

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
KÖZPONTI FIZIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK
KÖZLEMÉNYEI

10. KÖTET

6. SZÁM

1962

BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADEMIA
KÖZPONTI FIZIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK
K Ö Z L E M É N Y E I

Erő János, Kiss István, Mátrai Tibor, Náray Zsolt és Pál Lénárd
közreműködésével szerkeszti
Fenyves Ervin

10. kötet

1962

6. szám

T A R T A L O M J E G Y Z É K

	Oldal
1. Somogyi Antal és Uray László: Exponenciális abszorpció paramétereinek meghatározása irányeloszlásból a legnagyobb valószínűség módszerével.....	403
2. Praveczi Endre: A mágnesszettség meghatározása alacsony hőmérsékleten a Green-függvény alapján.....	423
3. Praveczi Endre: A Heisenberg modell mágnesszettségének meghatározása a Green-függvény módszer alapján $S > \frac{1}{2}$ esetén.....	427
4. Király Péter: Egy és két ismeretlen paraméter mérésének optimális tervezése Poisson-eloszlással kapcsolatos problémák esetén.....	433
5. Páris Gyula: Homogénterű gyorsítócsövek ionoptikai tulajdonságai.....	451

- . -

Technikai szerkesztő: Stancsich Györgyné

Kiadásért felelős: Jánossy Lajos

Megrendelve: 1962.nov.15.

Példányszám: 450

Készült Rotaprint eljárással

1299. KÖZPONTI FIZIKAI KUTATÓ INTÉZET
KIADÓI CSOPORT

EXPONENCIÁLIS ABSZORPCIÓ PARAMÉTEREINEK
MEGHATÁROZÁSA IRÁNYELOSZLÁSBÓL A LEGNA-
GYOBB VALÓSZÍNÜSÉG MÓDSZERÉVEL

Irta: Somogyi Antal és Uray László

Összefoglalás

Párhuzamos sík felületekkel határolt homogén abszorbeáló közeg tetejére eső izotróp sugárzás intenzitását az abszorbens alján különböző irányokban megmérve, az abszorpciós törvény meghatározható. Kidolgoztuk az exponenciális abszorpció együtthatójának ilymódon történő meghatározására szolgáló matematikai módszereket, a legnagyobb valószínűség elve alapján, mind a valódi, mind a vetített irányok mérése esetén. A számítások végrehajtásához szükséges segéd táblázatokat közöljük.

Kimutattuk, hogy az exponenciális abszorpciós törvénynek megfelelő irányeloszlás $\cos^x \Theta$ -val való közelítése az abszorpciós együttható értékét jelentékenyen megváltoztatja, tehát ez a gyakran alkalmazott közelítés nem engedhető meg.

I. Bevezetés

1.§. Kozmikus sugárzási részecskéknek a Föld légkörében bekövetkező abszorpcióját két lényegesen különböző uton vizsgálhatjuk és pedig vagy

a/ a kiválasztott részecske-intenzitást meghatározott /pl. függőleges/ irányban különböző tengerszintfeletti magasságokon mérjük, vagy pedig

b/ a kiválasztott részecske-intenzitást meghatározott tengerszintfeletti magasságon, különböző zenitszögek alatt mérjük. /"Zenitszög-eloszlás" mérése. "Vetített zenitszög-eloszlásról" beszélünk, ha a valódi zenitszögek helyett azoknak egy függőleges síkon való merőleges vetületét mérjük./

Az a/ módszerrel nyert adatok kiértékelésénél felmerülő matematikai statisztikai problémákat részletesen tárgyalta Jánossy és Rupp [1], [2]. Ebben a cikkben a b/ módszerrel nyert adatok kiértékelésénél felmerülő problémákkal foglalkozunk.

Sok mérést tettek már közzé kozmikus sugárzási részecskék irányeloszlásának, vagyis abszorpciójának meghatározására. Az alkalmazott statisztikai módszerek sok esetben kifogásolhatók, a vetített szögeloszlás statisztikai kiértékelése pedig egyáltalán nem volt még kidolgozva eddig.

A Kozmikus Sugárzási Laboratórium munkatársainak egy csoportja nemrég a kiterjedt légizapórok abszorpciós törvényét határozta meg a vetített szögeloszlás kimérése útján [3]. Ezzel kapcsolatban szükségessé vált a kiértékelés módszereinek pontos kidolgozása. Az elért eredmények nyilván nemcsak a kozmikus sugárzás területén alkalmazhatók, ezért az adatfeldolgozás módszereit s a hozzájuk szükséges táblázatokat ezuttal tesszük

közzé.

2.§ Feladatunkat a következőképpen fogalmazzuk: a végtelen, vízszintes sík felületekkel határolt z vastagságu abszorbens tetejére 2π térszögben izotróp részecskeintenzitás érkezik. Feltételezzük, hogy a részecskék az abszorbensben sem irányváltozást nem szenvednek, sem nem bomlanak.

A P pontban elhelyezett berendezéssel észleljük az abszorbens aljára leérkező részecskék irányát és pedig vagy

a/ a részecske zenitszögét, vagy pedig

b/ a zenitszög merőleges vetületét egy függőleges síkra.

Minden egyes szögmérés leolvasási pontossága $\pm \Delta\alpha$. A leolvasásokat célszerű úgy kerekíteni, hogy a

$$\Delta\alpha, 3\Delta\alpha, 5\Delta\alpha, \dots, (2n-3)\Delta\alpha, (n-1)\Delta\alpha + \frac{\pi}{4} \quad /1/$$

számadatokat valamelyikét jegyezzük fel, ahol $\Delta\alpha > 0$ és n az az egész szám, amelyre

$$\frac{\pi}{2} > (2n-2)\Delta\alpha \geq \frac{\pi}{2} - 2\Delta\alpha.$$

Az /1/ sorozatban szereplő szögeket valódi zenitszögek esetében $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_n$ -el, vetített zenitszögek esetében pedig $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n$ -el jelöljük. Tehát

$$\left. \begin{array}{l} \Theta_i \\ \vartheta_i \end{array} \right\} = (2i-1)\Delta\alpha \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \quad /2a/$$

és

$$\left. \begin{array}{l} \Theta_n \\ \vartheta_n \end{array} \right\} = (n-1)\Delta\alpha + \frac{\pi}{4} \quad /2b/$$

$$(\Delta\alpha > 0; \frac{\pi}{2} > (2n-2)\Delta\alpha \geq \frac{\pi}{2} - 2\Delta\alpha)$$

T idő alatt összesen N részecskét észlel a detektor, ezeknek megmérjük a lekerekített zenitszögét /vetített zenitszögét/. Jelentse N_i azon részecskék számát, amelyeknek zenitszöge kikerekítve éppen Θ_i , illetve vetített zenitszöge kikerekítve éppen ϑ_i . Nyilván

$$N = \sum_{i=1}^n N_i$$

Az N_i számok között természetesen a zérus is előfordulhat. Bizonyos esetekben - s további megfontolásaink csak ezekre az esetekre fognak vonatkozni - alapos okunk van feltételezni, hogy a részecskék abszorpciója exponenciális, vagyis az abszorbensben befutott l hosszúságu ut után a részecske-

intenzitás, $J(\ell)$ a következőképpen függ ℓ -től:

$$J(\ell) = J(0) \exp(-\ell/\lambda) . \quad /3/$$

Részecskeintenzitáson jelen esetben a következőt kívánjuk érteni: $J(\ell)d\omega dA$ jelentse a T idő alatt $d\omega$ térszögben a térszög irányára merőleges dA nagyságú felületen áthaladó részecskék számát, az abszorbensben befutott ℓ hosszúságú ut végén.

Feladatunk mármost a következő:

Az N_1, N_2, \dots, N_n észlelési sorozat alapján meghatározandó az $J(0)$ és a λ paraméterek és standard hibájuk legmegbízhatóbb értéke.

3.§. Az észlelt N_i ($i=1,2,\dots,n$) eloszlás a már említett befolyásoló tényezőkön kívül lényegesen függ még a detektor irányérzékenységétől is. Két esettel fogunk foglalkozni:

a/ Izotróp detektor esete. Izotrópnek nevezzük a detektort, ha érzékeny felülete és megszólalási valószínűsége minden irányból nézve ugyanaz.

b/ Koszínuszos detektor esete. Ilyen esetről beszélünk, ha a detektor érzékeny felületének és megszólalási valószínűségének szorzata arányos $\cos^2 \Theta$ - val, ahol Θ a zenitszög, γ tetszőszerinti ismert állandó. /A koszínuszos detektor $\gamma = 0$ speciális esetben izotróp detektort jelent/.

II. A paraméterek meghatározása a valódi /nem vetített/ zenitszögek eloszlásából.

4.§. A Θ zenitszög alatt érkező részecske az abszorbensben $\ell = z \sec \Theta$ utat tett meg. /3/ szerint tehát - figyelembevéve a részecskék stabilitását és mozgásirányuk változatlanóságát - a P pontban Θ zenitszög alatt beérkező részecskék intenzitása a következőképpen függ Θ - től:

$$J(z, \Theta) = J(0) \exp(-z \sec \Theta / \lambda) \quad /4/$$

Az észlelt részecskék irányának eloszlásfüggvénye pedig - a detektor irányérzékenységének figyelembevételével -

$$J\left(\frac{z}{\lambda}, \Theta\right) = J(z, \Theta) \cdot A \cos^2 \Theta = A J(0) \cos^2 \Theta \exp(-z \sec \Theta / \lambda)$$

alakba írható, ahol A a detektor geometriai méreteitől függő felületnagyság. A

$$z/\lambda = x, \quad A J(0) = J \quad /5/$$

jelölésekkel a szóbanforgó zenitszögeloszlás a következő alakba írható:

$$\mathfrak{F}(x, \Theta) = \mathfrak{F} \cos^{\delta} \Theta \exp(-x \sec \Theta) \quad /6/$$

5.§. A \mathfrak{F}, x konstansokat a legnagyobb valószínűség /maximum likelihood/ módszerével határozzuk meg. z ismert lévén, x -ből /5/ segítségével λ meghatározható.

A $[(2i-2)\Delta\alpha; 2i\Delta\alpha]$ zenitszög-intervallumban, /ahol $i=1,2,\dots,n$ azonban $2n\Delta\alpha$ helyett $\frac{\pi}{2}$ irandó/T idő alatt beérkező részek számának várható értéke

$$\bar{N}_i = 2\pi \mathfrak{F} f_i(x, \delta) \quad ,$$

ahol

$$f_i(x, \delta) = \int_{(2i-2)\Delta\alpha}^{2i\Delta\alpha} \cos^{\delta} \Theta \sin \Theta \exp(-x \sec \Theta) d\Theta \quad /7/$$

/ $i = 1, 2, \dots, n$, de $2n\Delta\alpha$ helyett $\frac{\pi}{2}$ irandó/.

Annak a valószínűsége, hogy az adott szögintervallumban T idő alatt \bar{N}_i helyett pontosan N_i számú részecskét észleljünk:

$$\frac{\bar{N}_i^{N_i}}{N_i!} e^{-\bar{N}_i} \quad .$$

Tehát annak a valószínűsége, hogy az adott szögintervallumokban T idő alatt éppen N_1, N_2, \dots, N_n számú részecskét észleljünk:

$$P = \prod_{i=1}^n \frac{\bar{N}_i^{N_i}}{N_i!} e^{-\bar{N}_i} \quad .$$

Bevezetve a

$$P_1 = \frac{\partial \ln P}{\partial \mathfrak{F}} \quad ; \quad P_2 = \frac{\partial \ln P}{\partial x}$$

$$P_{11} = \frac{\partial^2 \ln P}{\partial \mathfrak{F}^2} \quad ; \quad P_{12} = \frac{\partial^2 \ln P}{\partial \mathfrak{F} \partial x} \quad ; \quad P_{22} = \frac{\partial^2 \ln P}{\partial x^2} \quad /8/$$

jelöléseket, \mathfrak{F} és x értéke a

$$P_1 = 0 \quad , \quad P_2 = 0 \quad /9/$$

egyenletrendszerből határozható meg, éspedig x meghatározására a következő egyenletet nyerjük:

$$\sum_{i=1}^n \frac{N_i}{N} \frac{f_i(x, \delta-1)}{f_i(x, \delta)} = \frac{f(x, \delta-1)}{f(x, \delta)} \quad , \quad /10/$$

ahol

$$f(x, \gamma) = \sum_{i=1}^n f_i(x, y) \quad /11/$$

Könnyen igazolható, hogy $f(x, \gamma)$ azonos a $\gamma+2$ -edrendű exponenciális integrállal:

$$f(x, \gamma) \equiv E_{\gamma+2}(x) \equiv \int_1^{\infty} u^{-(\gamma+2)} e^{-ux} du \quad , \quad /12/$$

tehát /10/ a következő alakba írható:

$$\sum_{i=1}^n \frac{N_i}{N} \frac{f_i(x, \gamma-1)}{f_i(x, \gamma)} = \frac{E_{\gamma+1}(x)}{E_{\gamma+2}(x)} \quad /13/$$

\mathcal{J} értékét - x ismeretében - a következő összefüggésből nyerhetjük:

$$\mathcal{J} = \frac{N}{2\pi E_{\gamma+2}(x)} \quad /14/$$

Nem ismeretes olyan táblázat, amely $E_{\gamma+2}$ értékét $3 < \gamma+2 < 4$ esetén kellő pontossággal tartalmazza, ezért az $E_{\gamma+1}/E_{\gamma+2}$ hányadost $\gamma=1,4$ és $\gamma=1,6$ esetén numerikus integrálással kellett meghatározni. /1.1. táblázat/. Ezeket, valamint a többi táblázatokban és grafikonokban szereplő értékek is a Központi Fizikai Kutató Intézet elektronikus számológépén határoztuk meg.

6.§. A /13/ egyenlet megoldása rendkívül fárasztó. Ha azonban $\Delta\alpha$ elég kicsi, akkor az integrálközéptértéktétel alkalmazásával /13/ könnyen kezelhető alakra hozható.

Ha $\Delta\alpha$ olyan kicsi, hogy

$$\cos^{\theta} \ominus \sin \ominus \exp(-x \sec \ominus)$$

a $[(2i-2)\Delta\alpha; 2i\Delta\alpha]$ intervallumban első közelítésben állandónak tekinthető, akkor

$$f_i(x, \gamma) \approx \cos^{\theta} \ominus_i \sin \ominus_i \exp(-x \sec \ominus_i) \cdot 2\Delta\alpha$$

(\ominus_i jelentését l. /2/ alatt)

s így /14/-ből a következő egyszerű egyenletet nyerjük:

$$\sum_{i=1}^n \frac{N_i}{N} \sec \ominus_i = \frac{E_{\gamma+1}(x)}{E_{\gamma+2}(x)} \quad /15/$$

A baloldal nem tartalmazza x -et, csupán az észlelési adatokat, tehát a baloldal értékét kiszámítva x értéke az 1. táblázat segítségével egyszerű visszakereséssel nyerhető.

1. táblázat

Az $E_{\gamma+1}(x)/E_{\gamma+2}(x)$ függvény értékei^x

x	$\gamma=0$	$\gamma=1$	$\gamma=1,4$	$\gamma=1,6$	$\gamma=2$
1	1,4774	1,3537	1,3180	1,3023	1,2746
2	1,3028	1,2456	1,2275	1,2193	1,2042
3	1,2261	1,1916	1,1802	1,1749	1,1651
4	1,1817	1,1582	1,1502	1,1465	1,1395
5	1,1524	1,1352	1,1292	1,1264	1,1211
6	1,1314	1,1183	1,1136	1,1114	1,1072
7	1,1156	1,1052	1,1015	1,0997	1,0963
8	1,1033	1,0948	1,0918	1,0903	1,0875
9	1,0934	1,0864	1,0838	1,0826	1,0802
10	1,0853	1,0793	1,0771	1,0761	1,0740
11	1,0785	1,0734	1,0715	1,0706	1,0688
12	1,0727	1,0682	1,0666	1,0658	1,0643
13	1,0677	1,0638	1,0624	1,0616	1,0603
14	1,0634	1,0599	1,0586	1,0580	1,0568
15	1,0595	1,0565	1,0553	1,0548	1,0537
16	1,0562	1,0534	1,0524	1,0519	1,0509
17	1,0532	1,0507	1,0497	1,0493	1,0484
18	1,0504	1,0482	1,0474	1,0469	1,0461
19	1,0480	1,0460	1,0452	1,0448	1,0441
20	1,0458	1,0439	1,0432	1,0429	1,0422

^x A $\gamma=0, \gamma=1, \gamma=2$ oszlopok a [4]-ben közölt értékekből vannak számítva, a $\gamma=1,4$ és $\gamma=1,6$ oszlopok számítása numerikus integrálással történt.

7.§. A /9/ egyenletek megoldásával nyert paraméterértékek hibája, mint ismeretes, a következő formulákkal számítható:

$$(\delta z)^2 = \langle (z - \langle z \rangle)^2 \rangle = - \frac{\langle P_{22} \rangle}{D^2}$$

$$(\delta x)^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = - \frac{\langle P_{11} \rangle}{D^2} ,$$

ahol

$$D^2 = \langle P_{11} \rangle \langle P_{22} \rangle - \langle P_{12} \rangle .$$

Egyszerű számolással nyerhető, hogy

$$\langle P_{11} \rangle = - \frac{N}{J^2} \quad \langle P_{22} \rangle = - 2\pi z \sum_{i=1}^n \frac{f_i^2(x, \gamma-1)}{f_i(x, \gamma)}$$

$$\langle P_{12} \rangle = 2\pi E_{\gamma+1}(x) .$$

$\langle P_{22} \rangle$ -t az integrálközéértéktétellel átalakítva

$$\langle P_{22} \rangle \approx -2\pi \mathcal{F} E_{\vartheta}(x)$$

tehát

$$D^2 = 4\pi^2 [E_{\vartheta}(x)E_{\vartheta+2}(x) - E_{\vartheta+1}^2(x)]$$

s így

$$\frac{\delta \mathcal{F}}{\mathcal{F}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\sqrt{E_{\vartheta}(x)E_{\vartheta+2}(x)}}{\sqrt{E_{\vartheta}(x)E_{\vartheta+2}(x) - E_{\vartheta+1}^2(x)}} = \left[-N \frac{E_{\vartheta+2}(x)}{E_{\vartheta}(x)} \frac{d}{dx} \frac{E_{\vartheta+1}(x)}{E_{\vartheta+2}(x)} \right]^{-1/2}$$

$$\delta x = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{E_{\vartheta+2}(x)}{\sqrt{E_{\vartheta}(x)E_{\vartheta+2}(x) - E_{\vartheta+1}^2(x)}} = \left[-N \frac{d}{dx} \frac{E_{\vartheta+1}(x)}{E_{\vartheta+2}(x)} \right]^{-1/2}$$

/16/

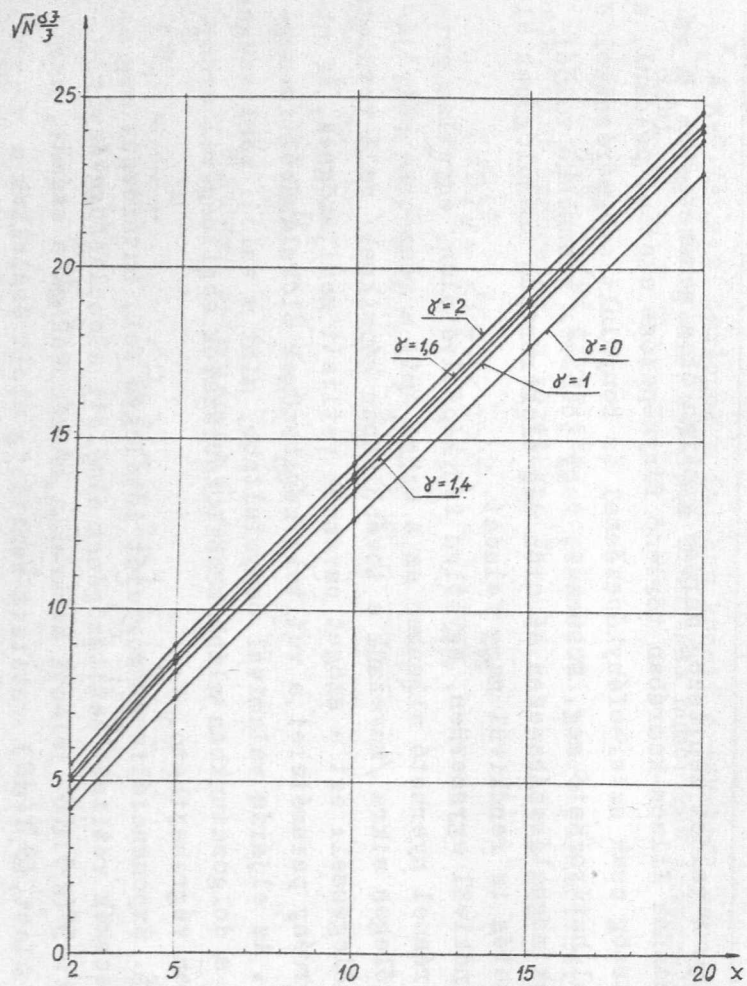
A /16/ jobboldalán szereplő exponenciális integrálokat $x=2,5,10,15$ és 20 esetén numerikus uton meghatározva nyertük az 1. és a 2. ábrán látható grafikonokat, amelyekről $\sqrt{N} \delta \mathcal{F} / \mathcal{F}$ és $\sqrt{N} \delta x$ értéke leolvasható.

III. A paraméterek meghatározása a vetített zenitszögek eloszlásából.

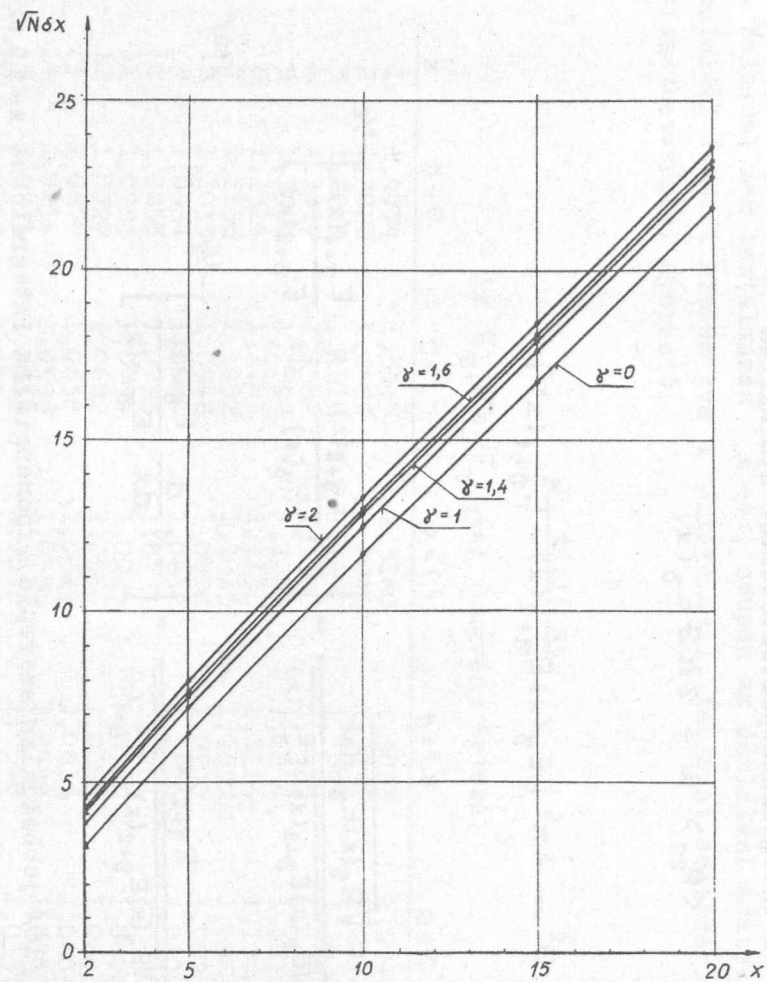
8.§. A valódi zenitszög mérése gyakran okoz nehézségeket, A részecskék nyomának Wilson-kamrában történő fényképezése esetén, például, a valódi zenitszög csak sztereofényképezéssel és bonyolult szögmérésekkel és számításokkal határozható meg. Több száz, vagy több ezer részecske valódi zenitszögének meghatározása ezen az uton még elektronikus számológépek alkalmazása esetén is rendkívül nagy feladat.

