

Wolff
E

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
KÖZPONTI FIZIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK
KÖZLEMÉNYEI

10. KÖTET

4. SZÁM

Györgyi Géza

AZ ATOMMAGOK FORGÁSI ÁLLAPOTAIRÓL

Szemináriumi jegyzet



1962

BUDAPEST

33.574

MTA KFKI Könyvtár



33.571

AZ ATOMMAGOK FORGÁSI ÁLLAPOTAIRÓL

Szemináriumi jegyzet

Összeállította:

Györgyi Géza

1977

2015

KÖZPONTI TUDOMÁNYOS INTÉZET KÖNYVTÁRA

Leh. szám: 33.571. alatt.

Budapest, 1967. év. aug. hó 24. n

Srl

1988

E L Ő S Z Ó

Ez a kiadvány 1962 telén - tavaszán tartott szemináriumok anyagát tartalmazza. A szeminárium alapjául Dr. J.P.Elliotnak a rochesteri egyetemen tartott előadásaiból készült, M.H.Macfarlane által kidolgozott jegyzet szolgált.

Ebben a füzetben a forgási állapotok fenomenológikus leírása található meg. A deformált magok belső szerkezetének elmélete, a mikroszkópikus leírás, melynek célja: a fenomenológikus forgási modell paramétereinek értelmezése, egy később kiadásra kerülő füzet tárgyát képezi.

1. Matematikai előkészítés

a/ Az állapotfüggvény forgástranszformációi. A forgási állapotok tárgyalásának előkészítéseképpen felidézünk néhány alapvető összefüggést, melyek a kvantummechanikai rendszerek állapotfüggvényeinek a koordináta-rendszer elforgatásakor bekövetkező megváltozását meghatározzák.

Vessük alá koordináta-rendszerünket meghatározott elforgatásnak. A tér valamely rögzített P pontjának koordinátáit az eredeti S rendszerben jelölje x, y, z , az elforgatással nyert új S' rendszerben pedig x', y', z' . Az adott elforgatáshoz egy F operátort rendelünk, melynek hatását az x, y, z koordinátákra az

$$\begin{aligned}x' &= Fx, \\y' &= Fy, \\z' &= Fz,\end{aligned}\quad / 1 /$$

képletek definiálják. Az x, y, z koordináták tetszés szerinti $f(x, y, z)$ függvényére F definícióját a következőképpen terjesztjük ki:

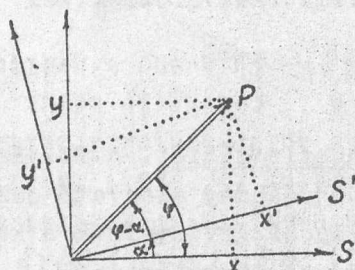
$$Ff(xyz) = f(x'y'z'). \quad / 2 /$$

Látható, hogy ha ez utóbbi általános képletbe rendre az $f = x, y, z$ speciális függvényeket helyettesítjük, megkapjuk az /1/ alatti speciális transzformációs képleteket. Az F operátor /2/-vel definiált hatása szavakban így fejezhető ki: az x, y, z változók $f(xyz)$ függvényét az F operátor az x', y', z' vesszős változóktól ugyanolyan alakban függő $f(x'y'z')$ függvénybe viszi át. - Valamely O operátorra F hatását az

$$O' = FO F^{-1} \quad / 3 /$$

transzformációs képlet adja meg.

A F operátor tényleges alakját a legkönnyebben polárkoordináták bevezetésével határozhatjuk meg. Először egy speciális forgást veszünk szemügyre: a koordináta-rendszernek a Z -tengely körül való α szögű elforgatását /1. ábra/.



1. ábra

Ekkor írható:

$$F f(r, \vartheta, \varphi) = f(r, \vartheta, \varphi - \alpha) = e^{-\alpha \frac{\partial}{\partial \varphi}} f(r, \vartheta, \varphi) = e^{-\alpha \frac{i}{\hbar} L_z} f(r, \vartheta, \varphi).$$

Itt L_z egy részecske $\underline{L} = -i\hbar \underline{r} \times \underline{grad}$ pályamomentum-operátorának Z -komponense. Egy általános helyzetű $\underline{n}$ egységvektor által kijelölt irányba mutató forgástengely esetén F kitevőjében $\underline{L}$ -nek a forgástengelyre vetett vetülete, az $\underline{L} \underline{n}$ skalárszorzat szerepel:

$$F = e^{-\alpha \frac{i}{\hbar} \underline{L} \underline{n}} \quad / 4 /$$

A legáltalánosabb esetben, ha nem egyetlen részecskével van dolgunk, $\underline{L}$ helyét /4/-ben a rendszer teljes $\underline{N}$ impulzusmomentuma foglalja el. Az F operátor ekkor a következő alakú:

$$F = e^{-\alpha \frac{i}{\hbar} \underline{N} \underline{n}} \quad / 5 /$$

Az eddigiekben a koordináta-rendszer valamely általános elforgatásának jellemzésére az $\underline{\alpha} = \alpha \underline{n}$ forgásvektor abszolútértékét, az elforgatás α szögét, valamint a forgásvektor irányát kijelölő $\underline{n}$ egységvektort használtuk. Célszerűbb azonban a hagyományos α, β, γ Euler-szögek használata.

Az Euler-szögek definíciója a következő. Az S kezdeti helyzetű koordináta-rendszernek az S' végső helyzetbe vezető elforgatását a következő három lépésben végezzük el:

- (i) $S \rightarrow S_1$: α szögű forgatás az S rendszer z -tengelye körül,
 - (ii) $S_1 \rightarrow S_2$: β szögű forgatás az S_1 rendszer y_1 -tengelye körül,
 - (iii) $S_2 \rightarrow S'$: γ szögű forgatás az S_2 rendszer z_2 -tengelye körül.
- / 6 /

A definíció alapján világos, hogy β és α jelentése: az S' rendszer z' -tengelyének polárszöge és azimutja. A γ Euler-szög az y' -tengelynek a csomóvonallal /vagyis: az xy sík és $x'y'$ sík metszéspontjával/ bezárt szöge. - Határozzuk meg most az $F(\alpha\beta\gamma)$ operátort, amely az S -beli

x, y, z változók valamely $f(xyz)$ függvényét az S' -beli x', y', z' változók $f(x'y'z')$ függvényébe viszi át:

$$F(\alpha\beta\gamma)f(xyz)=f(x'y'z').$$

Az $F(\alpha\beta\gamma)$ operátor az Euler-szögek /6/ definíciójának következményeképpen az egymás után következő α, β, γ szögű forgásokhoz tartozó $F(\alpha)$, $F(\beta)$, $F(\gamma)$ operátorok szorzata alakjában állítható elő:

$$F(\alpha\beta\gamma)=F(\gamma)F(\beta)F(\alpha) \quad / 7 /$$

Itt /5/ és /6/ szerint

$$F(\alpha)=e^{-\alpha \frac{i}{\hbar} N_z}, \quad /8a/$$

$$F(\beta)=e^{-\beta \frac{i}{\hbar} N_{y_1}}, \quad /8b/$$

$$F(\gamma)=e^{-\gamma \frac{i}{\hbar} N_{z_2}}, \quad /8c/$$

s így

$$F(\alpha\beta\gamma)=e^{-\gamma \frac{i}{\hbar} N_{z_2}} e^{-\beta \frac{i}{\hbar} N_{y_1}} e^{-\alpha \frac{i}{\hbar} N_z}. \quad / 9 /$$

E kifejezés gyakorlati használhatósága szempontjából hátrányos, hogy a szereplő impulzuszórák-operátorok három különböző koordinátarendszerre

(S_2, S_1, S) vannak vonatkoztatva. Ezért a /9/ kifejezést oly módon alakítjuk át, hogy a benne szereplő operátorok mindegyike ugyanazon koordinátarendszerre: a kiindulási S rendszerre vonatkozzék. Ez az átalakítás a /3/ transzformációs képlet alkalmazásával végezhető el. Figyelembe véve, hogy az $S \rightarrow S_1$ forgáshoz rendelet operátort /3a/, az $S_1 \rightarrow S_2$ -höz rendelet operátort /8b/ alja, írhatjuk:

$$e^{-\gamma \frac{i}{\hbar} N_{z_2}} = F(\beta) e^{-\gamma \frac{i}{\hbar} N_{z_1}} F^{-1}(\beta) = e^{-\beta \frac{i}{\hbar} N_{y_1}} e^{-\gamma \frac{i}{\hbar} N_{z_1}} e^{\beta \frac{i}{\hbar} N_{y_1}},$$

$$e^{-\gamma \frac{i}{\hbar} N_{z_1}} = F(\alpha) e^{-\gamma \frac{i}{\hbar} N_z} F^{-1}(\alpha) = e^{-\alpha \frac{i}{\hbar} N_z} e^{-\gamma \frac{i}{\hbar} N_z} e^{\alpha \frac{i}{\hbar} N_z},$$

$$e^{-\beta \frac{i}{\hbar} N_{y_1}} = F(\alpha) e^{-\beta \frac{i}{\hbar} N_y} F^{-1}(\alpha) = e^{-\alpha \frac{i}{\hbar} N_z} e^{-\beta \frac{i}{\hbar} N_y} e^{\alpha \frac{i}{\hbar} N_z}.$$

Küszöböljük ki ezen összefüggések segítségével /9/-ből rendre az S_2 és az S_1 rendszerre vonatkoztatott impulzusmomentum-operátorokat. Ekkor $F(\alpha\beta\gamma)$ -t a következő alakban kapjuk:

$$F(\alpha\beta\gamma) = e^{-\alpha \frac{i}{\hbar} N_z} e^{-\beta \frac{i}{\hbar} N_y} e^{-\gamma \frac{i}{\hbar} N_x} \quad /10/$$

Az áttérés /9/-ről /10/-re természetesen tisztán geometriai-kinematikai természetű igazságot takar, mely szemléletes geometriai megfontolással ugyan-csak igazolható.

Mint /10/-ből látható, $F(\alpha\beta\gamma)$ az N_z , N_y impulzusmomentum-operátorokból épül fel. Ezek az impulzusmomentum-operátorok ismert módon az impulzusmomentum négyzetének és vetületének valamely ψ_{jm} sajátfüggvényére alkalmazva azt az impulzusmomentum ugyanazon j értékével jellemzett ψ_{jm} függvények lineáris kombinációjába viszik át. Ugyanez a belőlük felépített $F(\alpha\beta\gamma)$ -ről is elmondható. Irhatjuk tehát:

$$F(\alpha\beta\gamma) \psi_{jm} = \sum_{m'} \psi_{jm'} (jm' | F(\alpha\beta\gamma) | jm). \quad /11/$$

Itt a $(jm' | F(\alpha\beta\gamma) | jm) = (\psi_{jm'}, F(\alpha\beta\gamma) \psi_{jm})$ jelölést alkalmaztuk. Defináljuk most Wigner nyomán a $D_{m'm}^j(\alpha\beta\gamma)$ forgásmatrixot a

$$D_{m'm}^{j*}(\alpha\beta\gamma) = (jm' | F(\alpha\beta\gamma) | jm) \quad /12/$$

képlettel. Megemlítjük, hogy az itt $D_{m'm}^j(\alpha\beta\gamma)$ -val jelölt mennyiség Rose jelölésével a $D_{m'm}^{j*}(\alpha\beta\gamma)$, Edmonds jelölésével a $D_{m'm}^{j*}(-\alpha-\beta-\gamma)$ alakban írható fel.

A /11/ és /12/ képletek alapján írható:

$$\psi_{jm}^{(\alpha\beta\gamma)} = \sum_{m'} \psi_{jm'} D_{m'm}^{j*}(\alpha\beta\gamma), \quad /13/$$

ahol a

$$\psi_{jm}^{(\alpha\beta\gamma)} = F(\alpha\beta\gamma) \psi_{jm} \quad /14/$$

jelölést alkalmaztuk. Itt a korábban /pl. /2/ alatt/ használt vesszős jelölés helyett az $\alpha\beta\gamma$ Euler-szögek felső indexként való alkalmazásával jelezzük, hogy $\psi^{(\alpha\beta\gamma)}$ az eredeti S koordinátarendszerből $\alpha\beta\gamma$ Euler-szögű forgással nyert S' rendszerre vonatkoztatott /vesszős/ változók függvénye. A $\psi^{(\alpha\beta\gamma)}$ függvény a vesszős változóktól ugyanolyan alakban függ, mint ψ a vesszőtlen változóktól.

A /14/ jelölés bevezetésével előzetesen igazoltnak vettük, hogy a ψ_{jm} -re érvényes $N_z \psi_{jm} = \hbar m \psi_{jm}$ sajátértékegyenlettel egyidejűleg a $\psi_{jm}^{(\alpha\beta\gamma)}$ függvényre fennáll az $N_z \psi_{jm}^{(\alpha\beta\gamma)} = \hbar m \psi_{jm}^{(\alpha\beta\gamma)}$ sajátértékegyenlet, m ugyanazon értéke mellett. Ez valóban így van és abból következik, hogy $\psi_{jm}^{(\alpha\beta\gamma)}$ és ψ_{jm} azonos alakú függvényei a megfelelő (S' ill. S) rendszerre vonatkoztatott /vesszős, ill. vesszőtlen/ változóknak. De eljárhatunk bizonyítás céljából úgy is, hogy az

$$N_z \psi_{jm} = \hbar m \psi_{jm} \quad /15/$$

sajátértékegyenletet megszorozzuk F -fel és N_z és ψ_{jm} közé beírjuk az egységoperátort $F^{-1} F$ alakban. A /3/ képlet szerint $F J_z F^{-1} = J_z$; /14/-et figyelembe véve a kívánt

$$N_z \psi_{jm}^{(\alpha\beta\gamma)} = \hbar m \psi_{jm}^{(\alpha\beta\gamma)} \quad /16/$$

sajátértékegyenletet kapjuk.

A /12/ alatt definiált forgásmatrix természetesen unitér. A /13/ összefüggést $[D^{j*}(\alpha\beta\gamma)]_{m'm} = D_{m'm}^j(\alpha\beta\gamma)$ -val megszorozva majd m -re összegezve kapjuk:

$$\psi_{jm'} = \sum_m D_{m'm}^j(\alpha\beta\gamma) \psi_{jm}^{(\alpha\beta\gamma)}. \quad /17/$$

A $D_{m'm}^j(\alpha\beta\gamma)$ matrixelemeknek, mint α, β, γ függvényeinek explicit alakja /10/ és /12/ alapján meghatározható. Az F operátor /10/ kifejezését /12/-be helyettesítve és /15/-öt felhasználva kapjuk:

$$D_{m'm}^j(\alpha\beta\gamma) = e^{im\alpha} d_{m'm}^j(\beta) e^{im\gamma}, \quad /18/$$

ahol

$$d_{m'm}^j(\beta) = (jm' | e^{-\beta \frac{i}{\hbar} N_y} | jm)^*.$$

A $d_{m'm}^j(\beta)$ függvények meghatározásának részleteire itt nem térünk ki. Wigner ezt a feladatot csoportelméleti módszerek felhasználásával végezte el. Az eredmény:

$$d_{m'm}^j(\beta) = [(j+m')!(j+m)!(j-m)!(j-m)!]^{1/2} \cdot$$

/19/

$$\cdot \sum_k (-1)^{j-m-k} \frac{(\cos \frac{\beta}{2})^{2k+m+m'} (\sin \frac{\beta}{2})^{2j-m-m'-2k}}{k!(j-m-k)!(j-m'-k)!(k+m+m')!} \cdot$$

b/ A forgásmatrix elemei, mint impulzusmomentum-sajátfüggvények. Adott pontjában rögzített merev test /pörgettyű/ helyzete ismert módon az $\alpha \beta \gamma$ Euler-szögek megadásával jellemezhető. A pörgettyűmozgás kvantummechanikai leírása céljára eszerint a három Euler-szögtől függő $\Phi(\alpha \beta \gamma)$ állapotfüggvényt kell bevezetnünk. - A merev test klasszikus mechanikai modell, kvantummechanikai tárgyalásának igénye közvetlenül nem merül fel tehát. Mindazonáltal a kvantummechanika illetékességének területén is találkozunk "kvázimerev" rendszerekkel, melyek alakjuk viszonylagos állandósága, továbbá együttes forgásra való képességük révén hasonlítanak a merev testekre. Ilyenek pl. a molekulák, melyeket a súlyos atommagok alkotta vázuk tesz a merev testekhez bizonyos fokig hasonlóvá. Ilyenek továbbá egyes atommagok, melyeket a gömbtől erősen eltérő egyensúlyi alakú határfelület vesz körül. Az ilyen magoknál a magfelület, más szóval: a mag nukleonjait összetartó nem-gömbszimmetrikus potenciáltér változtathatja helyzetét a térben, kialakulhatnak a mag együttes forgási állapotai, melyek nagyfoku hasonlóságot mutatnak a pörgettyűmozgással.

A pörgettyűmozgás kvantummechanikai tárgyalása eszerint érdeklődésre tart számot. Az alábbiakban azoknak az eredményeknek a levezetésére szorítunk, amelyek az atommag forgási állapotainak elméletében felhasználásra kerülnek.

A pörgettyű impulzusmomentumának $\mathbf{R}$ operátora nyilván az $\alpha \beta \gamma$ Euler-szögekből és az azokra ható $\partial/\partial\alpha$, $\partial/\partial\beta$, $\partial/\partial\gamma$ differenciáloperátorokból épül fel. Az impulzusmomentum-operátor konkrét alakja pl. a forgásoperátor és az impulzusmomentum-operátor /5/ alatt felírt általános kapcsolata segítségével állapítható meg. Az Euler-szögek értelmezéséből következik, hogy a koordinátarendszernek pl. a Z -tengely körül φ szöggel történő elforgatása esetén valamely $\Phi(\alpha \beta \gamma)$ függvény megváltozását az

$$F(\varphi) = e^{-\varphi \frac{\partial}{\partial \alpha}}$$

/20/

operátor határozza meg, a /2/-vel analóg

$$F(\varphi) \Phi(\alpha \beta \gamma) = \Phi(\alpha' \beta' \gamma')$$

$$(\alpha' = \alpha - \varphi, \beta' = \beta, \gamma' = \gamma)$$

képlet szerint. A /20/ és /5/ képleteket összevetve megállapíthatjuk, hogy a pörgettyű impulzusmomentum-operátorának /melyet az /5/-beli $\underline{N}$ jel helyett $\underline{R}$ -rel jelölünk/ $\underline{z}$ -komponense:

$$R_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \alpha} \quad /21/$$

Elvben hasonló, gyakorlatilag némiképp bonyolultabb módon kaphatók $\underline{R}$ más komponensei is.

A következőkben megmutatjuk, hogy a pörgettyű impulzusmomentum-sajátfüggvényei megegyeznek a /12/ alatt definiált forgásmatrix elemeivel. Ha megvizsgáljuk az Euler-szögekre ható $\underline{R}$ impulzusmomentum-operátor komponenseinek hatását a $D_{mm'}^j(\alpha\beta\gamma)$ matrixelemekre, mint $\alpha\beta\gamma$ függvényeire, a következőket találjuk. A $D_{mm'}^j(\alpha\beta\gamma)$ függvény sajátfüggvénye az $\underline{R}^2$ operátornak a $\hbar^2 j(j+1)$ az R_z operátornak a $\hbar m$ sajátérték mellett. Sajátfüggvénye továbbá az $\alpha\beta\gamma$ Euler-szögű elforgatással adódó S' koordinátarendszerre /a pörgettyűvel együttmozgó, instantán rendszerre/ vonatkoztatott R_z impulzusmomentumkomponensnek is a $\hbar m'$ sajátérték mellett. Kiadód-
nak továbbá a számításokból az impulzusmomentum

$$R_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (R_x \pm i R_y) \quad /22/$$

$$R'_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (R_x \pm i R_y) \quad /23/$$

gömbi komponenseinek hatását megadó képletek is.

Ahhoz, hogy mindezt megmutathassunk, nem feltétlenül szükséges felhasználnunk az $\underline{R}$ operátor Euler-szögekkel kifejezett alakját. Ehelyett hivatkozhatunk az előző pontban levezetett /13/, /17/ összefüggésekre, melyek mutatják, hogy miképpen határozza meg a $D_{mm'}^j(\alpha\beta\gamma)$ matrix valamely kvantummechanikai rendszer két, egymáshoz képest elforgatott koordinátarendszerre vonatkoztatott impulzusmomentum-sajátfüggvényeinek kapcsolatát. Az

$\underline{R}$ operátorról csak annyit kell majd tudnunk, hogy a $\partial/\partial\alpha$, $\partial/\partial\beta$, $\partial/\partial\gamma$ differenciáloperátorok lineáris kombinációja. Példaként szolgáljon $\underline{R}$ leg-
egyszerűbb alakban kifejezhető komponense, melyet /21/ alatt írtunk fel.

Vegyük tehát szemügyre a $D_{mm'}^j(\mathcal{V})$ matrixelemeket, mint a $\mathcal{V} \equiv (\alpha\beta\gamma)$ Euler-szögek függvényeit. Megfontolásainkban két koordinátarendszer játszik majd szerepet: a kiindulásként választott S rendszer, amelyből kiindulva a $\mathcal{V}$ Euler-szögeket, valamint a $D_{mm'}^j(\mathcal{V})$ matrixelemeket definiáltuk, továbbá az abból $\alpha\beta\gamma$ Euler-szögű elforgatással adódó S' koordinátarendszer. Ez utóbbi az $\alpha\beta\gamma$ -val jellemzett helyzetű pörgettyűhöz rögzített, vele együttforgó koordinátarendszer.

Vegyünk továbbá szemügyre egy részecske-rendszert, mely a kitűzött feladat megoldásában kisegítő szerepet játszik majd; végeredményeink függetlenek lesznek tőle. Ez a részecske-rendszer természetesen leírható mind az S , mind az S' koordinátarendszerre vonatkoztatva. Legyenek a ψ_{JM} állapotfüggvények az S -re vonatkoztatott $x_i y_i z_i$ koordináták függvényei; a $\psi_{JM}^{(\sigma)}$ függvények az S' -re vonatkoztatott $x'_i y'_i z'_i$ változóktól ugyanolyan alakban függjenek. A ψ_{JM} és $\psi_{JM}^{(\sigma)}$ függvények kapcsolata ekkor /13/ és /17/ szerint:

$$\psi_{JM}^{(\sigma)} = \sum_{M'} \psi_{JM} D_{MM'}^{J*}(\sigma) , \quad /24/$$

$$\psi_{JM} = \sum_M D_{MM'}^J(\sigma) \psi_{JM'}^{(\sigma)} . \quad /25/$$

A kisegítő részecske-rendszer impulzusmomentumát, amely az /5/ képlet szerint meghatározza a ψ_{JM} , ill. a $\psi_{JM}^{(\sigma)}$ függvény koordinátaforgáskor fellépő megváltozását, J -vel jelöljük /az /5/-beli N helyett/. A ψ_{JM} függvény a J_z komponens sajátfüggvénye: $J_z \psi_{JM} = \hbar M \psi_{JM}$. Mint /16/-ből leolvasható, $\psi_{JM}^{(\sigma)}$ ugyanígy az S' -re vonatkoztatott J_z' komponens sajátértékegyenletének tesz eleget.

Vizsgáljuk meg most, miképpen változnak meg a ψ_{JM} és $\psi_{JM}^{(\sigma)}$ függvények, ha az általuk leírt részecske-rendszert meghatározott elforgatásnak vetjük alá. Hasonlóképpen tudni kívánjuk, miképpen változik meg Euler-szögek $D_{MM'}^J(\sigma)$ függvénye, ha a $\sigma \equiv (\alpha, \beta, \gamma)$ Euler-szögekkel jellemzett helyzetű pörgettyűt /vagy, ami ugyanaz, a hozzá rögzített S' koordinátarendszert/ meghatározott módon elforgatjuk. Hangsúlyozzuk, hogy most az egyes állapotfüggvények által leírt fizikai rendszerekre /részecskékre, pörgettyűre/, pontosabban szólva a hozzájuk rendelt valószínűségi amplitúdó-eloszlásra /anyag-hullámtér/ alkalmazunk elforgatást, nem pedig a koordinátarendszerre, mint azt az előzőekben, úgy az a/ pont kezdetén tettük.

A szereplő függvények megváltozásának leírására vezessük be az $\mathcal{F}$ forgásoperátort. Először nézzük egy részecske esetét; írja le ezt az $f(xyz)$ függvény. Az elforgatás eredményeképpen az xyz változók valamilyen más $f'(xyz)$ függvényét kapjuk. Az $\mathcal{F}$ operátort definiálja az

$$\mathcal{F} f(xyz) = f'(xyz) \quad /26/$$

összefüggés. Most is célszerű, ha $\mathcal{F}$ alakjának meghatározásához polárkoordinátákat vezetünk be. A Z -tengely körüli ω szögű forgás esetén írható:

$$\mathcal{F} f(r\vartheta\varphi) = f'(r\vartheta\varphi) = f(r\vartheta\varphi - \omega) = e^{-\omega \frac{\partial}{\partial \varphi}} f(r\vartheta\varphi) = e^{-\omega \frac{i}{\hbar} L_z} f(r\vartheta\varphi) . \quad /27/$$

Azt találtuk, hogy $\mathcal{F}$ a koordináta-forgásokhoz rendelt /4/ alatti F operátorral egyező alakú. A két eset között a különbség az, hogy az F alkalmazásának eredményeként /2/ alatt kapott függvényt mint az elforgatott S' koordinátarendszerre vonatkoztatott $x'y'z'$ változók / $f(xyz)$ -vel azonos alakú/ függvényét volt ésszerű vizsgálni, ugyanakkor a /26/ alatt adódó függvény mint az eredeti S koordinátarendszerre vonatkoztatott xyz változók megváltozott alakú függvénye értelmezhető természetes módon.

Ha a speciális alakú $f(xyz)$ függvény helyett pl. egy részecske-rendszer $\Psi(x_1 y_1 z_1 x_2 y_2 z_2 \dots x_n y_n z_n)$ állapotfüggvényének, vagy a pörgettyű $\Phi(\alpha\beta\gamma)$ állapotfüggvényének elforgatáskor bekövetkező megváltozását vizsgáljuk, a /27/-ben szereplő speciális alakú $\mathcal{F}$ operátor helyett az ennek / 5/ mintájára elvégzett / természetes általánosításával adódó

$$\mathcal{F} = e^{-\omega \frac{i}{\hbar} \underline{N} \underline{n}} \quad /28/$$

operátort kell használnunk. Itt $\underline{N}$ általában a vizsgált rendszer impulzus-momentum-operátora.

