

Vol. 14. No. 3. 1966

**КФИ**

**KÖZLEMÉNYEK**

**ОБЩЕНИЯ ЦЕНТРАЛЬНОГО ИНСТИТУТА ФИЗИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ**

**REPORTS OF THE CENTRAL RESEARCH INSTITUTE FOR PHYSICS**

Szerkeszti: Ádám András  
Главный редактор: А. Адам  
Editor: A. Ádám

A KÖZPONTI FIZIKAI KUTATÓ INTÉZET KIADÓI CSOPORTJA  
ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ГРУППА ЦЕНТРАЛЬНОГО ИНСТИТУТА ФИЗИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ  
PUBLISHING GROUP OF THE CENTRAL RESEARCH INSTITUTE FOR PHYSICS  
BUDAPEST, 114. POB 49.

Technikai szerkesztő: Nagy Imréné  
Megjelent: 1966. jun. 5.

Példányszám: 320  
Rotaszám: 2581

A kiadásért felelős: Jánossy Lajos

Megjelenik: kéthavonta  
Előfizethető: az MNB 100.015-70 bevételi számlán  
Előfizetési díj: egyes szám 5,-Ft, egy évre: 30,-Ft /6 szám/



# KFKI

## KÖZLEMÉNYEK

### T A R T A L O M

1. Farkas Győző, Náray Zsolt és Varga Péter: Rubinlaser nagy fényteljesítmények előállítására . . . . . 129
2. M.Dr.Császár Lili, Csillag László, Kertész Iván és Varga Péter: Laser energia mérése optikai kaloriméterrel . . . . . 137
3. Bakos József, Hering Jenő, Kertész Iván, Kiss Árpád és Varga Péter: Rubin laser-impulzus energiájának mérése fénynyomás segítségével, balisztikus torziós ingával . . . . . 142
4. Csillag László és Salamon Tamás: He-Ne vörös gázlaser intenzitásának vizsgálata a nyomás, keverékarány és gerjesztő áram függvényében . . . . . 149
5. Németh Géza: Bessel-függvények Császár-sorfejtése  $I_{J_0}(x)$  és  $N_{J_0}(x)$  . . . . . 157
6. Bakos József, Fűrjes Józsefné, Szigeti János: Vákuumszelepek és tolózárak 10, 20, 32, 40 mm belső átmérővel . . . . . 170
7. Kiss Gábor: A jelalakdiszkrimináció által nyerhető információ számítása és értékelése . . . . . 173
8. Heidt János, Gombos Ernő és Tüdős Ferenc: Nitrozovegyületek redukálása és néhány pikrilhidrazin származék előállítása . . . . . 183



## Резюме

### 1. ОКГ на рубине для получения высоких мощностей

Д. Фаркаш, Ж. Нараи и П. Варга

Разработан ОКГ на рубине, работающий и в нормальном режиме и с изменением добротности. В лазер входят рубины до максимальных размеров  $l = 200$  мм и  $\phi = 15$  мм. Рубин помещается в общий фокус двух эллиптических цилиндров. В других двух фокусах цилиндров находятся две ксеноновые лампы, с максимальной энергией вспышки по 10 квт/сек и максимальных размеров  $l = 260$  мм и  $\phi = 20$  мм.

Резонатор состоит из двух легко полупроницаемых зеркал, один из них открывается с ячейкой Керра. Усредненная мощность в нормальном режиме  $10^4$  вт, и в режиме с изменением добротности  $10^7$  вт.

### 2. Измерение энергии излучения лазеров с оптическим калориметром

М.Др. Лили Часар, Л. Чиллаг, И. Кертес и П. Варга

Разработан микрокалориметр для измерения энергии ОКГ на рубине и мощности ОКГ на смеси He-Ne. Калориметр состоит из черного тела в вакууме, температура черного тела измеряется термпарой.

### 3. Измерение энергии импульса ОКГ на рубине посредством измерения давления света с баллистическими крутильными весами

Й. Бакош, Е. Херинг, И. Кертес, А. Киш и П. Варга

Разработаны вакуумные баллистические крутильные весы для измерения давления света, устранены радиометрические эффекты, нарушающие измерения. Точность измерения составляет 6 %.

4. Исследование интенсивности ОКГ на смеси He - Ne на длине волны 0,63 мк в зависимости от давления и состава газа и возбуждающего тока

Л. Чиллаг и Т. Шаламон

Исследованы лазеры разных диаметров при возбуждении с квази-прямым током. Измерена зависимость интенсивности от тока, давления и состава газа. Состав менялся в интервале  $P_{He} : P_{Ne} = 2:1 - 20:1$ . Измерения подтверждают предыдущие выводы, касающиеся оптимального значения тока и давления [4] и в дальнейшем дадут сведения об оптимальном режиме работы ОКГ.

5. Разложения в ряды по полиномам Чебышева бесселевых функций I.

Г. Немет

В статье мы занимаемся определением разложений бесселевых функций. Эти ряды являются очень целесообразными для практики, так как они сходятся быстро. В случае  $0 \leq x \leq a$  коэффициенты этих рядов уменьшаются сильнее - приблизительно на 4 фактора по отношению к коэффициентам рядов Тейлора. В случае  $x \geq a$  вместо расходящихся асимптотических рядов определяем сходящиеся ряды. Порядок сходимости наших рядов имеет следующий вид

$$e^{-2\sqrt{2an}} O(n^{-3/4})$$

Для вычисления коэффициентов определяем рекурсионные соотношения.

6. Вакуумные вентили и задвижки с внутренним диаметром 10, 20, 32 и 40 мм

Й. Бакош, Каталин Фюреш, Я. Сигети

Разработан тип вакуумной задвижки с внутренним диаметром 20, 32 и 40 мм и тип коленного вентиля с ф 10 и 20 мм. Вакуумные элементы работают до  $10^{-6}$  торр.

7. Расчет и оценка информации, полученной путем дискриминации сигнала по форме

Г. Киш

Неодинаковость формы сцинтилляционных сигналов выражается в виде удобной для оценки разности количества заряда, набранного за различные промежутки времени. Величина и рассеяние сигнала разности зависит от характеристик сцинтиллятора, от выбора и установки разделительного контура. Работа определяет эти зависимости и указывает на несколько простых возможностей их использования.

8. Восстановление нитрозосоединений и получение некоторых производных пикрилгидразина

Я. Геидт, Э. Гэмбеш и Ф. Тюдеш

Были восстановлены нитрозосоединения с помощью  $\text{LiAlH}_4$ . Нитрозосоединения-С восстанавливаются в азобензол, а из нитрозосоединений -N можно получить асимметрические гидразины. Восстановление соединением  $\text{LiAlH}_4$  дифенилнитрозамина при комнатной температуре обычно ведет к образованию дифениламина. С большим избытком  $\text{LiAlH}_4$  нам удалось восстановить некоторые ароматические нитрозамины в гидразин без образования вторичных аминов. Из асимметрических гидразинов при помощи пикрилхлорида были получены производные дифенил-пикрилгидразина, окисляемые в свободные радикалы.

S u m m a r i e s

1. Ruby Laser for Producing High Light Power Outputs

Gy.Farkas, Zs.Náray and P.Varga

A ruby laser is described which can be operated both in normal and Q-switched mode. The ruby rod /max.sizes: 200 x Ø15 mm/ in the laser can be replaced. The ruby crystal is placed into the common focal line of two elliptical cylinder mirrors, while in their other two focal lines xenon flash lamps are mounted/max.sizes: 260xØ20mm/, each giving a maximum light output of 10 kWsec.

The resonator is composed of two interchangeable semitransparent mirrors, one of which can be disconnected by a Kerr-cell in the case of Q-switching for the starting time interval of the excitation of ruby. For the normal laser operation the observed average power is  $10^4$  W, while in the case of Q-switching the obtained peak power is  $10^7$  W.

2. Optical Calorimeter for Laser Energy Measurements.

Dr.L.Császár, L.Csillag, I.Kertész and P.Varga

A well adjustable optical calorimeter is described. The calorimeter is a quasi-black-body and its temperature variation is measured by a thermocouple. The device was used for measuring the output energy of a ruby laser and the output power of a He-Ne gas laser.



3. Ballistic Torsion Pendulum for Measuring the Energies of Laser Pulses

J.Bakos, J.Hering, I.Kertész, Á.Kiss and P.Varga

A ballistic torsion pendulum constructed to measure the light pressure of light pulses produced by a ruby laser is described. The disturbing radiometer effects have been eliminated. The laser pulse energy can be measured to an accuracy of about 6 percent.

4. Investigation of the Intensity Variations with the Gas Pressure, the Mixing Ratio and the Excitation Current for He-Ne Red Laser

L.Csillag and T.Salamon

The intensity variations of quasi-d.c. excited laser tubes with the current and the gas pressure have been investigated in the range of mixing ratios  $p_{He}/p_{Ne}=2/1 \div 20/1$ . The results obtained confirm the previous statements of Gordon and White [4] on optimum gas pressure and excitation current and add further data concerning optimum filling and operation parameters.

5. Chebyshev Expansion of Bessel Functions I  $J_\nu(x)$  and  $N_\nu(x)$

G.Németh

Useful Chebyshev expansions of the Bessel functions  $J_\nu(x)$  and  $N_\nu(x)$  are discussed. These expansions are very convenient for practical calculations because of their rapid convergence. For  $0 \leq x \leq a$  the convergence of the Chebyshev series exceeds by about  $4^{-n}$  that of the corresponding Taylor-series. For  $x \geq a$  the Chebyshev-series are convergent in contrast with the conventional asymptotical series. The convergence for  $x \geq a$  is of the order

$$e^{-2\sqrt{2}an} O(n^{-3/4}).$$

A recursion formula is given for determining the Chebyshev expansion coefficients.

6. Vacuum Valves and Transparent Valves with 10, 20, 32, 40 m i.s. Diameter

J.Bakos, Mrs.K.Fürjes and J.Szigeti

Some vacuum transparent valves with 20, 32, 40 mm i.s. diameter and vacuum valves with 10 and 20 mm i.s. diameter, which are very useful up to pressures of  $10^{-6}$  torr are described.

7. Calculation and Evaluation of Information Obtainable from Pulse Shape Discrimination

G.Kiss

The differences between scintillation pulse shapes are evaluated from the properly weighted difference between the charges collected over different time intervals. The amplitude and spread of the difference-signal depend on the characteristics of the scintillator, the choice and setting of the sorting circuit. In this paper these relations are formulated and some possibilities of their application are shown.

8. Reduction of Nitroso Compounds and Production of Picryl Hydrazine Derivates

J.Heidt, E.Gömbös and F.Tüdös

Nitroso compounds have been reduced with  $\text{LiAlH}_4$ . Nitroso compounds reduce to asobenzene. N-nitroso compounds offer the possibility for the production of asymmetric hydrazines. The reduction of diphenyl with  $\text{LiAlH}_4$  at room temperature results usually in the formation of diphenyl amine. Some of the aromatic nitrosamines can be reduced with  $\text{LiAlH}_4$  in large excess to hydrazine without the parallel production of secondary amines. With the addition of picryl chloride to asymmetric hydrazines diphenyl picrylhydrazine derivates can be produced which oxidize to free radicals.

## RUBINLASER NAGY FÉNYTELJESÍTMÉNYEK ELŐÁLLÍTÁSÁRA

Irta: Farkas Győző, Náray Zsolt és Varga Péter

### Összefoglalás

Kidolgozásra került egy rubinlaser, mely mind normál, mind  $Q$  - kapcsolású üzemmódban üzemeltethető. A laserben a rubinrud cserélhető /maximális mérete  $l=200 \times t=15$  mm/. A rubinkristály két elliptikus hengertükör közös gyújtóvonalában van elhelyezve, míg a másik gyújtóvonalában egy-egy maximálisan 10 kWsec fényenergia adó xenon töltésű flash-cső /maximális méretük  $\varnothing=260 \times \varnothing=20$  mm/ helyezhető el.

A rezonátor két cserélhető féligáteresztő tükörből áll, melyek közül az egyik  $Q$  kapcsolású üzemmódban Kerr-cellával a rubin gerjesztésének kezdeti időtartamára leválasztható. A laser normál üzemében az észlelt átlagteljesítmény  $10^4$  W, míg  $Q$  kapcsolású esetén  $10^7$  W csúcs-teljesítmény adódik.

### 1. Bevezetés

A fizikában már hosszabb ideje ismeretesek elméletileg megjósolt, de a szükséges sugárzási teljesítménysűrűség előállítására alkalmas módszer hiánya folytán kísérletileg nem igazolt effektusok. Ilyenek például a Brillouin-szórás [1], [2] a többfotonos abszorpció [3], [4], a kétfotonos fotoeffektus [5], [6] és a nemlineáris optika több jelensége is.

A fentemlitett effektusok a modern fizika értelmezése, új fizikai felismerések és az alkalmazott kutatás szempontjából egyaránt érdeklődésre számítanak és ezért az elmúlt években a szilárdtest-laserek fejlődését - melyek alkalmasnak látszottak az említett problémák tanulmányozásához szükséges sugárzási teljesítménysűrűségek előállítására - komoly figyelem kísérte.

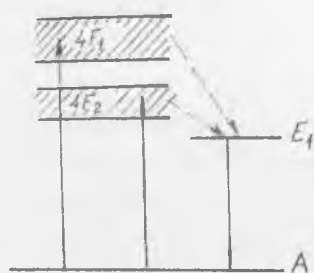
A Fizikai Optikai Laboratóriumban immár 12 éve foglalkozunk a modern fizika egyes alapkérdéseit érintő optikai problémák kísérleti

vizsgálatával [7], [8], [9], [10] melyek során ujabban gázlaserek [11] alkalmazására is sor kerül. Mivel szándékunkban áll vizsgálatunkat a közeljövőben a fentemlitett effektusokra, valamint egyes elemi részek aaptulajdonságainak meghatározására végzett kísérletekre kiterjeszteni, szükségessé vált az irodalmi ismeretek felhasználásával - nagy sugárzási teljesítménysűrűséget igénylő fizikai kísérletek számára alkalmas - speciális nagyteljesítményű rubinlaser kidolgozása. A rubinlaser kidolgozásánál az alábbi előzetes kísérleti célkitűzések által támasztott igényeket vettük figyelembe:

- dielektrikumokban impulzusszerűen megjelenő fény hatására fellépő tranziensek vizsgálata /Vorläufer [12], [13] /;
- szabad vagy kevésbé kötött elektronok viselkedése nagy elektromágneses térerősségek esetén;
- az abszorpció időbeli kialakulása nagy sugárzási teljesítménysűrűségek esetén;
- a Brillouin-szórás pontosabb vizsgálata.

## 2.§. A lasereffektus rubinban

A laser működésének alapfeltétele, hogy egy adott magasabb energiaállapotban több atom legyen gerjesztve, mint egy adott alacsonyabb állapotban. Ismeretes, hogy rubin / $C^{+++}$  ionokkal szennyezett  $Al_2O_3$  / esetében ez az ún. populáció inverzió optikai pumpálás segítségével érhető el. A rubint 4000-6000 Å hullámhosszúságú fényvel világítva meg, a



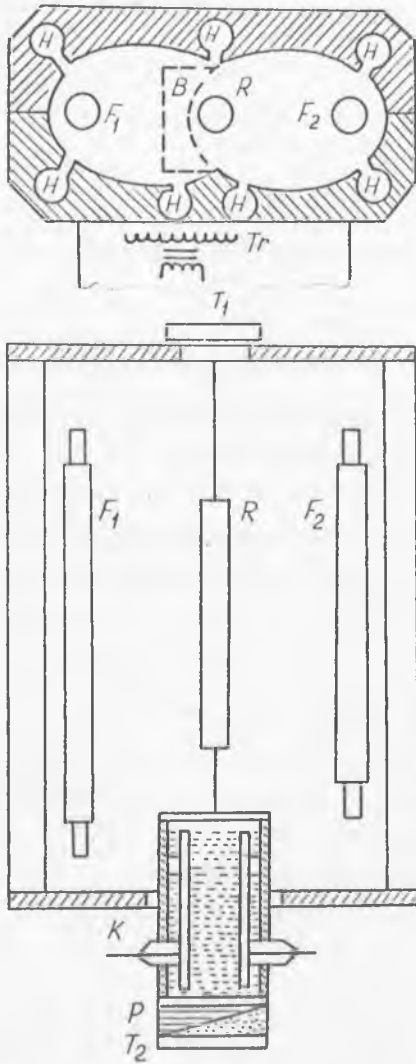
1. ábra

A rubin energiasémája

kristály felületére eső fényenergia a  $4F_1$ ,  $4F_2$  sávokban abszorbeálódik /1. ábra/. Ezekből az állapotokból az atom, relaxációs átmenettel az  $E_1$  állapotba jut. Elég nagy intenzitású fény esetén elérhető, hogy az  $E_1$  gerjesztett állapotban több atom van, mint az alapállapotban, vagyis az  $E_1$  és az A nivóra vonatkoztatva kialakul a populáció inverzió. Ennek eredményeképpen az  $E_1 - A$  átmenetben sugározza ki az anyag a 6943 Å hullámhosszúságú lasersugárzást.

### 3.§. A laser felépítése

A laser felépítését a 2. ábra mutatja. Mint azt az 1.§-ban már említettük, az általunk kidolgozott szilárdtestlaser megvalósításánál alapvető szempontként szerepelt az, hogy a laser működését, tulajdonságait meghatározó elemek /rubin, gerjesztő flash-ek, rezonátor tükör/ könnyen cserélhetőek legyenek, egyrészt a fentemlített kísérletek által támasztott - részben különböző teljesítmény stb. - igények, másrészt a laser gyors javítása érdekében.



2. ábra

A laser optikai része

Szükség esetén a rubin egyetlen flash-csővel is gerjeszthető, ez esetben a gerjesztés hatásfokának növelésére egy  $\beta$  betét helyezhető be a reflektorba a 2. ábrán látható helyre. A gerjesztő flash-csövek gyújtására a  $T_r$  nagyfeszültségű transzformátor szolgál, mely a reflektor alatt nyert elhelyezést. A rubin, valamint a flash-csövek hűtésére megfelelően megtisztított sűrített levegő szolgál, mely a H jelű nyílásokon áramlik be. A rezonátort a finom-állító csavarokkal ellátott foglalatokban elhelyezett dielektrikum tükörpár  $T_1$  és  $T_2$  alkotja.

Az R rubin két elliptikus hengertükör közös gyújtóvonalában van elhelyezve olyan tartókon, melyek a rubin reprodukálható befogását biztosítják. A tartókban  $\leq 15$  mm átmérőjű, ill.  $\leq 200$  mm hosszúságú rubin rudak helyezhetők el. A laser gerjesztésére a két elliptikus hengertükör nem egybeeső gyújtóvonalában elhelyezett egy-egy Xe töltésű flash-cső /F/ szolgál. A csövek csatlakoztatását és rögzítését biztosító foglalatok állíthatók és lehetővé teszik 200 mm hosszú flash-csövek alkalmazását.

Szükség esetén a rubin egyetlen flash-csővel is gerjeszthető, ez esetben a gerjesztés hatásfokának növelésére egy  $\beta$  betét helyezhető be a reflektorba a 2. ábrán látható helyre. A gerjesztő flash-csövek gyújtására a  $T_r$  nagyfeszültségű transzformátor szolgál, mely a reflektor alatt nyert elhelyezést.

A rubin, illetve a rezonátortükrök gyors beállítása a rubin tengelyében elhelyezett autokollimációs távcsővel lehetséges.

A rubin és a  $T_2$  tükrök között helyezkedik el a K Kerr - cellából és a P polarizátorból álló optikai zár.

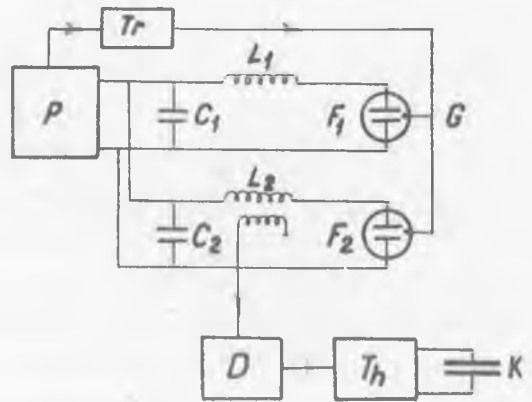
A laser működtetéséhez meglehetősen komplex elektronikus berendezés szükséges. Az elektronika lényegében:

- a/ a flash-lámpák feszültségellátását és gyújtását,
- b/ a Kerr-cella feszültségellátását és nyitását,
- c/ a laser fényimpulzus megjelenésének jelzését és az a/ és b/ funkciók időzítését végzi.

Ugyancsak az elektronika feladata:

- balesetelhárításra hivatott reteszelés biztosítása, illetve a hang-, és fényjelzés kiadása is.

