ALKALMAZOTT MATEMATIKAI LAPOK

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

34. kötet
Szerkesztőség és kiadóhivatal: 1055 Budapest, Falk Miksa u. 12.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, és olyan eredeti tudományos cikkeket publikál, amelyek a gyakorlatban, vagy más tudományokban közvetlenül felhasználható új matematikai eredményt tartalmaznak, illetve már ismert, de színvonalas matematikai apparátus újszerű és jelentős alkalmazását mutatják be. A folyóirat közöl cikk formájában megírt, új tudományos eredménynek számító programokat, és olyan, külföldi folyóiratban már publikált dolgozatokat, amelyek magyar nyelven történő megjelentetése elősegítheti az elért eredmények minél előbbi, széles körű hazai felhasználását. A szerkesztőbizottság bizonyos időnként lehetővé kívánja tenni, hogy a legjobb cikkek nemzetközi folyóiratok különszámaként angol nyelven is megjelenhessenek.

A folyóirat feladata a Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai) Osztályának munkájára vonatkozó közlemények, könyvismertetések stb. publikálása is.

A kéziratok a főszerkesztőhöz, vagy a szerkesztőbizottság bármely tagjához beküldhetők. A főszerkesztő címe:

Páles Zsolt, főszerkesztő
1055 Budapest, Falk Miksa u. 12.
A folyóirat e-mail címe: `aml@math.elte.hu`
A folyóirat honlapja: `http://aml.math.bme.hu`

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért felelősséget nem vállal.

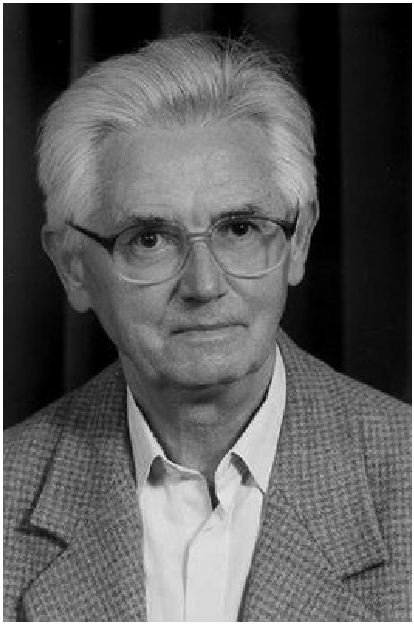
Az Alkalmazott Matematikai Lapok előfizetési ára évfolyamonként 1200 forint. Megrendelések a szerkesztőség címén lehetségesek.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica,
2. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica.

Alkalmazott Matematikai Lapok **34** (2017), 1–19

ARATÓ MÁTYÁS (1931–2015)



„Türelemmel viselt hosszú, súlyos betegség után 2015. június 2-án elhunyt Arató Mátyás, a Debreceni Egyetem Informatikai Karának professzor emeritusa, Széchenyi-díjas és Akadémiai díjas matematikus, az ELTE díszdoktora, a Magyar Köztársasági Érdemrend Tisztikeresztje és az Eötvös József Koszorú kitüntetések tulajdonosa, munkatársunk, tanárunk, kedves jó barátunk. 84 éves volt."

Lapunk négy alapító tagjának sorából már egyik sincs közöttünk. Közülük most Arató Mátyás emlékét örökítjük meg a lap hasábjain. A bevezetést Fazekas Gábor megemlékezéséből idézzük, és majd tőle kölcsönözzük a lezárást is.

Végig követjük pályáját publikációinak időrendi sorrendje szerint, közbe illesztve életének fő állomásait, felhasználva ehhez Fazekas Gábor által készített interjút 1994-ből, és saját önvallomásnak is beillő köszönő beszédét, amelyet az ELTE díszdoktorává avatása alkalmából írt.

Egy kis sváb faluban Eleken született Arad megyében, egy kistisztviselő első gyermekeként, akit még kettő követett. Eredeti neve Sipiczki Mátyás volt, ősei között magyar nevű nem is volt. Mégis magyarnak tartotta magát, ragaszkodott hazájához.

Az első 10 év, a tanyavilágban töltött nyarakkal, a szerető rokonság körében, élete szép, meghatározó korszaka volt.

Igy fejezte ki ennek egész életére való kihatását:

„És ez az élet, ez a szeretetteljes indítás, ami körülvett, hazámhoz, a nagy családhoz kötött egész életemben. Mert akármit is mondhattak, akármi is történhetett, elszakadhattam egy időre, messzire kerülhettem, messzire kerülhettek a hozzám közelállók, én megmaradtam magyarnak.”

Közösségi embernek tartotta magát, ezt tekintette sikerei zálogjának:

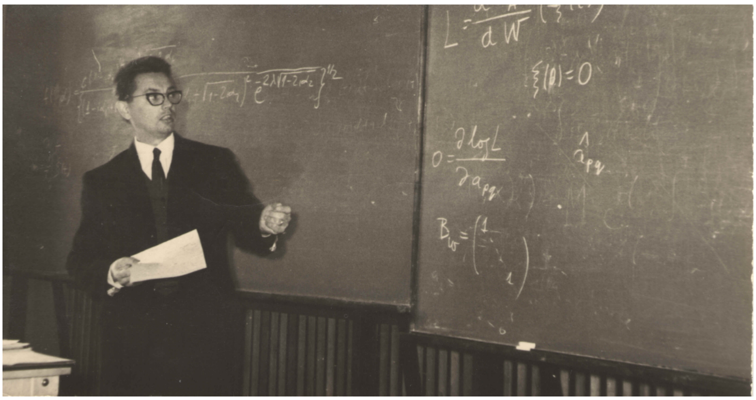
„Fiatal éveim leglátványosabb eredménye, hogy mindig be tudtam illeszkedni közösségekbe, és közösségi emberré váltam. Ez segített a tovább haladásban, az élet megértésében. Ez segített abban, hogy meg tudjam különböztetni a jót a rossztól, az értékest az értéktelentől.”

1941-ben Makóra költöztek, így tudott gimnáziumba járni. A Csanád Vezér Gimnázium új világában talált első közösségére a Csanád cserkészcsapatban. Itt alakult fejlődése, embersége és édesapja asszimilációs szándékának is megfelelően ismeretrendszere népi gyökerű magyarnak. Ez a közösség segítette, amikor 14 éves korában elvesztette édesapját. A három árvát édesanyja egyedül nevelte, szegénységben, de szeretetben.

A világégés eltüntette teljes eleki rokonságát; munkaszolgálat, kitelepítés volt sorsuk. Szegeden matematika, fizika és ábrázoló geometria szakra iratkozott be 1949-ben. Választását az motiválta, hogy akkor ezt olyan szakmának tartotta, amelynek mindig megmarad a becsülete. Gimnáziumi tanulmányaiból a matematika szinte teljesen hiányzott, ami sokáig akadályozta abban, hogy évfolyamtársaival egyenrangú hallgatóként vegyen részt az egyetemi oktatásban. De itt is sikerült a közösségbe beilleszkedne, sikerült kivívnia szorgalmával, akarásával az évfolyamtársak megbecsülését és szeretetét. Ez a szorgalom, akarat és kitartás végig meghatározó jellemzője maradt.

Alkalmazás iránti érdeklődésének megfelelően 1951-től Budapesten folytatta tanulmányait az akkor indult alkalmazott matematikus szakon. Erős társak közé került, újabb felzárkózási feladattal kellett megbirkóznia. 1954-ben diplomázott, majd az MTA Alkalmazott Matematikai Intézetébe került tudományos segédmunkatársként. Az ebben a periódusban megjelent első 5 dolgozatából kitűnik az analitikus formulák kezelésében és velük való számolásban való készsége, integrálok és differenciálegyenletek megoldásában való felkészültsége. A későbbiekben ezt nagyon jól kamatoztatta. Rényi Alfréd irányításával dogozott, és 1957-ben megjelent közös cikkük már a valószínűségszámítási előzetes ismereteire utal. Az életét és pályafutását meghatározó merész vállalkozása volt, hogy 1958-ban el mert menni aspirantúrára Moszkvába, a világ egyik legnagyobb matematikusához, A. N. Kolmogorovhoz. Rényi ajánlására jutott a világ akkor egyik, vagy talán a legerősebb sztochasztikus rendszerekkel foglalkozó iskolájába. Sikeresen beilleszkedett a rendkívül erős korábbi és akkori aspiránsok közösségébe (Prohorov, Rozanov, Sirjajev, Zolotarjov), elismerésüket és sokuk barátságát elnyerte. Kolmogorovval való barátságát megtapasztalhattuk magyarországi látogatásai alkalmával. Sok neves aspiránstársa közül kiemelhető Ja. G. Szinajjal, a 2014. évi Ábel-díj nyertesével kötött barátsága, aki társszerzője is volt, és aki sok mindent tanított is neki. Ennek nyomát láthatjuk a [109–111] számú dolgozataiban, amelyek inkább az új ismereteiről szólnak, kis kiegészítésekkel, és még nem új témájáról.

1962-ben Moszkvában megszerzett kandidátusi fokozatát a [112], [107] és [108] dolgozatok alapozták meg, amelyek a stacionárius Gauss-folyamatok statisztikai elemzésében jelentettek érdemi áttörést. A [107] cikk az egydimenziós stacionárius Gauss–SzámolóMarkov-folyamat paramétéreinek becslésével, míg a legnevesebb dolgozat, a [108], a komplex esettel foglalkozik, és társszerzői Kolmogorov és Szinaj voltak. Az általános becslés meghatározása mellett a dolgozat érdekessége még a Földtengely rotációja, a Chandler-ingadozás, sztochasztikus komponensének paraméterbecslése.



A barátságok és tudományos fejlődés mellett mást is hoztak a moszkvai évek, a családalapítást. Lídia Puskinszkajával kötött házassága egyben egy nagy kultúra, az orosz kultúra elsajátítását is jelentette számára. Ezzel is kibővült otthona. Felesége irodalmár, az orosz irodalom kutatója, az ELTE oktatójaként tudta folytatni Budapesten is oktatói, kutatói munkáját. Gyermekeiket, Miklóst és Verát mindkét nyelvre és mindkét kultúra mélyebb ismeretére tanították.

Hazatérése után 1965-ig a Belügyminisztériumban dolgozott rejtjelfejtő matematikusként. Moszkvai tartózkodása idején és utána is gondot fordított arra, hogy hazai folyóiratokban, és magyarul is megjelentesse új ismereteit és eredményeit. Jellemző publikációi a folytonos állapotú Markov-folyamatok statisztikai vizsgálatáról írt négy részes cikk [105–108], jegyzetek, újabb eredmények a folyamatok paraméterbecsléséről, statisztikáról és alkalmazásokról (1968-ig 8 magyar nyelvű folyóiratcikk). 1965-től tartott speciális előadásokat az ELTE matematikus szakán sztochasztikus folyamatok elméletéből. Ezen találkoztam vele először. A következő nagy fordulópontot 1965-ben az MTA Számító Központban kapott osztályvezetői kinevezése hozta el. Itt kezdte meg vezetői pályafutását és tudományirányítási tevékenységét. A matematika alkalmazásai számítógép felhasználásával, elsősorban statisztikai, sztochasztikus modellek, számítások jellemezték az új Statisztikai és Valószínűségszámítási osztályt. Jól élt az MTA által kapott lehetőséggel. A két Szovjetunióból visszaérkezett kandidátussal, Pergel Józseffel és Tomkó Józseffel hármasban frissen végzett egyetemistákból építette ki néhány év alatt az osztályt. (Az 1966-ban végzettek közül Krámli András és Knuth Előd, az 1967-ben végzettek közül rajtam kívül Dávid Gábor és Gyurácz Németh Teréz és Horváth Gaudi István, majd Tőke Pál és még évente többen kerültek az osztályra.) Saját kutatási témájában elsősorban a folyamatok paraméterbecsléséhez tartozó eloszlások numerikus meghatározásához, szimulációjához végeztetett számításokat, akkor még az Ural-2 csöves gépen. Osztályának ismereteit tudatosan felépített tanulással fejlesztette a valószínűségszámítás, statisztika, sztochasztikus folyamatok elmélete és statisztikájuk, idősorelemzés, tömegkiszolgálás és megbízhatóságelmélet, szimulációk terén. Például, a Gihman–Szkorohod-könyv, Box–Jenkins-könyv, Feller-könyv II. kötetének teljes feldolgozása heti szeminárium keretében. Intenzív munka folyt, mégis kötetlen, családias légkörben, kirándulásokkal, vízitúrákkal. Az osztályt felkészülten érte a lehetőség, amit az MTA új, második generációs gépének, a CDC-3300-nak üzembe állítása jelentett.

Az MTA 1970. évi Tudományos Ülésszakán, a Matematikai és Fizikai Tudományok Osztályának és a Műszaki Tudományok Osztályának „A számológéptudomány kérdései” című közös vitaülésén elhangzott előadása [82] világosan mutatja a gép által megnőtt lehetőségeket.

„A modern nagyteljesítményű számológépek programkönyvtárának tekintélyes részét alkotják az idősor elemzéssel foglalkozó programok. Ebben a vonatkozásban a Magyar Tudományos Akadémia CDC 3300-as új gépe megfelelő lehetőségeket

biztosít mind a matematikai kutatások tovább fejlesztéséhez, mind az alkalmazások kiterjesztéséhez. Az Akadémia intézményei kutatóinak rendelkezésére álló programkönyvtár elég gazdag ahhoz, hogy standard feladatok megoldását könnyen megkapják, másrészt a Számítástechnikai Központ Valószínűségszámítási és matematikai statisztikai osztályán már most is folyik az idekerülő programkönyvtár kipróbálása és bővítése.”

Az Úri utcai otthonos kis elhelyezést kinőtte az Intézet, az Osztály a Vár aljában, a Logodi utcában átmenetileg egy barakkba költözött, onnan az Automatizálási Kutatóintézettel való egyesülés után pár évig a Kende utcában voltunk, majd 1975-től a Victor Hugo utcai új épületbe kerültünk. Arató az egyesüléssel a SZTAKI igazgatóhelyettese lett. 1974-ben teljesen váratlanul az osztály vezetését átadta nekem.

A gép lehetőséget adott szerződéses munkákra, ami újdonság volt az MTA kutatóintézeti tevékenységében. (Erről külön is írt elemzést 1975-ben, [75].) Folytatni lehetett a paraméterbecslésekhez tartozó eloszlások táblázatainak összeállítását szimulációval és numerikus közelítéssel, a géphez tartozó statisztikai könyvtárhoz idősorelemző programcsomag készült. A magas szintű programozási nyelvek (Algol, Fortran, Cobol, SIMULA) elsajátítása mellett hangsúlyt helyezett számítástudományi ismeretek erősítésére, például Donald. E. Knuth könyveinek szeminárium keretében való feldolgozására. Két új területen indított el tudatos kutatásokat. Az adatfeldolgozás, adatrendszerek, információs rendszerek irányvonalat a szerződéses munkák, mint a Dunai Vasmű termelésirányítási rendszere és a kórházi morbiditási adatok feldolgozása tette szükségessé. Ehhez a területhez kapcsolódott be Békéssy András és Demetrovics János a relációs adatmodell kutatásával, és egyben a diszkrét matematikával bővítve az osztály profilját. Arató érdeme ezen a téren a rendszerszervezés fontosságának és az információs rendszerek fokozódó szerepének felismerése volt. Az információs rendszerek, adatbázisok kutatási irányzatát ezzel indította be, ami azóta is folytatódik a SZTAKI-ban, az ELTE-n és a Debreceni Egyetemen.

A másik nagy terület az időosztású rendszerben üzemelő új gép operációs rendszerének elemzéséhez kapcsolódó hatékonyságvizsgálatokból alakult ki. Az osztályon több irányú modellezés folyt, szimulációs, tömegkiszolgálási, valószínűségszámítási analitikus modellezés. Mindegyikhez hozzájárult, legerősebb eredményei az operációs rendszerekben zajló tömegkiszolgálási folyamatok diffúziós közelítésében voltak, valamint a memória lapozási és a háttértárolók lapelhelyezési kérdéseinek optimalizálásában. Több társszerzővel dolgozott együtt ezeken a témákon, de önálló dolgozatokat is írt, sokat szerepelt nemzetközi fórumokon. Saját fő témája, a sztochasztikus folyamatok statisztikai vizsgálata élete végéig foglalkoztatta. 1970-ben védte meg „Elemi Gauss folyamatok statisztikai problémái” című tudományok doktora értekezését. A lineáris sztochasztikus rendszerek statisztikájában egyaránt tudta kezelni a folytonos és a diszkrét esetet, és ezzel a technikával gazdagította a statisztikai módszereket.

Jelentős aktivitással kapcsolódott be a hazai tudományos és szakmai közéletbe. Kiemelhető az ELTE, JATE, KLTE részére oktatásban, kutatásban nyújtott támogató együttműködése. A matematika alkalmazásainak és a számítástechnika kibontakozásának szerepét korán felismerve 1972-ban az MTA III. Matematikai és Fizikai Osztály keretében megalapított Számítástudományi Bizottság elnöke lett, Varga Lászlóval, a bizottság titkárjával 15 éven keresztül vezették a bizottságot. A bizottság elnökeként és vezetői funkcióinak kihasználásával a hazai számítástechnikai konferenciák, fórumok meghatározó szereplője volt.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok 1975. évi alapítása előtt a III. Osztály Közleményei, az SZK, illetve később a SZTAKI Közlemények és Tanulmányok sorozataiban mind saját maga, mind környezete igen sokat publikált magyar nyelven. Az AML első évfolyamaiban megjelent cikkek jól tükrözik azt az intenzív fejlődést, amit a korszerű számítógépek megjelenése hozott a matematika alkalmazásai számára. Jól kivehető az akkori két nagy iskola, Prékopa operációkutatási és Arató informatikai orientációjú környezetének kibontakozása.

Felismerte a számítástechnika és informatika jelentőségét, és ezen a területen hatékonyságelemzési modellekkel, módszerekkel maga is ért el számítástudományi, matematikai eredményeket. Sokunkat indított el ezen az úton. A lineáris sztochasztikus rendszerek statisztikájában elért eredményei mellett ezt tekintette második fő eredményének. Ennek a területnek elismertetéséért sokat tett, és egyúttal sokat ütközött is, tudománypolitikában és szakmai irányítási szinteken. Informatikai, információs rendszerek létrehozását tartotta a legfontosabb célnak, a hardvergyártást ellenezte. Többször is jelölték az MTA levelező tagjának, volt, amikor a III. Osztály is megszavazta.

1976-ban SZTAKI-ban betöltött igazgatóhelyettesi megbízását felváltotta a számítástechnika alkalmazásai terén saját elképzeléseinek megvalósításához nagyobb lehetőségeket biztosító KSH-hoz tartozó Számítógépalkalmazási Kutató Intézet (SZÁMKI) igazgatói feladatával. Az MTA kutatóintézetben töltött 10 év után újabb 10 év következett. A SZÁMKI-ban sikeresen épített fel új, fiatal csoportokat, bátran bízott rájuk kihívást jelentő feladatokat. Legnagyobb büszkeséggel ebből az időszakból a Heppes Aladár főosztályának közreműködésével megvalósított népességnyilvántartási rendszer fejlesztését, a személyiszámok sikeres kiosztását szokta emlegetni.

A SZÁMKI-ban 1980-ig sikeresen valósította meg elképzeléseit. Nagy országos rendszerek fejlesztése – mint a népesség-nyilvántartás – mellett hatékony alkalmazott kutatások folytak. Jó hangulatú közösséggé szerveződött az intézet, sokan azóta is tartják egymással a kapcsolatot.

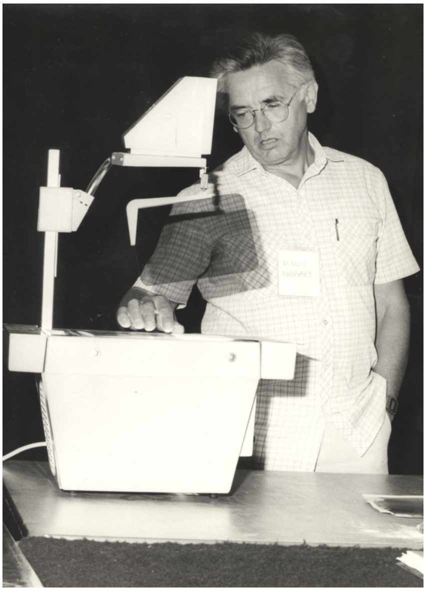
Vezetői terhelése mellett is folyamatosan dolgozott kutatási témáin. Publikációs listájából látható, hogy a váltás időszaka környékén több szakmapolitikai jellegű cikket is írt. Ezek az írások történetileg is érdekes képei a hazai számítástechnika kibontakozásának, jól kifejezik terveit, szándékait és az informatika értékei melletti állásfoglalását. Ilyenek a [66] cikk, ami a II. Magyar Számítástechnikai Konferencia megnyitásaként elhangzott angol nyelvű előadása, majd a [65] cikk az AML-ban, ahol először jelenik meg számítástechnika helyett az informatika, és mutatja be számítástudományi és matematikai problémáit. További ide tartozó cikkek a [62], [58], [57] és [56]. Az informatika érdekérvényesítéséért, az információs, informatikai rendszerek fejlesztésének fontosságáért emelt szót ezekben az írásaiban is. Az ESZR gépek időszakában ez nem egyezett a hivatalos irányvonallal. A matematika értékrendjében is az informatikához szükséges matematikai alkalmazások, az algoritmizálás szerepének nagyobb elismertetéséért harcolt. Nem volt matematikaellenes, hiszen mindig is hangsúlyozta – ahogy Kolmogorovtól tanulta – a matematika mély tudásának fontosságát az alkalmazásokban. Az 1981-ig tartó időszakban a hatékonyságelemzés területén éppen a sztochasztikus apparátus mélyebb ismeretére épülő eredményeivel szerzett nemzetközi tekintélyt, amit konferenciák szervezésében, a Performance Modelling folyóirat szerkesztőbizottságába való felkérése, és Erol Gelenbe (jelenleg az MTA külső tagja) barátsága mutat.

A 70-es évek legemlékezetesebb konferenciasorozata a hazai számítástechnikai kutatások fellendülésében, nemzetközi kapcsolatainak kiépülésében kiemelkedő szerepet betöltő, hazai és nemzetközi résztvevőkkel az Operációs Rendszerek Visegrádi Téli Iskola sorozat volt, amelyet Knuth Előddel szervezett. Aktív résztvevője volt a szocialista országok akadémiái közötti együttműködés keretében a KNVVT-nek (Komisszija Naucsnije Voproszi Vicsiszlityelnoj Tehniki), a számítástechnika tudományos kérdései bizottságnak. A bizottság munkacsoportjainak évente rendezett szakmai konferenciái és ahhoz kapcsolódó ülései jelentették akkor a hazai informatikai kutatások fő nemzetközi mozgásterét.

A SZÁMKI-ban igazgatói munkájának első felében épült ki kapcsolata a hatékonyságvizsgálat nemzetközi élcsoportjával, publikációi is inkább erre a területre estek. A diffúziós közelítések további modelljei és a dinamikus lapelhelyezési stratégiák újszerű vizsgálatai a [68], [67], [64], [63], [61], [60], [54], [55], [57], [51], [49], [48], [46], [45], [44] és végül a [41] dolgozatokban szerepelnek. A SZÁMKI-s környezetben ehhez több kapcsolódása volt, míg a SZTAKI-ban megkezdett sztochasztikus folyamatok statisztikájával foglalkozó csoporttal még az 1995-ben készített [73], [71], [70] dolgozatok jelentik az utolsó publikációkat.

1980-től újra előtérbe került a sztochasztikus folyamatok kutatása. Nemzetközi kapcsolatainak erősségét mutatja ezen a téren is például, hogy itt járt S. R. Srinivasa Varadhan, az egyetlen, aki valószínűségelméletből Abel-díjas (2007), a Balakrishnannal szervezett visegrádi 3rd IFIP-WG 7/1 konferencián. Majd egy másik, a sztochasztikus differenciálrendszerekről tartott európai konferencián való részvétele is mutatja a visszatérést. Ehhez tartoznak a [43], [42], [40] dolgozatok.

Erre az időre tehető a SZÁMKI átalakítása körül kialakult nézeteltérése a felső vezetéssel, az intézetösszevonások és a SZÁMALK megalakulása. Ahogy csökkent szerepe az intézet feladatainak irányításában, saját kutatási témája került újra előtérbe. Fel is készült ezzel egyéves amerikai útjára, Los Angelesben, a UCLA-n töltött vendégprofesszorságra. Ezt használta ki, hogy megírja legjelentősebb művét, a Springer Verlagnál megjelent könyvet „Linear stochastic systems with constant coefficients: A statistical approach" címmel.



Hazatérése után a SZÁMALK-ban még 1986-ig oktatási igazgatóhelyettesként dolgozott. Egyetemi oktatásban folyamatosan részt vett, 1971-től az ELTE-n félállású egyetemi tanárként tanított, majd 1984-től lett Debrecenben a KLTE félállású egyetemi tanára, amit 1986-tól teljes állásra váltott és egyúttal a Számolóközpont igazgatója lett.

Láthatóan a közösségváltás időszakában szinte kizárólag saját kutatási témájában, a sztochasztikus differenciálegyenleteken dolgozott. Egyszer még bevont egy könyvfejezet ([33] publikáció) írásába, ami első közös munkákat is részben tartalmazta. Az újabb és újabb részletek a diffúziós folyamatok, a Kálmán-szűrés, a zaj melletti paraméterbecslés terén – a [38–34], [31–29] dolgozatokban – mutatják, hogy ezen a témakörön ugyanúgy nap mint nap dolgozott, ahogy a napi 5-10 kilométeres futásokat is minden reggel teljesítette.

A folyamatok eloszlásának a standard Wiener-mérték szerinti Randon–Nikodym-deriváltjának kiszámolására és a diszkrét-folytonos átmenet kezelésére épülő módszere és finom technikája húzódik eredményei mögött.

A feladat változása életviteli változást is hozott.

A sport, mozgás mindig lételeme volt. Ez járult hozzá kivételes munkabíró képességéhez. Egyetemi éveiben néptánc csoport tagja volt, a foci, evezés és legjellemzőbben a futás voltak kedvencei. Nem kocogott, tempósan futott minden reggel 5-10 kilométert. Természetkedvelő volt, a 80-as évek elején a Pilisben épített Tanya lett a család kedvelt pihenőhelye. Később is, már romló egészségi állapotában is ide szeretett visszavonulni. Itt töltötte a nyarat, ide költöztek ki, amíg ápolása még lehetővé tette.

60 éves korában határozta el, hogy ettől kezdve a család és a matematika alkalmazásának oktatása kerül a tudományos kutatás helyett előtérbe. Feltehetően ebben az elhatározásában közrejátszott az is, hogy betegségének első tünetei ekkor már jelentkeztek. 1992-ben hollandiai útja mégis visszahozta régi kutatásaiba. Sokkoló esemény mélyítette tovább családjához fordulását. Robi unokájának elrablása Moszkvába, majd kalandos visszahozása még nagyobb elszántságot váltott ki benne, hogy összeszedje magát. Ezt mutatják a [26], [25], [23], [22] dolgozatok.

Legnagyobb kitüntetését 1994-ben elnyert Széchenyi-díj jelentette. Ezt követően 70 éves korában az MTA Eötvös József koszorúját, majd 75 éves korában a Magyar Köztársasági Érdemrend tiszti keresztjét kapta.

A Számolóközpont vezetőjeként kihasználta a lehetőséget fiatalok bevonására, akik közül többen később az informatika oktatásába kerültek át. A statisztika oktatása mellett fő hatása az informatikus képzés megújításában volt, elsősorban a rendszerszervezés, alkalmazási rendszerek, információs rendszerek fejlesztésének előtérbe hozása fűződik hozzá. Vezetői feladatai sorrendben: a Számolóközpont igazgatója, az Információtechnológiai Tanszék vezetője, a Valószínűségszámítási Tanszék vezetője, végül a Matematikai és Információtechnológiai Intézet igazgatóhelyettese.

Önálló dolgozata már alig készült, viszont az új közössége tagjaival sikeresen bővítette ki a sztochasztikus folyamatok statisztikai vizsgálatát – lásd [16-13], [10], [8], [6], dolgozatok; 2-3 társszerzővel, összesen 9 személyt bevonva. Minden vezetői beosztásában az informatika helyzetének javításáért harcolt, sokat tett az informatika anyagi és szervezeti feltételeinek karon és intézeten belüli erősítéséért. Mindez nagyban járult hozzá az Informatikai Kar létrejöttéhez.

Az elhatalmasodó betegség egyre nehezebbé tette mozgását, mégis nyugdíjba vonulásáig, 2001-ig teljes intenzitással végezte munkáját, heti három napot töltve Debrecenben. A heti több napos debreceni tartózkodáshoz az egyetem szolgálati lakást biztosított, amit hármasban használtak Lovas Istvánnal és Pozsgai Imrével nyugdíjba vonulásukig. Utána is, míg önálló közlekedésre képes volt, lejárt Debrecenbe, részt vett szakmai rendezvényeken, a valószínűségszámítási iskolák éves síkfőkúti találkozóin, sőt, szervezett is rendezvényeket. Doktoranduszaival még három publikáció készítésében vett részt.

A szakmai közösség igyekezett kifejezni elismerését, háláját munkásságáért. Az ISSPSM sztochasztikus stabilitás nemzetközi szemináriumsorozat 1996-os Hajdúszoboszlón rendezett konferenciáján 65. évének betöltése alkalmából tartott köszöntésén már erősen láthatóak voltak súlyos betegségének tünetei. A 2001-ben Egerben rendezett közös informatikai (ICAI) és sztochasztikus (ISSPSM) konferencia Arató, Varga László és Zolotarjov 70. éves köszöntésének jegyében zajlott. A konferencia válogatott előadásait az Mathematical and Computer Modelling folyóirat különszámában sikerült megjelentetnie az én szerkesztésemben. A szerkesztés munkáiban mind a válogatásban, mind átnézésben igen nagy részt vállalt. Ebben a kötetben jelent meg ([4] dolgozat) utolsó új matematikai eredménye, a populációdinamikában - vadász-préda modell - használt Lotka–Volterra-differenciálegyenlet diffúziós változatának bevezetésével és megoldásával.

75. évében Debrecenben részt tudott még venni a tiszteletére rendezett tudományos ülésszakon. A 80. évforduló alkalmából a Debreceni Egyetem Informatikai Karának új épületében rendezett konferenciára már nem tudott eljönni.

Utolsó nyilvános szereplésén 2007-ben, az ELTE díszdoktorává avatása alkalmából a köszönő hozzászólását nem tudta már elmondani, jelenlétében én olvastam fel. Kórházi ágyán a részletekben diktafonra mondott köszönő beszédet együtt alakítottuk, és jelenlétében én olvastam fel az ünnepi ülésen. Beszédének fő mondanivalója sikereinek titka volt, egy sikeres pályára való visszaemlékezés. Ezt követően állapota rohamosan romlott. Az utolsó években egyre szűkült mozgási lehetősége, állandó ápolásra szorult. Amíg ellátása megoldható volt, a nyarat a Pilisben töltötték Lídiával, és az éveken keresztül a havi váltásban náluk lakó ápolókkal.

A hivatása és a család volt legfontosabb számára. Édesanyjához való szoros kötődése mellett testvéreivel, unokatestvéreivel és családjaikkal szoros kapcsolatot ápolt. A család szeretete vette körül élete első 10 évében Eleken, a boldog gyermekkorban, majd a család szeretete kísérte végig utolsó 10 évének nehéz, türelemmel viselt útján. Ő maga is végsőkig itt kívánt maradni, ebben az önfeláldozó szeretetben, saját döntéssel választotta az életét a végsőkig meghosszabbító orvosi lehetőséget. A szeretet, az otthonában biztosított áldozatos ápolás éltette az emberi lehetőség határain túl. Nehéz út végén, mégis boldog emberként távozott.

Visszatekintve pályájára, nem csak jó matematikus volt, hanem különleges adottságú vezető is. Nem csak követelt, de inspirálni is tudott. Sokunkat indított el olyan úton, amiben csak az elején tartott velünk, majd örömmel vette, hogy lehagyva folytatjuk saját utunkat. Aspiránsainak, aspirantúrán kívüli tanítványaik, majd doktoranduszainak igen magas száma egyik jelzője eredményességének.

Közösségi megmozdulásokon közvetlen, jó hangulatot keltő, kedves és figyelmes volt egyaránt. Ugyanakkor tudománypolitikai kérdésekben, szakmapolitikai vitákban nézőpontja és az általa képviselt közösség érdekében indulatos, haragos fellépéseiről ismerték többben. Mit is képviselt? A matematika alkalmazását támogató réteg létrehozását, ami folytatódott a számítástudományra épülő professzionális szoftver és informatikai fejlesztő gárda kiépítésével, a működő, valós informatikai rendszerek fejlesztésének fontosságával.

Alkalmazott matematikusnak tartotta magát, aki felismerte a számítógépek és informatika jelentőségét, és sokat tett hazai kutatásuk, alkalmazásaik kibontakozásáért.

„Saját véleménye szerint: amiért dolgozott és számára elégedettséget is jelentett, az annak a sok-sok tehetséges fiatal embernek előre haladása, akik valaha tanítványai és munkatársai voltak. Mi sem bizonyítja ezt jobban, mint a Széchenyi-díj elnyerése után vele készített riport (Debreceni Szemle 1995/1) általa választott alcíme: … arra törekedtem, hogy magamat nálam tehetségesebb emberekkel vegyem körül".
Emlékét szeretettel megőrizzük.

Budapest, 2017. március
Benczúr András

Arató Mátyás publikációs listája

forrás: MTMT

[1] Adamkó A., Arató M., Fazekas G.: *Software Quality Models: a Probabilistic Approach*, In: International Conference Probability and Statistics with Applications, Dedicated to the 100th anniversary of the birthday of Béla Gyires. Konferencia helye, ideje: Debrecen, Magyarország , 2009.06.09 – 2009.06.12. Debrecen: p. 11.

[2] Attila Adamkó, Mátyás Arató, Gábor Fazekas, István Juhász: *Performance evaluation of Large-scale data processing systems*, In: Emőd Kovács, Péter Olajos, Tibor Tómács (szerk.), Proceedings of the 7th International Conference on Applied Informatics. 792 p. Konferencia helye, ideje: Eger, Magyarország, 2007.01.28 –2007.01.31. Eger: BVB Nyomda és Kiadó Kft., pp. 295–302. 1–2

[3] Mátyás Arató, Gyöngyi Bujdosó: *New style in teaching word processing*, Teaching Mathematics and Computer Science **4**:(2) pp. 417–426. (2006)

[4] Arato M.: *A famous nonlinear stochastic equation (Lotka-Volterra model with diffusion)*, Mathematical and Computer Modelling **38**:(7–9) pp. 709–726. (2003)

[5] Mátyás Arató, Gyula Pap, Katalin Varga: *Asymptotic behaviour of the least squares estimator of the mean of AR(1) models*, Analysis Mathematica **29**:(4) pp. 243–257. (2003)

[6] Arató M., Fegyverneki S.: *New statistical investigations of the Ornstein-Uhlenbeck process*, Computers and Mathematics with Applications **44**:(5–6) pp. 677–692. (2002)

[7] Arató Mátyás, Kertész Imre, Tisza Vilmos: *Mi vár még ránk? : (bűnügyi előrejelzés 2000-2010)*, Büntetőjogi Kodifikáció **2**:(1) pp. 3–11. (2002)

[8] Mátyás Arató, Gyula Pap, Katalin Varga: *Estimation of the mean of multivariate AR processes*, Computers and Mathematics with Applications **43**:(6–7) pp. 707–719. (2002)

[9] Arató Mátyás: *Milyen a mi „provinciális" informatikánk?*, Debreceni Szemle **9**:(4) p. 566. (2001)

[10] Mátyás Arató, Gyula Pap, Martien van Zuijlen: *Asymptotic inference for spatial autoregression and orthogonality of Ornstein-Uhlenbeck sheets*, Computers and Mathematics with Applications **42**:(1–2) pp. 219–229. (2001)

[11] Arato M.: *In memory of Albert G. Dragalin (1941–1998)*, Publicationes Mathematicae Debrecen **55**:(3–4) pp. I–IV. (1999)

[12] Arato M.: *In memory of Paul Erdos – March 26, 1913 September 20, 1996*, Computers and Mathematics with Applications **37**:(8) pp. 1–2. (1999)

[13] Arato M., Baran S., Ispany M.: *Functionals of complex Ornstein-Uhlenbeck processes*, Computers and Mathematics with Applications **37**:(1) pp. 1–13. (1999)

[14] Arató M., Kuki A., Lencse Zs.: *Experimental NEWS distribution system*, In: Kovács Emőd, Winkler Zoltán (szerk.): Proceedings of 4th International Conference on Applied Informatics (ICAI'99): Education and other fields of applied informatics, computer graphics, computer statistics and modeling. Konferencia helye, ideje: Eger, Noszvaj, Magyarország, 1999.08.30–1999.09.03. pp. 31–34.

[15] Mátyás Arató, Gyula Pap, Martien van Zuijlen: *Asymptotic inference for spatial autoregression and orthogonality of Ornstein-Uhlenbeck sheets*, Report No. **9927**, University of Nijmegen, The Netherlands (1999)

[16] Arato M., Kuki A., Szabo A.: *Exact distribution of estimators of parameters in Ornstein–Uhlenbeck processes*, Computers and Mathematics with Applications **31**:(11) pp. 45–54. (1996)

[17] Arató Mátyás: *A matematikai statisztikáról*, Acta Universitatis Szegediensis: Acta Juridica et Politica **49**:(3) pp. 45–51. (1996)

[18] Arató Mátyás, Kuki A., Szabó A.: *Modern információtechnológiai eszközök hatékonysági vizsgálata*, In: Bakonyi Péter, Herdon Miklós (szerk.): Informatika a felsőoktatásban '96 és Networkshop '96: Informatics in the Hungarian higher education: proceedings. 1219 p. Konferencia helye, ideje: Debrecen, Magyarország, 1996.08.27 – 1996.08.30. Debrecen: Debreceni Egyetem, pp. 90–99. (1996) (ISBN:963-0470-25-X)

[19] Arató M., Juhász I., Kormos J., Kuki A., Szabó A.: *Modern információtechnológiai eszközök hatékonysági vizsgálata*, In: Neumann János Számítógéptudományi Társaság: A Neumann János Számítógéptudományi Társaság VI. országos kongresszusa: Siófok, 1995. május 28–31.: előadások: Informatikai alkalmazások '95. 1040 p.
Konferencia helye, ideje: Siófok, Magyarország, 1995.05.28 – 1995.05.31. Vác: Neumann János Számítógép-tudományi Társaság (NJSZT), pp. 846–854. (1995) (ISBN:963-8431-87-3)

[20] Arató M., Fazekas G., Kormos J.: *Alkalmazási rendszerek oktatásának kérdései a tudományegyetemeken és az universitasokon*, In: Neumann János Számítógéptudományi Társaság: A Neumann János Számítógéptudományi Társaság VI. országos kongresszusa: Siófok, 1995. május 28–31.: előadások: Informatikai alkalmazások '95. 1040 p.
Konferencia helye, ideje: Siófok, Magyarország, 1995.05.28 – 1995.05.31. Vác:

Neumann János Számítógép-tudományi Társaság (NJSZT), pp. 337–340. (1995) (ISBN:963-8431-87-3)*

[21] Arató M., Kormos J.: *Rendszerszervezés oktatása a tudományegyetemen*, In: Neumann János Számítógéptudományi Társaság: A Neumann János Számítógép-tudományi Társaság VI. országos kongresszusa: Siófok, 1995. május 28–31.: előadások: Informatikai alkalmazások '95. 1040 p. Konferencia helye, ideje: Siófok, Magyarország, 1995.05.28 – 1995.05.31. Vác: Neumann János Számítógép-tudományi Társaság (NJSZT), pp. 333–336. (1995) (ISBN:963-8431-87-3)

[22] Mátyás Arató (szerk.): *New trends in probability and mathematical statistics: Proceedings of the second Ukrainian-Hungarian conference*, Konferencia helye, ideje: Munkács, Szovjetunió, 1992.09.25–1992.10.01. Kiev: 1995.

