ALKALMAZOTT MATEMATIKAI LAPOK

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

30. kötet

Szerkesztőség és kiadóhivatal: 1055 Budapest, Falk Miksa u. 12.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, és olyan eredeti tudományos cikkeket publikál, amelyek a gyakorlatban, vagy más tudományokban közvetlenül felhasználható új matematikai eredményt tartalmaznak, illetve már ismert, de színvonalas matematikai apparátus újszerű és jelentős alkalmazását mutatják be. A folyóirat közöl cikk formájában megírt, új tudományos eredménynek számító programokat, és olyan, külföldi folyóiratban már publikált dolgozatokat, amelyek magyar nyelven történő megjelentetése elősegítheti az elért eredmények minél előbbi, széles körű hazai felhasználását. A szerkesztőbizottság bizonyos időnként lehetővé kívánja tenni, hogy a legjobb cikkek nemzetközi folyóiratok különszámaként angol nyelven is megjelenhessenek.

A folyóirat feladata a Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai) Osztályának munkájára vonatkozó közlemények, könyvismertetések stb. publikálása is.

A kéziratok a főszerkesztőhöz, vagy a szerkesztőbizottság bármely tagjához beküldhetők. A főszerkesztő címe:

Páles Zsolt, főszerkesztő
1055 Budapest, Falk Miksa u. 12.
A folyóirat e-mail címe: `aml@math.elte.hu`

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért felelősséget nem vállal.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok előfizetési ára évfolyamonként 1200 forint. Megrendelések a szerkesztőség címén lehetségesek.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica,
2. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok megjelenését támogatja
a Magyar Tudományos Akadémia Könyv- és Folyóiratkiadó Bizottsága.

A kiadásért felelős a BJMT főtitkára
Szedte és tördelte Éliás Mariann

Nyomta a Nagy és Társa Kft., Budapest
Felelős vezető: Fódi Gábor

Budapest, 2013
Megjelent 18 (A/5) ív terjedelemben
250 példányban
HU ISSN 0133-3399

ÚTMUTATÁS A SZERZŐKNEK

Az Alkalmazott Matematikai Lapok csak magyar nyelvű dolgozatokat közöl. A közlésre szánt dolgozatokat e-mailen az `aml@math.elte.hu` címre kérjük elküldeni az ábrákat tartalmazó fájlokkal együtt. Előnyben részesülnek a LaTeX-ben elkészített dolgozatok.

A kéziratok szerkezeti felépítésének a következő követelményeket kell kielégíteni:

Fejléc: A fejlécnek tartalmaznia kell a dolgozat címét és a szerző teljes nevét.

Kivonat: A fejléc után egy, képletet nem tartalmazó, legfeljebb 200 szóból álló kivonatot kell minden esetben megadni.

Fejezetek: A dolgozatot címmel ellátott szakaszokra kell bontani, és az egyes szakaszokat arab sorszámozással kell ellátni. Az esetleges bevezetésnek mindig az első szakaszt kell megnevezni.

A dolgozatban előforduló képleteket a dolgozat szakaszokra bontásától független, folytatólagos arab sorszámozással kell azonosítani. Természetesen nem szükséges minden képletet számozással ellátni, csak azokat, amelyekre a szerző a dolgozatban hivatkozni kíván.

Mind az ábrákat, mind a lábjegyzeteket szintén folytatólagos arab sorszámozással kell ellátni. Az ábrák elhelyezését a dolgozat megfelelő helyén ábraazonosító sorszámokkal kell megadni. A lábjegyzetekre a dolgozaton belül az azonosító sorszám felső indexkénti használatával lehet hivatkozni.

Az esetleges definíciókat és tételeket (segédtételeket és lemmákat) szakaszonként újrakezdődő, ponttal elválasztott, kettős számozással kell ellátni. Kérjük a szerzőket, hogy ezeket, valamint a tételek bizonyítását a szövegben kellő módon emeljék ki.

Irodalomjegyzék: A dolgozatok szövegében az irodalmi hivatkozás számait szögletes zárójelben kell megadni, mint például [2] vagy [1, 7–13].

Az irodalmi hivatkozások formája a következő: Minden hivatkozást fel kell sorolni a dolgozat végén található irodalomjegyzékben, a szerzők, illetve a társszerzők esetén az első szerző neve szerint alfabetikus sorrendben úgy, hogy a cirill betűs szerzők nevét a Mathematical Reviews átírási szabályai szerint latin betűsre kell átírni. A folyóiratban megjelent cikkekre [1], a könyvekre [2] a következő minta szerint kell hivatkozni:

[1] Farkas, J.: *Über die Theorie der einfachen Ungleichungen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **124**, (1902) 1–27.

[2] Zoutendijk, G.: *Methods of Feasible Directions*, Elsevier Publishing Company, Amsterdam and New York (1960), 120 o.

Szerző adatai: Az irodalomjegyzék után, a kézirat befejezéseképpen fel kell tüntetni a szerző teljes nevét és a munkahelye (esetleg lakása) pontos címét, illetve e-mail címét.

Idegen nyelvű kivonat: Minden dolgozathoz csatolni kell egy angol nyelvű összefoglalót.

A szerzők a dolgozatukról 20 darab ingyenes különlenyomatot kapnak. A dolgozatok után szerzői díjat az Alkalmazott Matematikai Lapok nem fizet.

TARTALOMJEGYZÉK

INDEX

Alkalmazott Matematikai Lapok **30** (2013), 1-21.

A KVADRATIKUS SZIMPLEX ALGORITMUS VÉGESSÉGE INDEXVÁLASZTÁSI SZABÁLYOK ALKALMAZÁSA ESETÉN

ILLÉS TIBOR, NAGY ADRIENN

Dolgozatunkban bebizonyítjuk a kvadratikus primál szimplex módszer végességét, a lineáris feltételes, konvex kvadratikus optimalizálási feladatra, ciklizálás elleni indexválasztási szabályok alkalmazásával. Az eredeti kvadratikus primál szimplex módszert Wolfe, illetve van de Panne és Whinston dolgozták ki, és több cikkben publikálták az 1960-as években. Az említett szerzők, a kvadratikus primál szimplex módszer végességét az ún. perturbációs eljárásra alapozva igazolták.

Megmutatjuk, hogy a kvadratikus szimplex módszer ciklizálásához szükséges, hogy a feladat degenerált legyen (degenerált feladat olyan, amelyben minden bázisbeli, a hányadosteszt részét képező primál változó értéke nulla), továbbá a feladathoz tartozó Karush–Kuhn–Tucker-rendszerben a transzformált oszlopokban a kvadratikus célfüggvénynek megfelelő komponensek nullák.

Gondolatmenetünkből következik, hogy a kvadratikus primál szimplex módszer véges mindazon indexválasztási szabályok esetén, melyek kizárólag a transzformált jobboldal és redukált költségek előjelére hagyatkoznak, és melyek alkalmazása esetén a lineáris programozási feladatra kidolgozott, hagyományos primál szimplex algoritmus véges.

1. Bevezető

Az 1950-es évek kezdetétől, többször az érdeklődés középpontjába került, a következő *lineáris feltételes, kvadratikus optimalizálási feladat (LKOF)*

$$\min \frac{1}{2}\mathbf{x}^T Q\mathbf{x} + \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$
$$A\mathbf{x} \le \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \ge \mathbf{0},$$

ahol $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrixok, illetve $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ és $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ vektorok, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ az ismeretlenek vektora. A *megenegedett megoldások halmaza*

$$\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} \le \mathbf{b},\ \mathbf{x} \ge \mathbf{0}\} \subset \mathbb{R}^n$$

egy konvex poliéder, és a célfüggvény $f : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ kvadratikus függvény, amelyet

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\,\mathbf{x}^T Q\mathbf{x} + \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

alakban adunk meg. Valamely $\mathbf{x}^* \in \mathcal{P}$ megengedett megoldást *optimális* megoldásnak nevezünk, ha

$$f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x}) \quad \text{teljesül, bármely } \ \mathbf{x} \in \mathcal{P}$$

esetén. Most már bevezethetjük az *optimális megoldások halmaz*át az alábbi formában:

$$\mathcal{P}^* = \{\mathbf{x}^* \in \mathcal{P} : f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x}) \quad \text{teljesül, bármely } \ \mathbf{x} \in \mathcal{P}\}.$$

A kutatások homlokterébe már az 1960-as években, a lineáris feltételes, kvadratikus optimalizálási feladat (hatékony) megoldhatóságának, illetve alkalmazási területének a vizsgálata került. A jól megoldható részosztályok beazonosítása és leírása gyorsan megtörtént, hiszen, ha Q pozitív szemidefinit mátrix, akkor a fenti feladat konvex programozási feladat.

A lineáris feltételes, kvadratikus optimalizálási feladat megoldására már az 1950-es évek végén, az 1960-as évek elején általánosították a szimplex módszert. A hagyományos kvadratikus szimplex algoritmus témakörében számos publikáció jelent meg [28, 29, 30, 31, 36][1].

A lineáris feltételes, kvadratikus optimalizálási feladatokból kiindulva könnyen felírhatók az ún. *általános lineáris komplementaritási feladatok*, amelyek igen széles alkalmazási területtel rendelkeznek, ezért a kezdetektől népszerűek voltak a kutatók körében. Lineáris komplementaritási feladatok megoldására is pivot algoritmusokat dolgoztak ki először. Ezek közül a legismertebb a *Lemke-* [26] és a *criss–cross algoritmus* [21]. Terlaky algoritmusa [32] nem igényli a pivot tábla megnagyobbítását.

A lineáris komplementaritási feladatok megoldhatóságának kérdése összefügg a feladat mátrixának tulajdonságával. Az egyik érdekes kutatási irány a lineáris komplementaritási feladatok esetén az volt, hogy a criss–cross algoritmus általánosításának segítségével milyen tulajdonsággal kell, hogy rendelkezzen a feladat mátrixa annak érdekében, hogy a feladat véges lépésben megoldható legyen. Ezen a területen az első eredményeket, az ún. *biszimmetrikus mátrix*okkal adott lineáris komplementaritási feladatok esetén érték el a kutatók, igazolva, hogy a criss-cross algoritmus megfelelő variánsa, ciklizálás ellenes indexválasztási szabályok alkalmazásával, véges [1, 21, 34].

Az igazi elméleti kérdés az volt, hogy milyen tulajdonságokkal kell rendelkeznie a mátrixnak ahhoz, hogy a lineáris komplementaritási feladat a konvex optimalizálási feladatok közé tartozzon és a pivot algoritmusok véges sok lépésben

[1] Ezeknek közös jellemzője, hogy az algoritmus végességének a bizonyítására az ún. *perturbációs módszer*t alkalmazzák.

megoldják a feladatot. Mint később kiderült, a Cottle és társszerzői [4] által bevezetett *elégséges mátrix*ok osztálya biztosítja ezt [12]. Természetes módon merült fel az a kérdés, hogy mi történik, ha a lineáris komplementaritási feladat mátrixának tulajdonságairól nincsen információnk. Erre az esetre dolgoztak ki Fukuda és társszerzői egy olyan minimál indexes criss-cross algoritmus változatot [10], amelyik elégséges mátrixok esetén ugyanúgy működik, mint a korábbi változat [12], míg nem elégséges mátrixok esetén vagy véges sok lépésben megoldja a feladatot, vagy bizonyítékot szolgáltat arra, hogy a mátrix nem elégséges mátrix. Csizmadia és Illés [6] megmutatták, hogy az ismert ciklizálás ellenes index választási szabályok mindegyike alkalmas arra, hogy a criss-cross algoritmus végességét biztosítsák, általános lineáris komplementaritási feladat megoldásakor, a Fukudaék által bevezetett értelemben. A közelmúltban Csizmadia és társszerzői egy egész, új ciklizálás ellenes index választási szabály osztályt definiáltak, az ún. s-monoton index választási szabályokat, és ezekre igazolták, hogy a legáltalánosabb criss-cross algoritmus is véges az összes s-monoton index választási szabály alkalmazása mellett [9]. A lineáris komplementaritási feladat és a criss-cross algoritmus kapcsolatáról szóló érdekes eredmények nagyrészét jól foglalja össze Csizmadia doktori (PhD) disszertációja [7].

Annak ellenére, hogy a jelen dolgozatnak nem tárgya a lineáris feltételes, kvadratikus optimalizálási feladat speciális osztályaira kifejlesztett belsőpontos megoldási módszerek tárgyalása, mégis úgy gondoljuk, hogy a teljesség igénye nélkül néhány érdekesebb belsőpontos algoritmust megemlítenénk. A belsőpontos módszerek 1980-as évek második felében való megjelenése óta időről-időre fellángol az a vita, hogy milyen szempontok szerint célszerű, egy-egy feladatosztály esetén, a pivot- és belsőpontos algoritmusokat összehasonlítani. Lineáris programozási feladatokra a több szempont szerinti összehasonlítást Illés és Terlaky [15] végezték el. Hasonló összefoglaló cikk, lineáris feltételes, kvadratikus optimalizálási feladatok megoldó algoritmusairól – legjobb tudomásunk szerint – még nem készült.

A belsőpontos módszerek között eléggé elterjedtek a primál-duál típusú algoritmusok. Primál-duál belsőpontos módszerekkel a lineáris feltételes, kvadratikus optimalizálási feladatok megoldását, az optimalitási feltételekből – általános lineáris komplementaritási feladatokból – nyerhető centrális út feladat sorozat iteratív megoldásával állítják elő. A centrális út feladatok, iterációról-iterációra, egyre kisebb centralitási paraméterhez tartoznak. A primál-duál belsőpontos módszerek megállási kritériuma az, hogy a dualitás rés egy előre megadott $\varepsilon > 0$ paraméter alá kerül. Ekkor azt mondjuk, hogy a belsőpontos algoritmus egy *ε-optimális* megoldást állított elő.

A centrális út létezése és egyértelműsége [25] alapvetően fontos a primál-duál belsőpontos algoritmusok működése szempontjából. Az operációkutatók egy jelentős részében él az a tévhit, hogy a belsőpontos algoritmusokkal nem lehet pontos megoldást előállítani. Ezt a tévhitet cáfolta meg elégséges lineáris komplementaritási feladatok esetén Illés és társszerzőinek a cikke [14].

A pivot algoritmusokkal összehasonlítva a primál-duál belsőpontos algoritmusokat, az az elvárásunk, hogy a legfontosabb mátrix osztályok (pozitív szemidefinit, illetve elégséges mátrixok) esetén a racionális mátrixokkal és vektorokkal adott lineáris komplementaritási feladatokat elméletileg hatékonyan oldják meg, azaz az algoritmus iterációinak számára polinomiális iterációszám korlát létezzen.

A pozitív szemidefinit mátrixszal adott lineáris feltételes, kvadratikus optimalizálási feladatból származtatott lineáris komplementaritási feladat megoldására Kojima és társszerzői, egy korábbi lineáris programozási feladatra megfogalmazott, kis lépéses, primál-duál belsőpontos algoritmusuk [23] általánosításával adtak meg olyan belsőpontos algoritmust, amelyre polinomiális iterációszám korlátot igazoltak [24]. A biszimmetrikus mátrixszal megfogalmazott lineáris komplementaritási feladat esetén, Kojimaék primál-duál belsőpontos algoritmusának a polinomiális iterációszámát, egy – a célfüggvényben szereplő mátrix pozitív szemidefinit tulajdonságából származtatott – egyenlőtlenség segítségével igazolták. Természetesen merült fel a kérdés, hogy milyen tulajdonságú mátrixok esetén lehet hasonló, a komplexitás bizonyítás szempontjából használható egyenlőtlenséget levezetni. Kojima és társszerzői [25] a P*(κ)-mátrixok osztályának bevezetésével adták meg a választ erre a kérdésre, ahol $\kappa \geq 0$ valós, meghatározott paraméter. A P*(κ)-mátrixok a pozitív szemidefinit mátrixok egy lehetséges általánosításai, amelyek rendelkeznek még azzal a fontos tulajdonsággal is, hogy a lineáris komplementaritási feladathoz tartozó centrális út feladatnak létezik egyértelmű megoldása bármely $\mu > 0$ centralitási paraméter esetén.

A P*(κ)-mátrixok és az elégséges mátrixok kapcsolatát teremti meg a P*-mátrixok osztályának definiálása, amely a P*(κ)-mátrixosztályok uniója, amikor a κ paraméter befutja a nemnegatív valós számok halmazát. Väliaho megmutatta, hogy a P*-mátrixok, elégséges mátrixok [35]. A másik irányú tartalmazás igazolása Cottle és Guu [11, 5], illetve Kojima és társszerzői [25] eredménye.

