalkozik.

KŐRÖSI ATILA

MTA-BME Információs Rendszerek Kutatócsoport
korosi@tmit.bme.hu



Dr. Rétvári Gábor 1999-ben szerzett villamosmérnöki oklevelet a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem (BME) Villamosmérnöki és Informatikai Karán. PhD fokozatát 2007-ben kapta meg. Doktori disszertációjának témája a szolgáltatásminőség alapú útvonalválasztás és a hálózati folyamatok elméletének távközlési alkalmazásai. Jelenleg tudományos főmunkatárs és kutatási témavezető a BME Villamosmérnöki és Informatikai Kar Távközlési és Médiainformatikai Tanszékén. Kutatási területe a kommunikációs hálózatok és informatikai rendszerek matematikai mo-

dellezése, a felhő-alapú számítástechnika hálózati vonatkozásai és a programozható hálózati eszközök architektúrája, analízise és optimalizálása.

RÉTVÁRI GÁBOR

MTA-BME Információs Rendszerek Kutatócsoport
retvari@tmit.bme.hu

ON THE SCALABILITY OF HOP-BY-HOP PACKET ROUTING:
TIGHT BOUNDS AND OPTIMAL ADDRESS SPACES

ATTILA KŐRÖSI, GÁBOR RÉTVÁRI

Routing in large-scale computer networks today is built on hop-by-hop routing: packet headers specify the destination address and routers use internal forwarding tables to map addresses to next-hop ports. In this paper we take a new look at the scalability of this paradigm.

First, we give a model that translates problems related to routing scalability to the language of information-theory. Forwarding tables are modeled as sequential strings, admitting tight memory requirement characterizations using Shannon's entropy measures and standard data compression techniques.

Contrary to previous work, our analysis is not of worst-case nature, but gives verifiable and realizable memory requirement characterizations even when subjected to concrete topologies and routing policies.

Using pure information-theoretic arguments, we are able to reproduce most of the space bounds obtained in the compact routing literature using piecemeal addressing schemes and analysis.

Our evaluations suggest that in most practically important cases significant memory savings can be attained by forwarding table compression over optimal address spaces. As far as we are aware of, this is the first study to link computer network scalability to information theory.

Keywords: shortest path routing, routing table entropy.

Mathematics Subject Classification (2000): 68R10, 05C12.

DÖNTÉSI BEFOLYÁS AZ EURÓPAI UNIÓ TANÁCSÁBAN: MIT HOZHAT A BREXIT?

KÓCZY Á. LÁSZLÓ

A Brexit, azaz az Egyesült Királyságnak az Európai Unióból való kilépése jelentős gazdasági és politikai hatásokkal jár. Itt egyetlen konkrét aspektust, az Európai Unió Tanácsában való hatalmi viszonyok átrendeződését vizsgáljuk. A Lisszaboni Szerződésnek köszönhetően a kilépés nem igényel új tárgyalásokat, a Tanácsban folyó szavazási játékokat a rendelkezésre álló népszerűségi adatok, illetve Eurostat-becslések alapján modellezzük. A Shapley–Shubik-index segítségével meghatározzuk az egyes tagországok hatalmi befolyását mind az Egyesült Királyság kilépése előtt és után, és markáns kapcsolatot találunk az országméret és a befolyás változása között.

1. Bevezetés

Nagy-Britannia és az Európai Unió kapcsolata soha sem volt egyszerű: kimaradtak jogelődje, az Európai Gazdasági Közösség (EGK) alapításából; az EGK ellensúlyozására 1960-ban létrehozott Európai Szabadkereskedelmi Társulás pedig nem lett igazán sikeres, tagjai a következő évben már jelezték csatlakozási szándékukat az EGK-hoz. Erre végül csak 1973-ban kerülhetett sor, miután Franciaország két alkalommal is élt vétőjogával. A megszerzett tagságot az Egyesült Királyság nem becsülte meg, kilépése szinte az első naptól napirenden volt; 2013-ban a Konzervatív Párt miniszterelnök-jelöltje, David Cameron ígéretet tett, hogy megválasztása esetén népszavazást tartanak a tagság kérdéséről. A többi, ahogy mondani szokás, már történelem: a 2016. június 23-án tartott népszavazásban a többség a kilépés mellett tette le a voksát. Maga a jogi aktus nem egyszerű lépés, évekig elhúzódhat, de előkészítése folyamatban van¹.

