

Vol.13.No.3.1965

1966 FEB 2 8



KFKI

KÖZLEMÉNYEK

ОБЩЕНИЯ ЦЕНТРАЛЬНОГО ИНСТИТУТА ФИЗИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

REPORTS OF THE CENTRAL RESEARCH INSTITUTE FOR PHYSICS

Szerkeszti: Ádám András
Главный редактор: А. Адам
Editor: A. Ádám

A KÖZPONTI FIZIKAI KUTATÓ INTÉZET KIADÓI CSOPORTJA
ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ГРУППА ЦЕНТРАЛЬНОГО ИНСТИТУТА ФИЗИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ
PUBLISHING GROUP OF THE CENTRAL RESEARCH INSTITUTE FOR PHYSICS
BUDAPEST, 114. POB 49.

Technikai szerkesztő: Nagy Imréné
Megjelent: 1965. június 30.

Példányszám: 300
Rotaszám: 2159

A kiadásért felelős: Jánossy Lajos

KFKI

KÖZLEMÉNYEK

TARTALOM

1. Dolinszky Tamás: Egy új exakt diszperziós formula 151
2. Németh Géza: A $\psi(a, c; x)$ függvény polinomapproximációjáról 163
3. Németh Géza: Az integrál sinus és integrál cosinus függvények Csebisev sorfejtése 171
4. Graff György, Lajtai Albert és Nagy László: Az U-235 hasadásánál keletkezett gamma-sugarak szögeloszlása 177
5. Kósa Somogyi István: Sugárkémiai folyamatok vizsgálata krioszkópikus módszerrel 185
6. Bakos József, Csillag László, Kántor Károly és Varga Péter: Ezüsttükros nagyfrekvenciás gerjesztésű He-Ne laser 195
7. Csillag László és Salamon Tamás: Egyidejűleg gerjesztett laser-átmenetek vizsgálata nagyfrekvenciás gerjesztésű ezüsttükros He-Ne gázlaserben a gerjesztőáram, a keverékarány és a nyomás függvényében 199

K i s é r l e t i t e c h n i k a

8. Csillag László: Gáztöltő- és vakuumrendszer alacsony nyomású gázkeverékek gazdaságos előállítására és vizsgálatára 209

Резюме

1. Об одной точной дисперсионной формуле

Т. Долински

В отличие от одного раньше использованного метода, упругое рассеяние рассматривается без использования оператора Грина. Дисперсионная структура транзитного матричного элемента дается разложением волновой функции рассеяния по решениям дифференциального уравнения свободного движения. С помощью приравнения граничных условий разложение становится одновременно очень простым и равномерно сходящимся. Резонансная формула характеризуется отсутствием члена, описывающего нерезонансный фон, и структурой "один член \rightarrow много полюсов". Уравнения, точно дающие полюса в R -плоскости, совпадают с уравнениями, полученными при приравнении граничных условий. Таким образом, теории, использующие произвольные граничные условия, принципиально не могут дать точные численные значения для полюсов.

2. О многочленном приближении функции

Г. Немет

В этой статье занимается определением многочленных приближений вырожденной гипергеометрической функции $\psi(a, c; x)$ при помощи разложения в ряды Чебышева. Определяются коэффициенты разложений входящие в область $x \geq \lambda$ функции $x^a \psi(a, c; x)$ на основе интегрального преобразования Стилтеса. В дальнейшем будет выведена рекуррентная формула коэффициентов, на основе представления интегралов. Была получена для коэффициентов разложения следующая асимптотическая формула:

$$\varphi_n = A n^{2/3(a+\sigma-2)} e^{-3\lambda^{1/3} n^{2/3}} \left\{ 1 + O(n^{-2/3}) \right\}, \quad n \rightarrow \infty.$$

В конце концов показывается, как можно получить очень простым способом с помощью приближений, имеющих фиксированные параметры a и c приближения с другими параметрами.

3. Разложение в ряды Чебышева функций интегрального синуса и косинуса
Г.Немет

В этой статье мы занимаемся разложением в ряды Чебышева функций $si(x)$ и $ci(x)$. Эти разложения являются более целесообразными применяемых в литературе, с практической точки зрения, так как они сходятся быстрее. В случае $0 \leq x \leq a$ коэффициенты рядов Чебышева уменьшаются сильнее - около на фактор 4^{-n} по отношению к коэффициентам ряда Тейлора. В случае $x \geq a$ вместо расходящихся асимптотических рядов даются сходящиеся ряды Чебышева. Эти ряды сходятся в порядке

$$e^{-2\sqrt{an}} O(n^{-1/4}) \quad n \rightarrow \infty$$

4. Угловое распределение гамма-лучей, образованных при делении ядра U-235
Г.Графф, А.Лайтаи, Л.Надь

Было измерено угловое распределение гамма-лучей, образованных при делении, происходящем под действием тепловых нейтронов U-235 относительно направления осколков деления. Интенсивность гамма-излучения в направлении осколков деления больше, чем перпендикулярно к нему. Величина анизотропии получилась приблизительно одинаковой для фотонов с энергией больше 120 кэв и 600 кэв.

5. Исследование радиационно-химических процессов криоскопическим методом
И.Коша-Шомоди

Измерительная установка была сконструирована для снятия кривых кристаллизации соединений в количествах $\sim 1 \text{ см}^3$ и для определения их точек плавления. При помощи данного метода радиационная стабильность изученных материалов характеризовалась понижением точки плавления, вызванным излучением. Измерялись значения G конденсированных продуктов разложения бензола и дифенилметана, облученных в вертикальных каналах реактора типа ВВР-С. На основе сравнения наших результатов с литературными данными предложен механизм образования полимерных продуктов.

6. Лазер на He-Ne с серебряными зеркалами возбужденной высокочастотой
Й.Бакош, Л.Чиллаг, К.Кантор, П.Варга

Были исследованы лазерные параметры. Для этой цели был построен газовый лазер на He-Ne с серебряными зеркалами. Было наблюде-
но интенсивное излучение лазера на длинах волн $1,15\mu$, $2,39\mu$ и $3,39\mu$. В
настоящей статье подробно излагаются установка и несколько измери-
тельных результатов.

7. Изучение лазерных переходов излученных одновременно оптическим кван-
товым генератором с серебряными зеркалами на He-Ne возбужденным с
высокой частотой в зависимости от тока возбуждения, пропорции смеси
и давления
Л.Чиллаг и Т.Шаламон

Было исследовано 6 лазерных переходов. Большую интенсивность имели
переходы каскадов $1,15\mu$, $2,39\mu$ и $3,39\mu$. Изменение интенсивно-
стей показывается на графиках в зависимости от давления (0,4 торр -
3 торр) и пропорции смеси He-Ne ($3/1 - 12/1$) при трех различных
мощностях возбуждения.

8. Газонаполнительная, вакуумная система для экономичного производства
и исследования газовых смесей низкого давления
Л.Чиллаг

В этой работе дается отчет о стеклянной газонаполнительной системе.
В этой системе при помощи магнитных питательных клапанов могут быть
получены газовые смеси низкого давления (0,1-1 торр). Установка при-
меняется для наполнения лазеров на He-Ne.

S u m m a r i e s

1. On an Exact Dispersion Formula

T. Dolinszky

The elastic scattering is dealt with by the formal theory of scattering without a recourse to Green operators. The dispersion structure is based on the eigenfunction expansion of the scattering state itself in terms of solutions to the force-free problem. By matching the homogeneous boundary conditions both simplicity and uniform convergence are achieved. Particular features are the absence of non-resonant background and the one-term \rightarrow many poles correspondance. The poles are zeros of the resonance equations, formally identical with the boundary conditions. It is shown that theories working with unmatched boundary conditions necessarily fail in the exact evaluation of the singularities.

2. Polynomial Approximation to the Function $\psi(a, c; x)$

G. Németh

The polynomial approximation to the confluent hypergeometric function $\psi(a, c; x)$ by Chebyshev expansion is discussed. The Chebyshev expansion coefficients of the function $x^a \psi(a, c; x)$ for $x = \geq \lambda$ are evaluated from an integral constructed by means of a Stieltjes transform. The reproduction of the recursion formula of the coefficients from the new expression is shown. For the expansion coefficients an asymptotic formula is derived which has the form

$$\varphi_n = A n^{2/3(a+\sigma-2)} e^{-3\lambda^{1/3} n^{2/3}} \left\{ 1 + O(n^{-2/3}) \right\}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Finally a simple method is presented by which it is possible to obtain from the polynomial approximation with fixed parameters a and c further approximations to other parameters as well.

3. Chebyshev Expansion of Integral Sine and Integral Cosine Functions

G. Németh

The Chebyshev expansion of the functions $ci(x)$ and $si(x)$ is discussed. This type of expansion proves to be more useful in practice than the other types used in the literature due to its earlier convergence. The decrease in the Chebyshev expansion coefficients for $0 \leq x \leq a$ is higher by a factor of 4^{-n} as compared with that in Taylor expansion coefficients. In the case $x > a$, instead of the divergent asymptotic series, convergent Chebyshev series are given. The convergence of the series is of the order

$$e^{-2\sqrt{an}} O(n^{-1/4}) \quad n \rightarrow \infty$$

4. Angular Distribution of Gamma-Rays from the Fission of U-235

G. Graff, A. Lajtai, L. Nagy

The angular distribution of gamma rays from thermal neutron induced fission has been measured with respect to the axis of fission. The gamma radiation intensities were found to be higher in the direction of than in the direction normal to fragment motion. The anisotropy was found to be nearly identical for 120 keV and 600 keV threshold photon energies.

5. Investigation of Radiation Chemical Processes with Cryoscopic Method

I. Kósa Somogyi

A measuring device has been built for recording the cooling curves and for determining the melting points of small volume / $\sim 1 \text{ cm}^3$ / samples in order to characterize the radiation behaviour of organic materials by the decrease in their freezing point after irradiation. Use has been made of this device in the determination of the G-values of condensed radiolytic products in benzene and diphenyl-methane, irradiated in the vertical channels of the WWR-S type reactor. The mechanism of polymer production is discussed in the light of a comparison of the measured data with the literary results.

6. High-frequency He-Ne optical maser with silver-coated mirrors

J. Bakos, L. Csillag, K. Kántor and P. Varga

For the investigation of laser parameters a He-Ne optical maser has been built. Intensive laser oscillation was obtained at $1,15\mu$ $2,39\mu$

and $3,39\mu$ wave lengths. The experimental equipment is described and some results of measurements connected with its performance are given.

7. Investigation of the dependence of simultaneously excited laser transitions on excitation power, gas mixture and pressure

L.Csillag and T.Salamon

Six laser transitions have been observed at which the $1,15\mu \rightarrow 2,39\mu \rightarrow 3,39\mu$ is a comparatively strong cascade transition. Graphs are given showing the variation in the intensity of this transition over a pressure range from 0,4 Torr to 3,3 Torr for various He-Ne mixtures /between 3:1 and 12:1/ and under different excitation conditions.

8. Gas-filling and vacuum-system for the economical production of low-pressure gas mixtures

L.Csillag

A gas-filling system provided with magnetic control valves is described in which low-pressure /0,1 Torr - 1 Torr/ gas mixtures in given ratios can be produced. The system has been applied for the filling of He-Ne laser tubes.

EGY ÚJ EXAKT DISZPERZIÓS FORMULA

Irta: Dolinszky Tamás

Összefoglalás

A formális szóráselmélet tranzitmátrix-eleméből kiindulva szokatlanul egyszerű módszerrel vezetünk le korrekciós diszperziós formulát. A diszperziós struktúra alapját a szórási állapotnak kölcsönhatásmentes hullámfüggvények szerinti kifejtése jelenti. A homogén határfeltételek egyeztetése következtében a rezonanciaformula paraméterei energiafüggőek. Egyetlen tagja végtelen sok rezonancia járulékát foglalja össze. Rezonancia közelében a hatáskeresztmetszet Breit-Wigner-típusú egynívós formulára redukálódik. A diszperziós formulából leolvasható pólusok exaktul visszaadják a tranzitmátrix-elem közvetlenül meghatározott szingularitásait. A pólus-egyenlet lényegében azonos a határfeltételek egyeztetését előíró egyenlettel. Ebből arra következtetünk, hogy az önkényes határfeltételekkel dolgozó R -mátrix elmélet és a Kapur-Peierls elmélet rezonancia-paraméterei pontatlanok. A Green-operátoros szóráselméleti tárgyalással való összevetés is jelen módszer javára dönt.

Bevezetés

A szórási mátrixelem diszperziós szerkezetének kifejtése során sajátfüggvény-sorfejtésekre támaszkodó magreakcióelméletekben mindig matematikus a sorfejtés abszolút és egyenletes konvergenciája. A végtelen sort a szórási mátrixelem kiszámítása során tagonként kívánjuk integrálni és a szórási amplitudó képzésekor konjugáltjával tagonként összeszorozni. E műveletek tagonkénti elvégzésének egyetlen gyakorlatilag szóba jöhető indoklása csakis a sor abszolút és egyenletes konvergenciája lehet. Másrészt, az abszolút és egyenletes konvergenciának egyetlen ismert elégséges feltétele a homogén határfeltételek egyeztetése és sorbafejtendő függvény és a báziselemek között. A határfeltételek egyeztetése azonban nem valósítható meg abban az esetben, ha a sorbafejtendő függvény és a bázisrendszer ugyanannak a differenciálegyenletnek a megoldásai: a homogén határfeltételek speciálta sajátfüggvényrendszer egyik eleme maga a sorbafejtendő sajátfüggvény. Mind az R -mátrix elmélet [1], mind a Kapur-Peierls elmélet [2] a reakcióhullámfüggvényt a probléma Hamilton-operátorának egy-egy sajátfüggvényrendszere szerint fejti ki. Bár a bázisrendszer mindkét elméletben or-

togonális, a bázisrendszert definiáló határfeltételek szükségszerűen különböznek a reakció-hullámfüggvény által kielégített homogén határfeltételektől. Így egyik elmélet sem tudja matematikailag megindokolni a sorfejtés tagonkénti kezelését. Felmerül a kérdés: ezek után diszperziós formuláik - szerkezetükön túlmenően - tartalmazhatnak-e hiteles információt a szórási mátrixelem paramétereit illetően. A választ e paraméterek határfeltétel-függésének vizsgálata adhatja meg.

Az alábbiakban olyan új diszperziós elméletet fejtünk ki, amelyben az abszolút és egyenletes konvergenciát bizonyított matematikai sorfejtési tétellel biztosítjuk.

A tárgyalás során egyszersmind tisztán láthatóvá válik a bázisrendszer számára választott határfeltételek kapcsolata a levezetett rezonancia-paraméterekkel; ezzel választ kapunk az R -mátrixelmélet és a Kapur-Peierls elmélet hitelességét illető problémánkra is.

A tárgyalást most centrális potenciál esetére korlátozzuk; az elvi gondolatmenetet így láthatjuk legtisztábban.

Egy sorfejtési tétel

A tiszta másodrendű

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k_1^2 - v_1(r) \right] u_1(r, k_1) = 0 \quad //$$

differenciálegyenlet bármely $u_1(r, k_1)$ megoldását a homogén határfeltételek egyeztetése mellett különösen egyszerű szerkeztű sorba lehet fejteni az $a \leq r \leq b$ korlátos intervallumban a $v_1(r) \neq v_2(r)$ feltétel teljesülése esetén a

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k_2^2 - v_2(r) \right] u_2(r, k_2) = 0 \quad /2/$$

egyenletnek alkalmas $u_2^{(n)}(r, k_2)$ sajátfüggvényrendszere szerint. A két differenciálegyenletnek baloldaltól $u_2(r, k_2)$ ill. $u_1(r, k_1)$ -vel való szorzása és az (a, b) intervallumra való parciális integrálása útján azonnal megkapjuk a

$$\begin{aligned} & (k_1^2 - k_2^2) \int_a^b u_1(r, k_1) u_2(r, k_2) dr = \quad /3/ \\ & = \int_a^b [v_1(r) - v_2(r)] u_1(r, k_1) u_2(r, k_2) dr + \left[W \left\{ u_1(r, k_1); u_2(r, k_2) \right\} \right]_{r=a}^{r=b} \end{aligned}$$

összefüggést, amely bármilyen $u_1(r, k_1), u_2(r, k_2)$ megoldaspár esetén igaz. Ha ezen túlmenően a két differenciálegyenlet egy-egy $u_1(r, k_1), u_2(r, k_2)$ megoldása az $r=a, r=b$ pontokban ugyanazokat a homogén határfeltételeket elégíti ki, akkor ezeken a helyeken Wronski-determinánsaik eltűnnek:

$$W_{r=a} \left\{ u_2(r, k_2); u_1(r, k_1) \right\} = 0 \quad /4a/$$

$$W_{r=b} \left\{ u_2(r, k_2); u_1(r, k_1) \right\} = 0 \quad /4b/$$

Eszerint a két másodrendű differenciálegyenlet azonos homogén határfeltételeket kielégítő egy-egy megoldásának valós-skalárszorzatát a

$$\int_a^b u_2(r, k_2) u_1(r, k_1) dr = \frac{\int_a^b [v_1(r) - v_2(r)] u_2(r, k_2) u_1(r, k_1) dr}{k_1^2 - k_2^2} \quad /5/$$

nagyon egyszerű formula adja meg.

Másrészt a Sturm-Liouville-féle sorfejtési tétel értelmében bármely korlátos $f(r)$ függvény az (a, b) intervallumban abszolút és egyenletesen konvergens sorba fejthető másodrendű differenciálegyenleteknek a - a határfeltételek egyeztetésével egyértelműen specifikált - sajátfüggvényrendszerrel szerint; a sorfejtés együtthatói az $f(r)$ függvény valós-skalár szorzatai az (a, b) intervallumra vonatkozóan a bázis elemeivel:

$$f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \int_a^b w^{(n)}(r, k_n) \cdot f(r) dr \right\} \cdot w^{(n)}(r, k_n), \quad a \leq r \leq b; \quad /6/$$

$$W_{r=a} \left\{ w(r, k); f(r) \right\} = 0 \quad /7a/$$

$$W_{r=b} \left\{ w(r, k); f(r) \right\} = 0 \quad /7b/$$

Ha most speciálisan, a kifejtendő $f(r)$ függvény maga is másodrendű differenciálegyenlet megoldása, akkor a Sturm-Liouville-tétel kombinálható a sorfejtési együtthatók /5/ kifejezésével. Eszerint /1/, /2/ és /4/ teljessége mellett a

$$u_1(r, k_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\int_a^b [v_1(r) - v_2(r)] u_2^{(n)}(r, k_{2,n}) u_1(r, k_1) dr}{k_1^2 - k_{2,n}^2} u_2^{(n)}(r, k_{2,n}) \quad /8/$$

sorfejtés az (a, b) intervallumban egyenletesen és abszolút konvergens. Nagyon érdekes, hogy a sorfejtés rendkívül egyszerű alakja a homogén határfeltételek egyeztetésének, azaz éppen az abszolút és egyenletes konvergencia biztosításának köszönhető. A sorfejtés egyszerűsége és kiváló kon-

vergencia-tulajdonságai itt egyenesen feltételei egymásnak.

A szórás hullámfüggvény sorfejtése

Alkalmazzuk most fenti megállapításainkat arra az esetre, amelyben a két differenciál egyenlet a $v(r)$ potenciállal adott probléma radiális differenciálegyenlete, ill. az ugyanezen csatornabeli szabadmozgás differenciálegyenlete. Eszerint a

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - v(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} + k^2 \right] u_l(r, k) = 0, \quad v(r > a) \equiv 0, \quad /9/$$

differenciálegyenlet $u_l^{(+)}(r, k)$ szórás megoldását fejtjük ki a $(0, a)$ intervallumban a

$$\left[\frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \kappa^2 \right] w_l(r, \kappa) = 0 \quad /10/$$

szabad-Schrödinger-egyenlet alkalmas megoldásai szerint.

A /7/ sorfejtés most $(0, a)$ -ban

$$u_l^{(+)}(r, k) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\int_0^a v(r) \cdot w_l^{(m)}(r, \kappa_{lm}) u_l^{(+)}(r, k) dr}{k^2 - \kappa_{lm}^2(k)} w_l^{(m)}(r, \kappa_{lm}) \quad /11/$$

alaku; a /4/ határfeltételek most

$$w_{r=0} \left\{ w_l(r, \kappa); u_l^{(+)}(r, k) \right\} = 0; \quad /12a/$$

$$w_{r=a} \left\{ w_l(r, \kappa); u_l^{(+)}(r, k) \right\} = 0 \quad /12b/$$

alakuak. Az origóban korlátos $v(r)$ potenciál esetén /12.a/ miatt $u_l^{(+)}(r, k)$ val együtt $w_l(r, \kappa)$ is eltűnik $r=0$ -ra. Így a /12/ egyenletpár a $w_l^{(0)}(r, \kappa)$ reguláris megoldásra felírt egyetlen

$$w_{r=a} \left\{ w_l^{(0)}(r, \kappa); u_l^{(+)}(r, k) \right\} = 0 \quad /13/$$

határfeltétellel redukálódik. /13/ egyértelműen definiálja a /11/ sorfejtés energiafüggő $\kappa = \kappa_{lm}(k)$ sajátértékeit. Fennáll a $j_l(kr)$ Bessel függvénnyel a

$$w_l^{(0)}(r, k) \equiv r j_l(kr) \quad /14/$$

kapcsolat. Megjegyezzük, hogy a szórás hullámfüggvény /11/ szerinti

$$u_l^{(+)}(r, k) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t_l(\kappa_{lm}, k)}{k^2 - \kappa_{lm}^2(k)} w_l^{(0)}(r, \kappa_{lm}) \quad 0 \leq r \leq a \quad /15/$$

exakt kifejtése formailag közel áll a Schrödinger-féle perturbációszámítás [3] első közelítéséhez. Eltérnek egymástól abban, hogy míg /15/ végig diszkrét sorfejtés, addig a perturbációszámításé véges számú kötött állapotot és a csatlakozó kontinuumot tartalmazza. Míg /15/ sorfejtés alkalmazható szórásproblémák megoldására, amikor is a kötött állapotokon túl fekvő diszkrét rezonanciák gerjesztődnek, a perturbáció sorfejtés szükségképpen kötött állapotok közelítésére korlátozódik.

