

OLVASGOTERMI PÉLDANY

Vol. 17. No. 2. 1969



1969 JUN 20

**КФИ**

**KÖZLEMÉNYEK**

**ВЫПУСКА ЦЕНТРАЛЬНОГО ИНСТИТУТА ФИЗИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ**

**REPORTS OF THE CENTRAL RESEARCH INSTITUTE FOR PHYSICS**

Szerkeszti: Ádám András

Редактор: А.Адам

Editor: A. Ádám

MTA KÖZPONTI FIZIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖNYVTÁR- ÉS KIADÓI OSZTÁLYA  
БИБЛИОТЕКА И ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ОТДЕЛ  
ЦЕНТРАЛЬНОГО ИНСТИТУТА ФИЗИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ ВЕНГЕРСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES  
CENTRAL RESEARCH INSTITUTE FOR PHYSICS LIBRARY AND DOCUMENTATION DEPARTMENT  
BUDAPEST, 114. POB 49.

Technikai szerkesztő: Nagy Imréné  
Megjelent: 1969. ápr. 5.

Példányszám: 320  
Rotaszám: 4316

A kiadásért felelős: Jánossy Lajos

Megjelenik: kéthavonta  
Előfizethető a 173.144-52. MNB bevételi számlán  
Előfizetési díj: egyes szám 5,-Ft, egy évre: 30,-Ft /6 szám/

Vol. 17. No. 2. 1969.

### TARTALOM

1. Krasznovszky Sándor: Két azonos vektor vagy pseudo-vektorbozonra bomló rezonancia helicitás állapotai . . . . . 87
2. Németh Géza: Bessel-függvények integráljának Csebisev-sorfejtése . . . . . 93
3. Németh Géza: Kelvin-függvények Csebisev-sorfejtése . . . . . 105
4. Biró János, Fehér István, Lendvay János és Tóth Ádám: Nagy érzékenységű alfa-spektrométer kis fajlagos aktivitású minták analizisére . . . . . 119
5. Királyhidi László és Kostka Pál: Egyszerű nyalábindikátor ionnyaláb vizsgálatára . . . . . 129
6. Zádor Erika: Besugárzás hatására keletkezett gyökök vizsgálata  $CS_2$ -3-MP üvegekben ESR módszerrel . . . . . 135



## РЕЗЮМЕ

1. Состояния спиральности резонанса, распадающегося на два тождественных векторных или псевдовекторных бозона

Ш. Красновски

Описываются состояния спиральности резонанса, распадающегося на два тождественных векторных или псевдовекторных бозона. На основе этих состояний дается единое описание строгих правил отбора, возникающих при распаде бозонного резонанса на два тождественных бозона с любым спином и четностью. Используя статистику Бозе-Эйнштейна, дана зависимость между изоспинами.

2. Разложения в ряды по полиномам Чебышева функций Келвина

Г. Немет

В этой работе описываются разложения в ряды по полиномам Чебышева функций Келвина. С целью вычисления функций коэффициенты рядов даются в таблице до точности 15 десятичных цифр.

3. Разложение в ряды по полиномам Чебышева интегралов от бесселевых функций

Г. Немет

В этой работе описываются разложения в ряды по полиномам Чебышева интегралов от бесселевых функций. С целью вычисления функций коэффициенты рядов даются в таблице до точности 15 десятичных цифр.

4. Спектрометр альфа-излучения большой чувствительности для анализа проб с малой удельной активностью

Я. Биро, И. Фехер, Й. Лендваи, А. Тот

Нами изготовлена цилиндрическая импульсная ионизационная камера для спектрометрии естественных альфа-излучателей с удельной активностью порядка  $10^{-12}$  кюри/грамм. Камера работает с смесью аргона и метана в проточном режиме. Измеренная полуширина спектра альфа-частиц тория-232 с энергией 3,98 Мэв равна 6,9%, а предел чувствительности при восьмичасовом измерении равен  $0,35 \cdot 10^{-12}$  кюри/грамм. Установку можно применить для альфа-спектрометрии естественных вод, минералов и биологических проб.

5. Простой детектор для исследования ионного пучка

Л. Кирайхиди и П. Коштка

В статье изложен детектор пучка простого устройства, разработанный в Ускорительной Лаборатории ЦИФИ для определения параметров ионного пучка. С помощью этого прибора в электростатическом ускорителе или стенде можно проверить положение и фокусировку пучка и определить диаграмму излучательной способности ионного источника.

6. Исследование радикалов, образовавшихся в  $CS_2$ -3-МР стеклах, методом ЭПР

Э. Задор

Было исследовано поведение радикалов, образовавшихся под влиянием гамма-облучения в  $CS_2$ -3-МР стеклах при  $77^{\circ}K$ . Совместно с другими продуктами было обнаружено образование ионрадикал  $CS_2^-$ . Сигнал ЭПР радикала  $CS_2^-$  при облучении видимым светом исчезает, а при последующем слабом нагревании вновь появляется. Это явление объясняется нами на основе ассоциативных свойств молекул  $CS_2$ , т.е. неспаренные спины ионрадикалов, образовавшихся близко друг к другу, способны обратимо компенсироваться.

## S u m m a r i e s

1. Helicity States of Boson Resonances Decaying into Two Identical Vector or Pseudovector Bosons

S. Krasznovszky

Helicity states are described for boson resonances decaying into two identical vector or pseudovector bosons. In terms of these states a uniform method is given for the determination of the rigorous selection rules for boson resonance decaying into two identical bosons of arbitrary spin and parity. On applying the Bose-Einstein statistics, the method yields a rule for the isospins, as well.

2. Chebyshev Polynomial Expansions for the Kelvin Functions

G. Németh

Chebyshev polynomial expansions are given for the economic evaluation of Kelvin functions. The expansion coefficients evaluated to 15 decimal digit accuracy are listed in tabulated form.

3. Chebyshev Expansions for the Integrals of Bessel Functions

G. Németh

Polynomial expansions are given for the economic evaluation of integrals of Bessel functions. The expansion coefficients, evaluated to 15 decimal digit accuracy are listed in tabulated form.

4. High Sensitivity Alpha-Spectrometer for the Analysis of Samples with Low Specific Activity

J. Biró, I. Fehér, J. Lendvay and Á. Tóth

An ionization chamber developed for the investigation and spectrometry of natural alpha emitters with specific activity of picocurie per gram

order. The flow-type chamber operates with a mixture of argon-methane gas. The relative half-width of the spectral line at 3,98 MeV of  $^{232}\text{Th}$  is 6,9 per cent. For a counting period of 8 hours the minimum detectable activity is 0,35 picocurie per gram in the range of energies from 3,5 to 6 MeV. The equipment is applicable for the alpha spektrometry of natural waters, minerals and biological samples.

5. Simple Beam Indicator for the Investigation of Ion Beams

L. Királyhidi, P. Kostka

A device of simple design is described which has been developed to study the parameters of ion beams in the Accelerator Laboratory of the Central Research Institute for Physics. It permits to check the focusing of the ion beam in accelerator and proves to be very useful for the investigation of ion sources on a test-stand, e.g. for the evaluation of the emittance diagram.

6. ESR Study of Radicals Formed on Gamma Irradiation in  $\text{CS}_2$ -3-MP Glasses

Erika Zádor

The behaviour of some transient species produced by gamma irradiation at  $77^\circ\text{K}$  in  $\text{CS}_2$ -3-MP glass was studied. Among other entities the formation of the radical ion  $\text{CS}_2^-$  was observed. The ESR spectrum of  $\text{CS}_2^-$  can be reversibly photobleached, i.e. it appears on moderate heating. The phenomenon is interpreted as resulting from the associative character of the  $\text{CS}_2$  molecules, that is the unpaired spins of the  $\text{CS}_2^-$  ions formed close to one another are supposed to compensate one another in a reversible manner.



## KÉT AZONOS VEKTOR VAGY PSEUDOVEKTORBOZONRA BOMLÓ REZONANCIA HELICITÁS ÁLLAPOTAI

Írta: Krasznovszky Sándor

### Összefoglalás

Leírjuk két azonos vektor vagy pseudovektorbozonra bomló rezonancia helicitás állapotait. Ezen állapotok alapján egységes vizsgálatát adjuk egy bozonrezonancia tetszőleges spinű és paritású két azonos bozonra való bomlásakor fellépő szigorú kiválasztási szabályoknak. A Bose-Einstein statisztika alkalmazásával egy összefüggést adunk az izospinre.

Az utóbbi időben kísérleti indikációt találtak lehetséges  $\rho^0 \rho^0$  rezonanciák létezésére vonatkozóan [1]. Chung [2] a kísérleti szögeloszlás segítségével ilyen rezonanciák spinjének és paritásának meghatározására javasol egy, a súlyozott átlagokon alapuló módszert.

Ilyen rezonanciák  $I^G = 0^+$  és  $J^P = 2^+ v. 4^+$  kvantumszámokkal fontos szerepet játszanak a reggeisztikában is, mivel a trajektriakra vonatkozó speciális feltételek mellett hiányzó helyeket tölthetnének be a  $P$  illetve  $P'$  trajektóriákon.

Ebben a cikkben a két azonos vektor vagy pseudovektor bozonra bomló bozonrezonanciák modellfüggetlen vizsgálatát adjuk. A két részecske tömegközépponti rendszerében vagyunk,  $\lambda_1$  és  $\lambda_2$  a két részecske helicitása. Mindkettő  $\pm 1$  és  $0$  értékeket vehet fel. Összesen 9 kombinációt készíthetünk a kétrészecske rendszerre vonatkozóan. Mivel a részecskék azonosak, a spin és a statisztika közti kapcsolat miatt a totál impulzusmomentum sajátvektorokat a következő módon kell szimmetrizálni: [3]

$$(1+P_{12}) |J M; \lambda_1 \lambda_2\rangle = |J M; \lambda_1 \lambda_2\rangle + (-)^J |J M; \lambda_2 \lambda_1\rangle \quad /1/$$

Felhasználva a paritásoperátor hatását [3] leíró

$$P |J M; \lambda_1 \lambda_2\rangle = (-)^J |J M; -\lambda_1 -\lambda_2\rangle \quad /2/$$

összefüggést /esetünkben ugyanis  $1^\pm$  spin paritású részecskékre való bomlást vizsgálunk/ megszerkeszthetjük a lehetséges J és P sajátállapotban lévő helicitásállapotokat:

Eredményeinket az I. táblázatban foglaljuk össze. A rövidség kedvéért csak a helicitásértékeket írjuk ki  $\pm$  és 0 alakban.

J	P = 1	P = 1
0	$ 0\ 0\rangle$ $ +\ +\rangle +  -\ -\rangle$	$ +\ +\rangle -  -\ -\rangle$
1	$- +\ 0\rangle +  0+\rangle +  -\ 0\rangle -  0-\rangle$	$ +\ 0\rangle -  0+\rangle +  -\ 0\rangle -  0-\rangle$
2n	$ 0\ 0\rangle$ $ +\ +\rangle +  -\ -\rangle$ $ +\ -\rangle +  -\ +\rangle$ $ +\ 0\rangle +  0+\rangle +  -\ 0\rangle +  0-\rangle$	$ +\ +\rangle -  -\ -\rangle$ $ +\ 0\rangle +  0+\rangle -  -\ 0\rangle -  0-\rangle$
2n+1	$ +\ -\rangle -  -\ +\rangle$ $- +\ 0\rangle +  0+\rangle +  -\ 0\rangle -  0-\rangle$	$ +\ 0\rangle -  0+\rangle +  -\ 0\rangle -  0-\rangle$

I. táblázat

Az /1/ egyenletből látható, hogy azonos helicitású állapotok csak páros J esetén lépnek fel. Különböző helicitású állapotok esetén pedig

$$|\lambda_1 - \lambda_2| \leq J \quad \text{azaz } J \geq 2 \quad \text{ha } \lambda_1, \lambda_2 \neq 0$$

$$\text{és } J \geq 1 \quad \text{ha } \lambda_1 \quad \text{vagy} \quad \lambda_2 = 0$$

Amiből nyilvánvalóan adódnak a J = 0 és J = 1 sorban szereplő állapotok az általános J = 2n és J = 2n+1 sorokban lévő állapotokból, ahol n pozitív egész szám és  $n \geq 1$ .

Eredményeink speciális esetben /a  $\lambda_1$  és/vagy  $\lambda_2 = 0$  tagok elhagyásával/ visszadják a lehetséges kétfoton állapotokat [4, 5] és a rájuk vonatkozó kiválasztási szabályokat.

Helicitás állapotok	J			
	0	1	2	3
$ 0\ 0\rangle$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}^1S_0 + \sqrt{\frac{2}{3}}^5D_0$		$\sqrt{\frac{14}{105}}^5S_2 - \sqrt{\frac{35}{105}}^1D_2 - \sqrt{\frac{20}{105}}^5D_2 + \sqrt{\frac{36}{105}}^5G_2$	
$\sqrt{\frac{1}{2}}( ++\rangle +  --\rangle)$	$\sqrt{\frac{2}{3}}^1S_0 + \sqrt{\frac{1}{3}}^5D_0$		$\sqrt{\frac{7}{105}}^5S_2 + \sqrt{\frac{70}{105}}^1D_2 - \sqrt{\frac{10}{105}}^5D_2 + \sqrt{\frac{18}{105}}^5G_2$	
$\sqrt{\frac{1}{2}}( ++\rangle -  --\rangle)$	$^3P_0$		$\sqrt{\frac{2}{5}}^3P_2 - \sqrt{\frac{3}{5}}^3F_2$	
$\sqrt{\frac{1}{2}}( +-\rangle +  -+-\rangle)$			$\sqrt{\frac{14}{35}}^5S_2 + \sqrt{\frac{20}{35}}^5D_2 + \sqrt{\frac{1}{35}}^5G_2$	
$\sqrt{\frac{1}{2}}( +-\rangle -  -+-\rangle)$				$-\sqrt{\frac{5}{7}}^5D_3 - \sqrt{\frac{2}{7}}^5G_3$
$\sqrt{\frac{1}{4}}( +0\rangle +  0+\rangle -  -0\rangle -  0-\rangle)$			$\sqrt{\frac{3}{5}}^3P_2 + \sqrt{\frac{2}{5}}^3F_2$	
$\sqrt{\frac{1}{4}}( +0\rangle +  0+\rangle +  -0\rangle +  0-\rangle)$			$\sqrt{\frac{14}{35}}^5S_2 - \sqrt{\frac{5}{35}}^5D_2 - \sqrt{\frac{16}{35}}^5G_2$	
$\sqrt{\frac{1}{4}}( +0\rangle -  0+\rangle +  -0\rangle -  0-\rangle)$		$^3P_1$		$^3F_3$
$\sqrt{\frac{1}{4}}(- +0\rangle +  0+\rangle +  -0\rangle -  0-\rangle)$		$^5D_1$		$\sqrt{\frac{2}{7}}^5D_3 - \sqrt{\frac{5}{7}}^5G_3$

II. táblázat

A  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  állapotot nézve eredményünk megadja a lehetséges végállapotokat és kiválasztási szabályokat egy tetszőleges spinű és paritású bozon, két azonos skálár vagy pseudoskálár bozonra való bomlása esetén. Az I. táblázatból nyilvánvaló, hogy a fotonokra való bomlás vizsgálatával ellentétben nem létezik egzakt kiválasztási szabály, amikor egy bozon két azonos ( $m_1 = m_2 = u \neq 0$ ) vektor vagy pseudovektor bozonra bomlik. Mivel ugyanezek a helicitás állapotok lépnek fel, amikor egy bozon két azonos tetszőleges spinű és paritású ( $u \neq 0, J \geq 1$ ) bozonra bomlik, ezért ebben az esetben szintén nincs egzakt tiltás.

A II. táblázatban az I. táblázatban szereplő állapotokat a szokásos LS kvantumszámokkal adjuk meg  $J = 3$  -ig.

$$\text{Az } L+S = \text{páros} \quad /3/$$

megszorítást kapjuk, amikor a  $P_{12}$  operátor hatását vizsgáljuk az  $L, S$  bázisban ( $u \neq 0$ ), amelyik kapcsolatot a II. táblázatban is ellenőrizhetjük /a felső index  $(2S+1), 3P$  és  $F$  -re, és lv.  $5S, D$  és  $G$  esetén/. Végezetül rámutatunk egy nyilvánvaló összefüggésre, amely az ugyanazon töltésmultipletthez ( $I(1)=I(2)=I$ ) tartozó azonos ( $I_3(1) = I_3(2)$ ) bozonok  $I$  izospinje és a bomló bozon  $I_p$  izospinje között van.

A szimmetrizált állapot nem változik a  $P_{12}$  operátor hatására ( $P_{12}(1 + P_{12}) \equiv P_{12} + 1$ ). A teljes állapotnak szimmetrikusnak kell lenni azonos bozonok esetén az összes változóban. Jelöljük  $O_{12}$  -vel azt az operátort, amely felcseréli az 1 és 2 részecske  $I_3(1)$  és  $I_3(2)$  töltéskoordinátáit. Akkor

$$O_{12} |I_p I_{p3}\rangle = (-)^{I_p - 2I} |I_p I_{p3}\rangle \quad /4/$$

A /4/ egyenlet a Clebsch-Gordon együtthatók szimmetriatulajdonságából következik és

$$I_p - 2I = \text{páros} \quad /5/$$

a fentemlitett kapcsolat. /Ahol természetesen  $I$  esetünkben is nem negatív egész vagy félegész érték lehet./

Megjegyezzük, hogy a /3/ és /5/ egyenlet azonos fermionok esetén is igaz.

Befejezésül szeretném megköszönni a kézirat átnézését és az értékes megjegyzéseket Frenkel Andornak.