Bár általában az Európai Unió bővítéséről beszélünk, Nagy-Britannia kilépése nem lenne precedens nélküli. Grönland 1985-ben döntött a kilépés mellett a halálosági jogok körüli nézeteltérések miatt, de ez az első alkalom, hogy egy szuverén

¹Megjegyzés: A cikk 2017-es elfogadása óta folynak a kilépési tárgyalások, a kilépés időpontja többször halasztást nyert, de a szándék változatlan.

állam, amely nem mellesleg az EU egyik legnagyobb tagállama, lépne ki, s ennek várhatóan széleskörű hatásai lesznek a mindennapi életre az Egyesült Királyságban, de az EU többi tagországában is [5, 6, 17]. Mi a hatások közül csak egyet emelünk ki és vizsgálunk, az Európai Unió Tanácsában, korábbi nevén a Miniszterek Tanácsában folyó szavazásokhoz kapcsolódó hatalmi befolyás eloszlásának változását.

Az Európai Unió Tanácsa az EU egyik fő döntéshozó szerve. Szemben az Európai Parlamenttel, minden tagállamot egyetlen személy képvisel, de az országok közötti méretkülönbségeket kifejezendő a döntéshozás súlyozott, minősített többségi szavazással történik. Egy szavazás sikeres és eredményes, ha a javaslatot a tagországok legalább 55%-a támogatta, s a támogató országok össznépsége legalább az Unió lakosságának 65%-át adja. Ezek a szabályok a Lisszaboni Szerződésnek köszönhetők [11], míg korábban minden be-, vagy kilépést a szavazási súlyok újracsatolásának vitája kísérte, az új szabályok nem csak Horvátország belépését tették könnyebbé, de lehetőséget adnak arra, hogy elemezzük a Brexit utáni Tanács munkáját is, illetve, hogy további kilépések esélyét vizsgáljuk [18].

A dolgozat két fő részből áll: először röviden bemutatjuk a használt fogalmakat és jelöléseket, majd rátérünk a hatalmi viszonyok elemzésére.

2. Fogalmak és jelölések

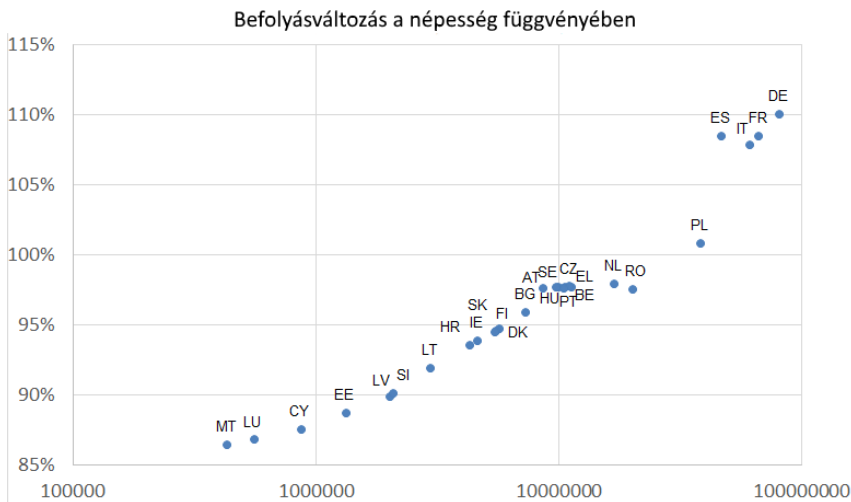
Ha N a szavazók, vagy játékosok halmazát jelöli, a szavazási helyzetek felírhatók (N, v) egyszerű játékként, azaz olyan kooperatív, átruházható hasznosságú $v : 2^N \rightarrow \{0, 1\}$ játékként, ahol a nyertes koalíciók értéke 1, a veszteseké 0. Vizsgálatunk középpontjában a szavazók hatalmi befolyása áll, ami a döntéshozó képességüket hívatott mérni. Elsősorban *hatalmi indexekkel* dolgozunk; ezek segítségével mérhető a döntéshozók *részesedése* a döntéshozásból. Egy szavazó hatalmi indexe megmutatja, hogy ha valaki meghatározó volt egy döntésben, akkor mekkora a valószínűsége annak, hogy ez az adott szavazó volt. Gondoljunk arra, hogy a döntés egy egységnyi pénz elköltéséről szól és rögtön látható, hogy egy hatalmi index segít a költségvetésből való várható részesedések megállapításában is.