Határozzuk meg ezek után a /24/ egyenlet jobb oldalán szereplő kifejezés megváltozását az alább leírandó elforgatások során. Először forgassuk el a Ψ_{JM} függvényekkel leírt valószínűségi amplitúdó-eloszlásokat

$\underline{\omega} = \omega \underline{n}$ forgásvektorral. Az elforgatott rendszer állapotfüggvényét /28/ nak /24/-re való alkalmazásával kapjuk / $\underline{N}$ -et értelemszerűen $\underline{J}$ -vel helyettesítve/:

$$\sum_{M'} (e^{-\omega \frac{i}{\hbar} \underline{J} \underline{n}} \Psi_{JM'}) D_{M'M}^{J*}(\vartheta) . \quad /29/$$

Alkalmazzuk most ugyanezt az $\underline{\omega} = \omega \underline{n}$ forgásvektoru forgást a $\vartheta = (\alpha\beta\gamma)$ Euler-szögekkel jellemzett helyzetű pörgettyűre. A pörgettyű elforgatásakor természetesen elfordul a hozzá rögzített S' koordinátarendszer is. Ez a transzformáció /29/-ben csak az Euler-szögektől függő $D_{M'M}^{J*}(\vartheta)$ függvényt változtatja meg, az elforgatástól nem érintett részecske-rendszert a változatlanul maradó S koordinátarendszerben leíró Ψ_{JM} függvény a transzformáció során érintetlen marad. Az Euler-szögek függvényeinek elforgatáskor fellépő megváltozását az $\underline{R}$ impulzusmomentum-operátorból /28/ mintájára képezett $e^{-\omega \frac{i}{\hbar} \underline{R} \underline{n}}$ operátor határozza meg. Eszerint a pörgettyű / és a hozzá rögzített S' koordinátarendszer/ $\underline{\omega} = \omega \underline{n}$ forgásvektoru elforgatása eredményeképpen /29/-ből a következő kifejezés adódik:

$$\sum_{M'} (e^{-\omega \frac{i}{\hbar} \underline{J} \eta} \psi_{JM'}) (e^{-\omega \frac{i}{\hbar} \underline{R} \eta} D_{M'M}^{J*}(\vartheta)) =$$

/30/

$$= e^{-\omega \frac{i}{\hbar} (\underline{J} + \underline{R}) \eta} \sum_{M'} \psi_{JM'} D_{M'M}^{J*}(\vartheta) = e^{-\omega \frac{i}{\hbar} (\underline{J} + \underline{R}) \eta} \psi_{JM}^{(\vartheta)} .$$

Itt az első átalakításnál felhasználtuk, hogy $\underline{J}$ csak ψ , $\underline{R}$ pedig csak D argumentumára hat, a második átalakítás pedig /24/ figyelembe vételével történt. - A fentiekben a részecske-rendszer valószínűségi amplitúdó-eloszlását és a pörgetyühöz rögzített S' rendszert azonos módon forgattuk el. A valószínűségi amplitúdó-eloszlást S' -re vonatkoztatva leíró $\psi^{(\vartheta)}$ függvény tehát a két elforgatás végeredményeképpen nem változhatott meg s így /30/-nek meg kell egyeznie /24/-gyel. Ez csak úgy lehetséges, ha fennáll:

$$(\underline{J} + \underline{R}) \psi_{JM}^{(\vartheta)} = 0 .$$

/31/

A /31/ egyenlet igazságát ellenőrizhetjük a következő példán. Mint /16/-ből [az $N_{Z'} \rightarrow J_{Z'}$, $\psi_{jm}^{(\alpha\beta\gamma)} \rightarrow \psi_{JM}^{(\vartheta)}$ értelemszerű helyettesítést alkalmazva] látható, az S' rendszerben fennáll a

$$J_{Z'} \psi_{JM}^{(\vartheta)} = \hbar M \psi_{JM}^{(\vartheta)}$$

/32/

sajátértékegyenlet. Könnyű belátni, hogy ugyanakkor

$$R_{Z'} \psi_{JM}^{(\vartheta)} = -\hbar M \psi_{JM}^{(\vartheta)} .$$

/33/

Az $R_{Z'}$ operátor meghatározására felhasználható a forgásoperátor és impulzusmomentum-operátor /5/-ben kifejeződő általános kapcsolata. A koordinátarendszernek a Z' -tengely körül ω szöggel való elforgatása eredményeképpen a pörgetyű γ Euler-féle szögek ordinátája $\gamma' = \gamma - \omega$ -ra csökken. A megfelelő forgásoperátort így kapjuk:

$$F(\omega) \phi(\alpha\beta\gamma) = \phi(\alpha'\beta'\gamma') = \phi(\alpha\beta\gamma - \omega) = e^{-\omega \frac{\partial}{\partial \gamma}} \phi(\alpha\beta\gamma) = e^{-\omega \frac{i}{\hbar} R_{Z'}} \phi(\alpha\beta\gamma) ,$$

/34/

ahonnan

$$R_{Z'} = \hbar \frac{\partial}{\partial \gamma} .$$

/35/

Vegyük most figyelembe, hogy $\psi_{JM}^{(\sigma)}$ az Euler-szögektől a /24/-ben szereplő $D_{MM'}^{JM}(\sigma)$ -k közvetítésével függ, ezek γ -függése pedig /18/ szerint a /24/ összeg minden tagjában egyöntetűen $e^{-iM\gamma}$ alakú. Ha /35/-öt $\psi_{JM}^{(\sigma)}$ -re alkalmazzuk, valóban az állított /33/ sajátértékegyenletet kapjuk, összhangban a /31/, /32/ eredményekkel.

Egy további, a későbbiekben felhasználandó összefüggést írhatunk fel ama triviális észrevétel alapján, hogy a részecske-rendszer S -re vonatkoztatott leírását adó ψ_{JM} függvény alakja teljes mértékben független az S' koordinátarendszer /vagyis a pörgettyű/ helyzetétől, így a pörgettyű $e^{-\omega \frac{i}{\hbar} R n}$ forgásoperátorának alkalmazása ψ -t nem változtatja meg:

$$e^{-\omega \frac{i}{\hbar} R n} \psi_{JM} = \psi_{JM} .$$

Ebből következik, hogy

$$R \psi_{JM} = 0 . \quad /36/$$

A /36/ összefüggés fennállítására abból is következtethetünk, hogy R az Euler-szögekre ható differenciáloperátorok lineárkombinációja, ugyanakkor ψ_{JM} az Euler-szögektől nem függ, hanem csak az S -re vonatkoztatott részecskekoordinátáktól. Így megfogalmazva a /36/ összefüggés trivialitásának hat, de ha ψ_{JM} /25/ alakját helyettesítjük bele, következtetések levonására alkalmas összefüggésre jutunk:

$$R \sum_{M'} D_{MM'}^{JM}(\sigma) \psi_{JM'}^{(\sigma)} = 0 . \quad /37/$$

Az R impulzusmomentum-operátor hat természetesen a D^J argumentumában szereplő Euler-szögekre, de hat $\psi_{JM'}^{(\sigma)}$ -re is [mint ezt /31/ is mutatja.], mely a /24/ alatt megadott módon függ a $\sigma = (\alpha \beta \gamma)$ Euler-szögektől. Figyelembe véve, hogy R lineáris differenciáloperátor, továbbá felhasználva a /31/ összefüggést, írhatjuk:

$$\begin{aligned} R \psi &= \sum_{M'} \left\{ [R D_{MM'}^{JM}(\sigma)] + D_{MM'}^{JM}(\sigma) R \right\} \psi_{JM'}^{(\sigma)} = \\ &= \sum_{M'} \left\{ [R D_{MM'}^{JM}(\sigma)] - D_{MM'}^{JM}(\sigma) R \right\} \psi_{JM'}^{(\sigma)} = 0 . \end{aligned} \quad /38/$$

A kitűzött feladat: meghatározni, hogy miképpen hatnak $\underline{R}$ különböző komponensei a $D_{MM'}^J(\vartheta)$ függvényekre. Más szóval: a /38/ alatt szereplő $\underline{R} D_{MM'}^J(\vartheta)$ mennyiség komponenseit kell kiértékelnünk, az S' és az S koordinátarendszerben. Minthogy a részecskék $\underline{J}$ impulzusmomentum-operátorának hatása ismert, a feladat /38/ alapján közvetlenül elvégezhető.

Vizsgáljuk először az $\underline{R}$ operátor vesszős komponenseinek, az $R'_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(R_x \pm iR_y)$, $R'_0 = R_z$ gömbi komponenseknek $D_{MM'}^J(\vartheta)$ -ra való hatását.

Az R'_0 operátor hatását szemügyre véve vegyük figyelembe, hogy $\psi_{JM'}^{(J)}$ /32/ szerint a $J'_0 = J_z$, operátor $\hbar M'$ sajátértékhez tartozó sajátfüggvénye: $J'_0 \psi_{JM'}^{(J)} = \hbar M' \psi_{JM'}^{(J)}$. Ekkor /38/ szerint leírható:

$$R'_0 \psi_{JM} = \sum_{M'} \left\{ [R'_0 D_{MM'}^J(\vartheta)] - \hbar M' D_{MM'}^J(\vartheta) \right\} \psi_{JM'}^{(J)} = 0.$$

Minthogy a $\psi_{JM'}^{(J)}$ függvények lineárisan függetlenek, az egyes együtthatók zérussal tehetők egyenlővé. Ilymódon kapjuk:

$$R'_0 D_{MM'}^J(\vartheta) = \hbar M' D_{MM'}^J(\vartheta). \quad /39/$$

Megjegyezzük, hogy ugyanez közvetlenül adódik, ha /35/-öt $D_{MM'}^J(\vartheta)$ -ra alkalmazzuk, figyelembe véve ennek /18/ alatt megadott alakját.

Vizsgáljuk meg ezek után a /38/ egyenlet vesszős rendszerbeli, ± 1 indexű gömbi komponenseinek hatását. Az ismert

$$J'_{\pm 1} \psi_{JM'}^{(J)} = \mp \hbar \sqrt{\frac{J(J+1) - M'(M' \pm 1)}{2}} \psi_{J, M' \pm 1}^{(J)}$$

összefüggés felhasználásával írható:

$$\begin{aligned} R'_{\pm 1} \psi_{JM} &= \sum_{M'} \left\{ [R'_{\pm 1} D_{MM'}^J(\vartheta)] - D_{MM'}^J(\vartheta) J'_{\pm 1} \right\} \psi_{JM'}^{(J)} = \\ &= \sum_{M'} \left\{ R'_{\pm 1} D_{MM'}^J(\vartheta) \psi_{JM'}^{(J)} \pm \hbar \sqrt{\frac{J(J+1) - M'(M' \pm 1)}{2}} D_{MM'}^J(\vartheta) \psi_{J, M' \pm 1}^{(J)} \right\} = \\ &= \sum_{M'} \left\{ R'_{\pm 1} D_{MM'}^J(\vartheta) \pm \hbar \sqrt{\frac{J(J+1) - M'(M' \mp 1)}{2}} D_{M, M' \mp 1}^J(\vartheta) \right\} \psi_{JM'}^{(J)} = 0. \end{aligned}$$

A harmadik sor úgy adódott, hogy a második sor kapcsos zárójelének második tagjában az összegezési indexet az $M' \rightarrow M' \mp 1$ módon megváltoztattuk. Ha itt $\psi_{JM'}^{(J)}$ együtthatóját zérussal tesszük egyenlővé, az

$$R'_{\pm 1} D_{MM'}^J(\vartheta) = \mp \hbar \sqrt{\frac{J(J+1) - M'(M' \mp 1)}{2}} D_{M, M' \mp 1}^J(\vartheta) \quad /40/$$

összefüggésre jutunk.

Mielőtt áttérnénk az S rendszerre vonatkoztatott impulzusmomentum-komponensek vizsgálatára, megjegyezzük, hogy R vesszős komponensei /39/, /40/ értelmében a következő felcserélési törvényeknek tesznek eleget:

$$[R'_{+1}, R'_{-1}] = \hbar R'_0, \quad [R'_0, R'_{\pm 1}] = \mp \hbar R'_{\pm 1},$$

amiből a Descartes-féle komponensekre az

$$[R'_i, R'_j] = -i\hbar \epsilon_{ijk} R'_k \quad /41/$$

felcserélési törvény adódik. Figyelmet érdemel, hogy /41/ a jobb oldalon álló negatív előjelben eltér az impulzusmomentum szokásos felcserélési törvényétől.

A /38/ kifejezés vesszőtlen /az S rendszerre vonatkoztatott/ komponenseinek kiértékelése nem történhet pontosan ugyanugy, mint a vesszős komponenseké. A $\underline{J}$ operátor vesszőtlen komponenseinek $\psi_{JM}^{(\mathcal{J})}$ -re való hatása közvetlenül nem ismerhető fel, ennek megállapítása részletesebb megfontolásokat igényelne. Alkalmazhatjuk azonban a következő fogást. Minthogy $\underline{J}$ csak a részecske-változókra hat, az Euler-szögekre nem, /38/ második tagjában $D_{MM'}^{(\mathcal{J})}$ elé hozható. Ezután e tagban /25/ segítségével elvégezzük az összegezt. Kapjuk:

$$\sum_{M'} [R D_{MM'}^{(\mathcal{J})}] \psi_{JM'}^{(\mathcal{J})} - \underline{J} \psi_{JM} = 0. \quad /42/$$

Az átalakítás eredményeképpen a $\underline{J}$ operátor mögött megjelent ψ_{JM} , melyre $\underline{J}$ hatása már ismert. A /42/ kifejezés zérus indexű vesszőtlen gömbi komponensét véve és a /15/ sajátértékegyenletet felhasználva kapjuk:

$$\sum_{M'} [R_0 D_{MM'}^{(\mathcal{J})}] \psi_{JM'}^{(\mathcal{J})} - \hbar M \psi_{JM} = 0.$$

Fejtsük ki itt a második tagot /25/ segítségével:

$$\sum_{M'} \{ [R_0 D_{MM'}^{(\mathcal{J})}] - \hbar M D_{MM'}^{(\mathcal{J})} \} \psi_{JM'}^{(\mathcal{J})} = 0$$

Az együtthatókat zérussal egyenlővé téve kapjuk:

$$R_0 D_{MM'}^{(\mathcal{J})} = \hbar M D_{MM'}^{(\mathcal{J})}. \quad /43/$$

Az $R_{\pm 1}$ komponensek hatása hasonló eljárással határozható meg:

$$\sum_{M'} \left[R_{\pm 1} D_{MM'}^J(\vartheta) \right] \psi_{JM'}^{(\vartheta)} \pm \hbar \sqrt{\frac{J(J+1)-M(M\pm 1)}{2}} \psi_{J, M\pm 1} = \\ = \sum_{M'} \left\{ \left[R_{\pm 1} D_{MM'}^J(\vartheta) \right] \pm \hbar \sqrt{\frac{J(J+1)-M(M\pm 1)}{2}} D_{M\pm 1, M'}^J(\vartheta) \right\} \psi_{JM'}^{(\vartheta)} = 0.$$

Az együtthatókat zérussal egyenlővé téve kapjuk:

$$R_{\pm 1} D_{MM'}^J(\vartheta) = \mp \hbar \sqrt{\frac{J(J+1)-M(M\pm 1)}{2}} D_{M\pm 1, M'}^J(\vartheta). \quad /44/$$

A laboratóriumban rögzített S rendszerre vonatkoztatott, vesszőtlen impulzusmomentum-komponensek természetesen a szokásos felcserélési törvényeknek tesznek eleget:

$$[R_i, R_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} R_k. \quad /45/$$

A /43/ és /44/, vagy ha úgy tetszik, a /39/ és /40/ összefüggésekből levezethetjük az

$$\underline{R}^2 D_{MM'}^J(\vartheta) = \hbar^2 J(J+1) D_{MM'}^J(\vartheta) \quad /46/$$

sajátértékegyenletet.

Az eredményeket szavakban így foglalhatjuk össze. A $D_{MM'}^J(\vartheta)$ függvény sajátfüggvénye az $\underline{R}^2$, R_0 és R_0' operátoroknak. Az impulzusmomentum négyzetének $\underline{R}^2$ operátorához a $\hbar^2 J(J+1)$ sajátérték, a laboratóriumi rendszerre vonatkoztatott $\underline{z}$ -vetület operátorához pedig a $\hbar M$ sajátérték tartozik. Sajátfüggvénye ezen kívül $D_{MM'}^J(\vartheta)$ a pörgettyűhöz rögzített rendszer $\underline{z}'$ -tengelyére vetett impulzusmomentum-vetület R_0' operátorának is, a $\hbar M'$ sajátérték mellett.

Meg kell itt jegyeznünk, hogy miután az S' rendszernek a térben elfoglalt helyzetét jellemző $\alpha\beta\gamma$ Euler-szögek itt nem rögzített, vagy talán az idő függvényében meghatározott módon változó paraméterek, hanem kvantummechanikai "dinamikai változók", "fizikai mennyiségek", az S' rendszer térbeli helyzetét "szemmel követni" nem lehetséges, erről csak valószínűségi kijelentések tehetők.

A klasszikus mechanikából tudjuk, hogy egy szimmetrikus pörgettyűnek a laboratóriumi rendszerben állandó impulzusmomentuma mellett állandó még a szimmetriatengelyre vetett impulzusmomentum-vetülete is. Ennek alapján arra gondolhatunk, hogy a szimmetrikus pörgettyű esetében, ha $\underline{z}'$ -tengelynek a pörgettyű szimmetriatengelyét választjuk, a $D_{MM'}^J(\vartheta)$ függvények stacionárius állapotokat irnak le. Ez valóban így is van. Aszimmetrikus pörgettyű

esetében az impulzusmomentumnak nincs olyan komponense az S' rendszerben, mely állandó volna. Ennek megfelelően $D_{MM'}^J(\mathcal{J})$ nem stacionárius állapotfüggvény. A stacionárius állapotokat leíró függvények az M' különböző értékeihez tartozó $D_{MM'}^J(\mathcal{J})$ -k meghatározott lineár-kombinációi alapján állíthatók elő.

Wigner megmutatta, hogy a pörgőgyűrű sajátfüggvényeinek alakja egyszerűen megállapítható, kiindulva a kvantummechanikai állapotfüggvények - e szakaszban ismertetett - forgástranszformációs tulajdonságaiból. Wigner e módszerét a Függelék A. pontjában írjuk le.

2. A nem gömbszimmetrikus magalak kialakulása

a/ Rainwater gondolata és a kvadrupólmomentumok. Az atommag együttes /kollektív/ mozgásformáinak elmélete Rainwater egy észrevétele nyomán bontakozott ki. Rainwater rámutatott arra, hogy a páratlan tömegszámú magok kvadrupólmomentumának /a héjmodell keretei között érthetetlen/ nagy értékei megérthetők, ha feltesszük: a legkülső, nem teljesen lezárt héjban helyetfoglaló, nem-gömbszimmetrikus eloszlású nukleonok polarizáló hatásuk révén a lezárt héjakra is nem-gömbszimmetrikus alakot kényszerítenek. A következőkben ezt a hatást becsüljük meg, Mottelsont követve, egy egyszerű független-részekmodell, az oszcillátor-modell keretei között.

Ha figyelembe vesszük, hogy a nukleon mozgását a magban meghatározó közös potenciáltér alakja a gömbszimmetrikustól eltérő is lehet, a modell Hamilton-operátora a

$$H = \sum_i \left[\frac{p_i^2}{2M} + \frac{M}{2} (\omega_x^2 x_i^2 + \omega_y^2 y_i^2 + \omega_z^2 z_i^2) \right] \quad /47/$$

alakban írható fel. A probléma derékszögű koordinátákban szeparálható; a sajátértékek nyilván

$$E = \sum_i \left[\hbar \omega_x (n_x + \frac{1}{2})_i + \hbar \omega_y (n_y + \frac{1}{2})_i + \hbar \omega_z (n_z + \frac{1}{2})_i \right] \quad /48/$$

Tegyük fel, figyelembevéve a maganyag tapasztalatból ismert nagyfoku összenyomhatatlanságát, hogy az alakváltozás során az ekvipotenciális felületek által körülzárt térfogat változatlan marad. Ennek feltétele az

$$\omega_x \omega_y \omega_z = \omega_0^3 = \text{const.} \quad /49/$$

alakba írható. Szorítkozzunk tengelyszimmetrikus alakváltozásokra. Ekkor a deformációt jellemző α paramétert definiálhatjuk az

$$\omega_x = \omega_0 e^{\frac{\alpha}{2}}, \quad \omega_y = \omega_0 e^{\frac{\alpha}{2}}, \quad \omega_z = \omega_0 e^{-\alpha} \quad /50/$$

képletekkel. A /48/ sajátérték ekkor így írható:

$$E = \hbar \omega_0 \sum_i \left[e^{\frac{\alpha}{2}} (n_x + n_y + 1)_i + e^{-\alpha} (n_z + \frac{1}{2})_i \right].$$

Keressük ennek minimumát α függvényében. A szélsőérték feltétele:

$$\frac{dE}{d\alpha} = \frac{\hbar \omega_0}{2} \sum_i \left[e^{\frac{\alpha}{2}} (n_x + n_y + 1)_i - e^{-\alpha} (2n_z + 1)_i \right] = 0.$$

Innen az energiaminimumhoz tartozó, egyensúlyi deformációra az

$$e^{\frac{3}{2}\alpha} = \frac{\sum_i (2n_z + 1)_i}{\sum_i (n_x + n_y + 1)_i} \quad /51/$$

összefüggés adódik.

Megjegyzésre érdemes, hogy az egyensúlyi deformációt meghatározó /51/ összefüggéshez az energiaminimum feltétele mellett egy más követelményből kiindulva is eljuthatunk. Ésszerű megkövetelni, különös tekintettel a magerők rövid hatótávolságára, hogy egyensúlyi állapotban a mag közös potenciáltere és sűrűségeloszlása hasonló alakú legyen. Matematikailag ezt úgy fogalmazzuk meg, hogy megköveteljük: a mag sűrűségeloszlásának $\bar{x}^2$, $\bar{y}^2$, $\bar{z}^2$ momentumai ugyanolyan arányban álljanak egymással, mint az ekvipotenciális ellipszoidok tengelyeinek négyzetei. Figyelembevéve /47/-et, írhatjuk:

$$\bar{x}^2 : \bar{y}^2 : \bar{z}^2 :: \frac{1}{\omega_x^2} : \frac{1}{\omega_y^2} : \frac{1}{\omega_z^2}. \quad /52/$$

Itt

$$\bar{x}^2 = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^A \langle x_i^2 \rangle, \quad \bar{y}^2 = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^A \langle y_i^2 \rangle, \quad \bar{z}^2 = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^A \langle z_i^2 \rangle; \quad /53/$$

x_i^2 , y_i^2 , z_i^2 itt szereplő várható értékei egyszerű alakúak:

$$\left. \begin{aligned} \langle n_x | x_i^2 | n_x \rangle &= \frac{\hbar}{M\omega_x} \left(n_x + \frac{1}{2} \right), \\ \langle n_y | y_i^2 | n_y \rangle &= \frac{\hbar}{M\omega_y} \left(n_y + \frac{1}{2} \right), \\ \langle n_z | z_i^2 | n_z \rangle &= \frac{\hbar}{M\omega_z} \left(n_z + \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad /54/$$

E kifejezések könnyen verifikálhatók, figyelembe véve azt az ismert tényt, hogy az oszcillátor potenciális energiájának várható értéke a teljes energia felével egyezik meg, pl. $\frac{M}{2} \omega_x^2 \langle n_x | x_i^2 | n_x \rangle = \frac{\hbar\omega_x}{2} \left(n_x + \frac{1}{2} \right)$.
Vezessük be most a

$$\sigma_x = \sum_i \left(n_x + \frac{1}{2} \right)_i, \quad \sigma_y = \sum_i \left(n_y + \frac{1}{2} \right)_i, \quad \sigma_z = \sum_i \left(n_z + \frac{1}{2} \right)_i \quad /55/$$

jelöléseket. Ezeket felhasználva és az /54/ összefüggéseket /53/-ba, az /53/ kifejezéseket pedig /52/-be helyettesítve, a

$$\sigma_x : \sigma_y : \sigma_z :: \frac{1}{\omega_x} : \frac{1}{\omega_y} : \frac{1}{\omega_z}$$

feltételre jutunk. Ennek alapján írható:

$$\sigma_x = \frac{\text{const.}}{\omega_x}, \quad \sigma_y = \frac{\text{const.}}{\omega_y}, \quad \sigma_z = \frac{\text{const.}}{\omega_z}; \quad /56/$$

az /x-, y-, z-től független/ állandó együttható értéke innen egyszerűen leolvasható:

$$\text{const.} = \omega_0 (\sigma_x \sigma_y \sigma_z)^{1/3}; \quad /57/$$

ω_0 -t /49/ adja meg. A /56/, /57/ képletek alapján írhatjuk:

$$\omega_x = \omega_0 \left(\frac{\sigma_y \sigma_z}{\sigma_x^2} \right)^{1/3}, \quad \omega_y = \omega_0 \left(\frac{\sigma_z \sigma_x}{\sigma_y^2} \right)^{1/3}, \quad \omega_z = \omega_0 \left(\frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_z^2} \right)^{1/3}. \quad /58/$$

Az alakváltozás tengelyszimmetriájára vonatkozó feltevésből $\omega_x = \omega_y$; lásd /50/-et/ $\sigma_x = \sigma_y = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y)$ következik, s így /58/ helyett pl. ω_x esetében írható:

$$\omega_x = \omega_0 \left(\frac{2\sigma_z}{\sigma_x + \sigma_y} \right)^{1/3}.$$



Írjuk be ide ω_x -et /50/-ből, σ_x -et, σ_y -t, σ_z -t, /55/-ből. Köbre emeléssel az egyensúlyi deformációra az /51/ összefüggést kapjuk, amint állítottuk.

Megfontolásaink és számításaink eredményeit összefoglalva, megállapíthatjuk: ha az egyes nukleonállapotok oly módon vannak betöltve, hogy $2 \sum_i (n_z + \frac{1}{2})_i \neq \sum_i (n_x + n_y + 1)_i$, úgy a mag alakja eltér a gömbszimmetriától, /51/-ben $\alpha \neq 0$. Minthogy a zárt héjakra $\sum_i (n_x + \frac{1}{2})_i = \sum_i (n_y + \frac{1}{2})_i = \sum_i (n_z + \frac{1}{2})_i$, megállapíthatjuk, hogy a deformációért kizárólag a legkülső, nem teljesen betöltött héjban elhelyezkedő nukleonok a felelősek. Ezek kényszerítenek a zárt héjban helyet foglaló nukleonokra is nem-gömbszimmetrikus eloszlást.

Ennek következtében a mag elektromos kvadrupólmomentumához nemcsak a legkülső, nem teljesen betöltött héjban helyet foglaló protonok szolgáltatnak járulékot, /mint azt a héjmodellben felteszik/, hanem a nem-gömbszimmetrikus deformált zárt héjak protonjai is.

Ez a hatás különösen szembeszökő pl. olyankor, ha a magban a zárt héjakon kívül egy neutron kering /vagy egy zárt héjból egy neutron hiányzik/. A héjmodellben, mely a zárt héjakat gömbszimmetrikusnak tekinti, a kvadrupólmomentum ilyenkor zérus, hiszen a zárt héjakon kívül jelenlévő egy neutronhoz /vagy neutron-lyukhoz/, minthogy töltése zérus, nem tartozhat elektromos kvadrupólmomentum. A tapasztalat szerint azonban az ilyen magok kvadrupólmomentuma is lehet zérustól különböző /pl. 0^{17} /. A fentiek alapján ez megérthető: ilyenkor a legkülső héjban magányosan keringő neutron polarizáló hatására a zárt héjakban helyet foglaló protonok töltéseloszlása eltér a gömbszimmetrikustól, kvadrupólmomentumuk zérustól különböző lesz.