I r o d a l o m

- [1] Clayton, J., Mason, P., Muirhead, H. and Renton, P.: CERN 68-7, Vol. II /281/
- [2] Chung, S.U.: Phys. Rev. 169, 1342 /1968/
- [3] Jacob, M. and Wick, G.C.: Ann.Phys. 7, 404 /1959/
- [4] Landau, L.: Doklady Akad. Nauk SSSR 60, 207 /1948/
- [5] Yang, C.N.: Phys. Rev. 77, 242 /1950/

Érkezett: 1969. Jan. 7.

KFKI K8zl. 17. évf. 2. szám, 1969.



# BESSEL - FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLJÁNAK CSEBISEV - SORFEJTÉSE

Irta: Németh Géza

## Összefoglalás

A dolgozatban a nullaindexű Bessel-függvények integráljának Csebisev-sorfejtését határozzuk meg. Az

$$\int_x^\infty J_0(t) dt, \int_x^\infty N_0(t) dt, \int_0^x I_0(t) dt, \int_x^\infty K_0(t) dt, \\ \int_x^\infty \frac{J_0(t)}{t} dt, \int_x^\infty \frac{N_0(t)}{t} dt, \int_0^x \frac{I_0(t)-1}{t} dt, \int_x^\infty \frac{K_0(t)}{t} dt$$

függvényekre aszimptotikájukhoz hasonló Csebisev-sorfejtéseket vezetünk le. A sorfejtések együtthatóit 15 decimális jegyre táblázatosan adjuk meg.

## I. Bevezetés

A nullaindexű Bessel-függvények integráljának az

$$\int_x^\infty J_0(t) dt, \int_x^\infty N_0(t) dt, \int_0^x I_0(t) dt, \int_x^\infty K_0(t) dt \\ \int_x^\infty \frac{J_0(t)}{t} dt, \int_x^\infty \frac{N_0(t)}{t} dt, \int_0^x \frac{I_0(t)-1}{t} dt, \int_x^\infty \frac{K_0(t)}{t} dt$$

függvények értékeinek kiszámítására táblázatokat pl: [1], továbbá sorfejtéseket lehet alkalmazni pl: [2]. Az egyik leghatásosabb módszer számológépen való számolásnál a polinom közelítések alkalmazása. Ismeretes, hogy polinom közelítések származtatására a Csebisev-polinomok szerinti sorfejtések igen alkalmasak. A következőkben az említett függvényekre aszimptotikájukhoz hasonló Csebisev-sorfejtéseket vezetünk le. A sorfejtések együtthatóit 15 decimális jegyre adjuk meg.

## 2. Bessel-függvények integráljának analitikai sajátosságai

Röviden összefoglaljuk a Bessel-függvények integráljának analitikai tulajdonságait, melyek alapul szolgálnak a Csebisev-sorfejtések levezetéséhez. A szereplő képletek egyrésze megtalálható /levezetéssel együtt/ Luke könyvében [2] .

A függvényeket  $0 < x < \infty$  értékekre akarjuk kiszámítani, tehát ismernünk kell mind az  $x \rightarrow 0$ , mind az  $x \rightarrow \infty$  viselkedésüket. A következő képletek érvényesek  $x \rightarrow 0$  esetére:

$$\int_x^\infty J_0(t) dt = 1 - \int_0^x J_0(t) dt = 1 - x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!^2 (2k+1)} (x/2)^{2k} \quad /1/$$

$$\frac{\pi}{2} \int_x^\infty N_0(t) dt = (c + \ln x / 2) \int_0^x J_0(t) dt - x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k}}{k!^2 (2k+1)} \left[ 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} + \frac{1}{2k+1} \right] \quad /2/$$

$$\int_0^x I_0(t) dt = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k}}{k!^2 (2k+1)} \quad /3/$$

$$\int_x^\infty K_0(t) dt = \frac{\pi}{2} + (c + \ln x / 2) \int_0^x I_0(t) dt - x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k}}{k!^2 (2k+1)} \left[ 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} + \frac{1}{2k+1} \right] \quad /4/$$

$$\int_x^\infty \frac{J_0(t)}{t} dt = -c - \ln x / 2 + \int_0^x \frac{1 - J_0(t)}{t} dt = -c - \ln x / 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (x/2)^{2k}}{k!^2 k} \quad /5/$$

$$\frac{\pi}{2} \int_x^\infty \frac{N_0(t)}{t} dt = -\frac{1}{2} (c + \ln x / 2)^2 + (c + \ln x / 2) \int_0^x \frac{1 - J_0(t)}{t} dt +$$

$$+ \frac{\pi^2}{12} + \int_0^1 \frac{\ln t (1-t^2)}{t} [1 - J_0(xt)] dt \quad /6/$$



$$\int_x^{\infty} \frac{K_0(t)}{t} dt = \frac{1}{2}(c+\ln x/2)^2 + (c+\ln x/2) \int_0^x \frac{I_0(t)-1}{t} dt + \frac{\pi^2}{24} + \int_0^1 \frac{\ln t(1-t^2)}{t} [I_0(xt)-1] dt$$

/7/

Ezek a sorfejtések  $x > 10$  esetén már igen kényelmetlenek. Ilyen esetben a függvények aszimptotikus kifejtéseit használják. Ezek az alábbiak:

$$\int_x^{\infty} J_0(t) dt = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ U(x) \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{x} V(x) \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right\}$$

/8/

$$\int_x^{\infty} N_0(t) dt = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ U(x) \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{x} V(x) \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right\}$$

/9/

$$U(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(1/2)_{2k}}{x^{2k}} \rho_{2k}, \quad x \rightarrow \infty, \quad \rho_k = \sum_{j=0}^k \frac{(1/2)_j}{j! 2^j} \quad k = 0, 1, \dots, \quad /10/$$

$$V(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(1/2)_{2k+1}}{x^{2k+1}} \rho_{2k+1}, \quad x \rightarrow \infty, \quad /11/$$

$$\int_0^x I_0(t) dt \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1/2)_k}{x^k} \rho_k, \quad x \rightarrow \infty, \quad /12/$$

$$\int_x^{\infty} K_0(t) dt \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(1/2)_k}{x^k} \rho_k, \quad x \rightarrow \infty, \quad /13/$$

$$\int_x^{\infty} \frac{J_0(t)}{t} dt = \frac{1}{x} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ P(x) \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{x} R(x) \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right\}$$

/14/

$$\int_x^{\infty} \frac{N_0(t)}{t} dt = \frac{1}{x} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ P(x) \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{x} R(x) \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right\}$$

/15/

$$P(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(3/2)_{2k}}{x^{2k}} \sigma_{2k}, \quad x \rightarrow \infty, \quad \sigma_k = \sum_{j=0}^k \frac{(1/2)_j (1/2)_j}{(3/2)_j j! 2^j}, \quad k=0,1,\dots, \quad /16/$$

$$R(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(3/2)_{2k+1}}{x^{2k}} \sigma_{2k+1}, \quad x \rightarrow \infty, \quad /17/$$

$$\int_0^x \frac{I_0(t)-1}{t} dt \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi} x^{3/2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3/2)_k}{x^k} \sigma_k, \quad x \rightarrow \infty, \quad /18/$$

$$\int_x^{\infty} \frac{K_0(t)}{t} dt \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^{3/2}} e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(3/2)_k}{x^k} \sigma_k, \quad x \rightarrow \infty. \quad /19/$$

Mivel  $\rho_k$  és  $\sigma_k$  korlátosak, a /10 /, /11 /, /16/, /17/ és a /12/, /13/, /18 /, /19/ sorok együtthatói  $O(k!^2)$  illetve  $O(k!)$  rendben divergálnak.

### 3. Bessel-függvények integráljának Csebisev-sorfejtése

A Csebisev-sorfejtéseket nem a Bessel-függvények integráljain fogjuk végrehajtani, hanem aszimptotikus kifejezésük alkalmas tagjain. Említettük, hogy az /1 /- /7 /képletek nem alkalmasak nagy  $x$  érték esetén számolásra, hanem akkor a /9/ - /19/ képleteket érdemes alkalmazni; ezért mi most a  $(0, \infty)$  intervallumot két részre  $x \leq a$  kisargumentum és  $x \geq a$  nagyargumentum/ osztjuk fel. A kisargumentummal kapcsolatos képleteinkben a következő Csebisev-sorfejtéseket alkalmazzuk  $(0 \leq x \leq a)$ :

$$\frac{1}{x} \int_0^x J_0(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_{2k}(x/a) \quad /20/$$

$$\frac{1}{x} \int_0^x I_0(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} b_k T_{2k}(x/a) \quad /21/$$

$$\frac{\pi}{2} \int_x^{\infty} N_0(t) dt - \ln x/a \int_0^x J_0(t) dt = x \sum_{k=0}^{\infty} c_k T_{2k}(x/a) \quad /22/$$

$$\int_x^{\infty} K_0(t) dt - \frac{\pi}{2} - \ln x/a \int_0^x I_0(t) dt = x \sum_{k=0}^{\infty} d_k T_{2k}(x/a) \quad /23/$$

$$\frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{1-J_0(t)}{t} dt = \sum_{k=0}^{\infty} e_k T_{2k}(x/a) \quad /24/$$

$$\frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{I_0(t)-1}{t} dt = \sum_{k=0}^{\infty} f_k T_{2k}(x/a) \quad /25/$$

$$-\frac{1}{x^2} \int_0^1 \frac{\ln t(1-t^2)}{t} [1 - J_0(xt)] dt = \sum_{k=0}^{\infty} g_k T_{2k}(x/a) \quad /26/$$

$$-\frac{1}{x^2} \int_0^1 \frac{\ln t(1-t^2)}{t} [I_0(xt) - 1] dt = \sum_{k=0}^{\infty} h_k T_{2k}(x/a) \quad /27/$$

A /20/ - /27/ sorfejtések együtthatóit /tetszőleges "a" esetén/ a megfelelő konverziós eljárással számíthatjuk ki. Ezért ezzel a továbbiakban nem foglalkozunk. Nagyargumentum esetén a /8/ - /19/ -hoz hasonló képleteket fogunk alkalmazni. Az  $U(x)$  stb. sorok divergensek, így pl.  $U(x)$  Csebisev-sorfejtése a /10/ sorból nem nyerhető konverzióval. Ezért most a függvények integráلهőállításaiból fogjuk levezetni a Csebisev-sorfejtéseket.

$$U(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{u^{1/2}(1+u^2/x^2)} \alpha(u) du = \sum_{k=0}^{\infty} u_k T_{2k}(a/x), \quad \alpha(u) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_u^{\infty} K_0(s) ds.$$

$$u_k = \epsilon_k \sqrt{\frac{2a}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-au}}{\sqrt{1+u^2}} \frac{u^{2k-1/2}}{(1+\sqrt{1+u^2})^{2k}} \alpha(au) du, \quad \epsilon_k = \begin{cases} 1, & k=0 \\ 2(-1)^k, & k \geq 1 \end{cases} \quad /28/$$

$$V(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{u^{1/2} e^{-u}}{1+u^2/x^2} \alpha(u) du = \sum_{k=0}^{\infty} v_k T_{2k}(a/x),$$

$$v_k = \epsilon_k a \sqrt{\frac{2a}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-au}}{\sqrt{1+u^2}} \frac{u^{2k+1/2}}{(1+\sqrt{1+u^2})^{2k}} \alpha(au) du \quad /29/$$

$$\int_0^x I_0(t) dt = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} i_k T_k^*(a/x) \quad /30/$$

$$\int_0^x \frac{I_0(t)-1}{t} dt + \ln x/2 + c = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}^{3/2}} \sum_{k=0}^{\infty} j_k T_k^*(a/x) \quad /31/$$

$$\sqrt{\frac{2x}{\pi}} e^x \int_x^{\infty} K_0(t) dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{u^{1/2}(1+u/x)} \alpha(u) du = \sum_{k=0}^{\infty} m_k T_k^*(a/x)$$

$$m_k = \epsilon_k \sqrt{\frac{2a}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-au}}{\sqrt{1+u}} \frac{u^{k-1/2}}{(1+\sqrt{1+u})^{2k}} \alpha(au) du, \quad /32/$$

$$P(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} u^{1/2} \frac{e^{-u}}{1+u^2/x^2} \beta(u) du = \sum_{k=0}^{\infty} p_k T_{2k}(a/x), \quad \beta(u) = 1 - \frac{4}{\pi} \int_u^{\infty} K_0(s) \frac{ds}{s}$$

$$p_k = \epsilon_k a \sqrt{\frac{a\pi}{2}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-au}}{\sqrt{1+u^2}} \frac{u^{2k+1/2}}{(1+\sqrt{1+u^2})^{2k}} \beta(au) du \quad /33/$$

$$R(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} \frac{u^{3/2} e^{-u}}{1+u^2/x^2} \beta(u) du = \sum_{k=0}^{\infty} r_k T_{2k}(a/x)$$

$$r_k = \varepsilon_k a^2 \sqrt{\frac{a\pi}{2}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-au}}{\sqrt{1+u^2}} \frac{u^{2k+3/2}}{(1+\sqrt{1+u^2})^{2k}} \beta(au) du \quad /34/$$

$$x \sqrt{\frac{2x}{\pi}} e^x \int_x^{\infty} \frac{K_0(t)}{t} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} \frac{u^{1/2} e^{-u}}{1+u/x} \beta(u) du = \sum_{k=0}^{\infty} n_k T_k^*(a/x)$$

$$n_k = \varepsilon_k a \sqrt{\frac{a\pi}{2}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-au}}{\sqrt{1+u}} \frac{u^{k+\frac{1}{2}}}{(1+\sqrt{1+u})^{2k}} \beta(au) du \quad /35/$$

A /28 /- /35 /sorok konvergenciáját fenti integrálelőállításuk segítségével bizonyíthatjuk. Az együtthatók  $k \rightarrow \infty$  aszimptotikus kifejezéseit a Laplace-módszer alapján lehet meghatározni. Így

$$u_k = \exp(-2a^{1/2} k^{1/2}) o(k^{-1/4}), \quad k \rightarrow \infty, \quad /36/$$

$$v_k = \exp(-2a^{1/2} k^{1/2}) o(k^{1/4}), \quad k \rightarrow \infty, \quad /37/$$

$$m_k = \exp(-3a^{1/3} k^{2/3}) o(k^{-1/4}), \quad k \rightarrow \infty, \quad /38/$$

$$p_k = \exp(-2a^{1/2} k^{1/2}) o(k^{1/4}), \quad k \rightarrow \infty, \quad /39/$$

$$r_k = \exp(-2a^{1/2} k^{1/2}) o(k^{3/4}), \quad k \rightarrow \infty, \quad /40/$$

$$n_k = \exp(-3a^{1/3} k^{2/3}) o(k^{1/3}), \quad k \rightarrow \infty, \quad /41/$$

A /30 /- /31 /sorfejtés együtthatóit az  $i_k$  és  $j_k$  számokat a [3] munkánkban leírt módszerrel határoztuk meg, integrálkifejezésük igen bonyolult /bár aszimptotikájuk nem/ ezért ezeket itt nem közöljük.

#### 4. Táblázatok

A függvények értékeinek kiszámítására szolgáló sorok együtthajtóit az  $a_k, b_k, c_k, e_k, f_k, g_k, u_k, v_k, i_k, j_k, p_k, r_k$  számokat  $a = 8$  választás mellett, a  $b_k, d_k, f_k, h_k, m_k, n_k$  számokat pedig az  $a = 4$  választás mellett számítottuk ki és 15 decimális jegyre táblázatosan adjuk meg. Az I.C.T. 1905-ös számológépen való számolást az S8MT szervezőprogramunk a HIPE54 szubrutin segítségével végezte el dupla precíziós változókkal. A táblázatbeli számok utolsó helyértéke 1 egységgel esetleg hibás.

A cikkhez tartozó táblázatokat a következő oldalakon közöljük.

#### I r o d a l o m

- [1] Cistova, E.A.: Tables of Bessel-functions with real arguments and their integrals. Moscow /1958/
- [2] Luke, Y.L.: Integrals of Bessel-functions. McGraw-Hill, New York /1962/
- [3] Németh G.: KFKI Közl., 14, 11-14 /1966/

Érkezett: 1969. február 25.

KFKI Közl., 17.évf. 2.szám, 1969.