A hatalmi indexek közül az egyik legismertebb a ϕ *Shapley–Shubik-index* [22], ami lényegében a Shubik-érték [21, 19] alkalmazása egyszerű játékokra. Utóbbi nem más, mint a szavazók átlagos határhozzájárulása az aktuális S koalíció $v(S)$ értékéhez véletlen érkezési sorrend esetén. Egyszerű játékok esetén a határhozzájárulás csak akkor nem 0, ha a szavazó éppen nyertessé tette a koalíciót; egy tetszőleges (N, v) egyszerű játék esetén az i játékos, vagy szavazó Shapley–Shubik-indexe

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} (v(S \cup \{i\}) - v(S)) ,$$

ahol $s = |S|$. Hasonlóan elismert a Banzhaf-index, s bár a kettő között jelentős szemléletbeli különbség van, értékükben alig térnek el. Érdekes megemlíteni, hogy

a Shubik-érték számtalan elosztási probléma megoldásában segít legyen szó költségmegosztásról egy öntözési játékban [15], vagy kockázatelosztásról [2, 1], illetve a szavazási modell hiányzással való kiegészítése hasonló, általánosabb játékokhoz vezet [14].



1. ábra. Módosított hatalmi indexek a jelenlegiek százalékában és a népességek függvényében.

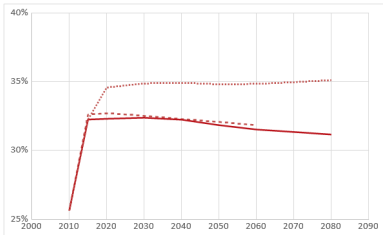
3. Adatok és eredmények

Az Európai Unió Tanácsában folyó szavazás a népességi adatokon is múlik; a szükséges népességszámokhoz és ezek 2080-ig szóló előrejelzéseikhez az Eurostat [8] adatait használtuk. A számításokat az IOP - Indices of Power 2.05 [4] program segítségével végeztük.

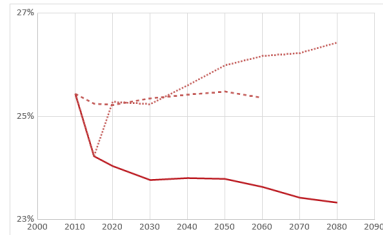
A kapott hatalmi változások többnyire előre láthatók. Az új tagok tulajdonság [3, 10] szerint egy tag, például az Egyesült Királyság távozása – többnyire – növeli a több hatalmi befolyását, és valóban a legtöbb tag, különösen a nagyobb népességű tagok Shapley–Shubik-indexe nő. Ezzel szemben a Lettországnál is kisebb országok esetében az új tag paradoxon [23, 20] figyelhető meg, azaz befolyásuk a kilépés ellenére csökken.