Az elektronikus berendezés blokkvázlata a 3. ábrán látható. A P tápegység előre beállítható /max. 3 kV/ feszültségre tölti a  $C_1$  ill.  $C_2$  kondenzátortelepet /a jelenleg használt telep kapacitása maximálisan  $2 \times 1100 \mu F$  /. A vezérlőberendezésen beállított kondenzátorfeszültség elérésekor az F jelű flash-csőkre a  $T_r$  transzformátorról gyújtóimpulzus / G / jut, ennek hatására a lámpák begyujtanak és a telepek az  $L_1$  ill.  $L_2$  önindukción / $800 \mu H$  / keresztül kisülnek. Mivel a flash-csőveken átfolyó kezdőáram 1000 A , külön gondot kell fordítani, hogy az áram a megfelelő vastagságú vezetékben át folyjon és az áramkör összes ellenállása ne haladja meg a néhány mohm-ot.



3. ábra

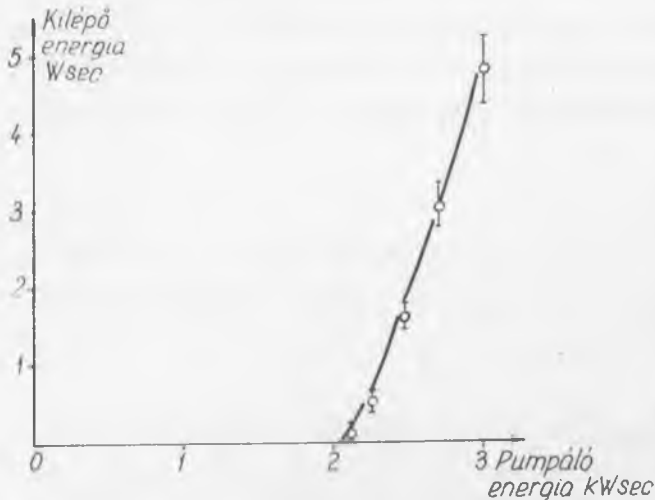
A lasert működtető elektronika

Q -kapcsolású üzemben gondoskodni kell a Kerr-cellának a pumpálásához képest pontosan időzített nyitásáról. Az időzítő berendezést az egyik flash-lámpa árama indítja el, hogy kiküszöbölhető legyen a flash-cső

bizonytalansága okozta jitter. Az  $L_2$  tekercsről inductíven kicsatolt jel egy 0,1 - 3 msec között szabályozható D késleltető fokozatot indít. A késleltető fokozat megfelelő beállításával elérhető, hogy a lasersereffektushoz szükséges visszacsatolás csak az optimális populáció inverzió elérése után jöjjön létre. A megfelelő késés után a  $T_h$  fokozat 50 nsec alatt kisüti a 10 kV feszültségre kapcsolt K Kerr cellát. Mindkét üzemmódban a laser cca. percenként egyszer működtethető. Az ismétlési frekvencia ezen értékét lényegében a hűtési viszonyok határozzák meg.

#### 4.§. Mérési eredmények normál laser üzennél

A 2. ábra szerinti elrendezésben egy  $\emptyset$  10 mm x 150 mm rubin-kristályt alkalmaztunk, melynek geometriai és kristálytani tengelye egymással  $60^\circ$ -t zár be. A rubin gerjesztését két egyenként 550 kapacitású 3 kV feszültségre töltött kondenzátortelepről táplált  $200 \times \emptyset 15$  mm effektív világító térfogatu flash-cső végezte. A rezonátort alkotó  $T_1$ , ill.  $T_2$  tükrök reflexiós tényezője  $r_{T_1} = 95\%$ , ill.  $r_{T_2} = 7\%$  volt. Ebben a mérésben csak egy tükröt használtunk;  $r_{T_2}$  a rubin véglapjára vonatkozó érték. A nyaláb divergenciájára, energiájára, illetve időbeli lefutására az alábbi eredmények adódtak:



4. ábra

A kilépő energia a pumpáló energia függvényében

#### a/ A nyaláb divergenciája

A megfelelően gyengített nyalábot fotolemezre ejtve, meghatározható az intenzitás eloszlása a nyalábon belül. A nyaláb átmérője a laser által emittált fényimpulzus teljesítményével növekszik. A nyaláb divergenciája teljesítménytől függően  $\theta_n = 0,5 - 1 \times 10^{-2}$  radian.

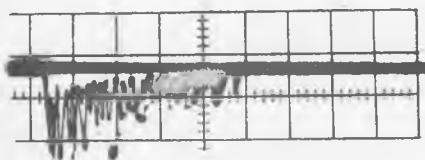
#### b/ A laserimpulzus energiája

A fényimpulzus energiáját kaloriméterrel [14] határozták meg [14]

roztuk meg. A fényimpulzus energiája a gerjesztő flash-csővekbe betáplált energia függvényében a 4. ábrán látható. A fent megadott gerjesztéssel egy fényimpulzus energiája 5 Wsec volt. A 4. ábra szerinti görbén jól látható, hogy a gerjesztő flash csővekbe betáplált energiának van egy kritikus energiaszintje, amely alatt nem jön létre lasereffektus. A kritikus energia fölött lineáris a betáplált és a kimenő energia közötti összefüggés. A görbe linearitása mutatja, hogy megfelelő pumpálás és hűtés esetén az adott rubin teljesítménye is még számottevően fokozható.

### c/ Időbeli viszonyok

A normál üzemi laser jelét az 5. ábra mutatja. Az ábrán jól látható, hogy a laserimpulzus 0,6 msec-ig tart, de ezen az időn belül



az intenzitás erősen fluktuál /spiking/. Az átlagteljesítmény  $10^4$  W. Egy  $f = 1$  cm fókusz távolságú lencsének gyújtósíkjában  $d = f \theta_n$  átmérőjű felületen a teljesítmény felületi sűrűsége  $10^8$  W/cm<sup>2</sup>.

5. ábra

A laser jele normál üzemben.  
Időbázis 0,1 msec/cm

### 5.§. Mérési eredmények Q kapcsolásu üzemenél

A kristály, a gerjesztés és rezonátor adatai megegyeznek a 4.§-ban szereplő adatokkal. A lasernyaláb jellemzőire a következő mérési eredményeket kaptuk:

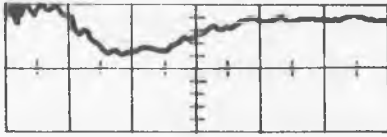
#### a/ A nyaláb divergenciája

A 4.§-ban említett eljárással megegyező módon mérve, a divergencia Q -kapcsolásu üzemmódban  $\theta_Q < 0,5 \times 10^{-2}$  radián. Vagyis - irodalmi adatokkal [15] megegyezésben  $\theta_Q < \theta_n$ .

#### b/ A laserimpulzus energiája

Q -kapcsolásu üzem esetén olyan gerjesztést alkalmaztunk, hogy az energia egy fényimpulzusban 0,5 Wsec legyen. Erősebb gerjesztés esetén ul. a laser a Kerr-cella nyitása nélkül is elindult, mert itt már a rubin véglapjain létrejövő cca. 7%-os reflexió is elegendő visszacsatolást ad. A rubin véglapjaira felvitt reflexiómentesítő réteggel az egy impulzus energiája még jelentősen fokozható.





6. ábra

A laser jele giant-pulse  
üzemben.  
Időbázis 50 nsec/cm

c/ Időbeli viszonyok

A Q -kapcsolású üzemből a laser által kibocsátott fényimpulzus félszélessége 50 nsec /6. ábra/. A fényimpulzus alatt a csúcsteljesítmény 10 MW. A fényimpulzust egy  $f = 1$  cm lencsével formálva

$$\sigma = 4 \cdot 10^{11} \text{ W/cm}^2$$

sugárzási teljesítménysűrűség állítható elő egy  $d = f \theta_Q = 5 \cdot 10^{-3}$  cm átmérőjű felületen. Ez annyit jelent, hogy a kér-

déses felületen maximálisan

$$E = [120 \pi \sigma]^{1/2} = 10^7 \text{ Volt/cm}$$

elektromos térerősség lép fel.

Köszönetünket fejezzük ki a laser mechanikai tervezéséért Hering Jenőnek, a mechanikai kivitelezésért műhelyünk dolgozóinak, az elektronikus tervezésért és kivitelezésért Koch Józsefnek, Thaler Györgynek, valamint Ádám Ferencnek és csoportjának, a tükrök készítéséért Bakos Józsefnek, a laser beállításáért és a mérésekben nyújtott közreműködésért Czigány Imrének, Imre Lajosnak, Kertész Ivánnak és Titschka Kálmánnak. Külön köszönet illeti Jáklit Györgyöt a Kerr-cella nagy tisztaságú nitrobenzol töltetének előállításáért.

I r o d a l o m

- [1] Brillouin, L.: Ann. de Physique, 17, 88 /1922/
- [2] Brillouin, L.: La diffraction de la lumière par des ultrasons /Paris, Herrmann, 1933/
- [3] Goepfert-Mayer, M.: Ann. d. Physik, 9, 273 /1931/
- [4] Wheeler, J.: JOSA 37, 813 /1947/
- [5] Smith, R.L.: Phys. Rev. 128, 2225 /1962/
- [6] Bunkin, F.V., Fjodorov, M.V.: Zs.E.T.F. 48, 1341 /1956/

- [ 7 ] Ádám F., Jánossy L., Varga P.: Acta Phys. Hung. 4, 4 /1955/
- [ 8 ] Jánossy L., Náray Zs.: Acta Phys. Hung. 7, 403 /1957/
- [ 9 ] Jánossy L., Náray Zs.: Nuovo Cim. Suppl., 2, 588 /1959/
- [10] Farkas Gy., Jánossy L., Náray Zs., Varga P.: Acta Phys. Hung., 28, 199 /1965/
- [11] Jánossy M., Csillag L., Kántor K.: Phys. Lett. 18, 124 /1965/  
Bakos J., Csillag L., Kántor K., Varga P.: KFKI Közl. 13,  
195 /1965/  
Csillag L., Salamon T.: KFKI Közl. 13, 199 /1965/
- [12] Brillouin, L.: Ann. d. Phys. 44, 203 /1914/
- [13] Sommerfeld, A.: Ann. d. Phys. 44, 177 /1914/
- [14] M. Császár L., Csillag L., Kertész I. és Varga P.: KFKI Közl. 14, 137 /1966/

Érkezett: 1965. nov.11.

KFKI Közl. 14.évf. 3.szám, 1966.

## LASER ENERGIA MÉRÉSE OPTIKAI KALORIMÉTERREL

Irta: M.Dr.Császár Lili, Csillag László, Kertész Iván és Varga Péter

### Összefoglalás

Jól kezelhető optikai mikro-kalorimétert készítettünk. A kaloriméter vákuumban elhelyezett fekete test, amelynek felmelegedését termoelem méri. Felhasználtuk rubin-laser energiájának és He-Ne gázlaser teljesítményének mérésére.

### Bevezetés

Az impulzus laserek egyik leglényegesebb jellemzője igen nagy /10 kW-10 GW/ pillanatnyi teljesítményük. Érthető tehát, hogy energiájuk meghatározása fontos, de nem túl egyszerű feladat. A hagyományos mérőeszközök érzékeny felületi rétegénél jóval nagyobb tömegű abszorbenst kell alkalmaznunk, és olyan rendszert kell konstruálnunk, mely képes az igen rövid időtartamu /10 nsec-1 msec/ laser impulzus energiáját a méréshez szükséges ideig tárolni.

A kisebb teljesítményű, folytonosan működő gázlaserek teljesítményének mérése valamivel egyszerűbb feladat.

Nézzük át röviden az alapvető mérési módszereket.

### Multiplier

T.H.Maiman és munkatársai [1] kis teljesítményű impulzus laserük energiáját még a fényt közvetlenül a fotokatódra ejtve mérték a fotomultiplier áramának integrálásával. Nagyobb energiáknál általában az szokásos, hogy a diffúzan, nagy térszögbe szórt sugárzás ismert hányadát detektálják kalibrált multiplierrel.

### Nem lineáris effektus

Ha nagy intenzitású sugárzás olyan kristályon halad át, amelynek nincs inverziós centruma /pl. kvarckristály/, a keletkező statikus polarizációból meghatározhatjuk a laser impulzus energiáját [2].

### Mágneses tulajdonság

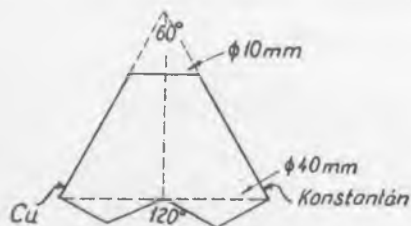
Egyes anyagok /pl. gadolinium/ szuszceptibilitása hőmérsékletfüggő. Ha tehát egy mágneses térben lévő torziós ingára gadolinium lemezkét szerelünk, mely a fényimpulzus hatására felmelegszik, az ingára ható erő változásából kiszámíthatjuk a beeső energiát [3].

### Fénynyomás

A laser szokatlanul nagy energiája lehetővé teszi, hogy energiamérést végezzünk a fénynyomás alapján [4]. A laboratóriumunkban is elvégzett mérésnél [5, 6] egy torziós inga végén lévő tükrökre esik a laser-sugár és a fénymutató segítségével leolvasott elfordulásból a fénynyomás, ebből pedig az energia meghatározható.

### Optikai kaloriméter

A kaloriméter legelterjedtebben használt, rendkívül egyszerű és jól kezelhető energiamérő eszköz, lényegében kis hőkapacitású üreg, melyből a sugárzás csak többszöri reflexió után léphet ki, miután energiáját csaknem egészében leadta. A felmelegedést általában ellenállás-változás segítségével határozzák meg [7].



1. ábra

Optikai kaloriméter sematikus képe a réz-konstantán termoelem végződéseivel

Az általunk készített kaloriméterben az érzékelő üreg egymásba tolt kupokból áll /lásd 1. ábra/. A külső csonkakap nyílásán bejutó sugár a belső kisebb kupra esik, és többszöri visszaverődés során felmelegíti a vékony vörösréz fóliából készült detektort. A külső kup aljára réz-konstantán termoelem van hegesztve. Az elnyelő fekete testet vékony üvegarok tartják egy üvegedényben, melyben a

vezetési hővesztések csökkentésére  $10^{-6}$  Hgmm-es vákuum van. Több, különböző méretű, ill. érzékenységu kalorimétert készítettünk. A belépő nyílás átmérője a szükséglet szerint 5-10 mm, a falvastagság az érzékenységtől függően 0,05 - 0,1 mm volt /lásd 1. táblázat/.

1. táblázat

Kaloriméter	Érzékenység(K) (joule/ $\mu$ V)	$\tau$ /sec/	Bemenő nyílás /mm/	Fóliavas- tagság /mm/
A /II/	$4,1 \cdot 10^{-3}$	208	5	0,05
B /IV/	$4,1 \cdot 10^{-2}$	360	10	0,1
C /V/	$4,06 \cdot 10^{-2}$	-	5	0,1

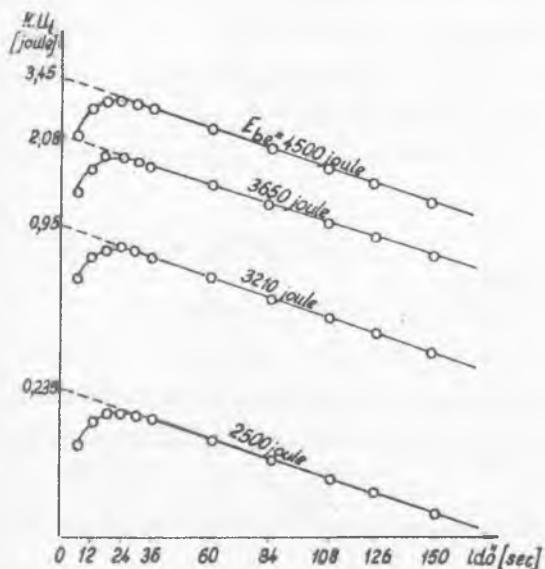
Laser impulzus energiájának mérése

Kis hőmérsékletkülönbségekre a detektor által elnyelt energia és a termoelem  $U_t$  feszültsége közt az

$$E = \frac{mc}{\eta} U_t = K \cdot U_t \quad |1|$$

lineáris összefüggés áll fenn, ahol  $mc$  a hőkapacitás,  $\eta$  pedig a termoelemre jellemző konstans.  $U_t$  mérését galvanométerrel végezhetjük. A detektor-ablak és esetleges lencsék veszteségeit külön empirikusan meghatározhatjuk. Ha a  $\tau$  hűlési idő sokkal nagyobb azon  $\tau_0$  időnél, mely alatt a detektoron a hőmérsékleti egyensúly beáll /esetünkben  $\tau$  perc,  $\tau_0$  másodperc nagyságrendű/, az  $E$  energia időbeli változása  $t > 3\tau_0$  esetén

$$E(t) = E(0) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad |2|$$



2. ábra

A detektor  $U_t$  feszültségének időbeli változása  $K \cdot U_t$  -logaritmikus léptékben.  $t = 0$  a laserimpulzus "becsapódásá"-nak pillanata

feltételezett veszteségek. /Pl. a beeső laser sugár több száz fokkal felmelegíti a közvetlenül ért felületet, melynek a hőmérsékleti egyensúly beállta előtti sugárzási veszteségeit nem vettük figyelembe./

Gázlaser teljesítményének mérése

A kupos detektorral folyamatos /általában gáz/ laser  $W$  teljesítménye is mérhető. Ekkor

$$\frac{dE}{dt} = W - \frac{1}{\tau} E \quad / 3 /$$

egyenletből  $t = \infty$  -nél, azaz az egyensúly beállításánál

$$W = \frac{E(\infty)}{\tau} \quad / 4 /$$

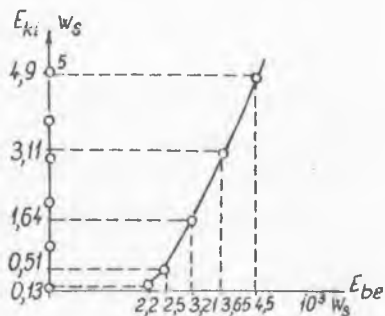
Mérési eredmények, konkluzió

Az optikai kaloriméter jól használható műszernek bizonyult. A másik abszolút mérőműszerrel a fénynyomásmérővel /a hibán belül/ egyező eredményeket kaptunk [6], bár az elméleti várakozásoknak megfelelően az inga a radiométereffektusok miatt többet [6], a kaloriméter a vesz-

Felvéve tehát  $U_t(t)$  /2/ szerinti időbeli változását a  $t=0$  pillanatra extrapolálva /lásd 2. ábra/, a detektor  $K$  érzékenységének ismeretében az energia számolható. A különböző energiákon kapott és logaritmikus léptékben ábrázolt lecsengési görbék párhuzamossága igazolja a /2/ egyenlet érvényességét.

A mérés hibája 6-8% -ra becsülhető és két részre választható. Egyik része a hőkapacitásmeghatározás pontatlanságából, ill. a termoelemnél fellépő hőmérsékleti bizonytalanságokból származik. A másik rész oka a nemlineáris effektusokból és  $\tau_0$  időn belüli extra hőveszteségből

teségek miatt kevesebbet mért. Mivel a laser energiája nem azonos az egymás utáni "lövéseknél", csak szimultán méréssel lehetne elfogadhatóan igazolni az eltérés jelenlétét.



3. ábra

A mért laser energia a betáplált /pumpáló/ energia függvényében

A harmadik ábra tanúsága szerint, mely a betáplált /pumpáló/ energia függvényében ábrázolja a kaloriméterrel mért, kijövő energiát, az irodalomból jól ismert lineáris összefüggést kaptunk /a küszöbenergia felett/, azaz a kaloriméter érzékenysége a vizsgált tartományban állandónak tekinthető. A  $\kappa = 4,1 \cdot 10^{-3}$  joule/ $\mu$ V érzékenységu kaloriméterrel egy He - Ne / = 6328 Å/ laser teljesítményére  $W = 3,6 \cdot 10^{-4}$  wattot kaptunk.

Köszönetet mondunk Majorosi Antalnak, Rózsa Károlynak és Szántó Sándornak a kaloriméter elkészítésében, Czigány Imrének, ill. Imre Lajosnak a méréseknél nyújtott segítségükért.

### I r o d a l o m

- [ 1 ] Maiman, T.H. et al.: Phys. Rev. 123, 1151 /1961/
- [ 2 ] Kama, A.K., Subramanian, M.: Proc. Symp. Opt. Masers, London, 1964., p. 601.
- [ 3 ] Ohman, Y., Rydgren, B.: Vacuum Microbalance Techn. p. 193 /1962/
- [ 4 ] Stimler, M. et al.: Rev. Sci. Instr. 35, 311 /1964/
- [ 5 ] Kiss Árpád: Rubin laser energiájának mérése fénynyomás segítségével. Diplomamunka /1965/
- [ 6 ] Bakos J., Kertész I., Kiss Á., Varga P.: KFKI Közl./megjelenés alatt/
- [ 7 ] Koozekani, S. et al.: Proc. IRE, 50, 207 /1962/

Érkezett: 1965. nov. 11.

KFKI Közl. 14.évf. 3.szám, 1966.

RUBIN LASER-IMPULZUS ENERGIÁJÁNAK MÉRÉSE FÉNYNYOMÁS SEGÍTSÉGÉVEL,  
BALLASZTIKUS TORZIÓS INGÁVAL

Irta: Bakos József, Hering Jenő, Kertész Iván, Kiss Árpád és  
Varga Péter

Összefoglalás

Készítettünk egy fénynyomást mérő ballisztikus torziós ingát, kiküszöböltük a mérést zavaró radiométer effektusokat. Az inga a laser-impulzus energiáját kb. 6% pontossággal méri.