[23] Arato M.: *On the solution of KAC-type partial-differential equations*, Journal of Applied Probability **31**A: pp. 311–324. (1994)

[24] M. Arató: А. Н. Колмогоров в Венгрии, In: А. Н. Ширяев (szerk.), Колмогоров в воспоминаниях. Moszkva: Izdatelstvo Nauka, 1993. pp. 387–395.

Másik változat: А. Н. Колмогоров в Венгрии, в КОЛМОГОРОВ в воспоминаниях учеников, Редактор-составитель А. Н. Ширяев, МОСКВА Издательство МЦНМО 2006, с. 28–33.

[25] Arato M.: *A new proof on levy random domain*, Publicationes Mathematicae Debrecen **42**:(3–4) pp. 347–352. (1993)

[26] Arató M.: *Lévy's random domains on the plain [plane].* In: Janos Galambos, Imre Kátai (szerk.): Probability theory and applications: Essays to the memory of József Mogyoródi. 350 p. Dordrecht; Boston: Kluwer Academic Publishers, 1992. pp. 99–102. (Mathematics and Its Applications; 80.) Probability Theory and Applications: Essays to the memory of József Mogyoródi (ISBN:9780792319221)

[27] Arato M., Szantai T.: *Hungarian Applied-Mathematics - Preface*, Computers and Mathematics with Applications **21**:(1) p. R7. (1991)

[28] Téves cikk az MTMT-ben.

[29] M. Arató: Линейные стохастические системы с постоянными коэффициентами: Статистический подход, Moszkva: Izdatel'stvo Nauka, 1989. 303 p.

[30] Arato M.: *Asymptotic inference for discrete vector ar processes*, Publicationes Mathematicae Debrecen **36**:(1–4) pp. 9–13. (1989)

[31] Arato M.: *On sufficient statistics of Gaussian-processes with rational spectral density-function*, Theory of Probability and its Applications **30**:(1) pp. 103–116. (1986)

[32] Arató M., Kátai I., Varga L. (szerk.): *Topics in the theoretical bases and applications of computer science*, Proceedings of the 4th Hungarian Computer Science Conference : Győr, Hungary, July 8–10, 1985. Budapest: Akadémiai Kiadó, (1986) 513 p. (ISBN:963 05 4242 0)

[33] Benczur A., Arató M.: *Gauss-Markov folyamatok maximum-likelihood becslésének egzakt eloszlása, 3. fejezet*, In: Tusnády G., Ziermann M. (szerk.): Idősorok

analízise. 341 p. Budapest: Műszaki Könyvkiadó, 1986. pp. 85–117. (ISBN:963 10 6806 4)

[34] Arato M.: *Parameter-estimation and Kalman filtering in noisy background*, Acta Scientiarum Mathematicarum – Szeged **48**:(1–4) pp. 13–23. (1985)

[35] Arato M.: *On parameter-estimation in the presence of noise*, Theory of Probability and its Applications **29**:(3) pp. 622–628. (1985)

[36] Arato M.: *Round-off error propagation in the integration of ordinary differential-equations by one-step methods*, Acta Scientiarum Mathematicarum – Szeged **45**:(1–4) pp. 23–31. (1983)

[37] Arato M.: *Pprobability bounds and asymptotic properties of error propagation*, Computers and Mathematics with Applications **9**:(2) pp. 307–310. (1983)

[38] Arató M.: *Run length control in simulations and performance evaluation and elementary Gaussian processes*, Acta Cybernetica-Szeged **6**:(2) pp. 203–212. (1983)

[39] M. Arató: *Linear stochastic systems with constant coefficients: A Statistical Approach (***45***) Berlin*; Heidelberg: Springer, 1982. (Lecture Notes in Control and Information Sciences; 45.) (ISBN:978-3-540-12090-2)

[40] M. Arató: *Radon-Nikodym derivatives in case of rational spectral densities*, In: M. Kohlmann, N. Christopeit (szerk.): Stochastic differential systems: Proceedings of the 2nd Bad Honnef Conference of the SFB 72 of the DFG. Konferencia helye, ideje: 1982.06.28 – 1982.07.02. Berlin; Heidelberg: Springer, 1982. pp. 2–15.

[41] Arato M., Benczur A.: *A general treatment of rearrangement problems in a linear-storage*, Performance Evaluation **2**:(2) pp. 108–117. (1982)

[42] M. Arató, A. Balakrishnan, D. Vermes (szerk.): *Stochastic differential systems: 3rd IFIP-WG 7/1 Working Conference*, Konferencia helye, ideje: Visegrád, Magyarország, 1980.09.15 –1980.09.20. Berlin; Heidelberg: Springer, 1981. (Lecture Notes in Control and Information Sciences; 36.) (ISBN:978-3-540-11038-5)

[43] M. Arató: *On optimal stopping times in operating systems*, In: M. Arató, A. Balakrishnan, D. Vermes (szerk.): Stochastic differential systems: 3rd IFIP-WG 7/1 Working Conference. Konferencia helye, ideje: Visegrád, Magyarország, 1980.09.15 –1980.09.20. Berlin; Heidelberg: Springer, 1981. pp. 1-12. (Lecture Notes in Control and Information Sciences; 36.) (ISBN:978-3-540-11038-5)

[44] M. Arató, L. Varga (szerk.): *Mathematical models in computer systems: proceedings of the Third Hungarian Computer Sciences Conference*, Konferencia helye, ideje: Budapest, Magyarország, 1981.01. Budapest: Akadémiai Kiadó, 1981. 370 p.

[45] M. Arató: *On failure processes in computer systems*, In: M. Arató, L. Varga (szerk.): Mathematical models in computer systems: proceedings of the Third Hungarian Computer Sciences Conference. 370 p. Konferencia helye, ideje: Budapest, Magyarország, 1981.01 Budapest: Akadémiai Kiadó, pp. 201–212.

[46] Arato M., Benczur A.: *Dynamic placement of records and the classical occupancy problem*, Computers and Mathematics with Applications **7**:(2) pp. 173–185. (1981)

[47] Arató Mátyás: *Meszéna György - Ziermann Margit: Valószínűségelmélet és matematikai statisztika [ismertetés]*, Magyar Tudomány **26**:(11–12) pp. 985–986. (1981)

[48] Arato Matyás: *Probabilistic models in computer systems*, In: B"lgarska akademiâ na naukite Institut po matematika, Third International Summer School on Probability Theory and Mathematical Statistics (Varna, 1978) (Bulgarian). Konferencia helye, ideje: Varna, Bulgária, 1978 Sofia: Bulgarian Academy of Sciences, 1980. pp. 9–28.

[49] Krámli András, Arató M., Benczúr A.: *On the solution of optimal performance storage hierarchies with an independent reference string*, Banach Center Publications **6**: pp. 9–15. (1980)

[50] Mátyás Arató, Lajos Harza: *Soziale Auswirkungen und deren analyse aus der sicht Ungarns*, In: Uwe Kalbhen, Fritz Krückeberg, Jürgen Reese (szerk.): Gesellschaftliche Auswirlungen der Informations-Technologie. Frankfurt; New York: Campus Verlag, 1980. pp. 230–240. (ISBN:3 593 32626 4)

[51] M. Arató: *Analytical methods in distributed systems*, SZÁMKI Tanulmányok **5**: pp. 81–94. (1979)

[52] Arató M.: О статистических задачах на вычислительных системах, In: Computer Science Conference. Konferencia helye, ideje: Hanoi, Vietnam, 1979. pp. 1–25.

[53] Arató Mátyás: *Diffusion approximation for multiprogrammed computer systems*, In: Mátyás Arató, Előd Knuth (szerk.): Selected Papers on Operating Systems: Theory and Practice (Lectures, Visegrád Winter School, Visegrád, 1978). Konferencia helye, ideje: Budapest. Budapest: Számítógép-alkalmazási Kutató Intézetté alakult (SZÁMKI), 1978. pp. 9–33.

[54] Arató Mátyás: *Statistical sequential decision methods in case of independent strings*, In: Mátyás Arató, Előd Knuth (szerk.): Selected Papers on Operating Systems: Theory and Practice (Lectures, Visegrád Winter School, Visegrád, 1978). Konferencia helye, ideje: Budapest. Budapest: Számítógép-alkalmazási Kutató Intézetté alakult (SZÁMKI), 1978. pp. 133–156.

[55] Arató Mátyás: *M. V. Keldis (1911–1978)*, Magyar Tudomány **23**:(11) pp. 864–866. (1978)

[56] Arató Mátyás: *A Számítástudományi Bizottság látogatása a Dunai Vasműben*, Magyar Tudomány **23**:(9) pp. 704–705. (1978)

[57] Arató Mátyás: *A II. Magyar Számítástechnikai Konferenciáról*, Magyar Tudomány **23**:(2) pp. 153–154. (1978)

[58] Arató Mátyás: *A számítástechnika matematikai eszközeiről*, Információ Elektronika 1978:(2) pp. 89–93. (1978)

[59] Mátyás Arató, Előd Knuth (szerk.): *Selected Papers on Operating Systems: Theory and Practice (Lectures, Visegrád Winter School, Visegrád, 1978)*, Konferencia helye, ideje: Budapest. Budapest: Számítógép-alkalmazási Kutató Intézetté alakult (SZÁMKI), 1978.

[60] Arató M. *Statistical sequential methods for utilization in performance analysis*, In: H Beilner , E. Gelenbe (szerk.): Measuring, modelling and evaluating computer systems (Proc. Third Internat. Sympos., Bad Godesberg, 1977). Konferencia helye, ideje: Bonn, Németország, 1977.10.03 –1977.10.05. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1977. pp. 287–303.

[61] Arató Mátyás: *Szekvenciális statisztikai döntési módszerek független hivatkozások esetében*, Alkalmazott Matematikai Lapok **3**:(1–2) pp. 13–25. (1977)

[62] Arató Mátyás: *A matematika hazai alkalmazásainak helyzete*, Magyar Tudomány **22**:(7–8) pp. 569–578. (1977)

[63] Arató Mátyás: *Program behavior in multiprogrammed computers and diffusion approximation*, Közlemények MTA SZTAKI **18**: pp. 47–55. (1977)

[64] Arató Mátyás: *Statistical sequential methods on performance evaluation of computer system*, In: E GELENBE (szerk.): Modelling and performance evaluation of computer systems. Konferencia helye, ideje: Stresa, Olaszország, 1976.10.04 –1976.10.06. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, pp. 1–10.

[65] Arató Mátyás: *Az informatika számítástudományi és matematikai problémáiról*, Alkalmazott Matematikai Lapok **3**: pp. 245–255. (1977)

[66] Arató Mátyás: *Computer Science in Hungary*, SZÁMKI Tanulmányok **1**: pp. 1–10. (1977)

[67] Arató M.: *A note on optimal performance of page storage*, Acta Cybernetica-Szeged **3**:(1) pp. 25–30. (1976)

[68] Arató Mátyás: *A számítógépek hierarchikus lap-tárolási eljárásainak optimalizálásáról*, Közlemények MTA SZTAKI **16**: pp. 7–23. (1976)

[69] Arató M.: *The work of academician László Kalmár in the field of computer science (on the occasion of his 70th birthday)*, Acta Cybernetica-Szeged **2**:(3) pp. 179–181. (1975)

[70] Arató M., Benczúr A., Krámli A., Pergel J.: *Statistical problems of the elementary Gaussian processes. II. Statistics and related problems*, Tanulmányok-Magyar Tudományos Akadémia Számítástechnikai és Automatizálási Kutatóintézet **41**: pp. 1–66. (1975)

[71] Arató Mátyás: *Fejezetek a matematikai statisztikából számítógépes alkalmazásokkal*, Tanulmányok-Magyar Tudományos Akadémia Számítástechnikai és Automatizálási Kutatóintézet **42**: pp. 1–86. (1975)

[72] Arato Mátyás: *Magyar-szovjet valószínűségelméleti és statisztikai kapcsolatok*, Közlemények MTA SZTAKI **14**: pp. 7–23. (1975)

[73] Arató Mátyás: *Diffúziós folyamatok ismeretlen paraméterének Bayes-féle becsléséről*, Alkalmazott Matematikai Lapok **1**: pp. 51–64. (1975)

[74] Arató Mátyás: *Diffusion approximation for multiprogrammed computer systems*, Computers and Mathematics with Applications **1**:(3–4) pp. 315–326. (1975)

[75] Arató Mátyás: *Szükséges-e szerződés a tudományhoz?*, Magyar Tudomány **20**:(4) pp. 217–226. (1975)

[76] Arató Mátyás: *Operációs rendszerek működésének diffúziós közelítése I.: Általános megjegyzések*, Közlemények MTA SZTAKI **15**: pp. 21–28. (1975)

[77] Arató Mátyás: *On the diffusion approximation of operating systems II.*, Közlemények MTA SZTAKI **15**: pp. 29–41. (1975)

[78] Arató M., Knuth E., Tőke P.: *On Stochastic Control of a Multiprogrammed Computer Based System of a Probabilistic Model*, In: FIRST IFAC Symposium on "Stochastic Control". Konferencia helye, ideje: Budapest, Magyarország, 1974.09.25 –1974.09.27. Budapest: pp. 305–311.

[79] Arató Mátyás: *A lineáris filtráció vizsgálata diszkrét Gauss folyamatok esetén*, Közlemények MTA SZTAKI **12**: pp. 25–28. (1974)

[80] Arató Mátyás, Benczúr András, Krámli András, Pergel József: *Statistical problems of the elementary Gaussian processes. I. Stochastic processes*, Tanulmányok-Magyar Tudományos Akadémia Számítástechnikai és Automatizálási Kutatóintézet **22**: pp. 1–130. (1974)

[81] Arató M., Benczúr A.: *Some new results in the statistical investigation of elementary Gaussian processes*, In: Ghani A., Vincze I. (szerk.): European Meeting of Statisticians II.
Konferencia helye, ideje: Budapest, Magyarország, 1972.08.31–1972.09.05. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, pp. 69–83. (Colloquia mathematica Societatis János Bolyai, 9.)

[82] Arató Mátyás: *Számítástechnikai módszerek a sztochasztikus folyamatok elméletében és statisztikájában, biológiai alkalmazásokkal.* Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Osztályának Közleményei **21**: pp. 205–212. (1972)

[83] Benczur A., Arató M.: *Szimulációs eredmények az elemi Gauss folyamat paraméterei becslésének eloszlására* Közlemények – Magyar Tudományos Akadémia Számítástechnikai Központja **8**: pp. 3–35. (1972)

[84] Arató M., Benczur A.: *Funkcija raszpregyelenyija ocenki parametra zatuhanyija sztacionarnovo gausszovszkovo – markovszkovo processza*, Studia Scientiarium Mathematicarum Hungarica **5**: pp. 445–456. (1970)

[85] Arató M.: Об оценках параметров процессов, удовлетворяющих линейным дифференциальным стохастическим уравнениям, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica **5**:(1–2) pp. 11–15. (1970)

[86] Arató M.: Точные формулы для плотностей мер элементарных гауссовских процессов, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica **5**:(1–2) pp. 17–27. (1970)

[87] Arató Mátyás: *Racionális spektrál sűrűsűségfüggvényű stacionárius folyamatok várható értékének megengedhető becsléséről.* Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Osztályának Közleményei **19**: pp. 89–99. (1970)

[88] Arató Mátyás, Knuth Előd: *Sztochasztikus folyamatok elemei*, Budapest: Tankönyvkiadó, 1970. 139 p.

[89] Arató Mátyás: *Elemi Gauss folyamatok statisztikai problémái*, 166 p. Benyújtás éve: 1970. Védés éve: 1970.

[90] Arató M.: *Evaluation of the Confidence Limits for the "Decay" Parameter of a Complex Stationary Gaussian Markov Process*, Theory of Probability and its Applications **13**:(2) pp. 314–320. (1968)

[91] Arató M.: О подобных критериях и допустимых оценках стационарного гауссовского марковского процесса, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica **3**:(1–3) pp. 159–166. (1968)

[92] Arató M.: Несмещенные оценки параметра комплексного стационарного гауссовского марковского процесса. Приближенные функции распределения, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica **3**:(1–3) pp. 153–158. (1968)

[93] Arató Mátyás: *Bevezetés a sztochasztikus folyamatok elméletébe*, Budapest: Bolyai János Matematikai Társulat, 1968. 160 p.

[94] Arató Mátyás, S. Csibi, I. Palásthy, D. Szász, G. Tusnády: *Stochastic Processes*, In: P. Medgyessy, G. Tusnády (szerk.): Probability Theory, Mathematical Statistics and their applications, Budapest: Alfréd Rényi Institute of Mathematics, Hungarian Academy of Sciences, 1968. pp. 247–371.

[95] Arató Mátyás: *Matematikai statisztika*, Budapest: Tankönyvkiadó, 1967. 52 p. (Építőipari és Közlekedési Műszaki Egyetem, Mérnöki Kar, Szakmérnöki tagozat, Mérnöki Továbbképző Intézet kiadványa, 174.)

[96] Arató Mátyás: *Komplex stacionárius Gauss folyamat „csillapodási” paraméterének becslése és konfidencia intervallumainak megszerkesztése*, Közlemények – Magyar Tudományos Akadémia Számítástechnikai Központja **2**: pp. 122–161. (1967)

[97] Arató Mátyás: *Torzítatlan becslések és közelítések komplex stacionárius Gauss-Markov folyamat egy paraméterére*, Közlemények – Magyar Tudományos Akadémia Számítástechnikai Központja **3**: pp. 15–24. (1967)

[98] Arató Mátyás: *Sztochasztikus folyamatok regularitása*, Közlemények – Magyar Tudományos Akadémia Számítástechnikai Központja **3**: pp. 152–162. (1967)

[99] Arató Mátyás, Kertész Imre: *Kibernetikai módszerek alkalmazásának lehetőségei a kézírás vizsgálatában*, Belügyi Szemle: A Belügyminisztérium Központi Folyóirata (1963–1990) **4**:(1) pp. 27–40. (1966)

[100] Arató Mátyás, Pásztorné Varga Katalin: *Bizonyos egyszerű típusú sztochasztikus folyamatok numerikus szimulálása és paramétereinek becslése*, Közlemények – Magyar Tudományos Akadémia Számítástechnikai Központja **1**: pp. 68–89. (1966)

[101] Arató Mátyás, Kertész Imre: *A kriminálpszichológiai kutatómunka néhány aktuális problémája*, Magyar Pszichológiai Szemle **1966:(4)** pp. 627–639. (1966)

[102] Arató Mátyás: *Folytonos állapotú Markov folyamatok statisztikai vizsgálata IV*, Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Osztályának Közleményei **15**: pp. 107–124. (1965)

[103] Arató M.: *Folytonos állapotú Markov folyamatok statisztikai vizsgálata III*, Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Osztályának Közleményei **14**: pp. 317–330. (1964)

[104] Arató Mátyás: *Folytonos állapotú Markov folyamatok statisztikai vizsgálata I*, Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Osztályának Közleményei **14**: pp. 13–34. (1964)

[105] Arató Mátyás: *Folytonos állapotú Markov folyamatok statisztikai vizsgálata II*, Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Osztályának Közleményei **14**: pp. 137–159. (1964)

[106] Arató Mátyás: *A.N. Kolmogorov akadémikus 60 éves*, Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Osztályának Közleményei **13:(3)** pp. 225–228. (1963)

[107] Arató M: *Estimation of the parameters of a stationary Gaussian Markov process*, Doklady Akademii Nauk **145**: pp. 13–16. (1962)

[108] Arató M., Kolmogorov AN., Sinai YaG.: *Evaluation of the parameters of a complex stationary Gauss-Markov process*, Doklady Akademii Nauk SSSR **146**: pp. 747–750. (1962)

[109] Arató Mátyás: *Néhány újabb eredmény az ergod-elméletben*, Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Osztályának Közleményei **12:(4)** pp. 335–338. (1962)

[110] Arató Mátyás: *Néhány megjegyzés az I-divergencia fogalmával kapcsolatban*, Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Osztályának Közleményei **12:(4)** pp. 325–327. (1962)

[111] Arató M.: Несколько замечаний об абсолютной непрерывности мер, MTA Matematikai Kutató Intézetének Közleményei **6**: pp. 123–126. (1961)

[112] Arató M.: *On the sufficient statistics for stationary Gaussian random processes*, Theory of Probability and its applications **6:(2)** pp. 199–201. (1961)

[113] Arató Mátyás, Rényi Alfréd: *Probabilistic proof of a theorem on the approximation of continuous functions by means of generalized Bernstein polynomials*, Acta Mathematica Hungarica **8**: pp. 91–98. (1957)

[114] Arató Mátyás: *Megjegyzések a „késés-függvénnyel" kapcsolatban*, MTA Matematikai Kutató Intézetének Közleményei **1**: pp. 217–221. (1956)

[115] Arató Mátyás: *Beszámoló az uzsai kőbányában végzett kőtörési és energiamérési kísérletekről*, Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei **2**: pp. 223–228. (1953)

[116] Arató Mátyás, Freud Géza: *Módosított egycentrumú kölcsönhatási integrálok számítása*, Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei **1**: pp. 369–375. (1952)

Alkalmazott Matematikai Lapok **34** (2017), 21–27

DR. IMREH CSANÁD EMLÉKÉRE

Imreh Csanád 1975. május 20-án született Szegeden, édesapja Imreh Balázs (1945–2006) matematikus volt. Általános és középiskolai tanulmányait is itt végezte. Az SZTE jogelődjén, a JATE-n, matematikus szakon, 1998-ban kapott kitüntetéses oklevelet. Matematikából szerzett PhD fokozatot 2001-ben, summa cum laude minősítéssel. 2010-ben informatikai tudományokból habilitált. 2001–2002 között egyetemi tanársegéd, 2002–2010 között egyetemi adjunktus az SZTE Informatikai Tanszékcsoportján. 2010-től tanszékvezető egyetemi docens, a Számítógépes Algoritmusok és Mesterséges Intelligencia Tanszék vezetője. 2015-től az SZTE Társadalmi Kihívások Központjának igazgatója.

Tudományos érdeklődése rendkívül széleskörű volt: kutatásokat végzett többek között az online algoritmusok elemzése, a kombinatorikus optimalizálás, az ütemezés, a logisztikai problémák és az irányítható automaták területén. 67 tudományos közleménye jelent meg. 2015-ben benyújtotta MTA Doktori értekezését, amelynek megvédését korai, hirtelen halála akadályozta meg. Sokoldalú volt oktatási tevékenysége is: sokszínű gyakorlatai mellett előadásokat tartott a pakolás és ütemezés, az online algoritmusok, az algoritmusok és adatszerkezetek továbbá a véletlenített algoritmusok témaköréből. Közel 100 diplomamunkát és szakdolgozatot vezetett, két PhD hallgatója szerzett doktori oklevelet.

Imreh Csanád kiterjedt és változatos nemzetközi tapasztalattal rendelkezett. Még egyetemi hallgatóként 9 hónapot töltött TEMPUS ösztöndíjjal az Utrechti Egyetemen, majd 1998–99-ben hat hónapot a Grazi Műszaki Egyetem matematikai tanszékén végzett kutatómunkát. 2001–2002-ben Saarbrückenben a Max-Planck Intézet postdoc ösztöndíjasa. 2007–2008-ban a Kiotói Sangyo Egyetem vendégkutatója, 2012-ben, majd 2015-ben Berlinben Humboldt-ösztöndíjas volt. Mindezen intézmények a nemzetközi élmezőnyhöz tartoznak, így az ott eltöltött idő nemzetközileg ismert, érett kutatóvá tette Imreh Csanádot. Nemzetközi konferenciák szervezésében vett részt, számtalan rangos folyóiratnál végzett bírálói munkát.

Hazai elismertsége, közéleti munkája is mintaszerű. Köztársasági ösztöndíjas, OTDK 1. helyezett, Pro Scientia Aranyérmes, Kalmár László Alapítvány díjas, Farkas Gyula-díjas, Rapcsák Tamás-díjas. Békésy György- és Bolyai János kutatási ösztöndíjas. Több OTKA, NKFP és TÁMOP pályázatban vett részt kutatóként. Részt vett az OTDT szakmai bizottságainak munkáiban, az Intézet Doktori iskolája tanácsának titkára volt, az MTA Informatikai és Számítástudományi Bizottságának tagja, az MTA választott közgyűlési képviselője, az MTA Informatikai és Számítástudományi Bizottságának titkára és a Magyar Operációkutatási Társaság vezetőségi tagja. A Central European Journal of Operations Research szerkesztője és az Acta Cybernetica című folyóirat felelős szerkesztője.

Imreh Csanád a hazai informatikai közélet kimagasló, nemzetközileg is ismert és elismert alakja volt. Óriási munkabírása, kiegyensúlyozott, derűs világszemlélete, fanyar, szellemes humora mindig velünk marad. Életének 42. évében, 2017. január 5-én hunyt el.

Az Országos Tudományos Diákköri Konferencia Informatikai szekciója vezetőinek javaslatára 2017-ben Imreh Csanád Emlékérmet alapítottak, amelyet az OTDK rendezési évében a legjobb témavezető számára adományoznak. Az első Imreh Csanád Emlékérmet Dr. Varró Dániel a BME VIK Méréstechnika és Információs Rendszerek Tanszékének egyetemi tanára kapta.

SZTE Informatikai Intézet

Imreh Csanád tudományos közleményei

Tankönyv, jegyzet:

[1] Imreh B., Imreh Cs.: *Kombinatorikus Optimalizálás*, NOVADAT, Győr, (2005)

[2] Dósa Gy., Imreh Cs.: *Online algoritmusok*, Typotex, (2011)

Cikkek tudományos folyóiratokban:

[3] Holló, Cs., Z. Blázsik, Cs. Imreh, Z. Kovács: *On a Merging Reduction of the Process Network Synthesis Problem*, Acta Cybernetica **14** (1999), no. **2**, 251–261.

[4] Blázsik, Z., Cs. Holló, B. Imreh, Cs. Imreh, Z. Kovács: *On bottleneck and k-sum versions of the Process Network Synthesis problems*, Novi Sad Journal of Mathematics **30** (2000), no. **3**, 11–19.

[5] Blázsik, Z., Cs. Holló, B. Imreh, Cs. Imreh, Z. Kovács: *On a well solvable class of the PNS problem*, Novi Sad Journal of Mathematics **30** (2000), no. **3**, 21–30.

[6] Imreh, Cs.: *Online strip packing with modifiable boxes*, Operations Research Letters **29** (2001), no. **2**, 79–85.

[7] Imreh, Cs.: *A new well-solvable class of PNS problems*, Computing **66** (2001), no. **3**, 289–296.

[8] Imreh, Cs.: *An online scheduling algorithm for a two-layer mulitprocessor architecture*, Acta Cybernetica **15** (2001), no. **2**, 163–172.

[9] Epstein, L., Cs. Imreh, R. Van Stee: *More on weighted servers or FIFO is better than LRU*, Theoretical Computer Science **306** (2003), no. **1–3**, 305–317.

[10] Imreh, B., Cs. Imreh, M. Ito: *On monotonic directable nondeterministic automata*, Journal of Automata Languages and Combinatorics **8** (2003), no. **3**, 539–547.

[11] Imreh, B., Cs. Imreh, M. Ito: *On directable nondeterministic trapped automata*, Acta Cybernetica **16** (2003), no. **1**, 37–45.

[12] Imreh, Cs.: *Scheduling problems on two sets of identical machines*, Computing **70** (2003), no. **4**, 277–294.

[13] Imreh B., Imreh Cs., Imreh Sz.: *Összefűzési technikák és alkalmazásaik*, Alkalmazott Matematikai Lapok **22** (2005), no. **1**, 85–95.

[14] Imreh Cs., Z. Kovács: *On pollution minimization in the optimization models of process network synthesis*, Chemical Engineering Transactions **7** (2005), no. **2**, 565–570.

[15] Blázsik, Z., T. Bartók, B. Imreh, Cs. Imreh, Z. Kovács: *Heuristics on a common generalization of TSP and LOP*, Pure Mathematics and Applications **17** (2006), no. **3–4**, 229–239.

[16] Dombi, J., Cs. Imreh, N. Vincze: *Learning lexicographic orders*, European Journal of Operational Research **183** (2007), no. **2**, 748–756.

[17] Nagy-György J., Cs. Imreh: *Online scheduling with machine cost and rejection*, Discrete Applied Mathematics **155** (2007), no. **18**, 2546–2554.

[18] Blázsik, Z., Cs. Imreh, Z. Kovács: *Heuristic algorithms for a complex parallel machine scheduling problem*, Central European Journal of Operations Research **16** (2008), no. **4**, 379–390.

[19] Imreh, Cs., M. Ito: *On Monogenic Nondeterministic Automata*, Acta Cybernetica **18** (2008), no. **4**, 777–782.

[20] Nagy-György, J., Cs. Imreh: *Online hypergraph coloring*, Information Processing Letters **109** (2008), no. **1**, 23–26.

[21] Holló, Cs., B. Imreh, Cs. Imreh: *Reduction techniques for the PNS problems: a novel technique and a review*, Optimization and Engineering **10** (2009), no. **3**, 351–361.

[22] Imreh, Cs.: *Online scheduling with general machine cost functions*, Discrete Applied Mathematics **157** (2009), no. **9**, 2070–2077.

[23] Németh, T., Cs. Imreh: *Parameter learning online algorithm for multiprocessor scheduling with rejection*, Acta Cybernetica **19** (2009), no. **1**, 125–133.

[24] Csirik, J., L. Epstein, Cs. Imreh, A. Levin: *On the sum minimization version of the online bin covering problem*, Discrete Applied Mathematics **158** (2010), no. **13**, 1381–1393.

[25] Epstein, L, Cs. Imreh, A. Levin: *Class Constrained Bin Covering*, Theory of Computing Sytems **46** (2010), no. **2**, 246–260.

[26] Epstein, L., Cs. Imreh, A. Levin: *Class constrained bin packing revisited*, Theoretical Computer Science **411** (2010), no. **34–36**, 3073–3089.

[27] Bartók, T., Cs. Imreh: *Pickup and Delivery Vehicle Routing with Multidimensional Loading Constraints*, Acta Cybernetica **20** (2011), no. **1**, 17–33.

[28] Bujtás Cs., Dósa Gy., Cs. Imreh, J. Nagy-György, Zs. Tuza: *The graph-bin packing problem*, International Journal of Foundations of Computer Science **22** (2011), no. **8**, 1971–1993.

[29] Divéki, G., Cs. Imreh: *Online facility location with facility movements*, Central European Journal of Operations Research **19** (2011), no. **2**, 191–200.

[30] Imreh, Cs., T. Németh: *Parameter learning algorithm for the online data acknowledgment problem*, Optimization Methods & Software **26** (2011), no. **3**, 397–404.

[31] Bárány, M., B. Bertók, Cs. Imreh, L. T. Fan, F. Friedler: *On the equivalence of direct mechanisms and structurally minimal pathways*, Journal of Mathematical Chemistry **50** (2012), no. **5**, 1347–1361.

[32] Csirik J., L. Epstein, Cs. Imreh, A. Levin: *Online Clustering with Variable Sized Clusters*, Algorithmica **65** (2013), no. **2**, 251–274.

[33] Divéki, G., Cs. Imreh: *An online 2-dimensional clustering problem with variable sized clusters*, Optimization and Engineering **14** (2013), no. **4**, 575–593.

[34] Dósa, Gy., Cs. Imreh: *The generalization of scheduling with machine cost*, Theoretical Computer Science **510** (2013), 102–110.

[35] Epstein, L., Cs. Imreh, A. Levin: *Bin covering with cardinality constraints*, Discrete Applied Mathematics **161** (2013), no. **13–14**, 1975–1987.

[36] Németh T., S. Nagy, Cs. Imreh: *Online data clustering algorithms in an RTLS system*, Acta Universitatis Sapientiae Informatica **5** (2013), no. **1**, 5–15.

[37] Tick, J., Cs. Imreh, Z. Kovács: *Business Process Modeling and the Robust PNS Problem*, Acta Polytechnica Hungarica **10** (2013), no. **6**, 193–204.

[38] Almási, D., Cs. Imreh, T. Kovács, J. Tick: *Heuristic Algorithms for the Robust PNS Problem*, Acta Polytechnica Hungarica **11** (2014), no. **4**, 169–181.

[39] Bittner, E., Cs. Imreh, J. Nagy-György: *The online k-server problem with rejection*, Discrete Optimization **13** (2014), 1–15.

[40] Epstein, L., Cs. Imreh, A. Levin, J. Nagy-György: *Online File Caching with Rejection Penalties*, Algorithmica **71** (2015), no. **2**, 279–306.

[41] Imreh, Cs., J. Nagy-György: *Online hypergraph coloring with rejection*, Acta Universitatis Sapientiae Informatica **7** (2015), no. **1**, 5–17.

[42] Bujtás, Cs., Gy. Dósa, Cs. Imreh, J. Nagy-György, Zs. Tuza: *New models of graph-bin packing*, Theoretical Computer Science **640** (2016), 94–103.

Cikkek konferencia kiadványokban, gyűjteményes kötetekben:

[43] Imreh Cs.: *Jól megoldható PNS osztályokról*, In: Komlósi S., Szántai T., Új utak a magyar operációkutatásban, In memoriam FARKAS GYULA: Válogatás a XXIII. Magyar Operációkutatási Konferencián elhangzott előadásokból. 396 p., Budapest, Pécs, Dialóg Campus Kiadó, (Pécs, 1997.10.20–22), (1999), 168–181.

[44] Imreh Cs., J. Noga: *Scheduling with Machine Cost*, Lecture Notes In Computer Science **1671**, Third International Workshop on Randomization and Approximation Techniques in Computer Science, and Second International Workshop on Approximation Algorithms for Combinatorial Optimization Problems: RANDOM-APPROX'99. (Berkeley, Amerikai Egyesült Államok, 1999.08.08–11), (1999), 168–176.

[45] Imreh Cs.: *Online problémák megvásárolható erőforrásokkal*, In: Padányi J., Till Sz., Csukonyi Cs., Kolossa S., Jánoska F. (szerk.): Pro Scientia Aranyérmesek V. Konferenciája, (Sopron, 2000.11.05–07), Budapest, Pro Scientia Aranyérmesek Társasága, (2000), 157–161.

[46] Chrobak, M., J. Csirik, Cs. Imreh, J. Noga, J. Sgall, G. J. Woeginger: *The Buffer Minimization Problem for Multiprocessor Scheduling with Conflicts*, Lecture Notes in Computer Science **2076**, Automata, Languages and Programming 28th International Colloquium, ICALP 2001. (Kréta, Görögország, 2001.07.08–12), (2001), 862–874.

[47] Csirik, J., Cs. Imreh, J. Noga, S. Seiden, G. J. Woeginger: *Buying a Constant Competitive Ratio for Paging*, Lecture Notes in Computer Science **2161**, Algorithms – ESA 2001 9th Annual European Symposium (Aarhus, Dánia, 2001.08.28–31), (2001), 98–108.

[48] Blázsik, Z., Cs. Holló, Cs. Imreh, Z. Kovács: *Heuristics for the PNS problem*, In: F. Giannessi, P. Pardalos, T. Rapcsák (ed.), Optimization theory: Recent developments from Mátraháza. 278 p. Dordrecht; Boston; London, Kluwer Academic Publishers, (2001), 1–17.

[49] Epstein, L., Cs. Imreh, R. Van Stee: *More on weighted servers or FIFO is better than LRU*, Lecture Notes in Computer Science **2420**, 27th International Symposium, MFCS 2002. (Varsó, Lengyelország, 2002.08.26–30), (2002), 257–268.

[50] Imreh Cs.: *Az online k-szerver feladat*, In: Pásztori B., Szatmári A. (szerk.) Pro Scientia Aranyérmesek VI. Konferenciája, (Miskolc, 2003.11.28–30), Budapest, Pro Scientia Aranyérmesek Társasága, (2003), 105–108.

[51] Imreh Cs.: *Hálózati folyamatok szintézise*, Pro Scientia Aranyérmesek VII. Konferenciája (Gödöllő, 2004.11.26–28), Budapest, Pro Scientia Aranyérmesek Társasága, (2004), 101–104.

[52] Blázsik, Z., B. Imreh, Cs. Imreh, Z. Kovács: *The TSP problem with internal transports*, In: MicroCAD 2006, O2 szekció. (Miskolc, 2006.03.16–17), (2006), 9–13.

[53] Blázsik, Z., B. Imreh, Cs. Imreh, Z. Kovács: *On a bin packing approach of a shipment construction problem*, In: MicroCAD 2006, O2 szekció. (Miskolc, 2006.03.16–17), (2006), 15–19.

[54] Imreh Cs., T. Németh: *On time lookahead algorithms for the online data acknowledgement problem*, Lecture Notes in Computer Science **4708**, Mathematical Foundations of Computer Science 2007: 32nd International Symposium, MFCS 2007. (Cesky Krumlov, Csehország, 2007.08.26–31), (2007), 288–297.

[55] Imreh, Cs., T. Németh: *On empirical analysis for online algorithms for the data acknowledgment problem*, In: L. Lehoczky (ed.) MicroCAD 2008: International Scientific Conference. Vol. **7**. Section G: Mathematics and computer science. 98 p. (Miskolc, 2008.03.20–21), (2008), 15–20.

