A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

KÖZPONTI FIZIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK

K Ö Z L E M É N Y E I

Erő János, Kiss István, Mátrai Tibor, Náray Zsolt és Pál Lénárd
közremüködésével szerkeszti
Fenyves Ervin

10. kötet 1962 5. szám

T A R T A L O M J E G Y Z É K

- . -

Technikai szerkesztő: Stancsich Györgyné

Kiadásért felelős: Jánossy Lajos

Megrendelve: 1962.okt.10. Példányszám: 450

Készült Rotaprint eljárással

1279. KÖZPONTI FIZIKAI KUTATÓ INTÉZET
KIADÓI CSOPORT

A KÉTIDŐS HŐMÉRSÉKLETI GREEN-FÜGGVÉNY MÓDSZER ALKALMAZÁSA A MÁGNESSÉG ELMÉLETÉBEN

Irta: Siklós Tivadar

Összefoglalás

Bemutatjuk a kétidős hőmérsékleti Green-függvény módszer [1] [2] alkalmazását izotrop ferromágneses anyag mágnesezettsége hőmérséklet és külső mágneses tértől való függésének kiszámitására [3] alapján.

Bevezetés

Az alacsony hőmérsékletek tartományában, amikor $T \ll T_c$ / T_c -curie-hőmérséklet/ az izotrop ferromágneses anyag mágnesezettsége hőmérséklet és külső tértől való függésének számitására jól alkalmazható a spin-hullámok módszere [4] vagy az azzal ekvivalens módszer, a közelitő második kvantálás módszere Bogoljubov és Tyablikov által kidolgozott formájában [5]. Lényeges lépést jelentettek e téren Dyson munkái [6], melyekben sikerült a mágnesezettség reguláris kifejtését kapni a hőmérséklet hatványai szerint és igy lényegesen ki lehetett terjeszteni a spin-hullám elmélet érvényességi tartományát / $T \approx \frac{1}{4} T_c$ -ig/.

A $T \sim T_c$ hőmérsékleti tartományban a mágnesezettség számitására csupán a meglehetősen durva közelitést jelentő molekuláris tér módszerét ismerjük [7]. Végül a $T \gg T_c$ hőmérsékleti tartományban a perturbációszámitást alkalmazva lehet előállitani a mágnesezettség kifejtését T^{-1} szerinti sor formájában [8]. Mondhatjuk tehát, hogy a mágnesezettség, a szabad energia számitására az elmélet különböző módszereket használ, melyeknek mindegyike csak egy meghatározott hőmérsékleti tartományban érvényes.

A kétidős hőmérsékleti Green-függvény módszer [1] [2] segitségével ki lehet épiteni a mágnesezettség, a szabad energia számitásának egységes metodikáját, mely az egész hőmérsékleti tartományra érvényes eredményt ad. Ezt lényegileg az teszi lehetővé, hogy e módszernél figyelembe tudjuk venni a rendszer Hamilton operátora magasabbrendü - több operátor szorzatát tartalmazó - tagjait is, legalábbis közelitőleg, azonkivül ki tudjuk számitani a szabad energiát és igy a szabad energia kifejezését minimalizálhatjuk, ellentétben a közelitő második kvantálás módszerével, ahol csak az alapállapot energiájának minimalizálására volt mód.

Mig az [1] és [2] dolgozatban eleve feltételezték, hogy a mágnesezettség vektora és a külső mágneses térerősség vektora egymással párhuzamos izotrop ferromágneses anyag esetében, a [3] dolgozatban a szabad energia minimuma feltételi egyenletét használjuk fel a mágnesezettség iránya meghatározására. Ez lehetővé teszi, hogy a módszert alkalmazzuk egytengelyü anizotrop ferromágneses anyag mágnesezettsége hőmérséklet és külső mágneses tértől való függésének kiszámitására, [9] valamint felhasználva a kétidős hőmérsékleti Green-függvény módszer segitségével a ferromágneses rezonancia elméletében nyert eredményeket [10], megkaphatjuk az egytengelyü anizotrop ferromágneses anyag rezonancia formuláit is [11]. A módszer lehetőséget ad arra is, hogy a mágnesezettség számitásánál figyelembe vegyük a kicserélődési kölcsönhatáson kivül a dipol-dipol /mágneses/ kölcsönhatást is [12]. A kétidős hőmérsékleti Green-függvény módszert sikeresen alkalmazták az antiferromágnesesség elméletében [13].

A kétidős hőmérsékleti Green-függvény módszer elvi alapjait és számos alkalmazását a mágnesség elméletében, a szilárdtest fizikában és a statisztikus fizikában jól összefoglalja [14], [15], [16].

A továbbiakban részletesen bemutatjuk a módszer alkalmazását izotrop ferromágneses anyag mágnesezettsége kiszámitására.

Izotrop ferromágneses anyag Heisenberg modelljének Hamilton operátora

Álljon a vizsgált ferromágneses kristály N számu ferromágneses atomból, melyek egy egyszerü kristályrács rácspontjaiban helyezkednek el. Feltételezzük az egy domen strukturát, valamint, hogy minden rácspontban azonos tipusu ferromágneses atom tartózkodik. Feltételezzük továbbá, hogy minden ferromágneses atomnál egy ferromágnességért felelős elektron van és hogy a vezetési elektronokkal való kölcsönhatás elhanyagolható. A ferromágnességért felelős elektronoknak csupán kicserélődési kölcsönhatását fogjuk figyelembe venni és feltételezzük, hogy a ferromágneses kristály izotrop.

Ekkor a Heisenberg modell alapján a ferromágneses kristályt az alábbi Hamilton operátorral irhatjuk le:

$$H = -\mu \sum_{(f_1,\alpha)} \mathcal{H}^\alpha S^\alpha_{f_1} - \frac{1}{2} \sum_{(f_1,f_2\alpha)} J(|f_1 - f_2|)\, S^\alpha_{f_1} S^\alpha_{f_2} \qquad /1/$$

ahol μ -Bohr magneton; $\mathcal{H}$ - külső mágneses tér, $J(|f_1-f_2|)$ a kicserélődési integrál, mely, figyelembevéve a kristály transzlációs szimmetriáját, a rácspontok távolsága abszolut értékétől függ. Esetünkben $J(|f_1-f_2|)>0$.

S_f^α az f rácspontban tartózkodó elektron spin-operátorának α - komponense $/\frac{\hbar}{2}$ egységekben/.

Célszerü áttérni a spin-operátorokról a Pauli-operátorokra, a

$$S_f^\alpha = \gamma_\alpha(1-2n_f) + A_\alpha b_f + A_\alpha^* b_f^+ \; ; \qquad /2/$$
$$n_f = b_f^+ b_f$$

transzformációs formula alapján, ahol γ_α a transzformáció vektor koefficiense, mely kielégiti a

$$\sum_{(\alpha)} \gamma_\alpha^2 = 1$$

feltételt,

$$A_x = -\frac{\gamma_x \gamma_z}{\eta_z} - i\frac{\gamma_y}{\eta_z} \; ; \quad A_y = -\frac{\gamma_y \gamma_z}{\eta_z} + i\frac{\gamma_x}{\eta_z} \; ; \quad A_z = \eta_z \; ; \quad \eta_z = \sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} \qquad /3/$$

és az A koefficiensekre fennállnak a következő összefüggések:

$$(A^* \cdot A) = 2 \; ; \quad (A \cdot A) = (A^* \cdot A^*) = (A\gamma) = (A^* \cdot \gamma) = 0 \; . \qquad /4/$$

A b_f és b_f^+ operátorok a Pauli operátorokra vonatkozó csererelációknak tesznek eleget:

$$b_f b_f^+ + b_f^+ b_f = 1 \; ; \quad b_f^2 = (b_f^+)^2 = 0 \; ;$$
$$\left.\begin{aligned} & b_f b_g^+ - b_g^+ b_f = 0 \; ; \\ & b_f b_g - b_g b_f = b_f^+ b_g^+ - b_g^+ b_f^+ = 0 \; ; \end{aligned}\right\} \text{ ha } f \neq g \; . \qquad /5/$$

Egyszerü számitással könnyü meggyőződni arról, hogy az igy megadott operátorokat és koefficienseket /2/-be behelyettesitve, az S_f^α spin-operátor ténylegesen kielégiti a spin-operátorokra érvényes csererelációkat.

Megjegyezhetjük, hogy a Pauli-operátorok csererelációi Fermi cserereláció jellegüek azonos rácspontokra és Bose jellegüek különböző rácspontokra.

Áttérve az uj operátorokra az /1/ Hamilton operátort az alábbi alakban irhatjuk fel:

$$H = H_0 + H_1 + H_2 + H_3 + H_4 , \qquad /6/$$

ahol

$$H_0 = E_0 = -\mu N(\mathcal{H}\gamma) - \frac{1}{2} N\mathcal{J}(0) ,$$

$$H_1 = -\mu(\mathcal{H}A)\sum_f b_f - \mu(\mathcal{H}A^*)\sum_f b_f^+ ,$$

$$H_2 = 2\mu(\mathcal{H}\gamma)\sum_{(f)} n_f + 2\sum_{(f_1,f_2)} \mathcal{J}(|f_1-f_2|)\{n_{f_1} - b_{f_1}^+ b_{f_2}\} , \qquad /7/$$

$$H_3 = 0 ,$$

$$H_4 = -2\sum_{(f_1,f_2)} \mathcal{J}(|f_1-f_2|)\, n_{f_1} n_{f_2}$$

és

$$\mathcal{J}(0) = \frac{1}{N}\sum_{(f_1,f_2)} \mathcal{J}(f_1,f_2) .$$

Bevezetjük a viszonylagos mágnesezettséget:

$$M^\alpha = \langle S^\alpha \rangle = \gamma_\alpha \langle 1-2n_f \rangle + A_\alpha \langle b_f \rangle + A_\alpha^* \langle b_f^+ \rangle = \gamma_\alpha \sigma + A_\alpha \beta + A_\alpha^* \beta^* . \qquad /8/$$

A viszonylagos mágnesezettséget fogjuk kiszámitani a kétidős hőmérsékleti Green-függvény módszer felhasználásával.

Egyenletek a kétidős hőmérsékleti Green-függvényekre

Feladatunk tárgyalásához célszerü az alábbi Green-függvényeket megválasztani: x/

$$G^{(1)}_{gf}(t-t') = \langle\langle b_g(t)|b^+_f(t')\rangle\rangle ; \quad G^{(2)}_{gf}(t-t') = \langle\langle b^+_g(t)|b^+_f(t')\rangle\rangle ,$$

$$G^{(3)}_{gf}(t-t') = \langle\langle b_g(t)|b_f(t')\rangle\rangle ; \quad G^{(4)}_{gf}(t-t') = \langle\langle b^+_g(t)|b_f(t')\rangle\rangle . \qquad /9/$$

Előállitjuk a /9/ Green-függvények egyenleteit

$$i\frac{d}{dt}\langle\langle A(t)|B(t')\rangle\rangle = i\delta(t-t')\langle[A(t),B(t')]\rangle + i\langle\langle\frac{dA(t)}{dt}|B(t')\rangle\rangle \qquad /10/$$

alapján, ahol

$$i\frac{dA(t)}{dt} = [A,H] .$$

---

x/ Az itt használt kétidős hőmérsékleti Green-függvényeket az alábbi egyenlőségek határozzák meg [1] [3]:

$$G_r(t-t') = \langle\langle A(t)|B(t')\rangle\rangle_r = \Theta(t-t')\langle[A(t),B(t')]\rangle ,$$

$$G_a(t-t') = \langle\langle A(t)|B(t')\rangle\rangle_a = -\Theta(t-t')\langle[A(t),B(t')]\rangle ,$$

ahol

$$\langle\mathfrak{U}\rangle = Q^{-1}Sp\{\mathfrak{U}e^{-\frac{H}{\vartheta}}\} ; \quad Q = Sp\{e^{-\frac{H}{\vartheta}}\} ;$$

$$[A(t),B(t')] = A(t)B(t') - \eta B(t')A(t) ; \quad \eta = \pm 1 ;$$

$$\Theta(t) = \begin{cases} 1 , & t-t'>0 , \\ 0 , & t-t'>0 ; \end{cases}$$

a középérték-képzés a Gibbs féle nagy kanonikus sokaságra történik, igy a H Hamilton operátor magában foglalja $-\lambda N$ tagot is /ahol λ - a kémiai potenciál, N - részecskék száma/, $A(t)$ és $B(t)$ Heisenberg reprezentációban vett operátorok. η előjelét a részecskék statisztikájától függetlenül választhatjuk meg.

Meghatározva a Pauli operátorok t idő szerinti deriváltjait a mozgásegyenletekből, a feladatunkban bevezetett Green-függvényekre igy az alábbi összefonódó egyenlet-láncot kapjuk:

$$
\begin{aligned}
i\frac{d}{dt}G^{(1)}_{gf}(t-t') = {} & i\delta(t-t')\delta_{fg}\sigma + 2\mu(\mathcal{H}A^*)\langle\langle n_g(t)|b^+_f(t')\rangle\rangle + \\
& + 2\{\mu(\mathcal{H}\gamma)+\mathrm{J}(o)\}G^{(1)}_{gf}(t-t') - \\
& - \sum_{(p)} 2\mathrm{J}(gp)\{G^{(1)}_{pf}(t-t') - 2\langle\langle n_g(t)\,b_p(t)|b^+_f(t')\rangle\rangle + \\
& + 2\langle\langle n_p(t)b_g(t)|b^+_f(t')\rangle\rangle\},
\end{aligned}
\tag{11}
$$

$$
\begin{aligned}
i\frac{d}{dt}G^{(2)}_{gf}(t-t') = {} & -2\mu(\mathcal{H}A)\langle\langle n_g(t)|b^+_f(t')\rangle\rangle - 2\{\mu(\mathcal{H}\gamma)+\mathrm{J}(o)\}G^{(2)}_{gf}(t-t') + \\
& + \sum_{p} 2\mathrm{J}(gp)\{G^{(2)}_{pf}(t-t') - 2\langle\langle n_g(t)b^+_p(t)|b^+_f(t')\rangle\rangle + \\
& + 2\langle\langle n_p(t)b^+_g(t)|b^+_f(t')\rangle\rangle\},
\end{aligned}
\tag{12}
$$

$$
\begin{aligned}
i\frac{d}{dt}G^{(3)}_{gf}(t-t') = {} & 2\mu(\mathcal{H}A^*)\langle\langle n_g(t)|b_f(t')\rangle\rangle + 2\{\mu(\mathcal{H}\gamma)+\mathrm{J}(o)\}G^{(3)}_{gf}(t-t') - \\
& - \sum_{(p)} 2\mathrm{J}(gp)\{G^{(3)}_{pf}(t-t') - 2\langle\langle n_g(t)b_p(t)|b_f(t')\rangle\rangle + \\
& + 2\langle\langle n_p(t)b_g(t)|b_f(t')\rangle\rangle\},
\end{aligned}
\tag{13}
$$

$$
\begin{aligned}
i\frac{d}{dt}G^{(4)}_{gf}(t-t') = {} & -i\delta(t-t')\delta_{fg}\sigma - 2\mu(\mathcal{H}A)\langle\langle n_g(t)|b_f(t')\rangle\rangle - \\
& - 2\{\mu(\mathcal{H}\gamma)+\mathrm{J}(o)\}G^{(4)}_{gf}(t-t') + \sum_{(p)} 2\mathrm{J}(gp)\{G^{(4)}_{pf}(t-t') - \\
& - 2\langle\langle n_g(t)b^+_p(t)|b_f(t')\rangle\rangle + 2\langle\langle n_p(t)b^+_g(t)|b_f(t')\rangle\rangle\}.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Itt először is látjuk, hogy $G^{(1)}_{gf}$, $G^{(2)}_{gf}$ és $G^{(3)}_{gf}$, $G^{(4)}_{gf}$ függvényekre vonatkozó egyenletek egymástól függetlenül oldhatók meg. Megjegyezzük, hogy a számitások során látni fogjuk, hogy a feladat megoldásához mind a négy $G^{(i)}_{gf}$ $(i=1,2,3,4)$ függvényre szükségünk lesz. Jól látszik továbbá, hogy az egyenletekben a bevezetett G^{i}_{gf} Green-függvényeken kivül több más Green-függvény is megjelent, melyek mindegyike baloldalon egynél több Pauli operátor t-időben vett szorzatát tartalmazza. Ezekre a Green-függvényekre is fel kell irni a megfelelő egyenleteket, azokban további uj Green-függvények fognak fellépni és igy egy végtelen összefonódó egyenlet-láncot kapunk, melynek szétkapcsolás nélküli exakt megoldását keresni, legalábbis napjainkban, reménytelen feladat. Jelenleg nem tudunk általános szabályt megadni a szétkapcsolásra és nem lehet egyelőre olyan receptet sem adni, mely megadná az egymás után konzekvensen alkalmazandó szétkapcsolások elvét.

<u>A Green-függvények összekapcsolódó egyenlet-lánc közelitő szétkapcsolása</u>

A tárgyalt problémában célszerü az alábbi fogást alkalmazni. Irjuk fel a Pauli operátorokat a következő alakban:

$$b_g(t) = \beta + \mu_g(t)\,; \qquad b^+_g(t) = \beta^* + \mu^+_g(t')\,, \tag{/15/}$$

ahol

$$\beta = \langle b_g(t)\rangle\,; \quad \beta^* = \langle b^+_g(t)\rangle\,; \quad \langle \mu_g(t)\rangle = \langle \mu^+_g(t)\rangle = 0\,.$$

A továbbiakban célszerüen az $\eta = 1$-et választjuk. Ekkor egyrészt uj Green-függvényeket vezetünk be, melyekre fennáll:

$$\begin{aligned}
\langle\langle \mu_g(t)|\mu^+_f(t')\rangle\rangle &= \langle\langle b_g(t)\,|\,b^+_f(t')\rangle\rangle = G^{(1)}_{gf}(t-t')\,,\\
\langle\langle \mu^+_g(t)|\mu^+_f(t')\rangle\rangle &= \langle\langle b^+_g(t)\,|\,b^+_f(t')\rangle\rangle = G^{(2)}_{gf}(t-t')\,,\\
\langle\langle \mu_g(t)|\mu_f(t')\rangle\rangle &= \langle\langle b_g(t)\,|\,b_f(t')\rangle\rangle = G^{(3)}_{gf}(t-t')\,,\\
\langle\langle \mu^+_g(t)|\mu_f(t')\rangle\rangle &= \langle\langle b^+_g(t)\,|\,b_f(t')\rangle\rangle = G^{(4)}_{gf}(t-t')\,.
\end{aligned} \tag{/16/}$$

/15/ alapján irhatjuk továbbá:

$$n_g(t) = b^+_g(t)\,b_g(t) = \bar{n} + \Omega_{gg}(t) + \beta^*\mu_g(t) + \beta\mu^+_g(t)\,, \tag{/17/}$$

ahol

$$\bar{n} = \langle n_g(t)\rangle = \beta\beta^* + \langle \mu^+_g(t)\,\mu_g(t)\rangle\,,$$

$$\Omega_{gg}(t) = \mu^+_g(t)\,\mu_g(t) - \langle \mu^+_g(t)\,\mu_g(t)\rangle\,; \quad \langle \Omega_{gg}(t)\rangle = 0\,.$$

Ekkor a /11/ - /14/ egyenletekben szereplő baloldalon több Pauli operátort tartalmazó minden Green-függvényt felbonthatunk ugy, hogy egy része kifejeződik a kezdeti $G^{(i)}_{gf}$ Green-függvények segitségével, másik része pedig a $\mu_f(t)$ operátorokból is több operátor szorzatát tartalmazza. Például egy /17/ alapján irhatjuk:

$$\langle\langle n_g(t)|b_f^+(t')\rangle\rangle = \beta^* G^{(1)}_{gf} + \beta G^{(2)}_{gf} + \langle\langle \Omega_{gg}(t)|\mu_f^+(t')\rangle\rangle$$

és

$$\langle\langle n_g(t)b_p(t)|b_f^+(t')\rangle\rangle = \bar{n}G^{(1)}_{pf} + \beta^*\beta G^{(1)}_{gf} + \beta\beta G^{(2)}_{gf} +$$
$$+\beta\langle\langle \Omega_{gg}(t)|\mu_f^+(t')\rangle\rangle + \beta^*\langle\langle \mu_g(t)\mu_p(t)|\mu_f^+(t')\rangle\rangle +$$
$$+\beta\langle\langle \mu_g^+(t)\mu_p(t)|\mu_f^+(t')\rangle\rangle + \langle\langle \Omega_{gg}(t)\mu_p(t)|\mu_f^+(t')\rangle\rangle .$$

Bevezetjük a /11/ - /14/ egyenletekben mindenhol ezeket az uj Green-függvényeket és alkalmazzuk a következő szétkapcsolást: a $G^{(i)}_{f_1f_2}(t-t')$ függvényeken kivül az összes Green-függvényt, mint magasabb közelitést tartalmazó függvényeket elhagyjuk. Megjegyezzük, hogy az uj $\mu_f(t)$ operátorok bevezetésével a $b_f(t)$ operátorok többtényezős szorzataiból is mintegy "átmentettünk" egy részt az egyenlet megoldásra megtartott részére. Az igy nyert közelités pontosságát precizen értékelni azonban nem tudjuk. A szétkapcsolás pontosságát ugy lehetne megmutatni, ha sikerülne találni a második közelitésre az első szétkapcsoláshoz illeszkedő szétkapcsolást és ennek alapján értékelni lehetne az elhagyott Green-függvények legalább egy része járulékát. Azt megjegyezhetjük, hogy a fenti szétkapcsolás a közelitő második kvantálás módszere a magasabb hőmérsékletek tartományára termodinamikailag javitott módszerének felel meg. Ugyanis a közelitő második kvantálás módszerében a Pauli operátorokat közelitőleg Bose operátoroknak tekintették és elhagyták a Hamilton operátor H_4 tagját, e két közelités megfelelő a $T \ll T_c$ hőmérsékletek tartományában. A mi közelitésünkben viszont a Pauli operátorok megmaradnak Pauli operátoroknak és a H_4 tagot legalább is részben figyelembe vesszük. Az egyenletünkből pontosan megkapjuk a közelitő második kvantálás esetét, ha $\bar{n} = 0$ irunk. A hőmérséklet növekedésével viszont az $\bar{n}$ tényezőt tartalmazó tagok szerepe növekszik.