Rendkívül egyszerűen, egyetlen fényképfelvételen, egyetlen primitív szögméréssel nyerhető ellenben az a szög, amit a részecske pályájának egy függőleges síkra /nevezzük a továbbiakban képsíknak/ való vetülete alkot a függőlegessel: ezt a szöget nevezzük vetített zenitszögnek. Az abszorpciós törvény paraméterei a vetített zenitszögek eloszlásából is meghatározhatók. Az eljárás valamivel bonyolultabb, mint a valódi zenitszögek esetében, de a dolgozatunkban alább közölt táblázatok segítségével aránylag egyszerűen végrehajtható.

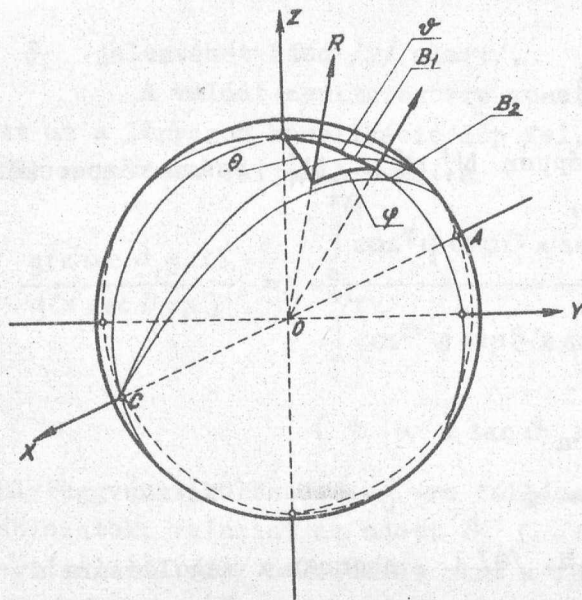
9.§. Exponenciális abszorpciót tételezve fel, határozzuk meg az észlelt részecskék vetített zenitszögének elméleti eloszlásfüggvényét, $\mathcal{F}^*(x, \vartheta)$ -t: $\mathcal{F}^*(x, \vartheta) d\vartheta$ jelenti azoknak a részecskéknek a számát, amelyeket T idő alatt, $(\vartheta, \vartheta+d\vartheta)$ vetített zenitszög alatt észlelünk a $z=x\lambda$ mélységben elhelyezett berendezéssel, amelynek irányérzékenysége $\sim \cos^2 \vartheta$.



1. ábra



2. ábra



3. ábra

A 3. ábrán az /YZ/ sík a képsík, amelyre merőlegesen vetítjük minden részecske pályáját. Nyilvánvaló, hogy minden olyan RO iránynak, amely az AB₁C és AB₂C főkörök határolta térszögben érkezik, ϑ és $\vartheta+d\vartheta$ közötti vetített zenitszöge van. Ezért

$$\mathfrak{F}^*(x, \vartheta) d\vartheta = \int \mathfrak{F}(x, \Theta) d\omega,$$

ahol az integrál az AB₁C és AB₂C főkörök határolta térszögre terjesztendő ki. Mivel /6/ szerint

$$\mathfrak{F}(x, \Theta) = \mathfrak{F} \cos^{\vartheta} \Theta \exp(-x \sec \Theta),$$

továbbá

$$\cos \Theta = \cos \vartheta \cos \varphi$$

/ φ jelentése a 3. ábrából látható/, továbbá

$$d\omega = \cos \varphi d\varphi d\vartheta,$$

azért

$$\mathfrak{F}^*(x, \vartheta) = \mathfrak{F} \cos^{\vartheta} \vartheta g(x \sec \vartheta, \vartheta), \quad /17/$$

ahol

$$g(x \sec \vartheta, \vartheta) = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{\vartheta+1} \varphi \exp(-x \sec \vartheta \sec \varphi) d\varphi.$$

10. §. A /17/ eloszlásfüggvény alapján \mathfrak{F} és $x = \frac{z}{\lambda}$ a legnagyobb valószínűség módszerével meghatározható.

Jelentse N_i^* azoknak a T idő alatt észlelt részecskéknek a számát, amelyek vetített zenitszöge abszolút értékben $(2i-2)\Delta\alpha$ és $2i\Delta\alpha$ közé esik / $i = 1, 2, \dots, n$, de $2n\Delta\alpha$ helyett $\frac{\pi}{2}$ irandó/. Jelentse továbbá \bar{N}_i^* az N_i^* várható értékét. További jelölések:

$$N^* = \sum_{i=1}^n N_i^*$$

$$h_i(x, \vartheta) = \int_{(2i-2)\Delta\alpha}^{2i\Delta\alpha} \cos^{\vartheta} \vartheta g(\sec \vartheta, \vartheta) d\vartheta$$

$$h(x, \vartheta) = \sum_{i=1}^n h_i(x, \vartheta)$$

/ $i = 1, 2, \dots, n$, azonban $2n\Delta\alpha$ helyett $\frac{\pi}{2}$ irandó/.

Nyilván

$$N_i^* = 2\mathfrak{F} h_i(x, \gamma)$$

Annak valószínűsége, hogy éppen $N_1^*, N_2^*, \dots, N_n^*$ számú részecskét észleljünk az egyes intervallumokban,

$$P^* = \prod_{i=1}^n \frac{\overline{N_i^*}^{N_i^*}}{N_i^*!} e^{-\overline{N_i^*}}$$

\mathfrak{F} és x meghatározása céljából tehát a

$$P_1^* = 0, \quad P_2^* = 0$$

egyenletrendszert kell megoldani, [v.ö. /8/], ahonnan x megoldására a következő egyenlet adódik:

$$\sum_{i=1}^n \frac{N_i^*}{N^*} \frac{h_i(x, \gamma-1)}{h_i(x, \gamma)} = \frac{h(x, \gamma-1)}{h(x, \gamma)} \quad /18/$$

Bebizonyítható, hogy

$$h(x, \gamma) \equiv \pi f(x, \gamma) \equiv \pi E_{\gamma+2}(x), \quad /19/$$

ugyanis $2\pi\mathfrak{F}f(x, \gamma)$ és $2\mathfrak{F}h(x, \gamma)$ egyaránt a felső féltérből T idő alatt a detektorra eső, regisztrált részecskék számának várható értékét jelenti, a különbség az integrálás sorrendjében van. Tehát /19/ a következő alakba írható:

$$\sum_{i=1}^n \frac{N_i^*}{N^*} \frac{h_i(x, \gamma-1)}{h_i(x, \gamma)} = \frac{E_{\gamma+1}(x)}{E_{\gamma+2}(x)} \quad /20/$$

\mathfrak{F} a következő összefüggésből számítható:

$$\mathfrak{F} = N^* / (2\pi E_{\gamma+2}(x))$$

/20/ jobb oldala x függvényében az 1. táblázatban található.

11.§. /20/ megoldása céljából alkalmazzuk h_i -re az integrálközéppértéktételt. Ha $\Delta\alpha$ olyan kicsi, hogy $\cos^2 \vartheta g(x \sec \vartheta, \gamma)$ állandónak tekinthető a $[(2i-2)\Delta\alpha; 2i\Delta\alpha]$ intervallumban, akkor /20/ így írható:

$$\sum_{i=1}^n \frac{N_i^*}{N^*} \sec \vartheta_i \frac{g(x \sec \vartheta_i, \gamma-1)}{g(x \sec \vartheta_i, \gamma)} = \frac{E_{\gamma+1}(x)}{E_{\gamma+2}(x)}, \quad /21/$$

/ ϑ_i jelentését lásd /2/ alatt/.

A valódi zenitszögekre vonatkozó analóg /15/ egyenlettel szemben itt az a lényeges komplikáció lép fel, hogy a baloldal is függ x -től. /21/ megoldása céljából tehát a

$$\frac{g(x \sec \vartheta, \vartheta-1)}{g(x \sec \vartheta, \vartheta)} = \frac{\int_0^{\pi/2} \cos^{\vartheta} \varphi \exp(-x \sec \vartheta \sec \varphi) d\varphi}{\int_0^{\pi/2} \cos^{\vartheta+1} \varphi \exp(-x \sec \vartheta \sec \varphi) d\varphi} = S_{\vartheta}(t) \quad /22/$$

$$(t = x \sec \vartheta)$$

sulyfüggvényt különböző ϑ -ra táblázatokba kell foglalni /2.táblázat/. E táblázatok, valamint az adott ϑ_i ($i=1,2,\dots,n$) és N_i^* ($i=1,2,\dots,n$) értékek segítségével /21/ baloldalát mint x függvényét kell ábrázolni. E görbének és az $E_{\vartheta+1}(x)/E_{\vartheta+2}(x)$ görbének a metszéspontja szolgáltatja x értékét.

2. táblázat

Az $S_{\vartheta}(t)$ függvény értékei

t	$\vartheta = 0$	$\vartheta = 1$	$\vartheta = 1,4$	$\vartheta = 1,6$	$\vartheta = 2$
1,0	1,1997	1,1504	1,1362	1,1300	1,1190
1,1	1,1904	1,1450	1,1318	1,1259	1,1156
1,2	1,1820	1,1400	1,1276	1,1222	1,1124
1,3	1,1744	1,1354	1,1238	1,1186	1,1094
1,4	1,1675	1,1311	1,1202	1,1154	1,1066
1,5	1,1612	1,1272	1,1169	1,1123	1,1040
1,6	1,1554	1,1235	1,1137	1,1094	1,1015
1,7	1,1500	1,1200	1,1108	1,1066	1,0991
1,8	1,1450	1,1167	1,1080	1,1040	1,0969
1,9	1,1404	1,1137	1,1054	1,1016	1,0948
2,0	1,1361	1,1108	1,1029	1,0993	1,0927
2,1	1,1320	1,1081	1,1005	1,0971	1,0908
2,2	1,1282	1,1055	1,0983	1,0950	1,0890
2,3	1,1247	1,1030	1,0961	1,0930	1,0872
2,4	1,1213	1,1007	1,0941	1,0911	1,0855
2,5	1,1182	1,0985	1,0922	1,0893	1,0839
2,6	1,1152	1,0964	1,0903	1,0875	1,0824
2,7	1,1124	1,0944	1,0885	1,0858	1,0809
2,8	1,1097	1,0924	1,0868	1,0842	1,0795
2,9	1,1071	1,0906	1,0852	1,0827	1,0781
3,0	1,1047	1,0888	1,0836	1,0812	1,0768
3,1	1,1024	1,0871	1,0821	1,0798	1,0755
3,2	1,1002	1,0855	1,0807	1,0784	1,0743
3,3	1,0981	1,0839	1,0793	1,0771	1,0731
3,4	1,0960	1,0824	1,0779	1,0758	1,0719
3,5	1,0941	1,0810	1,0766	1,0746	1,0708
3,6	1,0923	1,0796	1,0754	1,0734	1,0697
3,7	1,0905	1,0783	1,0742	1,0723	1,0687
3,8	1,0888	1,0770	1,0730	1,0712	1,0677
3,9	1,0871	1,0757	1,0719	1,0701	1,0667
4,0	1,0856	1,0745	1,0708	1,0690	1,0658

t	$\gamma = 0$	$\gamma = 1$	$\gamma = 1,4$	$\gamma = 1,6$	$\gamma = 2$
4,0	1,0856	1,0745	1,0708	1,0690	1,0658
4,1	1,0840	1,0733	1,0697	1,0680	1,0649
4,2	1,0826	1,0722	1,0687	1,0671	1,0640
4,3	1,0812	1,0711	1,0677	1,0661	1,0631
4,4	1,0798	1,0701	1,0667	1,0652	1,0623
4,5	1,0785	1,0690	1,0658	1,0643	1,0614
4,6	1,0772	1,0680	1,0649	1,0634	1,0606
4,7	1,0760	1,0671	1,0640	1,0626	1,0599
4,8	1,0748	1,0661	1,0632	1,0618	1,0591
4,9	1,0737	1,0652	1,0623	1,0610	1,0584
5,0	1,0725	1,0643	1,0615	1,0602	1,0577
5,1	1,0715	1,0635	1,0607	1,0594	1,0570
5,2	1,0704	1,0626	1,0600	1,0587	1,0563
5,3	1,0694	1,0618	1,0592	1,0580	1,0556
5,4	1,0684	1,0610	1,0585	1,0573	1,0550
5,5	1,0674	1,0603	1,0578	1,0566	1,0544
5,6	1,0665	1,0595	1,0571	1,0559	1,0537
5,7	1,0656	1,0588	1,0564	1,0553	1,0531
5,8	1,0647	1,0581	1,0557	1,0546	1,0526
5,9	1,0639	1,0574	1,0551	1,0540	1,0520
6,0	1,0630	1,0567	1,0545	1,0534	1,0514
6,5	1,0592	1,0535	1,0515	1,0506	1,0488
7,0	1,0558	1,0507	1,0489	1,0481	1,0464
7,5	1,0528	1,0482	1,0466	1,0458	1,0443
8,0	1,0501	1,0459	1,0444	1,0437	1,0424
8,5	1,0476	1,0438	1,0425	1,0418	1,0406
9,0	1,0454	1,0420	1,0407	1,0401	1,0390
9,5	1,0434	1,0402	1,0391	1,0385	1,0375
10,0	1,0416	1,0386	1,0376	1,0371	1,0361
10,5	1,0399	1,0372	1,0362	1,0357	1,0348
11,0	1,0383	1,0358	1,0349	1,0344	1,0336
11,5	1,0369	1,0346	1,0337	1,0333	1,0325
12,0	1,0356	1,0334	1,0326	1,0322	1,0314
12,5	1,0343	1,0323	1,0315	1,0312	1,0305
13,0	1,0332	1,0313	1,0306	1,0302	1,0295
13,5	1,0321	1,0303	1,0296	1,0293	1,0287
14,0	1,0311	1,0294	1,0288	1,0285	1,0279
14,5	1,0302	1,0286	1,0280	1,0277	1,0271
15,0	1,0293	1,0277	1,0272	1,0269	1,0264
15,5	1,0284	1,0270	1,0265	1,0262	1,0257
16,0	1,0276	1,0263	1,0258	1,0255	1,0250
16,5	1,0269	1,0256	1,0251	1,0249	1,0244
17,0	1,0262	1,0250	1,0245	1,0243	1,0238
17,5	1,0255	1,0243	1,0239	1,0237	1,0233
18,0	1,0249	1,0238	1,0233	1,0231	1,0227
18,5	1,0243	1,0232	1,0228	1,0226	1,0222
19,0	1,0237	1,0227	1,0223	1,0221	1,0217
19,5	1,0231	1,0222	1,0218	1,0216	1,0213
20,0	1,0226	1,0217	1,0213	1,0212	1,0208
20	1,0226	1,0217	1,0213	1,0212	1,0208
21	1,0216	1,0208	1,0204	1,0203	1,0200
22	1,0207	1,0199	1,0196	1,0195	1,0192
23	1,0199	1,0192	1,0189	1,0188	1,0185
24	1,0191	1,0185	1,0182	1,0181	1,0178
25	1,0184	1,0178	1,0176	1,0174	1,0172
26	1,0178	1,0172	1,0170	1,0168	1,0166
27	1,0172	1,0166	1,0164	1,0163	1,0161
28	1,0166	1,0161	1,0159	1,0158	1,0156
29	1,0160	1,0156	1,0154	1,0153	1,0151
30	1,0155	1,0151	1,0149	1,0148	1,0147

t	$\vartheta = 0$	$\vartheta = 1$	$\vartheta = 1,4$	$\vartheta = 1,6$	$\vartheta = 2$
30	1,0155	1,0151	1,0149	1,0148	1,0147
31	1,0151	1,0147	1,0145	1,0144	1,0143
32	1,0146	1,0142	1,0141	1,0140	1,0139
33	1,0142	1,0138	1,0137	1,0136	1,0135
34	1,0138	1,0135	1,0133	1,0133	1,0131
35	1,0135	1,0131	1,0130	1,0129	1,0128
36	1,0131	1,0128	1,0127	1,0126	1,0125
37	1,0128	1,0125	1,0123	1,0123	1,0122
38	1,0124	1,0122	1,0120	1,0120	1,0119
39	1,0121	1,0119	1,0118	1,0117	1,0116
40	1,0119	1,0116	1,0115	1,0114	1,0113
40	1,0119	1,0116	1,0115	1,0114	1,0113
45	1,0106	1,0104	1,0103	1,0103	1,0102
50	1,0096	1,0094	1,0093	1,0093	1,0092
55	1,0087	1,0086	1,0085	1,0085	1,0085
60	1,0080	1,0079	1,0079	1,0078	1,0078
65	1,0074	1,0073	1,0073	1,0073	1,0072
70	1,0069	1,0068	1,0068	1,0068	1,0067
75	1,0065	1,0064	1,0064	1,0063	1,0063
80	1,0061	1,0060	1,0060	1,0060	1,0059
85	1,0057	1,0057	1,0056	1,0056	1,0056
90	1,0054	1,0054	1,0053	1,0053	1,0053
95	1,0051	1,0051	1,0051	1,0051	1,0050
100	1,0049	1,0048	1,0048	1,0048	1,0048
100	1,0049	1,0048	1,0048	1,0048	1,0048
110	1,0045	1,0044	1,0044	1,0044	1,0044
120	1,0041	1,0041	1,0040	1,0040	1,0040
130	1,0038	1,0038	1,0037	1,0037	1,0037
140	1,0035	1,0035	1,0035	1,0035	1,0035
150	1,0033	1,0033	1,0033	1,0033	1,0032
160	1,0031	1,0031	1,0031	1,0031	1,0030
170	1,0029	1,0029	1,0029	1,0029	1,0029
180	1,0027	1,0027	1,0027	1,0027	1,0027
190	1,0026	1,0026	1,0026	1,0026	1,0026
200	1,0025	1,0025	1,0025	1,0025	1,0024
210	1,0024	1,0023	1,0023	1,0023	1,0023
220	1,0023	1,0022	1,0022	1,0022	1,0022
230	1,0022	1,0021	1,0021	1,0021	1,0021
240	1,0021	1,0021	1,0021	1,0021	1,0020
250	1,0020	1,0020	1,0020	1,0020	1,0020
260	1,0019	1,0019	1,0019	1,0019	1,0019
270	1,0018	1,0018	1,0018	1,0018	1,0018
280	1,0018	1,0018	1,0018	1,0018	1,0018
290	1,0017	1,0017	1,0017	1,0017	1,0017
300	1,0017	1,0016	1,0016	1,0016	1,0016
300	1,0017	1,0016	1,0016	1,0016	1,0016
350	1,0014	1,0014	1,0014	1,0014	1,0014
400	1,0012	1,0012	1,0012	1,0012	1,0012
450	1,0011	1,0011	1,0011	1,0011	1,0011
500	1,0010	1,0010	1,0010	1,0010	1,0010
550	1,0009	1,0009	1,0009	1,0009	1,0009
600	1,0008	1,0008	1,0008	1,0008	1,0008
650	1,0008	1,0008	1,0008	1,0008	1,0008
700	1,0007	1,0007	1,0007	1,0007	1,0007
750	1,0007	1,0007	1,0007	1,0007	1,0007
800	1,0006	1,0006	1,0006	1,0006	1,0006
850	1,0006	1,0006	1,0006	1,0006	1,0006
900	1,0006	1,0006	1,0006	1,0006	1,0006
950	1,0005	1,0005	1,0005	1,0005	1,0005
1000	1,0005	1,0005	1,0005	1,0005	1,0005

12.§. ϑ és x hibájának meghatározása ugyanugy hajtandó végre, mint azt a 7.§-ban leirtuk, csak P és deriváltjai helyébe mindenütt P^* és deriváltjai irandók.

Esetünkben

$$\langle P_{11}^* \rangle = -N^* / \vartheta^2$$

$$\langle P_{12}^* \rangle = 2\pi E_{\vartheta+1}(x) \quad /23/$$

$$\langle P_{22}^* \rangle = -2\vartheta \sum_{i=1}^n \frac{h_i^2(x, \vartheta-1)}{h_i(x, \vartheta)}$$

Ez utóbbit az integrálközéértéktétellel átalakítva:

$$\langle P_{22}^* \rangle \approx -2\pi \vartheta K_{\vartheta}(x) \quad ,$$

ahol

$$K_{\vartheta}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^{\vartheta-2} \vartheta \frac{g^2(x \sec \vartheta, \vartheta-1)}{g(x \sec \vartheta, \vartheta)} d\vartheta \quad . \quad /24/$$

$K_{\vartheta}(x)$ néhány értékét a 3. táblázatban állítottuk össze. /14/ tekintetbevételével

$$\frac{\delta \vartheta}{\vartheta} = \frac{1}{\sqrt{N^*}} \frac{\sqrt{K_{\vartheta}(x) E_{\vartheta+2}(x)}}{\sqrt{K_{\vartheta}(x) E_{\vartheta+2}(x) - E_{\vartheta+1}^2(x)}} \quad /25/$$

$$\delta x = \frac{1}{\sqrt{N^*}} \frac{E_{\vartheta+2}(x)}{\sqrt{K_{\vartheta}(x) E_{\vartheta+2}(x) - E_{\vartheta+1}^2(x)}}$$

A /25/ jobboldalán szereplő törtek értékét kiszámítva és mellett számára a 4. és 5. ábrán feltüntetett grafikonokat nyertük.

A 4. és 5. ábra grafikonjait összehasonlítva az 1. és 2. ábra grafikonjaival, megállapíthatjuk, hogy a vetített szögeloszlásból az abszorpció együttható mintegy 35 - 40 %-al nagyobb hibával határozható meg, mint a valódi szögeloszlásból. Esetenként külön mérlegelendő, hogy érdemes-e a valódi zenitszögek mérésével járó óriási munkatöbbletet vállalni a pontosság 35 - 40 %-os növelése érdekében.

13. §. A /24/ egyenlet megoldása is elég tetemes numerikus számolást igényel. Jánossy mutatott rá arra, hogy ilyen esetekben igen sok előnnyel jár a Newton-féle iterációs eljárás alkalmazása, mert az eljárás rendkívül egyszerűen végrehajtható, többnyire gyorsan konvergál és az iterációs

A /25/ jobboldalán szereplő törtek értékét $x = 2, 5, 10, 15, 20$ mellett kiszámítva $\sqrt{N} \cdot \delta \vartheta / \vartheta$ és $\sqrt{N} \cdot \delta x$ számára a 4. és 5. ábrán feltüntetett grafikonokat nyertük.