Vegyünk szemügyre most egy ilyen "csupa zárt héj $\pm$ egy nukleon" típusu magot. A mag /tömegeloszlásának/ kvadrupólmomentumát a

$$Q = \sum_i \langle 2z_i^2 - x_i^2 - y_i^2 \rangle$$

kifejezés szolgáltatja, mely /54/ és /55/ figyelembe vételével a

$$Q = \frac{\hbar}{M} \left(2 \frac{\sigma_z}{\omega_z} - \frac{\sigma_x}{\omega_x} - \frac{\sigma_y}{\omega_y} \right) \quad /59/$$

alakba írható. Az /55/ alatt felírt $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ összegeknek a zárt héjakhoz tartozó részei megegyeznek. Jelöljük ezt $\frac{1}{3} \sigma_0$ -al. Ha az utolsó részcseke az N_x, N_y, N_z oszcillátor-quantumszámokkal jellemzett állapotot foglalja el, /55/ helyett írható:

$$\sigma_x = \frac{1}{3} \sigma_0 + N_x + \frac{1}{2}, \quad \sigma_y = \frac{1}{3} \sigma_0 + N_y + \frac{1}{2}, \quad \sigma_z = \frac{1}{3} \sigma_0 + N_z + \frac{1}{2}. \quad /60/$$

Helyettesítsük be e kifejezéseket /58/-ba. Itt N_x, N_y, N_z nyilván sokkal kisebb, mint σ_0 , mely a zárt héjak összes részecskéinek kvantumszámaira kiterjesztett összeg. Az $N_x/\sigma_0, N_y/\sigma_0, N_z/\sigma_0$ mennyiségek szerint tehát sorba fejthetünk és megelégedhetünk a legalacsonyabbrendű /lineáris/ tagokkal. Így kapjuk /58/-ből:

$$\frac{1}{\omega_x} = \frac{1}{\omega_0} \left(1 + \frac{2N_x - N_y - N_z}{\sigma_0} \right), \quad \frac{1}{\omega_y} = \frac{1}{\omega_0} \left(1 + \frac{2N_y - N_z - N_x}{\sigma_0} \right), \quad \frac{1}{\omega_z} = \frac{1}{\omega_0} \left(1 + \frac{2N_z - N_x - N_y}{\sigma_0} \right).$$

A most kapott kifejezéseket, valamint /60/-at /59/-be helyettesítve kapjuk:

$$Q = 2Q_p,$$

ahol

$$Q_p = \frac{\hbar}{M\omega_0} (2N_z - N_x - N_y)$$

Az /54/ képletek segítségével meggyőződhetünk róla, hogy Q_p az utolsó, páratlan részecske /tömegeloszlásának/ kvadrupólmomentumát jelenti, közelítésünk legalacsonyabb rendjében, vagyis: az alakváltozásnak a részecske állapotfüggvényére való hatását elhanyagolva. Figyelemre méltó, hogy a zárt héjak deformációjának figyelembe vétele a mag /tömeg-/ kvadrupólmomentumára az utolsó, páratlan részecske /tömeg-/ kvadrupólmomentumának kétszeresét szolgáltatja; a zárt héjak járuléka Q -hoz tehát ugyankkor, mint a páratlan részecskéé.

A $Q^{(el)}$ elektromos kvadrupólmomentumot a

$$Q^{(el)} = Q_p + \frac{Z}{A} Q_p$$

képlet adja, ahol az első tag a páratlan részecske elektromos kvadrupólmomentuma, a második pedig a zárt héjak protonjainak járuléka /innen a Z/A tényező/. Az eredmény szemléletesen így értelmezhető: a deformált zárt héjak jelenléte a páratlan részecske töltésének effektív értékét e_p -ről

$$e_{eff} = e_p + \frac{Z}{A} e \quad /61/$$

-re változtatja, ahol Z és A a törzs rendszáma, ill. tömegszáma, továbbá

$$e_p = \begin{cases} e \\ 0 \end{cases}, \quad \text{ha a páratlan részecske} \quad \begin{cases} \text{proton} \\ \text{neutron} \end{cases}$$

Az e_{eff} effektív /renormált/ töltés a sztatikus kvadrupólmomentum mellett a sugárzásos kvadrupól- ($E2$) átmenetek valószínűségének számításánál is használható, feltéve, hogy a zárt törzs a külső részecske kvadrupól-rezgéseit adiabatikusan követi. Ennek az a feltétele, hogy az átmenet rezgésszáma sokkal kisebb legyen, mint a zárt törzs természetes kvadrupól-frekvenciája. Ez utóbbira Mottelson a $2\omega_0 \approx 20 \text{ MeV}/\hbar$ értéket adja meg.

Igen érdekes, hogy a zárt héjak eltorzulása már a "zárt törzs $\pm$ egy nukleon" típusu magokban is jelentős szerephez jut. Az ilyen magok spektruma általában igen kielégítően leírható az egyrészecske-modell keretei között. Így pl. O^{17} alapállapota ($5/2+$) és 0,88 MeV-os első gerjesztett állapota ($1/2+$) olymódon értelmezhető, hogy az $N=Z=8$ -nál lezáródott héj körül magánosan keringő neutron majd a $d^{5/2}$, majd az $\Delta^{1/2}$ állapotot foglalja el a soronkövetkező héjban. Az egyrészecske-leírás eme kielégítő vonásai mellett kiütköznek fogyatékoságai is. Az O^{17} mag alapállapotában az elektromos kvadrupól-momentum zérustól különböző érték: $Q = -0,03 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$. Ez, mint már említettük, ellentmond a héjmodell várakozásának: a héjmodell a magok kvadrupólmomentumáért egyedül a zárt héjakon kívül keringő részecskét teszi felelőssé; minthogy ez esetünkben neutron, töltése, és így kvadrupólmomentuma is, eltűnik. A magtörzs deformációjának figyelembevételével kapott /61/ képlet szerint azonban a zárt törzs terében keringő neutron

$e_{\text{eff}} = 0,5e$ effektív töltésre tesz szert. Az effektív töltés ezen értéke kielégítően egyezik a sztatikus kvadrupólmomentum, továbbá az $s^{1/2} \rightarrow d^{5/2}$ elektromos kvadrupól-átmenet vizsgálata alapján meghatározott $T_{1/2} = 2,5 \cdot 10^{-10} \text{ sec}$ felezési idő értelmezéséhez szükséges $0,7e$ értékkel. - Nehézebb magoknál az egyezés kevésbé jó. A "zárt héj - egy neutron" típusu Pb^{207} mag esetében pl. a 0,57 MeV-os $5/2$ -gerjesztett állapotból az $1/2$ - alapállapotba vezető $E2$ átmenet /a héjmodell szerint $f^{7/2} \rightarrow p^{1/2}$ egyrészecske-átmenetről van szó/ $T_{1/2} = 9 \cdot 10^{-11} \text{ sec}$ felezési idejéről $1,1e$ nagyságú effektív töltés feltételezésével lehet számot adni, ami a /61/-ből adódó értéknek közel háromszorosa. Ez az eltérés azzal magyarázható, hogy az erősen elfajult harmonikus oszcillátor nagy szintközei nem kedveznek a magtörzs alakváltozásának. A nehéz magok esetében realisztikusabb gömbalaku potenciálgödör esetében nagyobb a polarizálhatóság s így nagyobb effektív töltés adódik, jobb összhangban a kísérletekből kapott kvadrupól-matrixelemekkel.

Rainwater megállapítása, mely szerint a magok egyensúlyi alakja lehet nem-gömbszimmetrikus is, számos fontos eredmény alapjául szolgált. Ezek közül az egyik legfontosabb az a felismerés, hogy a mag számára lehetségesek együttes forgási állapotok: a nem-gömbszimmetrikus magfelület forgó-mozgást végezhet, forgását a mag nukleonjai együttesen követik. A forgási állapotok elméletével foglalkozik a következő, 3. szakasz.

3. A magok forgási állapotainak elmélete

a/ Bevezetés

Egyszerű megfontolások mutatják: nem gömbszimmetrikus egyensúlyi magalak esetén számolnunk kell azzal, hogy az atommagban foglalt nukleonok külső hatásra együttes forgásba jöhetnek. Ha pl. a deformált mag közelében töltött részecske halad el, ennek inhomogén Coulomb-tere forgatónyomatékokot fejt ki a mag kvadrupólmomentumára. Mint az előző pontban láttuk, a kvadrupólmomentum kialakításában nemcsak a kevészámú külső proton, hanem a lezárt törzsben helyetfoglaló protonok is részesek. Ennélfogva a külső forgatónyomaték sem csupán egyetlen vagy kevészámú nukleon impulzusmomentumát változtatja meg, hanem az egész maggal közöl impulzusmomentumot, miközben a deformált határfelület, az általa körülfogott nukleonokkal együttesen, forgásba jön.

Mint arra Kerman rámutat, a deformált magfelület forgásával kapcsolatos spektrum létezésére a következő kvantummechanikai természetű megfontolással is következtethetünk. A deformált magalak helyzete a térben bizonyos főtengelyek /pl. a deformációs ellipszoid főtengelyeinek/, ill. az azok helyzetét meghatározó $\alpha\beta\gamma$ Euler-szögek megadásával jellemezhető. Valamely forgásra képes rendszer helyzetét jellemző szögváltozóra, s a hozzá kanonikusan konjugált impulzusmomentumra érvényes Heisenberg-féle határozatlansági összefüggés értelmében a szögváltozó értéke csak akkor lehet élesen meghatározott, ha ugyanakkor az impulzusmomentum teljesen határozatlan. /Lásd pl. /21/-et; R_z az α Euler-szöggel az $[R_z, \alpha] = \hbar/i$ felcserélési, s így a $\langle \Delta R_z^2 \rangle \langle \Delta \alpha^2 \rangle \geq \hbar^2/4$ határozatlansági összefüggésnek tesz eleget./ Ahhoz tehát, hogy deformált magalakról és annak a térben elfoglalt helyzetéről egyáltalán beszélni lehessen, szükséges, hogy létezzék az Euler-szögekre ható impulzusmomentum-operátorok sajátállapotainak egy egész sorozata, vagyis: létezzék forgási spektrum.

b/ Az atommag mint pörgettyű

A magok forgási állapotainak elméletét a legegyszerűbben azon feltevésre kísérhetjük meg felépíteni, miszerint az atommag pörgettyűnek tekinthető. A mag belső szerkezetének elméleti tanulmányozása és a magspektrumok kísérleti vizsgálata egyaránt azt mutatja, hogy a deformált magalak az atommagok túlnyomó többségénél tengelyszimmetrikus. Ennek megfelelően a magot

szimmetrikus pörgettyűhöz hasonlítjuk. A szimmetrikus pörgettyű Hamilton-operátora:

$$T = \frac{R_{x'}^2 + R_{y'}^2}{2J} + \frac{R_{z'}^2}{2J_{z'}} = \quad /62/$$

$$= \frac{R^2}{2J} + \left(\frac{1}{2J_z} - \frac{1}{2J} \right) R_{z'}^2 .$$

Itt $\underline{R}$ a pörgettyű impulzusmomentumának operátora, melyet az 1.szakasz /Matematikai előkészítés/ b/ pontjában vezettünk be; $R_{x'}$, $R_{y'}$, $R_{z'}$ a pörgettyűhöz rögzített /instantán/ koordinátarendszerre vonatkoztatott komponensek $J_{z'}$ a szimmetriatengely irányához, J pedig az arra merőleges irányokhoz tartozó fő tehetetlenségi nyomaték. Mint az 1.szakasz b/ pontjában láttuk, az $\underline{R}$ operátor a pörgettyűnek a térben elfoglalt helyzetét jellemző Euler-féle szögkoordinátákra hat. Kézenfekvő $\underline{R}$ -et a mag teljes impulzusmomentumának $\underline{I}$ operátorával azonosítanunk:

$$\underline{R} = \underline{I} .$$

Az 1.szakasz eredményei alapján könnyű felírni a /62/ Hamilton-operátor sajátfüggvényeit és sajátértékeit. A /39/ és /46/ képleteket tekintetbe véve megállapíthatjuk, hogy a

$$\Phi_{IKM} = D_{KM}^I(\mathcal{S}) \quad /63/$$

függvény sajátfüggvénye a forgás /62/ Hamilton-operátorának az

$$E_{IK} = \frac{\hbar^2}{2J} I(I+1) + \left(\frac{\hbar^2}{2J} - \frac{\hbar^2}{2J_{z'}} \right) K^2 \quad /64/$$

sajátérték mellett.

Mielőtt az energiaspektrumra kapott képletet összehasonlítanánk a megfigyelésekkel, foglalkoznunk kell a mag alakjának szimmetriáival. A magalak szimmetriatulajdonságai ugyanis korlátozhatják a /64/-ben szereplő I, K kvantumszámok lehetséges értékeit.

Az előzőkben, a tapasztalat utmutatását követve, feltételeztünk, hogy a mag alakja tengelyszimmetrikus. Vizsgáljuk meg e feltevés következményeit. Elgondolásunk szerint a mag együttes forgása olymódon megy végbe, hogy a deformált magfelület elfordul s közben magával ragadja az általa körülfogott nukleonokat. Ha a deformált magfelületet /a mag közös potenciáletterét/ a szimmetriatengely körül forgatjuk el gondolatban, közvetlenül látjuk: nem tudja magával ragadni a nukleonokat. A magfelület szimmetriatengely körüli elfor-

gatása minden fizikai következmény nélkül való, a nukleonok az elforgatást "észre sem veszik". Levonhatjuk a következtetést: a mag együttes forgása a szimmetriatengely körül nem lehetséges és így az R impulzusmomentum szimmetriatengelymenti R_z vetületének sajátértéke szükségképpen zérus:

$$R_z \cdot D_{MK}^I(\gamma) = 0$$

amiből /39/ szerint

$$K=0$$

/65/

következik. Az eredmény szemléletes jelentése világos: az együttes forgás impulzusmomentuma a mag szimmetriatengelyére mindenkor merőleges.^{x/} Mint /18/-ből vagy /35/-ből látható, a /65/ feltétel teljesülése esetén a /63/ állapotfüggvény az $\alpha\beta\gamma$ Euler-szögek közül γ -t nem tartalmazza. Eszerint, ha feltesszük a kérdést: mi annak a valószínűsége, hogy a magfelülethez rögzített S' koordinátarendszer a térben /a laboratóriumi S rendszerre vonatkoztatva/ az $\alpha\beta\gamma$ Euler-szögekkel jellemzett helyzetet foglalja el, azt a választ kapjuk, hogy ez a valószínűség független γ -tól. Az S' rendszer x' -, y' -tengelyeinek helyzete a z' -tengelyre merőleges síkban teljesen határozatlan.

Egy további természetes feltevés, hogy a mag alakja tükrözésszimmetrikus a /szimmetriatengelyre merőleges és a kezdőponton áthaladó/ $z' = 0$ síkra. Ezzel a feltevéssel a körtealaku egyensúlyi helyzettel rendelkező magfelület esetét rekesztjük ki a tárgyalásból. Itt is elmondhatjuk, hogy a tett feltevés a tapasztalat tanúsága szerint az esetek nagy többségében jogos. Ahhoz, hogy ezen szimmetria következményeit megállapíthassuk, ismerünk kell a $D_{MK}^I(\alpha\beta\gamma)$ sajátfüggvények tükrözési tulajdonságait. - Minthogy a $D_{MK}^I(\alpha\beta\gamma)$ függvényeket, akárcsak magukat az $\alpha\beta\gamma$ Euler-szögeket, az 1.szakaszban egy jobbsodrású koordinátarendszerről egy másik jobbsodrású rendszerre való áttéréssel kapcsolatba vezettük be és balsodrású rendszerre való áttérésről egy szó sem esett, a tükrözési tulajdonságok általános vizsgálata részletes megfontolásokat tenne szükségessé. Szerencsére ezeket mellőzhetjük. A bennünket érdeklő $K = 0$ esetben ugyanis, mint láttuk a $D_{MK}^I(\alpha\beta\gamma)$ sajátfüggvény csak az α, β szögektől függ, γ -t egyáltalán nem tartalmazza. E szögek egyszerű jelentése: β a szimmetriatengely irányának polárszöge, α pedig annak azimutja. A magalak tükrözése eszerint egyszerűen a szimmetriatengely tükrözését, ellentétes irányúvá való átvál-

x/ Ez összhangban van azzal, hogy gömbszimmetrikus egyensúlyi alakkal rendelkező magoknál sohasem figyeltek meg forgási állapotokat.

toztatását jelenti. De ugyanezt érjük el, ha tükrözés helyett 180° -os elforgatást hajtunk végre egy a szimmetriatengelyre merőleges tengely, pl. az y' -tengely körül. A /63/ sajátfüggvény megváltozását e forgatás során a /28/ operátor írja le, ahol most a kitevőbe értelemszerűen az R operátor irandó. Az y' -tengely körül π szöggel elforgatott pörgetyű állapotfüggvénye tehát

$$\phi'_{IKM} = e^{-\frac{i\pi}{\hbar} R_{y'}} \phi_{IKM} . \quad /66/$$

A /9/ és /12/ képletek alapján írható:

$$(IK' | e^{-\frac{i\pi}{\hbar} R_{y'}} | IK) = D_{K'K}^{I*}(0\pi 0) \quad /67/$$

A /12/-ben szereplő M , M' helyére itt nyilván az együttmozgó S' rendszerre vonatkoztatott impulzuszórántum-vetületeket jelző K, K' kvantumszámokat kellett írunk. Megjegyezzük, hogy a /63/ sajátfüggvényekkel képezett /67/ matrixelemben az M indexet, mint feleslegeset, elhagytuk. Mint /40/-ből is látható, a /66/-/67/ kitevőjében szereplő $R_{y'}$ operátor M -re nem hat s így a /67/ matrix M -ben átlós és független tőle. A /18/ és /19/ képletek alapján megállapítható, hogy $D_{K'K}^I(0\pi 0) = (-1)^{I-K} \delta_{K,-K'}$. Ezt figyelembe véve, /66/ és /67/ felhasználásával írhatjuk:

$$\begin{aligned} \phi'_{IKM} &= \sum_{K'} \phi_{IK'M} (IK' | e^{-\frac{i\pi}{\hbar} R_{y'}} | IK) = \\ &= \sum_{K'} \phi_{IK'M} D_{K'K}^{I*}(0\pi 0) = \\ &= (-1)^{I-K} \sum_{K'} \delta_{K,-K'} \phi_{IK'M} , \end{aligned}$$

vagyis

$$\phi'_{IKM} = (-1)^{I-K} \phi_{I,-K,M} . \quad /68/$$

A tengelyszimmetriából adódott /65/ megszorításnak alávetett állapotokra kapjuk:

$$\phi'_{IOM} = (-1)^I \phi_{IOM} . \quad /69/$$

A /66/ képletet megelőző megfontolás szerint a $K = 0$ esetben az y' -tengely körüli π szögű forgatás egyenértékű a $z' = 0$ síkra való tükrözéssel. A /69/ alatt felírt ϕ'_{IOM} függvény felfogható tehát, mint a ϕ_{IOM} sajátfüggvénynek a $z' = 0$ síkra való tükrözés eredményeként adódott transzformáltja.

A $z'=0$ síkra való tükrözéskor a forgás állapot-függvénye /69/ szerint páros értékeire változatlan marad, páratlan értékeire pedig jelet vált. Aage Bohr megköveteli, hogy az állapotfüggvény e tükrözés alkalmazásakor minden esetben maradjon változatlan. A. Bohr e követelménye értelmében a forgási állapotok impulzusmomentuma és paritása csak páros lehet:

$$0^+, 2^+, 4^+, 6^+, \dots \quad /70/$$

Mint látni fogjuk, a megfigyelések beigazolták e követelmény helyességét.

Megjegyezzük, hogy az impulzusmomentumok /70/ sorozatával találkozunk a zérus spinű, azonos magokat tartalmazó kétatomos molekulás rotációs spektrumában is. E molekulák éppen azokat a szimmetriatulajdonságokat mutatják, amelyeket mi feltevéseinkkel a magalaknak tulajdonítottunk. A molekulák esetében a rotációs állapotfüggvény szimmetriája a szimmetriatengelyre merőleges, a középponton átfektetett síkra való tükrözéssel szemben arra vezethető vissza, hogy zérus spinű magok bozonok, így felcserélésük /mely éppen a mondott tükrözéssel egyenértékű/ az állapotfüggvényt mindenkor változatlanul hagyja.

Az atommagok forgási állapotainak energiájára kapott /64/ kifejezés /65/ figyelembevételével és az $E_I \equiv E_{I0}$ jelölés mellett az

$$E_I = \frac{\hbar^2}{2J} I(I+1) \quad /71/$$

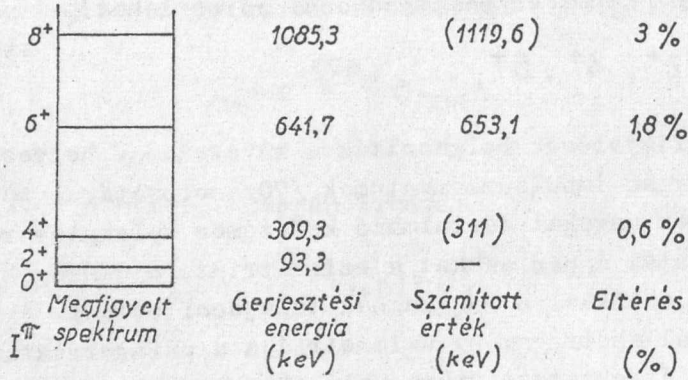
alakot ölti, ahol I a /70/ értékeket veheti fel.

Az erősen deformált páros-páros magok alacsonyan fekvő állapotai általában rendre a /70/ sorozatban megadott impulzusmomentum-értékekkel rendelkeznek, paritásuk páros, gerjesztési energiájuk általában kielégítően, nem egy esetben meglepően nagy pontossággal kiadódik a /71/ képletből. Az egyes gerjesztett energiaszintek E_2, E_4, E_6, E_8 gerjesztési energiáinak viszonyára /71/-ből a következő értékek adódnak:

$$\frac{E_4}{E_2} = \frac{10}{3}, \quad \frac{E_6}{E_2} = 7, \quad \frac{E_8}{E_2} = 12. \quad /72/$$

A megfigyelt gerjesztési energiák viszonyát a /72/ értékekkel összehasonlítva szemléltető ábra található pl. Moszkowski Nuclear Models c. cikkében /Handbuch der Physik, 2 kötet, 13. ábra/, vagy az Elméleti Magfizika c. könyvecskében /Műszaki Kiadó, 1961, 29. ábra/. Az egyezés általában kielégítő, különösen azoknál a magoknál meglepően pontos, amelyekben a proton- és neutronszám távol esik a mágikus számoktól.

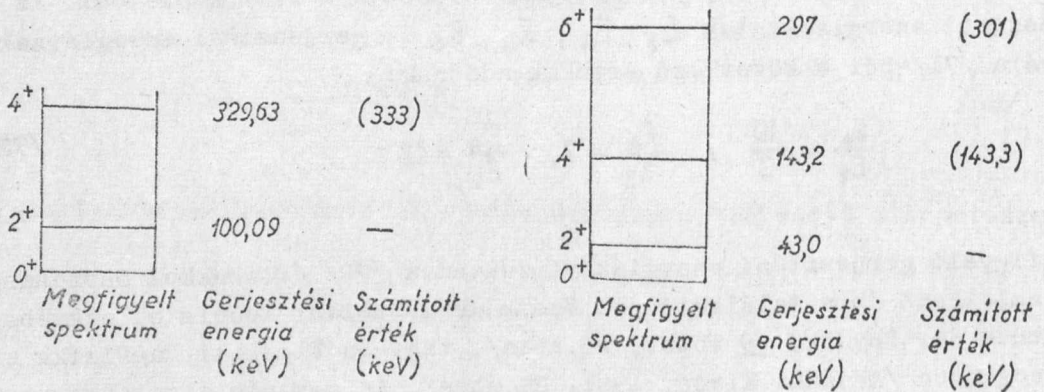
E pont befejezéseként vegyük szemügyre néhány páros-páros mag megfigyelt forgási spektrumát.



2. ábra ${}^{180}_{72}\text{Hf}$ spektruma

A 2. ábra ${}^{180}_{72}\text{Hf}$ spektrumát mutatja. A zárójelbe foglalt értékek számítása a /71/ képletből történt. A képletben szereplő J tehetetlenségi nyomatékot tapasztalati paraméternek tekintjük; meghatározása céljából az első gerjesztett állapot mért energiáját E_2 /71/-ből adódó kifejezéssel tesszük egyenlővé: $\frac{3\hbar^2}{J} = 93,3 \text{ keV}$. A számított és mért érték eltérése

E_4, E_6, E_8 esetében rendre 0,6 %, 1,8 %, 3 %, az egyezés tehát kiválónak mondható.

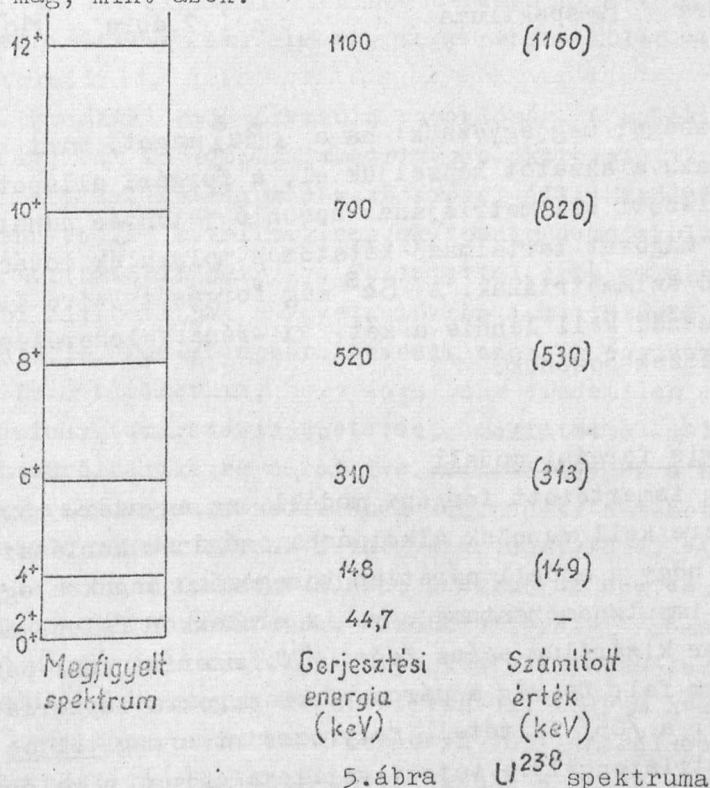


3. ábra ${}^{182}_{72}\text{W}$ spektruma

4. ábra ${}^{234}_{90}\text{U}$ spektruma

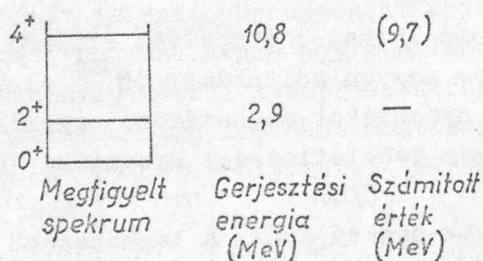
A 3.ábrán a szomszédos W^{182} mag spektruma látható. Figyelmet érdemel, hogy az első gerjesztett állapot energiája nem nagyon különbözik Hf^{180} első gerjesztett állapotáétól. A tehetetlenségi nyomatékot meghatározó egyenlet most $\frac{3\hbar^2}{J} = 100,09 \text{ keV}$. A két szomszédos mag tehetetlenségi nyomatéka közelítőleg egyenlő, ami észszerű eredmény.

A 4.ábrán az atommagok táblázatának más tájáról, a legnehezebb magok közül vett példát mutatunk be: U^{234} forgási spektrumát. Az első gerjesztett állapot energiájának kisebb értéke mutatja: a tehetetlenségi nyomaték itt több, mint kétszer akkora, mint az előbbi magoknál. Ez érthető: U^{234} jóval nehezebb mag, mint azok.

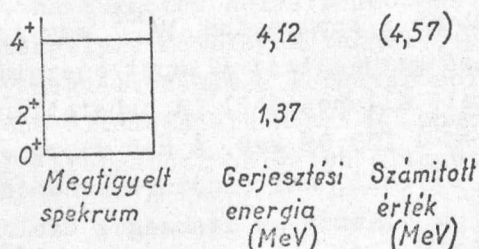


Az 5.ábra a forgási spektrumok egy különlegesen szépen kifejlett példányát mutatja: egy másik urán-izotóp, U^{238} spektrumát. Most is azt találjuk hogy a két közeleső tömegszámú mag / U^{234} , U^{238} / tehetetlenségi nyomatéka jó közelítéssel egyezik.