T á b l á z a t o k

k	$a_k$ /a = 8/	k	$b_k$ /a = 8/
0	0.321739004994399	0	19.377486935266213
1	-.319298624686165	1	26.217585581086898
2	.227997939500769	2	9.784176895152684
3	-.100943218085572	3	2.258665805159690
4	.25491490056322	4	.350354978023579
5	-.4051393195932	5	.38776176947462
6	.441125061307	6	.3203333656339
7	-.34986120102	7	.204544576904
8	.2113687100	8	.10379583517
9	-.100612057	9	.428124964
10	.3873713	10	.18623691
1	-.123194	1	.420182
2	.3292	2	.10292
3	-.75	3	.217
4	.1	4	.4

k	$b_k$ /a = 4/	k	$d_k$ /a = 4/
0	2.061272342912852	0	0.029053650835793
1	1.210222408766464	1	-.321072513237197
2	.160094684396226	2	-.88429567184337
3	.11661984935425	3	-.9170955035623
4	.533701477501	4	-.523367922360
5	.16708264270	5	-.19141534289
6	.379630160	6	-.489189295
7	.6537848	7	-.9247719
8	.88218	8	-.134694
9	.957	9	-.1559
10	.9	10	-.15

k	$c_k$ /a = 8/	k	$f_k$ /a = 8/
0	0.248659115278033	0	0.475340683119265
1	-.458971139285292	1	.450066084368441
2	.214092331839795	2	.117078947887692
3	-.41606214336590	3	.19412394498354
4	.1252911718007	4	.2236737328750
5	.865558538224	5	.189599264617
6	-.184099200890	6	.12316872758
7	.20410314615	7	.632509256
8	-.1529526347	8	.26311003
9	.85033455	9	.904273
10	-.3689735	10	.26101
1	.129196	1	.642
2	-.3740	2	.14
3	.91		
4	-.2		

Táblázatok /folytatás/

k	$e_k$ /a = 8/	k	$g_k$ /a = 8/
0	0.064605708984037	0	0.091302738657562
1	-.044770735519207	1	-.067716684743575
2	.012699447279633	2	.022477447912326
3	-. 2533136526639	3	-. 5121326563057
4	. 352710690991	4	. 788863971345
5	-. 35432166753	5	-. 85643413033
6	. 2666043246	6	. 6853693102
7	-. 155308468	7	-. 419913730
8	. 7200478	8	. 20310787
9	-. 271805	9	-. 795065
10	. 8513	10	. 25704
11	-. 225	11	-. 698
12	. 5	12	. 16
k	$f_k$ /a = 4/	k	$h_k$ /a = 4/
0	0.164411852937546	0	0.258789707377041
1	. 42349360492852	1	. 77309631255548
2	. 3073459963224	2	. 6325460062734
3	. 140231136694	3	. 315866388181
4	. 4376170153	4	. 10579486924
5	. 99120754	5	. 253791617
6	. 1702034	6	. 4572034
7	. 22905	7	. 64098
8	. 248	8	. 719
9	. 2	9	. 7
k	$u_k$ /a = 8/	k	$v_k$ /a = 8/
0	0.992789900075415	0	0.607502771458295
1	-. 7012200833267	1	-. 16706811189725
2	. 185893925748	2	. 726075347461
3	-. 10856466808	3	-. 56812129349
4	. 1000484571	4	. 6400867811
5	-. 124556329	5	-. 926121058
6	. 19225509	6	. 160990310
7	-. 3490705	7	-. 32232098
8	. 720159	8	. 7223324
9	-. 164799	9	-. 1775616
10	. 41105	10	. 471669
11	-. 11029	11	-. 133865
12	. 3151	12	. 40234
13	-. 951	13	-. 12715
14	. 301	14	. 4201
15	-. 100	15	-. 1445
16	. 34	16	. 515
17	-. 12	17	-. 189
18	. 4	18	. 72
19	-. 2	19	-. 28
20	. 1	20	. 11
		21	-. 5
		22	. 3
		23	-. 1



Táblázatok /folytatás/

k	$p_k / a = 8 /$	k	$r_k / a = 8 /$
0	0.972065761071427	0	1.533291334695720
1	-. 26686352650207	1	-. 85712192778540
2	. 1146645736423	2	. 5376440350264
3	-. 89405112597	3	-. 533863571764
4	. 10061526414	4	. 71424448211
5	-. 1455173116	5	-. 11797236385
6	. 252916167	6	. 2281997957
7	-. 50633231	7	-. 499482967
8	. 11346727	8	. 120807247
9	-. 2789177	9	-. 31739362
10	. 740903	10	. 8942917
1	-. 210276	1	-. 2675843
2	. 63199	2	. 843673
3	-. 19973	3	-. 278555
4	. 6599	4	. 95821
5	-. 2269	5	-. 34197
6	. 809	6	. 12616
7	-. 298	7	-. 4797
8	. 113	8	. 1875
9	-. 44	9	-. 752
20	. 18	20	. 309
1	-. 7	1	-. 129
2	. 3	2	. 55
3	-. 1	3	-. 24
4	. 1	4	. 11
k	$n_k / a = 4 /$	5	-. 5
0	0.855888168397680	6	. 2
1	-. 128752249069463	7	-. 1
2	. 13334015015126	k	$m_k / a = 4 /$
3	-. 1714566389180	0	0.937977259419163
4	. 257407168749	1	-. 57574326000422
5	-. 43471881976	2	. 3996175707047
6	. 8061096718	3	-. 395072190246
7	-. 1613945590	4	. 48730450558
8	. 344666876	5	-. 7035369820
9	-. 77792333	6	. 1145297672
10	. 18424825	7	-. 205186643
1	-. 4553399	8	. 39777330
2	. 1168785	9	-. 8241575
3	-. 310420	10	. 1808020
4	. 85035	1	-. 416908
5	-. 23961	2	. 100458
6	. 6929	3	-. 25175
7	-. 2052	4	. 6536
8	. 621	5	-. 1752
9	-. 192	6	. 484
20	. 61	7	-. 137
1	-. 19	8	. 40
2	. 6	9	-. 12
3	-. 2	20	. 4
4	. 1	1	-. 1

Táblázatok /folytatás/

k	$i_k$ /a = 8/	k	$j_k$ /a = 8/
0	1.047906115724010	0	1.144981461684569
1	. 51537295431712	1	.163918789497306
2	. 4128013715044	2	. 22010188976865
3	. 555514381221	3	. 3155283102710
4	. 47307679133	4	-. 190209454726
5	-. 20962857759	5	-. 379617426525
6	-. 11208067263	6	-. 102149473798
7	-. 848939008	7	. 20870117288
8	. 1109775766	8	. 17784772349
9	. 271452545	9	-. 656213503
10	-. 125588772	10	-. 2831315359
1	-. 46322049	1	. 4627496
2	. 19261390	2	. 493490883
3	. 7057828	3	-. 23337766
4	-. 3820465	4	-. 92007639
5	-. 891488	5	. 15316165
6	. 840548	6	. 16559342
7	. 37019	7	-. 6185274
8	-. 177371	8	-. 2327531
9	. 31033	9	. 1924904
20	. 30584	20	. 37581
1	-. 15045	1	-. 462781
2	-. 2560	2	. 131750
3	. 4289	3	. 70627
4	-. 820	4	-. 57420
5	-. 750	5	. 2991
6	. 481	6	. 13755
7	. 1	7	-. 6324
8	-. 124	8	-. 1037
9	. 52	9	. 2175
30	. 10	30	-. 696
1	-. 19	1	-. 284
2	. 6	2	. 335
3	. 2	3	-. 84
4	-. 3	4	-. 55
5	. 1	5	. 53
		6	-. 12
		7	-. 9
		8	. 9
		9	-. 2

# KELVIN - FÜGGVÉNYEK CSEBISEV - SORFEJTÉSE

Irta: Németh Géza

## Összefoglalás

A dolgozatban a Kelvin-függvények Csebisev-polinomok szerinti sorfejtésével foglalkozunk. A  $ber$ ,  $bei$ ,  $ber'$ ,  $bei'$ ,  $ker$ ,  $kei$ ,  $ker'$ ,  $kei'$  függvényekre aszimptotikus kifejtésükhöz hasonló konvergens sorfejtéseket határozzunk meg. E függvények értékeinek generálásához a sorfejtések együtthatóit 15 jegy pontosságig táblázatosan adjuk meg.

## 1. Bevezetés

A Kelvin-függvények értékeinek kiszámítása általában hatványsorfejtéseikkel és aszimptotikus kifejtéseikkel hajtható végre v.ö.: [1] /McLachan/ [2], [3] /Nosova/. Ujabban e célra polinom közelítéseket alkalmaznak, pl. [4] /Burgoyne/. E módszer különösen számológépes program esetén célszerű. Ugyanis a polinomapproximációk egyszerre gyorsak, kis helyet foglalnak csak el a számológép memóriájában és könnyen algoritmizálhatók.

Dolgozatunkban a Kelvin-függvények Csebisev-polinomok szerinti sorfejtését határozzuk meg. Mivel az aszimptotikus kifejtéshez hasonló sorfejtéseket határozzunk meg, először röviden ismertetjük a Kelvin-függvények analitikai sajátosságait. Ezután a Csebisev-sorfejtések együtthatóit vizsgáljuk meg. Végezetül pedig az együtthatók numerikus értékeit 15 decimális jegy pontosságig táblázatosan adjuk meg.

## 2. Kelvin-függvények analitikai sajátosságai

A Kelvin-függvényeket a Bessel-függvények segítségével szokás definiálni:

$$J_0(x i^{1/2}) = ber(x) - i bei(x) \quad , \quad //$$

$$K_0(x) = \ker(x) + i \operatorname{kei}(x) \quad /2/$$

E relációk ekvivalensek az alábbi sorfejtésekkel:

$$\operatorname{ber}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!^2} (x/2)^{4k} = {}_0F_3 \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; - (x/4)^4 \right) \quad /3/$$

$$\operatorname{bei}(x) = x/2 {}_0F_3 \left( 3/2, 3/2, 1; - (x/4)^4 \right) \quad /4/$$

$$\ker(x) = -\ln x \operatorname{ber}(x) + \frac{\pi}{4} \operatorname{bei}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\gamma_{2k}}{(2k)!^2} (x/2)^{4k} \quad /5/$$

$$\operatorname{kei}(x) = -\ln x \operatorname{bei}(x) - \frac{\pi}{4} \operatorname{ber}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\gamma_{2k+1}}{(2k+1)!^2} (x/2)^{4k+2} \quad /6/$$

$$\gamma_0 = -c + \ln 2 \quad /c = \text{Euler állandó}/$$

$$\gamma_k = \gamma_{k-1} + \frac{1}{k} \quad k = 1, 2, \dots$$

Természetesen analóg kifejezések érvényesek a  $\operatorname{ber}'(x)$ ,  $\operatorname{bei}'(x)$ ,  $\ker'(x)$  és  $\operatorname{kei}'(x)$  függvényekre is. Látható, hogy ezek a kifejezések egyszersmind a függvények aszimptotikus kifejezéseit is reprezentálják  $x \rightarrow 0$  esetére. A /3/ -/6/ kifejezések számolás céljára  $x > 10$  esetén már igen kényelmetlenek. Célszerűen ilyen esetben az  $x \rightarrow \infty$  aszimptotikus kifejezések kerülnek alkalmazásra.

Az irodalomban pl.: [5]/Abramovitz/  $\operatorname{ber}(x)$  és  $\operatorname{bei}(x)$  aszimptotikája  $\ker(x)$  és  $\operatorname{kei}(x)$  -től függően van tárgyalva. Mi ezt el akarjuk kerülni, ezért itt az aszimptotika levezetésével kissé részletesebben fogunk foglalkozni.

Az aszimptotikát az /1/ képlet alapján fogjuk  $J_0(x)$  alábbi integrálelőállításából nyerni:

$$J_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) P_0(x) + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) Q_0(x) \right\} \quad /7/$$

$$P_0(x) = \int_0^{\infty} \frac{\eta^{-1/2}}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta} {}_2F_1\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}; \frac{1}{2}; -\frac{\eta^2}{4x^2}\right) d\eta \quad /8/$$

$$Q_0(x) = \frac{1}{4x} \int_0^{\infty} \frac{\eta^{1/2}}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta} {}_2F_1\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}; \frac{3}{2}; -\frac{\eta^2}{4x^2}\right) d\eta \quad /9/$$

Végezzük el az  $x \rightarrow xi^{1/2} = x \frac{1+i}{\sqrt{2}}$  helyettesítést  $ber(x)$  és  $bei(x)$  kifejezéseit kapjuk:

$$ber(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \cos\left(x/\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}\right) \left[ \operatorname{ch} x/\sqrt{2} A_0(x) + \operatorname{sh} x/\sqrt{2} D_0(x) \right] - \right. \\ \left. - \sin\left(x/\sqrt{2} - \pi/4\right) \left[ \operatorname{sh} x/\sqrt{2} B_0(x) - \operatorname{ch} x/\sqrt{2} C_0(x) \right] \right\} \quad /10/$$

$$bei(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \cos\left(x/\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}\right) \left[ \operatorname{ch} x/\sqrt{2} B_0(x) - \operatorname{sh} x/\sqrt{2} C_0(x) \right] + \right. \\ \left. + \sin\left(x/\sqrt{2} - \pi/4\right) \left[ \operatorname{sh} x/\sqrt{2} A_0(x) + \operatorname{ch} x/\sqrt{2} D_0(x) \right] \right\} \quad /11/$$

ahol

$$A_0(x) = \int_0^{\infty} \frac{\eta^{-1/2}}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta/\sqrt{2}} \cos \eta/\sqrt{2} {}_2F_1\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}; \frac{1}{2}; -\frac{\eta^2}{4x^2}\right) d\eta \quad /12/$$

$$B_0(x) = \int_0^{\infty} \frac{\eta^{-1/2}}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta/\sqrt{2}} \sin \eta/\sqrt{2} {}_2F_1\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}; \frac{1}{2}; -\frac{\eta^2}{4x^2}\right) d\eta \quad /13/$$

$$C_0(x) = \frac{1}{4x} \int_0^{\infty} \frac{\eta^{1/2}}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta/\sqrt{2}} \cos \eta/\sqrt{2} {}_2F_1\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}; \frac{3}{2}; -\frac{\eta^2}{4x^2}\right) d\eta \quad /14/$$

$$D_0(x) = \frac{1}{4x} \int_0^{\infty} \frac{\eta^{1/2}}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta/\sqrt{2}} \sin \eta/\sqrt{2} {}_2F_1\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}; \frac{3}{2}; -\frac{\eta^2}{4x^2}\right) d\eta \quad /15/$$

A  $ber$  és  $bei$  függvények aszimptotikus kifejezéseit /10/ és /11/-ből nyerhetők  $A_0, B_0, C_0, D_0$  sorbafejtésével  $1/x^2$  hatványai szerint. Ezek formálisan könnyen nyerhetők, pl. /12/-ből:

$$A_0(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1/4)_k (3/4)_k (1/4)_k (3/4)_k}{(1/2)_k k!} \left(-\frac{1}{x^2}\right)^k \cos\left(k + \frac{1}{4}\right) \frac{\pi}{2}, \quad /16/$$

$x \rightarrow \infty$

A /16/-ban szereplő sorfejtés együtthatója  $O(k!^2)$  nagyságrendű, ezért a sor igen gyorsan divergál.

Hasonló szerkezetű képlet érvényes  $ber'(x)$  és  $bei'(x)$  -re is /az előzőhöz hasonló módszerrel/:

$$ber'(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}\right) \left[ \operatorname{sh} \frac{x}{\sqrt{2}} A_1(x) - \operatorname{ch} \frac{x}{\sqrt{2}} D_1(x) \right] - \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}\right) \left[ \operatorname{ch} \frac{x}{\sqrt{2}} B_1(x) + \operatorname{sh} \frac{x}{\sqrt{2}} C_1(x) \right] \right\} \quad /17/$$

$$bei'(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}\right) \left[ \operatorname{sh} \frac{x}{\sqrt{2}} B_1(x) + \operatorname{ch} \frac{x}{\sqrt{2}} C_1(x) \right] + \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}\right) \left[ \operatorname{ch} \frac{x}{\sqrt{2}} A_1(x) - \operatorname{sh} \frac{x}{\sqrt{2}} D_1(x) \right] \right\} \quad /18/$$

ahol

$$A_1(x) = \int_0^{\infty} \frac{\eta^{1/2}}{\Gamma(3/2)} e^{-\eta/\sqrt{2}} \cos \eta/\sqrt{2} {}_2F_1\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; -\frac{\eta^2}{4x^2}\right) d\eta \quad /19/$$

$$B_1(x) = \int_0^{\infty} \frac{\eta^{1/2}}{\Gamma(3/2)} e^{-\eta/\sqrt{2}} \sin \eta/\sqrt{2} {}_2F_1\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; -\frac{\eta^2}{4x^2}\right) d\eta \quad /20/$$

$$C_1(x) = \frac{1}{4x} \int_0^{\infty} \frac{\eta^{3/2}}{\Gamma(3/2)} e^{-\eta/\sqrt{2}} \cos \eta/\sqrt{2} {}_2F_1\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}; \frac{3}{2}; -\frac{\eta^2}{4x^2}\right) d\eta \quad /21/$$

$$D_1(x) = \frac{1}{4x} \int_0^{\infty} \frac{\eta^{3/2}}{\Gamma(3/2)} e^{-\eta/\sqrt{2}} \sin \eta/\sqrt{2} {}_2F_1\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}; \frac{3}{2}; -\frac{\eta^2}{4x^2}\right) d\eta \quad /22/$$

A  $\ker(x)$  és  $\kei(x)$  függvényekhez  $K_0(x)$  alábbi integrál előállítását használjuk fel:

$$K_0(x) = \int_0^{\infty} e^{-x(1+\eta)} \eta^{-1/2} (2+\eta)^{-1/2} d\eta \quad /23/$$

A /23/ képlet alapján /  $x + xi^{1/2}$  helyettesítés után/:

$$\ker(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x/\sqrt{2}} \left\{ \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) A(x) + \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) B(x) \right\} \quad /24/$$

$$\kei(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x/\sqrt{2}} \left\{ \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) B(x) - \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) A(x) \right\} \quad /25/$$

ahol

$$A(x) = \frac{2^{1/4}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\eta} \cos\left(\eta - \frac{\pi}{8}\right) \eta^{-1/2} \left(1 + \frac{\eta}{x\sqrt{2}}\right)^{-1/2} d\eta \quad /26/$$

$$B(x) = -\frac{2^{1/4}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\eta} \sin\left(\eta - \frac{\pi}{8}\right) \eta^{-1/2} \left(1 + \frac{\eta}{x\sqrt{2}}\right)^{-1/2} d\eta \quad /27/$$

Ez előzőhöz teljesen analóg módon nyerhető  $\ker'(x)$  és  $\kei'(x)$  :

$$\ker'(x) = -\sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x/\sqrt{2}} \left\{ \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{3\pi}{8}\right) D(x) + \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{3\pi}{8}\right) C(x) \right\} \quad /28/$$

$$\kei'(x) = -\sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x/\sqrt{2}} \left\{ \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{3\pi}{8}\right) C(x) - \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{3\pi}{8}\right) D(x) \right\} \quad /29/$$

ahol

$$C(x) = \frac{2^{7/4}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\eta} \cos\left(\eta - \frac{3\pi}{8}\right) \eta^{1/2} \left(1 + \frac{\eta}{x\sqrt{2}}\right)^{1/2} d\eta \quad /30/$$

$$D(x) = \frac{2^{7/4}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\eta} \sin \left( \eta - \frac{3\pi}{8} \right) \eta^{1/2} \left( 1 + \frac{\eta}{x\sqrt{2}} \right)^{1/2} d\eta \quad /31/$$

A ker(x) /stb./ függvény aszimptotikus sorát  $\Lambda(x)$  /stb./  $1/x$  hatványai szerint sorbafejtett alakjából nyerhetjük; pl.:

$$A(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1/2)_k (1/2)_k}{k!} \left( -\frac{1}{2x} \right)^k \cos \frac{\pi}{4} k \quad x \rightarrow \infty .$$

Látható, hogy e sor  $O(k!)$  rendben divergál.