Itt még meg kivánjuk jegyezni, hogy ha eleve feltételezzük, mint [1][2]-ben a mágnesezettség és a külső mágneses tér vektora parallelitását, akkor a Hamilton operátor lényegesen leegyszerüsödik, elegendő a

$$G_{gf}(t-t') = \langle\langle b_g(t)|b_f^+(t')\rangle\rangle ,$$
$$G_{g_1g_2f}(t-t') = \langle\langle n_{g_1}(t)b_g(t)|b_f^+(t')\rangle\rangle$$

Green-függvényekkel dolgozni és akkor analóg közelitésben irhatjuk:

$$G_{g_1,g_2,f}(t-t') = \bar{n}\, G_{gf}(t-t') + \text{baloldalon több operátor szorzatát tartalmazó függvények.}$$

A mágnesezettség és külső mágneses tér vektorának párhuzamossága azonban csak az izotrop esetében áll fenn, egytengelyü anizotrop ferromágneses anyag esetében általában nem igaz.

A Green-függvények közelitő egyenleteinek megoldása

Ezen megjegyzések után első közelitésben felirjuk a $G^{(i)}_{f_1 f_2}$ $(i=1,2,3,4)$ Green-függvényekre vonatkozó egyenleteket

$$i\dot{G}^{(1)}_{gf}(t-t') = i\delta(t-t')\delta_{fg}\sigma + \alpha_{11}G^{(1)}_{gf}(t-t') + \alpha_{12}G^{(2)}_{gf}(t-t') - \\ - \sum_{(p)}\alpha_{13}(gp)G^{(1)}_{pf}(t-t') - \sum_{(p)}\alpha_{14}(gp)G^{(2)}_{pf}(t-t') , \qquad /18/$$

$$i\dot{G}^{(2)}_{gf}(t-t') = -\alpha^*_{12}G^{(1)}_{gf}(t-t') - \alpha^*_{11}G^{(2)}_{gf}(t-t') + \sum_{(p)}\alpha^*_{14}(gp)G^{(1)}_{pf}(t-t') + \\ + \sum_{(p)}\alpha^*_{13}(gp)G^{(2)}_{pf}(t-t') , \qquad /19/$$

$$i\dot{G}^{(3)}_{gf}(t-t') = \alpha_{11}G^{(3)}_{gf}(t-t') + \alpha_{12}G^{(4)}_{gf}(t-t') - \sum_{(p)}\alpha_{13}(gp)G^{(3)}_{pf}(t-t') - \\ - \sum_{(p)}\alpha_{14}(gp)G^{(4)}_{pf}(t-t') , \qquad /20/$$

$$i\dot{G}^{(4)}_{gf}(t-t') = -\alpha^*_{12}G^{(3)}_{gf} - \alpha^*_{11}G^{(4)}_{gf} + \sum_{(p)}\alpha^*_{14}(gp)G^{(3)}_{pf} + \\ + \sum_{(p)}\alpha^*_{13}(gp)G^{(4)}_{pf} - i\delta(t-t')\delta_{fg}\sigma , \qquad /21/$$

ahol ponttal a t szerint való differenciálást jelöltük és

$$\alpha_{11} = 2\{\mu(\mathcal{H}\gamma) + J(0)(\sigma + 2\beta^*\beta) + \mu(\mathcal{H}A^*)\beta^*\} , \qquad /22/$$

$$\alpha_{12} = 2\{\mu(\mathcal{H}A^*)\beta + 2J(0)\beta\beta\} ,$$

$$\alpha_{13}(gp) = 2J(gp)(\sigma + 2\beta^*\beta) ,$$

$$\alpha_{14}(gp) = 4J(gp)\beta\beta .$$

Térjünk most a Green-függvények Fourier-komponenseire:

$$G^{(i)}_{gf}(t-t') = \int_{\infty}^{\infty} G^{(i)}_{gf}(E) e^{-iE(t-t')} dE . \qquad /23/$$

Figyelembe véve a kristályrács transzlációs szimmetriáját, könnyen belátható, hogy a $G^{(i)}_{gf}$ függvények a rácsvektorok különbségének abszolut értékétől függő, periodikus függvények, ekkor áttérhetünk az e változók szerinti Fourier-komponensekre is:

$$G^{i}_{gf}(E) = \frac{1}{N} \sum_{(k)} e^{i(g-f,k)} G^{(i)}_{k(E)} . \qquad /24/$$

A δ Kronecker szimbólumot igy irhatjuk

$$\delta_{gf} = \frac{1}{N} \sum e^{i(g-f,k)}$$

és

$$J(k) = \sum_{(f)} J(f) e^{i(f,k)} .$$

Ekkor /18/ - /21/ egyenletek helyett a $G^{(i)}_{k}(E)$ Green-függvényekre könnyen megoldható egyenleteket nyerünk:

$$\begin{aligned} (E - A^{(1)}_k) G^{(1)}_k(E) - B^{(1)}_k G^{(2)}_k(E) &= \frac{i}{2\pi} \sigma , \\ B^{(2)}_k G^{(1)}_k(E) + (E + A^{(2)}_k) G^{(2)}_k(E) &= 0 , \end{aligned} \qquad /25/$$

$$\begin{aligned} (E - A^{(1)}_k) G^{(3)}_k(E) - B^{(1)}_k G^{(4)}_k(E) &= 0 , \\ B^{(2)}_k G^{(3)}_k + (E + A^{(2)}_k) G^{(4)}_k(E) &= \frac{i}{2\pi} \sigma , \end{aligned} \qquad /26/$$

ahol

$$\begin{aligned} A^{(1)}_k = A^{*(2)}_k &= 2\{\mu(\mathcal{H}\gamma) + (J(0) - J(k))(\sigma + 2\beta^*\beta) + \mu(\mathcal{H}A^*)\beta^*\} , \\ B^{(1)}_k = B^{*(2)}_k &= 2\beta\{\mu(\mathcal{H}A) + 2\beta(J(0) - J(k))\} . \end{aligned} \qquad /27/$$

A /25/ - /26/ egyenletek megoldásait könnyen felirhatjuk:

$$G_k^{(1)}(E) = \frac{i}{2\pi}\frac{\sigma}{2}\left\{\frac{1}{\mathcal{E}-E_k}+\frac{1}{\mathcal{E}+E_k}+\frac{A_k}{E_k}\frac{1}{\mathcal{E}-E_k}-\frac{A_k}{E_k}\frac{1}{\mathcal{E}+E_k}\right\},$$

$$G_k^{(2)}(E) = \frac{i}{2\pi}\frac{\sigma}{2}\left\{-\frac{B_k^{(2)}}{E_k}\frac{1}{\mathcal{E}-E_k}+\frac{B_k^{(2)}}{E_k}\frac{1}{\mathcal{E}+E_k}\right\},$$

$$G_k^{(3)}(E) = \frac{i}{2\pi}\frac{\sigma}{2}\left\{-\frac{B_k^{(1)}}{E_k}\frac{1}{\mathcal{E}-E_k}+\frac{B_k^{(1)}}{E_k}\frac{1}{\mathcal{E}+E_k}\right\}, \qquad /28/$$

$$G_k^{(4)}(E) = -\frac{i}{2\pi}\frac{\sigma}{2}\left\{\frac{1}{\mathcal{E}-E_k}+\frac{1}{\mathcal{E}+E_k}-\frac{A_k}{E_k}\frac{1}{\mathcal{E}-E_k}+\frac{A_k}{E_k}\frac{1}{\mathcal{E}+E_k}\right\}$$

vagy összefoglalóan irhatjuk:

$$G_k^{(i)}(E) = \frac{i}{2\pi}\frac{\sigma}{2}\sum_{\ell=1}^{(4)} Z_i^{(\ell)}(k)\frac{1}{\mathcal{E}-E_k^{(\ell)}}, \qquad /29/$$

ahol

$$\mathcal{E} = E-a_k;\quad a_k = \frac{1}{2}(A_k^{(1)}-A_k^{(2)}) = i\,\mathrm{Jm}A_k^{(1)};\quad A_k = \frac{1}{2}(A_k^{(1)}+A_k^{(2)}) = \mathrm{Re}A_k^{(1)},$$

$$E_k^{(2n+1)} = E_k = \sqrt{A_k^2 - B_k^{(1)}B_k^{(2)}};\quad E_k^{(2n)} = -E_k,$$

$$Z_1^{(1)}(k) = Z_1^{(2)}(k) = -Z_4^{(1)}(k) = -Z_4^{(2)}(k) = 1, \qquad /29a/$$

$$Z_1^{(3)}(k) = Z_4^{(3)}(k) = -Z_1^{(4)}(k) = -Z_4^{(4)}(k) = \frac{A_k}{E_k},$$

$$Z_2^{(1)}(k) = Z_2^{(2)}(k) = -\frac{B_k^{(2)}}{E_k};\quad Z_3^{(1)}(k) = -Z_3^{(2)}(k) = -\frac{B_k^{(1)}}{E_k},$$

$$Z_2^{(3)}(k) = Z_2^{(4)}(k) = Z_3^{(3)}(k) = Z_3^{(4)}(k) = 0.$$

Korrelációs függvények és mágnesezettség számitása

Miután meghatároztuk a Green-függvényeket, most már könnyen kiszámithatjuk a spektrál intenzitást az ismert

$$I(\omega)\left\{e^{\frac{\omega}{\vartheta}}-1\right\} = G(\omega+i\varepsilon) - G(\omega-i\varepsilon) \qquad /30/$$

formula alapján. Felhasználva, hogy

$$\frac{1}{\omega - E_k \pm i\varepsilon} = \frac{P}{\omega - E_k} \mp i\pi\delta(\omega - E_k) \ ,$$

irhatjuk

$$I_k^{(i)}(\omega) = \frac{\sigma}{2}\frac{1}{e^{\frac{E_k}{\vartheta}} - 1}\sum_{\ell=1}^{4} Z_i^{(\ell)}(k)\delta(\omega - E_k) \ , \qquad /31/$$

illetve

$$I_{g,f}(\omega) = \frac{1}{N}\sum_k e^{i(g-f,k)} I_k(\omega) = \frac{1}{N}\frac{\sigma}{2}\sum_{\ell=1}^{4}\sum_k \frac{e^{i(g-f,k)}}{e^{\frac{E_k}{\vartheta}} - 1}\delta(\omega - E_k) Z_i^{(1)}(k) \qquad /32/$$

és akkor ugyancsak az ismert

$$\langle B(t')A(t)\rangle = \int_{\infty}^{\infty} I_{gf}(\omega) e^{-i\omega(t-t')} d\omega \qquad /33/$$

általános formula alapján (t=t') esetére kapjuk a számunkra szükséges korrelációs függvény értékeket, egyben áttérve összegezésről integrálásra:

$$\langle \mu_g \mu_f^+ \rangle = \frac{\sigma}{2}\frac{v}{(2\pi)^3}\int e^{i(g-f,k)}\vec{dk}\,\frac{v}{(2\pi)^3}\int e^{i(f-g,k)}\frac{A_k}{E_k}\,\mathrm{cth}\frac{E_k}{2\vartheta}\vec{dk} \ ,$$

$$\langle \mu_g^+ \mu_f \rangle = \frac{\sigma}{2}\frac{v}{(2\pi)^3}\left\{-\int e^{i(g-f,k)}\vec{dk} + \int e^{i(g-f,k)}\frac{A_k}{E_k}\,\mathrm{cth}\frac{E_k}{2\vartheta}\vec{dk}\right\} \ ,$$

$$\langle \mu_g^+ \mu_f^+ \rangle = \frac{\sigma}{2}\frac{v}{(2\pi)^3}\int e^{i(g-f,k)}\frac{B_k^{(2)}}{E_k}\,\mathrm{cth}\frac{E_k}{2\vartheta}\vec{dk} \ , \qquad /34/$$

$$\langle \mu_g \mu_f \rangle = -\frac{\sigma}{2}\frac{v}{(2\pi)^3}\int e^{i(g-f,k)}\frac{B_k^{(1)}}{E_k}\,\mathrm{cth}\frac{E_k}{2\vartheta}\vec{dk} \ ,$$

ahol v az elemi cella térfogata.

E korrelációs függvény értékekre szükségünk van, amikor a szabad energia kifejezését számitjuk, különösen bonyolultabb esetekben.

Ha most a /34/ képletekben $g=f$ esetet veszünk, akkor könnyen belátható módon egyenleteket nyerünk σ, β és β^* meghatározására:

$$\beta^*\beta = \frac{1}{2} - \frac{\sigma}{2}\frac{v}{(2\pi)^3}\int \frac{A_k}{E_k}\,\mathrm{cth}\frac{E_k}{2\vartheta}\vec{dk} \ , \qquad /35/$$

$$(\beta^*)^2 = \frac{\sigma}{2}\frac{v}{(2\pi)^3}\int\frac{B_k^{(2)}}{E_k}\operatorname{cth}\frac{E_k}{2\vartheta}\,\vec{dk}\,, \qquad /36/$$

$$(\beta)^2 = \frac{\sigma}{2}\frac{v}{(2\pi)^3}\int\frac{B_k^{(1)}}{E_k}\operatorname{cth}\frac{E_k}{2\vartheta}\,\vec{dk}\,. \qquad /37/$$

A még meg nem határozott $\vec{\gamma}$ transzformációs vektort a szabad energia minimuma feltételéből határozzuk meg:

$$\frac{\partial F}{\partial \gamma_\alpha} + \lambda\gamma_\alpha = 0\,, \qquad /38/$$

ahol

$$\frac{\partial F}{\partial \gamma_\alpha} = Sp\left\{\frac{\partial H}{\partial \gamma_\alpha}\,e^{-\frac{H}{\vartheta}}\right\}\left\{Sp(e^{-\frac{H}{\vartheta}}\right\}^{-1}\,. \qquad /39/$$

Itt ugyancsak meg kell jegyezni, hogy ellentétben a közelitő második kvantálás módszerével, mivel e korrelációs függvények rendelkezésünkre állnak, a $\vec{\gamma}$ vektort a szabadenergia minimumából tudjuk meghatározni, mig a közelitő második kvantálás módszere alkalmazásakor az alapállapot energiája minimuma feltételéből határozták meg a $\vec{\gamma}$ vektort.

Könnyen belátható, hogy izotrop ferromágneses anyag esetében a szabad energia minimuma feltétele $\vec{\gamma}$ meghatározására az alábbi egyszerü egyenletet adja:

$$-\sigma N\mu\mathcal{H}_\alpha - \mu N\frac{\partial(\mathcal{H}A)}{\partial\gamma_\alpha}\beta - \mu N\frac{\partial(\mathcal{H}A^*)}{\partial\gamma_\alpha}\beta^* + \lambda\gamma_\alpha = 0\,. \qquad /40/$$

Igy most már 6 egyenlet áll rendelkezésünkre /35/, /36/, /37/ és /40/ a 6 ismeretlen meghatározására. A /36/ és /37/ egyenletekből iterációval kiszámithatjuk β és β^* értéket. Izotrop ferromágneses anyag esetében az iteráció pontos megoldást ad β és β^*-ra:

$$\beta = \beta^* = 0\,. \qquad /41/$$

Ekkor viszont /40/ egyenletből

$$\sigma N\mu\mathcal{H}_\alpha = \lambda\gamma_\alpha \qquad /42/$$

egyenletet nyerjük és nagyon könnyü belátni, hogy a lehetséges 2 megoldásból a szabad energia minimumának a $\vec{\mathcal{H}} \parallel \vec{\gamma}$ megoldás felel meg. És igy a viszonylagos mágnesezettség meghatározására, mely most $M = \sigma$ a következő transzcendens egyenletet kapjuk:

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{v}{(2\pi)^3}\int \operatorname{cth}\frac{E_k}{2\vartheta}\,\vec{dk} \qquad /43/$$

ahol

$$E_k = 2\{\mu\mathcal{H} + \sigma(J(0) - J(k))\} . \qquad /44/$$

A /43/ transzcendens egyenletet különböző közelitő feltevések mellett megoldhatjuk és akkor a mágnesezettségre a következő kifejezéseket nyerjük [2], [14], [15].

$$\sigma = \begin{cases} 1 - \sum\limits_{j\geq 3} A_j \tau^{j/2} , \quad \tau < \tau_c ; & /45a/ \\ \sqrt{\frac{3}{\tau}\left(1-\frac{\tau}{\tau_c}\right)}\left\{1 + \frac{1}{20}\,\frac{3}{\tau}\left(1-\frac{\tau}{\tau_c}\right) + 5\cdot 10^{-4}\left[\frac{3}{\tau}\left(1-\frac{\tau}{\tau_c}\right)\right]^2 + \ldots\right\} & /45b/ \\ \qquad \tau \leq \tau_c \quad (\tau_c - \tau \ll 1 , \; h = 0) ; & \\ t_o + t_o(1-t_o^2)\frac{1}{\tau} + t_o(1-t_o^2)\left(\frac{\nu-1}{\nu} - 2t_o^2\right)\frac{1}{\tau^2} + \ldots , \; \tau > \tau_c ; & /45c/ \end{cases}$$

ahol

$$\tau = \frac{\vartheta}{J(0)} ; \quad \tau_c = \frac{\vartheta_c}{J(0)} ; \quad h = \frac{\mu\mathcal{H}}{J(0)} ; \quad t_o = th\left(\frac{h}{\tau}\right) ; \qquad /46/$$

ν - a közeli szomszédos rácspontok száma. A_j együtthatók $\frac{h}{\tau}$ - től és a kristály szerkezetétől függnek.

A /43/ transzcendens egyenletből, illetve /45a/, /45b/-ből következik, hogy a Curie hőmérsékletnél alacsonyabb hőmérsékleten van spontán mágnesezettség, vagyis $\sigma \neq 0$ ha $\mathcal{H} = 0$ és akkor rendszerünk ferromágneses állapotban van. A Curie hőmérsékletnél a spontán mágnesezettség eltünik; $\tau > \tau_c$ esetében paramágneses állapotot kapunk. Igy a /43/ transzcendens egyenlet és a /45a,b,c/ kifejezések értelmezik az egész átmenetet. Könnyen megmutatható, hogy a kapott eredmények a megfelelő határesetekben átmennek más, csak egy-egy meghatározott hőmérsékleti tartományban érvényes módszerekkel számolt eredményekbe.

Alkalmazás egytengelyü anizotrop ferromágneses anyagra. Dipol-dipol kölcsönhatás figyelembevétele

Könnyen lehet alkalmazni ezt a módszert egytengelyü anizotrop ferromágneses anyagok mágnesezettsége számitására is [9]. Egytengelyü anizotrop ferromágneses anyagra vonatkozó Hamilton operátort igy irhatjuk:

$$H = -\mu\sum_{(f,\alpha)} \mathcal{H}^\alpha S_f^\alpha - \frac{1}{2}\sum_{(f_1,f_2,\alpha)} J(f_1 f_2) S_{f_1}^\alpha S_{f_2}^\alpha - \frac{1}{2}\sum_{(f_1 f_2)} \Delta(f_1 f_2) S_{f_1}^z S_{f_2}^z \quad . \qquad /47/$$

Ebben az esetben a számitások lényegesen hosszadalmasabbak, de a Green-függvény módszer alkalmazása szempontjából nehézség nem merül fel. Ebben az esetben is jól beválik az előbb megtárgyalt szétkapcsolás, a Green-függvényekre vonatkozó egyenletek alakja megegyezik az izotrop esetben kapott egyenletekével, természetesen szabad energia minimumának számitása sokkal hosszadalmasabb lesz, de a számitások automatikusan keresztülvihetők.

Felhasználva a ferromágneses rezonancia elméletében a kétidős hőmérsékleti Green-függvény módszer segitésével kapott formulákat [10] és a Green-függvényekre [9] -ben kapott kifejezéseket, könnyen megkaphatjuk az egytengelyü anizotrop ferromágneses anyag rezonancia formuláti is [11].

Ha a dipol-dipol kölcsönhatást is figyelembe kivánjuk venni, rendszerünk Hamilton operátora az alábbi alakban irandó fel [17]:

$$H = -\sum_{(f_1)} \mu \mathcal{H} S^z_{f_1} - \frac{1}{2}\sum_{(f_1, f_2)} J(f_1, f_2)(\vec{S}_{f_1} \vec{S}_{f_2}) +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{(f_1 f_2)} \frac{\mu^2}{R^5_{f_1 f_2}} \left\{ R^2_{f_1 f_2} (\vec{S}_{f_1} \vec{S}_{f_2}) - 3(\vec{S}_{f_1} \vec{R}_{f_1 f_2})(\vec{S}_{f_2} \vec{R}_{f_1 f_2}) \right\}, \qquad /48/$$

ahol $\vec{R}_{f_1 f_2} = \vec{R}_{f_1} - \vec{R}_{f_2}$ az f_1 és f_2 rácspontokban lévő atomok egyensulyi távolsága.

