Vol. 14. No. 5. 1966

KFKI

KÖZLEMÉNYEK

СООБЩЕНИЯ ЦЕНТРАЛЬНОГО ИНСТИТУТА ФИЗИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

REPORTS OF THE CENTRAL RESEARCH INSTITUTE FOR PHYSICS

Szerkeszti: Ádám András
Главный редактор: А. Адам
Editor: A. Ádám

A KÖZPONTI FIZIKAI KUTATÓ INTÉZET KIADÓI CSOPORTJA
ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ГРУППА ЦЕНТРАЛЬНОГО ИНСТИТУТА ФИЗИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ
PUBLISHING GROUP OF THE CENTRAL RESEARCH INSTITUTE FOR PHYSICS
BUDAPEST, 114. POB 49.

Technikai szerkesztő: Nagy Imréné — Példányszám: 320
Megjelent: 1966. okt. 5. — Rotaszám: 2778

A kiadásért felelős: Jánossy Lajos

Megjelenik: kéthavonta
Előfizethető: az MNB 100.015-70 bevételi számlán
Előfizetési dij: egyes szám 5,-Ft, egy évre: 30,-Ft /6 szám/

KFKI KÖZLEMÉNYEK

TARTALOM

Р е з ю м е

1. <u>Исследование твердого диметиланилина методом протонного магнитного резонанса</u>

   К. Томпа и Ф. Тот

   Измерения ядерного магнитного резонанса в твердом поликристаллическом диметиланилине были проведены в диапазоне температур - I90....- I,5°C. Сравнивая измеренные и оцененные вторичные моменты, мы пришли к выводу, что в испытанном диапазоне температур группы CH_3 проделывают реориентировочное движение вокруг C_3 осей.

2. <u>О связи формальной теории рассеяния с каналовыми теориями ядерных реакций</u>

   Т. Долински

   Для амплитуды рассеяния,определяющей дифференциальное эффективное сечение, формальная теория рассеяния (ФТР) и каналовые теории реакций (КТЯР) дают разные определения и разные аналитические формулы. Так как эти два основных метода теоретического описания ядерных реакций пользуются полностью различными понятиями, непосредственное сравнение их аналогичных понятий кажется целесообразным. Показано, что для упругого рассеяния транзитный матричный элемент ФТР точно совпадает с матричным элементом столкновения КТЯР, если взаимодействие имеет конечный радиус действия. В случае ядерных реакций совпадение отсутствует даже при элементарном взаимодействии с конечным радиусом действия. Разница двух матричных элементов дана в аналитической форме. Причина этого различия заключается в присутствии поляризационных сил во внешней области. Различие понятия матричного элемента рассеяния в двух теориях в случае проблемы многих тел надо учитывать при вычислении дифференциального эффективного сечения.

3. <u>Разложение функции Бесселя по методу Чебышева II</u>

   Г. Немет

   В работе дается определение разложений функции Бесселя $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ по Чебышеву. Эти разложения с точки зрения их более сильной сходимости при практических расчетах являются целесообразными. При $0<x\leq a$ сходимости рядов Чебышева примерно на 4^{-n} быстрее, чем у соответствующего ряда Тайлора. Ряды Чебышева, относящиеся к случаю $x\geq a$ являются сходящимися. /В противоположность обыкновенным расходимым асимптотическим выражениям/. Для определения коэффициентов разложений выведены рекурсионные формулы. В приложении коэффициенты разложений по Чебышеву для $J_k(x)$ и $I_k(x)$ дается (содержащие функцию Бесселя) в явной форме.

4. Пропорциональный счетчик Херста и цифровой интегратор для измерения абсолютной дозы быстрых нейтронов

Й. Бири и Ш. Деме

Были рассмотрены условия измерения абсолютной дозы быстрых нейтронов в ткани и был описан счетчик типа Херста, построенный в нашей лаборатории. Дается подробная схема цифрового интегратора амплитуд, построенная специально для вышеупомянутого счетчика. В заключение рассмат - ривается область применения системы.

5. Исследование радиочастотного отрицательного водородного ионного источника

Н. Гомбош, Й. Роос и Л. Вали

Исследовали радиочастотный отрицательный ионный источник. Перезарядки были проведены с помощью газовой мишени H_2, образовавшейся в вытягивающем электроде с длинным каналом.Интенсивность пучка H^- с энергией I8 кэв, выходящего из источника, составляет 9 мка, распределение энергии - 400 эв, расширение пучка II мрад и расход газа 20 $см^3$/час. Ионный источник работает больше 500 часов.

6. Исследование радиочастотного ионного источника с большой интенсивностью

Й. Роос, Н. Гомбош и Л. Вали

В работе описывается радиочастотный ионный источник с большой интенсивностью и длительным сроком службы, работающий в непрерывном режиме, дающий положительные водородные ионы и исследование его рабочих характеристик. На основании измерений, даются данные оптимального действия: ионный ток водорода I0 мА, расход газа 30 $см^3$/час H_2,мощность [illegible] ватт р.ч. и вытягивающее напряжение 8 квт.

Summaries

1. Proton Magnetic Resonance Study of Solid Dimethylaniline

K. Tompa, F. Tóth

Nuclear magnetic resonance measurements have been performed on solid polycrystalline dimethylaniline at temperatures from -190 to -1.5 °C Comparison of the measured and estimated second moments permits to infere a reorientation of the CH_3 groups around their C_3 axis in the temperature range covered by the measurement.

2. Comparison of the Formal Theory of Scattering with the Channel Approac

T. Dolinszky

The scattering amplitude is defined by analytical expressions formulated differently in terms of the theory of scattering and in terms of the channel approach. The comparison of the analogue concepts shows that the transition matrix element of the formal theory of scattering is fully reproduced by the collision matrix element of the channel approach in the case of elastic scattering by a finite range central force. For nuclear reactions the matrix elements are seen to differ even for two-nucleon interactions of finite range. The difference between the two matrix elements is presented in an analytical form, and it is shown to be due to the presence of polarization forces in the external region.

3. Chebyshev Expansion of Bessel Functions II. $I_\nu(x)$ and $K_\nu(x)$.

G. Németh

Appropriate Chebyshev expansions for the Bessel functions $I_\nu(x)$ and $K_\nu(x)$ are determined. These expansions are rather useful in practical calculations because of their high convergence. For $0<x\leq a$ the convergence of the Chebyshev series is obtained earlier by a term of about 4^{-n} as compared with the corresponding Taylor expansion. The Chebyshev series for $x\geq a$ are convergent contrary to the usually employed divergent asymptotical expressions. A recursion formula is derived for the evaluation of the expansion coefficients. In the Appendix the Chebyshev expansion coefficients for $J_k(x)$ and $I_k(x)$ are given in closed form containing Bessel function.

4. Hurst-type Proportional Counter with Digital Equipment for the Evaluation of Absolute Dose of Fast Neutron
   J. Biri and S. Deme

   The conditions for the measurement of the absolute dose of fast neutrons in tissues are investigated and the design and performance characteristics of a Hurst-type proportional counter built by the authors are discussed. The digital pulse amplitude integrator developed and used in conjunction with the counter is described in detail. Finally the possible applications of the equipment are considered.

5. Investigation of a Radiofrequency Negative Hydrogen Ion Source
   P. Gombos, J. Roósz, L. Vályi

   Investigations of a radiofrequency negative ion source are described. The exchange is performed by H_2 gas target formed in the extracting electrode with a long extraction channel. The H^- beam extracted from the source emerges with 18 KeV energy, 9 μA intensity, the width of the energy spectrum being 300 eV, its angular scattering 11 mrad for gas consumption of 20 cm^3/h. The lifetime of the ion source exceeds 500 hours.

6. Investigation of a High Intensity Radiofrequency Ion Source
   J. Roósz, P. Gombos, L. Vályi

   The development of a high intensity radiofrequency ion source with a positive hydrogen ion yield is described. The source can be continuously operated and has a long lifetime. Investigation of its operational characteristics shows the optimum obtainable hydrogen ion current to be of 10 mA intensity for 30 cm^3/h gas consumption at atmospheric pressure, 140 W radiofrequency output and 8 kV extracting voltage.

SZILÁRD DIMETILANILIN FIZIKO-KÉMIAI VIZSGÁLATA 2.
PROTON MÁGNESES REZONANCIA SPEKTRUM

Irta: Tompa Kálmán és Tóth Ferenc

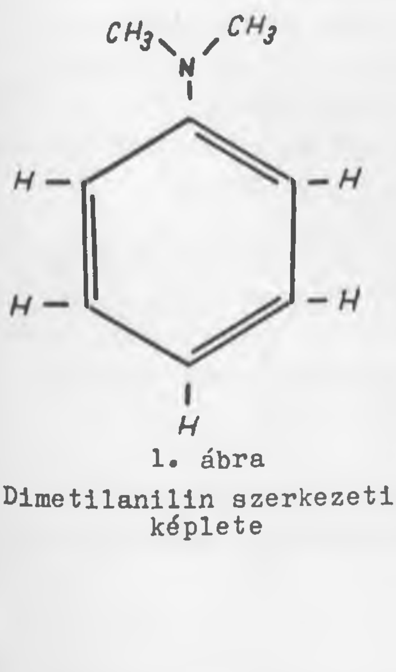
Összefoglalás

Mag mágneses rezonancia méréseket végeztünk szilárd, polikristályos dimetilanilinen -190 ... -1,5 C° hőmérséklettartományban. A mért és becsült második momentumok összehasonlítása alapján az a következtetés vonható le, hogy a CH_3 csoportok C_3 tengelyük körüli reorientációs mozgás végeznek a vizsgált hőmérséklettartományban.

Bevezetés

Nagyon jól ismert, hogy a proton mágneses rezonancia jel szélességét és momentumait a szomszédok által keltett dipól-tér határozza meg. Igy a vonalszélesség függ a molekula- és kristályszerkezettől, továbbá a szilárd fázisban végbemenő molekuláris, atomi mozgások jellegétől. A molekuláris mozgás rezonancia jel keskenyedést /"mozgási keskenyedés"-t/ idéz elő, részben vagy egészen kiátlagolva a szomszédos magdipólok által keltett mágneses teret.

Méréseink célja a szilárd fázisban végbemenő molekuláris mozgások tanulmányozása. A molekula szerkezeti képlete alapján /lásd 1. ábra/ feltételezhető legalább két mozgástipus előfordulása a szilárd fázisban; az egyik a CH_3 csoportok reorientációja C_3 tengelyük körül, a második a molekuláris diffuzió, ami az olvadáspont környékén játszik fontos szerepet.



1. ábra
Dimetilanilin szerkezeti képlete

Kisérleti berendezés és anyagminta

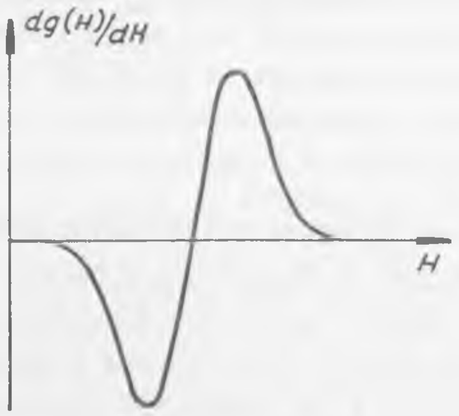
A méréseket [1][2] -ben ismertetett oszcillátor tipusu, térmodulációs rendszerü, széles-jelü MMR spektrométerrel végeztük

16,000 Mc/s frekvencián. A Newport D-tipusu elektromágnes terét háromszögjel generátorral automatikusan változtattuk, a kalibrálást az ^1H és ^7Li magok rezonancia jelének a felhasználásával végeztük. A térmoduláció 280 c/s frekvencián történt. Frekvenciamérésre RACAL SA 505 D /SA 512/ tipusu digitális frekvenciaszámlálót használtunk. A Robinson-tipusu oszcillátorról levett rezonancia jelet erősités és fázisérzékeny egyenirányitás után Graphispot GRVAT regisztrálón vettük fel.

Az anyagminta hőmérsékletének szabályozására és változtatására gáz-áramos hőmérsékletszabályzó rendszert [3] használtunk. A minta hőmérsékletét rézkonstantán termopárral mértük, a mérés becsült pontossága 1 C°-on belül van. A rendszer hőmérséklet stabilitása néhány tized C°/óra. A polikristályos dimetilanilin minta lezárt üvegcsőben a gázáram közepén helyezkedett el. Az anyagminták elkészitésének ismertetése Kósa Somogyi István KFKI Közl. 14, 6 /1966/ cikkében található.

Eredmények és értelmezésük

A MMR abszorpciós jelek mágneses tér szerinti deriváltját -190 ... -1,5 C° tartományban vettük fel. A kapott derivált jelek finomszerkezetet nem mutatnak /2. ábra/.



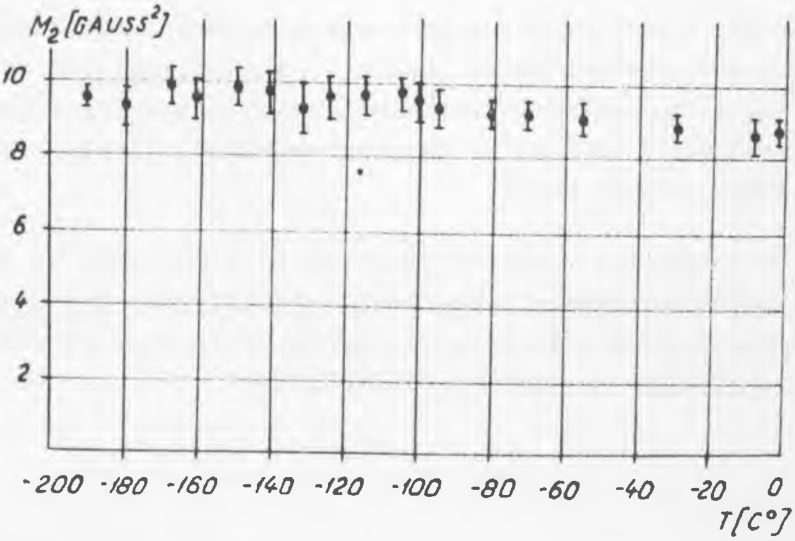
2. ábra
Proton mágneses rezonancia jel dimetilanilinban

A derivált jel maximuma és minimuma között mért vonalszélesség független a hőmérséklettől, értéke 7,5 ± 0,1 G.

A második momentumok kisérleti értékét a jól ismert definició alapján /lásd pl. [4] / GIER-tipusu számitógéppel határoztuk meg, és korrigáltuk a véges modulációs amplitudó következtében fellépő kiszélesedésre [5] . 6 - 10 mérés átlagértékét és a statisztikus hibáját ábrázoltuk a 3. ábrán.

Az elméleti második momentum a Van Vleck összefüggés alapján /lásd pl. [4] / számolható ki. Tekintettel arra, hogy sem a kristály, sem a molekulaszerkezet nem ismert, csak becsülni tudjuk a második momentumot.

Feltételeztük, hogy a H-H távolság a molekula C_6H_5N részében ugyanaz mint benzolban, azaz 2,49 Å [6] , a CH_3 csoportokban pedig



3. ábra
A MMR jel második momentumának hőmérsékletfüggése dimetilanilinben

1,78 ... 1,79 Å [7][8] . A molekulán belüli atommagoktól származó járulék alsó határát becsültük csak meg, mert nem ismertük a CH_3 csoportok egymáshoz és a molekula többi részéhez viszonyitott elhelyezkedését; és igy nem számitottuk ki a CH_3 csoportok egymás közötti és a C_6H_5N molekula résszel való kölcsönhatásából származó momentum járulékot. A kapott érték: 13,1 G^2. Feltételeztük továbbá, hogy a szomszédos molekulákkal való kölcsönhatásból származó járulék értéke ugyanaz, mint a hasonló o-, m-, p-xilolban [9] , tehát $\sim$5,3 G^2.

A merev kristályrácsban lévő protonok második momentumára tehát az alábbi feltétel adható:

$$M_2^{merev} > 18,4\ G^2.$$

A CH_3 csoportok C_3 tengelyük körüli, gyors reorientációja esetén a molekulán belüli járulék negyedére csökken [10] , a molekulák közötti járulék pedig feltehetően [9] 70 %-a a merev rácsbelinek. Ekkor

$$M_2^{CH_3\ reorient.} > 7,8\ G^2.$$

A kisérleti értékek a két határ közé esnek, amiből gyors CH_3 reorientációra következtethetünk. A C_3 tengely körüli reorientáció már

-190 C°-on elég gyors ahhoz, hogy mozgási keskenyedést okozzon, megindulása alacsonyabb hőmérsékleten történik. A reorientációs mozgás a vizsgált hőmérséklettartományban mindenütt változatlanul fennáll. A második momentum kismértékü csökkenése magasabb hőmérsékleteken valószinü a kristályrács hőtágulásából ered.

Köszönetünket fejezzük ki Erőné Gécs Máriának és Kósa Somogyi Istvánnak, amiért a kérdés vizsgálatára felhivták a figyelmünket, valamint az anyagminták elkészitéséért, Bánki Péternek a mérésekben és numerikus kiértékelésben nyujtott segitségéért.

I r o d a l o m

[1] Tompa, K., Tóth, F.: Magyar Fizikai Folyóirat 11, 177 /1963/
[2] Tompa K., Tóth, F.: KFKI Közl. 11, 215 /1963/
[3] Balla, J., Tompa K., Tóth F.: Mérés és Automatika, megjelenés alatt
[4] Pake, G.E.: Solid State Physics 2, 1 /1956/

[5] Andrew, E.R.: Rev. 91, 425 /1953/
[6] Andrew, E.R., Eades, R.G.: Proc. Roy. Soc. 218, 537 /1953/
[7] Smith, G.W.: J.Chem. Phys. 42, 4229 /1965/
[8] Yukitoshi, T., Suga, H., Seki, S., Itoh, J.: J. Phys. Soc. Japan 12, 506 /1957/
[9] Andrew, E.R.: J. Chem. Phys. 18, 607 /1950/
[10] Gutowsky, H.S., Pake, G.E.: J. Chem. Phys. 18, 162 /1950/

Érkezett: 1966. jul. 12.
KFKI Közl. 14.évf. 5.szám, 1966.

A FORMÁLIS SZÓRÁSELMÉLET ÉS A CSATORNAELMÉLETEK KAPCSOLATA

Irta: Dolinszky Tamás

Összefoglalás

A differenciális hatáskeresztmetszetet megszabó szórási amplitudóra a formális szóráselmélet és a csatornaelméletek különböző definiciót és eltérő analitikus formulát adnak meg. Mivel a magreakciók elméletének ez a két alapvető tárgyalási módja egészen különböző fogalomkörben dolgozik, szükségesnek látszik analóg fogalmaikat közvetlenül összehasonlitani. A vizsgálat szerint rugalmas szórás esetére a szóráselméleti tranzitmátrixelem pontosan megegyezik a csatornaelmélet ütközési mátrixelemével, amennyiben a kölcsönhatás véges hatótávolságu. Magreakciók esetén még véges hatótávolságu elemi kölcsönhatás mellett sincs egyezés. Analitikus alakban megadtuk a két mátrixelem eltérését. A különbözőség oka polarizációs erők jelenléte a külső tartományban. A két elmélet szórási mátrixelem-fogalmának eltérő alakulása soktestprobléma esetére a differenciális hatáskeresztmetszet kiszámitásánál figyelembe veendő.

1/ Bevezetés

Rövidhatótávolságu elemi kéttest-kölcsönhatás esetén pontrendszerek szórásproblémájának két független stacionárius tárgyalási módja a formális szóráselmélet és a csatornamódszer. A két eljárás merőben különböző fogalmakkal dolgozik. A szóráselmélet a reakciót leiró $\Psi(r,E)$ stacioner hullámfüggvényhez a kezdő és végkölcsönhatás exponenciális - adiabatikus ki- ill. bekapcsolódásával rendeli hozzá a kölcsönhatásmentes kezdő- és végállapotot. A korrespondáló fogalmak a csatornaelméletekben a beeső és a szórt hullám. A $\Psi(r,E)$ szórásállapot a csatornatartományok bármelyikében "egy rögzitett szeparációnak megfelelő relativ mozgásban sikhullám + a csatorna-szeparáció szerinti relativ mozgásban kifutó gömbhullám" összetételü; a sikhullám-komponenst a belső tartományra tovább definiálva jutunk a beeső hullám fogalmára; ez független lesz a kiindulásul választott csatorna-szeparációtól. A beeső hullám komplementere a teljes hullámképben az egész konfigurációs térben értelmezett szórt hullám.

A szórási mátrixelem fogalma is egészen más uton alakul a két módszerben. A szóráselmélet megfelelő fogalma a tranzit-mátrix, amely a lehetséges kezdő - és végállapotok közt létesit átmenetet. A csatornaelméletekben a szórt hullám és a beeső hullám amplitudóinak arányával definiáljuk az ütközési mátrixot.