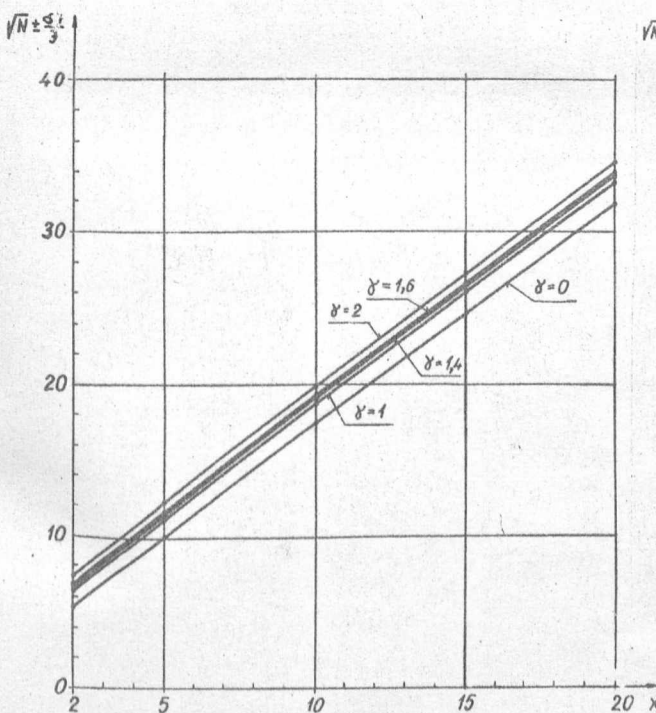
A 4. és 5. ábra grafikonjait összehasonlítva az 1. és 2. ábra grafikonjaival, megállapíthatjuk, hogy a vetített szögeloszlásból az abszorpciók együttható mintegy 35 - 40 %-al nagyobb hibával határozható meg, mint a valódi szögeloszlásból. Esetenként külön mérlegelendő, hogy érdemes-e a valódi zenitszögek mérésével járó óriási munkatöbbletet vállalni a pontosság 35 - 40 %-os növelése érdekében.

13. §. A /24/ egyenlet megoldása is elég tetemes numerikus számolást igényel. Jánossy mutatott rá arra, hogy ilyen esetekben igen sok előnyvel jár a Newton-féle iterációs eljárás alkalmazása, mert az eljárás rendkívül egyszerűen végrehajtható, többnyire gyorsan konvergál és az iterációs

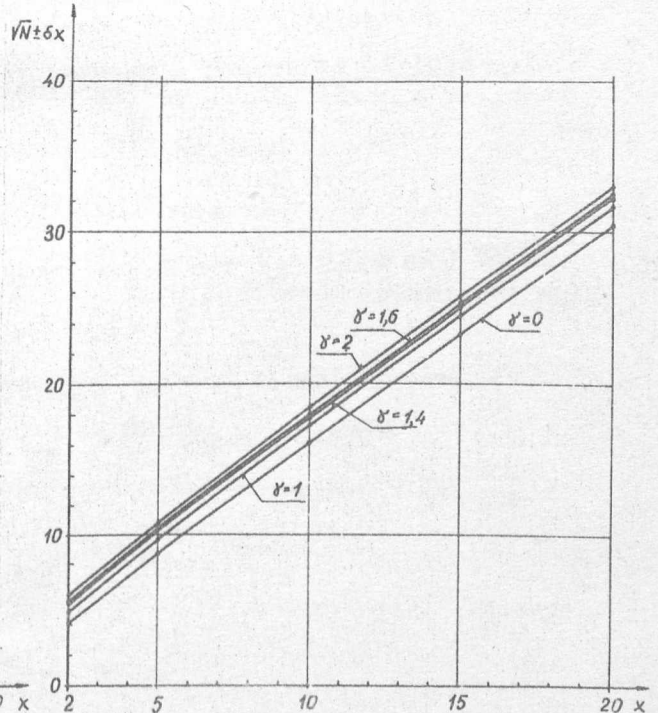
3. táblázat

A $K_{\gamma}(x)$ függvény értékei

x	$\gamma = 0$	$\gamma = 1$	$\gamma = 1,4$	$\gamma = 1,6$	$\gamma = 2$
2	$6,596 \cdot 10^{-2}$	$4,785 \cdot 10^{-2}$	$4,298 \cdot 10^{-2}$	$4,080 \cdot 10^{-2}$	$3,699 \cdot 10^{-2}$
5	$1,336 \cdot 10^{-3}$	$1,132 \cdot 10^{-3}$	$1,076 \cdot 10^{-3}$	$1,046 \cdot 10^{-3}$	$9,907 \cdot 10^{-4}$
10	$4,526 \cdot 10^{-6}$	$4,146 \cdot 10^{-6}$	$4,010 \cdot 10^{-6}$	$3,945 \cdot 10^{-6}$	$3,813 \cdot 10^{-6}$
15	$2,035 \cdot 10^{-8}$	$1,916 \cdot 10^{-8}$	$1,872 \cdot 10^{-8}$	$1,850 \cdot 10^{-8}$	$1,808 \cdot 10^{-8}$
20	$1,030 \cdot 10^{-10}$	$9,827 \cdot 10^{-11}$	$9,656 \cdot 10^{-11}$	$9,561 \cdot 10^{-11}$	$9,397 \cdot 10^{-11}$



4. ábra



5. ábra

egyenletek együtthatói P^* másodrendű logaritmikus deriváltjai ($\langle P_{11}^* \rangle$, $\langle P_{12}^* \rangle$, $\langle P_{22}^* \rangle$), amelyeket a hibaszámításhoz amugyis meg kell határozni. /lásd pl. [1] /

\mathfrak{J} és x egy közelítő értékét / \mathfrak{J}_0, x_0 / valamilyen közelítő eljárással meghatározva a következő közelítés / \mathfrak{J}_1, x_1 / a következő iterációs egyenletekből határozható meg:

$$P_1^*(\mathfrak{J}_0, x_0) + (\mathfrak{J}_1 - \mathfrak{J}_0) \langle P_{11}^*(\mathfrak{J}_0, x_0) \rangle + (x_1 - x_0) \langle P_{12}^*(\mathfrak{J}_0, x_0) \rangle = 0$$

$$P_2^*(\mathfrak{J}_0, x_0) + (\mathfrak{J}_1 - \mathfrak{J}_0) \langle P_{12}^*(\mathfrak{J}_0, x_0) \rangle + (x_1 - x_0) \langle P_{22}^*(\mathfrak{J}_0, x_0) \rangle = 0 .$$

/26/

Esetünkben

$$P_1^*(\mathfrak{J}, x) = \frac{N^*}{\mathfrak{J}} - 2\pi E_{\mathfrak{J}+2}(x)$$

és

$$P_2^*(\mathfrak{J}, x) = 2\pi \mathfrak{J} E_{\mathfrak{J}+1}(x) - \sum_{i=1}^n N_i^* \frac{h_i(x, \mathfrak{J}-1)}{h_i(x, \mathfrak{J})} .$$

/27/

P_2^* kifejezésében a h_i integrálokra a középértéktételt alkalmazva /v.ö. /22/ /

$$P_2^*(\mathfrak{J}, x) \approx 2\pi \mathfrak{J} E_{\mathfrak{J}+1}(x) - \sum_{i=1}^n N_i^* \sec \vartheta_i S_{\mathfrak{J}}(x \sec \vartheta_i) ,$$

/28/

/ ϑ_i jelentését lásd /2/ alatt/.

/23/, /27/, /28/, valamint a $K_{\mathfrak{J}}$ és az $S_{\mathfrak{J}}$ táblázatok segítségével tehát felírhatjuk a /26/ alatti iterációs egyenleteket s így megfelelő számú lépésben \mathfrak{J} és x tetszés szerinti pontosságú értékét nyerhetjük.

IV. Közelítő eljárások a paraméterek meghatározására.

14. §. Gyakran alkalmazott közelítés a következő: Minthogy

$$(1+s)e^{-s} = 1 - \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3} - \dots$$

azért $0 \leq s \leq 0,2$ esetén 2%-nál kisebb hibával

$$(1+s)e^{-s} \approx 1 .$$

$1+s$ helyébe $\sec \Theta$ -t írva, $0 \leq \Theta \leq 33^\circ$ esetén 2%-nál kisebb hibával

$$e^{-(\sec \Theta - 1)} \approx \cos \Theta$$

/29/

s így /6/ helyett

$$\mathfrak{J}(x, \Theta) = \mathfrak{J}_0 \cos^{\mathfrak{J}+x} \Theta$$

/30/

írható, ahol

$$\mathfrak{J}_0 = \mathfrak{J} e^{-x}$$

/30/ alakú eloszlás esetén

$$\bar{N}_i = 2\pi \mathcal{F}_0 \int_{(2i-2)\Delta\alpha}^{2i\Delta\alpha} \cos^{\gamma+x} \Theta \sin \Theta d\Theta, \quad ,$$

és a /9/ egyenletrendszer x meghatározására a következő egyenletet adja:

$$\sum_{i=1}^n \frac{N_i}{N} \frac{\int_{(2i-2)\Delta\alpha}^{2i\Delta\alpha} \cos^{\gamma+x} \Theta \sin \Theta \ln \cos \Theta d\Theta}{\int_{(2i-2)\Delta\alpha}^{2i\Delta\alpha} \cos^{\gamma+x} \Theta \sin \Theta d\Theta} = - \frac{1}{1+\gamma+x}, \quad ,$$

amit az integrálközéértéktétel segítségével a

$$\sum_{i=1}^n \frac{N_i}{N} \ln \cos \Theta_i = - \frac{1}{1+\gamma+x} \quad /31/$$

alakba írhatunk.

/31/ egyszerűbb, mint az analóg /15/ egyenlet, bár a /15/ egyenlet megoldása sem jelentett különösebb nehézséget.

A /29/ közelítés előnye azonban vetített szögeloszlás kiértékelésénél domborodik ki igazán. /29/ segítségével ugyanis a vetített zenitszögek eloszlása /17/ helyett a következő alakba írható:

$$\mathcal{F}^*(x, \vartheta) = \mathcal{F}_0^* \cos^{\gamma+x} \vartheta, \quad ,$$

ahol

$$\mathcal{F}_0^* = 2\mathcal{F}_0 \int_0^{\pi/2} \cos^{\gamma+x+1} \vartheta d\vartheta. \quad /32/$$

Tehát, ha a valódi zenitszögek eloszlása $\cos^{\gamma+x} \Theta$ alakú, akkor a vetített zenitszögek eloszlása is $\cos^{\gamma+x} \vartheta$ alakú. /32/-ből

$$\bar{N}_i^* = 2\mathcal{F}_0^* \int_{(2i-2)\Delta\alpha}^{2i\Delta\alpha} \cos^{\gamma+x} \vartheta d\vartheta$$

s ennek alapján a /9/ egyenletrendszer x -re a következő egyenletet szolgáltatja:

$$\sum_{i=1}^n \frac{N_i^*}{N^*} \frac{\int_{(2i-2)\Delta\alpha}^{2i\Delta\alpha} \cos^{\gamma+x} \vartheta \ln \cos \vartheta d\vartheta}{\int_{(2i-2)\Delta\alpha}^{2i\Delta\alpha} \cos^{\gamma+x} \vartheta d\vartheta} = \frac{\int_0^{\pi/2} \cos^{\gamma+x} \vartheta \ln \cos \vartheta d\vartheta}{\int_0^{\pi/2} \cos^{\gamma+x} \vartheta d\vartheta}. \quad /33/$$

Mivel

$$\int_0^{\pi/2} \cos^r \vartheta d\vartheta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\left(\frac{r-1}{2}\right)!}{\left(\frac{r}{2}\right)!}$$

azért bevezetve a

$$\psi(s) = \frac{d}{ds} \ln(s!)$$

jelölést és /33/ baloldalát az integrálközépértéktétellel egyszerűsítve

$$\sum_{i=1}^n \frac{N_i^*}{N^*} \ln \cos \vartheta_i = \frac{1}{2} \left[\psi\left(\frac{\vartheta+x-1}{2}\right) - \psi\left(\frac{\vartheta+x}{2}\right) \right] \quad /34/$$

A baloldal x -től független numerikus érték, a jobboldalon szereplő ψ /digamma/ függvény értékei pedig táblázatokból kikereshetők /pl. [5] /. Tehát /34/ alapján x értéke táblázatból való visszakereséssel egyszerűen megállapítható.

15.§. Bármennyire egyszerű is a /29/ közelítés alapján x meghatározása, az eljárás mégsem alkalmazható, mert x értékébe meglehetősen nagy szisztematikus hibát visz be. Igaz, hogy a /29/ közelítés csak nagy zenitszögek alatt érkező részecsskéknél hibás és aránylag kevés részecske érkezik nagy zenitszög alatt, azonban a /31/, illetve a /34/ egyenlet baloldalán a kis zenitszögekhez tartozó N_i -k súlyfaktora / $\ln \cos \vartheta$ ill. $\ln \cos \vartheta$ / közel zérus, míg a nagy zenitszögekhez tartozó N_i -k aránylag nagy sullyal jönnek tekintetbe. Az itt elkövetett hiba érezhetővé válik.

4.táblázat

Numerikus példák az ismertett eljárások összehasonlítására

	N^*	x értéke		
		a legnagyobb valószínűség elve / /21/ egyenlet/ alapján	a /34/ közelítő egyenlet alapján	a /35/ közelítő egyenlet alapján
1.méréssorozat:	671	11,8 ± 0,72	13,5 ± 0,76	11,8 ± 0,72
2.méréssorozat:	571	9,8 ± 0,74	11,4 ± 0,79	9,9 ± 0,75

Állításunk igazolására két numerikus példát közlünk /1.4.táblázat/. Mint látszik, a /34/ egyenletből számított x érték mindkét esetben lényegesen eltér a legnagyobb valószínűség elve alapján számított helyes x értéktől.

16.§. Kielégítő pontosságu közelítést nyerhetünk x -re a következő egyenlet megoldása utján:

$$\sum_{i=1}^n \frac{N_i^*}{N^*} \ln \cos \vartheta_i = \frac{h'(x, \gamma)}{h(x, \gamma)} \quad , \quad /35/$$

ahol

$$h'(x, \gamma) = \int_0^{\pi/2} \cos^{\gamma} \vartheta g(x \sec \vartheta, \gamma) \ln \cos \vartheta d\vartheta \quad .$$

/35/-ből torzítatlan becslést kapunk x -re, mert $\frac{\sum_{i=1}^n N_i^* \ln \cos \vartheta_i}{N^*}$ várható értéke valóban $h'(x, \gamma) / h(x, \gamma)$. A /35/-ből meghatározott x érték hibája valamivel nagyobb lesz, mint a legnagyobb valószínűség elve //21/ egyenlet/ alapján számított x hibája, az eltérés azonban nyilván nagyon kicsiny. Ugyanis a

$$\sum_{i=1}^n \frac{N_i^*}{N^*} \ln \cos \vartheta_i = \sum_{i=1}^n \frac{\overline{N_i^*}}{N^*} \ln \cos \vartheta_i \quad /36/$$

egyenlet adja a legkisebb hibát, ha a szögeloszlás $\sim \cos^{\gamma+x} \vartheta$ típusu; a valódi szögeloszlás //17/egyenlet/ nem nagyon tér el a $\sim \cos^{\gamma+x} \vartheta$ típus-tól, tehát a /36/-ből meghatározott x hibájától. /Ismeretes, hogy x hibája,- amelynek legkisebb értéke a legnagyobb valószínűség elvével található meg - meglehetősen lapos minimummal bír./

A /35/ alapján meghatározott x érték hibáját a szokásos elvek alapján számítva a következő kifejezést nyerjük:

$$(\delta x)^2 = \frac{1}{N^*} \frac{h''(x, \gamma) - h(x, \gamma) H^2(x, \gamma)}{\frac{d}{dx} H(x, y)} \quad ,$$

ahol

$$h''(x, \gamma) = \int_0^{\pi/2} \cos^{\gamma} \vartheta g(x \sec \vartheta, \gamma) (\ln \cos \vartheta)^2 d\vartheta \quad ,$$

és

$$H(x, \gamma) = h'(x, \gamma) / h(x, \gamma) \quad .$$

A /35/ egyenletet lényegesen könnyebb megoldani, mint a /21/ egyenletet, mert /35/ baloldala nem tartalmazza x -et.

A 15.§.-ban említett méréssorozatokból meghatároztuk x -et a /35/ egyenlet alapján is.^x Az eredményeket ugyancsak a 4. táblázat tünteti fel. Mint látszik, a számszerű értékek /még a hibák értéke is/ majdnem teljesen azonosak a legnagyobb valószínűség elve alapján meghatározott értékekkel.

A szerzők őszinte köszönetüket fejezik ki Jánossy Lajos akadémikusnak utmutatásáért és tanácsaiért.

I r o d a l o m

- [1] Jánossy L., Rupp E. KFKI Közl. 8, 71, /1960/
- [2] Jánossy L., Rupp E. 9, 101, /1961/
- [3] Bhattacharya P.C., Gémesy T., Sándor T., Somogyi A., Uray L.:
Nuovo Cimento, 24, 290, /1962/
- [4] Pagurova V.J.: Tables of the Exponential Integral./Computing Centre
of the USSR Ac. of Sci. - Pergamon, 1961./
- [5] Jahnke - Emde: Tafeln höherer Funktionen /Teubner, Leipzig, 1952./

Érkezett 1962. nov. 2.

KFKI Közl. 10. évf. 6.szám, 1962.

^x $h'(x, \gamma)$ és $h''(x, \gamma)$ táblázatát $E_{\gamma+2-\nu}(x)$ ($\nu = 0, 1, 2, \dots$) függvény-sorral történt előállítás alapján számítottuk. A sorbafejtés gondolataért és végrehajtásáért Németh Géza tudományos munkatársnak tartozunk köszönettel.

A MÁGNESEZETTSÉG MEGHATÁROZÁSA ALACSONY HŐMÉRSÉKLETEN
A GREEN-FÜGGVÉNY MÓDSZER ALAPJÁN.^x

Irta: Praveczi Endre

Összefoglalás

A Green-függvény módszer segítségével meghatározzuk a Heisenberg-modell mágnesezettségét a Dyson-féle spinhullámelmélet keretei között: olyan eredményt kapunk, amely csak a T^4 -es tagban mutat kis eltérést Dyson eredményeitől.

1. A ferromágneses anyagok leggyakrabban használt modelljének, a kvantum-mechanikai Heisenberg-modellnek az alacsony hőmérsékletek tartományában /az abszolút zérus foktól kb. a Curie-hőmérséklet feléig/ érvényes közelítő tárgyalási módját a spinhullám elmélet adja, amelynek alapjait Bloch [1] vetette meg, felismervén, hogy a ferromágneses anyagok legáltalában gerjesztett állapotaiban a kompenzálatlan elektronspinek /ferromágneses spinek/ egymáshoz képest szabályos, bizonyos irányokban állandó fázis különbséget mutató processziót végeznek /spinhullám/. Feltehető, hogy az elemi gerjesztések /ferromagnonok/ egymás hatására nem változtatják meg állapotukat /nincs köztük kölcsönhatás/, tehát a magnonok komplexuma szabad gáznak tekinthető. Ezen feltevés alapján azt kapta, hogy a $\sigma = \langle S_k^z \rangle / S =$ spontán mágnesezettség

$$\sigma = 1 - \alpha_0 T^{3/2}$$

alakban változik a hőmérséklettel, ahol α_0 numerikus állandó.

Utána többen megpróbálkoztak avval, hogy Bloch elméletét tovább fejlesztve a spinhullámok kölcsönhatását is figyelembe vegyék a mágnesezettség és egyéb mennyiségek kiszámításához. Ezen törekvések két irányba vezettek. Az egyik irányt követve Dyson [2], a másik irányt követve pedig Holstein, Primakoff [3] és Oguchi [4] alapozták meg a spinhullámok kölcsönhatásának elméletét.

A két elmélet különbségét abban foglalhatjuk össze, hogy míg Dysonnál az

$$\begin{aligned} S_k^+ &= \sqrt{2S} b_k^+ \\ S_k^- &= \sqrt{2S} \left(1 - \frac{n_k}{2S}\right) c_k \\ S_k^z &= S - n_k, \quad n_k = b_k^+ c_k \\ c_k b_\ell^+ - b_\ell^+ c_k &= P_k \delta_{k\ell} \quad P_k = 1 - \frac{2S+1}{(2S)!} \prod_{\nu=0}^{2S-1} (n_k - \nu) \end{aligned}$$

^xA dolgozat megírása után értesültünk arról, hogy más formalizmussal hasonló eredményhez jutott R.A. Tahir-Kheli and D. ter Haar, Phys.Rev. 127, 1.

relációkkal , addig Holstein, Primakoff és Oguchi elméletében az

$$S_k^+ = \sqrt{2S} a_k^+ \sqrt{1 - \frac{n_k}{2S}} ,$$

$$S_k = \sqrt{2S} \sqrt{1 - \frac{n_k}{2S}} a_k ,$$

$$S_k^z = S - n_k , \quad n_k = a_k^+ a_k$$

$$a_k a_\ell^+ - a_\ell^+ a_k = P_k \delta_{k\ell} , \quad P_k = 1 - \frac{2S+1}{(2S)!} \prod_{\nu=0}^{2S-1} (n_k - \nu)$$

relációkkal állítjuk elő az S_k^+ , S_k^- , S_k^z spinoperátorokat, ahol a b_k^+ , c_k illetve a_k^+ , a_k operátorok jelentése: Fourier-transzformáltjaik a spinhullámok emissziós, illetve abszorpciós operátorait adják az egyik, illetve a másik elméletben.

A mágnesezettséget Dyson, illetve Oguchi határozta meg kellő pontossággal. A két elmélet közel azonos eredményhez vezetett:

$$\sigma(T) = 1 - \frac{1}{S} \left\{ \left(\frac{kT}{8\pi JS} \right)^{3/2} \xi\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{3\pi}{4} \left(\frac{kT}{8\pi JS} \right)^{5/2} \xi\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{33\pi^2}{32} \left(\frac{kT}{2\pi JS} \right)^{7/2} \xi\left(\frac{7}{2}\right) - \frac{3\pi}{2S} \left(\frac{kT}{8\pi JS} \right)^4 \xi\left(\frac{3}{2}\right) \xi\left(\frac{5}{2}\right) \left(1 + \frac{c}{S}\right) \right\} ,$$

ahol a T^4 -es tag írja a kölcsönhatást / az előzőek még a spinhullámok kinetikus energiáiból származnak / és a különbség csupán az, hogy a Dyson-elméletben $c = 0,3$, a Holstein-Primakoff-Oguchi-elméletben pedig $c = 0,2$.

Mind Dyson, mind pedig Oguchi a klasszikus módszerekkel határozták meg a mágnesezettséget: kiszámították az állapotösszeget, s ebből differenciálással nyerték a mágnesezettséget. Új momentumot jelent ezért Jakovlev [5] munkája, aki a spinhullám kölcsönhatások Holstein-Primakoff-Oguchi-elméletében a statisztikai Green-függvény-módszert alkalmazta és hasonló eredményhez jutott, mint Oguchi - azzal a különbséggel, hogy nála $c=0,2$ helyett $c=0$ jött ki.