### 3. Kelvin-függvények Csebisev-sorfejtése

A Kelvin-függvények alkalmas, Csebisev-polinomok szerinti sorfejtésén azt fogjuk érteni, hogy nem a ber /stb./, ker /stb./ függvényeket fejtjük sorba, hanem a megfelelő  ${}_0F_3$ , illetve  $A_0$  /stb./ függvényeket. Beszélni fogunk kis argumentumról és nagy argumentumról. A  $(0, a]$ -ba eső  $x$  esetén kis,  $[a, \infty)$ -be eső  $x$  esetén nagy argumentumról lesz szó. Először  $0 < x \leq a$ -t véve, kapjuk a következőket:

$$\text{ber}(x) = {}_0F_3 \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; -(x/4)^4 \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k A_k(a) T_{2k} \left( \frac{x^2}{a^2} \right) \quad /32/$$

$$A_k(a) = J_{2k}(a/\sqrt{2}) I_{2k}(a/\sqrt{2}), \quad \epsilon_k = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 2(-1)^k & k>1 \end{cases} \quad /33/$$

$$\text{ber}'(x) = -\frac{x^3}{16} {}_0F_3 \left( \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 2; -(x/4)^4 \right) = -\frac{x^3}{16} \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k B_k(a) T_{2k} \left( \frac{x^2}{a^2} \right) \quad /34/$$

$$B_k - B_{k+2} = \frac{256}{a^4} (k+1) J_{2k+2}(a/\sqrt{2}) I_{2k+2}(a/\sqrt{2}) . \quad /35/$$



$$\text{bei}(x) = x^2/4 {}_0F_3 \left( \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1; - (x/4)^4 \right) = \frac{x^2}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k C_k(a) T_{2k} \left( \frac{x^2}{a^2} \right) \quad /36/$$

$$C_k - C_{k+1} = \frac{8}{a^2} J_{2k+1}(a/\sqrt{2}) I_{2k+1}(a/\sqrt{2}) \quad /37/$$

$$\text{bei}'(x) = \frac{x}{2} {}_0F_3 \left( \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; - \left( \frac{x}{4} \right)^4 \right) = \frac{x}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k D_k(a) T_{2k} \left( \frac{x^2}{a^2} \right) \quad /38/$$

$$D_k + D_{k+1} = \frac{8}{a^2} (2k+1) J_{2k+1}(a/\sqrt{2}) I_{2k+1}(a/\sqrt{2}) \quad /39/$$

A /32/-/39/ képletek levezetése igen egyszerű /pl. Laplace transzformációval/. A rövidség /és hasonlóság/ miatt csak  $A_k(a)$  levezetését végezzük el. Legyen  $x = a\sigma^{1/2}$  és  $a = b^{1/2}$ , továbbá

$$\int_0^{\infty} A_k(b^{1/2}) e^{-pb} db = L_k(p) \quad /40/$$

Mivel

$$\int_0^{\infty} e^{-pb} \text{ber}(\sigma^{1/2} b^{1/2}) db = \frac{1}{p} \cos \frac{\sigma}{4p} \quad /41/$$

$$L_k(p) = \frac{1}{p} J_{2k} \left( \frac{1}{4p} \right) \quad /42/$$

A /42/ képlet inverztranszformációjából pedig /33/ adódik. Nagy argumentum esetére ( $x \geq a$ ) az /12/-15/ képletekben szereplő  $A_0(x)$  stb. függvényeket fogjuk Csebisev-polinomok szerint sorbafejteni.

$$A_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k \alpha_k^{(0)}(a) T_k^* \left( \frac{a}{x} \right) \quad /43/$$

$$B_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k \beta_k^{(0)}(a) T_k^* \left( \frac{a}{x} \right) \quad /44/$$

$$C_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k \gamma_k^{(0)}(a) T_k^* \left( \frac{a}{x} \right) \quad /45/$$

$$D_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k \delta_k^{(0)}(a) T_k^* \left( \frac{a}{x} \right) \quad /46/$$

A /43/-/46/ sorfejtések együtthatóit a /12/-/15/ integrál előállításuk alapján integrálokkal adhatjuk meg, felhasználva a definiáló integrálokban szereplő  ${}_2F_1$  hipergeometriai függvény Csebisev sorfejtését. A rövideg kedvéért csupán  $\alpha_k^{(0)}(a)$ -t fogjuk explicit alakban felírni /a többi analóg/.

Felhasználva az

$${}_2F_1 \left( \frac{1}{4}, \frac{3}{4}; \frac{1}{2}; -\frac{\eta^2}{4x^2} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k \left( \frac{\eta}{2a} \right)^k \frac{\left( \frac{1}{4} \right)_k \left( \frac{3}{4} \right)_k}{(1/2)_k k!} {}_2F_1 \left( k+\frac{1}{4}, k+\frac{3}{4}; 2k+1; -\frac{\eta^2}{4a^2} \right) T_{2k} \left( \frac{a}{x} \right) \quad /47/$$

sorfejtést,  $\alpha_k^{(0)}(a)$  az alábbi lesz:

$$\alpha_k^{(0)}(a) = \pi^{-1/2} \frac{\left( \frac{1}{4} \right)_k \left( \frac{3}{4} \right)_k}{(1/2)_k k! (4a)^{2k}} \int_0^{\infty} e^{-\eta/\sqrt{2}} \cos \eta/\sqrt{2} \eta^{2k-\frac{1}{2}} {}_2F_1 \left( k+\frac{1}{4}, k+\frac{3}{4}; 2k+1; -\frac{\eta^2}{4a^2} \right) d\eta \quad /48/$$

A /48/ formula felhasználható a /43/ sorfejtés konvergenciájának bizonyítására. Ezt a bizonyítást végezzük el a következőkben. Először a /48/ integrált kissé átalakítjuk. Bevezetjük az  $\eta = 2as$  jelölést, majd felhasználjuk az

$${}_2F_1 \left( k+\frac{1}{4}, k+\frac{3}{4}; 2k+1; -s^2 \right) = (1+s^2)^{1/4} \left[ \frac{2}{1+\sqrt{1+s^2}} \right]^{2k+1} {}_2F_1 \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 2k+1; \frac{s^2}{2\sqrt{1+s^2}(1+\sqrt{1+s^2})} \right) \quad /49/$$

átalakítást. Ezt a kifejezést  $k \rightarrow \infty$  esetén /a jobb oldalon álló hipergeometriai függvény  $1 + O\left(\frac{1}{k}\right)$  becslésének felhasználásával /a /48/ integrálba helyettesítve kapjuk:

$$\alpha_k^{(0)}(a) = \int_0^\infty e^{-a\sqrt{2}s} \cos a\sqrt{2}s \frac{s^{2k}}{(1+\sqrt{1+s^2})^{2k}} \left[1+O\left(\frac{1}{k}\right)\right] ds = O(k^{-1/2}) \quad /50/$$

Ez utóbbi integrált a Laplace-módszer alapján becsülhetjük meg  $k \rightarrow \infty$  esetére. Az aszimptotika a következő

$$\alpha_k^{(0)}(a) = e^{-\mu k^{1/2}} O(k^{-3/4}), \quad k \rightarrow \infty, \quad \mu = 3 \cos \frac{\pi}{8} a^{1/2}. \quad /51/$$

Az /51/ becslés biztosítja a /43/ sor konvergenciáját /ellentétben a /16/ sor divergenciájával/. Hasonló aszimptotikus képlet érvényes

$\beta_k^{(0)}(a)$ ,  $\gamma_k^{(0)}(a)$ ,  $\delta_k^{(0)}(a)$  -ra is.

Jelöljük az  $A_1(x)$ ,  $B_1(x)$ ,  $C_1(x)$ ,  $D_1(x)$  /43/-/46/-tal analóg sorfejtéseinek együtthatóit rendre  $\alpha_k^{(1)}(a)$ ,  $\beta_k^{(1)}(a)$ ,  $\gamma_k^{(1)}(a)$  és  $\delta_k^{(1)}(a)$  -val. Rájuk is analog analízis végezhető /integrálelőállítás, aszimptotika/ a rövidség kedvéért ezeket a számításokat nem részletezzük.

A következőkben a  $\ker(x)$  és  $\text{kei}(x)$ , valamint deriváltjaik Csebisev-sorfejtéséről lesz szó. A kisargumentumhoz tartozó Csebisev-sorfejtések a Taylor sor konverziójával számíthatók ki /ezzel mi itt tovább nem is foglalkozunk/.

A nagy argumentumhoz tartozó Csebisev-sorfejtés levezetéséhez a /26/-/27/, ill. /30/-/31/ kifejezések alkalmasak. Ezekben az integrálokban az  $(1 + \eta/x\sqrt{a})^{\pm 1/2}$  függvények sorfejtéseit kell alkalmazni. Jelöljük  $\alpha_k(a)$ ,  $\beta_k(a)$ ,  $\gamma_k(a)$  és  $\delta_k(a)$  -val  $A(x)$ ,  $B(x)$ ,  $C(x)$  és  $D(x)$  Csebisev-sorfejtésének együtthatóit. Most csupán  $\alpha_k(a)$  -val fogunk röviden foglalkozni:

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k \alpha_k(a) T_k^*(a/x) \quad /52/$$

$$\alpha_k(a) = \frac{2^{1/4}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\eta} \cos(\eta - \pi/8) \frac{\eta^{k-1/2}}{(4a\sqrt{2})^k} {}_2F_1\left(k+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}; 2k+1; -\frac{\eta}{a\sqrt{2}}\right) d\eta \quad /53/$$

Az /53/ integrált  $k \rightarrow \infty$  esetére a fent vázolt módszerrel kiértékelhetjük. A végeredmény a következő:

$$\alpha_k(a) = e^{-vk^{2/3}} O(k^{-2/3}), \quad k \rightarrow \infty, \quad v = 3 \cos \frac{\pi}{12} (2a)^{1/3}. \quad /54/$$

Az /54/ becslés biztosítja az /52/ Csebisev-sor konvergenciáját.

#### 4. Táblázatok

A Kelvin-függvények értékeinek kiszámítására alkalmas sorfejtések együtthatóit a kis és nagy argumentumot elhatároló "a" paraméter  $a=10$  értékénél számítottuk ki, és táblázatosan 15 decimális jegy pontosságig adjuk meg. A  $\ker/x/$  és  $\kei/x/-re$ , valamint deriváltjaikra /melyeknek kis argumentum esetén nem volt bevezetve az együtthatókra jelölés/ a következő képleteket alkalmazzuk:

$$\ker(x) = -\ln \frac{x}{10} \operatorname{ber}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_{2k}\left(\frac{x}{10}\right) \quad /55/$$

$$\kei(x) = -\ln \frac{x}{10} \operatorname{bei}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} b_k T_{2k}\left(\frac{x}{10}\right) \quad /56/$$

$$\ker'(x) = -\frac{1}{x} - \ln \frac{x}{10} \operatorname{ber}'(x) + x \sum_{k=0}^{\infty} c_k T_{2k}\left(\frac{x}{10}\right) \quad /57/$$

$$\kei'(x) = -\ln \frac{x}{10} \operatorname{bei}'(x) + x \sum_{k=0}^{\infty} d_k T_{2k}\left(\frac{x}{10}\right) \quad /58/$$

A cikkhez tartozó táblázatokat a következő oldalakon közöljük.

#### I r o d a l o m

- [1] McLachlan, N.W.: Bessel Functions for Engineers. Clarendon Press. Oxford /1955/
- [2] Lowell, H.H.: Tables of Bessel-Kelvin Functions. Techn. Rep. R-32. Nat. Aeronaut. Washington /1959/.
- [3] Nosova, L.N.: Tables of Thomson Functions. Izd. Akad. Nauk. Moscow /1960/
- [4] Burgoyne, F.D.: Approximations to Kelvin Functions. M.T.A.C. /1963/ V.17.
- [5] Stegun, I. - Abramovitz, M.: Handbook of Mathematical Functions. Nat. Bur. Stand. Washington /1964/.

Érkezett: 1969. febr. 26.

KFKI Közl. 17.évf.2.szám, 1969.

T Á B L Á Z A T O K

k	$A_k^* = \epsilon_k A_k$	k	$B_k^* = \epsilon_k B_k$
0	53.956253966916481	0	-.639349314032295
1	78.393089296304125	1	-.848087121907126
2	15.363875072753192	2	.728164457920796
3	-9.460179317747876	3	-.61456718182162
4	.599985268019521	4	.1622686317759
5	-.12676434948654	5	-.18226736963
6	.118661552204	6	.102644332
7	-.572788621	7	-.322545
8	.1574922	8	.611
9	-.2650	9	-.1
10	.3		
k	$C_k^* = \epsilon_k C_k$	k	$D_k^* = \epsilon_k D_k$
0	-.209077449445040	0	7.490451866953317
1	.860543729174510	1	14.538514903622203
2	1.828553515067966	2	6.471223170894775
3	-.233026422330098	3	-1.506412292794561
4	.7932391445273	4	.69245923399219
5	-.108133195671	5	-.1172400847199
6	.714004451	6	.9210256212
7	-.2570601	7	-.38383841
8	.5483	8	.92938
9	-.7	9	-.140

T Á B L Á Z A T /folytatás/

k	$a_k^* = \epsilon_k a_k$	k	$b_k^* = \epsilon_k b_k$
0	-1.344177530882119	0	1.552408607401335
1	-2.665164552444216	1	1.401187000642112
2	-0.892302582300157	2	-3.970304930624838
3	4.334543128678001	3	-1.493003751366492
4	1.260044948017866	4	2.129632652140502
5	-0.5893335018877663	5	0.503086234198332
6	-0.118993323226114	6	-0.105859732067453
7	. 13441930274268	7	- . 18914894818335
8	. 2179688929300	8	. 1276123181812
9	- . 94235752264	9	. 191478295822
10	- . 13290983356	10	- . 5574945596
11	. 270329760	11	- . 748914479
12	. 34988293	12	. 10942001
13	- . 375243	13	. 1378574
14	- . 46458	14	- . 11038
15	- . 281	15	- . 1355
16	. 35	16	. 6
		17	. 1
k	$c_k^* = \epsilon_k c_k$	k	$d_k^* = \epsilon_k d_k$
0	-0.632530148079821	0	-0.167604588987980
1	-5.819958943530398	1	0.321398960203768
2	4.318404886252836	2	-5.950327973055847
3	4.446550684432953	3	4.292783496784113
4	-1.734694671302119	4	2.002147595974554
5	-0.553598507247381	5	-0.404453029877325
6	. 62750208222962	6	- .102105295785775
7	. 13456348405904	7	. 7014552679598
8	- . 594800585821	8	. 1333170487373
9	- . 103115975015	9	- . 39674630928
10	. 2139073699	10	- . 6409045299
11	. 327462076	11	. 95211813
12	- . 3558427	12	. 14008633
13	- . 509405	13	- . 113223
14	. 3102	14	- . 15947
15	. 434	15	. 74
16	- . 2	16	. 10

T Á B L Á Z A T /folytatás/

k	$\alpha_k^{(0)*} = \epsilon_k \alpha_k^{(0)}$	k	$\beta_k^{(0)*} = \epsilon_k \beta_k^{(0)}$
0	0.924010131379777	0	0.382357190612099
1	. 129278899406	1	-. 326693472450
2	-. 1323670926	2	-. 434639209
3	. 3260726	3	. 17086222
4	. 436157	4	-. 11410
5	-. 5793	5	-. 16735
6	-. 761	6	. 682
7	. 72	7	. 27
8	-. 1	8	-. 7
9	-. 1	9	. 1
k	$\gamma_k^{(0)*} = \epsilon_k \gamma_k^{(0)}$	k	$\delta_k^{(0)*} = \epsilon_k \delta_k^{(0)}$
0	0.385360330991636	0	0.922697526163129
1	. 2666386921336	1	-. 1201908969531
2	-. 10848781041	2	-. 19657741232
3	-. 326653587	3	. 253892682
4	. 10685699	4	. 8374781
5	. 216381	5	-. 636927
6	-. 45093	6	. 4394
7	. 2185	7	. 3188
8	. 154	8	-. 367
9	-. 46	9	. 11
10	. 5	10	-. 4
		11	-. 1
k	$\alpha_k^{(1)*} = \epsilon_k \alpha_k^{(1)}$	k	$\beta_k^{(1)*} = \epsilon_k \beta_k^{(1)}$
0	0.382144351818440	0	0.924108660170735
1	-. 538298952912	1	. 230743137890
2	. 799062262	2	. 1604410443
3	. 17122268	3	-. 11430234
4	-. 356180	4	-. 344816
5	-. 8782	5	. 17577
6	. 1114	6	. 75
7	-. 33	7	-. 76
8	-. 4	8	. 6
9	. 1		