Figyelemreméltó, hogy a szórás hullámfüggvény a /15/ kifejtés értelmében az energianevezők bármelyikének ($m=0,1,2,\dots$) gyökeinél, azaz

$$k^2 - \kappa_{lm}^2(k) = 0, \quad m = 0,1,2,\dots \quad |16|$$

egyenletet kielégítő

$$k = \kappa_{lm\mu}, \quad \mu = 0,1,2,\dots \quad |17|$$

energiafüggetlen "rezonancia-hullámszámok" mellett az egész térben azonosan divergál. A hullámfüggvénynek ez a szinguláris viselkedése közvetlen előidézője a szórás mátrix-elem pólusai létezésének és a hatás keresztmetszet diszperziós szerkezetének, - amint azt azonnal látni fogjuk.

A tranzit-mátrixelem diszperziós szerkezete

A szokásos Wigner-féle csatornakép helyett a formális szóráselmélet fogalomrendszerével dolgozunk; a szórás mátrixot is a vele véges hatótávolságu erőket esetén ekvivalens $T_l(k)$ tranzit-mátrixsal helyettesítjük. A tranzit-mátrixelem centrális egyrészesecske-kölcsönhatás esetén

$$T_l(k) = \int_0^{\infty} w_l^{(0)}(r, k) V(r) u_l^{(+)}(r, k) dr. \quad |18|$$

Itt a $w_l^{(0)}$ és az $u_l^{(+)}$ hullámfüggvények $\delta(k-k')$ -re normáltak.

A tranzit-mátrixelem diszperziós szerkezetét a /11/ és /18/ egyenletek kombinálásából azonnal megkapjuk:

$$T_l(k) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t_l^{(0)}(k, \kappa_{lm}) t_l(\kappa_{lm}, k)}{k^2 - \kappa_{lm}^2(k)}, \quad |19|$$

ahol az energiafüggő

$$t_l^{(0)}(k, \kappa) \equiv \int_0^{\infty} w_l^{(0)}(r, k) V(r) w_l^{(0)}(r, \kappa) dr \quad |20|$$

és

$$t_l(\kappa, k) \equiv \int_0^{\infty} w_l^{(0)}(r, \kappa) v(r) u_l^{(+)}(r, k) dr \quad |21|$$

paraméterek maguk is többé-kevésbé tranzit-mátrixelem jellegűek.

A hatáskeresztmetszet soknívós rezonanciaszerkezetét a szórás matrixelemből előbb szórás amplitudót képezve kapjuk:

$$\frac{d\sigma(\theta, k)}{d\Omega} = \frac{m^2}{(2\pi\hbar^2)^2} \left| \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t_l^{(0)}(k, \alpha_{lm}) t_l(\alpha_{lm}, k)}{k^2 - \alpha_{lm}^2(k)} \right\} P_l(\cos\theta) \right|^2 \quad /22/$$

A tranzit-mátrixelem pólusai /15/ és /19/ szerint ugyanazt a

$$k^2 - \alpha_{lm}^2(k) = 0, \quad m=0, 1, 2, \dots \quad /23/$$

"rezonancia-feltételt" kielégítő

$$k = k_{lm\mu}, \quad \mu=0, 1, 2, \dots \quad /24/$$

rezonancia-hullámszámoknál vannak, ahol a szórás hullámfüggvény szingularitásai. Ez a tény fejezi ki azt a könnyen igazolható kijelentést, hogy a rendszer energiája legfeljebb azokban az esetekben lehet egyenlő a tranzitmátrixelem valamelyik energiabeli pólusával, ha a beeső hullám eltűnik; különben triviális divergencia lép fel. Eltűnő beeső hullám pedig a kötött állapotok és a rezonancia-állapotok kizárólagos tulajdonsága.

Két szempontból is jellegzetesen különbözik a /19/ diszperziós formula szerkezete a megszokottól. Egyrészt, nincsen háttértagja, amely energiában ne tartalmazna szingularitást. Ez a körülmény bizonyos előnyt jelent a később felirandó egy-nívós közelítés szempontjából.

A lényegesebb szerkezeti eltérés a várt strukturától abban rejlik, hogy /19/ formula egyetlen tagja végtelen sok pólus hozzájárulását tartalmazza a $T_l(k)$ tranzit-mátrixelemhez; nevezetesen, adott l és m mellett valamennyi

$$k = k_{lm\mu}, \quad \mu=0, 1, 2, \dots \quad /25/$$

pólusét.

A /19/ diszperziós formula egyetlen m -indexű tagját kiszemelve a k -sikon mozgó hullámszám esetén mindannyiszor divergálni fog, valahányszor a /25/ pólusok valamelyikének közelébe jutunk k -val:

$$\frac{t_l^{(0)}(k, \alpha_{lm}) t_l(\alpha_{lm}, k)}{k^2 - \alpha_{lm}^2(k)} \xrightarrow{k \rightarrow k_{lm\mu}} \infty, \quad \mu=0, 1, 2, \dots \quad /26/$$

A pólusegyenlet

A tranzit-mátrixelem pólusait eddig két lépésben határoztuk meg: a sorfejtés energiatfüggő együtthatóit /13/ alapján találtuk meg, ezek ismeretében a /19/ diszperziós formula energianevezőjének /23/ által kifejezett eltűnése specifikálta a pólusok sorozatát. Kérdés: a /13/-as sajátértékformulának a /23/-as rezonanciafeltétellel való kombinálása nem adhatja-e meg egyetlen lépésben a pólusegyenletet.

A /13/ és /23/-as feltételek a gyökvonás két előjelének megfelelően a

$$W_{r=a} \left\{ w_l^{(0)}(r, k) ; u_l^{(+)}(r, k) \right\} = 0 , \quad /27.a/$$

$$W_{r=a} \left\{ w_l^{(0)}(r, -k) ; u_l^{(+)}(r, k) \right\} = 0 , \quad /27.b/$$

$$W_{r=a} \left\{ w_l^{(0)}(r, k) ; u_l^{(+)}(r, -k) \right\} = 0 , \quad /28.a/$$

$$W_{r=a} \left\{ w_l^{(0)}(r, -k) ; u_l^{(+)}(r, -k) \right\} = 0 , \quad /28.b/$$

egyenletekké kombinálhatók. Várhatjuk, hogy e négy egyenlet gyökeinek összessége magába foglalja a tranzit-mátrixelem pólusait is. A négy egyenlet kettővé redukálódik: a $w_l^{(0)}(r, k)$ függvény k -ban páratlan. Így a /27.a/ és a /27.b/ vagy a /28.a/, /28.b/ egyenletpárok mindegyike egyetlen gyöksorozatot definiál.

Másrészt, a tranzit-mátrixelem a csatornabejáratra vonatkozóan felírt 4 hullámfüggvény és deriváltja

$$u_l^{(+)}(a, k) = w_l^{(0)}(a, k) + T_l(k) w_l^{(+)}(a, k) , \quad /29.a/$$

$$u_l^{(+)(1)}(a, k) = w_l^{(0)(1)}(a, k) + T_l(k) w_l^{(+)(1)}(a, k) \quad /29.b/$$

illesztési feltételei értelmében

$$T_l(k) = \frac{W_{r=a} \left\{ w_l^{(0)}(r, k) ; u_l^{(+)}(r, k) \right\}}{W_{r=a} \left\{ w_l^{(0)}(r, k) ; w_l^{(+)}(r, k) \right\}} \quad /30/$$

alakba is írható. - Eszerint a /27/ egyenletpár gyökei nem pólusai, hanem zérus helyei a tranzitmátrixnak. Ismeretes [5], hogy a tranzitmátrixelem

$$T_l(k) = \frac{f_l(-k)}{f_l(+k)} \quad /31/$$

Jost-függvényes előállítására szerint a mátrixelem minden zérus helyéhez tartozik egy tőle csak előjelben különböző pólus. Így /30/ és /31/ alapján látható: a /28/ egyenlet gyökei valóban a /19/ tranzitmátrixelem pólusainak sorozatát szolgáltatják. A keresett egylépéses pólusmeghatározás eszerint a

$$W_{r=a} \left\{ w_l^{(0)}(r, k) ; u_l^{(+)}(r, -k) \right\} = 0 \quad /32/$$

"pólus-egyenlet" megoldásai k -ra a

$$k = k_{ln} \quad , \quad n = 0, 1, 2 \dots \quad /33/$$

gyökökkel. A pólusokat most - ellentétben a kétparaméteres /24/-es előállítással - a l -edik csatornában az egyetlen n kvantumszám szerint indexelve kaptuk meg. Fontos emlékeztetnünk arra, hogy /32/ hullámfüggvényeit $\delta(k - k')$ -re normáltak.

A $T_l(k)$ mátrixelem /30/ adta előállítására kettős segítséget nyújtott: egyrészt szétválasztotta a sajátértékfeltétel és a rezonanciafeltétel kombinálásával nyert /27/, /28/-as kettős egyenletpár gyökei közül a pólusokat és a zérus helyeket. Másrészt, megerősítette a diszperziós fórmának a Sturm-Liouville sorfejtésen alapuló levezetésének helyességét: a homogén határfeltételek egyeztetésével nyert /19/-es diszperziós formulától származtatott szingularitások exaktul összeesnek a /30/-as előállításból közvetlenül leolvasható pólusokkal.

Az egynívós-közelítés

Bármelyik $T_l(k)$ tranzit-mátrixelem bármely $k_{lm\mu}$ izolált pólusa környezetében /26/ értelmében a hatáskeresztmetszet /22/ kifejezésében a l -edik parciális hullám járuléka dominálni fog valamenyny többi csatorna járuléka felett; a parciális járulékon belül az m -indexű tag túlnyomó lesz a többi rezonanciajárulékhöz képest. Másrészt a domináns tag jól közelíthető a $k_{lm\mu}$ rezonancia közelében az energiafüggetlen paramétereket tartalmazó

$$\frac{t_l^{(0)}(Re k_{lm\mu}; k_{lm\mu}) t_l(k_{lm\mu}; Re k_{lm\mu})}{k^2 - k_{lm\mu}^2} \quad /34/$$

kifejezéssel. Az integrális hatáskeresztmetszet egy-nívós közelítése a rezonancia-energián

$$\sigma(k) \approx (2l+1) \frac{m^2}{(2\pi\hbar^2)^2} \frac{|t_l^{(0)}(Re k_{lm\mu}; k_{lm\mu}) \cdot t_l(k_{lm\mu}; Re k_{lm\mu})|^2}{\left\{ k^2 - Re k_{lm\mu}^2 \right\}^2 + \left\{ Im k_{lm\mu}^2 \right\}^2} \quad /35/$$

alakba is írható; a Breit-Wigner jelleg még egyszerűsödik is a potenciál-szórási tag elmaradása folytán.

Diszkusszió

Fenti gondolatmenet legjellegzetesebb vonása, hogy - a határfeltételek egyeztetése érdekében energiafüggő bázisrendszerrel dolgozik; ez az energiafüggés átszarmazik a tranzitmátrixelem rezonancia-paramétereire is. -

A módszer előnyös és hátrányos vonásai egyaránt az energiafüggés következményei.

Kétségtelenül szokatlan a diszperziós formula olyan alakulása, amely eltér a megszokott egy-tag = egy-pólus jellegtől; úgy tűnik, mint ha az egy-tag = sok-pólus strukturában az egyes pólusok járulékaik szétválaszthatatlanul összekeverednének. Emlékeznünk kell azonban arra, hogy az ismert soknívós tárgyalások sem jutnak olyan formulára, amelyben az egyes rezonanciák járulékaik additive alakítanak ki a hatáskeresztmetszetet; a rezonanciák egymásközti és a háttértaggal való interferenciája lehetetlenné teszi hatáskeresztmetszetnek egyes rezonanciák járulékaiknak összegére való felbontását.

Az egy-tag = sok-pólus szerkezetű exakt formulánk minőségileg ugyanezt eredményezi, azzal a különbséggel, hogy gondolatmenetünkben a pólus-járulékok bizonyosfokú összeolvadása már a tranzitmátrix- elemekben is jelentkezik. Ami pedig az egy-nívós közelítést illeti: az egy-tag = sok-pólus formulánk is egyetlen taggá redukálódik izolált rezonancia közelében. E tekintetben diszperziós formulánk - a háttértag exakt hiánya miatt - még bizonyos praktikus előnyben is van a Wigner-Eisenbud vagy a Kapur-Peierls elmélettel szemben. -

Sajátfüggvény sorfejtéssel dolgozó ismert magreakció-elméletekkel szemben megfontolásaink javára döntő előnyt jelent a tagonkénti kezelhetőséget exaktul biztosító abszolút és egyenletes konvergencia. Sem az R -mátrix elmélet, sem a Kapur-Peierls elméletbeli sorfejtés nem alapszik igazolt matematikai tételre. A határfeltételek egyeztetése nélkül ortogonális bázis mellett az abszolút-egyenletes konvergencia a teljes kifejtési tartományban semmiesetre sem áll fenn. Okoz-e kézzelfogható pontatlanságot e két elméletben a tökéletlen konvergencia?

Gondolatmenetünk során a pólusegyenletek azonos szerkezetűek a határfeltételeket előíró egyenletekkel és azok közvetlen következményei.

Igazoltuk, hogy a homogén határfeltételek egyeztetésének követelményével valóban a pontos pólusokat kapjuk vissza. Ha önkényesen más határfeltételeket irtunk volna elő, az így kapott diszperziós formulából hamis pólusok adódtak volna. A határfeltételek és a pólusegyenlet szoros kapcsolata nyilván más gondolatmenetekben is fennáll; illesztetlen határfeltételek szükségképp pontatlan pólusokra és egyáltalán pontatlan rezonancia-paraméterekre vezetnek. Az R -mátrixelmélet és Kapur-Peierls elmélet ismert okokból elvileg sem egyeztetheti a homogén határfeltételeket. A szórási hullámfüggvény a csatornabejáraton a

$$\frac{u_l^{(+)(1)}(a, k)}{u_l^{(+)}(a, k)} = \frac{w_l^{(-)(1)}(a, k) + [1 + T_l(k)] w_l^{(+)(1)}(a, k)}{w_l^{(-)}(a, k) + [1 + T_l(k)] w_l^{(+)}(a, k)} \quad /36/$$

homogén határfeltételt definiálja; az R -mátrixelmélet bázisát ezzel szemben a

$$\frac{u_l^{(+)(1)}(a, k_{ln}^{WE})}{u_l^{(+)}(a, k_{ln}^{WE})} = 0 \quad , \quad /37/$$

a Kapur-Peierls elmélet sorfejtési saját függvényeit pedig az

$$\frac{u_l^{(+)(1)}(a, k_{ln}^{KP})}{u_l^{(+)}(a, k_{ln}^{KP})} = -ik \quad /38/$$

önkényesen előírt határfeltételek specifikálják. Ezek szerint e két elmélet szolgáltatotta pólusok és egyéb rezonanciaparaméterek pontatlanok; az elméleteken belül kiadódott kapcsolatuk a probléma potenciájával / és a szórási állapot függvénnyel / hibás.

Jelen dolgozatban ismertetett szóráselméleti módszert a Green-függvénnyel dolgozó szóráselméleti tárgyalással [6] összehasonlítva mondhatjuk: a jelen eljárás első sorban is sokkal egyszerűbb. Ami pedig a pólusegyenletek összevetését illeti: a Green-operátoros tárgyalásban pólusokként az

$$W_{r=0} \left\{ w_l(r, k) ; v(r) u_l^{(+)}(r, k) \right\} = 0 \quad , \quad /39.a/$$

$$W_{r=a} \left\{ w_l(r, k) ; v(r) u_l^{(+)}(r, k) \right\} = 0 \quad /39.b/$$

egyenletek k -beli gyökei adódnak; ezek pedig általában különböznek a jelen gondolatmenetünk /12/ formuláján alapuló

$$W_{r=0} \left\{ w_l(r, k) ; u_l^{(+)}(r, k) \right\} = 0 \quad , \quad /40.a/$$

$$W_{r=a} \left\{ w_l^{(0)}(r, k) ; u_l^{(+)}(r, k) \right\} = 0 \quad /40.b/$$

pólusegyenlet-rendszer gyökeiktől. Mivel a két elmélet egyaránt a szórás-elmélet formalizmusával és a Sturm-Liouville sorfejtéssel dolgozik, az eltérés nagyon meglepő. Igen tanulságos módon oldódik meg azonban az el-
lentmondás a következő két észrevétellel. Egyrészt: a $v(r > a) \equiv 0$ elle-
nére az exakt

$$T_l(k) \equiv \int_0^{\infty} w_l^{(0)}(r, k) v(r) u_l^{(+)}(r, k) dr \quad /41/$$

és a számolás alapjául szolgáló

$$T_l^{(a)} \equiv \int_0^a w_l^{(0)}(r, k) v(r) u_l^{(+)}(r, k) dr \quad /42/$$

a $k \rightarrow k_{lm\mu}$ ($m=0,1,2\dots$; $\mu=0,1,2\dots$) esetre, a pólusok közelében, az $u_l^{(+)}(r, k)$ divergálása miatt, nem egyeznek meg egymással. Másrészt, je-
len gondolatmenetünkben a $(0, a)$ intervallumban kifejtésre kerül

$$u_l^{(+)}(r, k) \quad /43/$$

szórási-állapotfüggvényt - r -beli analitikussága miatt - a sajátfügg -
vény sorfejtés a $(0, a)$ intervallumon túl is előállítja, míg a Green-ope-
rátoros eljárásban az $r=a$ -ban $v(r > a) \equiv 0$ miatt nem-analitikus

$$v(r) u_l^{(+)}(r, k) \quad /44/$$

került sorfejtésre. E két körülmény együttes eredményeként a Green-ope-
rátoros tárgyalás pontatlanul adja a pólusokat: a levezetett pólusok nem
 $T_l(k)$, hanem $T_l^{(a)}(k)$ -nak a szingularitásai. Hogy valóban ez a kü-
lönbözőség oka, az megerősítést nyer a al a megjegyzéssel, hogy
 $v(r) \lesssim r^{-(1+\epsilon)}$ $\epsilon > 0$ miatt

$$\frac{v'(r)}{v(r)} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad /45/$$

és így a két szóráselméleti tárgyalás $a \gg k^{-1}$ esetén minimális mér-
tékben eltérő két pólus-sorozatot definiál. -

A sorfejtési sajátértékek energiafüggése következtében a pó-
lusok az egyik előállításban a kettős paramétereket kaptak a tárgyalá-
sunk során. Ez pedig a pólusok végtelen sorozatán belül az első index
szerint csoportosítást jelent. Nyitott kérdés, hogy ennek a két "ál-
kvantumszámnak" van-e mélyebb fizikai jelentése.

I r o d a l o m

- [1] Wigner, E.P., Eisenbud, L.: Phys. Rev. 72, 29 /1947/
- [2] Kapur, P.L., Peierls, R.E.: Proc.Roy. Soc. A166, 277 /1938/
- [3] Schiff, L.I.: Quantum Mechanics, Sec. 25.: McGraw-Hill
Book Comp. /1949/
- [4] Humblet, J., Rosenfeld, L.: Nuclear Physics 26, 529 /1961/
- [5] Newton, R.G.: J.Math Phys. 1, 319 /1960/
- [6] Dolinszky, T.: Nuclear Physics

Érkezett: 1965. máj. 6.

KFKI Közl. 13. évf. 3. szám, 1965.

A $\psi(a, c; x)$ FÜGGVÉNY POLINOMAPPROXIMÁCIÓJÁRÓL

Irta: Németh Géza

Összefoglalás

A dolgozat a $\psi(a, c; x)$ konfluens hipergeometriai függvény polinomapproximációjának meghatározásával foglalkozik Csebisev sorfejtések segítségével. Az $x^a \psi(a, c; x)$ függvény $x \geq \lambda$ tartományra vonatkozó Csebisev sorfejtési együtthatóit egy Stieltjes transzformáltra épülő integrálelőállítás segítségével határozzuk meg. Továbbá bemutatjuk az együtthatók rekurziós képletének ezen előállításon alapuló levezetését. A sorfejtés együtthatóira bebizonyítjuk az alábbi aszimptotikus formulát

$$\varphi_n = A n^{2/3(a+\sigma-2)} e^{-3\lambda^{1/3} n^{2/3}} \left\{ 1 + O(n^{-2/3}) \right\}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Végezetül megmutatjuk, hogy rögzített a és c paraméterű polinomapproximációból hogyan lehet nyerni közelítéseket igen egyszerűen más paraméterekre.