No de vajon a nagy országok jól járnak-e? Bár az évek alatt az Egyesült Királyság jelentős kedvezményeket harcolt ki magának, továbbra is jelentős befizető, a Unió költségvetésének 8,8%-át az Egyesült Királyság adja [7]. A Brexit után 91,2%-ára csökken a költségvetés, így az ebből számolt szeletek értéke is. Ha „fórintosítani” szeretnék a Brexit hatását, akkor a kapott indexeket is korrigálni kell.

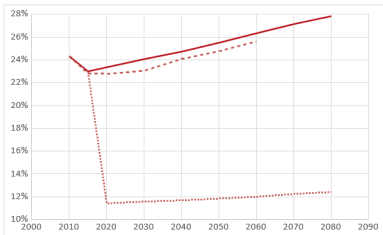
Az 1. ábrán jól látható, hogy a 6 milliónál kisebb lakosságú országok jelentős, akár 15%-os veszteséget szenvednek, csak a 20 millió felettiek, különösen a négy legnagyobb: Francia-, Német-, Olasz- és Spanyolország nyer. További eredményeket [13] és [18] közül.



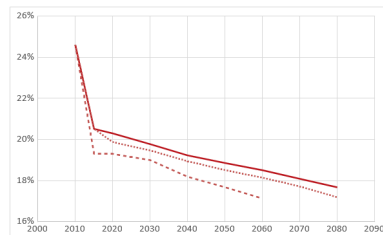
(a) Az Unió magja



(b) Dél-Európa



(c) Észak-Európa, Baltikum, Ausztria



(d) Közép-Kelet Európa

2. ábra. Hatalmi index előrejelzések négy országcsoportra. (A 2010-es [12], aktualizált és Brexit utáni értékek szaggatott, folytonos és pontozott vonallal.)

4. Konklúzió

Elemzők [16] szerint az Egyesült Királyság célja a kilépés helyett a kedvezőbb tagsági feltételek kiharcolása volt. London a pénzügyi, üzleti világ egyik központja, Európa számára nélkülözhetetlen, gondolhatnánk. A Brexit, mint fenyegetés meg kellett volna tegye a hatást, s várható volt, hogy miután az Egyesült Királyság (ismét) térdre kényszerítette a Kontinentet, a választók szívesen támogatnák egy *ilyen* Uniót. Nem ez történt. Az Egyesült Királyság a kezdetektől fogva problémás tag volt, nincs még egy ország, ami akár közel annyiszor állt volna a kisebbségi vélemény mellé [9]. Bár elemzésünk a problémakörnek csak egy kicsi részét vizsgálja, úgy tűnik, hogy az Unió véleményformáló országai költségvetési szempontból kifejezetten jól járnak a Brexittel (2. ábra). Az eredményt már ismerjük. A tárgyalások minimális, inkább szimbolikus engedményeket hoztak csak, a terv fordítva sült el. Kommunikálható eredmények hiányában a hivatalos kampány is csalódott, erőtlen volt, s végül a szavazók többségükben a kilépés mellett döntöttek.

Köszönetnyilvánítás

A szerző köszöni az MTA (LP-004/2010) és az NKFIH (K-109354 és K-128573) támogatását.