T Á B L Á Z A T O K /folytatás/

k	$\gamma_k^{(1)*} = \epsilon_k \gamma_k^{(1)}$	k	$\delta_k^{(1)*} = \epsilon_k \delta_k^{(1)}$
0	-0.381411267360746	0	0.924376640110656
1	. 1274917275935	1	. 488354166395
2	. 2593953852	2	-. 8779681211
3	-. 157990833	3	-. 21112464
4	. 561384	4	. 5041144
5	. 222353	5	-. 106589
6	-. 12541	6	-. 10562
7	-. 271	7	. 1359
8	. 132	8	-. 52
9	-. 14	9	-. 9
		10	. 2
k	$\alpha_k^* = \epsilon_k \alpha_k$	k	$\beta_k^* = \epsilon_k \beta_k$
0	0.995594079021011	0	0.680509575028605
1	-. 4399417512062	1	-. 26094325095165
2	. 7614950109	2	. 498357024921
3	. 1049646708	3	-. 4955638045
4	-. 59287327	4	-. 385777508
5	. 2476296	5	. 42738813
6	-. 73689	6	-. 2931745
7	-. 449	7	. 149304
8	. 345	8	-. 3402
9	-. 40	9	-. 474
10	. 3	10	. 97
		11	-. 12
		12	. 1
k	$\gamma_k^* = \epsilon_k \gamma_k$	k	$\delta_k^* = \epsilon_k \delta_k$
0	1.013239073043162	0	0.692196180304013
1	. 13229801852121	1	-. 14675102185763
2	-. 10878833252	2	. 233627913439
3	-. 1526640618	3	-. 2052429419
4	. 77854158	4	-. 163267246
5	-. 3061802	5	. 17179064
6	. 86734	6	-. 1142129
7	. 648	7	. 56646
8	-. 403	8	-. 1225
9	. 46	9	-. 182
10	-. 4	10	. 36
		11	-. 4



## NAGY ÉRZÉKENYSÉGŰ ALFA - SPEKTROMÉTER KIS FAJLAGOS AKTIVITÁSÚ MINTÁK ANALIZISÉRE

Irta: Biró János, Fehér István, Lendvay János és Tóth Ádám

### Összefoglalás

Az ismertetett impulzus ionizációs kamra természetben előforduló pCi/g fajlagos aktivitású alfa-sugárzó radioaktív izotópok spektroszkópiai mérésére szolgál. A kamra metán-argon gázkeverékkel áramlásos üzemben működik. A  $^{232}\text{Th}$  3,98 MeV-es energiáján mért relatív félértékszélesség 6,9%, kimutatási határa 3,5-6 MeV tartományban 8 órás mérésnél 0,35 pCi/g. A berendezés természetes vizek, ásványok és biológiai minták alfa-spektrometriai mérésére alkalmazható.

### Bevezetés

A természetben előforduló, alfa-sugárzást kibocsátó radioaktív izotópok, - elsősorban urán és tórium bomlási sorának tagjai, és a mesterségesen előállított transzurán elemek alfa-sugárzó izotópjai, - az alfa-sugárzás nagy energiája és LET értéke, valamint ezen elemek metabolikus tulajdonságai miatt igen erősen radiotoxikusak. Az uránérc bányászatánál és feldolgozásánál, a  $^{239}\text{Pu}$  és más transzurán elemek előállításánál belégzés, lenyelés, vagy bőrön keresztül történő behatolás révén ezek a rendkívül radiotoxikus anyagok az emberi testbe juthatnak és ott már egészen kis fajlagos aktivitás esetén jelentős lokális, ekvivalens dózist eredményezhetnek.

A sugárvédelmi gyakorlatban, a sugárveszélyes munkahelyeken az inkorporáció megelőzését célzó vizsgálatoknál általában a levegő és víz fajlagos aktivitását mérjük. A személyek inkorporációjának ellenőrzése alfa-sugárzó izotópok esetében, a metabolikus paraméterek ismeretében a vizelet és széklet aktivitásának meghatározása útján történik. Egyes szervek dózisterhelésének meghatározása - emberről lévén szó természetesen csak halála után - a preparált szerv fajlagos aktivitásának mérését követően, számítás útján végezhető.

Az egyes alfa-sugárzó elemek eltérő metabolikus tulajdonságai miatt az összaktivitás mellett általában ismernünk kell azok összetételét is. Az összetétel meghatározásának legegyszerűbb módja, a minták alfa-spektrumának vizsgálata.

A természetes radioaktív elemek alfa-sugárzó izotópjai, így az urán,  $^{226}\text{Ra}$ ,  $^{210}\text{Po}$  az ivóvíz, a táplálék és levegő útján bekerülnek minden ember szervezetébe, ezért ebből a forrásból az egész népettséget kisebb-nagyobb besugárzás éri. A népettség sugárterhelésének vizsgálata jelentős sugárvédelmi mérési feladat, a genetikai károsodás megelőzése szempontjából.

Ezen mérési feladatok nagy érzékenységu, kis háttérü alfa-spektrométerrel végezhetők el. A nagy érzékenység a megfelelő térszög biztosítása mellett, az adott fajlagos aktivitásu mintánál a mérésre felhasznált anyag mennyiségének növelésével érhető el. A fentiekben vázolt feladatok zöménél, gyakorlatilag korlátlan mennyiségü minta áll rendelkezésre, azonban az alfa-spektrometriai célra készített minták vastagsága az önabszorpció miatt nem lehet nagyobb mint  $0,2 \text{ mg/cm}^2$ . Ezért a mérendő felületnek és ennek következtében a detektor érzékeny felületének is nagy-nak kell lennie. Például  $1 \text{ pCi/g}$  fajlagos aktivitásu minta spektrometriai analiziséhez elhanyagolhatóan kis háttérrel feltételezve kb.  $1000 \text{ cm}^2$  minta, ill. detektor-felület szükséges.

A CsI /Tl/ szcintillátorral működő alfa-spektrométerek, vagy félvezető alfa-spektrométerek kis háttérrel és jó feloldást biztosítanak, azonban ezekből ilyen nagy / $1000-10000 \text{ cm}^2$ / érzékeny felületü detektorok jelenleg még nem állnak rendelkezésünkre, ezért e célra csak kevésbé kényelmes, gázionizációs detektorok használhatók.

Kis fajlagos aktivitásu, nagy felületü minták alfa spektroszkópiái vizsgálatára impulzus ionizációs kamrát célszerű használni. A sik elrendezésü egyes, vagy kettős rácsos impulzus ionizációs kamráknál  $100-200 \text{ cm}^2$ -nél nagyobb preparátum felületet nehéz kiképezni, viszont rácsnélküli koaxiális impulzus ionizációs kamráknál néhány  $1000 \text{ cm}^2$ -es preparátum felület kiképzése sem jár nehézséggel.

Dixon [1] alkalmazott első ízben koaxiális impulzus ionizációs kamrát, kis fajlagosaktivitásü preparátum alfa-spektroszkópiái vizsgálatára. Munkájában a természetes  $^{147}\text{Sm}$  felezési idejének meghatározására  $19 \text{ cm}$  átmérőjü  $84 \text{ cm}$  hosszú  $5000 \text{ cm}^2$  aktiv felületü kamrát használt. Ha-

sonló berendezéssel Macfarlane [2] a közepes atomsúlyu elemek természetes alfa-aktivitását vizsgálta, berendezésüknél  $5 \cdot 10^{16}$  év felezési idő volt a kimutatási határ. Sugárvédelmi jellegű mérések céljára Hill [3]  $15000 \text{ cm}^2$ -es koaxiális kamrát épített, melybe  $1,5 \text{ g}$  minta vihető be. A kamra  $4 - 9 \text{ MeV}$  közötti háttere  $90 \text{ impulzus/óra}$ . Vékony rétegű  $^{241}\text{Am}$  / $5,48 \text{ MeV}$ / alfa-részecskéire  $2\%$  félérték szélességet ért el és  $8 \text{ órás}$  méréssel  $95\%$  megbízhatósággal a legkisebb kimutatható  $^{210}\text{Po}$  aktivitás  $0,08 \text{ pCi}$ , ami  $0,1 \text{ mg/cm}^2$  preparátum vastagság esetén  $0,05 \text{ pCi/g}$  fajlagos aktivitásnak felel meg, figyelembevève, hogy  $4-6 \text{ MeV}$  tartományban a háttér  $2 \text{ cph}$  csatornánként.

A  $\text{pCi/g}$  nagyságrendbe eső fajlagos aktivitású,  $3,5-9 \text{ MeV}$  energiájú alfa sugárzó izotópokat tartalmazó minták alfa-spektroszkópiai vizsgálatára hengeres ionizációs kamrát építettünk. A kamra tervezésénél arra törekedtünk, hogy az megfelelő érzékenység és spektrális felbontás mellett, lehetőleg egyszerű, könnyen kezelhető, szabvány elemekből álló elektronikával és kereskedelemben könnyen beszerezhető gázzal működő, laboratóriumi rutinmérésekre alkalmas készülék legyen.

#### A kamra leírása

Az alfa-részecskék hatótávolságánál nagyobb sugaru hengeres ionizációs kamrában, megfelelő térerősség elosztás esetén a kimenő jel független az ionizáció keletkezésének helyétől.

A térerősség eloszlása a kamrában a belső elektródától mért távolság függvényében

$$E_r = \frac{1}{r} \frac{V}{\ln r_k/r_b}$$

összefüggésből számolható.

- $V$  = a kamra elektródái között lévő feszültség
- $r_k$  = a külső elektróda sugara
- $r_b$  = belső elektróda sugara
- $r$  = a belső elektródától mért távolság.

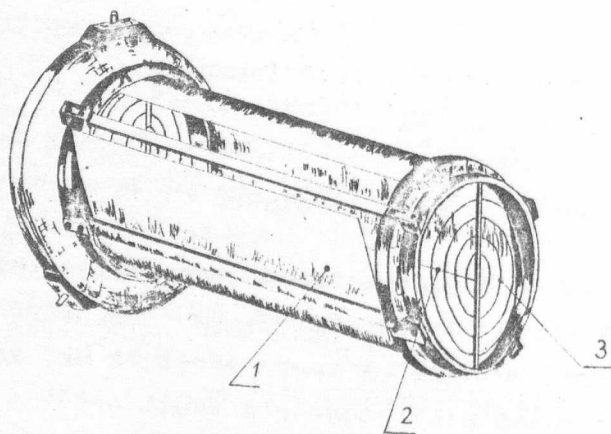
Irodalmi adatok szerint [3, 4] az ionok rekombinációs veszteségének kiküszöböléséhez szükséges minimális térerősség  $/E_{\min}/$   $90\%$  argon  $10\%$  metán keverékben, atmoszféra nyomáson  $20 \text{ V/cm}$ . A kamra méreteit úgy kell megválasztani, hogy a térerősség a külső elektródánál a fenti értéket meghaladja. A belső elektródánál a térerősség  $/E_{\max}/$  nem haladhatja meg  $2 \cdot 10^4 \text{ V/cm}$  értéket, mert ezen a ponton túl már gázsokszorozás lép fel.

A fentieket figyelembevéve egy 25 cm hosszú kamrát készítettünk. A külső elektróda sugara  $r_k = 9$  cm, belső elektródának  $r_b = 0,025$  cm sugaru rozsdamentes acél huzalt használtunk. 17000 V feszültségen a kamrában  $E_{min} = 37$  V,  $E_{max} = 11,8$  kV. Az általunk használt 90% argon 10% metán esetén atmoszféra nyomáson a 9 MeV energiájú alfa részecskék hatótávolsága 8,7 cm, ezért a maximális energiájú alfa részecskék is leadják a kamrában teljes energiájukat.

Az elektronegativ szennyeződés elkerülésére a kamra belsejében csak fémet és teflont használtunk. A negativ nagyfeszültségre kapcsolt külső elektróda cserélhető. Anyaga 0,15 mm vastagságú rézlemez, ennek belső oldalára vittük fel a vizsgálandó anyagot. Az 1700 V-os feszültséget RC szűrőn keresztül kapcsoltuk a külső elektródára.

A kamra két végén 4-4 negativ feszültségre kötött koncentrikus fémgyűrűt helyeztünk el a térerő csökkenésének kompenzálására. A kamra belső felépítését az 1. ábra mutatja. Látható, hogy minden szerelvényt az előlapra rögzítettünk, így a tulajdonképpeni ionizációs kamrát körülvevő, légmentesen záródó harang kerekeken eltolható, és eltolása után a preparátum, vagyis a külső elektródát képező rézlemez könnyen cserélhető.

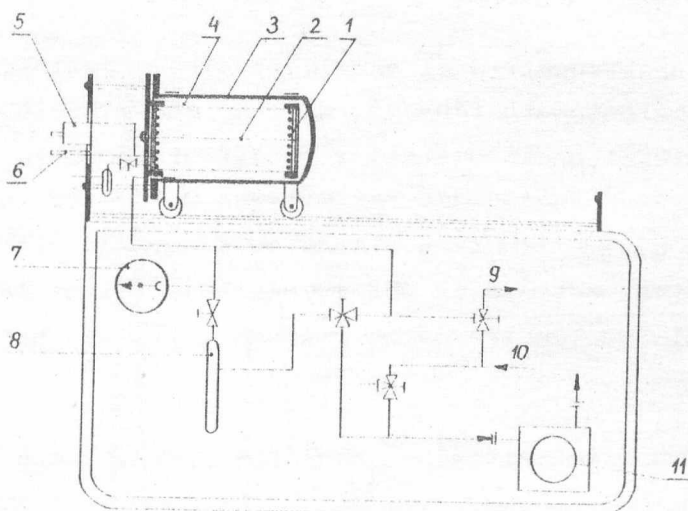
A kamra rotációs és adszorpciós szivattyúval  $10^{-4}$  Hgmm-re le-szivható. A vákuum, illetve a nyomás mérésére  $-760$  Hgmm -  $+1$  kp/cm<sup>2</sup> mérés-határu manovákuumméter szolgál. Az argon-metán gázkeverék 150 Atm nyomásu palackból reduktoron keresztül áramlik a kamrába. A kamra vákuum-rendszerének rajzát a 2. ábra mutatja. Áramlásos üzemben, vagy maximálisan 1 att-ra feltöltve tulnyomásos üzemben használható. A nyomás növelésével az alfa-részecskék hatótávolsága a kamrában lerövidíthető, ezáltal



1. ábra

Az ionizációs kamra belső felépítése.

1. külső elektróda: cserélhető preparátumtartó lemez.
2. Belső elektróda: 0,5 mm vastagságú rozsdamentes acél huzal.
3. Negativ nagyfeszültségre kapcsolt térgyűrűk.



2. ábra

Az ionizációs kamra és a vákuumrendszer rajza.

1. tárgyűrök, 2. belső elektróda, 3. légmentesen záródó harang, 4. külső elektróda,
5. előerősítő, 6. nagyfeszültség bemenet,
7. manovakuummeter, 8. adszorpciós szivattyu, 9. lelevegőző csap, 10. gáz bemenet, 11. rotációs szivattyu.

csökkenthető azoknak a részecskéknek a száma, melyek a kamra széléin, valamint a kamra belsejében a preparátumtartó külső elektróda görbülete miatt adják le teljes energiájukat a kamra érzékeny térfogatában. Méréseinek alapján kitűnt, hogy a nyomás 1 att-ra való növelésével a felbontás csak 6 MeV felett javul észrevehetően, viszont a megemelt nyomás esetén a kamrában az áramlásos üzem nem biztosítható, így a hosszú mérési idő alatt a gázban az elektronegativ szennyeződés megnövekedése a spektrumot elrontja. Ezért a kamrát kis aktivitás mérésénél atmoszféra nyomáson áramlásos üzemben használtuk.

Erősítőnek US-2 szovjet gyártmányu műszert használtunk. Előnyei: kis zaj, nagy stabilitás mellett az erősítés és az időállandó széles határok között változtatható.

Az elektronika felbontása az általunk használt 3600-szoros erősítés mellett 5,5 MeV-nél 168 keV.

Az erősítő jeleit 128 csatornás NK-103 típusu kinyomtatóval ellátott analizátorral dolgoztuk fel.

### Preparátumok készítése

Alfa spektrometriánál az elektronika zajszintje mellett az önabszorpció a legfontosabb tényező, mely az energiateljesítményt meghatározza. Ha a készüléket spektrometriára és aktivitás mérésre akarjuk használni, a preparátum vastagsága maximálisan  $0,2 \text{ mg/cm}^2$  az anyag szemcse-nagysága pedig  $0,5 \mu\text{m}$  lehet. A vizsgálandó anyagot nitrolakkal acetonban szuszpendálva, egyenletes rétegben vittük fel az  $1400 \text{ cm}^2$  felületű réz, vagy alumínium lemezre és szárítással, illetve beégetéssel rögzítettük.

A kamra hitelesítéséhez az alábbi preparátumokat használtuk:

Pontszerű forrásnak alumíniumtálcára  $^{241}\text{Am}$  oldatból cseppentéssel és beszárítással készített standard preparátumot és  $0,5 \text{ cm}$  átmérőjű platínalemezre emanáció útján felvitt  $\text{ThC+C}'$  preparátumot használtunk. Nagyfelületű forrásnak alumíniumfóliára beégetéssel készített  $0,17 \text{ mg/cm}^2$  vastagságú  $\text{ThO}_2$  preparátumot alkalmaztunk. Vizek radiumtartalmának vizsgálatához  $^{226}\text{Ra}$  tartalmu standard oldat Ba-szulfáttal történő lecsapatás után kapott csapadékot acetonos nitrolakkal  $1400 \text{ cm}^2$  rézlemezre vittük fel, és  $100^\circ\text{C}$  hőmérsékleten szárítottuk.