Könnyen beláthatjuk [12] alapján, hogy a Green-függvény módszer alkalmazása szempontjából a feladat megoldása a fentebb emlitettekhez képest ujabb nehézségeket nem hoz, a láncegyenletek fentiekben tárgyalt szétkapcsolása ebben az esetben is beválik. Megjegyezzük, hogy ezt a problémát érdemes a [12]-nél fizikai szempontból részletesebben tárgyalni, mely rövidesen megtörténik.

A fentiekből láthatjuk, hogy a térelméletből átvett Green-függvény módszer hasznosan alkalmazható a mágnesség elméletében. Remény van arra, hogy a mágnesség elmélete szempontjából más fontos kérdést is könnyü és áttekinthető módon lehet tárgyalni e módszer segitségével, például a vezetési elektronokkal való kölcsönhatás figyelembevétele, a rezonancia elméletében a csillapodás figyelembevétele, mely megadja a rezonancia vonalak szélességét, a fononokkal való kölcsönhatás figyelembevétele több jelenség szempontjából szintén igen lényeges. Szükséges még kidolgozni az egyenletláncok szétkapcsolásának problémáját is, mely remélhetőleg lehetővé teszi a magasabb közelitésekben való számitásokat.

I r o d a l o m

[I] Боголюбов Н.Н., Тябликов С.В. ДАН СССР 126, 53, (1959)

[2] Тябликов С.В. Укр. мат. журнал II, 287, (1959)

[3] Пу Фу-чо, Тябликов С.В., Шиклош Т. Acta Phys. Hung. II,323, (1960)

[4] Bloch, F., Z.f. Phys. 61, 1293, /1929/

[5] Боголюбов Н.Н., Тябликов С.В. ЖЭТФ 19, 251, (1949)
19, 256, (1949)

Боголюбов Н.Н.: "Лекцii з квантовоï статистики"
" Радянська школа" Киев, (1949)

Боголюбов Н.Н., Тябликов С.В. Изв.А.Н. СССР сер.физ. 21, 849 (1957)

Siklós T.,M.F.F. 5, 451 /1957/; 6, 579 /1958/

[6] Dyson,F., Phys.Rev. 102, 1217 /1956/; 102, 1230 /1956/

[7] Lásd pl. Вонсовский С.В., Шур Я.С.: "Ферромагнетизм".Гостехиздат
Москва (1948)

[8] Opechowsky,W., Physica 25, 476 /1959/

[9] Тябликов С.В., Шиклош Т., Acta Phys.Hung. 12, 35 /1960/

[10] Тябликов С.В. Ф.Т.Т. 2, 361, (1960) 2, 2009, (1960)

[11] Тябликов С.В., Шиклош Т. Acta Phys.Hung. / в печати/

Siklós T., Tyablikov,S.V., KFKI Közl. 9, 193 /1961/

[12] Siklós T., KFKI Közl. 9, 279 /1961/

[13] Пу Фу-чо Д.А.Н СССР 130, 1244, (1960)
131, 546, (1960)

[14] Бонч-Бруевич В.Л., Тябликов С.В.: "Метод функции Грина в статистической физике". Г.И.Ф.М.Л Москва (1961)

Bonch-Bruevich V.L., Tyablikov;S.V.: "The Green Function Metöd in Statistical Mechanics". North-Holland Publishing Company Amsterdam, 1962.

[15] Зубарев Д.Н. У.Ф.Н. 71, 71, (1960)

[16] Praveczky E., M.F.F. /közlés alatt/

[17] Holstein,T., Primakoff,H., Phys.Rev. 58, 1098 /1940/

Akhieser,A., J.of Phys. of USSR 10, 217 /1946/

Érkezett 1962. aug. 9.

KFKI Közl. 10. évf. 5.sz., 1962.

MÉRÉSI MÓDSZER FÉMEK ÉS FÉMES ÖTVÖZETEK DIFFERENCIÁLIS TERMOFESZÜLTSÉGÉNEK MEGHATÁROZÁSÁRA

Irta: Tóth József

Összefoglalás

Módszert ismertetünk fém, illetve fémes ötvözet-huzalok és fóliák differenciális termofeszültségének különböző hőmérsékleten történő pontos mérésére. A módszert Cu_3Au ötvözet rend-rendezetlenség átmenetének vizsgálatára alkalmaztuk.

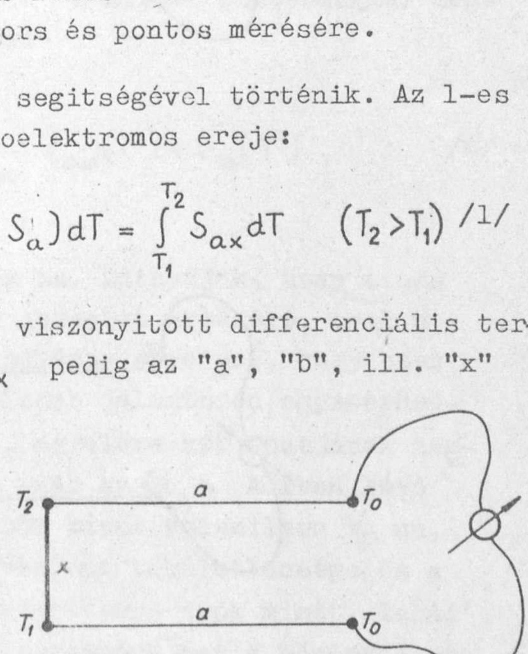
Ismeretes, hogy fémek és fémes ötvözetek bizonyos fizikai tulajdonságai rekrisztallizációnál, spin- vagy atomi rendeződésnél és különböző tipusu rácshibák létrehozása esetén megváltoznak. Egy adott tipusu átalakulás mértékére, sebességére, stb. e fizikai tulajdonságok mérése alapján következtethetünk. A különböző fizikai mennyiségek azonban nem azonos módon függnek az anyag strukturális változásaitól. Néha megelégedhetünk egyetlen fizikai mennyiség változásának a figyelésével, részletesebb vizsgálat, vagy bonyolultabb átalakulások esetén azonban már több mennyiség mérésére is szükség van. Rendeződő ötvözetek vizsgálatánál legtöbbször a diffrakciós felvételeken fellépő szuperrácsvonalak intenzitása és az elektromos ellenállás szerepel indikátorként. A Cu_3Au ötvözet rendeződési kinetikájának vizsgálatához kidolgoztuk a differenciális termofeszültség egy mérési módszerét. A módszer alkalmas fém és fémes ötvözet huzalok és fóliák differenciális termofeszültségének gyors és pontos mérésére.

A mérés differenciális termopárok segitségével történik. Az 1-es ábrán látható differenciális termopár termoelektromos ereje:

$$\Delta V_{xa} = \int_{T_1}^{T_2} S_x dT + \int_{T_2}^{T_0} S_a dT + \int_{T_0}^{T_1} S_a dT = \int_{T_1}^{T_2} (S_x - S_a) dT = \int_{T_1}^{T_2} S_{ax} dT \qquad (T_2 > T_1) \quad /1/$$

ahol S_{ax} az "a" anyagnak az "x" anyaghoz viszonyitott differenciális termofeszültsége, $(S_{ax} = - S_{xa})$, S_a, S_b és S_x pedig az "a", "b", ill. "x" anyag abszolut differenciális termofeszültsége. Kis hőmérséklet-különbségeknél S_{ax} állandónak tekinthető, ezért:

$$\Delta V_{xa} \approx S_{ax}(T')(T_2 - T_1) , \quad /2/$$

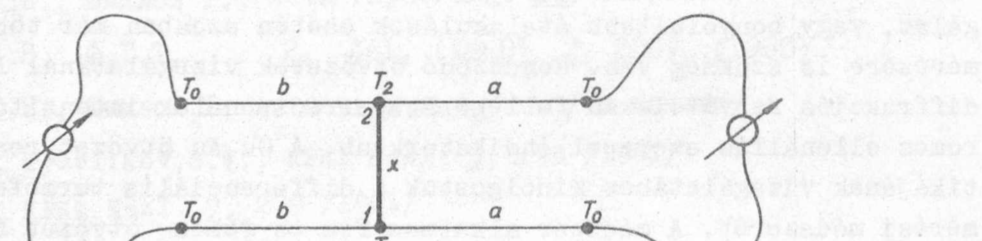


1. ábra

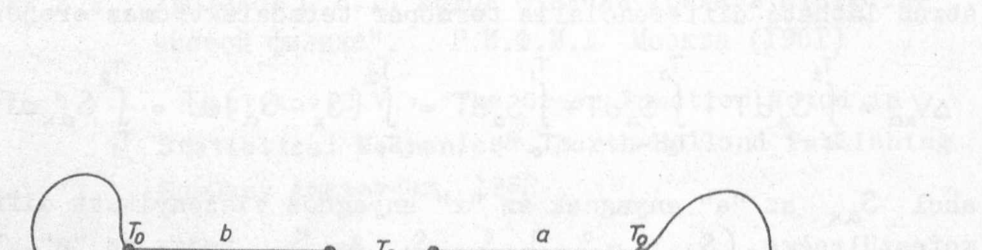
ahol, T' a T_1 és T_2 között alkalmasan választott hőmérséklet, innen:

$$S_x(T') = \frac{\Delta V_{xa}}{\Delta T} + S_a(T') \;, \qquad (\Delta T = T_2 - T_1) \;, \qquad /3/$$

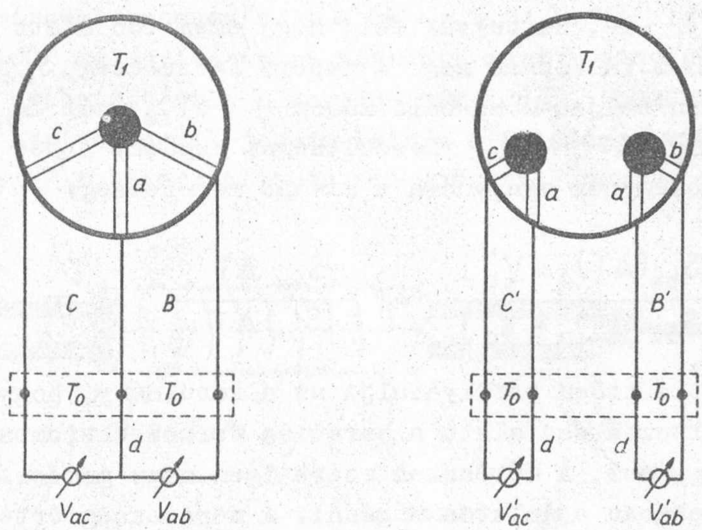
tehát $S_a(T')$ ismeretében, ΔV_{xa} és ΔT mérésével $S_x(T)$ meghatározható. ΔV_{xa} megfelelő müszerek segitségével mérhető, a hőmérsékletkülönbség mérése azonban nem ilyen egyszerü. Ugyanis kb. 1,0 - 0,1 mm átmérőjü kb. 20-40 mm hosszu huzal két vége közötti kb. 2 C^o hőmérsékletkülönbséget kell mérni legalább 0,01 C^o-os pontossággal. Ez megoldható a 2/a ábrán látható elrendezés segitségével. Meg kell jegyezni, hogy az ábra 1-es és 2-es pontjában, a szó szoros értelmében véve nem termopár van, hanem hármas forrasztás. A gondosan készitett "termohármas" három termopárja azonban független termopárnak tekinthető. Függetlenség alatt azt értjük, hogy a 3. ábrán látható kétféle elrendezésnél /forrasztási helyek kinagyitva/ egy adott $T_1 - T_o$ hőmérsékletkülönbségnél azonos feszültségeket kapunk; $V_{ac} = V'_{ac}$ és $V_{ab} = V'_{ab}$, ha a termoelektromos erőt mérő müszer belső ellenállását végtelen nagynak számitjuk. Igy a 2/a és 2/b ábrán látható elrendezés is, a kapott termoelektromos erők szempontjából azonos, vagyis a 2/a két egymástól független differenciális termopárnak tekinthető.



2.a.ábra



2.b.ábra



3. ábra

ΔT hőmérsékletkülönbség fenntartásánál a 2/a ábra két körében fellépő termoelektromos erő a következő:

$$\Delta V_{xa} = S_{ax} \Delta T$$
$$\Delta V_{xb} = S_{bx} \Delta T \qquad /4/$$

Ezek alapján:

$$\Delta T = \frac{\Delta V_{xa} - \Delta V_{xb}}{S_{ab}} \qquad /5/$$

S_{ab} ismeretében V_{xa} és V_{xb} mérésével T a kivánt pontossággal meghatározható. Ezt /3/-ba helyettesitve kapjuk:

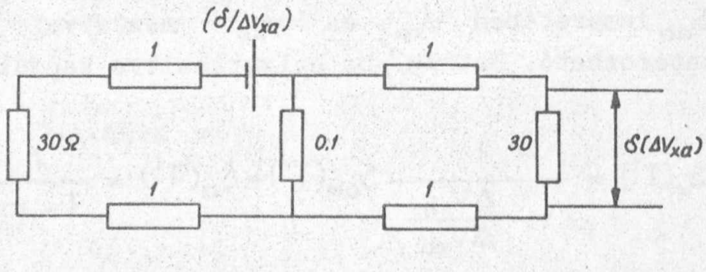
$$S_x(T') = \frac{1}{1 - \frac{\Delta V_{xb}}{\Delta V_{xa}}} S_{ab}(T') + S_a(T') = \frac{1}{1-m} S_{ab}(T') + S_a(T') \, , \qquad /6/$$

ahol, $\Delta V_{xb} / \Delta V_{xa} = m$ jelölést vezettük be. Láthatjuk, hogy nincs szükségünk a ΔV_{xa} és ΔV_{xb} feszültségek abszolut értékére, csak a $\Delta V_{xb} = m \Delta V_{xa}$ egyenes meredekségére. Figyelembe véve azt, hogy ezen feszültségek 10-20μV között mozognak, a feladat jelentősen egyszerüsödik. Határozzuk meg az egyenes meredekségét, egyelőre két pontjának megadásával. Tegyük fel, hogy egy adott $(\Delta T)_o$ -nál az x, a körben lévő $S_{xa}(\Delta T)_o$ differenciális termoelektromos erőn kivül valamilyen V_p un. "parazita termoelektromos erő" is van, a hidegpont tökéletlensége és a mérőkör összes kontaktusainál fellépő termoelektromos erők miatt. Tehát a mért feszültség: $S_{ax}(\Delta T)_o + V_p$. Változtassuk meg a hőmérsékletkülönbséget $(\Delta T)_1$ -re, és tegyük fel, hogy ezen idő alatt a parazita termofeszültségek nem változnak meg. A kapott feszültség $S_{ax}(\Delta T)_1 + V_p$ lesz. Az x, b körben teljesen hasonló módon $(\Delta T)_0$ -nál $S_{bx}(\Delta T)_0 + V_p'$ és $(\Delta T)_1$ -nél $S_{bx}(\Delta T)_1 + V_p'$ feszültséget kapunk. A két esetben mért feszültségek különbségének hányadosa a kivánt meredekség:

$$\frac{S_{bx}(\Delta T)_1 + V_p' - [S_{bx}(\Delta T)_0 + V_p']}{S_{ax}(\Delta T)_1 + V_p - [S_{ax}(\Delta T)_0 + V_p]} = \frac{S_{bx}\,\Delta T}{S_{ax}\,\Delta T} = m \,. \qquad /7/$$

A mérés pontosságát döntően befolyásolja az a körülmény, hogy a hőmérsékletkülönbség megváltoztatása alatt a parazita termoelektromos erők állandók maradnak-e, vagy sem. A méréseket ezért igen nagy gondossággal, állandó hőmérsékletü szobában ajánlatos végezni. A meredekség értékét pontosabban megkaphatjuk, ha kettőnél több hőmérsékletkülönbséghez tartozó differenciális termoelektromos erők mérése alapján legkisebb négyzetek módszerével számolunk. Ilyenkor azonban egy adott meredekség meghatározásához szükséges időtartam is megnő, ami nem mindig engedhető meg. Vegyük figyelembe azt a tényt, hogy a 2/a ábrán látható müszerek belső ellenállása nem végtelen nagy, és becsüljük meg az ebből eredő hibát, a 4. ábra tipikus értékeinek felhasználásával. $30\,\Omega$ a kompenzátor munkaellenállása + galvanométer belső ellenállása, $1\,\Omega$ a termopárok egy-egy ágának ellenállása, $0{,}1\,\Omega$ a vizsgálandó minta ellenállása és a differenciális termoelektromos erő: $20\,\mu V$, a leosztott feszültség pedig $(\delta(\Delta V_{xa}) = 0{,}06\,\mu V/$. A kompenzátoron mérhető legkisebb feszültség $0{,}1\,\mu V$. A leosztásból származó szisztematikus hiba a differenciális termofeszültség értékében $\sim 0{,}5$ %.

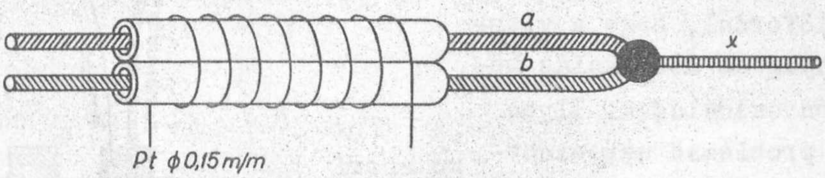
A leosztás annál kisebb, minél kisebb a minta ellenállása. Azonban nagyon kis ellenállás esetén a próbatest hővezetése is károsan megnő, és a méréshez szükséges hőmérsékletkülönbség csak ugy állitható elő, hogy a minta egész terjedelmében a vizsgálati hőmérséklet fölé melegszik. A próbatest alakját és méreteit ugy kell megválasztani, hogy elektromos ellenállása minél kisebb legyen, és a felületéről történő lesugárzás és hőelvezetés nagyobb legyen, mint a hővezetés.



4. ábra

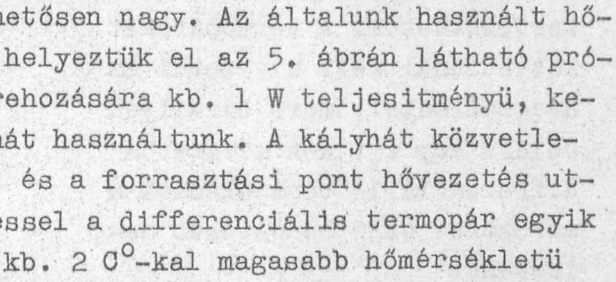
Fázisátalakulásoknál legtöbbször egy adott hőmérsékleten egy tulajdonság időbeli változását mérjük. A differenciális termofeszültségre kapott értékek mindig egy hőmérséklet- és időintervallumra vonatkoznak. A $(T_1, T_1 + \Delta T)$ és $(t_1, t_1 + \Delta t)$ intervallumban kapott értéket a

$T = T_1$ hőmérséklethez és a $t = (t_1 + t_1 + \Delta t) \cdot 1/2$ időpillanathoz rendeltük. /A $T = T_1$ választás azért történt, mert a tényleges mérés időtartamán kivül a próbatest teljes terjedelmével T_1 hőmérsékleten van./ A $S_T(t)$ görbe nyilván annál jobban leirja a valóságos változást, minél kisebbre választjuk a hőmérséklet- és idő-intervallumot.