A 6. és 7.ábra két könnyű mag, Be^8 és Mg^{24} forgási spektrumát mutatja. Az egyezés itt lényegesen pontatlanabb, mint a nehezebb magoknál. Ez érthető: ilyen könnyű magoknál a forgási állapotok gerjesztési energiája összemérhető a részecske-gerjesztéshez tartozó energiákkal; így az együttes forgás és a nukleonok magon belüli mozgásának kölcsönhatása, mely a nehezebb magoknál jelentéktelen, a könnyű magoknál szerephez jut: perturbálja a forgási spektrumot.



6. ábra Be^8 spektruma



7. ábra Mg^{24} spektruma

Mint érdekességet megjegyezzük: ha a 4Be_4^8 magot, mint két α -részből álló súlyzó alaku alakzatot képzeljük el, a forgási állapotfüggvény A. Bohr által feltételezett szimmetriájának hasonló jelentés adható, mint az azonos zérus-spinű magokat tartalmazó kétatomos molekulák rotációs spektruma esetében fellépő szimmetriának. A Be^8 mag forgását leíró állapotfüggvénynek szimmetrikusnak kell lennie a két α -rész felcserélésével szemben, minthogy az α -részek bozonok.

c/ A kvázimolekuláris forgási modell

Az előzőekben ismertetett forgási modell, az egyszerű pörgettyű-modell sikerei mellett észre kell vennünk alkalmazhatóságának korlátait is. Mindezek előtt világos, hogy a modell páratlan tömegszámú magokra egyáltalán nem alkalmazható. Ezek impulzusmomentuma ugyanis mindenkor feles, a pörgettyű-modellben ugyanakkor kizárólag egész /sőt: /70/ szerint csak páros/ impulzusmomentumok léptek fel. De még a páros-páros magokra is korlátozottan alkalmazható a modell: a /65/ feltétel, mely szerint a mag teljes impulzusmomentumának a szimmetriatengelyre vetett vetülete zérus, a valóságban nem mindig teljesül. Az együttes forgás impulzusmomentuma, mint az a /65/-höz vezető okoskodásból kitűnik, tengelyszimmetrikus magban természetesen mindenkor merőleges a szimmetriatengelyre, de nem zárhatjuk ki, hogy a magban keringő nukleonok közül egyiknek vagy másiknak szimmetriatengelymenti impulzusmomentum-vetülete zérustól különbözzék. Szükség van tehát a pörgettyű-modell továbbfejlesztésére. Ez Aage Bohr gondolatai nyomán végezhető el, továbbmenve a deformált atommagok és a kétatomos molekulák között felismert hasonlóság kiaknázásában.

Már a héjmodell megtanított bennünket arra, hogy sok atommag alapállapotban és kis energiájú kölcsönhatásokban mutatott viselkedését meg lehet érteni csupán a legkülső néhány /kedvező esetben: egy/ nukleon szabadsági fokait figyelembevéve. A mag alkotórészeinek tulnyomó többségét alkotó többi nukleon együttesen mint semleges, passzív "törzs" vehető tekintetbe. A törzs nukleonjainak individuális szabadsági fokai ezekben a jelenségekben nem játszanak szerepet.

Ezek alapján önként kínálkozik a pörgettyű-modell természetes általánosításának lehetősége. A deformált magtörzset hasonlítjuk pörgettyűhöz s a benne foglalt nukleonok individuális szabadsági fokait nem vesszük expliciten figyelembe. Viszont expliciten tekintetbe vesszük a törzs által keltett deformált potenciáltérben keringő egy vagy néhány külső nukleon individuális szabadsági fokait.

A molekulákkal nyilvánvaló a hasonlóság. A molekulában uralkodó, a magok által keltett nem-gömbszimmetrikus elektrosztatikus tér a deformált magtörzs nem-gömbszimmetrikus magerőterével állítható párhuzamba, a magtörzs terében keringő külső nukleon/ok/ pedig a molekula terében mozgó elektron/ok/hoz hasonlítható/k/. Tekintettel erre az analógiára, nyerte a magok forgási állapotainak a következőkben ismertetésre kerülő modellje a "kvázimolekuláris modell" nevet. Nevezik azonban egyszerűen forgási modellnek is. Meg kell említenünk, hogy Aage Bohr eredetileg a magtörzset mint /ellipszoid alakú/ folyadékcseppet vette tekintetbe, melyben az áramlás a klasszikus hidrodinamika egyenleteivel írható le. Ez a hidrodinamikai modell azonban túlságosan durva közelítésnek bizonyult: a tehetetlenségi nyomatéokra a tapasztalati értékek csupán felét-egyötödét adta. Minthogy a törzs hidrodinamikai leírása a forgási állapotok esetében nem vezet kielégítő eredményekre, ismertetését mellőzzük, a tehetetlenségi nyomatékot pedig - mint azt az előző pontban is tettük, - tapasztalati paraméternek tekintjük.

A mondottaknak megfelelően feltesszük, hogy a kvázimolekuláris forgási modell Hamilton-operátora a pörgettyű /62/ energiaoperátorának, valamint a külső részecskék H_k Hamilton-operátorának összege alakjában írható fel:

$$H = \frac{R^2}{2J} + \left(\frac{1}{2J_z} - \frac{1}{2J} \right) R_z^2 + H_k. \quad /73/$$

A külső nukleonok mozgását legcélszerűbb a magtörzshöz rögzített S' koordinátarendszerben szemlélni. Észszerű feltételezni, hogy e nukleonok az együtforgó S' rendszerben mozgásukat /nulladik közelítésben/ a deformált magtörzs keltette sztatikus, tengelyszimmetrikus erőter hatására végzik. Egy külső nukleon esetében eszerint H_k -t a

$$H_k = -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta' + V(x'y'z') \quad /74/$$

alakban írjuk fel, ahol $V(x'y'z')$ a törzs terének potenciálját jelöli. Kiegészíthető H_k pl. a spin-pálya-kölcsönhatással, több külső nukleon esetén a maradékkölcsönhatással. A /74/ képletben $\Delta' = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2}$; $x'y'z'$ a külső nukleonnak a törzshöz rögzített S' koordinátarendszerre vonatkoztatott koordinátáit jelentik.

Az S laboratóriumi koordinátarendszerben a szemügyre vett, magtörzsből és külső nukleonokból álló rendszert a következő független változók jellemzik: a magtörzs helyzetét az $\alpha\beta\gamma$ Euler-szögek határozzák meg, a külső nukleonok helyzetének jellemzésére pedig az S rendszerbeli derékszögű koordinátákat használjuk, melyeket x_i, y_i, z_i -vel jelölünk. A külső nukleonok S' rendszerbeli x'_i, y'_i, z'_i koordinátái voltaképpen relatív koordináták: a külső nukleonok és a magtörzs egymáshoz viszonyított helyzetét határozzák meg.

A mag teljes impulzusmomentumának I operátora a törzs R és a külső részecskék J impulzusmomentum-operátorának összege alakjában írható fel:

$$I = R + J. \quad /75/$$

Az R operátor a törzs helyzetét jellemző $\alpha\beta\gamma$ Euler-szögekre /lásd az 1.szakasz b/ pontját/, J pedig a részecskék koordinátáira hat. A törzs impulzusmomentum-operátorát /75/-ből az $R = I - J$ alakban kifejezve és /73/ ba helyettesítve kapjuk:

$$\begin{aligned} H &= \frac{(I-J)^2}{2J} + \left(\frac{1}{2J_z} - \frac{1}{2J} \right) (I_z - J_z)^2 + H_k = \\ &= \frac{I^2}{2J} + \left(\frac{1}{2J_z} - \frac{1}{2J} \right) (I_z - J_z)^2 + H'_k - \frac{IJ_z}{J}. \end{aligned} \quad /76/$$

Itt H'_k -vel a $H_k + J^2/2J$ operátort jelöltük; ez a magtörzshöz rögzített S' rendszerre vonatkoztatott változókkal kifejezett alakjában csak az x'_i, y'_i, z'_i részecskeváltozókra hat. A H'_k operátor sajátértékegyenlete:

$$H'_k \chi_\Omega^\tau(x'_i, y'_i, z'_i) = \varepsilon_\Omega^\tau \chi_\Omega^\tau(x'_i, y'_i, z'_i). \quad /77/$$

Mint hogy a törzs terének H'_k -ben szereplő potenciálja nem gömbszimmetrikus, a χ sajátfüggvények nem jellemezhetők a J impulzusmomentum meghatározott értékeivel. Tengelyszimmetrikus erőter esetében azonban megkövetlehetjük, hogy χ /77/-tel egyidejűleg a

$$J_z \chi_\Omega^\tau = \hbar \Omega \chi_\Omega^\tau \quad /78/$$

sajátértékegyenletnek is eleget tegyen. /A $\mathcal{Q}$ szimbolummal azon kvantum-számok összességét jelöltük, melyek Ω mellett az állapot egyértelmű jellemzéséhez szükségesek./

A /76/ Hamilton-operátor /közelítő/ sajátfüggvényeinek megszerkesztése során hasznosnak fog bizonyulni a

$$\underline{I} \chi_{\Omega}^{\tau}(x_i y_i z_i) = 0 \quad /79/$$

összefüggés. Ezt az 1.szakasz b/ pontjában igazoltuk /lásd /31//. Tartalma szavakban így fejezhető ki: ha a törzset és a külső nukleonokat azonos elforgatásnak vetjük alá /ennek a forgatásnak infinitezimális operátora az $\underline{I}$ operátor/, viszonylagos helyzetük nem változik meg, a vesszős változókat /a törzs és a külső részecskék relatív koordinátáit/ és azok függvényeit a transzformáció nem érinti. Éppen ennek tömör matematikai kifejezése a /79/ összefüggés.

Tegyük fel most, hogy ismerjük a $\mathcal{J} \equiv (\alpha \beta \gamma)$ Euler-szögeknek egy $D(\mathcal{J})$ függvényét, mely sajátfüggvénye az $\underline{I}$ impulzusmomentum négyzetének és a szimmetriatengelymenti I_z komponensnek:

$$\left. \begin{aligned} \underline{I}^2 D(\mathcal{J}) &= \hbar^2 I(I+1) D(\mathcal{J}), \\ I_z \cdot D(\mathcal{J}) &= \hbar K D(\mathcal{J}). \end{aligned} \right\} \quad /80/$$

Ez esetben azonnal belátható, hogy a

$$\psi = \text{const. } D(\mathcal{J}) \chi_{\Omega}^{\tau}(x_i y_i z_i) \quad /81/$$

függvény sajátfüggvénye a /76/ Hamilton-operátornak, hacsak annak utolsó tagját elhagyjuk, vagyis fennáll a

$$H_0 \psi = E_{IK\Omega}^{\tau} \psi \quad /82/$$

sajátértékegyenlet, ahol $H_0 = H + \underline{I} \mathcal{J} / J$. A $E_{IK\Omega}^{\tau}$ sajátértékre az

$$E_{IK\Omega}^{\tau} = E_{\Omega}^{\tau} + \frac{\hbar^2 I(I+1)}{2J} + \left(\frac{\hbar^2}{2J_z} - \frac{\hbar^2}{2J} \right) (K - \Omega)^2 \quad /83/$$

kifejezést kapjuk. Midőn a /82/ sajátértékegyenlet fennállásának igazolása céljából H_0 -t a /81/ alatt felírt ψ -re alkalmazzuk, a /77/, /78/, /80/ sajátértékegyenletek mellett figyelembe kell vennünk, hogy $\underline{I}$ /79/ szerint csak a D tényezőre hat: $\underline{I} \psi = (\underline{I} D) \chi$, ugyanakkor nyilvánvaló, hogy a

J_z és H'_k operátorok csak a részecske-változók χ függvényére hatnak, az Euler-szögekre nem.

A /80/ sajátértékegyenleteket kielégítő függvényt könnyű megtalálni. Mindenek előtt jegyezzük meg, hogy a külső részecskék $\underline{J}$ impulzusmomentum-operátora /mely a részecske-koordinátákra ható differenciáloperátorok kombinációja/ a $\mathcal{J} \equiv (\alpha\beta\gamma)$ Euler-szögek függvényeire alkalmazva zérust ad. Figyelembe véve /75/-öt, írhatjuk:

$$\underline{J} D(\mathcal{J}) = 0 \qquad \underline{I} D(\mathcal{J}) = R D(\mathcal{J}). \qquad /84/$$

A $\mathcal{J} \equiv (\alpha\beta\gamma)$ Euler-szögek olyan függvényeit, melyek az R impulzusmomentum-operátor négyzetének, Z' -komponensének, továbbá Z -komponensének saját-függvényei, a Matematikai előkészítés során megismertük, a forgásmatrix elemeinek személyében. A /84/ egyenletekből világos, hogy ezek ugyanekkor az $\underline{I}$ teljes impulzusmomentum sajátértékegyenleteit is kielégítik. Eszerint /39/, /43/, /46/ és /84/ figyelembe vételével írható:

$$\underline{I}^2 D_{MK}^I(\mathcal{J}) = \hbar^2 I(I+1) D_{MK}^I(\mathcal{J}),$$

$$I_z D_{MK}^I(\mathcal{J}) = \hbar K D_{MK}^I(\mathcal{J}),$$

$$I_z D_{MK}^I(\mathcal{J}) = \hbar M D_{MK}^I(\mathcal{J}).$$

/85/

Most már pontosabban írhatjuk /81/ helyett: $\approx$

$$\psi_{IKM\Omega}^{\mathcal{J}} = \left(\frac{2I+1}{8\pi^2} \right)^{1/2} D_{MK}^I(\alpha\beta\gamma) \chi_{\Omega}^I(x'_i y'_i z'_i). \qquad /86/$$

/Ha χ a részecskeváltozók normált függvénye, a választott együttható mellett ψ normált./

Ez tehát a /76/-beli utolsó tag elhanyagolásával kapott közelítő Hamilton-operátornak a /83/ sajátértékhez tartozó sajátfüggvénye. Az elhanyagolt utolsó tagot a későbbiekben perturbációszámítással tekintetbe vesszük.

Hasonlóan ahhoz, ahogy az előző /b/ pontban tettük, vessük fel most is a kérdést: Milyen korlátozások adódnak a sajátfüggvényekre és sajátértékekre a magtörzs feltételezett szimmetriáiból? A tengelyszimmetriából most is levonhatjuk a következtetést, miszerint a törzs együttes forgásából származó impulzusmomentum szimmetriatengelymenti vetületének el kell tűnnie. A /86/ sajátfüggvénynek tehát teljesítenie kell az

x/ A /86/ függvény által leírt impulzus-momentum-kapcsolódással a Függelék D. pontja foglalkozik.

$$R_z \psi_{IKM\Omega}^\tau = 0 \quad /87/$$

feltételt. A /75/, /78/, /85/ képleteket felhasználva és figyelembe véve, hogy a /86/ szorzatban $\underline{I}$ csak a $D(\mathcal{J})$, $\underline{J}$ csak a $\chi(x_i y_i z_i)$ tényezőre hat, kapjuk:

$$(I_z - J_z) \psi_{IKM\Omega}^\tau = \hbar(K - \Omega) \psi_{IKM\Omega}^\tau = 0 \quad /88/$$

A tengelyszimmetria feltételéből eszerint

$$K = \Omega \quad /89/$$

következik. A sajátfüggvények és sajátértékek feleslegessé vált Ω indexét a továbbiakban elhagyjuk.

Vizsgáljuk meg ezután, milyen következményekre vezet, ha feltesszük: a törzs alakja tükrözésszimmetrikus a /szimmetriatengelyre merőleges és a kezdőponton áthaladó/ $z' = 0$ síkra.

Ezen szimmetria következményeinek vizsgálatát most is, mint az előző pontban, megkönnyíti, hogy a mag ψ állapotfüggvénye eleget tesz a tengelyszimmetria feltételének, más szóval: független a szimmetriatengely körüli elfordulás γ szögétől. Valóban: R_z /35/ alakját /87/-be helyettesítve a

$$\frac{\partial \psi_{IKM}^\tau}{\partial \gamma} = 0 \quad /90/$$

egyenlőségre jutunk. - Ez az eredmény meglepőnek látszhat: a /86/ képletre pillantva azt gondolhatnánk, hogy ψ_{IKM}^τ a $D_{KM}^I(\alpha\beta\gamma)$ függvényében /18/ szerint szereplő $e^{iK\gamma}$ tényező alakjában tartalmazza γ -t. Nem szabad azonban megfeledkeznünk arról, hogy az S laboratóriumi rendszerben, melyben a törzs helyzetét az $\alpha\beta\gamma$ Euler-szögek jellemzik, a külső nukleonokat jellemző független koordináták a vesszőtlen $x_i y_i z_i$ változók. Az 1. szakasz a/ pontjának eredményei alapján a /86/-beli $\chi_K^\tau(x_i y_i z_i)$ függvényt^{x/} könnyű olyan alakra hozni, melyben a vesszős koordináták nem szerepelnek, hanem csak az S rendszerre vonatkoztatott $x_i y_i z_i$ és $\alpha\beta\gamma$ változók. Mindenek előtt fejtsük ki $\chi_K^\tau(x_i y_i z_i)$ -t a $\underline{J}^2$ operátor $\chi_{JK}^\tau(x_i y_i z_i)$ sajátfüggvényei szerint:

$$\chi_K^\tau(x_i y_i z_i) = \sum_J C_J \chi_{JK}^\tau(x_i y_i z_i) \quad /91/$$

x/ Most figyelembe vettük /89/-et.

Értelemszerűen alkalmazva a /13/ transzformációs képletet, $\chi_{JK}^T(x_i y_i z_i)$ -t kifejezhetjük az S laborrendszerbeli $\tilde{\chi}_{JK}^T(x_i y_i z_i)$ impulzusmomentum-sajátfüggvények lineáris kombinációja alakjában:

$$\chi_{JK}^T(x_i y_i z_i) = \sum_K D_{K'K}^{J*}(\alpha\beta\gamma) \tilde{\chi}_{JK'}^T(x_i y_i z_i). \quad /92/$$

A /86/ sajátfüggvény /91/ és /92/ alapján a

$$\psi_{IKM}^T = \left(\frac{2I+1}{8\pi^2} \right)^{1/2} \sum_J \sum_{K'} C_J D_{MK}^I(\alpha\beta\gamma) D_{K'K}^{J*}(\alpha\beta\gamma) \tilde{\chi}_{JK'}^T(x_i y_i z_i) \quad /93/$$

alakban írható fel. Ez ψ kívánt alakja: független változókként itt az rendszerre vonatkoztatott $\alpha\beta\gamma$ és $x_i y_i z_i$ koordináták szerepelnek. Ebben az alakban ψ tengelyszimmetriája / γ -függetlensége/ szembeszökő: a Euler-szög /18/ értelmében D_{MK}^I -ban az $e^{iK\gamma}$ alakban, $D_{K'K}^{J*}$ -ban pedig az $e^{-iK'\gamma}$ alakban szerepel; a két D-függvény szorzatából a γ -függés kiesik.

Miután beláttuk, hogy ψ_{IKM}^T az Euler-szögek közül ténylegesen csak α -tól és β -tól függ, alkalmazhatjuk a b/ pontban már használt fogást: a megtörzs alakjának /vagyis az Euler-szögeknek/ a $z'=0$ szimmetriasíkra való tükrözését helyettesíthetjük az y' tengely körül elvégzett π szögű forgatással. A /68/, /66/, /63/ képletek szerint a D-függvény ezen elforgatás alkalmazásakor

$$e^{-\frac{i\pi}{\hbar} R y'} D_{mm'}^j(\alpha\beta\gamma) = (-1)^{j-m'} D_{m,-m'}^j(\alpha\beta\gamma) \quad /94/$$

szerint transzformálódik. Ennek alapján a D-függvények /93/-ban szereplő szorzatának transzformációs képlete is megállapítható. A Függelék C.pontjában megmutatjuk, hogy

$$e^{-\frac{i\pi}{\hbar} R y'} D_{MK}^I(\alpha\beta\gamma) D_{K'K}^{J*}(\alpha\beta\gamma) = (-1)^{I-J} D_{M,-K}^I(\alpha\beta\gamma) D_{K',-K}^{J*}(\alpha\beta\gamma). \quad /95/$$

A /95/, /93/ képletek meghatározzák a ψ sajátfüggvények megváltozását a magtörzs alakjának a $z'=0$ síkra való tükrözésekor. Vezessük be a T operátort, amely leírja e tükrözésnek az állapotfüggvényre való hatását. Figyelembe véve a törzs tengelyszimmetriáját, továbbá a /95/, /93/ képleteket, írhatjuk:

$$T\psi_{IKM}^\tau = e^{-\frac{i\pi}{h} R_y} \psi_{IKM}^\tau = \left(\frac{2I+1}{8\pi^2}\right)^{1/2} (-1)^{I-J} \sum_J \sum_{K'} C_J D_{M,-K}^I(\alpha\beta\gamma) D_{K',-K}^{J*}(\alpha\beta\gamma) \chi_{JK}^\tau(x_i y_i z_i),$$

vagy /93/-at felhasználva:

$$T\psi_{IKM}^\tau = (-1)^{I-J} \psi_{I,-K,M}^\tau \quad /96/$$

A $(-1)^{I-J}$ szorzó operátorként értelmezendő: ha a mögötte álló függvényt kifejtjük a J^2 operátor sajátfüggvényei szerint /lásd /91/-et/, a sor azon tagjait, melyek $I-J$ páros értékeihez tartoznak $+1$ -gyel, a páratlan $I-J$ -hez tartozókat pedig -1 -gyel szorozza.

Vezessük be most - ismét A.Bohrt követve - a követelményt, hogy a mag Ψ állapotfüggvénye a törzs alakjának a $Z'=0$ szimmetriasíkra való tükrözésekor maradjon változatlan, vagyis

$$T\Psi = \Psi \quad /97/$$

legyen. Foglalkozzunk először a $K \neq 0$ esettel. A /96/ képletből látható, hogy a /86/-tal definiált ψ_{IKM}^τ függvények nem teljesíthetik a /97/ követelményt. Képezhetjük azonban ezek

$$\begin{aligned} \Psi_{IKM}^\tau &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{IKM}^\tau + T\psi_{IKM}^\tau) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{IKM}^\tau + (-1)^{I-J} \psi_{I,-K,M}^\tau] \end{aligned} \quad /98/$$

kombinációit, amelyekre /97/ nyilván teljesül^{xx/}.

A feltételezett szimmetriatulajdonságokkal rendelkező /98/ sajátfüggvénynek meghatározott paritás tulajdonítható. Vizsgáljuk meg, miképpen hat a mag P paritásoperátora /98/-ra. A P operátor azt mutatja meg, hogy milyen változást szenved a Ψ állapotfüggvény, ha a kezdőpontra vonatkozó tükrözést hajtunk végre. Tükrözni kell mind a törzset, /az Euler-szögeket/, mind pedig a külső nukleonokat /az $x_i y_i z_i$, vagy ami ugyanaz, az $x_i' y_i' z_i'$ részecskekoordinátákat^{xx/}/. A részecskekoordináták tükrözéséhez tartozó pa-

x/ Elliot megjegyzi: /97/ jobboldalán, valamint a /98/ kombinációban a jelet helyett(-)jelet is választhatnánk. Ezesetben Ψ a magalak tükrözésekor jelet váltana. A megfelelő állapotokhoz alkalmasint nagyobb gerjesztési energia tartozik.

xx/Minthogy az S laborrendszer és az S' együttmozgó rendszer kezdőpontja egybeesik, a vesszőtlen és a vesszős részecskeváltozók tükrözése egyenértékű.

ritásoperátort jelöljük Π -vel. Az Euler-szögek tükrözéséhez rendelt operátor tengelyszimmetrikus magtörzs esetén megegyezik a pl. /96/ alatt szereplő T operátorral. A T operátort mint a $z'=0$ síkra való tükrözés operátorát definiáltuk; a szemlélet azonban közvetlenül mutatja, hogy tengelyszimmetrikus magtörzs γ -tól független Ψ / esetében a kezdőpontra való tükrözés helyettesíthető a $z'=0$ síkra való tükrözéssel: mindkét átalakítás hatása abban áll, hogy a mag szimmetriatengelyének α, β szögekkel jellemzett/ iránya ellentettre változik. Tengelyszimmetrikus magtörzs esetén a mag paritásoperátora tehát a

$$P = T\Pi \quad /99/$$

alakban írható.

Írjuk fel most /86/ felhasználásával a /98/ állapotfüggvény explicit alakját:

$$\Psi_{IKM}^T = \left(\frac{2I+1}{16\pi^2}\right)^{1/2} \left[D_{MK}^I(\vartheta) X_K^T(x') + (-1)^{I-K} D_{M,-K}^I(\vartheta) X_{-K}^T(x') \right]. \quad /100/$$

/Itt $\vartheta \equiv (\alpha\beta\gamma)$, $x' \equiv (x'_1 y'_1 z'_1)$ / Az itt szereplő $X_K^T(x')$ függvényt /77/ szerint meghatározó H'_K Hamilton-operátorral a magtörzs feltételezett /tükrözési és tengely-/ szimmetriájából következően a külső nukleonok Π paritásoperátora felcserélhető. Megkövetelhetjük tehát, hogy $X_K^T(x')$ sajátfüggvénye legyen Π -nek:

$$\Pi X_K^T(x') = \Pi(x) \cdot X_K^T(x'); \quad /101/$$

a sajátérték, melyet $\Pi(x)$ -vel jelöltünk, a külső nukleonok paritása.^{x/}

A /99/ paritásoperátort a /97/ szimmetriakövetelménynek eleget tevő /100/ alakú sajátfüggvényre alkalmazva /101/ figyelembe vételével

$$P\Psi_{IKM}^T = \Pi(x) \Psi_{IKM}^T \quad /102/$$

adódik eredményül. Eszerint a /100/-al leírt magállapotok paritása a külső nukleonok paritásával egyenlő.

A /100/ állapotoknak egy olyan sorozatát, melyben egy és ugyanazon $X_K^T(x')$ függvény szerepel, forgási sávnak nevezzük. Minthogy a K vetület mindig kisebb, mint az I impulzusmomentum: $K \leq I$, egy forgási sávon belül a mag teljes impulzusmomentuma az

^{x/} Nyilván $\Pi(x)$ a paritása a /91/ alatti $X_{JK}^T(x')$ és a /93/ sorfejtésben szereplő $\hat{X}_{JK}^T(x)$ függvényeknek is

$$I = K, K+1, K+2, \dots$$

$$(K \neq 0)$$

/103/

értékeket veheti fel. A mag paritása /102/ szerint a forgási sáv mindegyik állapotában azonos: megegyezik a külső nukleonok $\chi_K^\tau(x')$ állapotfüggvényének paritásával. A forgás sáv energiaspektrumát /83/ adja: /89/ figyelembe vételével írható:

$$E_{IK}^\tau = E_K^\tau + \frac{\hbar^2 I(I+1)}{2J}, \quad \text{ahol } I = K, K+1, \dots \quad /104/$$

Itt E_K^τ a sávon belül természetesen állandó.

$15/2$	333	(339)
$13/2$	237	(247)
$11/2$	164	(167)
$9/2$	100	(99)
$7/2$	43,2	-
$5/2$		
Megfigyelt spektrum	Gerjesztési energia (keV)	Számított érték (keV)

8. ábra Th^{229} spektruma

A 8. ábra egy páratlan tömegszámú mag, a Th^{229} szépen kifejezett $K = 5/2$ -es forgási spektrumát mutatja. A zárójelbe foglalt, /104/ alapján számított értékek kitűnően egyeznek a megfigyelt gerjesztési energiákkal.