Mig a szóráselméleti fogalmak egy mesterséges időbeli viselkedés aszimptotikája segitségével értelmezhetők, addig a csatornaanalizis a konfigurációs térbeli aszimptotikával vezeti be fogalmait. A közvetlenül mérhető mennyiségek, igy a differenciális hatáskeresztmetszet, a térbeli aszimptotikával van közeli kapcsolatban. A két egyenrangu tárgyalásmód közötti kapcsolat tisztánlátása nem csak elvi okokból érdekes: a hatáskeresztmetszetnek szóráselméleti kiszámitása ezen az uton alapozható meg.

2/ Az állapotok korrespondenciája

A korrespondáló állapotok tekintetében csak kitüzzük a feladatot. A szóráselmélet kezdő- ill. végállapota a Møller-operátorok segitségével az

$$\phi_{initial}(\underline{r},E) \equiv \Omega_\alpha^{+-1}\psi = \left(1+\frac{1}{E-H+i\varepsilon}V_\alpha\right)^{-1}\psi(\underline{r},E) \qquad /1/$$

$$\phi_{final}(\underline{r},E) = \Omega_\beta^{-}\psi = \left(1+V_\beta\frac{1}{E-H+i\varepsilon}\right)\psi(\underline{r},E) \qquad /2/$$

alakban irhatók.

A csatornaelméletekben a beeső és szórt hullám bevezetése igy történhet. Ha a szórási állapot - legáltalánosabb esetet véve - a külső térben

$$\psi(\underline{r},E)=\sum_{\alpha}\sum_{a(\alpha)} c_a\left[e^{i\underline{k}_a\underline{r}_\alpha}\chi_{\sigma_a}^{A s_a}(\xi_\alpha)+\sum_{\beta}\sum_{b(\beta)} f_{ba}(E)\frac{e^{ik_\beta r_\beta}}{r_\beta}\chi_{\sigma_b}^{B s_b}(\xi_\beta)\right] \qquad /3/$$

alaku, akkor a beeső és szórt hullám az egész konfigurációs térben

$$\phi_{inc}(\underline{r},E) \equiv \sum_{\alpha}\sum_{a(\alpha)} c_a e^{i\underline{k}_a\underline{r}_\alpha}\chi_{\sigma_a}^{A s_a}(\xi_\alpha) \qquad /4/$$

$$\phi_{scat}(\underline{r},E) \equiv \psi(\underline{r},E)-\sum_{\alpha}\sum_{a(\alpha)} e^{i\underline{k}_a\underline{r}_\alpha}\chi_{\sigma_a}^{A s_a}(\xi_\alpha) \;;$$

az összegezés a megfelelő α, β szeparációkhoz tartozó valamennyi /nyitott és zárt/ csatornára vonatkozik.

Tisztázandó az ugyanazon $\psi(\mathcal{E}E)$ szórásállapothoz tartozó szóráselméleti és csatornaelméleti fogalmak, azaz a

$$\Phi_{initial}\,(\psi) \qquad \text{és} \qquad \Phi_{inc}\,(\psi) \tag{/6/}$$

továbbá a

$$\Phi_{final}\,(\psi) - \Phi_{initial}\,(\psi) \qquad \text{és} \qquad \Phi_{scat}\,(\psi) \tag{/7/}$$

közti megfelelés. E kapcsolatok vizsgálata meglehetős bonyolultnak igérkezik és most nem is foglalkozunk velük: egyszerübb alapot nyujt a két struktura összehasonlitására a szórási amplitudó fogalma.

3/ A szórási mátrixok rugalmas szórás esetén

Összehasonlitjuk a csatornaelméletek $U_\ell(k)$ ütközési mátrixát a szóráselmélet $T_\ell(k)$ tranzitmátrixával. Az ütközési mátrixelemet az $u_\ell^o(r,k)$ a szórási állapotnak az $r=\varrho$ csatornabejáraton tanusitott viselkedés alapján igy kapjuk meg:

$$U_\ell(k) = \frac{W_{r=\varrho}\{u_\ell^o(r,k);\, w_\ell^o(r,k)\}}{W_{r=\varrho}\{u_\ell^o(r,k);\, w_\ell^*(r,k)\}} + 1 \tag{/8/}$$

Az itt szereplő hullámfüggvényeket az

$$u_\ell'' + \left[k^2 - \frac{2m}{r^2}V(r) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right]u_\ell(r,k) = 0\ , \tag{/9/}$$

$$w_\ell'' + \left[k^2 - \qquad \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right]w_\ell(r,k) = 0 \tag{/10/}$$

differenciálegyenletek és az

$$u_\ell^o(r=0,k) = 0\ , \tag{/11/}$$

$$w_\ell(r\to\infty,k) \sim \sin\left(kr + \ell\frac{\pi}{2}\right)\ , \tag{/12/}$$

$$w_\ell^{+}(r\to\infty,k) \sim e^{i(kr+\ell\frac{\pi}{2})} \qquad /13/$$

határfeltételek az $u_\ell^{\circ}(r,k)$ -nek itt közömbös normája és fázisa kivételével egyértelmüen meghatározzák.

Szóráselméleti tranzitmátrixelemként a

$$T_\ell(k) \equiv \int w_\ell^{\circ}(rk)\ \overset{+}{T}(k)\ w_\ell^{\circ}(r,k)\,dr \qquad /14/$$

kifejezést vezetjük be; mint látható lesz, ez a definició áll legközelebb az $U_\ell(k)$ fogalmához. A sikhullámok Rayleigh-sorfejtéséből a /14/ definició mellett azonnal következik, hogy

$$\langle e^{i\underline{k}_b\underline{r}}|\ \overset{+}{T}(k)|\ e^{i\underline{k}_a\underline{r}}\rangle = \sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\ T_\ell(k)\ P_\ell(\cos(k_b\hat{\ }k_a)). \qquad /15/$$

Másrészt, a tranzitoperátor sikhullámok közötti mátrixelemének ismert kapcsolata a potenciállal és a szórási állapottal:

$$\langle e^{i\underline{k}_b\underline{r}}|\ \overset{+}{T}(k)|\ e^{i\underline{k}_a\underline{r}}\rangle = \langle e^{i\underline{k}_b r}|\ V(r)\ \psi_{\underline{ka}}^{+}(\underline{r}\,E)\rangle, \qquad /16/$$

ahol a szórásállapot normálását az aszimptotikának a

$$\psi_{ka}^{+}(\underline{r},E)\underset{r\to\infty}{\sim} e^{i\underline{k}_a\underline{r}} + \text{tisztán kifutó gömbhullám} \qquad /17/$$

előirása szabja meg.

A /14/ definiálta tranzitmátrixelemnek a potenciállal való kapcsolatát /15/, /16/ és /17/ alapján

$$T_\ell(k) = \int_0^{\varrho} w_\ell^{\circ}(r,k)\ V(r)\ u_\ell^{\circ}(r,k)\ dr \qquad /18/$$

alakban adhatjuk meg, ahol az u_ℓ° parciális szórásállapotot a

$$\psi_{\underline{k}_a}^{+}(r,E) \equiv 4\pi \sum_{\ell,m} i^{\ell}\ \frac{1}{r}\ u_\ell^{\circ}(r,k)\ Y_m^{\ell}(\hat{r})\ Y_m^{*\ell}(\hat{k}) \qquad /19/$$

azonosság fázis és normálás tekintetében is már egyértelmüen definiálja. A parciális szórásállapot viselkedése a csatornatartományban /17/ és /19/ következtében:

$$u_\ell^0(r,k) = w_\ell^0(r,k) + \text{konst}\cdot w_\ell^+(r,k)\,, \quad r > \rho \,. \qquad /20/$$

Az igy leszármaztatott aszimptotika a későbbiekben döntő szerephez jut.

A tranzitmátrix /18/ alakjából kiindulva /9/ figyelembevételével parciális integrálással a

$$T_\ell(k) = \left[w_\ell^0 u_\ell^{0(1)} \right]_{r=0}^{\rho} - \int_0^\rho \left[w_\ell^{0(1)} + \left(k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) w_\ell^0 u_\ell^0 \right] dr \qquad /21/$$

relációt kapjuk. Ujabb parciális integrálással a

$$T_\ell(k) = \left[w_\ell^0 u_\ell^{0(1)} - w_\ell^{0(1)} u_\ell^0 \right]_0^\rho + \int_0^\rho u_\ell^0 \left[w_\ell^{0(11)} + \left(k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) w_\ell^0 \right] dr \qquad /22/$$

egyenletre jutunk. A /10/ differenciálegyenlet felhasználásával és a Wronski-determináns bevezetésével a

$$T_\ell(k) = W_{r=\rho} \left\{ w_\ell^0(r,k)\,;\; u_\ell^0(r,k) \right\} \qquad /23/$$

formulához jutunk. Másrészt a /20/ aszimptotika segitségével

$$W_{r=\rho} \left\{ u_\ell^0\,;\; w_\ell^+ \right\} = W_{r=\rho} \left\{ w_\ell^0\,;\; w_\ell^+ \right\} \qquad /24/$$

adódik; a determináns /12/ és /13/ alapján kiszámitható:

$$W_{r=\rho} \left\{ u_\ell^0(r,k)\,;\; w_\ell^+(r,k) \right\} = -k \qquad /25/$$

A /23/ és /25/ formulák egyesitésével kapjuk:

$$T_\ell(k) = -k \, \frac{W_{r=\rho} \left\{ w_\ell^0(r,k)\,;\; u_\ell^0(r,k) \right\}}{W_{r=\rho} \left\{ w_\ell^+(r,k)\,;\; u_\ell^0(r,k) \right\}} \,. \qquad /26/$$

A most már hasonló alaku tranzit- és ütközési mátrixelemek kapcsolata /8/ és /26/ szerint

$$T_\ell(k) = k\left[1 - U_\ell(k) \right] . \qquad /27/$$

Ezzel megkaptuk a szóráselméleti és csatornaelméleti szórási mátrixfogalmak kapcsolatát; a két fogalom, a problémától és a parciális hullám rendjétől független k tényezőtől eltekintve, azonos.

4/ A szórási mátrixok soktestproblémájában

A csatornaelméletek ütközési mátrixeleme a ψ_a^+ reakcióállapotnak az $r_\alpha = \rho_\alpha, r_\beta = \rho_\beta$ csatornabejáratok környezetében mutatott viselkedéséből ugy számitható ki:

$$U_a^b(E) - \delta_{ba} = \frac{k_a}{k_b} \frac{w_{\rho\beta} \left\{ \left\langle Y_{\lambda_b}^{l_b} \chi_{\sigma_b}^{Bs_b} \middle| r_\beta \psi_a^+ \right\rangle^{\hat{r}_\beta \xi_\beta} ; w_{l_b}^{o} \right\}}{w_{\rho\alpha} \left\{ \left\langle Y_{\lambda_a}^{l_a} \chi_{\sigma_a}^{As_a} \middle| r_\alpha \psi_a^+ \right\rangle^{\hat{r}_\alpha \xi_\alpha} ; w_{l_a}^{+} \right\}} \qquad /28/$$

Itt $|a\rangle \equiv |l_a s_a I_a \sigma_a A\rangle$ a kezdőállapot; $|b\rangle \equiv |l_b \lambda_b s_b \sigma_b B\rangle$;

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu_\alpha} \Delta_\alpha + H_\alpha(\xi_\alpha) + V_\alpha(\underline{r}_\alpha, \xi_\alpha) \qquad /29/$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2\mu_\beta} \Delta_\beta + H_\beta(\xi_\beta) + V_\beta(\underline{r}_\beta \xi_\beta) , \qquad /30/$$

ahol H_α, H_β a két szeparáció részrendszereinek belső Hamilton-operátora; végül a teljes rendszer Schrödinger-egyenlete

$$H \psi_a^+(\underline{r}, E) = E \psi_a^+(\underline{r}, E) ; \qquad /31/$$

a szeparált rendszerek belső mozgásáé:

$$H_\alpha \chi_{\sigma_a}^{As_a}(\xi_\alpha) = \mathcal{E}_A \chi_{\sigma_a}^{As_a}(\xi_\alpha) ; \qquad \left\langle \chi_{\sigma_a}^{As_a} \middle| \chi_{\sigma_a}^{As_a} \right\rangle = 1 ; \qquad /32/$$

$$H_\beta \chi_{\sigma_b}^{Bs_b}(\xi_\beta) = \mathcal{E}_B \chi_{\sigma_b}^{Bs_b}(\xi_\beta) ; \qquad \left\langle \chi_{\sigma_b}^{Bs_b} \middle| \chi_{\sigma_b}^{Bs_b} \right\rangle = 1 ; \qquad /33/$$

$s_a, \sigma_a, s_b, \sigma_b$: csatornaspinek.
A szóráselmélet bevezette tranzitoperátor előállitása:

$$\left\langle e^{i\underline{k}_b \underline{r}_\beta} \chi_{\sigma_b}^{Bs_b}(\xi_\beta) \middle| T_{\beta\alpha}^{+}(E) \middle| e^{i\underline{k}_a \underline{r}_\alpha} \chi_{\sigma_a}^{As_a}(\xi_\alpha) \right\rangle =$$

$$= \left\langle e^{i\underline{k}_b \underline{r}_\beta} \chi_{\sigma_b}^{Bs_b}(\xi_\beta) \middle| V_\beta(\underline{r}) \psi_{\underline{k}_a A s_a \sigma_a}^{+}(\underline{r}) \right\rangle , \qquad /34/$$

ahol ψ_a^{+} normálása

$$\psi^{+}_{ka\,Asa\,\sigma_a}\ \underset{r_b > \rho_\beta}{\approx}\ e^{ik_a r_a}\,\chi^{Asa}_{\sigma_a} + \sum_{\beta}\sum_{b(\beta)} konst\ \frac{1}{r_\beta}\, w^{+}_{\ell_b}\,\chi^{Bs_b}_{\sigma_b}\,Y^{\ell_b}_{\lambda_b}\ . \qquad /35/$$

Az integrálás természetesen az egész konfigurációs térre kiterjed. A továbbiakban feltételezzük, hogy az elemi kétnukleon-kölcsönhatás véges hatótávolságu:

$$V(i,k) \equiv V(\underline{r}_i, \underline{r}_k, \underline{\sigma}^i, \underline{\sigma}^k) \equiv 0 \qquad /36/$$

valahányszor

$$/\underline{r}_i - \underline{r}_k / > R\ .$$

Ilyen feltétel mellett bevezethető a konfigurációs térnek belső és külső tartományra való felosztása alkalmas $\rho_\gamma(R,N,Z)$ csatornasugarak segitségével az

$$r_\gamma[\underline{r}] < \rho_\gamma(R,N,Z) \qquad \text{ill.} \qquad r_\gamma[\underline{r}] > \rho_\gamma(R,N,Z) \qquad /37)$$

feltételnek minden γ szeparációra való előirásával. A külső tartomány tovább bontható a két kompakt részrendszerre való szeparálódás

$$/\underline{r}_i - \underline{r}_{\beta_1}/ << R \qquad \text{minden} \qquad i \in \beta_1\ , \qquad /38)$$

$$/\underline{r}_j - \underline{r}_{\beta_2}/ << R \qquad \text{minden} \qquad j \in \beta_2\ . \qquad /39/$$

szimultán feltételével definiált csatornatartományokra és a csatorna közti térre /itt r_{β_1} és r_{β_2} a részrendszerek tömegközéppontjainak helyzetvektorai/. A csatornatartományban jó közelitéssel teljesül a $V_\gamma(r_\gamma, \rho_\gamma) \approx 0$ feltétel, és igy /34/-hez a csatornák alig adnak járulékot. A csatornaközti térben azonban egyik szeparáció kölcsönhatási oparátora sem tünik el. Ez azt jelenti, hogy az elemi kölcsönhatás véges hatótávolsága ellenére a tranzitmátrixelem /34/ kifejezésében az integrálás a teljes konfigurációs térre vonatkozik: nem korlátozható a belső tartományra.

További közelitést teszünk a két elmélet összehasonlitása érdekében. Feltesszük, hogy a szórt hullám a csatornákban tisztán kifutó jellegü, bár ez a szokásos feltevés a formális szóráselmélet segitségével bebizonyithatóan csak közelitőleg igaz. E feltevés mellett a szórásállapot /35/ normálási feltétele az $r_\beta > \rho_\beta$ -ra előirt

$$\overset{+}{\psi}_{\underline{k}_a A s_a \sigma_a}(r_\beta, \hat{r}_\beta\, \xi_\beta) =$$

$$e^{i\underline{k}_a \underline{r}_a} \chi_{\sigma_a}^{A s_a \sigma_a} + \sum_\beta \sum_{b(\beta)} \text{konst.}\, \frac{1}{r_\beta}\, \overset{+}{w}_{\ell_b}\, Y_{\lambda_b}^{\ell_b}\, \chi_{\sigma_b}^{B s_b} \qquad /40/$$

aszimptotikával egyenértékű. Ezt a relációt később explicite felhasználjuk.

Ha a tranzitmátrixelemet a

$$T_{\ell_a s_a A \lambda_a \sigma_a}^{\ell_b s_b B \lambda_b \sigma_b}(E) \equiv \left\langle \frac{1}{r_\beta} w_{\ell_b} Y_{\lambda_b}^{\ell_b} \chi_{\sigma_b}^{B s_b} \right| T_{\beta\alpha}(E) \left| \frac{1}{r_\alpha} Y_{\lambda_a}^{\ell_a} \chi_{\sigma_a}^{A s_a} \right\rangle \qquad /41/$$

módon definiáljuk, akkor a rugalmas szórás esetében vázolt eljárással /34/ és /40/ alapján kimutatható, hogy a mátrixelem pontos alakja, a normálások és a fázisok konkrétizálásával

$$T_{\ell_a \lambda_a s_a \sigma_a}^{\ell_b \lambda_b s_b \sigma_b}(E) = \left\langle \frac{1}{r_\beta} w_{\ell_b}^{o} Y_{\lambda_b}^{\ell_b} \chi_{\sigma_b}^{B s_b} \right| V_\beta\, \overset{+}{\psi}_{\ell_a \lambda_a s_a \sigma_a A} \right\rangle \qquad /42/$$

ahol

$$\overset{+}{\psi}_{\ell_a \lambda_a s_a \sigma_a A} \underset{r_\beta > \varrho_\beta}{=} \frac{1}{r_\alpha} w_{\ell_a}^{o} Y_{\lambda_a}^{\ell_a} \chi_{\sigma_a}^{A s_a} + \sum_\beta \sum_{b(\beta)} \text{konst}\, \frac{1}{r_\beta} \overset{+}{w}_{\ell_b} Y_{\lambda_b}^{\ell_b} \chi_{\sigma_b}^{B s_b} \qquad /43/$$

A mátrixelem /42/ alakjából kiindulva, /30/ és /33/ felhasználásával, kapjuk

$$T_{\ell_a \lambda_a s_a \sigma_a A}^{\ell_b \lambda_b s_b \sigma_b B}(E) = \int \frac{1}{r_\beta} w_{\ell_b}^{o} \overset{*}{Y}_{\lambda_b}^{\ell_b} \chi_{\sigma_b}^{B s_b} \left[E - H_\beta + \frac{\hbar^2}{2\mu_\beta}\Delta_\beta\right] \overset{+}{\psi}_{\ell_a \lambda_a s_a \sigma_a A}\, d\tau . \qquad /44/$$

A H_β hermitikus lévén, az $E-H_\beta$ operátor az egész konfigurációs térre vonatkozó integrálban az első tényezőre hárítható át és igy /30/-at figyelembe véve

$$T_a^b(E) = -\frac{\hbar^2}{2\mu_\beta} \int \left[\overset{+}{\psi}_a \cdot \Delta_\beta \left(\frac{1}{r_\beta} w_{\ell_b}^{o} Y_{\lambda_b}^{\ell_b} \right) - \frac{1}{r_\beta} w_{\ell_b}^{o} Y_{\lambda_b}^{\ell_b}\, \Delta_\beta \left(\overset{+}{\psi}_a \right) \right] \chi_{\sigma_b}^{B s_b}\, d\tau \qquad /45/$$

A $\phi_\lambda^\ell \equiv \frac{1}{r} w_\ell^{o} Y_\lambda^\ell\, \chi(\xi)$ jelölés bevezetésével a tranzitmátrixelemnek

$$T_a^b(E) = \frac{\hbar^2}{2\mu_\beta} \int \left[\overset{+}{\psi}_a \cdot \Delta_\beta\, \phi_{\lambda_b}^{\ell_b} - \phi_{\lambda_b}^{\ell_b}\, \Delta_\beta\, \overset{+}{\psi}_a \right] d\tau \qquad /46/$$

szimmetrikus kifejezését kapjuk. Most válasszuk szét a konfigurációs teret az $r_\beta < \varrho_\beta$ "belső" és az $r_\beta > \varrho_\beta$ "külső" tartományra; a belső térre vonatkozóan alkalmazzuk Green tételét:

$$T_a^b(E) = -\frac{\hbar^2}{2\mu_\beta}\Big\{\iiint\Big[\psi_a^{+}\frac{\partial\phi_{\lambda_b}^{\ell_b}}{\partial r_\beta}-\phi_{\lambda_b}^{\ell_b}\frac{\partial\psi_a^{+}}{\partial r_\beta}\Big]\varrho_\beta^2\,dr_\beta\,d\xi_\beta - \qquad /47/$$

$$-\int_{\text{külső}}\Big[\psi_a^{+}\Delta_\beta\,\phi_{\lambda_b}^{\ell_b}-\phi_{\lambda_b}^{\ell_b}\Delta_\beta\,\psi_a^{+}\Big]d\tau\Big\}$$

A differenciálás és integrálás sorrendjének felcserélése majd némi átcsoportositás után Wronski-determináns alakjában kapjuk meg a tranzitmátrixelemet:

$$T_a^b(E) = -\frac{\hbar^2}{2\mu_\beta}W_{r_\beta=\varrho_\beta}\Big\{r_\beta\Big\langle\psi_a^{+}\Big|y_{\lambda_b}^{\ell_b}\,x_{\sigma_b}^{B\lambda_b}\Big\rangle^{\hat{r}_\beta\xi_\beta};\,w_{\ell_b}^{+}\Big\} - \qquad /48/$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu_\beta}\int_{\text{külső}}\Big[\psi_a^{+}\Delta_\beta\,\phi_{\lambda_b}^{\ell_b}-\phi_{\lambda_b}^{\ell_b}\Delta_\beta\,\psi_a^{+}\Big]d\tau\,.$$

A /28/ csatornaelméleti formula és a /48/ szóráselméleti előállitás összehasonlitása céljából kiszámithatjuk a /28/-ban a nevezőben álló Wronski-determinánst a /43/ normálásnak a $\beta=\alpha$, $b=a$ esetre való alkalmazásával:

$$W_{\varrho_\alpha}\Big\{\Big\langle y_{\lambda_a}^{\ell_a}\,x_{\sigma_a}^{As_a}\Big|r_\alpha\,\psi_a^{+}\Big\rangle^{\hat{r}_\alpha\xi_\alpha};\,w_{\ell_a}^{+}\Big\} = \qquad /49/$$

$$= W_{\varrho_\alpha}\Big\{w_{\ell_a}^{0};\,w_{\ell_a}^{+}\Big\} = -k_a\,, \qquad /50/$$

ahol figyelembe vettük az itt is érvényben lévő /12/, /13/ normálásokat.