5. ábra

Vizsgáljuk meg egy tényleges mérés elvégzéséhez szükséges idő csökkentésének a lehetőségét. Az eddig használatos módszerek hibája az volt, hogy a hőmérsékletkülönbség létrehozására a kályha természetes [1], vagy mesterségesen alakitott [2] gradiensét használták fel. A hőkezelő kályhák hőtehetetlensége pedig meglehetősen nagy. Az általunk használt hőkezelő kályha leghomogénebb részében helyeztük el az 5. ábrán látható próbatestet. A hőmérsékletkülönbség létrehozására kb. 1 W teljesitményü, kerámia kapillárisra csévélt, kis kályhát használtunk. A kályhát közvetlenül a potenciálvezetékekre helyeztük, és a forrasztási pont hővezetés utján melegszik fel. Ezzel az elrendezéssel a differenciális termopár egyik pontját 1 percnél rövidebb idő alatt kb. 2 C°-kal magasabb hőmérsékletü e g y e n s u l y i helyzetbe lehetett hozni. Igy a tényleges méréshez szükséges idő nagyobbik részét már a kézi kompenzálás elvégzése töltötte ki. Lehetséges a meredekség meghatározásának idejét jelentősen csökkenteni, ha nem kompenzálunk, hanem a kompenzátorok galvanométereinek kitéréseit közvetlenül leolvassuk /6. ábra/. Ha ugyanis az egyik galvanométer érzékenysége α_a a másiké α_b, akkor $\Delta V_{xa} = \alpha_a K_a$ és $\Delta V_{xb} = \alpha_b K_b$, ahol K_a és K_b a galvanométerek kitérése osztásrészekben. Igy $m = \alpha K_a / K_b$, ahol $\alpha = \alpha_a / \alpha_b$. Nagyon fontos, hogy hogy a két leolvasás pontosan egy időben, vagyis azonos hőmérsékletkülönbségnél történjen. Ez ugy is megoldható, hogy a hőmérsékletkülönbséget növelni kezdjük, majd lassan csökkentjük, és a maximális K_a és K_b értékeket tekintjük összetartozóknak. Itt nem várjuk meg a kis kályha árama által meghatározott uj hőmérsékletkü-

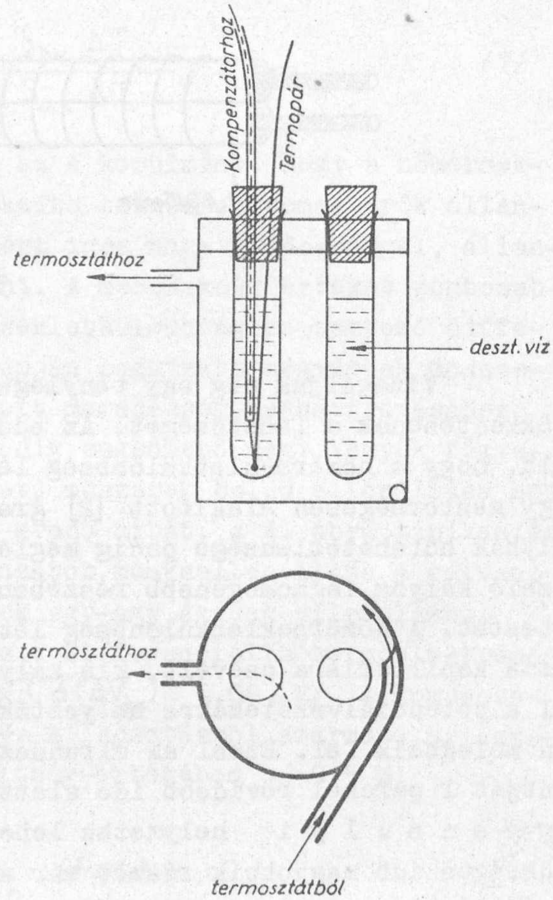


6.ábra

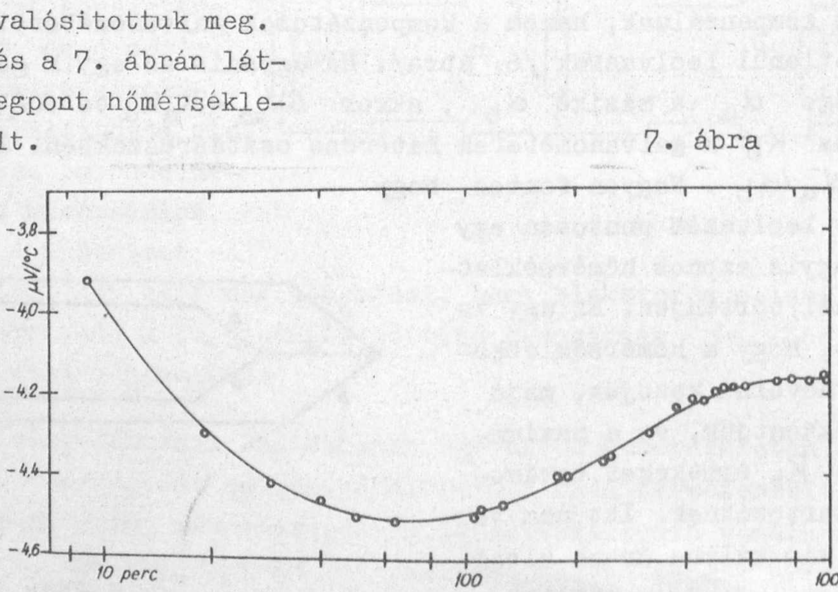
lönbség egyensulyának beállását, hanem a galvanométerek kitéréseit a ballisztikus galvanométeréhez hasonló módon olvassuk le. Ezzel a módszerrel a meredekség két pont alapján történő meghatározásának ideje 30 sec alá szoritható. A mérés pontossága természetesen csökken, de termofeszültség ilyen módon történő mérésével 5-15 perc alatt lezajló változások is nyomon követhetők.

Gyakran előfordul, hogy a vizsgálandó anyag az átalakulás hőmérsékletén oxidálódik. Ilyen esetben a problémát ugy oldottuk meg, hogy a differenciális termopárt evakuált, vagy védőgázzal töltött üvegcsőbe forrasztottuk. A Pt, és tapasztalataink szerint a 10 %-os PtRh ötvözet normál jénai üvegbe jól forrasztható, és a mérések az üveg lágyuláspontjáig kiterjeszthetők. A termopárokat közvetlenül kell kivezetni az üvegballonból, mert bármilyen toldás egy uj, nem kivánatos differenciális termoelemnek a mérőkörbe való beépitését jelentené.

A hidegpontot nem jéggel, hanem termosztát segitségével valósitottuk meg. Az elrendezés a 7. ábrán látható. A hidegpont hőmérséklete 30 C^{o} volt.



7. ábra



8. ábra

A 8. ábrán a Cu_3Au ötvözet 365 C^o-on történő rendeződése következtében a differenciális termofeszültség megváltozásának időbeli lefolyását láthatjuk.

Megköszönöm dr.Nagy Elemér professzor urnak a méréseknél előfordult problémák megoldásához nyujtott hasznos tanácsait.

Irodalom

[1] Erez,G.; Rudman,P.S., J.Phys.Chem. Solids 18, 307 /1961/

[2] Рудницкий А.А., Ж.Неорг.Хим. I, I305 (I956)

Érkezett:1962. szept. 20.

KFKI Közl. 10. évf. 5. szám, 1962.

A PULZÁLT NEUTRONKISÉRLETEK ELMÉLETÉNEK NÉHÁNY PROBLÉMÁJÁRÓL

Irta: Vértes Péter

Összefoglalás

Az alábbi cikkben a moderátor anyagokon végzett pulzált neutron kisérletek elméleti interpretációjának néhány problémáját vizsgáltuk meg az energiafüggő Boltzmann-egyenlet alapján. A végtelen közegbeli elmélet véges közegekre való alkalmazhatóságának feltételét vizsgáltuk meg részletesen. Ezzel kapcsolatban számitásokat végeztünk P_1L_1 közelitésben: meghatároztuk a fluxus szerkezetét és formulát vezettünk le az extrapolációs távolságra. Kimutatjuk, hogy az un. aszimptotikus tartomány létezése nem szükséges feltétele a végtelen közegbeli elmélet véges közegre való általánositásának.

Végezetül a P_1L_1 közelités alapján megjegyzést teszünk $\lambda(B)$ sorfejtésének konvergencia sugarára.

1. Bevezetés

A pulzált neutronkisérletek technikája már az első Genfi Konferencia előtt fejlődésnek indult Dardel [1] Antonov [2] és mások munkássága nyomán. A mérések legegyszerübb elmélete az egycsoport diffuziós egyenleten alapult. A mérési technika finomodása, valamint a diffuziós hülés jelenségének felfedezése szükségessé tették az energiafüggő, illetve a transzportelméleti tárgyalás kidolgozását.

Ha egy moderátort tartalmazó edénybe neutronokat lövünk be, akkor a neutron pulzus megszünése után a neutronfluxus

$$\phi(\underline{r},E,\Omega,t) = \Sigma_n a_n \phi_{\lambda n}(r,E,\Omega) e^{-\lambda_n t} \qquad /1.1/$$

lesz, ahol λ_n-nek a

$$/1.2/$$

$$\left[-\frac{\lambda}{v} + \Omega\,\mathrm{grad} + \Sigma_s(E) + \Sigma_a(E)\right]\phi_\lambda(r,E,\Omega) = \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\Omega' \Sigma_s(E,E',\Omega,\Omega')\phi_\lambda(r,E',\Omega')$$

egyenlet sajátértékei. [3a] $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_n$. Nagy t-re:

$$\phi(r,E,\Omega.t) \approx a_{\lambda_0}\phi_{\lambda_0}(r,E,\Omega)\, e^{-\lambda_0 t} \quad . \qquad /1.3/$$

Tehát ha mérjük a pulzus lebomlását, a legalacsonyabb sajátérték meghatározható.

A mérést a

$$\lambda_0 = \alpha_0 + DB^2 - CB^4 \qquad /1.4/$$

képlet segitségével értékelik ki, ahol B^2 a geometriai bucklinggel megegyező anyagi buckling. Különböző geometriai bucklingeknél mérve a α_0 D és C együtthatók meghatározhatók. Következésképpen a pulzált mérések elmélete előtt a következő kérdések állnak:

1. Mi az α_0 D és C együttható fizikai jelentése. Hogyan függnek ezek össze az /1.2/-ben szereplő hatáskeresztmetszetekkel.
2. Mi a geometriai buckling, azaz hogyan határozható meg a kiszámitásához szükséges extrapolációs távolság.
3. Mi az /1.4/ képlet érvényességi köre. Az /1.4/formula a $\lambda(B)$ $B^2=0$ körüli Taylor sorának első tagjaiból áll. Kérdés, milyen nagy B^2 -ig elegendő a kiértékeléséhez ezt a három tagot használni. Egyáltalában milyen B^2 -re létezik a $\lambda(B)$ függvény $B^2=0$ körüli Taylor sora.

Az elméleti kutatások tárgyát eddig főleg az első kérdés képezte. Az /1.4/ formulához vezető legegyszerübb ut az volt, hogy egysebességü diffuzió egyenletből eredő

$$\lambda = \Sigma_a v + D(B^2)B^2$$

képletbe utólag becsempészték az un. diffuziós hülést [1], és igy kaptak B^4 -es tagot.

Nelkin [4] a Rayleigh-Ritz féle variációs módszerrel próbálta előállitani az /1.4/ formulát. Variációs paraméterként a "neutronhőmérsékletet" használta, vagyis a tényleges neutronspektrumot megközelitő Maxwell spektrum hőmérsékletét, amely a moderátor hőmérsékleténél alacsonyabb.

Azzal a feltételezéssel, hogy a fluxus térben és energiában szeparálható, vagyis /1.2/-ből egy egysebességü egyenlet nyerhető [3b] Sjöstrand [5] levezette a $\lambda_0(B)$ függvény /az egysebességü elmélet keretei között/ exakt kifejezését és ebből az /1.4/ sorfejtést.

Singwi [6] Purohit [7] és mások [8] a P_1 közelitést alkalmazva a Laguerre sorfejtés segitségével meghatározták az α_0 D és C együtthatókat. A Laguerre sorfejtés együtthatói közül csak az első kettőt tartották meg, azaz L_1 közelitést használtak, de kiszámitották a magasabb közelités korrekcióit is.

Végtelen közeg esetére Nelkin [9] Fourier transzformációs eljárást dolgozott ki a $\lambda(B)$ függvénynek az energiafüggő transzportegyenletből való meghatározására. Eljárásának alkalmazhatósága véges közegekre nyitvahakérdés. A következő §-ban röviden vázoljuk Nelkin eljárását, utána azt ugy módositjuk, hogy alkalmazhatósága véges közegekre nyilvánvaló legyen.

2.§. A végtelen közegbeli elmélet és kapcsolata a véges közegekkel

Egyszerüség kedvéért pillanatnyilag csak az izotrop szórás esetével foglalkozunk, és az egydimenziós transzportegyenletre szoritkozunk:

$$[-\frac{\lambda}{v}+\mu\frac{\partial}{\partial x}+\Sigma_s(E)+\Sigma_a(E)]\phi_\lambda(E,x,\mu)=\frac{1}{2}\int_0^\infty dE'\Sigma_s(E',E)\int_{-1}^{1}\phi_\lambda(E',x,\mu')d\mu' \ . \qquad /2.1/$$

Fourier transzformáció és μ szerint való integrálás után kapjuk a következőt:

$$F_{0,\lambda}(E,B)=Q(E,\lambda,B)\int_0^\infty \Sigma_s(E',E)\,F_{0,\lambda}(E',B)dE' \ , \qquad /2.2/$$

ahol

$$F_\lambda(E,B,\mu)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iBx}\phi_\lambda(E,x,\mu)dx \qquad /2.3/$$

$$F_{0,\lambda}(E;B)=2\pi\int_{-1}^{+1}F_\lambda(E,B,\mu)d\mu \qquad /2.4/$$

$$Q(E,\lambda,B)=\frac{1}{B}\,tg^{-1}\left[\frac{B}{\Sigma_s(E)+\Sigma_a(E)-\frac{\lambda}{v}}\right] \ . \qquad /2.5/$$

Az $\lambda(B)$ összefüggést és a $F_{0,\lambda}(E,B)$ függvényt sorfejtett alakban keressük:

$$F_{0,\lambda}(E,B)=\sum_{\gamma=0}^{\infty}F_{2j}(E)(iB)^{2j} \qquad /2.6a/$$

$$\lambda(B)=\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_{2j}(iB)^{2j}=\alpha_0+D_0B^2-CB^4\ldots. \qquad /2.6b/$$

Ezeket az egyenleteket a /2/-be helyettesitve egy integrál egyenletrendszert kapunk az $F_{2j}(E)$ függvényekre vonatkozóan. Ezekből az integrálegyenletekből az α_{2j} együtthatók is meghatározhatók. Feltételezve az $1/v$ abszorpciót, Nelkin a következő eredményeket kapta:

$$F_0(E)=M(E)$$

$$\left(\frac{D_0}{v}-\frac{1}{3\Sigma_s}\right)M(E)=\hat{S}_0F_2(E) \qquad /2.7a/$$

$$\left(\frac{D_0}{v}-\frac{1}{3\Sigma_s}\right)F_2(E)+\left(\frac{1}{3\Sigma_s^2}\left[\frac{D_0}{v}-\frac{4}{15\Sigma_s}\right]+\frac{C}{v}\right)M(E)=\hat{S}_0F_4(E)$$

Itt

$$\hat{S}_o\psi(E) = \int_0^\infty \Sigma_s(E',E)\,\psi(E')\,dE' - \Sigma_s(E)\,\psi(E)$$

$$\alpha_o = \Sigma_a v$$

$$D_o = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{3\Sigma_s} M(E)\,dE}{\int_0^\infty \frac{1}{v} M(E)\,dE} \qquad /2.7b/$$

$$C = \frac{\int_0^\infty \left(\frac{1}{3\Sigma_s} - \frac{D_o}{v}\right) F_2(E)\,dE}{\int_0^\infty \frac{1}{v} M(E)\,dE} + \frac{\int_0^\infty \frac{1}{3\Sigma_s^2}\left[\frac{4}{15\Sigma_s} - \frac{D_o}{v}\right] M(E)\,dE}{\int_0^\infty \frac{1}{v} M(E)\,dE}$$

A /2.7a/ integrál egyenletrendszerek megoldásával a α_o,D_o és C a /2.7b/ összefüggésekből kiszámithatók.

Mivel a Nelkin féle tárgyalás Fourier transzformációt használ,ezért a véges kiterjedésü közegekre való alkalmazása komoly komplikációkkal járna. Ennek kiküszöbölésére a következőket javasoltuk. [10]

Induljunk ki először is a P_N közelitésből:

$$\left(\Sigma_s + \Sigma_a - \frac{\lambda}{v}\right)\phi_m(x,E) + \frac{1}{2m+1}\frac{\partial}{\partial x}\left[(m+1)\phi_{m+1}(x,E) + m\phi_{m-1}(x,E)\right] =$$

$$= \delta_{m,0}\int_0^\infty \Sigma_s(E',E)\,\phi_m(x,E')\,dE' \qquad m = 0,1,2\ldots N \quad . \qquad /2.8/$$

Ezt az egyenletet ne Fourier transzformáljuk, hanem mondjuk azt, hogy a megoldást a

$$\phi_m(x,E) = F_m(E,B)\,e^{iBx} \qquad /2.9/$$

alakban keressük. Ez formálisan ugyanarra az egyenletre vezet, mint a Fourier transzformáció, de most nincs a kezünk megkötve a Fourier transzformácioban implicite felhasznált határfeltételek által. Megkeresvén ugyanis az összes lehetséges /2.9/ alaku megoldást, ezeknek lineáris kombinációjával a véges közegekre vonatkozó határfeltételek kielégithetők. A B lehetséges értékeit, amellyel a /2.9/ megoldás, anyagi bucklingeknek nevezzük. Ezek egy sorozatot alkotnak:

$$B_0\; B_1 \ldots B_k \quad .$$

Ennek a sorozatnak a konkrét meghatározásával a következő §-ban foglalkozunk a P_1L_1 közelités alapján. /Az L_1 közelitésről és általában az L_J közelitésről lásd ott/ P_NL_J közelités esetén a sorozat $\frac{(N+1)(J+1)}{2}$ gyökpárból áll.

Irjuk fel a fent mondottak alapján a legalacsonyabb sajátértékhez tartozó teljes megoldást $P_N L_J$ közelitésben:

$$\phi(x,E,t) = e^{-\lambda_0 t} M(E)\left[\sum_{i=0}^{N} F_0^i(B_0)L_i^{(1)}(E)\cos B_0 x + \sum_{i=0}^{N}\sum_{k=1}^{(N+1)(J+1)} F_0^i(B_k)L_i^{(1)}(E)e^{iB_k x}\right] . \quad /2.10/$$

Itt $L_i^{(1)}(E)$ az elsőfaju i -edrendü Laguerre polinomot jelzi. Az első tagot külön irtuk, mert az képviseli a teljes fluxus aszimptotikus részét. Ugyanis, ha minden B az első kivételével képzetes /később látni fogjuk, mikor áll elő ez a helyzet/, akkor a határfelülettől távol a moderátor belsejében ez az első tag fog dominálni, tehát a fluxus:

$$\phi(x,E,t) \approx e^{-\lambda_0 t} F_0(E,B_0)\cos B_0 x$$

alaku lesz. Annak a pontnak a d távolságát a határlaptól, ahol a fenti aszimptotikus fluxus eltünik, extrapolációs távolságnak nevezik, azaz

$$\cos B_0(a+d) = 0 \quad .$$

Ebből pedig

$$B_0 = \frac{\pi}{2(a+d)} \quad . \qquad /2.11/$$

Tehát d ismeretében B_0 meghatározható. d-t a transzportelméleti határfeltételekből /például Marshak határfeltételekből/ kell meghatározni. Ezzel a kérdéssel a 4.§-ban foglalkozunk.

Ha egynél több B_k gyökpár valós, akkor nincs aszimptotikus tartomány, ezért a szokásos értelembe vett extrapolációs hossz nem létezik. Azonban ez nem okoz elvi nehézséget, mert ekkor is létezik egy olyan d , ahol a /2.10/ első tagja eltünik, vagyis a lemez alaku moderátor edényhez rendelhető geometriai buckling. Tehát az aszimptotikus tartomány létezése nem szükséges feltétele a végtelen közegbeli elmélet véges közegekre való alkalmazásához.

Még egyszer rámutatunk a Nelkin féle Fourier transzformációs eljárás és a /2.9/ helyettesitéssel történő eljárás közötti lényegbeli különbségre. A két eljárás formálisan ugyanarra az eredményre vezet, de amig a Fourier transzformációban implicite bennfoglaltatnak a határfeltételek, addig a másik eljárás esetén a határfeltételeket szabadon kiróhatjuk és igy nem számit, hogy a közeg véges, vagy végtelen.

A következő két §-ban az anyagi bucklingek meghatározásával illetve az extrapolációs távolsággal foglalkozunk. $P_1 L_1$ közelitésben megvizsgáljuk az aszimptotikus tartomány létezésének feltételét, valamint az extrapolációs távolság buckling függését. Eredményeinket összehasonlitjuk Gelbard [11] et al. P_3 közelitésbeli, sokcsoport módszerrel, gépi uton számitott eredményeivel.

3.§. Adott λ_0 -hoz tartozó anyagi bucklingek sorozata

A továbbiakban a P_1 egyenleteket használjuk a következő szórási magfüggvénnyel:

$$\Sigma_s(E,E',\Omega,\Omega') = \frac{1}{4\pi}\left[\Sigma_s(E\to E') + 3P_1(\Omega,\Omega')\bar{\mu}(E)\Sigma_s(E)\delta(E-E')\right] \qquad /3.1/$$

és bevezetjük a

$$\Sigma_{tr}(E) = \Sigma_s(E)(1-\bar{\mu}(E))$$

jelölést. Egyszerüség kedvéért $1/v$ abszorbenssel foglalkozunk. Legyen:

$$\frac{\lambda}{v} - \Sigma_a = \frac{\varkappa}{v} \, .$$

Ezt az $\varkappa$ -át adottnak tekintve meghatározzuk az anyagi bucklingeket, amelyekkel fel tudjuk irni a teljes megoldást. Mivel nemsokszorozó közegekről van szó $\varkappa \geq 0$.