Hivatkozások

- [1] BALOG, D., BÁTNYI, T. L., CSÓKA, P., ÉS PINTÉR, M.: *Tőkeallokációs módszerek és tulajdonságai a gyakorlatban*, Közgazdasági Szemle, Vol. **58** No. **7-8**, pp. 619-632 (2011).
- [2] BALOG, D., CSÓKA, P., ÉS PINTÉR, M.: *Tőkeallokáció nem likvid portfóliók esetén*, Hitelezési Szemle, Vol. **(6)**, (2010), 604-616.
- [3] BRAMS, S. J. AND AFFUSO, P. J.: *Power and size: A new paradox*, Theory and Decision, Vol. **7** No. **1-2**, pp. 29-56 (1976). DOI: [10.1007/BF00141101](https://doi.org/10.1007/BF00141101)
- [4] BRÄUNINGER, T. AND KÖNIG, T.: *Indices of Power IOP 2.0* (2005).
- [5] BUCKLE, R., HEWISH, T., HULSMAN, J. C., MANSFIELD, I., AND OULDS, R.: *Directions for Britain outside the EU*, Institute of Economic Affairs, London (2015).
- [6] DAGNIS JENSEN, M. AND SNAITH, H.: *When politics prevails: the political economy of a Brexit*, Journal of European Public Policy, Vol. **1763**, pp. 1-9 (2016). DOI: [10.1080/13501763.2016.1174531](https://doi.org/10.1080/13501763.2016.1174531)
- [7] EUROPEAN PARLIAMENT: *EU budget explained: expenditure and contribution by member state. United Kingdom* (2015), <http://www.europarl.europa.eu/news/en/newsroom/20141202IFG82334/EU-budget-explained-expenditure-and-contribution-by-member-state>.
- [8] EUROSTAT: *EUROPOP2013 - Convergence scenario, national level, Population predictions - [tps00002]* (2014).
- [9] HIX, S., HAGEMANN, S., AND FRATESCU, D.: *Would Brexit Matter? The UK's Voting Record in the Council and the European Parliament*, Techn. Ber. April, VoteWatch Europe, Brussels (2016), <http://www.votewatch.eu/blog/special-report-would-brexit-matter-the-uks-voting-record-in-the-council-and-the-european-parliament/>.
- [10] KÓCZY, L. Á.: *Measuring Voting Power: The paradox of new members vs. the null player axiom*, in: RUDAS, I. J., FODOR, J., AND KACPRZYK, J. (Hg.), *Towards Intelligent Engineering and Information Technology*, pp. 67-78, Springer, Berlin (2009). DOI: [10.1007/978-3-642-03737-5_5](https://doi.org/10.1007/978-3-642-03737-5_5)
- [11] KÓCZY, L. Á.: *Lisszaboni kilátások*, Közgazdasági Szemle, Vol. **58** No. **10**, pp. 1045-1058 (2011).
- [12] KÓCZY, L. Á.: *Beyond Lisbon: Demographic trends and voting power in the European Union Council of Ministers*, Mathematical Social Sciences, Vol. **63** No. **2**, pp. 152-158 (2012). DOI: [10.1016/j.mathsocsci.2011.08.005](https://doi.org/10.1016/j.mathsocsci.2011.08.005)
- [13] KÓCZY, L. Á.: *How Brexit affects European Union power distribution*, HAS-CERS Discussion Paper, MT-DP - **2016/11**, (2016). DOI: [10.2139/ssrn.2781666](https://doi.org/10.2139/ssrn.2781666)
- [14] KÓCZY, L. Á. ÉS PINTÉR, M.: *Az ellenzék ereje - általánosított súlyozott szavazási játékok*, Közgazdasági Szemle, Vol. **58** No. **6**, pp. 543-551 (2011).
- [15] KOVÁCS, G. ÉS RADVÁNYI, A.: *Költségelosztási modellek*, Alkalmazott Matematikai Lapok, Vol. **28**, pp. 59-76 (2011).