Végeredményünket a /48/ és /50/ alapján a

$$T_a^b(E) = \frac{\hbar^2}{2\mu_\beta}\left[\frac{W_{\varrho_\beta}\Big\{\Big\langle y_{\lambda_b}^{\ell_b}\,x_{\sigma_b}^{Bs_b}\Big|r_\beta\,\psi_a^{+}\Big\rangle^{\hat{r}_\beta\xi_\beta};\,w_{\ell_b}^{0}\Big\}}{W_{\varrho_\alpha}\Big\{\Big\langle y_{\lambda_a}^{\ell_a}\,x_{\sigma_a}^{A\beta a}\Big|r_\alpha\,\psi_a^{+}\Big\rangle^{\hat{r}_\alpha\xi_\alpha};\,w_{\ell_a}^{+}\Big\}} - \right. \qquad /51/$$

$$\left.-\iiint_{\varrho_\beta}^{\infty}\Big[\psi_a^{+}\Delta_\beta\,\phi_{\lambda_b}^{\ell_b}-\phi_{\lambda_b}^{\ell_b}\Delta_\beta\,\psi_a^{+}\Big]r_\beta^2\,dr_\beta\,d\Omega_\beta\,d\xi_\beta\right]$$

alakban kapjuk meg.

A szóráselméleti tranzitmátrixelem és a csatornaelméleti ütközési mátrixelem kapcsolata /29/ és /51/ alapján

$$T^{l_b \lambda_b s_b \sigma_b B}_{l_a \lambda_a s_a \sigma_a A}(E) = k_b \left[\delta_{ba} - U^{l_b \lambda_b s_b \sigma_b B}_{l_a \lambda_a s_a \sigma_a A}(E) \right] -$$

$$- \int_{\varrho_\beta}^{\infty} \iint \left[\psi_a^{+} \Delta_\beta \phi^{l_b}_{\lambda_b} - \phi^{l_b}_{\lambda_b} \Delta_\beta \psi_a^{+} \right] r_\beta^2 \, dr_\beta \, d\Omega_\beta \, d\xi_\beta \cdot \qquad /52/$$

Az /52/ formulában szereplő integrál, a két elmélet korrespondáló mátrixelemének különbsége részletesen kiirva:

$$\Delta T_a^b(E) =$$

$$\int_{\varrho_\beta}^{\infty} \iint \frac{1}{r_\beta} \, Y^{l_b}_{\lambda_b} \, \chi^{B s_b}_{\sigma_b} \left[w^{o}_{l_b} \left(\Delta_\beta + \frac{l(l+1)}{r_\beta^2} \right) - w^{o(II)}_{l_b} \right] \psi_a^{+} r_\beta^2 \, dr_\beta \, d\Omega_\beta \, d\xi_\beta \cdot \qquad /53/$$

A két elmélet adta szórási-mátrixelem eltérése pontosan megegyezik a külső tér járulékával a szóráselméleti mátrixelem /42/ reprezentációja értelmében:

$$\Delta T_a^b(E) = \int_{külső} \frac{1}{r_\beta} \, w^{o}_{l_b} \, Y^{l_b}_{\lambda_b} \, \chi^{B s_b}_{\sigma_b} \, V_\beta \, \psi_a^{+} \, d\tau \cdot \qquad /54/$$

<u>Diszkusszió</u>

Jelen tárgyalásunkat arra korlátoztuk, hogy analitikus átalakitással összehasonlitható alakra transzformáljuk a szóráselmélet és a csatornaelmélet eredetileg teljesen más fogalomkörökben definiált szórási mátrixelemeit. Vizsgálatunk szerint, véges hatótávolságu két-nukleonkölcsönhatás mellett kétnukleon-rendszerben, azaz rugalmas szórás esetében, a két elmélet bevezette fogalmak pontosan megegyeznek. Többtestprobléma esetén még véges hatótávolságu elemi kölcsönhatás esetén sincs egyezés a tranzitmátrix és az ütközési mátrix között. Az eltérés csak akkor lenne zérus, ha a $V_\beta(\underline{r})$ kölcsönhatás a β-szeparáció szerinti külső tartományban azonosan eltünnék. Ez azonban a véges hatótávolságu kétnukleon-kölcsönhatás mellett sem történik meg: a két részecskerendszer tömegközéppontjai a külső tartománynak megfelelő konfigurációkban a kétnukleon-kölcsönhatás hatótávolságán kivül esnek ugyan, de a két részecskerendszer egy-egy nukleonja ettől még véges valószinüséggel hatótávolságon belül lehet egymástól. Ez az un. polarizációs effektus. A polarizációs erők járuléka, vizsgálatunk szerint pontosan megegyezik a tranzitmátrixelem szokásos szóráselméleti előállításának a külső tartományra vonatkozó részével.

A polarizációs erők miatt a csatornaelméletek alapfeltevése, a konfigurációs térnek belső és kölcsönhatásmentes külső tartományra való felosztása nem vihető végig a szokásos módon. Fizikai térre átfogalmazva a dolgot: a mag határa nem éles és ez az oka annak is, hogy optikai modelekben diffuz potenciállal kell reprezentálni az effektiv kölcsönhatást a két részrendszer közt. A diffuzitás is, a $\Delta T_a^b(E)$ különbség is, a polarizációs erők megnyilvánulása és ezért e két fogalom egymással is kapcsolatos. A polarizációs járulék jelentősége attól függ, mekkora az ψ_a^+ szórásállapot-amplitudó a csatornaközti térben. A tartózkodási valószinüségsürüség energiafüggő és a többfelé szeparálódás küszöbein a csatornaközti térben hirtelen megnő.

Érkezett: 1966. máj. 25.
KFKI Közl. 14.évf. 5. szám, 1966.

BESSEL-FÜGGVÉNYEK CSEBISEV-SORFEJTÉSE II.
$I_\nu(x)$ ÉS $K_\nu(x)$

Irta: Németh Géza

Összefoglalás

A dolgozatban az $I_\nu(x)$ és $K_\nu(x)$ Bessel-függvények alkalmas Csebisev-sorfejtéseinek a meghatározásával foglalkozunk. Ezek a sorfejtések praktikus számitásoknál célszerüek gyors konvergenciájuk miatt. A $0<x\leq a$ esetben a Csebisev-sorok konvergenciája kb. 4^{-n}-nel gyorsabb, mint a megfelelő Taylor-soré. Az $x\geq a$ esetre vonatkozó Csebisev-sorok konvergensek /ellentétben a szokásos divergens aszimptotikus kifejezésekkel/. A sorfejtések együtthatóinak a meghatározásához rekurziós képleteket vezetünk le. A függelékben $J_k(x)$ -re és $I_k(x)$ -re a Csebisev-sorfejtési együtthatókat zárt /Bessel függvényt tartalmazó/ formában adjuk meg.

Bevezetés

Előző [7] munkánkban a valós argumentumu Bessel-függvények Csebisev-sorfejtésével foglalkoztunk. Jelenleg hasonló számitásokat végzünk a képzetes argumentumu Bessel-függvényekre vonatkozóan. Röviden idézzük [1] -ből e függvények számunkra szükséges definicióit:

$$I_\nu(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x/2)^{2n+\nu}}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)},$$

$$K_\nu(x)=\frac{\pi}{2}\,\frac{I_{-\nu}(x)-I_\nu(x)}{\sin\nu\pi},\qquad \nu\neq 0,\pm 1,\pm 2,\ldots \quad /1/$$

A következőkben először az $I_\nu(x)$ függvény $0\leq x<a$ intervallumra vonatkozó Csebisev-sorfejtését vizsgáljuk meg. Látni fogjuk, hogy ez a sor kb. 4^{-n}-nel gyorsabban konvergál az /1/ sorhoz képest. A sorfejtés együtthatóira rekurziós képletet vezetünk le.

A további részben az $I_\nu(x)$ függvény $a \leq x < \infty$ intervallumra vonatkozó Csebisev-sorfejtésével foglalkozunk. Be fogjuk bizonyitani, hogy ez a sorfejtés, ellentétben az ismert divergens aszimptotikus sorral, konvergens. Továbbá meghatározzuk az együtthatók rekurziós képletét. A dolgozat hatodik részében összefoglaljuk a $K_\nu(x)$ függvény $a \leq x < \infty$ intervallumra vonatkozó Csebisev-sorfejtésével kapcsolatos eredményeket. Végezetül a Függelékben a $J_k(x)$ és $I_k(x)$ /k egész/ függvények Csebisev-sorfejtésének együtthatóit zárt /Bessel függvényeket tartalmazó/ alakban adjuk meg.

4/ Az $I_\nu(x)$ függvény Csebisev-sorfejtése $0 < x \leq a$ esetére

Célszerüen $I_\nu(x)$ helyett $x^{-\nu} I_\nu(x)$ fogjuk sorbafejteni. Legyen

$$I_\nu(x) = \frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \left\{ d_0^{(\nu)}(a) + 2\sum_{n=1}^{\infty} d_n^{(\nu)}(a)\, T_{2n}(x/a) \right\} . \qquad /4.1/$$

A $d_n^{(\nu)}(a)$ együtthatókat integrállal fejezhetjük ki a következő integrálelőállitás segitségével:

$$I_\nu(x) = 2\frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \operatorname{ch} xt \, dt \ , \quad \nu > -\frac{1}{2} . \qquad /4.2/$$

Ha ugyanis $\operatorname{ch} xt$ helyére beirjuk Csebisev-sorát, és megcseréljük az integrálás és az összegezés sorrendjét, $d_n^{(\nu)}(a)$ az alábbi lesz:

$$d_n^{(\nu)}(a) = 2\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} I_{2n}(at)\,dt . \qquad /4.3/$$

Felhasználva /1/-t könnyen megkapjuk $d_n^{(\nu)}$ aszimptotikus formuláját:

$$d_n^{(\nu)}(a) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{a}{4}\right)^{2n} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\} , \quad n \to \infty \qquad /4.4/$$

A $d_n^{(\nu)}(a)$ számok rekurziós képletét hasonló módszerrel lehet nyerni, mint amit $J_\nu(x)$ esetében alkalmaztunk [7] . A $8(n+1)d_{n+1}^{(\nu)}(a)$ kifejezést parciálisan integráljuk:

$$8(n+1)d_{n+1}^{(\nu)} = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\, 2a\int_0^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\, t\left[I_{2n+1}(at) - I_{2n+3}(at)\right]dt =$$

$$= 2\,\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\,\frac{2a^2}{2\nu+1}\int_0^1 (1-t^2)^{\nu+\frac{1}{2}}\left[I'_{2n+1}(at) - I'_{2n+3}(at)\right]dt =$$

$$= -\frac{2a^2}{2\nu+1}\left\{\frac{1}{2}\left(d_n^{(\nu)} - d_{n+2}^{(\nu)}\right) - 2\,\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\, t^2\left[I'_{2n+1}(at) - I'_{2n+3}(at)\right]dt\right..$$

Néhány összevonás és $n+1-\ell$ -lel való osztás után kapjuk

$$16\nu\, d_{n+1}^{(\nu)} = \frac{a^2}{n+1}\left(d_n^{(\nu)} - d_{n+2}^{(\nu)}\right) - 2\,\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\, 4a\int_0^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\left[I_{2n+1}(at) + I_{2n+3}(at)\right]dt.$$

Most vonjuk ki egymásból a $d_{n+1}^{(\nu)}$ és $d_{n+2}^{(\nu)}$ képleteit:

$$16\nu\left[d_{n+1}^{(\nu)} - d_{n+2}^{(\nu)}\right] = \frac{a^2}{n+1}\left(d_n^{(\nu)} - d_{n+2}^{(\nu)}\right) - \frac{a^2}{n+2}\left(d_{n+1}^{(\nu)} - d_{n+3}^{(\nu)}\right) - 16(n+1)d_{n+1}^{(\nu)} - 16(n+2)d_{n+2}^{(\nu)},$$

innen rendezés után kapjuk $d_n^{(\nu)}$ rekurziós képletét:

$$\frac{d_n^{(\nu)} - d_{n+2}^{(\nu)}}{n+1} - \frac{d_{n+2}^{(\nu)} - d_{n+3}^{(\nu)}}{n+2} = \frac{16}{a^2}\left[(n+1+\nu)d_{n+1}^{(\nu)} + (n+2-\nu)d_{n+2}^{(\nu)}\right]. \qquad /4.5/$$

A /4.5/ képlet levezetésénél fel volt tételezve, hogy $\nu > -1/2$. Nyilvánvaló azonban, hogy a képlet érvényessége analitikus folytatással kiterjeszthető minden olyan esetre, amikor $\nu \neq -1, -2, \ldots$ /Megjegyezzük, hogy ez utóbbi esetben az

$$I_{-n}(x) = I_n(x)$$

formula érvényes, v.ö.: [1] ./

5/ Az $I_\nu(x)$ függvény Csebisev-sorfejtése $a \leq x < \infty$ esetén

Az $I_\nu(x)$ függvényt nagy x érték esetén az aszimptotikus kifejezésével szokás számolni:

$$I_\nu(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(\nu+k+1/2)}{k!\,\Gamma(\nu-k+\frac{1}{2})} \frac{1}{(2x)^k} \right\}, \qquad x \to \infty \,.$$

Ez a sor nyilvánvalóan divergens. Mi most egy hasonló alaku Csebisev-sorfejtést vizsgálunk. Legyen $G \equiv a/x$ és

$$I_\nu(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left\{ A_0^{(\nu)}(a) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n A_n^{(\nu)}(a)\, T_n^*(G) \right\} \qquad /5.1/$$

Vizsgáljuk meg $I_\nu(x)$ következő előállitását [1] :

$$I_\nu(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \cdot b \int_0^\infty J_{2\nu}(b\zeta)\, e^{-\sigma\zeta^2} d\zeta\,, \qquad b = 2\sqrt{2a}\,, \qquad \nu > -\frac{1}{2}$$

Behelyettesitve ide az exponenciális függvény Csebisev-sorát, kapjuk:

$$A_n^{(\nu)}(a) = b \int_0^\infty J_{2\nu}(b\zeta)\, e^{-\frac{\zeta^2}{2}}\, I_n\!\left(\frac{\zeta^2}{2}\right) d\zeta \,. \qquad /5.2/$$

Az $A_n^{(\nu)}(a)$ együtthatókat, mint az /egyelőre nem rögzitett/ "a" paraméter függvényét határozzuk meg. Használni fogjuk az alábbi Laplace-transzformáltat:

$$h_n(s) = \int_0^\infty a^{\nu-\frac{1}{2}} e^{-as} A_n^{(\nu)}(a)\, da \,.$$

Beirva $A_n^{(\nu)}(a)$ /5.2/ kifejezését ebbe az integrálba a

$$b \int_0^\infty J_{2\nu}(b\zeta)\, a^{\nu-\frac{1}{2}} e^{-as} da = 2^{\nu+\frac{3}{2}} \frac{\zeta^{2\nu}}{s^{2\nu+1}} e^{-\frac{2\zeta^2}{s}}$$

képlet segitségével $h_n(s)$ egyszerübb alakra hozható:

$$h_n(s)=\frac{2^{\nu+\frac{3}{2}}}{s^{2\nu+1}}\int_0^\infty z^{2\nu}e^{-(\frac{4}{s}+1)\frac{z^2}{2}}I_n\left(\frac{z^2}{2}\right)dz$$

Az $z^2=su$ helyettesités után ez az alábbi lesz:

$$h_n(s)=\frac{2^{\nu+1/2}}{s^{\nu+1/2}}\int_0^\infty u^{\nu-1/2}e^{-2u}\quad e^{-s\frac{u}{2}}I_n\left(s\frac{u}{2}\right)du$$

Felhasználva az

$$e^{-1/2us}I_n\left(\frac{1}{2}us\right)=\frac{(us)^n}{4^n n!}\,{}_1F_1\left(n+\frac{1}{2};2n+1;-us\right)$$

azonosságot, tagonként integrálhatunk. Összevonás után $h_n(S)$ hipergeometriai függvénnyel lesz kifejezve:

$$h_n(S)=\frac{\Gamma(n+\nu+1/2)}{8^n n!}S^{n-\nu-1/2}\,{}_2F_1\left(n+\frac{1}{2},n+\nu+\frac{1}{2};2n+1;-\frac{1}{2}S\right). \qquad /5.3/$$

A $h_n(S)$ függvényt felhasználjuk $A_n^{(\nu)}$ explicit előállitására. Az /5.3/ képletre alkalmazzuk a reciprok átalakitást.

$$h_n(s)=\frac{\Gamma(n+\nu+\frac{1}{2})}{8^n n!}s^{n-\nu-\frac{1}{2}}\left\{\frac{\Gamma(2n+1)\Gamma(\nu)}{\Gamma(n+\nu+\frac{1}{2})\Gamma(n+\frac{1}{2})}\left(\frac{2}{s}\right)^{n+\frac{1}{2}}{}_2F_1\left(n+\frac{1}{2},-n+\frac{1}{2};1-\nu;-\frac{2}{s}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\Gamma(2n+1)\Gamma(-\nu)}{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(n-\nu+\frac{1}{2})}\left(\frac{2}{s}\right)^{n+\nu+\frac{1}{2}}{}_2F_1\left(n+\nu+\frac{1}{2},-n+\nu+\frac{1}{2};1+\nu;-\frac{2}{s}\right)\right\}$$

Néhány elemi átalakitás után $h_n(S)$ egyszerüsödik:

$$h_n(s)=\frac{\Gamma(\nu)\;2^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})\;s^{\nu+1}}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2}+n,\frac{1}{2}-n;1-\nu;-\frac{2}{s}\right)+$$

$$+\frac{\Gamma(-\nu)\;\Gamma(n+\nu+1/2)}{\Gamma(1/2)\;\Gamma(n-\nu-1/2)}\frac{2^{\nu+\frac{1}{2}}}{s^{2\nu+1}}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2}+\nu+n,\frac{1}{2}+\nu-n;1+\nu;-\frac{2}{s}\right)$$

Ezekben a sorokban tagonként elvégezhetjük a visszatranszformálást. Majd $a^{\nu-\frac{1}{2}}$ -el osztva, $A_n^{(\nu)}(a)$ explicit kifejezését kapjuk:

$$A_n^{(\nu)}(a)=\frac{(2a)^{\frac{1}{2}}}{\nu\Gamma(\frac{1}{2})}\,{}_2F_2\left(\frac{1}{2}+n,\frac{1}{2}-n,1-\nu,1+\nu;-2a\right)+\frac{(2a)^{\nu+\frac{1}{2}}\Gamma(-\nu)\Gamma(n+\nu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(1+2\nu)\Gamma(n-\nu+\frac{1}{2})}$$

$${}_2F_2\left(\frac{1}{2}+\nu+n,\frac{1}{2}+\nu-n;1+\nu,1+2\nu,-2a\right). \qquad /5.4/$$

A $h_n(S)$ /5.3/ képlete segitségével $A_n^{(\nu)}(a)$ Mellin-integrállal is megadható:

$$A_n^{(\nu)}(a)=\frac{a^{-\nu+\frac{1}{2}}}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}h_n(s)e^{as}\,ds\,. \qquad /5.5/$$

Ezt az integrált fogjuk felhasználni a Csebisev-sorfejtés konvergenciájának bizonyitására. A $h_n(s)$ függvény ismert hipergeometriai átalakitások segitségével aszimptotikusan egyszerübb alakba irható:

$$h_n(S)=\frac{\Gamma(n+\nu+\frac{1}{2})}{2^n n!}S^{n-\nu-\frac{1}{2}}\frac{(1+\frac{1}{2}s)^{-(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4})}}{(1+\sqrt{1+\frac{1}{2}s})^{2n}}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2}+\nu,\frac{1}{2}-\nu;n+1;-\frac{\frac{S^2}{16}}{\sqrt{1+\frac{1}{2}s}\,(1+\sqrt{1+\frac{1}{2}s})^2}\right)$$

Innen $n\to\infty$ és $|S|\to\infty$ esetére

$$h_n(S)=2^{-n+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}}n^{\nu-\frac{1}{2}}\frac{S^{n-\frac{1}{2}\nu-\frac{3}{4}}}{(1+\sqrt{1+\frac{1}{2}S})^{2n}}\left\{1+O\left(\frac{1}{n}\right)+O\left(\frac{|S|^{\frac{1}{2}}}{n}\right)\right\}$$

adódik. Ezt az aszimptotikát felhasználhatjuk a Mellin-integrálban $A_n^{(\nu)}(a)$ $n\to\infty$ aszimptotikus alakjának meghatározására. A Laplace-módszer alapján elvégezve a számitásokat, a következő eredményt nyertük:

$$A_n^{(\nu)}(a)=e^{-\lambda n^{2/3}}O\left(n^{-2/3}\right)\,,\quad n\to\infty$$

$$\lambda=3\cdot 2^{-2/3}a^{1/3}\left(1-i\sqrt{3}\right)\,. \qquad /5.6/$$

Ez a becslés biztositja a /5.1/ sor abszolut és σ -ban egyenletes konvergenciáját.