Megjegyezzük, hogy a forgási spektrum /104/ energiaképlete lehetővé teszi a mag alapállapotú impulzusmomentuma, vagyis az I_0 magspin meghatározását. Vegyük szemügyre a mag alapállapotára épülő forgási sávot és képezzük az $I_0 + 2$ impulzusmomentumu második és az $I_0 + 1, I_0$ impulzusmomentumu első gerjesztett állapot gerjesztési energiájának viszonyát. E viszony /104/ szerint

$$\frac{E_{I_0+2, I_0}^\tau - E_{I_0, I_0}^\tau}{E_{I_0+1, I_0}^\tau - E_{I_0, I_0}^\tau} = \frac{(I_0+2)(I_0+3) - I_0(I_0+1)}{(I_0+1)(I_0+2) - I_0(I_0+1)} = 2 + \frac{1}{I_0+1}.$$

Látható, hogy a forgási sáv két legalsó szintjének gerjesztési energiáját mérve, a kapott képletből meghatározhatjuk az I_0 magspint.

Az előzőkben a $K \neq 0$ esettel foglalkoztunk. Legyen most $K=0$. Ekkor, mint /96/ mutatja, a szorzatalaku /86/ függvény szimmetrizálás nélkül is eleget tesz A.Bohr /97/ szimmetriakövetelményének, hacsak $(-1)^{I-J}=1$. /Ebből következik, hogy $K=0$ esetén a /91/ sorfejtésben $I =$ páros mellett csak páros, $I =$ páratlan mellett csak páratlan J -értékek szerepelnek./ Az egyre normált állapotfüggvény most a

$$\Psi_{IOM}^T = \left(\frac{2I+1}{8\pi^2} \right)^{1/2} D_{M0}^I(\vartheta) \chi_0^T(x') \quad /105/$$

alaku.

A $K=0$ -hez tartozó $\chi_0^T(x')$ függvény nyilván tengelyszimmetrikus függvénye változóinak. E szimmetriatulajdonság ismeretében, ezen függvény tényleges alakjának ismerete nélkül is meghatározhatjuk $\chi_0^T(x')$ paritását, $\Pi(X)$ -t. Tengelyszimmetria esetén ugyanis /mint már korábban megjegyeztük/ a kezdőpontra való tükrözés Π operátora helyettesíthető az tengely körüli Π szögű forgatás $e^{-\frac{i\pi}{\hbar} J_z}$ operátorával. A /91/ sorfejtést felhasználva, a /68/-hoz vezető számítás analógiájára kapjuk:

$$\begin{aligned} \Pi \chi_0^T(x') &= \\ &= e^{-\frac{i\pi}{\hbar} J_z} \chi_0^T(x') = e^{-\frac{i\pi}{\hbar} J_z} \sum_J C_J \chi_{J0}^T(x') = \\ &= \sum_J C_J \sum_K \chi_{JK}^T(x') D_{K0}^{J*}(0\pi 0) = \\ &= \sum_J C_J \sum_K \chi_{JK}^T(x') (-1)^J \delta_{0,-K} = \\ &= \sum (-1)^J C_J \chi_{J0}^T(x') = \\ &= (-1)^J \chi_0^T(x'). \end{aligned} \quad /106/$$

A most kapott eredményt és /96/-ot figyelembevéve megállapítható, hogy a /99/ paritásoperátor a következőképpen hat a /105/ állapotfüggvényre:

$$P \Psi_{IOM}^T = (-1)^I \Psi_{IOM}^T. \quad /107/$$

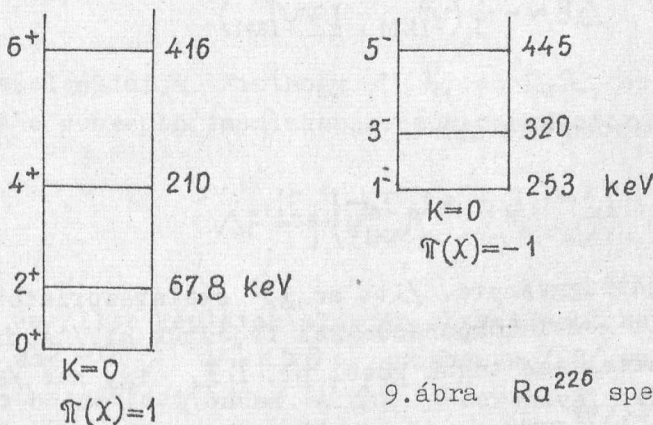
A /97/ szimmetriakövetelmény teljesülése esetén - mint /102/ is mutatja, - a mag teljes állapotfüggvényének paritása megegyezik a külső nukleonok $\pi(X)$ paritásával. A /107/ képlet figyelembe vételével a $K=0$ -s állapotokra írható: $\pi(X) = (-1)^I$. Ebből következik, hogy ha $K=0$ és a külső nukleonok állapota páros paritású: $\pi(X) = 1$, a forgási sáv állapotainak impulzusmomentuma és paritása a

$$0^+, 2^+, 4^+, 6^+, \dots \quad /108/$$

értékeket veheti fel. Ez egyezik a pörgettyű-modell alapján kapott /70/ eredménnyel. Ilyen sávokra az előző pont végén számos példát mutattunk. Ha viszont $\pi(X) = -1$, a forgási sáv állapotainak megengedett impulzusmomentum- és paritásértékei:

$$1^-, 3^-, 5^-, \dots \quad /109/$$

Ilyen sávra példát a 9. ábra mutat, melyen Ra^{226} forgási spektruma látható. A $K=0$, $\pi(X)=1$ alapállapotra épülő /108/ típusú sáv mellett felépít egy /109/ típusú sáv is, mely a $K=0$, $\pi(X)=-1$ 253 keV-os gerjesztett állapotra épül.



9. ábra Ra^{226} spektruma

d/ Forgás-részecske-kölcsönhatás: a lekapcsolódás

Az eddigiek során a forgási modell Hamilton-operátorának /76/ kifejezésében az utolsó helyen álló $-\frac{I^2}{J}$ tagot elhanyagoltuk. Ez az elhanyagolás tette lehetővé, hogy a sajátfüggvényeket a $\psi \equiv (\alpha\beta\gamma)$ Euler-szögek, ill. az együttmozgó rendszerbeli $x' \equiv (x'_i y'_i z'_i)$ részecske-koordináták függvényeinek szorzata alakjában keressük /lásd /81/-et/. Az

$$FRK = -\frac{I^2}{J} \quad /110/$$

tag, a /76/ Hamilton-operátor többi tagjától eltérően, egyaránt hat az Euler szögekre és a részecske-koordinátákra, ezért kapta a forgás-részecske-kölcsönhatás / FRK / nevet. Nevezik ezen kívül Coriolis-kölcsönhatásnak is.

Ez utóbbi elnevezés indokolására felidézzük, hogy pl. egy Ω szögsebességgel forgó rendszerben mozgó tömegpontra ható Coriolis-erőt a Hamilton-operátorban a

$$-\Omega \underline{J} \quad /111/$$

tag képviseli, ahol $\underline{J} = \underline{r} \times \underline{p}$ a részecske impulzusmomentuma /lásd pl. Békéssy, Freud, Marx, Nagy, Elméleti Fizikai Feladatok, Tankönyvkiadó, 1951. 210. old./ . Másrésről a /75/ képletet felhasználva /110/ az $FRK = -\underline{R} \underline{J} / \underline{J}^2 / \underline{J}$ alakra hozható; itt az első tagban $\underline{R} / \underline{J}$ mint az együttes forgás szögsebességét értelmezhetjük, ez a tag tehát /111/-nek felel meg /a második tag kizárólag a részecske-koordinátákra hat; nem ír le kölcsönhatást/.

A forgás-részecske-kölcsönhatás okozta ΔE energiaváltozást a perturbációszámítás első közelítésében a /110/ operátornak a /100/, ill. /105/ perturbálatlan sajátfüggvénnyel képezett várható értéke szolgáltatja:

$$\Delta E = -\frac{1}{J} (\psi_{IKM}^\dagger, \underline{J} \psi_{IKM}^\dagger). \quad /112/$$

Vizsgáljuk meg először, miképpen hat az

$$\underline{J} = -I_1 \underline{J}_1 + I_0 \underline{J}_0 - I_2 \underline{J}_2$$

operátor a /86/ szorzat-sajátfüggvényre. /Itt az $\underline{J} \underline{J}$ skalárszorzatot az együttmozgó S' rendszerbeli gömbi komponensekkel fejeztük ki./ A ± 1 indexű gömbi komponenseket tartalmazó tagok közül pl. $I_1 \underline{J}_1$ így hat /86/-ra:

$$\begin{aligned} I_1 \underline{J}_1 \psi_{IKM}^\dagger &= \left(\frac{2I+1}{8\pi^2} \right)^{1/2} \sum_J C_J \left[I_1 D_{MK}^I(\varphi) \right] \left[\underline{J}_1 \chi_{JK}^\dagger(x') \right] = \\ &= -\left(\frac{2I+1}{8\pi^2} \right)^{1/2} \sum_J C_J \hbar^2 \sqrt{\frac{I(I+1)-K(K-1)}{2}} \cdot \sqrt{\frac{J(J+1)-K(K-1)}{2}} \cdot D_{M,K-1}^I(\varphi) \cdot \chi_{J,K-1}^\dagger(x') \end{aligned} \quad /113/$$

Itt felhasználtuk /79/-et, /84/-et, a /91/ sorfejtést, továbbá az impulzusmomentum komponenseinek hatását az együttmozgó rendszerben meghatározó /a nyugvó rendszerben érvényes, megszokott formuláktól eltérő alakú/ /39/-/40/ képleteket. Ugyanugy kapjuk

$$L_{-1} J_1 \psi_{IKM}^T = - \left(\frac{2I+1}{8\pi^2} \right)^{1/2} \sum_j C_j \hbar^2 \sqrt{\frac{I(I+1)-K(K+1)}{2}} \sqrt{\frac{J(J+1)-K(K+1)}{2}} D_{M,K+1}^I(\vartheta) \chi_{J,K+1}^T(x'). \quad /114/$$

Mint látható, a /112/ operátor ± 1 indexű gömbi komponenseket tartalmazó tagjai az impulzuszórántum szimmetriatengelymenti vetületét megváltoztatják:

$K \rightarrow K \pm 1$ átmeneteket létesítenek. Az átlós mátrixelemek a /86/ sajátfüggvények rendszerében eltűnnek. - A /112/ operátor $L_0 J_0$ tagjának mind a /86/ függvény, mind az ilyenekből képezett /100/ szimmetrikus kombináció sajátfüggvénye, a /85/ és /78/-/89/ képletek szerint a $\hbar^2 K^2$ sajátérték mellett. Ez a tag tehát a perturbációszámítás első közelítésének a forgási állapotok energiaspektrumának /104/ képletéhez egy K^2 -tel arányos korrekciót szolgáltat. Minthogy azonban egy forgási sávon belül K rögzített érték, ez a korrekció egy forgási sáv szintjeinek egymáshoz viszonyított helyzetét nem befolyásolja s így beolvasható a /104/-beli ϵ_K^T -ba. A forgásrészcské-kölcsönhatás okozta energiaváltozás bennünket érdeklő részét eszerint /112/ helyett a

$$\Delta E' = \frac{1}{J} (\psi_{IKM}^T, [L_1 J_{-1} + L_{-1} J_1] \psi_{IKM}^T) \quad /115/$$

képlet szolgáltatja. Minthogy $L_{-1} J_{+1}$ az $L_{+1} J_{-1}$ operátornak hermitikus adjungáltja s a szereplő impulzuszórántum-operátorok matrixa valós, /115/ helyett írható:

$$\Delta E' = \frac{2}{J} (\psi_{IKM}^T, L_1 J_{-1} \psi_{IKM}^T). \quad /116/$$

A /105/ és /113/ képletek alapján közvetlenül megállapítható, hogy $K=0$ esetén $\Delta E'=0$. A $K>0$ esetben a /98/ szimmetrizált kombinációt kell /116/-be helyettesítenünk. A $\Delta E'$ energiaváltozást ekkor a /86/ alatti ψ_{IKM}^T függvényekkel képezett mátrixelemek következő lineáris kombinációja alakjában nyerjük:

$$\begin{aligned} \Delta E' &= \\ &= \frac{1}{J} \left[(\psi_{IKM}^T, L_1 J_{-1} \psi_{IKM}^T) + (\psi_{IKM}^T, L_1 J_{-1} (-1)^{I-J} \psi_{I-K,M}^T) + \right. \\ &\quad \left. + ((-1)^{I-J} \psi_{I-K,M}^T, L_1 J_{-1} \psi_{IKM}^T) + ((-1)^{I-J} \psi_{I-K,M}^T, L_1 J_{-1} (-1)^{I-J} \psi_{I-K,M}^T) \right]. \quad /117/ \end{aligned}$$

Mint /113/-ből leolvasható, az $I_1 J_1$ operátor el nem tűnő $(\psi_{IKM}^T, I_1 J_1, \psi_{IKM}^T)$ matrixelemeit a $K' = K-1$ kiválasztási szabály választja ki. A /117/ alatt szögletes zárójelben álló tagok közül az első, a második és a negyedik mindig, a harmadik pedig $-K \neq K-1$, $K \neq \frac{1}{2}$ esetén eltűnik. A forgás-részecske-kölcsönhatás okozta energiaváltozás eszerint csak a $K = \frac{1}{2}$ esetben különbözik zérustól; értéke ekkor /117/, /113/ szerint

$$\Delta E'_{(K=\frac{1}{2})} = \frac{\hbar^2}{2J} (I + \frac{1}{2}) (-1)^{I+\frac{1}{2}} \sum_j (-1)^{J-\frac{1}{2}} |C_j|^2 (J + \frac{1}{2}) \quad /118/$$

Itt figyelembe vettük, hogy $K = \frac{1}{2}$ esetén, I és J feles számok s így írható: $-(-1)^{I-J} = (-1)^{I-J+1} = (-1)^{I+\frac{1}{2}} (-1)^{J+\frac{1}{2}} = (-1)^{I+\frac{1}{2}} (-1)^{J+\frac{1}{2}}$.

A forgási állapotok energiaspektrumának /104/ képletét a forgás-részecske-kölcsönhatás okozta energiaváltozás most kapott kifejezésével kiegészítve kapjuk:

$$E_{IK} = \epsilon_K + \frac{\hbar^2}{2J} \left[I(I+1) + \delta_{K\frac{1}{2}} \alpha (-1)^{I+\frac{1}{2}} (I + \frac{1}{2}) \right] \quad /119/$$

ahol

$$\alpha = \sum_j (-1)^{J-\frac{1}{2}} |C_j|^2 (J + \frac{1}{2}). \quad /120/$$

Megjegyezzük, hogy a FRK okozta $\Delta E'$ energiaváltozás, mint /115/-ből is látható, a

$$\Delta E' = -\frac{1}{J} \langle I_1 J_1 \rangle \quad /121/$$

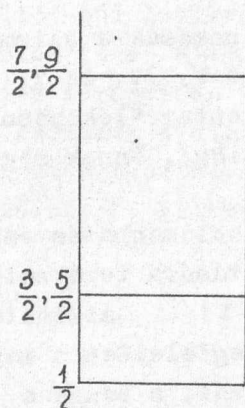
alakba írható. Itt I_1 , J_1 a megfelelő impulzusmomentum-operátoroknak a mag szimmetriatengelyére merőleges összetevőjét jelenti. - A térben rögzített helyzetű tengelyszimmetrikus erőter esetében szemléletünk alapján azt várjuk, hogy az erőterben mozgó részecskék J impulzusmomentuma a szimmetriatengely körül precesszál s eközben, a tengelyszimmetria folyományaképpen, semmilyen, a szimmetriatengelyre merőleges, adott iránnyal nem mutat korrelációt. Ha a tengelyszimmetrikus erőteret /vagyis az azt létesítő magtörzset/ forgásba hozzuk, /természetesen a szimmetriatengelyre merőleges tengely körül/, még ekkor is, elég lassu forgás esetén, azt várjuk, hogy a J impulzusmomentum zavartalanul precesszál a mag szimmetriatengelye körül, követve annak helyzetváltoztatásait és pl. a /klasszikusan a térben fix helyzetű/ teljes I impulzusmomentum I_1 összetevőjével való skaláris szorzata/ mely korrelációjukat méri/, átlagban eltűnik s így /121/ zérus. Ez a várakozás általában teljesül, kivéve a $K = \frac{1}{2}$ speciális esetet. Ilyenkor /121/ zé-

rustól különbözik, jelezvén azt, hogy $\underline{J}$ mozgása most nemcsak a szimmetria-tengelyhez, hanem a magspin $\underline{I}_1$ összetevőjéhez is igazodik, $\underline{J}_1$ és $\underline{I}_1$ között korreláció van. E jelenség neve: a $\underline{J}$ impulzusmomentum "lekapcsolódása" /t.i. a mag szimmetriatengelyéről; angolul: decoupling/. Ennek megfelelően /120/ elnevezése: a lekapcsolódás állandója.

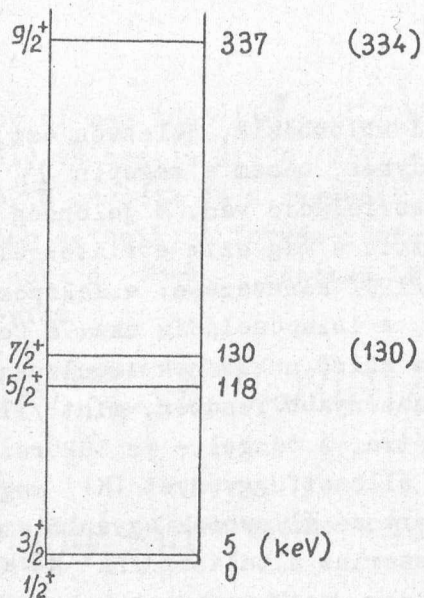
A lekapcsolódás oka: a Coriolis-erő. A Coriolis-kölcsönhatás vagy FRK a külső nukleonok impulzusmomentumának megváltoztatására törekszik. Legalacsonyabb rendben, mint /113/-/114/ mutatja, $K \rightarrow K \pm 1$ átmeneteket hoz létre. A tengely- és tükrörszimmetria feltevésének megfelelően a mag /100/ állapotfüggvényét $|K|$ meghatározott értéke jellemzi, s benne a $\pm K$ -hoz tartozó állapotok egyenlő amplitudóval szerepelnek. A $K \rightarrow K \pm 1$ átmenetek eszerint általában /ha $-K \neq K-1$ / a perturbációszámítás első közelítésében nem, csak a magasabb közelítésekben mehetnek végbe./ Ezek okozzák a forgási sávok keveredését, mellyel a következő pont foglalkozik./ Kivételt egyedül az az eset képez, amikor a Coriolis-kölcsönhatás előidézte legkisebb lehetséges /vagyis: egységnyi/ impulzusmomentum-változás ($K \rightarrow K \pm 1$) az impulzusmomentum tükrözésének felel meg: $K \rightarrow -K$. Ez éppen a $K = \frac{1}{2}$ eset. Ebben az esetben, minthogy a magtörzs tükrörszimmetriája folytán a /100/ állapotfüggvényben K és $-K$ egyaránt képviselve van, a Coriolis-kölcsönhatás járuléka, mint számításunk is mutatja, már a perturbáció-számítás első közelítésében zérustól különbözik.

Azt, hogy a jelenségek helyes leírásához a forgási spektrum képletében a $\delta_{K_2^1}$ -del arányos lekapcsolódási tag feltétlenül szükséges, mutatja a következő egyszerű példa. Tegyük fel, hogy a magtörzshöz egyetlen külső nukleon van kötve, $\Delta^{1/2}$ állapotban. Minthogy az $\Delta^{1/2}$ állapot gömbszimmetrikus, a rendszer forgási állapotainak energiája nem függhet a külső nukleon impulzusmomentumának /spinjének/ állásától. A forgási sáv minden energiaszintjének /az alapszintet kivéve/ kétszeresen elfajultnak kell lennie eszerint, a nukleonspin két beállási lehetőségének megfelelően. Ebben az esetben /120/-ből $a=1$ adódik. A lekapcsolási állandó ezen értéke mellett /119/-ből adódó energiaspektrum, mint azt a 10. ábra mutatja, éppen olyan, amilyennek a fenti megfontolások szerint lennie kell. - Megjegyezzük, hogy a molekulaspektroszkópusok jól ismerik a lekapcsolódás jelenségét: a $\sum^2$ állapot molekulákban pl. a lekapcsolási állandó $a = \pm 1$ értékeihez tartozó rotációs sávok ismeretesek.

A 11. ábrán $Tm^{141} K = \frac{1}{2}$ -hez tartozó forgási sávja látható. A lekapcsolódás befolyása jól felismerhető. A /119/ képlet két paraméterének rögzítése az első és második gerjesztett állapot energiájának felhasználásával történt. A lekapcsolási állandóra kapott érték - 0,86. A /119/ képletből számított, zárójelbe foglalt értékek jól egyeznek a mért gerjesztési

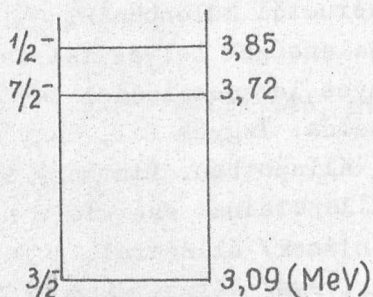


10. ábra. A /119/ képletből $K=\frac{1}{2}$, $a=1$ mellett számított spektrum



11. ábra Tm^{141} spektruma; $a=-0,86$

energiákkal. - Megjegyezzük, hogy $|a|$ nagy értékei esetén nem az $I=1/2$ impulzusmomentumu állapot a sáv alapállapota. Ilyen sávra példát a 12. ábrán láthatunk.



12. ábra $Al^{25} K=1/2$ sávja; $a \approx -3,2$

c/ Forgás-részecske-kölcsönhatás: a sávok keveredése

A térben rögzített helyzetű tengelyszimmetrikus erőterben a részecskék J impulzusmomentumának szimmetriatengelymenti vetülete mozgásállandó. A rendszer állapotfüggvénye tehát az ezen vetületet megadó K /ill. tükrös-szimmetria esetén $|K|$ / meghatározott értékével jellemezhető /vagyis: K "jó kvantumszám"/. A forgó magok leírására az eddigiekben használt /100/ közelítő állapotfüggvényhez K -nak ugyancsak meghatározott értéke tartozott;

ez a függvény azonban a forgási modell Hamilton-operátorának sajátérték-egyenletét csak a /76/-beli utolsó tag, a forgás-részecske-kölcsönhatás elhanyagolása mellett elégítette ki. A forgásrészecske-kölcsönhatás, mint /113/-/114/ mutatja, K -ban nem átlós alakú. Ha tehát ezt figyelembe vesszük, K nem jó kvantumszám többé s a magok forgási állapotait leíró állapotfüggvény mint K különböző értékeihez tartozó tagok lineáris kombinációja írható fel. Ilyenkor mondjuk azt, hogy a forgási sávok közt keveredés lép fel. A keveredés természetesen olyankor válik jelentőssé, ha két, azonos I teljes impulzusmomentumu, továbbá K -nak eggyel különböző értékeivel jellemzett magállapot energiakülönbsége viszonylag csekély.

Vegyük most szemügyre példaként egy egyszerű esetet. Legyen a mag alapállapotára épült sávban az impulzusmomentum szimmetriatengelymenti vetülete K . Tegyük fel továbbá, hogy van a magnak egy másik, $K+1$ -hez tartozó forgási sávja, mely egy alacsonyan fekvő gerjesztett állapotra épül. /Feltesszük, hogy $K \neq 0$ / Képezzük most a forgási modell /76/ alatt felírt teljes, a forgás-részecske kölcsönhatással kiegészített $H = H_0 - \frac{1}{J} \mathbf{I} \cdot \mathbf{J}$ Hamilton-operátorának matrixát a két kiszemelt forgási sáv /100/ típusu /perturbálatlan/ sajátfüggvényeinek rendszerében. Az átlós matrixelemeket más ismerjük, ezeket /119/ szolgáltatja. A perturbálatlan H_0 operátor nem-átlós matrixelemei természetesen eltűnnek. A teljes $H = H_0 - \frac{1}{J} \mathbf{I} \cdot \mathbf{J}$ Hamilton-operátor zérustól különböző nem-átlós matrixelemei eszerint egyedül az $FRK = -\frac{1}{J}$ tagtól erednek. Minthogy $\mathbf{I} \cdot \mathbf{J}$ skalároperátor s így $\mathbf{I}$ -vel felcserélhető, zérustól különböző matrixelemek csak azonos I impulzusmomentumu állapotok között adódnak. Korlátozást jelent továbbá az H operátor nem-átlós matrixelemeire a /113/-/114/-ből leolvasható $K \rightarrow K \pm 1$ kiválasztási szabály. A H operátor zérustól különböző nem-átlós matrixelemei eszerint

$$(\psi_{I,K+1,M}, H \psi_{IKM}) = -\frac{1}{J} (\psi_{I,K+1,M}, \mathbf{I} \cdot \mathbf{J} \psi_{IKM}),$$

$$(\psi_{IKM}, H \psi_{I,K+1,M}) = -\frac{1}{J} (\psi_{IKM}, \mathbf{I} \cdot \mathbf{J} \psi_{I,K+1,M}).$$

Tekintettel H hermitikus voltára, elegendő pl. csak az első típussal foglalkoznunk. A /98/-/86/ képleteket felhasználva, $\mathbf{I} \cdot \mathbf{J}$ skalárszorzatot a vesszős rendszerbeli gömbi komponensekkel kifejezve: $\mathbf{I} \cdot \mathbf{J} = -I_1 J_1 + I_0 J_0 - I_{-1} J_{-1}$ a következőket kapjuk:

$$\begin{aligned}
 & (\psi_{I,K+1,M}, H\psi_{IKM}) = \\
 & = -\frac{1}{2J} [(\psi_{I,K+1,M}, I_{\pm} \psi_{IKM}) + (\psi_{I,-K-1,M}, I_{\pm} \psi_{I,-K,M})] = \\
 & = -\frac{1}{2J} [(\psi_{I,K+1,M}, I_{\pm} J_{\pm} \psi_{IKM}) + (\psi_{I,-K-1,M}, I_{\pm} J_{\pm} \psi_{I,-K,M})] = \\
 & = -\sqrt{I(I+1)-K(K+1)} A_K,
 \end{aligned}$$

/122/

ahol

$$A_K = -\frac{\hbar}{2^{3/2}J} [(\chi_{K+1}, J_{\pm} \chi_K) - (\chi_{-K-1}, J_{\pm} \chi_{-K})].$$

Az első sorról a másodikra áttérve figyelembe vettük,

hogy a /98/ kombináció behelyettesítésekor adódó kereszttagok a K-ra vonatkozó kiválasztási szabályok folytán eltűnnek,

hogy a /98/-beli $(-1)^{I-J}$ operátort, miután hermitikus, $I_{\pm}$ -vel felcserélhető és négyzete egy, a matrixelemekből el lehet hagyni.

A második sorról a harmadikra áttérve figyelembe vettük,

hogy az $I_{\pm}$ skalárszorzat vesszős rendszerbeli gömbi komponensekkel kifejezett alakjában a K kvantumszámot egyedül a $-I_{\pm} J_{\pm}$ tag növeli és egyedül a $-I_{\pm} J_{\mp}$ tag csökkenti.