Az elégséges mátrixokkal adott lineáris komplementaritási feladatok témakörében még napjainkban is jelennek meg új belsőpontos algoritmusok, illetve régi algoritmusok új elemzései. Ezek közül mi két cikkre [13, 16] hívnánk fel a figyelmet, amelyek szerepet játszottak a lineáris komplementaritási feladatok megoldhatóságának kiterjesztésében. Az egyik érdekes kérdés az volt, hogy Fukudáék [10] eredményéhez hasonlóan, készíthető-e olyan belsőpontos algoritmus, amelyik elégséges mátrixok esetén ugyanúgy működik, mint a korábbi belsőpontos algoritmusok [13, 16], míg nem elégséges mátrixok esetén *polinomiális lépésben* megoldja a feladatot, vagy bizonyítékot szolgáltat arra, hogy a mátrix nem elégséges mátrix [18, 17]. Az ilyen típusú algoritmusok első, részletes és kimerítő tárgyalását Nagy Marianna adja meg doktori (PhD) disszertációjában [27].

Visszatérve a lineáris feltételes, kvadratikus optimalizálási feladatok pivot algoritmusokkal való megoldásának kérdésére, elmondhatjuk, hogy a későbbiekben megjelent pivotálási algoritmusok jellemzően (általános) lineáris komplementaritási feladatok megoldására felírt algoritmusok voltak.

Dolgozatunkban megmutatjuk, hogy a hagyományos, lineáris feltételes, kvadratikus programozási feladat, lineáris komplementaritási feladatára felírt kvadratikus primál szimplex algoritmus is véges, azon hagyományos, ciklizálás ellenes indexválasztási szabályok alkalmazása esetén, melyek kizárólag a redukált költségek és duál változók előjelén, illetve a változók indexein alapulnak. Azaz a lineáris feltételes, kvadratikus programozási feladat megoldására általánosított primál szimplex algoritmus végességének bizonyításhoz nincsen szükség a perturbációs eljárás használatára.

A ciklizálás ellenes indexválasztási szabályok a minimál index, a last-in-first-out, és a leggyakrabban választott változó elvét használó szabályok. A criss-cross algoritmus esetén lineáris feltételes, kvadratikus programozási feladatra, az algoritmus végességét a felsorolt indexválasztási szabályok használata mellett Illés és társszerzői igazolták [1]. A témakörben, pivot algoritmusok végességével kapcsolatban az eddigi legáltalánosabb eredményeket Csizmadia és társszerzői publikálták [9] az ún. **s**-*monoton szabály*ok esetében.

1.1. Jelölések

Cikkünkben a mátrixokat dőlt nagy betűkkel, a vektorokat vastag betűkkel jelöljük. A skalárok normál kisbetűk, az index halmazok pedig kaligrafikus nagybetűk. Egy mátrix oszlopát alsóindexszel, míg a sorokat felsőindexszel jelöljük a továbbiakban. Jelölje $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a lineáris feltételes, kvadratikus optimalizálási feladat mátrixszát, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ a jobboldalt; az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy $rank(A) = m$. A célfüggvény lineáris részét $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, a kvadratikus részét $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jelöli. A lineáris feltételes, kvadratikus programozáshoz tartozó, lineáris komplementaritási feladat mátrixát $M \in \mathbb{R}^{K\times K}$ jelöli, ahol $K = n + m$. A következő részben bevezetett lineáris komplementáritási feladat jobboldal vektorát $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n+m}$ jelöli.

Legyen $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, 2K\}$ a változók indexhalmazai, és $\mathcal{I}_B$ jelölje a bázis indexhalmazait. $\mathcal{I}_B = \mathcal{I}_B^p \cup \mathcal{I}_B^d$, ahol $\mathcal{I}_B^p$ a primál bázis változók indexhalmaza, míg $\mathcal{I}_B^d$ a duál bázis változók indexhalmaza. Hasonlóan megadható az $\mathcal{I}$ és $\mathcal{I}_N$ indexhalmazok felbontása is, azaz $\mathcal{I} = \mathcal{I}^p \cup \mathcal{I}^d$ és $\mathcal{I}_N = \mathcal{I}_N^p \cup \mathcal{I}_N^d$.

Egy B bázishoz tartozó rövid pivot táblát $T := B^{-1}N$ jelöli, ahol $N \in \mathbb{R}^{K\times K}$ a $[-M, I] \in \mathbb{R}^{K\times 2K}$ a mátrix nem bázis részmátrixa. A transzformált jobboldalt pedig $\overline{\mathbf{q}} := B^{-1}\mathbf{q}$ képlettel számolhatjuk ki. Az egyes együtthatók a rövid pivot táblában legyenek a t_{ij}-együtthatókkal jelölve.

1.2. A lineáris feltételes kvadratikus programozási feladat

Ha Q pozitív szemidefinit mátrix, akkor az (LKOF) konvex programozási feladat [22].

A feladathoz rendelt Lagrange-függvény [22] a következő:

$$
\begin{aligned}
&L : \mathbb{R}_{\oplus}^{m+n} \to \mathbb{R} \\
&L(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = f(x) + \mathbf{y}^T(A\mathbf{x} - \mathbf{b}) - \mathbf{z}^T\mathbf{x} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

A konvex Karush–Kuhn–Tucker-tételt alkalmazva $\mathbf{x}^*$ akkor és csak akkor primál optimális megoldás, ha $\exists \mathbf{y}^* \in \mathbb{R}_{\oplus}^m, \mathbf{z}^* \in \mathbb{R}_{\oplus}^n$ úgy, hogy $(\mathbf{y}^*, \mathbf{z}^*) \neq \mathbf{0}$ és $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \mathbf{z}^*)$ kielégíti a

$$
\begin{aligned}
Q\mathbf{x} + c + A^T\mathbf{y} - \mathbf{z} &= \mathbf{0} && (2)\\
A\mathbf{x} - \mathbf{b} &\leq \mathbf{0} && (3)\\
\mathbf{y}^T(A\mathbf{x} - \mathbf{b}) &= \mathbf{0} && (4)\\
\mathbf{z}^T\mathbf{x} &= 0 && (5)\\
\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} &\geq \mathbf{0} && (6)
\end{aligned}
$$

rendszert.

Bevezetve az $\mathbf{s} \in \mathbb{R}_{\oplus}^m$ változót, a fenti rendszer a konvex (LKOF) optimalitási kritériumait adja meg:

$$
\begin{aligned}
-Q\mathbf{x} - A^T\mathbf{y} + \mathbf{z} &= \mathbf{c} && (7)\\
A\mathbf{x} + \mathbf{s} &= \mathbf{b} && (8)\\
\mathbf{y}^T\mathbf{s} &= 0 && (9)\\
\mathbf{z}^T\mathbf{x} &= 0 && (10)\\
\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{y}, \mathbf{z} &\geq \mathbf{0} && (11)
\end{aligned}
$$

Ugyanez mártix alakban kifejezve, a biszimmetrikus, lineáris komplementaritási feladatra ($BLCP$) vezet:

$$
\begin{pmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -A & 0 \\ Q & A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} \qquad (12)
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{y}^T\mathbf{s} &= 0 && (13)\\
\mathbf{z}^T\mathbf{x} &= 0 && (14)\\
\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{y}, \mathbf{z} &\geq 0 && (15)
\end{aligned}
$$

A lineáris feltételes, konvex kvadratikus programozási feladat tehát ekvivalens a következő lineáris komplementaritási feladattal: keressünk olyan vektorokat, amelyek kielégítik a

$$
\begin{aligned}
-M\mathbf{u} + \mathbf{v} &= \mathbf{q} && (16)\\
\mathbf{u}^T\mathbf{v} &= 0 && (17)\\
\mathbf{u}, \mathbf{v} &\geq 0 && (18)
\end{aligned}
$$

rendszert, ahol

$$M = \begin{pmatrix} Q & A^T \\ -A & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix}, \quad \text{illetve} \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}.$$

Valamint (18) miatt (17) nyilvánvalóan $v_j u_j = 0$, (j = 1,...,m+n). Az M mátrix definíciójában az egyszerűbb felírási forma kedvéért a sorokat az eredeti felíráshoz képest felcseréltük.

A lineáris feltételes konvex kvadratikus programozási feladatból származó lineáris komplementaritási feladat mátrixát biszimmetrikus mátrixnak nevezzük, melynek számos hasznos tulajdonsága ismert [33].

A lineáris feltételes konvex kvadratikus programozási feladat gyenge és erős dualitás tételeiről, optimalitási kritériumáról, megoldási módszereiről a de Klerk és szerzőtársai által írt jegyzetben [22] olvashatunk.

1.3. A kvadratikus primál szimplex algorimus

Dolgozatunkban a Wolfe-féle kvadratikus primál szimplex algoritmust [36] vizsgáljuk, melynek egy jó összefoglalását találjuk a [30] dolgozatban is.

A $[-M, I]$ mátrix bármely reguláris $K \times K$ részmátrixát *bázisnak* nevezzük. A lineáris komplementaritási (16)-(18) feladat egy bázisát *komplementáris*nak nevezzük, ha teljesülnek a komplementaritási feltételek, azaz $\mathbf{xz} = \mathbf{0}$ és $\mathbf{sy} = \mathbf{0}$. Az új változókkal $\mathbf{uv} = \mathbf{0}$ alakban is kifejezhetjük a komplementaritást.

A kvadratikus primál szimplex algoritmus egy komplementáris, primál megengedett bázisból indul. Ilyen bázis előállítható az eredeti primál megengedettségi feladat egy megengedett bázisát kiegészítve a lineáris komplementáris feladat bázisává a duál feltételek eltérésváltozóinak, a $\mathbf{z}$ vektornak bázishoz vételével. Az eredeti primál megengedettségi feladat egy megengedett bázisát előállíthatjuk az MBU-szimplex algoritmus, illetve a criss-cross algoritmus megfelelő variánsainak felhasználásával is [2, 7, 21].

1.1. Definíció. Legyen adott egy $(BLCP)$ feladat. A lineáris komplementaritási feladat egy bázisát *majdnem komplementáris*nak nevezzük, ha egyetlen indexpár kivételével teljesülnek a komplementaritási feltételek, vagyis létezik olyan $i \in \{1 \dots 2n\}$, hogy $u_j v_j = 0$ minden $j \in \{1 \dots 2n\} - \{i\}$ esetén.

Két komplementáris bázis között a kvadratikus primál szimplex algoritmus tetszőleges számú majdnem komplementáris bázist generálhat.

1.2. Definíció. Legyen adott egy $(BLCP)$ feladat. A kvadratikus primál szimplex algorimus által végzett, két komplementáris bázis közötti majdnem komplementáris báziscserék sorozatát *huroknak* fogjuk nevezni.

A kvadratikus primál szimplex algoritmus egy ciklusa egy tetszőleges primál megengedett, komplementáris bázissal indul. Egy ilyen bázis esetén, ha minden duál változó is megengedett, úgy az algoritmus a Karush–Kuhn–Tucker-tétel értelmében megtalálta az eredeti feladat egy optimális megoldását. Amennyiben létezik nem megengedett duál változó, úgy a kvadratikus primál szimplex algorimtus választ egy tetszőleges nem megengedett, duál bázis változót. A kvadratikus primál szimplex algoritmus végességét ciklizálás ellenes indexválasztási szabályokkal biztosítjuk.

1.3. Definíció. A kvadratikus primál szimpex algoritmus során a komplementáris táblán választott duál változót *duál vezérváltozó*nak, vagy egyszerűen *vezérváltozó*nak nevezzük.

A duál vezérváltozó kiválasztása után az algoritmus egy hurok során addig végez báziscseréket, míg a választott duál változó ki nem kerül a bázisból, vagy az algoritmus egy végtelen javító irányt nem talál.

A duál vezérváltozó választása után – tehát komplementáris bázisból indulva – a belépő változó a vezérváltozó primál párja. Ezen változó egy javító irányt határoz meg [29]. A primál megengedettség fenntartása érdekében az algoritmus a transzformált oszlopon a primál bázis változókon hányadostesztet végez,

$$\theta_2 = min\left\{\frac{\bar{q}_s}{t_{sj}} | s \in \mathcal{I}_B,\ s \text{ primál változó melyre } t_{sj} > 0\right\}. \tag{19}$$

Ez az az érték, amellyel a választott primál változót növelni lehet, mielőtt a lépés egy korlátozó feltételbe ütközne.

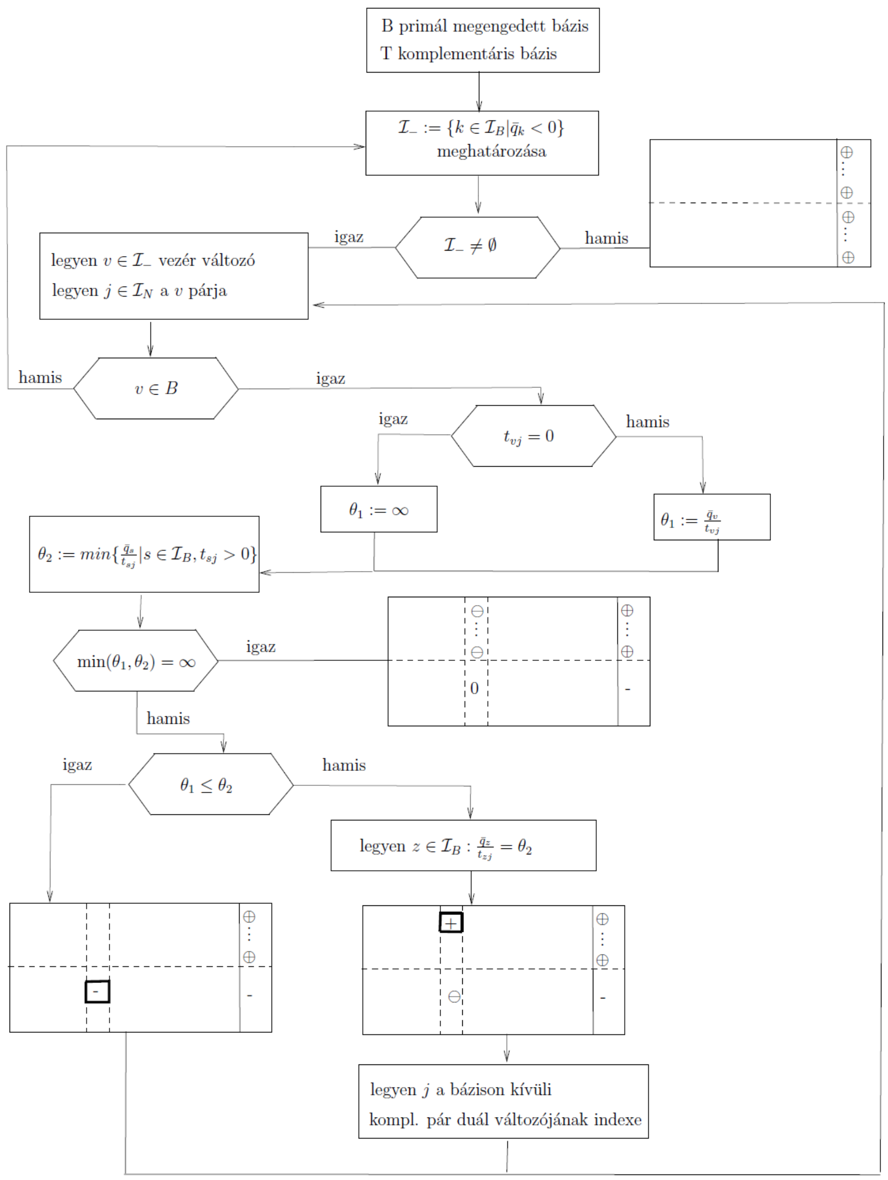
Az algoritmus kiszámít egy θ_1 hányadost is, ami a hányadosteszt értéke a vezérváltozó sorában, $\theta_1 := \frac{\bar{q}_v}{t_{vj}}$; illetve $\theta_1 = \infty$ akkor, ha a vezérváltozó és a hozzá tartozó primál változó találkozásánál nulla szerepel. A θ_1 érték képviseli azt a lépéshosszt, ahol a kvadratikus célfüggvény előjelet vált a belépő változó növelése során.

Abban az esetben, ha $\theta_1 = \theta_2 = +\infty$, akkor a feladat nem korlátos [29].

Amennyiben $\theta_1 \leq \theta_2$, úgy az algoritmus a duál vezérváltozó sorában végez báziscserét, a bázisban levő primál változók száma eggyel növekszik, az új bázis továbbra is megengedett, így az algoritmus egy 1 hosszú hurokkal lezárja a ciklust, a célfüggvény javul.

Amennyiben $\theta_2 < \theta_1$ úgy az algoritmus a primál hányadosteszt által minimálisnak talált hányados sorában végez báziscserét. Ha a hányadosteszt nem jelöli ki egyértelműen a pivot pozíciót, akkor alkalmazzunk ciklizálás ellenes indexválasztási szabályt. Az így keletkezett bázis majdnem komplementáris.