Bevezetés

A dolgozatban a $\psi(a, c; x)$ konfluens hipergeometriai függvény polinomapproximációjának megszerkesztésével foglalkozunk. Ez a függvény

$$\psi(a, c; x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} e^{-xt} t^{a-1} (1+t)^{-c} dt, \quad ,$$

$$x > 0, \quad a > 0, \quad \sigma = a + 1 - c,$$

gyakran szerepel az alkalmazott matematika speciális függvényeiben. Például

$\alpha/$ a képzetes argumentumu Bessel függvényekben [1], [2]:

$$K_\nu\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(\nu+1/2)} x^\nu e^{-\frac{1}{2}x} \int_0^{\infty} e^{-xt} t^{\nu-1/2} (1+t)^{\nu-1/2} dt$$

$\beta/$ az exponenciális integrálokban [3], [4]:

$$E_\nu(x) = \int_1^{\infty} e^{-xt} \frac{dt}{t^\nu} = e^{-x} \int_0^{\infty} e^{-xt} (1+t)^{-\nu} dt, \quad ,$$

$\gamma/$ a hibaintegrálban [5]:

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{\pi} e^{-x^2} \int_0^{\infty} e^{-x^2 u} u^{-1/2} (1+u)^{-1} du, \quad ,$$

és más függvényekben.

Ismeretes, hogy e függvényekre jól kidolgozott táblázataink vannak / [6], [7], [8] /, amelyek kézi számolás céljára jók, de automatikus számológépben függvénygenerálásra - vagy kis pontosságuk vagy nagy terjedelmük miatt - kevésbé alkalmasak. A polinomapproximációk viszont egyszerre nagy pontosságúak, rövidek és kis helyet foglalnak el a számológép memóriájában. A $\psi(a, c; x)$ függvény approximációjával a matematikai irodalomban sokan foglalkoztak. Többek között Y.L.Luke [9] és [10] munkáiban racionális törtekkel, illetve Láncos módszeréből adódó polinomokkal való közelítéseket határozott meg. Továbbá Y.L.Luke és J.Wimp [11] munkájukban a $x^a \psi(a, c; x)$ függvényt Csebisev sorba fejtették, és megadták az együtthatók kiszámításának rekurzív módszerét. Dolgozatukban azonban nem szerepel sem az együtthatók rekurziós képletének levezetése, sem az együtthatók csökkenési rendjének vizsgálata.

Jelen munkánkban, mintegy megjegyzésként [11]-hez, megadjuk az említett rekurziós képlet szabatos levezetését és megbecsüljük az együtthatók nagyságrendjét. Megmutatjuk továbbá, hogy egy rögzített a, c paraméterértékekhez tartozó polinomapproximáció birtokában a faktor módszer [12] felhasználásával - hogyan kaphatunk közelítéseket bizonyos más paraméterű ψ -függvényekhez. Végezetül összehasonlítást teszünk a Csebisev - sorfejtéssel és a faktor módszerrel nyerhető közelítések hibája között.

Az $x^a \cdot \psi(a, c; x)$ függvény Csebisev sorfejtése

A következőkben [13] egy, a $\psi(a, c; x)$ függvényre vonatkozó képletét használjuk fel:

$$x^a \psi(a, c; x) = \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(\sigma)} \int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{1+t/x} \psi(a-c; c; t) e^{-t} dt,$$

$$a \geq 0, \quad a > 0, \quad a < c < a+1.$$

Szorítkozva $x \geq \lambda$ -ra, $t = \lambda \cdot u$ -val kapjuk: /ahol $\lambda > 0$ tetszőleges /

$$x^a \psi(a, c; x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)\Gamma(\sigma)} \int_0^\infty \frac{u^{a-1}}{1+\frac{\lambda}{x}u} e^{-\lambda u} \psi(a-c, c; \lambda u) du :$$

Most alkalmazzuk $1/(1+\frac{\lambda}{x} \cdot u)$, $0 < \lambda \leq x$, $u > 0$ Csebisev sorfejtését:

$$\frac{1}{1+\frac{\lambda}{x}u} = \frac{1}{\sqrt{1+u}} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{u^n}{\sqrt{1+u}(1+\sqrt{1+u})^{2n}} T_n^* \left(\frac{\lambda}{x} \right)$$

és így az alábbi sorfejtésre jutunk:

$$x^a \psi(a, c; x) = \varphi_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \varphi_n T_n^* \left(\frac{\lambda}{x} \right), \quad x \geq \lambda,$$

$$\varphi_n = \frac{\lambda^a}{\Gamma(\sigma)\Gamma(a)} \int_0^{\infty} \frac{u^{n+a-1}}{\sqrt{1+u}(1+\sqrt{1+u})^{2n}} e^{-\lambda u} \psi(a-c, c; \lambda u) du.$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

A φ_n együtthatók rekurziós képlete

A φ_n számok rekurziós képlete az integrál előállításából parciális integrálásokkal következik. Ismeretes, hogy $\psi(a, c; z)$ a

$$zy'' + (c - z)y' - ay = 0$$

differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása. Elemi átalakítások segítségével belátható, hogy

$$\omega(u) = u^a e^{-\lambda u} \psi(a-c, c; \lambda u)$$

megoldása a

$$-\lambda \omega' = \frac{\sigma a}{u^2} \omega - \frac{a+\sigma-1}{u} \omega' + \omega''$$

differenciálegyenletnek. Irjuk fel most $\lambda(\varphi_{n+1} + \varphi_{n+2})$ kifejezését és integráljuk azt parciálisan:

$$\begin{aligned} \lambda(\varphi_{n+1} + \varphi_{n+2}) &= \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)\Gamma(\sigma)} \int_0^{\infty} \lambda \omega \left[\frac{u^n}{\sqrt{1+u}(1+\sqrt{1+u})^{2n+2}} + \frac{u^{n+1}}{\sqrt{1+u}(1+\sqrt{1+u})^{2n+4}} \right] du = \\ &= \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)\Gamma(\sigma)} \int_0^{\infty} [-\lambda \omega'] \left[\frac{1}{n+1} \frac{u^{n+1}}{(1+\sqrt{1+u})^{2n+2}} + \frac{1}{n+2} \frac{u^{n+2}}{(1+\sqrt{1+u})^{2n+4}} \right] du. \end{aligned}$$

Ez utóbbi integrálból ω differenciálegyenlete segítségével λ eliminálható:

$$\lambda(\varphi_{n+1} + \varphi_{n+2}) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)\Gamma(\sigma)} \int_0^{\infty} \left[\frac{a\sigma}{u^2} \omega - \frac{a+\sigma-1}{u} \omega' + \omega'' \right] \left[\frac{1}{n+1} \frac{u^{n+1}}{(1+\sqrt{1+u})^{2n+2}} + \frac{1}{n+2} \frac{u^{n+2}}{(1+\sqrt{1+u})^{2n+4}} \right] du.$$

Innen parciális integrálások és elemi számítások után a következő képletre jutunk:

$$4\lambda(\varphi_{n+1} + \varphi_{n+2}) = Q_0 \varphi_n - Q_1 \varphi_{n+1} + Q_2 \varphi_{n+2} - Q_3 \varphi_{n+3},$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

$$Q_0 = \frac{(n+a)(n+\sigma)}{n+1} ; Q_1 = 4n+6 - Q_3 ; Q_2 = 4n+6 - Q_0 , Q_3 = \frac{(n+3-a)(n+3-\sigma)}{n+2}$$

A levezetés $a > 0$ és $a < c < a+1$ paraméterekre érvényes az integrál-előállítás alapján. Viszont az $x^a \psi(a, c; x)$ függvény sajátosságai alapján analitikus folytatás végezhető más paraméterekre, és végül azt kapjuk, hogy ha $a \neq 0$ és $\sigma \neq 0$ egyike sem negatív egész szám, érvényes a fenti rekurziós formula. Könnyen látható, hogy a ψ_n képlete azonos Y. L. Luke és J. Wimp eredményével [11].

Az aszimptotika

A ψ_n számok előbbi integrál-előállítása, bár megadja az ötletet az aszimptotika meghatározásához [4], [5], tetszőleges a, c paraméterek mellett nem alkalmas ψ_n vizsgálatára. Ezért most egy másik integrál-előállítást vezetünk be

$$\psi_n = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^{a-1} c_n(t) dt, \quad a > 0,$$

ahol alkalmaztuk $(1 + \frac{\lambda}{x} t)^{-\sigma}$ alábbi Csebisev sorfejtését:

$$(1 + \frac{\lambda}{x} t)^{-\sigma} = c_0(t) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n(t) T_n^* \left(\frac{\lambda}{x} \right), \quad x \geq \lambda,$$

amelyben $\sigma \neq 0$ nem egyenlő negatív egész számmal. A $C_n(t)$ kifejezésre [14] alapján rövid számolás után azt kapjuk, hogy

$$C_n(t) = \left(\frac{t}{4} \right)^n \frac{\Gamma(n+\sigma)}{\Gamma(\sigma) n!} {}_2F_1 \left(n + \frac{1}{2}, n + \sigma; 2n + 1; -t \right).$$

Továbbá, ez a kifejezés a Gauss-féle hipergeometriai függvényekre vonatkozó transzformációs képletek segítségével a következő alakba írható át:

$$C_n(t) = \frac{\Gamma(n+\sigma)}{\Gamma(\sigma) n!} \frac{(1+t)^{-\sigma/2} t^n}{(1+\sqrt{1+t})^{2n}} {}_2F_1 \left(\sigma, 1-\sigma; n+1; -\frac{t^2}{4\sqrt{1+t}(1+\sqrt{1+t})^2} \right).$$

Ha most $n \rightarrow \infty$ és $t \rightarrow \infty$, akkor a

$$C_n(t) = \frac{n^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\} \frac{t^{n-\sigma/2}}{(1+\sqrt{1+t})^{2n}} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{t}\right) + O\left(\frac{t^{1/2}}{n}\right) \right\}$$

formulát kapjuk.

Beírva ezt φ_n integrálegelőállításába, kapjuk:

$$\varphi_n = \frac{\lambda^\alpha n^{\sigma-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\sigma)} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\} \int_0^\infty \frac{t^{n+\alpha-\frac{\sigma}{2}-1}}{(1+\sqrt{1+t})^{2n}} e^{-\lambda t} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{t}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\} dt.$$

Erre az integrálra alkalmazható a Laplace módszer. E módszer alapján belátható, hogy $n \rightarrow \infty$ esetén az integrandus a $t_0 \sim (n/\lambda)^{2/3}$ pont környezetében éles maximummal rendelkezik. Elvégezve e pont körül az integrálást, az alábbi eredményt kaptuk:

$$\varphi_n = A n^{2/3(\alpha+\sigma-2)} e^{-3\lambda^{1/3} n^{2/3}} \left\{ 1 + O(n^{-2/3}) \right\}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Az "A" szám "n"-től független állandót jelöl. Ebben a képletben $\alpha > 0$ és $\sigma \neq 0$ nem egyenlő egy negatív egész számmal. Lehetséges azonban az $f(\alpha, \sigma; x) = x^\alpha \psi(\alpha, \sigma; x)$ függvény $f(\alpha, \sigma; x) = f(\sigma, \alpha; x)$ függvény-egyenlete alapján analitikus folytatással az $\alpha > 0$ feltevést azzal helyettesíteni, hogy $\alpha \neq 0$ nem egyenlő egy negatív egész számmal. A $\lambda > 0$ /de tetszőleges/ számot formálisan lehet komplexnek is választani, pl.: $\arg \lambda < \pi$ esetén is érvényes marad φ_n aszimptotikája. A φ_n viselkedésének vizsgálatára a λ sík további tartományaiban most nem térünk ki. Az előzőekben leírt módszert sikerrel lehet alkalmazni más speciális függvények Csebisev sora vizsgálatánál is, pl.: [15].

Approximációk a faktor módszer alapján

Tegyük fel, hogy ismerjük az $x^\alpha \psi(\alpha, \sigma; x)$ függvény polinomapproximációját valamely rögzített α és σ paraméterek mellett, és további más paraméterekhez tartozó polinomapproximációt akarunk nyerni.

Például, ha az

$$f_1(s) = \lambda \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t}}{1+st} dt, \quad 0 \leq s \leq 1, \quad s = \lambda/x,$$

polinomközelítése

$$f_1(s) = \sum_{n=0}^N a_n s^n + h_N$$

ismeretes, akkor megmutatható, hogy $f_1(s)$ felhasználható $x^\alpha \psi(\alpha, \sigma; x)$ megközelítésére a $0 < \alpha < 1, 0 < \sigma < 1$ esetben. Belátható az

$$\frac{1}{\Gamma(\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon)} \int_0^1 \omega_1^{\varepsilon-1} (1-\omega_1)^{-\varepsilon} \frac{1}{1+\omega_1 s} d\omega_1 = \frac{1}{(1+s)^\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < 1$$

átalakítás kétszeri alkalmazása segítségével, hogy

$$x^a \psi(a, c; x) = \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(1-a)} \int_0^1 \omega_1^{a-1} (1-\omega_1)^{-a} \frac{1}{\Gamma(\sigma)\Gamma(1-\sigma)} \int_0^1 \omega_2^{\sigma-1} (1-\omega_2)^{-\sigma} f_1(s\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2.$$

Tehát, ha ismerjük $f_1(s)$ fenti polinom közelítését, akkor $x^a \psi(a, c; x)$ -re azt kapjuk, hogy

$$x^a \psi(a, c; x) = \sum_{n=0}^N a_n \beta_n S^n + H_N, \quad 0 \leq S \leq 1, \quad S = \frac{\lambda}{x},$$

ahol

$$\beta_n = \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(1-a)\Gamma(\sigma)\Gamma(1-\sigma)} \int_0^1 \int_0^1 \omega_1^{n+a-1} (1-\omega_1)^{-a} \omega_2^{n+\sigma-1} (1-\omega_2)^{-\sigma} d\omega_1 d\omega_2$$

vagy rekurzive

$$\beta_{n+1} = \frac{(n+a)(n+\sigma)}{(n+1)^2} \beta_n; \quad \beta_0 = 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

A H_N hibatagra durva becslés azt adja, hogy $|H_N| \leq |h_N|$. Áttérve e módszer és a Csebisev sorfejtés konvergenciájának összehasonlítására, tegyük fel, hogy $f_1(s)$ polinomközelítését Csebisev sorfejtésből nyertük [pl: [11] /, azaz

$$f_1(s) = \psi_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \psi_n T_n^*(s)$$

ahol előző eredményünk alapján

$$\psi_n = B e^{-3\lambda^{1/3} n^{2/3}} [1 + O(n^{-2/3})] \quad n \rightarrow \infty.$$

Jól láthatóan $x^a \psi(a, c; x)$ fent megadott közelítése a

$$x^a \psi(a, c; x) = \psi_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \psi_n Q_n(s)$$

polinom sorfejtésből származik. A $Q_n(s)$ polinomokra igaz a

$$Q_n(s) = \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(1-a)} \int_0^1 \omega_1^{a-1} (1-\omega_1)^{-a} \frac{1}{\Gamma(\sigma)\Gamma(1-\sigma)} \int_0^1 \omega_2^{\sigma-1} (1-\omega_2)^{-\sigma} T_n^*(s\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2,$$

formula és $T_n^*(s)$ -hez hasonlóan érvényes a $|Q_n(s)| \leq 1$ becslés. A ψ_n és ψ_n összehasonlítása azt mutatja, hogy ψ_n az $n^{2/3(a+\sigma-2)}$ szorzóval gyorsabban csökken, mint ψ_n .

Az $x^\alpha \psi(\alpha, c; x)$ függvényre adott közelítés más paraméterekre is kiterjeszhető a

$$\frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon+\delta)\Gamma(1-\delta)} \int_0^1 \omega_1^{\delta+\varepsilon-1} (1-\omega_1)^{-\delta} \frac{1}{(1+S\omega_1)^{1+\varepsilon}} d\omega_1 = \frac{1}{(1+S)^{\delta+\varepsilon}} \quad \begin{matrix} 0 < \delta < 1 \\ 0 < \varepsilon < 1 \end{matrix}$$

formula /esetleg többszöri/ alkalmazásával.

Megjegyezzük, hogy olyan esetben, amikor a

$$\Phi(s) = \psi_0 + 2 \sum_{n=1}^N (-1)^n \psi_n Q_n(s) \quad ,$$

polinomsor részletösszegéből nyert polinom

$$\Phi(s) = \sum_{n=0}^N a_n s^n$$

a_n együtthatói nagyok / $\Phi(s)$ számítása kényelmetlen/, lehetséges az eredeti $Q_n(s)$ -k szerint haladó polinomot közvetlenül összegezni. Ez az alábbi rekurziós séma alapján történhet:

$$\xi_n = (-1)^n \varepsilon_n \psi_n \quad , \quad \varepsilon_n = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 2 & n>0 \end{cases} \quad n=0, 1, 2, \dots$$

$$q_{N+1, l} = 0 \quad , \quad q_{N, l} = \xi_N \beta_l \quad ; \quad l = 0, 1, 2, \dots, N.$$

$$q_{k, l} = 4s q_{k+1, l+1} - 2 \cdot q_{k+1, l} - q_{k+2, l} + \xi_k \beta_l$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad , \quad l = 0, 1, 2, \dots, k$$

$$\Phi(s) = q_{0,0} + q_{1,0} - 2s q_{1,1} \quad .$$

Jelen módszer a Clenshaw-féle rekurzív algoritmus értelemszerű alkalmazása, v.ö.: [12] és [16] .

I r o d a l o m

[1] Градштейн, И.С., Рыжик, И.М.: Таблицы интегралов, Гос.Изд.Мат.Лит. Москва. /1957/, 317.
 [2] Erdélyi, A.: Higher Transcendental Functions II. McGraw-Hill Book Co. U.S.A. /1953/

- [3] Gautschi, W.: Recursive Computation of Certain Integrals. J. Assoc. Comp. Mach. 8, p. 21-40/1961/
- [4] Németh, G.: Polinom approximációk $\int_x^\infty e^{-u} du/u$ számításához. KFKI Közl. 12, 395-403, /1964/
- [5] Németh, G.: Polinom approximációk $\int_0^x e^{-u^2} du$ számításához. KFKI Közl. 12, 201-204, /1964/
- [6] British Association Mathematical Tables VI. Bessel functions I., II. Cambridge, /1937/, /1952/
- [7] Pagurova, V.I.: Tables of the exponential integral functions. Nat. Bur. of Stand. /1954/
- [8] National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 41: Tables of error function and its derivative.
- [9] Luke, Y.L.: The Padé Table and the τ -Method. Journ. Math. Phys. 37, 110-127, /1958/
- [10] Luke, Y.L.: On Economic Representations of Transcendental Functions. Journ. Math. Phys. 38, 279-294, /1960/
- [11] Luke, Y.L., Wimp, J.: Jacobi Polynomial Expansions. Math. of Comput. 17, /1963/
- [12] Németh, G.: Constructions of Approximations to Functions by the Factor Method. Math. of Comput. /Sajtó alatt./
- [13] Erdélyi, A.: Tables of integral transforms II. McGraw-Hill Book Co. London p. 232 /1954/
- [14] Fields, J.L., Wimp, J.: Basic series. Proc. Camb. Phil. Soc. 59, 599-605, /2.2/ /1963/
- [15] Németh, G.: Bessel függvények Csebisev sorfejtése I. KFKI Közl. /sajtó alatt./
- [16] Clenshaw, C.W.: A note on the Summation of Chebyshev series. M.T.A.C. 2, /1955/

Érkezett: 1965. febr. 4.

KFKI Közl. 13. évf. 3.szám, 1965.

AZ INTEGRÁL SINUS ÉS INTEGRÁL COSINUS FÜGGVÉNYEK CSEBISEV SORFEJTÉSE

Irta: Németh Géza

Összefoglalás

A dolgozatban a $ci(x)$ és $si(x)$ függvények Csebisev sorfejtésével foglalkozunk. Ezek a sorfejtések az irodalomban használatosaknál praktikus szempontból célszerűbbek, mivel gyorsabban konvergálnak. A Csebisev sorok együtthatói $0 \leq x \leq a$ esetén kb. 4^{-n} faktorial csökkennek erősebben a Taylor sor együtthatóihoz képest. Az $x \geq a$ esetben a divergens aszimptotikus sorok helyett konvergens Csebisev sorokat adunk meg. E sorok az

$$e^{-2\sqrt{an}} O(n^{-1/4}) \quad n \rightarrow \infty$$

rendben konvergálnak.

Bevezetés

Jelen dolgozatunkban az integrál sinus és integrál cosinus függvények Csebisev sorfejtésével foglalkozunk. E sorfejtések kiválóan alkalmasak az említett függvények értékeinek kiszámítására /pl: elektronikus számológépen/.

Bár e függvényekre a matematikai irodalomban jól kidolgozott táblázatok ismeretesek [1], [2]; mégis a függvények erős oszcillációja miatt /megfelelő pontossághoz túl sok függvényértéket kellene tárolni a memóriában/ kevésbé alkalmasak gépi generálásra. A $ci(x)$ és $si(x)$ függvény meghatározásával a numerikus analízis irodalmában sokan foglalkoztak. Így pl. [3] a $0 \leq x < \infty$ intervallumot három részre osztja, és a $0 \leq x \leq 11,38$ -ra Taylor sorfejtést, a $11,38 \leq x \leq 13,47$ -re numerikus integrálást, az $x \geq 13,47$ -re az aszimptotikus sorfejtést ajánlja.

Y.L.Luke és J.Wimp [4] nagy argumentumra Csebisev sorfejtést ad meg. E sorfejtésnek az együtthatói erősen oszcilláló jellegűek, mivel a sor nem követi az aszimptotikus sorfejtés alakját.

Mi a Taylor sorfejtés helyett Csebisev sorfejtést adunk meg, $0 \leq x \leq a$ esetére ez kb. 4^{-n} faktorialis gyorsabban csökkenő együtthatóval rendelkezik a Taylor sor együtthatójához képest. Az $x \geq a$ esetben az asszimptotikus sorfejtés alakját követő Csebisev sorfejtést határozzuk meg. Ez utóbbi sorok konvergenciája

$$e^{-2\sqrt{an}} O(n^{-1/4}) \quad n \rightarrow \infty$$

rendű. A Csebisev sorok együtthatóinak kiszámításához rekurziós képleteket vezetünk le. Végezetül a Csebisev sorfejtés együtthatóit $a=8$ esetére táblázatban állítjuk össze.