Az utolsó sorra való áttéréskor felhasználtuk az $I_{\pm 1}$ operátornak a D_{MK}^I függvényekre való hatását megadó, /40/-nel analóg

$$I_{\pm 1} D_{MK}^I = \mp \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \sqrt{I(I+1)-K(K\mp 1)} D_{M,K\mp 1}^I$$

képleteket és a D-függvények normáltsági relációját: $\frac{2I+1}{8\pi^2} \|D_{MK}^I\|^2 = 1$.

A H Hamilton-operátornak a kiszemelt két sáv állapotaival képezett matrixa most már közvetlenül felírható. Az I impulzusmomentum minden egyes értéke mellett egy-egy 2x2-es matrixot kapunk:

$$\begin{pmatrix} E_{IK}^0 & M \\ M & E_{I,K+1}^0 \end{pmatrix} \quad /123/$$

Itt M a /122/ matrixelemet jelöli; feltételezzük, hogy A_K valós. A főátlóban szereplő /119/ energiaértékeket zérus indexszel láttuk el, minthogy ezek most a perturbálatlan /nulladik közelítésű/ energia szerepét játsszák.

Ha feltesszük, hogy a Hamilton-operátornak azok a nem-átlós matrixelemei, melyek a szemügyre vett két forgási sáv állapotait más magállapottal kötik össze, elhanyagolhatóan kicsinyek, úgy a H operátornak a ki-
szemelt két sáv állapotai kifesztette altérhez tartozó E sajátértékeit a /123/ alakú 2×2 -es almatrixok szekuláris egyenleteinek megoldásai szolgáltatják:

$$E = \frac{1}{2} \left[E_{IK}^0 + E_{I,K+1}^0 \pm \sqrt{(E_{IK}^0 + E_{I,K+1}^0)^2 - 4(E_{IK}^0 E_{I,K+1}^0 - M^2)} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[E_{IK}^0 + E_{I,K+1}^0 \pm (E_{IK}^0 - E_{I,K+1}^0)(1 + \varepsilon^2)^{1/2} \right], \quad /124/$$

ahol az

$$\varepsilon = 2 \frac{M}{E_{I,K+1}^0 - E_{IK}^0}$$

jelölést alkalmaztuk. Ha ε kicsiny, /124/-ben sorfejtést alkalmazhatunk. Figyelembe véve, hogy M a /122/ matrixelemet jelöli, írhatjuk:

$$E_{IK} = E_{IK}^0 - \frac{A_K^2}{E_{I,K+1}^0 - E_{IK}^0} \left[I(I+1) - K(K+1) \right] \left(1 - \frac{1}{4} \varepsilon^2 + \dots \right), \quad /125/$$

$$E_{I,K+1} = E_{I,K+1}^0 + \frac{A_K^2}{E_{I,K+1}^0 - E_{IK}^0} \left[I(I+1) - K(K+1) \right] \left(1 - \frac{1}{4} \varepsilon^2 + \dots \right), \quad /126/$$

A /124/-ből adódó sajátértéket az E_{IK} , $E_{I,K+1}$ szimbólumokkal jelöljük, mégpedig úgy, hogy $\varepsilon = 0$ ($A_K = 0$) esetén $E_{IK} = E_{IK}^0$, $E_{I,K+1} = E_{I,K+1}^0$ legyen. Megjegyezzük, hogy pl. az E_{IK} sajátértékhez tartozó állapotban az impulzusmomentum szimmetriatengelymenti vetülete természetesen nem éles érték, hiszen a FRK a K -hoz és $K+1$ -hez tartozó perturbálatlan állapotokat összekeveri. Az E_{IK} sajátérték K indexe csak azt jelzi, hogy a megfelelő állapot $\varepsilon \rightarrow 0$ esetén a K -hoz tartozó perturbálatlan állapotba megy át.

Irjuk be most /125/-be az E_{IK}^0 , perturbálatlan energia /104/ kifejezését. Képezzük ezután az $E_{IK} - E_{KK}$ különbséget, mely a „K” sáv I impulzusmomentumu állapotának az $I=K$ momentumu állapotról vonatkoztatott energiáját adja. Az ξ -ban másodrendű tagokra szorítkozva kapjuk:

$$E_{IK} - E_{KK} = \left(\frac{\hbar^2}{2J_K^0} - \frac{A_K^2}{E_{I,K+1}^0 - E_{IK}^0} \right) [I(I+1) - K(K+1)] \quad /127/$$

Amint látható, a sávkeveredés legalacsonyabb rendben a tehetetlenségi nyomaték megváltozását eredményezi: a „K” sáv nulladik közelítésű J_K^0 tehetetlenségi nyomatékához a

$$\Delta J = \frac{2}{\hbar^2} J_K^{02} \frac{A_K^2}{E_{I,K+1}^0 - E_{IK}^0} \quad /128/$$

pozitív tag járul, a tehetetlenségi nyomaték megnövekszik. Ez az eredmény kvalitatív magyarázatot ad arra a tényre, hogy az alapállapotú sáv tehetetlenségi nyomatékának tapasztalati értékei a páratlan tömegszámú magok esetében szisztematikusan felülmulják a szomszédos páros-páros magokhoz tartozó értékeket^{x/}. A páros-páros magokban ugyanis a legalsó, az alapállapotitól eggyel különböző K -val jellemzett forgási sáv a nukleonok párkölcsönhatása folytán lényegesen magasabban fekszik, mint a páratlan tömegszámú magokban; az utóbbiakban így a sávkeveredés hatása lényegesen erősebb.

Megjegyezzük még, hogy a példánkban szereplő, gerjesztett állapotokra épülő „K+1” sáv esetében a tehetetlenségi nyomaték a FRK hatására a /128/ értékkel csökken. Megjegyezzük továbbá, hogy a /125/-/126/ sorfejtés következő tagja a forgási spektrum képletéhez $[I(I+1)]^2$ -tel arányos korrekciót ad.

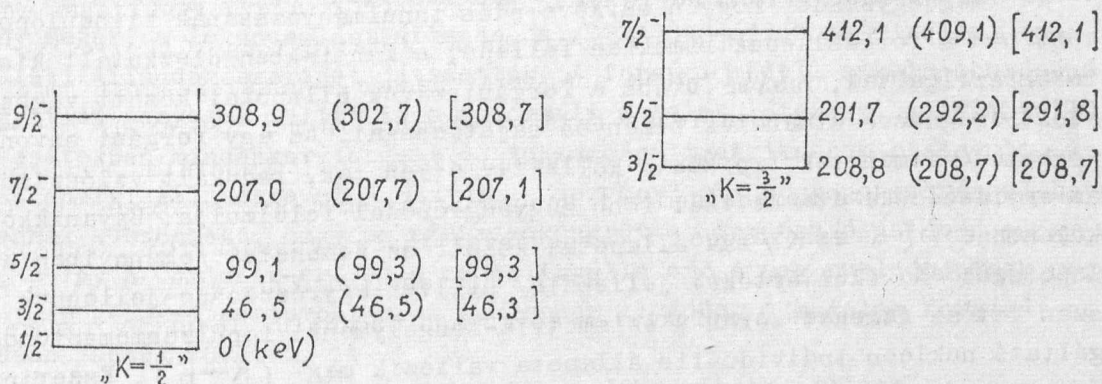
A FRK okozta sávkeveredést Kerman behatóan tanulmányozta a W^{183} mag esetében. E mag alacsonyan fekvő állapotai között két forgási sávot azonosítottak, melyek egyikéhez a $K=\frac{1}{2}$, másikához a $K=\frac{3}{2}$ értéket rendelték /13.ábra/. Paritásuk egyező: mindkét sáv negatív paritású. A két sávot függetlennek tekintve /a sávkeveredést elhanyagolva/ Kerman azt találta, hogy a két sáv energiaszintjeit a /119/ képlet a szereplő paraméterek következő választása mellett adja vissza a legjobban.

x/ A tehetetlenségi nyomaték páros-páratlan változásainak kielégítő kvantitatív értelmezését Beljájev adta meg a nukleonok párkölcsönhatásának figyelembe vételével.

$$K = \frac{1}{2} \quad \text{esetén} \quad \frac{\hbar^2}{2J_{1/2}} = 13,0 \text{ keV}$$

$$K = \frac{3}{2} \quad \text{esetén} \quad \frac{\hbar^2}{2J_{3/2}} = 16,7 \text{ keV} \quad /129/$$

A /119/ képletből ezen értékek felhasználásával számított energiákat gömbölyű zárójelben tüntettük fel a 13. ábrán. - A FRK befolyását a spektrumra a /122/ alatt bevezetett A_K mennyiség határozza meg. Értéke elvben a külső nukleonok χ_K, χ_{K+1} állapotfüggvényeiből kiindulva kiszámítható; ilyen számítást azonban eddig nem végeztek. Kerman az A_K mennyiséget, hasonlóan a tehetetlenségi nyomatékhoz és a lekapcsolási állandóhoz tapasztalati paraméternek tekintette és a legkisebb négyzetek módszerével határozta meg, megkövetelve, hogy a FRK figyelembevételével kapott /124/ energiaképlet a legjobban illeszkedjék a megfigyelt spektrumhoz. A FRK figyelembevételével ilymódon korrigált értékek a 13. ábrán szögletes zárójelben állnak. Az egyezés most láthatóan jobb, mint a FRK figyelembevétele nélkül. A kor-



13. ábra W^{183} spektruma és a FRK hatása

rekciók értéke növekvő impulzusmomentummal nő. Figyelmet érdemel pl., hogy a $K = \frac{1}{2}$ sáv $I = 9/2$ impulzusmomentumu állapota esetében a FRK gyakorlatilag eltüntette a sávkeveredés elhanyagolása esetében mutatkozott mintegy 6 keV-os eltérést. - Érdekes összevetni a /129/ alatt felírt megfigyelt /renormált/ tehetetlenségi nyomatékokat a tehetetlenségi nyomatékoknak a FRK által nem módosított, renormálatlan /pl. /127/-ben szereplő/ értékeivel. A két szemügyre vett sáv renormálatlan tehetetlenségi nyomatékaira Kerman a

$$\frac{\hbar^2}{2J_{1/2}^0} = 15,9 \text{ keV}, \quad \frac{\hbar^2}{2J_{3/2}^0} = 14,0 \text{ keV} \quad /130/$$

értékeket kapta. Elégtétellel állapíthatjuk meg, hogy a /130/ renormálatlan tehetetlenségi nyomatékok között már nincs olyan nagy eltérés, mint a /129/ alatt felírt megfigyelt értékek között. Kielégítőnek kell azt is tekintennünk, hogy az alapállapotú sáv $J_{1/2}^0$ renormálatlan tehetetlenségi nyomatéka lényegesen közelebb esik a szomszédos W^{182} páros-páros-mag J tehetetlenségi nyomatékához ($\hbar^2/2J = 16,7 \text{ keV}$), mint a megfigyelt, renormált érték. A fennmaradó eltérések pl. egy további, magasabban fekvő $K=3/2$ sávval való keveredés következményei lehetnek. A sávkeveredés mértékének jellemzésére álljanak itt a következő adatok. Annak valószínűsége, hogy a mag impulzusmomentumának a szimmetriatengelyre vetett vetülete a „ $K=1/2$ ” alapállapotú sáv állapotaiban a $K+1=3/2$ értéket vegye fel, $I=1/2, 3/2, 5/2, 7/2, 9/2$ esetén rendre 0; 0,06; 0,12; 0,23; 0,26.

Megjegyzendő, hogy a sávkeveredés tanulmányozásának kiindulópontjaként nem a forgási spektrumokban fellépő, a fentiekben diszkutált kis eltérések szolgáltak, hanem inkább a forgási sávok állapotai között végbemenő elektromágneses átmenetek bizonyos sajátosságai. Az egy forgási sávon belül végbemenő átmenetek tipikusan kollektív átmenetek, redukált valószínűségük az egyrészezske-átmeneteket több nagyságrenddel felülmúlja. Ugyanakkor két különböző (K és K') sáv állapotai között az átmenetek /amennyiben az állapotokat K éles értékei jellemzik/ nyilván egyrészezske-jellegűek. hiszen itt az átmenet során a szimmetria-tengelymenti impulzusmomentumot szolgáltató nukleon individuális állapota változik meg ($K \rightarrow K'$). Eszerint azt lehetne várni, hogy pl. a W^{183} mag $I=K=1/2$ alapállapotából a szomszédos $K=3/2$ sáv $I=5/2$ állapotába vezető $E2$ Coulomb-gerjesztés redukált valószínűsége csupán ezredrésze lesz az egy sávon belüli $I=K=1/2 \rightarrow K=1/2, I=5/2$ $E2$ átmenetének. A valóságban e két átmenet redukált valószínűségeinek viszonya a vártnál két nagyságrenddel nagyobb:

$$\frac{B(E2; \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rightarrow \frac{3}{2} \frac{5}{2})}{B(E2; \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \frac{5}{2})} \approx 0,09 \quad /131/$$

Ez a tapasztalati tény a sávkeveredés figyelembe vételével megérthető. Mint láttuk, a FRK folytán a „ $K=3/2$ ” sávbeli végállapot valójában nem jellemezhető K éles értékével; az állapotfüggvény a K kvantumszám $3/2$ és $1/2$ értékeihez tartozó függvények lineáris kombinációja. Eszerint a változatlan

K mellett végbemenő kollektív jellegű, az egyrészesecske-átmenetnél jóval nagyobb valószínűségű átmenet nemcsak a kezdeti állapottal egy sávba eső végállapotba, hanem - a keveredés aránya által megszabott mértékben - szomszédos sávbeli végállapotba is vezethet. Ez magyarázza a /131/ viszony várt-nál nagyobb értékét. A sávkeveredést jellemző paramétereknek a forgási spektruma /fent diszkutált/ korrekciói alapján meghatározott értékét felhasználva a $B(E2; \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rightarrow \frac{3}{2} \frac{5}{2})$ és $B(E2; \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \frac{5}{2})$ redukált átmeneti valószínűségek viszonyára, 0,14 adódik, kielégítő egyezésben a /131/ tapasztalati értékkel.

f/ Összefoglalás

Egyszerű feltevésekre sikerült felépíteni egy modellt, mely a magspektroszkópiában szokatlan pontossággal képes visszatükrözni számos atommag kisenergiájú spektrumának törvényszerűségeit: a gerjesztési energiák viszonyának értékét, a szintek paritását és impulzusmomentumát. A forgási modell jellegzetesen fenomenológikus leírást ad; semmilyen feltevést nem tettünk a magszerkezet részleteire, a mag egyes nukleonjainak mozgására vonatkozóan. Az atommag belső szerkezetétől függő mennyiségek /így a tehetetlenségi nyomaték, a lekapcsolási állandó, a /122/ nem-átlós matrixelem/ tapasztalati állandók szerepét játszották. A forgási modell alkalmazhatóságának egyetlen lényeges feltétele a deformált magalak létezése, mely a tárgyalta esetekben mindenkor tengely és tükrözésszimmetrikusnak bizonyult. Az, hogy az energiaszintekre az " $I(I+1)$ törvény" oly nagy pontossággal beválik, annak köszönhető, hogy az atommagok együttes forgása általában elég lassu, s így a Coriolis-erő és a centrifugális erő a mag nukleonjainak mozgását igen kevésbé perturbálja. A nukleonok ily módon a magalak forgását adiabatikusan tudják követni.

A fenomenológikus forgási modell, minden sikere mellett is, nem elégithet ki maradéktalanul. Igény van a "mikroszkópikus" elméletre, a deformált magok belső szerkezetének elméletére is. Ettől várjuk a forgási modell paramétereinek, így a tehetetlenségi nyomaték és a lekapcsolási állandó, mélyebb értelmezését, a paraméter-értékek levezetését. Kíváncos ezen kívül az is, hogy előreláthassuk: egy adott mag alapállapotához /s a rá épülő forgási sávhoz/ a K szimmetriatengelymenti impulzusmomentum-vetületnek milyen értéke tartozik és milyen K-értékek jellemzik a többi, gerjesztett állapotokra épült, forgási sávokat. E kérdésekkel egy másik szeminárium kiadvány foglalkozik majd.

4. Elektromágneses átmenetek a forgási modellben

a/ Átmeneti valószínűségek

A forgási állapotokat leíró sajátfüggvények /100/ alatt felírt egyszerű alakja /mely az együttes forgás és a belső mozgás közelítő függetlenségének folyománya/ lehetővé teszi, hogy több fontos kijelentést tegyünk a különböző forgási állapotok között végbemenő átmenetekre vonatkozóan.

Mindenek előtt idézzük az elektromágneses multipól-operátorok és az átmeneti valószínűségek ismert képleteit /l.pl. Blatt, Weisskopf, Theoretical Nuclear Physics, XII. fejezet, /3.21-22/ és 3.32-35/ képletek/.

Az elektromos 2^λ -pól-operátorok /elhanyagolva a spin időbeli változásával kapcsolatos kicsiny tagot/:

$$m(E\lambda\mu) = \sum_{k=1}^A e_k r_k^\lambda Y_{\lambda\mu}(\vartheta_k \varphi_k), \quad /132/$$

a mágneses 2^λ -pól-operátorok pedig:

$$m(M\lambda\mu) = \sum_{k=1}^A (g_k^{(s)} \Delta_k + \frac{2}{\lambda+1} g_k^{(l)} \underline{l}_k) \nabla_k (r_k^\lambda Y_{\lambda\mu}) \frac{e\hbar}{2Mc} \quad /133/$$

Ezen operátorokból kiindulva az elektromos vagy mágneses 2^λ -pól-sugárzás egy sec-ra vonatkoztatott T átmeneti valószínűsége /a végállapotbeli magspin-vetületekre összegezve/ a következő alakban írható fel:

$$T = \frac{8\pi(\lambda+1)}{\lambda[(2\lambda+1)!!]^2} \cdot \frac{1}{\hbar} \cdot \left(\frac{E}{\hbar c}\right)^{2\lambda+1} B(\lambda; I_k \rightarrow I_v). \quad /134/$$

Itt E az átmenetben gazdát cserélő energia,

$$B(\lambda; I_k \rightarrow I_v) = \sum_{M_v, \mu} |(I_v M_v | m(\lambda\mu) | I_k M_k)|^2 \quad /135/$$

pedig az un. redukált átmeneti valószínűség.

A /132/, /133/ elektromágneses multipól-operátorok irreducibilis tenzoroperátorok /forgástranszformációjukat a $D_{\mu\nu}^\lambda$ matrix határozza meg/. Alkalmazható tehát rájuk a Wigner-Eckart-tétel, melyet most az

$$(I_{\nu} M_{\nu} | m(\lambda, \mu) | I_k M_k) = (I_k M_k | \lambda, \mu | I_{\nu} M_{\nu}) \frac{(I_{\nu} || m(\lambda) || I_k)}{\sqrt{2I_{\nu}+1}} \quad /136/$$

alakban idézünk. Itt $(I_{\nu} || m(\lambda) || I_k)$ a szereplő multipóloperátor redukált matrixának /más elnevezések: kétvonásos matrix, amplitudó matrix/ elemét jelöli. /Bohr és Mottelson a Racah bevezette $(I_{\nu} || m(\lambda) || I_k)$ mennyiség helyett az

$$\langle I_{\nu} || m(\lambda) || I_k \rangle = \frac{(I_{\nu} || m(\lambda) || I_k)}{\sqrt{2I_{\nu}+1}}$$

mennyiséget használja./

A /136/ és /135/ képletek alapján írható:

$$\begin{aligned} B(\lambda; I_k \rightarrow I_{\nu}) &= \sum_{M_{\nu}, \mu} (I_k M_k | \lambda, \mu | I_{\nu} M_{\nu})^2 \frac{(I_{\nu} || m(\lambda) || I_k)^2}{2I_{\nu}+1} = \\ &= \frac{(I_{\nu} || m(\lambda) || I_k)^2}{2I_k+1} \end{aligned} \quad /137/$$

Az utolsó átalakítás a Clebsch-Gordan-együtthatók szimmetriatulajdonságainak és normáltságának figyelembe vételével történt.

Megjegyzésre érdemes, hogy a B redukált átmeneti valószínűségek nemcsak a gamma-sugárzás kibocsátásának valószínűségét határozzák meg, hanem a Coulomb-gerjesztés hatáskeresztmetszetét is. Az $I_k \rightarrow I_{\nu}$ bomláshoz, valamint a megfordított $I_{\nu} \rightarrow I_k$ Coulomb-gerjesztéshez tartozó redukált átmeneti valószínűségek kapcsolata:

$$\frac{B(\lambda; I_k \rightarrow I_{\nu})}{B(\lambda; I_{\nu} \rightarrow I_k)} = \frac{2I_{\nu}+1}{2I_k+1} \quad /138/$$

Ezek összefüggés alkalmazásához tudnunk kell, hogy a gamma-sugárzás és a Coulomb-gerjesztés dinamikája között lényeges eltérés van. A Coulomb-gerjesztést előidéző töltött részecske terében a mágneses tér v/c -szer ($\ll 1$) kisebb az elektromos térnél, ennél fogva a Coulomb-gerjesztés esetében a mágneses multipólusok szerepe viszonylag lényegesen kisebb, mint az egyenlő amplitudójú $\underline{E}$ és $\underline{H}$ -t tartalmazó sugárzási térrel való kölcsönhatás /gamma-kibocsátás és -elnyelés/ esetében.

A következőkben főként egy forgási sávhoz tartozó állapotok között végbemenő átmenetekkel kívánunk foglalkozni. Ilyenkor paritasváltás nincs, a legalacsonyabb rendű szóhajövő multipólusok tehát $M1$ és $E2$.

Nem érdektelen megnézni, milyen értékeket szolgáltat a T átmeneti valószínűsége, ill. a $\Gamma = \hbar T$ szélessége a szélsőséges egyrészcseke-modell, melyben felteszik, hogy a fotonkibocsátásért egyetlen proton a felelős. Az egyrészcseke-modell alapján végzett becslés eredménye:

$$\Gamma_{e.r.}(M1) = 0,021 \cdot E^3 \text{ eV}, \quad \Gamma_{e.r.}(E2) = 1,2 \cdot 10^{-7} \cdot A^{\frac{4}{3}} E^5 \text{ eV} \quad /139/$$

/ E MeV-ban helyettesítendő/; $A \approx 126$, $E \approx 200$ keV esetén pl.

$$\Gamma_{e.r.}(M1) \approx 10^{-4} \text{ eV}, \quad \Gamma_{e.r.}(E2) \approx 5 \cdot 10^{-8} \text{ eV}.$$

Látható tehát, hogy az egyrészcseke-modell szerint az $M1$ sugárzás valószínűsége lényegesen nagyobbak adódik az $E2$ sugárzásénál. - Wilkinson ezzel kapcsolatban nagyszámu kísérleti adatot gyűjtött össze. A /139/ becslésekkel való összehasonlítás azt mutatta, hogy a szélsőséges egyrészcseke-modell az $M1$ sugárzás valószínűségét túl-, az $E2$ sugárzását pedig alábecsüli; a valóságban, különösen erősen deformált magok esetében, $M1$ és $E2$ valószínűsége azonos nagyságrendű lehet. Egy páratlan mag valamely forgási sávjában végbemenő jellegzetes $I+1 \rightarrow I$ /nem/ átmenet eszerint általában mágneses dipól- és elektromos kvadrupól-sugárzás keverékének kibocsátását eredményezi. A megfordított irányu $I \rightarrow I+1$ /Coulomb-gerjesztés viszont - megfelelően a korábbi megjegyzésnek, mely szerint itt a mágneses multipólusok szerepe háttérbe szorul, - a gyakorlatban tiszta $E2$ átmenetet hoz létre.

b/ $M1$ és $E2$ átmenetek egy forgási sávban

Az előzőkben megadott képleteket most felhasználjuk egyazon forgási sávon belül végbemenő mágneses dipól- és elektromos kvadrupól-átmenetek valószínűségeinek levezetésére.

A mágneses dipól-operátor /133/ szerint

$$M(M1\mu) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sum_{k=1}^A (g_k^{(\lambda)} \Delta_k + g_k^{(1)} l_k) e_{\mu}^* \frac{e\hbar}{2Mc}, \quad /140/$$

ahol

$$e_{\mu}^* = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \nabla (r Y_{1\mu}).$$

Könnyű meggyőződni róla, hogy az ily módon definiált

$$\underline{e}_1^* = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{e}_0^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{e}_{-1}^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

vektorok teljes ortonormált alaprendszert alkotnak s így fennáll rájuk az

$$\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_1^* + \underline{e}_0 \cdot \underline{e}_0^* + \underline{e}_{-1} \cdot \underline{e}_{-1}^* = 1 \quad /141/$$

összefüggés. Definiáljuk most a $\underline{\mu}$ vektort a

$$\underline{\mu} \cdot \frac{e\hbar}{2Mc} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \sum_{\mu=-1}^1 m(M1\mu) \underline{e}_\mu \quad /142/$$

összefüggéssel. Felhasználva a /142/, /140/ és /141/ összefüggéseket, nyom-
ban kapjuk a

$$\underline{\mu} = \sum_{k=1}^A (g_k^{(s)} \underline{\Delta}_k + g_k^{(f)} \underline{l}_k) \quad /143/$$

képletet. Látható; hogy $\underline{\mu}$ a mag mágneses dipólmomentumának operátora, a megszokott alakban.

A /142/ képletből megállapítható, hogy a $\underline{\mu}$ vektor gömbi komponensei és az $m(M1\mu)$ operátorok között a következő a kapcsolat:

$$m(M1\mu) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{e\hbar}{2Mc} \mu_\mu$$

Ezt /137/-be helyettesítve, az $M1$ átmenet redukált átmeneti valószínűségé-
re kapjuk:

$$B(M1; I_k \rightarrow I_v) = \frac{1}{2I_k+1} \cdot \frac{3}{4\pi} \cdot \left(\frac{e\hbar}{2Mc}\right)^2 \cdot (I_v \parallel \mu^{(1)} \parallel I_k)^2 \quad /144/$$

A forgási modellben, mint /75/ is mutatja, a mag teljes $\underline{I}$ impulzusmomentu-
ma a törzs $\underline{R}$ és a külső részecskék $\underline{J}$ impulzusmomentumának összege alak-
jában írható fel:

$$\underline{I} = \underline{R} + \underline{J}.$$

Hasonlóképpen tevődik össze a $\underline{\mu}$ mágneses momentum is a törzs, valamint a külső nukleonok momentumaiból. A törzs mágneses momentumáról feltesszük, hogy a $g_R \underline{R}$ alakba írható; az itt definiált g_R mennyiség a törzsre jellemző g -faktor /giromágneses viszony/. A külső nukleonok mágneses momentumát pedig $\underline{\mu}$ jelölje:

$$\underline{\mu} = \sum_{\substack{\text{külső} \\ \text{nukleonokra}}} (g_k^{(\lambda)} \underline{\Delta}_k + g_k^{(f)} \underline{l}_k).$$

Írható tehát:

$$\underline{\mu} = g_R \underline{R} + \underline{\mu},$$

vagy, felhasználva /144/-et:

$$\underline{\mu} = g_R \underline{I} + (\underline{\mu} - g_R \underline{J}). \quad /145/$$

Az átmeneti valószínűség kiszámításához ennek matrixelemét kell képeznünk két, a /100/ képletben megadott Ψ_{IKM} sajátfüggvénnyel:

$$\begin{aligned} & (\Psi_{I_\nu K M_\nu}, \underline{\mu} \Psi_{I_k K M_k}) = \\ & = g_R (\Psi_{I_\nu K M_\nu}, \underline{I} \Psi_{I_k K M_k}) + (\Psi_{I_\nu K M_\nu}, [\underline{\mu} - g_R \underline{J}] \Psi_{I_k K M_k}). \end{aligned} \quad /146/$$

Itt I_k , M_k és I_ν , M_ν a kezdeti, ill. végállapotbeli impulzusmomentumot, valamint annak vetületét jelöli. Minthogy célunk az egyazon forgási sávon belül végbemenő átmenetek vizsgálata, $K_k = K_\nu = K$ -t irtunk. A mag teljes impulzusmomentuma természetesen felcserélhető H -val; ebből következik, hogy az $\underline{I}$ operátor különböző energiájú állapotokat összekötő matrixelemei eltűnnek. Az átmeneti valószínűséghez /146/ első tagja tehát nem ad járulékot. - A második tag kiszámításához célszerű a $\underline{\mu} - g_R \underline{J}$ operátor szükséges /nyugvó rendszerbeli/ komponenseit a $\mathcal{V} = (\alpha \beta \gamma)$ Euler-szögek; valamint a maghoz rögzített rendszerbeli, vesszős komponensek segítségével kifejezni, hiszen a Ψ sajátfüggvények /100/ alatt $\mathcal{V}$, valamint az X' vesszős változók függvényeként vannak megadva.