Ezekkel a röviditésekkel az egydimenziós geometriára felirt P_1 egyenletek a következő alakot öltik:

$$\frac{1}{3(\Sigma_{tr}(E)-\frac{\varkappa}{v})}\frac{\partial^2\phi_0(E,x)}{\partial x^2} + \frac{\varkappa}{v}\phi_0(E,x) = \int_0^\infty \Sigma_s(E',E)\phi_0(E',x)dE' - \Sigma_s(E)\phi_0(E,x) \qquad /3.2/$$

$$\phi_1(E,x) = -\frac{1}{3(\Sigma_{tr}-\frac{\varkappa}{v})}\frac{\partial}{\partial x}\phi_0(E,x) \quad . \qquad /3.3/$$

Fejtsük ki a /3.2/ és /3.3/ egyenleteket az elsőfaju Laguerre polinomok segitségével:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{t_{ik}}{3}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \gamma_{ik} + \varkappa\left(\frac{1}{v}\right)_{ik}\right]\phi_0^k(x) = 0 \qquad /3.4/$$

$$\phi_1^i(x) = -\frac{\partial}{\partial x}\sum_{k=0}^{\infty} t_{ik}\phi_0^k(x) \quad , \qquad /3.5/$$

ahol

$$\phi_0(E,x) = M(E)\sum_{k=0}^{\infty}\phi_0^k(x)L_k^{(1)}(E) \qquad /3.6/$$

$$t_{ik} = \int_0^\infty \frac{1}{\Sigma_{tr}(E)-\frac{\varkappa}{v}} M(E)L_i^{(1)}(E)L_k^{(1)}(E)dE \qquad /3.7a/$$

$$\phi_0^k(x) = \frac{1}{k+1}\int_0^\infty \phi_0(E,x)L_k^{(1)}(E)dE \qquad /3.7b/$$

$$\left(\frac{1}{v}\right)_{ik} = \int_0^\infty \frac{1}{v} M(E)L_i^{(1)}(E)L_k^{(1)}(E)dE \qquad /3.7c/$$

$$\gamma_{ik} = -\frac{1}{2}\int_0^\infty dE\int_0^\infty dE'\sum_s(E'\rightarrow E)M(E')\left[L_k^{(1)}(E')-L_k^{(1)}(E)\right]\left[L_i^{(1)}(E')-L_i^{(1)}(E)\right] \quad . \qquad /3.7d/$$

A γ_{ik} -t az un. detailed balance elv

$$M(E)\sum_s(E\rightarrow E') = M(E')\sum_s(E'\rightarrow E)$$

felhasználásával hoztuk a fenti alakra. A /3.7d/-ből nyilvánvaló, hogy $\gamma_{i0}=0$ és $\gamma_{ii}<0$, ha $i>0$.

A megoldást /2.9/-hez hasonlóan

$$\phi_m^k(x) = F_m^k(B)e^{iBx} \qquad /2.9'/$$

alakban keressük.

Használjunk L_1 közelitést. Ez azt a közelitést jelenti, amelynél $F_m^k(B)=0$, ha $k\geq 2$. /Általában L_J közelitésről van szó, ha $k\geq J+1$ esetén $F_m^k(B)=0$./A /3.4/ és /3.5/ egyenletek L_1 közelitésben és a /2.9'/ helyettesitéssel a következők:

$$\left(\frac{-B^2t_{00}}{3}+\varkappa\left(\frac{1}{v}\right)_{00}\right)F_0^0(B)+\left(\frac{-B^2t_{01}}{3}+\varkappa\left(\frac{1}{v}\right)_{01}\right)F_0^1(B) = 0 \quad 0$$

$$/3.4'/$$

$$\left(\frac{-B^2t_{01}}{3}+\varkappa\left(\frac{1}{v}\right)_{01}\right)F_0^0(B)+\left(\frac{-B^2t_{11}}{3}+\varkappa\left(\frac{1}{v}\right)_{11}-|\gamma_{11}|\right)F_0^1(B) = 0$$

$$F_1^0(B) = -\frac{iB}{3}\left[t_{00}F_0^0(B)+t_{01}F_0^1(B)\right]$$

$$/3.5'/$$

$$F_1^1(B) = -\frac{iB}{3}\left[t_{01}F_0^0(B)+t_{11}F_0^1(B)\right]$$

és könnyen kiszámitható, hogy

$$\left(\frac{1}{v}\right)_{01} = 0{,}5\left(\frac{1}{v}\right)_{00} \quad \left(\frac{1}{v}\right)_{11} = 175\left(\frac{1}{v}\right)_{00} \quad . \qquad /3.7c'/$$

A /3.4'/ homogén egyenletrendszer karakterisztikus egyenlete a következő: x/

x/ A gyökök közelitőleg egyszerübben is kiszámithatók /l. App. A/

$$B^4 - 3B^2 \frac{\left[t_{00}\varkappa\left(\frac{1}{v}\right)_{11} - t_{00}|\gamma_{11}| + t_{11}\varkappa\left(\frac{1}{v}\right)_{00} - 2t_{01}\varkappa\left(\frac{1}{v}\right)_{01}\right]}{t_{00}t_{11} - t_{01}^2} +$$

$$+ 9\,\frac{\varkappa\left(\frac{1}{v}\right)_{00}\left(\varkappa\left(\frac{1}{v}\right)_{11} - |\gamma_{11}|\right) - \varkappa^2\left(\frac{1}{v}\right)_{01}^2}{t_{00}t_{11} - t_{01}^2} = 0 \quad . \qquad /3.8/$$

Akkor létezik aszimptotikus tartomány, ha /3.8/ egyik gyöke pozitiv, a másik negativ

$$B_0^2 = B^2 \qquad B_1^2 = -\nu^2 \quad .$$

Ennek nyilván az a feltétele, hogy:

$$\frac{1{,}5\,\varkappa\left(\frac{1}{v}\right)_{00} - |\gamma_{11}|}{t_{00}t_{11} - t_{01}^2} < 0 \quad . \qquad /3.9/$$

Ha $t_{00}t_{11} > t_{01}^2$ és $\varkappa$ nem tul nagy, akkor /3.9/ teljesül.

L_2 közelitésben karakterisztikus egyenlet gyanánt egy harmadfoku egyenletet kapunk:

$$\alpha B^6 + \beta B^4 + \gamma B^2 + \delta = 0 \quad , \qquad /3.10/$$

ahol α, β, γ és δ a homogén egyenletrendszer determinánsából egyszerüen kiszámitható.

Határozzuk meg /3.10/ segitségével a korrekciót az L_1 közelitésben kapott gyökökhöz. Legyen $\overset{(1)}{B}{}^2$ az L_1-ből és $\overset{(2)}{B}{}^2$ az L_2-ből kapható gyök és legyen $\overset{(2)}{B}{}^2 = \overset{(1)}{B}{}^2 + x$, akkor x elsőnél magasabb hatványait elhanyagolva:

$$x = -\frac{\alpha \overset{(1)}{B}{}^6 + \beta \overset{(1)}{B}{}^4 + \gamma \overset{(1)}{B}{}^2 + \delta}{3\alpha \overset{(1)}{B}{}^4 + 2\beta \overset{(1)}{B}{}^2 + \gamma} \qquad /3.11/$$

az L_1 közelités nyilván akkor jó, ha a /3.11/ korrekció kicsi, azaz $\left|\frac{x}{\overset{(1)}{B}{}^2}\right| \ll 1$.

Alkalmazzuk a fent elmondottakat vizre. Viznél feltesszük, hogy $\Sigma_{tr}(E) \sim E^{-1/2}$. Ekkor $t_{01} = -0{,}5\,t_{00}$, tehát $t_{00}t_{11} - t_{01}^2 = 2{,}5\,t_{00}^2 > 0$.

A γ_{11} kiszámitása az App. B-ben található. $\gamma_{11} = -1{,}39\ \mathrm{cm}^{-1}$.

A /3.9/ feltétel alkalmazásából adódik, hogy $\varkappa \leq 1{,}6.10^5\,\mathrm{sec}^{-1}$ esetben /3.8/-nak két különböző előjelü gyöke van. A mérésre használt tartomány kb. $0,26.10^5 sec^{-1}$-ig terjed, ami tehát jóval kisebb, mint a /3.9/ által megszabott határ. Vizsgáljuk meg most utólag az /3.11/ alapján, hogy jogos volt-e az L_1 közelités használata. Azt tapasztaljuk, hogy a $0 \le \varkappa < 1,4.10^5 sec^{-1}$ tartományban a B^2 korrekciója 10 %-nál nem nagyobb; a ν^2 korrekciója is 30 % alatt marad. Azonban $\varkappa$ növekedtével az L_1 közelités egyre rosszabb eredményt ad, ezért például /3.9/-től már csak kvalitativ pontosságu becslés várható. A közelités elromlása érthető, hiszen a $\varkappa(\frac{1}{v})_{00}$ fellépte egy negativ abszzorpcióval ekvivalens. Az L_1 közelités jóságát pedig az abszzorpció $/\gamma_{11}$ viszony abszolut értéke szabja meg. Jelen esetben ez a viszony a

$$\frac{\varkappa(\frac{1}{v})_{00}}{|\gamma_{11}|}$$

számot jelenti. Ahogy ez a mennyiség növekedik, ugy romlik az L_1 közelités pontossága. Ez fizikailag érthető, mert ahogy nő a $\varkappa$, ugy nő a Maxwell spektrumot eltorzitó kifolyás. A $|\gamma_{11}|$ nagysága pedig arra jellemző, hogy a moderátor milyen eréllyel állitja helyre a Maxwell spektrumot. A nagy $|\gamma_{11}|$ jól termalizáló moderátorra jellemző.

Összefoglalva, láthatjuk, hogy viznél a mérések során fellépő legnagyobb $\varkappa$-ra is létezik aszimptotikus tartomány, vagyis a fluxus

$$\phi_0(E,x) = A_B F_0(E B)\cos Bx + A_\nu F_0(E\ \nu)\mathrm{ch}\nu x \qquad /3.12/$$

alaku. Azonban egyéb, rosszabbul termalizáló moderátor /például grafit/ esetén előfordulhat, hogy nincs aszimptotikus tartomány, vagyis a fluxus nem /3.12/, hanem

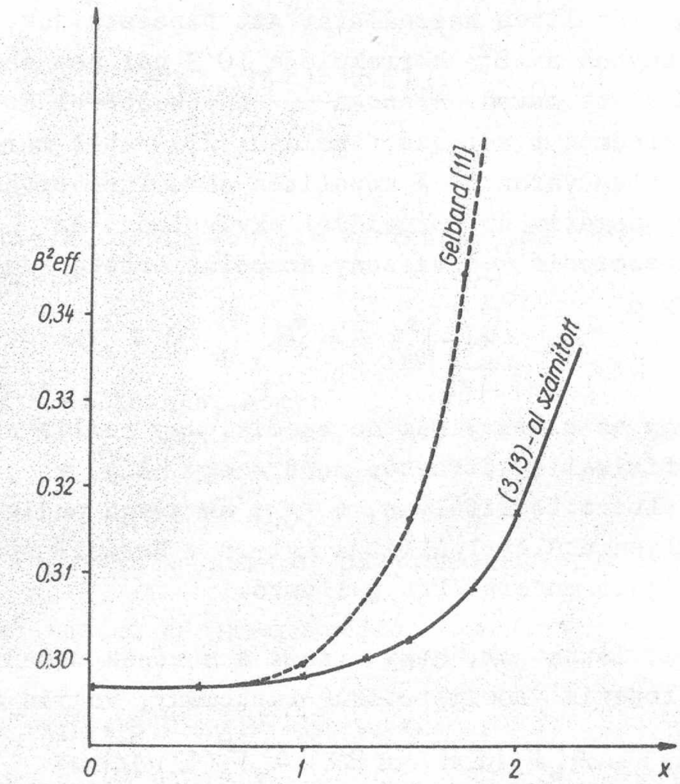
$$\phi_0(E,x) = A_0 F_0(E,B)\cos B_0 x + A_1 F_0(E\ B_1)\cos B_1 x \qquad /3.12'/$$

alaku a moderátor belsejében.

Az aszimptotikus tartományra a következő érdekes jellemzést lehet adni. /3.12/ segitségével képezzük a

$$\frac{\Delta \int_0^\infty \phi_0(E,x)dE}{\int_0^\infty \phi_0(E,x)dE} = -B^2_{eff} \qquad /3.13/$$

kifejezést. Ha eltekintenénk a /3.12/ második tagjától, azaz csak az aszimptotikus fluxust tekintenénk, akkor $B^2 = B^2_{eff}$. Igy tehát B^2_{eff} térbeli változása és B^2-től való eltérése az aszimptotikusságtól való elhajlást jelzi. Az 1. ábrán a B^2_{eff} látható $\varkappa = 0,8.10^4 sec^{-1}$ vagyis $B^2 = 0,296\ cm^{-2}$ esetén vizre. Ez egy a = 2,55 cm félvastagságu lemez bucklingjének felel meg. A folytonos vonal a /3.12/ből kapott B^2_{eff}-et jelenti, a szaggatott pedig azt, amit Gelbard [11] kapott P_3 közelitésben gépi uton. A két eredmény, amint látható, csak kvalitative egyezik, és ez feltehetően a P_1 közelités P_3-mal szembeni gyengébb volta miatt van.



1. ábra

4.§. Az extrapolációs hossz buckling függése

Foglalkozzunk először azzal az esettel, amikor a fluxus /3.12/ alaku, azaz létezik aszimptotikus tartomány.

A /3.12/ megoldásra még ki kell tüznünk a határfeltételeket. Végtelen közeg esetében a határfeltétel a következő: a fluxus legyen véges a végtelenben. Ebből: $A_\nu = 0$. A fizikailag értelmes megoldásnak az egész térben pozitivnak kell lenni, ezért $B = 0$. Véges 2a vastagságu lemez esetén a Marshak határfeltételeket használhatjuk. Ez a határfeltétel P_1 közelitésben azt irja elő, hogy

$$-\frac{1}{2}\phi_0(a,E)+\phi_1(a,E) = 0 \quad .$$

Ez az egyenlet L_1 közelitésben:

$$-\frac{1}{2}\phi_0^0(a)+\phi_1^0(a) = 0 \quad ,$$

$$-\frac{1}{2}\phi_0^1(a)+\phi_1^1(a) = 0 \quad . \qquad /4.1/$$

A /3.3/ egyenletekből L_1 közelitésben:

$$\phi_1^0(a) = -\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left[t_{00}\phi_0^0(x)+t_{01}\phi_0^1(x)\right]_{x=a} ,$$

$$\phi_1^1(a) = -\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left[t_{01}\phi_0^0(x)+t_{11}\phi_0^1(x)\right]_{x=a} . \qquad /4.2/$$

A /4.2/-őt a /4.1/-be helyettesitve és a kapott egyenletekbe /3.12/-őt irva a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$A_B\left[F_0^0(B)\cos Ba-(t_{00}F_0^0(B)+t_{01}F_0^1(B))\frac{2B}{3}\sin Ba\right]+$$

$$+A_\nu\left[F_0^0(\nu)\mathrm{ch}\nu a+(t_{00}F_0^0(\nu)+F_{01}(\nu)t_{01})\frac{2\nu}{3}\mathrm{ch}\nu a\right] = 0 ,$$

$$A_B\left[F_0^0(B)\cos Ba-(t_{01}F_0^0(B)+t_{11}F_0^1(B))\frac{2B}{3}\sin Ba\right]+ \qquad /4.3/$$

$$+A_\nu\left[F_0^1(\nu)\mathrm{ch}\nu a+(t_{01}F_0^1(\nu)+t_{11}F_0^1(\nu))\frac{2\nu}{3}\mathrm{sh}\nu a\right] = 0 .$$

A /4.3/ homogén egyenletrendszer karakterisztikus egyenletéből meghatározható az a d távolság, amelyre a /3.12/ aszimptotikus része eltünik:

$$\cos B(a+d) = 0 .$$

Legyen $F_0^0(B) = F_0^0(\nu)=1$, ekkor:

$$d = \frac{1}{B}\,\mathrm{tg}^{-1}\left[\frac{2B}{3}(t_{00}+F_0^1(B)t_{01})\frac{1-\dfrac{t_{11}F_0^1(B)+t_{01}}{t_{01}F_0^1(B)+t_{00}}\cdot\dfrac{p}{qF_0^1(\nu)}}{1-\dfrac{F_0^1(B)}{F_0^1(\nu)}\cdot\dfrac{p}{q}}\right] = \qquad /4.4/$$

$$= \frac{2}{3}(t_{00}+F_0^1(B)t_{01})\frac{1-\dfrac{t_{11}F_0^1(B)+t_{01}}{t_{01}F_0^1(B)+t_{00}}\cdot\dfrac{p}{qF_0^1(\nu)}}{1-\dfrac{F_0^1(B)}{F_0^1(\nu)}\cdot\dfrac{p}{q}} - \frac{8}{81}B^2(t_{00}+F_0^1(B)t_{01})^3\left(\frac{1-\dfrac{t_{11}F_0^1(B)+t_{01}}{t_{01}F_0^1(B)t_{00}}\cdot\dfrac{p}{qF_0^1(\nu)}}{1-\dfrac{F_0^1(B)}{F_0^1(\nu)}\cdot\dfrac{p}{q}}\right)^3 ,$$

ahol

$$p = 1+(t_{00}+F_0^1(\nu)t_{01})\frac{2\nu}{3}\mathrm{th}\nu a ,$$

$$q = 1+\left(t_{11}+\frac{t_{01}}{F_0^1(\nu)}\right)\frac{2\nu}{3}\mathrm{th}\nu a . \qquad /4.5/$$

A /3.4'/ egyenletekből:

$$F_0^1(B) = \frac{\frac{B^2}{3}t_{01}-\varkappa\left(\frac{1}{v}\right)_{01}}{\frac{B^2}{3}t_{11}+|\gamma_{11}|-\varkappa\left(\frac{1}{v}\right)_{11}} , \qquad /4.6a/$$

$$F_0^1(\nu) = \frac{-\left(\frac{\nu^2}{3}t_{00} + \varkappa\left(\frac{1}{v}\right)_{00}\right)}{\frac{\nu^2}{3}t_{10} + \varkappa\left(\frac{1}{v}\right)_{01}} \qquad /4.6b/$$

A $t_{00} + F_0^1(B)t_{01}$ tényezőnek egyszerü fizikai jelentése van. Irjuk külön a /3.12/-ből az aszimptotikus tagot:

$$\phi_{as}(E,x) = A_B M(E)\left(L_0^{(1)}(E) + F_0^1(B)L_1^{(1)}(E)\right)\cos Bx \quad . \qquad /4.7/$$

Képezzük erre a $\left[\Sigma_{tr} - \frac{\varkappa}{v}\right]^{-1}$ átlagát:

$$\frac{\int_0^\infty dE\left(\Sigma_{tr} - \frac{\varkappa}{v}\right)\phi_{as}(E,x)}{\int_0^\infty dE\,\phi_{as}(E,x)} = t_{00} + F_0^1(B)t_{01} \quad .$$

Tehát a fenti tényező adja a diffuziós hülésből eredő extrapolációs hossz változást, figyelembe véve a $\varkappa$ felléptéből adódó szabad uthossz növekedés hatását.

A /4.4/ utolsó tényezője $\varkappa = 0$ esetben sem lesz általában 1, hacsak nem $t_{01} = 0$. /Például ha Σ_{tr} = konst./ A $\varkappa = 0$ az abszorpciómentes Milne probléma esetének felel meg, tehát ekkor azt a d-t kapjuk, amelyet egy végtelen féltér esetében kapnánk. Ismeretes, hogy a konstans hatáskeresztmetszet közelitésnél

$$d = 0{,}7104 < \lambda_{tr} >$$

az exact transzportelméleti eredmény. Ha szórási hatáskeresztmetszet energia függő, akkor az extrapolációs távolság nem ez lesz. Erre az utóbbi esetre Nelkin [12] variációs módszerrel kimutatta, hogy

$$d = \frac{3}{8}\frac{<\lambda_{tr}^2(E)>}{<\lambda_{tr}(E)>} + \frac{1}{3}<\lambda_{tr}(E)> \quad . \qquad /4.8/$$

Az átlagolást a végtelen féltér T hőmérsékletü Maxwell spektrumára kell venni. A /4.8/-at vizre alkalmazva:

$$d = 0{,}758 < \lambda_{tr}(E) > \qquad /4.9/$$

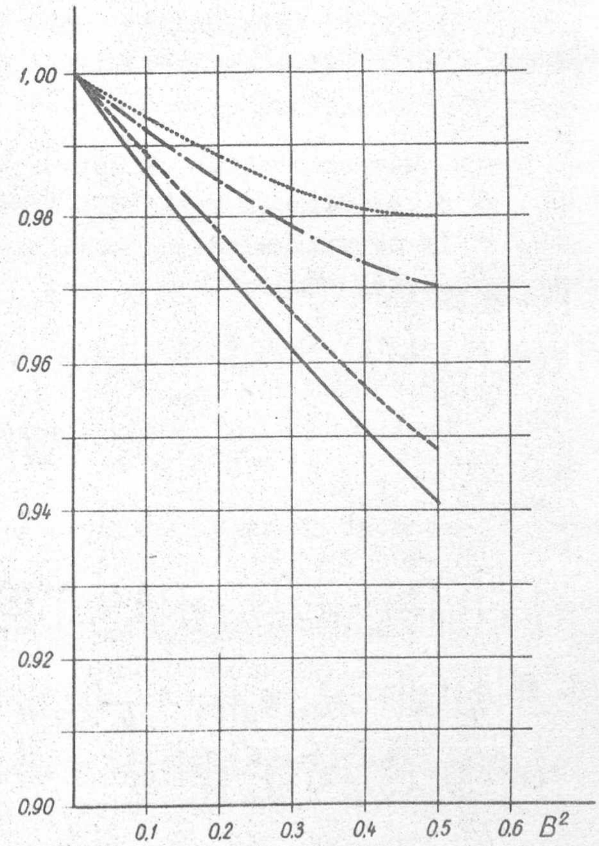
adódik, tehát az extrapolációs távolság a λ_{tr} energiafüggése miatt megnagyobbodik. Ilyen megnagyobbodást kapunk mi is a /4.4/ formulából. Ugyanis /4.4/-et alkalmazva vizre $\varkappa = 0$ esetre:

$$d = 0{,}738\ t_{00} = 0{,}738 < \lambda_{tr} > \qquad (< \lambda_{tr} > = t_{00}) \ , \qquad /4.10/$$

szemben az ismert P_1 közelitésbeli $d = 2/3 < \lambda_{tr} >$.