Jakovlev eljárásának előnye, hogy viszonylag könnyen el lehet jutni a mágnesezettség képletéhez. A következőkben ezért alkalmazzuk a statisztikai Green-függvény módszert a Dyson elméletben is a mágnesezettség meghatározására.

2. Tekintsük a ferromágnesek Heisenberg-modelljének Hamilton-operátorát:

$$H = -\mu g \mathcal{H} \sum_k S_k^z - \sum_{k\ell} J_{k-\ell} \left[\frac{1}{2} S_k^+ S_\ell^- + \frac{1}{2} S_k^- S_\ell^+ + S_k^z S_\ell^z \right] .$$

Ez a b_k^+ , c_k , n_k operátorokkal a következő alakot ölti:

$$H = E_0 + \mu g \mathcal{H} \sum_k n_k + \sum_{k\ell} J_{k-\ell} \left[(n_k - b_k^+ c_\ell) 2S + b_k^+ n_\ell c_\ell - n_k n_\ell \right] . \quad //1/$$

Ha meghatározzuk a

$$G_{k\ell}(t-t') = \langle\langle c_k(t) | b_\ell^+(t') \rangle\rangle$$

Green-függvényt, akkor könnyen megkapjuk a $\langle b_\ell^+(t') c_k(t) \rangle$ korrelációs

függvényt, illetőleg a

$$\sigma = 1 - \langle n_k \rangle / S$$

mágnesezettséget. A Hamilton-operátor /1/ alakjával azonban bonyolult, több fajta magasabbrendű Green-függvényt tartalmazó differenciál egyenletet kapunk $G_{kl}(t-t')$ számára:

$$\frac{d}{dt} \langle\langle c_k | b_l^+ \rangle\rangle = \langle P_k \rangle \delta_{kl} - i \left\{ \mu g \mathcal{H} \langle\langle c_k | b_l^+ \rangle\rangle + \sum_f J_{k-f} [2S \langle\langle c_k | b_l^+ \rangle\rangle - 2S \langle\langle P_k c_f | b_l^+ \rangle\rangle + \langle\langle P_k n_f c_f | b_l^+ \rangle\rangle + \langle\langle b_f^+ c_k c_k | b_l^+ \rangle\rangle - \langle\langle P_k n_f c_f | b_l^+ \rangle\rangle] \right\}.$$

/ Itt felhasználtuk, hogy

$$\frac{d}{dt} A(t) = i [H, A(t)]$$

alapján kell képeznünk a differenciál-hányadost./

Végezzük el ezért először is azt a közelítést, hogy a P_k projekciós operátort / amelynek sajátértéke a maximálisan gerjesztett, tehát az alacsony hőmérsékleten ritkán előforduló állapotot kivéve mindegyikben +1 /- +1 -el helyettesítjük, ahogy azt hallgatólagosan Jakovlev is teszi. Akkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{d}{dt} G_{kl}(t-t') = \delta_{kl} \delta(t-t') - i \left\{ \mu g \mathcal{H} G_{kl}(t-t') + \sum_f J_{k-f} [2S G_{kl}(t-t') - 2S G_{fl}(t-t') + G_{fffl}(t-t') + G_{fkkl}(t-t') - 2G_{ffkl}(t-t')] \right\}, \quad /2/$$

ahol

$$G_{fgkl}(t-t') = \langle\langle b_f^+(t) c_g(t) c_k(t) | b_l^+(t') \rangle\rangle.$$

A $G_{fgkl}(t-t')$ Green-függvényeket - felhasználva, hogy alacsony hőmérsékleten jó közelítést jelent a spinhullámokat függetleneknek, a b_k^+, c_l operátorokat, tehát Bose-operátoroknak tekinteni - a Wick-teoréma alapján vezethetjük vissza a $G_{kl}(t-t')$ Green-függvényekre:

$$G_{fffl}(t-t') = 2 \langle n_0 \rangle G_{fl}(t-t')$$

$$G_{fkkl}(t-t') = 2 \langle b_f^+ c_0 \rangle G_{kl}(t-t')$$

$$G_{ffkl}(t-t') = \langle n_0 \rangle G_{kl}(t-t') + \langle b_f^+ b_0 \rangle G_{fl}(t-t').$$

Ezeket figyelembe véve /2/-ből azt kapjuk tehát, hogy

$$\frac{d}{dt} G_{kl}(t-t') = \delta_{kl} \delta(t-t') - i \left\{ \mu g \mathcal{H} G_{kl}(t-t') + 2S \sum_f J_{k-f} \left[1 - \frac{\langle n_0 \rangle + \langle b_f^+ c_0 \rangle}{2S} \right] [G_{kl}(t-t') - G_{fl}(t-t')] \right\}.$$

Ezt az egyenletet már könnyen megoldhatjuk. Elvégezve a

$$G_{kl}(t-t') = N^{-1} \sum_x G_x(t-t') e^{i(l-k)r}$$

$$G_x(t-t') = \int_{-\infty}^{+\infty} G_x(E) e^{-iE(t-t')} dE$$

transzformációkat - a következő eredményhez jutunk:

$$G_x(E) = \frac{i}{2\pi} \frac{1}{E - E_x},$$

ahol

$$E_x = \mu g \mathcal{H} + 2S \sum_f J_f \left[1 - \frac{\langle n_o \rangle + \langle b_f^+ c_o \rangle}{2S} \right] (1 - e^{ifx}).$$

Használjuk most fel, hogy a $\langle b_f^+ c_o \rangle$ korrelációs függvény

$$\langle b_f^+ c_o \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{J}_f(E) dE$$

előállításában szereplő $\mathcal{J}_f(E)$ spektrálintenzitás a spektrálmegmaradási tétel alapján a következő összefüggéssel adódik:

$$\mathcal{J}_f(E) = \frac{G_{fo}(E - i\varepsilon) - G_{fo}(E + i\varepsilon)}{e^{\beta E} - 1}, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Ezzel

$$\mathcal{J}_f(E) = N^{-1} \sum_x \frac{e^{-ifx}}{e^{\beta E_x} - 1} \delta(E - E_x),$$

tehát

$$\langle b_f^+ c_o \rangle = N^{-1} \sum_x \frac{e^{-ifx}}{e^{\beta E_x} - 1}.$$

A $\sigma(T, \mathcal{H})$ mágnesszettséget $\mathcal{H}=0$ mellett számoljuk ki numerikusan / amikor a $\sigma_o(t)$ spontán mágnesszettséggel azonos. / Egyszerű számolással adódik, hogy

$$\sigma(T) = 1 - \frac{1}{S} \left\{ \left(\frac{kT}{8\pi JS} \right)^{3/2} \xi\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{3\pi}{4} \left(\frac{kT}{8\pi JS} \right)^{5/2} \xi\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{33\pi^2}{32} \left(\frac{kT}{8\pi JS} \right)^{7/2} \xi\left(\frac{7}{2}\right) - \frac{3\pi}{2S} \left(\frac{kT}{8\pi JS} \right)^4 \xi\left(\frac{3}{2}\right) \xi\left(\frac{5}{2}\right) \right\}.$$

Eredményünk azt mutatja, hogy a statisztikai Green-függvény módszer a spinhullámok kölcsönhatásának Dyson-elméletében is ugyan ahhoz az eredményhez vezet, mint a Holstein-Primakoff-Oguchi elméletben: a kölcsönhatást leíró T^4 -es tagban $c=0$ áll.

I r o d a l o m

- [1] Bloch, F., Zs. F. Phys. 53. 216 /1929/
- [2] Dyson, F. J., Phys. Rev. 102, 1217, 1230 /1956/
- [3] Holstein, T. és Primakoff, H., Phys. Rev. 58, 1908 /1940/
- [4] Oguchi, S., Phys. Rev. 117, 117 /1959/
- [5] Praveczi E., Физ. Мет. и Металлов 12. 2. 296. /1061/
- [6] Изюмов Э. Д.: Доклады Академии Наук, 6, 125, 1227 /1059/
- [7] Яковлев Е. Н.: Физ. Твёрдого Тела. IV. I. 179 /1962/

Érkezett 1962. okt. 23.

KFKI Közl. 10. évf. 6. szám, 1962.

A HEISENBERG-MODELL MÁGNESEZETTSÉGÉNEK MEGHATÁROZÁSA
 A GREEN-FÜGGVÉNY MÓDSZER ALAPJÁN $S > \frac{1}{2}$ ESETÉN.^x

Írta: Praveczi Endre

Összefoglalás

Megmutatjuk, hogy a Pauli-operátorokkal analóg operátorok bevezetésével $S > \frac{1}{2}$ esetén is elérhetők hasonló eredmények, mint amilyent $S = \frac{1}{2}$ esetén kapott Bogoljubov és Tyablikov.

1. A ferromágnesség elméletének egyik legfontosabb feladata meghatározni a mágnesezettséget a ferromágneses anyagok Heisenberg- modellje alapján. E feladatot a fellépő matematikai nehézségek miatt eddig nem sikerült pontosan megoldani. Ismerünk azonban több olyan eredményt, amely a feladat közelítő megoldását jelenti. A mágnesezettséget közelítőleg meghatározó képletek általában vagy az alacsony hőmérsékleteken, a spinhullám-tartományban /Bloch [1], Dyson [2], Oguchi [3], stb./ vagy magas hőmérsékleteken, a Curie-pont környékén /Osanger [4], Opechowski [5]/ jelentenek jó közelítést.

Bogoljubovnak és Tyablikovnak [6] a statisztikai /hőmérséklet-függő/ Green-függvények segítségével elért eredménye azonban azon kevés számú munkák közé tartozik, amelyek mind az alacsony, mind a magas hőmérsékletek tartományában jó közelítő eredményt adnak. De Bogoljubov és Tyablikov csak arra az esetre alkalmazták a Green-függvény módszert, amelyben minden rácspontban egyetlen kompenzálatlan elektron spin tartalmaz a ferromágneses anyag. Ismeretes viszont, hogy a leggyakrabban előforduló ferromágneses anyagoknál /vas, kobalt, nikkel/ egynél több kompenzálatlan spin kell számolnunk rácspontonként. Felmerül tehát az a kívánság, hogy Bogoljubov és Tyablikov módszerét azokra az esetekre is alkalmazzuk, amelyekben kettő, három stb. spin tartózkodik egy-egy rácspontban / $S = 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots$, ahol S a maximális spinkvantum \hbar egységeiben/.

Bogoljubov és Tyablikov eljárása nem alkalmazható minden további megfontolás nélkül az $S > \frac{1}{2}$ esetekre, mivel az általuk használt b_k^+ , b_k Pauli-operátorok - melyeket az alábbi relációkkal definiálhatunk:

$$b_k b_k^+ - b_k^+ b_k = \sigma_k \delta_{kk} , \quad \sigma_k = 1 - 2n_k , \quad n_k = b_k^+ b_k ,$$

^x A dolgozat megírása után értesültünk arról, hogy más formalizmussal ugyan- ehhez az eredményhez jutott R.A. Tahir-Kheli and D. ter Haar, Phys. Rev. 127, 1. 95. /1962/

- $S > \frac{1}{2}$ esetén nem használhatók.

Annak érdekében, hogy a problémát $S > \frac{1}{2}$ esetén is megoldhassuk, alkalmazzuk azokat az előző munkánkban bevezetett operátorokhoz hasonló, a Pauli-operátorokkal analóg b_k^+, c_k, n_k operátorokat, amelyeket az alábbi relációk határoznak meg:

$$c_k b_\ell^+ - b_\ell^+ c_k = P_k \delta_{k\ell}$$

$$P_k = 1 - \frac{2S+1}{(2S)!} \prod_{\nu=0}^{2S-1} (n_k - \nu) \quad /1/$$

$$n_k = b_k^+ c_k, \quad (b_k^+)^{2S+1} = (c_k)^{2S+1} = 0.$$

2. Abból a célból, hogy a Green-függvény módszert alkalmazhassuk, írjuk fel az $S_k^+ = S_k^x + iS_k^y$, $S_k^- = S_k^x - iS_k^y$, S_k^z spin operátorokat, majd a Heisenberg-modell

$$H = -\mu g \mathcal{H} \sum_k S_k^z - \sum_{k\ell} J_{k-\ell} [\vec{S}_k \vec{S}_\ell] \quad /2/$$

Hamilton-operátorát az /1/ -ben definiált b_k^+, c_k, n_k operátorokkal. Az S_k^+, S_k^-, S_k^z operátorokra vonatkozó ismert

$$S_k^+ S_\ell^z - S_\ell^z S_k^+ = -S_k^+ \delta_{k\ell}$$

$$S_k^- S_\ell^z - S_\ell^z S_k^- = S_k^- \delta_{k\ell}$$

$$S_k^+ S_\ell^- - S_\ell^- S_k^+ = 2S_k^z \delta_{k\ell}$$

relációk alapján könnyen beláthatjuk, hogy

$$S_k^+ = \sqrt{2S} b_k^+ \left(1 - \frac{n_k}{2S}\right),$$

$$S_k^- = \sqrt{2S} c_k,$$

$$S_k^z = S - n_k,$$

valamint /2/ alapján

$$H = E_0 + \mu g \mathcal{H} \sum_k n_k + \sum_{k\ell} J_{k-\ell} [2S(n_k - b_k^+ c_\ell) + b_k^+ n_k c_\ell - n_k n_\ell]. \quad /3/$$

Ezekből kitűnik, hogy a

$$\sigma = \langle S_k^z \rangle / S$$

mágnesezettség meghatározásához elég az $\langle n_k \rangle = \langle b_k^+ c_k \rangle$ átlagértéket kiszámítanunk. Definiáljuk ebből a célból a következő Green-függvényt:

$$G_{kl}^{(1)}(t-t') = \langle\langle c_k(t) | b_l^+(t') \rangle\rangle .$$

Erre a Hamilton-operátor /3/ alakjával, és a

$$\frac{d}{dt} A(t) = i[H, A(t)]$$

képlet felhasználásával az alábbi differenciál-egyenletet kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} G_{kl}^{(1)}(t-t') = P^{(1)} \delta_{kl} \delta(t-t') - i \left\{ \mu g \mathfrak{H} G_{kl}^{(1)}(t-t') + \sum_f J_{k-f} [2S G_{kl}^{(1)}(t-t') - \right. \\ \left. - 2S G_{fl}^{(1)}(t-t') - G_{fkl}(t-t') + G_{kfl}(t-t')] \right\} , \end{aligned} \quad /4/$$

ahol

$$P^{(1)} = \langle P_k \rangle ,$$

és fellepett a következő magasabbrendű Green-függvény:

$$G_{fkl}(t-t') = \langle\langle n_f(t) c_k(t) | b_l^+(t') \rangle\rangle .$$

E magasabb rendű Green-függvénytől megszabadulhatunk, ha ugyan-
 ugy, mint Bogoljubov és Tyablikov, elvégezzük a következő "levágást"
 / a magasabb rendűnek alacsonyabb rendűvel való közelítését /:

$$G_{fkl}(t-t') = n G_{kl}(t-t') ,$$

ahol $n = \langle n_f \rangle$. Ezzel a /4/ -ből azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} G_{kl}^{(1)}(t-t') = P^{(1)} \delta_{kl} \delta(t-t') - i \left\{ \mu g \mathfrak{H} G_{kl}(t-t') + \right. \\ \left. + 2S \sigma \sum_f J_{k-f} [G_{kl}^{(1)}(t-t') - G_{fl}^{(1)}(t-t')] \right\} . \end{aligned} \quad /5/$$

Ismeretlen mennyiséget jelent azonban még mindig a $P^{(1)}$ kifejezés. En-
 nek egyszerűbb meghatározása céljából szoritkozunk a következőkben az
 $S = 1$ esetre /amikor minden egyes rácspontban két kompenzálatlan spin
 tartózkodik/. Ekkor - mint azt az /1/ relációk alapján beláthatjuk -

$$P^{(1)} = 1 + \frac{3}{2} \langle n_k \rangle - \frac{3}{2} \langle n_k^2 \rangle ,$$

tehát $P^{(1)}$ helyett elég $\langle n_k^2 \rangle$ -et meghatározunk. Ezt újabb Green-függvény bevezetésével tehetjük meg. Legyen

$$G_{kl}^{(2)}(t-t') = \langle\langle c_k(t) | n_l(t') b_l^+(t') \rangle\rangle .$$

Erre - alkalmazva az előbbi "levágást" - a következő differenciálegyenletet nyerjük:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} G_{kl}^{(2)}(t-t') &= P^{(2)} \delta_{kl} \delta(t-t') - i \left\{ \mu g \mathcal{H} G_{kl}^{(2)}(t-t') + \right. \\ &\quad \left. + 2S \sigma \sum_f J_{f-k} [G_{kl}^{(2)}(t-t') - G_{fl}^{(2)}(t-t')] \right\} . \end{aligned} \quad /6/$$

Az itt szereplő $P^{(2)} = \langle [c_k, n_k b_k^+] \rangle$ -vel már valóban nem jutottunk újabb nehézséghez, hiszen - hasonló eljárással, mint az előbb - adódik, hogy

$$P^{(2)} = 1 + \frac{13}{2} \langle n_k \rangle - \frac{9}{2} \langle n_k^2 \rangle ,$$

Tehát ez is csak az $\langle n_k \rangle$, $\langle n_k^2 \rangle$ mennyiségeket tartalmazza.

Oldjuk meg e zárt egyenlet-rendszert alkotó /5/ , /6/ egyenleteket. Elvégezve a

$$\begin{aligned} G_{kl}^{(v)}(t-t') &= \int_{-\infty}^{+\infty} G_{kl}^{(v)}(E) e^{-iE(t-t')} dE , \\ G_{kl}^{(v)}(E) &= N^{-1} \sum_x G_x^{(v)}(E) \\ v &= 1, 2 \end{aligned}$$

transzformációkat - azt kapjuk, hogy

$$G_x^{(v)}(E) = \frac{i}{2\pi} \frac{P^{(v)}}{E - E_x} ,$$

ahol

$$E_x = \mu g \mathcal{H} + 2S \sigma \sum_f J_f (1 - e^{ifx}) .$$

E Green-függvényekkel a

$$J_{kl}^{(v)}(E) = \frac{G_{kl}^{(v)}(E - i\varepsilon) - G_{kl}^{(v)}(E + i\varepsilon)}{e^{\beta E} - 1}$$

spektrálteoréma alapján meghatározhatjuk az $\mathcal{J}_{kk}^{(\nu)}(E)$ spektrálintenzitásokat, ezek alapján pedig az ismeretlen mennyiségeket:

$$\langle n_k^\nu \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{J}_{kk}^{(\nu)}(E) dE ,$$

melyekkel

$$\left(1 - \frac{3}{2} w\right) \langle n_k \rangle + \frac{3}{2} w \langle n_k^2 \rangle = w ,$$

$$-\frac{13}{2} w \langle n_k \rangle + \left(1 + \frac{9}{2} w\right) \langle n_k^2 \rangle = w ,$$

/7/

ahol

$$w = N^{-1} \sum_k \frac{1}{e^{\beta E_k} - 1}$$

/7/ -et könnyen megoldhatjuk. A keresett mennyiség:

$$\langle n_k \rangle = \frac{w + 3w^2}{1 + 3w + 3w^2} .$$

Végül is tehát

$$\sigma = \frac{1 + 2w}{1 + 3w + 3w^2} .$$

/8/

3. A mágnesezettségre kapott /8/ kifejezést vizsgáljuk meg a különböző hőmérsékleti intervallumokban, azonban az egyszerűség kedvéért zérus mágneses tér mellett: $\mathcal{H} = 0$.

a/Alacsony hőmérsékleten, $T \approx 0$ esetén $w \approx 0$, tehát sorbafejtve

$$\sigma = 1 - w + 3w^3 + \dots ,$$

amiből az $E_x = \alpha_0 x^2$ közelítéssel azt kapjuk, hogy

$$\sigma = 1 - \left(\frac{kT}{8\pi\mathcal{J}\sigma}\right)^{3/2} \xi\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{3\pi}{4} \left(\frac{kT}{8\pi\mathcal{J}\sigma}\right)^{5/2} \xi\left(\frac{5}{2}\right) \dots$$

ahol α_0 numerikus állandó. Ez az egyenlet szukcessziv approximációval oldható meg. Az eredmény:

$$\sigma = 1 - \left(\frac{kT}{8\pi\mathcal{J}}\right)^{3/2} \xi\left(\frac{3}{2}\right) \dots$$

b/Magas hőmérséklet, $T \approx T_c$ esetén célszerű /8/ -at a következő alakra hozni:

$$2 - 3\sigma + \sqrt{4 - 3\sigma^2} = N^{-1} \sum_x \frac{\sigma}{e^{\beta\sigma\varepsilon_{x-1}}},$$

ahol $\varepsilon_x = \sum_f (1 - e^{ifx})$. Mindkét oldalt sorbafejtve σ szerint

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{8}\sigma^2 + \dots = \frac{J_1}{\beta} + \frac{J_2\beta}{12}\sigma^2 + \dots,$$

ahol

$$J_1 = N^{-1} \sum_x \frac{1}{\varepsilon_x}, \quad J_2 = N^{-1} \sum_x \varepsilon_x.$$

σ^2 -ig bezárólag az adódik tehát, hogy

$$\sigma = \alpha \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}}, \quad \alpha = \text{const.},$$

ahol $T_c = \frac{2}{3kJ_1}$.

Láthatjuk, hogy az $S=1$ esetre vonatkozó /8/ formula hasonló eredményt ad, mint $S=\frac{1}{2}$ esetén a Bogoljubov-Tyablikov-formula. A fentihez hasonló eljárást vezetne célhoz az $S=\frac{3}{2}, 2$, stb esetekben is, ezekkel az esetekkel azonban itt nem foglalkozunk.

I r o d a l o m

- [1] Bloch, F., Zs.f. Phys., 53, 216 /1929/
- [2] Dyson, F. I., Phys. Rev. 102, 1227, 1230 /1956/
- [3] Oguchi, S., Phys. Rev. 117, 117 /1959/
- [4] Osanger, lsd. Vonszovszkij. Sur.: Ferromagnetizm
- [5] Opechowski, Physica IV. 191 /1937/
- [6] Боголюбов, Н. М. и Тябликов, С. В.: Докл. Академии Наук СССР. 126, 53 /1959/

Érkezett 1962. okt. 23.

KFKI Közl. 10. évf. 6. szám, 1962.

EGY ÉS KÉT ISMERETLEN PARAMÉTER MÉRÉSÉNEK OPTIMÁLIS TERVEZÉSE POISSON-ELOSZLÁSSAL KAPCSOLATOS PROBLÉMÁK ESETÉN

Irta: Király Péter

Összefoglalás

A mérések tervezésével és kiértékelésével foglalkozó néhány megjegyzés után a maximális valószínűség módszerével általánosan kifejezem az intenzitásfüggvényben szereplő mérendő paraméterek mért értékének szórásnégyzetét Poisson-eloszlás esetén. Az optimális tervezés feladata ebben az esetben valamely, egy sugárzás intenzitásfüggvényében szereplő paraméter lehető legpontosabb meghatározása adott teljes mérési idő esetén. Változtathatók a mérési helyek, mérési idők és a mérések száma. Egy ismeretlen paraméter esetén bizonyítom, hogy időtől független intenzitás esetén az optimális mérés-szám mindig egy. Két paraméter szimultán mérésére több példát tárgyalok.