Egy majdnem megengedett bázis esetén az algoritmus bejövő változónak a bázison kívül levő nem komplementáris pár *duál* változóját választja, majd ugyanazon módon választ sort, mint a komplementáris bázis esetén: a primál részen végzett hányadostesztet hasonlítja a vezérváltozó sorának hányadosteszt értékével. Amennyiben a báziscsere a vezérváltozó sorában végezhető, úgy a kapott bázis ismét komplementáris lesz, és a hurok lezárul [29].



1. ábra. Az algoritmus folyamatábrája.

A $(BLCP)$ feladatra megfogalmazott kvadratikus, primál szimplex algoritmus folyamatábrája az 1. ábrán, míg pszeudókódja a 1.1. ábrán található.

1.1. Algoritmus. Az algoritmus pszeudókódja.

bemenő adatok:
A B primál megengedett bázishoz tartozó T komplementáris bázis

begin
$\mathcal{I}_- := \{k \in \mathcal{I}_B^d | \bar{q}_k < 0\}$ a negatív duál változók indexe a bázisban;
while $(\mathcal{I}_- \neq \emptyset)$ **do**
  legyen $v \in \mathcal{I}_-$ tetszőleges vezérváltozó;
  legyen $j \in \mathcal{I}_N^p$ a v komplementáris párja (primál, bázison kívüli);
  while (v a bázisban van) **do**
    if $(t_{vj} = 0)$
      then $\theta_1 := \infty$
      else $\theta_1 := \frac{\bar{q}_v}{t_{vj}}$
    endif
    $\theta_2 := min\{\frac{\bar{q}_s}{t_{sj}} | s \in \mathcal{I}_B^p$, s primál változó melyre $t_{sj} > 0\}$
    if $(\min(\theta_1, \theta_2) = \infty)$ **then** STOP: nem korlátos feladat **endif**
    if $(\theta_1 \leq \theta_2)$
    then pivotálás a t_{vj} elemen
    else
      legyen $z \in \mathcal{I}_B^p$ úgy hogy $\frac{\bar{q}_z}{t_{zj}} = \theta_2$
      pivotálás a t_{zj} elemen
      a bázison kívül pontosan egy komplementáris pár van
      legyen j ezen pár duál változójának indexe, az új belépő változó
    endif
  endwhile
  $\mathcal{I}_- := \{k \in \mathcal{I}_B^d | \bar{q}_k < 0\}$
endwhile
optimális megoldásnál vagyunk;
end

1.4. Egy példa

Az algoritmus összetettsége indokolttá tesz egy példát. A példa segítségével szeretnénk egy másik tulajdonságra is felhívni a figyelmet: nevezetesen, hogy legalábbis bázistáblán számolva egy feladatot, az első fázis technikailag nem egyszerű, hiszen elkerülendő a kiegészített bázistábla invertálás útján való kiszámítását, már a primál szimplex első fázisát is a KKT-rendszeren végezzük el.

Tekintsük tehát a következő egyszerű feladatot:

$$\min x_1^2 + x_3^2 - 2x_1x_3$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 + x_2 = 2$$

A KKT-rendszerhez vezessük be a következő váltózó párokat: x primál változó párja a z redukált költséget jelölő változó, mely egyben a duál sorok eltérésváltozója, s eltérésváltozó párja az y duál változók.

A kezdeti (rövid) pivot tábla az eltérésváltozókból álló bázisból indulva:

1.	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	
s_1^*	1	−1	**1**	0	0	1
s_2^*	1	1	0	0	0	2
z_1	−1	0	1	−1	−1	0
z_2	0	0	0	1	−1	0
z_3	1	0	−1	−1	0	0

Az első báziscserét a primál szimplex módszer első fázis célfügvényét követve az x_3 oszlopában végezzük. Ekkor a hányadostesztet csupán az első két sor szerint hajtjuk végre, azonban a tábla komplementaritását megőrzendő a komplementáris pozícióban is végrehajtunk egy báziscserét. Vegyük észre, hogy ezen „második" báziscserék a primál megengedettséget nem befolyásolják, hiszen mindaddig, amíg nem végzünk báziscserét a tábla duál soraiban és a primál változóinak metszeténél, addig duál oszlopok primál sor részében egy azonosan nulla mátrix áll. Az első két báziscsere tehát az x_3 és s_1^*, illetve az y_1 és z_3 párból áll.

2.	x_1	x_2	s_1^*	y_1	y_2	
x_3	1	−1	1	0	0	1
s_2^*	1	1	0	0	0	2
z_1	−2	1	−1	−1	−1	−1
z_2	0	0	0	1	−1	0
z_3	2	−1	1	**−1**	0	1

3.	x_1	x_2	s_1^*	z_3	y_2	
x_3	1	−1	1	0	0	1
s_2^*	1	**1**	0	0	0	2
z_1	−4	2	−2	−1	−1	−2
z_2	2	−1	1	1	−1	1
y_1	−2	1	−1	−1	0	−1

Továbbra is az első fázist követve, a következő báziscsere pár az x_2 és s_2^* báziscsere, illetve az y_2 és z_2 báziscsere.

4.	x_1	s_2^*	s_1^*	y_1	y_2	
x_3	2	1	1	0	0	3
x_2	1	1	0	0	0	2
z_1	-6	-2	-2	-1	-1	-6
z_2	3	0	1	1	$\mathbf{-1}$	3
z_3	-3	-1	-1	-1	0	-3

5.	x_1	s_2^*	s_1^*	y_1	z_2	
x_3	2	1	1	0	0	3
x_2	1	1	0	0	0	2
z_1	$\mathbf{-9}$	-3	-3	-2	-1	-9
y_2	-3	-1	-1	-1	-1	-3
y_1	-3	-1	-1	-1	0	-3

Az 5. tábla már primál megengedett. Mindhárom duál sor duál nem megengedett, vagyis mindhárom bázison kívüli primál változó javító irányt határoz meg. Mivel azonban s_1^* és s_2^* mesterséges eltérésváltozók, így azok nem térhetnek vissza a bázisba (ezeket el lehetne hagyni a táblából). Így a bejövő változó az x_1. A kiegészített hányadosteszt alapján diagonális báziscserét végzünk z_1 sorában.

6.	z_1	s_2^*	s_1^*	y_1	z_2	
x_3	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{9}$	$-\frac{2}{9}$	1
x_2	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{9}$	$-\frac{1}{9}$	1
x_1	$-\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1
y_2	$-\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0
y_1	$-\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0

A tábla megengedett és optimális. Az optimális megoldás az azonosan 1, azaz $x = y = z = 1$.

2. A kvadratikus primál szimplex algoritmus végessége

Az 1. ábrán és 1.1. algoritmusban bemutatott kvadratikus szimplex algoritmusról számos cikk íródott az 1960-as évek elején [26, 28, 29, 30, 31, 36]. Az algoritmus végességét eredetileg a perturbációs módszerrel igazolták. Ebben a fejezetben a kvadratikus szimplex algoritmus új bizonyítását adjuk ciklizálás ellenes indexválasztási szabály segítségével.

Felidézzük az úgynevezett $\mathbf{s}$-monoton index választási szabályokat [2]:

2.1. Definíció. Legyen adott egy index választáson alapuló pivotálási szabály, egy $\mathbf{s} \in \mathbb{N}_\oplus^n$ vektor, amelynek a koordinátáit a feladat változóihoz rendeltük, és az algoritmus iterációi során a pivotálási szabálytól függően módosulhatnak. A pivotálási szabálytól függő $\mathbf{s}$ vektor sorozatra az alábbi elvárásokat fogalmazzuk meg:

1. Az $\mathbf{s}$ vektor értékei a báziscserék során nem csökkennek, illetve kizárólag a mozgó változók értéke változhat. Az index választási szabály, választási lehetőség esetén, az $\mathbf{s}$ vektor szerinti maximális értékű elemei közül választ.

2. A algoritmus során bármikor mozgó (vagyis bázisból kilépő vagy belépő) változókra megszorítva, van olyan B^* bázis, amikor az $\mathbf{s}$ vektor szerinti legkisebb értékű bázison kívüli változó egyértelmű. Legyen ez az x_l változó.
3. Ha a B^* bázis után az x_l változó belép a bázisba, akkor a legközelebbi belépés után, egészen addig, amíg esetleg az x_l változó újra távozik a bázisból, igaz, hogy azon változók $\mathbf{s}$ értéke, amelyek mozogtak az x_l változó bázisba belépése óta, nagyobbak, mint az x_l változó $\mathbf{s}$ vektor szerinti értéke.

Azokat a pivotálási szabályokat, amelyekhez tartozó $\mathbf{s}$ vektorokra az 1–3. feltételek teljesülnek $\mathbf{s}$-*monoton* pivotálási szabályoknak nevezzük.

Az $\mathbf{s}$-monoton indexválasztási szabályok alkalmazásra kerültek kvadratikus criss-cross algoritmus végességének igazolásakor [1, 7, 9].

Dolgozatunk szempontjából a fő észrevétel, hogy az $\mathbf{s}$-monoton indexválasztási szabályok nem egyértelmű választás esetén egy, az adott pillanatban jól definiált preferencia vektor szerint választanak, nem használva a bázistábla elemeinek a konkrét értékeit.

Bizonyításunk az algoritmus és a lineáris feltételes konvex kvadratikus programozási feladat pivot táblájának tulajdonságainak vizsgálatán alapul. Általános esetben, sajnos a biszimmetrikus tulajdonság nem örződik meg közvetlen módon, de egy kis kiegészítéssel hasonló tulajdonság bizonyítható.

2.1. Lemma. *[33] Egy kvadratikus programozáshoz tartozó biszimmetrikus mátrix esetén tetszőleges bázis transzformációval nyert, komplementáris bázis esetén a bázistábla továbbra is biszimmetrikus azzal a kivétellel, hogy az eredeti primál feltételek és a duál változók metszetében levő nulla mátrix helyén egy pozitív szemidefinit mátrix áll.*

A fenti eredmény kivétel része elkerülhető, ha a kvadratikus feladat egy szimmetrikus felírását alkalmazzuk [21].

A végesség bizonyítását visszavezetéssel végezzük. Bizonyítjuk, hogy egy ciklizáló példa esetén a primál megoldás szükségszerűen nem változik, vagyis minden báziscsere primál degenerált. Szemléletes módon, ez azt jelenti hogy az adott megoldáshoz tartozó linearizált feladat változatlan marad. Megmutatjuk, hogy ilyen esetben az algoritmus által végzett báziscserék pontosan megfelelnek egy megfelelő lineáris programozási feladatra nézve a primál szimplex algoritmus báziscseréinek, mely indexválasztási szabály alkalmazása esetén véges: szükségképpen, a kvadratikus szimplex algoritmus is véges mindazon ciklizálás elleni indexválasztási szabályok esetén, melyre a primál szimplex az, amennyiben a ciklizálás elleni indexválasztási szabály kizárólag a redukált költségek előjelére és a változók indexével kapcsolatos választási preferenciákra hivatkozik [9]. A lexikografikus szabályra a bizonyításunk nem alkalmazható közvetlen módon. Legjobb tudomásunk szerint, a lexikografikus rendezés alkalmazásával a kvadratikus szimplex algoritmus végességét igazoló eredmény nem ismert.

Tegyük fel tehát, hogy az algoritmus nem véges, és tekintsünk egy ciklizáló ellenpéldát. Mivel a bizonyítás visszavezetésen alapszik, a ciklizáló ellenpélda méretének minimalitása nem szükséges, és nem is egyszerűsítené lényegesen a gondolatmenetet.

Először megmutatjuk, hogy egy ciklizáló ellenpéldán az algoritmus kizárólag egyfajta, mégpedig kettő hosszú hurkokat állít elő.

2.2. Lemma. *Tekintsük a konvex (LKOF) feladatot a hozzá tartozó* $(BLCP)$ *formában. A kvadratikus szimplex algoritmus végrehajtása során, egy ciklizáló példa esetén, legfeljebb véges sokszor fordulhat elő olyan báziscsere, amelyik egy hosszú hurkot végez.*

Bizonyítás. A kvadratikus szimplex algoritmus megfogalmazásából adódik, hogy egy 1 hosszú hurok egyetlen, a duál vezérváltozó sorában végzett báziscseréből áll, ez a $0 < \theta_1 \leq \theta_2$ esetnek felel meg. Mivel a duál vezérváltozót úgy választottuk, hogy a hozzátartozó jobboldal negatív, így ez a báziscsere nem degenerált. Ilyen esetben a belepő primál változó oszlopa egy javító irány és a célfüggvény értéke javul [29]. Mivel az egy hosszú hurkok esetén a célfüggvény javul, ezért a korábbi bázisok egyike sem térhet vissza, hiszen a kvadratikus szimplex algoritmus célfüggvénye monoton csökken. Figyelembe véve, hogy véges sok bázis van, egy hosszú hurok véges sokszor fordulhat elő. □

Most vizsgáljuk meg a kettőnél hosszabb hurkok lehetséges számát.

2.3. Lemma. *Tekintsük a konvex (LKOF) feladatot a hozzá tartozó* $(BLCP)$ *formában. A kvadratikus szimplex algoritmus végrehajtása során, egy ciklizáló példa esetén legfeljebb véges sok nem 2 hosszúságú hurok lehetséges.*

Bizonyítás. A 2.2. lemma alapján legfeljebb véges sok 1 hosszú hurok lehetséges. Figyeljük meg, hogy a bázisban levő primál változók száma legfeljebb az 1 hosszú hurkok esetén növekedhet. Nem 1 hosszú hurok esetén, az első báziscserét követően, egészen addig, amíg nem a duál vezérváltozó sorában végzünk báziscserét, addig a báziscserék során a bejövő duál változó egy primál változót cserél ki a bázisban. Vagyis amennyiben a hurok 3, vagy annál hosszabb, úgy a bázisban levő duál változók száma monoton növekedik. Mivel csökkenni csak 1 hosszú hurkok során tud, melyek száma véges, így szükségképpen a 3, vagy annál hosszabb hurkok száma is véges. □

Összefoglalva megállapíthatjuk, hogy egy ciklizáló példa esetén az algoritmus véges sok báziscsere után 2 hosszú hurkok végtelen sorozatát végzi.

Felvetődik a kérdés hogy nem lenne-e célszerű a bizonyítást a criss-cross algoritmus végességére visszavezetni, hiszen a 2 hosszú hurkok megfelelnek egy-egy felcserélős báziscserének [21, 1, 7]. A nehézséget az okozza, hogy a báziscsere sorának kiválasztása után az oszlopválasztás a kvadratikus szimplex algoritmus során kötött, így a criss-cross algoritmus második index választási lépése elmarad.

2.4. LEMMA. *Tekintsük a konvex (LKOF) feladatot a hozzá tartozó* $(BLCP)$ *formában. A kvadratikus szimplex algoritmus végrehajtása során, egy ciklizáló példa esetén legfeljebb véges sok báziscsere után a bázismegoldás primál része nem változik.*

Bizonyítás. Tételezzük fel, hogy az ciklizáló példa során már kizárólag 2 hosszú hurkokat végez az algoritmus a 2.2. és 2.3. lemmák alapján.

Egy 2 hosszú hurok első báziscseréje során egy nem degenerált báziscsere javítaná a célfüggény értékét [29].

A második báziscsere esetén ennél több is mondható. [33] alapján ilyen esetben a belépő duál változó és az előző iterációban a bázisból kilépett primál változó találkozásánál a bázistábla t_{ij} értéke nem-pozitív, és amennyiben szigorúan negatív, úgy a báziscsere javít a célfüggvényértéken – mely esetünkben azt jelenti, ez az eset csak véges sokszor fordulhat elő – illetve amennyiben nulla, úgy a bázistábla ezen oszlopában minden bázisban levő primál változóhoz tartozó érték nulla, vagyis a pivot tábla primál része már nem transzformálódik. □

A fenti bizonyításban szereplő [33] eredményének felhasználásával a következő erősebb lemmát is bizonyíthatjuk:

2.5. LEMMA. *Tekintsük a konvex (LKOF) feladatot a hozzá tartozó* $(BLCP)$ *formában. A kvadratikus szimplex algoritmus végrehajtása során, egy ciklizáló példa esetén legfeljebb véges sok báziscsere után az algoritmus csupa 2 hosszú hurkot végez, melyekre a következő igaz:*

- *A hurok első báziscseréje egy degenerált báziscsere, mely során egy primál változó belép, és egy primál változó kilép a bázisból.*
- *A hurok második (és utolsó) báziscseréje során a megelőző iterációban belépett primál változó duál párja kilép, míg a megelőző iterációban kilépett primál változó duál párja belép a bázisba.*
- *A hurok második báziscseréje során a belépő duál változó transformált oszlopában minden primál változóhoz tartozó sorban nulla érték szerepel.*

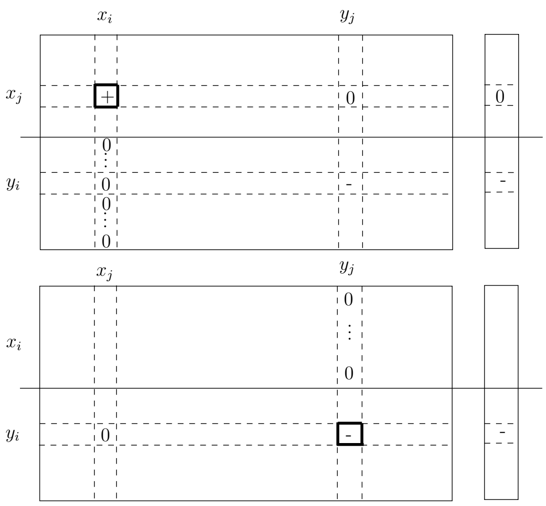
Bizonyítás. Következik a 2.1. – 2.5. lemmákból, a 2.5. lemma bizonyításához hasonló módon [33] eredményéből. □

Hasonló tulajdonság mondható a hurkok első báziscseréjének duál részére is.