Csebisev sorfejtés $0 \leq x \leq a$ esetére

A $ci(x)$ és $si(x)$ függvények számítására az alábbi integrálegyenleteket használjuk fel:

$$ci(x) = c + \ln x - \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t} dt, \quad x > 0, \quad c = 0,577\dots$$

$$si(x) = -\pi/2 + \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$$

Ebből elemi átalakításokkal kapjuk:

$$ci(x) = c + \ln x - x \int_0^1 \int_0^1 \sin xt \eta dt d\eta$$

$$si(x) = -\pi/2 + x \int_0^1 \int_0^1 \cos xt \eta dt d\eta.$$

Alkalmazni fogjuk $\sin x$ és $\cos x$ Csebisev sorfejtését:

$$\sin x = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(a) T_{2n+1}(x/a).$$

$$0 \leq x \leq a,$$

$$\cos x = J_0(a) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(a) T_{2n}(x/a)$$

ahol $J_n(x)$ a reguláris Bessel függvényt, $T_n(x)$ a Csebisev polinomot jelöli. Ezekkel a sorokkal

$$ci(x) = c + \ln x - x \left\{ 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_{2n+1}(a) T_{2n+1}(x/a) \right\}$$

$$0 \leq x \leq a$$

$$si(x) = -\pi/2 + x \left\{ A_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n A_{2n}(a) T_{2n}(x/a) \right\}$$

adódik, ahol

$$A_n(a) = \int_0^1 \int_0^1 J_n(a t \eta) dt d\eta$$

Felhasználva $J_n(x)$ aszimptotikáját $n \rightarrow \infty$ esetére $0 \leq x \leq a$ az alábbi becslést nyerjük A_n -re:

$$A_n(a) = O\left(\frac{(a/2)^n}{(n+2)!}\right) \quad n \rightarrow \infty$$

Hasonlítsuk össze A_{2n} -t pl: $\text{si}(x)$ Taylor sorfejtésének megfelelő együtthatójával:

$$\text{si}(x) = -\pi/2 + x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!(2k+1)}$$

látható, hogy A_{2n} kb. 4^{-n} -es faktorial gyorsabban csökken a Taylor sor megfelelő együtthatójánál. Hasonló igaz $\text{ci}(x)$ -re is.

Az A_n számok numerikusan az

$$(n+1)(A_n - A_{n+2}) - (n+3)(A_{n+2} - A_{n+4}) = \frac{4}{a} [J_{n+1}(a) + J_{n+3}(a)]$$

$n=0, 1, 2, \dots$

rekurziós képletből számíthatók ki /melynek helyessége parciális integrálásokkal könnyen ellenőrizhető/.

Sorfejtés $x \geq a$ esetére

Ismét az integrálegelőállításokból indulunk ki:

$$\text{ci}(x) = - \int_x^{\infty} \frac{\cos u}{u} du$$

$$\text{si}(x) = - \int_x^{\infty} \frac{\sin u}{u} du$$

Elemi átalakítások után /alkalmazva a sinus és cosinus összegezési tételt/ kapjuk:

$$\text{ci}(x) = - \frac{\cos x}{x} B(x) + \frac{\sin x}{x} A(x)$$

$$\text{si}(x) = - \frac{\cos x}{x} A(x) - \frac{\sin x}{x} B(x)$$

$$A(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{1+u/x} du ; \quad B(x) = \int_0^{\infty} \frac{\cos u}{1+u/x} du$$

A továbbiakban csak az A és B integrálokkal foglalkozunk. Ezek az integrálok számunkra egyszerűbb alakba írhatók:

$$\begin{aligned} A(x) &= \int_0^{\infty} \sin u \frac{1}{1+u/x} du = \int_0^{\infty} \sin u \int_0^{\infty} e^{-(1+u/x)\eta} d\eta du = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\eta} \frac{1}{1+\eta^2/x^2} d\eta = \int_0^{\infty} \frac{ae^{-a\eta}}{1+\sigma^2\eta^2} d\eta \end{aligned}$$

és hasonlóan

$$\begin{aligned} B(x) &= \int_0^{\infty} \cos u \frac{1}{1+u/x} du = \int_0^{\infty} \cos u \int_0^{\infty} e^{-(1+u/x)\eta} d\eta du = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\eta} \frac{\eta/x}{1+\eta^2/x^2} d\eta = \int_0^{\infty} \frac{a\sigma\eta e^{-a\eta}}{1+\sigma^2\eta^2} d\eta \end{aligned}$$

Itt $\sigma \equiv a/x$, $0 \leq \sigma \leq 1$. Látható, hogy ha σ szerint formálisan Taylor sorba fejtünk, megkapjuk a jól ismert divergens aszimptotikus sorokat:

$$\begin{aligned} A(x) &\sim \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k)! / x^{2k}, \\ B(x) &\sim \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k+1)!}{x^{2k+1}} \end{aligned}$$

Ha azonban alkalmazzuk az alábbi Csebisev sorokat:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\sigma^2\eta^2} &= \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}} \frac{\eta^{2n}}{(1+\sqrt{1+\eta^2})^{2n}} T_{2n}(\sigma) \\ \frac{\sigma\eta}{1+\sigma^2\eta^2} &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}} \frac{\eta^{2n+1}}{(1+\sqrt{1+\eta^2})^{2n+1}} T_{2n+1}(\sigma) \end{aligned} \quad 0 \leq \sigma \leq 1.$$

akkor konvergens sorfejtésekre jutunk. Így

$$\begin{aligned} A(x) &= C_0(a) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n C_{2n}(a) T_{2n}(a/x) \\ B(x) &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n C_{2n+1}(a) T_{2n+1}(a/x) \end{aligned} \quad x \geq a$$

adódik, ahol

$$C_n(a) = \int_0^{\infty} ae^{-a\eta} \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}} \frac{\eta^n}{(1+\sqrt{1+\eta^2})^n} d\eta$$

Az A és B bűgvények fenti sora konvergenciájának megállapításához szükséges ismerni $C_n(a)$ viselkedését $n \rightarrow \infty$ esetére. A $C_n(a)$ számok integrálalakjából látható, hogy az integrandusnak az $\eta_0 \sim (n/a)^{1/2}, n \rightarrow \infty$ hely környezetében éles maximuma van. Elvégezve e pont körül a Laplace módszer szerinti integrálást, az alábbi eredményt nyertük:

$$C_n(a) = e^{-2\sqrt{an}} O(n^{-1/4}) \quad n \rightarrow \infty$$

Ez a becslés biztosítja A és B Csebisev sorainak abszolút és / σ -ban/ egyenletes konvergenciáját.

A $C_n(a)$ számok számítása rekurziós képlet segítségével végezhető el. A rekurziós képlet levezetéséhez számítsuk ki $2a(C_{n+1} + C_{n+3})$ kifejezését:

$$2a(C_{n+1} + C_{n+3}) = 4a^2 \int_0^{\infty} e^{-a\eta} \frac{\eta^{n+1}}{(1+\sqrt{1+\eta^2})^{n+2}} d\eta$$

Ebből parciális integrálással adódik

$$\begin{aligned} 2a(C_{n+1} + C_{n+3}) &= 4a \int_0^{\infty} e^{-a\eta} \left\{ (n+1) \frac{\eta^n}{(1+\sqrt{1+\eta^2})^{n+2}} - (n+2) \frac{\eta^{n+2}}{\sqrt{1+\eta^2}(1+\sqrt{1+\eta^2})^{n+3}} \right\} d\eta \\ &= (n+1)(C_n - C_{n+4}) - 2(n+2)(C_{n+2} - C_{n+4}) \end{aligned}$$

Végülis a C_n számok az

$$(n+1)(C_n - C_{n+2}) - (n+3)(C_{n+2} - C_{n+4}) = 2a(C_{n+1} + C_{n+3}) \quad n=0,1,2,\dots$$

rekurziós képletet elégitik ki.

Numerikus alkalmazás

Az $A_n(a)$ és $C_n(a)$ számokat az $a=8$ helyettesítéssel, csökkenő „n” -ek irányában haladó rekurzióval számítottuk ki és a számítás eredményét az I. és II. táblázatban adjuk meg.

A Csebisev sorok részletösszegeiből vett polinomokkal programot állítottunk össze a $ci(x)$ és $si(x)$ függvények értékeinek generálására az URAL I. számológépen. A program jól működött.

Végezetül megjegyezzük, hogy az $A(x)$ és $B(x)$ függvények Csebisev sorfejtése még sok más speciális függvénynél is alkalmazható. Erre a kérésre egy későbbi munkánkban térünk ki.

Táblázat

n	$A_n(a) = \int_0^1 \int_0^1 J_n(at\eta) dt d\eta$ $a=8$	n	$C_n(a) = \int_0^\infty a e^{-a\eta} \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}} \frac{\eta^n}{(1+\sqrt{1+\eta^2})^n} d\eta$ $a=8$
0	0,244027 621994	0	0,986040 657302
1	0,117667 614161	1	58886 930748
2	86050 529016	2	6735 869107
3	72480 629287	3	1099 139261
4	56898 189153	4	226 646420
5	38644 650139	5	55 305625
6	22557 140461	6	15 336444
7	11451 272403	7	4 704172
8	5130 276672	8	1 565996
9	2055 467594	9	557961
10	744 827119	10	210551
1	246 413649	1	83467
2	75 017843	2	34536
3	21 156736	3	14838
4	5 558854	4	6592
5	1 367416	5	3017
6	316260	6	1418
7	69030	7	683
8	14266	8	337
9	2800	9	169
20	523	20	87
1	93	1	45
2	15	2	24
3	3	3	13
4		4	7
5		5	4
6		6	2

I r o d a l o m

- [1] National Bureau of Standards, Mathematical Tables Project [MT 5,6]: Tables of sine, cosine and exponential integrals I,II. Washington /1940/
- [2] Tani, K.: Tables of si(x) and ci(x) for the range x=0 to x=50. Tokyo, 1929.
- [3] Дымарский, Я.С.: Справочник программиста I. Судпромгиз. Ленинград. 179.о. /1963/
- [4] Luke, Y.L.Wimp, J.: Jacobi Polynomial Expansions. Mathematics of Computation 17, /1963/

Érkezett: 1965. márc. 10.

•KFKI Közl. 13. évf. 3. szám, 1965.

AZ U-235 HASADÁSÁNÁL KELETKEZETT GAMMA-SUGARAK SZÖGELOSZLÁSA

Irta: Graff György, Lajtai Albert és Nagy László

Összefoglalás

Megmértük az U-235 termikus neutronok hatására bekövetkező hasadásánál keletkező gamma-sugaraknak a hasadási termékek irányához viszonyított szögeloszlását. A gamma-sugárzás intenzitása a hasadási termékek repülésének irányában nagyobb, mint erre merőlegesen. Az anizotrópia mértéke 120 keV-nál, illetve 600 keV-nál nagyobb energiájú fotonokra közel egyformának adódott.

Bevezetés

A maghasadás vizsgálata, így a hasadásnál keletkezett gamma-sugarak szögeloszlásának vizsgálata is – azon túlmenően, hogy hozzájárul e reakció sok vonatkozásban még fel nem derített fizikai mechanizmusának a megértéséhez – lehetőséget jelent a mag egyes különleges, s más módon nemigen előállítható állapota tulajdonságainak tanulmányozására.

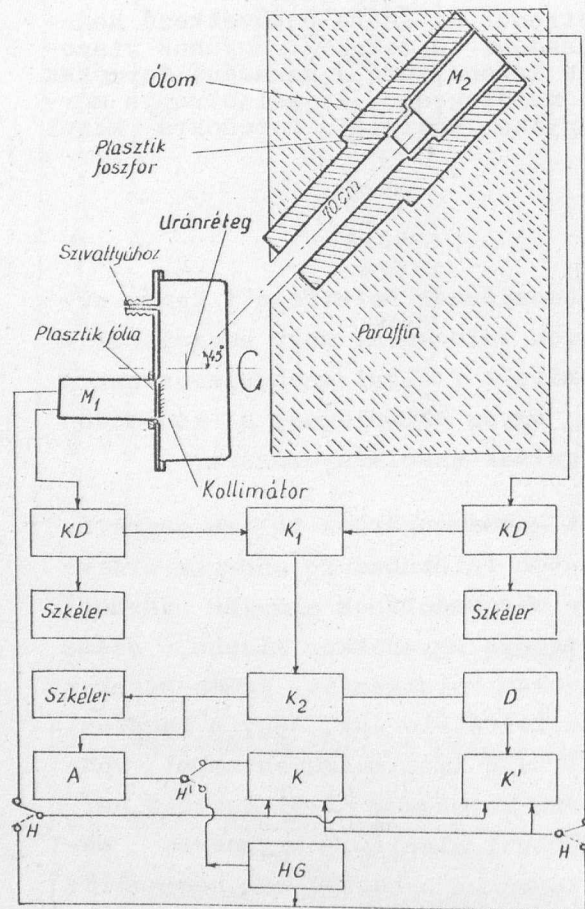
A hasadási termékekből emittált gamma-sugárzás teljes energiájának mérései azt mutatták, hogy az ezuton felszabaduló energia értéke majd kétszerese az egyszerű statisztikus megfontolások alapján várható értéknek. Az emittált fotonok átlagenergiája ugyanakkor kisebb, száma pedig nagyobb, mint az (n, γ) reakció során keletkezett gamma-sugarak esetében. E jelenségek értelmezhetőek, ha feltételezzük, hogy a hasadási termékek keletkezésük pillanatában nagy értékű impulzusmomentummal rendelkeznek. A gamma-sugarak szögeloszlásának mérésekor [1-5] észlelt anizotrópia is – Sztrutyinszkij [6] megfontolásai alapján – ugyanerre mutat. Sztrutyinszkij szerint a hasadási termékek a hasadó mag nem-kollinearitás szétszakadása következtében tesznek szert nagy impulzusmomentumra. Ezen impulzusmomentum a hasadási tengelyre /a termékek szétrepülésének irányára/ merőleges. A hasadási tengelyhez viszonyított szögeloszlás méréseiből az impulzusmomentum nagyságára és a kibocsátott fotonok multi-pol rendjére következtetni lehet.

Jelen közleményünkben az U-235 termikus hasadásakor emittált fotonok szögeloszlásának egy korábbi mérésünknél [3] pontosabb meghatározásáról számolunk be. Mérési módszerünk lehetővé tette, hogy a gamma-sugarak szögeloszlásán kívül a kibocsátott neutronok energiaeloszlását is megmérjük a hasadási termékek repülési irányához viszonyított különböző szögekben. Ez utóbbiról egy külön cikkben számolunk be.

A kísérleti berendezés

A detektált hasadási termékek és az általuk kibocsátott gamma-sugarak észlelési iránya közötti szög változtatásának módját több előzetes mérés alapján választottuk ki. Legkézenfekvőbb megoldás az volt, hogy a gamma-detektort forgattuk az urántarget körül. Ez a módszer azonban

nem bizonyult megfelelőnek, egyrészt mert a forgó gamma-detektornak nem tudtunk megfelelő védelmet biztosítani a háttérsugárzás ellen a védelem nagy súlya miatt, másrészt a detektor forgatásával a gamma-sugarak útjába különböző vastagságú abszorbensek kerültek; továbbá a gamma-detektor háttére erősen függött a beállított szögtől. Ezért a gamma-detektort rögzítettük. A hasadási termékeket egy 40 cm hosszú alumínium csőben repültettük a detektorig. A csövet egy hozzá 45 fokos szögben, a targeten áthaladó tengely körül forgatva, változtattuk a hasadási termékek és a gamma-sugarak iránya közötti szöget. Ez a módszer sem bizonyult megfelelőnek, főleg azért, mert a hasadási termékek repülési távolsága miatt a hasadás pillanata nem volt elég pontosan meghatározott. Hasonló kísérletezések után az 1. ábrán vázolt geometriát választottuk, ahol az elektronikus mérőber-



1. ábra

A kísérleti berendezés sematikus rajza és a blokkdiagram

dezés blokk-sémáját is vázoltuk.

A reaktorcsatornából a neutronnyaláb egy 4 mm széles, 45 mm magas és 350 mm hosszú nyíláson keresztül jött ki. A kollimátort, mely egyben a reaktorból jövő gyors neutronok és gamma-sugarak számát csökkentette, ólomból készítettük és a reaktor zárszerkezetének utolsó fokozatába építettük be.

Az U-235-ben 96 %-ra dúsított targetet, amely 50 mm átmérőjű és 1 mg/cm² vastagságú volt, elektrolízissel vittük fel a 0,1 mm vastagságú alumínium hordozóra. A réteget három vékony drótszállal rögzítettük egy hengeres, 0,5 mm falvastagságú alumínium edény tengelyébe, a neutronnyaláb síkjával párhuzamosan és ennek kb. a közepébe. A hasadási termékek egy 2x1,8 mm átmérőjű és 9 mm hosszú nikkelcsövekből készült kollimátorrendszeren keresztül jutottak el az alumínium edény véglezáró lapján tömítetten elhelyezett hasadási termék detektorig. A csövecskék tengelye 45 fokot zárt be az edény tengelyével és a detektor síkjával. A hasadási termékeket a fotomultiplierre ráragasztott 17 μ vastagságú foszfor fólia segítségével detektáltuk. Ez igen kevésbé érzékeny gyors neutronokra és gamma-sugarakra. A hasadási termékek repülési távolságát /65 mm/ úgy választottuk meg, hogy a hasadási termékek repülési időszórása még kicsi legyen, de a hasadási termékek detektora és a multiplier a reaktorból jövő direkt sugárnyalábból kiessen. Az említett távolságot a hasadási termékek csak csökkentett nyomás mellett tehették meg, ezért az alumínium edényben 0,01 Hgmm nyomást tartottunk fent. A vákuumedényt tengelye körül forgatva változtattuk a detektált hasadási termékek és a gamma-sugarak iránya közötti szöget. Ugyanis miközben a vákuumedényt a hozzátartozó hasadási termék detektorral együtt elforgatjuk 180 fokot, az előbb említett szög 90 fokot változik. A vákuumedény forgatását egy kis motor végezte, és a csatornalaboratóriumból a kívánt szögértéket a reaktorcsatorna becsukása nélkül beállíthattuk.

A gamma-sugarakat egy 50x50 mm-es foszforral és 56AVP multiplierrel detektáltuk. A gamma-detektort a háttérsugárzás csökkentése céljából átlagosan 5 cm vastagságú ólommal és 30 cm vastag paraffinnal vetjük körül. A védelem elrendezése, illetőleg a vákuumedény mérete olyan volt, hogy ez utóbbi falának felaktiválódásából keletkezett gamma-sugarak vagy a rajta szóródott részecskék csak a védelmen keresztül juthattak el a detektorba. A gamma-detektort az uránrétegtől 70 cm távolságra az uránréteg síkjára 45 fokos szögben helyeztük el.

A multipliererek / M_1 , M_2 - 1. ábra / anódjairól levett jeleket a K nsec-os, Garg típusú [7] idő-amplitudó konverterre vittük. Az ehhez

csatlakozó K_1 segédkonverter a kétszeres háttér kialakulását akadályozta meg [8]. A konverter működési tartománya 100 nsec volt. A konverterből kijövő impulzusokat egy 128 csatornás amplitudóanalizátorral vizsgáltuk. Az idő-amplitudó konverter és a sokcsatornás analizátor alkalmazása gyorskoincidencia-kör helyett előnnyel jár, mert egyrészt megkapjuk egyidejűleg a hasadásnál keletkezett neutronok repülési időeloszlását is, másrészt a gamma-sugarakra kapott időeloszlás ismerete, illetőleg mérésről - mérésre való figyelemmel kísérése rendkívül hasznos tájékoztatást nyújt a mérés megbízhatóságáról és egyéb körülményekről, továbbá az egyes mérésekhez tartozó háttérrel is szolgáltatja. Az utolsó dinódokhoz csatlakozó kvázi-gyors diszkriminátorok útján lehetett szabályozni mindkét oldal energiaérzékenységét. A két diszkriminátor (KD) jelei egy 150 nsec-os felbontási idejű koincidenziakörre (K_1) jutnak; az utóbbi kimenete egy lassu koincidenziakör (K_2) egyik bemenetével van összekötve, a másik bemenetre a K_1 konverter kimenete csatlakozik D integrális diszkriminátoron át. A K_2 jelei kapuzzák az analizátort.