A következőkben $A_n^{(\nu)}(a)$ rekurziós képletét állitjuk elő az /5.2/ képlet segitségével. Az $\frac{a^2}{2}=t$ helyettesités után $A_n^{(\nu)}(a)$ az alábbi lesz:

$$A_n^{(\nu)}(a) = 2a^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty J_{2\nu}(4\sqrt{at})\,t^{-\frac{1}{2}}\,e^{-t}I_n(t)\,dt\,.$$

Bevezetjük most a

$$v(t) = 2\sqrt{at}\;J_{2\nu}\left(4\sqrt{at}\right)$$

jelölést. A $J_\nu(x)$ Bessel-függvény differenciálegyenlete segitségével elemi átalakitásokkal belátható, hogy $v(t)$ a

$$4av = -t\,v'' - \frac{1/4 - \nu^2}{t}v$$

differenciálegyenlet partikuláris megoldása. Ezt a tényt felhasználva $-8aA_{n+1}^{(\nu)}$ kifejezését parciálisan integráljuk:

$$-8aA_{n+1}^{(\nu)} = -8a\int_0^\infty v(t)\frac{1}{t}e^{-t}I_{n+1}(t)\,dt = 2\int_0^\infty\left[v''(t) + \frac{1/4-\nu^2}{t^2}v(t)\right]e^{-t}I_{n+1}(t)\,dt =$$

$$= \left(\frac{1}{4} - \nu^2\right)\left[\frac{1}{n+1}\left(A_n^{(\nu)} - A_{n+2}^{(\nu)}\right)\right] + 2\int_0^\infty v''(t)e^{-t}I_{n+1}(t)\,dt$$

Az utóbbi integrált kétszeres parciális integrálással átalakithatjuk:

$$\int_0^\infty v''(t)e^{-t}I_{n+1}(t)\,dt = \int_0^\infty v(t)\left[e^{-t}I_{n+1}(t)\right]''dt =$$

$$= nA_n^{(\nu)} - (n+2)A_{n+2}^{(\nu)} - 2\int_0^\infty v(t)e^{-t}\left[I_n(t) - 2I_{n+1}(t) + I_{n+2}(t)\right]dt\,.$$

Adjuk most össze $-8aA_{n+1}^{(\nu)}$ és $-8aA_{n+2}^{(\nu)}$ fenti kifejezéseit. Felhasználva az előző átalakitást kapjuk:

$$-8a\left(A_{n+1}^{(\nu)} + A_{n+2}^{(\nu)}\right) = \left(\frac{1}{4} - \nu^2\right)\left[\frac{1}{n+1}\left(A_n^{(\nu)} - A_{n+2}^{(\nu)}\right) + \frac{1}{n+2}\left(A_{n+1}^{(\nu)} - A_{n+3}^{(\nu)}\right)\right] +$$

$$+ nA_n^{(\nu)} - 3(n+1)A_{n+1}^{(\nu)} + 3(n+2)A_{n+2}^{(\nu)} - (n+3)A_{n+3}^{(\nu)}\,.$$

Innen néhány összevonás után nyerjük $A_n^{(\nu)}$ rekurziós képletének végleges alakját:

$$P_0 A_n^{(\nu)} - P_1 A_{n+1}^{(\nu)} + P_2 A_{n+2}^{(\nu)} - P_3 A_{n+3}^{(\nu)} = -8a\left(A_{n+1}^{(\nu)} + A_{n+2}^{(\nu)}\right) \qquad n=0,1,2,\ldots$$

$$P_0 = \frac{(n+1/2)^2 - \nu^2}{n+1}, \quad P_1 = 4n+6-P_3, \qquad /5.7/$$

$$P_2 = 4n+6-P_0, \quad P_3 = \frac{(n+5/2)^2 - \nu^2}{n+2}.$$

Az /5.2/ integrál-előállitásnál feltettük, hogy $\nu > -1/2$. Jól látható azonban, hogy mind az /5.6/ aszimptotika, mind az /5.7/ rekurziós képlet érvényessége analitikus folytatással további ν értékekre kiterjeszthető. A /most nem részletezett/ folytatás eredményeként azt kapjuk, hogy ezek az eredmények érvényesek maradnak minden olyan ν -re, amikor $\nu \neq \pm 1/2, \pm 3/2, \pm 5/2, \pm 7/2 \ldots$ Ismeretes, hogy ez utóbbi eseteknél az /5.1/ sor polinommá redukálódik.

6/ $K_\nu(x)$ Csebisev-sorfejtése $a \leq x < \infty$ esetére

Nagypontosságu számitásoknál a $K_\nu(x)$ függvényt $x \geq a$ esetére célszerü a

$$K_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+k+\frac{1}{2})}{k!\,\Gamma(\nu-k+\frac{1}{2})} \frac{1}{(2x)^k} \right\}, \quad x \to \infty,$$

divergens aszimptotikus sor helyett az alábbi

$$K_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x} \left\{ C_n^{(\nu)}(a) + 2\sum_{n+1}^{\infty} (-1)^n C_n^{(\nu)}(a)\, T_n^*(\sigma) \right\}, \quad \sigma = \frac{a}{x}, \qquad /6.1/$$

konvergens Csebisev-sorfejtés részletösszegével számolni. Y.L.Luke és Wimp [8] eredményei alapján $C_n^{(\nu)}(a)$ hipergeometriai függvényekkel fejezhető ki:

$$C_n^{(\nu)}(a) = \sqrt{\frac{2a}{\pi}}\, \frac{1}{\Gamma(1/2+\nu)\Gamma(1/2-\nu)} \left\{ \Gamma(\nu)\Gamma(-\nu)\, {}_2F_2\left(\frac{1}{2}+n, \frac{1}{2}-n; 1-\nu, 1+\nu; 2a\right) + \right.$$

$$+\Gamma(-\nu)\Gamma(-2\nu)\frac{\Gamma(n+\nu+1/2)}{\Gamma(n-\nu+1/2)}(2a)^{\nu}{}_2F_2\left(\frac{1}{2}+\nu+n,\frac{1}{2}+\nu-n;1+\nu,1+2\nu;2a\right)+$$

$$+\Gamma(\nu)\Gamma(2\nu)\frac{\Gamma(n-\nu+1/2)}{\Gamma(n+\nu+1/2)}(2a)^{-\nu}{}_2F_2\left(\frac{1}{2}-\nu+n,\frac{1}{2}-\nu-n;1-\nu,1-2\nu;2a\right)\Big\}$$

A /6.1/ sor konvergenciáját [9] munkánkban bizonyitottuk be. Eredményünk szerint $C_n^{(\nu)}(a)$ -ra érvényes a következő aszimptotikus formula:

$$C_n^{(\nu)}(a)=e^{-3(2a)^{1/3}n^{2/3}}\,O(n^{-2/3}),\quad n\to\infty \qquad /6.2/$$

A $C_n^{(\nu)}$ számok rekurziós képletét ugyancsak Y.L.Luke és J.Wimp határozták meg elsőként [8]. A képlet a következő:

$$P_0C_n^{(\nu)}-P_1C_{n+1}^{(\nu)}+P_2C_{n+2}^{(\nu)}-P_3C_{n+3}^{(\nu)}=8a\left(C_{n+1}^{(\nu)}+C_{n+2}^{(\nu)}\right) \qquad /6.3/$$

A /6.3/-ban szereplő $P_k(k=0,1,2,3)$ számok azonosak az /5.7/ alattiakkal.

Függelék

Egészindexü $J_\nu(x)$ és $I_\nu(x)$ függvények Csebisev-sorfejtésének együtthatóit zárt /Bessel-függvényt tartalmazó/ formában lehetséges megadni. Ezt a számitást végezzük el itt. A $\nu=k$ helyettesités után a /2.3/ képletet vizsgáljuk meg.

$$C_n^{(k)}(a)=\frac{2\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1/2)\Gamma(1/2)}\int_0^1(1-t^2)^{k-1/2}J_{2n}(at)\,dt.$$

Ezt az integrált egy egyszerü azonosság segitségével fogjuk kiszámitani. Tekintsük a következő azonosságot:

$$x^K=2^{-(2K-1)}\left\{\frac{1}{2}\binom{2K}{K}+\sum_{\ell=1}^{K}\binom{2K}{K-\ell}T_\ell^*(x)\right\}.$$

Legyen $x=1-t^2$. Ekkor $T_\ell^*(1-t^2)=(-1)^\ell T_\ell^*(t^2)=(-1)^\ell T_{2\ell}(t)$.
Tehát

$$(1-t^2)^K=2^{-(2K-1)}\left\{\frac{1}{2}\binom{2K}{K}+\sum_{\ell=1}^{K}(-1)^\ell\binom{2K}{K-\ell}T_{2\ell}(t)\right\}.$$

Szorozzuk ezt az azonosságot mindkét oldalán a

$$\frac{2\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}(1-t^2)^{-1/2} J_{2n}(at)$$

kifejezéssel, és integráljunk 0-tól 1-ig tagonként. A

$$\frac{2\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^1 (1-t^2)^{-1/2} T_{2\ell}(t) J_{2n}(at)dt = \frac{2^{2k}}{\binom{2k}{k}} J_{n+\ell}\left(\frac{a}{2}\right) J_{n-\ell}\left(\frac{a}{2}\right)$$

azonosság segitségével [10] , $C_n^{(k)}(a)$ az alábbi explicit alakban irható fel:

$$C_n^{(k)}(a) = \frac{1}{\binom{2k}{k}}\left\{\binom{2k}{k} J_n^2\left(\frac{a}{2}\right) + 2\sum_{\ell=1}^{k}(-1)^\ell \binom{2k}{k-\ell} J_{n+\ell}\left(\frac{a}{2}\right) J_{n-\ell}\left(\frac{a}{2}\right)\right\}$$

Speciálisan k=0 esetén:

$$C_n^{(0)}(a) = J_n^2\left(\frac{a}{2}\right), \quad n=0,1,2,\ldots,$$

összhangban /1.4/-el. Továbbá k=1 esetén:

$$C_n^{(1)}(a) = J_n^2\left(\frac{a}{2}\right) - J_{n+1}\left(\frac{a}{2}\right) J_{n-1}\left(\frac{a}{2}\right) \qquad n=1,2,\ldots,$$

$$C_0^{(1)}(a) = J_0^2\left(\frac{a}{2}\right) + J_1^2\left(\frac{a}{2}\right).$$

Analog képletet lehet nyerni $I_k(x)$ Csebisev-sorfejtési együtthatójával kapcsolatban is. A /4.3/ alatt szereplő $d_n^{(k)}(a)$ számokat /a levezetést mellőzve/ az alábbi explicit formában adhatjuk meg:

$$d_n^{(k)}(a) = \frac{1}{\binom{2k}{k}}\left\{\binom{2k}{k} I_n^2\left(\frac{a}{2}\right) + 2\sum_{\ell=1}^{k}(-1)^\ell \binom{2k}{k-\ell} I_{n+\ell}\left(\frac{a}{2}\right) I_{n-\ell}\left(\frac{a}{2}\right)\right\}$$

Speciálisan k=0 esetén:

$$d_n^{(0)}(a) = I_n^2\left(\frac{a}{2}\right), \quad n=0,1,2\ldots$$

Továbbá k=1 esetén:

$$d_n^{(1)}(a) = I_n^2\left(\frac{a}{2}\right) - I_{n+1}\left(\frac{a}{2}\right) I_{n-1}\left(\frac{a}{2}\right), \quad n=1,2,\ldots$$

$$d_0^{(1)}(a) = I_0^2\left(\frac{a}{2}\right) - I_1^2\left(\frac{a}{2}\right).$$

Irodalom

[7] Németh Géza: Bessel-függvények Csebisev-sorfejtése I.
KFKI Közl. 14, 157. /1966/

[8] Luke, Y.L., Wimp, J.: Jacobi Polynomial Expansions.
Mathematics of Computation 17, 395 /1963/

[9] Németh Géza: A $\psi(a,c;x)$ függvény polinomapproximációjáról.
KFKI Közl., 13, 163 /1965/

[10] В.А. Диткин, А.П.Прудников: Интегральное преобразование и операционное исчисление. Москва, Физматгиз. I96I, 445 стр.

Érkezett: 1966. máj. 12.
KFKI Közl., 14.évf. 5.szám, 1966.

HURST-TIPUSU PROPORCIONÁLIS SZÁMLÁLÓ ÉS DIGITÁLIS KIÉRTÉKELŐ BERENDEZÉS GYORSNEUTRONOK ABSZOLUT DÓZISÁNAK MÉRÉSÉRE

Irta: Biri János és Deme Sándor

Összefoglalás

Megvizsgáljuk a gyorsneutronok testszövetben létrehozott abszolut dózisának mérési feltételeit, leirjuk egy általunk épitett Hurst-tipusu proporcionális számláló konstrukcióját és bemérési adatait. Közöljük a fenti számlálóhoz készitett digitális rendszerü amplitudó integrátor részletes leirását. Befejezésül áttekintjük a berendezés felhasználási területét.

Bevezetés

A sugárvédelmi munkáknál és a radiobiológiai kisérleteknél szükséges a sugárzások, igy a gyorsneutron sugárzás abszolut dózisának ismerete. A gyorsneutron sugárzás abszolut dózisának mérése csak az utóbbi évtizedben oldódott meg kielégitő pontossággal, elsősorban Hurst és Wagner munkássága nyomán [1, 2]. Az alábbi közleményben ismertetni kivánjuk a gyorsneutronok abszolut dózisának mérési elvét, a mérésre szolgáló, általunk megépitett berendezést és a vele szerzett tapasztalatokat.

Vizsgáljuk meg, hogy a gyorsneutronok által létrehozott dózist milyen feltételek kielégitésével mérhetjük meg. Az egyszerüség kedvéért csak a gyorsneutronok első fizikai kölcsönhatásából eredő, un. első ütközési dózis mérésének elvével foglalkozzunk.

A gyorsneutronok energiájuk zömét a testszövetben rugalmas szórás révén adják át. Ha a 0,5 MeV feletti, 14 MeV-ig terjedő energiatartományt vesszük figyelembe, akkor elegendő, ha csak a rugalmas energiaátadást vesszük számitásba.

Rugalmas ütközésnél az átadott dózis rad/neutron.cm^{-2}-ben

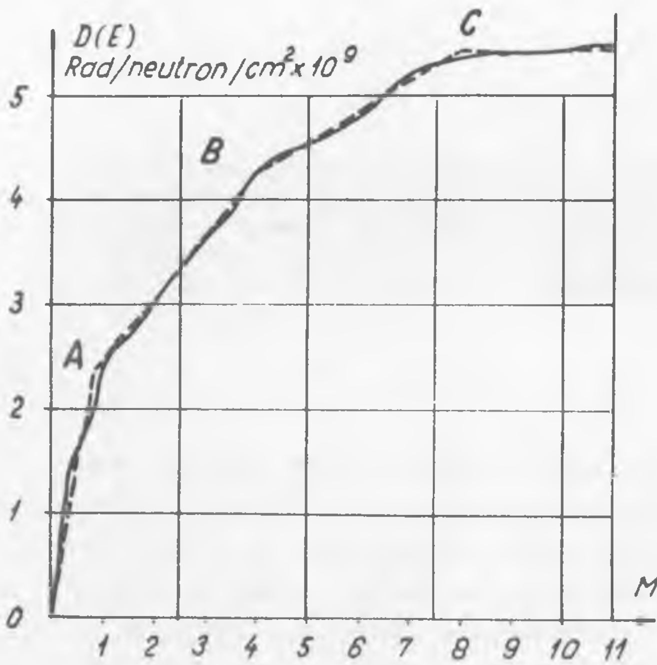
$$D = 1{,}6 \cdot 10^{-8} E_n \sum_j \frac{2 M_j}{(M_j + 1)^2} N_j \sigma_j (E) ,$$

ahol E_n a neutronok energiája MeV-ben,

M_j a j - edik fajta atom tömegszáma,

N_j a j - edik fajta atomok grammonkénti száma a vizsgált anyagban,

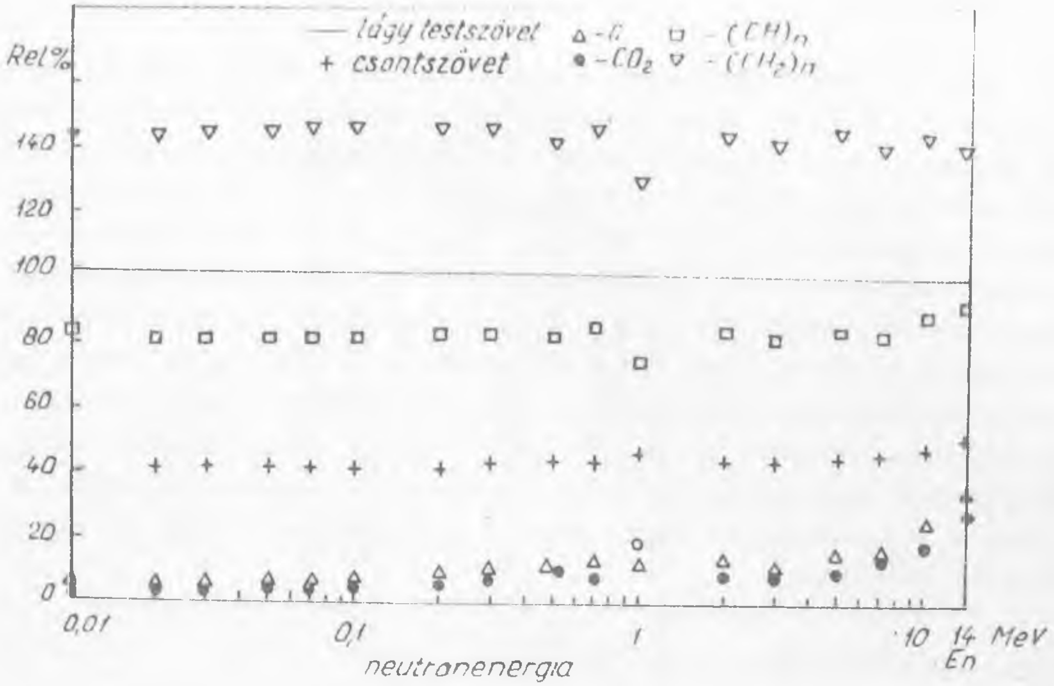
$\sigma_j / E /$ a j - edik fajta atom rugalmas szórási hatáskeresztmetszete cm^2-ben.