[56] Csirik, J., L. Epstein, Cs. Imreh, A. Levin: *Online Clustering with Variable Sized Clusters*, Lecture Notes in Computer Science **6281**. Mathematical Foundations of Computer Science 2010: 35th International Symposium, MFCS 2010. (Brno, Csehország, 2010.08.23–27), (2010), 282–293.

[57] Epstein L., Cs. Imreh, A. Levin, J. Nagy-György: *On Variants of File Caching*, Lecture Notes in Computer Science **6755**. Automata, Languages and Programming: 38th International Colloquium, ICALP 2011. (Zürich, Svájc, 2011.07.04–08), (2011), 195–206.

[58] Németh, T., B. Gyekiczki, Cs. Imreh: *Parameter learning in lookahead online algorithms for data acknowledgment*, In: A. Szakál (ed.) 3rd IEEE International Symposium on Logistics and Industrial Informatics (LINDI 2011). (Budapest, 2011.08.25–27), (2011), 195–198.

[59] Bartók, T., Cs. Imreh: *Heuristic algorithms for the weight constrained 3-dimensional bin packing model*, In: A. Stakál (ed.) 4th IEEE International Symposium on Logistics and Industrial Informatics: LINDI 2012. (Smolenice, Szlovákia, 2012.09.05–07), (2012), 121–124.

[60] Divéki G., Cs. Imreh: *Grid based online algorithms for clustering problems*, In: A. Szakál (ed.) CINTI 2014 – 15th IEEE International Symposium on Computational Intelligence and Informatics. (Budapest, 2014.11.19–21), (2014), 159–162.

[61] Csendes, T., Cs. Imreh, J. Temesi: *Editorial*. Special issue on VOCAL, Hungarian OR Conference and ESI 2015. (Veszprém, 2014. december 14–17, Cegléd, 2015. június 10–12, Szeged, 2015. június 15–27), Central European Journal of Operations Research **25** (2017), no. **4**, 739–741.

Egyéb tanulmányok:

[62] Imreh Cs.: *Adjunk geometriai jelentést*, POLYGON **4** (1994), no. **2**, 69–82.

[63] Imreh Cs.: *Használjunk komplex számokat*, POLYGON **6** (1996), no. **1**, 65–74.

[64] Imreh Cs., Imreh Sz.: *Lineáris programozás elemi eszközökkel*, POLYGON **7** (1997), no. **1**, 49–68.

[65] Imreh Cs.: *A Riemann-integrál egy általánosításáról*, POLYGON **7** (1997), no. **2**, 15–34.

[66] Imreh Cs.: *Versenyképességi elemzés*, In: Iványi A. (szerk.), Informatikai algoritmusok, Budapest, ELTE Eötvös Kiadó (2005), 1350–1383.

[67] Imreh, Cs.: *Competitive Analysis*, In: A. Iványi (ed.), Algorithms of Informatics, Budapest, mondAt Kiadó (2007), 395–428.

A bibliográfiát összeállította Szabó Péter Gábor.

Alkalmazott Matematikai Lapok **34** (2017), 29–39

A DYNAMIC MATRIX CONTROL ALKALMAZÁSA LINEÁRIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEKRE KORLÁTOSAN VÁLTOZÓ BEMENŐ JEL ÉS VÁLTOZÓ REFERENCIA TRAJEKTÓRIA ESETÉN

DARIDA SÁNDOR

Cikkünkben a Model Predictive Control (MPC) módszercsalád egy algoritmusát, az úgynevezett Dynamic Matrix Controlt (DMC) vizsgáljuk olyan rendszerekre, melyeket egy lineáris differenciálegyenlettel adunk meg. Az MPC-algoritmusok alapelve, hogy a vezérérelni kívánt rendszert annak belső ismerete nélkül, pusztán a bemenő jelekre adott válasza alapján irányítjuk. A DMC-algoritmus leginkább diszkrét idejű, lineáris, időben invariáns rendszerekre alkalmazható. A rendszer részletes leírása és a számítások megtalálhatóak a szerző MSc szakdolgozatában [1] is. Ismeretes annak matematikai bizonyítása, hogy egy lineáris differenciálegyenlet által definiált rendszert a DMC-algoritmussal a kívánt konstans trajektóriára vezérelhetjük, amennyiben a rendszer aszimptotikusan stabil [2], és a bemenő jel megváltozására nincs felső korlát. Cikkünkben azt vizsgáljuk, hogyan vezérelhető a rendszer, ha ez a két feltétel nem teljesül, vagyis, vezérelhető-e a rendszer a DMC-algoritmussal, ha a bemenő jel megváltozása korlátos, és vezérelhető-e változó trajektóriára. Mindkét eset gyakorlati jelentőséggel bír, a bemenő jel általában valamilyen bemenő energiát reprezentál, így annak megváltozása (speciálisan növelése) mindenképpen korlátos mennyiség.

1. Az algoritmus felépítése

Először tekintsük át, hogyan épül fel a *step response* modell, illetve a DMC algoritmus. Vegyünk egy lineáris, diszkrét idejű, s időben invariáns rendszert, melynek a $t = 0, 1 \dots$ időpontbeli bemenete $u(t)$, kimenete $y(t)$ valós számok. Továbbá tegyük fel, hogy $y(0) = 0$. Az algoritmus felépítéséhez a *step response* modellt használjuk. Ehhez először szükség van a rendszer egységugrásra adott válaszára más néven *unit step response*-ra, vagyis hogy milyen kimeneteket kapunk, ha $u(t) \equiv 0$, ha $t \leq 0$ és $u(t) \equiv 1$, ha $t > 0$. Jelöljük az így kapott kimeneteket, $y(i) = g_i$-vel. Ennek segítségével építjük fel a *step response* modellt, nevezetesen a rendszer jósolt kimenete a t időpillanatban [3]:

$$y(t)_{model} = \sum_{1}^{\infty} g_i \Delta u(t-i).$$

A DMC-algoritmus felépítése az alábbi. Tegyük fel, hogy m lépésre előre jósolunk *control effort*-ot. A jósolt kimentekre, az alábbi összefüggés áll fenn (részletesen lásd [2] vagy [1]):

$$\hat{y} = G\Delta u + f,$$

ahol,

$$\begin{aligned}
\hat{y} &= (\hat{y}(t+1|t), \ldots, (\hat{y}(t+m|t))^T, \\
\Delta u &= (\Delta u(t), \ldots, \Delta u(t+m-1))^T, \\
f &= (f(t+1), \ldots, f(t+m))^T,
\end{aligned}$$

a rendszer úgynevezett szabad válasza,

$$f(t+k) = y(t) + \sum_{i=1}^{\infty} (g_{k+i} - g_i)\Delta u(t-i).$$

Ha feltesszük, hogy a rendszer stabil, vagyis $\lim_{n\to\infty} y(t)$ létezik és véges, így elég nagy N-re $g_i \approx g_N$ minden $i > N$-re. Így megfelelő N-re számolhatunk az

$$f(t+k) = y(t) + \sum_{i=1}^{N} (g_{k+i} - g_i)\Delta u(t-i) \tag{1}$$

szabad válasszal.
Definiáljuk továbbá a

$$G = \begin{pmatrix} g_1 & 0 & \ldots & 0 \\ g_2 & g_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_m & g_{m-1} & \ldots & g_1 \end{pmatrix}$$

mátrixot, mely a rendszer úgynevezett *dinamikus mátrixa*. A referencia trajektóriától való eltérést a következő kvadratikus függvénnyel reprezentáljuk,

$$J = \sum_{j=1}^{m} (\hat{y}(t+j|t) - w(t+j))^2.$$

Bevezetve a

$$w = (w(t+1), \ldots, w(t+m))$$

vektort, ez $J = |G\Delta u + f - w|^2$, melynek minimumát a $\Delta u = G^{-1}(f-w)$ összefüggés adja [2]. Természetes ötlet, hogy valamilyen módon szabályozzuk a kontroll paramétert. Ennek egyik módja Δu beépítése a minimalizálandó kvadratikus függvénybe, valamilyen $\lambda \geq 0$ paraméterrel. Ekkor

$$J=\sum_{j=1}^{m}(y(t+j|t)-w(t+j))^2+\sum_{j=1}^{m}\lambda\Delta(u(t+j-1))^2=|G\Delta u+f-w|^2+\lambda|\Delta u|^2. \quad (2)$$

Ez egy kvadratikus pozitív definit függvény, melynek minimumhelye ott lesz, ahol a Δu szerinti derivált 0. Deriválás után, $2G(G\Delta u+f-w)+2\lambda\Delta u=0$, melyből az alábbi összefüggésre jutunk:

$$\Delta u=(G^2+\lambda I)^{-1}G(w-f). \quad (3)$$

A λ paraméter azt fejezi ki, hogy mennyire ”büntetjük” a kontroll gyors változását. Gyakorlati szempontból ennek igen nagy jelentősége van, hisz általában a kontroll egyfajta bemenő energiát fejez ki, ami mindenképpen korlátos mennyiség.

2. Alkalmazás lineáris differenciálegyenletekre

Vegyük az alábbi differenciálegyenletet:

$$\dot{y}(t)=ay(t)+bu(t), \quad (4)$$

ahol $a,b\in\mathbb{R}$, és $u(t)$ a kontrollfüggvény. A célunk, hogy $y(t)$-t (illetve egy diszkretizációját) egy adott trajektóriára vezessük. Ezt a továbbiakban $w(t)$-vel jelöljük, ez lesz a referencia-trajektória. Tegyük fel, hogy $u(t)=u$ valamilyen konstans. Ekkor a megoldás, könnyen kiszámítható:

$$y(t)=e^{at}y_0+\frac{b}{a}(e^{at}-1)u. \quad (5)$$

Diszkretizáljuk (5)-t τ lépésközt választva. Keressünk olyan kontrollt, mely konstans minden $[\tau i,\tau(i+1)]$ szakaszon. Így ezeken a szakaszokon (5) érvényes. Jelöljük továbbá α-val $e^{a\tau}$-t. Ekkor az alábbi diszkrét rendszert kapjuk:

$$y_{k+1}=\alpha y_k+\frac{b}{a}(\alpha-1)u_k, \quad (6)$$

ahol a megfelelő k alsóindex azt jelenti hogy a $k\tau$ időpillanatban vagyunk. Az így kapott rendszer (6) lineáris, időinvariáns és diszkrét, így alkalmazhatjuk rá a DMC-algoritmust. Az algoritmus vizsgálatából kapott korábbi eredményekből [2] az alábbi összefüggések adottak.

- Ha az eredeti rendszer stabil volt, azaz (4)-ben $a<0$, és $\lambda=0$, akkor létezik N úgy, hogy a DMC-módszerrel a rendszer a kívánt konstans trajektóriához tart, ahol N a rendszer szabad válaszának közelítésére utal (1). A konvergencia sebességére felső becslést is adhatunk, nevezetesen, hogy

$$|y_{k+1}-w|\le(3^{\frac{1}{N+1}}|\alpha|^{\frac{N}{N+1}})|y_k-w|.$$

– Ha a fenti rendszerre $\lambda = 0$ mellett alkalmazható a DMC-algoritmus és a kívánt trajektórára vezérli a rendszert, akkor létezik $\lambda^* > 0$ úgy, hogy minden $\lambda^* > \lambda$ esetén szintén vezérelhető a rendszer a DMC-algoritmussal, ha a dinamikus mátrix 1×1-es, vagyis a dinamikus mátrixban $m = 1$.

3. Vezérlés korlátos változású bemenő jellel

3.1. Δu korlátjának beépítése az algoritmusba

A következőekben arra keressük a választ, milyen feltételekkel alkalmazható a DMC-algoritmus a (6) rendszerre, ha feltesszük hogy $\Delta u_k \leq \Delta u^*$ minden k-ra, vagyis a bemenő jel megváltozása korlátos. Tegyük fel, hogy a dinamikus mátrix 1×1-es, vagyis $p = m = 1$. Ekkor tudjuk, hogy $\Delta u_k = \frac{g_1}{g_1^2+\lambda}(w - f_{k+1})$. Bevezetve a $\mu = \frac{g_1^2}{g_1^2+\lambda}$ paramétert, a $\Delta u_k = \frac{\mu}{g_1}(w - f_{k+1})$ összefüggésre jutunk. Rögzített Δu^* mellett az alábbi egyenlőtlenségnek kell fennálnia:

$$\Delta u^* \frac{g_1}{w - f_{k+1}} \geq \mu. \tag{7}$$

Vegyük észre, hogy minél kisebb Δu^*-ot határozunk meg, annál kisebb μ-t, szükségképpen nagy λ-t kell választanunk. Ha az egyenlőtlenség bal oldala nagyobb, mint 1, akkor a $\mu = 1$, azaz $\lambda = 0$ paraméterekkel fut az algoritmus.

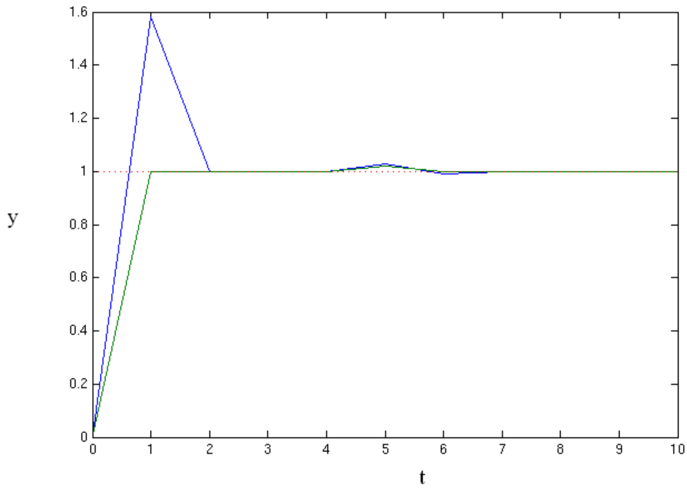
3.2. Vezérelhetőség Δu^* függvényében

Az előzőekben láthattuk, hogy Δu^* megválasztásából egyértelműen meghatározható a μ (tehát közvetve a λ) paraméter. Ez két kérdést vet fel. Egyrészt, az adott μ paraméterrel a DMC-algoritmus a kívánt trajektóriára vezérli-e a rendszert? Másrészt ha igen, logikus következtetés, hogy a paraméter valamelyest ront a konvergencia sebességén, ezt az adatot szeretnénk becsülni, illetve számszerűsíteni. Ezt a feltételezésünket az alábbi két ábrán szemléltetem.

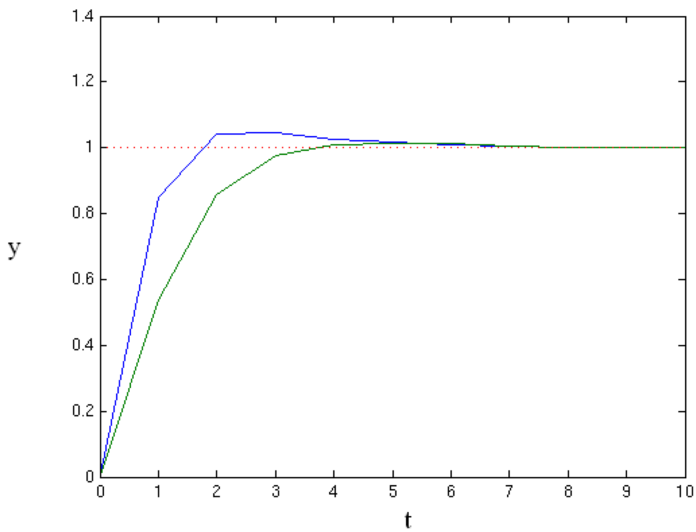
A [2] cikk eredménye azon alapul, hogy a

$$v_k = (y_k - w, u_k - (1-\alpha)w/g_1, \ldots, u_{k-N+1} - (1-\alpha)w/g_1)$$

vektorral felírva a referencia trajektóriától való eltérést, az algoritmus adott lépését, és így a hiba csökkenését egy $v_{k+1} = M_N v_k$ mátrix szorzással reprezentálja



1. ábra. A $\lambda = 0$ eset



2. ábra. A $\lambda = 0.5$ eset

ahol

$$M_N = \begin{pmatrix} \alpha & g_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{\mu\alpha}{g_1} & \mu\frac{g_1-g_2}{g_1}+1-\mu & \mu\frac{2g_2-g_1-g_3}{g_1} & \dots & \mu\frac{2g_{N-1}-g_{N-2}-g_N}{g_1} & \mu\frac{2g_N-g_{N-1}-g_{N+1}}{g_1} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a szokásos jelölésekkel, azaz $\alpha = e^{a\tau}$, továbbá $\mu = \frac{g_1^2}{g_1^2+\lambda}$. Így $\|M_n\| < 1$ az elégséges feltétel arra, hogy a DMC-algoritmussal a kívánt trajektóriára vezérelhető a rendszer. Arra a speciális esetre, amikor $\mu = 1$ (azaz $\lambda = 0$) adott a bizonyítás, illetve azt is tudjuk, hogy bizonyos speciálisan megválasztott μ esetén szintén vezérelhető a redszer.

Szeretnénk tehát a hibát, a már kiszámolt μ függvényében vizsgálni. Az alapötlet az, hogy az M_N mátrixot írjuk fel két mátrix szorzataként, $M_N = L \cdot \hat{M}_N$ az alábbi feltételekkel. Az L mátrix nem függhet csak a μ paramétertől, $\hat{M}_N$ pedig az M_N mátrix $\mu = 1$ esetének felel meg. Ha ez megvalósítható, akkor az L mátrix reprezentálja azt a hatást, amit a Δu maximalizálásával okozunk. Ebben az esetben tudjuk, hogy $\|\hat{M}_N\| = R$, ahol $R < 1$ a konvergencia sebességét mutató érték. A hibavektorra így $v_{k+1} = M_N v_k = L \cdot \hat{M}_N v_k$. Felhasználva a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenséget,

$$\|v_{k+1}\| \le \|M_N\|\|v_k\| \le \|L\|\|\hat{M}_N\|\|v_k\|. \tag{8}$$

Tehát kimondhatjuk, hogy ekkor az L mátrix normájával számszerűsíthetjük a konvergencia romlását. Kiszámítható, hogy

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1-\mu & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vegyük észre, hogy $\mu = 1$ esetén $L = I_{N+1}$, így az eredeti $\lambda = 0$ feladatra vezet vissza. Tehát a továbbiakban az L mátrix normáját fogjuk vizsgálni.

Fontos megemlíteni, hogy az $\hat{M}_N$-ról ismeretes [2], hogy minden sajátértéke kisebb, mint 1, ezért bármely normája kisebb, mint 1 [4]. Mi további számításainkat a $\|\,.\,\|_2$ normában végezzük, melyet az egyszerűség kedvéért $\|\,.\,\|$-vel jelölünk.

Jegyezzük meg, hogy az $N \times N$ mátrixok véges dimenziós vektorteret alkotnak, és véges dimenziós vekrortéren minden norma ekvivalens [5].

$$\|L\| = \sqrt{\lambda_{max}(L^T L)}.$$

Némi számítás után,

$$L^T L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mu^2 & \mu(1-\mu) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mu(1-\mu) & (1-\mu)^2+1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ez egy blokkdiagonális mátrix, így a sajátértékei megegyeznek a blokkok sajátértékeivel. Az egyetlen blokk, melynek nem triviális a sajátértéke a

$$\begin{pmatrix} \mu^2 & \mu(1-\mu) \\ \mu(1-\mu) & (1-\mu)^2+1 \end{pmatrix}.$$

Vegyük észre a blokk és az alábbi mátrix közti összefüggést:

$$\begin{pmatrix} S = & \mu & 1-\mu \\ & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

esetén $S^T S$ pont a blokkot adja. Így $\|S\|$ kiszámítására vezettük vissza a feladatot. Másrészt S felírható két mátrix összegeként, nevezetesen, $S = S_1 + S_2$ ahol

$$S_1 = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

másrészt

$$S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1-\mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ekkor a háromszög-egyenlőtlenség miatt az $\|S\| \leq \|S_1\| + \|S_2\|$ felső becslés használható. Mivel $S_1^T S_1$ és $S_2^T S_2$ is szimmetrikus, így minden sajátértékük valós. Könnyen kiszámítható, hogy $S_1^T S_1$ sajátértékei az 1 és a μ, és $\mu < 1$ miatt $\|S_1\| = 1$. Továbbá $S_2^T S_2$ sajátértékei a 0 és az $(1-\mu)^2$, így $\|S_2\| = 1-\mu$. Mivel mindkét érték pozitív, így fennáll az $\|S\| \leq 2-\mu$ becslés.

Összegezve az eddigi eredményeket a következőre jutunk. A hibavektor csökkenését reprezentáló M_N mátrixra fennáll az $\|M_N\| \leq (2-\mu)R$ becslés, ahol R

volt a korlátozás nélküli rendszer hibájának csökkenése lépésenként. Vegyük észre, hogy $\mu = 1$-re valóban az eredeti konvergenciasebességet kapjuk vissza, és μ ismeretében most már becsülhetjük az algoritmus konvergenciájának sebességét, és elégséges feltételünk van arra, hogy milyen korlátozás mellett használható az algoritmus.

4. Vezérlés nem konstans trajektóriára

Az alábbiakban azt vizsgáljuk, hogyan viselkedik a rendszer, ha nem konstans, hanem egy $w(t)$ időben változó trajektóriára akarjuk vezérelni, ahol $w(t)$ egy folytonos függvény. Ebben az esetben legyen a G dinamikus mátrix 1×1-es, vagyis egyszerűen g_1. Tegyük fel hogy a módszer asszimptotikusan stabil, és a rendszert a kívánt konstans trajektóriára vezérli, tehát a hibamátrix sajátértékeire $R < 1$ felső becslést tudunk adni. Ha a trajektória nem konstans, $|y_{k+1} - w_{k+1}| \leq R|y_k - w_{k+1}|$, ahol $w_k = w(k\tau)$, illetve y_k legyen a τk időpontban vett, már súlyvektorral szorzott egydimenziós kimenet. Nekünk azonban $|y_k - w_k|$-függvényében kellene becslést adnunk. Legyen $\Delta w_{k+1} = w_{k+1} - w_k$. Ekkor,

$$R|y_k - w_k + \Delta w_{k+1}| \geq |y_{k+1} - w_{k+1}|.$$

Kihasználva a háromszög egyenlőtlenséget,

$$|y_{k+1} - w_{k+1}| \leq R|y_k - w_k| + |R\Delta w_{k+1}|.$$

Ez az összefüggés nyilván fennál a $k + 2$ időpontban is, így

$$|y_{k+2} - w_{k+2}| \leq R|y_{k+1} - w_{k+1}| + |R\Delta w_{k+2}|,$$

így a második lépésre

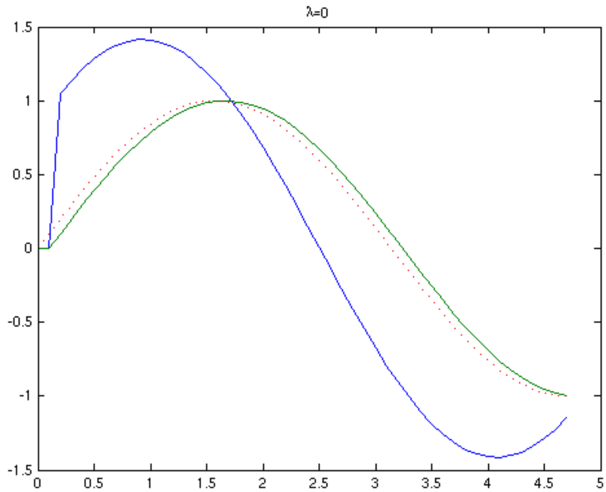
$$|y_{k+2} - w_{k+2}| \leq R^2|y_k - w_k| + R^2|\Delta w_{k+2}| + R|\Delta w_{k+1}|.$$

Általánosan a n-edik lépésre

$$|y_{k+n} - w_{k+n}| \leq R^n|y_k - w_k| + R^n|\Delta w_{k+1}| + \ldots + R^2|\Delta w_{k+n-1}| + R|\Delta w_{k+n}|.$$

Tegyük fel, hogy létezik valamilyen L_w konstans, úgy, hogy minden k-re $|\Delta w_k| \leq L_w$. Ha $w(t)$ folytonos Lipschitz-tulajdonságú függvény, akkor annak Lipschitz-konstansa szorozva a lépésközzel megfelelő lesz. Ekkor a mértani sor összegképlete alapján,

$$|y_{k+n} - w_{k+n}| \leq R^n|y_k - w_k| + L_w\tau \left| R\frac{R^{n+1} - 1}{R - 1} \right| \leq R^n|y_k - w_k| + L_w\tau \left| \frac{1}{1 - R} \right|.$$



3. ábra. Az algoritmus viselkedése változó trajektóriára

Mivel $|\frac{1}{1-R}|$ konstans, így a hiba $o(\tau)$-val növekszik a konstans trajektóriára való vezérlés hibájához képest. Ezt figyelhetjük meg, egy folyamatosan változó trajektória esetén az alábbi ábrán:

Az ábrán $w(t) = \sin t$ függvény által definiált trajektóriára vezérlünk. Kiválóan megfigyelhető a lépésközzel megegyező nagyságrendű eltolódás a célfüggvény és az algoritmus által adott kimenet között.

Következmény: Bármely lineáris differenciálegyenlet-rendszerre kimondhatjuk, hogy ha az a DMC-algoritmussal konstans trajektóriára vezérelhető, akkor bármely olyan trajektóriára vezérelhető $o(\tau)$ pontossággal, melyet Lipshitz-folytonos függvénnyel definiálunk.

5. Eredmények

Korábbi eredményekből láthattuk, hogy lineáris differenciálegyenlettel definiált rendszer vezérelhető a DMC-algoritmussal abban az esetben, ha az eredeti differenciálegyenlet aszimptotikusan stabil. Cikkünkben ilyen rendszerek vezérelhetőségét vizsgáltuk két további általánosítással, a bemenő jel megváltozásának korlátozását, és referencia trajektória változását szem előtt tartva. A bemenő jel megváltozására tett korlátból (Δu^*) kifejezhető ugyanis a bemenő jel csillapítását szolgáló paraméter (μ vagyis közvetve λ), nevezetesen fennáll a

$$\Delta u^* \frac{g_1}{w - f_{k+1}} \geq \mu$$

összefüggés. A μ paraméter meghatározása után a következő feladat annak vizsgálata volt, hogy adott μ mellett az algoritmus alkalmazható-e vezérlésre. A hiba csökkenését reprezentáló mátrix M_N ügyes felbontása után sikerült számszerűsítenünk a csillapítás hatását a konvergenciára, így az

$$\|M_N\| \leq (2 - \mu)R$$

összefüggésre jutunk, ahol R csillapítás nélküli algoritmus konvergenciájának sebessége.

Ezek után megvizsgáltuk, hogyan viselkedik a rendszer, ha nem konstans, hanem időben változó trajektóriára $w(t)$ vezéreljük. Számításaink megmutatják, ha a $w(t)$ folytonos függvénnyel definiált trajektória Lipshitz-folytonos, akkor a hiba a $w(t)$ függvényhez tartozó Lipshitz-konstans és a rendszer diszkretizálásakor lépésköznek választott τ értékektől függ. Így ha egy rendszert a DMC-algoritmussal konstans trajektóriára vezérelhetünk, akkor bármilyen Lipshitz-folytonos függvény által definiált trajektóriára is, egy τ lépésköz nagyságrendű hibától eltekintve.

Hivatkozások

[1] Darida Sándor: *A modell prediktív irányítás alkalmazása differenciálegyenletekre*, MSc. Szakdolgozat (2012)

[2] Ádám Besenyei, Péter Simon: *Asymptotic output controllability via dynamic matrix control*, Differ. Eq. Appl., **4** (2012), 495–519.

[3] Eduardo F. Camacho, Carlos Bordons: *Model Predictive Control*, Springer-Verlag, London, (2004).

[4] Michael Harrison, Patrick Waldron: *Mathematics for Economics and Finance*, Routledge, (2011).

[5] George Bachman, Lawrence Narici: *Functional Analysis*, Courier Corporation, Chelmsford, (1966).

(Beérkezett: 2015. március 30.)

Darida Sándor 1986-ban született, fiatalkorát érettségijéig Csongrádon töltötte. Egyetemi tanulmányait az ELTE TTK-n végezte, ahol először BSc szintű okleveles matematikus, majd MSc okleveles alkalmazott matematikus végzettségre tett szert. Érdeklődési területei az idő elteltével az absztrakt irányból egyre inkább az alkalmazott matematika irányába tolódtak. BSc szakdolgozatának fő témája a fraktálgeometria volt, MSc szakdolgozatában már vezérlési algoritmusokkal foglalkozott. A téma iránt az egyetem elvégzése után is érdeklődést mutatott, több ponton is tudta általánosítani a meglévő eredményeket.

Az egyetemi végzettség megszerzése után az OTP Banknál helyezkedett el, mely vállalatnál jelenleg is alkalmazásban van. A banki közegben lehetőséget kapott a statisztikai alapú modellezés gyakorlati alkalmazására és a módszertanok mélyebb megismerésére. A prediktív modellezés mellett foglalkozott többek között fejlett módszertannal (AMA) történő tőkeszámítással, illetve kidolgozott egy módszert a hálózati járványterjedésen alapuló modellek banki környezetben történő használatára.

DARIDA SÁNDOR
6640 Csongrád, Búzavirág utca 9.
abisanyi@gmail.com

THE USE OF DYNAMIC MATRIX CONTROL FOR CONTROLLING LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR NON-CONSTANT TRAJECTORIES WITH LIMITED INPUT PARAMETER

Sándor Darida

Dynamic Matrix Control (DMC) is one of the most used algorithm of Modell Predictive Control (MPC) method. We use DMC to drive a system to a given trajectory where the system is defined by a linear differential equation. We already know from previous results that such a system can be controlled by DMC when it is asymptotically stable. However results were restricted to constant trajectory case and also did not considered the fact that input must be bounded. We show controllability can be proved with theese extended conditions. It is also shown that convergence speed can be calculated directly from the bound of the input. For non-constant trajectories we proved that system can be controlled by DMC if the trajectory is defined by a Lipschitz continuous function.

Alkalmazott Matematikai Lapok **34** (2017), 41–71

EGYFAJTA VALÓSZÍNŰSÉGI MÓDSZER UTAZÁSI JELLEMZŐK BECSLÉSÉHEZ UTASFELMÉRÉSBŐL

VASS LAJOS

A cikkben egy a szokásos és általánosan használt módszerektől eltérő megközelítésű becslési eljárásról van szó kategorizált változók populációbeli valószínűségeloszlásának, illetve paraméterének számítására. Az eljárás a vizsgált kategória mintabeli gyakoriságának a paraméter függvényében számított valószínűségeloszlásán alapszik. A paraméter becsült értéke pedig a számításhoz felvett paraméter értékek súlyozott átlaga lesz, ahol a súly a mintában realizálódott gyakoriság számított valószínűsége. Lényeges kérdés a mintavételi eljárás modellezése és a valószínűségeloszlás ebből adódó számítása.

A módszer alkalmazása elsősorban egyes utasfelmérési módok esetén az utasfelmérésből történő becslésnél látszik megfontolandónak, a kidolgozását is éppen az utasfelmérés egzaktabb kiértékelése indukálta. Különösen kisebb mintanagyságnál látszik hasznosnak alkalmazása. A cikkben le van írva egy konkrét utasfelmérési módra – járművön történő kikérdezésnél – az eljárás, valamint a számítási mód, valós példán pedig bemutatjuk az alkalmazását a számítások kapott eredményeivel együtt.

1. Bevezetés

Amikor valamilyen jellemző megjelenését, megmutatkozását vizsgáljuk egy populációban, ezt a populációból vett minta alapján tesszük meg. Ha a populáció az emberek bizonyos csoportja, a mintavétel sok esetben a kérdezés, az interjú. A vizsgálat során nem tekinthetünk el attól, hogy a vizsgált jellemző a populációban mennyire változékony; időtől, helytől, stb. mennyire függ. A közlekedéssel, az utazással kapcsolatos jellemzők vizsgálatánál a populáció az utasok valamilyen köre lesz. A jellemzők egy része körükben csak lassan változik, pl. azok, amelyek az utasok utazási szokásaihoz kapcsolódnak, vagy a közlekedési adottságaikhoz kötődnek – a szokások, illetve az adottságok lassan változnak –, de vannak gyorsabban, akár óránként változó jellemzők: utasok összetétele, utazás indoka, a főbb utazási relációk, stb. Amíg az előbbi jellemzőkkel kapcsolatban az utasokat tágabb időhatárok között kérdezhetjük meg, addig az utóbbi típusú jellemzők vizsgálatánál a mintavétel szokásosan az utasok utazásuk közbeni megkérdezésével történik. Ez utóbbi mintát csak ott és akkor utazó utasok sokaságára lehet vonatkoztatni, vagyis egy adott időintervallumban, vagy egy adott helyen vett minta már nem feltétlen vonatkozik egy-két órával később és máshol utazókra, hiszen az utazás állandóan változó folyamat.

Éppen e miatt egyes közlekedési jellemzők vizsgálata, valamint a rájuk vonatkozó becslési mód eltérhet többé-kevésbé más területek statisztikai vizsgálatától, ez vonatkozik a mintavételre, de a kiértékelésre is. Pl. a kérdezési körülmények, vagy annak az időtartamnak a rövidsége, amelyre a mintavételt relevánsnak gondoljuk, nem teszi lehetővé, hogy minden esetben kellő nagyságú mintával számoljunk. Továbbá a kiértékelésnél figyelembe kell venni az utasforgalomra fennálló összefüggéseket is.

E cikk egyfajta becslési módszert tárgyal, amely a sajátosságok miatt a közlekedéssel, az utazással kapcsolatos jellemzők becslésénél látszik jól használhatónak (4. fejezet). A mintavétel egy speciális módja esetében pedig a számítási eljárást ismerteti részletesebben (5., 6., 7. fejezetek). Egy valós példán keresztül pedig a módszer alkalmazását mutatja be a kapott eredményekkel (8. fejezet).

A cikk nem szándékozik foglalkozni részletesebben és matematikai alapossággal az ismertetett becslési mód statisztikai tulajdonságaival, ez még további más jellegű munkát, elemzést és időráfordítást igényelt volna. Inkább kapott hangsúlyt a módszer leírásán túl az alkalmazásának bemutatása egy valós példán keresztül. Ilyen szemszögből egy esettanulmánynak is tekinthető ezen írás.

2. A cikkben használt fogalmak ismertetése

A megértés és az egyértelműség érdekében áttekintjük a használt fogalmakat.

Utazási jellemző: térben, időben, vagy egyéb szempontból (pl. üzemeltető szerint, vagy közlekedési mód alapján) behatárolt személyközlekedés mennyiségét, minőségét, milyenségét összefogóan megadó tulajdonság, ismérv. Amennyiben számértékkel adjuk meg, akkor ezt az értéket az adott jellemző mutatójának nevezzük a specifikált közlekedésre. Ilyen jellemző lehet például egy adott település egy napi közlekedési teljesítménye (utaskilométerben), vagy pl. a délelőtti időszakban az utasok valamilyen szempont szerinti összetétele, százalékos megoszlása.

Az adott közlekedésben résztvevő utasok adják a vizsgált populációt. A populáció egyes egyedeinek (utasoknak) utazási jellemzőit, megkülönböztetésül a közlekedés egészére vonatkozó előbb definiált jellemzőtől, ezen írás keretében ezután *egyéni utazási jellemzőnek* hívjuk.

A közlekedés egészére vonatkozó mutatók egy részét a populáció egyedeinek egyéni utazási jellemzőiből számoljuk ki. Ha nem ismerjük minden egyedre a kérdéses jellemzőjét, akkor mintavétel alapján becsüljük meg a mutató populációra vonatkozó értékét. Az „utazási jellemző” – szóhasználat előfordul – a fogalmazás gördülékenysége érdekében esetenként az egyéni utazási jellemzőre is. A szövegkörnyezetből kiderül azonban, hogy a két fenti fogalom melyikét kell érteni alatta.

Ezen írás során az egyéni utazási jellemzőket *valószínűségi változóknak* tekintjük, amelyek mindegyike valamilyen saját eloszlást követ a populációban. A valószínűségi változó jellemzésénél a [18] irodalom fogalmait követjük. A valószínűségi változó, az egyéni utazási jellemző milyenségétől függően, felvehet számértéket (metrikus valószínűségi változó), pl. átszállások száma, utazási idő, illetve több nominális értéket, ún. kategóriákat. Ez utóbbi esetben beszélünk kategorizált valószínűségi változókról. Például, ha a valószínűségi változó az **utasok státusza**, akkor *dolgozó, tanuló, nyugdíjas, egyéb* értékeket rendelhetünk hozzá, vagy az **utazás indoka** esetén *munkavégzés, tanulás, szórakozás, egyéb* értékeket.

E cikk keretében ez utóbbi esetet tárgyaljuk, vagyis a valószínűségi változó diszkrét, véges számú kategóriaértéket vesz fel. A közlekedés egészét ilyen típusú egyéni utazási jellemző esetén a valószínűségi változó populációbeli eloszlása jellemzi, másként fogalmazva az egyes értékek relatív gyakorisága (százalékos eloszlása). Ez tekinthető ilyen esetekben az utazási jellemző mutatójának.

A valószínűségi változó értékeinek populációbeli relatív gyakoriságát a *populáció paraméterének* nevezzük és $\boldsymbol{p}$-vel jelöljük. (A $\boldsymbol{p}$ vektorként van jelölve, mivel a valószínűségi változó minden lehetséges értékére van egy értéke. Az i-edik komponense p_i az i-edik kategóriára vonatkozó paraméter). Ezen írás a populációban a kategorizált változók paramétereinek becsléséről szól. Ha nincs külön jelölve, akkor paraméter kifejezés alatt valamelyik i-edik vektorkomponensét értjük.

E cikk keretében ezután *alapsokaságnak* nevezzük az utasok azon körét, amelyből a mintát vesszük. A *populációnak* pedig az utasok azon körét, amelyre a becslést végezzük. A populáció lehet az alapsokaság maga, vagy annak részhalmaza. Általában a két fogalmat szinonimaként használják, de mostan tárgyalásunk során célszerűnek látjuk, hogy különbséget tegyünk. Rendszerint a vett mintának csak azon elemeit használjuk fel egy konkrét halmazra vonatkozó becslésnél, amelyek egyúttal ebből a halmazból is származnak. Pl. egy település délelőtti közlekedési mutatóit a település délelőtti utasainak mintájából becsüljük, jóllehet a mintavétel egész nap történt. Vagyis az a halmaz, amelyre becsléseket teszünk, megegyezik azzal, amelyből származó mintaelemekből tesszük a becslést.