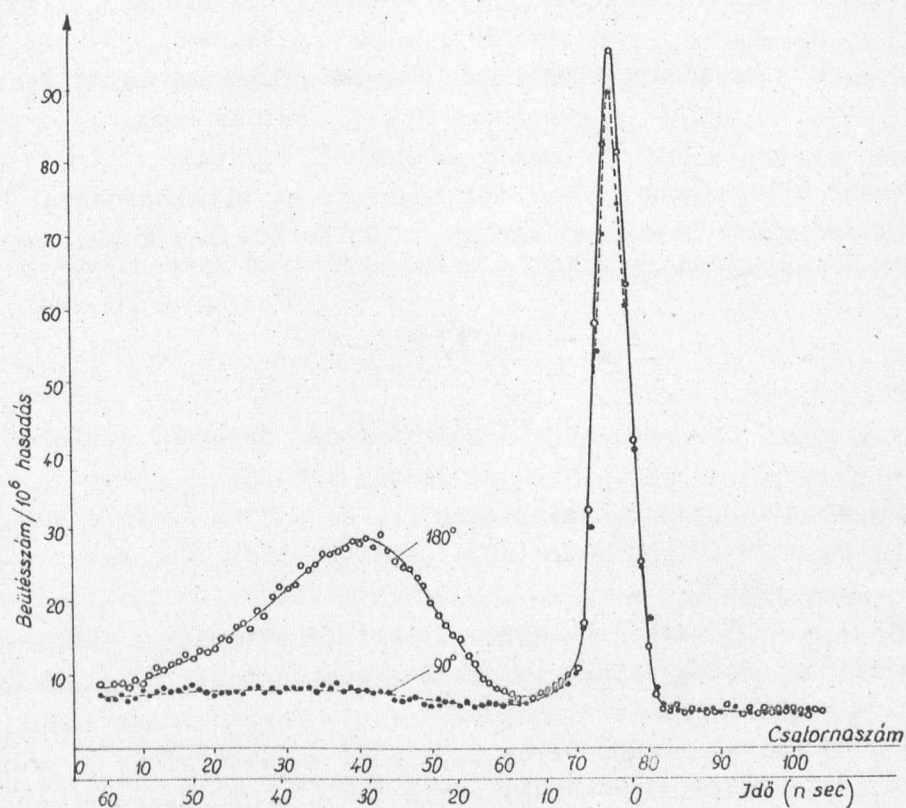
A hasadási termékeket detektáló multiplier diszkriminátorának előfeszültsége úgy lett beállítva, hogy hasadó anyag nélküli aluminium forrástartót téve a target helyére a hasadások számához viszonyítva elenyésző számú impulzust kapjunk a diszkriminátorból. A diszkriminátor ilyen feszültsége mellett automatikusan teljesült egy másik kívánalom is, nevezetesen, hogy a hasadó anyag által kibocsátott alfa-részecskék impulzusait a diszkriminátor nem engedte át. A gamma-detektorhoz csatlakozó kvázi-gyors diszkriminátor előfeszültségéhez ismert energiájú gamma-sugarak segítségével rendeltünk hozzá energiaértéket. Cs-137 és Hg-203 gamma-sugarainak spektrumát felvettük az analizátorral; ezzel megkaptuk, hogy az analizátor egyes csatornái milyen energiának felelnek meg. A Cs-137 gamma-sugarainak impulzusait ismét rávive az analizátorra, de most az analizátort a kvázi-gyors diszkriminátorral kapuzva, leolvashatjuk a levágás csatornaszámát, vagyis egyben azt a küszöbenergiát, amely a diszkriminátor beállított előfeszültségértékéhez tartozik.

A mérni kívánt effektus kicsiny volta, a hosszú mérési időtartam szükségessé tette a berendezés rendszeres ellenőrzését. A berendezés minden 10^6 hasadási beütésszámnál /mintegy 40 perc/ automatikusan leállt; ekkor ellenőriztük a beütésszám összegyűléséhez szükséges időt, az impulzusszámlálók beütésszámát, a multiplierek tápfeszültségeit, megnéztük az analizátor oszcilloszkópján a "gamma-csucs" helyét stb. Rendszeres kontrollt hajtottunk végre higanyrelés impulzusgenerátor segítségével. A higanygenerátor /1. ábra: HG / meghatározott amplitudójú impulzusai segítségével az analizátor erősítése és linearitása volt ellenőrizhető / a kap-

csoló H¹ állásban/. Ugyanezen generátor és az analizátor felhasználásával kontrolláltuk a konverter és segédkonverter működését /a kapcsoló H állásban/ stb.

Eredmények

A hasadási termékek irányához képest 90, 112,5, 135, 157,5 és 180 fokban mértük meg a gamma-sugarak intenzitását. Egy-egy szögnél 10^6 számú hasadásszámgig mértünk és sok méréssorozatot végeztünk, hogy a különböző ingadozásokból származó hibák átlagolódjanak. A 2. ábrán példaként felrajzoltuk a 90 és 180 foknál kapott impulzuseloszlást. Az éles csucs alatti be-



2. ábra

A gamma-sugarak és neutronok repülési idő szerinti eloszlása a hasadási termékek irányához képest 90 és 180 fokban

ütésszámok a hasadási gamma-sugaraktól származnak, míg ettől balra a neutronok idő szerinti eloszlása jelentkezik. A nagy csatornaszámnál mutakozó beütésszámok a háttért szolgáltatják. A gamma-csucs teljes szélessége félmagasságban 4,5 nsec. Ez jórészt a hasadási termékek különböző repülési idejének a következménye, amely részben az urántargetben való energiavesz-

teségből származik.

A gamma-sugarak száma 10^6 hasadásonként 120 keV-os és 600 keV-os küszöbenergiáknál a különböző szögeknél a következő adódott:

	120 keV	600 keV
90°-nál	448 ± 2	112 ± 1,5
112,5°-nál	457 ± 2	
135°-nál	470 ± 2	117 ± 1,5
157,5°-nál	482 ± 2	
180°-nál	478 ± 2	119 ± 1,5

$5 \cdot 10^6$ hasadásra vonatkozó szögeloszlási mérési adatokat rendre

$$n(\vartheta) \sim 1 + A \sin^2 \vartheta$$

kifejezéssel a legkisebb négyzetek módszerének alkalmazásával közelítettük. A paraméterértékeket átlagolva, 120 és 600 keV küszöbenergiánál eredményül a következők adódtak:

$$A_{120} = -0,071 \pm 0,005$$

$$A_{600} = -0,060 \pm 0,015$$

Az ezekből kapott anizotrópia-értékek:

$$\alpha_{120} = 100 \cdot [n(180^\circ) - n(90^\circ)] / n(90^\circ) = 7,6 \%$$

$$\alpha_{600} = 6,4 \%$$

A közelítést a táblázatban közölt átlagintenzitásokkal megismételve, a nyert anizotrópiaértékek jó egyezést mutatnak a fenti értékekkel. Ez feltehetően a reaktor fluxus állandóságának, a berendezések stabil-működésének és a mérési szög sűrű változtatásának következménye / mind az öt szögnél - 120 keV esetében - külön-külön több mint százszor mértünk/.

Johansson új keletű mérése alapján [9], úgy látszik, hogy kinematikai korrekció alkalmazása szükséges. A detektált hasadási termék - esetünkben - mintegy 5 nsec-ig repül, a detektálttal ellentétes irányba haladó hasadási termék kb. 10^{-12} sec alatt lefékeződik a forrástartó anyagában. Ha ez az idő kisebb a gamma-emisszió időtartamánál, s ezért fotonkibocsátás közben e hasadási termék már áll, míg a hasadási detektor felé haladó hasadási termék repülés közben bocsátja ki a gamma-sugarakat, eredményeinket kinematikai korrekciónak kell alávetni. A korrekció alkalmazásának szükségességét Hoffman közvetlen méréssel kívánta eldönteni [5]:

mérte a gamma-szögeloszlást egészen vékony és vastag forrástartó alkalmazása esetén. Durva különbséget nem észlelt, s ezért a korrekciót feleslegesnek tartotta. Johansson mérése alapján azonban a gamma-emisszió kibocsátási ideje zömében kb. 10^{-11} sec, s e szerint a korrekció elvégzése szükségesnek látszik. Ha a hasadási termék koordinátarendszerében gömb-szimmetrikus fotoneloszlást tételezünk fel, akkor az eloszlás tisztán kinematikai okokból fellépő, ϑ szögben mérhető anizotrópiája a mérőberendezés rendszerében

$$a_{\text{kin}}(\vartheta) \approx \frac{1}{2} \frac{v_N + v_K}{c} \cos \vartheta \cdot 100$$

ahol v_N és v_K a nehéz, illetve a könnyű hasadási termék legvalószínűbb sebességértéke, mégpedig $v_N = 0,96$ cm/nsec, $v_K = 1,44$ cm/sec [10] és c a fénysebesség. A kinematikai korrekciót a mért beütésszámokon elvégezve, a szögeloszlás A paramétereként $-0,098$, s a 180° - ban fellépő anizotrópia értékére 120 keV-es gamma-küszöbenergia mellett 10,9% adódik.

A gamma-sugarak szögeloszlására a Sztrutyinszkij [6] által javasolt kifejezést használva

$$A = k_L (\hbar^2 j / JT)^2,$$

ahol J a hasadási termékek tehetetlenségi nyomatéka, T pedig a maghőmérséklet; $k_L = 1/8$ dipolsugárzás és $-3/8$ kvadrupolsugárzás esetén. Az A előjelek alapján arra következtethetünk, hogy jelen esetben kvadrupolsugárzásról van szó. Feltételezve, hogy $T = 0,4$ MeV [4], és hogy a hasadási termékek tehetetlenségi nyomatéka a szilárd testével megegyezik, az átlagos tömegszám pedig 120, az impulzumomentuma $j \approx 7$, illetőleg a kinematikai korrekciót figyelembe véve $j \approx 9$ adódik.

Egy korábban közölt mérésünkben [3] a fentitől eltérő eredményt kaptunk. Az eltérés egyik oka az volt, hogy 50 cm-es repülési távolságot alkalmazva, a hasadásnál keletkezett gyors neutronok is beszámolódhattak a gamma-csúcshoz tartozó csatornába, mégpedig a különböző szögeknél különböző mértékben. Másrészt a forgatásnál a mágnes tér következtében a hasadási multiplier erősítése változott, és a korábbi méréssorozatban a túlterhelt hasadási oldalon a lassu és gyors ágban az erősítésváltozás miatti impulzusszám-változás nem marad arányos. Az új méréssorozatban több intézkedést tettünk a túlterhelés megszüntetésére. Így lecsökkentettük a jelszélességeket, az egész kis impulzusokat már a multiplier kimenetén levágtuk, csökkentettük a reaktorból jövő gamma-sugarak és gyors neutronok számát. Ezen intézkedések egy része is már elegendőnek mutatkozott a túl-

terhelés következményei megszüntetéséhez.

A mérés során kapott anizotrópia jellege megegyezik az idézett irodalomban találhatóval, nagysága azonban némileg kisebb. A két különböző küszöbenergiánál az anizotrópia nagysága megegyezést mutat.

Köszönetünket fejezzük ki Kluge Gyulának, aki a mérések kiértékelésében nyújtott értékes segítséget. Fekete György a kísérlet előkészítésében és végrehajtásában, Udvarhelyi Pál a mechanikai berendezések elkészítésében, Vasáros Lászlóné pedig különösen az adatok feldolgozása terén segítette elő munkánkat.

I r o d a l o m

- [1] Leachman, R.B.: in Proc. Sec. Int. Conf. Peaceful Uses of Atomic Energy 15, 331 Geneva /1958/
- [2] Блинов, М.В., Казаринов, Н.М., Протопопов, А.Н., Ширяев, Б.М.: ЖЭТФ 43, 1644, /1962/.
- [3] Dési S., Graff Gy., Lajtai A., Nagy L.: Phys. Letters 3, 343 /1963/
- [4] Kapoor, S.S., Ramanna, R.: Phys. Rev. 133, B598, /1964/
- [5] Hoffman, M.M.: Phys. Rev. 133, B714 /1964/
- [6] Струтинский В.М.: ЖЭТФ 37, 861, /1959/.
- [7] Garg, J.B.: Nuclear Instr. and Meth. 6, 72 /1960/
- [8] Dési S., Lajtai A., Nagy L.: Acta Phys. Hung. 15, 185 /1962/
- [9] Johansson, S.A.E.: Nuclear Physics 60, 378 /1964/
- [10] Dési S., Lajtai A., Nagy L.: KFKI Közl. 10, 15 /1962/

Érkezett: 1965. ápr. 12

KFKI Közl. 13. évf. 3. szám, 1965.

SUGÁRKÉMIAI FOLYAMATOK VIZSGÁLATA KRIOSZKÓPIKUS MÓDSZERREL

Irta: Kósa Somogyi István

Összefoglalás

Kis térfogatu / $\sim 1 \text{ cm}^3$ / anyagminták hütési görbéinek felvételére és olvadáspontjuk meghatározására alkalmas mérőberendezést állítottunk össze azzal a céllal, hogy az anyagok sugárállóságát besugárzás utáni fagyáspontcsökkenésükkel jellemezhessük. Megmértük a VVR-Sz típusu atomreaktor függőleges csatornáiban besugárzott benzol és difenilmetán mintákban keletkezett, oldott állapotban maradó radiolízis termékek sugárkémiai hozamát. Mérési eredményeinket irodalmi adatokkal összevetve tárgyaljuk a polimer termékek keletkezésének mechanizmusát.

A sugárállóság jellemzésére a sugárkémiaiában az un. $G(-M)$ értéket használják, amely megmutatja, hogy 100 eV energia elnyelésére a besugárzott M anyag hány molekulája bomlik fel és alakul át más molekulává.

A $G(-M)$ értékének meghatározásához a sugárkémiai folyamat teljes anyagmérlegének felállítása, vagyis általános esetben az összes gáz, folyadék és szilárd halmazállapotú radiolízis termék minőségének és mennyiségének ismerete lenne szükséges. $G(-M)$ értéke a változatlanul maradt M molekulák mennyiségének meghatározásából is kiszámítható, ilyenkor a keletkezett termékek analízise elhagyható, elválasztásukat azonban mindenképpen el kell végezni. A sugárzás hatására keletkezett sokféle terméknek az alapanyagtól való elválasztása és teljes analízise azonban még a mai modern méréstechnika alkalmazása mellett is nehéz feladat. A sugárkémiai folyamatok kinetikáját u.i. a sugárzás hatására keletkezett bomlástermék-szennyezések zavaró hatásának kiküszöbölésére célszerű kis dózisok elnyelése közben vizsgálni, s így a kis mennyiségben keletkezett termékek kimutatására csak a legérzékenyebb elemzési módszerek alkalmazhatók /pl. kromatográfia, tömegspektrometria, spektrofotometria, ESR/.

A $G(-M)$ pontos meghatározásának előbb említett nehézségei miatt a sugárstabilitás mértékéül más, kevésbé jellemző adatokat is szokás

alkalmazni. Így a szerves anyagok sugárállóságának közelítő jellemzésére a belőlük adott sugárdózis hatására keletkezett gázmolekulák száma is szolgálhat. Az így kapott és széles körben alkalmazott G /összgáz/ érték csak bizonyos és az anyag bomlása szempontjából a legtöbb esetben jelentéktelen részfolyamatok kinetikájára engedhet következtetni, de semmiképpen sem lehet alkalmas a teljes sugárkémiai folyamat és valószínűségi sugárstabilitás jellemzésére.

Ezért gondoltunk arra, hogy a szerves anyagok sugárállóságának kifejezésére a G /összgáz/ érték mellett, vagy egyes esetekben e helyett, az anyagban keletkező és oldódó kondenzált termékek összhozamát is alkalmazzuk. Olyan jellemző és könnyen mérhető paramétert kellett tehát választanunk, amelynek változása alkalmas az anyagban keletkezett és oldott összes radiolízis termék sugárkémiai hozamának meghatározására anélkül, hogy ezek teljes analizisét vagy szétválasztását el kellene végeznünk. Az anyagok olvadáspont csökkenése a bennük oldott anyagok mennyiségével arányos, ezért a sugárkémiai folyamatok hatására bekövetkező átalakulásokat megkíséreltük a besugárzott anyag olvadáspont-csökkenésének változásaival regisztrálni.

A kriozkópikus módszer elvi alapjai

Ismeretes, hogy kis mennyiségű oldott anyagot tartalmazó, tehát ideálisnak tekinthető oldatok fagyáspontja alacsonyabb, mint a tiszta oldószeré. A fagyáspont csökkenés nagysága az oldott anyag móltörtjével arányos a Raoult törvénynek [1] megfelelően:

$$T_0 - T_1 = \frac{RT_0^2}{L_f} x_2 \quad /1/$$

- ahol T_0 = a tiszta anyag olvadáspontja ($^{\circ}\text{K}$)
 T_1 = a szennyezett anyag olvadáspontja ($^{\circ}\text{K}$)
 R = a gázállandó ($\text{cal}/^{\circ}\text{C mol}$)
 L_f = a tiszta anyag moláris olvadáshője (cal/mol)
 x_2 = a szennyezés móltörtje (mol/mol)

Ebből a bennünket érdeklő x_2 -re a következő kifejezés adódik:

$$x_2 = A(T_0 - T_1) \quad /2/$$

ahol most

$$A = \frac{L_f}{RT_0^2}$$

A /2/ egyenletben szereplő A krioszkópikus állandó értéke anyagként változik, de általában nem függ az oldott anyag minőségétől. Egyes, az oldószerhez nagyon hasonló molekulával rendelkező anyagok az A állandó értékének megváltozását eredményezhetik, ha kristályosodás közben beépülnek a kristályrácsba, s így az o.p. csökkenés az elméletileg várható kisebb lesz. Ezért a /2/ egyenlet helyességét minden oldott anyagra célszerű külön mérésekkel ellenőrizni.

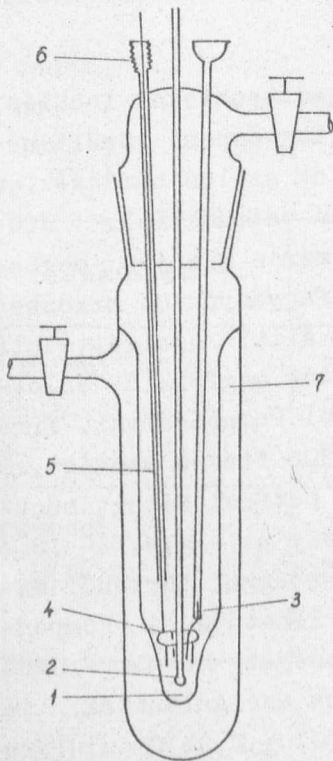
A sugárzás során keletkező szennyezések tehát /2/ összefüggés értelmében csökkenteni fogják a kiindulási anyag olvadáspontját, s így mennyiségük olvadáspontméréssel meghatározható.

A berendezés ismertetése

Vizsgálatainkhoz általában csak egy-két cm³ térfogatu minták álltak rendelkezésünkre, s a bennük keletkezett szennyezések mól koncentrációja pedig, azért, hogy ideális oldatoknak tekinthessük őket, nem lehetett több néhány század mólnál. Ezért kis anyagmennyiségekben, kis hőmérséklet különbségek mérésére alkalmas félmikro módszert alkalmaztunk.

Berendezésünk fő részei:

- 1/ mintatartó edény
- 2/ hőmérő
- 3/ hőfokregisztráló a kompenzátorral.



Mintatartóként keverővel ellátott kettősfalú üvegedényt használtunk, melynek rajza az 1. ábrán látható. Az 1-2 cm³ térfogatu minta a belső edény elkeskenyített alsó részében /1/ helyezkedett el. A mintában a termoelem tokjául szolgáló, végén vékonyfalura kihuzott üvegcsövön /2/ kívül egy végén üvegcsőbe forrasztott és kívülről cseppfolyós levegővel hűthető Pt huzaldarab/3/ merült. Ezt szükség esetén a túlhűlt folyadékok kristályosodásának megindítására használtuk. A minta keverésére függőlegesen mozgó gyűrű alakú keverőt /4/ használtunk, melyre a jobb keverés biztosítására néhány kb. 1 cm hosszú huzaldarabot forrasztottunk. A keverő szárának vezetésére üvegcső /5/ szolgált, amelynek felső vége mérsékelt vákuum, vagy védőgáz alatti méréseket lehetővé tevő, jól záró gumis átmenettel /6/ csatlako-

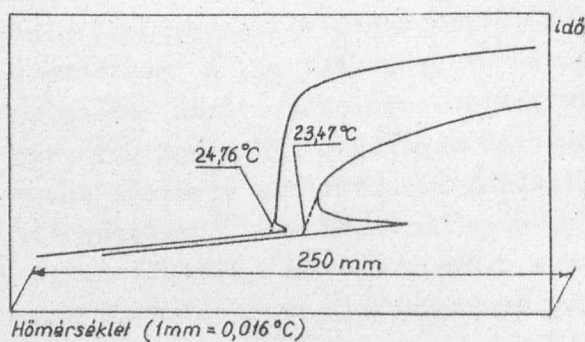
1. ábra. A mé edény vázlata.

zott az elektromotorral hajtott excenterhez. A kettősfalú üvegedény közepében /7/ a vákuumot változtatva a minta hűtési sebességét széles határok között lehetett szabályozni. A hűtést jeges vízzel, aceton és szárazjég keverékével, vagy cseppfolyós levegővel végeztük.

A kis anyagmennyiségek miatt az olvadáspont mérésére termoelemeket és termisztorokat használtunk. A hőmérés pontosságának és érzékenységének növelése érdekében termoelemekként a nagy termofeszültséggel rendelkező Fe -konstantán és Bi-Sb párokat használtuk. Termofeszültségük / Fe -konst.: $31,1 \mu\text{V}/\text{C}^\circ$, Bi-Sb: $122 \mu\text{V}/\text{C}^\circ$ értékét kalibrációs görbék felvételével ellenőriztük. A Fe -konst. termoelemeket 0,01 cm átmérőjű huzalokból ivhegesztéssel, vagy lágy forrasztással készítettük. A Bi-Sb termoelemek üvegcsőben felolvasztott fémdarabkák vékony szállá történő kihuzásával készültek, amelyek végét elektrolitikus uton leválasztott rézzel kötöttük össze. Mérés közben a termoelemek hidegpontjai desztillált vizből készült jégbe merültek.

A termisztorokat hidkapcsolásban használtuk. Érzékenységüket a fent ismertetett berendezésben nem tudtuk maximálisan kihasználni, mivel ehhez a keverés, termosztálás és regisztrálás módján változtatások szükségesek. A termisztoros berendezésről és mérésekről egy későbbi közleményünkben számolunk be.