1. ábra
Lágy testszövet első ütközési dózisa a neutronenergia függvényében /ABC - lineáris közelités/

A testszövetre számitott első ütközési dózis energiafüggését az 1. ábra mutatja. Ha valamely anyaggal modellezni kivánjuk a testszövetet, akkor elegendő, ha a modellanyagban és a testszövetben elnyelt dózis energiafüggése azonos, nem szükséges, hogy az adott modellanyagban az energiaátadás számszerüleg is megegyezzék a testszövetnek átadott energiával. Néhány anyag által elnyelt - a testszövethez viszonyitott - dózis energiafüggését a 2. ábrán mutatjuk be. Az ábra alapján láthatjuk, hogy a legmegfelelőbb egyszerü modellanyag, melyet dózismérési vizsgálatainknál felhasználhatunk, a CH_2-tipusu vegyület. Ilyen vegyület számos formában áll rendelkezésünkre /etilén gáz, polietilén, parafin stb./

Ha ilyen testekvivalens anyagból ionizációs kamrát készitünk, akkor az abban elnyelődő energia könnyen átszámitható testszövet dózisra [3]. Az ionizációs kamra abban az esetben alkalmas a gyorsneutronok abszolut dózisának mérésére, ha a gyorsneutronokat nem kiséri gamma-sugár-



2. ábra

Néhány anyag lágy testszövethez viszonyitott első ütközési dózisának energiafüggése

zás. Ha fellép kisérő gamma-sugárzás, de dózisintenzitása nem haladja meg jelentősen a neutronsugárzás dózisintenzitását, akkor a gamma-sugárzás hatása korrekcióba vehető egy neutronokra kevéssé érzékeny ionizációs kamra segitségével [3]. Ha nagy a neutron/gamma arány, akkor a korrekció csak nagyon nagy hibával végezhető el.

A neutronsugárzás abszolut dózisának mérésére alkalmasabb a proporcionális számláló. A proporcionális számlálókat hasonló elv szerint kell alkalmazni, mint az ionizációs kamrát, azaz a proporcionális számlálóban a mérés tartama alatt leadott energiamennyiséget kell meghatároznunk. A proporcionális számláló lehetővé teszi a gamma-sugárzás által kiváltott impulzusok diszkriminációját, mert a számláló helyes méretezése esetén a gyorsneutronok által meglökött magok lényegesen nagyobb impulzusokat szolgáltatnak, mint a gamma-sugárzás által kiváltott szekunder elektronok. A neutronsugárzás abszolut dózisának méréséhez olyan proporcionális számlálóra van szükségünk, melynek térfogata, illetve a benne levő gáz tömege pontosan ismert, ezenkivül lehetőség van az impulzusamplitudó energiában történő hitelesitésére.

A fenti követelményeket kielégiti a Hurst által javasolt doziméter tipus [1, 2]. Ez olyan proporcionális üzemmódban dolgozó számlálócső, melybe energiakalibráló sugárforrás van beépitve. A cső érzékenységének energiafüggetlenségét a testszövettel azonos energiafüggőségü polietilén falanyag és etilén töltőgáz, a meghatározott térfogatot a véghatást kiküszöbölő két elektrosztatikus "tércső" biztositja. A kis gamma-érzékenység azzal érhető el, hogy a cső méretei a szekunder elektronok átlagos hatótávolságánál sokkal kisebbek. A fentiekben leirt eszköz alkalmas arra, hogy segitségével meg tudjuk mérni a meghatározott tömegü gáznak a protonok által időegység alatt átadott abszolut energiamennyiséget, azaz a gáztömegben a neutronoktól származó elnyelt dózist, mig a gamma-sugárzás által kiváltott elektronok hatása diszkriminációval elkülönithető.

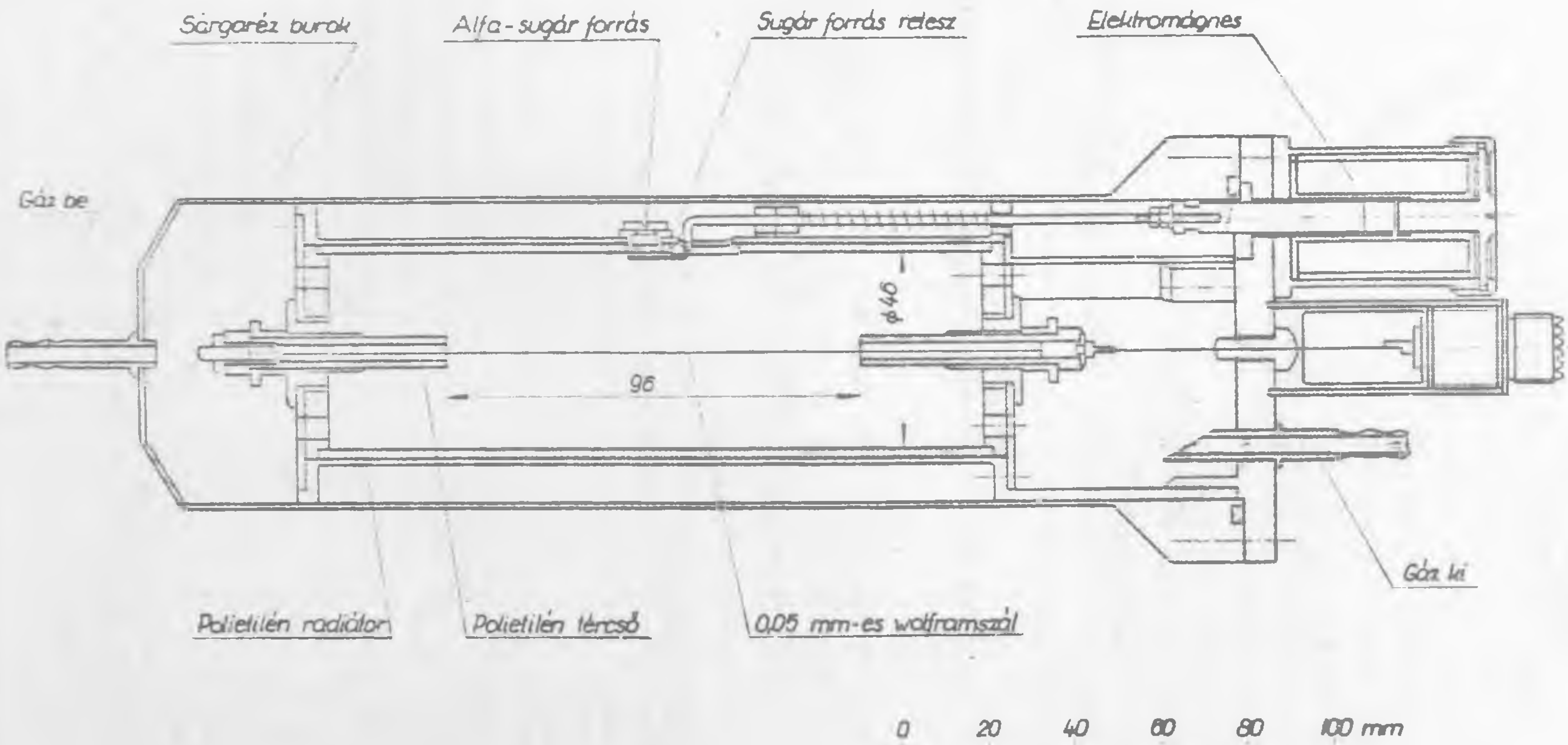
A proporcionális számláló leirása

Az általunk megépitett számlálócső konstrukcióját a 3. ábra mutatja. A számlálócső belső fala 2 mm vastag polietilén, mely még a 14 MeV-es protonok esetén is telitési rétegvastagságot biztosit. A belső polietilén fal egy 1,5 mm vastag sárgarézcsőben helyezkedik el. Ebbe a csőbe van beszerelve egy kb. 0,01 μCi aktivitásu Po-210 energiahitelesitő preparátum. A preparátum előtt egy fedőlemez van, melyet egy elektromágnes segitségével el lehet távolitani a forrás elől. A számlálócső anódszála 0,05 mm vastag molibdénből készült. A szál végén helyezkednek el a véghatást kiküszöbölő polietilén tércsövek. A cső áramlásos kivitelben, purum tisztaságu etilén gázzal müködik. A csövet kivülről egy gázzáró, vákuumra leszivható sárgaréz köpeny boritja.

A cső mérete lehetővé teszi, hogy a Po-210 preparátumból kilépő alfa-részek még 700 mm-es külső nyomás esetén is teljes energiájukat a gázban adják le, igy az impulzusamplitudó kalibráció nyomásfüggetlen.

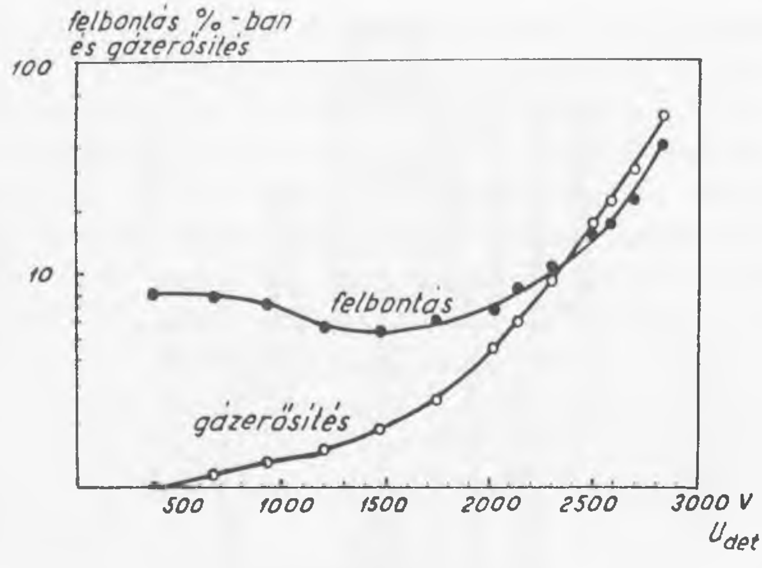
Beméréri adatok

A számlálócsőbe beépitett hitelesitő alfa-preparátummal felvettük a gázerősités és a felbontóképesség feszültségfüggését /4. ábra/. A görbe alapján az optimális üzemi feszültség a felbontóképesség szempontjából 1500 V, ennél a feszültségnél azonban a gázerősités kicsi, az előerősitő zaja miatt nagyobb gázerősitésre van szükség. A kiválasztott üzemi feszültség 2300 V, ennél a feszültségnél a gázerősités értéke mint-



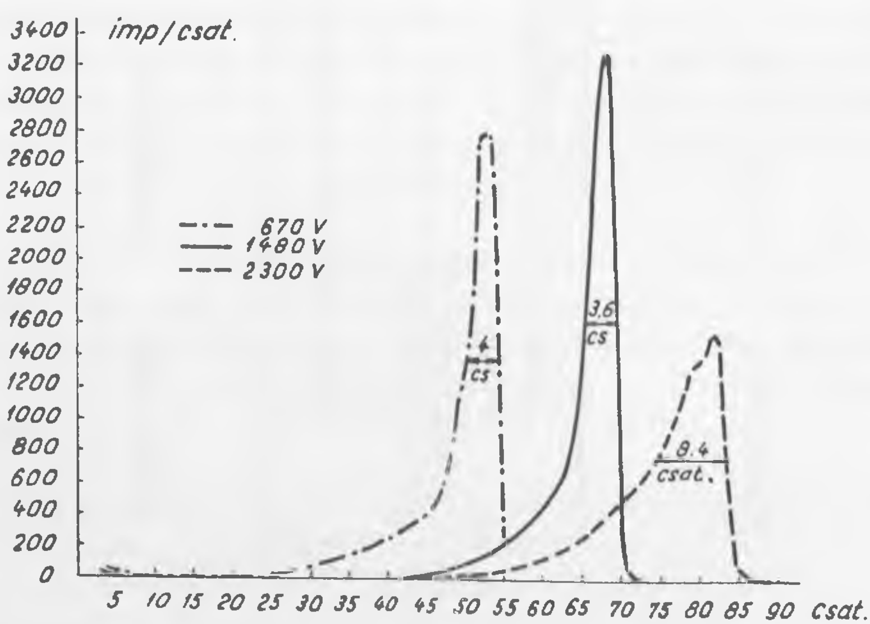
3. ábra

Gyorsneutronok abszolut első ütközési dózisának mérésére szolgáló proporcionális számláló

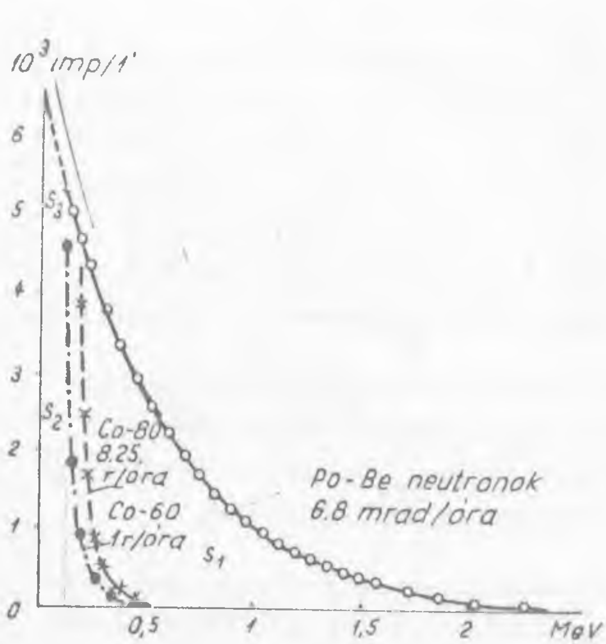


4. ábra
A gázerősités és felbontóképesség energiafüggése

egy 9, a cső felbontóképessége kb. 10%. Meg kell jegyezni, hogy a spektrum alakja nem szimmetrikus /5.ábra/, ez arra mutat, hogy a gázerősitési feltételek nem azonosak az összes alfa-részek számára. A forrás előtt el-



5. ábra
Alfa-részek impulzusamplitudó spektruma különböző feszültségeknél .



6. ábra
Po-Be neutronokkal és különböző intenzitásu gamma-sugárzással felvett integrális amplitudó spektrum

helyezett kollimátor biztositja, hogy az alfa-részek pályájukat a gázban és ne a csőfalon fejezzék be, igy az aszimmetria nem rövidebb pályahosszu alfa-részeknek tudható be. Az alfa-spektrum csucsa és az átlagosan leadott alfaenergia között mintegy 10%-os különbség van, ezt a számitásoknál és a méréseknél figyelembe vesszük, feltételezve, hogy az alfarészek és a protonok által kiváltott töltéshordozók gázerősitése azonos.

A számlálócsővel 2300 V-os csőfeszültségnél, 1,5 μs-es differenciálási és ugyanakkora integrálási időállandóval felvett, Po-Be neutronforrás által kiváltott integrális impulzusamplitudó spektrumot a 6. ábra mutatja. E mérésnél a sugárzás iránya a számlálócső tengelyre merőleges volt. A számlálócső érzékenységének irányfüggését a 7. ábra mutatja.

Megvizsgáltuk a cső gammasugárzás iránti érzékenységét. A 0,25 R/óra és 1 R/óra intenzitásu, 1,25 MeV-es átlagenergiáju gammasugárzási térben felvett integrális impulzusamplitudó spektrumot a 7. ábra mutatja. Ezen mérések szerint, ha az impulzusamplitudó spektrumot sokcsatornás analizátorral vesszük fel, akkor a neutronsugárzás dózisintenzitását 100-szorosan meghaladó gamma-sugárzás sem zavarja a mérést, mert lehetőség van a gamma-sugárzás által befolyásolt tartományban a protonspektrum extrapolálására.

7. ábra
A számláló érzékenységének szögfüggése Po-Be neutronokra

Digitális amplitudó integrátor

A leirtakból következik, hogy a nagy relativ dózisintenzitású gamma-sugárzással kisért gyorsneutron-sugárzás abszolut dózisintezitásának meghatározása olyan elektromos mérési problémát vet fel, melynél amplitudó /energia/ szerint kell összegezni a Hurst-féle számlálóban keletkezett töltésimpulzusok közül azokat, amelyek amplitudója egy tetszőleges, előre beállitható küszöböt meghalad. A küszöb értékét a mérni nem kivánt gamma-háttér által kiváltott impulzusok határozzák meg.

A gyakorlatban az összegezés előtt a proporcionális számláló anódjára beérkező töltésimpulzusokkal arányos feszültségimpulzusokat állitunk elő töltésérzékeny erősitő segitségével, és csak a feszültségimpulzusok amplitudó analizise után következik az összegezés.

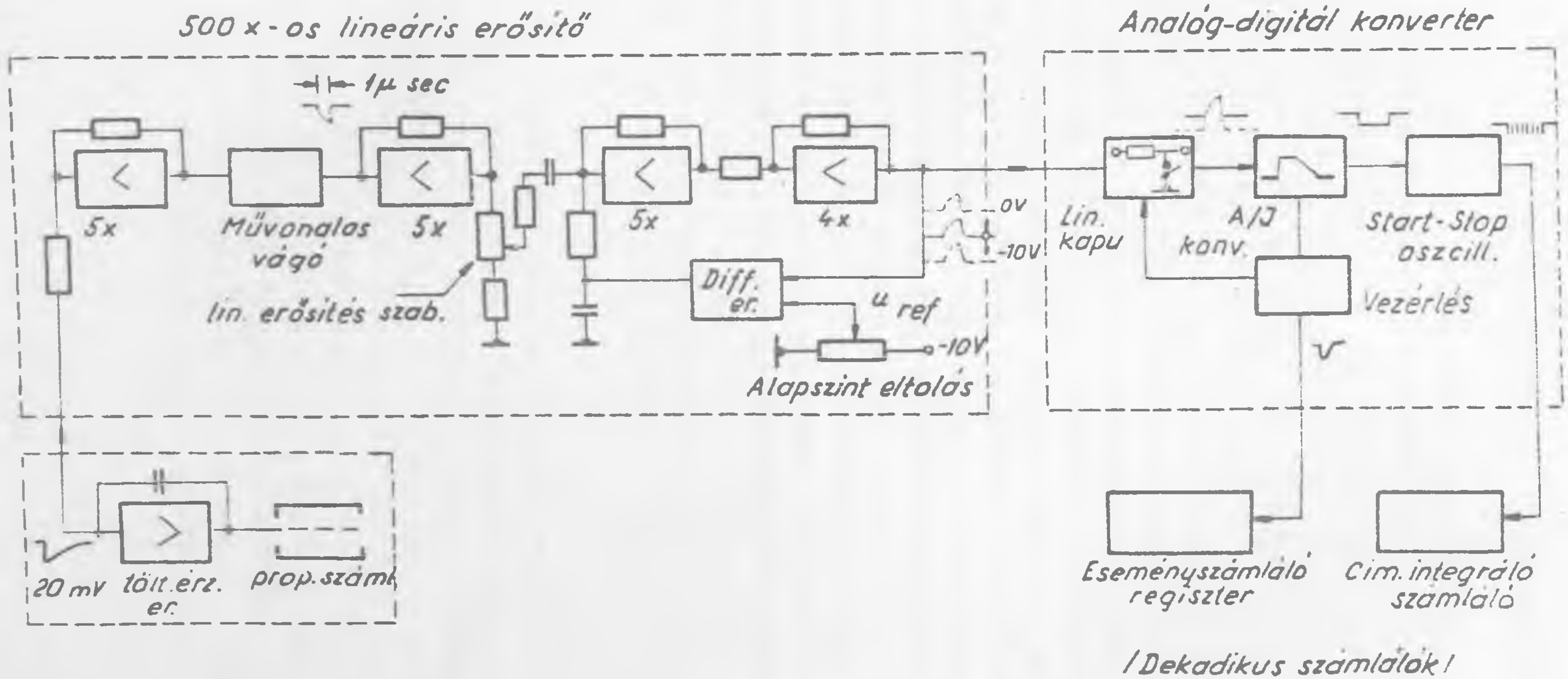
Az amplitudó analizisnek az irodalomból ismert többdiszkriminátoros közelitő megoldását az általunk elérni kivánt kb. 2%-os mérési pontosság érdekében elvetettük [2].

Az amplitudó analizist végezhetjük sokcsatornás analizátorral. Ebben az esetben a kivánt pontosság biztositható, azonban az eredmény kedvezőtlen formában jelenik meg, mert az amplitudó szerinti válogatás megtörténik ugyan, de a dózis meghatározásához hosszadalmas számitással az alábbi sulyozott összeget kell képezni:

$$R = \sum_{i=1}^{k} (x_o + x_i)\, n_i$$

ahol n_i az i-edik csatorna tartalma,
x_i az i-edik csatorna sorszáma,
x_o az alapkivonás csatornában kifejezve,
k az a legnagyobb sorszámu csatorna, amelyben még $n_i > 0$.