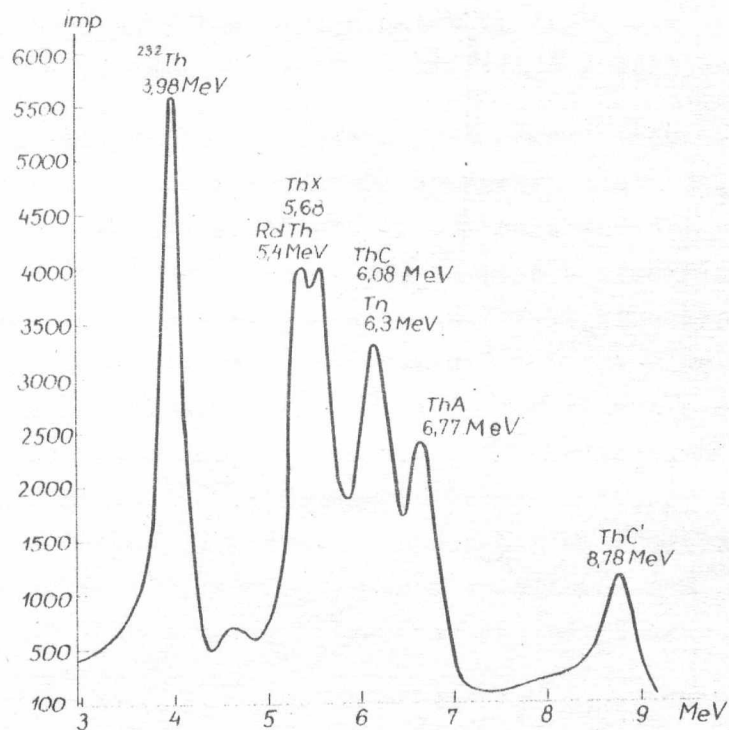
### Az alfa spektrométer jellemzői

A kamra bemérésénél használt nagyfelületű  $^{232}\text{Th}$  és bomlási sora/ preparátumnál, normál nyomáson  $1500 \text{ V}$  anódfeszültség mellett,  $5 \text{ MeV}$  energiánál a nonlinearitás  $0,65\%$ ,  $0,82 \text{ atm}$  túlnyomás esetén  $1,1\%$ . A mérések hitelesítéséhez használt  $^{226}\text{Ra}$  bomlási sorának alfa spektrumánál mért nonlinearitás normál nyomáson  $0,3\%$ .

A kamra felbontását áramlásos üzemben, valamint az  $0,82 \text{ atm}$  túlnyomás esetén vizsgáltuk. A  $^{232}\text{Th}$   $3,98 \text{ MeV}$ -es energiáján mért félértékisélesség áramlásos üzemben  $6,9\%$ ,  $0,82 \text{ atm}$  túlnyomás esetén  $6,3\%$ .

A 3. ábra a  $^{232}\text{Th}$ , a 4. ábra a  $^{226}\text{Ra}$  bomlási sorának alfa-spektrumát mutatja.

A készülék hatásfoka a különféle eljárással készített preparátumoknál a preparálási módszertől függetlenül jó egyezést mutat.  $^{241}\text{Am}$   $5,48 \text{ MeV}$ -es energiáján  $46\%$ -os, a  $^{232}\text{Th}$   $3,98 \text{ MeV}$ -es energiáján  $43\%$ -os, a  $^{226}\text{Ra}$   $4,7 \text{ MeV}$ -es energiáján  $46\%$ -os hatásfokkal detektálta a kamra az alfa-bomlásokat. A hatásfok helyfüggését pontszerű  $^{241}\text{Am}$  preparátummal vizsgáltuk. /5. ábra/. A preparátumot a kamra közepére /1-es görbe/ illetve a végére /2-es görbe/ helyezve mértük a hatásfok helyfüggését. Az



3. ábra

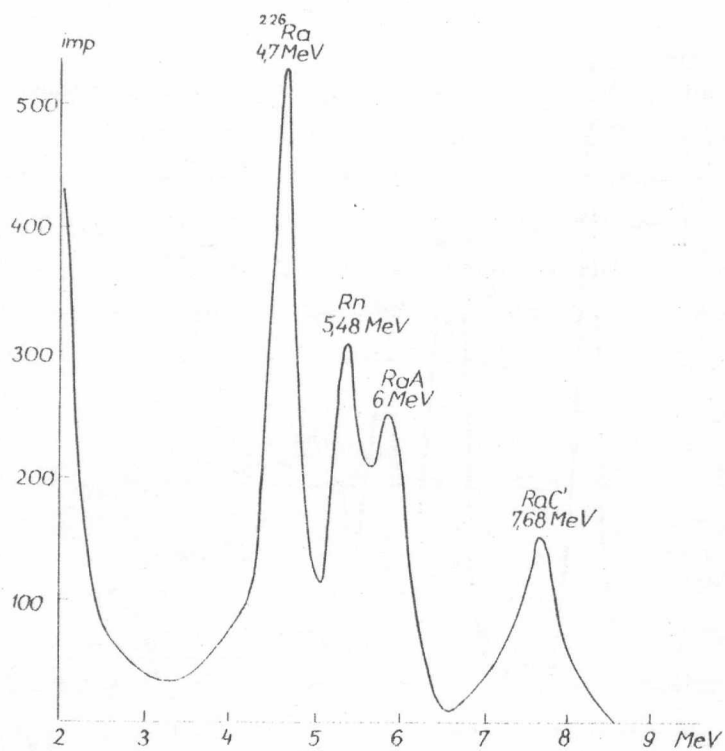
$^{232}\text{Th}$  preparátum bomlási sorának alfa-spektruma

ábrán látható, hogy a térgyűrűk hatására a hatásfok a széleken nem tért el a középén mért értékektől. A 3.sz. görbe mutatja, hogy térgyűrűk nélkül a begyűjtés hatásfoka lényegesen romlott.

A készülék háttere 20 órás mérési időtartam alatt 3-9 MeV energiatartományban 1,17 cpm. A kimutatási határ 3,5-6 MeV tartományban 8 órás méréssel 95% megbízhatósággal 0,09 pCi, ami 0,2 mg/cm<sup>2</sup> preparátumvastagság esetén 0,35 pCi/g fajlagos aktivitásnak felel meg. A  $^{232}\text{Th}$  és  $^{226}\text{Ra}$  preparátumokkal történt mérések után a kamra háttere lényegesen megnőtt, mivel a kamra belső szerelvényei toron és radon bomlástermékekkel szennyeződtek. A háttér csak 8 nap után csökkent az eredeti szintre.

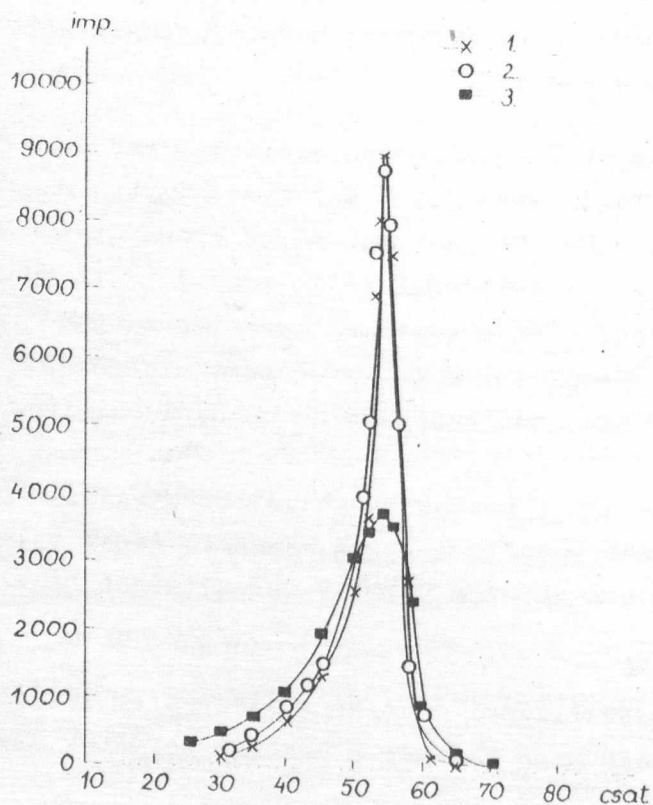
A kamra feszültségét 900-2000 V tartományban változtatva felvettük a  $^{241}\text{Am}$  5,48 MeV-es csucsának helyét. A plató meredekségének változása 56 keV/100 V. A kamrát a plató közepén, 1700 V feszültségen használtuk.

A készülék hosszúidejű stabilitását áramlásos üzemben és lezárt állapotban mértük. Áramlásos üzemben 5,58 MeV-nél a maximum helyének sta-



4. ábra

$^{226}\text{Ra}$  preparátum bomlási sorának alfa-spektruma



5. ábra

A hatásfok helyfüggése az ionizációs kamrában pontszerű  $^{241}\text{Am}$  preparátummal mérve.

- 1.sz. görbe: a preparátum a kamra közepére helyezve;
- 2.sz. görbe: a preparátum a kamra végébe helyezve, a térgyűrűk -1500 V feszültségén;
- 3.sz. görbe: a preparátum a kamra végébe helyezve, a térgyűrűkre nincs feszültség kapcsolva.



bilitása  $\pm 0,5\%$  azaz  $\pm 28$  KeV/8 óra, lezárt állapotban ennek a kétszerese, Ezek szerint a kamra 99,5% tisztaságu metán és argon gáz használata mellett tisztítás nélkül, áramlásos üzemben kielégítő stabilitással működik.

Kis aktivitások mérésénél több órás mérési időszakban igen hasznos, ha a berendezés helyes működéséről a mérések alatt meggyőződhetünk. A kamrában elhelyezett hitelesítő preparátum sugárzásának azonban olyan energiatartományba kell esnie, amely nem zavarja a vizsgálandó anyag spektrumát. Tekintve, hogy 3 MeV alatti alfa-sugárzást kibocsájtó, hosszú felezési idejű anyag nem állt rendelkezésünkre, a  $^{239}\text{Pu}$  alfa preparátumot 6  $\mu\text{m}$  vastag alumíniumfóliával fedtük le. A fólián áthatoló alfa-részek 5 mm vastag 1 mm átmérőjű lyukakkal ellátott, rács kollimátoron keresztül léptek a kamrába. A kamrába lépő alfa-részecskék energiája kisebb, mint 3 MeV, ezért az ellenőrző forrásból származó impulzusok az analizált tartomány alatt jelentek meg, és a vizsgálandó minta spektrumát nem befolyásolták. A 3-8,5 MeV tartományban a kamra háttere az ellenőrző preparátum bevitele után sem változott meg.

### Alkalmazás

A készülék segítségével megmértük a budapesti Juventus forrás természetes  $^{226}\text{Ra}$  fajlagos radioaktivitását.

A rádium lecsapatása a forrás vizéből Goldin eljárással történt [5]. Az eljárás elve a rádiumnak ólom- és bárium-szulfáttal történő együttes lecsapásán, valamint az ólom és bárium EDTE komplexeknek eltérő stabilitásán alapszik. Ellenőrzésül hasonló módszerrel preparátum készült a budapesti csapvizből, desztillált vizből és egy rádiumtartalmu standard oldatból. A preparátumokat az Országos Közegészségügyi Intézet Radiológiai Osztályán készítették el.

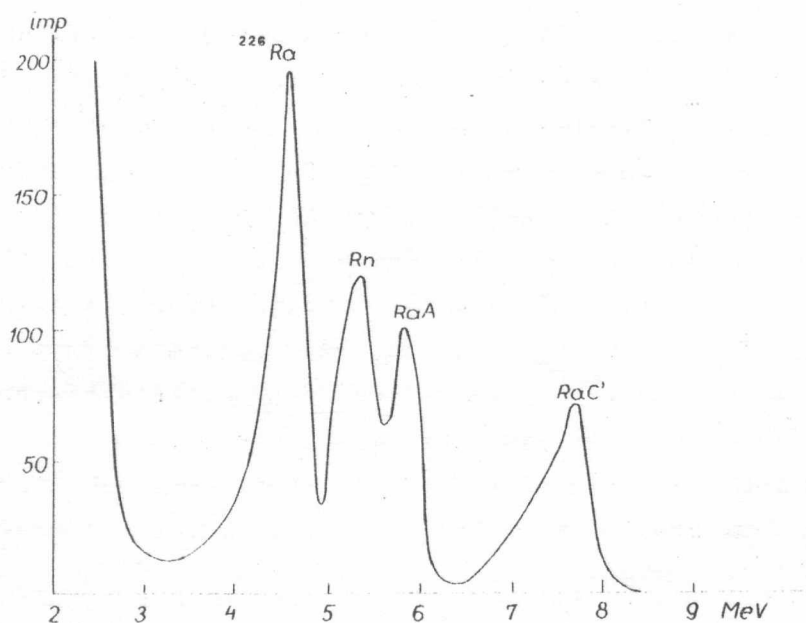
A 80-100 mg csapadékot 6,5 mg nitrolakot tartalmazó acetonos oldatból egyenletes rétegben vittük fel a preparátumtartó rézlemezekre.

A 6. ábra a forrásviz alfa-spektrumát mutatja. A spektrum megegyezik a hitelesítő  $^{226}\text{Ra}$  preparátum spektrumával/4. ábra/. A  $^{226}\text{Ra}$  energiáján a görbe alatt mért impulzusszámból a forrásviz  $^{226}\text{Ra}$  tartalma  $22 \pm 4$  pCi/liter. Ez az eredmény hibahatáron belül megegyezik az Országos Közegészségügyi Intézetben más módszerrel mért 27 pCi/liter értékkel.

A budapesti csapviz  $0,4 \pm 0,1$  pCi/liter  $^{226}\text{Ra}$ -ot tartalmazott, a desztillált viz rádiumtartalma a kimutatási határ alatt volt  $< 0,1$  pCi/liter/.

A jövőben a kamrát radioaktív inkorporációnak kitett és természetes halállal, vagy baleset következtében elhunyt személyek egyes szervei-

ben felhalmozódott alfa-sugárzó radioaktív anyagok analizisére kívánjuk felhasználni.



6. ábra

A budapesti Juventus-forrás vizének alfa-spektruma

### Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnénk megköszönni Dr. Polgár Erzsébetnek és az Országos Közegészségügyi Intézet Radiológiai Osztálya dolgozóinak a rádium preparátumok elkészítését, valamint Mészáros István gépészmérnöknek a kamra tervezésében nyújtott segítségét.

### I r o d a l o m

- [1] Dixon, D.: Phil. Mag. 45, 1099 /1954/
- [2] Macfarlane, R.D. and Kohman, T.P.: Phys.Rev. 121, 1758 /1961/
- [3] Hill, C.R.: Nucl.Inst. and Methods 12, 299 /1961/
- [4] Loeb, L.B.: Basic Processes of Gaseous Electronics, Univ. of California Press 1955.
- [5] Goldin, A.S.: Anal.Chem. 33, 406 /1961/

Érkezett: 1969. jan. 9.

KFKI Közl. 17.évf. 2.szám, 1969.

## EGYSZERŰ NYALÁBINDIKÁTOR IONNYALÁB VIZSGÁLATÁRA

Irta: Királyhidi László és Kostka Pál

### Összefoglalás

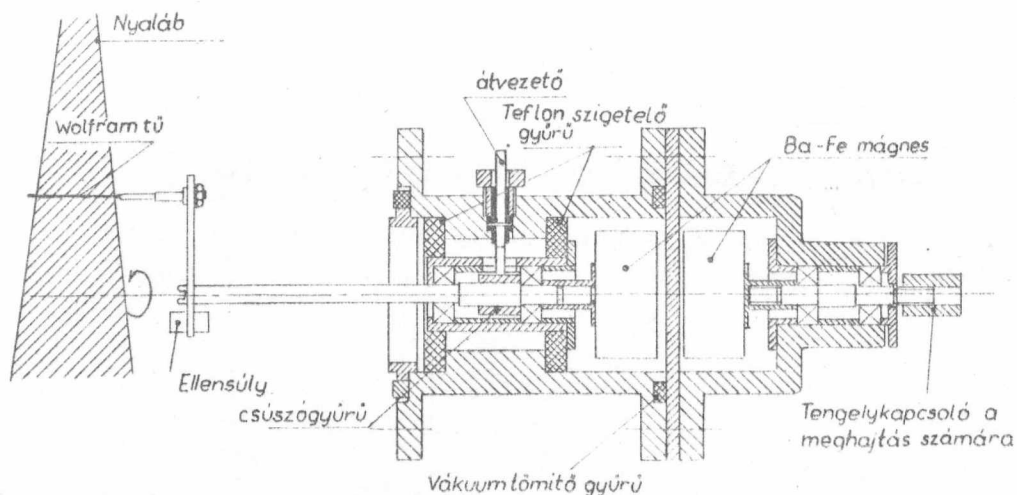
A cikk egyszerű felépítésű nyalábindikátort ismertet, amelyet a KFKI Gyorsító Laboratóriumában ionnyaláb paramétereinek vizsgálatára fejlesztettek ki. Segítségével gyorsítóberendezésnél az ionnyaláb fókuszáltsága ellenőrizhető és előnyösen alkalmazható ionnyalábnak bemérő-standon való vizsgálatánál, például ionforrás emittancia-diagramjának meghatározásánál is.