A mérések pontosságának növelésére az olvadáspontokat lehülési görbékből állapítottuk meg /2. ábra/, amelyeket a fagyáspont körüli néhány tizedfok széles hőmérséklet-



2. ábra
Difenilmetán hűtési görbéje

tartományban vettünk fel. Először durva mérés alapján meghatároztuk a fagyáspontot miközben a termoelem által szolgáltatott e.m.e. értékét megfelelő ellenfeszültséggel kompenzáltuk. Erre a célra R-306 típusú szovjet, kis ellenállású potenciométert használtunk, amely az e.m.e. 10^{-7} voltos pontossággal történő mérését teszi lehetővé. A kompenzáló feszültséget Ni-Fe lugos akkumulátorok szolgáltatták. A kompenzátort minden görbe felvétele előtt és után $20^\circ \pm 0,01^\circ\text{C}$ -on termosztált Weston normál elemmel hitelesítettük.

A hűtési görbéket a kompenzátor nullműszereként használt "Grap-

hispot" fénykompenzációs regisztrálóval vettük fel, melynek maximális érzékenysége $0,1 \mu A/mm$.

A termoelemek, a kompenzátor és a regisztráló készülék belső ellenállásának viszonya miatt a mérőkör érzékenysége a következőképpen alakult:

Termoelem	Érzékenység $^{\circ}C/mm$
Fe -konst.	0,021
Bi -Sb	0,016

Kísérleti rész

A módszer sugárkémiai alkalmazhatóságának lehetőségét besugárzott difenilmetán és benzol vizsgálatával kívántuk megállapítani. E két vegyület kriozkópikus állandójának értékét irodalmi adatok alapján számítottuk. A difenilmetánra izooktánnal saját méréseket is végeztünk. Számításainkhoz az I. táblázatban közölt adatok középértékét használtuk.

I. táblázat

A difenilmetán és benzol kriozkópikus állandói.

Vegyület	T_0 $^{\circ}K$	L_f cal/mol	A $mol/^{\circ}C 10^{-2}$	Irodalom
Difenilmetán	299,46	4463	2,52	[2]
	299,46	4240	2,38	[4]
	299,46	-	2,52*	
Benzol	278,61	2375	1,54	[2]
	278,67	2367	1,55	[4]
	-	-	1,53	[3]

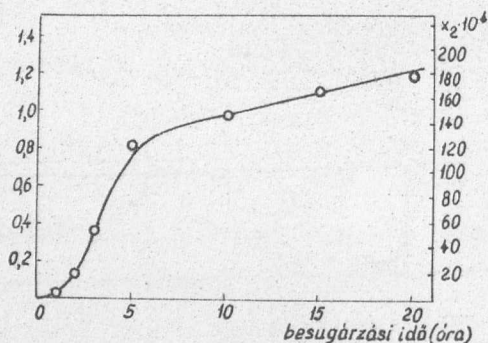
* saját mérés

Az anyagok tisztítása és előkészítése

A p.a. minőségű Reanal benzolt kolonnán desztillációval tisztítottuk. A felhasznált anyag törésmutatója megegyezett az irodalmi értékkel. A technikai tisztaságú difenilmetánt többszöri vákuumdesztillációval, majd szilikagéles oszlopon frontális kromatográfiával tisztítottuk. Az így kapott termékeket vákuum alatt kifagyasztásos technikával gázatlanítottuk, és a besugárzás idejétől függően üveg, vagy kvarc ampullákba desztilláltuk. A kb. 15 ml ürtartalmu ampullákban mintegy 2 ml anyag volt. Az olvadáspont méréseket közvetlenül az ampullák felnyitása után végeztük, a levegőn történő esetleges átalakulások zavaró hatásának csökkentésére.

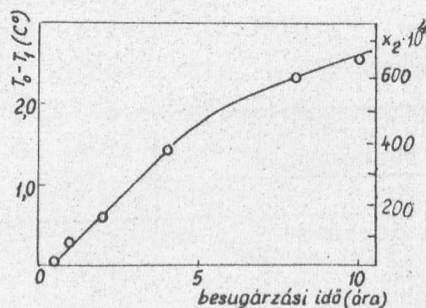
Mérési eredmények

A VVR-Sz atomreaktor függőleges csatornájában besugárzott benzol és difenilmetán olvadáspontjának változása a II. táblázatban, illetőleg a 3. és 4. ábrán látható. A táblázat adatai szerint a benzol a su-



3. ábra

A benzol olvadáspont csökkenésének változása a besugárzási idő függvényében.



4. ábra

A difenilmetán olvadáspont csökkenésének változása a besugárzási idő függvényében.

gárzásnak jobban ellenáll, mint a difenilmetán. Az ábrákból jól látható, hogy az olvadáspontot a dózis függvényében ábrázoló görbék két különböző hajlásszögű egyenes szakaszból állnak. A besugárzás kezdetén, meghatározott sugárdózis elnyeléséig az olvadáspont gyorsabban csökken, mint a későbbiek folyamán.

II. táblázat

A besugárzott benzol és difenilmetán olvadáspontcsökkenése és az ebből számolt G/összkondenzálttermék/ változása az elnyelt dózis függvényében^{*/}

Anyag	Dózis /10 ⁻²² eV/g/	T ₀ - T ₁ °C	x ₂ (mol/mol)	G/összkonden- zált termék / /molekula/100eV/
Benzol	0,75	0,03	4,57.10 ⁻⁴	0,0046
	1,50	0,13	1,98.10 ⁻³	0,116
	2,25	0,36	5,48.10 ⁻³	0,236
	3,75	0,82	1,25.10 ⁻²	0,256
	7,50	0,98	1,49.10 ⁻²	0,154
	11,25	1,10	1,67.10 ⁻²	0,115
	15,00	1,19	1,81.10 ⁻²	0,0932
Difenil- metán	0,375	0,03	7,55.10 ⁻⁴	0,0723
	0,75	0,28	7,05.10 ⁻³	0,337
	1,50	0,61	1,53.10 ⁻²	0,367
	3,00	1,45	3,65.10 ⁻²	0,406
	6,00	2,33	5,87.10 ⁻²	0,350
	7,50	2,58	6,50.10 ⁻²	0,310
Gázkromatográ- fiás meghatá- rozásból	1,5			0,306

^{*/} A dózisteljesítmény 120 rad/óra

Az eredmények tárgyalása

A besugárzott anyagban oldott szennyezések hozama a /2/ formula alapján könnyen kiszámítható. A kapott értékből a G(-M) azonban csak akkor határozható meg, ha a bomlás mechanizmusa ismeretes. Módszerünk u.i. csak a keletkezett molekulák számának és hozamának megállapítására ad közvetlen lehetőséget, azok természetéről és keletkezésük módjáról adatokat nem szolgáltat.

Ionizáló sugárzás hatására a besugárzott anyag molekuláinak felbomlása miatt egyrészt az eredetnél alacsonyabb molekulaszulyu, másrészt

a molekulából keletkező gyökök egymás közötti és az eredeti anyag molekuláival történő reakciói következtében az eredetnél nagyobb molekulásulyu termékek keletkeznek. Az első folyamat eredményeként egy elbomlott molekulából néhány kisebb molekula lesz, ugyanakkor a második folyamatban egy szennyező molekula keletkezéséhez a besugárzott anyag több molekulájának kell egyesülnie.

Az olvadáspont csökkenése csak a térfogategységben oldott molekulák számától függ, így tehát a molekulák felbomlását nagyobb o.p. változás kíséri, mint a molekulák szabad gyökök iniciálta polimerizációját. Az o.p. csökkenés nagysága tehát mind az anyag valódi sugárstabilitásától, mind a sugárkémiai átalakulási folyamat mechanizmusától függ. A krioszkopikus módszerrel mért G /összkondenzálttermék/ hozama így lehetőséget nyújt arra, hogy a sugárzás hatására lejátszódó felbomlási és polimerizációs folyamatok viszonylagos sebességét jellemezzük, amennyiben az anyag $G(-M)$ hozama független mérésekből már ismeretes.

A benzol sugárkémiai folyamatait több szerző részletesen vizsgálta [5, 6, 7, 8]. Munkáik alapján a benzol bomlásának hozama $G(-M) = 1,0$ értékkel jellemezhető. A folyadékállapotú szennyezések általunk mért hozama a besugárzás kezdeti szakaszán G /összkondenzálttermék/ = 0,25, vagyis a benzol sugár bomlásánál a polimerizációs folyamat dominál. A benzolnál alacsonyabb molekulásulyu termékeket elhanyagolva arra a következtetésre juthatunk, hogy a benzolban sugárzás hatására keletkezett és oldott anyagok átlagosan 4 benzolmolekula egyesüléséből származnak, vagyis a kvaterfenilhez hasonló aromás vagy részben hidrogénezett gyűrűs szerkezetűek. Az hogy a négy benzolgyűrűt tartalmazó szennyező molekulák lennének jellemzőek a benzol felbomlására, nem áll összhangban az eddigi mérésekkel, amelyek alapján a keletkezett folyadéktermékek átlagos molekulásulyu $M = 200$, vagyis durván három benzolmolekula összekapcsolódásának felel meg. Meg kell jegyezni azonban, hogy a polimer teljes analízist mindeztideig a terfenileknél magasabb molekulásulyu termékekre nem terjesztették ki és így a fenti átlagos molekulásulyu értéke a későbbiek során magasabb értékek felé tolódhat el. Nem tekinthető teljesen pontosnak a $G(-M)$ értéke sem, amelyet általában a polimerek vákuumdesztillációval történő elkülönítése alapján határoztak meg. E folyamat közben, valamint a termék mérésénél feltehetőleg pirolitikus és egyéb kémiai átalakulások történnek, amelyek a polimerben visszamaradt benzollal együtt a termékek természetét és sulyát megváltoztatják. Ezen megjegyzések bizonyos mértékben a gázkromatografiás mérésekre is vonatkoznak.

Difenilmetánra egy korábbi munkánkból [9] mind az átalakulás hozama, mind a főterméknek számító polimer átlagos molekulásulya ismeretes

$\overline{G/-M} = 0,7$ $\overline{M} = 450$ /, így mód nyílik a módszer helyességének független mérésekkel történő ellenőrzésére. Méréseink szerint a difenilmetán reaktorban történő besugárzásakor keletkezett és benne oldódó termékek hozama G /összkondenzálttermék/ = 0,33. Ezen értékekkel számolva a difenilmetán besugárzása alatt átlagosan 2-3 molekula összekapcsolódása révén jönnek létre az új molekulák, amelyek átlagos molekulaszálya a besugárzás idejétől függően 350-450 között változik, jó egyezésben a független uton meghatározott értékekkel.

Az olvadáspont görbék tanúsága szerint nagyobb dózisos elnyelése után a sugárkémiai folyamatok kinetikájában mindkét vegyületnél bizonyos változás figyelhető meg. Ez a változás benzol esetében sokkal kifejezettebb. Magyarozatként a keletkezett termékek inhibíciós tulajdonságaira gondolhatunk és arra, hogy ezek az alapanyagnál effektivebb gyökcsapdaként viselkedhetnek. Ennek megfelelően a kis és a nagyobb dózisos elnyelése utáni keletkezett termékek arányában változások várhatók. Ezek esetleges igazolására külön gázkromatográfiás méréseket végeztünk. A III. táblázat adataiból jól látható, hogy nagyobb abszorbeált dózisosknál a magasabb forráspontu polimerek súlyaránya észrevehetően megnő.

III. táblázat

A benzol két bomlásterméke hozamának változása az elnyelt dózis függvényében

Minta	Elnyelt dózis 10 ⁻²² eV/g	Vivőgáz áramlási sebessége	Első csucs magassága cm	Második csucs ma- gassága cm	Második cs.		Hányado- sok át- laga
					Első cs.		
642	1,5	100 ml/p	2,73	13,8	5,7		5,3
			3,0	15,0	5,2		
			3,2	15,2	5,0		
643	11,25	100 ml/p	1,5	16,25	10,85		10,73
			1,2	13,55	11,3		
			2,1	21,15	10,05		
642	1,5	60 ml/p	1,4	6,9	4,93		4,95
			1,65	8,15	4,93		
			1,5	7,5	5,0		
643	11,25	60 ml/p	1,05	11,0	10,04		9,92
			2,0	19,5	9,8		

Jelen munkánk alapján úgy gondoljuk, hogy a kriozkópikus módszer itt leírt formájában, de különösen a termisztoros érzékelők bevezetésével elérhető nagyságrendekkel érzékenyebb hőfokérzékelés esetén igen alkalmas a szerves anyagok sugárstabilitásának gyors meghatározására és egyéb adatok birtokában a sugárkémiaili folyamatok kinetikájának tanulmányozására.

I r o d a l o m

- [1] Glasstone, S. and Lewis, D.: Elements of Physical Chemistry McMillan and Co. Ltd. London 1962 p. 240
- [2] Справочник химика. Том 3. Гос. Научн. Техн. Изд. Хим. Лит. 1952. стр. 308.
- [3] А.Г.Анакин, Г.М.Дугачева, Определение чистоты органических веществ. Изд. МГУ 1963.
- [4] Handbook of Chemistry and Physics, Chemical Rubber Publishing Co. 44 th ed. 1962-63 p. 2410
- [5] Cherniak, E.A., Collinson, E. and Dainton, F.S.: Trans. Faraday Soc. 60, 1408 /1964/
- [6] Gordon, S., Van Dyken, A.R. and Doumani, R.F.: J. Phys. Chem. 62, 20 /1958/
- [7] Burns, W.G. and Jones, J.D.: Trans. Faraday Soc. 60, 2022 /1964/
- [8] Gäumann, T.: Helv. Chim. Acta, 46, 2873 /1963/
- [9] Kules I., Opauszky I., Kósa Somogyi I. és Schiller R.: KFKI Közl. 13, 137 /1965/

Érkezett: 1965. márc. 24.

KFKI Közl. 13. évf. 3. szám, 1965.

EZÜSTTÜKRÖS NAGYFREKVENCIÁS GERJESZTÉSŰ He-Ne LASER

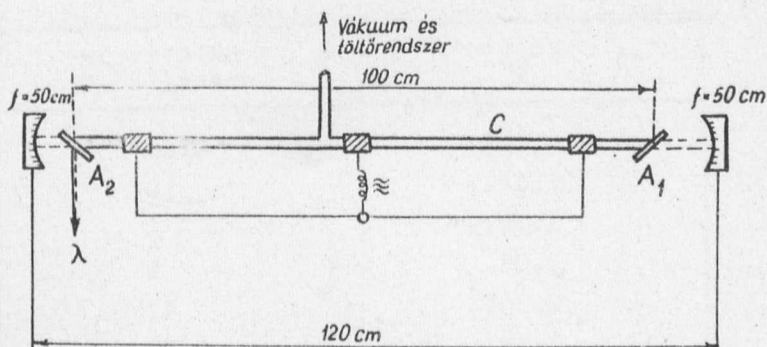
Irta: Bakos József, Csillag László, Kántor Károly és Varga Péter

Összefoglalás

Laserparaméterek kísérleti vizsgálatára ezüsttükros He-Ne lasert építettünk. Intenzív laseroszcillációt észleltünk $1,15\mu$, $2,39\mu$ és $3,39\mu$ hullámhosszakon. Ismertetjük a berendezés részleteit és néhány üzemi mérési eredményt.

A gázlaser a modern optikai kutatás jelentős eszköze. Működésére azonban számos tényező hatással van: például a kisülési cső paraméterei: gáznyomás, keverékarány, gerjesztő teljesítmény, vagy a tükör-rezonátor adatai: reflexióképesség, tükörgeometria, stb. Adott laser-típusnál az optimális működési körülményeket többnyire csak mérésekkel lehet meghatározni. A következőkben egy ilyen, a laserparaméterek kísérleti vizsgálatára épült berendezésről számolunk be.

A berendezés felépítési vázlatát az 1. ábra mutatja. A C kisülési cső 100 cm hosszú, 7 mm belső átmérőjű kvarccső. A_1 : $56^\circ 30'$ és A_2 : 45° alatt hajlító, 3 mm vastag, kemény piceinnel ragasztott kvarcablakok. Az A_1 ablakon a beesési síkban poláros fény így nem szenved reflexiós veszteséget, /Brewster ablak [1] / de az A_2 ablak első és hátsó határfelületén kb. 1-1 % fény a csőtengelyre merőleges irányba reflektálódva ki tud lépni a rezonátorból, amelyet két, egymástól 120 cm-re felállított $R = 100$ cm görbületi sugaru homoru tükörpár alkot.



1. ábra. A He-Ne gázlaser felépítés vázlatja

A tükrök nagyvakuumban párolt ezüstréteggel vannak bevonva [2], reflexióképességük $1,15\mu$ hullámhosszuságú fényre kb 98 %.

A kisülési cső 10^{-6} torr vakuum előállítására alkalmas magasvakuumrendszerrel van állandó összeköttetésben, amely egyuttal biztosítja a He-Ne gázkeverék összetételének és nyomásának finom beállítását is [3].

A gerjesztést nagyfrekvenciájú / 30 MHz / generátor végzi három külső elektróda segítségével. Az oszcillátor elektromos teljesítménye 0-200 W között folyamatosan változtatható.

A gömbtükör tartóit a laboratóriumban korábban kifejlesztett építőköcka rendszerű finommechanikai elemekből [4] állítottuk össze. A rezonátor a kisülési csővel együtt egy 1,5 m hosszú optikai padon került felállításra. A tükrök optikai beállítása a görbületi középpontokban egyforma magasságban elhelyezett csucok segítségével történt oly módon, hogy a csucs hegyét a két csucot összekötő irányban szemlélve, megfelelő tükrök billentésével fedésbe hoztuk a csucs hegyének fordított képével.

Az $1,15\mu$ -s lasersugár detektálására Toshiba OS 13 típusú fototranzisztort, a kvantitatív mérésekhez ValVo 150 CVP fotoelektronsokszorozót használtunk, amelynek sötétáramát mágneses defókuszálással csökkentettük [5]. A távolabbi infravörös hullámhosszak észlelése Zeiss VTh5-ös vakuum-termoelemmel történt.

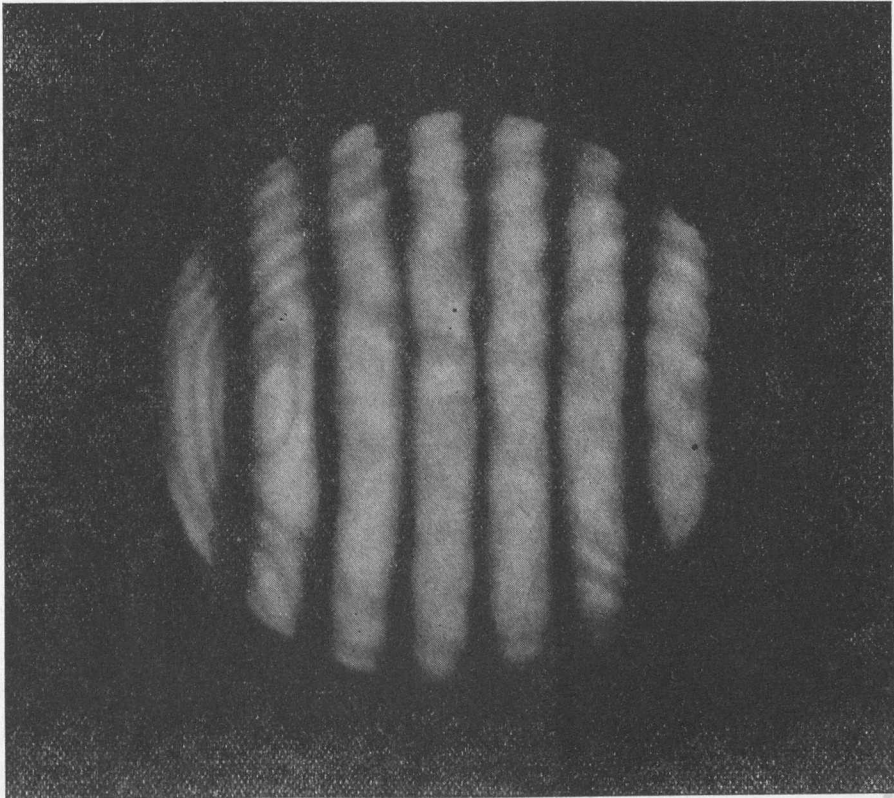
Eredmények

A gáztöltőből és a lasercsőből álló rendszer lezárása után egy töltettel több hónapra keresztül is kifogástalanul működött. A kifagyasztott Hg -gőzök és az ablakragasztótól származó esetleges szerves gőzök

1. táblázat

Az ezüsttükros laserben gerjeszthető erősebb átmenetek hullámhosszai és intenzitásviszonyai

$\lambda_{\text{mért}}$ Å	Relatív intenzitás %
1,1525	100
1,5277	10
1,8279	1
2,03	1
2,3941	47
3,39	23



2. ábra

A kicsatoló ablak első, ill. hátsó felületéről származó
részsugarak interferenciája az $1,15 \mu\text{-s}$ lasernyalámban.

megkötését folyamatosan működő cseppfolyós nitrogénes hűtőrendszer biztosította [6]. A gáztöltet tisztaságát spektroszkópiai úton vizsgáltuk és csupán hidrogénzennyeződés nyomait lehetett kimutatni.

A laser a kisülés paramétereinek megfelelő megválasztásával több különböző infravörös hullámhosszon bocsát ki fényt. A legintenzívebb fénykibocsátást az $1,15\mu$, $2,39\mu$ és $3,39\mu$ hullámhosszakon észleltük. A mért hullámhosszakot és az intenzitásviszonyokat az 1. táblázat mutatja [7].