A közlekedésre vett mintáknál azonban, így a mostani tárgyalásunkban bemutatott esetben is, a két halmaz nem esik feltétlenül egybe. Az alapsokaságból vett minden mintaelem figyelembe van véve a vizsgált populáció paraméterének becslésénél, sőt a számításnál figyelembe vett egyéb feltételek is az alapsokaságra vonatkoznak. Ezért célszerű a két fogalmat ezúttal megkülönböztetni. Például a később ismertetendő EMAH projekt keretében a vonaton levő összes utasra történt az utasszámlálás, de csak a határon átutazókra végzünk becslést.

A rövidség kedvéért a továbbiakban a valószínűségi változó egy értékének (kategóriájának) *mintabeli gyakorisága*, illetve *mintabeli aránya* kifejezés alatt a változó adott értékének a mintában levő gyakoriságát, illetve relatív gyakoriságát értjük.

3. Utasfelmérés módjai

Számos utazási jellemző az utasok egy részének megkérdezésével kapott ún. *célforgalmi* mintából ismerhető meg. Ilyen felmérések esetében az alapsokaság az utasokat, az utazó közönséget jelenti, illetve a vizsgálattól függően, ezek egy helyben vagy időben behatárolt és konkrétabb halmazát, amelyből a mintavétel történik. Például egy város egy napi utasait, vagy egy megye, egy térség utasait, vagy egy vasúti vonalon utazókat, stb...

A mintavételi eljárást az utazási módhoz alkalmazva, pl. a közforgalmú járművekkel történő (autóbusz, vonat) utazásnál, valamint az adottságokra, a megvalósíthatóságra tekintettel és a gazdaságosság szem előtt tartásával a vizsgálat céljához kell megválasztani. Ennek megtervezése és végrehajtása a felmérni kívánt utazások alapos, részletes ismeretét és nagy gyakorlatot igényel. Autóbusznál, vonatnál általában két módszer használatos az utasok kikérdezésére: *a megállókban történő kikérdezés*, vagy a *járműveken történő kikérdezés*.

Mindkét felmérési mód utazás közbeni csoportos egyszerű mintavétel – amikor is minden szóbajöhető, vagy fontos csoportból veszünk mintát –, amelynek során törekszenek az utasok független és véletlen kiválasztására. Ezek megvalósulását a kiértékelés során tényként is kezeljük. Az utasok kiválasztásának módja azonban nem jelenti azt, hogy a mintában a mintaelemek egymástól függetlenek is!

A korrekt és jól használható felmérésnél a célforgalmi mintavételhez szükséges továbbá az is, hogy kiegészítse utasszámlálás, az ún. *keresztmetszeti felmérés*. Ez a megállóhelyeken fel- és leszálló utasok megszámlálását jelenti. A populáció, illetve az alapsokaság nagyságát kapjuk meg ez által. Egy adott felmérésnél ezeket az utasszámokat nem tekintjük véletlen értékeknek.

Az utasfelmérés mindegyikére jellemző, különösen, ha időben, térben kiterjedt utasforgalomról van szó, hogy költségessége miatt nem ismétlik meg hasonló körülmények között, ezért általában nincs több minta, csak egy. Ezért egy minta alapján kell a hibát is megmondani, ha egyáltalán megtudjuk. Általában több ezres utasforgalom esetén mintegy 10-15%-os mintavételi arány a szokásos elvárás (utalunk itt a KTI-ben levő számos utasközlekedéssel foglalkozó tanulmányra). Ebben az esetben a teljes alapsokaságra – feltéve a normális eloszlás közelítést a kategóriák mintabeli relatív gyakoriságára – a paraméter hibája nagy biztonsággal ($\approx 90\%$) $0,05$ érték alatt marad. Ahhoz, hogy egyes fontosabb utascsoportokra kellően nagy mintadarabszám jusson, a kikérdezés során minél nagyobb mintavételi arány elérésére törekszenek. Azonban az, hogy az egyes vizsgált részpopulációkba hány darab mintaelem kerül, az majd a feldolgozás során derül ki. A kisebb részpopulációkra már csak nagyobb pontatlansággal számolhatunk. Ezért ezekre nem lehet hibát előre megfogalmazni.

4. Paraméter felmérésből történő becslése

4.1. Jelenleg szokásos eljárás

Az egyéni utazási jellemző, mint valószínűségi változó, eloszlását megadó $\boldsymbol{p}$ paraméter becslési értéke szokásosan a jellemző egyes kategóriáinak a vizsgált populáció célforgalmi mintájában levő aránya. Ezt az arányt alkalmazzuk a populációnál, és így egy kategória populációban előforduló számosságát a populáció nagyságának ezen aránnyal való megszorzásával becsüljük meg. Ezt gyakran a minta „*felszorzásának*" is nevezik.

Az arány alkalmazása praktikus egyszerűsége és a gyakorlati esetek nagy részében elfogadható pontossága miatt. Vannak olyan vizsgálatok azonban, ahol az arány alkalmazása kétségeket vet fel.

Amennyiben a kikérdezéses minta jól visszatükrözi a populációt, akkor a mintából jól becsülhető az utazási jellemző populációbeli eloszlása. Például így van ez akkor, eloszlástól függetlenül, ha a mintanagyság közelíti a populáció számosságát, vagy a minta kellően nagy egy adott pontossághoz, például a Bernstein tétele értelmében.

Amennyiben egy kiválasztott kategóriát nézünk, akkor tekinthetjük úgy, hogy a populáció egyedei csak kétféle értéket vesznek fel (az adott kategóriát, illetve nem azt), vagyis a valószínűségi változó Bernoulli-eloszlást követ. Ilyen esetekben a célforgalmi felmérés mintavételi eljárása alapján a kategória mintában levő gyakorisága esetenként binomiális vagy hipergeometrikus eloszlású lehet. A paraméterre a relatív gyakoriság ilyen esetekben jó becslést ad: torzítatlan, konzisztens és a becslés hibáját is ismerjük, $1/\sqrt{n}$-nel (ahol n a minta elemszáma) arányos. Ezen eloszlásokra a maximum likelihood módszerrel is a relatív gyakoriságot kapjuk torzítatlan és konzisztens becslésként, hipergeometrikus eloszlásnál aszimptotikusan. [2], [12]. E fenti eloszlások általában csak egyszerűbb felmérésnél és mintavételnél jöhetnek létre. „Tiszta" eloszlással általában nem számolhatunk a gyakorlatban megvalósuló mintavételi eljárások során.

Amikor egész napi, vagy nagyobb területre, pl. egész városra vonatkozó utazási mintát nézünk, akkor egyes populációk (pl. ha egyúttal az maga az alapsokaság), valamint a minta is elég nagyok lehetnek, így a nagy minta esetére alkalmazhatjuk a központi határeloszlás tételét a mintaelemek eloszlásának széles körére, ami szerint a relatív gyakoriság jól közelíthető normális eloszlással. Nem csak független és azonos eloszlású mintaelemek esetében alkalmazhatjuk, de különböző eloszlásúakra, sőt nem függetlenekre is [16], [17]. Ilyen esetben is a mintabeli arány a populációra jó becslést ad, és ismerjük a hibáját is. Utalunk itt a 3. fejezet végére. Eközben azonban eltekintünk a mintavétel eltérő tér- és időbeli történésétől. Ahogy említettük a **Bevezető**ben, az egész minta felhasználása a közlekedés egészére ad meg egy átlagos értéket az utazási jellemző mutatójára.

Egyes elemzéseknél azonban érdekelhet minket, hogy az utazási jellemző időben hogyan változik, pl. hogyan alakul egy mutató óránkénti értéke, vagy kisebb térségben (pl. egy város valamelyik körzetében) mik lesznek a jellemzők értékei. Ekkor az egész minta valamilyen kiválasztott részét nézzük csak, amelynél a minta nagysága, vagy a mintavételi arány is kicsi, és amelyben nem ismerjük a kategória eloszlását, és nem alkalmazhatjuk a központi határeloszlás tételét sem kellő pontossággal. ([16]-ban a normális eloszlás alkalmazásának elfogadhatóságára adnak meg összefüggést.) Ezért kisebb mintáknál a mintabeli arány eloszlásáról nem tudunk semmit, így a paraméter becslésére ezen érték felhasználása kétséges megbízhatóságú, hibáját sem tudjuk megmondani. S mivel csak egy minta van – mint már említettük, a felmérést általában nem ismétlik meg –, még egy másik méréssel sem tudjuk összevetni a kapott becslést.

Gyengébb minta esetén alkalmazhatunk önkényes meggondolásokat is, amelyek gyakorlati szempontból elfogadhatók és általában megfelelő eredményeket adnak, de matematikai-statisztikai szempontból nem értelmezhetők. Ezért elméletileg jobban alátámasztható más becslési módot dolgoztunk ki. Ez a matematikai-statisztika és a valószínűségszámítás módszereinek alkalmazásán alapul, lehet vele becsülni a standard hibát is, és emellett figyelembe veszi az utasforgalom összefüggéseit is.

4.2. Egy más megközelítésű eljárás

Alapvetően az ebben a pontban ismertetendő eljárás a cikk tárgya. Az eljárás lényege, mint általában a becslések esetében: a paraméter értéke a kategória mintabeli gyakoriságának valószínűségeloszlása alapján lesz becsülve. Ez az eloszlás függhet a mintavételül szolgáló alapsokaság és a populáció nagyságától, a paraméter értékétől, a célforgalmi kikérdezés módjától, mikéntjétől, valamint a mintavételi eredmény realizációjától (pl. mikor, milyen mintaelemeket kaptunk). Az általunk használt megközelítésnél a becslési eljárásnak két fő része van: először a vizsgált kategóriára a mintabeli gyakoriság valószínűségeloszlásának meghatározása a paraméter függvényében, azután a valószínűségeloszlásból a p paraméterre becslő statisztika készítése. A becslő statisztika egyfajta súlyozott átlag lesz. Lásd alább. Ebből a statisztikából a becslés hibáját is meghatározhatjuk.

Nevezzük *jóesetnek* az általánosság és a rövidség kedvéért, ha egy utas az alapsokaságban a vizsgált kategóriájú utazást bonyolítja le. A jóeset előfordulhat a mintában is, oda azonban véletlenül kerül be. Ha bevezetjük az indikátorváltozót arra az eseményre, hogy egy adott mintaelem jóesetként szerepel a mintában, és 1 értéket rendelünk hozzá, és 0-át az olyan mintaelemhez, amely nem egy jóesetet jelenít meg, akkor az indikátorváltozó értékeinek összege a mintára egy statisztika, és *véletlen változó*, amely a jóesetek mintában levő számát adja meg.

Legyen ez a véletlen változó ξ, és P legyen annak valószínűsége, hogy $\xi = k$ érték adódik n utas kikérdezéséből (n nagyságú a minta), és ez a populáció p paraméterének, a populáció M, valamint a mintavételül szolgáló sokaság N nagyságának (utasok száma) függvénye. Vagyis:

$$P\{\xi = k;\, p, n, M, N\} = P_k(p;\, n, M, N).$$

Általában és leggyakrabban M-et és N-et azonosnak vesszük a mostani írás kivételével. Ez a függvény a vizsgált kategóriához tartozó utazások mintabeli gyakoriságának valószínűségeloszlása.

A P függvény formája akár megadható zárt alakban, akár nem, függ a mintavételi eljárástól és a mintavételi történésektől. Adott n, M, N esetén $\xi = K$ előfordulás valószínűsége, a $P_K(p; n, M, N)$ függvény, ahol K a mintavétellel kapott jóesetek száma, csak a populáció paraméterétől függ, és e függvény alapján a paramétert megbecsülhetjük.

$P_K(p; n, M, N)$ függvényt ábrázolhatjuk adott K esetén p függvényében. A p paraméter becslésének egyik lehetősége az a p_{max} érték, amelynél a függvény a maximális értékét veszi fel a fenti feltételek esetén p szerint, vagyis

$$P_K(p_{max}, n, M, N) = max\, P_K(p; n, M, N).$$

A p_{max} érték a paraméter maximum likelihood becslése. Egy vizsgált kategóriának mintabeli aránya lehet a p paraméter becsült értéke a maximum likelihood módszer alkalmazásával bizonyos eloszlásoknál, ahogy már szó is volt róla.

Az általunk alkalmazott megközelítésben a p paraméter becslésének eljárása általánosságban a következő lépések szerint történik.

1. A mintavételi mód modellezése.
2. A P függvény (valószínűségeloszlás) számítási eljárásának meghatározása.
3. Paraméter függvényében a P függvény számítása.
   a) A p paraméterre egy lehetséges p_r értéket felvéve, számítjuk a ξ valószínűségi változó eloszlását a mintában, és a bekövetkezett K előfordulás valószínűségét.
   b) A valószínűségi értéket a paraméterre felvett p_r értékkel együtt elmentjük.
   c) Veszünk egy következő lehetséges értéket a paraméterre, és a 3. a) ponttól folytatjuk
4. Az elmentett értékpárok alapján felvesszük a valószínűség-paraméter függvényt, és a paraméter becsült értéke a p_r értékeknek a számított valószínűséggel súlyozott átlaga lesz.

A 3. pontból látható, hogy a számítást numerikusan végezzük, hiszen nem várható, hogy valamilyen analitikus formájú eloszlásfüggvényt kapjunk.

A numerikus eljárás röviden

A számítást az egyszerűség kedvéért diszkrét p értékekre végezzük el. A p paraméter lehetséges értékét tartalmazó $[0, 1]$ intervallumot R egyenlő diszjunkt intervallumokra osztjuk fel. Az egyes intervallumok kiválasztott pontjai legyenek a $p_1, p_2, \ldots, p_r, \ldots, p_R$ értékek, ezek lesznek a paraméterre felveendő lehetséges értékek, amelyekre aztán a 3-as pont végrehajtódik.

Az R nagysága a számítás pontosságát meghatározza, értékét a gyakorlati esetben elfogadható pontossághoz lehet megválasztani. A számításainkban a $[0, 1]$ intervallumot 100 egyenlő részre osztottuk fel, hogy a számítás elég pontos is legyen, időigénye pedig elfogadható.

Megjegyzés: ha tudjuk, hogy a paraméter milyen intervallumba esik, akkor elegendő csak azt az intervallumot vizsgálni, és ott venni fel szükséges számú p_r értéket.

A 4. pontnál a becslő statisztika a valószínűséggel súlyozott átlag lesz:

$$p_{becs} = p_{sátl} = \sum p_r \cdot P_K(p_r; n, M, N),$$

ahol az összegzés $r = 1, 2, \ldots, R$-re történik, továbbá fenn kell álljon:

$$\sum P_K(p_r; n, M, N) = 1.$$

4.3. Az eljárás összevetése más módszerekkel

A fentebb leírt eljárás egyik fő lépése, a mintabeli gyakoriság valószínűségének számítása, magától értetődő eljárás, ez a maximum likelihood becsléshez is szükséges lépés. A másik fő lépés a p becsült értékének valószínűséggel súlyozott átlaggal történő számítása. Szűkebb internetes irodalmi kutatás során nem volt fellelhető irodalmi példa ilyen statisztikára. Természetesen nem zárható ki, hogy ilyen becslő statisztika alkalmazásának már volt akár több előzménye is. Az e statisztikával történő becslésnél számíthatjuk a becsült érték várható értékét, illetve a becslés standard hibáját, amennyiben adott mintavételi körülmények mellett a mintában előfordulható jóesetek számát tekintjük valószínűségi változónak. E cikk keretében nem tárgyaljuk a várható érték és standard hiba számítását. Ez a becslési mód a maximumra nem szimmetrikus eloszlásokra nem a maximum érték szerinti becslést adja. A súlyozott átlaggal való becslés statisztikai tulajdonságait sem tárgyaljuk, de egy-két szempontból összevetjük más módszerekkel.

A *maximum likelihood* becsléssel szemben a súlyozott átlag jobban figyelembe vesz két szempontot. Egyrészt az eloszlásfüggvény olyan tulajdonságát, hogy a maximum értéken kívüli más p értékek esetén is viszonylag nagy valószínűséggel előfordulhat a mintában a kapott K érték, tehát egy másik p érték is jó eséllyel lehet a populáció paramétere. Valamint, hogy elkerüljük azt az esetet, mikor a maximum a paraméter 0 értékénél van, ugyanis $p = 0$ eset a közlekedésben ritkán fordul elő. Gyakrabban viszont az, hogy nincs a mintában mintaelem valamely kategóriára.

A paraméter becslésére, becslés hibájának vagy egyéb becslési jellemzőnek számítására használják a kifejezetten számítógépes alapú *bootstrap eljárást.* Ez a módszer azonos eloszlású és független elemeket tételez fel a mintában [17]. Az utasfelmérésre jellemző mintavételeknél ezzel általában nem számolhatunk, továbbá az eloszlást egyrészt nem lehet analitikusan megmondani, másrészt az a nem ismert paraméter függvénye is. Ezért – ha szóba jöhet – csak a paraméteres bootstrap jöhet számításba. Esetünkben, leegyszerűsítve, a mintában jóesetek és nem jóesetek fordulnak elő, vagyis kétféle értékű adatsorunk van. (A megállóban történő mintavételnél általában többértékű adatsor jön számításba.) A mintából valamilyen módszerrel (így akár az általunk kidolgozottal) megbecsülhetünk egy közelítő értéket a paraméterre, és a kapott paraméterérték alapján generálhatunk bootstrap mintákat az adatsorunkból a minta minden egyes elemének kiválasztási valószínűsége alapján. A mintavételi modellünk alapján számolt valószínűségi értékeket itt fel kell használni. Lehetséges, hogy a mintaelemek függősége miatt szukcesszív módon kell eljárni. A kapott mintára pedig valamilyen módszerrel számítjuk ki a paraméter újabb becsült értékét. A 6. fejezetben tárgyalt esetben is eljárhatnánk így. A számítás elvégezhető, de túlságosan időigényes, és a gyakorlati pontosság sem igényli.

Itt megemlíthető a bootstrap módszer egyik alkalmazási lehetősége. Elébe menve a 8. fejezet 8.4.3. pontban tárgyalt *érzékenység vizsgálatnak*, a bemenő adatokban történő változásnak valamekkora hatása van a végeredmény változásaira (ez az ún. érzékenység), különösen kis minták esetén. E kiadvány pár éve foglalkozott egy összefoglaló cikkben [10] a paraméterek becslését általában befolyásoló tényezőkről és a különböző módszerekről. Több irodalmi utalás van benne említve a szimulációs, nevezetesen a bootstrap technika alkalmazására, olyan esetekben, amikor az eloszlás nem formulázható és a mintaelemszám kicsi, amint ez esetünkben is fennáll.

Egyes esetekben a mintában kapott gyakoriság (K) az adott mintavétel jellemző értékei alapján egy túlzottan kicsi, vagy éppen nagy valószínűségű esemény bekövetkezésének eredménye lesz. Ha ezt használjuk fel a becslésnél, akkor nagyobb hibával számolhatunk. Használhatunk *szimulációs módszert* arra, hogy egy valószínűbb jóeset számot kapjunk a mintában. A szimulációról és alkalmazásairól számos irodalom van. Jó áttekintést ad ezekről [8], [9]. Az alkalmazásához az eloszlás ismeretére szükség van, hogy véletlen változót generáljunk. Ahogy a paraméteres bootstrap alkalmazásához, úgy a szimulációnál is a paraméter értékének előzetes becslése szükséges. A becsült paraméterértéknél kapott eloszlás alapján jóeseteket generálhatunk. A mintára ezen számok mellett aztán a paraméter számítására az általunk alkalmazott eljárást elvégezhetjük. Ez sok számítást igényelhet. A számítást kevesebbszer kell elvégezni, ha a generált jóeset számok átlagát vesszük. Ezen átlag-gyakoriságot tekinthetjük a mintabeli pontosabb gyakoriságnak, és csak erre a gyakorisági értékre végezzük el a számítást és kaphatunk egy újabb becslést a paraméterre. De az átlagtól eltérő gyakoriságra megismételve a számítást, akár standard hibát vagy konfidencia intervallumot is számíthatunk. Ebben az esetben a szimulációs módszert nem egy bonyolult eloszlás számítására, vagy valamely becslési jellemző számítására használjuk, hanem csak új mintaelemek generálására.

A tárgyalt módszer alkalmazását a 6. fejezetben – egy adott konkrét mintavételi eljárás esetében (járművön történő kikérdezésnél) – bemutatjuk a megállók közötti utasmozgások számítására. Felmerülhet erre más lehetséges számítási eljárás alkalmazása is. Ennek néhány vonatkozását a 6. fejezet alatt tárgyaljuk.

A fenti 4.2. részben leírt eljárás a megállóban történő kikérdezés esetén tárgyalva lett a Közlekedéstudományi Intézet (KTI) 2011–2012-es évkönyvében [21]. A járművön történő kikérdezésnél történő alkalmazása és a konkrét számítási eljárás e cikk tárgyát képezik.

5. Mintavételi modell a járművön történő kikérdezésnél

A járművön történő mintavételkor a járművön levő utasokat kérdezik meg, és a már kikérdezett utast a felmérés során, a megkérdezés napján, nem kérdezik meg többé. A járművön levő utasok száma állandóan változik, de nem folyamatosan, hanem lépcsőzetesen, két megálló közötti szakaszon állandó az utasszám. A kapott minta tartalmazza, hogy melyik felszálló megállóból melyik leszállóban szállnak le az utasok. A kikérdezést kiegészíti még a járműre történő fel- és leszálló utasok számlálása megállónként.

Mivel minden jármű (pontosabb beszélni a közforgalmú közlekedésnél *járatról* vagy vonatról, amely meghatározott időben meghatározott útvonalon közlekedő járművet jelent) időben máskor közlekedik, akár eltérő útvonalon, részben vagy egészben más megállókat érintve, ezért az utasok összetétele, utazási attitűdjük járatonként változhat, ezáltal az egyéni utazási jellemzők eloszlása is. Ezért minden egyes járat utasaira külön becslés jön szóba.

Alapsokaságnak tehát a járat utasainak összességét tekintjük, közülük történik a mintavétel. Azonban paramétereket erre az alapsokaságra vonatkoztatni a feladathoz, az elemzéshez nem minden esetben megfelelő, mivel egy járat utasai általában több csoportba sorolhatók utazási jellemzőik (mutatók) tekintetében – amelyek esetenként jelentősen különbözhetnek –, és ezért a járatot nem lehet egy homogén egységnek tekinteni, valamint sok esetben ezen különböző csoportok jellemzői érdekelhetnek minket. Az utasoknak olyan körét kell definiálni, amelyre az utazási jellemzők viszonylag egyértelműen erre a körre vonatkoztathatók. Továbbá kell, hogy legyen ismeretünk a csoport nagyságáról. A mintát is majd erre a halmazra kell „felszorozni”, vagyis ez lesz a populáció. Ez a populáció nem esik feltétlenül egybe az alapsokasággal.

Egy járatnál minden egyes megállóhoz hozzárendelünk egy populációt, éspedig a megállóban felszállt vagy leszállt utasok halmazát. Azt mondhatjuk, hogy egy járatnál egy adott megállóban felszállt utasok az utazási jellemzők olyan mutatóit határozzák meg, amelyek az adott megállóra jellemzőek, egyben különbözhetnek más megállók utasai által meghatározott mutatóktól. Tehát megállónként más és más lehet az utasok összetétele, az utazás indokának megoszlása, stb... Ehhez a halmazhoz hozzárendelhetők az egyéni utazási jellemzők eloszlását leíró paraméterek. Ugyanez igaz a leszálló megállókra is. (Itt megjegyezzük, hogy a megálló összes utasforgalma ismert. De nem lehet alkalmas populáció pl. a megállóban felszállt dolgozók összessége, mert azok száma már nem ismert.)

A következő részek tárgyalásánál az egyéni utazási jellemző az **utazási reláció** lesz. Vagyis az a jellemző, hogy adott megállóban felszállt utas melyik megállóba utazik. Ehhez az utazási jellemzőhöz, a 2. pont értelmében, hozzárendelt valószínűségi változó értékei (kategóriák) pedig lehetnek pl. az egyes megállók sorszáma a járaton. A valószínűségi változó csak a hozzátartozó populációra vonatkozik. A valószínűségi változó eloszlása adja meg, hogy milyen arányban oszlanak el egy felszálló megálló utasai a különböző leszálló megállók között, vagy más oldalról, a leszálló megálló szemszögéből, a felszálló megállók között. Ezt adják meg az adott populációra vonatkozó paraméterek. Minden megállóhoz, illetve a populációjához hozzárendelünk valószínűségi változót, és minden egyes változóhoz annyi elemű paramétervektor tartozik, ahány megállóban leszállhatnak, vagy felszállhatnak az utasok.

A megállók közötti szakaszon több megállóból jövő (vagy más megközelítés esetén több megállóban leszálló) utas tartózkodik, tehát egyszerre több megálló populációja létezik együtt, tehát egyszerre több és különböző paraméterű populáció van jelen. Amennyiben megállók közötti mintabeli forgalom (mintabeli gyakoriság) valószínűségeloszlásának számításánál egyszerre kívánnánk kezelni a megállókat, akkor sokdimenziós problémával kellene szembenézni. Emellett a valószínűségeloszlásokat nem lehet analitikus formában megadni, de még numerikus kezelése is nagymértékben bonyolultnak látszik.

Ezért a problémát leegyszerűsítettük. Egyrészt egyszerre csak egy populációt vizsgálunk. Másrészt az egyes megállókban a leszállók számát a mintában nem tekintjük valószínűségi változónak, és értéke a megálló mintában realizálódott leszálló utasszám lesz. Ez azt jelenti, hogy az utasgyakoriság eloszlásának számításánál az egyes megállóknál leszálló jóesetek száma nem haladhatja meg a megállóra vonatkozó ezen értéket. E feltétel mellett minden lehetséges eset figyelembe van véve, és a nem megvalósulható esetek (pl. a mintában egy szakaszon (két megálló között) mintavételkor nem kaphatunk annyi jóesetet, amellyel már meghaladnánk a vizsgált megállóban a leszálló utasszámot) ki vannak zárva. Ez a feladat könnyebben megoldható.

5.1. A leegyszerűsített modell

A leírt utas-kikérdezési módszer egy visszatevés nélküli mintavételhez hasonlít két megálló között. A ξ valószínűségi változóhoz hasonlóan bevezetjük két megálló közötti szakaszra, legyen ez az i-edik szakasz, a ξ_i valószínűségi változót, amely az i-edik szakaszon történt mintavételnél kapott jóesetek számát adja meg. A bevezetett valószínűségi változók egy kiválasztott populációra (megállóra) értendők. Ez a változó ún. hipergeometrikus eloszlást fog követni az alábbi forma szerint.

$$H\left(\xi_i = k;\ N, M, n\right) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

ahol két megálló közötti i-edik szakaszon

N az utasszám,
M az utasok között a jóesetek száma,
n a mintavétel száma,
k a szakaszon vett mintában levő jóesetek száma.

A következő szakaszon, vagyis a következő két megálló között történő mintavétel esetén is ugyanez az eloszlásfüggvény, de argumentumai már más értéket vesznek fel, és függenek az előző mintavétel kimenetelétől.

Tehát a mintavétel két megálló közti szakaszon a teljes alapsokaságból, vagy részhalmazából (az addig felszállt utasokból) történik, de a becslést csak egyik konkrét részhalmazára végezzük el: amennyiben a felszálló megállót vizsgáljuk, akkor az adott felszálló, ha a leszálló megállót, akkor az adott leszálló megálló utasaira. A járat utasaira (fel- és leszállók számára) vannak utasszámlálási adatok, de különbséget nem tudunk tenni abban a dologban, hogy pl. egy megállóban leszállók között mennyi a különböző megállókból jövő utasok száma, vagyis melyik populációból valók. Ezért bizonyos számítások az összes, megállónként nem megkülönböztetett utasra fognak vonatkozni. Az összes utas alatt az alapsokaságnak a vizsgált leszálló megállóig felszállt utasok halmazát értjük természetesen.

A jóeset az lesz, ha a vizsgált megállóban felszállt utas a vizsgált utazási jellemzőnek, pontosabban valamely kategóriájának megfelelő utazást bonyolít le. Továbbá, mivel csak egy adott megállóra vonatkozó populációt nézünk, a más megállók utasait úgy vesszük, mint ami nem *jóeset.* Így, amennyiben az utazási jellemző a reláció, a felszálló megálló j, a leszálló ℓ, akkor csak a (j, ℓ) reláció lesz jóeset. Ha a leszálló utasokat vizsgáljuk, akkor is így értelmezzük a jóesetet.

6. A megállók közötti utasszám számítása a populációra

A közlekedés elemzése szempontjából a lényeg: mekkora a forgalom nagysága (utasok száma) megállók között, vagy települések között, stb... Ez gyakorlatilag megfelel annak az utazási jellemzőnek, hogy adott felszállóhelyről hányan utaznak más megállókba, mondjuk egy j megállóban felszállt utasokból a követő megállókban hányan szállnak le. (De lehet más utazási jellemzőket is vizsgálni, például hány dolgozó utazik a járművön az adott megállóból, stb...) E számításhoz az **utazási reláció** egyéni utazási jellemzőnek (valószínűségi változónak) eloszlását használjuk fel, amelynek értékei (kategóriái) lehetnek például, hogy a j megállót követő megállók közül hányadiknál, elsőnél, másodiknál stb.-nél száll-e le az utas. Ezeket a vizsgálatokat el lehet végezni minden egyes megállóra $j = 1$-től, az utolsó kivételével. Minden egyes két megálló közötti forgalom nagyságát e valószínűségi változó populációbeli eloszlása tehát paramétere segítségével kaphatjuk meg, megszorozva vele a populáció számosságát. A paramétereket azonban nem ismerjük.

A tárgyalás egyszerűsítése érdekében egy vizsgált megállóban *felszállt* utasok képezzék a populációt. (A másik lehetőség lenne, hogy a vizsgált megálló *leszálló* utasai jelentik a populációt. A számítási elv ugyanaz marad ez utóbbi esetben is, csak egyes konkrét számítási megoldások különböznek a két esetben.)

6.1. A megállók közötti utasszám valószínűségeloszlásának számítása a mintában

Az **utazási reláció** valószínűségi változó esetén a 4.2.-ben leírtak szerint a paraméterek kiszámításához a megállók között utazók mintabeli számának valószínűségét kell először meghatározni. A j-edik felszálló megálló esetében a j-edik és a követő megállók közötti utasszámot. A számítási eljárást most egy kategóriára végezzük el, arra, hogy az ℓ-edik megállóban száll le az utas. A megbecsülendő érték, hogy itt a vizsgált megállóban felszállt utasokból hányan szállnak le milyen valószínűséggel. Jóeset most esetünkben, ha egy utas, amelyik a j-edik megállóban felszállt, az ℓ-adik megállóban száll le.

Tehát a felszállók között $M_{j\ell} = p_{j\ell} \cdot F_j$ lesz az adott jellemzővel bíró utasok (jóesetek) száma, ahol

- $M_{j\ell}$ az ℓ-edik megállóhelyen leszállók száma a j-edik megállóból,
- F_j a j-edik megállóhelyen a felszálló utasok száma,
- $p_{j\ell}$ az ℓ-edik megállóra jellemző paraméter a j-edik megállóban felszállók körében.

Annak valószínűségét, hogy a $j \leq i$-edik és az $i+1 \leq \ell$-edik megálló közötti i-edik szakaszon vett mintában a j megállóban felszállt utasok közül k darab olyan utas fordul elő, amelyik az ℓ-edik megállóban leszáll, az alábbiak szerint írhatjuk fel, amennyiben a megelőző szakaszokon eddig összesen z_i darab jóeset fordult elő.

$$P(\xi_i = k) = P_k(i) = H(k;\, N_i, M_i, n_i | C_{j\ell}) = H(k;\, N_i, M_{j\ell} - z_i, n_i | C_{j\ell}), \qquad (1)$$

ahol

- i az argumentumban az összes szükséges paraméter i-edik szakaszbeli értékére utal,
- N_i az adott szakaszon figyelembe vehető utasok száma,
- M_i az adott szakaszon figyelembe vehető jóesetek száma,
- n_i az adott szakaszon a mintavételek száma,

$C_{j\ell}$ olyan feltételek, amelyeknek figyelembevételével kell a valószínűséget kiszámítani.
Nem részletezve, ezek arra vonatkoznak, hogy a k szám nem lehet tetszőleges nagy egy szakaszon, korlátot szab az ℓ-edik megállóban leszálló utasok száma, valamint megállónkénti leszállók száma a mintában, szakaszonként vett mintaelemek száma, továbbá a vizsgált szakaszig az összes vett jóeset száma (z_i értéke) is.

A figyelembe vehető utasszám:
$N_i =$ (az utasok száma az i-edik szakaszon) $-$ (az előző szakaszokon megkérdezett és az i-edik szakaszon még fennlevő utasok).

A figyelembe vehető jóesetek száma:
$M_i = M_{j\ell} -$ (az i-edik szakaszt megelőző szakaszokon megkérdezett utasok között a jóesetet jelentő összes utas száma, vagyis z_i).

Ha az i-edik szakaszig z_i számú jóeset fordul elő a mintában, akkor a $P_k(i)$ valószínűséget felfoghatjuk feltételes valószínűségnek is, ezért jelölhetjük $P_k(i|z_i)$-vel a függvényt. Így az előző egyenletet (2) szerint is felírhatjuk.

$$P_k(i|z_i) = H\left\{k;\, N_i, M_{j\ell} - z_i, n_i | C_{j\ell}\right\}. \tag{2}$$

Annak valószínűségét, hogy egyáltalán az i-edik szakasszal bezárólag, azaz az i szakaszon kapott jóeset számmal együtt összesen w jóeset forduljon elő, a (3) alapján számíthatjuk ki, mivel a z_i-nek több értéke lehet véletlen módon. S_i jelöli az i-edik szakasz utáni jóesetek számának valószínűségeloszlását:

$$S_i(w) = \sum_{z_i=0}^{\text{zmax}} P_{w-z_i}(i|z_i) * S_{(i-1)}(z_i), \tag{3}$$

ahol az összegzés z_i-re a megelőző szakaszokon maximálisan elérhető lehetséges értékéig, z_{max}-ig történik.

A w érték pedig nem lehet több, mint $z_{max} + k_{max}$. A k_{max} érték az i-edik szakaszon kiválasztható maximális jóesetek száma, amelyet az i-edik szakaszon vett minták száma és a z_i érték határoz meg. A (3) összefüggés a teljes valószínűség tétele alapján lett felírva, mert a különböző z_i értékek előfordulása egymást kizáró események, és valószínűségeik összege 1. Ha $w - z_i < 0$, akkor a feltételes valószínűség értelemszerűen 0 lesz.

A (3) összefüggés azt mutatja, hogy az $S_i(w)$ valószínűséget szukcesszíve számíthatjuk az előző szakaszokból és az adott szakaszon történt mintavételből. Vagyis az előző szakaszokon kapott összes jóeset valószínűségéből és az aktuális szakaszon kapott jóesetek száma valószínűségéből lehet számolni az aktuális szakasz utáni jóesetek számára vonatkozó eloszlást. Felhasználva, hogy az első szakaszra $z_1 = 0$ lesz és $S_0(0) = 1$, hiszen az első szakasz előtt nem volt mintavétel. Minden szakasz után megkapjuk az addig lehetséges jóesetek számát, valamint a hozzátartozó valószínűséget. A kapott jóesetek számával aztán csökkentjük a következő szakaszon figyelembe vehető jóesetek számát $(M_{j\ell} - z_i)$-t, és folytatjuk a következő $(i+1)$ szakaszon történő mintavétel valószínűségének számításával. Ezt a számítást elvégezzük minden két szomszédos megálló közötti szakaszra a j-edik megállótól az ℓ-edikig, és így megkapjuk az adott utazási jellemzőre, vagyis a j megállóban felszállt és az ℓ-nél leszálló utasok számának eloszlását a mintában adott $p_{j\ell}$ mellett. A paraméter ezen értékénél így megkapjuk a $\xi = \sum \xi_i \quad i = j, \quad j+1, \quad j+2, \ldots (\ell-1)$ valószínűségi változó eloszlását.

A gyakoriság valószínűség eloszlásának fenti számítását numerikusan végezzük a 4.2.-ben a 3-as pontban leírtak szerint a $p_{j\ell}$ paraméterre felvett minden $p_r, r = 1, 2, \ldots R$ értékre, és így a mintában az ℓ-nél leszállók számához tartozó valószínűségeket is ismerjük minden p_r-re, és abból a p_r-ek súlyozott átlagát tudjuk számítani. Így kaphatunk becslést a paraméter értékére.

Elvégezhetjük a számítást minden szóbajöhető (j, ℓ) megállópárra, rögzített j mellett, ahol $j < \ell$, továbbá minden j-re. Mivel minden mintaelemről tudjuk, hogy melyik szakaszon vették, és melyik megállóban szállt le, továbbá ismerjük a megállónkénti felszálló és leszálló utasok számát, a fenti számítást elvégezhetjük. Nem szükséges minden megállópárra elvégezni, ha csak egy megállóban felszállt utasok mozgása érdekel, vagy csak adott megállóban leszállt utasok száma érdekel bennünket, akkor csak j-ben felszállt, vagy csak ℓ-ben leszálló utasokat kell nézni. Ilyen eset lehet például, ha a megálló egy átszállóhely.

A (3) összefüggés azt mutatja, hogy mivel minden, az adott szakasznál lehetséges z értékre történik az összegzés, az eloszlás számításánál az összes megvalósulható eseményt figyelembe vesszük, és nem vagyunk tekintettel arra, hogy hogyan realizálódott az egyes szakaszokon vett mintavételek során a mintában végül jelenlevő jóesetek száma. Vagyis a konkrét realizáció figyelembe vétele nélkül (a priori) számítjuk az eloszlást. Ez az 5.1.-ben leírtaknak megfelel, vagyis minden lehetséges eset alapján számítjuk az eloszlást.

A számítást kiegészíti, túl az $C_{j\ell}$ feltételek figyelembevételén, két alapvető feltétel számítása: az ℓ-edik megállóban a *lehetséges maximális leszállók* számának, illetve a *legalább szükséges leszállók* számának számítása. Ezeket a számokat a keresztmetszeti felmérésből kapjuk és a konkrét utasforgalom határozza meg. A lehetséges maximális leszállószám azt adja meg, hogy a j megállóban felszállt utasokból mennyi szállhat le legfeljebb az ℓ-edik megállóban. (Ha közben kevés a felszálló utas, akkor a j-edik megállóból más közbenső megállókba is kell kerüljön utas, ezért korlátozva van j-edik megállóból az ℓ-edik megállóban leszállható utasok száma.) A legalább szükséges leszállók száma pedig azt adja meg, hogy a j-edik megálló utasai közül ennyinek biztos le kell szállnia ℓ-ben. (Ha ℓ-ig kevés a felszálló utas más megállókban az ℓ-nél leszállókhoz képest, akkor j-ből is kell, hogy valamennyi leszálljon.) Így az eloszlás számításánál, illetve a becslésnél a számlált utasforgalom alakulása is figyelembe van véve. Ha nincs minta véve valamely

(j, ℓ) megállópár között, akkor a fenti két szám átlagát tekinthetjük a paraméter becslésének.