- [16] KROLL, D. A. AND LEUFFEN, D.: *Ties that bind, can also strangle: the Brexit threat and the hardships of reforming the EU*, Journal of European Public Policy, Vol. **23** No. **9**, pp. 1311-1320 (2016). DOI: [10.1080/13501763.2016.1174532](https://doi.org/10.1080/13501763.2016.1174532)
- [17] OLIVER, T.: *European and international views of Brexit*, Journal of European Public Policy, Vol. **23** No. **9**, pp. 1321-1328 (2016). DOI: [10.1080/13501763.2016.1174534](https://doi.org/10.1080/13501763.2016.1174534)
- [18] PETRÓCZY, D. G., ROGERS, M. ÉS KÓCZY, L. Á.: *Tagkilépések és a magyar befolyás változása az Európai Unió Tanácsában*, Alkalmazott Matematikai Lapok, Vol. **36**, pp. 65-81 (2019).
- [19] PINTÉR, M.: *A Shapley-érték axiomatizálásai*, Alkalmazott Matematikai Lapok, Vol. **26**, (2009), pp. 289-315.
- [20] RUSINOWSKA, A. AND VAN DEEMEN, A.: *The Redistribution Paradox and the Paradox of New Members in the German Parliament*, in: PETROSYAN, L. A. AND MAZALOV, V. V. (Hg.), *Game Theory and Applications*, pp. 153-174, Nova, New York (2005).
- [21] SHAPLEY, L. S.: *A Value for n -Person Games*, in: KUHN, H. W. AND TUCKER, A. (Hg.), *Contributions to the Theory of Games*, Bd. II, pp. 307-317, Princeton University Press (1953). DOI: [10.1515/9781400881970-018](https://doi.org/10.1515/9781400881970-018)
- [22] SHAPLEY, L. S. AND SHUBIK, M.: *A method for evaluating the distribution of power in a committee system*, American Political Science Review, Vol. **48** No. **3**, pp. 787-792 (1954). DOI: [10.2307/1951053](https://doi.org/10.2307/1951053)
- [23] VAN DEEMEN, A. AND RUSINOWSKA, A.: *Paradoxes of voting power in Dutch politics*, Public Choice, Vol. **115** No. **1/2**, pp. 109-137 (2003). DOI: [10.1023/A:1022827428428](https://doi.org/10.1023/A:1022827428428)



Kóczy Á. László 1976-ban született Budapesten. Matematikus BA (University of Cambridge, 1997), közgazdász MSc (KU Leuven, 1999), majd PhD (KU Leuven, 2003) fokozatot szerzett, 2019-ben habilitált (BME). 2003-2009 között adjunktus a Maastrichti Egyetemen, 2007-2019 között főiskolai tanár a Budapesti Műszaki Főiskolán, majd docens az Óbudai Egyetemen. 2010-ben az MTA Lendület programjának támogatásával megalakította az MTA Közgazdaságtudományi Intézetben a Játékelméleti Kutatócsoportot, azóta az intézet tudományos főmunkatársa, 2019 óta a BME Gazdaság- és Társadalomtudományi Karának docense. Tagja az MTA Közgazdaság-tudományi Bizottságának és az MTMT Tudományometriai Szakbizottságának. A Magyar Közgazdaságtudományi Egyesület alapító tagja, korábbi elnöke, a Game Theory Society, a Society for Social Choice and Welfare, az Econometric Society, a European Economic Association tagja. Kutatási területe a játékelmélet. Egy könyv, 27 angol, 12 magyar nyelvű cikk szerzője, független hivatkozásainak száma 390, h-indexe 9.

KÓCZY Á. LÁSZLÓ

Közigazdaság- és Regionális Tudományi Kutatóközpont
 Közgazdaságtudományi Intézet
 1097 Budapest, Tóth Kálmán u. 4.
 koczy@krtk.mta.hu

POWER DISTRIBUTION IN THE COUNCIL OF THE EUROPEAN UNION: WHAT A DIFFERENCE WILL BREXIT MAKE?

LÁSZLÓ Á. KÓCZY

The possible exit of the United Kingdom from the European Union will have profound economic and political effects. Here we look at a particular aspect, the power distribution in the Council of the European Union. Since the Lisbon treaty the exit does not require new negotiations as the success of a voting initiative depends only on the number and total population of the supporting member states. Using the Shapley-Shubik power index we calculate the member states' powers with and without the United Kingdom and update earlier power forecasts using the Eurostat's latest population projections. There is a remarkably sharp relation between population size and the change in power: Brexit increases the largest members', while decreases the smallest ones' powers.