Foglalkozzunk most a $\varkappa \neq 0$ esettel. Gelbard et al. [11] P_3 közelitésben kiszámitották különböző vastagságu lemezek λ-ját is. A λ-ból a /14/ képlet segitségével kiszámitották a B^2-et, és ebből /2.11/ segitségével a d-ét. Igy megkapták d-ét mint B^2 függvényét. Mi a d/d_0 függést vetjük össze, ahol d_0 a $B^2 = 0$ -hoz tartozó extrapolációs távolság. A 2. ábrán a szaggatott vonal jelzi Gelbard, a folytonos pedig a mi görbénket, amit a /4.4/ alapján kapunk. Látható, hogy a P_1L_1 közelités eredménye közel jár a Gelbard pontosabb, gépi számolás utján nyert eredményeihez. A /4.9/ eltérése a /4.10/-től a P_1 közelités hibája a P_3 -hoz képest. /Gelbard is $d_0 = 0{,}758\langle\lambda_{tr}\rangle$ -at kapott./ Ha tehát a 0,738 számot 0,758-ra korrigáljuk, akkor már az L_1 közelitéssel is jól megkaphatjuk az extrapolációs hossz buckling függését.

Érdemes még ábrázolni a $\frac{d}{d_0}\frac{\langle\lambda_{tr}\rangle_0}{\langle\lambda_{tr}\rangle}$ mennyiséget is. Ez a mennyiség az un. hülésen tuli effektust jelzi és azt mutatja, hogy nem csupán a hülés okoz extrapolációs távolság csökkenést, hanem van egy másik jelenség is, amelynek általában nincs szemléletes fizikai jelentése. A 2.ábrán a pontozott görbe jelzi a Gelbard által számitott $\frac{d}{d_0}\frac{\langle\lambda_{tr}\rangle_0}{\langle\lambda_{tr}\rangle}$ mennyiséget, a karikázott görbe pedig a /4.4/ alapján számitottat. Látható, hogy a kétféle számitás eredménye itt is közel jár egymáshoz[x/].



2. ábra

Eddig feltettük, hogy van aszimptotikus tartomány. Nézzük meg, hogy mi van akkor, ha ilyen nem létezik, tehát, ha mindkét gyök pár valós és a fluxus /3.12'/ alaku. Ekkor a fenti számitás ugyanugy végigvihető, mint az előbbi esetben. A különbség mindenütt az, hogy $\nu th \nu a$ helyébe

x/ Megjegyzendő, hogy az extrapolációs hossz méretfüggése nemcsak az energiafüggő tárgyalás során lép fel. Sjöstrand [5] P_3 közelitésben az egycsoport elmélet alapján is kapott buckling függést. Ez azonban jóval kisebb annál, mint amit az energiafüggés figyelembevételével kapunk.

$-B_1 tg B_1 a$ -t kell irni. /Megjegyzendő azonban, hogy ebben az esetben már ajánlatos az L_1 -nél magasabb közelitést használni, mert - mint mondottuk - ez az eset olyan nagy $\varkappa$-ra következik be, amelynél az L_1 közelités legfeljebb csak kvalitativ képet adhat./

Most is kapunk egy d-ét, ennek azonban nincs az a megszokott fizikai jelentése, mint az extrapolációs hossznak, de ez d is szokott módon felhasználható a geometriai buckling meghatározására.

5.§. Megjegyzés a $\lambda(B)$-sor konvergenciájáról

Most nézzük meg, hogyan lehet válaszolni a bevezetőben felvetett harmadik kérdésre a $P_1 L_1$ közelités alapján.

Mint már emlitettük, komoly akadályt gördit a pulzált mérések utjába az /1.4/ formula korlátolt érvényessége. A $P_1 L_1$ közelitésben ezt a kérdést is megvizsgálhatjuk közelebbről. Mindenekelőtt /3.4/ karakterisztikus egyenletét rendezzük $\varkappa$-ra:

$$\varkappa^2\Big[\big(\tfrac{1}{v}\big)_{00}\big(\tfrac{1}{v}\big)_{11}-\big(\tfrac{1}{v}\big)_{01}^2\Big]+\varkappa\Big[-\big(\tfrac{1}{v}\big)_{00}\Big(\frac{B^2}{3}t_{11}+|\gamma_{11}|\Big)-\frac{B^2}{3}t_{00}\big(\tfrac{1}{v}\big)_{11}+2\frac{B^2}{3}t_{01}\big(\tfrac{1}{v}\big)_{01}\Big]+$$
$$+\frac{B^4}{9}\big(t_{00}t_{11}-t_{01}^2\big)+\frac{B^2}{3}t_{00}|\gamma_{11}| = 0 \qquad /5.1/$$

és a B^2 -et most adottnak tekintve megoldjuk az /5.1/ egyenletet:

$$\varkappa=\Big\{\frac{B^2}{3}\Big[t_{11}\big(\tfrac{1}{v}\big)_{00}+t_{00}\big(\tfrac{1}{v}\big)_{11}-2\big(\tfrac{1}{v}\big)_{01}t_{01}\Big]+\big(\tfrac{1}{v}\big)_{00}|\gamma_{11}|\pm\Big[\Big(\frac{B^2}{3}\Big[t_{11}\big(\tfrac{1}{v}\big)_{00}+t_{00}\big(\tfrac{1}{v}\big)_{11}-$$
$$-2\big(\tfrac{1}{v}\big)_{01}t_{01}\Big]+\big(\tfrac{1}{v}\big)_{00}|\gamma_{11}|\Big)^2-4\frac{B^2}{9}\Big(t_{00}t_{11}-t_{01}^2+\frac{B^2}{3}t_{00}|\gamma_{11}|\Big)\Big(\big(\tfrac{1}{v}\big)_{00}\big(\tfrac{1}{v}\big)_{11}-\big(\tfrac{1}{v}\big)_{01}^2\Big)\Big]^{\frac{1}{2}}\Big\}\cdot$$
$$\cdot\Big\{2\Big[\big(\tfrac{1}{v}\big)_{00}\big(\tfrac{1}{v}\big)_{11}-\big(\tfrac{1}{v}\big)_{01}^2\Big]\Big\}^{-1}, \qquad /5.2/$$

mivel a kisebbik $\varkappa$ iránt érdeklődünk, a négyzetgyök előtt negativ előjelet kell vennünk. Ahhoz, hogy /5.2/-ből egy $B=0$ körüli Taylor sort nyerjünk, a

$$\frac{2}{3}\,\frac{B^2}{\big(\tfrac{1}{v}\big)_{00}|\gamma_{11}|}\Big[\big(\tfrac{1}{v}\big)_{00}\Big(t_{11}\big(\tfrac{1}{v}\big)_{00}-\big(\tfrac{1}{v}\big)_{11}t_{00}\Big)+2\big(\tfrac{1}{v}\big)_{01}\Big(t_{00}\big(\tfrac{1}{v}\big)_{01}-t_{01}\big(\tfrac{1}{v}\big)_{00}\Big)\Big]=x \qquad /5.3/$$

$$\frac{B^4}{9\big(\tfrac{1}{v}\big)_{00}|\gamma_{11}|^2}\Big\{\Big[t_{11}\big(\tfrac{1}{v}\big)_{00}-\big(\tfrac{1}{v}\big)_{11}t_{00}-2t_{01}\big(\tfrac{1}{v}\big)_{01}\Big]^2-4\big[t_{00}t_{11}-t_{01}^2\big]\Big[\big(\tfrac{1}{v}\big)_{00}\big(\tfrac{1}{v}\big)_{11}-\big(\tfrac{1}{v}\big)_{01}^2\Big]\Big\}=y \qquad /5.4/$$

mennyiségek szerint kell sorbafejteni egy törtet illetve egy gyök alatti kifejezést. Ekkor a következő sort kapjuk:

$$\lambda = \Sigma_a v + \frac{t_{00}}{3(\frac{1}{v})_{00}} B^2 - \frac{1}{9} \frac{t_{00}^2}{|\gamma_{11}|(\frac{1}{v})_{00}} \left[\frac{t_{01}}{t_{00}} - \frac{(\frac{1}{v})_{01}}{(\frac{1}{v})_{00}} \right]^2 \cdot B^4 \quad . \qquad /5.5/$$

Az /5.5/ alatti sor akkor konvergens, ha

$$x < 1 \; , \qquad y \leq 1 \; . \qquad /5.6/$$

A bevezetőben emlitettük, hogy az általános transzportegyenletből egy sebességü egyenlet vezethető le az esetben, ha a $\phi(r,E,\Omega)$ mennyiség térben és energiában való szeparálhatóságát feltételezzük. Az egysebességü transzportegyenletből Sj strand a következő formulát kapta $\lambda(B)$ összefüggésként [5]:

$$\lambda = \Sigma_a \bar{v} + \Sigma_s \bar{v} \left[1 - \frac{B}{\Sigma_s} \frac{1}{tg \frac{B}{\Sigma_s}} \right] \qquad /5.7/$$

Az /5.7/ formula akkor fejthető $B = 0$ sorba, ha $\frac{B}{\Sigma_s} < \frac{\pi}{2}$ konkrét esetben /pl. viznél/ könnyen meg lehet győződni arról, hogy ez a kritérium jóval nagyobb bucklingeket enged meg, mint /5.6/. / Σ_s alatt természetesen egy Maxwell spektrumra átlagolt hatáskeresztmetszetet kell érteni./

A konvergencia sugár vizre /5.6/ /5.3/, illetve /5.4/ alapján:

$(x < y) \; B^2_{max} = 2{,}25 \, cM^{-2}$.

A mérések során az eddig használt legnagyobb B^2 , mint emlitettük, 0,96 cm^{-2}.

Ezuton mondok köszönetet Pál Lénárd akadémiai levelező tagnak és Kosály György kollégámnak az értékes észrevételekért és diszkussziókért.

Appendix A

A /3.4/ egyenletrendszerből egyszerüen megkaphatjuk a B_i^2 sorozatot, ha első közelitésben elhanyagoljuk a diagonális tagokat; ekkor:

$$B^2 = 3 \frac{\varkappa(\frac{1}{v})_{ii} - |\gamma_{ii}|}{t_{ii}} \quad . \qquad /A1/$$

A /3.4/ egyenletekből leolvasható, hogy az /A1/ formula akkor jó közelités, ha

$$|\gamma_{ii}| \gg |\gamma_{ik}| \qquad i \neq k \qquad i \neq 0 \tag{A2}$$

$$|\gamma_{ii}| \gg \varkappa\left(\frac{1}{v}\right)_{ii} \tag{A3}$$

$$|t_{ii}| \gg |t_{ik}| \qquad i \neq k \;. \tag{A4}$$

Nézzük meg, hogyan elégithetők ki ezek a feltételek. Nehézgázra, mint ismeretes:

$$\gamma_{ik} = -i(i+1)\xi \, \Sigma_s \delta_{ik} \;.$$

Tehát nehézgáz, vagy attól kevéssé különböző moderátor esetén /A2/ teljesül. Még közönséges viz esetén is igaz, hogy

$$\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{11}} = 0{,}25 \,.$$

Remélhető, hogy a többi γ_{ik}-ra is hasonló nagyságrendü arány áll fent.

Az /A3/ feltétel a $\varkappa$ nagyságának szab korlátot. /Tehát az /A1/ közelités csak elegendően kis $\varkappa$-ra érvényes.

Az /A4/ feltétel teljesülése a $\Sigma_{tr}(E)$ energiafüggésétől függ. Adott esetben konkrétan megvizsgálandó. Viz esetében például

$$\left|\frac{t_{01}}{t_{00}}\right| = 0{,}5 \qquad \left|\frac{t_{12}}{t_{11}}\right| = 0{,}43 \qquad \left|\frac{t_{02}}{t_{03}}\right| = 0{,}125 \;.$$

Az /A1/ közelités előnye, hogy segitségével áttekinthető a B_i^2 gyökök sorozata, függetlenül attól, hogy milyen L_g közelitést használtunk.

Az /A1/ alkalmazásával /3.9/ helyett a

$$1{,}75\, \varkappa\left(\frac{1}{v}\right)_{00} < |\gamma_{11}|$$

kritérium adódik az asszimptotikus tartományra.

Appendix B

A γ_{11} kiszámitása mérés, vagy egyéb számitás utján nyert C értékből történhet.

Az /5.5/ és /1.4/ formula összehasonlitásából leolvasható, hogy

$$C = \frac{1}{9} \frac{t_{00}^2}{|\gamma_{11}|\left(\frac{1}{v}\right)_{00}} \left[\frac{t_{01}}{t_{00}} - \frac{\left(\frac{1}{v}\right)_{01}}{\left(\frac{1}{v}\right)_{00}}\right]^2 \;. \tag{B1}$$

Ez a jelöléstől eltekintve azonos az irodalomban jól ismert formulával [4][6][7].

A /B1/-ből:

$$|\gamma_{11}| = \frac{1}{9}\,\frac{t_{00}^2}{\left(\frac{1}{v}\right)_{00} C}\left[\frac{t_{01}}{t_{00}} - \frac{\left(\frac{1}{v}\right)_{01}}{\left(\frac{1}{v}\right)_{00}}\right]^2 . \qquad /B2/$$

Mi a Gelbard et al. [11] által adott C -t használtuk /C = 0,036 cm^4/sec/, mivel eredményeinket az övével akartuk összevetni.

Irodalom

[1] von Dardel,G.F.; Sjöstrand,N.G., Phys.Rev. 96. 1245 /1954/

[2] Antonov,A.V. et al. Proc.Int.Conf. on Peaceful Uses of Atomic Energy, Geneva 1955. 5., 3, 82.

[3] Davison,B.T., The Neutron Transport Theory, Oxford Clarendon Press, 1957. a. 29 oldal - b. 43 oldal

[4] Nelkin,M.: J.Nucl.Energy 8. 48. /1958/

[5] Sjöstrand,N.G., Ark. för Fysik 15. 147. /1959/

[6] Singwi,K.S., Ark. för Fysik 16. 385. /1960/

[7] Purohit,S.N., Nucl.Sci.Eng. 9. 157. /1960/

[8] Häfele,W.; Dresner,L., Nucl.Sci.Eng. 7. 304. /1960/
Virkkunnen,J.: Ann.Acad.Scient.Fennicae A. VI. 51.

[9] Nelkin,M., Nucl.Sci.Eng. 7. 210. /1960/

[10] Kosály G.; Vértes P.; Weiss,Z., Előadás a bukaresti reaktorfizikai konferencián /1961/

[11] Gelbard,E.J.; Davis,J.; Pearson,J., WAPD-T-1065 /1959/

[12] Nelkin,M., Nucl.Sci.Eng. 7. 552. /1960/

Érkezett 1962. jul. 17.

KFKI Közl. 10. évf. 5. szám, 1962.

NUKLEÁRIS DETEKTOROK JELEIT UTÁNZÓ ÁRAMKÖRÖK SZÁMITÁSA

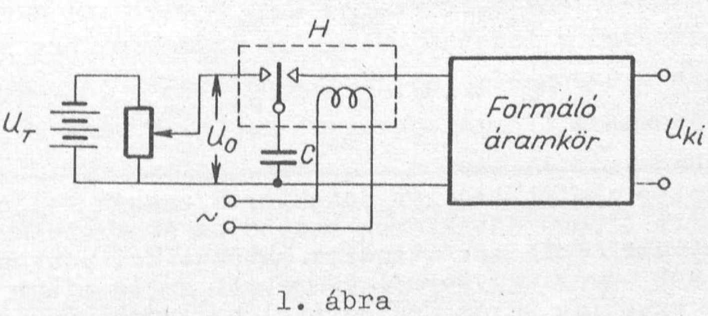
Irta: Csákány Antal

Összefoglalás:

A cikk a nukleáris detektorok jeleit utánzó áramkörök paraméterei közötti összefüggéseket vizsgálja. A formáló áramkörül szolgáló négypólusra vonatkozó megkötésből elméleti uton gyakorlatban megvalósitható áramköröket származtat le. Levezeti két áramkör tervezési képleteit és bevezet egy kihasználási-tényezőt, melynek alapján a különböző áramkörök célszerüen összemérhetők.

Bevezetés

A nukleáris detektorok egy része /ionizációs-kamrák, szcintillációs és félvezető detektorok/ által szolgáltatott impulzusszerü jelek hasznositani kivánt információtartalmát ezen jelek csucsértéke, amplitudója jelenti. Ezt az információt feldolgozó rendszerek /erősitők, diszkriminátorok, amplitudó-analizátorok/ linearitásával és stabilitásával szemben az idők folyamán egyre komolyabb követelmények támadtak, és igy a készülékek elektromos beméréséhez szükséges impulzusgenerátor sem választható az impulzustechnikában megszokott elven müködő jelgenerátorok közül. Ennek oka az, hogy a 10^{-3} - 10^{-4} stabilitási és szabályozhatósági igényeknek elektroncsövet tartalmazó áramkörök már nem tudnak eleget tenni. A megoldás évek óta közismert, és a ma már számos cég által gyártott pergés-mentes és kicsiny kontakt potenciálu higanynedvesitésü kapcsoló alkalmazásával egyszerünek is mondható. Az 1. ábra ezen generátorok elvi rajzát mutatja: a rendszerint hálózati - vagy ahhoz közel álló - frekvenciával mozgatott H morzeérintkező a periódus egyik felében U_0 potenciálra tölti a C kondenzátort, majd a periódus másik felében a formáló áramkörön keresztül kisüti. A kimenő impulzus a formáló áramkör kimenetéről vehető le [1, 2, 4].



1. ábra

A viszonylag kicsi ismétlődési frekvenciáért kárpótol az áramkör rendkivüli egyszerüsége, az impulzus amplitudó könnyü és pontos szabályozhatósága, a szinte kizárólag csak a telepfeszültség stabilitásától függő amplitudó stabilitása.

A továbbiakban a kondenzátor kisütését végző formáló áramkör tervezését fogjuk áttekinteni. Ennek az áramkörnek a célja valamely nukleáris detektor jelével azonos időbeli lefolyásu kimenő impulzus kialakitása.

A kimenő jelalak és a formáló áramkör paramétereinek összefüggése

A detektorok olyan áramgenerátorok, melyek $J = J_0 e^{-t/\tau_d}$ $(t \geq 0)$ lefolyásu áramimpulzust szolgáltatnak a párhuzamos ellenállásból és kapacitásból álló detektoráramkörre /3/.[x] A viszonyokat a 2. ábra tünteti fel. / τ_d a detektor lecsengési időállandója, J_0 a detektált részecske energiájával arányos./A kimenőfeszültség Laplace-transzformáltja az áramimpulzus transzformáltjának és a párhuzamos R_i-C_i elemek operátor-impedanciájának ismeretében:

$$\mathcal{L}\{U_{k_{i,d}}\} = \mathcal{L}\{J\} \frac{R_i}{1+p\tau_i} = J_0 R_i \tau_d \frac{1}{1+p\tau_d} \frac{1}{1+p\tau_i} = U' \frac{1}{ap^2+bp+1} \qquad /1/$$

Számitásaink alapja, hogy az 1. ábra szerinti áramkörben a kondenzátor kisülése következtében létrejövő kimenőjel Laplace-transzformáltjának /1/-gyel azonos alakunak kell lennie.

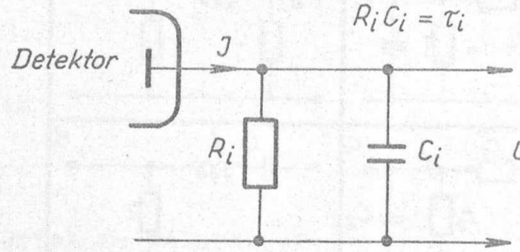
A kisülés folyamatát a 3. ábra szerinti áramkörben vizsgáljuk. Az 1. és 3. ábra áramkörének a kisülés időtartama alatti ekvivalenciája egyszerüen igazolható, azonban mig az 1. ábra kondenzátorának kezdeti töltése U_0/C, a 3. ábra kondenzátorának kezdeti feszültsége zérus, igy a számitások formailag egyszerübbek.

Ha a formáló áramkör egy olyan négypólus, melynek láncparaméterei a következő egyenletekkel definiáltak, /a kis betük a megfelelő feszültség-időfüggvények Laplace-transzformáltjait jelölik/

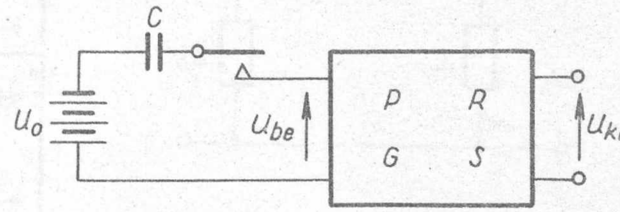
$$u_{ki} = P u_{be} + R i_{be} \qquad /2/$$

$$i_{ki} = G u_{be} + S i_{be} \qquad /3/$$

x/ Ez a feltételezés szcintillációs detektorok esetén teljesen helytálló. Ionizációs-kamra tipusu detektorok esetén az áramimpulzus közel négyszögletes, igy ezek jeleinek utánzása matematikai pontossággal az áram-idő-függvény két ugrásfüggvényből összetett volta miatt az 1. ábra szerinti áramkör egyetlen ugrásfüggvényével nyilvánvalóan nem lehetséges.