A fentebb leírt eljárás végén adódó paraméterrel aztán megkaphatjuk a populációra a megállók közötti utasszám becslését, és ha minden egyes populációra összeadjuk, akkor megkapjuk a járatra a megállók közötti utasszámot.

6.2. Átmeneti valószínűségek számításának más lehetőségei

A fentebb leírt eljárással számolt paraméter azt is megadja, hogy a j-edik megállóban felszállt utasok közül milyen arányban szállnak le az ℓ-edik megállóban, más szóval, hogy milyen valószínűséggel utazik egy utas a két megálló között. Ezt a valószínűséget tekinthetjük a megállók közötti átmeneti valószínűségnek. Számíthatjuk minden egyes (j, ℓ) megállópárra külön-külön. Vagyis a becslési eljárás leírására felhasznált példán egy sztochasztikus folyamat átmeneti valószínűségének számítására is sor került. (Bár nem ez volt a cél!) A leírt számítás csak egyszerűsítve veszi figyelembe, hogy a felszálló megállók között kölcsönhatás van.

Megállók közötti átmenet valószínűségének becslésére való módszerekre az Interneten konkrét, közvetlen példa, irodalom nem volt található. Közvetetten, Markov-láncokra vonatkozóan az átmeneti valószínűség számítására azonban voltak módszerek. Amennyiben fel lehet állítani valamilyen Markov-lánc modellt a fel- és leszálló utasok megállónkénti alakulására, vagy a populáció egy utasának leszállására (pl. egy lehetőség a számegyenesen egy speciális vándorlás), akkor lehet használni ezeket a becslési eljárásokat.

Véges állapotú és homogén Markov-láncra az [1], [11] ad meg maximum likelihood becslést az átmeneti mátrix elemeinek becslésére. Esetünkben azonban megállóktól függően változik az átmeneti valószínűség, ezért nemhomogén Markov-lánccal kellene számolni az átmeneti mátrix számításánál. A nemhomogén Markov-láncra az [5] irodalom ad számítási módszert. Amennyiben figyelembe vesszük a felszálló megállók közötti kölcsönhatást, vagyis egyszerre vesszük figyelembe az összes megálló felszálló utasait, akkor többváltozós Markov-lánccal kellene modellezni a folyamatot [3], [6], [13], [19].

Bármelyik esetet nézzük azonban, magát a Markov-láncot, vagy annak egy részét kellene megfigyelni az átmeneti valószínűségi mátrix kiszámításához, vagyis esetünkben a tényleges utasszám alakulását megállónként. De hát éppen ezt szeretnénk tudni! Mivel a folyamatból csak mintával rendelkezünk, így nem alkalmazhatók a Markov-láncra és más idősorokra vonatkozó módszerek.

Ha az átmeneti valószínűség

$$P_{j\ell} = \mathrm{Val}\{(j, \ell) \text{ között egy utas leszállásának valószínűsége}\},$$

akkor az említett szakirodalmakból a számítások általánosan a megfigyelt állapotátmenetek arányával fejezik ki ezt a valószínűséget, vagyis

$$P_{j\ell} = \{\text{a } j\text{-ből } \ell\text{-nél leszálló átmenetek száma/az összes } j\text{-ből származó átmenetek száma}\}.$$

Amennyiben a mintában kapott átmenetek számával, amely most a megállók közötti mintabeli gyakoriságokat jelenti, helyettesítjük a fenti összefüggésben az állapotátmenetek számát, nem várhatunk jó eredményt. Kicsi, vagy nincs is minden (j, ℓ) párra minta. Ezért a $P_{j\ell}$ mátrix erősen pontatlan és ritka lesz. Nem tudjuk, hogy ha nincs mintaelem valamelyik leszálló megállóra, akkor az mit is jelent valójában: kevesen szállnak-e le itt, vagy egyáltalán nincs leszálló utas. Továbbá a minta nem is fejezi ki, hogy a megállók konkurálnak egymással. A mintanagyság növelhető több járat mintájának összevonásával. Azonban a nagyobb mintában levő arányok nem alkalmazhatóak külön-külön az egyes járatokra, mert a járatok forgalma különböző, és a megállók közötti forgalom is máshogy alakul járatonként. Összevont mintának a megállók közötti forgalom számítására történő alkalmazásával a [22] foglalkozik.

7. Egyszerűsítések a gyakorlati esetekben

A célforgalmi minta adatai és a keresztmetszeti adatok minden számításhoz szükséges adatot tartalmaznak, ezért a számítás elvégzése lehetséges. Gyakorlati esetekben azonban számolnunk kell azzal, hogy az adatok nem mindig pontosak, valamint egy járatnak sok megállója is lehet. A gyakorlati esetekben minden egyes mintavételt nem lehet mindig ahhoz a szakaszhoz hozzárendelni, ahol is a mintavétel ténylegesen történt. Ez részben adatfelvételi pontatlanságból eredhet, részben, ha több megálló közel van egymáshoz, akkor a szakaszok nem különíthetők el jól időben a mintavételeknél. Figyelembe kell venni a számolási igényt is, amely a megállók számával erőteljesen növekszik. Továbbá az adatoknál is sok esetben csak település van megjelölve, és nem a konkrét megálló. A gyakorlati esetre a modell egyszerűsítése:

a) Megállókat összevonhatunk települési szinten, és csak akkor kezelünk külön egy településen belül egy megállót, ha a megállóba érkező, illetve kiinduló utasszám jelentősebben különbözik a megálló esetében a többitől, vagy nagy az utascsere. Azokat a megállókat, ahol kevés az utasmozgás, más megállókkal össze lehet vonni.

b) Az egyes mintaelemeket a szakaszokhoz a mintavétel ideje alapján rendeljük hozzá, de megengedünk egy rövid időeltérést, és az ebbe az időtoleranciába eső szakaszok valamelyikéhez rendeljük a mintát gyakorlati megfontolások alapján. (Például ha több az utas, akkor nagyobb lehet a vett minta nagysága.)

8. A módszer alkalmazása egy utasfelmérésre

Az ismertetett módszer valós felmérési adatokon lett kipróbálva. A módszerrel az **utazási reláció** paraméterei lettek megbecsülve, továbbá egy másik módon történt becslés eredményével össze lettek hasonlítva. Szúrópróbaszerűen – egy-két esetben – megnéztük, hogy az adatokban történő változás mennyire változtatja meg az eredményt.

8.1. Az utasfelmérési példa

Az **EMAH** nevű, EU-finanszírozású, ökomobilitást vizsgáló projekt keretében az osztrák-magyar határon átmenő vasúti utazások lettek felmérve 2013-ban néhány vasúti vonalon tavasszal, valamint nyáron a hét ugyanazon három napján [20]. Minden alkalommal célforgalmi kikérdezés, valamint keresztmetszeti számlálás történt több vonatnál. A célforgalmi kikérdezés tartalmazta – más, utazásra vonatkozó kérdések mellett – az induló településre/vasútállomásra, esetleges átszálló vasútállomásra és végül céltelepülésre/vasútállomásra irányuló kérdéseket is. Fel lett véve a vonalszám, a vonat száma (amely vonaton a kikérdezés történt) és a kikérdezés ideje. Megjegyezzük, hogy most a *település* vagy *vasútállomás* fogalmak az eddig használt *megálló* fogalom értelmében vannak használva, kifejezve, hogy a vasúti megállóhelyről van szó, és hogy a vasúti megállóhely lényegében a települést is meghatározza.

A vonatok a vasúti vonalak egy adott szakaszán lettek felmérve. A felmért szakaszon mintavételre bármely két megálló között sor kerülhetett. A felmérés célja miatt általában és többségében a határt átlépő utasok lettek megkérdezve. A keresztmetszeti felmérés is a vasúti vonal vizsgált szakaszának állomásaira történt. A felmért szakasz minden állomásán meg lettek számlálva a fel- és leszálló utasok, természetszerűleg a vonatokon utazó összes utas, tehát nem csak a határt átlépők.

A számításokat csak egy vasúti vonalra (524-esre) végeztük el, a Bécs irányába menő, illetve a Bécs irányából jövő forgalomra. A vizsgált vasúti vonal megállói sorrendben Bécs irányába:

```
Deutschkreutz
Sopron
Loipersbach-Schattendorf
Marz-Rohrbach
Mattersburg
Mattersburg Nord
Wiesen-Sigleß
Bad Sauerbrunn
Neudörf
Katzelsdorf
```

`Wiener Neustadt Hbf.`

`Wien`

A vizsgált szakasz ezen a vonalon Deutschkreutztól Sopronon keresztül Wiener Neustadtig tartott, a Wiener Neustadt – Wien szakaszon célforgalmi kikérdezés és keresztmetszeti számlálás nem volt. Ennek ellenére a Wiener Neustadt – Bécs közötti utolsó szakasz forgalmára a keresztmetszeti felmérésből adódik érték, mivel közbenső megálló nincs. A módszer alkalmazásánál a fenti állomások csak Soprontól kezdődően érdekesek.

8.2. Az adatok megfeleltetése a módszer alkalmazásához

A feltett kérdés: a vasúti vonal ausztriai állomásain hány utas száll le, akik Magyarországról jönnek, illetve az ausztriai állomásairól hány utas indul, akik Magyarországra utaznak.

A módszerhez a felmért adatokat meg kellett feleltetni. Mivel a kikérdezés gyakorlatilag csak a határátlépő utasokra szorítkozott, úgy tekinthetjük, hogy a mintavétel a határátlépő utasokból történt, vagyis a vonaton levő határátlépő utasok szolgálnak alapsokaságként a mintavételhez. Viszont a forgalomszámlálási adat az összes utasra vonatkozik, tehát minden két szomszédos megálló közötti szakaszra meg kell határozni a vonaton levő határátlépő utasok számát. Ezt az összes utasra vonatkozó keresztmetszeti adatokból valamiféle ésszerű feltételezéssel kaphatjuk meg. A feltett kérdés megfelel annak, vajon a határon (Sopronban) felszálló utasok közül milyen arányban szállnak le, illetve a Sopronban leszálló utasok milyen arányban szálltak fel az egyes osztrák állomásokon. Tehát Sopronban felszállt, illetve leszállt utasok adják a populációt, amelyre a paramétereket (arányokat) számítjuk. Vagyis esetünkben most a két halmaz (a mintavételül szolgáló alapsokaság, illetve a populáció) egybeesik.

A módszer alkalmazásának kipróbálására csak egy egyszerűsített eset lett vizsgálva. Azért, hogy minél kevesebb szakaszra kelljen a határátlépő utasok számát megbecsülni, amely becslés a számítás eredményét befolyásolja, és ezáltal az eredmények összevetését más módon számolt értékekkel megnehezíti, a lehető legkevesebb megálló használata a célszerű. Ehhez, amennyire lehetséges, megállókat kellene összevonni, aminek következményeként pedig az összevont keresztmetszeti utasszámok eredményre vonatkozó hatásával kellene számolni.

Szerencsére az expresszvonatok lehetőséget adtak az említett eljárások elkerülésére, ugyanis e vonatoknál csak 4 megállót kell figyelembe venni. Ezek az alábbiak:

`Sopron`

`Mattersburg`

`Wiener Neustadt Hbf.`

`Wien`

Ez pedig azt jelenti, hogy csak egy szakaszra kell a határátlépő utasok számát megbecsülni, és pedig Mattersburg – Wiener Neustadt szakaszra, mert a Wiener Neustadt – Wien szakaszon a mintavétel hiányában az értéke közömbös, a Sopron – Mattersburg szakaszon pedig adott. Egyúttal pedig, mivel a megállók időben eléggé távol esnek egymástól, az adatfelvétel ideje alapján, ha csak az nem teljesen hamis, vagy nem hiányzik, az egyes mintákat elég bizonyossággal tudjuk a megfelelő szakaszhoz hozzárendelni, ezáltal a mintavétel idejének kisebb pontatlansága nem okoz problémát a hozzárendelésnél.

Az expresszvonatok felmérési és mintavételi adatait összefoglalóan az 1. táblázat mutatja meg. Láthatóan az egy vonatra átlagosan jutó mintaelem-szám nem nagy. A mintavételi arány széles intervallumban változik, így egyes vonatoknál csak 1-2 mintával számolhatunk.

	vonatok	**utasszám**		**mintanagyság***		**mintavételi arány***		
		összes	**határon átlépő**	**összes**	**vonat átlag**	**átlagos**	**min.**	**max.**
nyár	12	2901	710	109	$9,08$	$0,15$	$0,04$	$0,20$
tavasz	11	1856	797	71	$6,45$	$0,09$	$0,01$	$0,60$
összes	23	4757	1507	180	$7,83$	$0,12$	$0,01$	$0,60$

*A határátlépő utasokra

1. táblázat. A vizsgált expresszvonatok utasfelmérésének összesítése

8.3. Az összehasonlító módszer ismertetése

A tárgyalt módszerrel kapott eredményeket összehasonlítottuk másik módon becsült értékekkel. Az összehasonlító számításnál az alapsokaságot szintén a vonaton utazó összes határátlépő utas adja, és a becslést is ugyan erre a halmazra tesszük, vagyis a soproni fel-, vagy leszálló utasokra. Vonatonként ismert a határátlépő utasok száma és a vett minta nagysága, és így a mintavételi arány is.

Az utasszám összehasonlító értékét alapvetően az osztrák állomásokon leszálló soproni utasoknak, illetve a Sopronban leszálló osztrák állomásokról jövő utasoknak a mintában levő arányával számoljuk ki. Ez a 4.1. pontban leírt szokásos arányos becslési eljárás, vonatonként vettük az állomások utasszámainak mintában levő arányait. Figyelmen kívül hagytuk, hogy a mintában levő egyes mintaelemek mekkora sokaságból kerültek ki.

A fenti eljárást önkényes, de ésszerű meggondolással „finomítottuk” is. Aminek a lényege, hogy gyengébb minta esetén az utasszámot nem egyetlen vonat alapján számítjuk, hanem az összes hasonlóan közlekedő vonat figyelembe vételével. Feltételezzük, hogy egy gyengébb minta esetén az egy megállóban fel-, vagy leszállt utasok számát pontosabban határozhatjuk meg, ha az összes hasonlóan közlekedő vonat mintáját is figyelembe vesszük. Megosztottuk a vonat utasszámát: egy részét a vonatra kapott mintában levő arány alapján, a másik részét az összes hasonlóan közlekedő vonat figyelembe vételével számolt arány alapján osztottuk el a megállókra.

A 2. táblázat mutatja azokat a vonat mintavételére vonatkozó számokat, amelyek alapján az utasszámot megosztjuk a kétféle számításhoz.

szétosztás típusa	**mintavételi arány**	**mintanagyság**	**becslés vonat alapján [%]**	**becslés összes vonat alapján [%]**
a	$\geq 60\%$	közömbös	100	0
b	$\geq 30\%$	és >12	100	0
b	$\geq 25\%$	és >14	100	0
c	közömbös	$< 0,06 * N$	40	60
d	egyéb esete		60	40

Megjegyzés: N a vonat összes utasa

2. táblázat. Vonat forgalmának megosztása a kétféle becslési mód között a vonat mintavétele alapján

Ha a mintavételi arány nagyobb 60%-nál, akkor csak a mintabeli arányt alkalmazzuk az utasszámra. („a” eset). Ha a mintavételi arány > 30%-nál, és a mintanagyság 12-nél nagyobb („b” eset), akkor is a mintabeli arányt alkalmazzuk. Ha nagyon gyenge a mintavétel („c” eset), akkor az adott vonat forgalmának 60%-át osztjuk el az összes vonat forgalmának figyelembe vételével, és 40%-át a mintában levő arány szerint számoljuk. Például ha 1 db mintaelem van, vagyis 1 fő utas, akkor a vonat forgalmának $0,4$-szerese lesz a mintában levő megálló forgalma, és $0,6$-szerese oszlik el az összes megálló között, tehát három megállóra ez a forgalom az összes hasonlóan közlekedő vonat figyelembevételével számolt arányok alapján oszlik el. (Mert három megálló van Sopronon kívül!)

A határszámok önkényesek. Egyrészt úgy lettek megválasztva, hogy egy vonatra a „ jó” minta a becsléshez elfogadható pontosságot adjon. Az a) típus esetén ez nyilvánvaló. A b) típusnál, megközelítve valamennyire a valóságot, visszatevés nélküli mintavétellel számolva a legkedvezőtlenebb mintavétel esetén mindkét esetben $\sim 0,15$ lesz a standard hiba felső értéke a paraméterre. Továbbá figyelembe véve az összes vonatot (tehát nem csak az itt vizsgált expresszvonatokat) utasszám és mintavétel tekintetében, az is szempont volt, hogy a választott értékek igazodjanak a vonatok általános mintavételi jellemzőihez: se túl engedékenyek, se túl szigorúak ne legyenek. Szempont volt az is, hogy egy megállóra átlagosan mennyi utas jut. (Ha 1-nél kevesebb, akkor azt gyengébb mintának tekintettük.) Az átlagos megállószám 10, vagyis 1-2 mintaelem várható átlagosan megállónként b) esetben, ha a határszámnál kicsit nagyobb a mintaelemszám. Az expresszvonatoknál a helyzet valamivel kedvezőbb, ezért a b eset jó mintavételnek vehető mind a mintavételi arány, mind az átlagosan egy megállóra eső mintaelemszám szempontjából.

Az összehasonlító számításhoz használt mintabeli arány valószínűségeloszlását adott vonatnál nem ismerjük. Így a becslés pontosságát nem tudjuk pontosan megmondani, különösen, ha az említett korrigálást is használjuk. Azt azonban kijelenthetjük általánosan, hogy a) és b) esetben a minta jobb, mint a c) és d) esetekben, és ezért pontosabb eredményt várunk az előbbieknél. Ez nem jelenti azt, hogy d) esetben gyakorlati szempontból a kapott becslés nem lehet elfogadható pontosságú.

8.4. Eredmények

8.4.1. A becsült utasszámok

Meghatároztuk a három osztrák állomásra a paramétereik értékét, vagyis a soproni felszálló, illetve leszálló utasokból való részesedésüket- mind a tavaszi, mind a nyári két vizsgált napra. Az ezekkel kapott utasszámok tört értékek, amelyek végül egész értékre lettek kerekítve. A 3. táblázat mutatja az eredményeket. Feltüntettük az egyes szakaszokon a mintavételre vonatkozó jellemző értékeket is, a populáció (egyúttal az alapsokaság) nagyságát.

Az is látszik a táblázatból, hogy a legtöbb esetben a mintavételek száma kicsi. 12 mintaelemből álló, vagy ennél nagyobb minta 7 vonatnál van, 5 elemű, vagy kisebb mintanagyság szintén 7 vonatnál van. Ez utóbbi esetben az egy állomásra jutó átlagos mintaelemszám 2 alatt van. Ezért az összehasonlító számításnál - de a leírt módszernél is - nagyobb pontatlanságra számíthatunk.

Feltüntettük a leírt módszerrel számolt paraméter várható értékét és a standard hibáját (mint előzőekben említettük, ezek számolhatók). Egyes esetekben a standard hibát a paraméter lehetséges legnagyobb és lehetséges legkisebb érték különbségének (terjedelemnek) harmadával tettük egyenlővé. Amennyiben egy megállóra nincs vagy fel-, vagy leszálló utas, akkor - értelemszerűen - minden érték 0 a táblázatban. Ha Sopron és a vizsgált megálló között nem volt mintavétel, akkor a *szükséges legkisebb*, valamint a *lehetséges maximális* értékek átlaga lett a becsült érték, és ugyanez az érték lesz a várható érték is, a standard hiba pedig a két érték különbségének harmada lesz. A standard hiba ténylegesen 0, ha csak egyféle leszálló esemény következhet be egy megállóban. Vagyis, bár volt mintavétel Sopron és a vizsgált megálló között, csak 0 leszálló utas volt a mintában. A hibának akkor is 0 értéket adtunk, amikor számított értéke kisebb lett $0,001$-nél. Amennyiben a paraméter értéke csak nagyon kis intervallumon belüli értéket vehet fel ($0,05$-on belül), akkor a várható értéket a számított paraméter értékkel tettük egyenlővé, és a standard hiba értékének a terjedelem 3-ad részét adtuk.

vonat	felmérés napja	vonalszakasz	le/felszálló megálló	Sopronban fel/leszállók	szakaszon utasszám*	mintavétel száma	paraméter	várható érték	standard hiba	becsült fel/leszálló utasszám	mintavétel típusa	utasszám össze hasonlító módszerrel
1810	tavasz,kedd	Sopron - Mattersburg	Mattersburg	36	36	1	0,00	0,00	0,00	0	d	1
1810	tavasz,kedd	Mattersburg - Wiener Neustadt	Wiener Neustadt	36	35	2	0,23	0,20	0,01	8	d	28
1810	tavasz,kedd	Wiener Neustadt - Wien	Wien	36	32	0	0,77	0,77	0,00	28	d	7
1812	tavasz,kedd	Sopron - Mattersburg	Mattersburg	104	104	6	0,03	0,03	0,00	3	d	2
1812	tavasz,kedd	Mattersburg - Wiener Neustadt	Wiener Neustadt	104	93	2	0,27	0,23	0,04	28	d	42
1812	tavasz,kedd	Wiener Neustadt - Wien	Wien	104	77	0	0,68	0,66	0,02	71	d	61
1814	tavasz,kedd	Sopron - Mattersburg	Mattersburg	20	20	10	0,00	0,00	0,00	0	a	0
1814	tavasz,kedd	Mattersburg - Wiener Neustadt	Wiener Neustadt	20	10	2	0,42	0,39	0,03	8	a	8
1814	tavasz,kedd	Wiener Neustadt - Wien	Wien	20	3	0	0,58	0,52	0,05	12	a	12
1810	tavasz, péntek	Sopron - Mattersburg	Mattersburg	32	32	4	0,00	0,00	0,00	0	d	1
1810	tavasz, péntek	Mattersburg - Wiener Neustadt	Wiener Neustadt	32	28	1	0,24	0,21	0,04	8	d	6
1810	tavasz, péntek	Wiener Neustadt - Wien	Wien	32	20	0	0,76	0,72	0,05	24	d	26
1812	tavasz, péntek	Sopron - Mattersburg	Mattersburg	91	91	5	0,00	0,00	0,00	0	d	9
1812	tavasz, péntek	Mattersburg - Wiener Neustadt	Wiener Neustadt	91	86	3	0,29	0,26	0,01	26	d	57
1812	tavasz, péntek	Wiener Neustadt - Wien	Wien	91	73	0	0,71	0,71	0,002	65	d	25
1814	tavasz, péntek	Sopron - Mattersburg	Mattersburg	134	134	6	0,01	0,01	0,0025	1	d	10
1814	tavasz, péntek	Mattersburg - Wiener Neustadt	Wiener Neustadt	134	128	6	0,41	0,39	0,02	55	d	44
1814	tavasz, péntek	Wiener Neustadt - Wien	Wien	134	44	0	0,55	0,47	0,08	74	d	81
7755	tavasz,kedd	Wien -Wiener Neustadt	Wien	91	49	0	0,58	0,56	0,00	53	c	71
7755	tavasz,kedd	Wiener Neustadt - Mattersburg	Wiener Neustadt	91	90	1	0,41	0,43	0,00	37	c	16
7755	tavasz,kedd	Mattersburg - Sopron	Mattersburg	91	90	0	0,006	0,006	0,004	1	c	4
7761	tavasz,kedd	Wien -Wiener Neustadt	Wien	70	49	0	0,52	0,62	0,08	36	d	25
7761	tavasz,kedd	Wiener Neustadt - Mattersburg	Wiener Neustadt	70	70	5	0,48	0,38	0,07	34	d	43
7761	tavasz,kedd	Mattersburg - Sopron	Mattersburg	70	65	1	0,00	0,00	0,00	0	d	2

* A mintavételül szolgáló utasszám

3. táblázat. Vonatonként egyes megállók becsült fel- illetve leszálló utasszáma és az összehasonlító módszerrel kapott értékek 1/3

vonat	felmérés napja	vonalszakasz	le/felszálló megálló	Sopronban fel/leszállók	szakaszon utasszám*	mintavétel száma	paraméter	várható érték	standard hiba	becsült fel/leszálló utasszám	mintavétel tipusa	utasszám összehasonlító módszerrel
7749	tavasz, péntek	Wien -Wiener Neustadt	Wien	95	69	0	0,69	0,72	0,07	66	c	68
7749	tavasz, péntek	Wiener Neustadt - Mattersburg	Wiener Neustadt	95	91	4	0,11	0,17	0,06	10	c	18
7749	tavasz, péntek	Mattersburg - Sopron	Mattersburg	95	91	2	0,04	0,04	0,01	4	c	19
7755	tavasz, péntek	Wien -Wiener Neustadt	Wien	56	42	0	0,83	0,81	0,00	46	d	48
7755	tavasz, péntek	Wiener Neustadt - Mattersburg	Wiener Neustadt	56	50	5	0,07	0,09	0,00	4	d	6
7755	tavasz, péntek	Mattersburg - Sopron	Mattersburg	56	51	2	0,07	0,08	0,00	4	d	2
7761	tavasz, péntek	Wien -Wiener Neustadt	Wien	57	42	0	0,69	0,75	0,05	39	c	29
7761	tavasz, péntek	Wiener Neustadt - Mattersburg	Wiener Neustadt	57	53	3	0,24	0,19	0,00	14	c	25
7761	tavasz, péntek	Mattersburg - Sopron	Mattersburg	57	54	0	0,04	0,04	0,03	2	c	3
1810	nyár,kedd	Sopron - Mattersburg	Mattersburg	44	44	6	0,00	0,00	0,00	0	d	0
1810	nyár,kedd	Mattersburg - Wiener Neustadt	Wiener Neustadt	44	38	0	0,21	0,17	0,02	9	d	20
1810	nyár,kedd	Wiener Neustadt - Wien	Wien	44	37	0	0,79	0,78	0,005	35	d	23
1812	nyár,kedd	Sopron - Mattersburg	Mattersburg	75	75	15	0,02	0,02	0,01	2	b	0
1812	nyár,kedd	Mattersburg - Wiener Neustadt	Wiener Neustadt	75	58	0	0,39	0,33	0,06	29	b	30
1812	nyár,kedd	Wiener Neustadt - Wien	Wien	75	44	0	0,60	0,56	0,04	45	b	45
1814	nyár,kedd	Sopron - Mattersburg	Mattersburg	97	97	15	0,03	0,03	0,01	3	d	4
1814	nyár,kedd	Mattersburg - Wiener Neustadt	Wiener Neustadt	97	80	0	0,23	0,18	0,04	22	d	29
1814	nyár,kedd	Wiener Neustadt - Wien	Wien	97	65	0	0,73	0,72	0,01	71	d	64
1810	nyár,péntek	Sopron - Mattersburg	Mattersburg	30	30	3	0,00	0,00	0,00	0	d	0
1810	nyár,péntek	Mattersburg - Wiener Neustadt	Wiener Neustadt	30	27	0	0,08	0,08	0,00	2	d	4
1810	nyár,péntek	Wiener Neustadt - Wien	Wien	30	25	0	0,92	0,91	0,02	28	d	26
1812	nyár,péntek	Sopron - Mattersburg	Mattersburg	77	77	14	0,01	0,01	0,01	1	d	0
1812	nyár,péntek	Mattersburg - Wiener Neustadt	Wiener Neustadt	77	63	0	0,30	0,25	0,05	23	d	24
1812	nyár,péntek	Wiener Neustadt - Wien	Wien	77	48	0	0,70	0,65	0,05	54	d	54

* A mintavételül szolgáló utasszám

3. táblázat. Vonatonként egyes megállók becsült fel- illetve leszálló utasszáma és az összehasonlító módszerrel kapott értékek 2/3

vonat	felmérés napja	vonalszakasz	le/felszálló megálló	Sopronban fel/leszállók	szakaszon utasszám*	mintavétel száma	paraméter	várható érték	standard hiba	becsült fel/leszálló utasszám	mintavétel tipusa	utasszám összehasonlító módszerrel
1814	nyár,péntek	Sopron - Mattersburg	Mattersburg	100	100	12	0,01	0,01	0,003	1	d	1
1814	nyár,péntek	Mattersburg - Wiener Neustadt	Wiener Neustadt	100	88	0	0,19	0,15	0,02	19	d	39
1814	nyár,péntek	Wiener Neustadt - Wien	Wien	100	78	0	0,80	0,80	0,004	80	d	62
7749	nyár,kedd	Wien -Wiener Neustadt	Wien	41	25	0	0,37	0,40	0,14	15	d	19
7749	nyár,kedd	Wiener Neustadt - Mattersburg	Wiener Neustadt	41	37	0	0,12	0,21	0,09	5	d	5
7749	nyár,kedd	Mattersburg - Sopron	Mattersburg	41	41	6	0,11	0,11	0,01	5	d	18
7755	nyár,kedd	Wien -Wiener Neustadt	Wien	70	50	0	0,72	0,75	0,07	50	c	35
7755	nyár,kedd	Wiener Neustadt - Mattersburg	Wiener Neustadt	70	64	0	0,13	0,16	0,04	9	c	12
7755	nyár,kedd	Mattersburg - Sopron	Mattersburg	70	70	3	0,09	0,08	0,00	6	c	23
7761	nyár,kedd	Wien -Wiener Neustadt	Wien	50	25	0	0,41	0,42	0,12	21	d	20
7761	nyár,kedd	Wiener Neustadt - Mattersburg	Wiener Neustadt	50	36	0	0,52	0,45	0,08	26	d	24
7761	nyár,kedd	Mattersburg - Sopron	Mattersburg	50	50	10	0,08	0,14	0,06	4	d	7
7749	nyár,péntek	Wien -Wiener Neustadt	Wien	27	5	0	0,10	0,17	0,06	3	d	6
7749	nyár,péntek	Wiener Neustadt - Mattersburg	Wiener Neustadt	27	22	1	0,42	0,51	0,07	11	d	7
7749	nyár,péntek	Mattersburg - Sopron	Mattersburg	27	26	5	0,24	0,23	0,00	6	d	23
7755	nyár,péntek	Wien -Wiener Neustadt	Wien	50	42	0	0,79	0,85	0,00	40	d	17
7755	nyár,péntek	Wiener Neustadt - Mattersburg	Wiener Neustadt	50	49	4	0,17	0,17	0,01	9	d	24
7755	nyár,péntek	Mattersburg - Sopron	Mattersburg	50	46	9	0,03	0,03	0,01	2	d	10
7761	nyár,péntek	Wien -Wiener Neustadt	Wien	36	14	0	0,19	0,29	0,09	7	d	14
7761	nyár,péntek	Wiener Neustadt - Mattersburg	Wiener Neustadt	36	34	0	0,58	0,57	0,11	21	d	8
7761	nyár,péntek	Mattersburg - Sopron	Mattersburg	36	36	5	0,06	0,06	0,00	2	d	14

* A mintavételül szolgáló utasszám

3. táblázat. Vonatonként egyes megállók becsült fel- illetve leszálló utasszáma és az összehasonlító módszerrel kapott értékek 3/3

8.4.2. Az összehasonlítás eredménye

A 3. táblázat az ismertetett másik módszerrel való összehasonlítás eredményét is mutatja. Amikor csak a mintabeli aránnyal számoltuk a megállók forgalmát (a és b típusú eseteknél), csupán 2 eset volt ilyen, akkor jó egyezés van a két becslési eredmény között. Amikor gyengébb volt a minta (d eset), és ez volt a legtöbb, akkor esetenként hol egyezés volt, hol jelentősebb eltérés adódott. Kb. azonos számban, és a mintavételi arány sem látszik perdöntőnek. Most nem bemutatva az eredményeket, el lett végezve a számítás csak a mintabeli arány használata alapján (finomítás nélkül), de az se adott jobb egyezést. Ha nagyon gyenge volt a minta (c eset), akkor az eredmények meglehetősen eltérnek. (A megadott standard hiba 2-szeresénél is, sőt a 3 szorosánál is vannak nagyobb eltérések.)

Nyilvánvaló volt a tapasztalatok alapján, és ez az eredményekből látszik is, hogy általában a Bécsbe, illetve onnan utazók aránya a legnagyobb, olykor eléggé dominálóan. Ez még akkor is így van, amikor nincs is olyan minta, amely Bécsben felszálló, vagy leszálló utasra vonatkozik. Ezért tűnik elfogadhatóbbnak például a tavaszi keddi 1810-es vonatnál a Bécsben leszállók számának az általunk használt módszerrel kapott értéke (28), mint az összehasonlító eljárással számolté (7). A bécsi utasszámra egy-két ilyen jelentősebb eltérés még előfordul az eredmények között.

Megjegyzés: Esetenként az összehasonlító módszernél figyelembe vett alapsokaság kicsit eltér a táblázati értéktől, mert a Deutschkreutz – Sopron közti utasok is benne vannak. Ez azonban nem befolyásolja az eltérés megítélését.

8.4.3. Érzékenységi vizsgálat

Megvizsgáltuk, hogy a számítás eredményét a pontatlan, hibás adatok mennyire befolyásolják. Nem törekedtünk teljes, megalapozott vizsgálatra, csak egy-két esetnél néztük meg az eltérést.

A fel- és leszállók számát, és így a szakaszonkénti utasszámot pontosnak lehet tekinteni, hiszen csak egy szakaszra lett utasszám becsülve. A mintánál pedig elfogadhatjuk, hogy hol szállt fel, vagy le az utas. A leginkább problémás adat, – és ennek több oka is van – ha nem ahhoz a szakaszhoz rendeljük a mintavételt, ahol az ténylegesen megtörtént. Ezért megvizsgáltuk, hogy ha a mintavétel egyes mintaelemeknél más szomszédos szakaszon történik, hogyan befolyásolja az eredményt. Olyan esetekben érdemes ilyet nézni, ahol egy szakaszon több mintaelem lett véve.

Ezért megváltoztattuk az egyes szakaszokon vett mintaelemek darabszámát, de meghagyva a megállóra vett összdarabszámot. (A 4.3. pontban leírtak szerint az érzékenységet vizsgálni lehet bootstrap módszerrel is, mi nem ezt az utat választottuk.) A 4. táblázat bemutatja a kapott eltérést.

A táblázat tartalmazza az eredeti számításnál használt szakaszonkénti utasszámot, és a szakaszonkénti mintavételek számát, valamint ugyanezen adatokat a min-

vonat	felmérés napja	vonalszakasz	le/felszálló megálló	populáció nagysága	szakaszon utasszám*	eredeti mintavételi szám	szakaszon módosított utasszám*	módosított mintavételi szám	eredeti számolt paraméter	módosítás utáni paraméter	utasszám változás
1812	nyár,kedd	Sopron - Mattersburg	Mattersburg	75	75	15	75	10	0,02	0,018	0
		Mattersburg - Wiener Neustadt	Wiener Neustadt	75	58	0	63	5	0,39	0,386	0
		Wiener Neustadt - Wien	Wien	75	44	0	44	0	0,60	0,596	0
1814	nyár,kedd	Sopron - Mattersburg	Mattersburg	97	97	15	97	8	0,03	0,028	0
		Mattersburg - Wiener Neustadt	Wiener Neustadt	97	80	0	87	7	0,23	0,224	-1
		Wiener Neustadt - Wien	Wien	97	65	0	65	0	0,73	0,727	0
7761	nyár,kedd	Wien -Wiener Neustadt	Wien	50	25	0	25	0	0,41	0,375	-2
		Wiener Neustadt - Mattersburg	Wiener Neustadt	50	36	0	36	3	0,52	0,499	-1
		Mattersburg - Sopron	Mattersburg	50	50	10	47	7	0,08	0,097	1
1814	nyár,péntek	Sopron - Mattersburg	Mattersburg	100	100	12	100	8	0,01	0,005	-1
		Mattersburg - Wiener Neustadt	Wiener Neustadt	100	88	0	92	4	0,19	0,192	0
		Wiener Neustadt - Wien	Wien	100	78	0	78	0	0,80	0,798	0
7755	nyár,péntek	Wien -Wiener Neustadt	Wien	50	42	0	42	0	0,79	0,793	0
		Wiener Neustadt - Mattersburg	Wiener Neustadt	50	49	4	49	6	0,17	0,171	0
		Mattersburg - Sopron	Mattersburg	50	46	9	44	7	0,03	0,031	0

* A mintavételül szolgáló utasszám

4. táblázat. A szakaszonkénti mintavételi számra való érzékenység vizsgálata egyes vonatoknál

tavételek egy részének más szakaszokhoz történt hozzárendelése esetén. A paramétereket mindkét esetre kiszámoltuk. Látható, hogy jelentősen nem változik a számolt utasszám, pedig a mintaelemek egy része más szakaszra került át. Ez az eredmény részben várható is, hiszen a súlyozott átlag értéke az eloszlás változásával csak kevéssé változik. Az eloszlás változása nagyobb mértékű lehet, ha a mintavételül szolgáló utasszám a szakaszokon kisebb érték. Erre vizsgálatot nem végeztünk.

9. Összegzés

A cikkben bemutattunk egy két lépésből álló, a szokásos eljárásoktól valamelyest más megközelítésű becslési módszert arra vonatkozóan, hogyan becsülhetjük meg kategória változók populációbeli valószínűségeloszlását megadó paramétereket bizonyos mintavételi adottságok esetén. Az első lépésben a vizsgált kategória mintában levő gyakoriságának eloszlását határozzuk meg a paraméterre felvett valamilyen érték mellett. A konkrét számítási eljárás függ a mintavételi módtól. A második lépésben a paramétert becsüljük meg a gyakoriság eloszlásának számításához használt különböző paraméter értékek súlyozott átlaga alapján, ahol a súlyok a gyakoriság eloszlásából kaphatóak meg. Ezt a módszert leginkább az utasforgalom felméréséből történő becslésnél látjuk alkalmazhatónak az eddig szokásos arányos becslés helyett, főleg olyan esetekben, amikor a minta kicsi. A módszer matematikailag mindenképpen megalapozottabbnak látszik, mint az eddig használt módszer, és akár standard hibát, akár konfidencia intervallumot lehet számolni a módszerhez kapcsolódóan kialakított modell keretein belül, ismerve a vizsgált kategória gyakoriságának mintabeli eloszlását.

A súlyozott átlaggal számolt becslési módra nem találtunk irodalmat, ezért a statisztikai tulajdonságait a későbbiekben vizsgálni tanácsos akár elméletileg, akár generált minták alapján. A cikkben erre nem tértünk ki, nem is történtek ilyen irányú vizsgálatok, számítások.