Jelentős anyagi ráforditást takarithatunk meg és a mérési eredményt is kedvezőbb formában kapjuk, ha a mérést a 8. ábra szerinti digitális amplitudó integrátorral végezzük. Ennek az egységnek az egyes fokozatai megegyeznek egy sokcsatornás analizátornak az analóg-digitál konverzióhoz használt bemenőfokozataival [4]. Az eltérés csupán a konverziót követő adatkezelésben van. Az adatok nem ferritmátrixos tárolóba, hanem dekadikus számlálókba kerülnek, ez azonban az amplitudó-mérés pontosságát már nem érinti.



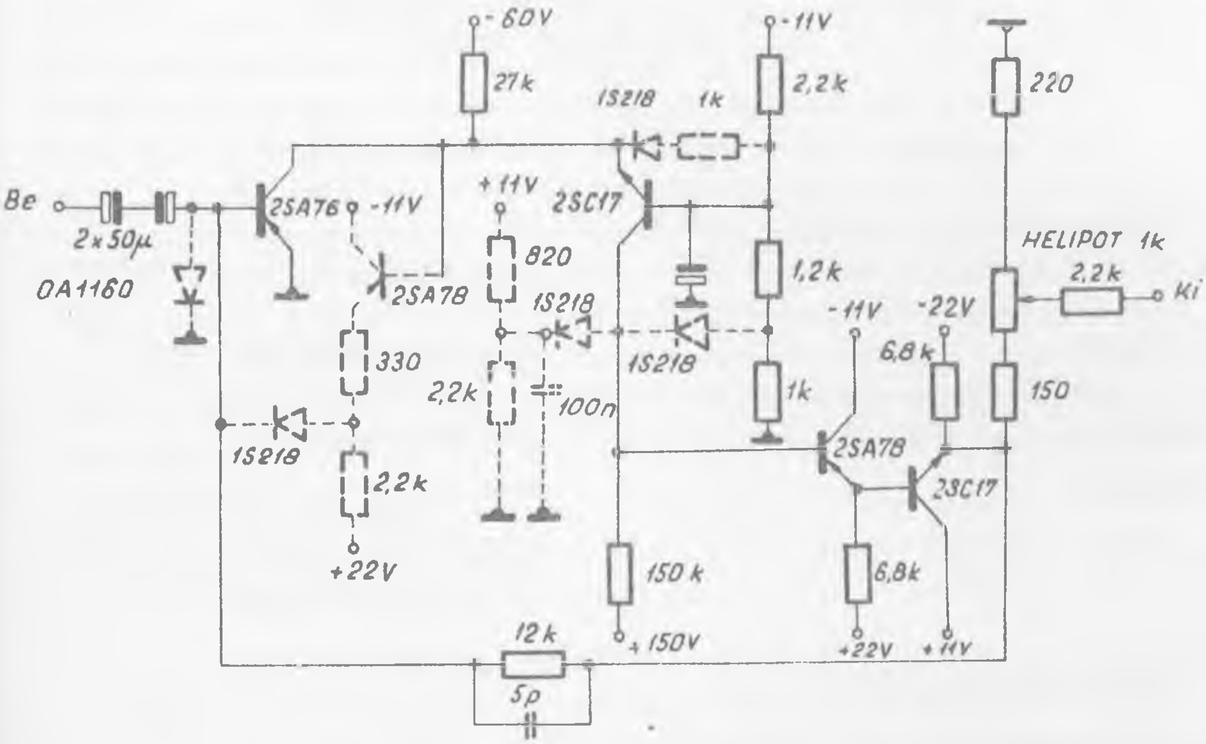
8. ábra

A digitális integrátor blokksémája

Az amplitudó összegezés menete

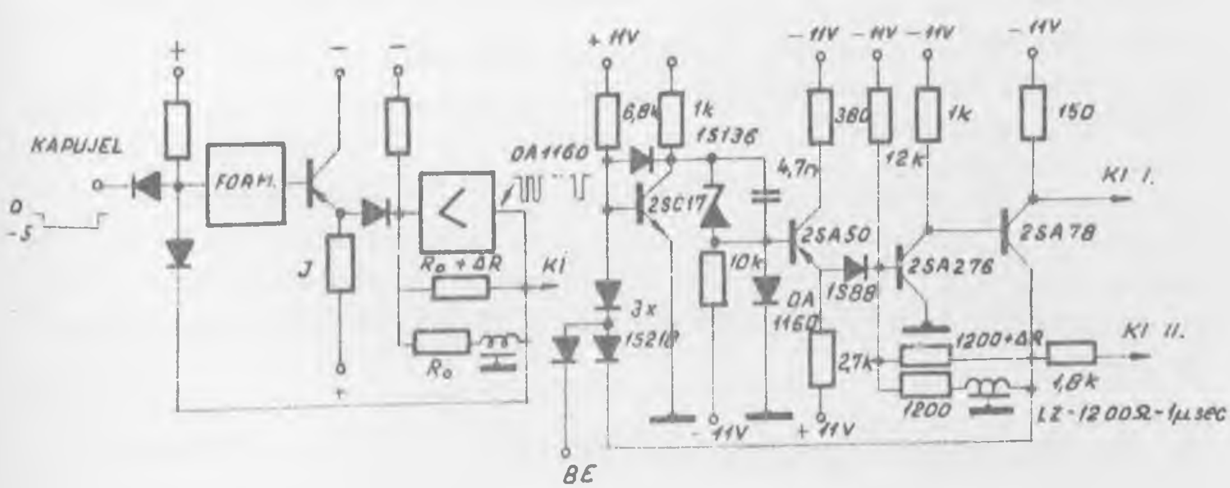
A proporcionális számláló anódszálához egy kiszaju töltésérzékeny erősitő csatlakozik, igy a detektorban keletkező töltésimpulzust jó jel/zaj viszony mellett gyüjthetjük be. A kimenő impulzusok maximális amplitudója a fokozat után Po-Be neutronok esetén mintegy 10-20 mV. Az analóg-digitál konverter bemenetén a szükséges jelszint max. 10 V-os, ezért a detektor és a konverter közé lineáris erősitőt kell iktatni. Az erősitő bemenőfokozata 5-szörös erősitésü müveleti erősitő, amely még tartalmaz egy müvonalas impulzusrövidítő áramkört [5] ; a következő fokozat ismét egy 5-szörös erősitésü müveleti erősitő /9. ábra/. Ebben az erősités folyamatos, lineáris változtatását biztositó helipotos impulzusosztó kapott helyet, melynek maximális leosztása 1:5. Az erősitő végfokozata 20-szoros erősitésü, szervoerősitővel stabilizált kimenőszintü erősitő [6, 7]. A kimenőszint a szervoerősitő referenciaszintjének változtatásával 0 V-tól -10 V-ig tetszőlegesen beállitható. Mivel az analóg-digitál konverter az impulzusoknak csak a 0 V-nál pozitivabb szakaszát méri, ez a rendszer egy változtatható nagyságu alapkivonás, energiaküszöb beiktatását teszi lehetővé. Az analóg-digitál konverter felépitése szokásos. A konverter az impulzusmérés tartamára tiltó lineáris kaput, az impulzussal, ill. az impulzusnak a 0 V-nál pozitivabb szakaszával arányos időtartamu kapujelet előállitó amplitudó-idő konvertert és a kapujel digitális mérésére szolgáló start-stop oszcillátort /0,5 Mc/ tartalmaz /10. ábra/.

Az oszcillátor kimenetéhez kapcsolódik egy dekadikus számláló. Ez a számláló az egyes bemenőimpulzusokhoz tartozó cimsorozatokat összegezi, és az alapkivonásból származó korrekció után a mérendő energiával arányos mennyiséget mutat. Az analóg-digitál konverter vezérlő, formáló áramköréhez csatlakozik még egy eseményszámláló regiszter, amely minden küszöb feletti impulzust megszámlál, tehát lényegében az "impulzuscsomagok" számát regisztrálja, hogy a kiértékelésnél a szükséges korrekció elvégezhető legyen. A korrekciónál a cimet összegező regiszter tartalmát megnöveljük a beállitott kivonóküszöb csatornában kifejezett értékének az eseményszámláló regiszter tartalmával való szorzatával.



9. ábra

A helipotos osztást vezérlő 5-szörös erősitésü fokozat



10. ábra

Start-stop oszcillátor

A megépitett digitális amplitudó integrátor
/8. ábra/ főbb müszaki adatai

Erősitő

Erősitési tényező:	500
Erősités állitás:	Átkapcsolhatóan és folyamatosan helipottal
Formálás:	Egyszeres müvonalas vágás /T = 1 μs/
Bemenőjel:	Negativ: max. 20 mV
Kimenet:	Pozitiv; 10 V / 0 V alapszint/ 20 V /- 10 V alapszint/ /A kimenő alapszint 0 V és -10 V között állitható, csatolás az A/D konverterhez DC./

Analóg-digitál konverter

Csatornaszélesség:	200 mV
Diszkr. szintek száma:	max. 50
Mérési holtidő:	5 + n.2 μs /n az éppen mért impulzus nagyságától függően 1-50/
Integrális linearitás:	$\pm$ 0,5% /az erősitővel együtt/
Alapkivonás:	Az erősitő kimenőszintjétől függően 0 - 10 V között változtatható.
Stabilitás:	0,5%/10 C^o

Az 500-szoros erősitő és az analóg-digitál konverter 4 db 175x200 mm-es nyomtatott kártyán épült meg, tápegységekkel együtt is könnyen hordozható egységet képez és feleslegessé teszi az igen költséges és méretben is jelentős sokcsatornás analizátorok ilyen célu alkalmazását.

Kiértékelési módszer, összehasonlitó mérések

Beméréenél a számlálócsőnek átadott energiát a sokcsatornás analizátorral felvett spektrum alapján számitottuk ki, emellett egyidejüleg az amplitudó integrátorral is mértük. Az amplitudó integrátor cím integráló számlálója a beérkezett jelek amplitudójával és számával arányos számu kimenőimpulzust mér, igy a 6. ábrán a görbe S_1-gyel jelölt területével arányos impulzusszámot kapunk. Az eseményszámláló által mért beütésszámmal és a diszkriminációs küszöbbel arányos tartományt a 6. ábrán S_2 -vel jelöltük. A mérési összeállitás mindössze az S_3-mal jelölt tartományt nem méri, ezt a sokcsatornás analizátorral, gamma-háttér nélküli, lehetőleg hasonló energiaspektrumu forrással végzett mérés alapján vehetjük számitásba. Ezen korrekció nagysága közelitőleg négyzetesen függ a diszkriminációs küszöbnek megfelelő energiától, értéke a számlálócső tengelyére merőlegesen beeső Po-Be neutronoknál 100 keV diszkriminációs feszültségnél 1,6%, 200 keV-nál 5,2%, 300 keV-nál 11,4%.

Sokcsatornás analizátorral és amplitudó integrátorral mért dózisadatok a korrekciók elvégzése után 1,2%-os eltérést mutattak, ez az eltérés még standardizációs méréseknél is rendszerint megengedhető.

A leirt Hurst-tipusu számlálóval megmértük egy $1{,}2.10^{7}$ neutron/s hozamu Po-Be forrás dózisintenzitását. A forrás neutronhozamát saját méréseink alapján$\pm$2%-os pontossággal ismertük [8]. Egy Po-Be neutron által leadott átlagdózist $5{,}16.10^{-9}$ rad értékünek vettük [3]. A mért dózis a számitottnál 6%-kal volt kevesebb, a számlálócső falán elnyelődő és szóródó neutronokból eredő korrekció elvégzése után azonban a mért és számitott dózis eltérése csak 3% volt.

A számláló felhasználási lehetőségei

A leirt proporcionális számláló 0,5 mrad/óra - 1 rad/óra intenzitástartományban alkalmazható gyorsneutronok abszolut első ütközési dózisának meghatározására. Ha a mérendő neutronok átlagenergiája lényeges eltérést mutat a Po-Be forrás neutronjainak átlagos energiájától, akkor figyelembe kell venni a korrekciós tényezők energiafüggését. Ha a neutronok energiája kicsi /kevesebb, mint 2 MeV/, akkor az általuk kiváltott, illetve a radiátorból kilépő protonok átlagenergiája kicsi, igy az energiadiszkrimináció miatti korrekció megnő. Ez a mérés pontosságát csökkenti, a gamma-sugárzás iránti relativ érzékenységet viszont növeli.
1 MeV-os neutronenergia alatt a számláló csak igen korlátozott pontossággal, 0,5 MeV alatt pedig már egyáltalán nem alkalmas dózismérésre.

Az összeállitást különböző rendszerü gyorsneutron dózis- és dózisintenzitásmérők rad-rendszerben történő hitelesitésére kivánjuk felhasználni. A müszer abban az esetben alkalmazható abszolut dózismérőként, ha a mérendő neutronok átlagenergiája 2 - 14 MeV-os tartományba esik. Ha a neutronok átlagenergiája a fenti értéknél kisebb, akkor csak körültekintő vizsgálatok után tudjuk megállapitani a gyorsneutronok abszolut dózisát, nagy fontosságuvá válik a korrekciós tényezők megmérése, illetve kiszámitása. A müszer jól használható a neutronsugárzást lényegesen meghaladó dózisintenzitásu gamma-háttér melletti mérésre is. Ilyen jellegü, a fenti müszerrel végzett kalibrációs mérésről már beszámoltunk [9].

Köszönetnyilvánitás

A szerzők köszönetüket fejezik ki Mészáros Istvánnak a számláló mühelyrajzainak elkészitéséért, Biró Jánosnak és Tonelli Miklósnak a számlálócső kivitelezéséért.

I r o d a l o m

[1] Hurst, G.S.: Brit. J. Radiol., 27, 353 /1954/
[2] Wagner, E.B., and Hurst, G.S.: Rev. Sci. Instr., 29, 153 /1958/
[3] Makra Zs.: Atomtechnikai Táj., 6, 743 /1963/
[4] NTA-256/512-tipusu KFKI analizátor gépkönyv, KFKI, 1965.
[5] Chase, R.L. and Svelto, V., IRE Trans., NS-9, 45 /1962/
[6] Verweij, CERN 62-32 /1962/
[7] Biri J., Blasowszky M. és Tarnay K. előadása, Symposium III. über Radioelektronik /Dresden, 1965/
[8] Andrási A., Deme S. és Nagy Judit, KFKI Közl., 14, 267 /1966/
[9] Деме Ш.: Дозиметр быстрых нейтронов Херста для измерения реакторов

4. Reaktorfizikai és Technikai Konferencia, Budapest, 1965. nov.

Érkezett: 1966. ápr. 5.
KFKI Közl., 14.évf. 5.szám, 1966.

RÁDIÓFREKVENCIÁS NEGATIV HIDROGÉN IONFORRÁS VIZSGALATA

Irta: Gombos Péter, Roósz József és Vályi László

Összefoglalás

Vizsgálatokat végeztünk rádiófrekvenciás, negativ ionforrással. Az áttöltést a hosszu csatornával rendelkező kiszivó elektródában kialakult H_2 gáz target segitségével végeztük. A forrásból 18 KeV-es energiával kilépő H^- nyaláb intenzitása 9 μA, energiaszórása 300 eV, feltágulása 11 mrad, és a gázfogyasztás 20 cm³/h. Az ionforrás élettartama több mint 500 óra.

Bevezetés

Negativ hidrogén ionok előállitására kétféle módszer ismeretes: a kisülési térben keletkezett negativ ionok közvetlen kiszivása és a pozitiv ionok negativra történő áttöltése.

Közvetlen kisziváshoz nagy ionkoncentrációju plazmát biztositó forrás szükséges. A gyakorlatban kétféle forrástipus vált be eddig, a Penning-tipusu [1] és a duoplazmatron ionforrás [2] .

Az áttöltéses negativ hidrogén ionforrások fő részei: pozitiv ionforrás, előfókuszáló rendszer /mely esetleg el is maradhat/, és az áttöltési csatorna. Az ionforrás leggyakrabban duoplazmatron [3] , de lehet Penning [4] vagy rf. tipusu is [5] . Az áttöltő gáz általában H_2 [3] . Ujabban gőztargeteket is sikeresen alkalmaznak, főleg higany-, [6] és vizgőztargetet [7] .

Az áttöltéses negativ ionforrások speciális tipusánál a kiszivószonda csatornája egyben az áttöltő csatorna is [8] . Különösen előnyös lehet ez a megoldás rf. ionforrásoknál [9, 10, 11, 12] , mert alacsony gázfogyasztás mellett egyszerü eszközökkel 10-20 μA H^- ionáram nyerhető.

A dolgozatban egy kis gázfogyasztásu rf. szondás áttöltésü negativ hidrogén ionforrással végzett vizsgálatainkat ismertetjük.

A mérőberendezés leirása

A vizsgálatok során használt vákuumrendszereket és próbastandokat korábbi publikációinkban már ismertettük [13, 14] . Az ionforrás összeállitási rajza az 1. ábrán látható.

A kisülési edény tetejéhez forrasztóónnal fémsapkát rögzitettünk, a sapkához pedig hütőbordákat csavaroztunk. Ezzel sikerült megakadályoznunk, hogy a ballon teteje a szekunder elektronok bombázása során olyan magas hőmérsékletre emelkedjen, mely a megbizható müködést lehetetlenné teszi.

A kiszivócsucs méreteit ugy választottuk meg, hogy a csatornában kialakuló gáztargetvastagság a lehető legkedvezőbb legyen. A csucs furata d = 2,5 mm, hossza ℓ = 50 mm. Az anód furatát d_a = 4,5 mm-re, az árnyékoló kvarclemezét d_q = 6 mm-re választottuk. Az optimális anódkatód távolságot /h/ kisérletileg határoztuk meg.

A kiszivócsucs alá elhelyezett ellenelektródot az alaplemezhez rögzitettük. Ilymódon a kilépő negativ ionok energiáját meg lehetett kétszerezni, ami az ionnyaláb kis szögszórása érdekében látszott célszerünek.

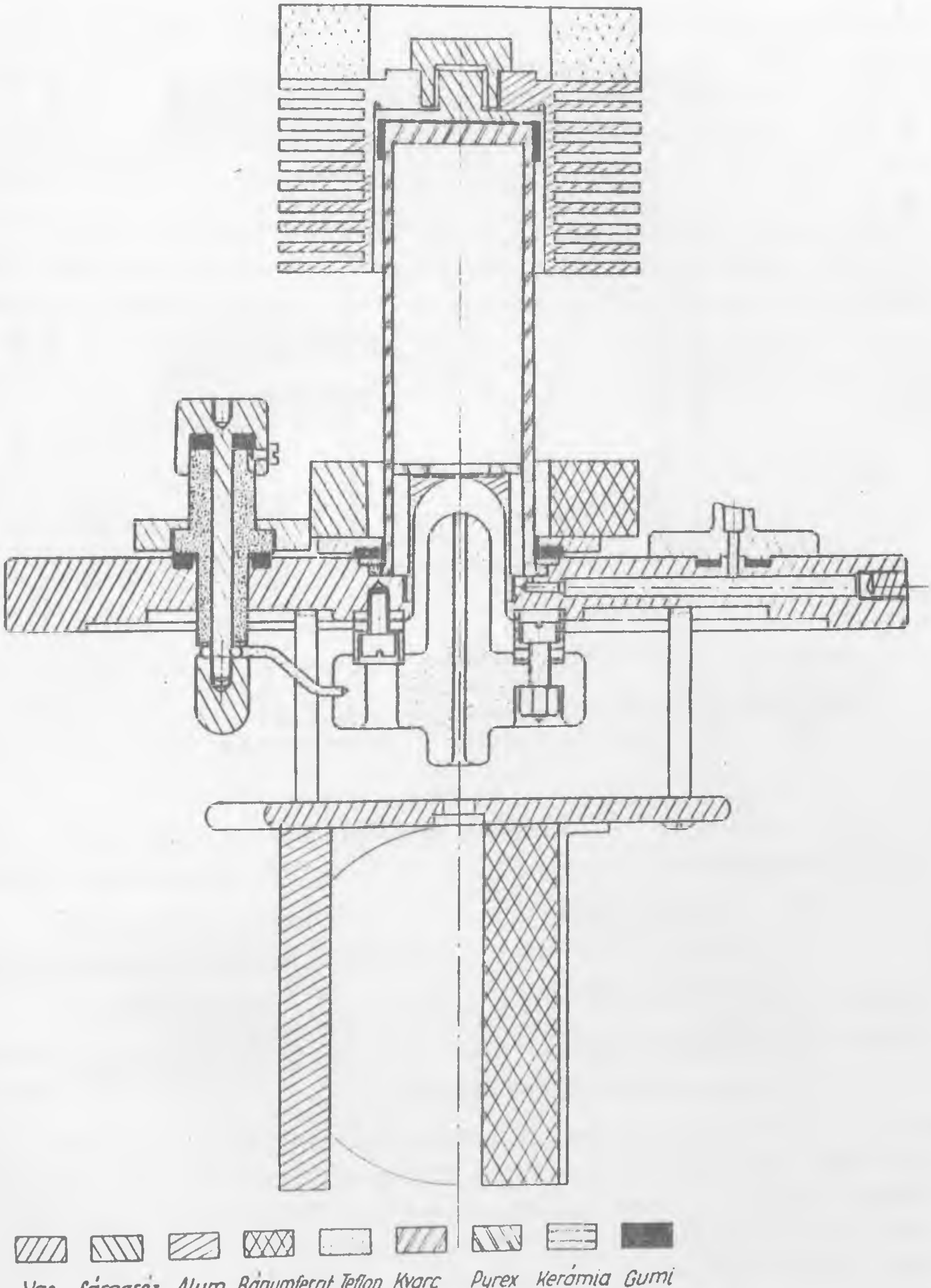
Közvetlenül az elektród alá szereltük az eltéritő mágnest, mely két, 72 mm átmérőjü, 15 mm vastag Ba-Fe permanens mágnesből állt. 10 mm-es rés esetén, a térerősség a rés közepén kb., 600 Öe volt. A rés távolságát a mágnestárcsák közé helyezett aluminium távtartókkal biztositottuk, melyek egyben megakadályozták az eltéritett elektronok és pozitiv ionok szétszóródását.