2. ábra



3. ábra

és figyelembe vesszük, hogy

$$u_{be} = u_o - R_b i_{be} \quad /\text{ahol} \quad R_b = \frac{1}{pC} / \qquad /4/$$

továbbá, hogy $i_{ki} = 0$ /külön terhelő ellenállást nem alkalmazunk/, akkor a kimenőfeszültség $/u_{ki}/$ és a bemenőfeszültség $/u_o = U_o \frac{1}{p}/$ között a következő összefüggés áll fenn:

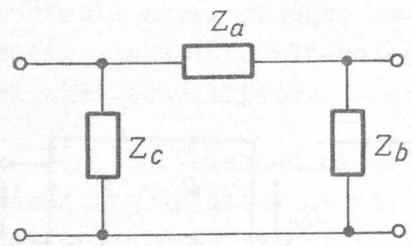
$$u_{ki} = \frac{PS - GR}{S - R_b G} u_o = \frac{PS - GR}{pCS - G} U_o C \qquad /5/$$

A detektor-jellel azonos lefolyásu időfüggvényt előállitó négypólus láncparamétereinek olyanoknak kell tehát lenniök, hogy azokat /5/-be behelyettesitve, /1/ által megszabott összefüggést nyerjük.

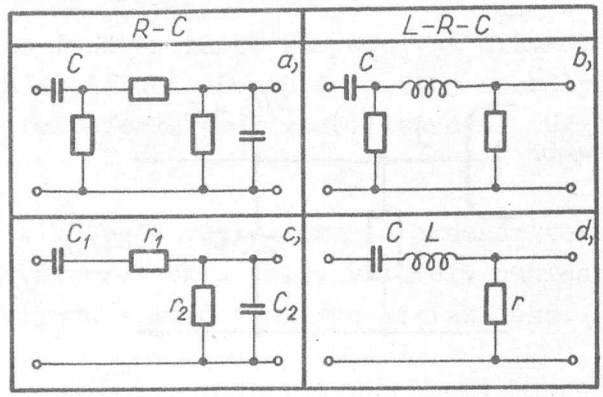
A formáló áramkör realizálása R-L-C elemekkel

A négypólus közelebbi meghatározása érdekében az eddigi teljes általánosság feladásával feltesszük, hogy az a 4. ábra szerinti elemekből van összeállitva.

Az itt szereplő kétpólusokra a megvalósithatóság érdekében azt kötjük ki, hogy azok egyszerüek legyenek, vagyis L-R illetve C-R elemek soros vagy párhuzamos kapcsolásából álljanak. Ezekből a feltevésekből a Függelék alapján két egymástól független kapcsolási elrendezésü négypólus származtatható le. Az 5. ábra a teljes impulzus-formáló áramkört tünteti fel, vagyis a négypólushoz csatlakoztatva a kisütendő kondenzátort is /C/ minden alkalommal felrajzoltuk. Észrevéve azt, hogy egy egyszerübb négypólus is kielégitheti az /5/ feltételt, / $Z_c \to \infty$ / a fenti megoldások két egyszerübb kivitele /5. ábra c és d/ is előállitható.



4. ábra



5. ábra

Megjegyezzük, hogy az 5. ábra nem tartalmazza a feladat összes lehetséges megoldását, mert a 4. ábránál összetettebb, több elemet tartalmazó, vagy alapvetően más felépitésü kiinduló négypólussal, vagy az 5. ábra szerinti négypólussal, de komplikáltabb kétpólus impedanciákkal /magasabb fok-számu polinomok/ további megoldásokat állithatunk elő. Ez esetben azonban a kétpólusok zérushelyei és pólusai között a gyakorlatban kellő biztonsággal alig megvalósitható kikötéseknek kell fennállniok.

Az áramkörök tervezése

A gyakorlati megvalósitás szempontjából a legkevesebb kapcsolási elemet tartalmazó áramkörök a legfontosabbak. Ezért a továbbiakban csak az 5.c. és d. ábra kapcsolási elemeit fogjuk meghatározni.

L.R.C. áramkör /5.d. ábra/

A tervezési képletek meghatározásához feltesszük, hogy τ_d és τ_i -vel adott, az /1/-gyel megegyező alaku kimenőjelet kivánunk előállitani. Ismertnek tételezzük fel továbbá r értékét, mert ez a tervezendő generátor kimenő ellenállásaként egyéb feltételekből rendszerint adott. Az áramkör kimenőfeszültsége:

$$u_{ki} = \frac{Crp}{p^2LC + pC + 1}\,u_o = \frac{1}{p^2 + p\frac{L}{r} + \frac{1}{LC}}\,U_o\frac{r}{L} \qquad /6/$$

/6/ és /1/ azonosságához nyilván /6/ nevezőjének gyökhelyeinek $-1/\tau_d$ és $-1/\tau_i$ értékünek kell lenniök. Ebből következik, hogy

$$\frac{1}{\tau_d} + \frac{1}{\tau_i} = \frac{r}{L} \qquad /7/$$

$$\tau_d\tau_i = LC \qquad /8/$$

Áramkörünk tehát a kivánt impulzust szolgáltatja, ha elemeit

$$L = r\frac{\tau_d\tau_i}{\tau_d+\tau_i} \qquad /9/$$

és

$$C = \frac{\tau_d+\tau_i}{r} \qquad /10/$$

értéküre választjuk.

Meghatározhatjuk azt is, hogy az ugrásfüggvény amplitudója, illetve a kondenzátor kezdeti feszültségének függvényében a kimenőjel csucsértéke mekkora. A kimenőfeszültség-idő függvény:

$$\mathcal{L}^{-1}\{u_{ki}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{U_0\frac{\tau_d+\tau_i}{\tau_i-\tau_d}\left(\frac{1}{p+1/\tau_i}-\frac{1}{p+1/\tau_d}\right)\right\} = U_0\frac{\tau_d+\tau_i}{\tau_i-\tau_d}\left(e^{-\frac{t}{\tau_i}}-e^{-\frac{t}{\tau_d}}\right) \qquad /11/$$

A függvény maximuma a $t_m = \frac{\tau_d\tau_i}{\tau_i-\tau_d}\ln\frac{\tau_i}{\tau_d}$ helyen van. Bevezetve az áramkör kihasználási fokára jellemző $K = \frac{U_{ki\,max}}{U_0}$ értéket, /11/-el átrendezve kapjuk:

$$K = \frac{x+1}{x-1}\xi \qquad /12/$$

ahol

$$x = \frac{\tau_i}{\tau_d} \qquad \xi = \left(1-\frac{1}{x}\right)x^{-\frac{1}{x-1}}$$

K értéke a vizsgált kapcsolásban kizárólag τ_i és τ_d függvénye, a kapcsolási elemek értékétől független.

– C-R áramkör /5.c. ábra/

A C-R áramkör tervezése az előzőtől némileg eltér: az áramköri elemek számának növekedése egy ujabb tervezési paraméter megválasztásában enged szabadkezet. Az előzőekben felvett τ_i és τ_d adatokon kivül felvehetjük a K kihasználási tényezőt is. Az áramkör kimenőfeszültsége:

$$u_{ki} = \frac{p\tau_{12}}{p^2\tau_1\tau_2+p(\tau_1+\tau_2+\tau_{21})+1}\,\frac{U_0}{p} \qquad /13/$$

ahol $\tau_1 = r_1C_1$; $\tau_2 = r_2C_2$; $\tau_{21} = r_2C_1$; $\tau_{12} = r_1C_2$

Ha /13/ gyökei ismét $-\frac{1}{\tau_i}$ és $-\frac{1}{\tau_d}$, akkor

$$\mathcal{L}^{-1}\{u_{ki}\} = U_0 \frac{1}{\tau_{12}} \frac{\tau_d \tau_i}{\tau_i - \tau_d} \left(e^{-1/\tau_i} - e^{-1/\tau_d}\right) \qquad /14/$$

A maximum helyét $/t_m/$ behelyettesitve és bevezetve a

$$\frac{\tau_d \tau_i}{\tau_i - \tau_d} \frac{1}{\tau_{12}} = k \qquad /15/$$

jelölést,

$$K = k\xi \qquad /16/$$

A tervezéshez még a /13/-ból nyerhető

$$\frac{1}{\tau_d} + \frac{1}{\tau_i} = \frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_{12}} \qquad /17/$$

és

$$\frac{1}{\tau_d \tau_i} = \frac{1}{\tau_1 \tau_2}. \qquad /18/$$

összefüggéseket is felhasználhatjuk. /15/,- /17/ és /18/-ból τ_2 -re a következő értéket nyerjük:

$$\tau_2 = \frac{\tau_1(1-k) + \tau_d(1+k) \pm \sqrt{[\tau_1(1-k) + \tau_d(1+k)]^2 - 4\tau_d\tau_i}}{2} \qquad /19/$$

τ_2 -re csak akkor kapunk pozitiv, valós mennyiséget, ha

$$k \leqq \frac{\sqrt{\tau_i} - \sqrt{\tau_d}}{\sqrt{\tau_i} + \sqrt{\tau_d}} \qquad /20/$$

Ez az eredmény fizikai szempontból egyáltalán nem meglepő, hiszen nyilván nem vehetünk fel K értékére 1-nél nagyobb számot.

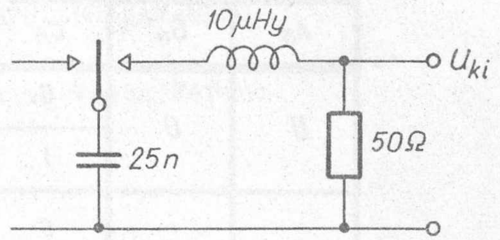
τ_2 ismeretében C_2 meghatározható, majd /15/ felhasználásával r_1 is. Ezek után /18/ alkalmas C_1 kiszámitására.

Értékelés

Az előzőekben megkerestük a felvetett probléma megoldására szolgáló általános megoldást, majd a gyakorlati szempontból számitásba jövő esetekben az áramköri elemek értékét is. A specializálást még tovább folytatva meghatároztuk egy NaJ szcintillátorhoz tartozó $\tau_d = 0{,}25\,\mu\text{sec}$ -mal és $\tau_i = 1\,\mu s$ -mal jellemzett fotomultiplieres részecskedetektor jeleit utánzó higanykapcsolós impulzusgenerátor elemeinek értékét /6. ábra/.

A kihasználási tényezőre $K = 0{,}784$ értéket kapunk. /100 V egyenfeszültségből 78 V-os impulzus!/ Ha ugyanezt a detektor-jelet az 5.c. ábra szerinti áramkörrel állitjuk elő, $K_{max} = 0{,}333$-t érhetünk csak el.

Ebből leszürhető az a tanulság, hogy nagy /100 V körüli/ kimenő impulzusamplitudók előállitására a 6. ábra szerinti kapcsolás jelentős előnyöket nyujt: kisebb és üzembiztosabban kapcsolható feszültséggel müködtethető, mint az ugyanakkora impulzusamplitudót szolgáltató C-R áramkör.



6. ábra

Egészen kicsiny /10 μV nagyságrendü/ kimenőjelek keltésére viszont a C-R áramkör látszik jobban alkalmazhatónak: K elegendően kicsire választásával a kapcsolgatott feszültség a kontakt potenciál értékénél lényegesen nagyobbra választható.

Meg kell jegyezni továbbá azt, hogy mindkét áramkör tartalmaz a C /ill. C_1 / kondenzátorral sorban egy ellenállást, tehát a levezetett összefüggések akkor is alkalmazhatók, ha erre a kondenzátorra egy véges belsőellenállásu generátorból adunk feszültség-ugrást. Igy tehát összefüggéseink - megfelelő körültekintéssel - akkor is használhatók, ha pl. egy katódkövető rácsára adott feszültségugrásból kivánunk detektor-jelet utánzó impulzust előállitani.

Függelék

A négypólus /4. ábra/ láncparaméterei:

$$P = \frac{Z_c + Z_a}{Z_c} \qquad R = Z_a \qquad G = -\frac{Z_a + Z_b + Z_c}{Z_b Z_c} \qquad S = -\frac{Z_a + Z_b}{Z_b}$$

Ezeket /5/-be behelyettesitjük:

$$u_{ki} = \frac{Z_b Z_c C U_0}{C_p Z_c (Z_a + Z_b) + Z_a + Z_b + Z_c}$$

Az egyes impedanciákat $Z_i = \frac{\mathcal{J}_s}{\mathcal{J}_n}$ alakunak feltételezve:

$$u_{ki} = \frac{C_s B_s A_n C U_0}{C_p (C_s A_s B_n + C_s B_s A_n) + A_s B_n C_n + B_s A_n C_n + C_s A_n B_n}$$

A fenti összefüggés /1/-gyel összevetve azonnal jelzi, hogy C_s, B_s és A_n fokszáma csak zérus lehet. A_s, B_n valamint C_n fokszámát abból a feltétel-ből határozhatjuk meg, hogy u_{ki} nevezőjének p másodfoku polinomjának kell lennie. A_s, B_n és C_n fokszáma az alábbi kombinációkban veheti fel a 0 vagy 1 értéket:

A_S	B_n	C_n	Z_a	Z_b	Z_c
0	0	0	—	—	—
		1	—	—	—
1	0	0	$pL+R$	R	R
		1	$pL+R$	R	$\frac{R}{1+p\tau}$
0	1	0	R	$\frac{R}{1+p\tau}$	R
		1	R	$\frac{R}{1+p\tau}$	$\frac{R}{1+p\tau}$
1	1	0	—	—	—
		1	—	—	—

7. ábra

A táblázat másik fele a lehetséges megoldásokhoz tartozó impedanciák jellegét tünteti fel.

Az 5.a. és 5.b. ábra csak az értelemszerüen különböző megoldásokat tünteti fel.

Irodalom

[1] Garvin,R.L.: Rev.Sci.Instr. 21, 9o3 /195o/

[2] Madarász Z.; Zámori Z.: KFKI Közl. 7.évf. 3.szám 1959.

[3] Fränz,K.; Müller,Kl.: Telefunken Zeitung 1962.márc.

[4] Lewis, Wells: Millimicrosecond Pulse Techniques, McGraw-Hill, 1954.

[5] Faistein: Amplifier Linearity. Nucl.Science Series Report No.20.p.175.

Érkezett 1962. okt. 4.

KFKI Közl. 10.évf. 5.szám, 1962.

LOGARITMIKUS ÁTLAGIMPULZUSSZÁM-MÉRŐ

Irta: Sebestyén Béla és Vajda Ferenc

Összefoglalás

A cikk egy kidolgozott logaritmikus átlagimpulzusszám-mérőt ismertet. A berendezés rendszertechnikai leirásán kivül kitér részletáramköri megoldásokra, a mérési pontosság és az alkalmazási lehetőségek kérdéseire.

1. Bevezetés

A logaritmikus beütésszámátlagmérők /rate meterek/ a modern nukleáris méréstechnika számos területén ma már nélkülözhetetlen alapmüszerként szerepelnek. Legfontosabb alkalmazási területük egyrészt ott van, ahol nagymértékben, több nagyságrendet változik a mérendő mennyiség, ill. az ezzel arányos beütésszám és ezt kell folyamatosan mérni és a mérési eredményeket regisztrálni, másrészt, ahol ez az időnek exponenciális függvénye.

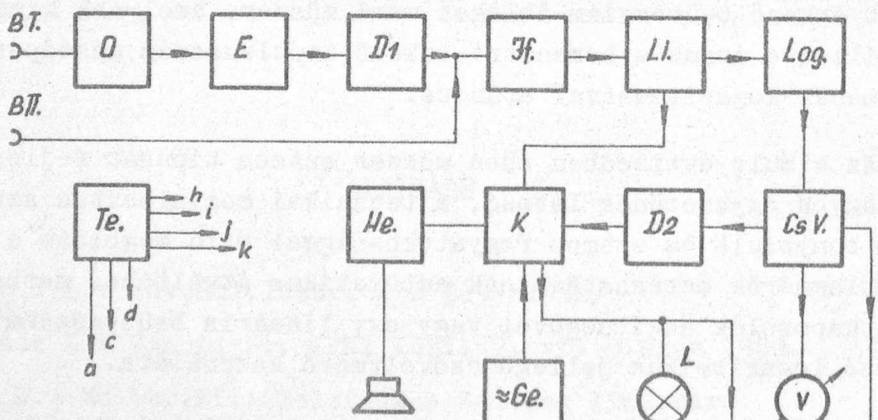
A logaritmikus beütésszámátlagmérő egy olyan speciális, az időegység alatt érkező beütésszám-átlagot mérő müszer, amelynek kimenő feszültsége, illetve árama a bemenetre érkező impulzusszám másodpercenkénti átlagos számának logaritmusával arányos.

Az elmult évtizedben ezen müszer számos tipusát fejlesztették ki. Egyik nagyon egyszerünek látszó, a technikai megvalósitás szempontjából azonban bonyolult és számos fogyatékossággal biró megoldás a lineáris beütésszámátlagmérők méréshatárainak automatikus átváltása, mechanikus rendszerü átkapcsolók segitségével vagy egy lineáris beütésszámátlagmérő és azt követő logaritmikus jellegü csővoltmérő használata.

Elterjedt megoldás lineáris beütésszámátlagmérők valamilyen szokásos kapcsolásának alkalmazása logaritmikus jellegü kisütő elem felhasználásával, amit pl. egy induló áram tartományban müködtetett vákuumdióda realizálhat. A logaritmikus beütésszámátlagmérők fejlesztésében jelentős fordulatot eredményezett az automatikus mérési intervallum-váltás módszerének kidolgozása. Ez a módszer - amelyet az ismertetett készüléknél is felhasználtunk - azon alapszik, hogy a mérőberendezésben a bemenő frekvencia növelésével egyes áramkörök fokozatosan telitésbe jutnak, mig mások müködésbe jönnek. A módszer legnagyobb erénye abban rejlik, hogy nem használ fel nonlinearis elemeket és a benne szereplő aktiv elemek csak mint elektronikus kapcsolók dolgoznak. A logaritmikus átlagimpulzusszámmérők elvi müködésének, tulajdonságainak részletesebb összehasonlitásával egy további cikk keretében fogunk foglalkozni.

A jelen közelményben ismertetünk egy komplett átlagimpulzusszámmérő rendszert, melyet a KFKI Elektronikus Laboratóriumában hoztunk létre. Tudomásunk szerint Magyarországon ez az első kidolgozott logaritmikus átlagimpulzusszám-mérő. A mérőberendezést atomfizikai mérések kapcsán hoszszabb ideje igénylik. Célszerü lett volna az egész berendezést tranzisztorizált kivitelben kidolgozni, de éppen, mert az igény kielégitése sürgős volt s mert a logaritmikus áramkörrel, de a tranzisztorokkal kapcsolatos hazai tapasztalatok is szerények, hibrid megoldás született. A kényesebb áramkörök csövekkel, mig a kevésbé kényesek tranzisztorokkal épülnek fel.

Az alábbiakban mindenekelőtt a berendezés felépitését ismertetjük, majd a részletáramköri megoldásokra térünk ki. Bár a stabilizált tápegység nem tartozik szorosan a mérőrendszerhez, mégis érintjük néhány - szerintünk a technikai alkalmazások szempontjából érdekes - uj megoldása miatt.



1. ábra

O :bemenő osztó
E :erősitő
D_1:amplitudó diszkriminátor
J_f:jelformáló kör
Li:limiter
Log.:logaritmikus integráló
CsV :csővoltmérő
D_2: egyenáramu diszkriminátor
K : kapu kör
Ge: hangfrekvenciás generátor
He: hangfrekvenciás erősitő
Te: tápegység
L : jelzőlámpa

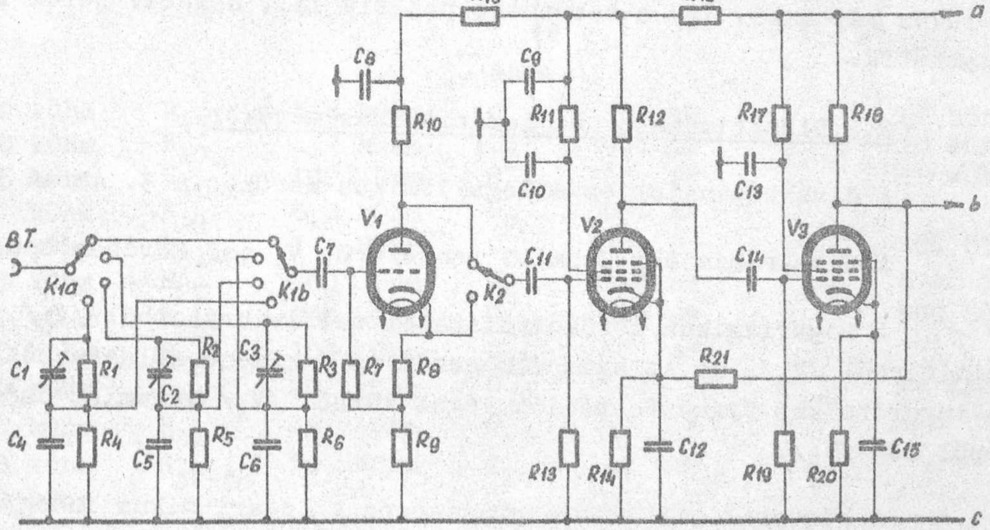
2. A logaritmikus átlagimpulzusszám-mérő felépitése

A müszer felépitését az 1. ábra blokksémáján mutatjuk be. A blokkséma jelöléseinek magyarázata az ábra alján látható. Két bemenete van, melyek közül B_{II} közvetlenül a mérőkörre kapcsolódik, mig a B_I-frekvencia-kiegyenlitett osztó, szélessávu impulzuserősitő és diszkriminátor közbeiktatásával. Maga a mérőrendszer az /1:2/ arányu frekvenciaosztóból, az amplitudó limiterből, a logaritmikus körből és az azt követő csővoltmérőből áll.

A mérőkörhöz riasztókör csatlakozik, mely szintmérőből, kapuáramkörből, hangfrekvenciás generátorból, hangfrekvenciás erősitőből, valamint hang- és fényindikátorból áll.