Az írás célja volt az is, hogy a módszer alkalmazása a számítási eljárás járművön történő felmérés esetére be legyen mutatva, valamint gyakorlati példán az általa kapott eredmények is.

A kapott eredményeket az alkalmazott összehasonlító módszerrel összevetve az látszik, hogy jónak vehető minta esetén a kétféle módon kapott értékek közel esnek egymáshoz. Gyengébbnek tartott mintánál egyes esetekben jelentősebb eltérés is adódik. Mivel jó mintáknál a két eredmény közel esett egymáshoz, ezért más minták esetén is feltételezhetjük, hogy a módszerrel kapott eredmények elfogadhatók, különösen akkor, ha a standard hiba kis értéknek adódik. (A mintában a megállók leszálló utasszámainak rögzítése miatt a becsült értékre ugyan kisebb standard hiba adódik, de ennek ellenére azt iránymutatónak gondoljuk.) Az eredmények alapján erősen állítható, hogy a módszer ugyanolyan, sőt pontosabb eredményt ad, mint a szokásos eljárás, ráadásul akkor is kapható becslés ez alapján, ha nem volt mintavétel a vizsgált megállók között.

A bemutatott módszer nagyobb számolási igényű, mint egy egyszerű felszorzás valamilyen aránnyal, vagy akár valamilyen heurisztikus eljárás alkalmazása. Ha nem is mindegyik megállóra, de a fontosabb megállóknál alkalmazásra javasolható.

Nem gondoljuk, hogy a modellben a mintavételnek teljesen a valóságban történtek szerint kell lennie. A szúrópróbaszerű érzékenység vizsgálat alapján úgy tűnik, hogy nem kell pontosan a valóságban történt mintavételt leutánozni, csak egy, a ténylegeshez közeli helyzetet kell leírni, és arra végezni el a számítást.

Hivatkozások

[1] Böjthy Barbara Adrienn: *Sztochasztikus mátrixok és Markov-láncok.* Bsc szakdolgozat (2013), `www.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak`

[2] Yongyuth Chaiyapong: *Estimation of Proportion of a Finte Population* 2012. **10(1)** Thailand Statistician

[3] Wai-Ki Ching, Shu-Qin Zhang, and others: *On Multi-dimensional Markov Chain Models*, `www.hkumath.hku.hk/~imr/IMRPreprintseries/2006/IMR2006-21.pdf`, Pacific Journal of Optimization 2007

[4] Warrent Dent, Richard Ballintine: *A Review Of Estimation of Transition probabilities In Markov Chains.* The Australian Journal Of Agriculture Economics Vol. **15** No. **2**, (1971)

[5] T.R. Fleming – D.P. Harrington: *Estimation for Discrete Time nonhomogeneous Markov Chains.* Stochastic Processes and their Applications **7**, (1978) 131–139.

[6] Su-Lien Lu: *Using a Multivariate MarkovChain Model For Estimating Credit Risk: Evidence from Taiwan*, Advances in Managment & Applied Economics Vol. **2** No. **4**, (2012).

[7] Yutong Li, Hongxing Yang: *First Order Multivariate Markov Chain Model for ....* International Refrigeration and Air Conditoning Conference at Purdue (2008), `http://docs.lib.purdue.edu/iracc`.

[8] Steven Stern: *Simulation-Based Estimation and Inference and Random Parameter models.* `www.people.stern.nyu.edu/wgreen/Lugano2013` ????

[9] Steven Stern: *Simulation-Based Estimation.* (1997) `www.people.virginia.edu`

[10] Takács Szabolcs: *Érzékenységvizsgálatok a statisztikai eljárásokban.* Alkalmazott Matematikai Lapok **29** (2012).

[11] Iuliana Teodorescu: *Maximum likelihood Estimation For Markov Chains.* `www.arxiv.org/pdf0905.4131.pdf`

[12] *Hypergeometric distribution.* `www.math.uah.edu/stat̆s/urn/introduction.html`

[13] Wai-Ki Ching and others: *A New Multivariate Markov Chain Model with Applications to Sales Demand Forcasting.* International Conference on Industrial Engeneering and System Managment (2007) Beijing, `www.hkumath.hku/~imr/.../2007/IMR2007-17.pdf`

[14] *A new Multivariate Markov Chain Model for Adding a New Categorical Data Sequence.* `http://www.hindawi.com/journals/mpe/2014/502808`

[15] Samuel Karlin, Howard M. Taylor: *Sztochasztikus folyamatok.*

[16] E.L. Lehmann: *Elements of Large Sample Theory.* Springer

[17] *Chapter 1: Bootstrap Method.* `www.math.ntu.edu.tw/~hchn/LargeSample/...`

[18] Sajtos László – Mitev Ariel: *SPSS Kutatási és adatelemzési kézikönyv.* Alinea Kiadó

[19] Wai-Ki Ching, Michael K. Ng: *Markov Chains Models.* Algorithm and Applications Springer (2006) Science + Business Media, `www.down.cenet.org/upfile/28/2007......pdf`

[20] *EMAH – Ökomobilitás elősegítése az osztrák-magyar határtérségben*; tanulmány, Közlekedéstudományi Int. (2014). Témavezető: Virág Álmos

[21] Vass Lajos: *Másféle megközelítés utazási jellemzők gyakoriságának becslésében a célforgalmi felmérésből.* Közlekedéstudományi Int., Évkönyv 2011–12.

[22] Vass Lajos: *A helyi és helyközi tömegközlekedési forgalom keresztmetszeti felmérésének konverziója valószínűségi módszerrel.* Közlekedéstudományi Szemle 2001. 01.

(Beérkezett: 2016. szeptember 20.)

Vass Lajos 1948-ban született. Az ELTE-n okleveles fizikusként végzett. A Közlekedéstudományi Intézetnek volt főmunkatársa, most már visszavonult.
1992-től az Intézetben a közlekedési (áruszállítási, személyszállítási) adatok feldolgozásával, kiértékelésével foglalkozott, valamint a kiértékeléshez használható matematikai módszerek, elsősorban matematikai-statisztikai módszerek alkalmazásával, kidolgozásával.
Számos tanulmány elkészítésében közreműködő, illetve társszerző volt. A módszerek alkalmazásával kapcsolatban néhány (5 db) cikket jelentetett meg itthoni lapokban.

Az Intézeti munkájának elismeréséül a „KTI-ért” díjat kapta (kétszer) munkahelyétől, valamint a szakminisztériumtól „Közlekedésért” érmet kapott miniszteri kitüntetésként.

1992 előtt az előző munkahelyein, a Csepel Művek fejlesztési, kutatási és tervező intézeteiben dolgozott. Gyártási hiba keresésére és anyagvizsgálati adatok kiértékelésére szintúgy matematikai-statisztikai módszereket használt (többváltozós lineáris regressziót, clusteranalízist, stb.). Számítógépes modellezést is végzett fizikai folyamatokra tervezési munkák segítéséhez. Spektrometriás kiértékelési progam kifejlesztéséért kollégájával fiatal kutatók akadémiai elismeréseként Erdey Ferenc-díjat kapott.

VASS LAJOS
KTI Közlekedéstudományi Intézet

A PROBABILITY METHOD FOR THE ESTIMATION OF TRIP CHARACTERISTICS FROM PASSENGER SURVEYS

Lajos Vass

The paper introduces an estimation procedure that is different from the mainstream and widely-used methods for calculating distribution and parameters of categorical variables. This procedure is based on sampling distribution of the frequency of analyzed category, calculated in function of the parameter. The estimator of the parameter is weighted average of parameter values used for calculation, in which weighting factors are the probabilities of the frequency observed in the sample, obtained with different values.

Essential point is modeling sampling and how to calculate distribution on the base of the model. As it has been developed to help the analysis of passenger trip characteristics, its application may be useful for estimations on the basis of passenger surveys. It might be useful especially for small samples. The paper describes the method and calculation techniques for a special survey – questionnaires on-board public transport vehicles – and an application is presented here through a real-life example.

Alkalmazott Matematikai Lapok **34** (2017), 73–95

EGY NEMLINEÁRIS VEGYES-EGÉSZÉRTÉKŰ OPTIMALIZÁLÁSI FELADAT KÜLÖNFÉLE MODELLJEINEK KOMPARATÍV ELEMZÉSE

DOBJÁNNÉ ANTAL ELVIRA ÉS VINKÓ TAMÁS

Egy optimalizálási feladat megoldásának sebességét sokféle tényező befolyásolhatja, többek között az adott feladat mérete (beleértve a változók és a korlátok számát is), típusa (lineáris, egészértékű stb.), a megoldó algoritmus, valamint a reprezentáció módja (beleértve az alkalmazott adatstruktúrákat és a matematikai modellt is). Jelen tanulmányt egy hálózati folyam probléma matematikai modelljének felírása kapcsán felmerülő kérdések ihlették.

A cikkben azt vizsgáljuk, hogy egy konkrét, nagyméretű lineáris és nemlineáris vegyes-egészértékű programokat is magában foglaló optimalizálási feladat megoldásának sebességét mennyiben befolyásolja különféle modellezési technikák alkalmazása. Egy elosztott tartalommegosztó hálózat max-min méltányos erőforrás-elosztásának kiszámítását célzó modell tizenkét változatát hasonlítjuk össze egy kiterjedt numerikus tesztelés során, két professzionális megoldó és huszonhét nagyméretű tesztfeladat felhasználásával.

Reményeink szerint a közölt eredmények túlmutatnak a konkrét problémán, és árnyaltabb képet adnak más hasonló feladatok megértéséhez is.

1. Bevezetés

Élőkép interneten történő közvetítésére számos megoldás létezik. Amennyiben a skálázhatóság kérdése fölmerül, gyakran az elosztott módon működő módszerek adnak minőségi választ. Egy ilyen lehetséges módszer a BitTorrent protokollon alapszik [4]. A BitTorrent eredetileg egy tartalommegosztó rendszer, amely elsősorban nagyméretű fájlok hatékony hozzáférését segíti elő [5, 8]. Kiderült azonban, hogy a protokoll részleteinek megfelelő módosításával lehetőségünk van élő közvetítésre (live streaming), illetve video-on-demand szolgáltatások támogatására is [7, 6, 15, 13, 12].

Míg a hagyományos tartalomletöltésnél a felhasználók igénye elsősorban a letöltés sebességére vonatkozik (minél gyorsabb, annál jobb), addig a letöltés közbeni megtekintés vagy meghallgatás jellegű szolgáltatásoknál minden felhasználóra a számára elérhető lehető legjobb minimális letöltési sebességet kell garantálnunk.

Jelen cikkben ez utóbbi feladatra fókuszálunk. A feladat, bizonyos feltételek kikötése mellett, megfogalmazható egy speciális szerkezetű gráfon értelmezett nemlineáris vegyes-egészértékű optimalizálási feladatként. Ennek részletes leírását az [1] cikkben találhatjuk meg. Mivel a vizsgált feladat megoldására javasolt iterációs módszer számos részletet és modellezési meggondolást tartalmaz, ezért természetesen adódik a kérdés: vajon milyen tényezők befolyásolják a megoldás sebességét? Jelen cikkben összegyűjtöttük a lehetséges opciókat, amelyeket részletes numerikus vizsgálatoknak vetettünk alá. Bár a feladat specifikus, meggyőződésünk, hogy az elvégzett numerikus tesztek által kapott eredmények általánosabb érvényű empirikus képet adnak a hasonló típusú problémák számítógépes megoldási lehetőségeire.

A következőkben először megadjuk a legfontosabb fogalmakat, valamint a használt hálózati modellt (2. szakasz). Ezután röviden ismertetjük az [1] cikkben javasolt iterációs módszert, továbbá a lehetséges algoritmus változatok egy bőséges listáját (3. szakasz). A felhasznált tesztesetek leírását (4. szakasz) a numerikus eredmények diszkussziója követi (5. szakasz).

2. Max-min méltányos erőforrás-elosztás problémája

Ebben a fejezetben bevezetjük a legszükségesebb definíciókat, amelyek egyrészt megadják a vizsgált feladat felhasználási területét, másrészt leírják a vizsgált optimalizálási algoritmus bemeneteként szolgáló folyam hálózatot.

Mint azt a bevezetőben említettük, a vizsgált feladat egy elosztott tartalommegosztó rendszerben előforduló erőforrás-elosztás problémaköréhez tartozik. Ez a rendszer a BitTorrent. Jelen cikk szempontjából nézve a rendszernek három fő komponense van: letöltők (*leecher*ek), megosztók (*seeder*ek) és a megosztott fájlok (ezeket gyakran *torrent*eknek is nevezzük, amely valójában a megosztott tartalom technikailag fontos jellemzőit leíró meta fájl, de az elnevezés nem lesz félreérthető). A BitTorrent a fájlokat darabokra osztja. Egy adott fájlra nézve a megosztók halmaza azon felhasználókat tartalmazza, akik rendelkeznek a fájl összes darabjával. Fontos szempont, hogy a letöltők is tudnak egymás között darabokat cserélni, így a letöltés közben egyben feltöltőként is szolgálják a rendszer működését. Pontosan ez az az ötlet, amitől a BitTorrent rendkívüli módon jól skálázható [5]. A továbbiakban *BitTorrent közösség* alatt felhasználók (leecherek és seederek), valamint fájlok egy rögzített halmazát értjük.

Capotă és szerzőtársai [3] nyomán egy BitTorrent közösség aktuális állapotát – vagyis, hogy egy adott időpillanatban ki kinek tölthet fel, milyen adatátviteli korlátok érvényesek, stb. – egy speciális hármas gráf reprezentációval írhatjuk le. Ezt az irányított, súlyozott hármas gráfot $G = (\{U, L, D\}, E, f, c)$ jelöli. A közösség alapvető elemei a felhasználók halmaza (I) és a torrentek halmaza (T). Minden $i \in I$ felhasználó rendelkezik μ_i feltöltési kapacitással és δ_i letöltési kapacitással, továbbá

$U = \{\, u_i \mid i \in I\}$: a *feltöltő csúcsok* halmaza, ahol u_i az i felhasználó feltöltési (seeding vagy leeching) potenciálját reprezentálja;

$D = \{\, d_i \mid i \in I\}$: a *letöltő csúcsok* halmaza, ahol d_i az i felhasználó letöltési (leeching) potenciálját reprezentálja;

$L = \{\, l_i^t \mid i \in I,\, t \in T\}$: a *leeching csúcsok* halmaza, ahol az l_i^t (ún. *leeching session*) létezése azt jelöli, hogy az i felhasználó éppen leech-eli, letölti a t torrentet;

E : az élek halmaza; $E = E_U \cup E_D$, ahol $E_U = \bigcup_{i,j,t}(u_i, l_j^t)$ a *feltöltő élek* halmaza, és $E_D = \bigcup_{j,t}(l_j^t, d_j)$ a *letöltő élek* halmaza;

$c : U \cup L \cup D \to \mathbb{N}$: a *kapacitás függvény*, amely a résztvevők sávszélesség-korlátait reprezentálja:

$$c(u_i) = \mu_i,\ c(d_i) = \delta_i,\ c(l_i^t) = \infty;$$

$f : E \to \mathbb{R}^+$: a *folyam függvény*, a kiosztott sávszélességet reprezentálja azokon az éleken, amelyek kielégítik a *folyammegmaradási tulajdonság*ot:

$$\sum_{u_i \in U} f(u_i, l_j^t) = f(l_j^t, d_j) \qquad \forall l_j^t \in L,$$

valamint a *kapacitás korlátok*at:

$$\sum_{l_t^j :\, (u_i, l_j^t) \in E_U} f(u_i, l_j^t) \le \mu_i \qquad \forall u_i \in U,$$

$$\sum_{l_j^t :\, (l_j^t, d_j) \in E_D} f(l_j^t, d_j) \le \delta_j \qquad \forall d_j \in D.$$

Célunk minden $(l_j^t, d_j) \in E_D$ élre a *max-min méltányos erőforrás-elosztás* meghatározása, vagyis minden egyes letöltő élre a lehető legnagyobb folyam kiszámítása, figyelembe véve, hogy egy letöltő élen sem növelhető a folyam értéke olyan áron, hogy egy tőle kisebb folyammal rendelkező letöltő élen csökkentjük azt. Ez tulajdonképpen a Pareto-optimális erőforrás-elosztás egy rokon feladata [14]. A formális definíció megtalálható pl. [3] és [14] cikkekben.

3. A probléma megoldása; modellátírási lehetőségek

A max-min méltányos erőforrás-elosztás kiszámítását célzó algoritmus kiindulási alakját *a 3.1. algoritmus* tartalmazza. A korábbi cikkünkben [1] bemutatott megoldás tulajdonképpen Radunović és Le Boudec általános max-min programozási algoritmusának [14] a feladatra adaptált változata. A letöltési élek max-min méltányos folyamait iteratív módon számítjuk: minden iterációban a legkisebb, még nem rögzített folyammal rendelkező letöltő élekre állapítjuk meg a minden korlátot kielégítő legnagyobb folyam értékét. A halmazokat nagy betűkkel, az optimalizálási feladatok döntési változóit kis betűkkel, míg a paramétereket (a rögzített értékkel bíró változókkal egyetemben) görög betűkkel jelöljük.

3.1. Algoritmus. mMaxMin

1. **Alsó korlát számítása a folyam értékekre.** MM_0 megoldása:

$$\max f,$$
$$\text{f.h. } f(l_j^t, d_j) \geq f \qquad \forall (l_j^t, d_j) \in E_D.$$

A minimális folyam érték eltárolása. Legyen $\phi := f$.

2. **Maximális átvitel számítása.** Az MM_{MaxFlow} -val jelölt LP-feladat megoldása:

$$\max \sum_{(l_j^t, d_j) \in E_D} f(l_j^t, d_j),$$
$$\text{f.h. } f(l_j^t, d_j) \geq \phi \qquad \forall (l_j^t, d_j) \in E_D.$$

Optimum eltárolása. Legyen $\sigma := \sum_{(l_j^t, d_j) \in E_D} f(l_j^t, d_j)$.

3. **Inicializálás.** Legyen $F := \emptyset$, $k := 1$, $E_1 := E_D$, $\forall (l_j^t, d_j) \in E_D : \ell_j^t := 0, \phi_0 = 0$.

4. **LP-megoldás (max-min folyam érték kiszámítása).** Az $mMM_k^{(1)}$ -gyel jelölt LP-feladat megoldása:

$$\max f_k, \tag{1}$$
$$\text{f.h. } \sum_{(l_j^t, d_j) \in E_k} f(l_j^t, d_j) + \sum_{(l_j^t, d_j) \in (E_D \setminus E_k)} \ell_j^t \geq (1 - \epsilon) \cdot \sigma$$
$$f(l_j^t, d_j) \geq f_k \qquad \forall (l_j^t, d_j) \in E_k.$$

Optimum eltárolása. Legyen $\phi_k := f_k$.

5. **Előmegoldás (max-min folyammal rendelkező élek kiválasztása).**

$$E_{k_f} := \left\{ (l_j^t, d_j) \in E_k \;\middle|\; \frac{c(d_j) - \sum_{(l_j^t, d_j) \in (E_D \setminus E_k)} \ell_j^t}{deg_k^-(d_j)} = \phi_k \right\},$$
$$x_j^t := 0,\ \forall (l_j^t, d_j) \in E_{k_f}.$$

A $deg_k^-(d_j)$ a d_j azon bemenő éleinek száma, amelyek E_k elemei. Ha $|E_{k_f}| \neq 0$, ugrás a 7. lépésre.

6. **MINLP-megoldás (max-min folyammal rendelkező élek kiválasztása).** Az $mMM_k^{(2)}$-vel jelölt vegyes-egészértékű bilineáris programozási feladat megoldása:

$$\max \sum_{(l_j^t, d_j) \in E_k} x_j^t,$$
$$\text{f.h. } \sum_{(l_j^t, d_j) \in E_k} f(l_j^t, d_j)\, x_j^t + \phi_k \cdot \sum_{(l_j^t, d_j) \in E_k} (1 - x_j^t) + \sum_{(l_j^t, d_j) \in (E_D \setminus E_k)} \ell_j^t = (1 - \epsilon) \cdot \sigma_k, \tag{2}$$
$$f(l_j^t, d_j) \geq \phi_k \qquad \forall (l_j^t, d_j) \in E_k,$$
$$f(l_j^t, d_j) > \phi_k\, x_j^t \qquad \forall (l_j^t, d_j) \in E_k,$$

ahol $x_j^t \in \{0, 1\}$.

7. **Fixálás (kiválasztott éleken folyam rögzítése).** A ϕ_k-ra vonatkozó aktív korlátok kikeresése, és a kapcsolódó letöltő éleken a folyam értékek rögzítése:

$$\Phi_k := \left\{(l_j^t, d_j) \in E_k \mid x_j^t = 0\right\},$$

$$\ell_j^t := \phi_k,\ \forall (l_j^t, d_j) \in E_k \text{ ahol } x_j^t = 0,$$
$$F := F \cup \Phi_k, \quad E_{k+1} := E_k \setminus \Phi_k.$$

8. **Megállási feltétel.** Ha $F = E_D$, megállunk. Különben $k := k+1$ és ugrás a 4. lépésre.

Az algoritmus 1. lépésében egy jó alsó korlátot számítunk a folyam értékekre, ezt a 4. lépésben használjuk majd fel. A 2. lépésben meghatározzuk a hálózat maximális átvitelének mértékét abban az esetben, amikor minden letöltő élre az $f(l_j^t, d_j) \geq \phi$. Korábbi cikkünkben megmutattuk, hogy ez a σ-val jelölt szint az algoritmus minden iterációjában biztosítható. A következő lépésben inicializálunk: az F halmaz kezdetben üres, ez tartalmazza majd a rögzített folyam értékek azonosítóit; k a ciklusváltozó; E_k a k. iterációban rögzítetlen folyammal rendelkező élek halmaza; az utolsó iteráció után pedig ℓ_j^t tartalmazza minden $(l_j^t, d_j) \in E_D$ letöltő élre az optimális folyam értékét. A 4. lépésben kiszámítjuk a rögzítetlen folyamok max-min értékét, továbbá egy jó kezdő (fízibilis) megoldást a 6. lépés speciális MINLP-jéhez. Az 5. lépés egyfajta előmegoldás, szerepét a 3.5. alszakaszban részletesebben bemutatjuk. Ez a lépés el is hagyható. A 6. lépésben állítjuk elő azt a max-min méltányos elosztást, ami egyúttal a σ átvitelt is garantálja (ϵ toleranciával, amit a lehetséges numerikus hibák miatt engedünk meg). Ennek a MINLP-nek a célja, hogy a 4. lépésben meghatározott max-min értéket a lehető legkevesebb élre rögzítsük egy-egy iteráció 7. lépésében. Végül, 4-től ismételjük a lépéseket, amíg minden élre meg nem határoztuk a max-min méltányos allokációt.

A 3.1. algoritmusnak természetesen sokféle variációja képzelhető el, a megvalósítás során érdemes lehet különféle modellezési „trükköket" alkalmazni. Korábbi cikkünk munkálatai közben mi magunk is többféle változtatást eszközöltünk a hatékonyság növelése érdekében, azonban az egyes változtatások hasznosságának igazolására akkor nem kerülhetett sor. A következőkben számbavesszük az általunk javasolt módosításokat, az 5. szakaszban pedig elemezzük az ezen módosítások kombinációiból előálló modell-változatok hatékonyságát a futási idő és az elért optimum érték tekintetében.

3.1. Egy redundáns korlát hozzáadása

A 3.1. algoritmus 4. lépésében szereplő $mMM_k^{(1)}$ jelzésű LP feladathoz hozzáadhatjuk a következő korlátot:

$$f_k \geq \phi. \tag{3}$$

Antal és Vinkó [1] 3. lemmája alapján a (3) korlát redundáns, és csak az első iterációban aktív, mivel az (1) jelzésű célfüggvény és a 7. fixáló lépés együttesen kikényszeríti, hogy $f_k > f_{k-1}$ minden k iterációra. Ugyanakkor benyomásunk szerint az LP-megoldónak jelentős segítség, ha ez a fix alsó korlát is szerepel a feladatban.

3.2. Bilineáris vegyes-egészértékű feladat McCormick-átírása

A 3.1. algoritmus 6. lépésében szereplő $mMM_k^{(2)}$ jelzésű bilineáris programozási feladat helyettesíthető a McCormick-átírásával [11]. Ez az átírás egy ekvivalens vegyes-egészértékű lineáris programozási (MILP) feladatot eredményez, amelyben a bilineáris kifejezések helyére új, folytonos változókat vezetünk be:

$$p_j^t := f(l_j^t, d_j) \cdot x_j^t,$$

ahol $\forall (l_j^t, d_j) \in E_k : p_j^t \in \mathbb{R}^+$, továbbá $x_j^t \in \{0,\, 1\}$. Az $mMM_k^{(2)}$ feladat McCormick-átírása tehát a következő:

$$\max \sum_{(l_j^t, d_j) \in E_k} x_j^t,$$

$$\text{f.h.} \quad \sum_{(l_j^t, d_j) \in E_k} p_j^t + \phi_k \sum_{(l_j^t, d_j) \in E_k} (1 - x_j^t) + \sum_{(l_j^t, d_j) \in (E_D \setminus E_k)} \ell_j^t \geq (1 - \epsilon) \cdot \sigma, \tag{4}$$

$$f(l_j^t, d_j) \geq \phi_k \qquad \forall (l_j^t, d_j) \in E_k,$$

$$f(l_j^t, d_j) > \phi_k\, x_j^t \qquad \forall (l_j^t, d_j) \in E_k,$$

$$\min \big(\delta_j\, x_j^t,\; f(l_j^t, d_j)\big) \geq p_j^t \qquad \forall (l_j^t, d_j) \in E_k, \tag{5}$$

$$\max \big(0,\; f(l_j^t, d_j) - \delta_j\, (1 - x_j^t)\big) \leq p_j^t \qquad \forall (l_j^t, d_j) \in E_k, \tag{6}$$

vagyis az eredeti (2) jelzésű korlátot lecseréljük (4)-re, és kiegészítjük a feladatot az (5) és (6) korlátokkal.

Habár a probléma dimenziója nő az átírás folytán, egy egzakt korlátozás és szétválasztás típusú megoldó alkalmazható az előálló MILP globális optimumának megtalálására [2].

A következőkben az algoritmus 6. lépésében szereplő MINLP-, ill. MILP-feladatokra gyűjtőnéven MIP-ként fogunk hivatkozni.

3.3. Kezdőértékadás a bináris változókra

Az $mMM_k^{(1)}$ optimális megoldása leképezhető $mMM_k^{(2)}$ egy fízibilis megoldására. Legyen

$$f_k^{(2)}(l_j^t, d_j) := f_k^{(1)}(l_j^t, d_j),$$

és

$$x_j^t := \begin{cases} 1 & \text{ha } f_k^{(1)}(l_j^t, d_j) > \phi_k \text{ és } (l_j^t, d_j) \in E_k, \\ 0 & \text{ha } f_k^{(1)}(l_j^t, d_j) = \phi_k \text{ és } (l_j^t, d_j) \in E_k. \end{cases}$$

Itt $f_k^{(y)}(l_j^t, d_j)$ a kapcsolódó $f(l_j^t, d_j)$ folyam értékeket jelöli az $mMM_k^{(y)}$ egy fízibilis megoldásában. Az $mMM_k^{(2)}$ feladat megoldása során segítséget jelenthet a bináris változókra vonatkozó kezdőértékek explicit megadása.

3.4. Kezdőértékadás a McCormick-átírás mesterséges változóira

Az $mMM_k^{(2)}$ McCormick-átírásának kezdőértéke csakugyan előállítható $mMM_k^{(2)}$ kezdőértékéből. Ehhez $mMM_k^{(2)}$ kezdőértékét bővítsük a p változókra vonatkozó értékekkel:

$$p_j^t := \begin{cases} f_k^{(1)}(l_j^t, d_j) & \text{ha } x_j^t = 1 \text{ és } (l_j^t, d_j) \in E_k, \\ 0 & \text{ha } x_j^t = 0 \text{ és } (l_j^t, d_j) \in E_k. \end{cases}$$

3.5. Előmegoldás, avagy folyamok rögzítése a folyammegmaradásra hivatkozva

A 3.1. algoritmus 5. lépése egy, az AMPL-előmegoldójában is megvalósított standard LP-előmegoldó technika [9, 10]. Az

$$E_{k_f} := \left\{ (l_j^t, d_j) \in E_k \;\middle|\; \frac{c(d_j) - \sum_{(l_j^t, d_j) \in (E_D \setminus E_k)} \ell_j^t}{deg_k^-(d_j)} = \phi_k \right\}$$

halmaz azokat a letöltő éleket tartalmazza, amelyekre a kapcsolódó $f(l_j^t, d_j)$ folyam értékek egyértelműen kiszámíthatóak a hálózat folyammegmaradási tulajdonsága alapján. A fenti kifejezésben $deg_k^-(d_j)$ a d_j csúcs azon bemenő éleinek számát jelöli, amelyeken a k. iterációban még nincs rögzített folyam.

Pontosabban, E_{k_f} minden elemére rögzíthető a ϕ_k folyamérték az algoritmus k. iterációjának 7. lépésében, méghozzá a 6. lépésben szereplő MIP megoldásától függetlenül. Ennek megfelelően az előmegoldást tartalmazó modellekben kimarad a MIP megoldása, amennyiben $E_{k_f} \neq \emptyset$ valamely k. iterációban.

Ha lenne olyan letöltő él, amelyre ϕ_k értékű folyamot kellene rögzíteni, de az előmegoldó ezt nem tudja megállapítani, úgy a következő iterációban ϕ_{k+1} értéke meg fog egyezni ϕ_k-val és a MIP megoldásra kerül. Legrosszabb esetben az iterációk számának duplázásával is járhat ez a megoldás, azonban az általunk tesztelt esetekben az iterációk jelentős részében minden szükséges fixálás megtörtént az előmegoldási fázisban, és csak az esetek töredékében volt szükség a MIP megoldására.

3.6. Modellváltozatok

A fent bemutatott módosítási javaslatok kombinációiból összesen tizenkettő modellváltozatot készítettünk, hogy a módosítások hasznosságát külön-külön, ill.

1. táblázat. *A vizsgált modellek áttekintése*

Modell	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5
ref	•	•	•	•	•
1	•	•	•	•	
2	•	•	•		
3	•	•			
4	•				
5					
6			•		
7	•		•		
8	•		•		•
9			•		•
10	•				•
11					•

együttesen elemezni tudjuk (eredmények az 5. szakaszban). Az 1. táblázat összefoglalja, hogy melyik modell melyik korábbi alszakasz(ok)ban bemutatott módosítást tartalmazza. Referenciaként (**ref**) a korábban publikált matematikai modell [1] szolgált, amely minden módosítást tartalmazott, a többi modellt számokkal jelöltük.

4. Tesztesetek

Ahhoz, hogy a különböző algoritmusvariánsokkal numerikus hatékonysági vizsgálatokat készíthessünk, számos mesterségesen generált hálózatot készítettünk. Ebben a szakaszban ezen teszthálózatok előállításának módszereit közöljük.

Alapvetően három, lényegileg különböző típusú hálózatot gyártottunk, amelyek a következők:

Túlkereslet: Ebben az esetben a közösségben elérhető fájlok egy részét sokkal többen akarják letölteni, mint amennyien a teljes tartalommal rendelkeznek. A BitTorrent fogalmai szerint tehát ilyenkor nagyon sok letöltő és ehhez képes nagyon kevés megosztó van jelen. A hálózatokat úgy gyártottuk, hogy a fájlok véletlenszerűen választott 10%-ában legyen túlkereslet. Konkrétan a felhasználók fele letöltőként van jelen a kiválasztott tíz százalékban. Megjegyezzük, hogy ezek a felhasználók emellett letöltőként vagy feltöltőként részt vehetnek más fájlokban is. Az ilyen állapot általában akkor fordul elő valós BitTorrent közösségekben, amikor megjelennek rendkívül népszerű tartalmak, amire hirtelen nagyon sokan kíváncsiak.

Egyenletes: Itt minden fájlra teljesül egyfajta egyensúly, nagyjából ugyanannyi a letöltő, mint a megosztó.

Túlkínálat: Itt pedig a közösségben elérhető fájlokat sokkal többen kínálják letöltésre, mint amennyien azt ténylegesen le is töltik éppen. Tehát több megosztó van, mint letöltő. Érdekes módon valós BitTorrent közösségekben ez az állapot az, amely a legtöbbször előfordul. Ennek részben az a magyarázata, hogy az ilyen közösségekben a rögzített szabályok egyike általában előír bizonyos időtartamig történő rendelkezésre állást (seedelést), vagy pedig azt, hogy a letöltött mennyiség valamely részét fel kell tölteni a rendszerbe. Ez utóbbi hosszas időt vehet igénybe abban az esetben, ha a fájlra már csak csekély az érdeklődés.

Típusonként 9 teszthálózatot gyártottunk, amelyekben a felhasználók száma 100, 300 és 500 volt, míg a torrentek száma rendre 50, 100 és 200. Ami a sávszélességeket illeti (amely a folyam hálózatban az élek kapacitását jelenti), mindegyik hálózatban véletlenszerűen választottunk értékeket, egyenletes eloszlással, mégpedig a feltöltő élekre a $[128, 2048]$ intervallumból, míg a letöltő élekre az $[512, 4096]$ intervallumból. A gráfok méretét a 2. táblázatban foglaltuk össze. Vegyük észre, hogy minden gráfban a pontok száma jelentősen több, mint a felhasználók és torrentek száma. Ennek a magyarázata, hogy bemenetként nem páros gráfot kell megadnunk, hanem a 2. fejezetben említett hármas gráfot, amelyben elsősorban a köztes (L halmazba tartozó) csúcsok száma lesz magas.

2. táblázat. *A teszteléshez használt gráfok csúcsainak száma (n) és éleinek száma (m)*

	egyenletes		**túlkereslet**		**túlkínálat**	
user-torrent	n	m	n	m	n	m
100-50	653	10 447	307	3 850	827	24 229
100-100	1 172	21 734	513	8 111	1 561	48 872
100-200	2 135	40 206	919	16 201	2 992	99 686
300-50	3 279	255 412	963	37 082	2 571	218 375
300-100	5 837	523 330	1 603	75 338	4 664	433 011
300-200	10 748	1 015 084	2 710	142 701	14 782	2 407 987
500-50	1 913	85 316	1 597	101 097	4 252	598 766
500-100	3 395	175 709	2 626	204 077	7 827	1 203 877
500-200	6 376	357 693	4 690	411 916	14 818	2 417 266

A valós BitTorrent közösségekből származtatható gráfok az itt vizsgáltaknál jóval nagyobb méretűek, ugyanakkor nem feltétlenül reprezentálnak olyan eseteket, amelyeket itt vizsgáltunk. A kisebb méret továbbá lehetővé teszi, hogy kivárható időn belül legyen megoldásunk.

5. Eredmények

5.1. Tesztkörnyezet leírása

A hálózat összetételének, valamint a megoldás során alkalmazott matematikai modellnek a megoldó (solver) program hatékonyságára gyakorolt hatását szerettük volna megállapítani, ezért kiterjedt numerikus tesztelést végeztünk. A 3. szakaszban bemutatott *tizenkettő modellváltozat*, a 4. szakasz *huszonhét teszteset*e és *kettő professzionális megoldó* minden lehetséges kombinációjára *három futtatás*t végeztünk.

Az algoritmus-variánsok AMPL-nyelven voltak kódolva. A Gurobi- és a MOSEK-solvert vettük górcső alá, mivel ez a két általános nemlineáris megoldó állt rendelkezésünkre, amelyek a szóban forgó modellek optimalizálási feladatait kivárható időn belül meg tudták oldani. Mindkét megoldót az alapértelmezett paraméterekkel működtettük. A tesztek egy 24 magos Intel Xeon $2,27$ GHz-es számítógépen futottak, ahol 24 GB memória állt rendelkezésre.

5.2. Gurobi

A 3–5. táblázatok a Gurobi-megoldóval elért átlagos futási időket mutatják a különböző feladatosztályokra. Megjegyezzük, hogy bizonyos modell–teszteset–megoldó kombinációkra, valószínűleg a feladat bonyolultságából adódó nagy tárigény miatt, mindhárom futtatáskor szegmentálási hibával állt le az AMPL. Ezeket az eseteket „n.a." jelöli a táblázatokban.

A megértés segítésére minden további táblázatra vetítettünk egy, az adatokból készült hőtérképet is, a következő színskála alapján:

0		50		500		5 000		50 000		500 000

Továbbá minden oszlopban aláhúzással jelöltük a minimumot.

Mindenekelőtt szembeötlő, hogy a hálózat felépítése rendkívüli mértékben befolyásolja a megoldó sebességét. Az egyenletes típusú hálózatokra lehetett a leggyorsabban kiszámítani a max-min méltányos erőforrás-elosztást, a futási idő átlaga itt 475 másodperc volt. A túlkeresletet mutató hálózatokban az átlagos futási idő egy nagyságrenddel nagyobb, 5 380 másodperc volt, míg a túlkínálatot mutató hálózatokon dolgozott legtovább a megoldó, átlagosan ismét egy nagyságrenddel tovább, 41 940 másodpercig.

Az 1–3. algoritmusvariánsok minden tesztesetre a leglassabbnak bizonyultak, a 2. és 3. variáns több esetben szegmentálási hibával állt le. Az 1. variáns az 5.-hez képest átlagosan 59%-kal lassabban futott, a referenciához viszonyítva tehát átlagosan több, mint négyszeres futási időt igényelt. Ugyanakkor a 8. variáns a referenciához viszonyítva átlagosan 4%-kal rövidebb futási időket produkált.