2.6. LEMMA. *Tekintsük a konvex (LKOF) feladatot a hozzá tartozó* $(BLCP)$ *formában. A kvadratikus szimplex algoritmus végrehajtása során, egy ciklizáló példa esetén legfeljebb véges sok bázis csere után a komplementáris bázisból induló báziscserék esetén a belépő primál változó transzformált oszlopában a kiindulási bázistáblán a duál változókhoz tartozó sorokban nulla értékek szerepelnek.*

Bizonyítás. Felhasználva a 2.1. lemmát, mivel a választott duál vezérváltozó sorának és a hozzá tartozó belépő primál változó ennek a szemidefinit mátrixnak egy diagonális eleme, mely nulla, így szükséges, hogy ennek a szemidefinit mátrixnak ezen oszlopa (és sora) azonosan nulla legyen, hiszen ellenkező esetben nem volna pozitív szemidefinit, hiszen egy tetszőleges nemnulla érték és a diagonális pozíció által alkotott 2×2-es átló menti részmátrix determinánsa negatív lenne. □

A korábbi lemmákkal már bizonyítottuk, hogy a ciklizáló ellenpélda esetén a mozgó változók transzformált oszlopaiban nulla értékek szerepelnek a 2 hosszú hurkok első báziscseréje esetén a duál változók soraiban, míg a második báziscserék esetén a primál változók soraiban. A két bázistábla szerkezetét a 2. ábra mutatja.



2. ábra. Egy ciklizáló példa esetén a ciklizálás beállta után a 2 hosszú hurkok első, illetve második báziscseréjéhez tartozó bázistábla szerkezete.

Tekintsünk egy ciklizáló példát, és tegyük fel a 2.2. és 2.3. lemmák alapján, hogy az algoritmus már csupa 2 hosszú, degenerált hurkokat végez. Egy tetszőleges komplementáris bázis esetén, $\mathcal{I}_B^p$ és $\mathcal{I}_B^d$ rendre jelölje a bázisban levő primál-, illetve duál változók index halmazát, míg az $\mathcal{I}_N^p$ és $\mathcal{I}_N^d$ pedig a nem bázis változók megfelelő indexhalmazait, ahogyan azt korábban bevezettük.

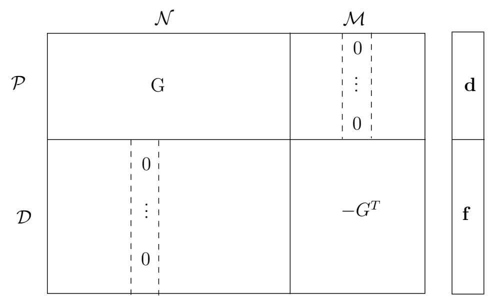
Legyen $G = \bar{M}_{\mathcal{I}_B^p \mathcal{I}_N^p}$ az $\mathcal{I}_B^p$ és $\mathcal{I}_N^p$ indexhalmazok által meghatározott részmátrix, $\mathbf{d} = \bar{\mathbf{q}}_{\mathcal{I}_B^p}$ a $\mathcal{I}_B^p$ halmaz elemeihez tartozó jobboldal, míg $\mathbf{f} = \bar{\mathbf{q}}_{\mathcal{I}_B^d}$ a $\mathcal{I}_B^d$ halmaz elemeihez tartozó jobboldal.

Ekkor a 2.1. lemma alapján $G = \bar{M}_{\mathcal{I}_B^p \mathcal{I}_N^p} = -\bar{M}_{\mathcal{I}_N^d \mathcal{I}_B^d}$. Látható, hogy az $\bar{M}$ transzformált bázis tábla megegyezik a

$$\begin{aligned} &\min \mathbf{f}^T \mathbf{x} \\ &G\mathbf{x} \leq \mathbf{d} \end{aligned} \tag{LP_s}$$

peciális lineáris programozási feladatra (LP_s) felírt Karush–Kuhn–Tucker-feltételekkel, amennyiben a feladat azon részétől, mely nem játszik szerepet a ciklizálásban, eltekintünk.

Felhasználva a 2.6., 2.5. és 2.1. lemmákat, látható, hogy a bázistábla ugyanolyan módon transzformálódik a 2 hosszú hurkok során, mint ahogy az előző lineáris programozási feladat bázistáblája. Továbbá a duál vezérváltozó választása megfelel a célfüggvény sorában levő oszlopválasztásnak, majd a primál változók feletti hányadosteszt megfelel a lineáris programozási feladatra megfogalmazott primál szimplex módszer hányadostesztjének a kisebb méretű lineáris programozási feladat esetén.



3. ábra. A kvadratikus programozási feladat bázis táblájának szerkezete a ciklizáló változókra nézve.

Tehát a $(BLCP)$ feladatra megfogalmazott kvadratikus primál szimplex módszer pontosan akkor ciklizálhat, ha a lineáris programozási feladtra megfogalmazott primál szimplex algoritmus ciklizál az (LP_s) lineáris programozási feladaton.

Figyelembe véve, hogy a lineáris programozási feladatra megfogalmazott primál szimplex algoritmus nem ciklizálhat, ha olyan index választási szabályt használunk a végesség biztosítására, amelyik az ún. s-monoton indexválasztási szabályok (pl. minimál index szabály, LIFO- vagy a leggyakrabban választott változó szabálya) közé tartozik [9].

A $(BLCP)$ feladatra megfogalmazott kvadratikus primál szimplex módszert el kell látnunk ciklizálás ellenes indexválasztási szabállyal, amely biztosítja az algoritmus végességét. Összefoglalva, kimondhatjuk a következő tételt:

2.1. Tétel. *A $(BLCP)$ feladatra megfogalmazott kvadratikus primál szimplex módszer, s-monoton indexválasztási szabályok használata esetén véges.*

Megmutattuk, hogy a kvadratikus primál szimplex algoritmus véges az s-monoton indexválasztási szabályok alkalmazása esetén. Eredményünk közvetlen átültethető a kvadratikus duál szimplex algoritmusra is.

Köszönetnyilvánítás. A kutatást a TÁMOP-4.2.2./B-10/1-2010-0009 pályázattal a Nemzeti Innovációs Hivatal jogelődje, a Nemzeti Kutatási és Technológiai Hivatal támogatta.

Illés Tibor kutatásait a Strathclyde University, Glasgow a *John Anderson Research Leadership Program* keretében támogatta.

Hivatkozások

[1] Akkeles, A. A., Balogh L. és Illés T.: *A véges criss-cross módszer új variánsai biszimmetrikus lineáris komplementaritási feladatra.* Alkalmazott Matematikai Lapok **21**, 1–25, (2003).

[2] Bilen, F., Csizmadia, Z., Illés, T.: *Anstreicher-Terlaky típusú monoton szimplex algoritmusok megengedettségi feladatokra.* Alkalmazott Matematikai Lapok **24 (1-2)**, 163–185, (2007).

[3] R. W. Cottle, G. B. Dantzig: *Complementarity Pivot Theory of Mathematical Programming.* Linear Algebra and its Applications **1**, 103–125, (1968).

[4] R. W. Cottle, J.-S. Pang, V. Venkateswaran: *Sufficient matrices and the linear complementarity problem.* Linear Algebra and its Applications **114-115**, 231–249, (1989).

[5] S.-M. Guu, R. W. Cottle: *On a subclass of P*.* Linear Algebra and its Applications **223/224**, 325–335, (1995).

[6] Z. Csizmadia, T. Illés: *New criss-cross type algorithms for linear complementarity problems with sufficient matrices.* Optimization Methods and Software Vol. **21** No. **2**, 247–266, (2006).

[7] Z. Csizmadia: *New pivot based methods in linear optimization, and an application in petroleum industry.* PhD Thesis, Eötvös Loránd University of Sciences, Budapest, 2007.

[8] Z. Csizmadia, T. Illés, A. Nagy: *The s-monotone index selection rules for pivot algorithms of linear programming.* European Journal of Operation Research **221**, 491–500, (2012).

[9] Z. Csizmadia, T. Illés, A. Nagy: *The s-Monotone Index Selection Rule for Criss-Cross Algorithms of Linear Complementarity Problems.* Acta Universitatis Sapientiae - Informatica Vol. **5** No. **1**, 103–139, (2013).

[10] K. Fukuda, M. Namiki, A. Tamura: *EP theorems and linear complementarity problems.* Discrete Applied Mathematics Vol. **84** No. **1–3**, 107–119, (1998).

[11] R. W. Cottle, S.-M. Guu: *Two characterizations of sufficient matrices.* Linear Algebra and its Applications **170**, 65–74, (1992).

[12] D. den Hertog, C. Roos, T. Terlaky: *The linear complimentarity problem, sufficient matrices, and the criss-cross method.* Linear Algebra and its Applications **187**, 1–14, (1993).

[13] T. Illés, C. Roos, T. Terlaky: *Polynomial affine-scaling algorithms for $P^*(\kappa)$ linear complementary problems.* Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems **452**, pp. 119–137, (1997).

[14] T. Illés, JM. Peng, C. Roos, T. Terlaky: *A strongly polynomial rounding procedure yielding a maximally complementary solution for $P^*(\kappa)$ linear complementarity problems.* SIAM Journal on Optimization **11**, 320–340, (2000).

[15] T. Illés, T. Terlaky: *Pivot versus interior point methods: Pros and cons.* European Journal of Operation Research **140**, 170–190, (2002).

[16] Illés T., és Nagy M.: *Mizuno–Todd–Ye típusú prediktor–korrektor algoritmus elégséges mátrixú lineáris komplementaritási feladatokra.* Alkalmazott Matematikai Lapok **22**, 41–46, (2005).

[17] T. Illés, M. Nagy, T. Terlaky: *A polynomial path-following interior point algorithm for general linear complementarity problems.* Journal of Global Optimization **47**, 329–342, (2010).

[18] T. Illés, M. Nagy, T. Terlaky: *Polynomial Interior Point Algorithms for General Linear Complementarity Problems.* Algorithmic Operations Research **5**, 1–12, (2010).

[19] Illés T.: *Lineáris optimalizálás elmélete és pivot algoritmusai.* Operations Research Reports, 2013-03. http://www.cs.elte.hu/opres/orr/download/IT-LP-pivot-jegyzet-20131031.pdf

[20] Klafszky E., Terlaky T.: *A pivot technika szerepe a lineáris algebra néhány alapvető tételének bizonyításában.* Alkalmazott Matematikai Lapok **14**, 425–448, (1989).

[21] E. Klafszky, T. Terlaky: *Some Generalizations of the Criss-Cross Method for Quadratic Programming.* Math. Oper. und Stat. ser. Optimization **24**, 127–139, (1990).

[22] E. de Klerk, C. Roos and T. Terlaky: *Nemlineáris Optimalizálás.* Operációkutatás No. **5**., Budapesti Közgazdaságtudományi és Államigazgatási Egyetem, Operációkutatás Tanszék, Budapest (2004).

[23] M. Kojima, S. Mizuno, A. Yoshise: *A primal-dual interior point algorithm for linear programming.* in: N. Megiddo, ed., *Progress in Mathematical Programming, Interior-Point and Related Methods*, Springer, New York, pp. 29–48, (1988).

[24] M Kojima, S. Mizuno, A. Yoshise: *A polynomial-time algorithm for a class of linear complementarity problems.* Mathematical Programming **44**, 1–26, (1989).

[25] M. Kojima, N. Megiddo, T. Noma, A. Yoshise: *A unified approach to interior point algorithms for linear complementarity problems.* Lecture Notes in Computer Science **538**, Springer-Verlag, (1991).

[26] C. E. Lemke, J. T. Howson, Jr.: *On complementary pivot theory.* Mathematics of decision sciences, Volume Part **1**, 95–114.

[27] M. Nagy: *Interior point algorithms for general linear complementarity problems.* PhD Thesis, Eötvös Loránd University of Sciences, Budapest, (2009).

[28] C. van de Panne, A. Whinston: *A Parametric Simplicial Formulation of Houthakker's Capacity Method.* Econometrica, Vol.**34**, No. **2**, 354–380, (1966).

[29] C. van de Panne, A. Whinston: *Simplicial methods for quadratic programming.* Naval Research Logistics, Vol. **11**, 273–302, (1964).

[30] C. van de Panne, A. Whinston: *The Simplex and the Dual Method for Quadratic Programming.* Operational Research Quarterly, Vol. **15**, 355–388, (1964).

[31] C. van de Panne, A. Whinston: *The Symmetric Formulation of the Simplex Method for Quadratic Programming.* Econometrica, Vol. **37**, No. **3**, 507–527, (1969).

[32] T. Terlaky: *A new algorithm for quadratic programming.* European Journal of Operational Research, Vol. **32**, **2**: 294–301, (1987).

[33] A. W. Tucker: *Principal pivotal transformations of square matrices.* SIAM Review, pp. 305, (1963).

[34] H. Väliaho: *A new proof for the criss-cross method for quadratic programming.* Optimization, Vol. **25**, No. **4**, 391–400, (1992).

[35] H. Väliaho: *P*-Matrices Are Just Sufficient.* Linear Algebra and its Applications **239**, 103–108, (1996).

[36] P. Wolfe: *The Simplex Method for Quadratic Programming.* Econometrica Vol. **27**, No. **3**, 382–398, (1959).

(Beérkezett: 2013. december 7.)

ILLÉS TIBOR
BME Differenciálegyenletek Tanszék
1111 Budapest, Egry József utca 1, H ép. IV. em.
illes@math.bme.hu

NAGY ADRIENN
FICO
B37 7GN, Birmingham, Starley Way, United Kingdom
adriennagy@gmail.com

FINITENESS OF THE QUADRATIC SIMPLEX METHOD WITH THE APPLICATION OF INDEX SELECTION RULES

Tibor Illés, Adrienn Nagy

We provide a new proof for the finiteness of the primal simplex method for linearly constrained convex quadratic programming problems when using index selection rules. The original

quadratic simplex algorithm was developed by Wolfe and van de Panne and Whintson, and have been published in a series of papers in the 1960s, using perturbation techniques to ensure finiteness.

We show that for the method to cycle, the pivots and the problem needs to be degenerate; i.e. the value of all the variables -in the corresponding pivot tableau of the Karush-Kuhn-Tucker system- taking part of the primal ratio test needs to be zero, but moreover, the the value of the entries in the transformed pivot columns that correspond to the quadratic objective must be zero.

It follows that the quadratic primal simplex method is finite for any index selection rule that only relies on the sign structure of the transformed right hand side and of the reduced costs, and for which the corresponding traditional primal simplex method is finite for linear programming problems.

Alkalmazott Matematikai Lapok **30** (2013), 81-106.

A KLASSZIKUS MATEMATIKA EGY LEHETSÉGES ÁLTALÁNOSÍTÁSA[1]

RÁZGA TAMÁS

Dolgozatunk elsődleges célja, hogy bevezessük a *reálisan ellentmondásmentes matematikai elméletek* fogalmát, és matematikai-logikai alapon megmutassuk, hogy ezek ismeretelméletileg egyenértékűek a klasszikus értelemben vett *ellentmondásmentes elméletekkel*, így képesek arra, hogy természetleírásunk teljes értékű alapját képezzék. Ismertetjük Q(k)-t mint a *természetes számok* és R(γ)-t mint a *valós analízis* egy javasolt új, általános elméletét. Megmutatjuk, hogy Q(k) és R(γ) egyaránt *reálisan ellentmondásmentes*, valamint hogy egyfelől reális esély van a γ állandó értékének kísérleti módszerekkel (azaz numerikus számítások eredményeként) való meghatározására, másfelől arra, hogy γ értékének megfelelő választásával a fizikai természetleíráshoz egy, a mainál jobban alkalmazkodni képes matematikai elmélethez juthassunk.