Akárcsak $\underline{\mu}$, annak $\underline{\mu} - g_R \underline{J}$ összeadandója is, elsőrendű irreducibilis tenzor. Vesszős és vesszőtlen rendszerbeli komponensei között a kapcsolat ennek megfelelően

$$\underline{\mu}_\nu - g_R \underline{J}_\nu = \sum_{\nu'} D_{\nu\nu'}^1(\mathcal{V}) [\underline{\mu}_{\nu'} - g_R \underline{J}_{\nu'}]. \quad /147/$$

Helyettesítsük ezt /146/-ba; /100/ felhasználásával a mágneses momentum matrixelemére kapjuk:

$$\begin{aligned}
 (\psi_{I_v K M_v}, \mu_v \psi_{I_k K M_k}) &= g_R (\psi_{I_v K M_v}, I_v \psi_{I_k K M_k}) + \\
 + \frac{[(2I_v+1)(2I_k+1)]^{1/2}}{16\pi^2} &\left\{ \int D_{M_v K}^{I_v*} D_{v0}^I D_{M_k K}^{I_k} d\mathcal{J} \cdot (\chi_K, [\check{\mu}'_0 - g_R \mathcal{J}_0] \chi_K) + \right. \\
 + (-1)^{I_v - I_k} \int D_{M_v K}^{I_v*} D_{v0}^I D_{M_k K}^{I_k} d\mathcal{J} \cdot &(\chi_{-K}, [\check{\mu}'_0 - g_R \mathcal{J}_0] \chi_{-K}) + \quad /148/ \\
 + \delta_{K \frac{1}{2}} \left[\int D_{M_v \frac{1}{2}}^{I_v*} D_{v1}^I D_{M_k, -\frac{1}{2}}^{I_k} d\mathcal{J} \cdot \right. &(\chi_{\frac{1}{2}}, [\check{\mu}'_1 - g_R \mathcal{J}_1] (-1)^{I_k - \frac{1}{2}} \chi_{-\frac{1}{2}}) + \\
 + \int D_{M_v, -\frac{1}{2}}^{I_v*} D_{v-1}^I D_{M_k \frac{1}{2}}^{I_k} d\mathcal{J} \cdot &([1]^{I_v - \frac{1}{2}} \chi_{-\frac{1}{2}}, [\check{\mu}'_{-1} - g_R \mathcal{J}_{-1}] \chi_{\frac{1}{2}}) \left. \right\}.
 \end{aligned}$$

Itt a $d\mathcal{J} = \sin\beta d\alpha d\beta d\gamma$ rövid jelölést alkalmaztuk. A Függelék /C.4/ képlete, valamint a $\frac{2I+1}{8\pi^2} \int D_{MK}^{I*} D_{M'K'}^I d\mathcal{J} = \delta_{II'} \delta_{KK'} \delta_{MM'}$ ortonormáltsági összefüggés felhasználásával írható:

$$\int D_{M_v K}^{I_v*} D_{v\lambda}^I D_{M_k K}^{I_k} d\mathcal{J} = \frac{8\pi^2}{2I_v+1} (I_k M_k \lambda v | I_v M_v) (I_k K \lambda v | I_v K') \quad /149/$$

A Clebsch-Gordan-együtthatókra fennáll:

$$(I_k, -K, \lambda, -v | I_v, -K) = (-1)^{\lambda + I_k - I_v} (I_k K \lambda v | I_v K'). \quad /150/$$

Fennáll továbbá a

$$\mathcal{J}_0' \chi_{\pm K} = \pm K \chi_{\pm K} \quad /151/$$

sajátértékegyenlet; végül vezessük be a belső g -faktort a

$$(\chi_{\pm K}, \check{\mu}'_0 \chi_{\pm K}) = \pm g_K K \quad /152/$$

a b paramétert pedig a

$$(g_K - g_R) b = \frac{1}{2} \left[(\chi_{\frac{1}{2}}, \check{\mu}'_1 [-1]^{I_v - \frac{1}{2}} \chi_{-\frac{1}{2}}) - ([1]^{I_v - \frac{1}{2}} \chi_{-\frac{1}{2}}, \check{\mu}'_{-1} \chi_{\frac{1}{2}}) \right] \quad /153/$$

definícióval. A mágneses dipólmomentum matrixeleme /148-153/ alapján a következő alakba írható

$$\begin{aligned} (\Psi_{I_{\nu} K M_{\nu}}, \mu_{\nu} \Psi_{I_k K M_k}) &= g_R (\Psi_{I_{\nu} K M_{\nu}}, I_{\nu} \Psi_{I_k K M_k}) + \\ &+ \left(\frac{2I_k + 1}{2I_{\nu} + 1} \right)^{1/2} (I_k M_k 1 \nu | I_{\nu} M_{\nu}) \left[(I_k K 1 0 | I_{\nu} K) \cdot K + \delta_{K \frac{1}{2}} (-1)^{I_k - \frac{1}{2}} (I_k - \frac{1}{2} 1 1 | I_{\nu} \frac{1}{2}) b \right] (g_k - g_R). \end{aligned} \quad /154/$$

E képlet az $I_k = I_{\nu} = M_k = M_{\nu} = I$, $\nu = 0$ esetre alkalmazva közvetlenül megadja a mag μ sztatikus mágneses momentumát. Felhasználva az $I_0 \Psi_{IKI} = I \Psi_{IKI}$ sajátértékegyenletet, valamint a szereplő Clebsch-Gordan-együtthatók

$$(II 10 | II) = \left(\frac{I}{I+1} \right)^{1/2}, \quad (IK 10 | IK) = \frac{K}{[I(I+1)]^{1/2}}$$

$$(I - \frac{1}{2} 1 1 | I \frac{1}{2}) = -\frac{I + \frac{1}{2}}{\sqrt{2I(I+1)}}$$

kifejezéseit, kapjuk:

$$\mu = g_R I + \frac{(g_k - g_R)}{I+1} \left[K^2 + \delta_{K \frac{1}{2}} (-1)^{I + \frac{1}{2}} (I + \frac{1}{2}) \frac{b}{\sqrt{2}} \right]. \quad /155/$$

Figyelembe véve, hogy különböző energiájú, /állapotok között képezett /átmeneti/ matrixelem esetében /154/ első tagja eltűnik, a /154/ és /136/ egyenleteket összehasonlítva közvetlenül leolvashatjuk az $(I_{\nu} \parallel \mu^{(1)} \parallel I_k)$ redukált matrixelem kifejezését:

$$\begin{aligned} (I_{\nu} \parallel \mu^{(1)} \parallel I_k) &= \\ &= (2I_k + 1)^{1/2} \left[(I_k K 1 0 | I_{\nu} K) \cdot K + \delta_{K \frac{1}{2}} (-1)^{I_k - \frac{1}{2}} (I_k - \frac{1}{2} 1 1 | I_{\nu} \frac{1}{2}) b \right] (g_k - g_R). \end{aligned}$$

Ezt /144/-be helyettesítve a redukált átmeneti valószínűségekre a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} B(M1; I_k \rightarrow I_{\nu}) &= \\ &= \frac{3}{4\pi} \left(\frac{e\hbar}{2Mc} \right)^2 (g_k - g_R)^2 \left[(I_k K 1 0 | I_{\nu} K) \cdot K + \delta_{K \frac{1}{2}} (I - \frac{1}{2} 1 1 | I_{\nu} \frac{1}{2}) b \right]^2 \quad /156/ \end{aligned}$$

Ha $K \neq \frac{1}{2}$, a sztatikus momentum /155/ és a redukált átmeneti valószínűség /156/ képlete egyaránt két paramétert tartalmaz: g_R -et és g_K -t. Egy forgási sáv egy M1 átmenetének valószínűségét, valamint a sáv alapállapotának μ sztatikus momentumát mérve két egyenletet állíthatunk fel g_K -ra, és g_R -re. Minthogy a /156/ kifejezés $(g_K - g_R)^2$ -et tartalmazza, $g_K - g_R$ előjelét + vagy - -nak választva, két megoldást kapunk. Az előjel meghatározására további /szöghkorrelációs/ mérések szükségesek. - Ha $K = \frac{1}{2}$, ugy $(g_K - g_R)^2$ valamint b meghatározásához két M1 átmenet valószínűségét kell mérni egyazon sávban.

Térjünk át most az elektromos kvadrupól-átmenetek valószínűségének levezényeztetésére. A megfelelő multipól-operátor /132/ szerint

$$\begin{aligned} m(E2\mu) &= e \sum_p r_p^2 Y_{2\mu}(\vartheta_p, \varphi_p) = \\ &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} e Q_{\mu}^{(2)}, \end{aligned} \quad /157/$$

ahol

$$Q_{\mu}^{(2)} = \sqrt{\frac{16\pi}{5}} \sum_p r_p^2 Y_{2\mu}(\vartheta_p, \varphi_p)$$

jelölést alkalmaztuk. A $Q_0^{(2)}$ mennyiség a szokásos módon normált kvadrupólmomentum-operátor. Az E2 átmenetek redukált valószínűsége /137/ és /157/ szerint

$$B(E2; I_k \rightarrow I_v) = \frac{5}{16\pi} e^2 \frac{(I_v \| Q^{(2)} \| I_k)^2}{2I_k + 1}. \quad /158/$$

Szoritkozunk a $K \neq \frac{1}{2}, 1$ sávokban végbemenő kvadrupólátmenetekre. Ilyenkor használhatjuk az egyszerűbb /86/ szorzat-sajátfüggvényeket; így is ugyanaz az eredmény adódik, amit - bonyolultabb számítással - a /100/ szimmetrizált alak felhasználásával kapnánk. A szimmetrizálás csak a /kizárt/ $K = \frac{1}{2}, 1$ esetében lényeges. Ilyenkor a szimmetrizált sajátfüggvényekkel képezett matrixelemben fellépnek a $K \leftrightarrow -K$ átmeneteknek megfelelő kereszttagok. - A számítás egyébként az M1 esetben részletesen bemutatott menetet követi.

Minthogy $Q_{\mu}^{(2)}$ másodrendű irreducibilis tenzor, írható: $Q_{\mu}^{(2)} = \sum_{\nu} D_{\mu\nu}^2(\vartheta) Q_{\nu}^{(2)}$. Egy azonos sávon belüli átmenet matrixelemét /86/ felhasználásával képezve kapjuk:

$$\begin{aligned}
 & (\psi_{I_v K M_v}, Q_{\mu}^{(2)} \psi_{I_k K M_k}) = \\
 & = \frac{[(2I_v+1)(2I_k+1)]^{1/2}}{8\pi^2} \int D_{M_v K}^{I_v*} D_{\mu 0}^2 D_{M_k K}^{I_k} d\mathcal{V} \cdot (\chi_K, Q_0^{(2)} \chi_K) = \quad /159/ \\
 & = \left(\frac{2I_k+1}{2I_v+1}\right)^{1/2} \cdot (I_v M_v 2 \mu | I_k M_k) (I_k K 2 0 | I K) \cdot Q_0.
 \end{aligned}$$

Itt felhasználtuk /149/-et és bevezettük a $Q_0 = (\chi_K, Q_0^{(2)} \chi_K)$ jelölést; Q_0 neve: belső kvadrupólmomentum.

Megjegyezzük, hogy /159/ az $I_k = I_v = M_k = M_v = I$ esetben a Q sztatikus kvadrupólmomentumot adja:

$$Q = \frac{3K^2 - I(I+1)}{(I+1)(2I+3)} Q_0. \quad /160/$$

A Q_0 előtt álló "projekciós tényező" az együttes forgás impulzusmomentumának kvantumos ingadozásait tükrözi. Ennek eredményeképpen Q mindig kisebb, mint Q_0 . Az $I=0, \frac{1}{2}$ speciális esetben Q azonosan eltűnik, még akkor is, ha $Q_0 \neq 0$.

A /159/ képletből nyomban leolvasható a redukált matrixelem kifejezése:

$$(I_v \| Q^{(2)} \| I_k) = (2I_k+1)^{1/2} (I_k K 2 0 | I_v K) Q_0.$$

Ezt /158/-ba helyettesítve a redukált átmeneti valószínűségre kapjuk:

$$B(E2; I_k \rightarrow I_v) = \frac{5}{16\pi} e^2 (I_k K 2 0 | I_v K)^2 Q_0^2 \quad /161/$$

A /160/, /161/ képletekből látható, hogy a belső kvadrupólmomentum nagysága mind a sztatikus kvadrupólmomentum /spektroszkópiái/ mérésével, mind pedig egy adott sávon belüli $E2$ átmenet valószínűségének /Coulomb-gerjesztés hátsókeresztmetszetének/ megfigyelésével meghatározható. Az átmeneti valószínűség meghatározása végezhető el pontosabban, ez azonban csak $|Q_0|$ -t szolgáltatja. A pontatlanabb spektroszkópiái módszer viszont előjellel együtt adja Q_0 - t.

Valamely két, $I_k \rightarrow I_v$ és $I_k \rightarrow I'_v$ átmenet valószínűségének viszonyát /az elágazási arányt/ képezve, Q_0 kiesik és egy tisztán a Clebsch-Gordan-együtthatókat tartalmazó kifejezést kapunk:

$$\frac{B(E2; I_k \rightarrow I_v)}{B(E2; I_k \rightarrow I'_v)} = \frac{(I_k K 2 0 | I_v K)^2}{(I_k K 2 0 | I'_v K)^2} \quad /162/$$

c/ A K -kiválasztási szabály. Elágazási arány

Vegyünk szemügyre egy $(I_k K_k M_k) \rightarrow (I_v K_v M_v)$ átmenetet. Képezzük a 2^λ pól-sugárzáshoz rendelt $m(\lambda\mu)$ operátor átmeneti matrixelemét, feltételezve, hogy a kezdeti s a végállapot leírására /86/ alakú szorzat sajátfüggvények használhatók. /Most nem térünk ki arra, miképpen módosul a számítás eredménye egyes speciális esetekben az állapotfüggvény /100/ szimmetrizált alakjának használata mellett./

A matrixelem kifejezése a részletes számítások mellőzésével közvetlenül felírható, /159/-et általánosítva:

$$\begin{aligned} & (\psi_{I_v K_v M_v}, m(\lambda\mu) \psi_{I_k K_k M_k}) = \\ & = \frac{[(2I_v+1)(2I_k+1)]^{1/2}}{8\pi^2} \int D_{M_v K_v}^{I_v*} D_{\mu, K_v - K_k}^\lambda D_{M_k K_k}^{I_k} d\sigma \cdot (x_{K_v}, m(\lambda, K_v - K_k) x_{K_k}) = \\ & = \left(\frac{2I_k+1}{2I_v+1} \right)^{1/2} (I_v M_v \lambda \mu | I_k M_k) (I_v K_v \lambda (K_v - K_k) | I_k K_k) \cdot (x_{K_v}, m(\lambda, K_v - K_k) x_{K_k}). \end{aligned} \quad /163/$$

A három D függvény szorzatára vonatkozó integrál, ill. a Clebsch-Gordan együtthatók tulajdonságaiból következnek mindenekelőtt az impulzusmomentumra vonatkozó megszokott kiválasztási szabályok:

$$\mu = M_v - M_k,$$

$$|I_v - I_k| \leq \lambda \leq I_v + I_k \quad /164/$$

Ezekon kívül felírható egy további kiválasztási szabály azon észrevétel alapján, hogy egy D -függvény alsó indexeként szereplő momentumvetületek abszolútértéke sohasem lehet nagyobb, mint a /momentum absz. értékét jelző/ felső index. Ezt $D_{\mu, K_v - K_k}^\lambda$ -ra alkalmazva írhatjuk:

$$|K_v - K_k| \leq \lambda. \quad /165/$$

Ez az un. K -kiválasztási szabály, mely a szokásos /164/ szabályoknál erősebb megszorítást jelent. A K -kiválasztási szabály egzaktul érvényes lenne, ha K szigorúan mozgásállandó volna. A valóságban, tudjuk, a FRK okozta sávkeveredés miatt nem ez a helyzet. Így csak az várható, hogy a /165/ feltételt sértő átmenetek igen lassan mennek végbe.

Ha /163/-at összehasonlítjuk /156/-tal, leolvashatjuk a redukált matrixelem kifejezését. Ezt felhasználva, /137/ alapján képezhető a redukált átmeneti valószínűség:

$$B(\lambda; I_k \rightarrow I_v) = (I_v K_v \lambda (K_v - K_k) | I_k K_k)^2 | (X_{K_v}, M'(\lambda, K_v - K_k) X_{K_k}) |^2.$$

Képezzük két, ugyanazon kezdeti állapotból kiinduló és azonos sávhoz tartozó végállapotokba vezető átmenet redukált valószínűségének viszonyát. A két átmenetre a $(X_{K_v}, M'(\lambda, K_v - K_k) X_{K_k})$ belső matrixelem ugyanaz s így a viszony képzésekor kiesik. Kapjuk:

$$\frac{B(\lambda; I_k \rightarrow I'_v)}{B(\lambda; I_k \rightarrow I_v)} = \frac{(I_k K_k \lambda (K_v - K_k) | I'_v K_v)^2}{(I_k K \lambda (K_v - K_k) | I_v K_v)^2} \quad /166/$$

d/ Összehasonlítás a tapasztalattal

Mint a /161/ képlet mutatja, egy forgási sávon belül megfigyelt $E2$ átmenetek valószínűségét mérve, meghatározhatjuk a mag belső kvadrupólmomentumának abszolútértékét. Néhány páros-páros magra $|Q_0|$ így kapott értéke:

Mag	$ Q_0 $ 10^{-24} cm^2
$^{150}_{60}\text{Nd}$	4,8
$^{152}_{62}\text{Sm}$	5,7
$^{154}_{62}\text{Sm}$	6,7
$^{160}_{64}\text{Gd}$	10
$^{178}_{72}\text{Hf}$	8,1
$^{184}_{74}\text{W}$	6,5
$^{188}_{76}\text{Os}$	5,1

A kapott $|Q_0|$ értékek a mágikus nukleonszámoktól távolodva nőnek, hozzájuk közeledve csökkennek. - Közöljük néhány páratlan magra is $|Q_0|$ /161/ alapján meghatározott értékét, s összehasonlításként Q_0 spektroszkópiai módszerrel kapott értékét is:

Mag	$ Q_0 $ /átm./	Q_0 /spektr./
$^{153}_{63}\text{Eu}$	7,7	7,0
$^{155}_{64}\text{Gd}$	8,0	5,5
$^{157}_{64}\text{Gd}$	7,7	5,0
$^{175}_{71}\text{Lu}$	8,2	12
$^{185}_{75}\text{Re}$	5,4	7,8

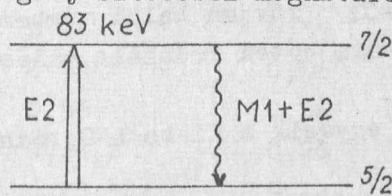
Tekintettel a kvadrupólmomentum spektroszkópiai meghatározásának korlátozott pontosságára /mely abból ered, hogy az elektronburok terének gradiensét a mag helyén igen pontatlanul ismerjük/, az egyezés kielégítőnek mondható.

Valamely M1 átmenet redukált valószínűségéből ($K \neq \frac{1}{2}$) esetén a $(g_K - g_R)^2$ mennyiség értékét kaphatjuk meg. Egy forgási sávon belül M1 átmenetek főként páratlan magokban figyelhetők meg, egységnyi impulzusmomentum-különbségű állapotok között.* Az M1 sugárzás rendszerint E2 sugárzás kíséretében jelentkezik. A gamma-szélesség mérése tehát nem magát a

$B(M1; I+1 \rightarrow I)$ redukált valószínűséget, hanem $B(M1; I+1 \rightarrow I)$ és $B(E2; I+1 \rightarrow I)$ kombinációját szolgáltatja. Ha azonban ezen kívül mérjük a megfordított $I \rightarrow I+1$ átmenet Coulomb-gerjesztésének hatáske- resztmetszetét, úgy megkapjuk $B(E2; (I \rightarrow I+1))$ -et, amiből $B(E2; I+1 \rightarrow I)$ a /138/ képlet alapján számítható. A $B(E2; I+1 \rightarrow I)$ redukált valószínűség- ből és az $I+1 \rightarrow I$ gamma-átmenet mért szélességéből megkapjuk végül $B(M1; I+1 \rightarrow I)$ -t. A $B(M1; I+1 \rightarrow I)$ redukált valószínűségéből - mint /156/ mutatja - csak $g_K - g_R$ négyzetét kapjuk meg; $g_K - g_R$ előjelére a Coulomb-gerjesztést követő kevert M1 + E2 sugárzás szögeloszlásából következtethetünk. A szögeloszlás kifejezésében $(g_K - g_R)/Q_0$ szerepel, s innen $g_K - g_R$ előjele megkapható, hacsak Q_0 előjele /spektroszkópiai mé- résekből/ ismert.

Példaként vegyük szemügyre az Eu^{153} magot /lásd a 14.ábrát/ A 83 keV- os $7/2$ spinű első gerjesztett állapot Coulomb-gerjesztéséből meghatározták

$B(E2; \frac{5}{2} \rightarrow \frac{7}{2})$ értékét. Ismerve, hogy a Coulomb gerjesztést követő gammasugár- zás 50 %-ban M1, 50 %-ban E2 jellegű, megkapták $B(M1; \frac{7}{2} \rightarrow \frac{5}{2})$ -et, amiből $|g_K - g_R| = 0,2$ addott. Figyelembe vé- ve, hogy az alapállapot sztatikus mágne-



14. ábra Eu^{153}

x/ A páros-páros magok alapállapoti sávjában a legkisebb impulzusmomentum- különbség 2; M1 átmenet ilyenkor nem lehetséges.

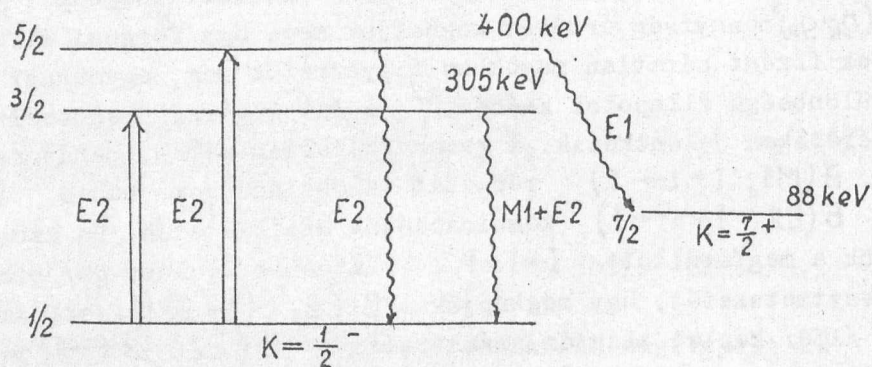
ses momentuma $\mu = 1,5$ magmagneton g_K -ra, g_R -re a következő két megoldás-rendszert nyerjük:

$$(i) \quad g_K = 0,5 \quad g_R = 0,7;$$

$$(ii) \quad g_K = 0,7 \quad g_R = 0,5$$

További mérések nem történtek, így egyelőre (i) és (ii) között nem dönthetünk.

A K -kiválasztási szabályt, valamint az elágazási arányra levezetett összefüggést jól példázza az ${}_{47}\text{Ag}^{109}$ mag. Az alacsonyban fekvő szintek között végbemenő Coulomb- és gammaátmeneteket a 15. ábra szemlélteti. Szembeszökő, hogy a $K = \frac{1}{2}^-$ sáv 400 keV-os állapotából a szomszédos $K = \frac{7}{2}^+$

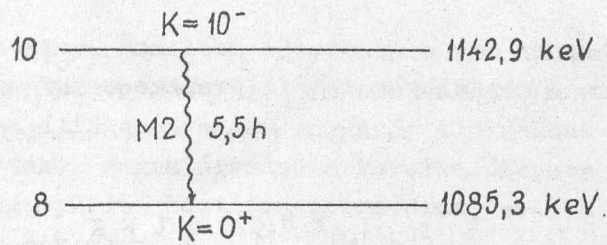


15. ábra ${}_{47}\text{Ag}^{109}$

sáv 88 keV-os, $I = \frac{7}{2}^+$ alapállapotába vezető E1 átmenet redukált valószínűsége rendkívül kicsiny: értéke az egyrészeckeátmenet feltételezésével számított értéknél 10^6 -szor kisebb. Ez a K -kiválasztási szabállyal jól magyarázható: most $\lambda = 1$, $\Delta K = |K_v - K_k| = 3$, így a /165/ feltétel nem teljesül. Megjegyezzük, hogy a $\nu = \Delta K - \lambda$ számot a K -tiltás fokának nevezzük; a szemügyre vett átmenet K -tiltottsága eszerint másodfoku. Az ${}_{47}\text{Ag}^{109}$ mag $K = \frac{1}{2}^-$ sávján belül végbemenő $\frac{1}{2}^- \rightarrow \frac{5}{2}^-$ és $\frac{1}{2}^- \rightarrow \frac{3}{2}^-$ Coulomb-átmenetek redukált valószínűségének viszonya: 1,8

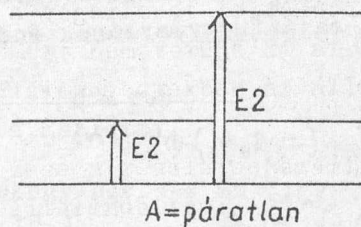
ami jól egyezik a Clebsch-Gordan-együtthatókból /166/ alapján számított értékkel.

A K -tiltás egy igen szélsőséges esetével találkozhatunk a Hf^{180} mag esetében. Az 1142,9 keV-os 10^- spinű, M1 sugárzással bomló gerjesztett állapot 5,5 óra átlagos élettartammal rendelkező izomér állapot. A hosszú élettartamot a K -tiltás magas foka: $\nu = |K_v - K_k| - \lambda = 10 - 2 = 8$, magyarázza /16. ábra/.



16. ábra Hf^{180}

Végezetül közöljük néhány páratlan magra az alapállapotú sáv első és második gerjesztett állapotába vezető Coulomb-gerjesztés redukált átmeneti valószínűségének viszonyát, összehasonlítva a /166/ alapján számított értékekkel /lásd a 17. ábrát/.