I. Bevezetés. Mérések szerepe a fizikai alap kutatásban - tervezés és kiértékelés

A fizikai alap kutatásban, amelynek közvetlen célja az anyag fizikai alaptörvényeinek jobb megértése, a megismerés útja általában a következő: az elmélet felvet egy problémát; kidolgozzák, hogy ezt milyen kísérlettel /méréssel/ lehet megoldani; a kísérletet elvégzik, majd a mérés eredményétől függő megoldást beépítik az elméletbe. A mérést úgy kell tervezni, hogy az a lehető legpontosabban választ adhasson az elmélet által feltett kérdésre - ez a kísérlet tervezése. A kísérlet elvégzése után a közvetlen mérési adatokból a lehető legpontosabb választ meg is kell kapni - ez a kísérlet kiértékelése. Így a kísérlet tervezése és kiértékelése mintegy összekötő láncszemet alkot a probléma felvetése és a kísérlet, illetve a kísérlet és a probléma megoldása között.

Mivel a modern fizikai alap kutatásban a kísérletek /mérések/ igen költségesek, lényeges, hogy a kísérlet tervezése és kiértékelése valóban optimális legyen, vagyis minimális költséggel maximális információhoz jussunk. Ez az oka annak, hogy az ezzel kapcsolatos matematikai problémák ma egyre inkább előtérbe kerülnek.

Matematikailag egy mérés mindig egy valószínűségi eloszlással jellemezhető. Ez az eloszlás megadja annak valószínűségét, hogy a szabadon választható és a mérendő paraméterek valamely értéke esetén a mérést elvégezve valamelyik határozott mérési eredményt kapjuk.

Adott méréstípusról beszélek, ha a szabadon választható paraméterek értékét nem rögzítem, és adott mérési eljárásról, ha azok valamely kiválasztott értékét rögzítem. Szűkebb értelemben a mérés tervezésén a következőt értem: az adott méréstípusra jellemző valószínűségi eloszlás szabadon választható paramétereit úgy szabom meg, hogy a mérési eredmények lehető legjobb kiértékelése esetén az ismeretlen paraméterek mért értékének szórásnégyzete a lehető legkisebb legyen /bizonyos mellékfeltételek fennállása mellett/.

Szűkebb értelemben vett tervezésről /amelyet ezentúl egyszerűen tervezésnek nevezek/ tehát csak akkor beszélhetünk, ha az eloszlás tartalmaz általunk megválasztható paramétereket.

A szabadon választható paraméterekre felhozható példaként a mérési idő minden intenzitásmérésnél, a mérési hely például kozmikus sugárzás intenzitásának különböző tengerszint feletti magasságokon való mérésénél /a mérési hely tágabb értelemben időbeli helyet, vagyis az egyes mérések kezdetének időpontját is jelentheti időben változó intenzitással kapcsolatos problémánál, például bomlási állandó meghatározásánál radioaktív bomlás esetén/; szabadon választható még azon helyek száma, ahol mérést végzünk.

Munkám célja annak megállapítása volt, hogy Poisson-eloszlással kapcsolatos problémák esetén általában mit állíthatunk a mérési helyek optimális számáról, ha a mérés célja az intenzitás kifejezésében szereplő paraméterek valamelyikének lehető legpontosabb meghatározása adott teljes mérési időfelhasználás mellett. E cél elérése érdekében először néhány kevésbé általános probléma esetében foglalkoztam a mérések optimális tervezésével, egyelőre a mérési helyek rögzített száma mellett. Mivel az alapfeladatot általánosan megoldanom eddig nem sikerült, e dolgozatban elsősorban a számítások "mellékterméke"-ként kapott néhány gyakorlati szempontból is fontos eredményről szeretnék beszámolni, és csak helyenként utalok az alapfeladattal kapcsolatos kisebb eredményekre. Az egységes tárgyalás indokoltá teszi, hogy röviden foglalkozzak néhány, az irodalomban már szereplő problémával is.

Dolgozatomban mindenhol igen egyszerű matematikai apparátussal /feltételes szélsőértékszámítás/ dolgoztam. A dolgozat megírása és megjelenése között eltelt időben Balatoni Ferencnek, a Matematikai Kutatóintézet munkatársának segítségével sikerült néhány általánosabb eredményt elérni az alapfeladattal kapcsolatban; amennyiben e vizsgálatok a probléma megoldásához vezetnek, azokról egy későbbi közleményben beszámolunk.

A számítások alapjául szolgáló maximális valószínűség /maximum likelihood/ módszert ismertnek tételezem fel. E módszer előnye, hogy segítségével végezve a kiértékelést bizonyos feltételek fennállása mellett /lásd pl. [1], Appendix II./ az elvégzett mérésből a maximális információt nyerjük ki; e kiértékelési módszer valamennyi mérendő paraméter szórásnégyzetének szimultán minimalizálását biztosítja. A tervezésnél, mint erre egy példa kapcsán is rá fogok mutatni, a szórásnégyzetek szimultán minimalizálása általában nem áll fenn, sőt nem is érhető el; így célul valamely kiválasztott paraméter szórásának minimalizálását tűzzük ki a szabadon választható paraméterek terében. /Ha a mérésből nem egy paramétert, hanem valamilyen, a szereplő paraméterekből felépített kifejezést akarunk minél pontosabban megkapni, új paraméterrendszerrel bevezetve ezt a kifejezést tehetjük az egyik paraméterré, amivel problémánkat az előbbire vezettük vissza./

II. A maximális valószínűség módszerének alkalmazása Poisson-eloszlással kapcsolatos problémákra

A következőkben diszkrét részecskékből álló sugárzások intenzitásmérésével kapcsolatos problémákkal foglalkozom. A mérés célja olyan paraméterek értékének megállapítása, amelyek kapcsolatosak a különböző x helyeken vagy τ időpillanatokban /időbeli helyeken/ fennálló intenzitásokkal. Feltételezem, hogy az egyes részecskék egymástól függetlenek /ami igen sokszor jó közelítésben fennáll/, és hogy részecskebeesés bármely időpillanatban lehetséges, ekkor az egy detektorra adott időintervallumban beeső részecskék száma /a beütésszám/ Poisson-eloszlást fog követni.

Jelöljük az ismeretlen paramétereket a_1, \dots, a_N -nel, a mérési helyeket x_1, \dots, x_M -mel /ez lehet időbeli vagy térbeli hely/, az egyes helyeken mérésre fordított időket t_1, \dots, t_M -mel, az x_1, \dots, x_M helyeken t_1, \dots, t_M idők alatt kapott beütésszámokat n_1, \dots, n_M -mel, az x_1, \dots, x_M helyeken fennálló intenzitásokat /időegység alatti beütésszám várható értéke/ pedig $J(a, x_1), \dots, J(a, x_M)$ -mel, illetve J_1, \dots, J_M -mel. Itt N a mérendő paraméterek, M pedig a mérések száma. Egyszeri aláhúzással vektort, kétszeri aláhúzással mátrixot, felé húzással mért értéket jelölünk.

Ekkor annak valószínűsége, hogy az a paraméterek fennállása esetén az x_m helyen t_m idő alatt n_m beütést kapjunk:

$$P_{x_m, t_m}(a, n_m) = e^{-J_m t_m} \frac{(J_m t_m)^{n_m}}{n_m!} \quad /2.1/$$

Annak valószínűsége pedig, hogy az a paraméterek fennállása esetén az n_1, \dots, n_M beütést kapjuk az x_1, \dots, x_M helyen t_1, \dots, t_M idők alatt, a különböző helyeken végzett mérések függetlensége miatt:

$$p_{\underline{x}, \underline{t}}(\underline{a}, \underline{n}) = \prod_{m=1}^M e^{-J_m t_m} \frac{(J_m t_m)^{n_m}}{n_m!} \quad /2.2/$$

J(a, x) konkrét alakját ide beírva megkapjuk az adott mérési-
pusra jellemző valószínűségi eloszlást; mivel Poisson-eloszlással kapcsola-
tos problémáknál $p_{\underline{x}, \underline{t}}(\underline{a}, \underline{n})$ egyszerűen $J(\underline{a}, \underline{x})$ /2.2/ által megadott
transzformáltja, a mérés jellemzésére az utóbbi is éppúgy szolgálhat.

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$J(\underline{a}, x_m) = J_m \quad ; \quad \frac{\partial J_m}{\partial a_i} = J'_{im} \quad , \quad /2.3/$$

ahol $i, j = 1, \dots, N$ és $m = 1, \dots, M$.

Ekkor /2.2/-ből:

$$\frac{\partial \ln p}{\partial a_i} = \sum_{m=1}^M (-J'_{im} t_m + J'_{im} \frac{n_m}{J_m}) \quad , \quad /2.4/$$

ezt nullával egyenlővé téve és a kapott egyenletrendszer megoldva a maxi-
mális valószínűség módszere szerint megkapjuk \underline{a} mért értékét.

/2.4/-et a_j szerint deriválva és $\langle n_m \rangle = J_m t_m$ beírásával várható
értékre térve át a következő mátrixelemet kapjuk:

$$a_{ij} = \left\langle \frac{\partial^2 \ln p_{\underline{x}, \underline{t}}(\underline{a}, \underline{n})}{\partial a_i \partial a_j} \right\rangle = \sum_{m=1}^M t_m \frac{J'_{im} J'_{jm}}{J_m} \quad , \quad /2.5/$$

mivel a többi tag kiesik /igen lényeges egyszerűsödést jelent Poisson-
eloszlásnál, hogy a sokszor bonyolult $\frac{\partial^2 J_m}{\partial a_i \partial a_j}$ tagok kiesnek/.

A \underline{Q} mátrix N -edrendű négyzetes mátrix; ebből kaphatjuk meg az
 $\underline{M} = -1/\underline{Q}$ mátrixot, amelynek elemei: $M_{ij} = \langle (\delta a_i \delta a_j) \rangle$, tehát főátlóbeli
elemei a szórásnégyzetek, egyéb elemei pedig az a_i és a_j paraméterek
mért értékeinek korrelációját fejezik ki. E mátrix általánosan igen bonyo-
lult lesz, ezért a továbbiakban csak az $N=1$ és $N=2$ esetekkel foglal-
kozunk, vagyis egy, illetve két paraméter meghatározását tárgyaljuk.

Ha $N=1$,

$$Q_{11} = - \sum_{m=1}^M t_m \frac{(J'_m)^2}{J_m} \quad \text{és} \quad M_{11} = \sigma^2 = 1 / \sum_{m=1}^M t_m \frac{(J'_m)^2}{J_m} \quad . \quad /2.6/$$

Ha $N=2$,

$$Q_{11} = - \sum_{m=1}^M t_m \frac{(J'_{1m})^2}{J_m} \quad ; \quad Q_{22} = - \sum_{m=1}^M t_m \frac{(J'_{2m})^2}{J_m} \quad ; \quad Q_{12} = Q_{21} = - \sum_{m=1}^M t_m \frac{J'_{1m} J'_{2m}}{J_m} \quad . \quad /2.7/$$

Ebből a \underline{Q} -mátrix determinánsa:

$$\Delta = Q_{11}Q_{22} - Q_{12}^2 = \sum_{\substack{n,m=1 \\ n>m}}^M \frac{t_n t_m}{J_n J_m} (J'_{1n} J'_{2m} - J'_{1m} J'_{2n})^2 \quad /2.8/$$

és a szórásnégyzetek:

$$\sigma_1^2 = M_{11} = \frac{1}{\Delta} \sum_{m=1}^M \frac{t_m (J'_{2m})^2}{J_m}, \quad \sigma_2^2 = M_{22} = \frac{1}{\Delta} \sum_{m=1}^M \frac{t_m (J'_{1m})^2}{J_m} \quad /2.9/$$

Mivel az $J(\underline{a}, x)$ intenzitásfüggvény ismert, a mérés kiértékelésénél \underline{Q} helyett \bar{Q} mért értéket beírva a két szórásnégyzet közelítő /mért/ értékei kiszámíthatók. A kiértékelés elég könnyen elvégezhető az $N > 2$ esetben is, vagyis több paraméter mérése esetén.

A mérés optimális tervezése lényegesen nehezebb feladat. Hogy a feladatnak egyáltalán értelme legyen, kössük ki azt a gyakorlatban is fontos feltételt, hogy a mérésre fordítható teljes T idő adott legyen:

$$\sum_{m=1}^M t_m = T \quad /2.10/$$

A $t'_m = t_m/T$ jelölést bevezetve és beírva /2.9/-be azt kapjuk, hogy amennyiben $1/x$ időfüggetlen, a szórásnégyzetek elé $1/T$ kiemelhető; ebből látható, hogy elég hosszú T időt felhasználva még rossz mérési eljárás esetén is tetszőlegesen kicsivé tehető a szórásnégyzet, vagyis e mellékfeltétel nélkül a feladatnak valóban nem lenne értelme. A /2.10/-zel ekvivalens a

$$\sum_{m=1}^M t'_m = 1 \quad /2.11/$$

feltétel, amelyet a későbbiekben használni fogok /a t'_m jelölésről t_m -re visszatérve/; a T mérési idő esetén kapható szórásnégyzet az idő ugyanolyan beosztása esetén $1/T$ -vel való szorzással nyerhető.

A következő fejezetben néhány speciálisabb eloszlástípussal foglalkozom, amelyek az eddigieket példaként illusztrálják. Valamennyi szereplő eloszlástípusra megadunk egy-egy egyszerű fizikai példát, megoldjuk a minimalizálási problémát két mérési hely, és amennyiben sikerül, több mérési hely esetén; beszámolunk a számítások melléktermékeként kapott néhány érdekes eredményről.

A III. fejezetben szereplő problémákat két csoportban tárgyaljuk. Az elsőbe azok tartoznak, ahol az $J(\underline{a}, x)$ intenzitásfüggvényben x térbeli helyet jelöl - ezek az időben állandó problémák. A második csoportnál x /illetve τ / időbeli helyet jelöl, ide tartoznak az időben változó in-

tenzitásu problémák. E két csoport megkülönböztetésének jelentőségéről az utolsó fejezetben lesz szó.

III. Néhány speciálisabb eloszlás tárgyalása

A/ Időben állandó problémák

1. $J(\underline{a}, x) = \sum_{i=1}^N a_i P_i(x)$, ahol $P_i(x)$ ismert függvény

a/ Példa ilyen típusu eloszlásokra.

Érkezzen N részből álló kevert sugárzás abszorbeáló falra. A fel az x helyen az i -edik típusu sugárzás $P_i(x)$ hányadát bocsátja át / $P_i(x)$ az i -edik típusu sugárzás transzmisszió-törvénye/. Legyen az i -edik típusu sugárzás beeső intenzitása a_i , ekkor az $\underline{a} = a_1, \dots, a_M$ beeső intenzitások fennállása esetén az abszorbeáló fal mögött az x helyen a teljes intenzitás valóban $J(\underline{a}, x) = \sum_{i=1}^N a_i P_i(x)$ alakú lesz. Legyen az abszorbeáló fal az $x = 1$ helyen 0 vastagságú, az $x = 0$ helyen végtelen vastagságú, és a vastagság változása x függvényében legyen folyamatos.

A fenti eloszlás tárgyalása más, lényegesebb fizikai problémák megoldásához is szükséges, csupán szemléltetés céljából választottuk ezt az egyszerű példát. /Hasonló alakban írható fel az intenzitás szögkorrelációs vizsgálatoknál, valamint szórásproblémáknál általában. Szokásos $x = \sin \varphi$ választása, ahol φ a szórási szög; $P_i(x)$ az i -edik Legendre-polinom, a_i pedig az ehhez tartozó sorfejtési együttható. Itt mindenesetre vigyáznunk kell arra, hogy a_i és $P_i(x)$ negatív értéket is felvehetnek, ami kis eltérést jelent az itt közölt problémától; a példák végigszámolása ez esetben sem okoz nehézséget, csupán az előjelekre /illetve fellépő abszolút érték-jelekre/ kell ügyelnünk/.

Feladat: egységnyi idő alatt különböző x_i helyeken végzett beütésszámmérésekből meg kell határozni az egyes sugárzástípusok a_i beeső intenzitását.

b/ Vezessük be a $P_i(x_m) = P_{im}$ és $J(\underline{a}, x_m) = J_m$ jelölést; ekkor az előbb közölt fizikai példa alapján P_{im} nemnegatív és $P_i(1) = 1$. Ekkor /2.6/ szerint $N = 1$ paraméter mérése esetén a szórásnégyzet:

$$x_1^2 = a_1 / \sum_{m=1}^M t_m P_{1m} \quad /3.1/$$

$N = 2$ paraméter mérése esetén pedig a szórásnégyzetek /2.9/-ből:

$$x_1^2 = \frac{1}{\Delta} \sum_{m=1}^M \frac{t_m P_{2m}^2}{J_m} ; \quad x_2^2 = \frac{1}{\Delta} \sum_{m=1}^M \frac{t_m P_{1m}^2}{J_m} \quad , \quad /3.2/$$

ahol

$$\Delta = \sum_{\substack{n,m=1 \\ n>m}}^M \frac{t_n t_m}{J_n J_m} (P_{1n} P_{2m} - P_{1m} P_{2n})^2 .$$

c/ Az egyparaméteres szórásnégyzet minimalizálása a mérési helyek, mérési idők és a mérések számának függvényében.

A szórásnégyzet akkor lesz minimális /3.1/ szerint, ha P_{1m} maximális, és $t_m = 1$ /tehát csak itt mérünk/. Ez az eredmény egyébként triviális - egy intenzitás értékének mérését akkor tudjuk legpontosabban elvégezni, ha detektorunk elé semmilyen abszorbeáló közeget sem teszünk.

d/ A két-paraméteres szórásnégyzet minimalizálása $M=2$ esetén a mérési helyek és idők terében.

$M=2$ esetén /3.2/ a következő lesz:

$$\alpha_1^2 = \frac{\frac{J_1}{t_1} P_{21}^2 + \frac{J_2}{t_2} P_{22}^2}{(P_{11} P_{22} - P_{12} P_{21})^2} \quad \text{és} \quad \alpha_2^2 = \frac{\frac{J_1}{t_1} P_{11}^2 + \frac{J_2}{t_2} P_{12}^2}{(P_{11} P_{22} - P_{12} P_{21})^2} , \quad /3.3/$$

ahol $J_i = \alpha_1 P_{1i} + \alpha_2 P_{2i}$. A két kifejezés az 1-es és 2-es index felcserélésével egymásba megy át, így elég pl. α_1^2 minimumával foglalkozni.

A tulajdonképpeni minimalizálás előtt vizsgáljuk meg, hogy mikor válnak a szórásnégyzetek végtelenné. Ennek feltétele:

$$P_{11} P_{22} - P_{12} P_{21} = 0 , \quad \text{vagyis} \quad \frac{P_{11}}{P_{21}} = \frac{P_{12}}{P_{22}} = c . \quad /3.4/$$

Itt tehát az α_1 és α_2 paraméter értékére külön-külön semmilyen információt sem kapunk. A két sugárzás intenzitásának szétválasztásához éppen az kell, hogy a két mérési helyen a részintenzitások más-más sullyal szerepeljenek a teljes intenzitásban. Az itt tárgyalt esetben a két mérés tulajdonképpen egyetlen méréssel ekvivalens, amelyből csak az $\alpha_1 + c\alpha_2$ mennyiség határozható meg. A végtelen szórás matematikai oka, hogy /3.4/ fennállása esetén a mért értékek meghatározására szolgáló egyenletrendszer határozatlanná válik. Ebben az esetben minden szórásnégyzet, sőt az \underline{M} -mátrix minden eleme végtelenné válik. A jó méréshez tehát szükséges, hogy a két helyen a P_{11}/P_{21} és P_{12}/P_{22} hányados értéke erősen különbözzék.

Foglalkozzunk most az optimális idők megállapításával. Legyen α_1^2 minimum a $t_1 + t_2$ mellékfeltétel mellett t_1 és t_2 függvényében, vagyis /3.3/-ba $t_2 = 1 - t_1$ -et beírva legyen

$$\frac{\partial x_1^2}{\partial t_1} = 0. \quad /3.5/$$

A deriválás elvégzése után a kapott másodfoku egyenlet-rendszert P_{im} nemnegatív voltát kihasználva megoldva az időbeli minimalizálás következő feltételére jutunk:

$$t_1 = 1 / 1 + \sqrt{\frac{J_2}{J_1}} \frac{P_{21}}{P_{22}}, \quad t_2 = 1 - t_1 = \sqrt{\frac{J_2}{J_1}} \frac{P_{21}}{P_{22}} / 1 + \sqrt{\frac{J_2}{J_1}} \frac{P_{21}}{P_{22}}, \quad /3.6/$$

ahonnan

$$t_1 = \sqrt{\frac{J_1}{J_2}} \frac{P_{22}}{P_{21}} t_2 \quad /3.7/$$

x_2^2 -re az időbeli minimalizálás feltételét indexcserével kapjuk:

$$t_2 = \sqrt{\frac{J_2}{J_1}} \frac{P_{11}}{P_{12}} t_1, \quad \text{ahonnan} \quad t_1 = \sqrt{\frac{J_1}{J_2}} \frac{P_{12}}{P_{11}} t_2. \quad /3.8/$$

/3.7/ és /3.8/ egybevetéséből látható, hogy az időbeli szimultán minimalizálás feltétele éppen /3.4/, viszont ebben az esetben mindkét szórásnégyzet végtelenné válik. Ebből látható, hogy e feladatnál a két szórásnégyzet együttes minimalizálása nem valósítható meg.

/3.6/-ot /3.3/-ba helyettesítve megkapjuk az időben már minimalizált szórásnégyzetet, amiből gyököt vonva a következőt kapjuk:

$$x_1 = \frac{\sqrt{J_1} P_{22} + \sqrt{J_2} P_{21}}{|P_{11} P_{22} - P_{12} P_{21}|} \quad /3.9/$$

/ x_2 indexfelcseréléssel kapható./

x_1^2 helyett x_1 -et is minimalizálhatjuk a helyek függvényében. A minimalizálás feltétele:

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial x_1}{\partial x_2} = 0. \quad /3.10/$$

A kapott egyenletrendszer nem tekinthető jól át, ezért azzal általánosságban nem foglalkozunk, csupán azzal az igen gyakran előforduló esettel, amikor a két egyenlet között ellentmondás áll fenn. Ez arra utal, hogy a $0 \leq x_1 \leq 1$, $0 \leq x_2 \leq 1$ négyzet belsejében a szóráásoknak nincsen lokális minimuma. Ha $P_1(0) = P_2(0) = 0$, az $x = 0$ ponton való mérésből semmi információt sem kapunk, így itt a szóráás akkor lesz minimum, ha $x_2 = 1$ és $0 < x_1 < 1$, vagyis x_1 optimális értéke valahol az intervallum belsejében van. Erre az esetre lesz példa a $P_1(x) = x$, $P_2(x) = x^2$ probléma, amelynél /3.10/ ellentmondásosságát is kimutattam. Ha az $x = 0$ helyen valamelyik függvény nem 0, x_1 optimális értéke a konkrét problémától függően lehet 0 vagy ettől eltérő érték.