1. Bevezetés

A laserek egyik legfontosabb jellemzője a kisugárzott energia. A nagyteljesítményű impulzus laserek rövid idő / < 1 msec / alatt viszonylag nagy energiát / 0,1 - 10 Wsec / sugároznak ki, így teljesítményük nagy, a laser-típustól függően 10 kW - 10 GW. Ilyen teljesítmény mellett a klasszikus mérőeszközök /termooszlop, bolométer/ érzékeny felületei pillanatok alatt elpárolognak. A méréshez sokkal nagyobb tömegű mérőeszközök kellene, amelyek a nagy hőmérsékleti sokkot kibírják. Másrészt, ha az energiamérés időtartama nagyobb, mint a besugárzás időtartama, a mérőrendszernek az energiát viszonylag hosszú ideig kell tárolnia.

2. Energiamérés fénynyomás alapján

Bár az elektromágneses tér által szállított impulzus

$$P = \frac{E}{c}$$

(1)

/ E az energia / makroszkópicusan igen kicsi, de laserek esetén az energia már elegendő, hogy egyetlen fényimpulzus egy elég érzékeny torziós ingát kitérítsen. Helyezzünk a torziós inga egyik karjára egy tükört. Esés a tükörrre a merőleges fénynyaláb súlypontja az inga közepétől l karhossznyira. A fellépő forgató nyomaték hatására az inga kitér. Ha a csil-



lapodás kicsi, a lengésideő pedig nagy a fényimpulzus időtartamához képest, a ballisztikus torziós inga maximális kitérése [6]

$$\varphi_{\max} = (1+R) \frac{l}{\sqrt{D\theta}} \cdot \frac{E}{c} \quad |2|$$

ahol  $R$  a tükör reflexióképessége,  $D$  a szál torziós,  $\theta$  a lengő rendszer tehetetlenségi nyomatéka.

Az elvileg igen egyszerű berendezés kivitelezésénél tekintettel kell lenni arra, hogy adott energiatranszport esetén a fény által szállított impulzus a legkisebb /  $\rho = \frac{E}{c}$  /, részecske jellegű energiatranszportnál az impulzus  $\rho = \frac{2E}{v}$ , ahol  $v$  a részecskék sebessége. Termikus mozgásnál  $v \sim 10^{-5}c$ , azaz, ha a tükrökre eső energiának csupán százvezred része fordítódik valamilyen egyirányú energiatranszportra /pl. külső hővezetés, vagy párolgás révén/, akkor ez az energiaáram már a fénynyomással összemérhető hatást ad. Ilyen zavaró körülményként a radiométereffektus léphet fel: a tükör felületére beszó energia egy része abszorbeálódik, a rövid idejű besugárzás miatt a tükör két felülete és a körülvevő gázréteg nem egyenlő mértékben melegszik fel, ami molekuláris áramláshoz vezet. E radiometrikus effektus okozta nyomás [2, 6]

$$\rho' = \frac{p}{2} \left( \sqrt{\frac{T_2}{T_0}} - \sqrt{\frac{T_1}{T_0}} \right) \quad |3|$$

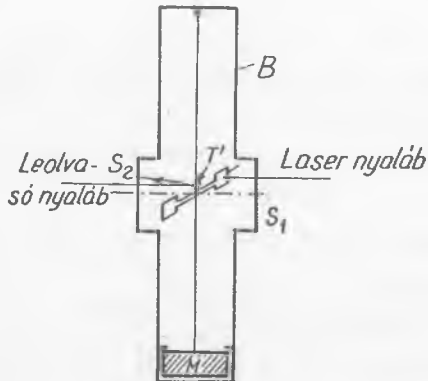
ahol  $p$  a gáz nyomása,  $T_1$  és  $T_2$  a tükör két felületének hőmérséklete,  $T_0$  a környezet hőmérséklete. Ebből meghatározható, mekkora nyomás engedhető meg a rendszerben.

Ha a tükör anyaga a felmelegedés hatására párolog, akkor ez ugyancsak egyirányú energiatranszportot hoz létre. Ezért a tükör anyagát úgy kell megválasztani, hogy az anyag párolgási hőmérséklete magas, fajhője, olvadás-és párolgási hője is nagy legyen. / Még rövid, nagyenergiájú fényimpulzusoknál is alkalmazhatók a termodinamikai megfontolások [3] ./

A technikailag számbajöhető anyagok közül a molibdén látszott legalkalmasabbnak. /Ennél jobb a többrétegű, kis abszorpciójú cérium-oxid-kriolit dielektrikum tükör./

### 3. A torziós inga kivitelezése és adatai

A torziós inga megvalósított formája az 1. ábrán látható. Az ingát a B üvegballonba helyeztük. A fény az  $S_1$  csiszolt síküvegen keresztül esik be a T ingatest egyik lemezére, amely egyuttal tükör is. A kitérés a T' tükör segítségével az  $S_2$  ablakon keresztül fénymutatóval olvasható le.



1. ábra

- A torziós inga sematikus képe
- B üvegballon
- $S_1$  és  $S_2$  síküvegcsiszolatok a belépő lasernyaláb számára
- T' leolvasó tükör
- M feszítő súly

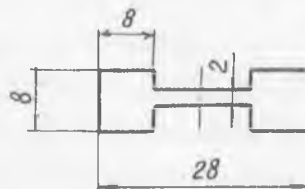
A torziós szál  $13 \mu$  vastagságú, 40 cm hosszú wolfram huzal, amelyet előzőleg vákuumban kimelegítéssel feszültségmentesítettünk.

Az inga feszített szálas kivitelű, bár a feszítés növeli a direktációs nyomatékot. A nem feszített szálnál a nyomás hatására az inga mint fizikai inga is kitérne, ez viszont precesszióhoz vezetne. A feszített szálnak továbbá mindig függőlegesen kell állnia, mert ellenkező esetben, ha a két kar nyomatéka bármilyen kicsit is különbözik, az inga a gravitációs tér hatására elfordul. A szál aljára ezért egy nagy tehetetlenségi nyomatéku M súlyt akasztottunk, ez a szálat függőleges helyzetben tartja, de nagy tehetetlenségi nyomatéka miatt gyakorlatilag nem fordul el. /A T ingatest tehetetlenségi nyomatéka  $0,163 \text{ gc}^2$ , az M súlyé  $20,1 \text{ gc}^2$  volt./

A T ingatest méretei a 2. ábrán láthatók. Anyaga  $0,1 \text{ mm}$  vastagságú molibdén lemez. Méreteit a lasernyaláb átmérője szabja meg. A nagy felmelegedés elkerülésére a nyalábot mintegy  $5 \text{ mm}$  átmérőjű folt-

2. ábra

A torziós inga lengőrendszere.  
Méretek mm-ben.



ra fókuszáltuk. Az inga-karhossz növelésével ugyan /2/ alapján az érzékenység nő, de a tehetetlenségi nyomaték is, az adott méretek kb. az optimumnak felelnek meg.

A ballont leszívás után helyeztük a mérőhelyre. A vákuum további fenntartásáról titángetter-szivattyu gondoskodott. A rendszerben a nyomás  $10^{-6}$  torr volt, mivel /3/ alapján  $10^{-5}$  torr nyomásnál még 1%-os radiometrikus effektussal kell számolni a mérendő energiatartományban.

Ki kellett küszöbölni az ingát zavaró elektrosztatikus és mágneses hatásokat. Az üvegballont alumínium réteggel vontuk be, amelyet az ingával konduktíve összekötöttünk. A lengő rendszer nem tartalmazott ferromágneses anyagot.

Az ingának a /2/-ben szereplő adatait méréssel állapítottuk meg. Ezek a következők:

Reflexióképesség:	$R = 0,5 \pm 0,05$
Karhossz:	$l = /1 \pm 0,05/ \text{ cm}$
Torziós nyomaték:	$D = /4,9 \pm 0,1/ \cdot 10^{-2} \text{ gcm}^2$
Tehetlenségi nyomaték:	$\theta = /0,163 \pm 0,006/ \text{ gcm}^2$

A fenti adatok alapján /2/ figyelembevételével a mérési pontatlanság legfőbb oka a karhossz hibája. Ez csakis a tükrön megjelenő intenzitáseloszlás pontos fotometráálásával és az eloszlás súlypontjának meghatározásával lenne lehetséges.

A számított, ill. mért adatok alapján

az inga érzékenysége:	179 joule/rad $\pm 6\%$
az inga lengésideje:	$/11,45 \pm 0,05/ \text{ sec.}$

Hasonló érzékenyséjú, de nagyobb lengésidejű ingát konstruáltak M.Stimmler et al. [4].

#### 4. Mérési eredmények. Diskusszió.

A jól megkonstruált torziós inga abszolút energia-mérőműszer. Mégis szükségesnek tartottuk az eredményeket egy másik abszolút műszer, a kaloriméter [5] adataival összevetni. Ez az inga a radiométer-

effektusok miatt mindig többet mérhet, mivel a tükör reflektáló felülete a beeső oldalon van, így a radiométer erőik nyomása a fénynyomás-hoz hozzáadódik [6], a kaloriméter pedig a veszteségek miatt mindig kevesebbet mérhet. Ha a két mérés eredménye a hibán belül megegyezik, akkor az adott pontosság mellett bármelyik a kettő közül használható.

Az I. táblázat 3-3 fénynyomásos, illetve kalorimetrikus mérés eredményét mutatja, impulzus üzemi rubin laser esetén, különböző pumpáló energiák mellett.

I. táblázat

Pumpáló energia /Wsec/	2500	3000	3800	4500
Laserenergia fénynyomás- sal /Wsec/	0,42	1,39	2,80	4,50
	0,44	1,31	2,99	4,59
	<u>0,47</u>	<u>1,39</u>	<u>2,87</u>	<u>4,61</u>
Átlag	0,44	1,36	2,88	4,57
Laserenergia kalorimé- terrel /Wsec/	0,45	1,31	2,68	4,54
	0,42	1,37	2,61	4,36
	<u>0,39</u>	<u>1,29</u>	<u>2,81</u>	<u>4,05</u>
Átlag	0,42	1,32	2,70	4,32

A közölt átlagok tájékoztató jellegűek, mivel a laser energiája sem azonos minden impulzusban. A kétféle méréssorozat a hibán belül azonos eredményt ad, bár a fénynyomásmérő mindig magasabb átlagot mutat. Az eltérés szignifikáns voltának kimutatása több mérést igényelne, de a mérésekhez megkövetelt pontosság ennek gyakorlati szükségét nem vetette fel.

Köszönetet mondunk Michelfeit Károlynak a rendkívül kényes mechanikai, Sárközi Eleknek az ugyancsak kényes üvegtechnikai munka elvégzéséért; Farkas Győzőnek, Imre Lajosnak és Czigány Imrének a mérésekben nyújtott segítségükért.

I r o d a l o m

- [1] Hb.d.Exp.Phys. Bd. 1. /73/ Leipzig, 1926
- [2] Knudsen, M.: Ann.d.Phys. 6, 129, /1930/
- [3] Ready, J.F.: J.Appl.Phys. 36, 462, /1961/
- [4] Stimler, M., Slawski, Z.I., Grantham, R.E.:R.Sci.Instr.,35,311,/1964/
- [5] M.Császár L., Csillag L., Kertész I., Varga P.: KFKI Közl.  
14, 137 /1966/
- [6] Kiss Á.: Rubinlaser impulzus energiájának mérése fénynyomás  
segítségével. Diplomamunka, 1965.

Érkezett: 1965. nov. 11.  
KFKI Közl. 14.évf. 3.szám, 1966.



# He-Ne VÖRÖS GÁZLASER INTENZITÁSÁNAK VIZSGÁLATA A NYOMÁS, KEVERÉKARÁNY ÉS GERJESZTŐ ÁRAM FÜGGVÉNYÉBEN

Irta: Csillag László és Salamon Tamás

## Összefoglalás

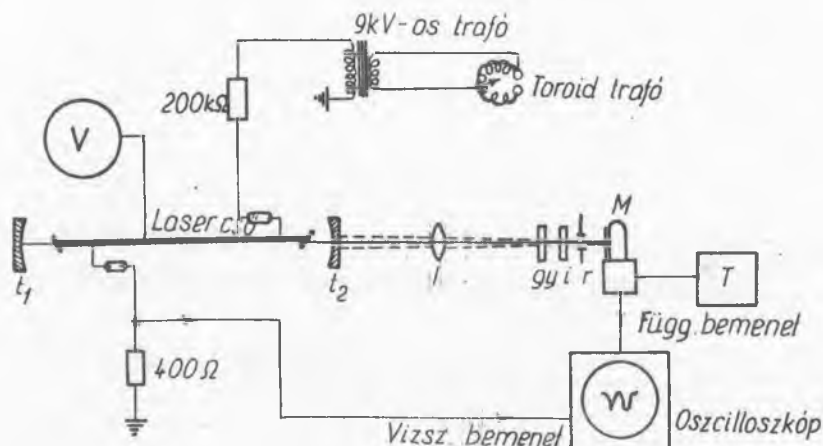
Vizsgáltuk különböző átmérőjű, váltóárammal gerjesztett laser-csövek intenzitásának függését a gerjesztőáram pillanatnyi értékétől és a nyomástól a  $P_{He}/P_{Ne}=2/1-20/1$  keverékarány-tartományban. A mérési eredmények alátámasztják az optimális gáznyomásra és gerjesztő áramra vonatkozó korábbi következtetéseket [4], továbbá adatokat szolgáltatnak a célszerű töltési, illetve üzemeltetési paraméterekre.

## Bevezetés

Első közleményünkben [1] a nagyfrekvenciás gerjesztésű He-Ne gázlaser infra-átmeneteinek kísérleti vizsgálatáról számoltunk be. Ebben a cikkünkben - az előzőnek folytatásaként - a  $6328 \text{ \AA}$  hullámhosszu, látható átmenetre közlünk hasonló jellegű adatokat. A nagyfrekvenciás gerjesztés helyett azonban méréstechnikai okokból az egyenáramu gerjesztéshez közelálló 50 Hz-es váltóáramu gerjesztést alkalmaztunk. Munkánk célja az volt, hogy egyrészt meghatározzuk adott konstrukcióju laser-csővünk optimális üzemeltetési paramétereit, másrészt a megadott kísérleti viszonyok között elvégzett méréseink adatait összehasonlitsuk a külföldi eredményekkel, annál is inkább, mert az irodalomban eddig megtalálható eredmények között némi eltérés mutatkozik [2, 3, 4].

## Mérési elrendezés

Az 1. ábrán látható az elvi elrendezés. Kétfajta csövet vizsgáltunk. Az I. cső hossza 68 cm, belső keresztmetszete 3,5 mm. A II. cső hossza 28 cm, belső keresztmetszete 1,9 mm. Mindkét cső rasotherm üvegből készült, polirozott vaselektrodokkal, végeik Brewster szögben sík-üveglapokkal lezárva. A cső vákuum- és töltőberendezéshez /V/ kapcsos-



1. ábra

Mérési elrendezés

$t_1, t_2$  dielektrikum tükrök,  $l$  lencse,  $gy$  10%-os gyengítő lemez,  $i$  interferencia szűrő 6300 Å-ra,  $r$  rés,  $M$  multiplier,  $T$  tápegység,  $V$  vákuum és töltőrendszer.

lódott, amellyel tetszésszerű nyomást és keverékarányt lehetett beállítani [5]. A nyomást He-Ne gázkeverékre hitelesített Pirani típusú nyomásmérővel mértük.

A  $t_1, t_2$  tükröket az I. csőnél 100 cm-es görbületi sugaru, 98,1% és 98,1% reflexióképességű, a II. csőnél 75 cm-es görbületi sugaru, 98,8% és 98,6% reflexióképességű dielektrikum gömbtükrök képezték. Mindkét esetben a tükrök közel konfokális rezonátort alkottak. A csőből kilépő laserfény optikai leképező és gyengítő rendszeren át jutott a multiplierre  $M$ .

A lasercsőben a kisülést hálózatról táplált nagyfeszültségű trafo biztosította. Az alacsony frekvenciájú váltóárammal való gerjesztés a neon 3s nivójának populációja szempontjából egyenértékűnek tekinthető az egyenáram gerjesztéssel, hiszen a hélium és neon atomok közötti másodfajú ütközések időállandója  $10^{-6}$  sec-nál kisebb, tehát a váltóáram periódusidejéhez képest elhanyagolhatóan kicsi. Ugyanakkor viszont a váltóáram alkalmazása a mérés szempontjából két nagy előnnyel járt. Az első, hogy oszcilloszkópon közvetlenül megkaphattuk a laserintenzitás függését a gerjesztő áram pillanatnyi értékének függvényében, oly módon, hogy az oszcilloszkóp vízszintes bemenetére a csővön átfolyó árammal arányos feszültséget, a függőleges bemenetére pedig a laserintenzitással arányos

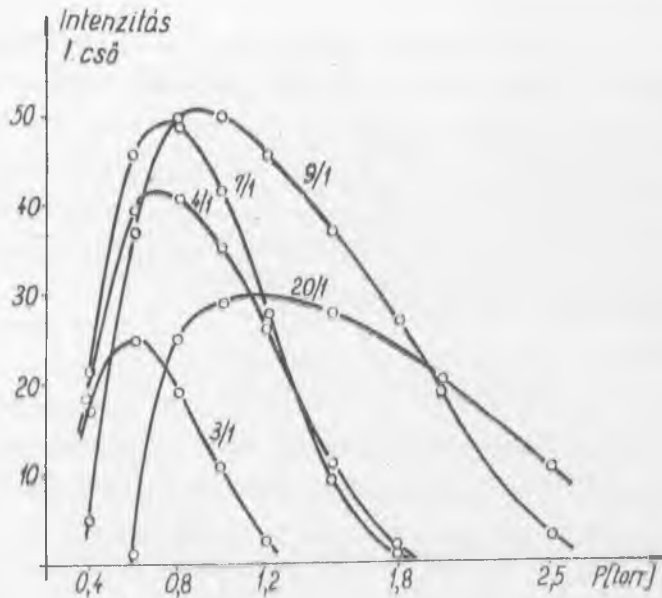


multiplier jelét kapcsoltuk. Ilymódon rövid idő alatt igen sok információhoz juthattunk.

A váltóáramu módszer másik előnye abban állt, hogy a lasercső hőtehetetlensége és az áram gyors változása miatt a cső hőmérséklete közel állandó volt, és így nem zavartak a cső hőmérsékletváltozása következtében fellépő lassu intenzitásváltozások. /A [3] alatt idézett szovjet kutatóknak minden új áramerősség beállítását követően több percig kellett várni az egyensúlyi állapot bekövetkezésére./Kétségtelen, hogy a csőhőmérséklet lényeges paraméter [7], amelynek változása a többi paraméter kapcsolataira is hatással van, méréseinknél azonban az effektív áramerősség nagyjából azonos volt, és így az eredményeink közelítőleg egy meghatározott csőhőmérsékletre vonatkoznak.