Az árammérést teljesen árnyékolt, negativ ellenteres Faraday-hengerrel végeztük /2. ábra/.

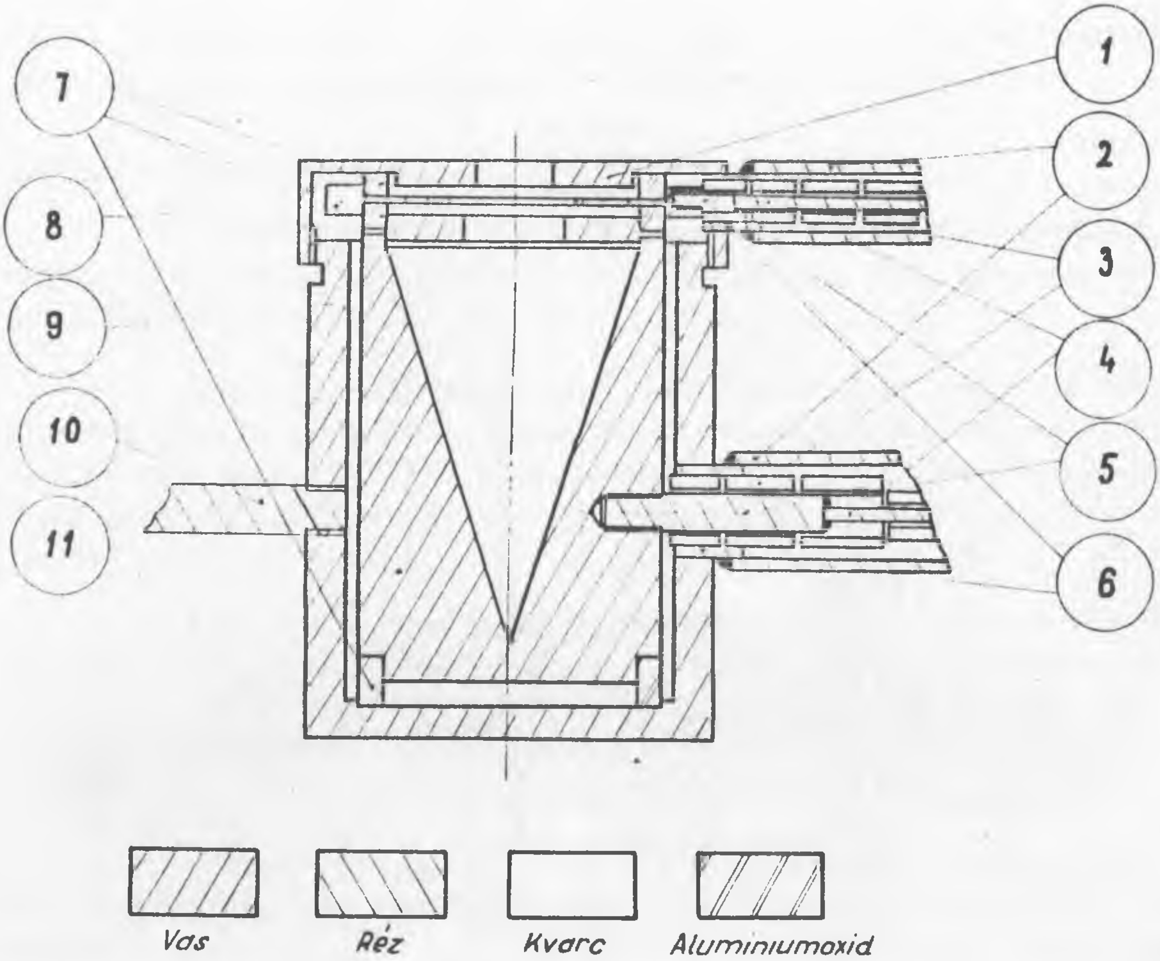
Az ionnyaláb energiaeloszlásának mérése a [13] -ban leirt eszközökkel történt. A vizsgálatokhoz használt oszcillátor, valamint az elektromos tápegységek szintén azonosak voltak a [13] -ban használtakkal.

Mérési eredmények

Vizsgálatainknál abból a feltételezésből indultunk ki, hogy az az anód-katód távolság /melyet h -val jelölünk/ az optimális, melynél egy


Vas
Sárgaréz
Alum.
Bánumfernt
Teflon
Kvarc
Pyrex
Kerámia
Gumi

1. ábra



2. ábra
Árammérő berendezés

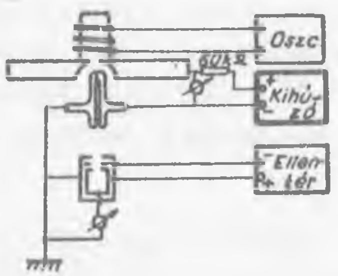
1/ Árnyékoló fedél
2/ Árnyékoló harisnya
3/ Szigetelő henger
4/ Huzal
5/ Érintkező csavar
6/ Árnyékoló érintkező henger

7/ Szigetelő távtartó
8/ Ellentér elektród
9/ Árnyékoló ház
10/ Mozgató rud
11/ Áramfelfogó edény

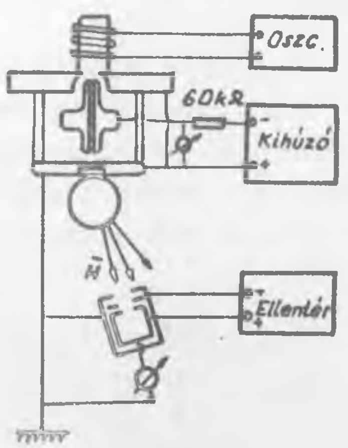
meghatározott kihuzófeszültség esetén a legtöbb pozitiv ionáram nyerhető.

A kihuzófeszültséget a rendelkezésünkre álló tápegységből elérhető maximális érték határozta meg, ami 9 kV-nak felelt meg. Ez az érték valamivel alatta van a H_2 gázban fellépő negativra történő áttöltődés σ_{1-1} hatáskeresztmetszet maximális értékéhez tartozó feszültségnek, mivel az 10-15 kV között mutat maximumot [15, 16]

A pozitiv ionáram vizsgálatát a 3/a ábrán vázolt összeállitás mellett végeztük. Az anód-katód távolságot 3,5 - 7,5 mm között változtattuk. A maximális áramot h = 7 mm esetében értük el, igy a további méréseket h = 7 mm beállitással mértük.



3/a ábra
Pozitiv ionárammérés vázlata



3/b ábra
Negativ ionárammérés vázlata

<u>Negativ ionnyaláb intenzitás mérése</u>

A negativ hidrogén ionáramot a 3/b ábrán látható vázlat alapján összeállitott berendezéssel mértük. A gázadagolást termodiffuziós nikkel szeleppel végeztük.

Az áram intenzitásának mérésénél a negativ nyaláb H_1^+, H_2^+ H_3^+-ból keletkezett komponenseit külön mértük a kis bemeneti nyiláson árnyékolt Faraday-henger segitségével. A vizuális megfigyelést az árammérő henger bemeneti nyilását árnyékoló blendének willemittel történt bevonása tette lehetővé. Ilymódon a mozgatható Faraday-hengert könnyen be lehetett állitani az egyes komponensek intenzitásának mérésére.

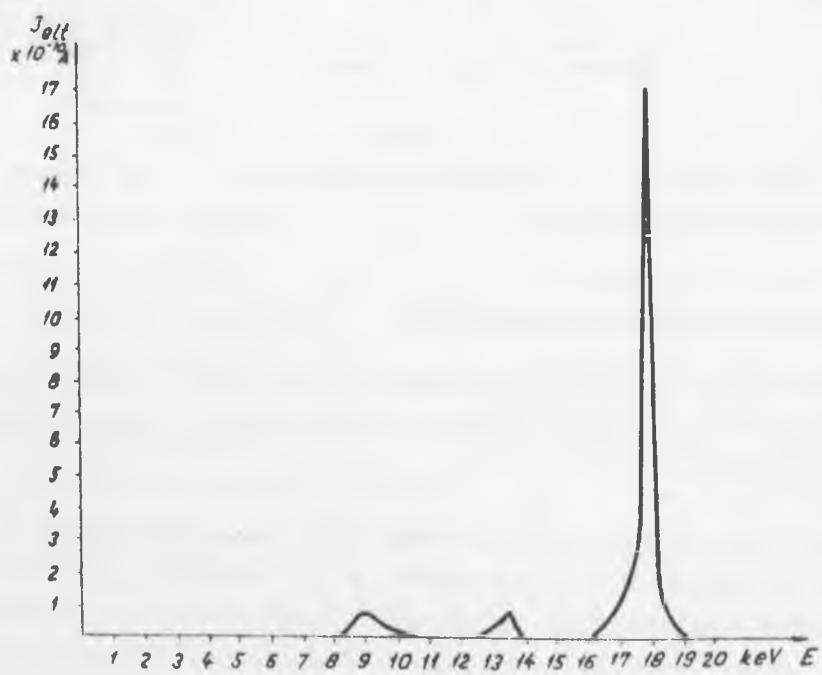
A legnagyobb intenzitásu komponens, amely esetünkben a maximális energiáju komponens volt, az alábbi müködési paraméterek mellett 9 μA intenzitásu volt:

oszcillátor-teljesitmény	140 W,
kihuzófeszültség	9 kV,
iváram	13 mA,
ellentér feszültség	-600 V,
gázfogyasztás	20 cm³/ó.

Az ionnyaláb feltágulásának mérése

Willemittel bevont lemez segitségével könnyen meg tudtuk határozni a forrásból kilépő negativ ion- és semlegesnyaláb komponensek feltágulását.

A nyaláb negativ ion komponense a kiszivócsucstól 150 mm távolságban, 6 mm átmérőjü foltot hozott létre, mig a nyaláb semleges része 21 mm átmérőjü foltot okozott. Ezekből az adatokból számoltuk a feltágulás félszögét, amely a negativ ionnyalábra 11 mrad-nak és a semleges nyalábnál 61 mrad-nak adódott.



4. ábra
Az ionnyaláb energia spektruma

A negativ ionnyaláb energiaeloszlásának mérése

Az ionforrásból kilépő negativ ionnyaláb energiaspektruma a 4. ábrán látható. A továbbgyorsitás szempontjából érdekes 18 keV-es negativ ionokat tartalmazó spektrum félérték szélessége 300 eV. Ez a viszonylag nagyobb értékü energiaszórás egyrészt a kihuzófeszültséget szolgáltató tápegység nagyobb terheléséből adódó szüretlenség növekedésével, másrészt az energia-kétszereződéssel magyarázható.

Az ionforrás élettartama

Az ionforrás intenzitása és karakterisztikái - a gyorsitóberendezésen használva - több, mint 500 órás müködés után nem változtak. Igy a további használatra alkalmas állapotban van. A teljes élettartam meghatározása folyamatban van.

I r o d a l o m

1 Ehlers, K.: Nucl. Instr. 32, 309 /1965/
2 Collins, L.E., Gobbet, R.H.: Nucl. Instr. 35, 277 /1965/
3 Brooks, N.B., Rose, P.H. et al: Nucl. Instr. 28, 315 /1964/
4 Chateau-Thierry, A: C.R. Acad. Sci. 821 /1961/
5 Dandy, D., Hammond, D.P.: Nucl. Instr. 30, 23 /1964/
6 Фогел Я.М. и другие:ЖЭТФ XXУII.1957.98I
Dawton, R.H.V.M.: Nucl. Instr. 11 326 /1961/
7 Roos, M., Rose, P.H. et al: Rev. Sci. Instr. 36, 544 /1965/
8 Dawton, R.H.V.M.: Nucl. Instr. 24, 285 /1963/
9 Goldie, C.H.: Nucl. Instr. 28, 139 /1964/
10 Collins, L.F., Riviere, C.A.: Nucl. Instr. 4, 121 /1959/
11 Хирный Ю.М.:ПТЭ № 2 1958. 5I
12 Phillips, J.A., Tuck, J.L.: Rev. Sci. Instr. 27, 97 /1956/
13 Vályi L., Gombos P., Roósz J.: KFKI Közl. 12, 461 /1964/
14 Roósz J., Gombos P., Vályi L.: KFKI Közl. 14, 333 /1966/
15 Allison, S.K.: Rev. Mod. Phys. 30, 1137 /1958/
16 Sanborn, F.P.: Jour. of Appl. Phys. 31, 1592 /1960/

Érkezett: 1966 jul. 15.
KFKI Közl. 14.évf. 5.szám, 1966.

NAGYINTENZITÁSU RÁDIÓFREKVENCIÁS IONFORRÁS VIZSGÁLATA

Irta: Roósz József, Gombos Péter és Vályi László

Összefoglalás

A dolgozatban foglalkozunk egy nagyintenzitásu, folytonos üzemü, pozitiv hidrogénionokat adó, hosszu élettartamu, rádiófrekvenciás ionforrás kisérleti megvalósitásával és müködési karakterisztikáinak vizsgálatával. Méréseink alapján, az optimális müködés adatai: 10 mA hidrogén ionáram, 30 atm cm³/ó H_2 gázfogyasztás, 140 W r.f. teljesitmény és 8 kV kihuzófeszültség.

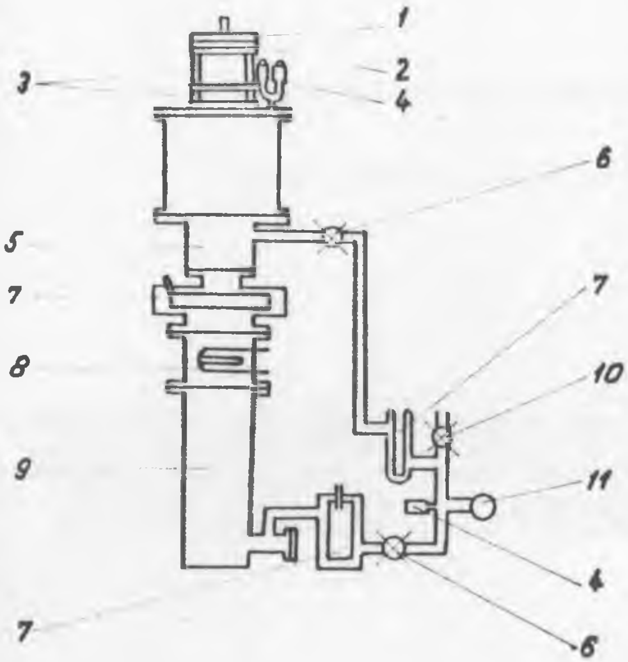
Bevezetés

Nagy intenzitásu, jól fókuszálható ionnyaláb előállitását kis gázfogyasztással és kis r.f. teljesitménnyel, az /1/-ben leirt, elektrosztatikus gyorsitónál jól bevált, kis intenzitásu és kis energiaszórásu, hosszu élettartamu ionforrás továbbfejlesztésével láttuk célszerünek megoldani. Ezen tipus /1/ fő jellemzője, hogy anódja a katód közvetlen közelében van és nagyrészt ennek köszönheti hosszu élettartamát /1500 óra/.

Hasonló tipusu, de más kiszivó elektróda formával rendelkező nagy intenzitásu, folytonos üzemü ionforrás a /2/ és /3/ dolgozatban szerepel, azonban ezek egyike sem elégiti ki a fentebb felsorolt követelményeket. A /2/-ben leirt ionforrásnál, a 7 nyilással rendelkező kiszivó elektróda miatt, fókuszálási problémák lépnek fel. Rádiófrekvenciás teljesitménye is nagy /300 W/ és gázfogyasztásáról nem sokat lehet tudni, mert nem üzem közben mérték a 25 cm³/ó fogyasztást. Üzem közben ennek a háromszorosa is felléphet. A /3/-ban leirt ionforrásnak még nagyobb rádiófrekvenciás teljesitménye és gázfogyasztása van. /1000 W és 800 cm³/ó./ Ezért vált szükségessé a továbbiakban leirt ionforrás kidolgozása és vizsgálata.

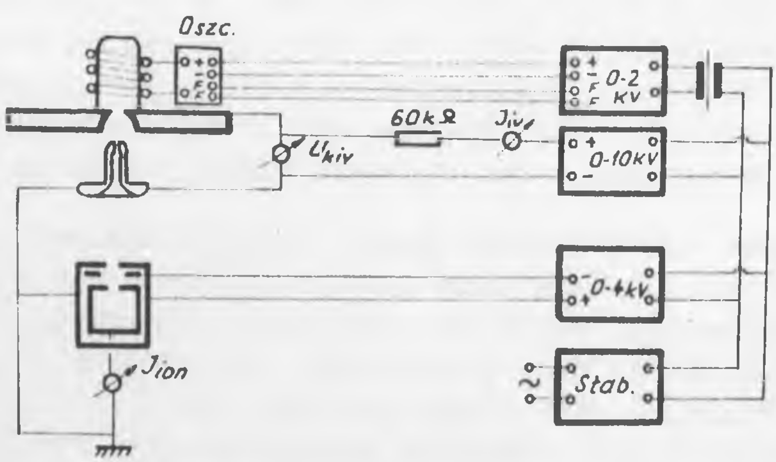
Kisérleti berendezés

A vizsgálatokhoz használt berendezés vákuumrendszerének vázlatos rajza az 1. ábrán, elektromos kapcsolása a 2. ábrán, az ionforrás rajza a 3/a ábrán látható. A hütőbordával ellátott kisülési cső kvarcból készült. A gáz bevezetése a kisülési csőbe, az alaplemezen keresztül, a



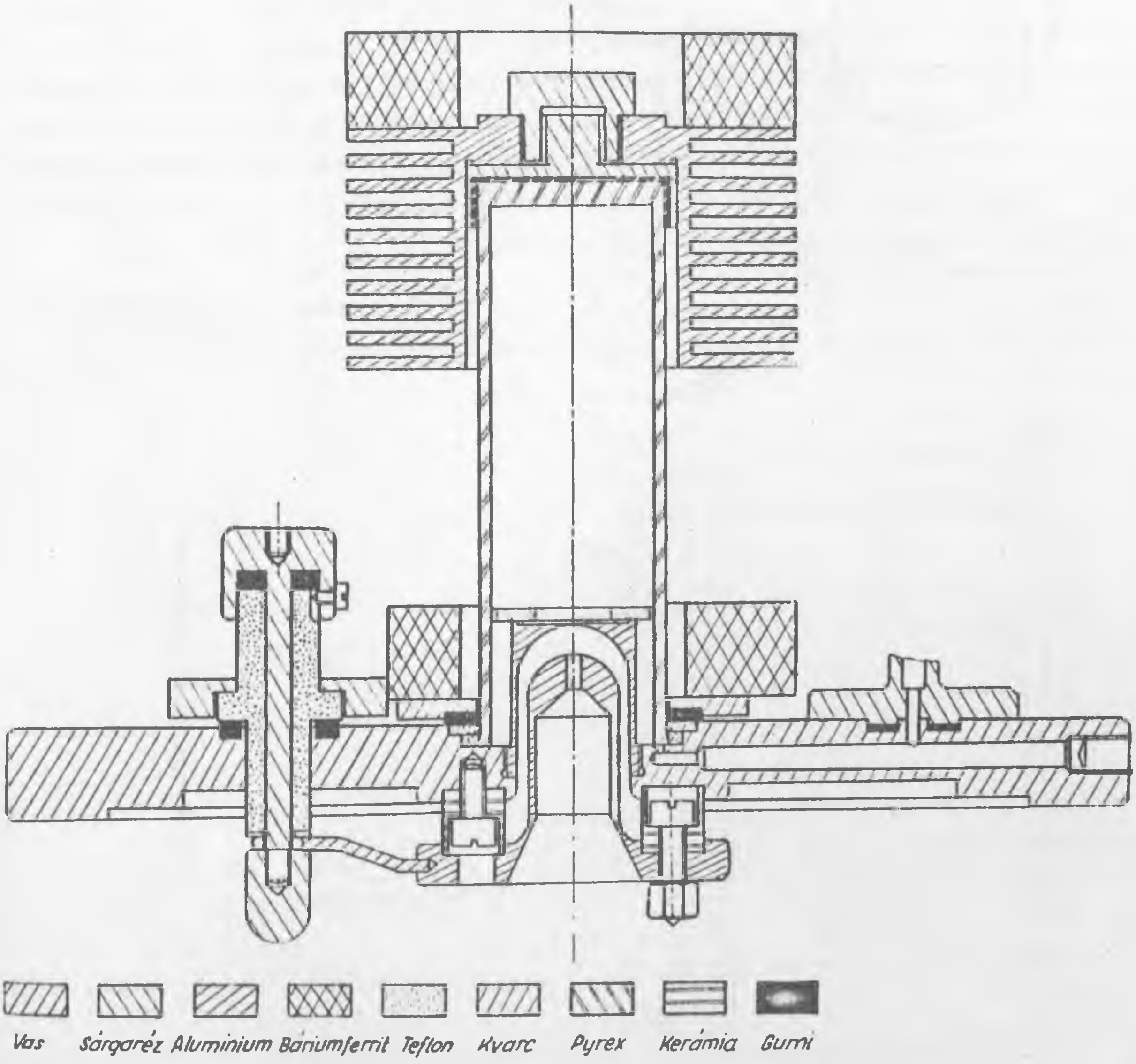
1. ábra

1. Ionforrás
2. Plexi szigetelő tárcsa
3. Üveghenger
4. Vácuummérő
5. Tányérszelep
6. Elővácuum csap
7. Cseppfolyós nitrogénes kifagyasztó
8. Freonos kifagyasztó
9. 1000 l/sec szivósebességü higany diffuziós szivattyu
10. Fellevegőző csap
11. 16 m³/h szivósebességü forgó szivattyu