1. Bevezetés

A múlt század közepére tehető, amikor a matematika alapjainak kutatói olyan kérdésekkel kezdtek foglalkozni, hogy (1) természetes számnak tekinthetjük-e a $10^{10^{10}}$ jelsorozattal definiált absztrakt számot; hogy (2) megadható-e olyan definíció, mely egzakt módon tesz különbséget a véges és a végtelen számok között; hogy (3) egy konkrét matematikai állítást tekinthetünk-e egy adott axiómarendszer következményének, ha annak (formális) levezetése több, mint 10^{1000} szimbólum-jel alkalmazását igényli; és végül hogy (4) mit kezdhetünk a természetes számok aritmetikájának egy olyan rendszerével, mely *reálisan ellentmondás-mentes* (ha pl. a *reális bizonyítások* hosszát 10^{1000}-re korlátozzuk), ugyanakkor a klasszikus logika (mely a bizonyítások hosszát nem korlátozza) szempontjából *ellentmondásos.*

Az előbbi négy kérdés közül az első kettőt Van Dantziggal [1], míg az utóbbi kettőt Rohit Parikh-hal [2] hozhatjuk kapcsolatba. A felvetett problémakör meglehetősen komoly, művelőinek köre nem csak e két szerzőre korlátozódik, hanem

[1]Az Alkalmazott Matematikai Lapok szerkesztősége nem azonosítja magát az idő közben elhunyt szerző filozófiai következtetéseivel, azonban a gondolat- és szólásszabadság jegyében a dolgozatot nem kívánta megcsonkítani.

egy új matematikai-logikai iskola, az úgynevezett ultrafinitizmus megalapításához vezetett [3].

Dolgozatunk szempontjából az a lényeg (ezt ragadjuk meg), hogy ezen új matematikai-logikai iskola szerint az aritmetikában jogosan kérdőjelezhetjük meg, hogy mindaz, ami érvényes a kis, a közepes és a nagy számok körére, az minden további nélkül kiterjeszthető az olyan nagyon-kicsi és az olyan nagyon-nagy számokra is, amelyek előállítása meghaladja (nemcsak technikai adottságainkból, hanem fizikai korlátainkból is következő) realitásunkat, és így csak a képzeletünkben lehetséges.

Dolgozatunkban a *reális bizonyítások* hosszát a κ jellel korlátozzuk, de κ tényleges értékét mindvégig nyitva hagyjuk, erre vonatkozóan csak néhány előzetes utalást teszünk.

Ugyanakkor szilárdan meg vagyunk győződve arról, hogy ha κ értékét helyesen választjuk, úgy (ismeretelméletileg) nem tehető különbség a „csak” *reálisan ellentmondásmentes* és a klasszikus értelemben vett *ténylegesen ellentmondásmentes* aritmetikai elméletek között.

E hivatkozások és bevezető gondolatok után dolgozatunk programja a következő:

a) Vizsgálataink alapjául a természetes számok aritmetikájának Raphael M. Robinsonról elnevezett legegyszerűbb axiómarendszerét, az úgynevezett Q-aritmetikát választjuk.

   A 2. fejezetben megmutatjuk, hogy: (1) habár a Q-aritmetika a Peano-aritmetika leggyengébb alrendszerét képezi, mégis alkalmas arra, hogy benne a számelmélet jó néhány közismert tétele legyen megfogalmazható és bizonyítható; (2) a Q-aritmetika keretein belül könnyen definiálható az $y = \exp(a, x)$ hatványfüggvény a szokásos tulajdonságokkal (kivéve azt, hogy minden a-hoz és x-hez tartozik y); (3) minden c értékhez van olyan $k = k(c)$ természetes szám, melynél egyetlen y természetes számra sincs az $y = \exp(2, k(c))$ egyenlőségnek c -nél rövidebb *bizonyítási hosszú* bizonyítása; (4) következésképpen Q-aritmetika kiegészíthető a (Q9) axiómával (ami az előbb említett körülményt fejezi ki kellően nagy $c = \kappa$ esetére) úgy, hogy az eredő Q(k)-aritmetika (a *bizonyítási hosszak* „nagyon-nagy” κ-ra korlátozásával) *reálisan ellentmondásmentes*.

b) A 3. fejezetben becsléseket teszünk $k(c)$ értékére, valamint röviden kitérünk arra, hogy amennyiben az összeadás és szorzás műveleti függvényeit logikai függvényekkel helyettesítjük, akkor az így kapott (még gyengébb) Q*(k*) aritmetikában $k(c) \gg k^*(c)$.

   Ez utóbbi körülményre is tekintettel megmutatjuk, hogy κ megfelelően nagy értékűre választása esetén nem tehetünk különbséget a „csak” *reálisan ellentmondásmentes* és a klasszikus értelemben *ténylegesen ellentmondásmentes* aritmetikai rendszerek között, így a természetes számok aritmetikájának lehetséges (kívánatos) általánosításaként a Q(k) és $Q^*(k^*)$ aritmetikák egyaránt számításba jönnek.

c) A 4. fejezetben felvázoljuk a *valós számok* Q(k)-aritmetikával kompatibilis új elméletét, megmutatjuk, hogy pusztán ennek keretein belül nem lehetséges a *határozott integrál* értelmezése, mert ehhez külön axiómára van szükség, valamint rávilágítunk arra, hogy a valós számok egyértelműen a *mikro-* és *makro-számok* kategóriájába sorolhatók.

d) Az 5. fejezetben vázlatosan tárgyaljuk a *valós analízis* általánosításához (és ezen belül a határozott integrál értelmezéséhez) szükséges külön axiómákat, és megmutatjuk, hogy az ezekkel kiegészített elmélet *reálisan ellentmondásmentes.*

e) Befejezésül a 6. fejezetben összegezzük vizsgálataink alábbi főbb tanulságait:

(i) mivel az új elmélet (κ kellően nagy értékűre választása esetén) bizonyítottan *reálisan ellentmondásmentes*, ezért nincs okunk arra, hogy azt ne tekintsük (a klasszikus értelemben vett) *ténylegesen ellentmondás-mentes* elméletnek;

(ii) az új elmélet γ állandója (elvileg) ugyanúgy tapasztalati úton határozható meg (például számítógéppel támogatott nagypontosságú numerikus számítások eredményeként), mint ahogy a Bolyai-geometria δ állandója is megkapható nagyprecizitású földmérések (illetve fizikai megfigyelések) eredményeként;

(iii) végül felvázolunk néhány gondolatot arról, hogy miként lehet az új, általános elméletet felhasználni arra, hogy általa a fizikai természetleírásunkhoz egy, a mainál jobban alkalmazkodni képes *matematikai háttérelmélethez* juthassunk.

2. Q és Q(k) aritmetikai rendszerek

Ismeretes (lásd pl. [4]), hogy a természetes számok (amik összességét a kialakult gyakorlat szerint a továbbiakban egyszerűen csak $\mathbb{N}$-nel jelöljük) legáltalánosabb elméletét a Raphael M. Robinson által bevezetett Q-aritmetika adja. Ezt az elméletet választjuk további vizsgálataink kiinduló alapjául, mint ahogy ezt választottuk e dolgozat előfutárát képező forrásmű [5] alapjául is. (Hivatkozott dolgozatunkban még nem ismertük e témakör kiterjedt irodalmát, és ezért Q-aritmetika helyett egyszerűen csak RA-rendszerről beszéltünk).

I. Részben e kiterjedt irodalomra (aminek további részletei pl. [6]-ban és [7]-ben találhatók), részben a már idézet forrásmunkára [5] hivatkozással az alábbiakban röviden összefoglaljuk a Q-aritmetika dolgozatunk szempontjából leglényegesebb adottságait.

a) A Q-aritmetika formális rendszere a „0” *konstans* jelet, az „S”, a „+” és a „·” műveleti jeleket, az „=” egyenlőség jelet, valamint *változójeleket* használ.

b) A Q-aritmetika első hét axiómája azonos a Peano-aritmetika első hét axiómájával.

c) A Peano-aritmetika *teljes indukciós axiómasémáját* a Q-aritmetikában az alábbi (lényegesen „gyengébb”) axióma helyettesíti:

(**Q8**) $a = 0$, vagy van olyan b, hogy $a = \mathrm{S}b$ (ahol a és b változójelek).

d) A Q-aritmetikában precízen definiálható a *hatványozás* $y = \exp(a, x)$ művelete (a szokásos főbb tulajdonságokkal), ahol is x, y és a természetes számváltozók.

e) Parikh tétele értelmében [2, Theorem 4.3.] Q-aritmetikában ugyanakkor nem bizonyítható a hatványozás műveleti függvényének totális volta, vagyis hogy az a és x változók minden konkrét a és x értékéhez található legyen olyan y, hogy $y = \exp(a, x)$ fennáll.

f) Q-aritmetikán belül megadható a természetes számoknak egy olyan $\mathbb{N}_0$ összessége (nevezzük ezeket a továbbiakban egyszerűen csak $\mathbb{N}_0$-számoknak), hogy:

(i) az $\mathbb{N}_0$-számok köre az „S”, a „+” és a „·” műveletekkel szemben zárt;

(ii) tetszőleges a és x $\mathbb{N}_0$-számokhoz van olyan $\mathbb{N}$-beli y szám, hogy $y = \exp(a, x)$;

(iii) az $\mathbb{N}_0$-számok körében *számsorozatokat* és *függvénysorozatokat* definiálhatunk az ezekre vonatkozóan ismert összefüggések szinte érintetlen fenntartása mellett;

(iv) az $\mathbb{N}_0$-számok körében a Q-aritmetika olyan alapvető tételek bizonyítására képes, mint a legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többszörös létezése; a *kínai maradéktétel*; vagy mint pl. *Gauss alaptétele* a természetes számok prímszám-szorzatra történő felbontásáról.

Feltehető továbbá [8], hogy az $\mathbb{N}_0$-számok körében a Q-aritmetika a számelmélet olyan legismertebb tételeinek a bizonyítására is elegendő, mint például a *„nagy” Fermat-tétel*, valamint hogy egy természetes szám és annak kétszerese között mindig van prímszám, és így tovább.

Megjegyzés. (i) és (ii) igazolásához leginkább a [2]-ben, [4]-ben és [6]-ban található háttérismeretekre hivatkozunk, míg (iii) és (iv) alátámasztásánál [8]-ra hagyatkozunk.

A Q-aritmetikán belül valamely m természetes számnak a (Q-*aritmetika* formális nyelvén keresztül történő) formális kifejezésére az alábbi két módon van lehetőség:

$$\underline{m} = \mathrm{SSS\ldots S0} \quad \text{azaz „}m\text{” darab „S”-jel valamint egy darab „0”-jel;} \tag{1}$$

vagy

$$\underline{0} = 0; \qquad \underline{2 \cdot m} = \mathrm{SS0} \cdot \underline{m} \qquad \underline{2 \cdot m + 1} = \underline{2 \cdot m} + \mathrm{S0} \tag{2}$$

ahol is $\underline{m}$ jelöli az m természetes szám Q-aritmetikán belüli formális változatát.

Az (1) *szám-kifejezés* a megszokottabb (Gödel is ezt használta), a (2) kifejezés viszont „gazdaságosabb”, ugyanis például az $m = 2^k$ természetes szám formális kifejezésére (1) szerint $2^k + 1$, míg (2) esetén mindösszesen $6 \cdot k$ formális jelre van szükség.

Dolgozatunkban – amikor csak megtehetjük – mi mindvégig a (2) *szám-kifejezést* használjuk.

Tegyük fel, hogy valamilyen okból (pl. Univerzumunk fizikai törvényeiből kifolyólag) formális logikai műveleteink hosszában korlátozva vagyunk, és így pl. egy *kifejezést* (ezen belül egy *szám-kifejezést* is), egy *formulát*, vagy egy *bizonyítást* csak akkor áll módunkban reálisan (hitelt érdemlően) elfogadni, ha azok jelsorozathosszúsága kisebb valamely κ számnál.

Dolgozatunkban feltételezzük, hogy Univerzumunk (az aritmetika vonatkozásában is) ilyen tulajdonságú, és abban létezik ilyen κ *szám* is, bár annak *konkrét értékét* nyitva hagyjuk.

Megjegyzés. A fizika mai állása szerint Univerzumunk véges, a benne foglalt atomok száma mintegy 10^{80}-ra becsülhető, és így a $\kappa \approx 10^{80}$ érték is egy ilyen *szóba-jöhető* korlátot képvisel.

2.1. Definíció. Valamely *kifejezésről* (*szám-kifejezésről* is), *formuláról* vagy *bizonyításról* akkor mondjuk, hogy az *reális* (azaz tényszerű, megvalósítható, tehát nem képzeletbeli), ha annak Q-aritmetikán belüli kifejezéséhez κ-nál kevesebb formális jelre van szükség;

2.2. Definíció. Egy elméletről akkor mondjuk, hogy *reálisan ellentmondásmentes*, ha abban egyik axióma tagadásának sincs *reális bizonyítása.*

A mondottak értelmében a Q-aritmetikán belül (2) szerint kifejezhető legnagyobb szám:

$$n_{\max} \approx 2^{\kappa/4}. \tag{3}$$

Ha viszont (2) nem alkalmazható (mert pl. a Q-aritmetikán belül a „+” és „·” műveleti függvényeket logikai függvényekkel helyettesítjük – lásd később, a 3. fejezetben), akkor:

$$n_{\max} \approx \kappa. \tag{4}$$

2.1. Tétel. *c minden értékéhez található olyan $k = k(c)$ természetes szám, hogy az $y = \exp(2, k(c))$ egyenlőségnek egyetlen y természetes szám esetén sincs c-nél rövidebb bizonyítása.*

A tételre szigorú, formális bizonyítás is adható, melynek ismertetésétől (annak terjedelme és matematikai-logikai mélységei okán) itt most eltekintünk, és helyette megelégszünk egy informális bizonyítási változat ismertetésével.

De mielőtt állításunk ezen informális igazolásába kezdenénk, először is pontosítjuk a használt legfőbb fogalmakat, valamint az azokkal kapcsolatos jelölésmódot.

Valamely „A” állítás *bizonyítási hosszán* az annak formális bizonyításában szereplő szimbolikus jelek összes számát, illetve a *bizonyítási lépés-számán* az ugyanezen bizonyításban alkalmazott összes következtetések számát értjük (ez utóbbi vonatkozásban valamely konkrét axióma alkalmazása is következtetésnek számít).

$\mathrm{Q}|\!-_c \mathrm{A}$-val jelöljük azt, hogy Q-aritmetikán belül az „A” állításnak van c, vagy rövidebb *bizonyítási hosszú* bizonyítása, míg $\mathrm{Q}|\!\not-_c \mathrm{A}$-val ennek az ellenkezőjét.

Hasonlóan: $\mathrm{Q}|\!-_{(c)} \mathrm{A}$-val jelöljük azt, hogy Q-aritmetikán belül az „A” állításnak van c, vagy rövidebb *bizonyítási lépés-hosszú* bizonyítása, míg $\mathrm{Q}|\!\not-_{(c)} \mathrm{A}$-val az ellenkezőjét.

Mindezek alapján a 2.1. tétel azt állítja, hogy van olyan $k = k(c)$ természetes szám, hogy:

$$\forall y \{\mathrm{Q}|\!\not-_c \mathrm{y} = \exp(2, k(c))\}. \tag{5}$$

Bizonyítás.

A tétel bizonyításához egyfelől felhasználjuk azt a trivialitást, hogy

$$[\mathrm{Q}|\!-_c \mathrm{A}] \rightarrow [\mathrm{Q}|\!-_{(c)} \mathrm{A}], \tag{6}$$

másfelől G. Kreisel Q-aritmetikára (mint véges számú axiómára épült elméletre) bizonyított sejtését (bizonyítását lásd pl. [9]-ben), amit az alábbi segédtételben fogalmazunk meg:

2.1. SegĂŠdtĂŠtel. *Ha valamely $B(x)$ állításhoz található olyan c természetes szám, hogy az alábbi összefüggés minden k természetes számra (külön-külön) fennáll:*

$$Q|\!-_{(c)} B(\underline{k}),$$

akkor egyúttal

$$Q|\!- \forall x B(x).$$

A 2.1. segédtétel alapján még egy segédtételt fogalmazunk meg és bizonyítunk be.

2.2. SegĂŠdtĂŠtel. *Q-aritmetikán belül adott c-hez mindig van olyan d természetes szám, hogy:*

$$\forall y \, \forall \, (x \geq \underline{d}) \left\{ Q|\!-_{(c)} \, y = \exp(2, x) \right\} \tag{7}$$

E segédtétel igazolásához két trivialitást veszünk figyelembe. Először is azt, hogy minden c természetes számhoz van olyan $c^*(\geq c)$, hogy:

$$\big[\mathrm{Q}|\!-_{(c)}\, y = \exp(2,d)\big] \to \forall(x \leq d)\, \big[\mathrm{Q}|\!-_{(c^*)}\, y = \exp(2,x)\big]$$

másodszor pedig azt a körülményt (lásd a 2.e) pontnál), hogy:

$$\mathrm{Q}|\!\not-\, \forall a\, \forall x\, \exists y\, [y = \exp(a,x)]$$

Tételezzük mármost fel, hogy valamely adott c mellett (7) nem áll fenn, azaz:

$$\forall d\, \exists y\, \exists(x \geq d)\, \big\{\mathrm{Q}|\!-_{(c)}\, y = \exp(2,x)\big\}\,.$$

Ez esetben (a figyelembe vett első trivialitás miatt) egyúttal:

$$\forall d\, \forall(x \leq d)\, \exists y\, \big\{\mathrm{Q}|\!-_{(c^*)}\, y = \exp(2,x)\big\}$$

következésképpen (a 2.1. segédtétel miatt) $\mathrm{Q}|\!-\forall x\, \exists y\, [y = \exp(2,x)]$ eredményre jutunk, ami ellentmondván a második trivialitásnak, végül is igazolja (7)-t.