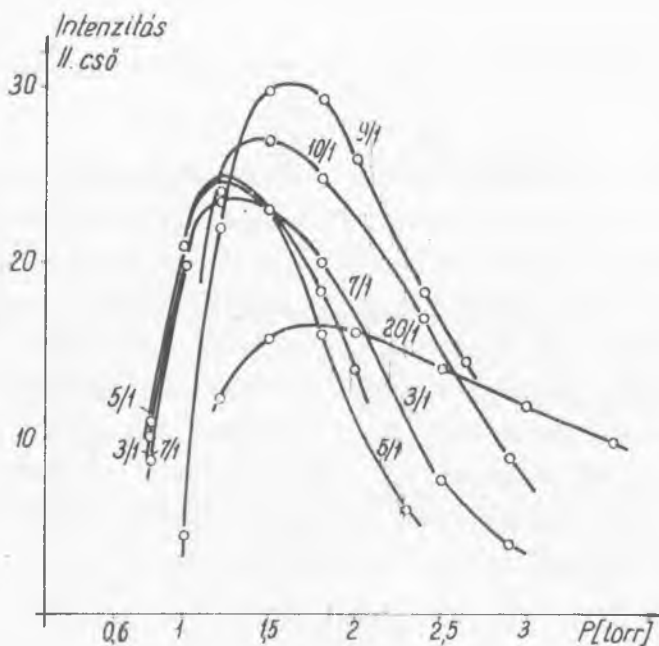
### Eredmények

A 2. és 3. ábrán közöljük a két csőből kilépő laserfény intenzitását a He+Ne gázkeverék össznyomásának függvényében, különböző ke-



2. ábra

A laserintenzitásnak az össznyomástól való függése különböző He/Ne keverékarányoknál /az arányszámok a görbék mellé írva/ - optimális áramerősség mellett, 3,5 mm belső átmérőjű, 68cm hosszú lasercsőre /I./



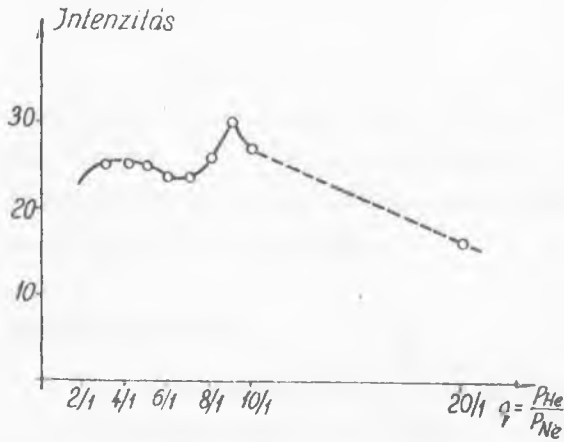
3. ábra

A laserintenzitásnak az össznyomástól való függése különböző He/Ne keverékarányoknál /az arányszámok a görbék mellé írva/- optimális áramerősség mellett, 1,9 mm belső átmérőjű, 28 cm hosszú lasercsőre /II./

verékarányoknál. A görbék minden pontjához a mindenkori optimális áramerősség tartozik. A két csőre a görbék jellege hasonló, de a maximumok helye máshol van. Látható, hogy az I. csőnél az intenzitásmaximum 0,5 - 1 torr, a II. csőnél 1,1 - 1,9 torr össznyomás-intervallumba esik. Tehát a rövidebb és szűkebb keresztmetszetű csőnél növekszik az optimális össznyomásérték. [4] szerint fordított arányosság van az optimális nyomás és a kisülési cső átmérője között:

$$P_{\text{opt}}(\text{torr}) = \frac{2,9 \dots 3,6}{D(\text{mm})}$$

Ez a formula a mi esetünkben is helyesnek adódott azzal a kis eltéréssel, hogy ellentétben a [4] szerzők feltételével, 5/1 keverési arány helyett 9/1-nél észleltünk maximális laserteljesítményt. A 2. és 3. ábrából látható, hogy az I. csőre /  $D^I = 3,5 \text{ mm}$  /,  $p_{\text{opt}}^I \sim 0,9 \text{ torr}$ ; a II. csőre /  $D^{II} = 1,9 \text{ mm}$  /  $p_{\text{opt}}^{II} \sim 1,7 \text{ torr}$ , és így  $p_{\text{opt}}^I D^I \approx p_{\text{opt}}^{II} D^{II} \approx 3,2$ , az /1/ összefüggés tehát teljesül. Megjegyzendő, hogy az /1/ formulában nem szerepel a cső hossza. Minden bizonnyal a csőhossz első közelítésben nem hat a különböző paraméterek kapcsolataira, hanem az erősítést, ill. a laserből kilépő összteljesítményt határozza meg.

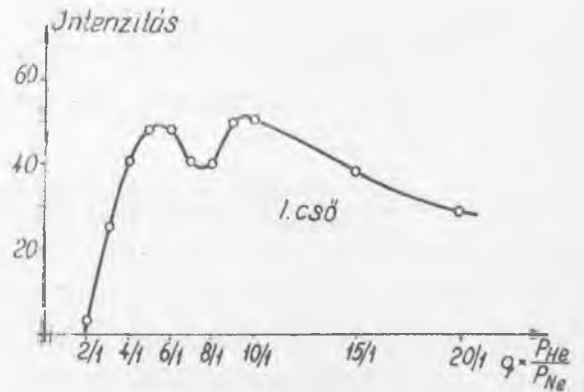


4. ábra

A laserintenzitásnak a keverékaránytól való függése az I. csőre, optimális áramerősség és nyomás mellett

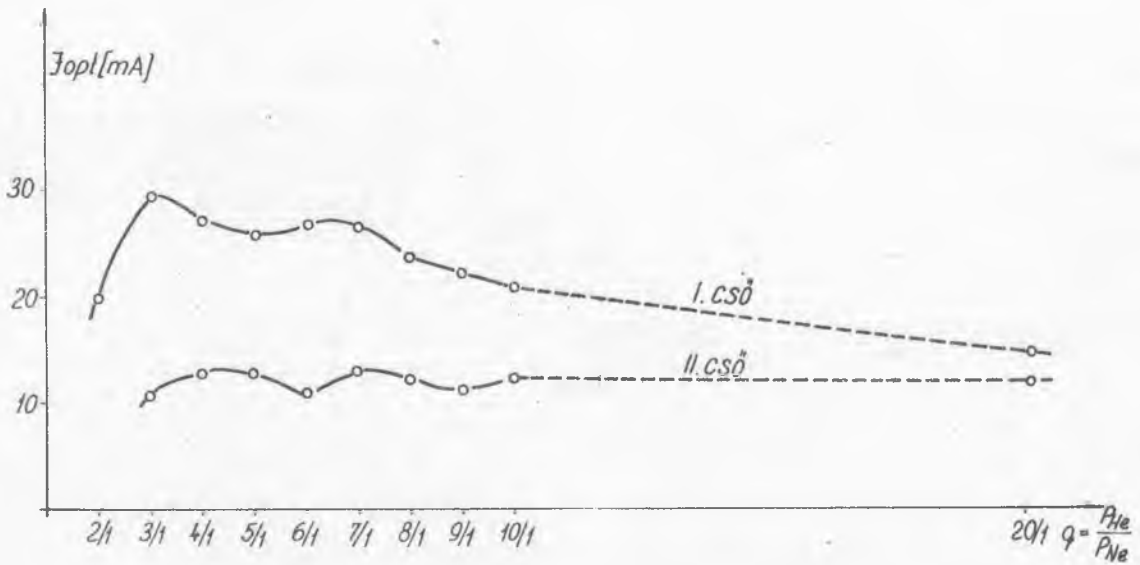
5. ábra

A laserintenzitásnak a keverékaránytól való függése a II. csőre, optimális áramerősség és nyomás mellett



A 4. és 5. ábrán a keverékarány függvényében megadtuk a maximális intenzitást optimalizálva a nyomás és gerjesztő áramerősség értékét. Látható, hogy számottevő intenzitásváltozás 4/1 - 15/1 keverékarányon belül nincs. Csekélyebb maximumot észleltünk 5/1 és 6/1, ill. 9/1 és 10/1-nél az I. csőre, míg a II. csőre valamivel élesebb maximumot 9/1-nél. Em-lítésreméltó, hogy az optimális keverékarányra vonatkozóan az egyes szer-zők mérési eredményei kissé eltérnek egymástól; [4] szerint kiugró maxi-mum 5/1 keverékaránynál, [3] szerint ugyanez 7/1-nél van. [2] eredménye ugyanerre vonatkozóan közelítően egyezik a mienkkel.

A 6. ábrán együttesen ábrázoltuk a két csőre vonatkozóan az op-timális gerjesztő áramerősség változását a keverékarány függvényében; itt a nyomást és az intenzitást optimalizáltuk. A II. csőnél gyakorlatilag ál-landó az optimális áramerősség, kb. 12-13 mA. Az I. csőnél ez 20 - 30 mA között változik, ami kb. kétszerese az előbbinek. A csövek keresztmet-szeteinek aránya  $\approx 3,6$ , vagyis a majdnem négyszeres keresztmetszetű cső-ben nem négyszeres, hanem csak kétszeres áramerősség folyik optimális vi-



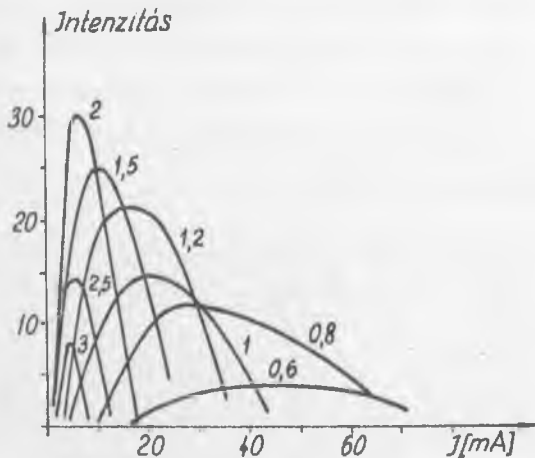
6. ábra

Az optimális áramerősségnek a keverékaránytól való függése mindkét csőre, optimális nyomás mellett

szonyoknál. Ez alátámasztja a [4] szerzők azon megállapítását, hogy az  $J_{opt}$  optimális gerjesztőáram egyenesen arányos a  $D$  csőátmérővel:

$$J_{opt} = k D$$

a  $k$  értékére [3, 6], valamint saját mérési adatainkból  $k \sim 7 \frac{\text{mA}}{\text{mm}}$  adódott.



7. ábra

A laserintenzitás változása az áramerősség függvényében  $q = 10/1$  keverékaránynál /II. cső/

Végül a 7. ábrán  $q = 10/1$  keverékaránynál a különböző nyomásértékeknél az áramerősség függvényében megadtuk a laser intenzitását a II. csőre. Ez teljes összhangban van [3, 6], eredményeivel. Látható, hogy minél alacsonyabb az össznyomás, annál nagyobb áramerősségnél van a maximális intenzitás.

### Következtetések

Az a tény, hogy az 50 Hz-es váltóáramu gerjesztés mellett kapott eredményeink összhangban vannak Korolev, Odincov és MicaJ [3] egyenáramu gerjesztéssel nyert eredményeivel, mutatja, hogy a laserműködés szempontjából nincs lényeges különbség a két gerjesztési mód között. Másrészről, azonos eredményeink együttesen igazolják Gordon és White-nak [4] a nyomás és csőátmérő szorzatának állandóságára, valamint az optimális áramerősség és csőátmérő arányosságára vonatkozó formuláinak helyességét.

Azokról a fizikai folyamatokról, amelyek a kapott görbék alakját meghatározzák, az eredmények alapján nem lehet egyértelműen számot adni. Csupán néhány kvalitatív megállapítást tehetünk. Más mérésekből [4][8] ismeretes, hogy a  $3s_2 - 2p_4$  laserátmenetnél elsősorban a neon  $3s$  nivóját populáló /ill. depopuláló/, másodsorban pedig a  $2p$  nivót populáló /ill. depopuláló/ folyamatoknak van szerepük. A neon nivójának populációja tulnyomórészt metastabil  $2^1S$  állapotú He-atomokkal való ütközés révén jön létre, depopulációja pedig elektronokkal vagy a csőfallyal való rugalmatlan ütközés révén.

A laserintenzitásnak a gáz nyomásától és összetételétől való függését vizsgálva az adódott, hogy a fenti folyamatok nem nagyon érzékenyek sem a keverékarányra, sem az össznyomásra. A leglényegesebb mégis a neon parciális nyomása /0,1 torr körül/. Nyilván túl kis neonkoncentrációnál a másodfajú ütközések száma csökken, túl nagy koncentrációnál pedig telítődés következik be. Ugyanakkor azonban a  $2p$  alsó lasernivó populációja a nyomás emelkedésével növekszik, és így maga az inverzió és vele a laserintenzitás egy optimum elérése után csökkenni kezd. Az optimum helyét és meredekségét egyéb paraméterek együttesen határozzák meg.

Hasonló módon a metastabil atomok számának változásával lehet értelmezni a laserintenzitásnak a gerjesztő áramtól való függését is /7. ábra/. Kis áramoknál a másodfajú ütközések száma még kicsi, növekvő

áramerősségnél telítődés következik be, ugyanakkor az áram növekedése révén a  $2p$  alsó lasernívó populációja, elsősorban magasabb nívókról induló kaszkádátmenetek révén növekszik. Ez végeredményben egy maximum után az inverzió és vele a laserintenzitás csökkenését okozza.

A hélium parciális nyomása láthatóan kevésbé zavarja a folyamatokat. Nagy nyomásoknál és nagy keverékarányoknál az  $J=J(\rho)$  görbék laposak /lásd 2. 3. ábra/ /kis nyomásérzékenység/, az optimális gerjesztőáram viszont csökken és a görbék maximuma élesebb /nagy áramérzékenység, lásd 7. ábra/.

A csövek töltése szempontjából a következő gyakorlati következtetések vonhatók le.

1/ Sem a nyomás, sem a keverékarány pontos beállítása nem lényeges.

2/ Megfelelő töltéssel a csövek élettartamát jelentősen meglehet hosszabbítani. Az élettartamot ugyanis elsősorban a kisülés hatására bekövetkező gáznyomáscsökkenés korlátozza. Ennek oka lehet: a hélium diffúziója a meleg üvegfalon át, abszorpciós jelenségek az elektródoknál, stb./. Célszerű ezért a lehető legnagyobb nyomásra tölteni a csöveket. A 2. 3. görbékből látható, hogy kezdeti kis intenzitáscsökkenés árán a töltési gáznyomást jelentősen megnövelhetjük.

3/ A csövek előkezelésénél azonban figyelemmel kell lenni arra, hogy a nyomáscsökkentő folyamatok szelektívek, és a neon-összetevő nyomásváltozására a lasercső érzékenyebb, mint a héliuméra.

Köszönetet mondunk Varga Péternek értékes észrevételeiért, valamint Szántó Sándornak a mérésekhez nyújtott segítségért.

#### I r o d a l o m

- [1] Csillag L., Salamon T.: KFKI Közl. 13, 199 /1965/
- [2] Mielenz, K.D., Nefflen, K.N.: Appl. Optics, 4, 565 /1965/
- [3] Korolev, F.A., Odincov, A.I., Micaaj, V.I.: Optika i Szpektr. XIX, 71 /1965/
- [4] Gordon, E.I., White, A.D.: Appl. Phys. Lett. 3, 199 /1963/
- [5] Csillag L.: KFKI Közl. 13, 209 /1965/
- [6] Van der Sluis, K.L., Wener, G.K., Griffin, P.M., Morgan, H.W., Rudolph, O.B., Staats, P.A.: Amer. J. of Phys. 33, 225 /1965/
- [7] Arecchi, F.T.: Quantum Electronics, Proc. of the Third Internat. Congress, Paris, Vol. 2, Dunod-Columbia Press, 1964, p. 547
- [8] Bennett, W.R.: Appl. Optics, Supplement on Optical Masers, 1962. p. 24

Érkezett: 1965. okt. 27  
KFKI Közl. 14. évf. 3. szám, 1966

## BESSEL-FÜGGVÉNYEK CSEBISEV-SORFEJTÉSE I.

$J_\nu(x)$  ÉS  $N_\nu(x)$ .

Írta: Németh Géza

### Összefoglalás

A dolgozatban a  $J_\nu(x)$  és  $N_\nu(x)$  Bessel-függvények alkalmas Csebisev-sorfejtéseinek meghatározásával foglalkozunk. Ezek a sorfejtések praktikus számításoknál célszerűek gyors konvergenciájuk miatt. A  $0 \leq x \leq a$  esetben a Csebisev-sorok konvergenciája kb.  $4^{-n}$ -el jobb, mint a megfelelő Taylor-soré. Az  $x \geq a$  esetre vonatkozó Csebisev-sorok konvergensek/ellenkéntben a szokásos divergens aszimptotikus sorokkal/. Ez utóbbi sorok konvergenciája

$$e^{-2\sqrt{2an}} O(n^{-3/4})$$

rendű  $n \rightarrow \infty$ -re.

A Csebisev-sorfejtési együttnatók meghatározásához rekurziós képleteket vezetünk le.

### Bevezetés

A dolgozatban a Bessel-függvények Csebisev-polinomok szerinti sorfejtésével foglalkozunk. Ezek a függvények:  $J_\nu(x)$  és  $N_\nu(x)$ , az

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0 \quad /0.1/$$

homogén másodrendű differenciálegyenlet lineárisan független megoldásai.

Az  $x^\nu J_\nu(x)$  függvény analitikus egész függvény:

$$J_\nu(x) = (x/2)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x/2)^{2n}}{n! \Gamma(n+\nu+1)}, \quad \nu \neq -1, -2, \dots, /0.2/$$

Az  $N_\nu(x)$  függvény pedig  $\nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  esetén az

$$N_\nu(x) = \frac{1}{\sin \pi \nu} \left[ J_\nu(x) \cos \nu \pi - J_{-\nu}(x) \right] \quad /0.3/$$

definícióval visszavezethető  $J_\nu(x)$ -re /részletesebben v.ö.: [1] /. A  $J_\nu(x)$  és  $N_\nu(x)$  függvények alkalmas Csebisev-sorfejtése a Taylor-sornál gyorsabban konvergál. Ismeretes [2], hogy e sorfejtés részletösszegei a függvényt Csebisev értelemben legjobban megközelítő polinomokhoz igen közel esnek, és így kiválóan alkalmasak akár kézi számolásra, akár elektronikus számológépen programkészítéshez.

A következőkben először a  $J_0(x)$  és  $N_0(x)$ , majd a  $J_\nu(x)$  és  $N_\nu(x)$  függvények Csebisev-sorfejtésével foglalkozunk. Be fogjuk bizonyítani, hogy  $0 \leq x \leq a$  esetén e sorfejtés konvergenciája a Taylor-sor konvergenciájánál kb.  $4^{-n}$ -el gyorsabb.

Az  $x \geq a$  esetében a divergens aszimptotikus sorok helyett konvergens Csebisev-sorfejtéseket határozzunk meg. Be fogjuk bizonyítani, hogy e sorok konvergenciája

$$e^{-2\sqrt{2an}} O(n^{-3/4}), \quad n \rightarrow \infty$$

rendű. Az együtthatók numerikus kiszámításához /mindkét esetben/ rekurrens képleteket határoztunk meg.

### 1/ A $J_0(x)$ és $N_0(x)$ függvények Csebisev-sorfejtése

A  $J_0(x)$  függvény sorfejtéséhez egy integrál előállítást [3] használunk fel:

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 (1-t^2)^{-1/2} \cos xt \, dt. \quad /1.1/$$

Helyettesítsük be  $\cos xt$  helyébe a Taylor-sorát,  $J_0(x)$  Taylor-sora adódik:

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x/2)^{2n}}{(n!)^2} \quad /1.2/$$

Ha viszont  $\cos xt$  helyébe az alábbi Csebisev-sort írjuk:

$$\cos xt = J_0(at) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(at) T_{2n}(x/a), \quad (0 \leq x \leq a)$$

akkor  $J_0(x)$  Csebisev-sorát kapjuk:

$$J_0(x) = A_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n A_n T_{2n}(x/a) \quad (0 \leq x \leq a) \quad /1.3/$$



$T_n(x)$ -szel itt /és a továbbiakban is/ az alábbi Csebisev-polinomot jelöltük:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \quad -1 \leq x \leq 1 \quad n=0,1,2,\dots$$

Az itt szereplő  $A_n$  együtthatók a Bessel-függvény értékeivel kifejezhetők:

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^1 (1-t^2)^{-1/2} J_{2n}(at) dt = J_n^2\left(\frac{a}{2}\right), \quad (n=0,1,2,\dots) \quad /1.4/$$

Hasonlóan járhatunk el  $N_0(x)$  esetében is. Az  $N_0(x)$  függvény

$$\frac{\pi}{2} N_0(x) = (\ln 2x + c) J_0(x) + \frac{2}{\pi} \int_0^1 \ln(1-t^2) (1-t^2)^{-1/2} \cos xt dt \quad /1.5/$$

definíciós képletében szereplő integrált  $\cos xt$  Csebisev - sorfejtése segítségével Csebisev-sorba fejthetjük,

$$\frac{2}{\pi} \int_0^1 \ln(1-t^2) (1-t^2)^{-1/2} \cos xt dt = C_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n C_n T_{2n}(x/a), \quad /1.6/$$

ahol

$$C_n = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \ln(1-t^2) (1-t^2)^{-1/2} J_{2n}(at) dt, \quad /1.7/$$

$n=0,1,2,\dots$

Az /1.2/ képletből látható, hogy  $0 \leq x \leq a$  esetén  $J_0(x)$  Taylor-sora

$$\frac{(a/2)^{2n}}{(n!)^2} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right\}, \quad n \rightarrow \infty$$

rendben konvergál. Viszont  $J_0(x)$  Csebisev-sora /tekintettel /0.2/-re/

$$\frac{(a/4)^{2n}}{(n!)^2} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\}, \quad n \rightarrow \infty$$

-rendű /1.4/ szerint, és így a nyereség  $4^{-n}$ . Ugyanez érvényes  $N_0(x)$ -re is.