17. ábra

A mondott viszony értéke /166/ szerint

$$R = \frac{B(E2; I \rightarrow I+2)}{B(E2; I \rightarrow I+1)} = \frac{(1120 | I+2 \ I)^2}{(1120 | I+1 \ I)^2} = \frac{2(I+1)}{I(2I+3)}$$

A mért és számított értékek általában kielégítően egyeznek, mint az a következő összehasonlításból látható:

Mag	I	/mért/	/számított/
Eu ¹⁵³	$\frac{5}{2}$	0,28	0,35
Gd ¹⁵⁷	$\frac{3}{2}$	0,38	0,56
Tb ¹⁵⁹	$\frac{3}{2}$	0,56	0,56
Mo ¹⁶⁵	$\frac{7}{2}$	0,24	0,26
Lu ¹⁷⁵	$\frac{7}{2}$	0,23	0,26
Hf ¹⁷⁷	$\frac{7}{2}$	0,26	0,26

Megjegyezzük, hogy a gamma-bomlás esetéhez hasonlóan, az alfa és béta-bomlásra is vezethetők le kiválasztási szabályok, valamint az elágazási arányt meghatározó képlet.

F Ü G G E L É K

A. A pörgettyű-sajátfüggvények meghatározása a forgástranszformációs tulajdonságok alapján

A pörgettyűmozgást leíró állapotfüggvények a pörgettyű helyzetét jellemző $\alpha\beta\gamma$ Euler-szögek függvényei. Jelöljük az impulzusmomentum négyzetének $\hbar^2 J(J+1)$ és Z -vetületének $\hbar M$ sajátértékéhez tartozó pörgettyűsajátfüggvényt Φ_{JM} -mel. Alkalmazzuk e sajátfüggvényekre a kvantummechanikai rendszerek impulzusmomentum-sajátfüggvényeinek forgástranszformációját meghatározó /17/ összefüggést:

$$\Phi_{JM} = \sum_{M'} D_{MM'}^J(\alpha_0 \beta_0 \gamma_0) \Phi_{JM'}^{(\alpha_0 \beta_0 \gamma_0)} . \quad /A.1/$$

A baloldalon álló Φ_{JM} a szemügyre vett kvantummechanikai rendszert egy megadott S koordinátarendszerben jellemző változók függvénye; esetünkben

$\Phi_{JM} = \Phi_{JM}(\alpha \beta \gamma)$. A jobb oldalon álló $\Phi_{JM'}^{(\alpha_0 \beta_0 \gamma_0)}$ jel jelentése pedig ez: a JM' kvantumszámokkal jellemzett impulzusmomentum-sajátfüggvény argumentumaként most az S rendszerhez viszonyítva $\alpha_0 \beta_0 \gamma_0$ Euler-szögekkel elforgatott S' rendszerre vonatkozó változók állnak. Jelöljük ezeket $\alpha' \beta' \gamma'$ -vel:
 $\Phi_{JM}^{(\alpha_0 \beta_0 \gamma_0)} = \Phi_{JM'}(\alpha' \beta' \gamma')$. Ekkor /A.1/ helyett írható:

$$\Phi_{JM}(\alpha \beta \gamma) = \sum_{M'} D_{MM'}^J(\alpha_0 \beta_0 \gamma_0) \Phi_{JM'}(\alpha' \beta' \gamma') . \quad /A.2/$$

Legyen most $\alpha_0 = \alpha$, $\beta_0 = \beta$, $\gamma_0 = \gamma$. Ekkor $\alpha' \beta' \gamma'$ az S rendszerben $\alpha \beta \gamma$ Euler-szögekkel jellemzett helyzetű pörgettyűnek az ugyancsak $\alpha \beta \gamma$ Euler-szögekkel jellemzett helyzetű S' rendszerre vonatkoztatott Euler-féle szögkoordinátáit jelzik; így nyilvánvalóan $\alpha' = \beta' = \gamma' = 0$. A $\Phi_{JM'}(000) = C_{JM'}$ jelölést alkalmazva, a kapott eredmény így írható:

$$\Phi_{JM}(\alpha \beta \gamma) = \sum_{M'} C_{JM'} D_{MM'}^J(\alpha \beta \gamma) . \quad /A.3/$$

Az impulzusmomentum-sajátfüggvények forgástranszformációs tulajdonságaiból kiindulva arra az eredményre jutottunk, hogy az erőmentes pörgettyű JM kvantumszámokhoz tartozó impulzusmomentum-sajátfüggvényei mindenkor előállíthatók a forgásmatrix $D_{MM'}^J(\alpha \beta \gamma)$ elemeinek lineáris kombinációiként.

Minthogy az erőmentes pörgettyű Hamilton-operátora a tér izotrópiájában következően az impulzusmomentum operátorával felcserélhető, a stacionárius állapotokat leíró energiasajátfüggvényeknek is /A.3/ alakuknak kell lenniök.

Az energiasajátértékek meghatározása a következőképpen történhet. Irjuk fel az erőmentes pörgettyű H Hamilton-operátorát, mely a forgási energia T operátorával egyezik meg:

$$H = T = \frac{R_{x'}^2}{2J_{x'}} + \frac{R_{y'}^2}{2J_{y'}} + \frac{R_{z'}^2}{2J_{z'}} \quad /A.4/$$

Itt $J_{x'}$, $J_{y'}$, $J_{z'}$, a pörgettyű fő tehetetlenségi nyomatékait jelöli, $R_{x'}$, $R_{y'}$, $R_{z'}$ pedig az $\underline{R}$ impulzusmomentumoperátornak a három tehetetlenségi főtengelyre /ezeket választjuk a pörgettyűhöz rögzített S' koordinátarendszer tengelyeinek/ vetett vetületét jelzi. Ha az /A.3/ alakú kombinációt behlyettesítjük az /A.4/ Hamilton-operátor

$$H\Phi = E\Phi \quad /A.5/$$

Schrödinger-féle sajátértékegyenletébe és figyelembe vesszük az

$R_{x'} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(R_1' - R_{-1}')$, $R_{y'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(R_1' + R_{-1}')$, $R_{z'} = R_0'$ operátorok hatását meghatározó /39/, /40/ összefüggéseket, az együtthatók összehasonlításával az /A.3/-beli $C_{JM'}$ együtthatók meghatározására egy

$2J+1$ ismeretlenes homogén lineáris egyenletrendszer nyerünk. Ennek szekuláris egyenlete szolgáltatja az E sajátértékeket. Az így kapott $2J+1$ sajátérték mindegyike $2J+1$ -szeresen elfajult / M szerint/. Ez az elfajulás a tér izotrópiájának / H és $\underline{J}$ felcserélhetőségének/ folyománya.

A szimmetrikus pörgettyű / $J_{x'} = J_{y'}$ / esetében a sajátfüggvények megkereséséhez közvetlenül kihasználhatjuk a Z' -tengely körüli forgásszimmetriát. Ilyenkor a Z' -tengely körüli elforgatás a pörgettyű energiáját nyilván nem változtathatja meg, így az

$$e^{-\gamma_0 \frac{i}{\hbar} R_{z'}} \Phi_{JM}(\alpha\beta\gamma) = e^{-\gamma_0 \frac{\partial}{\partial \gamma}} \Phi_{JM}(\alpha\beta\gamma) = \Phi_{JM}(\alpha, \beta, \gamma - \gamma_0)$$

függvények γ_0 összes értékei mellett a Hamilton-operátornak ugyanazon energiasajátértékhez tartozó sajátfüggvényei. Képezzük most e függvények egy speciális szuperpozícióját; /A.3/-at felhasználva írjuk:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi} \Phi_{JM}(\alpha, \beta, \gamma - \gamma_0) e^{iM_0\gamma_0} d\gamma_0 = \\
 &= \sum_{M'} C_{JM'} \int_0^{2\pi} D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma - \gamma_0) e^{iM_0\gamma_0} d\gamma_0 = \\
 &= \sum_{M'} C_{JM'} D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) \int_0^{2\pi} e^{i(M_0 - M')\gamma_0} d\gamma_0 = \quad /A.6/ \\
 &= \sum_{M'} C_{JM'} \delta_{M'M_0} D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) = \\
 &= C_{JM_0} D_{MM_0}^J(\alpha, \beta, \gamma).
 \end{aligned}$$

Itt felhasználtuk, hogy $D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma)$ a /18/ képlet szerint γ -t az $e^{iM\gamma}$ alakban tartalmazza. Az /A.6/ eredmény mutatja, hogy szimmetrikus pörgettyű esetében a forgásmatrix elemei maguk stacionárius állapotokat írnak le. - Az energia sajátértékeket közvetlenül leolvashatjuk, ha az /A.4/ Hamilton-operátort

$$J_x = J_y = J, \quad R_x^2 + R_y^2 = R^2 - R_z^2$$

felhasználásával a

$$H = \frac{R^2}{2J} + \left(\frac{1}{2J_z} - \frac{1}{2J} \right) R_z^2$$

alakba írjuk. Ezen operátornak a $D_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma)$ függvényhez tartozó sajátértéke /39/ és /46/ szerint

$$E_{MM'}^J = \frac{\hbar^2 J(J+1)}{2J} + \left(\frac{\hbar^2}{2J_z} - \frac{\hbar^2}{2J} \right) M'^2.$$

A tér izotrópiájából következő $(2J+1)$ -szeres elfajulás mellett itt fel lép egy további elfajulás: a $\pm M'$ -höz tartozó $E_{MM'}^J$ és $E_{M,-M'}^J$ sajátértékek megegyeznek. - Gömbi pörgettyű ($J_z = J$) esetén $E_{MM'}^J$ csak J -től függ; az elfajulás ilyenkor $(2J+1)^2$ -szeres.

B. A pörgettyűhöz rögzített koordinátarendszerre vonatkoztatott impulzusmomentum-komponensek felcserélési összefüggései

A pörgettyűvel együttmozgó S' rendszerre vonatkoztatott $R_{x'}$, $R_{y'}$, $R_{z'}$ impulzusmomentum-komponensekre érvényes /41/ felcserélési összefüggéseket az 1.szakaszban az $\underline{R}$ operátor vesszős komponenseinek a forgásmatrix elemeire való hatását meghatározó /39/, /40/ képletekből olvastuk le. Eljuthatunk azonban ezen összefüggésekhez egyszerű operátoralgebra segítségével is, az $\underline{R}$ impulzusmomentum-operátor komponenseire a mozdulatlan, vesszőtlen rendszerben érvényes

$$[R_i, R_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} R_k \quad /B.1/$$

"normális" felcserélési törvényből kiindulva. Itt i, j, k az 1, 2, 3 értékeket veheti fel; R_1, R_2, R_3 rendre az R_x, R_y, R_z komponenseket jelentik. Hasonlóképpen használjuk a következőkben $R_{x'}, R_{y'}, R_{z'}$ helyett az R'_1, R'_2, R'_3 jelölést is.

Jelentsék a e_{1i}, e_{2i}, e_{3i} rendre a pörgettyűvel együttmozgó S' rendszer $x'y'z'$ koordinátatengelyeinek irányát kijelölő egységvektorokat. Ezek segítségével az $\underline{R}$ operátor S' rendszerre vonatkoztatott komponensei nyilván az

$$R'_i = e_{is} R_s \quad /B.2/$$

alakban írhatók fel.

Valamely kvantummechanikai rendszerhez tartozó V_i vektor /vektoroperátor/ az impulzusmomentum operátorának R_i komponenseivel az

$$[R_i, V_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} V_k \quad /B.3/$$

felcserélési összefüggésnek tesz eleget. Ilyen összefüggéseket elégít ki az

S' rendszer három koordináta-egységvektora is. /Ez közvetlenül is belátható; igen könnyű az állítás igazságáról meggyőződni pl. az R_z operátor, valamint a z' -tengely irányát kijelölő $e_{3i}(\sin\beta \cos\alpha, \sin\beta \sin\alpha, \cos\beta)$ egységvektor esetében, felhasználva R_z /21/ alakját./ A /B.3/ összefüggésből levezethető, hogy a V_i -vektornak az $\underline{R}$ impulzusmomentum-operátorral képzett skalárszorzata felcserélhető $\underline{R}$ -rel^{x/}:

$$[R_i, V_s R_s] = 0 \quad /B.4/$$

x/ Ha a /B.4/ összefüggésbe V_s helyére rendre az e_{1s}, e_{2s}, e_{3s} vektort helyettesítjük, /B.2/ figyelembe vételével azt találjuk, hogy az R_i , vesszőtlen és R'_i vesszős komponensek felcserélhetők egymással. Ez teszi lehetővé, hogy pl. R_z és $R_{z'}$ közös sajátfüggvényekkel rendelkezzenek /1. a /39/ és /43/ képleteket/.

Képezzük ezen előkészületek után az együttmozgó rendszerre vonatkoztatott /B.2/ komponensek kommutátorait:

$$\begin{aligned} [R'_i, R'_j] &= \\ &= [e_{ip} R_p, e_{jq} R_q] = \quad /B.5/ \\ &= e_{ip} [R_p, e_{jq} R_q] + [e_{ip}, e_{jq} R_q] R_p . \end{aligned}$$

Itt az első kommutátor /B.4/ szerint eltűnik. A második tag pedig, figyelembe véve, hogy az e_{1i} , e_{2i} , e_{3i} egységvektorok egymással felcserélhetők, az $e_{jq} [e_{ip}, R_q] R_p = -e_{jq} [R_q, e_{ip}] R_p$ alakban írható. Ha most tekintetbe vesszük, hogy az e_{1i} , e_{2i} , e_{3i} egységvektorok az impulzusmomentum operátorával /B.3/ alakú felcserélési összefüggéseknek tesznek eleget, /B.5/ helyett tovább írhatjuk:

$$\begin{aligned} [R'_i, R'_j] &= \\ &= -e_{jq} [R_q, e_{ip}] R_p = \quad /B.6/ \\ &= -i\hbar \varepsilon_{qpr} e_{ir} e_{jq} R_p . \end{aligned}$$

Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ ortogonális egységvektorokra /jobbsodrású $\underline{S}'$ rendszert feltételezve/ felírhatjuk az

$$\underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \underline{e}_3, \quad \underline{e}_2 \times \underline{e}_3 = \underline{e}_1, \quad \underline{e}_3 \times \underline{e}_1 = \underline{e}_2$$

vagy indexes jelölésben, az

$$\varepsilon_{prq} e_{ir} e_{jq} = \varepsilon_{ijk} e_{kp} \quad /B.7/$$

összefüggéseket. A /B.6/, /B.7/ és /b.2/ képletekből az

$$[R'_i, R'_j] = -i\hbar \varepsilon_{ijk} R'_k \quad /B.8/$$

eredményre jutunk. Megkaptuk az impulzusmomentum-operátor vesszős /együttmozgó rendszerbeli/ komponenseinek felcserélési összefüggéseit. A kapott eredmény, mely megegyezik /41/-gyel, a megszokott /nyugvó rendszerbeli/ felcserélési törvénytől a jobboldalon álló mínusz jelben tér el.

C. A $D_{M_1 M_1}^{J_1} D_{M_2 M_2}^{J_2}$ szorzat kifejtése a $D_{M' M}^J$ függvények szerint

Induljunk ki az impulzusmomentum-összeadás kvantummechanikai elméletéből ismert

$$\psi_{J_1 M_1} \psi_{J_2 M_2} = \sum_J (J_1 M_1 J_2 M_2 | J M) \psi_{J M} \quad /C.1/$$

Clebsch-Gordan-féle sorból. A koordinátarendszer elforgatásakor a szereplő impulzusmomentum-sajátfüggvények /13/ szerint transzformálódnak. Irhatjuk tehát:

$$\sum_{M'_1 M'_2} D_{M'_1 M_1}^{J_1*} D_{M'_2 M_2}^{J_2*} \psi_{J_1 M'_1} \psi_{J_2 M'_2} = \sum_{J M'} (J_1 M_1 J_2 M_2 | J M) D_{M' M}^{J*} \psi_{J M'}. \quad /C.2/$$

A jobboldalon álló $\psi_{J M'}$ a /C.1/ összefüggés megfordításával így írható:

$$\psi_{J M'} = \sum_{M'_1 M'_2} \psi_{J_1 M'_1} \psi_{J_2 M'_2} (J_1 M'_1 J_2 M'_2 | J M') \quad /C.3/$$

Ezt /C.2/-be helyettesítve és a bal- s a jobboldalon az egyes $\psi_{J_1 M'_1} \psi_{J_2 M'_2}$ szorzatok együtthatóit egyenlővé téve kapjuk:

$$D_{M'_1 M_1}^{J_1} D_{M'_2 M_2}^{J_2} = \sum_J (J_1 M'_1 J_2 M'_2 | J M') (J_1 M_1 J_2 M_2 | J M) D_{M' M}^J; \quad /C.4/$$

itt $M' = M'_1 + M'_2$, $M = M_1 + M_2$. A komplex konjugálást jelző csillagokat elhagyhattuk, minthogy a Clebsch-Gordan-együtthatók valósak.

A /C.4/ eredményt felhasználjuk arra, hogy meghatározzuk a pörgetűhöz rögzített S' rendszer y' -tengelye körül végzett Π szögű elforgatáshoz rendelt $e^{-\frac{i\Pi}{\hbar} R_{y'}}$ operátornak két D -függvény szorzatára való hatását. Idézzük a 3.szakasz c.pontjának /94/ képletét, mely meghatározza ezen operátornak egy D -függvényre való hatását:

$$e^{-\frac{i\Pi}{\hbar} R_{y'}} D_{M' M}^J = (-1)^{J-M} D_{M', -M}^J$$

Ezt felhasználva felírhatjuk a /C.4/ jobboldalán álló kifejezésnek az $e^{-\frac{i\pi}{\hbar} R_y}$ operátor hatására előálló transzformáltját. Kapjuk:

$$\sum_j (j_1 m_1' j_2 m_2' | j m') (j_1 m_1 j_2 m_2 | j m) (-1)^{j-m} D_{m_1'-m}^j. \quad /C.5/$$

E kifejezés a Clebsch-Gordan-együtthatók

$$(a \alpha b \beta | c \gamma) = (-1)^{a+b-c} (a, -\alpha, b, -\beta | c, -\gamma)$$

szimmetriatulajdonságát felhasználva a

$$(-1)^{j_1+j_2-M} \sum_j (j_1 m_1' j_2 m_2' | j m') (j_1 -m_1, j_2 -m_2 | j -M) D_{m_1'-M}^j$$

alakba írható. Az összegezést /C.4/ segítségével elvégezve, egyszerű alakban kapjuk a kívánt eredményt, a $D_{m_1' m_1}^{j_1} D_{m_2' m_2}^{j_2}$ szorzatnak az $e^{-\frac{i\pi}{\hbar} R_y}$ operátor hatására előállott transzformáltját:

$$e^{-\frac{i\pi}{\hbar} R_y} D_{m_1' m_1}^{j_1} D_{m_2' m_2}^{j_2} = (-1)^{j_1-m_1'+j_2-m_2} D_{m_1'-m_1}^{j_1} D_{m_2'-m_2}^{j_2}. \quad /C.6/$$

Ahhoz, hogy innen megkapjuk a /95/ képletet, melynek igazolásával tartozunk, mindennek előtt megjegyezzük, hogy a forgásmatrix és annak komplex-konjugáltja között a kapcsolat:

$$D_{K'K}^{j*} = (-1)^{K-K'} D_{-K',-K}^j. \quad /C.7/$$

Ez /18/, /19/ alapján közvetlenül belátható. Ha most /C.6/ eredményünket a $D_{MK}^I D_{K'K}^{j*} = (-1)^{K-K'} D_{MK}^I D_{-K',-K}^j$ szorzatra alkalmazzuk, transzformáltként

$$(-1)^{I+j+K-K'} D_{M,-K}^I D_{-K',K}^j$$

adódik. Ha a második tényezőbe /C.7/ segítségével visszahozzuk a komplex konjugáltat, kifejezésünk a

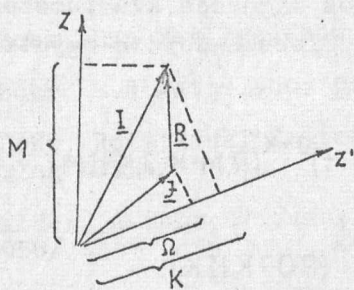
$$(-1)^{I+j-2K} D_{M,-K}^I D_{K',-K}^{j*}$$

alakot ölti. Vegyük itt figyelembe, hogy $j-K$ egész szám, s így $(-1)^{j-K} = (-1)^{K-j}$ írható; ekkor a kapott kifejezés éppen az igazolni kívánt /95/ képlet jobboldalát adja.

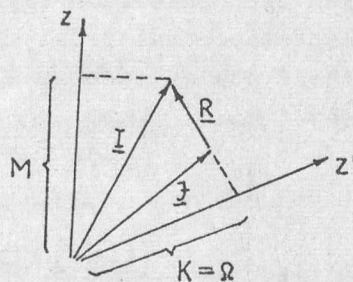
D. Impulzusmomentum-kapcsolódás a forgási modellben

A forgási modell Hamilton-operátorának /86/ közelítő sajátfüggvénye /85/ szerint a teljes impulzusmomentum $\mathbf{I}$, a /térben fix rendszerbeli/

z -tengelyre vetett impulzusmomentum-vetület M , valamint a /maggal együttmozgó rendszerbeli/ z' -vetület K értékéhez tartozik/ $\hbar$ -t egységnek véve/. A mondottakat a 18.ábra szemlélteti. Az $\mathbf{I}$ impulzusmomentum /75/ szerint a külső nukleonok $\mathbf{j}$, valamint a magtörzs $\mathbf{R}$ impulzusmomentumából tevődik össze. A $\mathbf{I}$ impulzusmomentumnak a z' -tengelyre /a magtörzs szimmetriatengelyére/ vetett vetülete /78/ szerint az Ω meghatározott értékkel rendelkezik. Tekintettel a magtörzs nem gömbszimmetrikus volta, j^2 nem, csak j_z mozgásállandó, így a 18.ábrára berajzolt $\mathbf{j}$ vektor /s ugyanígy $\mathbf{R}$ / nagysága és iránya változó lehet. Eközben azonban mindenkor teljesülnie kell a $\mathbf{j} + \mathbf{R} = \mathbf{I}$ és a $j_z = \Omega$ feltételnek. Meg kell jegyezni, hogy a magalak



18.ábra



19.ábra

forgásszimmetriájából következően /89/ szerint $K = \Omega$. Ennek megfelelően az impulzusmomentum-kapcsolódást szemléltető vektor-váz módosul, a 18.ábrán látható helyett a 19.ábrán bemutatott alakot ölti.

A /86/ sajátfüggvény szokatlan alakú. Ha egy kvantummechanikai rendszer két alrendszerből tevődik össze, úgy az alrendszerek impulzusmomentumának a rendszer teljes impulzusmomentumává való összekapcsolódását matematikai alakban szokás szerint egy Clebsch-Gordan-együtthatók segítségével felépített /C.3/ típusú kifejezés tükrözi. A /86/ sajátfüggvény alakja nem ilyen.

Nem szabad azonban megfeledkeznünk arról, hogy míg a megszokott alakú /C.3/ kifejezésben szereplő ψ sajátfüggvények ugyanazon koordinátarendszerre vonatkoztatott koordináták függvényei, /86/ alatt ez nem így van. A magtörzs helyzetét jellemző $\alpha\beta\gamma$ változók a térben rögzített S rendszerre vonatkoznak, ugyanakkor a külső nukleonokat a magtörzzsel együttmozgó

S' koordinátarendszerre vonatkoztatott $x'_i y'_i z'_i$ koordinátáik jellemzik.

A /86/ állapotfüggvény olyan alakját, melyben a külső nukleonokat a térben fix S rendszerre vonatkoztatott $x_i y_i z_i$ változók jellemzik, /93/ alatt írtuk fel. A D -függvény komplex-konjugáltját /C.7/ segítségével kiküszöbölve /93/ helyett írhatjuk:

$$\psi_{IKM}^{\tau} = \left(\frac{2I+1}{8\pi^2} \right)^{1/2} \sum_{J, K'} C_J (-1)^{K-K'} D_{MK}^I (\alpha\beta\gamma) D_{-K, -K'}^J (\alpha\beta\gamma) \chi_{JK'}^{\tau}(x_i y_i z_i).$$

Fejtsük ki az itt szereplő $D_{MK}^I D_{-K, -K'}^I$ szorzatot /C.2/ segítségével a D függvények szerint. Kapjuk:

$$\psi_{IKM}^{\tau} = \left(\frac{2I+1}{8\pi^2} \right)^{1/2} \sum_{R, J, K'} C_J (-1)^{K-K'} (I, M, J, -K' | R, M-K') \cdot$$

/D.1/

$$\cdot (I, K, J, -K | R, 0) \cdot D_{M-K, 0}^R (\alpha\beta\gamma) \chi_{JK'}^{\tau}(x_i y_i z_i).$$

Itt további átalakításokat végzünk. Mindenek előtt megtehetjük, hogy a szereplő két Clebsch-Gordan-együtthatóban az összes mágneses kvantumszám előjelét ellentétesre változtatjuk. Ezután az egyes Clebsch-Gordan-együtthatókra a következő átalakításokat alkalmazzuk:

$$(I, -M, J, K' | R, K-M) = \sqrt{\frac{2R+1}{2I+1}} (-1)^{J+K'} (R, M-K', J, K' | I, M),$$

$$(I, -K, J, K | R, 0) = \sqrt{\frac{2R+1}{2I+1}} (-1)^{J+K} (R, 0, J, K | I, K).$$

Ezeket felhasználva /D.1/ helyett írhatjuk:

$$\psi_{IKM}^{\tau} = \left(\frac{2I+1}{8\pi^2} \right)^{1/2} \sum_{R, J, K'} C_J \frac{2R+1}{2I+1} (R, M-K', J, K' | I, M) (R, 0, J, K | I, K) D_{M-K, 0}^R \chi_{JK'}^{\tau},$$

vagy

$$\psi_{IKM}^{\tau} = \frac{1}{[8\pi^2(2I+1)]^{1/2}} \sum_J C_J \sum_R (2R+1) (R, 0, J, K | I, K) \phi_{R, J, I, M}, \quad /D.2/$$

ahol

$$\phi_{R, J, I, M} = \sum_{K'} (R, M-K', J, K' | I, M) D_{M-K, 0}^R \chi_{JK'}^{\tau} \quad /D.3/$$

A most felírt függvény már a megszokott alakban fejezi ki a törzs R , valamint a külső nukleonok J impulzusmomentumának az I teljes impulzusmomentummá való összekapcsolódását. Maga Φ_{RJM} természetesen nem írhat le stacionárius állapotot, miután J és R nem mozgásállandók. A stacionárius állapotokat a Φ_{RJM} -ekből képezett /D.2/ alakú lineáris kombinációk írják le.

I r o d a l o m

- [1.] A.Bohr dolgozata, melyben a forgási állapotok elméletének kidolgozását kezdeményezi: Phys.Rev. 81 /1951/ 134.
A jegyzékben felsorolt többi munka átfogó, összefoglaló jellegű közlemény vagy monográfia, melyekben további irodalmi hivatkozások találhatóak:
- [2.] A.Bohr, Dan.Mat.Fys.Medd. 26, /1952/ no.14.
- [3.] A.Bohr, B.R.Mottelson, Dan.Mat.Fys.Medd. 27 /1953/ no. 16.
- [4.] A.Bohr, Rotational States of Atomic Nuclei, København, Ejnar Munksgaards Forlag /1954/
- [5.] K.Alder, A.Bohr, T.Huns, B.R.Mottelson, A.Winther, Rev.Mod.Phys. 28 /1956/
- [6.] S.A.Moszkowzki, Handbuch der Physik XXXIX. /S.Flügge szerkesztésében/ Berlin, Springer /1957/.
- [7.] J.P.Elliott, Collective Motion in Nuclei, Lecture Notes, University of Rochester /1958/
- [8.] A.K.Kerman, Nuclear Reactions /Endt, Demeur szerkesztésében/ Amsterdam, North Holland Co. /1959/
- [9.] D.M.Brink, Progress in Nuclear Physics, 8 /O.R.Frisch szerkesztésében/ Oxford, Pergamon /1960/