Keywords: European Union, Council of the European Union, qualified majority voting, power index, a priori voting power, demographics.

Mathematics Subject Classification (2000): 91A12, 91A80, 91F10.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok megjelenését támogatja
a Magyar Tudományos Akadémia Könyv- és Folyóiratkiadó Bizottsága.

A kiadásért felelős a BJMT főtákos
Szedte és tördelte: Moczár Károly

Nyomta a Coradix Kft., Budapest
Felelős vezető: Szűcs Ernőné

Budapest, 2019
Megjelent 18 (A/5) ív terjedelemben
100 példányban
HU ISSN 0133-3399

ÚTMUTATÁS A SZERZŐKNEK

Az Alkalmazott Matematikai Lapok csak magyar nyelvű dolgozatokat közöl. A közlésre szánt dolgozatokat e-mailen az `aml@math.elte.hu` címre kérjük elküldeni az ábrákat tartalmazó fájlokkal együtt. Előnyben részesülnek a L^AT_EX-ben elkészített dolgozatok.

A kéziratok szerkezeti felépítésének a következő követelményeket kell kielégíteni:

Fejléc: A fejlécnek tartalmaznia kell a dolgozat címét és a szerző teljes nevét.

Kivonat: A fejléc után egy, képletet nem tartalmazó, legfeljebb 200 szóból álló kivonatot kell minden esetben megadni.

Fejezetek: A dolgozatot címmel ellátott szakaszokra kell bontani, és az egyes szakaszokat arab sorszámozással kell ellátni. Az esetleges bevezetésnek mindig az első szakaszt kell megnevezni.

A dolgozatban előforduló képleteket a dolgozat szakaszokra bontásától független, folytatólagos arab sorszámozással kell azonosítani. Természetesen nem szükséges minden képletet számozással ellátni, csak azokat, amelyekre a szerző a dolgozatban hivatkozni kíván.

Mind az ábrákat, mind a lábjegyzeteket szintén folytatólagos arab sorszámozással kell ellátni. Az ábrák elhelyezését a dolgozat megfelelő helyén ábraazonosító sorszámokkal kell megadni. A lábjegyzetekre a dolgozaton belül az azonosító sorszám felső indexkénti használatával lehet hivatkozni.

Az esetleges definíciókat és tételeket (segédteteleket és lemmákat) szakaszonként újrakezdődő, ponttal elválasztott, kettős számozással kell ellátni. Kérjük a szerzőket, hogy ezeket, valamint a tételek bizonyítását a szövegben kellő módon emeljék ki.

Irodalomjegyzék: A dolgozatok szövegében az irodalmi hivatkozás számait szögletes zárójelben kell megadni, mint például [2] vagy [1, 7–13].

Az irodalmi hivatkozások formája a következő: Minden hivatkozást fel kell sorolni a dolgozat végén található irodalomjegyzékben, a szerzők, illetve a társszerzők esetén az első szerző neve szerint alfabetikus sorrendben úgy, hogy a cirill betűs szerzők nevét a Mathematical Reviews átírási szabályai szerint latin betűsre kell átírni. A folyóiratban megjelent cikkekre [1], a könyvekre [2] a következő minta szerint kell hivatkozni:

[1] FARKAS, J.: *Über die Theorie der einfachen Ungleichungen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik Vol. **124**, pp. 1-27 (1902).

[2] ZOUTENDIJK, G.: *Methods of Feasible Directions*, Elsevier Publishing Company, Amsterdam and New York, p. 120 (1960).

Szerző adatai: Az irodalomjegyzék után, a kézirat befejezéseképpen fel kell tüntetni a szerző teljes nevét és a munkahelye (esetleg lakása) pontos címét, illetve e-mail címét.

Idegen nyelvű kivonat: Minden dolgozathoz csatolni kell egy angol nyelvű összefoglalót.

A szerzők a dolgozatukról 20 darab ingyenes különnyomatot kapnak. A dolgozatok után szerzői díjat az Alkalmazott Matematikai Lapok nem fizet.