$x_2 = 1$ esetén $P_{12} = P_{22} = 1$, így $J_2 = a_1 + a_2$, tehát /3.9/ és az indexcserével kapott x_2 a következő alakba megy át:

$$x_1 = \frac{\sqrt{a_1 P_{11} + a_2 P_{21}} + \sqrt{a_1 + a_2} P_{21}}{|P_{11} - P_{21}|} \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{\sqrt{a_1 P_{11} + a_2 P_{21}} + \sqrt{a_1 + a_2} P_{21}}{|P_{11} - P_{21}|}, \quad /3.11/$$

amiből a kettő különbségét képezve:

$$x_1 - x_2 = \sqrt{a_1 + a_2} \cdot \text{sign}(P_{21} - P_{11}) \quad /3.12/$$

/3.12/-ből az az igen érdekes következtetés vonható le, hogy ebben az esetben az időben már minimalizált két szórás egymástól csak konstansban különbözik, vagyis

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_1} = \frac{\partial x_2}{\partial x_1}, \quad /3.13/$$

és így a két szórás lokális minimumhelyei egybeesnek /ami természetesen a szórásnégyzetekre is igaz, csak ott nem olyan szembeutó, mivel a két szórásnégyzet különbsége x_1 függvénye/. Így elég egyik szórás minimumhelyeit megkeresni.

Más a helyzet a bennünket érdeklő intervallumbeli minimummal. Abból, hogy a $(0,1)$ intervallumban x_1 minimális értéke az x_1' helyen van, nem következik, hogy x_2 minimuma is ugyanott van. Ennek oka: valahányszor $P_{21} = P_{11}$, a szórás /3.4/ szerint végtelenné válik /mivel itt $P_{12} = P_{22}$ /, a szórások különbsége pedig /3.12/ szerint előjelet vált. Ha az x_1' helyen $x_2(x_1') = x_1(x_1') + \sqrt{a_1 + a_2}$, lehet egy olyan x_1'' hely, ahol $x_2(x_1'') = x_1(x_1'') - \sqrt{a_1 + a_2} < x_2(x_1')$; ha azonban $P_1(x)$ és $P_2(x)$ a $(0,1)$ intervallum belsejében nem metszi egymást, x_1 és x_2 intervallumbeli minimumhelyei is egybe fognak esni.

x_1 intervallumbeli minimumának megkeresése úgy történik, hogy a $\frac{\partial x_1}{\partial x_1} = 0$ feltételből megkeressük x_1 valamennyi stacionárius helyét, kiszámítjuk x_1 értékét e helyeken és az $x_1 = 0$ helyen, és ezen értékek közül vesszük a legkisebbet.

Mint /3.11/-ből látható, a minimum helye csak a két részintenzitás $a_2/a_1 = b$ viszonyától függ, az egyes paraméterektől külön nem / a_1 kiemelhető/. Így e jelölést bevezetve /3.10/ első részéből a következő egyenletre jutunk:

$$2\sqrt{1+b} \sqrt{P_{11} + bP_{21}} (P_{11}P_{21}' - P_{11}'P_{21}) + (2+b)P_{11}P_{21}' - (2b+1)P_{11}'P_{21} + (bP_{21}'P_{21}' - P_{11}'P_{11}') = 0, \quad /3.14/$$

/3.14/ segítségével bármely ilyentípusú mérés tervezésénél az optimum megkeresése - esetleg numerikusan - elvégezhető.

e/ Minimalizálás speciális $P_1(x)$ és $P_2(x)$ polinomok esetén

α / Legyen $P_1(x) = 1$, $P_2(x) = x$; ekkor $P_1'(x) = 0$, $P_2'(x) = 1$, így a helyre való minimalizálás /3.14/ feltétele a következő lesz:

$$2\sqrt{1+b} \sqrt{1+bx} + (2+b) + bx = 0, \quad /3.15/$$

amely egyenletnek x és a négyzetgyök pozitív értéke esetén nincsen megoldása, tehát a szórásnak nincsen lokális minimuma a /0,1/ intervallumban /az intervallum belsejében/. Így az $x_2 = 1$ mellett $x_1 = 0$ lesz az optimális másik mérési hely. E helyeken való mérés és optimális idők esetén a szórás:

$$x_1 = \sqrt{a_1} \quad \text{és} \quad x_2 = \sqrt{a_1} + \sqrt{a_1 + a_2}.$$

A szórásokat minimalizáló idők /3.7/ és /3.8/ szerint:

$$x_1 \text{ -re: } t_1 = 1, t_2 = 0 \text{ /mérés csak } x = 0 \text{ -nál/;}$$

$$x_2 \text{ -re: } t_1 = \sqrt{\frac{1}{1+b}} t_2.$$

β / Legyen most $P_1(x) = x$ és $P_2(x) = x^2$; ekkor $P_1'(x) = 1$ és $P_2'(x) = 2x$. Erre az esetre $x_2 = 1$ feltételezése nélkül írjuk fel /3.10/-et:

$$\begin{aligned} x_1(2x_2\sqrt{(x_1+bx_1^2)(x_2+bx_2^2)} + x_1^2(2bx_2^2) + x_1(3x_2^2) - x_2^3) &= 0 \\ -x_1^3 + x_1^2(2bx_2^2 - 3x_2) + x_1(2x_2\sqrt{(x_1+bx_1^2)(x_2+bx_2^2)}) &= 0. \end{aligned} \quad /3.16/$$

Ez az x_1 és x_2 -ben szimmetrikus egyenletrendszer ellentmondásos, ha az $x_1 = x_2 = 0$ megoldást nem engedjük meg. Legyen például $x_1 < x_2$, ekkor a második egyenletből $x_1^3 > 3x_1^2x_2$, ahonnan $x_1 > 3x_2$, ami feltevé-
sünknek ellentmond. Ez csak úgy lehetséges, ha a x_1 szórás minimális értékét a /0,1/ intervallumban $x_1 = 0$ vagy $x_2 = 1$ esetén veszi fel. $x_1 = 0$ esetén a szórás végtelenné válik, így csak az $x_2 = 1$ választás lehetséges, amit behelyettesítve /3.16/ első egyenletébe a következőt kapjuk:

$$2x_1\sqrt{(x_1+bx_1^2)(1+b)} + 2bx_1^2 + 3x_1 - 1 = 0. \quad /3.17/$$

/Ugyanezt az egyenletet kapjuk, ha $P_1(x)$ és $P_2(x)$ fenti kifejezését /3.14/-be helyettesítjük./

Adott $b = a_2/a_1$ esetén ez az egyenlet numerikusan könnyen kiértékelhető.

/3.12/ alapján, és mivel az itt szereplő $P_1(x)$ és $P_2(x)$ a /0,1/ intervallum belsejében nem metszi egymást, az itt elmondottak x_2 szórásának minimalizálására is érvényesek.

A kiértékelést itt csak a két szélső esetben, a $b \rightarrow 0$ és $b \rightarrow \infty$ esetekben végzem el.

Ha $b \rightarrow 0$, /3.17/ a következő alakba megy át:

$$2x^{3/2} + 3x_1 - 1 = 0,$$

amely egyenlet /0,1/-be eső megoldása $x_1 = 0,25$.

Ha $b \rightarrow \infty$, /3.17/ szerint $x_1 \rightarrow 0$. Ha b befutja a $(0, \infty)$ intervallumot, x_1 optimális szóráshoz tartozó értéke is befutja az $(1/4, 0)$ intervallumot.

A $b=0$ esetben megadjuk a megfelelő időket is /3.7/ és /3.8/ alapján:

$$x_1 \text{-re: } t_1 = 8t_2; \quad x_2 \text{-re: } t_1 = 2t_2.$$

Ebből azt az érdekes eredményt kapjuk, hogy $\alpha_2=0$ esetén, amikor csak a $P_1(x)=x$ transzmisszió-törvényű sugárzás van jelen, annak α_1 intenzitását nem abszorbens nélkül kapjuk legpontosabban, mint közönséges intenzitásmérésnél természetesen kapnánk, hanem az $x_1 = 0,25$ és $x_2 = 1$ helyeken mérve $t_1 = 2/3T$, $t_2 = 1/3T$ időig /T a teljes mérési idő/. Ennek oka az, hogy előzetesen feltételeztük, hogy $P_2(x)$ transzmisszió-törvényű sugárzás is van jelen, és így a mérésből a teljes intenzitás két részintenzitás közti megoszlására is következtetnünk kell. Két paraméter egyszerre történő mérésénél gyakran ez a helyzet.

g/ Legyen most $P_1(x)=x$, $P_2(x)=c+(1-c)x^2$, ekkor a legjobb mérési hely c értékétől függően vagy valamelyik a /0,1/ intervallum belsejébe eső pont, vagy a 0 pont. Mivel itt a két görbe metszi egymást, bizonyos c -értékeknél egyik paraméter szórása az $x=0$ pontban, másiké az intervallum belsejében minimális. E probléma részletes tárgyalásával itt nem foglalkozunk.

Az előzőekben tárgyalt problémák közül csupán a $P_1(x)=1$, $P_2(x)=x$ esetben sikerült bizonyítanunk, hogy $M=2$ az optimális mérésszám /az intervallum belsejében felvett új pont itt a szórást csak növelheti, mint könnyen belátható/. Más példánál csak azt sikerült kimutatnunk, hogy $M=3$ mérési pontot felvéve az $M=2$ pontnál kapott minimum az új változók terében is lokális minimum lesz.

2. $J(\underline{a}, x) = \alpha_1 e^{-\alpha_2 x}$ /exponenciális abszorpció/

A/ Példa ilyen intenzitásfüggvényt adó fizikai problémára: érkezzen α_1 intenzitású sugárzás abszorbeáló falra, az átmenő sugárzás intenzitása függjön exponenciálisan az x falvastagságtól, ekkor az átmenő intenzitás a feladatban szereplő $\alpha_1 e^{-\alpha_2 x}$ lesz, ahol α_2 az abszorpciókoefficiens.

Feladat: meghatározandó a sugárzás beeső intenzitása és az abszorpciós koefficiens különböző x_m falvastagságokon átmenő sugárzás esetén kapott beütésszámok mérésével; a mérésre egységnyi idő áll rendelkezésre.

Ha a beeső intenzitást ismertnek tekintjük, a probléma egyparaméteressé válik, az abszorpciós koefficiens mérése az előbbiek szerint történik:

b/ Egyparaméteres probléma

Ha $a_1 = A$ ismert érték, /2.6/ szerint a_2 szórásnégyzete a következő lesz:

$$x^2 = 1/A \sum_{m=1}^M t_m x_m^2 e^{-a_2 x_m} \quad /3.18/$$

/3.18/-ban t_m szorzója $x_m = 2/a_2$ esetén maximális, így a szórásnégyzet akkor lesz minimális, ha ezen a helyen mérünk egységnyi ideig. Az egyparaméteres problémánál tehát itt is legjobb csak egy helyen mérni, bár ez az eredmény itt egyáltalán nem olyan triviális, mint az előző példánál.

Az x vastagság helyett a dimenziótlan $y = a_2 x$ paraméterre áttérve az optimális mérési hely $y = 2$.

c/ Kétparaméteres probléma

Legyen a_1 és a_2 is meghatározandó paraméter; vezessük be itt is az $y = a_2 x$ jelölést, ekkor /2.9/ szerint a szórásnégyzetek:

$$x_1^2 = \frac{a_1}{\Delta} \sum_{m=1}^M t_m y_m^2 e^{-y_m} \quad \text{és} \quad x_2^2 = \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{1}{\Delta} \sum_{m=1}^M t_m e^{-y_m} \quad , \quad /3.19/$$

ahol

$$\Delta = \sum_{\substack{m,n=1 \\ m>n}}^M t_m t_n e^{-(y_m+y_n)} (y_m - y_n) \quad .$$

/3.19/-ben a mérendő a_1 és a_2 paraméterek csak szorzótényezőként szerepelnek. a_1 mért értékének szórásnégyzete, mint várható is, az a_1 abszorbens nélküli intenzitással egyenesen arányos; a_2 mért értékének szórásnégyzete a_1 értékével fordítva, a_2^2 -tel pedig egyenesen arányos. Relatív szórásnégyzetre áttérve mindkét kiemelt faktor $1/a_1$ lesz, vagyis a relatív hiba az intenzitás növekedésével csökken /ha a mérésre nem egységnyi, hanem T idő áll rendelkezésre, a relatív szórásnégyzetben $1/Ta_1$ szorzó fog fellépni/.

A továbbiakban e szorzótényezőket elhagyjuk, mivel azok a minimum helyét nem befolyásolják.

Két mérés esete.

Fizikai megfontolásból nyilvánvaló, hogy legpontosabb akkor lesz a mérés, ha egyik mérési pont az $y_1 = 0$ lesz, vagyis egyik intenzitásmérést abszorbens nélkül végezzük /ha egy másik, $y_1' \neq 0$ helyen mérünk ehelyett és $y_2 > y_1'$, akkor ugyanazok a viszonyok, mintha az intenzitást $a_1 e^{-y_1}$ - re csökkentettük volna/. $y_1 = 0$ esetén /3.19/-ből:

$$\alpha_1^2 = \frac{1}{t_1}, \quad \alpha_2^2 = \frac{t_1 + t_2 e^{-y_2}}{t_1 t_2 y_2^2 e^{-y_2}} \quad /3.20/$$

Az intenzitás $\bar{\alpha}_1$ mért értékének szórásnégyzete tehát akkor lesz minimális, ha $t_1 = 1, t_2 = 0$, vagyis csak abszorbens nélkül mérünk. Az α_2 abszorpciós koefficiens szórását a $t_1 + t_2 = 1$ mellékfeltétel mellett a parciális deriváltak eltüntetésének megkövetelésével minimalizálhatjuk, amiből a következő egyenletrendszerre jutunk:

$$\begin{aligned} t_1^2 / (1 - t_1)^2 &= e^{y_2} \\ t_1 / (1 - t_1) &= e^{y_2 / 2} \left(\frac{y_2}{2} - 1 \right), \end{aligned} \quad /3.21/$$

ahonnan például az időket kiküszöbölve:

$$\left(\frac{y_2}{2} - 1 \right)^2 = e^{-y_2},$$

ami y_2 -re numerikusan kiértékelhető. Hasonlóan történik a kiértékelés t_1 -re is.

A numerikus kiértékelést elvégezve a minimális szórást adó Y_2 helyre és T_1 időre a következőket kaptam:

$$Y_2 = 2,556 \quad \text{és} \quad T_1 = 0,218,$$

ahonnan /3.20/ felhasználásával a szórásnégyzet minimuma 3.22. /E kétparaméteres probléma megoldását Jánossy Lajos és Rupp Erzsébet más módszerrel már elvégezték [2] ./

Három mérés esetén itt sem sikerült bebizonyítani, hogy az α_2 paraméter /3.19/-ből kapható szórásnégyzete nem tehető kisebbé a két mérés esetén kapott szórásnégyzetnél, a végzett számos numerikus kiértékelés esetén kapott szórásnégyzetek azonban annál mindig nagyobbaknak adódtak. Itt is sikerült kimutatni, hogy a két mérésnél kapott minimális szórásnégyzethez tartozó koordináta- és időadatok három mérés esetén is stacionárius helyet adnak / α_2^2 a t_1, t_2, t_3, y_2, y_3 változók terében $y_1 = 0$ és $t_1 + t_2 + t_3 = 1$ esetén

stacionárius, ha $y_2 = y_3 = Y_2$ és $t_1 = T_1 / t_2$ és t_3 közt a maradékidő felosztása tetszőleges/, vagy ha y_2 és y_3 közül az egyik $= Y_2$, az ehhez tartozó idő T_2 , és $t_1 = T_1 / a$ harmadik, tetszőleges ponthoz tartozó idő 0//.

B/ Időben változó problémák

1. $J(\tau) = a_1 [1 + a_2 b(\tau)]$, ahol $a_2 b(\tau) \ll 1$.

a/ példa ilyen típusu eloszlásra: kozmikus sugárzás intenzitása a légnyomás változásával adott helyen első közelítésben lineárisan változik /minden egyéb okból eredő változástól itt tekintünk el/. A légnyomás a τ időpillanatban $b(\tau)$ -val térjen el az átlagértéktől /tegyük fel, hogy az eltérés az átlagértékhez képest kicsi/, az átlagintenzitás legyen a_1 , és legyen a_2 a légnyomás és az intenzitás közti "csatolási állandó" - ekkor az intenzitás alakja valóban a fenti lesz.

Feladat: mérendő az a_1 átlagos intenzitás és az a_2 "csatolási állandó" különböző τ időkben végzett beütésszám-mérések segítségével; feltételezzük, hogy a nyomás $b(\tau)$ időbeli változása ismert, és T a tényleges mérésre rendelkezésünkre álló teljes idő.

Ha az a_1 intenzitást ismertnek vesszük, időben változó egyparaméteres problémára jutunk.

b/ Mielőtt a /2.6/ és /2.9/ alapján a szórásnégyzetek kiszámítására és minimalizálására rátérnénk, időben változó probléma esetén is értelmeznünk kell az ezekben szereplő, stacionárius esetben /2.3/ által definiált J_m és J'_{1m} , J'_{2m} mennyiségeket. A problémát itt az jelenti, hogy a /2.2/ Poisson-eloszlásban szereplő $J_m t_m$ a t_m idő alatti beütésszám várható értékét jelentette; itt viszont a várható érték csak akkor írható ilyen alakba, ha J_m a pillanatnyi intenzitás helyett a $t_m = \tau_m'' - \tau_m'$ idő alatti átlagos intenzitást jelenti. Végezzük az m -edik, t_m időtartamu mérést a τ_m' és τ_m'' időpontok között, ekkor az átlagos intenzitás:

$$J(\tau_m', \tau_m'') = \frac{1}{t_m} \int_{\tau_m'}^{\tau_m''} J(\tau) d\tau = a_1 + \frac{a_2}{t_m} \int_{\tau_m'}^{\tau_m''} b(\tau) d\tau \quad /3.22/$$

Legyen

$$b_m = \frac{1}{t_m} \int_{\tau_m'}^{\tau_m''} b(\tau) d\tau, \quad \text{ekkor} \quad J(\tau_m', \tau_m'') = J_m = a_1(1 + a_2 b_m). \quad /3.23/$$

Ezt /2.3/-nak megfelelően a_1 és a_2 szerint deriválva:

$$J'_{1m} = 1 + a_2 b_m \quad \text{és} \quad J'_{2m} = a_1 b_m.$$

c/ Egyparaméteres probléma

Legyen a_1 ismert, ekkor a_2 szórásnégyzeténck reciproka /2.6/ szerint:

$$1/x_2^2 \approx a_1 \sum_{m=1}^M t_m b_m^2 . \quad /3.24/$$

A kétparaméteres problémánál a_2 szórásnégyzetét ugyanerre az alakra hozzuk, és a feltételes szélsőérték feltételét ott tárgyaljuk.

d/ Kétparaméteres probléma

Legyen a $b(\tau)$ nyomásváltozási görbe ismert, a_1 és a_2 pedig ismeretlen. Végezzük úgy a mérést, hogy a $\sum_{m=1}^M t_m b_m = 0$ feltétel fennálljon. Ekkor /2.9/ szerint a szórásnégyzetek /1 mellett $a_2 b_m$ -et elhanyagolva/:

$$x_1^2 = \frac{a_1}{T} , \quad 1/x_2^2 \approx a_1 \sum_{m=1}^M t_m b_m^2 . \quad /3.25/$$

a_1 intenzitás szórásnégyzete a mérési időpontoktól független, a_2 szórásnégyzetének reciproka pedig éppen /3.24/. Legyen a légnyomás változását megadó ismert $b(\tau)$ görbének $(0, \Theta)$ szakasza a méréshez felhasználható, a teljes detektálási idő legyen T /például 1 hónap alatt kell a mérést elvégeznünk, de detektálórendszerünket csak 100 óráig használhatjuk erre a célra/.

A mérés akkor optimális, ha $\sum_{m=1}^M t_m b_m^2$ maximális. E kifejezés viszont annál nagyobbá tehető, minél több mérést végzek. Válasszuk ki például t_1 -et, ezt osszuk fel egyenletesen l részre; ha l elég nagy, a szumma integrált közelít:

$$\sum_{i=1}^l t_{1i} b_{1i}^2 \approx \int_{\tau_1'}^{\tau_1''} b^2(\tau) d\tau ,$$

viszont ha a

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right|^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx$$

Schwarz-féle egyenlőtlenségbe $f(x) = b(\tau)$, $g(x) = 1$ -et, valamint a τ_1' és τ_1'' határokat helyettesítjük, és b_1 integrálkifejezését beírjuk, a következőt kapjuk:

$$t_1 b_1^2 \cong \int_{\tau_1'}^{\tau_1''} b^2(\tau) d\tau, \quad /3.26/$$

ahol az egyenlőség csak $b(\tau) = \text{konstans}$ esetén áll fenn, egyébként a $<$ jel érvényes. Ugyanez bármely $t_m b_m^2$ -re, így $\sum_{m=1}^M t_m b_m^2$ -re is igaz. Így ha $b(\tau)$ nem konstans, a mérés pontosságát mindig javíthatjuk, ha az eredeti mérési időket részekre osztjuk, és e részidőkben külön-külön méréseket végzünk.

Ez a gondolatmenet - ha nem is ilyen egyszerűen - minden időtől függő intenzitás esetén alkalmazható. Annak oka, hogy itt végtelen mérés esetén kapjuk a legjobb mérési eredményt az, hogy a várható érték integrál alakjában lép fel, amely intenzitás-integrál annál jobban elmosza az információt adó függvénygörbe strukturáját, minél nagyobb intervallumra terjed ki. A maximális információt a görbe teljes letapogatásával /illetve $T < \Theta$ esetén a legnagyobb nyomáseltérésnek megfelelő T időtartamu rész letapogatásával/ - végtelen méréssel kapjuk.

Meggondolásaink arra az esetre vonatkoztak, amikor a teljes rendelkezésünkre álló Θ idő és a mérésre fordítható T idő egymással összehasonlítható. Ha $\Theta = T$, még fokozottabban igaz, hogy a mérések száma erősen javítja a pontosságot. Ha viszont $T \ll \Theta$, vagy pontosabban T idő alatt $b(\tau)$ változása igen kicsi, kettőnél több mérés már nem javítja lényegesen a pontosságot, legcélszerűbb $b(\tau)$ minimális és maximális értékénél mérni. Ez az eset az időtől független probléma felé jelent átmenetet - τ idő szerepe ugyanaz lesz, mint az x koordinátáé, az integrálok helyettesíthetők a pillanatnyi intenzitásokkal; a mérés tervezése az időtől független problémáéval egyezik, kivitelezésében csak az lesz az eltérés, hogy a detektor egyik helyről a másikra való átvitele helyett hosszú ideig várunk. Valamennyi az A pontban tárgyalt példa analogonja itt is megadható.

/Az e pontban tárgyalt példa e határesetben azt a lényeges eredményt adja, hogy itt valóban $M = 2$ az optimális mérésszám!/
A 3.26

2. $J(\tau) = a_1 e^{-a_2 \tau}$ radioaktív bomlás.

E probléma részletes diszkusszióját Jánossy Lajos és Rupp Erzsébet már elvégezték [3], így itt csak röviden rámutatok az előző példánál leírt megállapítások alkalmazhatóságára. a_2 szórásnégyzete adott T idő esetén általában végtelen mérésnél lesz minimális itt is. Ha az a Θ idő, amelyen belül méréseket végezhetek, a felezési időnél sokkal nagyobb, a tényleges mérésre fordítható T idő pedig annál sokkal kisebb /és így T időn belül az intenzitás nem változik lényegesen/, τ egyszerűen helynek tekinthető és a

probléma átmegy az A pont 2. példájába, amelynél kapott valamennyi eredmény itt alkalmazható /természetesen csak közelítésben, mivel itt nem vesszük figyelembe a probléma stochasztikus jellegét; a közelítés a bomló atomok nagy száma esetén jó/.