Az  $x \geq a$  esetben az alábbi formulákkal szokás dolgozni:

$$J_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \cos(x - \pi/4) P_0(x) + \sin(x - \pi/4) Q_0(x) \right\} \quad /1.8/$$

$$N_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \sin(x - \pi/4) P_0(x) - \cos(x - \pi/4) Q_0(x) \right\}$$

ahol

$$P_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \eta^{-1/2} e^{-\eta} f(\eta) d\eta, \quad f(\eta) = \frac{1}{2} \left\{ (1 - i\eta/2x)^{-1/2} + (1 + i\eta/2x)^{-1/2} \right\},$$

/1.9/

$$Q_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\eta} \eta^{-1/2} g(\eta) d\eta, \quad g(\eta) = \frac{1}{2i} \left\{ (1 - i\eta/2x)^{-1/2} - (1 + i\eta/2x)^{-1/2} \right\}.$$

Az  $f$  illetve  $g$  függvényt  $1/x$  hatványai szerint Taylor-sorba fejtvé kapjuk  $P_0$  és  $Q_0$  jól ismert /divergens/ aszimptotikus sorát:

$$P_0(x) \cong 1 - \frac{(1.3)^2}{2!(8x)^2} + \frac{(1.3.5.7)^2}{4!(8x)^4} - \dots$$

/1.10/

$$Q_0(x) \cong \frac{1}{8x} - \frac{(1.3.5)^2}{3!(8x)^3} + \frac{(1.3.5.7.9)^2}{5!(8x)^5} - \dots$$

A következőkben a  $P_0$  és  $Q_0$  függvények integrál előállításával foglalkozunk. Alkalmazzuk az  $f$  és  $g$  függvényekre a következő azonosságot:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^1 \omega^{-1/2} (1-\omega)^{-1/2} \frac{1}{1+\omega u} d\omega = \frac{1}{(1+u)^{1/2}}$$

az  $u = i\frac{\eta}{2x}$  majd  $u = -i\frac{\eta}{2x}$  helyettesítéssel:

$$f(\eta) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \omega^{-1/2} (1-\omega)^{-1/2} \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1 - \frac{i\eta\omega}{2x}} + \frac{1}{1 + \frac{i\eta\omega}{2x}} \right\} d\omega,$$

$$g(\eta) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \omega^{-1/2} (1-\omega)^{-1/2} \frac{1}{2i} \left\{ \frac{1}{1 - \frac{i\eta\omega}{2x}} - \frac{1}{1 + \frac{i\eta\omega}{2x}} \right\} d\omega,$$

mert így összevonás után  $f$  és  $g$  valós integrállal fejezhető ki:

$$f(\eta) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \omega^{-1/2} (1-\omega)^{-1/2} \frac{1}{1 + \frac{\eta^2 \omega^2}{4x^2}} d\omega$$

/1.11/

$$g(\eta) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \omega^{-1/2} (1-\omega)^{-1/2} \frac{\eta\omega/2x}{1 + \frac{\eta^2 \omega^2}{4x^2}} d\omega$$

Írjuk  $f$  illetőleg  $g$  integrálalakját  $P_0$  illetőleg  $Q_0$  /1.9/ kifejezésébe:

$$P_0(x) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \int_0^{\infty} \eta^{-1/2} e^{-\eta} \int_0^1 \omega^{-1/2} (1-\omega)^{-1/2} \frac{1}{1 + \frac{\omega^2 \eta^2}{4x^2}} d\omega d\eta,$$

$$Q_0(x) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \int_0^{\infty} \eta^{-1/2} e^{-\eta} \int_0^1 \omega^{-1/2} (1-\omega)^{-1/2} \frac{\omega \eta / 2x}{1 + \frac{\omega^2 \eta^2}{4x^2}} d\omega d\eta,$$

és vezessük be  $\eta$  helyett a  $z = \frac{\omega \eta}{2}$  új integrációs változót:

$$P_0(x) = \frac{2^{1/2}}{\pi^{3/2}} \int_0^{\infty} \frac{z^{-1/2}}{1 + z^2/x^2} \int_0^1 \omega^{-1} (1-\omega)^{-1/2} e^{-\frac{2z}{\omega}} d\omega dz,$$

$$Q_0(x) = \frac{2^{1/2}}{\pi^{3/2}} \int_0^{\infty} \frac{z^{1/2}/x}{1 + z^2/x^2} \int_0^1 \omega^{-1} (1-\omega)^{-1/2} e^{-\frac{2z}{\omega}} d\omega dz.$$

A belső integrálban végezzük el az  $\omega = \frac{1}{t}$  helyettesítést:

$$\int_0^1 \omega^{-1} (1-\omega)^{-1/2} e^{-\frac{2z}{\omega}} d\omega = \int_1^{\infty} t^{-1/2} (t-1)^{-1/2} e^{-2zt} dt.$$

Ez utóbbi integrál pedig [4] szerint  $e^{-z} K_0(z)$ -vel egyenlő, ahol  $K_0(z)$  az un. képzetes argumentumu irreguláris Bessel-függvény. Tehát  $P_0(x)$  -re, illetőleg  $Q_0(x)$  -re az alábbi előállításokat kapjuk:

$$P_0(x) = \frac{2^{1/2}}{\pi^{3/2}} \int_0^{\infty} z^{-1/2} e^{-z} K_0(z) \frac{1}{1 + z^2/x^2} dz,$$

illetőleg

$$Q_0(x) = \frac{2^{1/2}}{\pi^{3/2}} \int_0^{\infty} z^{-1/2} e^{-z} K_0(z) \frac{z/x}{1 + z^2/x^2} dz. \quad |1.12|$$

Látható, hogy ha behelyettesítjük az

$$\frac{1}{1 + z^2/x^2}, \quad \frac{z/x}{1 + z^2/x^2}$$

elemi függvények Csebisev-sorfejtését, megkaphatjuk  $P_0$  és  $Q_0$  Csebisev-sorát. Ezek a sorok:

$$\frac{1}{1+z^2/x^2} = \frac{1}{\sqrt{1+z^2/a^2}} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(z/a)^{2n}}{(1+\sqrt{1+z^2/a^2})^{2n}} T_{2n}\left(\frac{a}{x}\right) \right\},$$

$x \geq a$

$$\frac{z/x}{1+z^2/a^2} = \frac{1}{\sqrt{1+z^2/a^2}} \left\{ 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z/a)^{2n+1}}{(1+\sqrt{1+z^2/a^2})^{2n+1}} T_{2n+1}\left(\frac{a}{x}\right) \right\}.$$

Itt  $a > 0$  rögzített konstans.

Behelyettesítve ezeket a sorokat  $P_0$  és  $Q_0$  integrálelőállításába,  $P_0$  és  $Q_0$  Csebisev-sorát kapjuk

$$P_0(x) = B_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n B_{2n} T_{2n}\left(\frac{a}{x}\right),$$

$$Q_0(x) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_{2n+1} T_{2n+1}\left(\frac{a}{x}\right), \quad /1.13/$$

A  $B_n$  együtthatót /az  $z = a\eta$  helyettesítés után/ /1.12/ szerint a következő egyszeres integrállal adhatjuk meg:

$$B_n = B_n(a) = \frac{\sqrt{2a}}{\pi^{3/2}} \int_0^{\infty} e^{-a\eta} K_0(a\eta) \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}} \frac{\eta^{n-1/2}}{(1+\sqrt{1+\eta^2})^n} d\eta. \quad /1.14/$$

Most be fogjuk bizonyítani a Csebisev sorok konvergenciáját. Hogy ezt belássuk, elég megvizsgálni  $B_n$  viselkedését  $n \rightarrow \infty$  esetére. Az /1.14/ integrálra alkalmazzuk a Laplace-módszert. Könnyen belátható, hogy az integrálandó függvénynek az

$$\eta_0 = \left( \frac{1}{2} \left( \frac{n^2}{a^2} + 1 \right)^{1/2} - \frac{1}{2} \right)^{1/2} = \left( \frac{n}{2a} \right)^{1/2} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\}$$

hely környezetében maximuma van. Elvégezve e pont körül az integrálást, az alábbi eredményt kapjuk:

$$B_n(a) = \frac{(2a)^{1/4}}{\pi^{1/2}} n^{-3/4} e^{-2\sqrt{2an}} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right) \right\}, \quad n \rightarrow \infty \quad /1.15/$$

Az /1.15/ becslésből következik, hogy az /1.13/ sorok /ellentétben az /1.11/ divergens aszimptotikus sorokkal/ konvergálnak és a konvergencia  $\frac{a}{x}$ -ban egyenletes.

2/ Az  $J_\nu(x)$  függvény Csebisev-sorfejtése  $0 \leq x \leq a$  esetére

A következőkben a  $x^\nu J_\nu(x)$  függvény Csebisev-sorfejtését fogjuk vizsgálni. Formálisan ez a kérdés megoldott. J.Wimp [4] munkájában e sorfejtési együtthatókat a  ${}_2F_2$  hipergeometriai sorokkal fejezte ki. Mi a Csebisev-sorfejtés együtthatóira rekurziós képletet vezetünk le. /Ezek a képletek a Miller-módszer [5] szerinti számolásánál célszerűek./

A Csebisev-sorfejtés együtthatóit a

$$J_\nu(x) = 2 \frac{x^\nu 2^{-\nu}}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^1 (1-t^2)^{\nu-1/2} \cos xt dt, \quad \nu > -\frac{1}{2} \quad /2.1/$$

integrál-előállítás segítségével határozzuk meg. Legyen

$$J_\nu(x) = \frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \left\{ C_0^{(\nu)}(a) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n C_n^{(\nu)}(a) T_{2n}(x/a) \right\}, \quad 0 \leq x \leq a \quad /2.2/$$

ahol  $C_n^{(\nu)}$  számokat úgy nyerjük, hogy a /2.1/ integrálba behelyettesítjük  $\cos xt$  Csebisev-sorát. Ekkor

$$C_n^{(\nu)}(a) = 2 \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^1 (1-t^2)^{\nu-1/2} J_{2n}(at) dt; \quad /2.3/$$

( $n=0,1,2,\dots$ )

A /2.3/ képletből /0.2/ segítségével könnyen nyerhető a

$$C_n^{(\nu)}(a) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{n!\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{a}{4}\right)^{2n} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\}, \quad (n \rightarrow \infty) \quad /2.4/$$

aszimptotikus formula.

A  $C_n^{(\nu)}$ -re érvényes rekurziós képlet levezetésénél használni fogjuk a Bessel-függvények rekurziós képletét [1]. Integráljuk parciálisan a  $\delta(n+1)C_{n+1}^{(\nu)}(a)$  kifejezést:

$$\begin{aligned} \delta(n+1)C_{n+1}^{(\nu)} &= 2 \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} 2a \int_0^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} t [J_{2n+1}(at) + J_{2n+3}(at)] dt = \\ &= 2 \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{2a^2}{2\nu+1} \int_0^1 (1-t^2)^{\nu+\frac{1}{2}} [J'_{2n+1}(at) + J'_{2n+3}(at)] dt = \\ &= \frac{2a^2}{2\nu+1} \left\{ \frac{1}{2} (C_n^{(\nu)} - C_{n+2}^{(\nu)}) - 2 \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} t^2 [J'_{2n+1}(at) + J'_{2n+3}(at)] dt \right\} \end{aligned}$$

Néhány összevonás, és  $n+1$  -el való osztás után kapjuk:

$$16\nu C_{n+1}^{(\nu)} = \frac{a^2}{n+1} (C_n^{(\nu)} - C_{n+2}^{(\nu)}) - 2 \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} 4a \int_0^1 (1-t^2)^{\nu-1/2} t [J_{2n+1}(at) - J_{2n+3}(at)] dt.$$

Adjuk össze a  $C_{n+1}^{(\nu)}$  -re és  $C_{n+2}^{(\nu)}$  -re szóló egyenleteket:

$$16\nu (C_{n+1}^{(\nu)} + C_{n+2}^{(\nu)}) = \frac{a^2}{n+1} (C_n^{(\nu)} - C_{n+2}^{(\nu)}) + \frac{a^2}{n+2} (C_{n+1}^{(\nu)} - C_{n+3}^{(\nu)}) - 16(n+1)C_{n+1}^{(\nu)} + 16(n+2)C_{n+2}^{(\nu)}$$

és innen rendezés után kapjuk  $C_n^{(\nu)}$  rekurziós képletét:

$$\frac{C_n^{(\nu)} - C_{n+2}^{(\nu)}}{n+1} + \frac{C_{n+1}^{(\nu)} - C_{n+3}^{(\nu)}}{n+2} = \frac{16}{a^2} [(n+1+\nu)C_{n+1}^{(\nu)} - (n+2-\nu)C_{n+2}^{(\nu)}]. \quad /2.5/$$

A /2.5/ képlet levezetésénél fel volt tételezve, hogy  $\nu > -1/2$ . Nyilvánvaló, hogy analitikus folytatással tetszőleges  $\nu$  -re kiterjeszthető /2.5/ érvényessége,  $\nu \neq -1, -2, \dots$  kivételével, amikor viszont /v.8. [1] /

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

3. A  $J_\nu(x)$  és  $N_\nu(x)$  függvények Csebisev-sorfejtése  $x \geq 0$  esetére

A  $J_\nu(x)$  és  $N_\nu(x)$  függvények alkalmas Csebisev-sorfejtése olyan egyszerű formában, mint a  $\nu = 0$  esetnél volt, nem lehetséges. Numerikus számításokhoz azonban elégséges a Csebisev-sor konvergenciájának kimutatása, és egy, az együtthatókra érvényes rekurziós képlet meghatározása.

Először a Csebisev-sorok konvergenciáját vizsgáljuk meg.

A számításhoz  $J_\nu(x)$  és  $N_\nu(x)$  jól ismert előállításait [1] használjuk fel:

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \cos\left(x - \left(\frac{\pi}{2}\nu + \frac{\pi}{4}\right)\right) P_\nu(x) + \sin\left(x - \left(\frac{\pi}{2}\nu + \frac{\pi}{4}\right)\right) Q_\nu(x) \right\}$$

$$N_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\right) P_\nu(x) - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\right) Q_\nu(x) \right\}$$

ahol

$$P_\nu(x) = \frac{2^{\nu+\frac{1}{2}}}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int_0^\infty e^{-2\eta} \eta^{\nu-\frac{1}{2}} f_\nu(\eta/x) d\eta, \quad f_\nu(\eta/x) = \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - i\frac{\eta}{x}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} + \left(1 + i\frac{\eta}{x}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} \right\} \quad /3.1/$$

$$Q_\nu(x) = \frac{2^{\nu+\frac{1}{2}}}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int_0^\infty e^{-2\eta} \eta^{\nu-\frac{1}{2}} g_\nu(\eta/x) d\eta, \quad g_\nu(\eta/x) = \frac{1}{2i} \left\{ \left(1 - i\frac{\eta}{x}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} - \left(1 + i\frac{\eta}{x}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} \right\}$$

A  $f_\nu$  és  $g_\nu$  függvényeket elemi átalakítások segítségével hipergeometrikus függvényekkel írjuk fel:

$$f_\nu(\eta/x) = {}_2F_1\left(\frac{1}{4} - \frac{\nu}{2}, \frac{3}{4} - \frac{\nu}{2}; \frac{1}{2}; -\eta^2/x^2\right) \quad /3.2/$$

$$g_\nu(\eta/x) = \frac{\eta}{x} \left(\frac{1}{2} - \nu\right) {}_2F_1\left(\frac{3}{4} - \frac{\nu}{2}, \frac{5}{4} - \frac{\nu}{2}; \frac{3}{2}; -\eta^2/x^2\right)$$

A kapott hipergeometrikus függvényeket [6] alapján Csebisev - polinomok szerint sorba fejthetjük. A sorfejtési együtthatók újra hipergeometrikus függvények lesznek:

$$f_\nu(\eta/x) = S_0(\eta) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n S_{2n}(\eta) T_{2n}\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \geq 1.$$

/3.3/

$$g_\nu(\eta/x) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n S_{2n+1}(\eta) T_{2n+1}\left(\frac{1}{x}\right),$$

ahol

$$S_n(\eta) = (\eta/2)^n \frac{(\frac{1}{2}-\nu)_n}{n!} {}_2F_1\left(\frac{n-\nu}{2} + \frac{1}{4}, \frac{n-\nu}{2} + \frac{3}{4}; n+1; -\eta^2\right).$$

Ezekkel a sorokkal  $x \geq a$  esetére  $P_\nu(x)$  és  $Q_\nu(x)$  az alábbi lesz /  $\eta = at$  helyettesítés után/:

$$P_\nu(x) = A_0(a) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n A_{2n}(a) T_{2n}\left(\frac{a}{x}\right),$$

/3.4/

$$Q_\nu(x) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_{2n+1}(a) T_{2n+1}\left(\frac{a}{x}\right),$$

ahol

$$A_n(a) = \frac{(2a)^{\nu+\frac{1}{2}}}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \frac{(\frac{1}{2}-\nu)_n}{2^n n!} \int_0^{\infty} e^{-2at} t^{n+\nu-\frac{1}{2}} {}_2F_1\left(\frac{n-\nu}{2} + \frac{1}{4}, \frac{n-\nu}{2} + \frac{3}{4}; n+1; -t^2\right) dt. \quad /3.5/$$

Hogy belássuk a /3.4/ sorok konvergenciáját, elég megvizsgálni  $A_n(a)$  viselkedését  $n \rightarrow \infty$  esetére. Először az integrál alatt szereplő hipergeometria függvényt alakítjuk át [1]:

$${}_2F_1\left(\frac{n-\nu}{2} + \frac{1}{4}, \frac{n-\nu}{2} + \frac{3}{4}; n+1; -t^2\right) = \frac{2^n (1+t^2)^{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}}{(1+\sqrt{1+t^2})^n} {}_2F_1\left(\nu+\frac{1}{2}, -\nu+\frac{1}{2}; n+1; \frac{t^2}{2\sqrt{1+t^2}(1+\sqrt{1+t^2})}\right).$$

Ebből  $n \rightarrow \infty$  esetére az alábbi képletet nyerjük:

$${}_2F_1\left(\frac{n-\nu}{2} + \frac{1}{4}, \frac{n-\nu}{2} + \frac{3}{4}; n+1; -t^2\right) = \frac{2^n (1+t^2)^{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}}{(1+\sqrt{1+t^2})^n} \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right], \quad n \rightarrow \infty.$$

Az  $A_n(a)$  együttható aszimptotikus viselkedése képleteink alapján a Laplace-módszer segítségével határozható meg. Könnyen belátható, hogy



az integrandus az

$$\eta_0 = \left( \frac{1}{2} (n^2/a^2 + 1)^{1/2} - \frac{1}{2} \right)^{1/2} = O\left(\left(\frac{n}{2a}\right)^{1/2}\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

pont környezetében éles maximummal rendelkeznek. Elvégezve e pont körül az integrálást, elemi számítások után az alábbi képletet nyertük:

$$A_n(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2}+\nu)\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)} (2a)^{1/4} n^{-3/4} e^{-2\sqrt{2}an} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right) \right\}, \quad n \rightarrow \infty. \quad /3.6/$$

Megjegyezzük, hogy ha  $\nu = n + \frac{1}{2}$  /n nulla vagy egész/, a /3.6/ képlet nem érvényes /ekkor azonban  $P_\nu$  és  $Q_\nu$  polinomok/. A /3.6/-ból következik a  $P_\nu$  és  $Q_\nu$  függvények Csebisev-sorainak abszolút és  $\frac{O}{x}$  -ban/ egyenletes konvergenciája.

A következőkben az  $A_n(a)$  számok rekurziós képletének a levezetésével fogunk foglalkozni. Ez a számítás a /3.5/ képlet alapján nem látszik könnyen keresztülvihetőnek. Most egy / a  $\nu=0$  esethez hasonló/ integrál előállítását fogunk használni:

$$P_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2}+\nu)\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)} \int_0^\infty \eta^{-1/2} e^{-\eta} K_\nu(\eta) \frac{1}{1+\eta^2/x^2} d\eta,$$

/3.7/

$$Q_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2}+\nu)\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)} \int_0^\infty \eta^{-1/2} e^{-\eta} K_\nu(\eta) \frac{\eta/x}{1+\eta^2/x^2} d\eta.$$

/A /3.7/ képleteket a  $\nu=0$  esetben követett eljárással lehet nyerni; a részletes számítását mellőzzük./

A /3.7/ képletek a  $\nu$  paraméter  $-\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{2}$  /-be eső értékeire állítják elő a  $P_\nu$  és  $Q_\nu$  függvényeket.