Mindezen előzmények után visszatérünk a 2.1. tétel, azaz (5) igazolásához.

Először is észrevesszük, hogy (6)-ból, valamint $|\!\not-_c$ és $|\!\not-_{(c)}$ definíciójából következően:

$$\big[\mathrm{Q}|\!\not-_{(c)}\, \mathrm{A}\big] \to [\mathrm{Q}|\!\not-_c\, \mathrm{A}]\,,$$

és így a 2.2. segédtétel a *bizonyítási lépés-számról* közvetlenül kiterjeszthető a *bizonyítási hosszra* is, azaz minden c-hez mindig van olyan k természetes szám, hogy:

$$\forall y\, \forall(x \geq \underline{k})\, \{\mathrm{Q}|\!-_c\, y = \exp(2,x)\}\,. \tag{8}$$

Legyen $k_{\min}$ a (8) szerinti k számok közül a legkisebb és definiáljuk $k(c)$-t $k(c) = k_{\min}$-ként. Nyilvánvaló, hogy $k(c)$ előbbi definíciója esetére a 2.1. tétel bizonyítást nyert. □

II. Q(k)-aritmetikát úgy kapjuk meg Q-aritmetikából, hogy ez utóbbi összesen 8 axiómáját (azaz a **Q1** …, **Q8** axiómákat) az alábbi 9. axiómával egészítjük ki:

(**Q9**) az $\exp(2,k)$ kifejezés egyetlen természetes számmal sem megegyező, azaz:

$$\forall y\, [\exp(2,\underline{k}) \neq y]\,,$$

ahol k valamely (aritmetikailag formálisan kifejezhető) fix, természetes *szám-kifejezés.*

Alább megmutatjuk, hogy ha k értékét megfelelően választjuk, úgy Q(k)-aritmetika *reálisan ellentmondásmentes*, és így szilárd alapját képezheti az *általános matematikának.*

2.2. TÉTEL. *Ha „k" egy tetszőleges olyan szám-kifejezés, amire fennáll, hogy*

$$k \geq k(\kappa), \tag{9}$$

akkor a Q(k)-aritmetika reálisan ellentmondásmentes.

Megjegyzés. Itt $k(c)$ a 2.1. tétel bizonyítása során definiált *szám-függvény*, míg κ pedig a *reális szám-ábrázolás* és a *reális bizonyítás* 2.2. a) definícióval bevezetett korlátja.

Bizonyítás. A k *szám-kifejezés* (9) szerinti választása esetén itt elegendő csak azt igazolnunk, hogy a **Q9** axióma tagadását jelentő alábbi kifejezésnek:

$$\exp(2, k(\kappa)) = y \tag{10}$$

Q-aritmetikán belül egyetlen y érték mellett sincs *reális bizonyítása.*

Mivel a 2.1. tétel alapján tudjuk, hogy a Q-aritmetikán belül (10)-nek egyetlen y érték esetén sincs κ-nál rövidebb *bizonyítása*, így – a reális bizonyíthatóság 2.2. b) definícióját figyelembe véve – a 2.2. tétel értelemszerűen fennáll.

A klasszikus logika szerint Q(k) *ellentmondásos*, mert a Q-aritmetikán belül minden lehetséges κ értékre a (10) összefüggés külön-külön bizonyítható.

Ez a körülmény azonban két okból sem árnyékolhatja be a 2.1. tétel érvényességét, sem pedig az aritmetika általánosítását célzó, jelen dolgozatban kifejtett törekvéseinket:

(i) a klasszikus logika nem szab semminemű korlátot a bizonyítások hosszának, megengedi a 10^{80}-nál is hosszabb, és így csak gondolatilag kivitelezhető bizonyítási konstrukciókat is;

(ii) a 10^{80}-nál nagyobb számok körében maguknak az axiómáknak az érvénye is kérdéses. □

3. Megfontolások, becslések, következtetések

Dolgozatunk egyik legfőbb állítása és egyik legfőbb mondanivalója az, hogy a *reális ellentmondás-mentesség* korántsem egy *mesterkélt kitaláció*, hanem inkább a klasszikus matematikai gondolkodás egyik gyenge pontjára rámutató olyan fogalom, ami alapját képezheti a matematika (ezen belül elsősorban az aritmetika és analízis) általánosításának.

Mindezzel kapcsolatban az előző pontban matematikai-logikai módszerekkel mutattuk meg, hogy léteznek olyan κ és $k(\kappa)$ természetes számok, melyek mellett a *reális ellentmondás-mentesség* fogalma nemcsak filozófiailag, de matematikailag is értelmezhető.

Az előzőekben mind κ, mind pedig a 2.1. tétel bizonyítása során definiált $k(c)$ *szám-függvény* értékeinek a kérdését nyitva hagytuk, megelégedtünk ezek puszta létezésével.

Mivel a dolgozatunk tárgyát képező új *aritmetikai* és *valós függvénytani* rendszer-modellt nem pusztán gondolati konstrukciónak szántuk, hanem annak közvetlen gyakorlati alkalmazására is gondoltunk, ezért a most következő fejezetben becslésekbe bocsátkozunk κ szóba-jöhető értékeit, és a $k(c)$ *számfüggvény* egy valószínűsíthető felső korlátját illetően.

Hangsúlyozzuk, hogy itt főleg sejtéseken alapuló becslésekről és nem bizonyításokról lesz szó.

Becslésekről, melyek segítenek eligazodni eredményeink alkalmazhatóságában, és amikkel kapcsolatos esetleges tévedések alapvető célunkat és mondanivalónkat nem befolyásolják.

3.1. κ értékének előzetes becslése

Első témakörként κ értékére teszünk becsléseket.

Úgy gondoljuk, hogy az alábbi nagy-számok eléggé közismertek és sokat mondóak:

(i) Földünk atomjainak a száma $\approx 10^{50}$.

(ii) Galaxisunk atomjainak a száma $\approx 10^{70}$.

(iii) Univerzumunk atomjainak a száma $\approx 10^{80}$.

A fenti számokra hivatkozással alig hihető, hogy egy *reális bizonyítás hossza* nagyobb lehessen, mint 10^{50}, az viszont teljességgel kizárható, hogy ez a *bizonyítási hossz* elérhesse a 10^{80} értéket. Következésképpen nem sokat tévedhetünk, ha a továbbiakban κ értékére:

$$\kappa \approx 10^{80} \tag{11}$$

becslést tesszük.

3.2. Egy lehetséges becslés $k(c)$ függvény felső korlátjára

Második témaként definiáljuk a $\mu(c)$ függvényt, mely – sejtésünk szerint – egy felső korlátját képezi a $k(c)$ számfüggvénynek. Vagy pontosabban, definiálni fogunk valamely $\mu(c)$ függvényt, melyről azt sejtjük, hogy (legalább is) a $k = 2^m \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$ számok körében:

$$k(c) \le \mu(c).$$

Jelöljük $\Lambda(k)$-val azt a formálisan kifejezhető állítást, hogy $x = k$ mellett van olyan y, melynél az $\exp(2, x) = y$ egyenlőség fennáll, és jelöljük $\lambda(k)$-val ennek a formális *bizonyítási hosszát.*

Tudjuk, hogy I. d) szerint „Q|–$\Lambda(x) \to \Lambda(2 \cdot x)$”, így $\lambda\left(2^{m+1}\right)$ könnyen kifejezhető $\lambda\left(2^{m}\right)$-ből:

$$\lambda\left(2^{m+1}\right) = \lambda\left(2^{m}\right) + \alpha \cdot m + \beta, \tag{12}$$

amiből viszont könnyen megkapjuk $\lambda(2^m)$ értékét:

$$\lambda\left(2^{m}\right) = \alpha/2 \cdot m^2 + (\beta - \alpha/2) \cdot m \tag{13}$$

Megjegyzés.

(i) (12) származtatásánál figyelembe vettük, hogy a bizonyítás során $\Lambda(x) \to \Lambda(2 \cdot x)$ összefüggésbe x helyére be kell helyettesítenünk a $k = 2^m$ számkifejezést, ami (2) értelmében (és x minden előfordulásánál) $4m$ formális jel felhasználását jelenti.

(ii) α és β természetes számok, és (i)-ből következően: $\alpha \geq 12$.

(iii) Könnyen ellenőrizhető, hogy (13)-hoz hasonló összefüggésre jutunk akkor is, ha $\Lambda(k)$-t nem az I. d) szerinti $\Lambda(x) \to \Lambda(2 \cdot x)$ összefüggés, hanem az I. d) (ii)-ben jelzett azon körülmény alapján kívánjuk bizonyítani, hogy az $\mathbb{N}_0$-számok körében $\Lambda(k)$ már eleve teljesül. (Ez utóbbi esetben nyilvánvalóan azt kell bizonyítanunk, hogy k $\mathbb{N}_0$-szám.)

A mondottak (és a 2.1. tételben szereplő $k(c)$ számfüggvény definíciója) értelmében egyértelműen valószínűsíthető, hogy a

$$\mu(c) = 2^{\sqrt{c}}$$

függvény egy felső korlátját képezi a $k(c)$ számfüggvénynek, azaz

$$k(c) \leq 2^{\sqrt{c}}.$$

Mindebből, valamint (9)-ből következően azt mondhatjuk, hogy ha

$$k \geq 2^{\sqrt{\kappa}}, \tag{14}$$

akkor Q(k) (nagy valószínűséggel) *reálisan ellentmondásmentes.*

3.3. $\mathbf{Q}^*-(\mathbf{k})$ aritmetika és egy becslés $k^*(c)$ függvény felső korlátjára

Q(k)-aritmetikának egy érdekes alternatívájához (nevezzük ezt Q^*(k)-aritmetikának) jutunk, ha Q-aritmetikában az *összeadás* és *szorzás* műveleti függvényeit logikai függvényekkel helyettesítjük (az ötlet R. Parikhtól származik, lásd pl. [10]). Ebben, a Q-aritmetikánál lényegesen „gyengébb” elméletben a (3) számábrázolás nem lehetséges, a természetes számok formális kifejezésénél csak (4)-re hagyatkozhatunk.

Q*(k)-aritmetikában $k(c)$ függvény helyett $k^*(c)$ függvény szerepel, aminek felső korlátjára

$$k^*(c) \le c$$

függvényt valószínűsítjük, és azt várjuk, hogy ha

$$k^* \ge c, \tag{15}$$

akkor Q*(k) (nagy valószínűséggel) *reálisan ellentmondásmentes.*

3.4. Egy ismeretelméleti konklúzió

Be kell látnunk, hogy ha κ és k értékeit (11), illetve (14) alapján választjuk, úgy Q(k)-aritmetika (illetve Q*(k)-aritmetika már akár (15) választása esetén is) *reálisan ellentmondásmentes.*

Be kell látnunk továbbá, hogy nem áll módunkban különbséget tenni a (*klasszikus logika szerinti*) „*tényleges*” és a (dolgozatunk szerinti) *reálisan ellentmondásmentes* elméletek között, így (ismeretelméletileg) ez utóbbiakat is kénytelenek vagyunk *teljes értékű elméleteknek* tekinteni.

4. A valós számok általános elméletének alapjai

A *valós számokat* (amik összességét $\mathbb{R}$-rel jelöljük) nem a *természetes számokból* származtatjuk (meglehetősen nehézkes és vitatható gondolatmenet eredményeként), hanem olyan *önálló fogalomként* kezeljük, melynek a *természetes számokkal* való vitathatatlanul szoros kapcsolatát a továbbiakban is változatlanul fenn kívánjuk tartani.

A *valós számokhoz* (mint tőlünk függetlenül objektíven létező entitásokhoz) az alábbi axiómákkal kifejezett tulajdonságokat rendeljük:

4.1. Axióma.

A. Test axiómák:

(i) A valós számok $\mathbb{R}$ halmaza *testet alkot*, melyben az alábbiak kerülnek definiálásra:

- két konstans (nevezetesen a „0” és az „1” elem), valamint
- két művelet (nevezetesen a „+” összeadás és a „·” szorzás).

(ii) E két konstansra és két műveletre $\mathbb{R}$-ben érvényes axiómák az alábbiak:

- mindkét művelet *kommutatív*, azaz:

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ esetén $a + b = b + a$, valamint $a \cdot b = b \cdot a$;

• mindkét művelet *asszociatív*, azaz:

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén $a+(b+c) = (a+b)+c$, valamint $a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$;

• e két művelet együttesen *disztributív*, azaz:

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$;

• a „0" elem *additív*, az „1" elem pedig *multiplikatív* egységet képez, azaz:

$\forall a \in \mathbb{R}$ esetén $a + 0 = a$, valamint $a \cdot 1 = a$;

• $\mathbb{R}$-ben minden elemnek létezik *additív inverze*, azaz:

$\forall a \in \mathbb{R}$ esetén van olyan $x \in \mathbb{R}$, hogy $a + x = 0$;

• $\mathbb{R}$-ben minden a $\neq 0$ elemnek létezik *multiplikatív inverze*, azaz:

$\forall a \in \mathbb{R}$ és a $\neq 0$ esetén van olyan $x \in \mathbb{R}$, hogy $a \cdot x = 1$.

Megjegyzés. Az utóbbi két *inverzt* $x = -a$, illetve $x = a^{-1}$ értékként is jelöljük.

B. Rendezési axiómák:

(i) A valós számok $\mathbb{R}$ halmaza *rendezett testet* alkot, melynek egyetlen rendezési relációja van, amit „<"-vel jelölünk.

(ii) E rendezési relációra $\mathbb{R}$-ben az alábbi axiómák érvényesek:

• $0 < 1$;

• $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén ha $a < b$, akkor egyúttal $a + c < b + c$;

• $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ és $0 < c$ esetén ha $a < b$, akkor egyúttal $a \cdot c < b \cdot c$.

C. Közbensőérték axióma:

Ha egy *polinom* egy *zárt intervallum* egyik végén *pozitív*, másik végén *negatív* értéket vesz fel, úgy az *intervallumnak* van olyan belső pontja, ahol a *polinom* értéke pont *zérus*.

D. Kapcsolat a természetes számokkal:

(i) Létezik olyan $f_{\mathbb{N}\to\mathbb{R}}(x)$ függvény, mely a *természetes számokat* egyértelműen leképzi a *valós számok* körébe úgy, hogy:

• $f_{\mathbb{N}\to\mathbb{R}}(0) = 0$;

• $f_{\mathbb{N}\to\mathbb{R}}(\mathrm{S}0) = 1$;

• $f_{\mathbb{N}\to\mathbb{R}}(\mathrm{S}m) = f_{\mathbb{N}\to\mathbb{R}}(m) + 1$.

(ii) Archimedesi axióma:

• minden $a \in \mathbb{R}$-hez van olyan $m \in \mathbb{N}$, hogy

$$f_{\mathbb{N}\to\mathbb{R}}(m) \leq |a| < f_{\mathbb{N}\to\mathbb{R}}(\mathrm{S}m).$$

(iii) Rekurzíven definiált *valós függvények* axiómája:

• ha f *polinom*, akkor $g = f$ *rekurzív függvény*;

• ha g_1 és g_2 *rekurzív függvények*, akkor $g = g_1 + g_2$, valamint $g = g_1 \cdot g_2$ ugyancsak *rekurzív függvények*;

• ha $g_1(x)$ *rekurzív függvény*, m pedig *számváltozó*, akkor $g_1 = g\left[f_{\mathbb{N}\to\mathbb{R}}(m)\right]$ szintén *rekurzív függvény* (az m természetes számmal, mint paraméterrel);

• ha g_0 és $g_1(m,x)$ *rekurzív függvények*, és m egy $\mathbb{N}_0$-beli *számváltozó*, akkor az alábbi összefüggéssel definiált $g(m)$ ugyancsak *rekurzív függvény*:

$g(0) = g_0$;

$g(\mathrm{S}m) = g_1\left[m, g(m)\right]$.