3. táblázat. *A futási idő átlaga Gurobi-megoldóval a túlkeresletet mutató hálózatokra (másodperc)*

	100-50	**100-100**	**100-200**	**300-50**	**300-100**	**300-200**	**500-50**	**500-100**	**500-200**
ref	10,07	18,19	45,94	325,74	673,29	1 646,35	1 571,61	4 156,12	10 037,23
1	24,70	52,59	163,54	1 005,58	2 893,92	10 131,24	6 372,63	22 021,62	74 968,79
2	24,28	57,54	178,90	1 032,78	n.a.	11 193,77	6 662,24	24 129,19	81 453,34
3	24,37	55,31	171,21	1 014,39	n.a.	11 223,16	6 696,87	26 537,26	n.a.
4	19,95	34,52	106,72	637,97	1 550,51	4 406,24	3 417,54	9 616,70	24 960,11
5	19,40	36,94	119,00	624,85	1 611,28	4 884,42	3 544,83	9 812,69	26 715,23
6	19,25	36,23	109,95	599,36	1 982,60	6 648,88	3 290,78	8 479,57	22 512,50
7	16,08	27,04	90,44	574,74	1 880,29	6 200,34	3 089,95	7 892,06	20 627,51
8	8,68	14,76	42,13	304,23	696,97	1 854,49	1 626,95	4 081,75	10 172,45
9	9,15	17,78	59,14	348,47	785,58	2 228,94	1 699,07	4 561,72	12 356,00
10	9,23	14,57	52,28	302,89	699,93	1 849,76	1 622,43	4 074,37	10 322,80
11	9,24	19,13	65,44	353,52	765,38	2 287,31	1 785,71	4 582,57	12 446,04

4. táblázat. *A futási idő átlaga Gurobi-megoldóval az egyenletes keresletet mutató hálózatokra (másodperc)*

	100-50	**100-100**	**100-200**	**300-50**	**300-100**	**300-200**	**500-50**	**500-100**	**500-200**
ref	1,78	3,26	6,78	52,74	95,49	202,50	240,21	506,27	1 229,56
1	4,39	8,71	17,19	130,11	238,36	529,75	567,47	1 281,63	3 038,54
2	4,43	9,87	20,11	125,07	264,64	623,30	657,11	1 365,29	3 352,50
3	4,44	9,52	20,73	136,39	254,63	618,02	654,93	1 303,40	3 355,22
4	3,40	6,87	14,39	103,26	199,23	492,47	449,93	1 411,48	2 837,84
5	3,31	6,88	14,69	101,57	201,26	707,21	454,40	1 241,90	2 699,43
6	3,07	6,72	15,03	93,24	200,98	590,48	449,03	1 179,65	2 359,24
7	3,03	6,61	15,03	98,02	198,27	590,40	442,46	1 096,27	2 488,53
8	1,55	3,26	7,83	50,19	107,44	230,83	217,54	750,42	1 315,50
9	1,59	3,14	7,83	46,81	106,70	258,43	220,95	506,30	1 125,56
10	1,54	3,30	7,56	50,32	106,27	235,28	244,48	487,59	1 162,61
11	1,54	3,14	8,39	50,98	106,82	269,73	208,76	495,27	1 156,44

5. táblázat. *A futási idő átlaga Gurobi-megoldóval a túlkínálatot mutató hálózatokra (másodperc)*

	100-50	100-100	100-200	300-50	300-100	300-200	500-50	500-100	500-200
ref	44,62	99,71	394,93	1 767,19	3 602,11	44 689,13	10 101,58	19 961,00	142 826,03
1	164,46	437,85	1 816,25	11 773,90	23 278,35	368 166,92	66 839,67	166 285,16	393 350,03
2	203,01	410,63	1 885,52	11 005,87	n.a.	369 862,33	67 409,98	171 311,61	400 560,57
3	204,05	417,74	1 743,20	11 535,95	n.a.	n.a.	61 739,13	169 778,28	n.a.
4	133,54	281,15	1 359,30	6 527,94	19 146,21	110 138,40	41 315,39	82 407,80	124 545,26
5	133,68	332,27	1 596,19	7 481,82	20 126,71	120 270,78	43 926,90	86 053,85	123 590,57
6	118,68	312,86	1 350,50	6 805,64	18 939,62	93 867,99	39 201,74	76 569,01	104 913,93
7	87,75	321,38	1 385,52	6 197,48	17 703,81	87 309,58	38 955,36	72 105,72	94 794,07
8	52,84	85,87	406,71	1 741,15	3 756,55	30 590,76	7 767,45	17 273,40	28 178,77
9	59,06	125,65	516,26	1 842,90	4 019,89	34 418,82	8 535,70	19 165,41	34 922,32
10	57,75	109,89	375,08	1 981,35	4 090,36	29 545,93	8 203,24	16 128,15	27 372,15
11	60,25	124,50	454,04	2 064,10	4 357,51	37 142,15	9 126,37	18 057,12	35 088,72

Megállapítható tehát, hogy *a 3.2. alszakaszban bemutatott McCormick-átírás* alkalmazása az előmegoldás nélkül jelentősen, de az előmegoldással együtt is kismértékben bonyolítja a feladatot.

A 3.4. alszakaszban felvázolt kezdőértékadás, az 1. és 2. variáns eredményeire alapozva, az esetek 84%-ában javított a futási időn, átlagosan 6%-kal.

A 3.3. alszakasz kezdőértékadása, a 2. és 3. variáns összevetése alapján a McCormick-átírással kombinálva tizenegy esetben, vagyis az összevethető esetek 50%-ában lassított némileg a megoldáson. Ugyanakkor az 5. és 6. variáns alapján, tehát csupán a kezdőértékadás hatását vizsgálva kedvezőbb a helyzet: az esetek 89%-ában gyorsabb volt a 6. variáns, átlagosan 6%-kal. Úgy tűnik továbbá, hogy a hálózat típusától függ a javulás nagysága: míg a túlkeresletet mutató példákban 1%-os lassulást eredményezett a kezdőértékadás, az egyenletes hálózatokban 6%-kal gyorsabb, míg a túlkínálatot mutató hálózatokban 12%-kal gyorsabb volt a 6. variáns. A 4. és 7., 10. és 8., valamint 11. és 9. variánsok futási idejét is összehasonlítva, a 3.3. alszakasz kezdőértékadását implementáló modellek átlagosan mintegy 3%-kal voltak gyorsabbak a kezdőértékadást mellőző, minden egyéb tekintetben megegyező variánsoknál.

A 3.1. alszakaszban bemutatott redundáns korlát hozzáadása a 4. és 5. variáns összehasonlításában 7 esetet leszámítva segít a Gurobinak, átlagosan mintegy 4%-kal futott gyorsabban a 4. variáns. Ebben a tekintetben azonban igen nagy a szórás, a legjobb esetben 30%-kal is gyorsabb volt a 4. variáns, a legrosszabb esetben azonban 13%-kal lassabb. A 10. és 11. variáns az előmegoldót is implementálja, ebben a kontextusban nagyobb hasznot hozott a plusz korlát: átlagosan

9%-kal gyorsabban futott a 10. variáns. A 6. és 7., valamint a 8. és 9. variánst is figyelembe véve átlagosan 6%-os javulást eredményez a futási idő tekintetében a 3.1. alszakaszban tárgyalt módosítás. Érdemes megfigyelni, hogy az egyenletes kínálatot mutató gráfokra csak kis mértékű javulást, ill. bizonyos esetekben lassulást eredményez ez a módosítás.

Mindhárom típusú hálózatban *a 3.5. alszakasz előmegoldóját megvalósító* öt algoritmusvariáns (a referencia és a 8-11.) produkálta a legrövidebb átlagos futási időket, a 8. és 10. variáns hasonló idővel a két leggyorsabb volt. A referencia algoritmus átlagosan 58%-kal gyorsabban futott, mint a 3. szakaszban bemutatott módosításokat nélkülöző 5. variáns, habár egyetlen esetben 16%-kal lassabb volt annál (az 500 felhasználót és 200 torrentet tartalmazó példán a túlkínálatos teszthalmazban). Összevetve a referencia algoritmust az 1. variánssal, továbbá a 8. és 7., 9. és 6., 10. és 4., valamint a 11. és 5. variánsok futási idejét, az előmegoldó beépítése 32–88%-kal (átlagosan 61%-kal) gyorsította meg a végrehajtást.

A megoldás minőségét tekintve nem volt jelentős különbség az egyes algoritmusvariánsok között. A többszöri futtatás eredményei is identikusak voltak, csak a futási idők különböztek.

A futási idők variációs koefficienseit mutatja a 6–8. táblázat. A variációs koefficiens tulajdonképpen az átlaggal normált szórás százalékos formája. A tesztesetek eltérő mérete miatt a szórást ebben az esetben nincs értelme összehasonlítani.

A Gurobi által igényelt futási idők átlagos variációs koefficiense mintegy 19% volt a teljes adathalmazra.

5.3. MOSEK

A 9–11. táblázatok a MOSEK-megoldóval elért átlagos futási időket mutatják. A Gurobival összehasonlítva ez a megoldó az esetek 65%-ában lassabb volt: a túlkeresletet mutató hálózatokra átlagosan 56%-kal, az egyenletes keresletet mutató hálózatokra 151%-kal, míg a túlkínálatot mutató hálózatokra átlagosan 20%-kal több időt igényelt, mint a Gurobi.

A hálózat felépítésétől itt is nagy mértékben függött a megoldó sebessége. Az arányok a Gurobihoz hasonlóak voltak: az egyenletes típusú hálózatok max-min méltányos erőforrás-elosztását átlagosan 884 másodperc alatt lehetett kiszámítani, a túlkeresletet mutató hálózatokra ugyanez 3 966 másodpercig tartott, a túlkínálatot mutató hálózatokra pedig átlagosan 34 649 másodpercig.

Érdekes, hogy a 4–7. algoritmusvariánsok produkálták a leggyorsabb futási időket, ugyanakkor a MOSEK ezekre a modellekre jelentősen eltérő optimumot talált mind a három teszthalmazban, mint a Gurobi. A többi esetben nem volt jelentős eltérés a különböző variánsok által talált optimumban. Felmerül a kérdés, hogy egyáltalán itt miről is van szó. Az algoritmus végeredményeként egy valós számokból álló vektort ad meg, amelynek hossza megegyezik az E_D letöltő élek halmazának méretével. Mivel a használt programok lebegőpontos műveleteket végeznek, ezért kerekítési hiba előfordulhat, amely befolyásolhatja a végeredményt.

6. táblázat. *A futási idő variációs koefficiense Gurobi-megoldóval a túlkeresletet mutató hálózatokra (százalék)*

	100-50	100-100	100-200	300-50	300-100	300-200	500-50	500-100	500-200
ref	37,03	33,80	18,61	27,12	20,64	25,82	18,35	23,75	22,83
1	34,34	37,36	16,41	21,98	20,05	21,80	17,62	20,01	25,10
2	27,51	40,27	18,49	21,23	n.a.	23,50	20,42	22,06	26,76
3	25,44	33,19	13,69	21,14	n.a.	19,76	21,31	21,88	n.a.
4	35,66	30,57	34,26	22,45	26,29	20,16	20,74	22,31	23,46
5	35,38	26,25	32,78	19,59	22,42	22,45	21,55	21,47	22,68
6	37,45	27,75	28,32	20,41	26,28	17,84	22,44	22,52	21,89
7	14,44	1,34	21,07	20,94	23,22	17,96	20,95	23,24	22,52
8	18,46	4,78	2,70	22,50	25,10	21,53	22,45	22,38	22,57
9	20,80	5,30	17,75	25,92	27,02	21,58	19,57	21,48	22,57
10	29,47	1,15	36,84	21,31	27,73	21,35	22,01	21,49	22,81
11	27,70	12,88	34,04	25,58	24,55	23,15	22,32	21,50	22,78

7. táblázat. *A futási idő variációs koefficiense Gurobi-megoldóval az egyenletes keresletet mutató hálózatokra (százalék)*

	100-50	100-100	100-200	300-50	300-100	300-200	500-50	500-100	500-200
ref	17,45	23,02	6,03	28,77	13,98	8,29	12,43	13,99	23,03
1	23,83	16,00	12,12	35,90	3,83	5,72	19,80	18,73	11,56
2	21,91	23,19	14,36	19,28	11,32	8,95	32,06	11,79	10,56
3	22,74	24,15	9,63	35,74	7,22	5,22	35,39	11,63	4,09
4	5,91	22,50	13,23	25,50	2,37	16,45	5,09	49,64	9,21
5	2,22	25,77	9,78	23,76	1,37	62,09	6,06	19,17	24,89
6	2,28	24,43	20,24	13,04	3,44	24,36	10,39	13,00	5,52
7	1,65	21,93	16,55	15,11	5,51	22,92	7,18	18,24	13,47
8	1,98	22,63	25,86	13,38	9,50	10,33	2,90	64,26	13,00
9	4,36	13,10	18,96	3,19	10,35	24,54	5,61	12,18	3,64
10	3,81	21,62	20,45	22,44	9,01	10,38	21,32	14,35	6,54
11	0,65	11,80	24,34	18,98	5,57	23,60	2,00	14,04	6,74

8. táblázat. *A futási idő variációs koefficiense Gurobi-megoldóval a túlkínálatot mutató hálózatokra (százalék)*

	100-50	**100-100**	**100-200**	**300-50**	**300-100**	**300-200**	**500-50**	**500-100**	**500-200**
ref	17,10	20,36	22,37	16,83	4,78	41,50	20,69	34,38	31,64
1	26,17	25,88	9,06	16,56	11,01	30,07	9,71	18,32	37,32
2	27,29	15,03	6,16	1,56	n.a.	42,28	1,98	15,26	36,69
3	25,43	20,85	12,53	11,36	n.a.	n.a.	5,83	20,39	n.a.
4	11,80	20,69	17,55	6,55	4,23	31,12	7,09	21,16	26,06
5	26,36	12,10	13,78	7,30	15,90	23,56	14,22	23,00	31,46
6	37,25	11,84	16,64	16,64	10,66	19,74	13,09	27,30	31,68
7	26,02	18,37	17,01	9,26	9,25	21,96	11,15	27,84	23,61
8	42,45	11,62	25,16	18,88	21,21	20,88	13,95	22,66	27,23
9	29,26	25,73	28,06	7,49	8,20	17,65	8,08	21,25	29,25
10	20,47	24,51	19,52	15,42	18,49	17,27	13,57	14,44	35,02
11	11,00	33,34	32,51	18,38	14,41	30,56	23,31	16,11	29,43

9. táblázat. *A futási idő átlaga MOSEK-megoldóval a túlkeresletet mutató hálózatokra (másodperc)*

	100-50	**100-100**	**100-200**	**300-50**	**300-100**	**300-200**	**500-50**	**500-100**	**500-200**
ref	24,37	31,81	100,39	786,25	2 322,84	2 832,95	3 142,39	8 264,79	15 530,16
1	53,75	114,94	538,45	1 994,33	5 640,38	8 206,87	7 911,81	n.a.	43 842,91
2	52,79	196,94	393,44	2 004,40	4 371,85	8 574,19	7 814,97	n.a.	44 410,97
3	48,31	157,22	431,42	2 032,38	3 753,17	7 766,67	7 069,46	n.a.	n.a.
4	12,85	92,43	79,79	852,03	263,57	3 769,14	2 492,32	6 322,74	12 820,44
5	17,44	63,43	116,95	784,68	162,88	3 341,78	2 823,70	7 433,14	12 754,80
6	19,24	53,13	124,65	762,61	162,81	3 428,15	2 820,49	7 370,58	12 542,12
7	14,04	66,16	38,96	764,09	262,85	3 600,78	2 460,55	6 625,07	12 327,43
8	18,92	46,49	132,29	703,70	1 522,22	3 123,00	2 942,77	7 480,00	12 915,44
9	20,01	49,45	115,92	706,56	1 488,22	3 179,90	2 970,85	7 754,06	12 472,33
10	19,77	40,55	116,00	837,10	1 487,42	2 918,84	2 923,90	7 171,64	13 249,78
11	17,87	34,08	96,26	853,30	1 484,55	3 002,99	3 007,52	6 993,45	12 526,17

10. táblázat. *A futási idő átlaga MOSEK-megoldóval az egyenletes keresletet mutató hálózatokra (másodperc)*

	100-50	100-100	100-200	300-50	300-100	300-200	500-50	500-100	500-200
ref	4,43	31,50	26,48	104,31	277,44	507,66	849,05	1 348,94	3 086,97
1	11,99	66,68	80,08	330,60	1 318,99	2 822,21	1 820,59	3 997,72	8 825,78
2	14,00	55,81	65,27	364,01	1 589,55	1 423,26	1 768,54	3 850,90	8 493,37
3	16,88	33,09	54,89	282,29	1 003,68	1 204,61	1 492,53	3 557,27	8 115,97
4	3,99	25,59	15,79	51,63	120,08	187,58	158,41	475,96	2 112,55
5	4,71	22,75	16,51	44,06	78,10	173,78	438,64	1 491,71	1 116,60
6	4,46	22,98	22,46	50,81	80,89	155,47	526,75	1 339,68	1 035,96
7	4,10	24,42	20,09	74,23	70,36	153,93	164,91	383,88	1 959,77
8	5,59	9,60	20,23	156,57	276,25	490,52	622,67	1 294,38	3 048,18
9	5,64	18,10	17,07	116,46	337,68	454,45	811,89	1 376,10	2 860,50
10	5,82	19,40	17,03	111,70	428,71	475,50	890,35	1 301,00	2 786,75
11	6,43	12,59	16,09	104,67	370,40	467,71	672,61	1 286,03	3 057,83

11. táblázat. *A futási idő átlaga MOSEK-megoldóval a túlkínálatot mutató hálózatokra (másodperc)*

	100-50	100-100	100-200	300-50	300-100	300-200	500-50	500-100	500-200
ref	89,05	151,76	444,85	4 507,05	6 306,93	75 623,57	21 554,93	46 478,14	79 790,16
1	233,39	385,46	1 486,71	11 195,84	18 563,54	231 112,80	53 257,07	130 143,77	238 281,27
2	234,78	414,23	1 393,63	12 414,49	20 058,58	240 579,41	53 556,80	127 726,95	234 208,96
3	238,75	384,34	1 239,84	11 223,46	17 062,86	200 349,91	48 026,53	109 517,87	206 670,79
4	125,17	203,71	743,85	5 685,84	8 438,62	80 322,97	23 689,90	20 777,48	50 918,92
5	103,52	223,73	719,30	4 924,70	5 386,52	65 981,88	24 691,29	12 603,89	49 730,91
6	71,94	231,58	610,23	5 289,23	5 521,25	65 418,69	24 371,14	12 235,95	49 122,63
7	79,34	234,52	800,96	5 645,32	8 211,28	74 196,66	24 576,94	23 006,69	54 052,46
8	71,53	189,45	520,43	4 347,72	6 983,93	65 769,86	21 785,44	39 517,99	71 876,95
9	78,30	152,02	501,05	4 381,32	6 500,54	66 224,38	21 597,08	37 839,99	70 950,75
10	83,25	137,53	527,78	4 974,26	6 469,97	66 024,15	20 479,21	37 763,42	67 863,08
11	89,08	134,40	461,94	5 126,51	6 951,19	63 601,68	20 635,79	40 666,32	66 916,01

Jelen esetben pontosan ezt tapasztaltuk, tehát a két megoldó a kerekítési hibákra különbözőképpen érzékeny.

A Gurobihoz hasonlóan itt is a McCormick-átírást megvalósító 1–3. algoritmusvariánsok voltak a leglassabbak, mindhárom produkált szegmentálási hibát is a legnagyobb feladatokon.

A 3.4. alszakasz kezdőértékadása, *a 3.3. alszakasz kezdőértékadása*, és *a 3.1. alszakasz redundáns korlátja* átlagosan mintegy 4%, 3%, ill. 5% lassulást eredményezett a MOSEK-megoldóval kombinálva.

A referencia átlagosan 65%-kal gyorsabban futott, mint az 1. algoritmusvariáns, ráadásul ebben az összehasonlításban (tehát a McCormick-átírással kombinálva) minden esetben több, mint 50%-os gyorsulást eredményezett *a 3.5. alszakasz előmegoldója.* Ugyanakkor a 8–11. algoritmusvariánsokat az előmegoldót nem implementáló párjaikkal összehasonlítva átlagosan 67%-os lassulást tapasztaltunk a MOSEK esetében.

A futási idők variációs koefficienseit a 12–14. táblázat tartalmazza. A MOSEK által igényelt futási idők átlagos variációs koefficiense a Gurobitól nagyobb, átlagosan 30% volt a teljes adathalmazra.

5.4. Konklúzió

A 15. táblázat tartalmazza egy-egy algoritmusvariáns átlagos futási idejét az egyes teszthalmazokra. A 300 felhasználót és 100, ill. 200 torrentet, továbbá az 500 felhasználót és 100, ill. 200 torrentet tartalmazó teszteseteket mellőztük az átlagszámítás során, hogy a szegmentálási hiba miatt hiányzó adatok (ld. az 5.2. alfejezet eleje) ne torzítsák az eredményt.

A cikkben közölt tesztek eredményei alapján a következő tanulságokat vonhatjuk le:

- A hálózat felépítésétől rendkívüli mértékben függ a megoldó sebessége. Az egyenletes típusú hálózatokra a leggyorsabb, a túlkínálatot mutató hálózatokra pedig a leglassabb kiszámítani a max-min méltányos erőforrás-elosztást. A sebesség nagyjából arányos az alkalmazott speciális hármas gráf reprezentáció csúcsainak és éleinek a számával.

- A Gurobi általában gyorsabban oldotta meg a feladatot, és kevésbé volt érzékeny a kerekítési hibákra, mint a MOSEK. Ugyanakkor a Gurobi több tesztesetre produkált szegmentálási hibát.

- A Gurobi kedvezőbben reagált a cikkben szereplő modellátírásokra.

- A 3.2. alszakaszban bemutatott McCormick-átírás alkalmazása minden esetben lassította a megoldást. Ez meglepő és egyben pozitív eredmény, amellyel kimutattuk, hogy a tesztelt megoldók könnyebben boldogultak a kisebb méretű nemlineáris feladattal, mint a nagyobb méretű lineáris változattal.

12. táblázat. *A futási idő variációs koefficiense MOSEK-megoldóval a túlkeresletet mutató hálózatokra (százalék)*

	100-50	**100-100**	**100-200**	**300-50**	**300-100**	**300-200**	**500-50**	**500-100**	**500-200**
ref	65,26	23,93	49,54	31,92	73,51	22,95	10,98	29,21	24,87
1	41,64	65,23	107,28	28,85	66,07	23,65	7,97	n.a.	31,11
2	39,94	111,42	83,50	29,34	35,13	24,31	7,20	n.a.	32,89
3	44,45	103,21	100,73	35,36	24,82	30,37	7,70	n.a.	n.a.
4	33,08	115,95	135,16	27,09	22,69	23,61	12,82	17,03	18,87
5	40,93	112,76	126,79	26,06	24,67	27,89	9,64	9,47	20,25
6	56,65	103,42	129,77	21,47	21,36	29,63	9,27	16,56	20,53
7	47,87	93,97	97,79	19,17	19,97	30,95	10,72	17,79	14,93
8	39,89	73,25	83,44	17,28	24,93	31,32	7,85	14,84	8,09
9	45,95	81,40	68,19	16,28	22,77	44,87	8,47	12,12	8,64
10	42,73	62,07	69,34	41,11	22,03	36,62	6,68	6,41	10,67
11	28,01	39,27	48,05	44,45	21,88	36,85	10,25	3,92	8,53

13. táblázat. *A futási idő variációs koefficiense MOSEK-megoldóval az egyenletes keresletet mutató hálózatokra (százalék)*

	100-50	**100-100**	**100-200**	**300-50**	**300-100**	**300-200**	**500-50**	**500-100**	**500-200**
ref	7,33	141,23	38,84	13,61	44,22	22,92	30,54	11,74	11,63
1	6,40	119,65	59,99	20,47	88,08	85,49	4,73	6,23	4,04
2	24,65	100,17	62,14	6,99	102,51	1,67	2,62	11,90	4,30
3	44,02	56,41	43,35	18,98	71,41	7,01	3,40	19,66	5,79
4	36,18	98,00	49,05	11,96	87,76	6,42	8,46	29,16	18,54
5	36,86	61,39	26,39	16,12	50,71	10,28	18,36	17,86	24,11
6	30,77	52,55	71,77	16,70	65,96	13,72	42,35	8,51	8,91
7	23,32	90,66	85,02	58,06	49,42	7,78	3,81	11,45	7,64
8	13,79	56,88	53,72	31,80	25,18	10,77	9,58	8,64	7,92
9	12,31	69,97	32,70	2,56	58,58	13,61	40,86	10,11	9,09
10	11,36	71,84	23,41	15,93	89,39	5,57	32,99	11,13	3,53
11	22,53	43,54	41,41	20,89	56,87	8,02	8,90	9,63	4,86

14. táblázat. *A futási idő variációs koefficiense MOSEK-megoldóval a túlkínálatot mutató hálózatokra (százalék)*

	100-50	**100-100**	**100-200**	**300-50**	**300-100**	**300-200**	**500-50**	**500-100**	**500-200**
ref	29,25	7,57	24,14	2,59	10,76	27,78	14,36	15,56	17,52
1	22,50	16,73	8,48	5,56	8,55	20,15	12,72	7,10	19,83
2	13,62	23,59	17,34	6,83	14,59	21,13	10,53	5,21	31,88
3	27,39	41,50	25,06	6,65	14,30	31,39	12,56	5,85	28,28
4	9,77	24,58	21,49	5,30	5,71	28,74	10,37	9,90	22,38
5	14,64	18,95	26,74	13,33	13,24	20,51	8,89	4,65	20,40
6	22,50	20,60	10,38	12,79	6,53	21,00	9,60	4,35	19,19
7	14,93	16,78	16,81	16,00	8,24	20,33	13,32	12,91	26,02
8	17,59	22,36	33,58	11,17	15,05	25,69	19,84	15,08	29,04
9	18,60	12,54	20,73	9,91	5,63	30,06	7,03	10,64	32,64
10	40,88	16,28	28,19	8,60	5,59	27,76	12,40	18,82	31,31
11	32,82	7,70	20,34	17,81	8,25	25,50	14,45	17,84	34,86

15. táblázat. *Egy-egy modell-változat átlagos futási ideje (másodperc)*

	Gurobi			MOSEK		
	túlkereslet	egyenletes	túlkínálat	túlkereslet	egyenletes	túlkínálat
ref	394,31	60,95	2 481,61	817,04	203,15	5 349,53
1	1 523,81	145,57	16 206,43	2 122,66	461,99	13 311,69
2	1 591,15	163,32	16 183,00	2 092,51	453,53	13 602,79
3	1 592,43	165,20	15 128,01	1 947,76	375,94	12 222,58
4	843,34	115,57	9 923,46	705,88	51,08	6 089,69
5	869,00	116,17	10 694,17	761,24	105,33	6 132,51
6	811,11	113,42	9 557,88	756,02	125,49	6 114,82
7	759,65	113,03	9 389,50	668,76	57,55	6 267,42
8	399,35	56,07	2 010,80	768,83	162,93	5 382,91
9	426,72	56,06	2 215,91	772,56	193,83	5 341,95
10	400,28	61,44	2 145,46	787,46	208,86	5 240,41
11	446,61	54,56	2 365,85	801,81	162,48	5 289,54

- A mesterséges változókra vonatkozó kezdőértékadás (3.4. alszakasz) hatása az alkalmazott megoldótól és a feladat típusától függően változott, az összes teszt átlagában +1,01% volt.
- A bináris változókra vonatkozó kezdőértékadás (3.3. alszakasz) hatása az alkalmazott megoldótól és a feladat típusától függően változott, az összes teszt átlagában elenyésző, mindössze +0,06% volt.
- A 3.1. alszakaszban leírt fix alsó korlát hozzáadása az alkalmazott megoldótól és a feladat típusától függően eltérő hatást gyakorolt, az összes teszt átlagában +0,66% javulást eredményezett a megoldás sebességében.
- A cikkben szereplő modellátírások közül a 3.5. alszakaszban bemutatott előmegoldó hatása a legkedvezőbb, az összes teszt átlagában +9,75% javulást eredményezett.
- Nem volt olyan algoritmusvariáns, amely minden teszthalmaz esetén egyértelműen a legjobb lett volna, még azonos megoldó esetében sem.

6. Összefoglalás

Jelen cikkben egy komplex, nagyméretű lineáris és vegyes-egészértékű nemlineáris optimalizálási feladatokat is felvonultató probléma kapcsán elemeztük a matematikai modellezés során felmerülő átírási lehetőségek hatásait. Kiterjedt numerikus tesztelést végeztünk tizenkét modellváltozat, huszonhét teszteset és kettő professzionális megoldó minden lehetséges kombinációjával.

Az elvégzett kísérletek számos érdekes eredménnyel szolgáltak. Egyrészt megállapíthatjuk, hogy nem találtunk olyan modellváltozatot, amely minden esetben a leggyorsabban oldotta meg a feladatot. Láttuk továbbá, hogy a tesztelt korszerű megoldók számára nem jelentett problémát a bilineáris felírás hatékony megoldása. Végül ismét kiemelendő az előmegoldó (presolve) technikák használatának jelentős előnye.

Továbblépésként tervezzük megvizsgálni a modellek hálózati folyam alakú felírásának hatásvizsgálatát, amelyre az AMPL-nyelv lehetőséget ad. Ezután pedig az elvégzett kísérletek egyfajta megfordítása következhet, amelyben a bemenetként megadott gráfok szerkezetének mélyebb elemzésével kimutatjuk, hogy az egyes algoritmus variánsoknak mely gráfok a legkedvezőbbek a megoldás hatékonyságának szempontjából.

Köszönetnyilvánítás

Vinkó Tamást az MTA Bolyai-ösztöndíja támogatta.

Hivatkozások

[1] Antal, E., and Vinkó, T.: *Modeling max–min fair bandwidth allocation in BitTorrent communities*, Computational Optimization and Applications **66:2** (2017), 383–400.

[2] Bonami, P., Kılınç, M., and Linderoth, J.: *Algorithms and Software for Convex Mixed Integer Nonlinear Programs*, vol. **154** of The IMA Volumes in Mathematics and its Applications, Springer (2012), 1–39.

[3] Capotă, M., Andrade, N., Vinkó, T., Santos, F., Pouwelse, J., and Epema, D.: *Inter-swarm resource allocation in BitTorrent communities*, In Proceedings of IEEE International Conference on Peer-to-Peer Computing (P2P 2011) (2011), 300–309.

[4] Cohen, B.: *The BitTorrent Protocol Specification*, `http://bittorrent.org/beps/bep_0003.html`. Utolsó letöltés: 2017. április 24.

[5] Cohen, B.: *Incentives build robustness in BitTorrent*, In Workshop on Economics of Peer-to-Peer systems (2003), Vol. **6**, 68–72.

[6] Dana, C., Li, D., Harrison, D., and n. Chuah, C.: *BASS: BitTorrent Assisted Streaming System for Video-on-Demand*, In 2005 IEEE 7th Workshop on Multimedia Signal Processing (2005 okt.), 1–4.

[7] Do, T. T., Hua, K. A., and Tantaoui, M. A.: *P2VoD: providing fault tolerant video-on-demand streaming in peer-to-peer environment*, In Communications, 2004 IEEE International Conference on (2004 jún.), Vol. **3**, 1467–1472.

[8] Fan, B., Lui, J.-S., and Chiu, D.-M.: *The Design Trade-Offs of BitTorrent-Like File Sharing Protocols*, IEEE/ACM Transactions on Networking **17**:2 (2009 ápr.), 365–376.

[9] Fourer, R., and Gay, D. M.: *Experience with a Primal Presolve Algorithm*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1994), 135–154.

[10] Gay, D. M.: *Symbolic-Algebraic Computations in a Modeling Language for Mathematical Programming*, Springer-Verlag (2001), 99–106.

[11] Gupte, A., Ahmed, S., Cheon, M., and Dey, S.: *Solving Mixed Integer Bilinear Problems Using MILP Formulations*, SIAM J. Optim. **23**:2 (2013), 721–744.

[12] Li, B., Wang, Z., Liu, J., and Zhu, W.: *Two Decades of Internet Video Streaming: A Retrospective View*, ACM Trans. Multimedia Comput. Commun. Appl. **9**:1s (2013 okt.), **33**:1–**33**:20 o.

[13] Paris, J. F., and Shah, P.: *Peer-to-Peer Multimedia Streaming Using BitTorrent*, In 2007 IEEE International Performance, Computing, and Communications Conference (2007 ápr.), 340–347.

[14] Radunović, B., and Le Boudec, J.-Y.: *A Unified Framework for Max-Min and Min-Max Fairness With Applications*, IEEE/ACM Transactions on Networking **15**:5 (2007), 1073–1083.

[15] Vlavianos, A., Iliofotou, M., and Faloutsos, M.: *BiToS: Enhancing BitTorrent for Supporting Streaming Applications*, In Proceedings IEEE INFOCOM 2006. 25TH IEEE International Conference on Computer Communications (2006 ápr.), 1–6.

(Beérkezett: 2016. november 28.)

Dobjánné Antal Elvira a Szegedi Tudományegyetemen végzett közgazdasági programozó matematikusként 2010-ben, jelenleg a Neumann János Egyetemen főiskolai adjunktus.

2012-ben 5 hónapot az Almeríai Egyetemen vendégeskedett Erasmus-ösztöndíjjal. 2013-ban SZTE Talent ösztöndíjas, 2016-ban az MTA Szegedi Akadémiai Bizottság ifjúsági pályázatán III. díjat nyert. PhD fokozatát 2017-ben szerezte informatikatudományból a Szegedi Tudományegyetemen.

Kutatásait a globális, illetve nemlineáris optimalizálás területén folytatja.

Vinkó Tamás programtervező matematikus, habilitált egyetemi docens. Diplomáját és fokozatait a Szegedi Tudományegyetemen szerezte.

Posztdoktori kutatóként több mint 6 évet töltött Hollandiában az Európai Űrügynökségnél és a Delfti Műszaki Egyetemen.

Kutatómunkájában a hálózattudomány és a globális optimalizálás határterületeit vizsgálja.

Összesen 30 nemzetközi tudományos cikk szerzője, vagy társszerzője, ezekre a Scopus szerint több mint 220 független hivatkozást kapott.

DOBJÁNNÉ ANTAL ELVIRA
Neumann János Egyetem, Természet– és Műszaki Alaptudományi Tanszék
6000 Kecskemét, Izsáki út 10.
antal.elvira@gamf.uni-neumann.hu

VINKÓ TAMÁS
Szegedi Tudományegyetem, Számítógépes Optimalizálás Tanszék
6701 Szeged, P.O. Box 652
tvinko@inf.u-szeged.hu

COMPARATIVE ANALYSIS OF SEVERAL MODELS OF THE SAME SAME MIXED-INTEGER NONLINEAR PROGRAMING PROBLEM

Elvira D. Antal and Tamás Vinkó

Our study was inspired by modeling questions emerging in connection to computing max-min fair bandwidth allocation in BitTorrent communities.

We analyze several reformulation and solution techniques, including the McMormick reformulation of a MINLP, and a standard LP presolve technique, in point of running time and reached optimum value. Our extensive numerical investigation involves twelve different models of the same problem, twenty-seven test cases, and two professional solvers.

Alkalmazott Matematikai Lapok **34** (2017), 97–111

SZÓRÁSELMÉLET: MATEMATIKAI ALAPOK ÉS NÉHÁNY AKTUÁLIS KÉRDÉS

HORVÁTH MIKLÓS

A dolgozatban bemutatjuk az alkalmazások egész sorában fontos szerepet játszó szóráselmélethez tartozó matematikai apparátus egy részét, a témakörrel való első ismerkedésre is alkalmas tárgyalásban. A dolgozat második részében részletesebben megismerkedünk a kvantummechanikai potenciálszórás néhány aspektusával, ismertetve néhány új eredményt és nyitott kérdéseket is.

1. Bevezetés

Az internetes böngészőkben a „scattering" keresőkérdésre és változataira kapott több millió találat minden előismeret nélkül is mutatja, hogy a szórási feladatok a tudomány, a technika és a mindennapi élet számos területén felbukkannak. A szórási feladatok közös sajátsága, hogy egy vizsgálandó ismeretlen objektumra hullámokat bocsátunk és a visszaverődő (szórt) hullámokat megfigyeljük. A hullám lehet például hanghullám, amely egy közegben, vagy akár a vizsgált objektum belsejében terjed, lehet elektromágneses hullám, illetve kvantummechanikai szórási feladatok esetén a részecske-hullám ekvivalenciának megfelelően lehet egy vizsgálandó anyagra irányított részecskenyaláb is. A direkt szórási feladatban ismert objektum esetén kívánjuk a visszavert hullámot meghatározni. Az alkalmazások szempontjából nagy jelentőségű az inverz szórási feladat, amelyben a szórt hullám megfigyeléséből következtetünk az ismeretlen objektum tulajdonságaira, pl. elhelyezkedésére, alakjára, belső szerkezetére, részecskékkel bombázott anyag esetén az anyag tulajdonságaira. A leginkább hétköznapi inverz szórási feladat a látás, amely során a tárgyakról a szemünkbe jutott visszavert fény alapján agyunk megállapítja a minket körülvevő tárgyak elhelyezkedését, színét, távolságát stb. A legtöbb inverz szórási feladat azért nagy jelentőségű, mert ezzel olyan információkat szerezhetünk, melyek közvetlenül csak nehezen, vagy egyáltalán nem elérhetők. Az elektromágneses hullámok szóródásán alapul például a radar technológia. Hanghullámok visszaverődésének érzékelésével tájékozódik rossz látási viszonyok esetén például a denevér és a delfin, ezen az elven működik a szonár. Ilyen technológiák nyújtanak segítséget pl. a tengerfenék feltérképezése során. Az ultrahangos orvosi vizsgálatban belső szerveink elhelyezkedéséről nyerünk információt arra a tényre támaszkodva, hogy a különböző szövetekben más sebességgel terjednek a rezgések. Hasonló elven alapulnak például olyan geológiai kutatások, ahol mesterségesen keltett rezgések visszaverődésének méréséből lehet következtetni a földfelszín alatti struktúrákra. A radar technológia is alkalmazható bizonyos földfelszín alatti struktúrák vizsgálatára. A roncsolásmentes anyagvizsgálat a rejtett hibák olyan módon történő felderítését jelenti, amely nem károsítja a vizsgált anyagot, illetve terméket. Az elnevezés módszerek egész sokaságát fedi, melyek között szóráselméleti alkalmazások is vannak. Az elemi részecskék közti kölcsönhatások vizsgálata a rendkívül kis méretek következtében nem könnyű feladat. Az egyik elterjedt módszer az inverz szórási eljárás: részecskenyalábot bocsátunk a vizsgálandó anyagra. A belőtt részecskék kölcsönhatásba lépnek az anyagot alkotó molekulák, vagy atomok erőterével, majd különböző irányokba visszaverődnek. Az egyes irányokba egységnyi idő alatt visszaverődő részecskék alkalmasan elhelyezett detektorokkal számlálhatók, és ezekből a szórási adatokból a következőkben bemutatott matematikai apparátussal információkat nyerhetünk a vizsgált atomok, vagy molekulák tulajdonságairól.