### Bevezetés

Részecskegyorsító berendezésekben az ionnyaláb az ionforrástól a gyorsító és fókuszáló lencserendszereken, elhajlító mágneseken keresztül a céltárgyig /targetig/ sokszor 10-20 métert, esetleg ennél lényegesen hosszabb utat tesz meg. A sok esetben csak négyzetmilliméter kiterjedésű céltárgyra való pontos fókuszálás érdekében szükséges az ionut mentén egyes helyeken az ionnyaláb helyzetének, átmérőjének meghatározása, általában nemcsak az ionnyaláb beállításakor, hanem üzemkészen, a nyaláb folyamatos vagy szakaszos ellenőrzésénél is. Erre a célra az irodalomból számos szerkezet ismeretes. Elektrosztatikus generátornál használatos nyalábindikátorok [1, 2, 3, 4, 5] stb. működési elve, hogy az ionnyaláb haladási irányára merőlegesen bot alakú elektródot mozgatnak és az elmozdulás függvényében indikálják a botra futó ionáramot. Az egyes szerkezetek a bot mozgatásának és a helyzetkoordináta jelzésének megoldásában különböznek. Ugyanígy szerkezet alkalmas az ionnyaláb minőségi vizsgálatára [2], [6], például a nyaláb emittanciadiagramjának [7] meghatározására is [2].

### Szerkezeti leírás

A KFKI Gyorsító Laboratóriumában megépített nyalábindikátor leginkább [4] -ben ismertetetthez hasonlít. Golyóscsapágyakkal jól csapágyazott



1. ábra

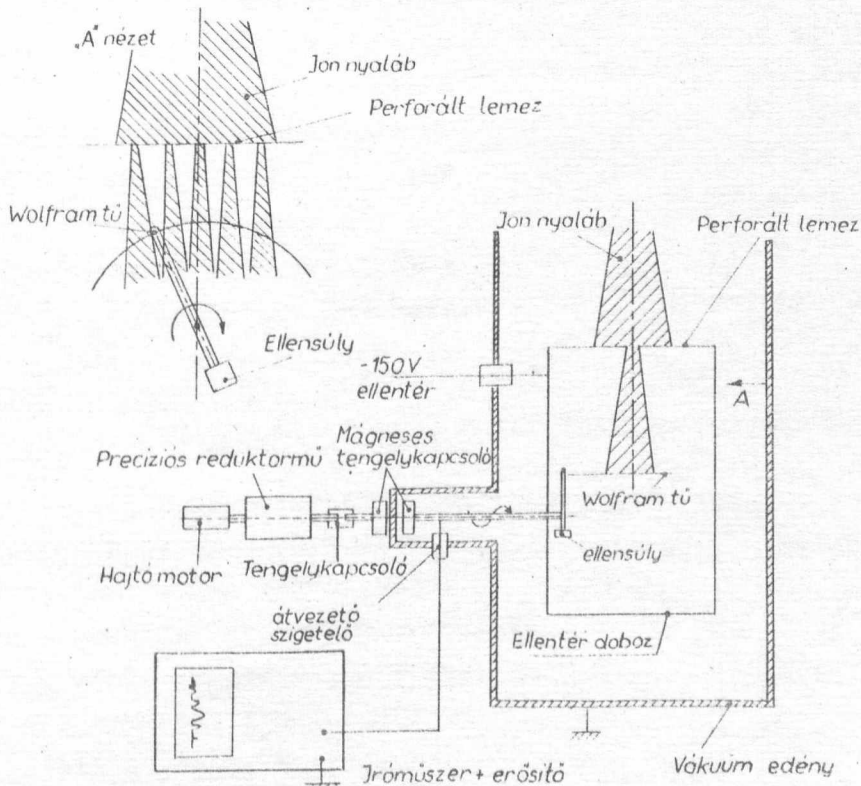
tengelyre egy kart erősítettünk, amely excentrikusan tartja a bot alakú elektródot /1. ábra/. Ilyenformán a bot hengerpaláston mozog. Ezt a hengerfelületet az ionnyaláb tengelyére merőlegesen helyeztük el. Így a bot minden körülfordulásnál kétszer metszi az ionnyalábot. A hengerpalást átmérője 30 és 50 mm között változtatható, tehát lényegesen nagyobb a fókusztált ionnyaláb átmérőjénél. Az átmérő-változtatás úgy hajtható végre, hogy az elektródot a tengelyvégre felszerelt karon különböző távolságra erősítjük fel, az excentrikus felerősítés miatti kiegyensúlyozatlanságot pedig ugyanezen kar ellenkező oldalán ellensúlyokkal küszöböljük ki. A bot alakú elektród 0,4/0,2 mm-es rozsdamentes acélcső. Precízebb mérés esetében ez a cső  $\varnothing$  0,18 mm-es wolfram-tű tartórudjául szolgál, amelybe a wolfram-tű végét belezömítjük. A tengely csapágyazását teflon szigetelők tartják a külső vákuumzáró sárgaréz házban. A ház NA 36 csatlakozóperemmel kapcsolódik a vákuumtérhez. A türe futó áramot a tengelyen elhelyezett csúszógyűrűről bronz érintkezőrugóval szedjük le és teflonszigetelésű vákuumzáró átvezetőn keresztül árnyékolt vezetéken regisztráló műszerbe vezetjük. A tengelyt mágneses tengelykapcsoló segítségével forgatjuk. A tengely végére 14x18x30 mm méretű Ba-Fe mágnest erősítettünk, amelyet a vákuumzáró tárcsa másik oldalán elhelyezett ugyanilyen méretű mágnes fogat. A hajtómágnest egy kisebb méretű sárgaréz házban csapágyazott tengely végére erősítettük, amely rugalmas tengelykapcsolóval kapcsolódik a hajtáshoz. A hajtás a felhasználásnak megfelelően választandó meg, lehet redukáló-műves lassu hajtás /kb. 1 fordulat/perc/, vagy közvetlen motoros hajtás,

/max. 300 fordulat/perc/. A bot áramát az áram nagyságától függő munkaelenálláson /100 kOhm-10 MOhm/ folytatjuk át és regisztráljuk a fellépő feszültséget. Regisztráló műszernek oszcilloszkópot, vagy iróműszert használunk.

### Alkalmazások

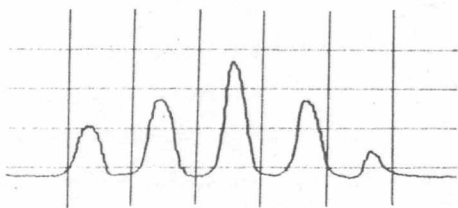
A nyalábindikátort elektrosztatikus generátor ionsatornájában az ionnyaláb helyzetének és átmérőjének beállítására, illetve üzembiztonsági ellenőrzésére alkalmaztuk. Ez esetben a bot forgatását a mágneses tengelykapcsolón keresztül közvetlenül egy 3,5 W-os, 6 V-os egyenáramu motor végzi. A méréseknél a motor fordulatszáma kb. 300/perc volt, amelynél a centrifugális erő miatt az  $\varnothing 0,4$  mm-es cső-elektrodon még semmiféle deformációt nem tapasztaltunk. A botra futó áramjelet alacsonyfrekvenciás oszcilloszkópon figyeltük. Az oszcilloszkóp vízszintes eltérítését egy, a mágneses tengelykapcsoló közelében elhelyezett tekercsben indukált váltakozó feszültséggel vezéreltük.

A nyalábindikátort előnyösen használtuk ionforrások emittancia-diagramjának meghatározására is. Ez esetben a 2. ábra szerinti elrendezéssel dolgoztunk. Az ionnyaláb utjába  $\varnothing 0,4$  mm átmérőjű 1 mm-es osztástávolságú furatokkal rendelkező lemez került. A lemez 0,2 mm-es, a furatoknál



2. ábra

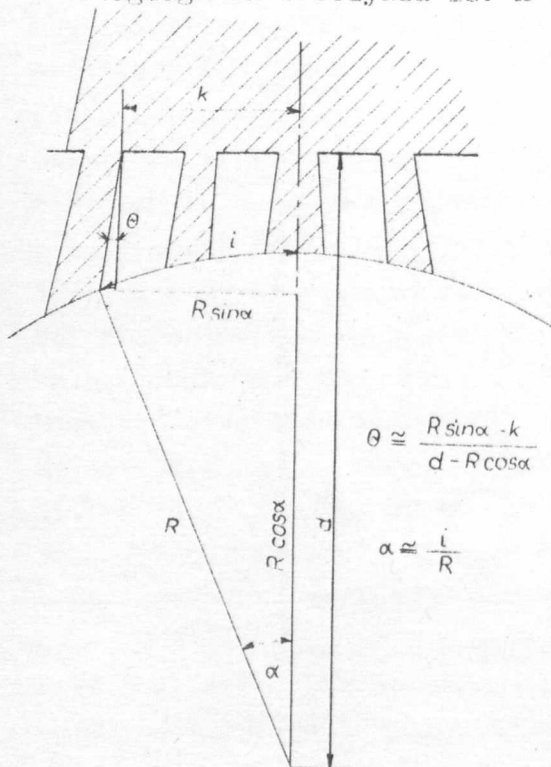
0,1 mm vastag. Ez a furatsor az ionnyalábot elemi nyalábokra bontja, amelyek sorra a nyalábindikátor 0,18 mm átmérőjű tujére futnak. Az észlelt áramok  $10^{-9}$ - $10^{-7}$  A nagyságrendűek. Megfelelő erősítés után Rohde-Schwarz ZSG. BN 18531 típusú iróműszerrel felrajzoljuk az áramlökéseket /3/a. ábra/.



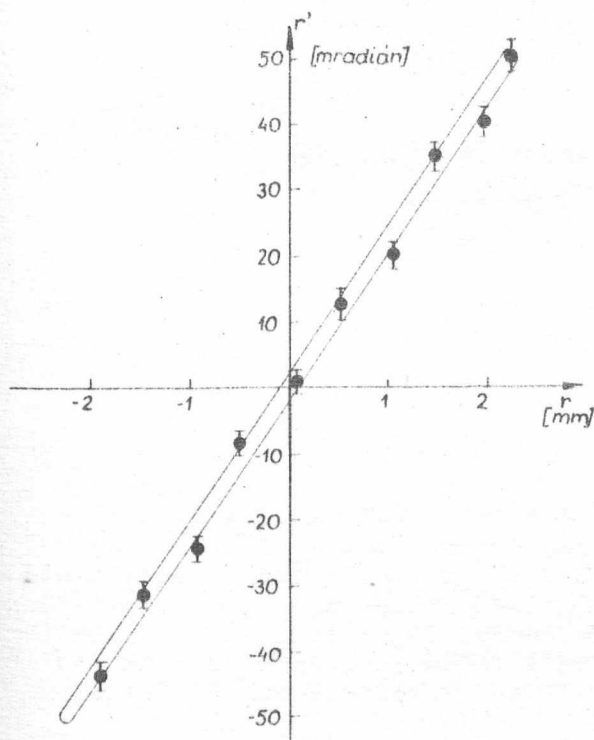
3/a. ábra

A tü egy körülfordulása alatt a papirelőtölés 600 mm. A tü meghajtását ez esetben Tettex gyártmányú reduktorműves hajtómotor szolgáltatja. A tü percnként egy körülfordulást végez. A túból kilépő szekunder elektronok visszatérítésére a tüöt egy ellentér biztosító dobozba helyeztük. Az ellentér feszültsége az ionnyaláb energiájához képest kicsi. A kiértékelés a geometriai méretek ismeretében az iróműszerrel felrajzolt diagram alapján végezhető. Figyelembe kell venni a kiértékelésnél, hogy a tü nem sikmozgást végez a lyuksor alatt. Az írópapíron ugyanis a tü által befutott ivhossz olvasható le. A tümozgás sugarának /R/ ismeretében meghatározhatjuk az ivnek a diafragma-sorral párhuzamos vetületét, majd ebből és a lyuksor méretéből az ionsugárnak a geometriai tengelyhez képest bezárt szögét /  $\theta$  / /3/b ábra/. Minthogy megállapítható, hogy a nyaláb a lyuksor mely furatain lépett keresztül, a furatok átmérőjének szórása / $\pm 0,01$  mm/ és egymás közötti távolságának szórása / $\pm 0,01$ - $0,02$  mm/ is figyelembevehető. Korrekcióba vehető a tü véges vastagságának befolyása is. A tü mozgásánál kismértékű beremegés észlelhető,

amely azonban csak kb. 0,1 mm-re teszi bizonytalanná a tü helyzetét. Gondos kiértékelés esetén a nyaláb egyes sugarainak iránya  $\pm 1,5$  mradián pontossággal határozható meg. A Gyorsító Laboratóriumban használatos kisáramú ionforrások [8] egyikének emittancia diagramját a 4. ábra mutatja, amelyet a nyalábindikátorral határoztunk meg. A mérésnél a forrás kihúzófeszültsége 2 kV, a gázfogyasztás az optimális munkapontnak felelt meg, az alkalmazott ellentér -150 V volt. Igen előnyös, hogy a jelenlegi mérési összeállítással a mérés 1 perc alatt elvégezhető, ezért nem kell nagyon szigorú követelményeket támasztani a nyaláb időbeli stabilitása iránt. A kiértékelés kb. másfél órát vesz igénybe. Az iróműszerrel felvett



3/b ábra



4. ábra

diagramból a nyalábban belüli intenzitás-eloszlásra is lehet következtetni, mivel a műszerkitérés a türe futó ionárammal arányos. Pontosabb azonban, ha ilyen mérésnél a lyuksort a nyaláb átmérőjéhez képest keskeny réssel helyettesítjük.

#### Befejezés

A Gyorsító Laboratóriumban megépített nyalábindikátor sokoldalúan felhasználható ionnyalábnak standon történő pontos vizsgálatánál, bemérésénél, valamint a gyorsítóberendezésnél a nyaláb fókuszáltságának ellenőrzésére. A szerkezet egyszerű felépítésű, üzembiztos, segítségével gyorsan végezhető mérések, kis intenzitású nyalábok esetén is.

#### I r o d a l o m

- [1] Nielsen, K.O., Skilbeid, O.: Nucl.Instr. 1, 159 /1957/
- [2] Rose, P.H., Wittkower, A.B., Bastide, R.P., Galejs, A.: Nucl. Instr. and Meth. 14, 79 /1961/
- [3] Hortig, G.: Nucl. Instr. and Meth. 30, 355 /1964/
- [4] Wagger, J.W., Page, J.B., Riley, P.I.: Nucl.Instr. and Meth. 49, 121 /1967/
- [5] Mewaldt, R.A.: Nucl. Instr. and Meth. 61, 235 /1968/
- [6] Rose, P.H., Bastide, R.P., Brooks, N.B., Airey, J., Wittkower, A.B.: Rev. Sci. Instr. 35, 1283 /1964/
- [7] Vályi L., Gombos P., Roósz J.: KFKI Közl., 14, 259 /1966/
- [8] Vályi L., Gombos P., Roósz J.: KFKI Közl., 12, 461 /1964/

Érkezett: 1968. okt. 29.

KFKI Közl., 17.évf. 2.szám, 1969.





## BESUGÁRZÁS HATÁSÁRA KELETKEZETT GYÖKÖK VIZSGÁLATA CS<sub>2</sub>-3-MP ÜVEGEBEN ESR MÓDSZERREL

Irta: Zádor Erika

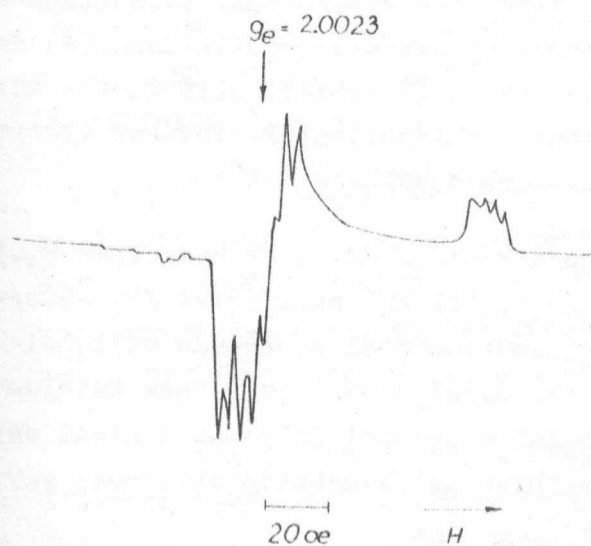
### Összefoglalás

Megvizsgáltuk a CS<sub>2</sub>-3-MP üvegekben 77K<sup>0</sup>-on gamma-sugárzás hatására keletkezett gyökök viselkedését. Több más termék mellett, CS<sub>2</sub> gyökion keletkezését észleltük. A CS<sub>2</sub> ESR jele látható fényvel történt megvilágítás hatására eltűnt, majd mérsékelt melegítés hatására megjelent ismét. A jelenséget a CS<sub>2</sub> molekulák asszociatív sajátságából kiindulva úgy értelmeztük, hogy az egymáshoz közel képződött CS<sub>2</sub><sup>-</sup> gyökionok párnélküli spinjei reverzibilisen kompenzálják egymást.

### Bevezetés

Tiszta kondenzált széndiszulfid /CS<sub>2</sub>/ radiolízisét Janssen és munkatársai [1] tanulmányozták. Vizsgálataik szerint besugárzás hatására

a cseppfolyós CS<sub>2</sub> elemi kén és CS<sub>x</sub> keletkezése közben bomlik /x értéke 1,3 és 1,85 között változik a besugárzás hőmérsékletétől függően: alacsonyabb hőmérsékleten x értéke nagyobb/. Szilárd fázisban végzett kísérletek során a CS<sub>2</sub> nem bomlott el, azonban a besugárzott minták lumineszkáltak. Porter és Norman [2] CS<sub>2</sub>-t 10<sup>-2</sup> mol/l koncentrációban tartalmazó 3-metil-pentán /3-MP/ üvegek fotolízisét vizsgálta. A fotolízis során CS "gyök" volt kimutatható, amely a minta melegítésekor eltűnt.