(iv) A *teljes indukció elvének* $\mathbb{R}_0$-beli alkalmazhatósága:
Ha $g(\mathrm{x})$ egy (az előbbi pont szerint definiált) *rekurzív függvény*, m pedig egy $\mathbb{N}_0$-beli *számváltozó*, amelyre az alábbi összefüggések fennállnak:

$$g(0) = 0; \quad \text{valamint}$$

$$\forall(m \in \mathbb{N}_0)\left\{[g(m) = 0] \to [g(\mathrm{S}m) = 0]\right\}; \tag{16}$$

akkor egyúttal az alábbi összefüggés is fennáll:

$$\forall(m \in \mathbb{N}_0)\left[g(m) = 0\right]. \tag{17}$$

Megjegyzés.

– Axiómarendszerünkben kerültünk minden halmazelméleti alapot, mivel Q(k)-aritmetika inkompatibilis a valós számok axiomatizálásához alapul választott Zermelo–Fraenkel-axiómarendszerrel (létezik Q(k)-aritmetikával kompatibilis *általánosított halmazelmélet* is, ennek felvázolására azonban jelen dolgozat keretein belül nem vállalkozhattunk).

– Ha a *valós számokat* (a jelen dolgozatban alkalmazott gyakorlattól eltérően) halmazelméleti alapon axiomatizáljuk, úgy a C. és D. axiómák helyett elegendő az egyedüli „*teljességi axiómára*” hagyatkozni, mely szerint „a *valós számok* minden nem üres, felülről korlátos részhalmazának van $\mathbb{R}$-beli legkisebb felső határa”.

– A C. axiómában szereplő *polinomokat* az alábbiak szerint definiáljuk:

- ha a *valós szám*, úgy $f = a$ egy *polinom*;
- ha x egy *valósszám-változó*, akkor $f = x$ egy *polinom*;
- ha f_1 és f_2 *polinomok*, akkor $f = f_1 + f_2$ is egy *polinom*;
- ha f_1 és f_2 *polinomok*, akkor $f = f_1 \cdot f_2$ is egy *polinom*.

– A D. axióma hivatott arra, hogy (halmazelméleti alapok hiányában) megteremtse a kapcsolatot a *valós számok* és a *természetes számok* között, és (egyebek mellett) lehetővé tegye (a 2. fejezet I. f) (ii) pontjában mondottak értelmében azonban csakis az $\mathbb{N}_0$-számok körében) a *rekurzíven definiált függvények* fogalmának bevezetését, valamint a *teljes indukció elvének* $\mathbb{R}_0$-beli alkalmazhatóságát is.

– Mivel – a D. 1. axióma értelmében – minden m *természetes számnak* van $\mathrm{m} = f_{\mathbb{N}\to\mathbb{R}}(m)$ *valós számbeli* megfelelője, ezért nem okozhat félreértést, ha a továbbiakban m-nek az m *valós szám*-megfelelőjét egyszerűen csak m-mel jelöljük.

Most pedig következzék néhány definíció, hogy azután majd rátérhessünk a *valós számok* dolgozatunkban javasolt új *általános elméletének* néhány függvénytani vonatkozására.

4.1. Definíciók.

a) Valamely a valós számot akkor, és csakis akkor nevezünk $\mathbb{R}_0$-számnak, ha van olyan m és n $\mathbb{N}_0$-beli *természetes szám*, hogy $|a| = m/n$.

b) A valós számok körében értelmezett *függvények* (beleértve a *folytonos* és az adott intervallumon belül *egyenletesen folytonos* függvényeket is) fogalma és definíciója az új, általános matematikai rendszerben is megegyezik a klasszikus elméletben megszokottal.

c) Az alábbi módon képzett $f(x)$ *valós függvényeket* tekintjük *alapfüggvénynek*:

- ha $f_1(x)$ egy *rekurzív függvény*, akkor $f(x) = f_1(x)$ egy *alapfüggvény*;
- ha $f_1(x)$ és $f_2(x)$ *alapfüggvények*, akkor $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$, illetve (feltéve, ha van olyan x, hogy $f(x)_2 \neq 0$) $f(x) = f_1(x)/f_2(x)$ ugyancsak alapfüggvények.

d) Az $^{©}f(x)$ függvényről akkor mondjuk, hogy az az $f(x)$ függvény $\mathbb{R}_0$-*reprezentációja*, ha:

- ${}^{©}f(x)$ egy *alapfüggvény*, valamint ha
- minden $\mathbb{R}_0$-beli *a valós számra*: $f(a) = {}^{©}f(a)$.

e) Az $\mathrm{I}\{f(\xi), x_0, x\}$ függvényről azt mondjuk, hogy az az $f(\xi)$ függvény $[x_0, x]$ intervallumra vonatkozó *határozott integrálja*, ha az kielégíti az alábbi kritériumokat:

(i) $\mathrm{I}\{f(\xi), x_0, x_0\} = 0$;

(ii) $\alpha\cdot\mathrm{I}\{f(\xi), x_0, x\} + \beta\cdot\mathrm{I}\{g(\xi), x_0, x\} = \mathrm{I}\{\alpha\cdot f(\xi), x_0, x\} + \mathrm{I}\{\beta\cdot g(\xi), x_0, x\}$;

(iii) $\mathrm{I}\{f(\xi), x_1, x_2\} + \mathrm{I}\{f(\xi), x_2, x_3\} = \mathrm{I}\{f(\xi), x_1, x_3\}$;

(iv) $(\exists M)(\exists m)\{(\forall x)[(x_1 \leq x \leq x_2) \to (M \geq f(x) \geq m)] \to$
$\to [M\cdot(x_2 - x_1) \geq \mathrm{I}\{f(\xi), x_1, x_2\} \geq m\cdot(x_2 - x_1)]\}$,

ahol α, β, m és M *valós számok.*

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy a 4.1. definíciók e) pontja értelmében (valamint a *klasszikus matematika* gyakorlata szerint) definiált $\mathrm{I}\{f(\xi), x_0, x\}$ nem képez *valós függvényt.*

4.1. TÉTEL. *Ha m és n tetszőleges $\mathbb{N}_0$-számok, x_0 és x pedig tetszőleges valós számok, $\delta = \frac{x-x_0}{n}$, valamint $x_i = x_0 + i\cdot\delta$, akkor mindig fennáll, hogy:*

$$\begin{aligned}\frac{x^{m+1} - x_0^{m+1}}{m+1} &> \sum_{i=1}^{n}(\delta\cdot x_i^m) > \mathrm{I}\{x^m, x_0, x\} > \\ &> \sum_{i=0}^{n-1}(\delta\cdot x_i^m) > \frac{(x-\delta)^{m+1} - (x_0-\delta)^{m+1}}{m+1}.\end{aligned} \tag{18}$$

Bizonyítás.

Könnyen ellenőrizhető, hogy az alábbi összefüggés minden i-re $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ fennáll:

$$\begin{aligned}\frac{(x_i+\delta)^{m+1} - x_i^{m+1}}{m+1} &> (x_i+\delta)^m\cdot\delta > \mathrm{I}\{x^m, x_i, x_{i+1}\} > \\ &> x_i^m\cdot\delta > \frac{x_i^{m+1} - (x_i-\delta)^{m+1}}{m+1}.\end{aligned} \tag{19}$$

Összegezve (19)-et $i = 0$-tól egészen $n-1$-ig, közvetlenül kapjuk (18)-at. □

Észre kell vennünk, hogy a 4.1. tételben n értéke $\mathbb{N}_0$-szám, amihez két megjegyzés kívánkozik:

– Csak akkor van módunk (D. 3. és D. 4. értelmében) $\mathrm{I}\{f(\xi), x_0, x\}$-t definiálni és (18)-at levezetni, ha felvállaljuk az n értékére (hogy az $\mathbb{N}_0$-szám) tett jelentős megkötést.

– Q(k)-aritmetika **Q9** axiómájából egyértelműen következik, hogy $n < k$, így a *klasszikus matematikában* megszokott $n \to \infty$ határátmenet itt tehát most nem alkalmazható.

Ebből következően n minden lehetséges értékénél az $\mathrm{I}\{x^m, x_0, x\}$ függvény *alsó* és *felső* korlátjának – (18) *jobb*, illetve *baloldalának* – a különbsége nagyobb egy jól definiált (x_0, x és k értékeivel kifejezhető) *pozitív valós számnál*, és így $\mathrm{I}\{x^m, x_0, x\}$ nem képez *valós függvényt*.

5. Az analízis általános elméletének alapjai

A *valós számok* 4.1. pont szerinti axiómái önmagukban nem elegendőek a függvények (*klasszikus analízisben* megszokott elvárások szerinti) *integráljának* a származtatására, így az *analízis általános elméletének* megalapozásához még további axiómákra van szükségünk.

Ezen kiegészítő axiómák megfogalmazásánál figyelembe kell vennünk a *valós számok* tulajdonságainak $\mathbb{R}$ és $\mathbb{R}_0$ szerinti különbözőségét, illetve sajátos kettősségét.

Azt mondhatjuk, hogy $\mathbb{R}$ képviseli a *valós számok* (minden „finom" részletre is kiterjedő) *„mikro-struktúráját"*, és $\mathbb{R}_0$ pedig annak (a részleteket „elnagyoló") *makro-struktúráját*.

5.1. Axióma.

E. Az integrálfüggvény axiómái:

(i) A *valós számok* körében értelmezett minden egyes *egyenletesen folytonos* $f(\xi)$ függvényhez és $[x_0, x]$ zárt intervallumhoz egyértelműen tartozik az $\mathrm{I}\{f(\xi), x_0, x\}$ *integrálfüggvény*, mégpedig oly módon, hogy az kielégíti a 4.1. definíciók e) pontban rögzített mind a négy integrálkritériumot. Az $\mathrm{I}\{f(\xi), x_0, x\}$ *integrálfüggvényt* (a klasszikus integráltól való megkülönböztetés céljából) a továbbiakban gyakran csak $\mathrm{I}\{f(\xi), x_0, x\} \equiv \int_{x_0}^{x} f(\xi)\Delta\xi$-vel jelöljük.

(ii) Az $f(\xi) = \xi^m$ függvény *integrálfüggvényének* $\mathbb{R}_0$-*reprezentációjára* az alábbi összefüggés áll fenn:

$$^{\copyright}\mathrm{I}\{\xi^m, x_0, x\} = \frac{(x-\gamma)^{m+1}}{m+1} - \frac{(x_0-\gamma)^{m+1}}{m+1},$$

ahol is x_0 és x $\mathbb{R}_0$-számok, γ pedig egy (kellően kis) *valós szám*, ami az analízis új *általános elméletének* alapvető állandóját képezi.

(iii) Ha az *egyenletesen folytonos* $f_1(\xi)$ és $f_2(\xi)$ *valós függvények* $\mathbb{R}_0$-*reprezentációi* megegyeznek, azaz:

$$^{©}f_1(\xi) = {}^{©}f_2(\xi),$$

akkor minden x_0-ra és x-re egyúttal az alábbi összefüggés is fennáll:

$$^{©}\mathrm{I}\{f_1(\xi), x_0, x\} = {}^{©}\mathrm{I}\{f_2(\xi), x_0, x\}.$$

F. Az analízis általános elméletének további kiegészítő axiómái:

(i) Ha a $g(x)$ *valós függvénynek* létezik a $^{©}g(x)$ $\mathbb{R}_0$-*reprezentációja*, akkor $g(x)$-hez mindig tartozik egy (és csakis egy) $f(x)$ függvény oly módon, hogy minden x_0 és x *valós számok* mellett az alábbi összefüggés fennáll:

$$^{©}\mathrm{I}\{f(\xi), x_0, x\} = {}^{©}g(x) - {}^{©}g(x_0). \tag{20}$$

Az ily módon definiált $f(x)$ függvényt $g(x)$ *deriváltjának* nevezzük, és a klasszikus deriválttól való megkülönböztetés céljából $f(x) = \frac{\Delta g(x)}{\Delta x}$-vel jelöljük.

(ii) Ha $g(x) = 1(x)(= 1)$; $g(x) = x$; vagy $g(x) = u(x) \cdot v(x)$ (ahol is $u(x)$ és $v(x)$ *deriválható függvények*), akkor az alábbi összefüggések fennállnak:

$$\frac{\Delta 1(x)}{\mathrm{d}x} = 0 \quad \text{és} \quad \frac{\Delta x}{\mathrm{d}x} = 1,$$

$$^{©}\frac{\Delta\left(u(x) \cdot v(x)\right)}{\mathrm{d}x} = {}^{©}\frac{\Delta u(x)}{\mathrm{d}x} \cdot v(x+\gamma) + u(x+\gamma) \cdot {}^{©}\frac{\Delta v(x)}{\mathrm{d}x}.$$

(iii) Ha $\eta(x)$ és $\psi(x)$ *deriválható függvények*, melyekre az $x_0 \le \xi \le x$ intervallumon belül az $y = \eta[\psi(\xi)]$ függvényérték mindenütt értelmezett, $h(x)$-t pedig úgy definiáljuk, hogy

$$h(x) = \eta[\psi(x)] \cdot {}^{©}\frac{\Delta\psi(x)}{\Delta x},$$

akkor:

$$\mathrm{I}\{\eta(\xi), \psi(x_0), \psi(x)\} = \mathrm{I}\{h(\xi), x_0, x\}. \tag{21}$$

Az alábbiakban egy rövid áttekintést adunk az *analízis általános elmélete* 5.1. pontban összefoglalt axiómáinak néhány fontosabb következményéről.

E következmények többnyire egyszerű, (mondhatni triviális) bizonyításától itt most eltekintünk, ezek igazolását az olvasóra bízzuk.

5.1. Következmény. *Ha $f(x)$ és $g(x)$ deriválható függvények, α és β pedig tetszőleges valós számok, úgy az alábbi összefüggések (mint 5.1. axiómák közvetlen* *következményei) fennállnak:*

$$ {}^{\copyright}\frac{\Delta\left(\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x)\right)}{\Delta x}=\alpha\cdot{}^{\copyright}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}+\beta\cdot{}^{\copyright}\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}, \tag{22}$$

$$\frac{\Delta x^m}{\Delta x}=m\cdot(x+\gamma)^{m-1}, \tag{23}$$

$$\frac{{}^{\copyright}\Delta\dfrac{1}{g(x)}}{\Delta x}=-\frac{{}^{\copyright}\dfrac{\Delta g(x)}{\Delta x}}{g^2(x+\gamma)}, \tag{24}$$

$$\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}=\frac{dg(x+\gamma)}{dx}. \tag{25}$$

Ha pedig $f(x)$ egy polinom, úgy fennáll:

$$ {}^{\copyright}\int_{x_0}^{x} f(\xi)\Delta\xi=\int_{x_0}^{x} f(\xi-\gamma)\mathrm{d}\xi. \tag{26}$$

Megjegyzés.

- Ha a $g(x)$ *valós függvénynek* létezik a (20) szerinti $f(x)$ *derivált-függvénye*, akkor $g(x)$ függvényt *deriválható függvénynek* tekintjük (illetve nevezzük).
- (25) és (26) ugyanazon függvények *klasszikus* és az *új általános elmélet* szerint képzett *deriváltjai* és *integráljai* közötti szoros összefüggést tárják fel.
- A (22)–(26) összefüggésekben szereplő γ (mint látni fogjuk) kellően kis *valós szám*, ami az *analízis új általános elméletének* alapvető *állandóját* képezi, és amelyről azt gondoljuk, hogy (a Bolyai geometria δ állandójához hasonlóan) tapasztalati úton határozható meg.