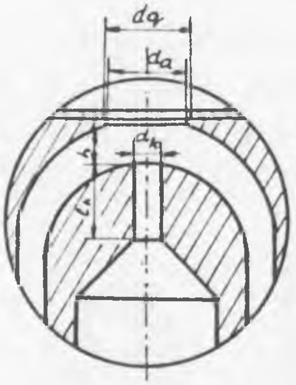


2. ábra

A mérőberendezés elektromos kapcsolásának blokksémája


Vas
Sárgaréz
Aluminium
Báriumferrit
Teflon
Kvarc
Pyrex
Kerámia
Gumi

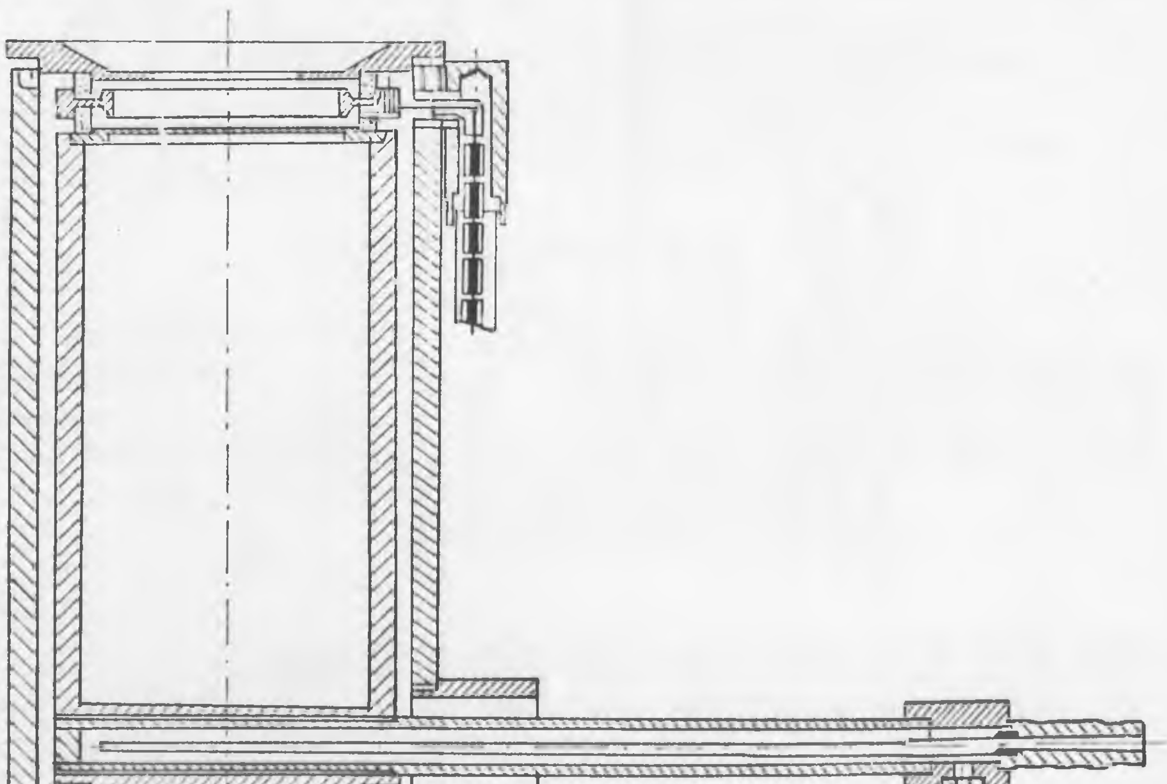
3/a. ábra



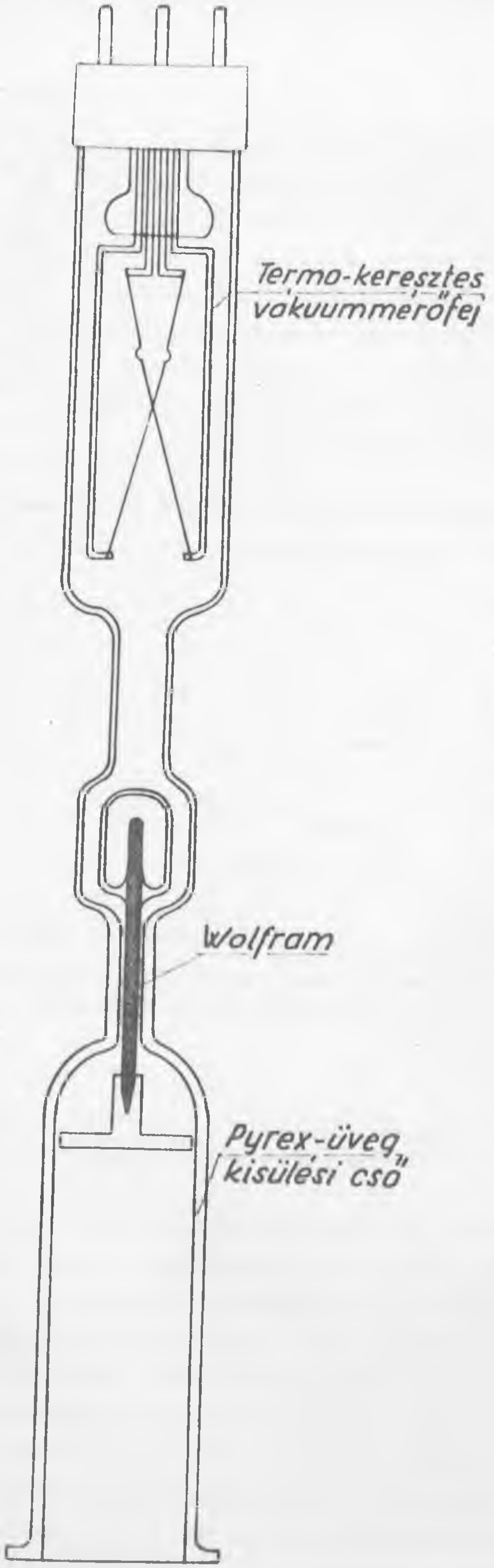
3/b. ábra
Az ionforrás geometriai paraméterei

kisülési tér alsó részén történik. A gázbeömlés szabályozását részben nikkelszeleppel, részben tüszeleppel végeztük. A két mód, az ionforrás működésében nem okozott észrevehető különbséget. A kiszivó elektródák gömbi geometriájuak. A kiszivórendszer geometriai elrendezése a 3/b ábrán látható. Az anód furatát d_a = 3,5-től 6 mm-ig változtattuk. Az anód furat környékét a plazmától egy nagyobb furatu kvarctárcsával árnyékoltuk le. A katód nyilása d_k = 2 mm volt minden esetben. A katódnyilás hosszát l_k = 1-től 20 mm-ig változtattuk.

A rádiófrekvenciás gázkisülést két ГС 90 Б kerámikus triódával rendelkező ellenütemü oszcillátor hozta



4. ábra
Nagyáramu Faraday-target



5. ábra
Kisülési edénnyel összeépitett vácuummérő

létre, 45 Mc frekvencián, 120-140 W teljesitménnyel. A mágneses kisülés esetében a két báriumferrit mágnesgyürü tengelye megegyezett a kisülési csőével. A két gyürü mágneses tere ellentétes irányu volt.

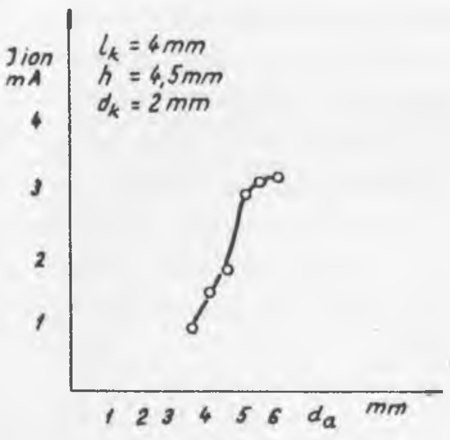
Az ionnyalábot előfókuszálás nélkül, a kiszivás után 40 mm-re elhelyezett targeten fogtuk fel. A nagy áramok mérésére elkészitettünk egy olyan Faraday-hengert, amelyet a bemeneti nyilásnál negativ ellentérblendével láttunk el a szekunder elektronok ellen és minden oldalról árnyékoltunk a szóródó elektronok és ionok ellen. Az ionáram gyüjtő henger vizhütéses és kivezetései árnyékoltak. Szigetelői aluminium-oxid kerámia gyürük /4. ábra/. A 10^{-6}-10^{-5} Hgmm-es vákuumot folyékony levegős kifagyasztóval ellátott higanydiffuziós szivattyu állitotta elő.

Az ionforrás gázfogyasztását olajos gázáramlásmérővel mértük és ezen kivül a kisülési csőben mért nyomásból számoltuk. A kisülési edényben a nyomást az 5 ábrán látható módon, a ballonhoz csatlakozó termokeresztes fejjel mértük. A csatlakozásnál létesitett szükület és a beforrasztott wolfram-elektród gondoskodott arról, hogy a kisülés ne terjedjen át a mérőfejbe. Az áramlásmérővel mért és a nyomásmérésből számolt gázfogyasztás-értékek jó egyezést mutatnak.

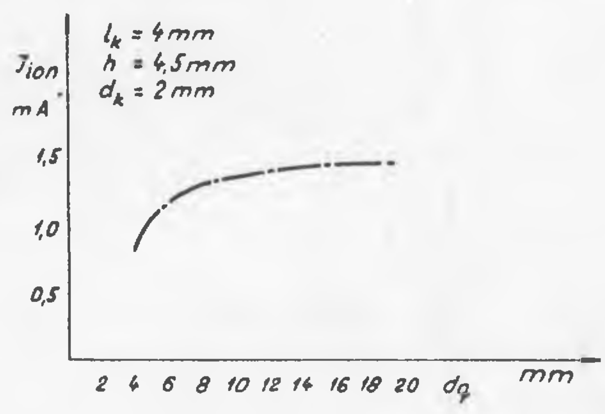
Mérés

Az /1/-ben leirt kisintenzitásu ionforrásból kiindulva, az intenzitás növelése érdekében az anód és katód furatát arányosan megnöveltük 2,5-szeresre. Igy $d_k = 2$, $d_a = 5$ mm lett. Arányosan növelni kellett természetesen a kvarc-lyuk átmérőjét is, $d_q = 10$ mm-re. Mivel a hasonlósági törvény nem érvényes szigoruan /4/, azért ellenőriztük, hogy a nagyobb tértöltés esetében a $\frac{d_a}{d_k} = 2{,}5$-es arány optimális-e. Ezt konstans d_k mellett, d_a változtatásával mértük. A mérés eredménye a 6. ábrán látható. Az ábra azt mutatja, hogy $d_a = 5$ után az áramnövekedés alig pár százalékos. Igy a további mérésekhez a $d_a = 5$ értéket választottuk.

Megmértük az ionáramot az árnyékoló kvarclemez furatának függvényében. Ez gyakorlatilag $d_q = 10$ mm-nél telitésbe megy /7. ábra/. Felté-



6. ábra
Az ionáram változása az anódfurat függvényében

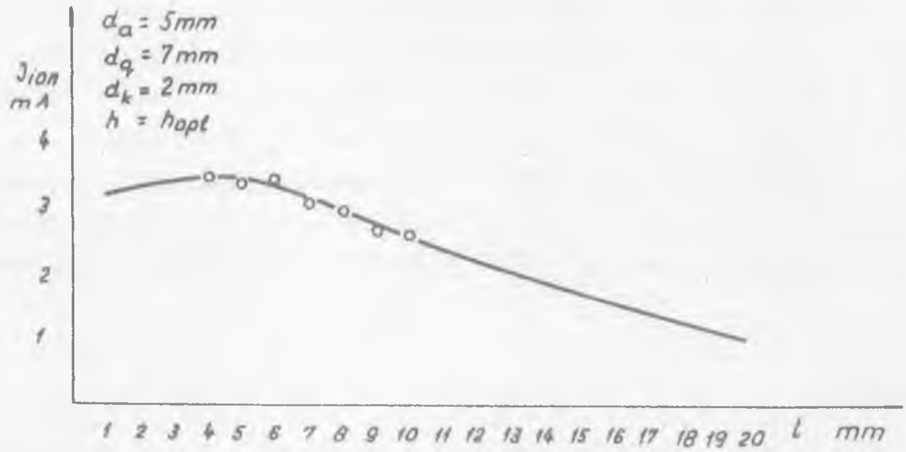


7. ábra
Az ionáram változása az árnyékoló kvarc furatának függvényében

telezhető, hogy az össz-ionáram növekedés a plazmaanód érintkezési felület növekedésével függ össze. A protonarány azonban az érintkezési felület növekedésével csökken. Azért, hogy a kiszivó környezetében a protonarány ne csökkenjen, a plazmaanód érintkezési felületét ezen a helyen csökkentettük / $d_q = 6$ mm/, ugyanakkor a kiszivónyilástól távolabb /az anód külső palástjánál/ megnöveltük, az árnyékoló pyrex-gyürü külső átmérőjének csökkentésével. Méréseink azt mutatták, hogy ez esetben az össz-ionáram ugyanolyan értékü volt, mint a $d_q = 10$ mm esetében. Mivel a nagyobb intenzitásu ionnyaláb csak nagyobb ionsürüségü helyről nyerhető, a kiszivórendszert közelebb vittük a plazma nagyobb ionsürüségü részéhez, majd az ionsürüséget to-

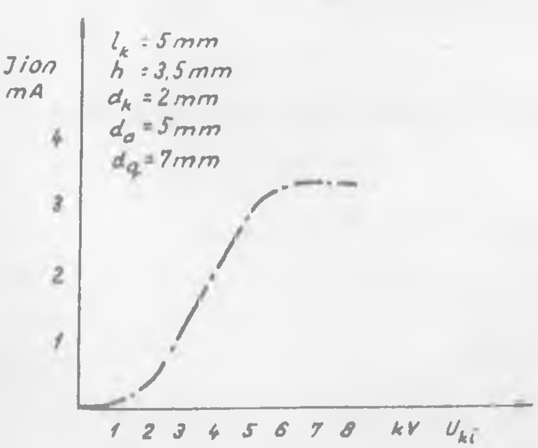
tovább növeltük keresztirányu mágnestér alkalmazásával és a rádiófrekvenciás tér növelésével. A nagyobb teljesitménnyel járó erősebb katódmelegedés miatt a katód szigetelő távtartót kicseréltük teflonról aluminiumoxid kerámiára.

A kiszivócsatorna hosszának változtatásával l_k = 1 mm-től 20 mm-ig /8. ábra/ megállapitottuk, hogy l_k = 5 mm-es csatornán még átmegy a

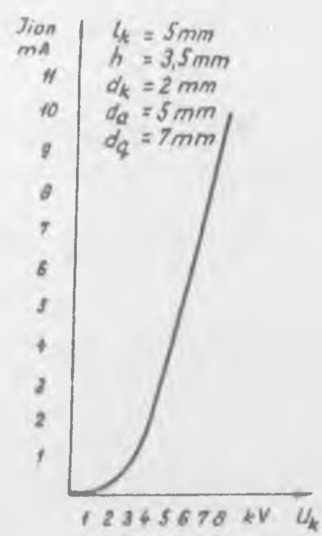


8. ábra
Az ionáram változása a csatornahossz függvényében

teljes ionáram, tehát nem érdemes rövidebb csatornával dolgozni, a gázfogyasztás növekedése miatt. A fentiek alapján beállitott optimális paraméterekkel mágnestér nélkül 3,2 mA maximális ionáramot kaptunk 125 cm³/ó



9. ábra
Ionáram - kihuzófeszültség karakterisztika mágnes nélkül



10. ábra
Ionáram-kihuzófeszültség karakterisztika mágnessel

gázfogyasztás mellett /9. ábra/. Ugyanezen paraméterek esetén mágnestér alkalmazásával 10 mA ionáramot kaptunk 30 atm cm³/ó gázfogyasztás mellett /10. ábra/. Mindkét esetben 140 W-os oszcillátor adta a rádiófrekvenciás teljesitményt. Mint az ábrán láthatjuk, ez a görbe U_k = 8 kV-nál még nem érte el a telitettséget, tehát U_k növelésével I_{ion} még jelentékeny mértékben növelhető lesz. A 30-40 Gauss mágnestérrel elért háromszoros áramnövekedés részben annak köszönhető, hogy a mágnesek ugy vannak elhelyezve, hogy a kisülési térben radiális irányu, mig a kihuzó terében tengelyirányu mágnesteret adjanak. Ugyanis a kisüléshez az előbbi, a kihuzáshoz pedig az utóbbi irányu mágnestér az optimális /5/. Ez a mágnestér-elrendezés megszüntette a szekunder-elektronok ballonlyukasztó hatását is, mivel a szekunder-elektronok a tér eltéritő hatására nem fókuszálódnak egy pontban.

Kiértékelés

Láthatjuk, hogy a gömbi geometriával rendelkező hosszu élettartamu ionforrásnak a továbbfejlesztésével egy olyan nagyáramu ionforrás nyerhető, amely a gyorsitóknál előirt követelményeket minden tekintetben kielégiti. Nagyobb kihuzófeszültség alkalmazása esetén az ionáram még tovább növelhető, gázfogyasztása pedig csökkenthető, a csatornában megfelelő helyen elhelyezett blende segitségével, vagy a csatorna hosszának növelésével, ami az ionáramot még nem csökkentené jelentős mértékben, mivel az $I_{ion}/l_k/$ görbe az 5-6 mm környezetében még elég lapos /8. ábra/.

Megvizsgálva különböző szempontok szerint az ionforrás teljesitőképességét, a következőket kapjuk:

Az egységnyi gázfogyasztásra eső ionáram:

$$10 \text{ mA}/30 \text{ cm}^3 = 330\ \mu\text{A}/\text{cm}^3.$$

Az egységnyi iváramra eső ionáram:

$$\frac{I_{ion}}{I_{iv}} = 10 \text{ mA}/22 \text{ mA} = 0{,}46$$

ahol I_{iv} = a kisülésben folyó elektronáram.

Perveancia:

$$6.10^{-7}\ \text{A.V}^{-3/2}$$

Élettartam:

az eddigi 300 órás élettartam-vizsgálat után az ionforrás elektródái és szigetelő alkatrészei a további müködésre alkalmas állapotban vannak és igy tovább müködtetjük a teljes élettartam meghatározása céljából.

I r o d a l o m

1 Vályi L., Gombos P., Roósz J.: KFKI Közl. 12, 461 /1964/
2 А.Н. Сербинов, В.И. Морока П.Т.Э. 5. I960. 27
3 Thonemann, P.C., Harrison, E.R.: AERE GP/R 1190.
4 Prelec, K.: Nucl. Instr. 26, 320 /1964/
5 Krammer, G., Benoit-Cattin, P. et al: Nucl. Instr. 30, 123 /1964/

Érkezett: 1966 máj. 12.
KFKI Közl. 14.évf. 5.szám, 1966.