A szórási feladatok témakörének elmélete és alkalmazási területei egyaránt olyan óriási mennyiségű információtömeget jelentenek, melynek áttekintésére jelen dolgozatban még kísérletet sem érdemes tenni. Célunk mindössze az, hogy ízelítőt adjunk ennek a rendkívül érdekes és sokrétűen hasznosított területnek az alapjaiból, és legalább egy részterületen, a kvantummechanikai potenciálszórás témájában eljussunk aktuális kutatási kérdésekhez is. A továbbiakban a szórási feladatoknak csak a matematikai aspektusaival foglalkozunk. A nagy terjedelmet igénylő matematikai precizitás helyett az alapvető gondolatok és konstrukciók heurisztikus bemutatására törekszünk; az alaposabb tárgyalás iránt érdeklődőknek ajánljuk többek között az [1, 3, 19, 4, 5, 14, 15, 16, 18, 22, 23, 26] és [27] monográfiákat. A szóráselmélet kétféle felépítése közül az időfüggetlen elméletet választjuk. Az időfüggő felépítés iránt érdeklődőknek többek között ajánlhatjuk Teschl [25] monográfiájának 12. fejezetét; a könyv az alapoktól indulva felépíti a szóráselmélethez szükséges matematikai hátteret is.

2. A szórás matematikai leírása

Első példa: akusztikus szórás egy objektumon

Vegyünk egy $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ korlátos tartományt (testet) a háromdimenziós térben. Tegyük fel, hogy a test egy homogén izotróp közegbe van beágyazva, azaz a közegben a hanghullámok minden irányban azonos c sebességgel terjednek. A hullámterjedést jó közelítéssel az

$$\frac{1}{c^2}U_{tt} = \Delta U, \quad U = U(t,x) \tag{1}$$

hullámegyenlet írja le, ahol $\Delta = \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2$ a Laplace-operátor és $v = 1/\varrho_0 \mathrm{grad} U$ a hanghullám sebességvektora, ϱ_0 a közeg sűrűsége. A közeg tulajdonságai miatt időben harmonikus megoldást keresünk, azaz

$$U(t,x) = \Re(u(x)e^{-i\omega t}) \tag{2}$$

alakú megoldást. A (2) képletet (1)-be helyettesítve egyszerű számolás adja az időfüggetlen

$$\Delta u + k^2 u = 0 \tag{3}$$

Helmholtz-egyenletet az Ω tartomány komplementerén, ahol $k = \omega/c$. A továbbiakban feltesszük, hogy a rezgések nem hatolnak az Ω test belsejébe. A test felületi tulajdonságai befolyásolják a hanghullámok visszaverődését. Teljesen puha felületű test esetén a nyomás a test felületén nulla, amit matematikailag az

$$u|_{\partial\Omega} = 0$$

Dirichlet-peremfeltétel fejez ki, nagyon kemény felületű test esetén pedig a hanghullám sebességvektorának nem lehet az Ω határára merőleges komponense, amit a

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = 0$$

Neumann-peremfeltétel ír le, ahol ν az Ω határára merőleges külső egységvektor. Legyen $d \in \mathbb{R}^3$ egy egységvektor. Az $u_i(x) = e^{ikx\cdot d}$ olyan megoldása a Helmholtz-egyenletnek, mely a d irányba haladó síkhullámot írja le. Keressük a visszaverődött hullámot leíró u_s megoldást. Tapasztalataink szerint a visszaverődött (víz-)hullámok a szóródás helyétől távolodva közelítőleg kör alakban terjednek és lecsengenek. Egyszerűen kiszámolható, hogy az $r = |x|$ jelölés mellett az

$$\frac{e^{ikr}}{r} \text{ és } \frac{e^{-ikr}}{r}$$

függvények is megoldásai a (3) Helmholtz-egyenletnek. Az első esetben

$$U(t,x) = \Re\left(\frac{e^{ikr}}{r}e^{-i\omega t}\right),$$

a számláló növekvő t esetén növekvő $r = |x|$ mellett lesz konstans, vagyis a szórt hullám az időben „szétfolyik”; míg a második esetben éppen ellenkezőleg, növő t-hez csökkenő $|x|$ tartozik, mintha egy hullámfront az időben egyre kisebb helyre koncentrálódna. Az utóbbi eset tehát, jóllehet matematikailag kifogástalan megoldása a Helmholtz-egyenletnek, a valóságban nem fordul elő. Milyen módon lehet az ilyen megoldásokat kizárni? Vegyük észre, hogy

$$\frac{d}{dr}\frac{e^{ikr}}{r} = ik\frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r^2},$$

tehát nagy r esetén a derivált majdnem pontosan egyenlő a függvény ik-szorosával, míg $\frac{e^{-ikr}}{r}$ deriváltja majdnem pontosan a függvény $-ik$-szorosa lesz. Ezért a

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial u_s}{\partial r} - iku_s\right) = 0 \tag{4}$$

Sommerfeld sugárzási feltétel megengedi az $\frac{e^{ikr}}{r}$ típusú és kizárja az $\frac{e^{-ikr}}{r}$ típusú megoldásokat, vagyis azt biztosítja, hogy a szórt hullám az időben szétterjedjen.

A fenti feltételek együttesen már matematikailag is egyértelműen meghatározzák a ténylegesen lejátszódó folyamatnak megfelelő u függvényt:

2.1. Tétel. *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ egy sima határú korlátos tartomány és $\alpha \in \mathbb{R}^3$ egy egységvektor. Akkor a $\Delta u + k^2 u = 0,\ x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ Helmholtz-egyenletnek az $u|_{\partial\Omega} = 0$ (vagy a $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = 0$) peremfeltétel mellett létezik pontosan egy $u = u_i + u_s$ alakú megoldása, ahol*

$$u_i(x) = e^{ik\alpha\cdot x}$$

az α irányból érkező síkhullám, és az u_s szórt hullámra teljesül a (4) Sommerfeld sugárzási feltétel. A szórt hullám aszimptotikus viselkedése

$$u_s(x) = \frac{e^{ikr}}{r} A(\hat{x}, \alpha, k) + \mathbf{O}\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r = |x| \to \infty,\ \hat{x} = x/r. \tag{5}$$

A bizonyítással és a feltételek pontosabb megfogalmazásával itt nem foglalkozunk, ezek megtalálhatók többek között a Colton-Kress [4] monográfia 3.2. alfejezetében, illetve Ramm [22] 4.2. alfejezetében.

Az (5) egyenlet azt fejezi ki, hogy nagy távolságban a visszavert hullám közelítőleg gömb alakú, de az $\hat{x}$ irányoktól függő amplitúdóval. Ezért az itt szereplő $A(\hat{x}, \alpha, k)$ komplex számot *szórási amplitúdónak* nevezzük. Mivel a szórásamplitúdó a visszavert hullám mérésével meghatározható, ez a függvény lett a szóráselmélet központi fogalma. Az *inverz szórási feladat* ebben a kontextusban azt jelenti, hogy a szórásamplitúdó ismeretében határozzuk meg az Ω test helyzetét és alakját. Ismert, hogy az Ω test biztosan rekonstruálható végtelen sok különböző α beesési szöghöz tartozó szórásamplitúdóból, de véges sok, akár egyetlen beesési szöghöz tartozó szórásamplitúdó alapján is lehet rekonstruálható, ha közelítőleg ismerjük azt a tartományt, amelyen belül Ω-nak lennie kell, lásd Colton-Kress [4], 5.1. alfejezet és Ramm [22] 4.2. alfejezet.

Második példa: akusztikus szórás inhomogén közegben

Ebben a feladatban a hanghullámok az egész térben terjednek. A homogén befogadó közegben a hangsebesség c_0, míg a tér egy korlátos részében a közeg inhomogén, tehát az x pontbeli hangsebesség $c(x)$ értéke a helytől függ. Az

$$n(x) = \frac{c_0^2}{c(x)^2}$$

függvényt *refrakciós indexnek* nevezzük. A hullámegyenletből inhomogén közeg esetén a

$$\Delta u + k^2 n(x) u = 0,\ x \in \mathbb{R}^3$$

egyenlet adódik. Az előző példa mintájára a feltételek részletezése és bizonyítás nélkül megemlítjük a következő eredményt:

2.2. TÉTEL. *Legyen $\alpha \in \mathbb{R}^3$ egy egységvektor, és tegyük fel, hogy az $n(x) > 0$ refrakciós indexre $n(x) = 1$ egy korlátos halmazon kívül. Akkor a $\Delta u + k^2 n(x) u = 0$ $x \in \mathbb{R}^3$ egyenletnek létezik pontosan egy $u = u_i + u_s$ alakú megoldása, ahol*

$$u_i(x) = e^{ik\alpha\cdot x}$$

az α irányból érkező síkhullám, és az u_s szórt hullámra teljesül a (4) Sommerfeld sugárzási feltétel. Erre az u_s-re

$$u_s(x) = \frac{e^{ikr}}{r} A(\hat{x}, \alpha, k) + \mathbf{O}\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r = |x| \to \infty,\ \hat{x} = x/r.$$

Az inverz feladat most a szórásamplitúdóból az $n(x)$ refrakciós index meghatározása. Ilyen módon feltárható a hanghullámok által átjárt tartomány belső szerkezete, a hangot egyformán vezető résztartományok alakja. Az ezzel kapcsolatos klasszikus eredményekről jó összefoglaló található Colton-Kress [4] 1.2. alfejezetében.

Harmadik példa: potenciálszórás a kvantummechanikában

Ahogy korábban is említettük, itt arra a jelenségre illesztünk matematikai modellt, amikor egy α irányból k^2 energiájú elemi részecskékkel valamilyen anyagot bombázunk, számoljuk a különböző irányokba visszaverődő részecskéket, és ezekből az adatokból vonunk le következtetéseket az anyag tulajdonságaira. A jelenséget leíró $u(x)$ hullámfüggvény eleget tesz a

$$-\Delta u + V(x) u = k^2 u,\ x \in \mathbb{R}^3 \tag{6}$$

Schrödinger-egyenletnek. Itt $V(x)$ a vizsgált anyag atomjainak, vagy molekuláinak erőteréből számolt potenciális energia, rövidebben potenciál. Mivel a kvantummechanikai erők nagyon kis hatósugarúak, az alkalmazások szempontjából fontos esetekben általában feltehető, hogy a potenciál gyorsan tart nullához, ha $r = |x| \to \infty$. A korábban tárgyalt esetekkel analóg állítás itt is igaz:

2.3. TÉTEL. *Legyen $\alpha \in \mathbb{R}^3$ egy egységvektor, és tegyük fel, hogy a $V(x)$ potenciál gyorsan lecseng $|x| \to \infty$ esetén. Akkor a $-\Delta u + V(x) u = k^2 u$, $x \in \mathbb{R}^3$ egyenletnek létezik pontosan egy $u = u_i + u_s$ alakú megoldása, ahol*

$$u_i(x) = e^{ik\alpha\cdot x},$$

és u_s-re teljesül a (4) Sommerfeld sugárzási feltétel. Erre az u_s-re fennáll, hogy

$$u_s(x) = \frac{e^{ikr}}{r} A(\hat{x}, \alpha, k) + \mathbf{O}\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r = |x| \to \infty, \ \hat{x} = x/r.$$

Megjegyezzük, hogy most az $A(\hat{x}, \alpha, k)$ szórásamplitúdó helyett csak a $\sigma = |A|^2$ *hatáskeresztmetszet* mérhető közvetlenül, ugyanis a $\Delta\hat{x}$ térszögbe egységnyi idő alatt visszaverődött részecskék száma $\Delta\hat{x}|A|^2$-tel arányos. Ismert ugyanakkor, hogy $|A|$ ismeretében az A szórásamplitúdó meghatározható, ld. Chadan-Sabatier [3] X. fejezetében. Ezért a továbbiakban A-t ismertnek tételezzük fel, az inverz feladat pedig A ismeretében a $V(x)$ potenciál meghatározása. Ezzel a témakörrel bővebben foglalkozunk a következő részben egy szimmetriafeltevés mellett.

3. Potenciálszórás gömbszimmetrikus potenciál esetén

A továbbiakban külön említés nélkül mindig feltesszük, hogy a vizsgált anyag részecskéinek erőtere gömbszimmetrikus, és emiatt a $V(x)$ potenciálfüggvény is csak $|x|$-től függ:

$$V(x) = q(r), \quad r = |x|.$$

A szimmetria kiaknázására érdemes áttérni az

$$x = (r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r \cos\theta)$$

gömbi koordinátákra.

A radiális Schrödinger-operátor és a fázistolások

Egy $Y(\theta, \varphi)$ függvényt *n-edrendű gömbi harmonikus függvénynek* nevezünk, ha az $f(x) = r^n Y(\theta, \varphi)$ függvény harmonikus, azaz $\Delta f = 0$. Ismert, hogy az n-edrendű gömbi harmonikusok $2n+1$-dimenziós teret alkotnak, és az alkalmasan választott Y_n^m, $m = -n, \ldots, n$ gömbi harmonikusok az összes $n \geq 0$ indexre együttesen ortonormált bázist alkotnak az egységgömb felületén négyzetesen integrálható függvények terében, $L_2(S)$-ben. A változók szétválasztásának elvét követve keressük a (6) Schrödinger-egyenlet megoldását

$$u(x) = \frac{\psi_n(r)}{r} Y_n^m(\theta, \varphi), \ r = |x|$$

alakban. Felhasználva a Laplace-operátor gömbi koordinátákkal felírt alakját, a radiális változóban a

$$-\psi_n''(r) + \left(q(r) + \frac{n(n+1)}{r^2}\right)\psi_n(r) = k^2\psi_n(r), \ r \geq 0$$

radiális Schrödinger-egyenlet adódik. Ez egy másodrendű lineáris közönséges differenciálegyenlet, ezért a megoldásai kétdimenziós vektorteret alkotnak. Vizsgáljuk meg heurisztikusan a megoldások viselkedését $r \to 0+$ és $r \to \infty$ esetén. Az első esetben $\frac{n(n+1)}{r^2}$ domináns, tehát közelítőleg a $\psi_n''(r) = \frac{n(n+1)}{r^2}\psi_n(r)$ egyenlet adódik, melynek megoldásai r^{n+1} és r^{-n} lineáris kombinációi. Ebben csak az első megoldás szerepelhet, máskülönben a kapott $u(x)$ megoldás szinguláris lenne az origóban. Az $r \to \infty$ esetben a potenciál lecsengése miatt közelítőleg a $-\psi_n'' = k^2\psi_n$ egyenletet kapjuk, ezért ψ_n aszimptotikusan $\sin kr$ és $\cos kr$ lineáris kombinációja lesz. A paraméterek alkalmas választásával tehát feltehető, hogy

$$\psi_n(r) = \begin{cases} c_n r^{n+1}(1 + \mathbf{o}(1)), & r \to 0+, \\ \sin(kr - n\pi/2 + \delta_n) + \mathbf{o}(1), & r \to \infty. \end{cases} \tag{7}$$

A szinuszfüggvény fázisát azért célszerű az itt megadott módon beállítani, mert így a $q = 0$ potenciálhoz a $\delta_n = 0$ értékek tartoznak (és $\psi_n(r) = \sqrt{\pi kr/2}J_{n+1/2}(kr) = krj_n(kr)$, ahol $J_{n+1/2}$ a Bessel-függvényt, j_n pedig a szférikus Bessel-függvényt jelöli). Ezért a potenciál jelenlétének aszimptotikusan az egyetlen következménye, hogy a szinuszfüggvény fázisa eltolódik egy δ_n-nel jelölt konstanssal, amelyet az *n-edik fázistolásnak* nevezünk. A fázistolások sorozata is központi jelentőségű a potenciálszórás elméletében. A (7) formula a δ_n számokat csak modulo π definiálja, de a definíció egyértelművé tehető, ha feltesszük, hogy a nulla potenciálhoz nulla fázistolások tartoznak, és hogy a fázistolások a q potenciál folytonos függvényei.

A szórásamplitúdó felírása a fázistolásokkal

A $P_n(t)$ *Legendre-polinomokat* a szokásos

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\left[(t^2 - 1)^n\right]^{(n)}$$

képlettel definiáljuk. Bebizonyítható, hogy a változók szétválasztásának imént bemutatott módszerével a 2.3. Tételben leírt $u(x)$ hullámfüggvény felírható a következő alakban:

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n e^{i\delta_n} \frac{2n+1}{k} \frac{\psi_n(r)}{r} P_n(\hat{x} \cdot \alpha), \tag{8}$$

speciálisan a potenciálmentes $q = 0$ esetben

$$e^{ikx\cdot\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) j_n(kr) P_n(\hat{x} \cdot \alpha). \tag{9}$$

Ezek bizonyítása megtalálható például Newton [18] monográfiájának 11.1.1. alfejezetében, itt nem részletezzük. Ezen képletek felhasználásával már egyszerűen nyerhetünk egy fontos kapcsolatot a δ_n-ek és a szórásamplitúdó között:

3.1. Tétel. *A szórásamplitúdó felírása a fázistolásokkal:*

$$A(\hat{x},\alpha,k)=\frac{1}{k}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)e^{i\delta_n}\sin\delta_n P_n(\hat{x}\cdot\alpha). \tag{10}$$

Bizonyítás. Vezessük be a $\approx$ jelölést az $r\to\infty$-ben vett aszimptotikus egyenlőségre. A (8) és a (9) formulák kivonása után (7) behelyettesítésével azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}u_s(x)&=u(x)-e^{ikx\cdot\alpha}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}i^n\Big(e^{i\delta_n}\frac{\psi_n(r)}{kr}-j_n(kr)\Big)(2n+1)P_n(\hat{x}\cdot\alpha)\\&\approx\sum_{n=0}^{\infty}i^n\frac{e^{i\delta_n}\sin(kr-n\pi/2+\delta_n)-\sin(kr-n\pi/2)}{kr}(2n+1)P_n(\hat{x}\cdot\alpha).\end{aligned}$$

A számlálót a könnyen ellenőrizhető

$$e^{i\delta_n}\cos\delta_n-1=ie^{i\delta_n}\sin\delta_n$$

trigonometrikus azonosság felhasználásával egyszerűbb alakra hozhatjuk:

$$\begin{aligned}&e^{i\delta_n}\sin(kr-n\pi/2+\delta_n)-\sin(kr-n\pi/2)\\&=\sin(kr-n\pi/2)(e^{i\delta_n}\cos\delta_n-1)+\cos(kr-n\pi/2)e^{i\delta_n}\sin\delta_n\\&=e^{i(kr-n\pi/2)}e^{i\delta_n}\sin\delta_n=e^{ikr}i^{-n}e^{i\delta_n}\sin\delta_n.\end{aligned}$$

Ezért

$$u_s(x)\approx\frac{e^{ikr}}{kr}\sum_{n=0}^{\infty}e^{i\delta_n}\sin\delta_n(2n+1)P_n(\hat{x}\cdot\alpha),$$

ami bizonyítja a (10) formulát. □

A bizonyított képlet mutatja, hogy az $\hat{x}$ irányban való szóródás amplitúdója csak az $\hat{x}$ és a beeső részecskenyaláb α iránya közt bezárt szögtől függ; ez egyébként a potenciál gömbszimmetriájából is következik. Mivel a Legendre-polinomok ortogonális bázist alkotnak a $[-1,1]$ szakaszon négyzetesen integrálható függvények körében, a (10) formulára úgy is tekinthetünk, mint a szórásamplitúdó ortogonális sorfejtésére a Legendre-polinomok szerint. Ezért a modulo π vett δ_n sorozat és a szórásamplitúdó kölcsönösen meghatározzák egymást, így az inverz szórási feladat átfogalmazható úgy is, hogy a modulo π megadott fázistolás-sorozatból határozzuk meg a $q(r)$ pontenciált.

Unicitási és stabilitási kérdések

A fázistolások biztosan meghatározzák a potenciált, ha a potenciál nagyon gyorsan lecseng a végtelenben, vagy akár azonosan nulla nagy távolságban. Kompakt tartójú potenciálokra unicitást Loeffel [17] igazolt. Ugyanakkor $r^{-3/2}$-rendű lecsengés esetén már nincs unicitás, lehet konstruálni olyan *transzparens potenciálokat*, melyekre az összes fázistolás nulla, lásd Newton [18], 20.4. alfejezet.

A következő állítás szerint kompakt tartójú potenciálokat már a fázistolások egy „kis" részsorozata meghatároz:

3.2. Tétel. *Ramm, [20] Ha $q(r) = 0$, $r > a$-ra, és $rq(r) \in L_2(0, a)$, akkor*

$$\sum_{n\in L, n\neq 0} \frac{1}{n} = \infty \Rightarrow \{\delta_n : n \in L\} \text{ meghatározza } q\text{-t.}$$

Vagyis akár az összes fázistolást eldobhatjuk egy nulla sűrűségű indexsorozatot leszámítva; ha a meghagyott indexek reciprokösszege végtelen, a meghagyott fázistolások is csak egy potenciálhoz tartozhatnak. A [8] dolgozatban megmutattam, hogy az állítás a bővebb L_1 térben is igaz és egy „kicsit" nagyobb térben a feltétel szükséges lesz, azaz a feltétel megsértésével az unicitás elveszik:

3.3. Tétel. *Horváth [8] Az előző tétel állítása $q(r) = 0$, $r > a$-ra, és $rq(r) \in L_1(0, a)$ feltevés mellett is érvényes. Másrészt legyen $0 < \sigma < 2$ esetén*

$$B_\sigma = \{q : q(r) = 0, \text{ ha } r > a, r^{1-\sigma} q(r) \in L_1(0, a)\}.$$

Ha

$$\sum_{n\in L, n\neq 0} \frac{1}{n} < \infty,$$

akkor bármely $q \in B_\sigma$-hoz van egy különböző $q^* \in B_\sigma$, amelyre

$$\delta_n(q) = \delta_n(q^*), \quad \forall n \in L.$$

A bizonyítás alapgondolata a $\psi_n(r) = \sqrt{r} y_n(\log(a/r))$ változótranszformáció, amely az inverz szórási feladatot inverz sajátérték-feladatba viszi át, ezzel a sajátérték-feladatokra kidolgozott apparátus elérhetővé válik inverz szórási feladatok megoldására.

Konkrét inverziós eljárásokkal kapcsolatban megemlíthető az Apagyi, Horváth [2] cikk, ahol a nevezetes Gelfand–Levitan–Marchenko-integrálegyenlet magfüggvényét egy momentumfeladat megoldásaként közelítettük és az Apagyi, Horváth, Pálmai [13] dolgozat, ahol a Cox-Thompson inverziós módszer egy változatát vizsgáltuk.

Az inverz szórási feladatok unicitás esetén is csak gyengén stabilak. Egy tipikus eredmény, hogy ha a bemenő adatok hibája $|\delta_n(q) - \delta_n(q^*)| < \varepsilon$, akkor a $q - q^*$

eltérés valamilyen normában egy $\log\varepsilon$-t tartalmazó kifejezéssel becsülhető. Ez azt jelenti, hogy hiába javul radikálisan a bemenő adatok pontossága, a megtalált potenciál hibakorlátja alig változik. Egy ilyen eredmény és az előzményekről egy áttekintés olvasható a [11] dolgozatban:

3.4. TÉTEL. *(Horváth and Kiss [11]) Legyen* $D>0$ *és tegyük fel, hogy* $r|q(r)|\le D$, $\int_0^a |d(r^2q(r))|\le D$, *és hasonlóan* q^**-ra. Ha*

$$\left(\frac{2n}{ae}\right)^{2n} |\sin(\delta_n(q^*)-\delta_n(q))|<\varepsilon, \quad \forall n\le N,$$

akkor

$$\|r^2(q^*(r)-q(r))\|_{L_2(0,a)}\le c\left[\frac{1}{\sqrt{N}}+\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1/2}\right].$$

Itt tehát némileg realisztikusabban nem az összes fázistolásról, hanem csak az első néhányról tesszük fel, hogy ismerjük kis hibával. A kapott hibabecslés elég szegényes. A bemenő adatok hibájánál szereplő szorzótényező láttán feltételezhető, hogy a fázistolások nagyon gyorsan tartanak nullához. Ilyen kérdéseket tárgyalunk a következő részben.

A fázistolások sorozatának matematikai tulajdonságai

Nagyon érdekes lenne egy egyszerű belső jellemzés a δ_n sorozatokra, azaz megmondani, melyek azok a sorozatok, amelyek előállnak egy potenciál fázistolásaiként. Ettől feltehetően még messze vagyunk (Loeffel [17] cikkében a kompakt tartójú potenciálok fázistolásaira adott egy komplikált leírást), de a sorozat tagjainak eloszlására nézve vannak eredmények, ezek közül tárgyalunk néhányat.

Az egyszerűség kedvéért legyen $k=1$. Kompakt tartójú potenciálra a fázistolások gyors csökkenését mondja ki a következő

3.5. TÉTEL. *(Ramm [21]) Ha* $rq(r)\in L_2(0,a)$, $q=0$, *ha* $r>a$, *és* q *konstans előjelű valamilyen* $(a-\varepsilon,a)$ *szakaszon, akkor*

$$\lim_{n\to\infty} n|\delta_n|^{1/(2n)}=\frac{ae}{2}.$$

Az állítás következő kiterjesztése azt mondja, hogy ha a fázistolások eltérése elegendően kicsi, akkor a két potenciál megegyezik nagy r-ekre:

3.6. TÉTEL. *(Horváth [10]) Legyen* $rq(r)$, $rq^*(r)\in L_1(0,\infty)$.
a) Ha $q=q^*$ *m.m.* (a,∞)*-en, akkor minden elég nagy* n *indexre*

$$|\delta_n-\delta_n^*|\le\frac{c}{n^2}\left(\frac{ae}{2n}\right)^{2n}.$$

b) Megfordítva, ha q és q^* kompakt tartójú, $rq(r)$, $rq^*(r) \in L_1(0,\infty)$, és

$$\delta_n - \delta_n^* = \mathbf{O}\left(\left(\frac{a_1 e}{2n}\right)^{2n}\right), \quad n \to \infty$$

teljesül minden $a_1 > a$-ra, akkor $q = q^*$ m.m. (a,∞)-en.

A szórási amplitúdók eltérésére vonatkozó analóg állítás kimondásához legyen

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) e^{i\delta_n} \sin \delta_n P_n(t)$$

a szórási amplitúdó rövidebb jelölése.

3.7. Tétel. *(Horváth [10]) Legyen $rq(r)$, $rq^*(r) \in L_1(0,\infty)$, és $0 < a < \infty$. a) Ha $q = q^*$ m.m. (a,∞)-en, akkor $F(t) - F^*(t)$ a t komplex változóban egész függvény, és*

$$|F(t) - F^*(t)| \leq c(1 + |t|) \exp(a\sqrt{2|t|}).$$

b) Fordítva, ha q és q^* kompakt tartójú, $F(t) - F^*(t)$ egész függvény, és

$$F(t) - F^*(t) = \mathbf{O}\left(\exp(a_1\sqrt{2|t|})\right)$$

teljesül minden $a_1 > a$ esetén, akkor $q = q^*$ m.m. (a,∞)-en.

A fázistolások eloszlását illetően említünk végül néhány eredményt. Régóta ismert, hogy

$$\delta_{n+1} - \delta_n < \pi/2$$

(Regge [24]). A potenciál kis változásánál a fázistolások változását jellemzi a

$$-\dot{\delta}_n = \int_0^\infty \dot{q}\psi_n^2$$

variációs formula ([6, 9]). Eszerint q növelésével a fázistolások csökkennek, q csökkenésével pedig nőnek. Ennek felhasználásával igazolhatók a következő pontos alsó és felső becslések:

3.8. Tétel. *(Horváth [9]) Legyen $rq(r) \in L_1(0,a)$, $q = 0$ m.m. (a,∞)-en. Akkor*

$$\begin{aligned} -a <& \delta_0 < \infty, \\ -a + \arctan a <& \delta_1 < \infty, \\ \frac{\pi}{2} - a + \arctan \frac{a^2-3}{3a} <& \delta_2 < \infty, \end{aligned}$$

és általában

$$\arctan \frac{J_{n+1/2}(a)}{Y_{n+1/2}(a)} - k\pi < \delta_n < \infty,$$

ahol $Y_{n+1/2}$ *másodfajú Bessel-függvény, és* k *az* $Y_{n+1/2}$ *gyökeinek száma* $(0,a)$*-n. A becslések nem javíthatók.*

Ha további információink vannak a potenciálról, akkor jobb becslések is igazak:

3.9. Tétel. *(Horváth [7]) Az előző tétel feltételein túl tegyük fel, hogy* $q(r) \leq 1$ *m.m.* $(0,a)$*-n. Akkor*

$$\int_0^a r(1-q(r))\,dr < 1 \Rightarrow \arctan a - a \leq \delta_0 < \pi - a,$$
$$\int_0^a r(1-q(r))\,dr < 3 \Rightarrow \frac{\pi}{2} - a + \arctan \frac{a^2-3}{3a} \leq \delta_1 < \pi - a + \arctan a.$$

3.10. Tétel. *(Horváth [7]) Legyen* $rq(r) \in L_1(0,a)$, $q = 0$ *m.m.* (a,∞)*-en. Akkor*

$$\int_0^a r|1-q(r)|\,dr < 1 \text{ esetén } \frac{a^2}{1 - a\cot(\delta_1 + a)} > 1 + a\cot(\delta_0 + a).$$

Ha még $q \leq 1$ *is igaz m.m., akkor*

$$\frac{a^2}{1 - a\cot(\delta_1 + a)} \geq 2 + a\cot(\delta_0 + a),$$

és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $q = 1$ *m.m.* $(0,a)$*-n.*

A δ_0 és δ_1 közti arányosság becslését jelenleg is vizsgáljuk:

3.11. Tétel. *(Horváth and Sáfár [12]) Legyen* $0 < b < a < \pi/2$, $\mathrm{supp} q \subset [b,a]$, $q \geq 0$ *m.m.*, $rq(r) \in L_1(b,a)$*. Akkor*

$$\frac{(1/a - \cot a)^2}{(1/b - \cot b)^4}\delta_0 \leq \delta_1.$$

Érdekes lenne általában vizsgálni a két vagy több fázistolás közötti lineáris egyenlőtlenségeket (például δ_n és δ_k arányát). A fázistolás-sorozat sok más matematikai tulajdonsága is még felfedezésre vár.

Hivatkozások

[1] V. Alfaro and T. Regge: *Potential Scattering*, North-Holland, Amsterdam, (1965).

[2] B. Apagyi and M. Horváth: *Solution of the inverse scattering problem at fixed energy for potentials being zero beyond a fixed radius*, Modern Physics Letters B **22** (2008), No. **23**, 2137–2149.

[3] K. Chadan and P. C. Sabatier: *Inverse Problems in Quantum Scattering Theory*, Springer (1989).

[4] D. Colton and R. Kress: *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*, Springer (1998).

[5] L. D. Faddeev and O. A. Yakubovskii: *Lectures on Quantum Mechanics for Mathematics Students*, American Mathematical Society (2009).

[6] T. Ho and H. Rabitz: *Reconstruction of intermolecular potentials at fixed energy: Functional sensitivity analysis approach*, J. Chem. Phys. **89** (1988), No. **9**, 5614–5623.

[7] M. Horváth: *Inequalities between the fixed-energy phase shifts*, Int. J. Computing Science and Mathematics **3** (2010), No. **1-2**, 132–141.

[8] M. Horváth: *Inverse scattering with fixed energy and an inverse eigenvalue problem on the half-line*, Trans. Amer. Math. Soc. **358** (2006), No. **11**, 5161–5177.

[9] M. Horváth: *Notes on the distribution of phase shifts*, Modern Physics Letters B **22** (2008), No. **23**, 2163–2175.

[10] M. Horváth: *Partial identification of the potential from phase shifts*, J. Math. Anal. Appl. **380** (2011), No.**2**, 726–735.

[11] M. Horváth and M. Kiss: *On the stability of inverse scattering with fixed energy*, Inverse Problems **25** (2009), 015011.

[12] M. Horváth and O. Sáfár: *Inequalities between fixed-energy phase shifts II.*, (manuscript).

[13] M. Horváth, B. Apagyi and T. Pálmai: *Simplified solutions of the Cox-Thompson inverse scattering method at fixed energy*, J. Phys. A **41** (2008), 235305.

[14] V. Isakov: *Inverse Problems for Partial Differential Equations*, Springer (1998).

[15] A. Kirsch: *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*, Springer, Berlin Heidelberg New York (1996).

[16] P. Lax and R. Phillips: *Scattering Theory*, Academic Press (1967).

[17] J. Loeffel: *On an inverse problem in quantum scattering theory*, Ann. Inst. H. Poincaré **8** (1968), 339–447.

[18] R. G. Newton: *Scattering Theory of Waves and Particles*, Dover (2002).

[19] L. Päivärinta, K. Chadan, D. Colton and W. Rundell: *An Introduction to Inverse Scattering and Inverse Spectral Problems*, SIAM (1997).

[20] A. G. Ramm: *An inverse scattering problem with part of the fixed-energy phase shifts*, Comm. Math. Phys. **207** (1999), 231–247.

[21] A. G. Ramm: *Formula for the radius of the support of the potential in terms of scattering data*, J. Phys. A **31** (1998), 39–44.

[22] A. G. Ramm: *Inverse Problems*, Springer (2005).

[23] M. Reed and B. Simon: *Methods of Modern Mathematical Physics III. Scattering Theory*, Academic Press (1979).

[24] T. Regge: *Introducion to complex orbital momenta*, Nuovo Cimento **14** (1959), No. **5**, 951–976.

[25] G. Teschl: *Mathematical Methods in Quantum Mechanics, With Applications to Schrödinger Operators*, Providence, Rhode Island (2014).

[26] D. Yafaev: *Mathematical Scattering Theory: General Theory*, American Mathematical Society (1992).

[27] D. Yafaev: *Scattering Theory: Some Old and New Problems*, Springer (2000).

(Beérkezett: 2017. február 18.)

Horváth Miklós 1960-ban született Budapesten. A Fazekas Mihály Gimnáziumban érettségizett 1978-ban. 1979-től 1984-ig az ELTE matematikus szakára járt, 1984-ben diplomázott.

Munkahelyei: 1984–1987: TMB ösztöndíjas, 1987–1988: tudományos segédmunkatárs az ELTE TTK Analízis Tanszéken, 1988–1996: tanársegéd, majd docens a BME Villamosmérnökkari Matematika Tanszéken, 1996–2008: docens, 2008-tól egyetemi tanár a BME TTK Analízis Tanszéken. 2007-től az Analízis Tanszék vezetője, 2013-tól a Matematika Intézet igazgatója.

A matematikai tudomány kandidátusa címet 1991-ben szerezte meg. A BME-n habilitált 2001-ben. 2008-ban kapta meg a matematikai tudomány doktora fokozatot. Kutatási területe a lineáris differenciálegyenletek, elsősorban a Sturm-Liouville-operátorok spektrálelmélete, az inverz sajátérték-feladatok és az inverz szórási feladatok.

Egy könyv társszerkesztője, 53 folyóiratcikk szerzője. Publikációira az MTMT szerint 280 független hivatkozást kapott.

HORVÁTH MIKLÓS
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Matematika Intézet, Analízis Tanszék
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3-9.
horvath@math.bme.hu

SCATTERING THEORY: BASIC MATHEMATICAL IDEAS AND SOME RECENT PROBLEMS

Miklós Horváth

In this paper we present some basic mathematical ideas of scattering theory; emphasis is on the light presentation rather than on mathematical rigor. The quantum scattering with fixed energy and spherically symmetrical potential is discussed in more detail. Some recent results and open problems are also formulated.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok megjelenését támogatja
a Magyar Tudományos Akadémia Könyv- és Folyóiratkiadó Bizottsága.

A kiadásért felelős a BJMT főtitkára
Szedte és tördelte Éliás Mariann

Nyomta a Synra Nyomda és Kiadó Kft., Budapest
Felelős vezető: Szűcs Ernőné

Budapest, 2017
Megjelent 18 (A/5) ív terjedelemben
100 példányban
HU ISSN 0133-3399

ÚTMUTATÁS A SZERZŐKNEK

Az Alkalmazott Matematikai Lapok csak magyar nyelvű dolgozatokat közöl. A közlésre szánt dolgozatokat e-mailen az `aml@math.elte.hu` címre kérjük elküldeni az ábrákat tartalmazó fájlokkal együtt. Előnyben részesülnek a LaTeX-ben elkészített dolgozatok.

A kéziratok szerkezeti felépítésének a következő követelményeket kell kielégíteni:

Fejléc: A fejlécnek tartalmaznia kell a dolgozat címét és a szerző teljes nevét.

Kivonat: A fejléc után egy, képletet nem tartalmazó, legfeljebb 200 szóból álló kivonatot kell minden esetben megadni.

Fejezetek: A dolgozatot címmel ellátott szakaszokra kell bontani, és az egyes szakaszokat arab sorszámozással kell ellátni. Az esetleges bevezetésnek mindig az első szakaszt kell megnevezni.

A dolgozatban előforduló képleteket a dolgozat szakaszokra bontásától független, folytatólagos arab sorszámozással kell azonosítani. Természetesen nem szükséges minden képletet számozással ellátni, csak azokat, amelyekre a szerző a dolgozatban hivatkozni kíván.

Mind az ábrákat, mind a lábjegyzeteket szintén folytatólagos arab sorszámozással kell ellátni. Az ábrák elhelyezését a dolgozat megfelelő helyén ábraazonosító sorszámokkal kell megadni. A lábjegyzetekre a dolgozaton belül az azonosító sorszám felső indexkénti használatával lehet hivatkozni.

Az esetleges definíciókat és tételeket (segédtételeket és lemmákat) szakaszonként újrakezdődő, ponttal elválasztott, kettős számozással kell ellátni. Kérjük a szerzőket, hogy ezeket, valamint a tételek bizonyítását a szövegben kellő módon emeljék ki.

Irodalomjegyzék: A dolgozatok szövegében az irodalmi hivatkozás számait szögletes zárójelben kell megadni, mint például [2] vagy [1, 7–13].

Az irodalmi hivatkozások formája a következő: Minden hivatkozást fel kell sorolni a dolgozat végén található irodalomjegyzékben, a szerzők, illetve a társszerzők esetén az első szerző neve szerint alfabetikus sorrendben úgy, hogy a cirill betűs szerzők nevét a Mathematical Reviews átírási szabályai szerint latin betűsre kell átírni. A folyóiratban megjelent cikkekre [1], a könyvekre [2] a következő minta szerint kell hivatkozni:

[1] Farkas, J.: *Über die Theorie der einfachen Ungleichungen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **124**, (1902) 1–27.

[2] Zoutendijk, G.: *Methods of Feasible Directions*, Elsevier Publishing Company, Amsterdam and New York (1960), 120 o.

Szerző adatai: Az irodalomjegyzék után, a kézirat befejezéseképpen fel kell tüntetni a szerző teljes nevét és a munkahelye (esetleg lakása) pontos címét, illetve e-mail címét.

Idegen nyelvű kivonat: Minden dolgozathoz csatolni kell egy angol nyelvű összefoglalót.

A szerzők a dolgozatukról 20 darab ingyenes különlenyomatot kapnak. A dolgozatok után szerzői díjat az Alkalmazott Matematikai Lapok nem fizet.

TARTALOMJEGYZÉK

INDEX