IV. Befejező megjegyzések

Az előzők alapján megállapíthatjuk, hogy a mérések optimális számának meghatározásánál célszerű külön tárgyalni az időben állandó és időben változó intenzitással kapcsolatos problémákat. Bár a gyakorlatban az időben változó intenzitások esetén bonyolultabbak a viszonyok, az alapfeladat megoldása itt egyszerűbb: minél több mérést végezhetünk, annál pontosabbá tudjuk tenni a paraméterek mérését adott T idő alatt. /A mérések számának növelésekor a kiválasztott paraméter szórásnégyzete 0-tól különböző konstanshoz tart./

Időben állandó intenzitások és egy ismeretlen paraméter esetén minden példánál azt láttuk, hogy a mérések optimális száma 1. Ez /2.6/-ból általánosan is látható; a szórásnégyzet akkor lesz minimális, ha a teljes mérési időt azon a mérés számára hozzáférhető x helyen használjuk fel, ahol az $\frac{[J'(x)]^2}{J(x)}$ függvény legnagyobb értékét felveszi.

Két, egymástól függetlenül nem mérhető ismeretlen paraméter közül az egyiknek a legpontosabb mérése egyes esetekben szintén a minimális mérés-szám, $M = 2$ esetén adódott. Elképzelhető, hogy időben állandó intenzitások esetén egymástól függetlenül nem mérhető paraméterek közül valamelyiknek a mérése akkor végezhető el legpontosabban, ha a mérések és az ismeretlen paraméterek száma megegyezik, $M = N$; / $M < N$ csak akkor jöhet számításba, ha a keresett paraméter egyes más szereplő paraméterektől függetlenül is meghatározható, mint például az exponenciális abszorpciónál az intenzitás; ekkor viszont az illető paraméter szempontjából a probléma kevesebb paraméteresre redukálható, és az előbbi feladatra visszavezethető/; elképzelhető viszont az is, hogy a legjobb eredményt $M = \infty$ esetén, vagy valamilyen közbülső esetben kapjuk.

Eddig időben állandó intenzitások esetén nem találtam olyan példát, ahol $M > N$ esetén az $M = N$ esetben kapott minimális szórásnégyzethnél kisebb szórásnégyzetet sikerült volna elérni.

Dolgozatom végén köszönetet szeretnék mondani Jánossy Lajos professzor urnak, aki az itt tárgyalt problémát felvetette, és munkám közben igen sok hasznos tanácsot adott. Köszönetet mondok ezen kívül Rózsa Pálnak, Balatoni Ferencnek segítségükért, valamint évfolyamtársnőmnek, Kövessy Zsuzsannának, akivel e vizsgálatok első részét együtt végeztük.

HOMOGÉNTÉRŰ GYORSÍTÓCSÖVEK IONOPTIKAI TULAJDONSÁGAI

Irta: Páris Gyula

Összefoglalás

A cikkben homogénterű gyorsítócsövek fókuszálási határait vizsgáljuk. Megmutatjuk, hogy korlátlan energiasokszorozás az adott csőtípussal nem érhető el a nyaláb szórása nélkül. Megadjuk a háromelemű gyorsítócsövek fókuszálási tartományát. Numerikus példán mutatjuk be az ötelemű csövek fókuszálási sajátosságait.

Az elektronoptikában /vagy általánosabban a korpuzkuláeroptikában/ még manapság is a fényoptikában bevezetett fogalmakkal igyekeznek a jelenségeket leírni. A geometriai optika kényelmes összefüggései, szerkesztési és szemléleti lehetőségei kétségtelen előnyöket jelentenek elektronoptikai rendszerek vizsgálatában is - ha azok egyáltalán alkalmazhatók az elektronoptikában.

A fény - és elektronoptika közötti analógia azonban valójában csak jelentős megszorítások mellett érvényes^x. Sőt, általános elektronoptikai leképezésnél olyan fogalmak bevezetésének, mint a "fókusz", vagy "fókusz-távolság", semmiféle alapja nincs. Még tengelyközeli /paraxiális/ mozgás esetén is csak közelítőleg, s bizonyos feltételeket kielégítő elektromágneses terekben beszélhetünk a fényoptikáéval azonos fogalmakról.

Az analógia hiánya ellenére leképezés a korpuzkulár-optikában is megvalósítható, s még tágabb lehetőségekkel, mint a fényoptikában. A leképezés általános törvényeinek vizsgálata még távolról sem befejezett. A gyakorlati alkalmazásokban is többnyire az elvi lehetőségek technikai realizálása jelentkezik, pontos kvantitatív analízis végrehajtása nélkül. A számszerű vizsgálatok inkább egy-egy berendezés működési tartományának és elvi sajátosságainak meghatározását szolgálják. Hozzávetőleges képet a működés fizikai konkrétumairól modellek, közelítő módszerek segítségével nyernek. Ez a legtöbb technikai alkalmazásban elegendő is - akár fényoptikai analógiák felhasználásával /ha azok alkalmazhatók/ történik, akár a mozgás általános mechanikai vizsgálatával. Gyakran megtörténik azonban, hogy akkor is fényoptikai analógiákban gondolkoznak, amikor azok már egészen bizonyosan nem állnak fenn. Jó példa erre a homogénterű gyorsítócsövek fókuszálási tulajdonságainak szokásos matematikai leírása.

^xFényoptika alatt itt Gauss-dioptrikát értünk.

Homogénterű gyorsítócsövek számítása ma is az 1953. elején megjelent közismert Elkind-cikk [1] alapján történik. A cikk u.n. három- és ötelemű gyorsítócsöveket tárgyal. Háromelemű csőben a térerősség a teljes csőhosszban azonos, ötelemű cső pedig két különböző térerősségű szakaszból áll. A térmentes tartományból az állandó térerősségűbe, vagy egyik térerősségből a másikba való átmenet nem ugrásszerű, ezért a Gans-módszerrel végzett számítások nem kielégítőek. A fokozatos átmenetből adódó fókuszáló hatás különösen a cső bemeneténél jelentős /enyhíti a bemeneti diafragma gyűjtőhatását/, s a cikk a Zvorykin-féle korrekciós faktorról számításba is veszi. A homogén térben a részecskék parabola-pályákon mozognak. A pályák paramétereit a homogén tér mellett az átmeneti diafragmák síkjában elhelyezett vékony lencsék határozzák meg. Ily módon az egész cső egy vastag lencsének tekinthető, melynek paramétereit /pl. tárgy- és képtávolság, nagyítás/ megadhatók az N feszültségsokszorozás és ξ Zvorykin-faktor függvényében. A cikkben közölt formulák nagyon egyszerűek, s kényelmesen alkalmazhatók gyorsítócsövek számítására. Érvényességük azonban korlátozott, illetve nem fejezik ki hűen és teljesen a homogénterű csövek leképezési sajátosságait.

Mind a háromelemű, mind az ötelemű homogénterű gyorsítócsövek az energiasokszorozás értékétől függően gyűjtő, vagy szóró lencseként működhetnek. A háromelemű csövek valamilyen $N < N_1$ sokszorozási tartományban gyűjtőlencseként, $N > N_1$ értékeknél viszont szórólencseként viselkednek. Ötelemű csövekben még érdekesebb a leképezés: általában két gyűjtő és két szóró jellegű sáv alakul ki N függvényében. Ezek a sávok át is fedhetik egymást.

Mindez a paraxiális mozgás egyszerű tanulmányozásából leszűrhető, a geometriai optika alapján végzett számításokból azonban nem következik. Az ellentmondást az okozza, hogy a keskeny lencséknek tekintett, homogén terű szakaszokat határoló diafragmák egyik, vagy mindkét oldalán erőter van, s itt már a geometriai optika fogalmai nem használhatók, illetve alkalmazásuk csak a speciális sajátosságok figyelembevételével lehetséges. Vizsgáljuk meg általánosságban ezt a problémát, felhasználva [2] gondolatmenetét.

Töltött részecskék mozgását elektromágneses terekben, ha a radiációs folyamatokat nem vesszük tekintetbe, leírhatjuk a klasszikus Hamilton-formalizmussal. A részecske pillanatnyi állapota teljesen meghatározható egy hatdimenziós tér helyvektorával, melynek komponensei a háromdimenziós tér helykoordinátái és a kanonikus impulzusok.

Ha a részecskék kölcsönhatását - például a tértöltést - elhanyagoljuk, a Hamiltonián termék összegére szeparálható, melyek mindegyike egy kanonikus konjugált változó-párt tartalmaz. Hengerszimmetrikus terekben a részecske mozgását teljesen meghatározza a kétdimenziós fázistér - az r sugár és a p_r radiális impulzus. Mivel az ionnyaláb Hamiltoniánnal reprezentálható, kielégíthetők és közvetlenül alkalmazhatók a jólismert Lagrangé és Liouville invariánsok.

Ha egy optikai rendszerbe belépő részecske kezdeti sugara és impulzusa belépés előtt r_i és p_{r_i} , akkor a kilépő nyaláb a következő összefüggéssel adható meg /az f index a kilépés helyét jelöli/ :

$$\begin{vmatrix} r_f \\ p_{r_f} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} r_i \\ p_{r_i} \end{vmatrix}, \quad \det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 1. \quad /1/$$

Az a_{jk} mátrixelemek általában a kezdeti nyaláb rádiuszának és impulzusának függvényei. Ha keresztmetszetben az impulzus állandó és a rádiusz kicsiny, az a_{jk} -k nagyon jó közelítéssel állandó mennyiségek. Ide tartozik az u.n. paraxiális tartomány, melyet a következő egyenletek definiálnak:

$$\text{tg } \Theta \approx \Theta, \quad p_r \approx p \frac{dr}{dz}, \quad /2/$$

ahol P a részecske teljes impulzusa.

[2] a továbbiakban Lagrange és Lionville-invariánsokat képez, bevezeti a nyalábemittencia és akceptancia fogalmát ezen invariánsok alapján, majd egy későbbi cikkben az itt definiált mennyiségek mérésére szerkesztett műszert is ismertet egy szerzőcsoport. A bevezetett fogalmak azonban még mindig elég homályosak, nem adnak módot a vizsgált jelenség teljes megértésére. Ezért a további vizsgálatot más módszerrel végezzük.

Ismeretes, hogy gyűjtőlencsék, vagy gyűjtő és szórólencsék kombinációja együttesen alkothat akár gyűjtő, akár szórólencsét. Vékony, azonos törőerejű gyűjtőlencsék sorozata gyűjtőlencsét képez, ha $CL < 4$, ahol C egy lencse $1/f$ törőereje, L pedig a lencsék közötti távolság; ha pedig $CL > 4$, a rendszer szórólencseként viselkedik [3]. Ha csak két vékony gyűjtőlencsét tekintünk, melyeknek f_1 és f_2 a fókusz távolságuk, akkor, mint ismeretes, a közös fókusz távolság (F) reciproka

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{L}{f_1 f_2}, \quad /3/$$

ahol L a lencsék közötti távolság. Ha $L > f_1 + f_2$, akkor a rendszer szórólencseként viselkedik. Ha a lencsék fókusz távolsága azonos, akkor az előbbi fogalmazásban a rendszer szór, ha $CL > 2$. Tehát itt szigorubb megszorítással kapunk gyűjtőlencsét, mint, ha több elemből felépített rendszert vizsgálunk. Ha az azonos törőerejű két lencse közül egyik gyűj-

tő, másik szóró, /3/ alapján láthatjuk, hogy mindig gyűjtőlencsét kapunk

$$F = \frac{|f|^2}{L}$$

fókusz-távolsággal, mivel $f_1 = -f_2 = f$. Ha azonban a fókusz-távolságok különbözők, a rendszer lehet gyűjtő is, szóró is.

Ha egy háromelemű gyorsítócsövet a geometriai optika nyelvén írunk le, azt mondjuk, hogy a cső bemeneténél erős gyűjtőhatású, kimeneténél gyenge szóróhatású diafragma-lencse van, s a két lencse között a részecske pályája a szabadesés törvényét követi. Így formálisan szemlélve a rendszert, aligha kaphatnánk szórólencsét, mert hiszen $1/f_1 > 1/f_2$, /3/ jobboldalának utolsó tagja pedig pozitív és így F is pozitív lesz. Igaz, hogy az L most valamilyen módosított távolságot jelent, hiszen a részecske nem szabad térben mozog, s értelmezésével esetleg helyesen adhatnánk meg a rendszer viselkedését. Van azonban egy sokkal általánosabb és egyszerűbb módszer, mellyel a problémát vizsgálhatjuk.

Mint ismeretes /l.pl. [4] /, /2/ figyelembevételével /1/ r és p_r vonatkozásban lineáris, s az általános megoldása megadható, mint két tetzőleges különböző megoldás lineáris kombinációja. Ha mindkét parciális megoldás korlátos, akkor a pálya is korlátos, vagyis az /1/ által leírt rendszer optikai nyelven szólva fókuszál, vagy, dinamikai terminológiával kifejezve, a mozgás stabilis. Ha azonban valamelyik parciális megoldás nem korlátos, a nyalábot alkotó részecskék nagyon kis hányada marad a tengely környezetében, vagyis a rendszer defókuszál, illetve a mozgás nem stabilis. Mind a matematikában, mind a mechanikában kimutatták, hogy a kritérium /1/ mátrixelemeivel a következő módon fejezhető ki:

$$/4/ \begin{cases} \text{ha } |a_{11} + a_{22}| < 2, & \text{a rendszer fókuszál / a mozgás stabilis/} \\ \text{ha } |a_{11} + a_{22}| \geq 2, & \text{a rendszer defókuszál / a mozgás instabilis/} \end{cases}$$

A csatoló-mátrix "nyoma" /spur/, tehát igen egyszerű kritériumot szolgáltat annak eldöntésére, hogy egy elektronoptikai rendszer fókuszál-e, vagy defókuszál. A mátrixelemek kifejezhetők lencseparaméterekkel is. Mivel részecskegyorsító berendezésekben a nyaláb együttartása széles energiatartományban szükséges, igen fontos már a berendezés konstruálásának fázisában a fókuszálási tartomány megállapítása. Ez bonyolult optikai rendszerekben /mint pl. hengerlencsékkel ellátott kaszkádgenerátorok/ elkerülhetetlen. Háromelemű homogén terű csöveknél akkor lényeges ez a vizsgálat, ha nem akarunk bonyolult előfókuszáló rendszert alkalmazni, öteleműeknél azonban mindenképpen meg kell vizsgálni a fókuszálási tartományokat.

Mielőtt a konkrét számításokra rátérnénk, kicsit közelebbről megvizsgáljuk a /4/ kritériumok értelmét. Bár matematikailag a stabilitás fogalma teljesen világos, mégsem teszi érthetővé esetünkben a jelenség fizikai tartalmát, részletesebb vizsgálatokat igényel.

Ha /1/ alapján Lagrange-invariánsot képezünk, a következőt írhatjuk:

$$\left. \begin{aligned} r_f p_{r_i} - r_i p_{r_f} &= a_{12} p_{r_i}^2 + (a_{11} - a_{22}) r_i p_{r_i} - a_{21} r_i^2 \\ &= a_{12} p_{r_f}^2 + (a_{11} - a_{22}) r_f p_{r_f} - a_{21} r_f^2 \end{aligned} \right\} \quad /5/$$

a baloldal a Lagrange-invariáns, a jobboldal pedig nyilvánvalóan kónusz-metszetet reprezentál az (r, p_r) síkban. Vizsgáljuk meg általában az /5/ típusu síkgörbék tulajdonságait. Tekintsünk az (x, y) síkon olyan centrális görbét, melyet az alábbi egyenlet ír le:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + d = 0 \quad /6/$$

Az analitikus geometriából ismeretes, hogy /6/ csak akkor ír le valós görbét, ha d negatív, tehát $d < 0$. Ha $d = 0$, valós, vagy képzetes metsző egyenes párt kapunk. A görbe invariánsai, melyek koordináta transzformációnál változatlanok maradnak:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ b & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix}, \quad \delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}, \quad S = a + c \quad /7/$$

Ha $\delta > 0$ és $d \neq 0$ ellipszissel, ha $\delta < 0$ és $d \neq 0$ hiperbóllával van dolgunk, míg $\delta = 0$ esetén a /6/ görbe parabola ($d \neq 0$).

Ha $\delta > 0$, az ellipszis területe

$$A = -\frac{\pi d}{\sqrt{\delta}} \quad /8/$$

Most összehasonlítva az /5/ és /6/ egyenleteket, látjuk, hogy d az ellentett előjelű Lagrange-invariánsnak felel meg, a δ diszkrimináns pedig a mátrixelemekkel

$$\delta = ac - b^2 = 1 - \left(\frac{a_{11} + a_{22}}{2} \right)^2 \quad /9/$$

Tehát a fázissíkon a részecskék mozgását jellemző pontok zárt görbével körülhatárolt tartományon belül helyezkednek el, ha

$$\left| \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \right| < 1 \quad /10/$$

Ez a kritérium egybeesik /4/ -gyel. A /4/ -gyel meghatározott matematikai terminusnak tehát mély fizikai tartalma van.

Tekintsünk most [5] nyomán olyan nyalábot, melyet az (r_0, p_{r_0}) fázissíkon az alábbi ellipszis reprezentál

$$a_0 r_0^2 + c_0 p_{r_0}^2 = 1 \quad /11/$$

és amely /1/ szerint transzformálható, tehát

$$\begin{pmatrix} r_0 \\ p_{r_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ p_r \end{pmatrix} \quad /12/$$

/12/ behelyettesítésével /11/ -be írhatjuk

$$a r^2 + 2brp_r + cp_r^2 = 1, \quad /13/$$

ahol

$$\left. \begin{aligned} a &= a_0 \alpha_{11}^2 + c_0 \alpha_{21}^2 \\ b &= a_0 \alpha_{11} \alpha_{21} + c_0 \alpha_{21} \alpha_{22} \\ c &= a_0 \alpha_{12}^2 + c_0 \alpha_{22}^2 \end{aligned} \right\} \quad /14/$$

Az ellipszis területe $A = \frac{\pi}{\sqrt{a_0 c_0}}$ transzformációs invariáns. A nyalábprofilt úgy határozhatjuk meg, mint a keresztmetszetekben elért legnagyobb távolságot a középponttól s így /13/ differenciálásával állíthatjuk elő

$$ar dr + b(r dp_r + p_r dr) + cp_r dp_r = 0$$

Maximális r -re $dr = 0$, és így

$$br + cp_r = 0 \quad /15/$$

és, ha /15/ -öt /13/ -ba helyettesítjük, kapjuk

$$r^2 = \frac{c}{ac - b^2} \quad /16/$$

Ismét találkozunk tehát a $\delta = ac - b^2$ diszkriminánssal, s /16/ mutatja, hogy csökkenésével a nyaláb keresztmetszete nő.

A fent leírt módszer kényelmes lehetőséget ad optikai vizsgálatokra, különösen a nem kellő részletességgel vizsgált vastag lencsék álta-

lános tulajdonságait illetően. Most azonban csak a homogénterű gyorsítócsövek példáján mutatjuk be használhatóságát.

Homogénterű gyorsítócső csatolómátrixa a következő alakú

$$\left\| \begin{array}{cc} \frac{3\sqrt{N}-1}{2\sqrt{N}} & ; \quad -\frac{3}{8} \frac{p_0}{K} \frac{(\sqrt{N}-1)(N-1)}{\sqrt{N}} \\ \frac{2K}{p_0(1+\sqrt{N})} & ; \quad \frac{3-\sqrt{N}}{2} \end{array} \right\| ,$$

ahol $N = \frac{V_1}{V_0}$, V_0 a belépő ionok energiájának megfelelő potenciál, V_1 a gyorsítópotenciál, p_0 az impulzus, itt $p_0 = \sqrt{2V_0}$, K a cső hossza, és a térkitüremlést /szélhatást/ nem vesszük figyelembe. A stabilitási kritérium alapján a cső fókuszál, ha

$$\left| \frac{3\sqrt{N}-1}{2\sqrt{N}} + \frac{3-\sqrt{N}}{2} \right| < 2 ,$$

ahonnan a határesetre kapjuk

$$N - 10\sqrt{N} + 1 = 0 ,$$

ebből pedig

$$\sqrt{N} = \frac{10 \pm \sqrt{96}}{2} .$$

Tehát a cső fókuszál, ha $N < 100$ nagyobb N értékeknél defókuszál, szór.

A mátrixelemekbe a ξ korrekciós faktor is beépíthető. Mint várható, az energiahatár ekkor magasabb értékek felé tolódik, tulnaggy jelentősége azonban nincs. A stabilitási kritérium alapján

$$\sqrt{N} = \frac{1+9\xi \pm \sqrt{(1+9\xi)^2 - 4\xi}}{2} .$$

Látjuk, hogy az energia-határok megállapításához másodfoku egyenletet kell megoldanunk. Jóval bonyolultabb a helyzet, ha ötelemű gyorsítócsövet vizsgálunk. Legyen a $V_0 V_1$ és $V_1 V_2$ potenciálu szakasz a két különböző térerősségű tartomány, és

$$N_1 = \frac{V_1}{V_0} , \quad N_2 = \frac{V_2}{V_1} , \quad N_1 = N_2 = N , \quad N_1 N_2 = \frac{V_2}{V_0} = N_k .$$

Legyen továbbá az első szakasz hossza ℓ , a másodiké K . Ezekkel a megszorításokkal a stabilitási kritérium a következő alakú

$$\left| \left(\frac{3\sqrt{N}-1}{2\sqrt{N}} \right)^2 + \left(\frac{3-\sqrt{N}}{2} \right)^2 - \frac{3}{4} \frac{(\sqrt{N}-1)^2}{N} \left(N \frac{\ell}{K} + \frac{K}{\ell} \right) \right| < 2,$$

vagy határesetben

$$N^2 - 6 \frac{1-\frac{\ell}{K}}{1-3\frac{\ell}{K}} N\sqrt{N} + \frac{26-3\frac{\ell}{K}-3\frac{K}{\ell}}{1-3\frac{\ell}{K}} N + 6 \frac{\frac{K}{\ell}-1}{1-3\frac{\ell}{K}} + \frac{1-3\frac{K}{\ell}}{1-3\frac{\ell}{K}} = 0.$$

Látjuk tehát, hogy még ebben az erősen leegyszerűsített esetben is negyedfoku polinóm gyökereit kell meghatározni. Általában ötelemű csőnél hatodfoku polinom szerepel.

További egyszerűsítést jelent, ha $\frac{K}{\ell} = 1; 5; 9$. Gyakorlatilag a második és harmadik eset érdekes. Ekkor a cső a következő sémával írható le

$\frac{K}{\ell} = 5$	$\frac{K}{\ell} = 9$
$N_k < 780$ fókuszál	$N_k < 138$ fókuszál
$780 < N_k < 3250$ szór	$138 < N_k < 2250$ szór
$N_k > 3250$ fókuszál	$N_k > 2250$ fókuszál

Természetesen itt is figyelembe vehetők korrekciók, s a valóságos cső adataival szükséges az optikai tulajdonságokat meghatározni. A fenti példák azonban mutatják, mennyire fontos tulajdonságokról nyújt információt a vázolt vizsgálati módszer.