Az eddigieket stabilizált tápáramforrás egésziti ki.

A müszer négy nagyságrendnyi mérési tartományt ölel fel. Alkalmas 1-10000 imp/sec terjedő átlagimpulzusszám mérésére.



2. ábra

R_1	1 MOhm	R_{12}	5,6 kOhm	C_{1-2-3}	5-25 pF	V_1	ECC 85
R_{2-3}	1,1 MOhm	R_{13}	430 kOhm	C_4	100 pF	V_{2-3}	E 180 F
R_4	120 kOhm	R_{14}	56 Ohm	C_5	1 nF		
R_5	12 kOhm	R_{15}	2,7 kOhm	C_{6-7}	10 nF		
R_6	1 kOhm	R_{16}	1 kOhm	C_{8-9}	32 µF		
R_7	430 kOhm	R_{17}	33 kOhm	C_{10}	0,1 µF		
R_8	220 Ohm	R_{18}	5,6 kOhm	C_{11}	10 nF		
R_9	1,8 kOhm	R_{19}	430 kOhm	C_{12}	2 nF		
R_{10}	2,2 kOhm	R_{20}	75 Ohm	C_{13}	0,1 µF		
R_{11}	33 kOhm			C_{14}	10 nF		
				C_{15}	4,7 nF		

Az impulzusok beérkezése, hangszórón át hallható. A berendezés beállitható ugy, hogy egy előre meghatározott impulzusszám/időegység értéknél fény és hangjelet ad ki, K_{II} kimenetére egy - a készüléktől távol elhelyezett - riasztóeszköz csatlakoztatható, K_I kimenetéről szintiró, vagy távolban elhelyezett más indikátor müködtethető.

A berendezés rendszere által nyujtott lehetőségekről a részletáramkörök ismertetése után, az alkalmazási kérdések kapcsán adunk áttekintést.

2.1. <u>Szélessávu erősitő</u>

A szélessávu erősitő a szokásos megoldásokhoz képest uj elemet nem tartalmaz /2. ábra/. Bemenetén 1:1, 1:10, 1:100 amplitudó osztási lehetőséget adó frekvenciakiegyenlitett osztó helyezkedik el. Ennek és a diszkriminátor kör szabályzó potenciométerének segitségével /3. ábra P_1/ a diszrkiminációs szint 15 mV - 15 V között szabályozható. Az erősités értéke 100. Az erősités pontos értékét negativ visszacsatolással állitjuk be, mely egyuttal a stabilitást is biztositja. Az erősitő polaritása a K_2 kapcsoló révén váltható. Igy a bemenetre pozitiv ill. negativ jelek is csatlakoztathatók.

<u>2.2 Diszkriminátor és logaritmikus mérőkör</u>

A diszkriminátor és a logaritmikus mérőkör a 3. ábrán látható.

A diszkriminátor Schmitt rendszerü, V_1 cső körében épül fel.

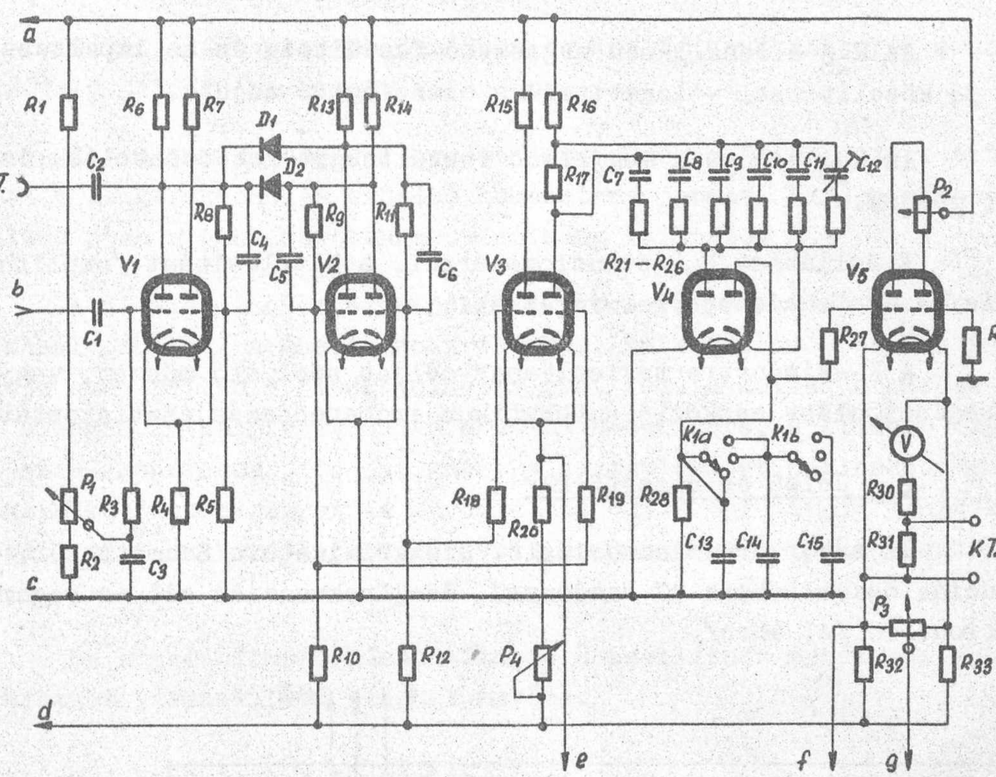
A logaritmikus mérőkör bistabil multivibrátorból /V_2/, amplitudólimiterből /V_3/, az átlagimpulzusszám és a kimenő átlagfeszültség közötti logaritmikus transzformációt végző körből /V_4/ valamint csővoltmérőből épül fel /V_5/.

A bistabil multivibrátor szerepe a logaritmikus integráló kör részére a jelek megfelelő szélességüre formálása.

A multivibrátor minden impulzus hatására átbillen, utána olyan impulzussort kapunk, melyben az impulzusok átlagidőtartama a bejövő jel átlagimpulzusszámának reciproka.

Ilyen módon biztositjuk, egyrészt a logaritmikus integráló kör kondenzátorainak feltöltéséhez szükséges időt, ugyanakkor elkerülve azt, hogy nagy impulzusszám esetén lényeges számlálási veszteséget szenvedjünk.

A mérőkör pontossága az impulzus amplitudó állandóságának függvénye. Az amplitudót tehát normalizálni kell. Ezt a feladatot végzi a limiter. A limiter által kiadott impulzusok talp-pontját a cső null-rácsfeszültséghez tartozó árama, csucsértékét a tápfeszültség határozza meg.



3. ábra

R_1	200 kOhm	R_{15-16}	5,6 kOhm	C_{1-2}	10 nF	P_1	22 kOhm
R_2	150 kOhm	R_{17}	1,2 kOhm	C_3	0,1 μF	P_{2-3}	10 kOhm
R_3	0,5 MOhm	R_{18-19}	100 Ohm	C_{4-5-6}	33 pF	P_4	4 kOhm
R_4	22 kOhm	R_{20}	6,8 kOhm	C_7	690 nF		
R_5	220 kOhm	R_{21-26}	1 MOhm	C_8	40 nF	V_{1-2-3}	ECC 85
R_{6-7}	7,5 kOhm	R_{27}	100 Ohm	C_9	3,4 nF	V_4	6 AL 5
R_8	200 kOhm	R_{28}	250 kOhm	C_{10}	340 pF	V_5	ECC 85
R_9	240 kOhm	R_{29}	100 Ohm	C_{11}	40 pF		
R_{10}	110 kOhm	R_{30}	20 kOhm	C_{12}	5-25 pF	D_{1-2}	OA 1161
R_{11}	240 kOhm	R_{31}	15 Ohm	C_{13}	4 μF		
R_{12}	110 kOhm	R_{32-33}	22 kOhm	C_{14}	16 μF		
R_{13-14}	10 kOhm			C_{15}	20 μF		

A transzformációt végző kör a [2] és [3] közötti átmenet. Az R_{28} ellenálláson át a V_4 dióda anódköre RC elemei átlag áramainak összege folyik. A körnek az a jellegzetessége, hogy valamely RC-tagjától származó átlagáram komponens az impulzusszám növelésével telitési értékhez tart. A méréstartomány első nagyságrendjében /dekádjában/ a leghosszabb időállandóju RC-tag árama dominál, majd ez a dekád végén telitésbe megy át s előtérbe lép a sorra következő TC tag, és igy tovább.

Az R_{28} ellenállással parallel, változtatható értékü kondenzátor sor fekszik. Ezek állitásával a beállási sebesség ill. statisztikus eloszlásu impulzusok esetén a statisztikus ingadozás mértéke szabályozható.

Az R_{28} ellenálláson megjelenő feszültség és az impulzusszám között - jó közelitéssel - logaritmikus összefüggés adódik.

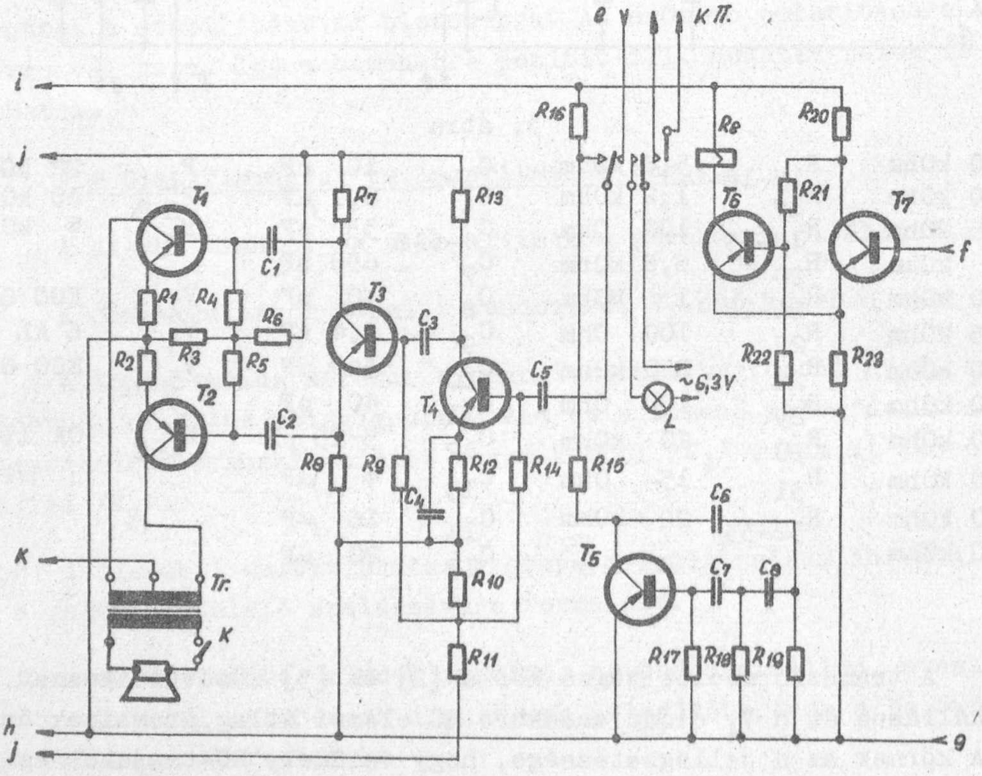
Az R_{28} kapcsain megjelenő feszültséget katódcsatolásu csővoltmérővel mérjük.

A nullázást P_2-potenciométerrel, a hitelesitést /amplitudószabályozás/ P_4-potenciométerrel végezzük.

A K_I-kimenetre távleolvasás célját szolgáló müszer, vagy folyamatos regisztrálást eszközlő automatikus iróberendezés csatlakoztatható.

2.3 Jelző és riasztó kör

Ez a kör tranzisztorizált. Diszkriminátora Schmitt-kör, hangfrekvenciás oszcillátora RC-rendszerü. Hangfrekvenciás elő és végerősitője konvencionális /4. ábra/.



4. ábra

R_{1-2}	15	Ohm	R_{10}	470	Ohm	R_{17}	1	MOhm	C_{1-2}	100	μF
R_3	220	Ohm	R_{11}	10	kOhm	R_{18}	10	kOhm	C_3	25	μF
R_4	10	kOhm	R_{12}	100	Ohm	R_{19}	3,3	kOhm	C_4	100	μF
R_5	22	kOhm	R_{13}	15	kOhm	R_{20}	2	kOhm	C_5	0,1	μF
R_6	62	kOhm	R_{14}	22	kOhm	R_{21}	5,1	kOhm	C_6	30	nF
R_{7-8}	10	kOhm	R_{15}	47	kOhm	R_{22}	1	kOhm	C_7	5	nF
R_9	33	kOhm	R_{16}	12	kOhm	R_{23}	100	Ohm	C_8	10	nF
									T_{1-5}	P 13	B
									T_{6-7}	P 15	

Normál üzemállapotban a Schmitt-kör T_6 tranzisztorán áram folyik és az Re jelü jelfogó meghuzott állapotban van.

A limiter katódjáról levett impulzusok a jelfogó zárt érintkezőpárján át a hangfrekvenciás erősitő bemenetére jutnak. Minden második bemenő impulzus után a hangszóróben koppanó hang hallható.

A diszkriminátor szintjét a 3. ábra P_3 potenciométerének állitásával szabályozhatjuk meghatározott értékre. Amikor a csővoltmérő feszültségszintje ezen tullép a diszkriminátor átbillen. A kollektorkörben fekvő jelfogó elenged, a hangfrekvenciás erősitő bemenetére, a limiter impulzusai helyett az RC-generátor jele jut, mely a hangszórón át hallható. Ugyanakkor még a másik két kontaktuspár is záródik. Az egyik egy lámpát gyujt ki, a másik pedig egy - a berendezéstől távol elhelyezett - riasztó eszközt müködtethet.

Ha a csővoltmérő kimenőszintje a beállitott érték alá esik, a diszkriminátor visszabillen alaphelyzetébe.

2.4 Stabilizált tápegység

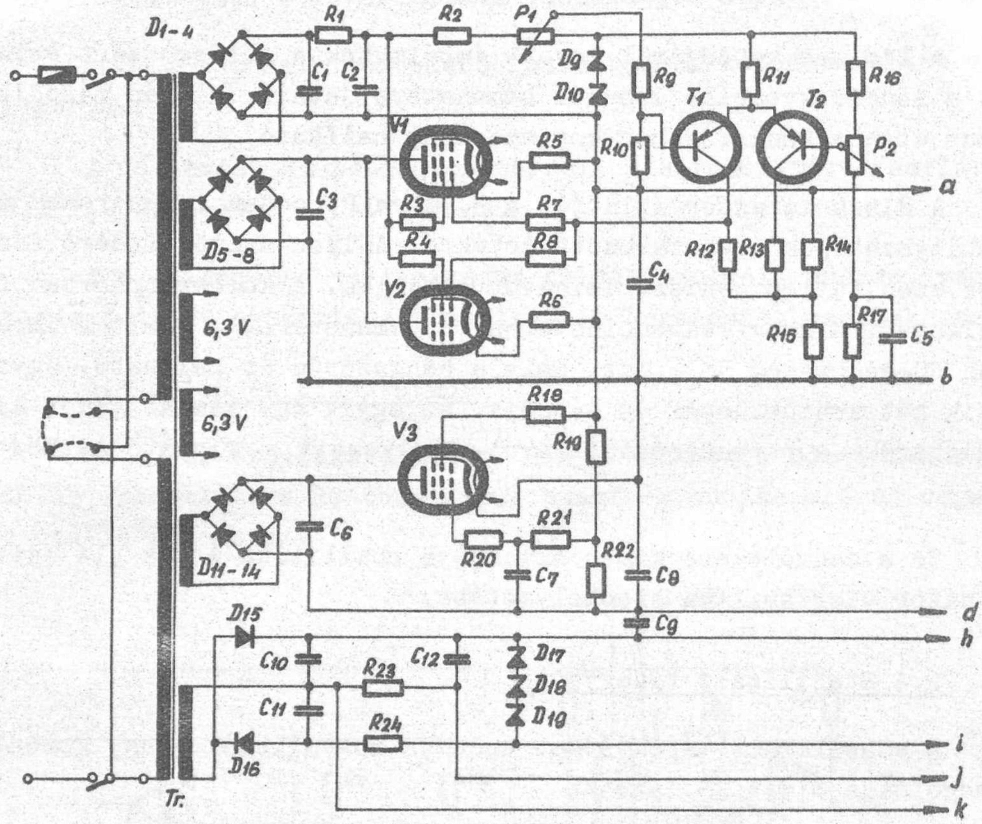
A stabilizált tápegységet érdemes megemliteni - ugy gondoljuk - eredeti megoldása miatt /5. ábra/.

Két részből, egy 250 V-os és egy 100 V-os részből áll, egymással soros egységben.

A 250 V-os egység hibrid, melyben a soros szabályzó elemek csövek, a szabályzó erősitő pedig tranzisztorokból épül fel. A csekély kollektorfeszültségü tranzisztorok alkalmazása azáltal válik lehetővé, hogy a kimenőfeszültség változását nem a negativ ponthoz viszonyitva, hanem a soros cső katódjához viszonyitva regisztráljuk. A tranzisztorokat külön forrásról tápláljuk, melyet a referenciafeszültség és a soros szabályzó csövek árnyékolórács-feszültségének előállitására is használunk. Referenciaelemként zener diódák szolgálnak, a P_1-potenciométer a szabályzóerősitő részére hálózat irányából jövő kompenzációs feszültséget szolgáltat.

A 100 V-os rész felépitésénél erősitőt nem alkalmaztunk. Referenciafeszültségként a 250 V-os tápegységet használtuk, s ugyanez szolgáltat stabilizált tápfeszültséget a soros cső árnyékolórácskörének is. Ennek a feszültségnek stabilitása a soros körben biztositja az alkalmazott pentóda nagy belső ellenállásának érvényesüléséből származó előnyöket.

A tranzisztor-körök ellátására szolgáló rész az ábra legalján látható. A diszkriminátor és RC-oszcillátor részére a stabilizált feszültséget zener-diódák biztositják.



5. ábra

R_1	1 kOhm	R_{14}	4,7 kOhm	C_{1-4}	16 μF	V_{1-3}	EL 84
R_2	20 kOhm	R_{15}	75 kOhm	C_5	0,1 μF		
R_{3-4}	1 kOhm	R_{16}	8,2 kOhm	C_6	16 μF	T_{1-2}	P 15
R_{5-6}	33 Ohm	R_{17}	220 kOhm	C_7	20 nF	D_{1-8}	DGC 27
R_{7-8}	1 kOhm	R_{18}	1 kOhm	C_8	16 μF	D_{9-10}	Z 7
R_9	4,7 kOhm	R_{19}	300 kOhm	C_{9-12}	100 μF	D_{11-14}	DGC 27
R_{10}	1 kOhm	R_{20}	1 kOhm			D_{15-16}	DGC 24
R_{11}	12 kOhm	R_{21-22}	100 kOhm	P_1	1 kOhm	D_{17-19}	Z 6
R_{12-13}	22 kOhm	R_{23-24}	470 Ohm	P_2	4,7 kOhm		

2.5 Jellemzők:

Az alábbiakban összefoglaljuk a berendezés jellemzőit:

1. Méréshatár $1 - 10^4$ c/s
2. Időállandók 1-5-10 sec /átkapcsolható/

3. A bemenő jel adatai

B_I bemenet:	
a jel polaritása /változtatható/	negativ ill. pozitiv
a jel amplitudója	15 mV
B_{II} bemenet:	
a jel polaritása	negativ
a jel amplitudója	20 V
4. Diszkriminációs szint beállitható	15 mV - 15 V
5. Felbontóképesség	10 μsec
6. A bemenő jel szélessége	0,5 - 5 μsec
7. A mérés pontossága:	
a/ beépitett müszerrel	$\pm$ 10 %
b/ szintiróval	$\pm$ 5 %
8. Időbeli stabilitás	0,5%/8 óra
9. A szintiró kimenet kimenő ellenállása	15,5 ohm

10. A szintjelző müködési határai:
a kimenő áram 20 - 100 % között müködik.

11. Fogyasztás	88 VA

3. Alkalmazási lehetőségek

A logaritmikus átlagimpulzusszám-mérők alkalmazási lehetőségei közül a következőket emlitjük meg:

radioaktiv szennyezésmérés,
radioaktiv szint-regisztrálás,
reaktorok periódus idejének mérése,
izotópok felezési idejének mérése,
anyagvastagságmérés.

A jelzőberendezés segitségével különösen könnyen felkutathatunk radioaktiv szennyezéseket. A szintmérő segitségével ellenőrizhetjük valamilyen környezet radioaktiv szintjét. A küszöbérték tullépésekor riasztó jelzést kapunk.

Megjegyezzük, hogy a felsorolt alkalmazások egyik-másikához a berendezés járulékos készülékekkel való kiegészitése szükséges.

Köszönetünket nyilvánitjuk Bürger Gáborné kollégánknak a részletáramköri számitások és mérések, Réday István technikusnak pedig a szerelési munkák lelkiismeretes végzéséért.

Irodalom

[1] Cooke - Yarborough,E.H.;Pulsford,E.W. : Proc.IEE 98. 1951 p.196.

[2] Lichtenstein,R.M., J.Appl.Phys. 28.Sept.1957. p.984.

[3] De Bolt,H.E.: IRE Trans. on Nuclear Science June 1959 p.74.

[4] 148.416 sz. Magyar Szabadalom

[5] 148.417 sz. Magyar Szabadalom

Érkezett 1962. jul. 26.

KFKI Közl. 10. évf. 5. szám, 1962.