Az $1,15\mu$ hullámhosszon a laserből kilépő teljesítmény az optimális 1 torr nyomáson 7:1 keverékarány mellett kb. 2,5 mW. A nyaláb szét-tartása 10 szögperc. A rezonátorba 2 mm-es diafragmát helyezve, a szét-tartás harmadára csökken. A minimális kisülési hossz, amelynél a laser még működik, kb. 30 cm. A rezonátor veszteségeinek ismert abszorbensekkel történő növelésével mért erősítés kb. 25 %/m.

A kicsatoló 3 mm vastag kvarc-ablak első ill. hátsó felületéről reflektálódó résznyalábok interferenciáját a 2. ábrán mutatjuk be. Az interferogram kontrasztossága jól érzékelteti a laserfény térbeli koherenciáját. A gyengébb, ivelt interferenciacsíkok az infravörös képátalakítócső ablakán keletkező másodlagos interferenciaképből származnak.

Köszönetet mondunk Farkas Győző és Szigeti János tudományos munkatársaknak értékes segítségükért.

I r o d a l o m

- [1] Rigrod, V.W., etc.: J. Appl. Phys. 33, 743 /1962/
- [2] Bakos J., Fazekas E., Nagy Gy., Szigeti J.: KFKI Közl. 12, 4, 317 /1964/
- [3] Csillag L.: KFKI Közl. 13, 209 /1965/
- [4] Bakos J., Erdőkürti Z., Kántor K.: Z. Instr. 72, 2, 43 /1964/
- [5] Farkas Gy., Varga P.: J. of Sci. Instr. Vol. 41, 704 /1964/
- [6] Csillag L., Szántó S.: KFKI Közl. 12, 181 /1964/
- [7] Csillag L., Salamon T.: KFKI Közl. 13, 199 /1965/

Érkezett: 1965. márc. 29.

KFKI Közl. 13. évf. 3. szám, 1965.

EGYIDEJÜLEG GERJESZTETT LASER-ÁTMENETEK VIZSGÁLATA NAGYFREKVENCIÁS
GERJESZTÉSŰ EZÜSTTÜKRÖS He-Ne GÁZLASERBEN A GERJESZTŐÁRAM, A KEVERÉKARÁNY
ÉS A NYOMÁS FÜGGVÉNYÉBEN

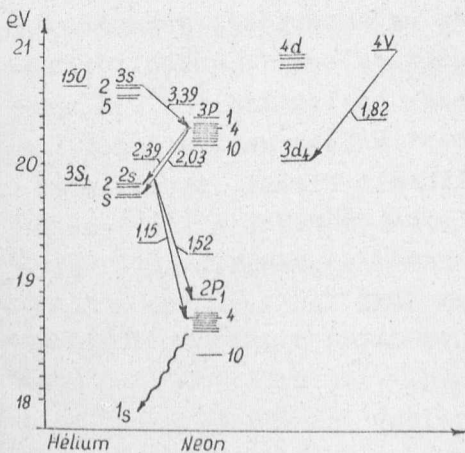
Irta: Csillag László és Salamon Tamás

Összefoglalás

Hat laser-átmenetet figyeltünk meg. Erős volt az $1,15\mu \rightarrow 2,39\mu \rightarrow 3,39\mu$ hármas kaszkád-átmenet. Grafikonokon közöljük ezekre vonatkozóan az intenzitások változását a nyomás /0,4torr - 3torr/ és a He/Ne keverékarány / 3/1 - 12/1 / függvényében, három különböző gerjesztő teljesítménynél.

A gáz-laserek teljesítményének összefüggését a nyomással, a gerjesztő elektromos teljesítménnyel és a keverékarány változtatásával eddig elsősorban dielektrikumtükrös rezonátorokban vizsgálták [1,2]. Ezüsttükrök esetében azonban lényegesen más ez a kapcsolat. Az eltérés oka abban

rejlik, hogy az ezüst széles spektrum-tartományra kiterjedő nagy reflexióképessége miatt az ezüsttükrös rezonátorban egyidejűleg több hullámhosszon is létrejöhet laser-oszcilláció. Ezek a nívó-populációk révén egymással kapcsolatban állnak és egyik működése jelentősen megváltoztathatja a másik intenzitását. A különböző laser - átmenetek kölcsönhatása különösen az ún. "kaszkád"-lasernél szembetűnő [3, 4, 5, 6], ahol a $3,39\mu$, $2,39\mu$ ill. $1,15\mu$ laser-hullámhosszak egymás utáni lépcsőzetes átmenetek eredményeként is jelentkeznek. Például a $2,39\mu$ -s átmenet alsó nívója megegyezik az $1,15\mu$ -s átmenet felső nívójával, /1. ábra/ ezért az



1. ábra

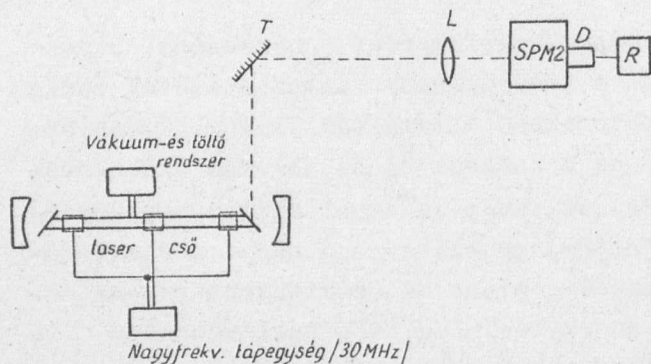
Az ezüsttükrös laserben egyidejűleg gerjesztett laser-átmenetek termszkémája

előbbi működése megnöveli az utóbbi intenzitását.

A továbbiakban ezen kaszkád laser-átmeneteknek különböző kisülési paraméterektől való függésére vonatkozó méréseinkről számolunk be. Hasonló jellegű, de nagyrészt más paraméterértékekre kiterjedő méréseket végzett J.L.Otto, R.Cagnard, R.Echard és R.Agobian [5, 6]. Az azonos paraméter-tartományokban az eredményeink összhangban vannak a korábbi eredményekkel.

Mérési elrendezés

A He-Ne nagyfrekvenciás gerjesztésű gázlasercső egy vákuumrendszerrel és egy töltőberendezéssel összekapcsolt 1 m hosszú, 7 mm átmérőjű kvarccső, amelynek egyik végét Brewster szög alatt, másik végét 45° alatt hajlító kvarclap zárja le [7]. Rezonátorát két egymástól 130 cm-re elhelyezett frissen ezüstözött $f = 50$ cm fókuszu gömbtükör alkotja. A kicsatolás a 45° -os szögű ablakon történik /2. ábra/. A lasercsőből kicsatolt sugárzást $f = 50$ cm fókuszu kvarclencsével teljes egészében egy kvarcprizmás Zeiss SPM2 típusu monokromátor belépőrésére képezzük le. Közvet-



2. ábra

A mérési elrendezés vázlatja

jesztő tápegység segítségével változtatható. Az SPM2 monokromátor automatikus meghajtású, a D detektor jelét az R Graphispot regisztráló galvanométer rögzíti.

Mérési eredmények

A különböző hullámhosszúságú átmenetek vizsgálatát oly módon végeztük, hogy beállított keverékarány és nyomásérték mellett különböző gerjesztőáramnál letapogattuk a spektrumot az $1\mu - 3,4\mu$ tartományban. A vizsgálatok során hat különböző hullámhosszu laser-átmenetet észleltünk.

Az átmeneteket hullámhosszméréssel azonosítottuk és azokat az 1. táblázatban adjuk meg.

1. táblázat^{*/}

Átmenet /Paschen jelölés/	$\lambda_{\text{mért}}$ μ	Relativ intenzitás %	$P_{\text{opt torr}}$	Opt.keverékarány He/Ne	Teljesítmény alsó határa mW
$2s_2-2p_4$	1,1525	100	0,6-0,8	6/1-10/1	2,50
$2s_2-2p_1$	1,5277	10	3	6/1-8/1	0,24
$4V-3d_4$	1,8279	1	0,6-0,8	6/1-10/1	0,01
$3p_4-2s_4$	2,03	1	1	5/1	0,01
$3p_4-2s_2$	2,3941	47	0,5-0,6	6/1-10/1	1,15
$3s_2-2p_4$	3,39	23	3	4/1-10/1	0,56

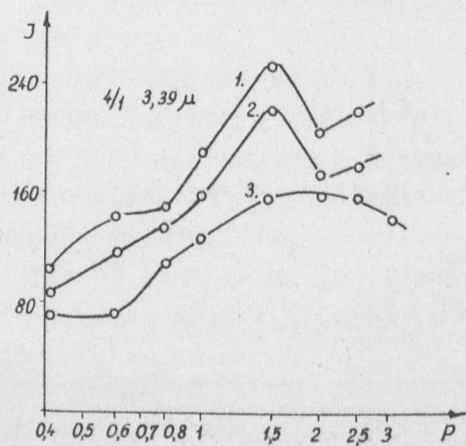
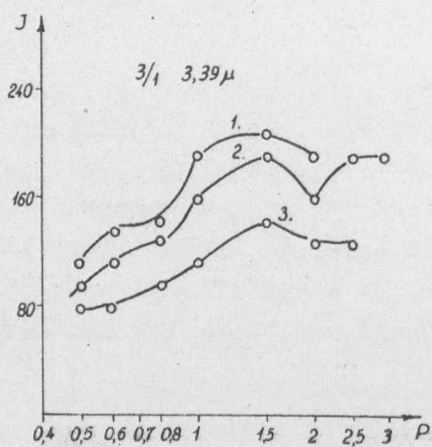
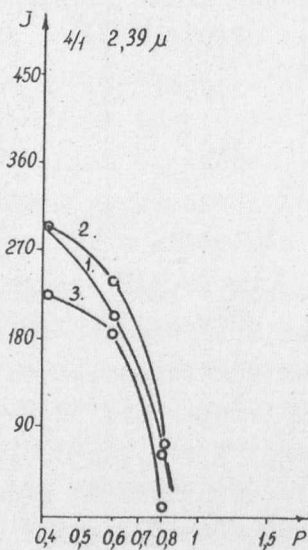
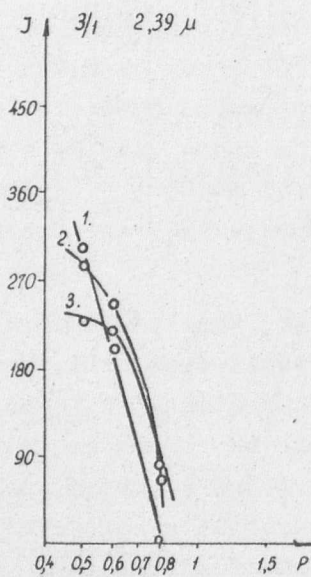
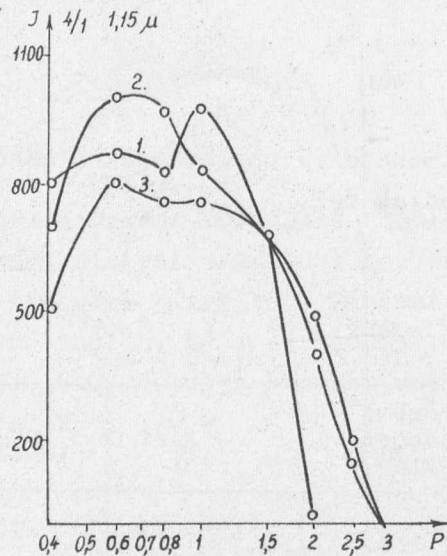
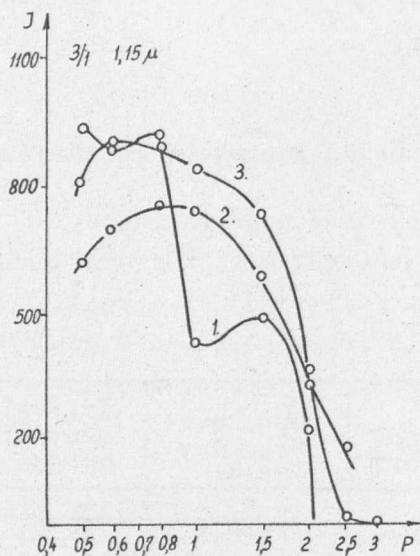
Az észlelt laser-sugarak közül az említett kaszkád-átmenethez tartozóknak van a legnagyobb intenzitása. A többi átmenet csak szűk tartományban és igen kis intenzitással jelent meg. A kaszkád-átmenetek termszkmája Paschen jelöléssel: $3s_2 \rightarrow 3p_4 \rightarrow 2s_2 \rightarrow 2p_3$, amelyek rendre megfelelnek a $3,39\mu$; $2,39\mu$; $1,15\mu$ hullámhosszu sugaraknak /lásd 1. ábra/. A 3. ábrán a jobb áttekinthetőség kedvéért grafikusán ábrázoltuk e három laser-sugár mért intenzitásviszonyait a megjelölt paraméterek függvényében.

Megjegyzések

A mérés során az intenzitás mérése sok problémát okozott. Az eredeti intenzitás a sok optikai elem közbeiktatásával erősen lecsökkent. A legnagyobb gyengülés az SPM2 monokromátornál volt tapasztalható. E műszer áteresztőképességét a hullámhosszak függvényében [9] meghatározták és az 1. táblázatban közölt relativ intenzitásarányokat eszerint korrigáltuk, 1-nek véve az $1,15\mu$ -s átmenet észlelt intenzitását. Ez a valódi értéknek kb. 30 %-a, ha a T tükrön és az L lencsén keletkező veszteségeket nem vesz-

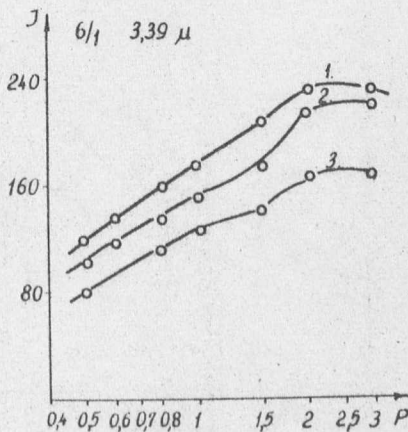
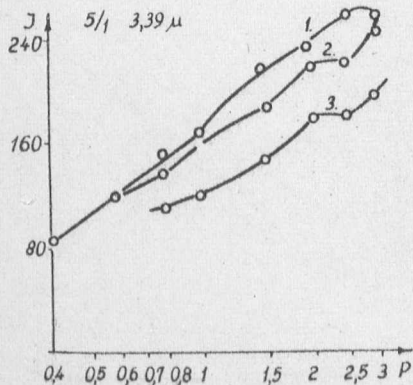
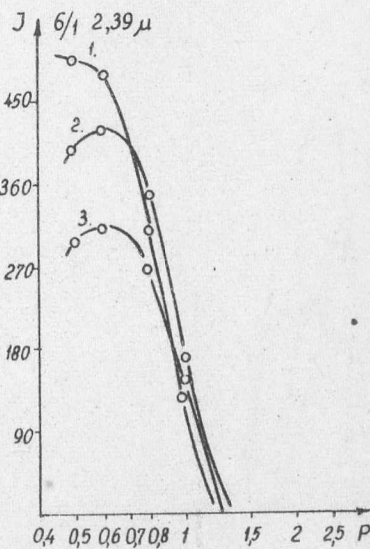
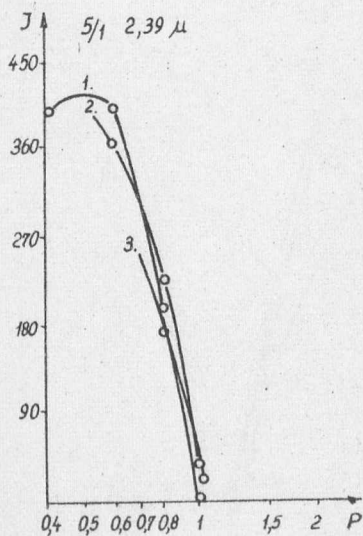
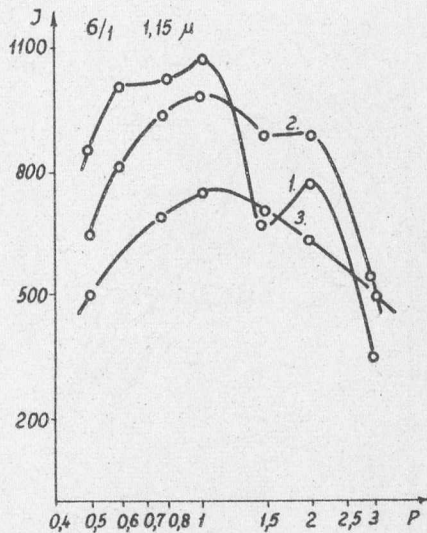
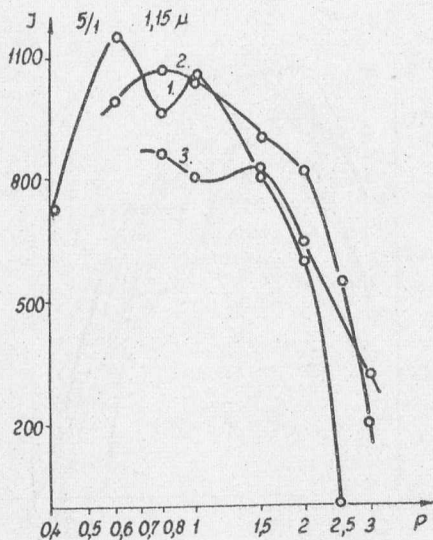
*/ Megjegyzés

A hullámhosszmérést SPM2 monokromátorral végeztük és a műszert az $1,15\mu$ -s vonalhoz hitelesítettük. A mérés pontossága $\pm 10^{-3}\mu$, kivéve a $3,39\mu$ -s komponenst, ahol a monokromátor konstrukciója miatt csak becslésre volt mód. A nyomásértékek össznyomásra vonatkoznak.



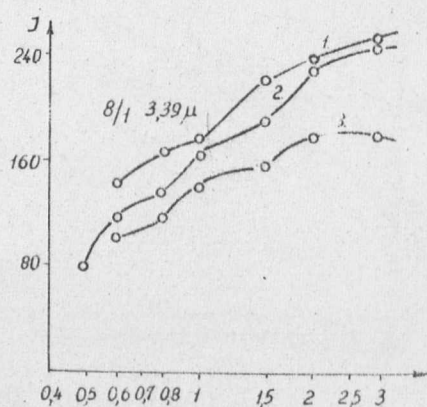
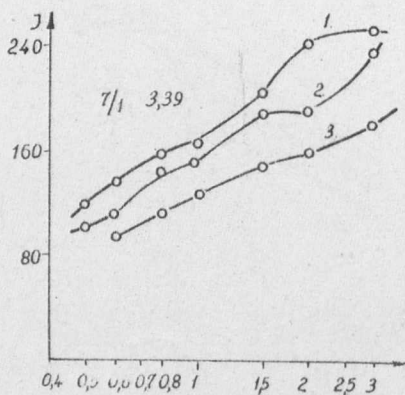
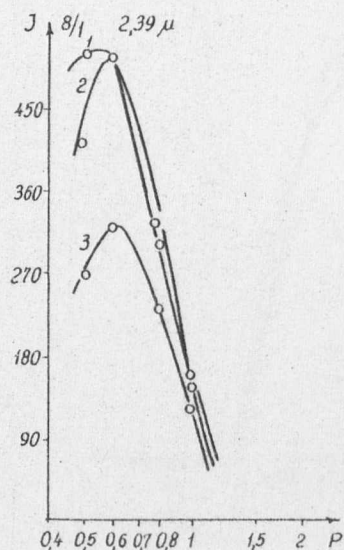
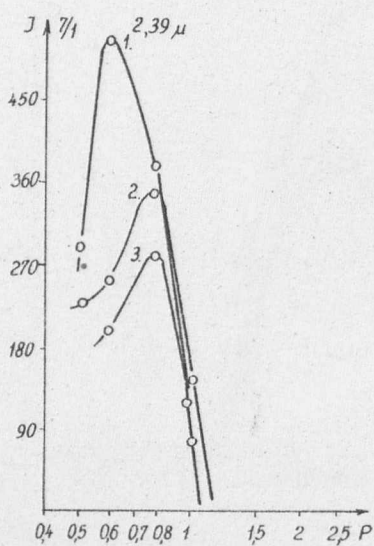
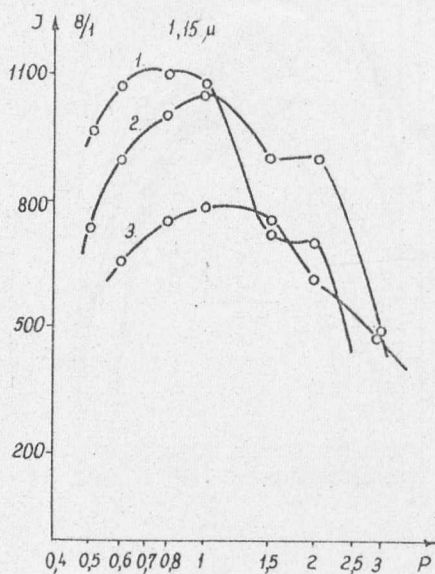
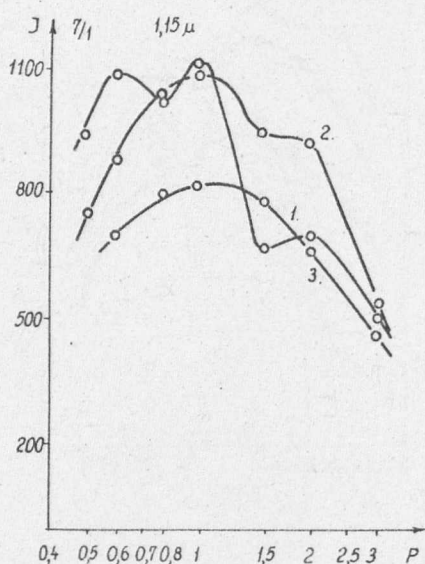
3a. ábra