I r o d a l o m

- [1] Rose, P.H., Rev.Sci.Instr. 24, 129 /1953/
- [2] Walsh, T.R., Nucl.Instr.and Methods 11, No.1, 49 /1961/
- [3] Pierce, J.R., Theory and Design of Electron Beams, Van Nostrand Co. 1954.
- [4] Sturrock, P.A., Static and Dinamic Electron Optics, Cambridge, 1955.
- [5] Journal of Nucl.Energy Part C. 1962. Jan.53-54.

Érkezett 1962.nov.15.

KFKI Közl. 10. évf. 6.szám, 1962.

ÖSSZESITETT TARTALOMJEGYZÉK AZ 1962. ÉVBEN MEGJELENT SZÁMOKHOZ

Oldal

Ádám András, Hraskó Péter, Pállá Gabriella és Quittner Pál: Megjegyzések gyorskoincidencia-körök paramétereinek megválasztásához.....	127
Andrási Andor: Béta-aktív felület-szennyezettség standard készítése természetes uránból.....	295
Binder Gyula, Nagy Árpád és Seres Zoltán: Vékony poliviniltoluol alapu műanyag szcintillátor rétegek, hasadási termékek detektálására.....	147
Biró János, Deme Sándor, Fehér István és Puskás László: Felületi záróréteges félvezető detektorok nehéz töltött részecskék mérésére.....	241
Borbély Imre: Szcintillációs számláló jelének integrálása időben változó ellenállás segítségével.....	143
Csákány Antal: Nukleáris detektorok jeleit utánzó áramkörök számítása.....	383
M.Császár Lili és Csillag László: Nagyfrekvenciás fényforrás az atomos hidrogén szinképeinek előállítására.....	123
Csillag László: Lásd M. Császár Lili	
Deme Sándor: Hordozható, közvetlen mutatós gamma-sugárzás energiamérő sugárvédelmi mérésekhez.....	137
Deme Sándor: Lásd Biró János	
Demeter István, Dézsi István és Keszthelyi Lajos: Mérések a Mössbauer-effektus segítségével.....	21
Dési Sándor, Lajtai Albert és Nagy László: A hasadási termékek sebességeloszlása U-235 hasadásánál.....	15
Dézsi István: Lásd Demeter István	
Erdélyvári István: Lágy-gammasugárzás abszorpciómérő berendezés sugárvédelmi mérésekhez.....	305
Erdőkürti Zoltán és Kántor Károly: Az interferencia rendszáma a Michelson interferométerben kör alakú, centrált fényforrás esetén.....	269
Fehér István: Lásd Biró János	
Graff György: A fény klasszikus fluktuációja a Fabry-Perot interferométeren való áthaladás után.....	5
Hraskó Péter: Lásd Ádám András	
Hrehuss Gyula és Ezz el Din M.M. Sayed: n, α / és n, p / reakciók vizsgálata CsJ/Tl/-ban.....	203

Kántor Károly: Lásd Erdőkürti Zoltán	
Keszthelyi Lajos: Lásd Demeter István	
Király Péter: Egy és két ismeretlen paraméter mérésének optimális tervezése Poisson-eloszlással kapcsolatos problémák esetén	433
Kiss István és Matus Lajos: D ₂ O gőznyomása 0 C ⁰ alatt.....	61
Kiss István, Matus Lajos és Vályi Nagy József: Nagyérzékenységi differenciál-manométer gőznyomás-izotópeffektusok mérésére	77
Klopfer Ervin, Kostka Pál, Pásztor Endre és Erdélyszky Zsigmond: A Budapesti Műszaki Egyetem oktatási célokat szolgáló elektrosztatikus gyorsítóberendezése.....	113
Koncz Sándor: Kétcsatornás impulzustároló berendezés.....	85
Kostka Pál: Lásd Klopfer Ervin	
Krammer Gergely: Egy többszörös határozott integrál gépi kiértékelése.....	153
Lajtai Albert: Lásd Dési Sándor	
Lovas István: Interferencia jelenségek a direkt befogási reakcióknál.....	31
Lócs Gyula: Mérési adatok magasabbfokú regressziója.....	69
Matus Lajos: Lásd Kiss István	
Matus Lajos: Lásd Kiss István	
Menyhárd Nóra és Zimányi József: Maradék-kölcsönhatások stripping reakciónál.....	47
Molnár József: Platina elektródok polarizációjáról különös tekintettel az aszimmetrikus elektród-elrendezésre.....	159
Nagy Árpád: Lásd Binder Gyula	
Nagy László, Nagy Tibor és Pavlicsek István: Egyenes résű neutron-szelektor áteresztési függvényével kapcsolatos vizsgálatok	189
Nagy László: Lásd Dési Sándor	
Nagy Tibor: Lásd Nagy László	
Németh Géza: Megjegyzések a harmonikus oszcillátor perturbációszámításához.....	235
Pállai Gabriella: Lásd Ádám András....	
Páris Gyula: Homogénterű gyorsítócsövek ionoptikai tulajdonságai.	451
Pásztor Endre: Lásd Klopfer Ervin	
Pavlicsek István: Lásd Nagy László	
Praveczi Endre: A Heisenberg-modell mágnesezettségének meghatározása a Green-függvény módszer alapján S _{1/2} esetén....	427
Praveczi Endre: A mágnesezettség meghatározása alacsony hőmérsékleten a Green-függvény módszer alapján.....	423
Quittner Pál: Lásd Ádám András	

	Oldal
Rupp Erzsébet, Tóth Imre és Zámori Zoltán: Szöghkorrelációs mérések statisztikus kiértékelése.....	219
Sándor Ferenc: Általános algoritmus numerikus kvadratura elvégzésére	65
Sebestyén Ákos és Telbisz Ferenc: Buborék- és Wilson-kamrában megfigyelt részecskék pályáinak hajlászög-korrektiója mágneses tér jelenlétében.....	55
Sebestyén Béla és Vajda Ferenc: Logaritmikus átlagimpulzusszámmérő	391
Seres Zoltán: Lásd Binder Gyulá	
Somogyi Antal: A megszólaló számlálócsövek számának várható értékű hodoszkopizált kiterjedt légizápor észlelő berendezésekben.	251
Somogyi Antal és Uray László: Exponenciális abszorpció paramétereinek meghatározása irányeloszlásból a legnagyobb valószínűség módszerével.....	403
Siklós Tivadar: A kétidős hőmérsékleti Green-függvény módszer alkalmazása a mágnesség elméletében.....	341
Szőke József: Új, nagyteljesítőképességű, egysugaras, fotometrikus mérőrendszer alkalmazása a kémiai analízisben és szerkezetkutatásban.....	315
Tarnóczi Tivadar: Fe ₃ Al rendeződés-kinetikájának vizsgálata mágneses méréssel.....	93
Telbisz Ferenc: Lásd Sebestyén Ákos	
Tóth Géza: A jódszorbpciójának vizsgálata platinafelületen ¹³¹ J nyomjelzővel.....	101
Tóth Imre: Lásd Rupp Erzsébet	
Tóth József: Mérési módszer fémek és fémes ötvözetek differenciális termofeszültségének meghatározására.....	357
Uray László: Lásd Somogyi Antal	
Vajda Ferenc: Lásd Sebestyén Béla	
Vályi Nagy József: Lásd Kiss István	
Vértes Péter: Megjegyzés a neutron diffúziós paraméterek pulzált forrással való mérésénél fellépő felharmonikus problémához.	289
Vértes Péter: A pulzált neutronkísérletek elméletének néhány problémájáról.....	365
Vigassy József: Néhány vizsgálat a VVR-SZ reaktor-zóna rácstorzításainak a rendszer reaktivitására gyakorolt hatásával kapcsolatban.....	171
Zámori Zoltán: Lásd Rupp Erzsébet	
Zimányi József: Lásd Menyhárd Nóra	

TUDOMÁNYOS PUBLIKÁCIÓK AZ 1962. ÉVBEN

- Bakos J.-Kántor K.: Die räumliche Verteilung der Sichtbarkeit von Interferenzen in Michelson Interferometer.
Optik, 18, 554 /1961/
- Berecz Gy.-Páris Gy.: A modern fizika toológikus interpretációja.
Szemináriumi jegyzet, 1962.
- Berkes I.-Demeter I.-Fodor I.-Keszthelyi L.: Resonances in $F^{19}+p$ Reactions at 224 and 340 keV Proton Energies.
Nuclear Phys. 29, 241 /1962/
- Bozóki Gy.-Fenyves E.-Frenkel A.-Gombosi É.-Surányi P.: Inelastic Pion-Nucleon Interactions at 7,3 GeV in Emulsion.
Nuovo Cimento 24, 29 /1962/
- Bozóki Gy.-Fenyves E.-Jánossy L.: Inelastic $n-p$ Cross Section at 30 GeV.
Nuclear Phys. 33, 236 /1962/
- Bozóki Gy.-Tihanyi E.: Глубиномер для исследований эмульсий
Приборы и Техника Эксп. 7, 47 /1962/
- Csákány A.-Szlávik F.: A nukleáris technika elektronikus műszerei.
OAB Atomtechnikai Tanf. jegyzet.
- Csóke A.-Vályi Nagy J.: Besugárzó berendezések folyadékok sugárzaskémiai vizsgálatához.
Vegyészkonferencia Veszprém, 1962. Preprint
- Deme S.-Erdélyvári I.: Приборы для измерения средней энергии гамма-излучений для дозиметрических целей
Varsói Sugárvédelmi Konferencia 1962 szept. Preprint
- Demeter István: L. Berkes István.
- Domokos G.: Поведение амплитуды упругого пион-пионного рассеяния...
ЖЭТФ, 42, 538 /1962/
- Domokos G.-Wolf J.: О реакции $\pi^- + p \rightarrow \rho^0 + K^0$
ЖЭТФ, 42, 871 /1962/
- Domokos G.: Об асимптотическом поведении вершинной части
Dubnai preprint P-888, és Acta Phys.Hung. 14, 341 /1962/
- Domokos G.: On the Asymptotic Behaviour of the Elastic $\pi-\pi$ and $\pi-N$ Scattering Amplitude.
Nuovo Cim. 23, 1175 /1962/
- Domokos G.: Properties of the Elastic Scattering Amplitude of Pions and Nucleons.
Dubnai preprint, D-922 /1962/
- Domokos G.: Analytic Properties of the Elastic $\pi-\pi$ Scattering Amplitude in the t -plane.
ДАН, 144, 1279 /1962/ és Dubnai preprint E-952.
- Domokos G.: Regge-Poles and Elastic Scattering at High Energies
Dubnai preprint E-991.
- Domokos G.-Wolf, J.: Regge-poles and Form Factors.
Physics Letters 1, 349 /1962/

- Domokos G.: Simple Approach to the Determination of Regge-Poles.
Dubnai preprint E-961 és JAH 145, 76 /1962/
- Erdélyvári István: L. Deme Sándor
- Erő J.-Pócs L.-Szentpétery I.-Zimányi J.: Circular Polarization of Gamma-
Quanta Produced by the Reaction $B^{10}/d,p/B^{11}$.
Nuclear Physics 33, 524 /1962/
- Fehér I.: Erfahrungen des Strahlenschutzdienstes im Zentralforschungs-
institut für Physik.
Varsói Sugárvédelmi Konferencia 1962.szept. Preprint
- Fenyves Ervin: L. Bozóki György
- Fenyves Ervin: L. Bozóki György
- Fodor Ilona: L. Berkes István
- Fodor M.-Pokó Z.-Szabó E.-Vályi Nagy J.: Ioncserélő gyanták felhasználása
az urán-kinyerésnél. I., II.
I. Magyar Kémiai Folyóirat 68, 262 /1962/
II. " " " 68, 268 /1962/
- Frenkel Andor: L. Bozóki György
- Gémesy T.-Sándor T.-Somogyi A.-Uray L.-Bhattacharya, P.C.: The Attenuation
Length of Extensive Air Showers in Air.
Nuovo Cimento 24, 290 /1962/
- Gombosi É.: 9 BeV-es protonok magkölcsonhatásainak vizsgálata fotoemulzió-
ban.
Magyar Fizikai Folyóirat 10, 265 /1962/
- Gombosi É.-Friedländer, E.M.-Marcu, M.-Spirchez, M.: On the Energy Spectrum
of Gamma-Rays from High Energy Nuclear Collisions. I. Estimation
of Photon Energies.
Nuclear Phys. 32, 168 /1962/
- Gombosi Éva: L. Bozóki György
- Gróh R.: Sugárdózis mérése atomreaktorban.
Vegyészkonferencia, Veszprém, 1962. B-IV-4.
- Gróh R.-Kiss I.-Kósa Somogyi I.-Kules I.-Schiller R.-Vizessy M.: A difenil-
difenilmetán rendszer sugáráskémiai vizsgálata.
Sugárkémiai Szimpózium, Tihany, 1962. Preprint
- Györgyi G.-Marx Gy.-Németh J.-Menyhárd N.: Párkölcsonhatás az atommagban
Szemináriumi jegyzet, 1962. KFKI Közl.melléklete
- Jánossy L.: A speciális relativitáselmélet filozófiai problémái
Magyar Filozófiai Szemle, 6, 153 /1962/
- Jánossy L.-Lee A.-Rózsa P.: A Coulomb szóródás paraméterének becslése foto-
emulzióban végzett mérések alapján.
Mat.Kut.Int.Közl. 6/B, 467 /1962/
- Jánossy L.: Zum hydrodynamischen Model der Quantenmechanik
Zs.f.Phys. 169, 79 /1962/
- Jánossy Lajos: L. Bozóki György
- Kántor Károly: L. Bakos József

- Keszthelyi Lajos: L. Berkes István
- Kiss D.-Matus L.-Zámori Z.: Radiometrikus berendezés kőzetek urán-, tórium- és rádiumtartalmának meghatározására.
Energia és Atomtechnika 15, 368 /1962/
- Kiss I.-Opauszky I.-Matus L.-Törkő J.-Vályi Nagy J.: Desztilláló oszlop bór-izotópok szétválasztására.
Vegyészkonferencia Veszprém, 1962. Preprint
- Kiss I.-Kósa Somogyi I.-Kules I.: Organische Substanzen als Reaktor-moderatoren.
Kernenergie 4, 905 /1961/
- Kiss I.-Kósa Somogyi I.-Schiller R.: The pH-Dependence of Radiolysis in Aqueous Solutions Studied on Bichromate Solutions.
II.Internat.Cong.Rad.Res. p.74. /Abstracts of papers/
- Kiss I.-Matus L.-Opauszky I.: Dampfdruck-Isotopic-effekte
Kernenergie, 2, 329 /1962/
- Kiss I.-Lukács J.-Matus L.-Opauszky I.: On the relations-ship between Isotope Effects on Vapour Pressure and Molecular Structure.
Physicochimie de la Separation des Isotopes, Paris, 1962 és Journ.Chim.Phys. 1962. 10.sz.
- Kiss I.: Methodes industrielles pour l'enrichissement de l'uranium-235.
CEA-X-397. Paris, 1962.
- Kiss I.: Utilization of the WWRS Type Reactor in Hungary for Isotope Production and Research in Nuclear Chemistry.
Proc. of Symp. on Programming and Utilization of Research Reactors. IAEA 1962, 369 old.
- Kiss I.-Kósa Somogyi I.-Schiller R.: The pH Dependence of Radiation Chemical Processes in Bichromate Solutions.
Acta Chim.Hung. 33, 143 /1962/
- Kiss István: L. Gróh Rezső
- Kósa Somogyi I.: Az atomreaktorok szerkezeti anyagainak korróziója
1962. OAB Atomtechn.Tanf. jegyz.
- Kósa Somogyi István: L. Kiss István
- Kósa Somogyi István: L. Gróh Rezső
- Kósa Somogyi István: L. Kiss István
- Kósa Somogyi István: L. Kiss István
- Kosály Gy.-Turner, R.E.: On the Quasi-classical Theory of Neutron Scattering.
Physics Letter 1, 249 /1962/
- Kovács I.: Szikraforgácsoló berendezések egyenfeszültségű generátorai
Elektrotechnika 52, 165 /1962/
- Kovács I.: Négyszög hullám-generátor a szikraforgácsolás alapjelenségeinek vizsgálatára.
Elektrotechnika 55, 363 /1962/
- Kovács I.-Róth-Káldos: Szikraforgácsolás
Műszaki Könyvkiadó /1961/

Kroó N.-Pál L.: Исследования рассеяния холодных нейтронов на малые углы и упорядочивающихся сплавах вблизи точки Курнакова.
Рабочее совещание по физике медленных нейтронов, Дубна, 1962, I62-I65

Kules Ina: L. Kiss István

Kules Ina: L. Gróh Rezső

Lajtai A.: Сцинтилляционные детекторы быстрых нейтронов с большим разрешающим временем. Приб. и Техн. Эксп. №2, 53 /1962/

Lukács J.-Matus L.-Opauszky I.: Nagyérzékenységi ionáram-mérés tömegspektrométerben.
Vegyészkonferencia Veszprém, B-VI-10.sz. 1962. Preprint.

Lukács János: L. Kiss István

Mátrai T.-M. Koczkás E.: Beiträge zu dem Wienerschen Interferenzfeld, Optik und Spektroskopie aller Wellenlängen.
Akademie Verl. 1962. Berlin, 544-552.

Matus Lajos: L. Lukács János

Matus Lajos: L. Kiss Dezső

Matus Lajos: L. Kiss István

Matus Lajos: L. Kiss István

Matus Lajos: L. Kiss István

Menyhárd N.-Zimányi J.: Линейная поляризация гамма-лучей, возникающих из реакций срыва α, p, γ /
ЖЭТФ 41, 1185 /1961/

Menyhárd J.-Zimányi J.: On the Mechanism of the $B^{10}/d, p/B^{11x}$ Stripping Reaction
Nuclear Phys. 29, 687 /1962/

Menyhárd Nóra: L. Györgyi Géza

Molnár F.: Ioncserélő műgyanták és magkémiai alkalmazásaik.
Atomtechn. Tanf. jegyzet, 1962.

Molnár F.-Molnár J.-Tóth G.: Kromatográfiai módszerek alkalmazása hordozómentes radioaktív izotópok termelésében.
Vegyészkonferencia, Veszprém, 1962. Preprint

Molnár József: L. Molnár Ferenc

Németh G.-Raszl. K.-Szabados L.-Szeghő L.-Török A.: Állandósult hőmérséklet-eloszlás heterogén reaktorok aktiv-zónájának henger-szimmetrikus egységcellájában konvektív hőátadás esetén. II.
Energia és Atomtechnika 15, 41 /1962/

Németh G.-Pál L.: Флуктуация выхода нейтронов в импульсных быстрых реакторах
Proc. Symp. on Pile Neutron Research /IAEA/ Vienna, 1962. 491-507.

Opauszky István: L. Kiss István

Opauszky István: L. Kiss István

Opauszky István: L. Kiss István

Opauszky István: L. Lukács János

Pál L.: Статистическая теория цепной реакции в ядерных реакторах. I,II,III.

I. Acta Phys. Hung. 14, 345 /1962/

II. " 14, 357 /1962/

III. " 14, 369 /1962/

Pál L.-Tarnóczi T.: Investigation of the Anomalous Magnetic Properties
Due to Ordering Process in Ironrich Aluminium Alloys
Physics and Chem. of Solids 23, 683 /1962/

Pál Lénárd: L. Kroo Norbert

Pál Lénárd: L. Németh Géza

Páris Gyula: L. Berecz György

Pásztor E.-Vidor P.: 4 millió voltos magfizikai gyorsítóberendezés labora-
tóriumi épülete
Ipari Építészeti Szemle 186 /1962/

Pócs Lajos: L. Erő János

Pokó Zoltán: L. Fodor Miklós

Raszl Károly: L. Németh Géza

Roder M.-Bach, N.A.: Változó vegyértékű fémionok: sugárkémiai átalakulása
acetonos oldatban
Sugárkémiai Szimpózium, Tihany, 1962. Preprint

Roder M.-Bach, N.A.-Larin, V.: Radiation Induced Oxidation and Reduction of
Acceptors in Organic Solutions
II. Internat. Cong. Rad. Res. p.221 /abstracts of papers/

Sándor T.-Somogyi A.-Telbisz F.: On the Methods Generally Used to
Compensate the Atmospheric Effects of the Muon Component of the
Cosmic Radiation
Nuovo Cim. 23, 1080 /1962/

Sándor T.-Somogyi A.-Telbisz F.-Ahababjan, N.-Betev, B.-Kavlov, S.:
On the Transition Effect of Extensive Air Showers Measured
2930 m a.s.l.
Transactions of the VII. Int. Conference on High Energy Physics,
Sofia, 1962. p.79.

Sándor T.-Somogyi A.-Telbisz F.: The 27 Day Recurrence Tendency in the
Muon Intensity of Cosmic Radiation Measured at 40 m w.e. Under-
ground
Nuovo Cim. 24, 316 /1962/

Sándor T.-Somogyi A.: Density Spectrum of Extensive Air Showers Measured
under Moderate and Large Thicknesses of Lead.
Acta Phys. Hung. 14, 39 /1962/

Sándor Tamás: L. Gémesy Tibor

Schiller R.: Le rôle des processus primaires dans l'effect du pH lors de
la Radiolyse de l'eau
Journal de Chimie Physique 267 /1962/

Schiller Róbert: L. Gróh Rezső

Schiller Róbert: L. Kiss István

Schiller Róbert: L. Kiss István

Siklós T.-Tyablikov, S.V.: Резонансные формулы для одно-осных ферромагнетиков
Acta Phys. Hung. 14, 331 /1962/

Siklós T.-Vörös T. - Soloviev, V.G.: An Investigation of Properties of
Properties of Transuran Elements
Dubnai preprint E-932

Somogyi Antal: L. Gémesy Tibor

Somogyi Antal: L. Sándor Tamás

Somogyi Antal: L. Sándor Tamás

Somogyi Antal: L. Sándor Tamás

Surányi P.: Поведение действительной части амплитуды рассеяния и т.д.
ЖЭТФ, 42, 1425 /1962/

Surányi P.: The Asymptotic Behaviour of the Solution of Mandelstam'
Equation etc.
Dubnai preprint E-943 /1962/

Szabados László: L. Németh Géza

Szabó Elek: L. Fodor Miklós

Szeghő László: L. Németh Géza

Szentpétery Imre: L. Erő János

Szlávik Ferenc: L. Csákány Antal

Szőke J.: Über die Hydroxochelate
Acta Chim. Hung. 30, 459 /1962/

Tarnóczy Tivadar: L. Pál Lénárd

Telbisz Ferenc: L. Sándor Tamás

Telbisz Ferenc: L. Sándor Tamás

Telbisz Ferenc: L. Sándor Tamás

Tóth Géza: L. Molnár Ferenc

Törkő János: L. Kiss István

Török Antal: L. Németh Géza

Uray László: L. Gémesy Tibor

Vályi Nagy J.: A gömbcsuklós manipulátor gömbátvezetésének méretezése
Energia és Atomtechnika 15, 362 /1962/

Vályi Nagy József: L. Csőke Antal

Vályi Nagy József: L. Kiss István

Varga L.: Pulse Shape Discrimination
Nuclear Instr. and Meth. 14, 24 /1962/

Vizessy Mária: L. Gróh Rezső

Vörös Tibor: L. Siklós Tivadar

Zámori Zoltán: L. Kiss Dezső

Zimányi József: L. Menyhárd Nóra

Zimányi József: L. Menyhárd Nóra

Zimányi József: L. Erő János