Írjuk fel most  $A_n(a)$ -t /3.7/ alapján. Nyilván

$$A_n(\alpha) = \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}} \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2} + \nu)\Gamma(\frac{1}{2} - \nu)} \int_0^{\infty} e^{-\alpha\eta} K_{\nu}(\alpha\eta) \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}} \frac{\eta^{n-1/2}}{(1+\sqrt{1+\eta^2})^n} d\eta \quad /3.8/$$

Bevezetjük a

$$v(\eta) = \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}} \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2} + \nu)\Gamma(\frac{1}{2} - \nu)} \eta^{1/2} e^{-\alpha\eta} K_{\nu}(\alpha\eta)$$

jelölést. A  $v$  függvény a

$$2\alpha v' = -v'' - \left(\frac{1}{4} - \nu^2\right) \frac{1}{\eta^2} v$$

differenciálegyenlet partikuláris megoldása. /Erről a  $K_{\nu}(x)$  Bessel-függvény differenciálegyenlete alapján elemi számolásokkal meggyőződhetünk./

Most a  $4\alpha(A_{n+1} + A_{n+3})$  kifejezést írjuk fel és parciálisan integráljuk:

$$\begin{aligned} 4\alpha(A_{n+1} + A_{n+3}) &= 8\alpha \int_0^{\infty} v \frac{\eta^n}{(1+\sqrt{1+\eta^2})^{n+2}} d\eta = \\ &= 2 \int_0^{\infty} (-2\alpha v') \left\{ \frac{1}{n+1} \frac{\eta^{n+1}}{(1+\sqrt{1+\eta^2})^{n+1}} + \frac{1}{n+3} \frac{\eta^{n+3}}{(1+\sqrt{1+\eta^2})^{n+3}} \right\} d\eta. \end{aligned}$$

Ebből az integrálból  $v$  differenciálegyenlete segítségével „ $\alpha^n$ ”-t elimináljuk:

$$\begin{aligned} 4\alpha(A_{n+1} + A_{n+3}) &= 2 \int_0^{\infty} \left( v'' + \left(\frac{1}{4} - \nu^2\right) \frac{v}{\eta^2} \right) \left\{ \frac{1}{n+1} \frac{\eta^{n+1}}{(1+\sqrt{1+\eta^2})^{n+1}} + \frac{1}{n+3} \frac{\eta^{n+3}}{(1+\sqrt{1+\eta^2})^{n+3}} \right\} d\eta = \\ &= \left(\frac{1}{4} - \nu^2\right) \left[ \frac{1}{n+1} (A_n + A_{n+2}) + \frac{1}{n+3} (A_{n+2} + A_{n+4}) \right] + 2 \int_0^{\infty} v'' \left\{ \right\} d\eta. \end{aligned}$$

A fennmaradó integrál kétszeres parciális integrálással számítható ki:

$$2 \int_0^{\infty} v^n \left[ \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}} \right] d\eta = 4 \int_0^{\infty} v \left[ n \frac{\eta^{n-1}}{(1+\sqrt{1+\eta^2})^{n+2}} - (n+2) \frac{\eta^{n+1}}{(1+\sqrt{1+\eta^2})^{n+3}} \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}} \right] d\eta =$$

$$= nA_n - 2(n+2)A_{n+2} + (n+4)A_{n+4} .$$

Végül néhány összevonás után az alábbi képletet nyerjük:

$$4a(A_{n+1} + A_{n+3}) = Q_0 A_n - Q_1 A_{n+2} + Q_2 A_{n+4} ,$$

$$n = 0, 1, 2, \dots , \quad /3.9/$$

$$Q_0 = \frac{(n+1/2)^2 - \nu^2}{n+1} ,$$

$$Q_1 = 4n+8 - Q_0 - Q_2 ,$$

$$Q_2 = \frac{(n+7/2)^2 - \nu^2}{n+3} ,$$

A levezetésben felhasználtuk a  $-1/2 < \nu < 1/2$  feltételt, a /3.2/ - /3.3/ képleteinkből viszont látható, hogy  $P_\nu$  és  $Q_\nu$  a  $\nu$  paraméter analitikus függvénye. Ezért analitikus folytatással a /3.9/ képletek érvényessége tetszőleges  $\nu$ -re kiterjeszthető, kivéve  $\nu = \{ +\frac{1}{2}, !$  nulla vagy egész esetet, amikor azonban  $P_\nu$  és  $Q_\nu$  polinomok.

### I r o d a l o m

- [1] Erdélyi, A., et. al.: Higher Transcendental Functions II. McGraw Hill, New York, 1953.
- [2] Meinardus, G.: Approximation von Funktionen. Springer Verlag Berlin, 1964.
- [3] Градштейн, И.С., Рыжик, И.М.: Таблицы интегралов. Гос.Изд.Физ.Мат. Лит. Москва. (1957)
- [4] Wimp, J.: Polynomial Expansions of Bessel Functions. Math. Comp. 16, 446-458
- [5] British Association Mathematical Tables VI. Bessel Functions I.II. Cambridge /1937, 1952/
- [6] Fields, I.L., Wimp. I.: Basic series. Proc. Cambr. Phil. Soc. 59, 599-605

Erkezett: 1966. jan. 10.

KFKI Közl. 14.évf. 3.szám, 1966.

## VÁKUUMSZELEPEK ÉS TOLÓZÁRAK 10, 20, 32, 40 mm BELSŐ ÁTMÉRŐVEL

Irtta: Bakos József, Fürjes Józsefné, Szigeti János

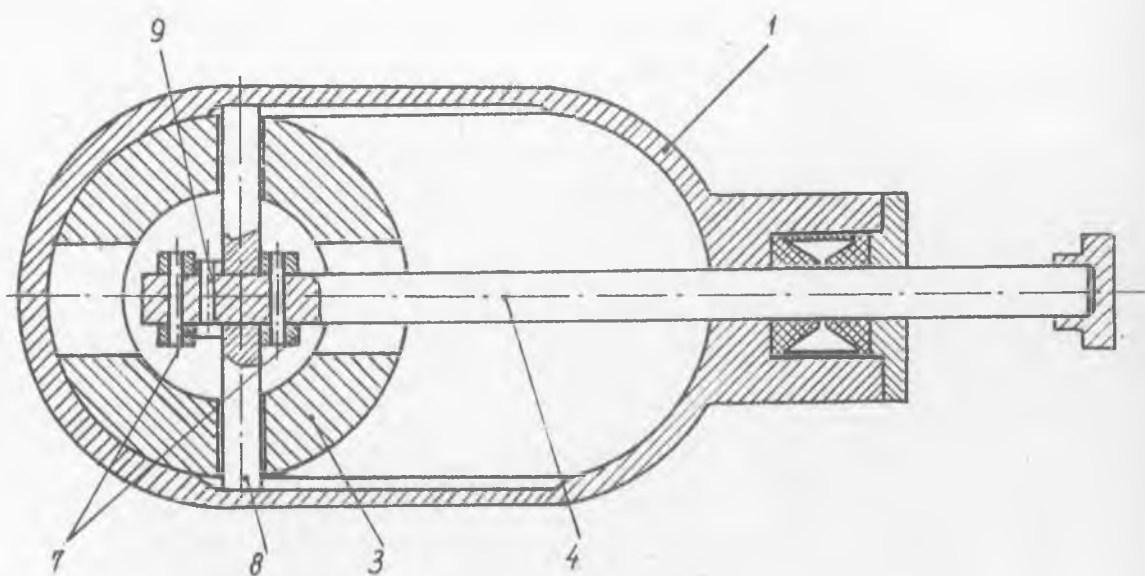
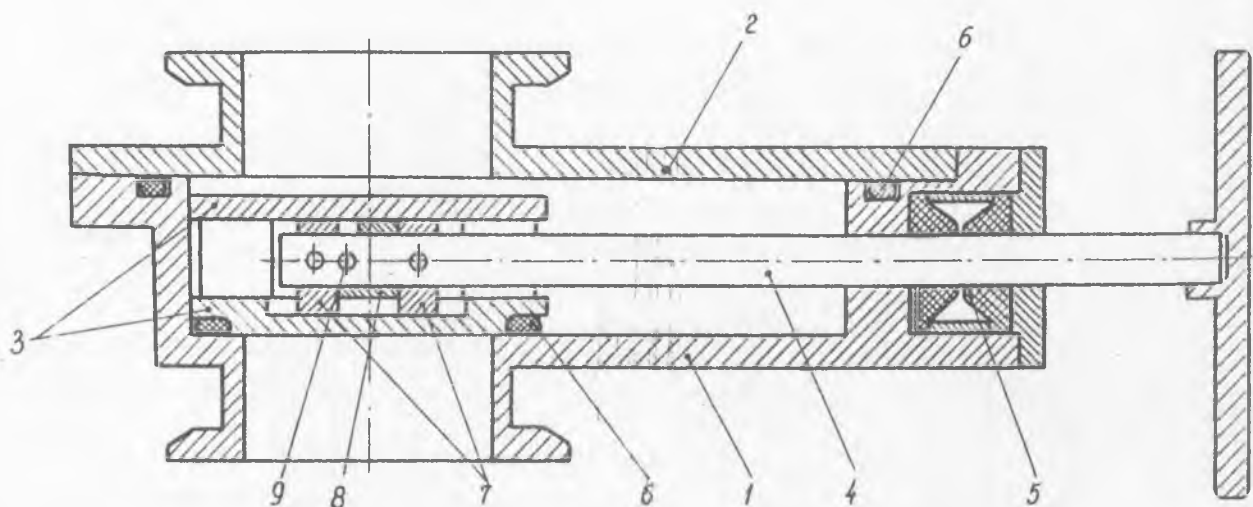
### Összefoglalás

$10^{-6}$  torr nyomásig jól használható vákuum tolózárakat készítettünk 20, 32 és 40 mm belső átmérővel, valamint vákuum könyökszelepeket, 10 és 20 mm belső átmérővel.

Na atomi nivók élettartamának méréséhez atomsugarat előállító vákuumrendszert építettünk. Eközben szükség volt egy olyan vákuumszelepre, amely 32 mm átmérőjű egyenes szabad nyílást, ill. 1 atm. és  $10^{-6}$  torr között biztos lezárást tud létesíteni.

Mivel az általunk épített vákuumrendszerben olajdiffúziós szivattyút alkalmaztunk, a szelep főanyagául a fredál ötvözetet választottuk, kivéve a mozgó, surlódó alkatrészeket, amelyek többféle acélötvözetből készültek a kopás és berágódás elkerülésére /lásd 1. ábra/. A zárás, ill. nyitás a tengely  $180^{\circ}$ -os elforgatása, majd a szelep tányérjának tengelyirányu eltolása, majd  $180^{\circ}$ -os visszaforgatása útján történik. A tengely elforgatásakor a hozzáerősített excentergyűrűk a szeleptányért a szeleplenyílástól ill. a szelepház lapjától elemelik és így, mikor a tengelyt axiálisan elmozgatjuk, a szeleptányér szabadon fut, ill. a szelepház oldalán lévő két horonyban futó vezetőléc vezet. A szelep zárásakor, ill. nyitott állapotban való arretálásakor ez a vezetőléc a szelepház falában lévő horornak támaszkodik, és annak adja át a szeleptányér, ill. az excentergyűrűk tengelyre merőleges irányu feszítő erejét. Ez biztosítja a tengely kizárólag axiális, ill. torziós igénybevételét. A  $180^{\circ}$ -nál nagyobb elforgatást a tengelyen levő határoló csap akadályozza meg.

A szelep külső méretei sokkal kedvezőbbek, mint az azonos teljesítményű, ill. azonos átmérőjű, de derékszögben tört Leybold gyártmányu szelepeké, amint ez a 2. ábrán igen szemléletesen látszik.



1. ábra

- 1/ szelepház (fredál; ö Al-Si 9-Mg)
- 2/ szelepfedél (fredál ö Al-Si 9-Mg)
- 3/ szeleptányér (acél; A 3412)
- 4/ tengely (acél; W10)
- 5/ szimmerring /gumi/
- 6/ tömitő gyűrűk /gumi vagy vitylán/
- 7/ a zárást-nyitást biztosító/ excenter gyűrűk (acél; A6011)
- 8/ vezetőléc (acél; A 3412)
- 9/ határoló csap (acél; W10)

Elkészítettük ezt a szeleptípust 20, ill. 40 mm szabad belső átmérővel is. A méreteknak a Leybold-típusokkal való összehasonlítása ebben az esetben is részünkre kedvező eredményt szolgáltat /3. ábra/.

Hasznosnak mutatkozott 10 és 20 mm átmérőjű szabad nyílás mellett a derékszögben tört szelepek prototípusainak házi elkészítése is, mivel ezek kevésbé munkaigényesek, és amellettt igen sok helyen alkalmazhatók /elővákuumszelep, lelevegőzés, stb./.

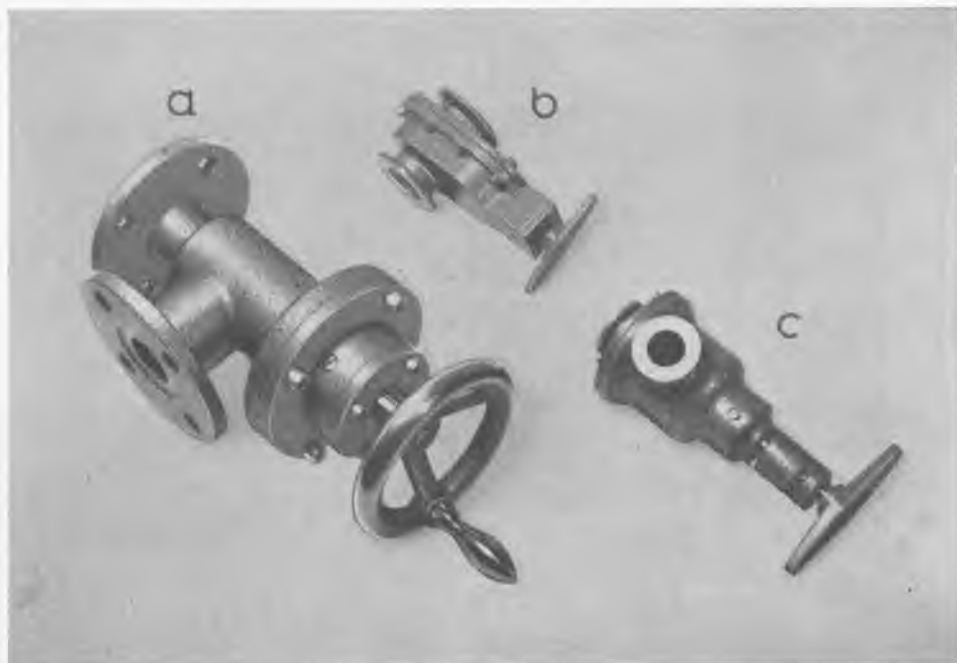
Szerkezetük és működésük azonos a megfelelő méretű Leybold-féle szelepekével, külső geometriai méretük azonban kisebb /lásd 4. ábra, a, b/.

A vákuumrendszerhez való csatlakoztatást minden esetben a Leybold cég által szabványosított gyors csatlakoztató bilincsek és vezetőgyűrűk segítségével oldottuk meg, sőt ezt a rendszert, melyet a Leybold csak 32 mm átmérőig enged meg, mi sikerrel alkalmaztuk 40 mm átmérőjű szabad nyílás mellett is.

Köszönetet mondunk Kallós Jánosnak a szelepek prototípusainak igen gondos elkészítéséért.

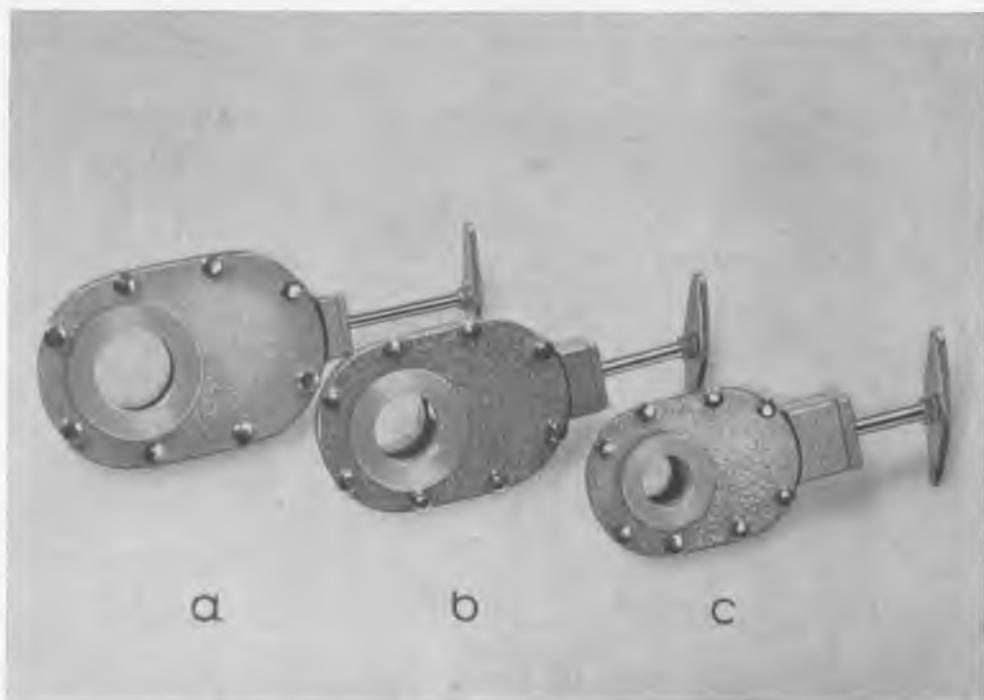
Érkezett: 1965. okt. 6.

KFKI Közl. 14.évf. 3.szám, 1966.



2. ábra

- a) Leybold szelep  $\varnothing$  32 mm
- b) Tolózár  $\varnothing$  32 mm
- c) Leybold szelep  $\varnothing$  20 mm



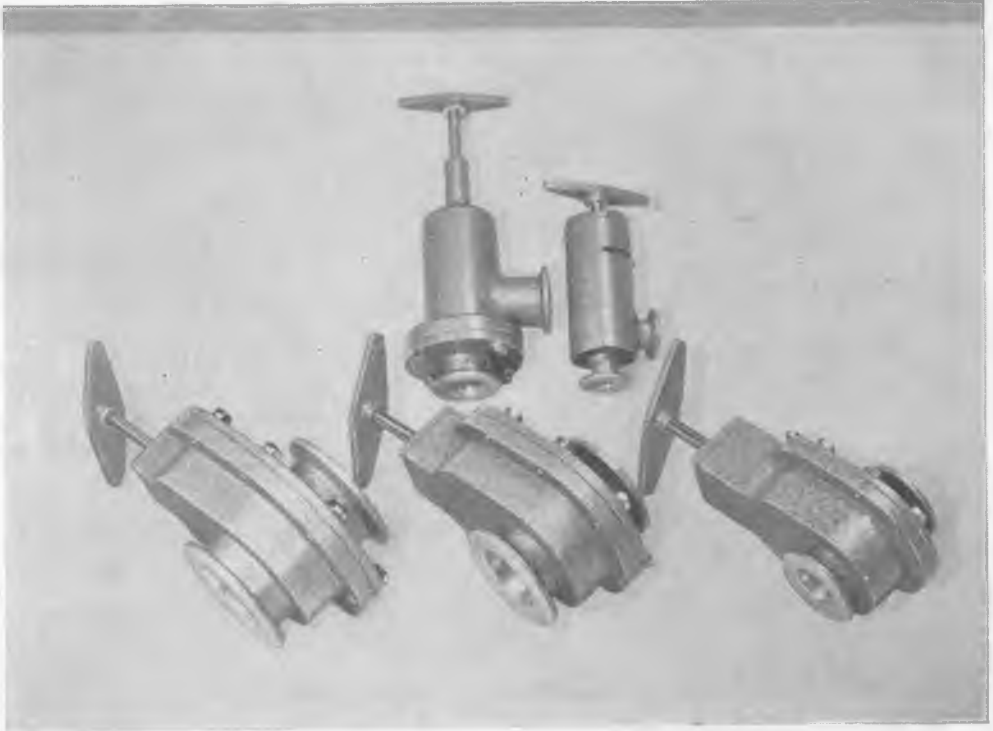
3. ábra

Vákuum tolózárak

- a)  $\varnothing$  40 mm
- b)  $\varnothing$  32 mm
- c)  $\varnothing$  20 mm







4. ábra



A JELALAKDISZKRIMINÁCIÓ ÁLTAL NYERHETŐ INFORMÁCIÓ SZÁMITÁSA  
ÉS ÉRTÉKELÉSE

Írta: Kiss Gábor

Összefoglalás

A szcintillációs jelalak eltéréseinek kimutatása a különböző időközök alatt begyűjtött töltésmennyiség alkalmasan súlyozott különbségével történik. A különbségi jel nagysága és szórása a szcintillátor jellemzőitől, a válogatókör megválasztásától és beállításától függ. A dolgozat ezeket az összefüggéseket határozza meg, és rámutat néhány egyszerű felhasználási lehetőségre.

A szcintillációs jelalak a szerves szcintillátorok egy jelentős csoportjánál függ a gerjesztő részecske típusától. Stilben kristálynál az időanalizátoros mérés [1] azt mutatta, hogy a fényhozam két szakaszra - egy gyorsra /~ 20 nsec-ig/ és egy lassura /~ 75  $\mu$ sec-ig/ - bontható. Bár a lassu szakasz nem exponenciális, jellege részecske-típustól független, azonos fénykeltési mechanizmus eredője. Az egyes szakaszok vagy komponensek relatív töltésmennyisége részecske-típusonként erősen változik, az első 20 nsec alatt érkezik be Compton-elektronoknál a teljes fényhozam 85 %-a, meglökött protonoknál 64 %-a és alfa részecskénél 46 %-a. Figyelembe véve, hogy a fényhozam abszolút értéke az E energia függvénye, felírható, hogy

$$L(E) = F(E) + S(E) = fL(E) + sL(E) \quad |1|$$

és

$$\begin{array}{lll} f_e = 0,85 & f_p = 0,64 & f_\alpha = 0,46 \\ s_e = 0,15 & s_p = 0,36 & s_\alpha = 0,54 \end{array}$$

ahol L a teljes fényhozam töltésmennyisége  
F és S a gyors és lassu komponens töltésmennyiségei  
f és s a gyors és lassu komponensek részarányai.

/1/ kifejezés általános érvényűnek mutatkozik a többi szerves szcintillátor esetében is. A szcintilláció mechanizmusára vonatkozó ismereteink alapján [2, 3] várható, hogy  $f$  és  $s$  értéke kis energiákon nem független az energia értékétől. Ettől azonban az esetek többségében eltekinthetünk, mert mint látni fogjuk, jelalakdiszkriminációról csak egy energiaküszöb felett beszélhetünk.