Az 1,15 μ , 2,39 μ és 3,39 μ hullámhosszu laserátmenetek intenzitása az össznyomás függvényében. A görbék mellé írt számok a nagyfrekvenciás gerjesztő különböző anódáramértékeit jelzik. 1:180 mA, 2:160 mA, 3:140 mA. Minden ábrán külön fel van tüntetve a He/Ne keverékarány



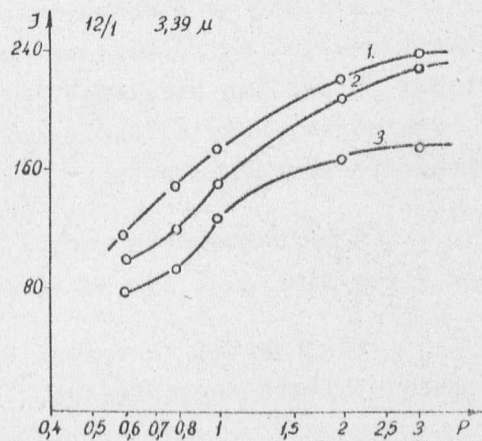
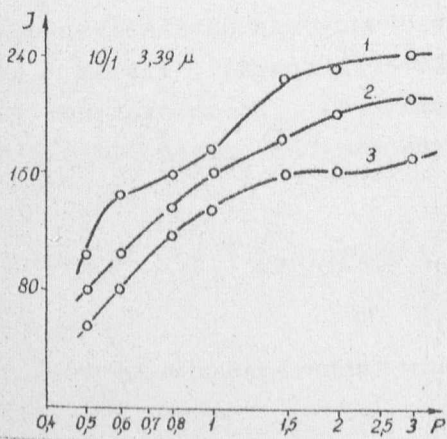
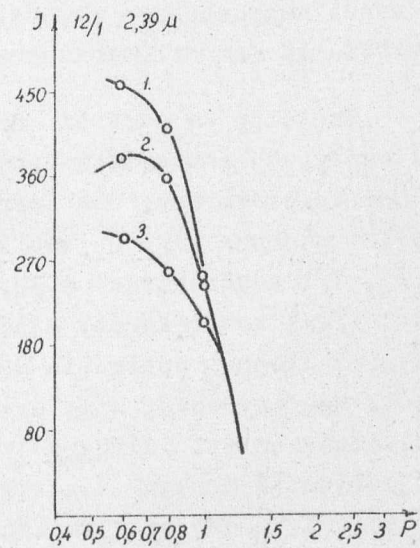
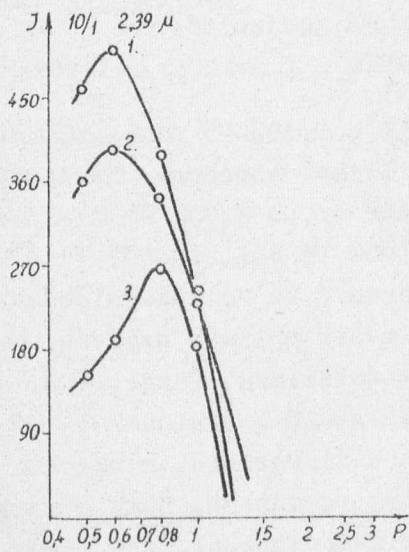
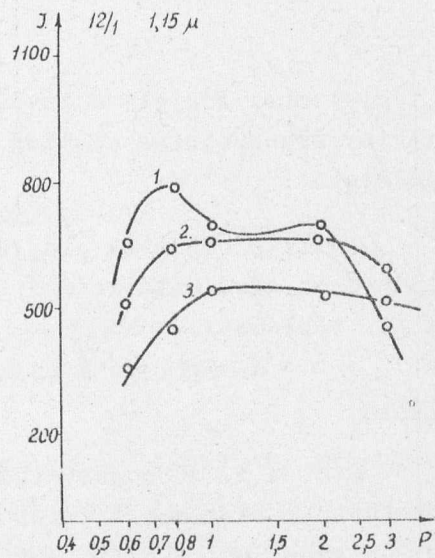
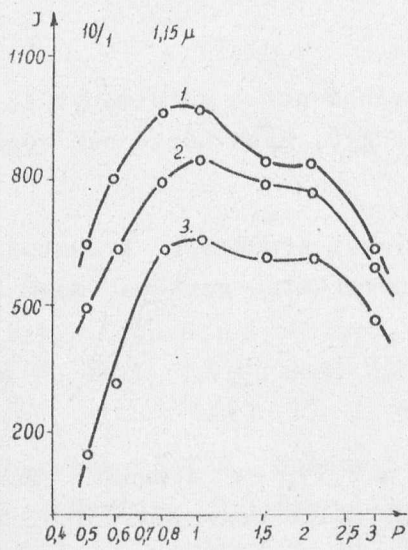
3b. ábra

Az 1,15 μ, 2,39 μ és 3,39 μ hullámhosszu laserátmenetek intenzitása az össznyomás függvényében. A görbék mellé irt számok a nagyfrekvenciás gerjesztő különböző anódáramértékeit jelzik. 1:180 mA, 2:160 mA, 3:140 mA. Minden ábrán külön fel van tüntetve a He/Ne keverékarány



3c. ábra

Az $1,15 \mu$, $2,39 \mu$ és $3,39 \mu$ hullámhosszu laserátmenetek intenzitása az össznyomás függvényében. A görbék mellé írt számok a nagyfrekvenciás gerjesztő különböző anódáramértékeit jelzik. 1:180 mA, 2:160 mA, 3:140 mA. Minden ábrán külön fel van tüntetve a He/Ne keverékarány



3d. ábra

Az 1,15 μ , 2,39 μ és 3,39 μ hullámhosszu laserátmenetek intenzitása az össznyomás függvényében. A görbék mellé irt számok a nagyfrekvenciás gerjesztő különböző anódáramértékeit jelzik. 1:180 mA, 2:160 mA, 3:140 mA. Minden ábrán külön fel van tüntetve a He/Ne keverékarány

szük figyelembe. Figyelmen kívül hagytuk továbbá azt a körülményt is, hogy a detektor érzékenysége esetleg hullámhosszfüggő. Erre nézve nem végeztünk vizsgálatokat.

Fenti szempontok alapján az egyes laser-átmenetek kicsatolt teljesítményének alsó határértékei optimális üzemeltetés esetére meghatározhatók /1. táblázat/.

Konkluzió

Mint a 3. ábra görbéiből látható, a $2,39\mu$ -s átmenet csak kis nyomásoknál, 1 torr alatt indul meg. Az optimális össznyomás [5] szerint 0,3 - 0,5 torr, ami elég jó összhangban van a mi eredményeinkkel. He adagolásával az optimális nyomás kissé növekszik. Minél nagyobb a gerjesztőáram, annál nagyobb ezen átmenet intenzitása. A gerjesztőáram feltételezett optimumát nem állt módunkban meghatározni.

Az $1,15\mu$ -s sugarat nagyon erősíti a $2,39\mu$ -s átmenet, ezért ennek a legnagyobb intenzitás-értéke szintén ilyen alacsony össznyomásnál van / 5/1 keverékarány, 0,6 torr, lásd 3b. ábrát/. A $2,39\mu$ -s átmenet megszűnésével azonban még egy másik nyomás-optimum is észlelhető. / Lásd pl. 5/1, 6/1, 7/1 keverékarány a 3b. ill. 3c. ábrán./ Ez He adagolásával növekszik. /10/1 keverékarány a 3d. ábrán./ E másik optimum nyilván magának az $1,15\mu$ -s átmenet optimális gerjesztésének felel meg, függetlenül más átmenettől. Megjegyzendő, hogy ezen optimum kialakulása a kisülési gáz hőmérsékletének melegedése miatt időfüggő [10] és miután a vizsgálatot mindenkor magasabb gerjesztő-árammal kezdtük, valószínűleg ez okozza, hogy a nagyobb áramerősségnél kisebb az intenzitás mint az alacsonyabbnál. /Az 1-es görbe a 2-es és 3-as görbe alá megy, lásd pl. 8/1 keverékaránynál a 3c. ábrát./

A $3,39\mu$ -s átmenet intenzitása az össznyomás növelésével egyenletesen növekszik és lényegesen nem függ a keverékaránytól. Itt az észlelt relatív intenzitás kicsisége jelent problémát [4]. Ennek okát nem tudjuk, de lehetséges, hogy a távoli infravörös tartományban erősen lecsökkent detektor-érzékenység okozta.

A magasabb nyomásnál / $p > 2$ torr / megjelenő $1,52\mu$ -s átmenet jellege olyan mint az $1,15\mu$ -s átmeneté.

Köszönettel tartozunk Szántó Sándor technikusnak a mérések elvégzésében nyújtott segítségéért.

I r o d a l o m

- [1] Patel, C.K.N.: J.of Appl. Phys. 33, 3194 /1962/
- [2] Н.Г.Басов, Е.П.Маркин, В.В.Никитин, Оптика и спектроскопия
XV. 436. /1963/
- [3] Gerritsen, H.J., Goedertier, P.V.: Appl. Phys. Lett. 4, 20 /1964/
- [4] Rosenberger, D.: Phys. Lett. /Netherl./ 9, 29 /1964/
- [5] Otto, J.L., Cagnard, R., Echard, R., Der Agobian Roger, C.R. Acad
Sci. Paris, t. 258 /9.mars, 1964/ Groupe 6,
- [6] Der Agobian, R., Otto, J.L., Cagnard, R., Echard, R.: C.R.Acad.Sci.
Paris, t. 259, /6.juillet, 1964/, Groupe 6,
- [7] Bakos J., Csillag L., Kántor K., Varga P.: KFKI Közl. 13, 195, /1965/
- [8] Csillag L.: KFKI Közl. 13, 209 /1965/
- [9] Kántor K., Salamon T.: KFKI Közl. /megjelenés alatt/
- [10] Arecchi, F.T.: Quantum Electronics, Proc. of the Third International
Congress, Paris, Vol. 2, Dunod-Columbia Press. 1964.
p. 547.

Érkezett: 1965. márc. 29.

KFKI Közl. 13. évf. 3. szám, 1965.

GÁZTÖLTŐ - ÉS VAKUUMRENDSZER
ALACSONY NYOMÁSÚ GÁZKEVERÉKEK GAZDASÁGOS ELŐÁLLÍTÁSÁRA ÉS
VIZSGÁLATÁRA

Írta: Csillag László

Összefoglalás

Üvegből készült gáztöltő-rendszert ismertetünk, amelyben mágneses adagoló szelepekkel szabatosan és tisztán előállíthatók alacsony nyomású /0,1 - 1 torr/ gázkeverékek. A berendezést He-Ne laserek töltésére alkalmaztuk.

Kisülési csövek töltésénél, valamint alacsony nyomású gázok, különösen gázkeverékek vizsgálatánál a gyors és eredményes munkához elengedhetetlenül szükséges, hogy a vizsgálandó gázok keverékét egyrészt tisztán, más gázoktól mentesen, másrészt pontosan meghatározott és mérhető arányok szerint tudjuk előállítani. Sok gáznál - különösen a nemesgázoknál - további szempont a gazdaságosság: a lehető legminimálisabb gázmennyiség felhasználása.

Az általánosan használt zsilipes gázadagoló módszer fő hátrányai: egyrészt a nagy gázpazarlás, másrészt a pontos nyomásbeállítás nehézségei, végül pedig a gázok visszaáramlása útján lehetséges ellenőrizhetetlen gázkeveredés.

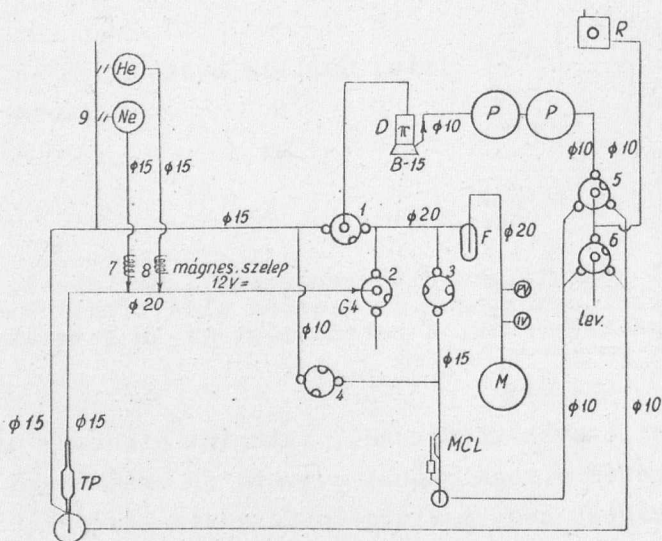
Ezen szempontok figyelembevételével hélium és neon gázok keverékeinek tiszta és jól mérhető előállítására olyan vákuum- és töltőberendezést építettünk, amely laboratóriumi keretek között is viszonylag könnyen elkészíthető, ugyanakkor az említett követelményeknek is jól eleget tesz.

A gáztöltő leírása

A rasotherm üvegből készült berendezés lényegében két főrészből: a nagyvákuumrendszerből és a hozzá kapcsolódó gáztöltőrendszerből áll. A vákuum-oldalon higanydiffúziós szivattyúval 10^{-7} torr végvákuum érhető el. A

töltőrészbe a gáz a palackokból mágnesesen vezérelhető porozus áteresztő szelepen át jut, innen megfelelő keverés után a szükséges gázmennyiség az evakuált oldalra nyomható át. A porozus szelepek nyitott állapotban nagyon lassu, egyirányu gázátáramlást és így igen finom adagolást tesznek lehetővé, míg csukott állapotban mindkét oldal felé tökéletesen zárnak.

A részletes felépítési vázlatot az 1. ábra mutatja. Az M mun-



1. ábra

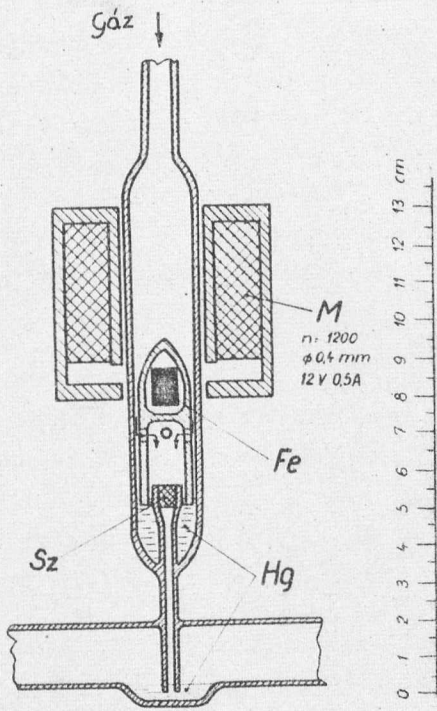
A gáztöltő és vákuumrendszer vázlata

kateret a cseppfolyós nitrogénnel hűtött F fagyasztóedényen és az 1 fő-csapon át a D higanydiffúziós szivattyu szivja. Ennek elővákuumát az R rotációs szivattyu adja. A 2 átmenő csapon át a töltőrész csatlakozik a munkatérhez. A nyomás mérésére az JV ionizációs vákuummérő 10^{-7} - 10^{-3} torr/, valamint a PV Pirani nyomásmérő 10^{-3} - 10^2 torr/ szolgál.

Az 5 háromágú elosztó T -csap az elővákuumot adja szükség szerint a diffúziós szivattyunak, a McLeod manométernek, vagy a töltő-oldali Toepler pumpának. Hasonló szerepe van a 6 csapnak, amely a külső levegőt adja szükség szerint a rotációs szivattyunak, vagy a higanyos edényeknek. Az 5 csap elfordítása után a diffúziós szivattyu elővákuumát a P tizliteres puffer-ballonok biztosítják.

A gáztöltőrész leglényegesebb elemei az adagoló szelepek. Ezekben a porozus üvegszűrők kis gázáteresztőképességét használjuk ki [1]. A

szelep működését a 2. ábra alapján érthetjük meg. Zárt állapotban az Sz



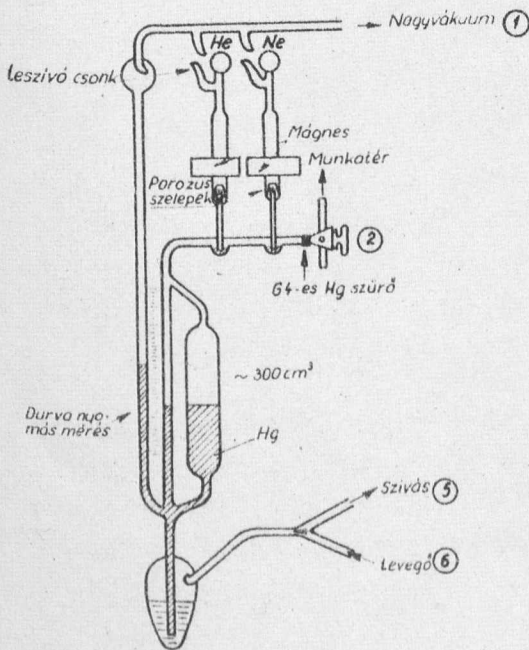
2. ábra

Mágneses adagoló-szelep szerkezete

porozus üvegszűrőt higany borítja. Nyitáskor az M mágnes felemeli az Fe vasbetétes üvegharangot, amely eddig a higanyba merült és a Hg-szint csökkenése miatt szabaddá válik a szűrő felszíne. Az ábra a szelepet nyitott állapotában mutatja.

A lassan átszivárgó gáz apró buborékokban lép ki a szelep alján az 1 - 2 mm-es higanyrétegen keresztül. Ez utóbbi védi a szelepet az idegen gáz visszaáramlásától.

A gáz a 2 csapon keresztül áramlik a munkatérbe /3. ábra/. A Toepler-pumpa higanyszintjének emelésével ill. süllyesztésével a gáz keverését, nyomásának finomszabályozását, a gáz teljes átnyomását lehet elvégezni. A szelepek becsatlakozásánál lévő, vízszintesnek rajzolt csőrész a valóságban kissé ferdén halad, hogy így egyrészt a higany emelkedésekor ne maradjanak vissza gázbuborékok, másrészt a higanyszint süllyedésekor ne maradjon vissza higany a csőrészben a szelepek védőrétegén kívül. A baloldali száron át - alacsony Hg szintnél - az egész gáztöltő nagyvakuumra szivható le. Szükség esetén a 4 csapon át /lásd 1. ábra/ a nyomást is lehet mérni. Ezen ág felső része csonkon át összeköthető az adagoló szelepek gázpalack felőli oldalával /lásd 1. ábrán 9/, hogy palackcserére esetén ezt a részt is nagyvakuumra lehessen leszívni.



3. ábra

A gáz-adagoló rész felépítése

A 2 csap aljába forrasztott 64-es szűrőbetét megakadályozza a Hg és csapzsír érintke-

zését. A csap szabad szárán át levegőt vagy más gázt lehet a töltőrendszerbe juttatni.

Működés, eredmények

A vakuum-rész gázlángos kimelegítés után kb 1 nap alatt 10^{-7} torr vakuumra szivható le. A nagyfelületű 1 csap lezárásakor a vakuum kb 1 nagyságrendet romlik, a további romlás a rendszer előéletétől /vizgőz, egyéb gázmaradványok, stb./ függ. Általában 10^{-6} torr /óra romlási sebességnél nagyobbat nem tapasztaltunk.

A mágneses szelepek porozus magjaként jénai G5-ös baktériumszűrőből kivágott 3x3x15 mm-es hasábokat használtunk. Ez közel atmoszférás nemesgáznyomásnál kb. 1/2 buborék/sec /1 torr l /perc/ beáramlási sebességet adott, ami már az adagolásnál $\pm 0,04$ torr beállítási pontosságot tesz lehetővé. Kis munkatérfogatnál a Toepler-pumpával még 20-30 % nyomásváltozást elő lehet idézni.

A szelepeknél és általában a berendezéshez használt higanynál alapvető körvetelmény a vízmentesség és a nagyfokú tisztaság.

A berendezés elkészülte után vizsgálatokat végeztünk a gáz tisztaságának ellenőrzésére. Spektroszkópiailag uton megvizsgáltuk kvarccsőben nagyfrekvenciásan gerjesztett 1 torr össznyomású hélium /"reinst"/ és neon /"spektralrein"/ gázkeverékének szennyezettségét. A spektrogrammokon egyedül a hidrogén-szennyezés nyomaint lehetett azonosítani.

A fagyasztó hűtőfolyadékának automatikus pótlásával [2] több hetes gáztöltetnél sem mutatkozott számottevő szennyeződés.

A berendezést eredményesen felhasználtuk hélium-neon gázlaserek folyamatos üzemeltetésére ill. töltésére. További felhasználási lehetősége lehet a gázkeverékek spektroszkópiailag vizsgálatánál, különösen kisebb nyomású gázok, vagy többkomponensű gázelegyek esetében.

I r o d a l o m

- [1] Botschkowa, O.P., Schreider, I.I.: Spektralanalyse von Gasgemischen, Akad. Verl. Berlin, 1960.
- [2] Csillag L., Szántó S.: KFKI Közl. 12, 2 1964

Érkezett: 1965. máj. 24.

KFKI Közl. 13. évf. 3. szám, 1965.