1. ábra

77K<sup>0</sup>-on, szilárd CS<sub>2</sub> felületére lőtt fém K hatására keletkezett CS<sub>2</sub><sup>-</sup> gyök ESR spektruma [1]

Bennett és munkatársai [3] szilárd  $\text{CS}_2$  felületére  $77\text{K}^0$ -on különböző alkálifémeket lőtték. A reakció során  $\text{CS}_2^-$  és alkálifém kation keletkezett. A  $\text{CS}_2^-$  gyökiont ESR spektruma alapján azonosították. A spektrum paramétereit meghatározták, ezek megfeleltek az elméleti számításoknak és mutatták a g-faktor anizotrópiáját /1. ábra/.

#### Kísérleti rész

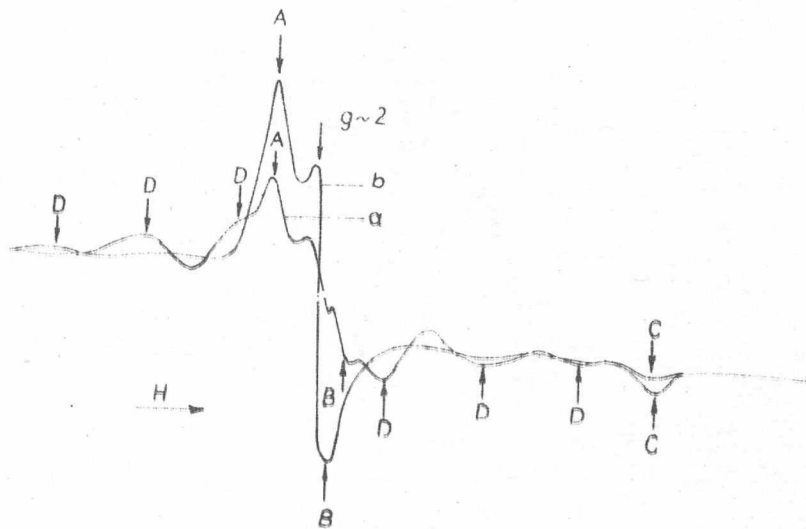
A  $\text{CS}_2$ -t először higanyról desztilláltuk, majd zárt vákuumrendszerben többszöri desztilláció után törőzárás ampullákba zártuk. A 3-MP-t kén-savval mostuk, szilikagélen szárítottuk, majd frakcionálisan desztilláltuk, a párlatot többszöri desztilláció után, zárt vákuumrendszerben, törőzárás ampullákba zártuk. A higitás és a besugárzandó minták betöltése is a vákuumrendszerben történt. A besugárzást 2 mm átmérőjű, "LUCS-2" jelű üvegminta-tartókban végeztük /ezekben az üvegekben a besugárzás hatására csak jelentéktelen, nem zavaró mennyiségben keletkeznek gyökök/. Az alkalmazott Co-60 gamma-sugárforrás teljesítménye  $10^{17}$  eV/cm<sup>2</sup>.min volt. Az ESR spektrumokat JES 3BX spektrométerrel vettük fel.

#### Mérési eredmények

Az irodalmi adatokból [1] és saját méréseinkből / $10^{19}$  eV/cm<sup>2</sup> dózis/ kitűnt; a tiszta szilárd  $\text{CS}_2$ -ben gyökök jelenléte nem mutatható ki, folyadékállapotban pedig élettartamuk olyan rövid, hogy ESR módszerrel nem mérhetőek. Ezért a  $\text{CS}_2$  sugárbomlását 3-MP üvegekben vizsgáltuk. Választásunk azért esett erre az oldószerre, mert ennek sugárkémiai viselkedése [4] és ESR spektruma [5] az irodalomból ismert, az ettől észlelt eltérések - közvetve vagy közvetlenül az oldott anyagnak tulajdoníthatók. További előnye a rendszernek, hogy a  $\text{CS}_2$ -3-MP üveg jól reprodukálható  $77\text{K}^0$ -on.

Megvizsgáltuk a különböző koncentrációjú  $\text{CS}_2$ -3-MP üvegekben 0,01-0,2 mol/l  $\text{CS}_2$  tartalom mellett keletkező gyökök ESR spektrumát /2. ábra/. Az A, B és C csucok nagysága a  $\text{CS}_2$  koncentrációval arányosan nőtt, elhelyezkedésük pedig hasonló a Bennett [3] által a  $\text{CS}_2^-$  gyökionnak tulajdonított jel komponenseiéhez. Ez a három jel a további folyamatok alatt egyszerűen tűnt el, vagy jelent meg, ami szintén azt támasztja alá, hogy egy anyaghoz tartoznak.

A fentieket összefoglalva megállapíthatjuk, hogy a 2. ábrán az A, B és C-vel jelzett csucok a  $\text{CS}_2^-$  gyökion ESR spektrumát alkotják.



2. ábra

Azonos dózissal besugárzott  $\text{CS}_2$ -3-MP üvegek ESR spektruma:  
a - 0,01 mol/l; b - 0,1 mol/l,  $\text{CS}_2$ /a b spektrum 1,7-sze-  
resére gyengítve/ A, B, C:  $\text{CS}_2^-$ ; D:  $\dot{\text{C}}_5\text{H}_{11}$

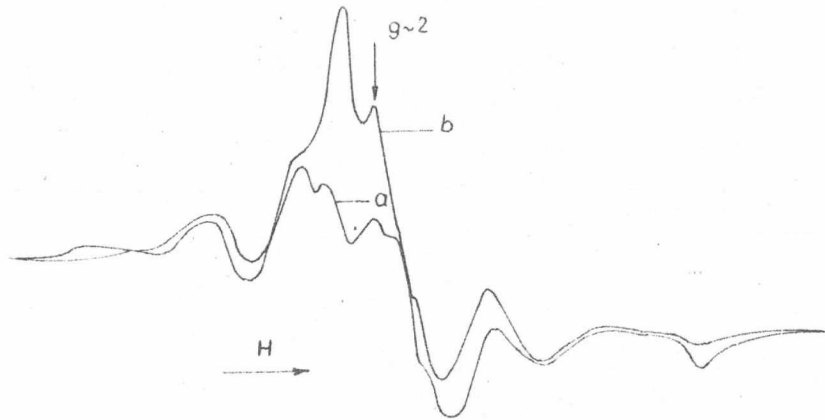
A 2. ábrán D-vel jelölt szextett a  $\text{CH}_3\text{-CH}_2\text{-}\dot{\text{C}}\text{H-CH}_2\text{-CH}_3$  gyök jele [5].

Az ábra közepén a  $g \approx 2$  értéknél látható csucs minden bizonnyal -  
a tiszta 3-MP-hoz hasonlóan - a szolvatált elektronnak tulajdonítható.

Meg kell említenünk, hogy a besugárzott 3-MP minták enyhén sárga,  
a  $\text{CS}_2$ -3-MP minták pedig a  $\text{CS}_2$  koncentrációval növekvő mértékben kék színű-  
ek voltak.

Figyelemmel kísértük a besugárzott mintákat a besugárzás folyamán.  
Megállapíthatjuk, hogy a besugárzás kezdeti szakaszában csak a  $\dot{\text{C}}_5\text{H}_{11}$  gyök  
és a szolvatált elektron spektruma, valamint a kék szín alakul ki, a  $\text{CS}_2^-$   
gyök spektruma a besugárzás későbbi szakaszán jelenik meg, vagy az esetben,  
ha rövid ideig besugárzott mintákat állni hagyjuk /3. ábra/.

Vizsgáltuk a gyökök hőállóságát. A kvalitatív mérések alapján meg-  
állapíthatjuk, hogy enyhe melegítés hatására  $90\text{K}^0$ -táján előbb a  $\dot{\text{C}}_5\text{H}_{11}$  gyök  
jele tűnik el, majd a  $\text{CS}_2^-$  és a kék szín.  $77\text{K}^0$ -on az összes keletkezett  
gyök stabil. A szolvatált elektron mennyisége ezen a hőfokon a mátrix  
lágysága miatt nem mérhető.

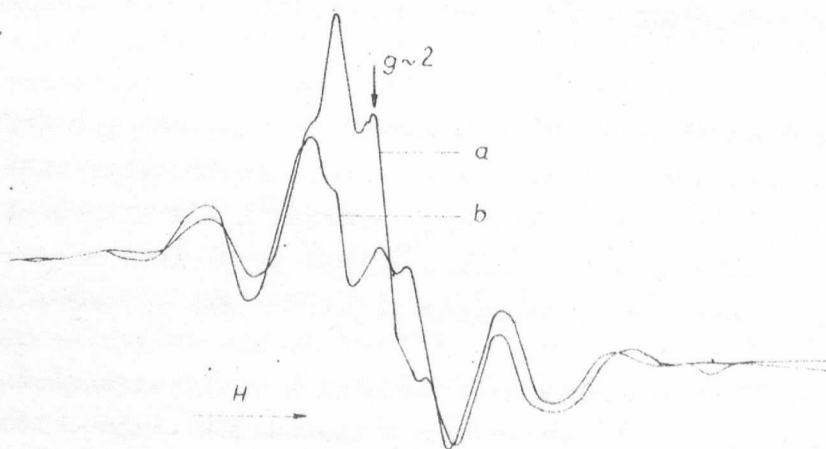


3. ábra

A besugárzás kezdeti és későbbi szakaszára jellemző spektrumok.

a -  $5 \cdot 10^{19}$  eV/cm<sup>2</sup>; b -  $1,5 \cdot 10^{20}$  eV/cm<sup>2</sup> /az utóbbi gyengítve /

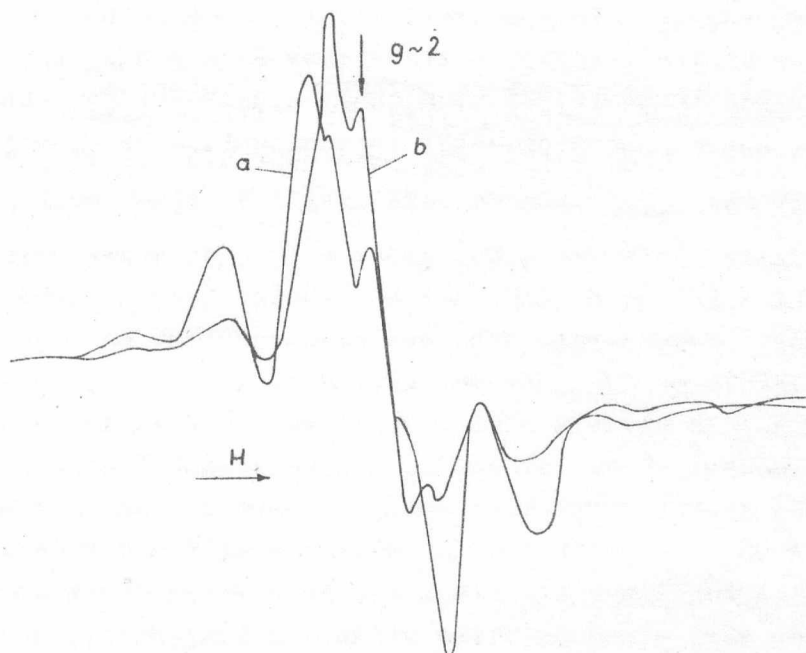
A besugárzott mintákat látható fényel megvilágítva a kék szín és a  $CS_2^-$  jele eltűnik, míg a  $C_5H_{11}$  változatlan marad /4. ábra/. A szolvatált elektron sorsa a fent említett ok miatt nehezen követhető. A megvilágított mintákat enyhén megmelegítve - vagy akár cseppfolyós nitrogénben tartva hosszabb ideig - a  $CS_2^-$  jele ismét megjelenik /5. ábra/, a kék szín azonban nem. A  $CS_2^-$  gyökionnak a fény-melegítés hatására lejátszódó reverzibilis reakciója többször megismételhető. Hasonló eredményre jutunk, ha a  $C_5H_{11}$  gyököt mérsékelt melegítéssel eltüntetjük, és ezután világítjuk meg a mintát.



4. ábra

A megvilágítás hatása.

a - besugárzott minta; b - megvilágított minta.



5. ábra

A megvilágítás után alkalmazott melegítés hatása.  
a - a megvilágított minta, b - megvilágítás után  
mérsékeltlen melegített minta.

#### A kísérleti eredmények értékelése

A  $\text{CS}_2$ -3-MP üvegekben besugárzás hatására keletkező  $\text{CH}_3\text{-CH}_2\text{-}\dot{\text{C}}\text{H-CH}_2\text{-CH}_3$  gyök feltehetően a Hamill [5] által ismerttetett mechanizmus szerint keletkezik. Az észlelt kék szín a  $\text{CS}_2$  molekulák jelenlétével szoros összefüggésben kell hogy legyen, mert a  $\text{CS}_2$  koncentráció növekedésével a kék szín intenzitása nő. Véleményünk szerint a  $\text{CS}_2$  jelenléte módosítja a 3-MP üvegben jelenlévő csapdákat /a besugárzott tiszta 3-MP sárga színű/, és az elektronok ezekben a csapdáknak fogódnak be. A minták állása során - vagy enyhe melegítésre - a csapdáknak található elektronok lokalizálódnak a  $\text{CS}_2$  molekulákon,  $\text{CS}_2^-$  gyökionokat alkotva. A  $\text{CS}_2$  Hart és munkatársai [6] mérései alapján könnyen és készségesen lép reakcióba a hidratált elektronnal, és feltételezhetjük, hogy a csapdába ejtett elektron részére is jó akceptor.

Az irodalomból ismeretesek olyan adatok, melyek értelmében a  $\text{CS}_2$  hajlamos asszociációra mind tiszta állapotban, mind biner elegyekben [7], az asszociáció energiája 1,7 kcal/mol. Továbbá ismeretes, hogy a  $\text{CS}_2^-$  gyökkel izoelektromos  $\text{CO}_2^-$  és  $\text{NO}_2^-$  gyökök erősen asszociálnak: a  $\text{NO}_2^-$  reverzibilisen, a  $\text{CO}_2^-$  irreverzibilisen, szobahőmérsékleten /a  $\text{C}_2\text{O}_4^{2-}$ -ion igen stabil/

[8] . Habár a  $CS_2^-$  kémiai tulajdonságait ebből a szempontból nem tanulmányozták, a szervetlen kémiából ismert a tiooxálsav és a  $/CS_2/n$  polimer is [9] . A fentiek értelmében tehát feltehetjük, hogy a  $CS_2$ -3-MP üvegekben nem egyes  $CS_2$  molekulákat, hanem asszociátumokat találhatunk, azaz eloszlásuk nem egyenletes.

Megvilágítás hatására a  $CS_2^-$  gyökion jele és a kék szín eltűnik. Véleményünk szerint a kék szín eltűnését az okozza, hogy a csapdákból lazán kötött elektronok a fényenergia hatására kiszabadulnak és a jó elektron-akceptor  $CS_2$  molekulákon  $CS_2^-$  gyököket képeznek. Az a tény, hogy ennek ellenére a  $CS_2^-$  gyökök jele eltűnik, a  $CS_2$  fent tárgyalt tulajdonságával magyarázható. Ti. az egymáshoz közel található, asszociátumokat alkotó  $CS_2$  molekulákon kialakuló  $CS_2^-$  gyökök párnélküli spinjei kompenzálják egymást, ezért nem kimutathatóak. A  $CS_2$  molekulák elmozdulását a mátrix megakadályozza, a stabil dimer vegyület tehát nem alakulhat ki. Ha a rendszerrel energiát közlünk - enyhe melegítés vagy hosszabb állás útján - a kompenzáció megszűnik, a  $CS_2^-$  jele ismét láthatóvá válik.

Meg kell említenünk, hogy a fény-melegítés hatására lejátszódó hasonló reakciókat Moorthy és Weiss [10] , valamint Williams és munkatársai [11] is észlelték. Ezekben a rendszerekben a reakciókat az illető mátrix tulajdonságaival magyarázták. Véleményünk szerint az általunk vizsgált  $CS_2$ -3-MP rendszerben ez a magyarázat nem helytálló.

A szerző köszönetét fejezi ki Gécs Máriának és Kósa Somogyi Istvánnak, akik hasznos észrevételeikkel munkáját segítették.

#### I r o d a l o m

- [1] Janssen, O., Henglein, A., Perner, D.: Z.Naturforschg., 19b, 1005 /1964/
- [2] Norman, I., Porter, G.: Proc.Roy.Soc. /London/, A230, 399 /1955/
- [3] Bennett, J.E., Mile, B., Thomas, A.: Trans.Faraday Soc., 63, 262 /1966/
- [4] Gallivan, J.B., Hamill, W.H.: J.Chem.Phys., 44, 1279, 2891 /1966/  
Skelly, D.W., Hamill, W.H.: J.Phys.Chem. 70, 1630 /1966/
- [5] Kenji Fueki, Zen'ichiro Kuri: J.Am.Chem.Soc., 87, 923 /1965/  
Kozo Tsuji, Hiroshi Yoshida, Koichiro Hayashi: J.Chem.Phys., 46,  
810 /1967/
- [6] Hart, E.J.; Gordon. Sh., Thomas, J.K.: J.Phys.Chem., 68, 1371 /1964/
- [7] Ulbrich, R.: Z.Naturforschg. 19b, 978 /1964/
- [8] Atkins, P.W., Symons, M.C.R.: The Structure of Inorganic Radicals,  
Elsevir, 1967

- [ 9] Mellor, J.W.: A Comprehensive Treatise on Inorganic and Theoretical Chemistry, Vol. VI. §42, Longmans, London-New York, 1924.
- [10] Moorthy, P.N., Weiss, J.J.: Nature, 204, 776 /1964/
- [11] Bonin, M.A., Kozo Tsuji, Williams Ff.: Nature, 218, 946 /1968/

Érkezett: 1969. jan. 20.

KFKI Közl., 17.évf. 2. szám, 1969.