Különböző típusu részecskék folytonos eloszlású fényhozam spektrumainak átfedése gyakran nagymértékű. Gondoljunk pl. a Po-Beforrásra, amelyből a neutron részecskék mellett gamma sugárzás is távozik, ez a meglökött protonok és Compton-elektronok eredő spektrumát áttekinthetetlenül elbonyolítja. Válasszunk ki egy fényhozamot, amely  $E_e$  energiájú elektron vagy  $E_p$  energiájú proton részecskétől ered.

$$F(E_e) + S(E_e) = F(E_p) + S(E_p) = L .$$

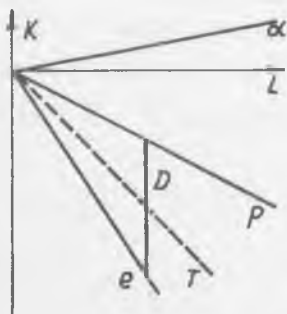
Ha a két fényhozam nagyságra meg is egyezik, az egyes komponensek aránya eltérő, és az eltérés nagysága

$$(f_e - f_p) / L = (s_p - s_e) L = qL .$$

Ez az eltérés jól kimutatható, ha esetenként képezzük a komponensek különbségét, az eredő nagysága részecsketipusonként más és más:

$$K_p = (s_p - f_p) L > K_e = (s_e - f_e) L .$$

Figyelembevéve a különböző fényhozamokat, az 1. ábrán látható képhez jutunk.



1. ábra

Általánosan érvényes, hogy a különbségek részecsketipusonként más és más egyenesek mentén helyezkednek el. Valójában ez csak akkor egyenes, ha  $f$  és  $s$  nem függ az energiától. E közelítés jogossága viszont ennek alapján könnyen ellenőrizhető. Egy egyenespárhoz, legyen ez esetünkben  $p - e$ , két mennyiség rendelhető: az egyenesek távolsága

$$D = K_p - K_e = 2qL$$

és középértékük

$$T = \frac{1}{2} (K_p + K_e) = \frac{1}{2} [(s_e + s_p) - (f_e + f_p)] L .$$

Az 1. ábrán az alfa részecskék szeparálása polaritások szerinti válogatássá redukálódott. Hasonlóan leegyszerűsödik a proton- elektron szétválasztás is, ha a proton gyors komponensét megfelelő mértékben csökkentjük:  $\tau < 0,5 D$

$$D_1 = [(s_p - \alpha f_p) - (s_e - \alpha f_e)] L = (1 + \alpha) q L . \quad |2|$$

Az egyenesek egymástól való távolsága függ a csökkentés mértékének,  $\alpha$ -nak nagyságától:

$$\tau_1 = \frac{1}{2} [(s_p - \alpha f_p) + (s_e - \alpha f_e)] L = \frac{1}{2} [(s_e + s_p) - \alpha (f_e + f_p)] L . \quad |3|$$

Gyakori, hogy a lassu és gyors komponensek különbsége helyett a teljes fényhozam és a gyors komponens különbségét állítják elő. Ekkor a teljes fényhozam csökkentendő:

$$D_2 = [(\alpha - f_p) - (\alpha - f_e)] L = q L . \quad |4|$$

Az egyenesek egymástól való távolsága nem függ  $\alpha$  választásától:

$$\tau_2 = \frac{1}{2} [(\alpha - f_p) + (\alpha - f_e)] L = \left[ \alpha - \frac{f_e + f_p}{2} \right] L . \quad |5|$$

A különbségek az 1. ábrán látható egyenesek körül valószínűségi eloszlást mutatnak, mivel az egyes komponensek nagysága statisztikus szórást mutat. Általában a fotoelektronok véges számát szokták a szórás okaként megjelölni, és a valószínűségi eloszlást Poisson-jellegűnek veszik. Ez, mint [4]-ben is megmutatták, csak közelítően igaz, de a számolást nagymértékben egyszerűsíti. Ha a fényhozam és a fotoelektron szám közt a következő összefüggés áll fenn:  $L = \beta N$ , akkor a  $D_1$  és  $D_2$  szórásnégyzete

$$\sigma_{D1}^2 = \beta^2 N [\alpha^2 (f_e + f_p) + s_e + s_p] \quad |6|$$

$$\sigma_{D2}^2 = \beta^2 N [\alpha^2 (s_e + s_p) + (1 - \alpha)^2 (f_e + f_p)] . \quad |7|$$

Az utóbbi esetben figyelembe vettük, hogy a gyors komponens a teljes fényhozamban már egyszer szerepelt, és így nem tekinthető függetlennek.

A relatív hiba  $\frac{\sigma_D}{D}$  értéke függ  $\alpha$  megválasztásától. Nyilvánvaló, hogy minél kisebb a relatív hiba, a válogatás biztonsága annál nagyobb, ezért érdemes  $\alpha$  értékét optimalizálni.

$$\frac{d\left(\frac{\sigma_D}{D}\right)}{d\alpha} = 0$$

feltételből  $\sigma_{D1}/D1$  esetre Varga László [5] végezte el a számolást  $T_1=0$  eredménnyel.  $\sigma_{D2}/D2$  esetén hasonló eredmény adódik:  $T_2=0$ . Az optimális  $\alpha$  értékkel számolt kétfajta relatív hiba azonos eredményre vezetett:

$$\frac{\sigma_{D1}}{D1} = \frac{\sigma_{D2}}{D2} = \frac{1}{\sqrt{2N}} \frac{1}{q} \sqrt{(f_e + f_p)(s_e + s_p)}. \quad |8|$$

A válógatókörök felbontóképessége nem függ a különbségképzés módjától.

A relatív hiba értéke függ a fényhozam nagyságától is. A

$$\frac{2\sigma_D}{D} = 1$$

összefüggéshez tartozó fényhozamnál a különbségi jelek eltérése és a kétszeres szórás egymással egyenlő. Megállapodhatunk abban, hogy ezt a fényhozamot fogadjuk el a szétválogathatóság alsó határaként:

$$L_{min} = \frac{2\beta}{q^2} (f_e + f_p)(s_e + s_p).$$

Legyen a minimális fényhozamnak megfelelő elektron, illetve proton energia  $E_{e\ min}$ , illetve  $E_{p\ min}$ . Ha feltételezzük, hogy az elektronok esetén a fényhozam arányos az energiával,  $L_e = \gamma E_e$ , úgy felírható a következő összefüggés:

$$E_{e\ min} = \gamma^{-1} L_{min}. \quad |9|$$

Eddig hallgatólagosan feltételeztük, hogy az elektronika a töltéseket maradéktalanul begyűjti, másszóval a begyűjtési időállandónk végtelen. A gyakorlati megvalósítás ettől természetesen messze van, ezért az egész folyamatot időbeli függésében kell vizsgálnunk. A számítások során tisztázni szeretnénk, hogy korábbi eredményeink milyen feltételek mellett használhatók.

A folyamatok időbeliségét elsősorban a fényhozam időbeli alakulása szabja meg. A gyakorlat által használt időintervallumban a fényhozam

$$i(E,t) = a(E)e^{-\frac{t}{\tau_1}} + b(E)e^{-\frac{t}{\tau_2}} \quad /10/$$

formulával közelíthető [6], ahol

$$a(E)\tau_1 = F(E) \quad b(E)\tau_2 = S(E).$$

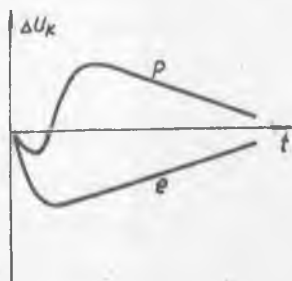
Az RC körön megjelenő feszültség ilyenkor

$$u_L(t) = \frac{RC}{RC-\tau_1} \frac{F}{C} (e^{-\frac{t}{RC}} - e^{-\frac{t}{\tau_1}}) + \frac{RC}{RC-\tau_2} \frac{S}{C} (e^{-\frac{t}{RC}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}}). \quad /11/$$

Amennyiben egy RC körre a két komponens töltésmennyiségének különbségét vesszük, vagy a két azonos RC időállandóju körön létrejött feszültségek különbségét képezzük, a különbségi jel

$$\Delta u_K(t) = \frac{RC}{RC-\tau_2} \frac{S}{C_b} (e^{-\frac{t}{RC}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}}) - \frac{\alpha RC}{RC-\tau_1} \frac{F}{C_a} (e^{-\frac{t}{RC}} - e^{-\frac{t}{\tau_1}}) \quad /12/$$

alaku, és a felírásban figyelembe vettük azt, hogy a kapacitások nem szükségszerűen azonosak az RC időállandón belül. Az RC értékétől függően két szélső eset különböztethető meg. Ha  $RC > \tau_2$ , eredményeink megközelítik az időfüggetlen esetet. Ugyanis bizonyos idő elteltével a /12/ jobboldalán csak az RC -t tartalmazó exponenciálisak lesznek számottevők, és ettől kezdve beállítható a  $\tau_1 = 0$  állapot. A különbségi jelek időfüggését ilyen esetre a 2. ábra mutatja be.



2. ábra

A különbséget a görbék rögzített időpontban vett értékei szolgáltatják:

$$\alpha \frac{F_e}{C_a} - \frac{RC}{RC-\tau_2} \frac{S_e}{C_b} = -\alpha \frac{F_p}{C_a} + \frac{RC}{RC-\tau_2} \frac{S_p}{C_b}$$

feltételből

$$\alpha = \frac{C_a}{C_b} \frac{RC}{RC-\tau_2} \frac{s_e + s_p}{f_e + f_p}. \quad /13/$$

A különbségi jelek eltérésének a következő kifejezés adódik

$$\Delta u_D(t) = \frac{F_e + F_p}{C_b} \left[ \alpha \frac{C_b}{C_a} (e^{-\frac{t}{RC}} - e^{-\frac{t}{\tau_1}}) + \frac{RC}{RC-\tau_2} (e^{-\frac{t}{RC}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}}) \right]. \quad /14/$$

Formálisan nézve /11/ és /14/ csak a komponensek arányában különbözik. Míg a komponensek aránya /11/-ben  $f/s$ , addig /14/-ben /13/ felhasználásával  $(s_e + s_p)/(f_e + f_p)$ . Ez az eltérés erősen befolyásolhatja a görbék maximum helyeit. Ha  $f/s > 1$ , az egyik maximum  $\tau_1$ , a másik maximum  $\tau_2$  nagyságrendjébe esik. Párhuzamot vonhatunk /14/ és /2/ között is, mindkettő arányos  $(F_e - F_p)$  értékével, és még az arányossági tényező  $(\alpha + 1)$  jellege is megmarad, ha csak az RC -t tartalmazó exponenciális tagokat vesszük figyelembe.

A  $\tau_2$  -t tartalmazó exponenciális tag elhanyagolása természetesen csak valamilyen hibával történhet. E hiba relatív nagysága M-nél akkor lesz kisebb, ha a mintavétel  $t = x \tau_2$  időpontja kielégíti a következő egyenlőtlenséget:

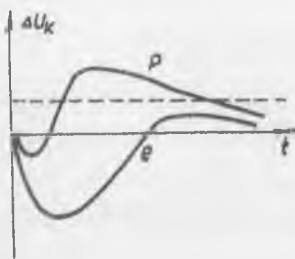
$$\left( \alpha \frac{C_b}{C_a} \frac{RC - \tau_2}{RC} + 1 \right)^{-1} e^{-x \left( 1 - \frac{\tau_2}{RC} \right)} < M . \quad /15/$$

Az első tényező értéke mindenképp kisebb egynél.

Egészen eltérő eredményt kapunk, ha  $RC \sim \tau_2$ . /12/ egyenlet jobb oldalán az első tag alakja megváltozik:

$$\lim_{RC \rightarrow \tau_2} \frac{RC}{RC - \tau_2} \frac{S}{C_b} \left( e^{-\frac{t}{RC}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) = \frac{S}{C_b} \frac{t}{\tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} .$$

Ezzel a lassu komponens nagysága erősen lecsökken, míg a gyors komponens csak kevésbé változik. A lassu komponens viszont az idő múlásával erősödni fog a gyorséhoz képest, eredőül a 3. ábrán látható képhez jutunk.

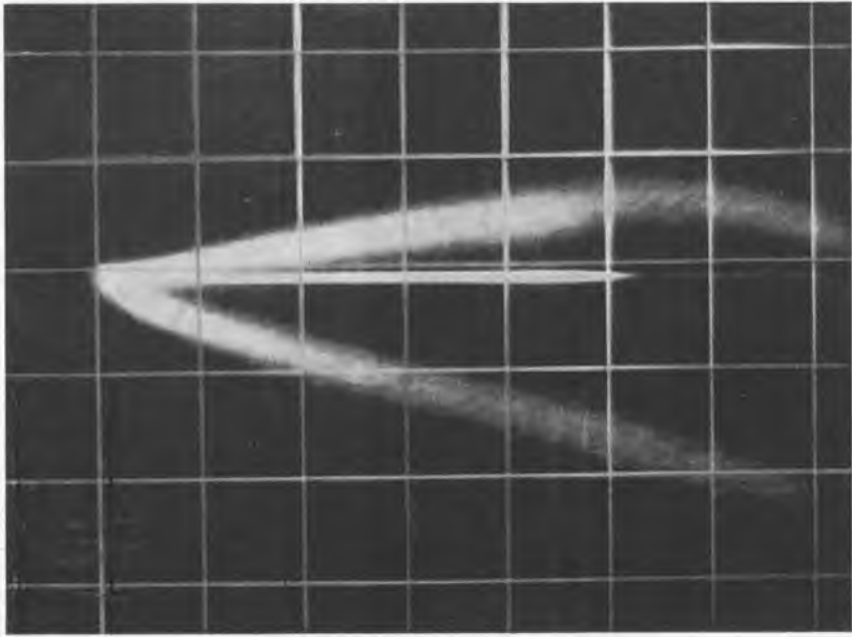


3. ábra

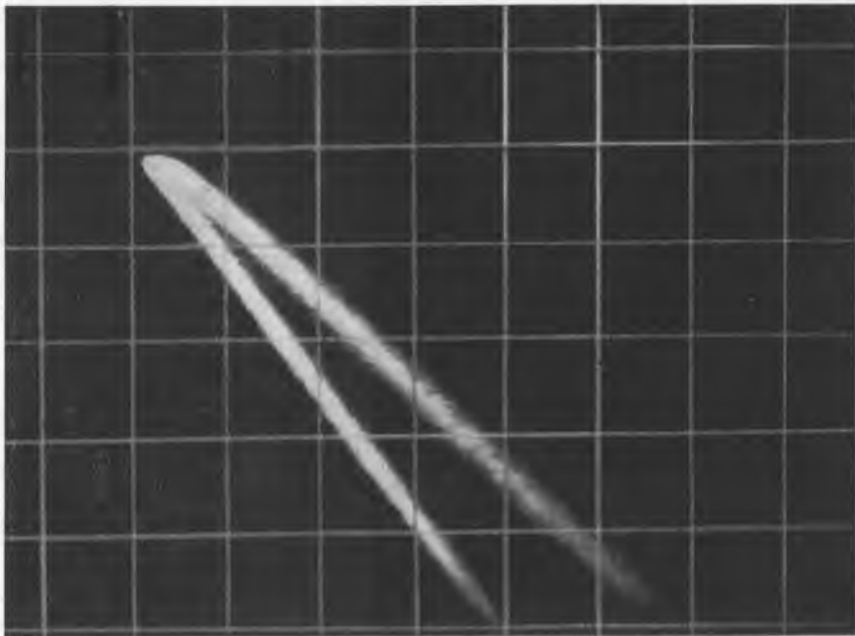
Ilyenkor is felhasználhatjuk a bizonyos idő elteltével megjelenő lassu szakaszt, de  $T_1 = 0$  beállításra nincs lehetőség. Így energiafüggetlen diszkriminációs szint /szaggatott vonallal jelölve/ nem választható.

Tegyük most vizsgálat tárgyává a különbségképzés másik módját, amikor a teljes fényhözamból vonjuk ki a gyors komponenset. A különbségi jel ilyenkor





4. ábra



5. ábra



$$\Delta U_K(t) = \frac{\alpha' RC}{RC - \tau_2} \frac{S}{C_b} (e^{-\frac{t}{RC}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}}) - (1 - \alpha' \frac{C_a}{C_b}) \frac{RC}{RC - \tau_1} \frac{F}{C_a} (e^{-\frac{t}{RC}} - e^{-\frac{t}{\tau_1}})$$

alaku. Ha kiemeljük a jobboldalon  $\alpha'$ -t, és elvégezzük az

$$\frac{1}{\alpha'} - \frac{C_a}{C_b} = \alpha$$

helyettesítést, a zárójelen belül /12/ jobboldala marad. Így az előző eredmények közül a relativ jellegű /15/ változatlanul érvényes. A különbségi jelek időfüggése  $RC > \tau_2$  esetén jellegében megegyezik a 2. ábrán látható görbékkel. Vigyük e különbségi jeleket egy oszcilloszkóp függőleges eltérítő lemezeikre és a teljes fényhozammal arányos jelet a vízszintes eltérítő lemezekre, továbbá gondoskodjunk arról, hogy a fénynyaláb csak  $t_0 \approx RC$  időpillanatban gyűljön ki egy rövid időre, ekkor a  $K - L$  függés jelenik meg az oszcilloszkóp ernyőjén, és ez 1. ábrától csak abban különbözik, hogy  $\alpha \neq 1$ . Bemutatóul szolgáljon a 4. ábrán látható kép, mely a [7] alatt közölt összeállítással készült.

A bemutatott felvétel  $P_0 - B_2$  forrással gerjesztett stilben kristályra vonatkozik. A felfelé haladó görbét alkotó pontok elektronoktól származnak, a lefelé haladó görbe pontjai viszont protonoktól. E görbék jó közelítéssel egyeneseknek tekinthetők: a nagyenergiájú elektronok elhajlása már a multiplier tértöltésével magyarázható. Az ábrán látható vízszintes vonal a kb. 1 MeV energiájú elektron fényhozamát adja meg vonatkoztatási értékül. Az  $RC > \tau_2$  esetben és olyan időpontokban, amikor már csak az  $RC$ -t tartalmazó exponenciálissal kell számolnunk, a különbségi jelek eltérése

$$\Delta U_D(t) = \frac{F_e - F_p}{C_b} \left[ \alpha' \left( \frac{RC}{RC - \tau_2} - 1 \right) + \frac{C_b}{C_a} \right] e^{-\frac{t}{RC}} \quad |16|$$

Ha  $U_D$  értékét függetlennek tekintjük  $\alpha$  választásától, az így elkövetett relativ hiba nagyságrendje

$$\frac{\tau_2}{RC - \tau_2} \quad |17|$$

Ha csak annyiban módosítjuk az előző összeállítást, hogy a függőleges eltérítő lemezpárra a gyors komponenseket kapcsoljuk, az oszcillosz-

kóp ernyőjén az  $F - L$  összefüggés jelenik meg /lásd 5. ábra/.

Várható, hogy a 4. és 5. ábrán látható egyenesek azonos fényhozamoknál vett távolságai közel azonosak lesznek, és relatív eltérései /17/ által adott nagyságrendbe esnek. A [7] alatt közölt válogatókör esetén e relatív hiba kisebb 5 %-nál, és ez az eredményekkel jó összhangban áll.

A /15/ és /17/ feltételek a válogatókör tervezésénél csak akkor jelentenek megkötést, ha olyan speciális igény vetődik fel, hogy a komponensek részarányából a válogatóköri jellemzőkre szeretnénk következtetni vagy megfordítva. Az ilyen igény jogosultságát és az alkalmasan tervezett válogatókör segítségével nyerhető információkat példák kapcsán mutatjuk be.

A komponensek részarányára vonatkozó ismereteink korántsem egyértelműek. Bár a stilben a leggyakrabban használt szerves jelalakdiszkriminációs szcintillátor, az egyes komponenseinek részarányai ma is tisztázatlanok [8].

Ugyanakkor a jelalakdiszkriminációs gyakorlatban bevált oszcilloszkópos megjelenítési módszer segítségével könnyen előállíthatók a gyors komponensek ( $F$ ) teljes fényhozamtól ( $L$ ) való függését ábrázoló, részecsketípusonként szétváló görbék /Lásd 5. ábra/.

Ha figyelembe vesszük az elektronika által okozott alapszint kivonást, a gyors komponensek aránya rögzített fényhozamnál állandónak tekinthető, és értéke

$$\left( \frac{F_e}{F_p} \right)_L = \frac{f_e}{f_p} = \frac{1 - S_e}{1 - S_p} \quad /18/$$

összefüggésbe hozható más mérések eredményeivel.