TARTALOMJEGYZÉK

<i>BJMT Alkalmazott Matematikai Konferencia, 2016., Előszó</i>	185
<i>Bodó Ágnes, SIS típusú járványterjedés vizsgálata hipergráfokon</i>	189
<i>Gáspári Zoltán, Kísérletileg meghatározott, belső dinamikát tükröző fehérjeszerkezeti sokaságok: előállítás, elemzés és biológiai relevancia</i>	197
<i>Izsák Ferenc, Szekeres Béla János, A törtendű diffúzió modelljei és szimulációja</i>	205
<i>Perczel György, Eröss Loránd, Fabó Dániel, Gerencsér László, Hajnal Boglárka, Szabó Csilla, Vágó Zsuzsanna, Wittner Lúcia, Epilepsziás agyi hálózatok egysejt-aktivitásának jellemzése Hawkes-folyamatok segítségével</i>	213
<i>Nagy Kem Gyula, Összekapcsolt, axiális irányban mozgó szál hálózatok merevségének jellemzése gráfokkal</i>	225
<i>Banyár József, A pénzügyi termékek ára</i>	237
<i>Györfi-Bátori András, Mihálykó Csaba, Mihálykóné Orbán Éva, Diszkrét kockázati modell általános befizetési ráta mellett</i>	247
<i>Mihálykóné Orbán Éva, Mihálykó Csaba, Kajtár Patrik, Általánosított Thurstone-módszer alkalmazásokkal</i>	255
<i>Bíró József, Gulyás András, Rétvári Gábor, Kőrösi Attila, Heszberger Zalán, Majdán András, Navigáció hálózatokban Bolyai János geometriája segítségével</i>	263
<i>Csáji Balázs Csanád, Szimmetria és konfidencia</i>	271
<i>Kőrösi Attila, Rétvári Gábor, A csomagtovábbítás skálázhatósága: korlátok és optimumok</i>	279
<i>Kóczy Á. László, Döntési befolyás az Európai Unió Tanácsában: Mit hozhat a Brexit?</i> ...	287

INDEX

<i>BJMT Applied Mathematics Conference, 2016., Preface</i>	185
<i>Ágnes Bodó, SIS epidemic propagation on hypergraphs</i>	189
<i>Zoltán Gáspári, Protein structural ensembles reflecting internal dynamics: generation, evaluation and biomedical relevance</i>	197
<i>Ferenc Izsák, Béla János Szekeres, Modeling and simulation of fractional diffusion</i>	205
<i>György Perczel, Loránd Eröss, Dániel Fabó, László Gerencsér, Boglárka Hajnal, Csilla Szabó, Zsuzsanna Vágó, Lúcia Wittner, Modeling single-unit activity of epileptic brain networks using Hawkes processes</i>	213
<i>Gyula Nagy Kem, Characterization of the cross-linked fibrils under axial motion constraints with graphs</i>	225
<i>József Banyár, The price of financial products</i>	237
<i>András Györfi-Bátori, Csaba Mihálykó, Éva Orbán-Mihálykó, A discrete Sparre Andersen risk model with general income rate</i>	247
<i>Éva Orbán-Mihálykó, Csaba Mihálykó, Patrik Kajtár, A generalization of the Thurstone method with applications</i>	255
<i>József Bíró, András Gulyás, Gábor Rétvári, Attila Kőrösi, Zalán Heszberger, András Majdán, Navigation in networks by the Bolyai-Lobachevsky hyperbolic geometry</i>	263
<i>Balázs Csanád Csáji, Symmetry and confidence</i>	271
<i>Attila Kőrösi, Gábor Rétvári, On the scalability of hop-by-hop packet routing: tight bounds and optimal address spaces</i>	279
<i>László Á. Kóczy, Power distribution in the Council of the European Union: What a difference will Brexit make?</i>	287