Vizsgáljuk meg, milyen következtetésekre juthatunk a 4. ábrán látható kép felhasználásával. A szétváló egyenesek közti távolság  $D = (f_e - f_p)L$  egymagában még kevésbé használható, de ha két különböző szcintillátorral hasonló beállítás mellett  $\alpha$  állandó/ készült felvételeken a középtengelyek eltérését is mérjük:

$$G = T - T' = \frac{1}{2} [(f_e + f_p) - (f_e' + f_p')] L,$$

az egyik szcintillátor  $f_e$  és  $f_p$  paramétereinek ismeretében a másik  $f'_e$  és  $f'_p$  paraméterei kiszámíthatók:

$$(f'_e + f'_p) = (f_e + f_p) - 2(f_e - f_p) \left(\frac{G}{D}\right)_L$$

és

$$(f'_e - f'_p) = (f_e - f_p) \left(\frac{D'}{D}\right)_L \quad /19/$$

A szcintillátorok jelalakdiszkriminációs felbontóképességének számszerű meghatározása meglehetősen bonyolult [9]. A /9/ alatt meglehetősen egyszerű formát kaptunk a minimális elektronenergiára. Segítségével szcintillátorok jelalakdiszkriminációs összehasonlítása a következő mennyiségek meghatározására vezethető vissza:

$$\frac{E'_{\min}}{E_{\min}} = \frac{L_o}{L'_o} \left(\frac{D}{D'}\right)_L^2 \frac{f'_e + f'_p}{f_e + f_p} \frac{s'_e + s'_p}{s_e + s_p} = \frac{L_o}{L'_o} \left(\frac{D}{D'}\right)_L^2 P, \quad /20/$$

ahol  $L_o/L'_o$  az azonos energiájú elektronok által kiváltott fényhozamok aránya. Az előbbieket alapján az egész összehasonlítás, ha  $f_e$  és  $f_p$  ismert, két felvétel elkészítésére korlátozható. E felvételek a 4. ábrához hasonlóak; a  $D(L)$  függést mutatják, és a vízszintes tengelyen egy adott, esetünkben kb. 1 MeV-es energiájú elektron fényhozama látható ( $L_o$ ).  $P$  meghatározására a következő kifejezés adódik:

$$P = \left[ 1 - 2 \frac{f_e - f_p}{f_e + f_p} \left(\frac{G}{D}\right)_L \right] \left[ 1 + 2 \frac{f_e - f_p}{s_e + s_p} \left(\frac{G}{D}\right)_L \right];$$

amennyiben  $\left(\frac{G}{D}\right)_L = 0$ ,  $P = 1$ .

Eredményeink értékelésénél természetesen figyelembe kell venni, hogy elektronikánk a gyors és lassu komponens begyűjtését beállításából adódó korlátok közé szorítja, és ez esetenként hamis információra vezethet.

#### I r o d a l o m

[1] Bollinger, L.M., Thomas, G.E.: Rev.Sci.Instr. 32, 1044, /1961/

- [2] Birks, J.B.: IRE Trans. NS-7, No. 2-3, 2, /1960/
- [3] Birks, J.B.: IRE Trans. NS-11, No. 3, 4, /1964/
- [4] Horrochs, D.L.: Nucl. Instr. and Meth. 27, 253, /1964/
- [5] Varga L.: Nucl. Instr. and Meth. 14, 24, /1961/
- [6] Daehnick, W., Sherr, R.: Rev. Sci. Instr. 32, 666, /1961/
- [7] Binder Gy., Kiss G.: Fizikai Folyóirat /megjelenés alatt/
- [8] Owen, R.B.: IRE Trans. NS-9, No. 3, 285, /1962/
- [9] Brooks, F.D., Pringle, R.W., Funt, B.L.: IRE Trans. NS-7, No. 2-3, 35, /1960/

Érkezett: 1965. okt. 19.

KFKI Közl. 14.évf. 3.szám, 1966

## NITROZOVEGYÜLETEK REDUKÁLÁSA ÉS NÉHÁNY PIKRILHIDRAZIN SZÁRMAZÉK ELŐÁLLÍTÁSA

Irta: Heidt János, Gömbös Ernő<sup>\*/</sup> és Tüdős Ferenc<sup>\*\*/</sup>

### Összefoglalás

Nitrozovegyületeket redukáltunk  $\text{LiAlH}_4$ -el. C-nitrozovegyületek azobenzollá redukálódnak, N-nitrozovegyületekből aszimmetrikus hidrazinok állíthatók elő. Difenil-nitrozamin  $\text{LiAlH}_4$ -es redukciója szoba-hőmérsékleten rendszerint difenilaminhoz vezet. Néhány aromás nitrozamin  $\text{LiAlH}_4$  nagy feleslegével hidrazinná tudunk redukálni anélkül, hogy szekunder aminok keletkeztek volna. Az aszimmetrikus hidrazinokból pikrilkloriddal difenilpikrilhidrazin-származékokat állítottunk elő, amelyek szabad gyökké oxidálhatók.

Goldschmidt és munkatársai a huszas évek elején állították elő [1] a difenil-pikril-hidrazint /DPPH/, mely az eddig ismert legstabilabb szabad gyökök közé tartozik. Kevesebb nitro-csoportot tartalmazó hasonló típusu szabad gyökök előállításával Tüdős és munkatársai [2] foglalkoztak. Ismert szerkezetű szabad gyökök ESR spektrumának hiperfinom strukturájából értékes információkat kaphatunk a párosítatlan elektron delokalizációjára vonatkozóan.

A DPPH típusu szabad gyökök előállításához a kiindulási vegyületek a szekunder aminok, melyekből /1/ szerint jutunk el a szabad gyökökhöz.

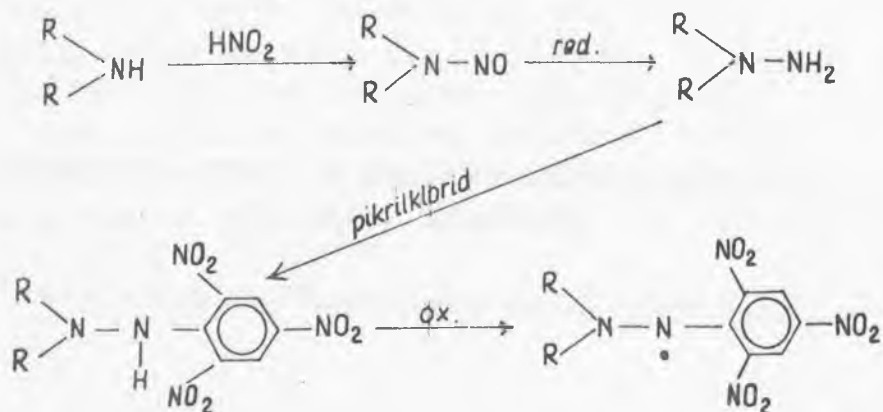
---

\*/

Nehézipari Minisztérium

\*\*/

Központi Kémiai Kutató Intézet



/1/

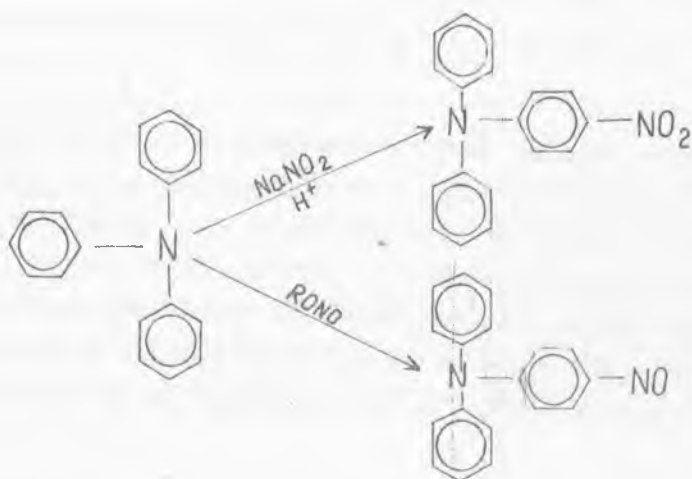
A nitrozaminok redukcója savanyu közegben, alacsony hőmérsékleten cinkkel terjedt el legjobban [7, 8] .

A módszer hátránya, hogy a redukcó könnyen szekunder amin keletkezéséhez vezet, és gyakran a termelések sem kielégítőek, sőt egyes esetekben, mint pl. a fenil-  $\beta$  -naftil-nitrozaminnál, a kívánt hidrazint csak nyomokban tudták izolálni [5], és csak ujabban sikerült a redukciót 50-60 %-os termeléssel véghezvinni [15] .

Az aromás nitrozovegyületek jelentősége megnőtt, mert kitűnt, hogy polimerizációs reakciókban igen jól használhatók inhibitorként [3], [12] .

Előállításukra számos reakciót ismeretes. Legáltalánosabban a megfelelő hidroxilaminok enyhe, ill. az aminok erősebb oxidációjával nyerhetők. Közvetlen nitrozálással csak fenolból és tercier aromás aminokból keletkeznek nitroso vegyületek. A nitrozálás jellegzetes elektrofil szubsztitúció. A hidroxil és dialkilamino-csoport erősen megnöveli  $p$  -helyzetben az elektronsűrűséget, és ezzel lehetővé válik a nitroso-csoport közvetlen bevitele a molekulába. A trifenilamin közvetlen nitrozálása nátriumnitrítal nem várt eredménnyel jár [16] , mivel főtermékként nitrovegyület keletkezik. A reakciókörülmények változtatásával /hőmérséklet, és oldószer/ nem sikerült olyan reakciótat találnunk, mellyel főtermékként nitrozovegyület keletkezett volna. Ha azonban az alábbi /2/ reakcióegyenlet szerint a nitrozálást alkilnitritekkel végezzük, ugy főtermékként a várt nitrozovegyülethez jutunk [16] .





[2]

Szekunder aromás-aminok nitrozálásával N-nitrozovegyületeket /nitrozaminokat/ kapunk. Ezekből protonindukált intramolekuláris átrendeződéssel kvantitatív termeléssel  $\rho$ -nitrozoanilineket állíthatunk elő.

Ilyen átrendeződést az N-nitroso karbazolnál is megfigyelhetünk [11]. Sósavas éter hatására lassan 3-nitrozkarbazol keletkezik. Ezt az átrendeződést meg tudtuk gyorsítani azáltal, hogy az N-nitroso-karbazol alkoholos oldatába sósavgázt vezetünk. Az átrendeződés 1/2-1 óra alatt melegedés közben megy végbe, miközben az oldat a monomer-nitrozovegyületek jellemző zöld színét veszi fel. Ez az átrendeződés jégecetben még melegen sem következik be, az N-nitroso karbazol leg-egyszerűbb előállítása jégecetben nátriumnitrítal történik [4], és a termelés kvantitatív. Az N-nitroso-karbazol alkoholos oldatban Zeidler [6] szerint tartós főzés hatására karbazollá alakul. Az -NO csoport eliminálódását már az ecetsavas savanyítás is jelentősen meggyorsítja.

Ekvimoláris mennyiségű pikrinsavval alkoholos oldatban egyszeri felfőzéssel a karbazol pikrátját kaptuk, amit a karbazolból előállított pikráttal I.V.-spektrumuk alapján azonosítottunk.

#### Nitrozovegyületek redukciója $\text{LiAlH}_4$ -el

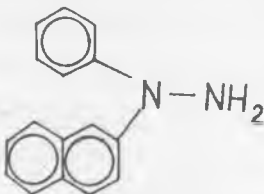
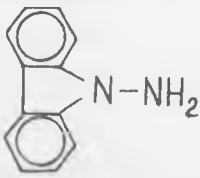
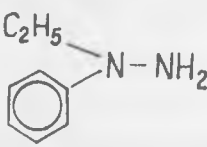
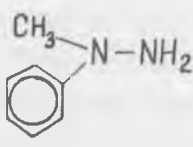
A C-nitrozovegyületek  $\text{LiAlH}_4$ -es redukciójával azobenzolokat kapunk. Oláh [10] szerint az azobenzolok további redukciója csak többórás forralással valósítható meg, de a folyamat katalitikus mennyiségű fém-

haloidok hozzáadásával erősen meggyorsítható és így a reakció 1-2 órára lecsökkenthető.  $\rho$ -nitrozó klórbenzol  $\text{LiAlH}_4$ -es redukciója 80 %-ban  $\rho$ ;  $\rho'$ -diklórazobenzolhoz vezetett. A redukciót szobahőmérsékleten 1 óra alatt hajtottuk végre.

A nitrozaminok nem minden esetben redukálhatók  $\text{LiAlH}_4$ -gyel hidrazinokká. A difenil nitrozamin  $\text{LiAlH}_4$ -es redukciójára az irodalomban számos adat található. Schueler és munkatársai [9] difenilnitrozamin  $\text{LiAlH}_4$ -es redukciójával főtermékként difenilamint kaptak. Poirier és munkatársai [17]  $10^\circ\text{C}$  alatti hőmérsékleten jó termeléssel állítottak elő 1,1-difenil hidrazint. 90% feletti termelést értek el azért, hogy  $\text{LiAlH}_4$  számított mennyiségét adták a nitrozovegyület éteres oldatához.

A difenilnitrozamin  $\text{LiAlH}_4$ -es redukciójánál a reakciókörülmények jelentős szerepet játszanak a végtermékkel illetően. Így pl. 90%-os termelést sikerült elérnünk azért, hogy szobahőmérsékleten számi-

1. táblázat

Vegyület	Op. ill. fp.	Kitermelés %
	73 b.	100
	150 b.	95
	116-117/12	85
	134-136/46	96

tott mennyiségű  $\text{LiAlH}_4$  -hez a lehető leggyorsabban adtuk hozzá a difenil nitrozamin éteres oldatát.  $\text{LiAlH}_4$  feleslegével a redukció difenilaminig megy [9]. Ezt a redukciós módszert kiterjesztettük más aromás nitrozaminokra is. Kitűnt, hogy az N-nitrozo-karbazol, valamint az N-nitrozo fenil- $\beta$ -naftilamin még  $\text{LiAlH}_4$  nagy feleslegével sem redukálódik szekunder aminná. Az 1. táblázatban feltűntettük a  $\text{LiAlH}_4$  -es redukcióval előállított aszimmetrikus hidrazinokat.

A hidrazinokat hidroklorid vagy szabad bázis formájában  $\text{Na}_2\text{CO}_3$  jelenlétében reagáltattuk pikrilkoriddal. Az előállított pikrilhidrazin származékok a 2. táblázatban vannak feltűntetve.

2. táblázat

A vegyület neve	Op.	Termelés %	Analízis			
			C	H	% N	
9-pikrilaminokarbazol	246	90	sz	54,96	2,82	17,80
			t	54,72	3,08	17,85
N-fenil-N'- $\beta$ -naftil- N' pikrilhidrazin	159	96	sz	59,32	3,39	15,72
			t	59,19	3,48	16,04
N-metil-N-fenil-N' pikrilhidrazin	156	60	sz	46,85	3,32	21,01
			t	47,41	3,30	21,19
N-etil-N-fenil-N' pikrilhidrazin	61	80	sz	48,41	3,77	20,16
			t	48,62	3,84	19,86
N,N-dietil-N' pikrilhidrazin	128	87,5	sz	40,13	4,38	23,40
			t	40,49	4,43	23,50

A 2. táblázatban szereplő hidrazin-származékok oxidációjáról és a gyökök ESR spektrumáról külön közleményben számolunk be.

Kisérleti rész

9-nitrozo-karbazol előállítása [4]

33,4 g karbazolt /0,2 m/ 250 ml jégcetben melegén feloldottunk és 17 g  $\text{NaNO}_2$  tömény vizes oldatát csepegtettük hozzá. Egy órán át to-

vább keverve szűrtük, vízzel mostuk. A termelés kvantitatív. Alkoholból átkristályosítva o.p. 80-81°.

Karbazol pikrát előállítása N -nitrozo-karbazolból.

1,96 g /0,01 m/ N -nitrozo karbazolt 2,29 g /0,01 m/ pikrinsavval 100 ml alkoholban melegítéssel feloldottunk. Lehülés után a narancsvörös oldatból tús kristályok váltak ki. A kristályokat leszűrtük, alkohollal mostuk és benzolból átkristályosítottuk. o.p. 190 - 191°C, azonos a karbazolból nyert pikrát olvadáspontjával. Keverék o.p. depressziót nem ad.

Analizis: $C_{18}H_{12}N_4O_7$	sz	t
C	86,18	86,30
H	5,42	5,35

9-amino-karbazol előállítása.

4,8 g N -nitrozo-karbazolt /0,025 m/ 80 ml száraz éterben oldottunk és 20-24°C-on hozzácsepegtettük 3 g  $LiAlH_4$  /0,08 m/100 ml éteres szuszpenziójához. Egy órán át szobahőmérsékleten tovább kevertük, vizes étterrel, majd vízzel megbontottuk, étterrel extraháltuk. Az éteres oldatot  $Na_2CO_3$  -on szárítottuk. Az éter lehajtása után 4,4 g fehér tús kristályok maradtak vissza. Alkoholból átkristályosítva o.p. 150-152°C.

Analizis: $C_{12}H_{10}N_2$	sz	t
C	79,09	79,37
H	5,47	5,60

1-fenil-1-  $\beta$  -naftilhidrazin előállítása.

3 g  $LiAlH_4$  50 ml éteres szuszpenziójához 4,98 g N -nitrozo-N -fenil-  $\beta$  -naftilamin /0,02 m/ 150 ml éteres oldatát csepegtettük. A szokásos feldolgozás után gyengén vöröses olaj maradt vissza, mely be-dermedt. Szűrtük, petroléterrel mostuk. Gyengén sárgás kristályok, o.p. 72-73°C. Sósavas sója 145-150°C körül lila színnel bomlik.

Analizis: $C_{16}H_{14}N_2HCl$	sz	t
C	70,97	70,69
H	5,58	5,64

1,1-dietil-2-pikril-hidrazin előállítása.

8,4 g 1,1-dietil-hidrazint /0,96 m/ és 23,8 g pikril-kloridot /0,096 m/ nátriumkarbonát jelenlétében 200 ml abs. alkoholban 2 órán át visszafolyattuk. A kivált csapadékot szűrtük és vízzel mostuk. 25 g /87,5%/ narancssárga csapadékot kaptunk, acetontól átkristályosítva o.p. 128°C.

p - nitrozó-trifenilamin előállítása.

6,12 g /0,025 m/ trifenilamint 30 ml sósavval telített alkoholban szuszpendáltunk és -10°C-on hozzácsepegtettünk 3,2 g /0,027 m/ izoamilnitritet. Keverés közben szobahőmérsékletre melegedett. A kivált csapadékot szűrtük, vízzel mostuk; 6 g barna csapadékot kaptunk, metanolból átkristályosítva o.p. 119-120°C.

Analizis: $C_{18}H_{14}N_2O$	Nsz	t
	010,22	10,72

p -nitro-trifenilamin előállítása.

2,45 g /0,01 m/ trifenilamint 80 ml sósavas alkoholban szuszpendáltunk és -10°C-on hozzácsepegtettük 0,69 g /0,01 m/ nátriumnitrit tömény vizes oldatát. Miután a reakcióelegy szobahőmérsékletre melegedett, vízbe öntöttük és a levált sárga csapadékot szűrtük. 2,7 g sárga, kevés barna nitrozovegyülettel szennyezett csapadékot kaptunk. Jégecetből átkristályosítva o.p. 140°C.

p -nitrozo-klórbenzol redukálása.

7,4 g  $LiAlH_4$  50 ml éteres szuszpenziójához 5,6 g nitrozo-klórbenzol 200 ml-es éteres oldatát csepegtettük szobahőmérsékleten és 1 órán át tovább kevertük. A feles  $LiAlH_4$  megbontása után éterrel extraháltuk, majd vízzel, hig sósavval és ismét vízzel mostuk. Száritás és az éter elhajtása után 3,5 g narancssárga tüket kaptunk. Acetontól átkristályosítva o.p. 183-184°C.

Analizis: $C_{12}H_8Cl_2N_2$	sz	t
	C 57,39	57,16
	H 3,22	3,51

I r o d a l o m

- [1] Goldschmidt, S., Renn, K.: Ber 55, 628 /1922/  
[2] Tüdős F., Azori M., Varsányi Gy., Holly S.: Acta Chim. Acad. Sci. Hung. 33, 433 /1962/  
[3] Tüdős F., Kende I., Heidt J.: Nitrogén Szimposium, Varsó 1963  
[4] Wieland, H., Süsser, A.: Annalen 392, 182  
[5] Graziani, F., Bovini, F.: Atti della Reale Accademia dei Lincei /Rendiconti/ /5/ 22, II. 40.  
/Beilstein's Handbuch der O. Chem. XV. I. 181/  
Gaz. Chim. Ital 43, II. 674  
[6] Zeidler, O.: Analen 191. /1878/  
[7] Fischer, E.: Annalen 190, 175 /1878/  
[8] Fierz-David, H.E., Blangey, L., Kaul, H.: Helv. Ch. A. 29, 1765 /1951/  
[9] Schueler, F.W., Hanna, C.: J. Am. Chem. Soc. 73, 4996 /1951/  
[10] Olah, G.A.: J. Am. Chem. Soc. 81, 3165 /1959/  
[11] DRP. 134983  
[12] Tüdős F., Kende I., Heidt J.: Vegyészkonferencia, Veszprém 1962  
[13] Poirier, R.H., Benington, F.: J. Org. Chem. 19, 1157 /1954/  
[14] Gömbös E., Heidt J., Erő J.-né, Tüdős F.: Vegyészkonferencia, Sopron 1965  
[15] Matevoszjan, P.O., Ctaskov, L.J.: Zsur. Obscsej. Himii 33, 3907 /1963/  
[16] Piccard, J.: Ber. 59, 1653 /1926/  
[17] Poirier, R.H., Benington, F.: J. Am. Chem. Soc. 74, 3192 /1952/

Érkezett: 1966. jan. 18.

KFKI Közl. 14.évf. 3.szám, 1966.