E fejezet további részében megmutatjuk, hogy ha $0<\gamma<1/k$ (ahol k a **Q9** axiómában szereplő *természetes szám*), úgy a *valós analízis* 4.1. és 5.1. axiómacsoporttal meghatározott *új általános elmélete reálisan ellentmondásmentes.*

5.1. Tétel. *Ha $k\geq k\ (\kappa)$, és $0<\gamma<1/k$, akkor a valós analízis 4.1. és 5.1. axiómacsoporttal meghatározott új általános elmélete reálisan ellentmondásmentes.*

Bizonyítás. Az 5.1. tétel bizonyításához négy körülményt vizsgálunk meg, és ezen belül két felmerülő ellentmondás-gyanúról mutatjuk meg, hogy azok teljességgel alaptalanok.

a) Mindenekelőtt megállapítjuk, hogy a 4.1. axiómacsoport A., B., C. és D. axiómái a *valós számok* klasszikus axiómarendszerének olyan részét képezik, melyek k-tól és γ-tól teljes mértékben függetlenek, így – a klasszikus elméletből következően – önmagukban egy ellentmondásmentes rendszert képeznek. Itt kell ugyanakkor megemlítenünk, hogy ha elfogadnánk a halmazelmélet Zermelo-Fraenkel-féle (ZFC) elsőrendű axiómarendszerét mint kiinduló alapot (mint ahogy azt a 4.1. D. axiómákkal kapcsolatos első megjegyzés értelmében nem tesszük), úgy mindezen axiómák a ZFC következményeként volnának származtathatók.

b) Az 5.1. E. axiómákkal kapcsolatban pusztán egyetlen tennivalónk van, nevezetesen annak igazolása, hogy ha a Q(k) aritmetika *reálisan ellentmondásmentes* (mint ahogy azt a 2.2. tételként már bizonyítottuk), továbbá $0 < \gamma < 1/k$ $(= 1/k(\kappa))$ fennáll, úgy az 5.1. E. ii) axióma nem mond ellent a 4.1. definíciók e) pontban megfogalmazott integrál-kritériumoknak, és ezen belül különösen a (iv) kritériumnak. Figyelembe véve, hogy (az 5.1. E. ii) axióma értelmében) x_0 és x $(> x_0)$ $\mathbb{R}_0$-számok, valamint az 5.1. tétel feltevése értelmében $0 < \gamma < 1/k$, az alábbi összefüggés fennáll:

$$x > x_0 + 2 \cdot \gamma \quad \text{és} \quad \frac{(x_0+\gamma)^{m+1} - (x_0-\gamma)^{m+1}}{m+1} > x_0^m \cdot 2 \cdot \gamma.$$

Ebből rögtön következik, hogy:

$$x^{m+1} \cdot (x - x_0) > \frac{(x-\gamma)^{m+1} - (x_0-\gamma)^{m+1}}{m+1} > x_0^{m+1} \cdot (x - x_0),$$

azaz a Q(k) aritmetikában az 5.1. D. ii) axióma kielégíti a „4.1. e) (iv)" integrál-kritériumot.

c) Az 5.1. F. axiómacsoport első két axiómája biztosan nem vezet ellentmondásra:

- Az i) axiómával nem lehet gondunk, hiszen az semmi mást nem mond ki, mint azt, hogy (a klasszikus elmélettel megegyezően) a *derivált* az *integrál* inverze.
- Hasonlóan problémamentes a ii) axióma is, mely (a klasszikus elmélettel egyezően) azt mondja ki, hogy a *derivált-operátor* $\mathbb{R}_0$-*reprezentációja* a *valós függvények* összeadásával és szorzásával szemben zárt.

d) Az 5.1. F. iii) axiómával kapcsolatban már bonyolultabb a helyzetünk, állításunk igazolásához egy látszólagos ellentmondást kell feloldanunk.

- Legyenek $\eta_m(x)$ és $\psi_n(x)$ m-ed, illetve n-ed rangú *polinomok* és legyen továbbá $\phi_{m+1}(x)$ az $\eta_m(x)$ függvény *integrálfüggvénye.* Ekkor $\eta[\psi(x)]$

$m \cdot n$-ed fokú *polinomot* képez, melyre – (16) és (17) alkalmazásával – a következő összefüggést kapjuk:

$$\begin{aligned}
&\overset{\copyright}{\int\limits_{\xi=x_0}^{x}} \left\{ \eta_m[\psi_n(\xi)] \cdot \frac{\Delta\psi_n(\xi)}{\Delta\xi} \right\} \Delta\xi = \\
&= \overset{\copyright}{\int\limits_{\xi=x_0}^{x}} \left\{ \frac{\mathrm{d}\phi_{m+1}\left[\psi_n\ (\xi) + \gamma\right.}{\mathrm{d}\psi_n(\xi)} \cdot \frac{\mathrm{d}\psi_n(\psi+\gamma)}{\mathrm{d}\xi} \right\} \Delta\psi = \\
&= \int\limits_{\xi=x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}\phi_{m+1}[\psi_n(\xi-\gamma)+\gamma]}{\mathrm{d}\xi} \mathrm{d}\xi = \\
&= [\phi_{m+1}(\psi_n(\xi-\gamma)+\gamma)]_{\xi=x_0}^{x} .
\end{aligned} \tag{27}$$

Ugyanakkor (27) baloldalát az 5.1. F. iii) axióma segítségével (mindenféle levezetés nélkül) közvetlenül is megkaphatjuk, ami viszont az alábbi összefüggést eredményezi:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\xi=x_0}^{x} \left\{ \eta_m[\psi_n(\xi)] \cdot \frac{\Delta\psi_n(\xi)}{\Delta\xi} \right\} \Delta\xi = \\
&= \int\limits_{\tau=\psi(x_0)}^{\psi(x)} \eta_m(\tau)\Delta\tau = [\phi_{m+1}(\psi_n(\xi))]_{\xi=x_0}^{x} .
\end{aligned} \tag{28}$$

- (27) és (28) összevetése egy látszólagos ellentmondásra utal, mely az alábbi gondolatmenet alapján azonban könnyen feloldható.
- Emlékezzünk vissza, hogy az 5.1. E. ii) axióma pusztán csak az $\mathbb{R}_0$-számok körében rendel konkrét értéket valamely *polinom integrálfüggvényéhez*, következésképpen $\phi m(x)$ polinom is csak az $\mathbb{R}_0$-számok körében tölti be az *integrálfüggvény* szerepét. Mindebből az következik, hogy (27) és (28) akkor, és csakis akkor mond ellent egymásnak, ha van olyan ξ $\mathbb{R}_0$-szám, hogy a $\psi_n(\xi)$ és $\psi_n(\xi-\gamma)+\gamma$ egyaránt $\mathbb{R}_0$-számot ad függvényértékül. Márpedig könnyen belátható, hogy ha $\psi_n(\xi)$ egy polinom (ahogy azt feltételeztük), úgy $\psi_n(\xi)$ és $\psi_n(\xi-\gamma)+\gamma$ nem eredményezhet egyaránt $\mathbb{R}_0$-számot, és így az említett ellentmondás valóban csak látszólagos.

e) Mindezzel 5.1. tételünket igazoltuk, azaz a *valós analízis* felvázolt *általános elmélete reálisan ellentmondásmentes*, és így nem lehet okunk kételkedni annak helyességében. □

6. Az általános elmélet néhány várható következménye

E fejezetben az *analízis általános elméletének* néhány várható következményét ismertetjük.

I. Egy lehetőség γ értékének numerikus számításokkal való meghatározására

Vizsgálataink előfutárát képező [5] dolgozatban azt állítottuk, hogy az alábbi összeg:

$$\begin{aligned}\mathrm{B}(n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{16^i} \cdot \bigg(&\frac{8}{8i+1} - \frac{8}{8i+2} - \frac{4}{8i+3} - \frac{8}{8i+4} - \\ &- \frac{2}{8i+5} - \frac{2}{8i+6} + \frac{1}{8i+6} \bigg)\end{aligned} \tag{29}$$

nagypontosságú kiszámolásával (és a klasszikus elmélet szerinti $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{B}(n) = 0$ határérték képzésével) eldönthető, hogy matematikai rendszerünk PA-konform-e, vagy sem.

Hivatkozott állításunk megerősítésére az alábbiakban megmutatjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty_{N_0}} \mathrm{B}(n) \approx 54,5 \cdot \gamma, \tag{30}$$

azaz (29) értékének nagypontosságú kiszámításával egyúttal megkaphatjuk γ értékét is.

Megjegyzés. A (30)-ban alkalmazott ∞_{N_0} jellel azt kívántuk érzékeltetni, hogy itt a határérték-képzésnél mindvégig az $\mathbb{N}_0$-számok körében maradunk.

6.1. Következmény. *Ha „B(n)"-t (29)-cel definiáljuk és δ-val jelöljük az alábbi határérték-kifejezést:*

$$\delta = \lim_{n\to\infty_{N_0}} \mathrm{B}(n),$$

úgy δ értékére az alábbi összefüggés áll fenn:

$$\delta \approx 54,5 \cdot \gamma. \tag{31}$$

Bizonyítás. Vezessük be a következő függvényeket:

$$\begin{aligned}\eta(x) &= \frac{1}{1-x};\\ \psi_1(x) &= \sqrt{2}\cdot x - x^2;\\ \psi_2(x) &= x^2;\\ h_1(x) &= \eta[\psi_1(x)] \cdot \frac{^{©}\Delta\psi_1(x)}{\Delta x};\\ h_2(x) &= \eta[\psi_2(x)] \cdot \frac{^{©}\Delta\psi_2(x)}{\Delta x}.\end{aligned}$$

Mivel $\psi_1(0)=\psi_2(0)$ és $\psi_1(1/\sqrt{2})=\psi_2(1/\sqrt{2})$, ezért az 5.1. F. iii) axióma alapján kapjuk:

$$\begin{aligned}\mathrm{I}\left\{h_1(x),0,1/\sqrt{2}\right\}&=\mathrm{I}\left\{\eta(x),\psi_1(0),\psi_1\left(1/\sqrt{2}\right)\right\}=\\&=\mathrm{I}\left\{\eta(x),\psi_2(0),\psi_2\left(1/\sqrt{2}\right)\right\}=\mathrm{I}\left\{h_2(x),0,1/\sqrt{2}\right\}.\end{aligned}$$

Ugyanakkor viszont (22)-ből, majd (21)-ből következően kapjuk:

$$\begin{gathered}h_1(x)=\frac{\sqrt{2}-2x-2\gamma}{1-\sqrt{2}\cdot x+x^2},\\ h_2(x)=\frac{2x+2\gamma}{1-x^2},\\ \overset{\copyright\ 1/\sqrt{2}}{\underset{x=0}{\int}}\frac{\sqrt{2}-2x-2\gamma}{1-\sqrt{2}\cdot x+x^2}\Delta x-\overset{\copyright\ 1/\sqrt{2}}{\underset{x=0}{\int}}\frac{2x+2\gamma}{1-x^2}\Delta x=0.\end{gathered}$$

Hosszabb számítással könnyen ellenőrizhető, hogy ebből az alábbi összefüggésre juthatunk:

$$\begin{aligned}&\int_{x=0}^{1/\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}-2x-\sqrt{2}x^2-4x^3-\sqrt{2}x^4-2x^5+\sqrt{2}x^6}{1-x^8}\Delta x-\\&-2\gamma\cdot\int_{x=0}^{1/\sqrt{2}}\frac{1}{1-\sqrt{2}\cdot x+x^2}\mathrm{d}x-2\gamma\cdot\int_{x=0}^{1/\sqrt{2}}\frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x=0.\end{aligned}\tag{32}$$

Ha kiindulunk az 5.1. E. ii) axiómából és figyelembe vesszük, hogy $\gamma\gg 1$, úgy a (32)-ben szereplő $\int_{x=0}^{1/\sqrt{2}}\frac{x^{k-1}}{1-x^8}\Delta x$ tagokra az alábbi összefüggést kapjuk:

$$\int\limits_{x=0}^{1/\sqrt{2}} \frac{x^{k-1}}{1-x^8}\Delta x = \int\limits_{x=0}^{1/\sqrt{2}} \sum_{i=0}^{\infty} x^{k-1+8i}\Delta x \approx \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1/16^i}{2^{k/2}\cdot(8i+k)} - \gamma\cdot\frac{16/15}{2^{(k-1)/2}}.$$

Mindezen részeredmények felhasználásával és egy hosszadalmas (de mindvégig egyszerű, elemi lépésekből álló) levezetés eredményeként végül az alábbi eredményt kapjuk:

$$\delta = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i}\cdot\left(\frac{8}{8i+1} - \frac{8}{8i+2} - \frac{4}{8i+3} - \frac{8}{8i+4} - \right.$$
$$\left. - \frac{2}{8i+5} - \frac{2}{8i+6} + \frac{1}{8i+6}\right) \approx 54,5\cdot\gamma,$$

ami egyúttal bizonyítja a 6.1. következményben állított (31) összefüggést. □

Várakozásunk szerint $\gamma < 10^{-20}$, következésképpen δ meghatározásához legalább 10^{20} tizedes-jegy (vagy inkább hexadecimális jegy) pontosságú számításokra van szükség.

Mai tapasztalataink szerint ilyen pontosságú számítások elvégzésére csak a BBP-féle számjegy-kinyeréses módszer [11] ad esélyt, mely a számításokat nem a teljes számsorra, hanem csak a kérdéses számjegyekre (a mi esetünkben pl. a 10^{20}. pozíciótól kezdődő számjegy-sorra) vonatkozóan végzi el.

II. Gondolatok eredményeink fizikában történő alkalmazhatóságáról

Az előbb láttuk, hogy (legalábbis elvben) reális esélyünk van γ értékének (számítógéppel támogatott) nagypontosságú numerikus számításokon alapuló meghatározására.

Az alábbiakban néhány gondolatot vetünk fel, illetve lehetőséget vázolunk fel arról, hogy (a) miként lehet dolgozatunk eredményeinek fizikában történő alkalmazásával is eljutni γ értékének reménybeli meghatározásához; továbbá hogy (b) az *általános analízis* miként kínálhat esélyt a kvantumelektrodinamika renormalizációval és regularizációval kapcsolatos anomáliáinak a feloldására.

a) Ha a modern fizikának a *klasszikus analízisre* épülő mai elméletét az *általános analízisre* adaptáljuk, úgy (ez utóbbiban szereplő újabb γ állandó révén) a természetleírásnak egy, a valósághoz a jelenleginél jobban alkalmazkodni képes új változatához juthatunk el. Ennek a lehetőségnek a puszta illusztrálására az alábbiakban röviden felvázoljuk, hogy az *analízis általános elméletében* miként is fog „kinézni” a *kvantummechanika* jól ismert Schrödinger-egyenlete pl. egy szabad részecske stacionáris állapotára.

A *klasszikus analízis* szerint ez a *sajátérték-függvény* az alábbi formát veszi fel:

$$\frac{-h^2}{2M}\cdot\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} = E\cdot\Psi(x), \tag{33}$$

míg ugyanezen sajátérték-függvény az *analízis általános elméletében* az alábbi lesz:

$$\frac{-h^2}{2M} \cdot \left[\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + 2\gamma \cdot \frac{d^3\Psi(x)}{dx^3} \right] = E \cdot \Psi(x). \tag{34}$$

Itt mindenekelőtt azt kell megemlítenünk, hogy (34) származtatásánál egyfelől felhasználtuk a (25) összefüggést, valamint azt, hogy (34) értelemszerűen csak az $\mathbb{R}_0$-számok körére áll fenn. (Ez a megkötés a fizikában nem jelenthet érdemi korlátozást, hiszen a „mérhető" fizikai mennyiségek köre sem lépheti túl az $\mathbb{R}_0$-számok tartományát). A *klasszikus* és az *általános analízishez* tartozó (33) és (34) összehasonlításából jól látszik azok markáns eltérése; ebből következően a (33) és (34) képlethez tartozó sajátenergia-értékek is eltérőek. Ezek a (feltehetően mérhető) eltérések kifejezhetők a (rendkívül kicsi) γ állandó függvényeként, és így ezáltal is lehetőség adódik γ meghatározására.

b) A *kvantumelektrodinamikában* komoly gondot jelentenek a (perturbációs) számítások során óhatatlanul fellépő divergenciák, melyek ugyan a *regularizáció* és a *renormalizálás* módszereivel (a gyakorlatban) elég jól kezelhetőek, melyeknek azonban mindmáig nem létezik kellő matematikai egzaktsággal alátámasztott elméleti alapja.

Álláspontunk szerint az analízis általános elmélete esélyt ad arra, hogy keretein belül e divergenciák kezelhetőek és feloldhatóak legyenek.

A *regularizáció* módszere azon alapszik, hogy a kvantumelektrodinamika divergens integráljait egy bizonyos energiaszintnél „levágják", így téve „végessé" az egyébként divergens integrált.

Úgy tűnik, hogy az *analízis általános elméletében* ennek a módszernek az alkalmazhatósága – az alábbi okfejtés alapján – elméletileg is megalapozható:

- Mint ahogy azt már korábban láttuk, az új elmélet keretein belül az integrálok viselkedését csak az $\mathbb{R}_0$-számok körében tudjuk aritmetikailag is nyomon követni.
- Az előző pontban mondottak alapján hasonlóan tudjuk, hogy a fizikai mennyiségek mérhető értékei sem léphetik sohasem túl az $\mathbb{R}_0$-számok körét.
- Következésképpen logikusnak látszik, hogy az integrálokból az $\mathbb{R}_0$-számok körét meghaladó részt egyszerűen elhagyjuk, és így a „levágást" kellő matematikai szigorúsággal megalapozva elméletileg is igazoljuk.

Ezen érdekes téma további kifejtésére itt most terjedelmi okokból nem vállalkozhattunk.

III. Végezetül dolgozatunk főbb állításainak és következtetéseinek az összegzése

Dolgozatunk legfőbb következtetései és megállapításai az alábbiak szerint összegezhetők:

a) Létezik olyan (kellően nagy) k természetes szám, hogy a Q-aritmetika Q(k) kiterjesztése végül is *reálisan ellentmondásmentes* elméletet eredményez.

b) Nincs érzékelhető különbség az *ellentmondásmentes* és a *reálisan ellentmondásmentes* elméletek között, ezeket ismeretelméleti szempontból egyenrangúnak kell tekintenünk.

c) Az *analízis javasolt új, általános elméletében*:

  - az integrál- és derivált-operátorokhoz csak a valós számok $\mathbb{R}_0$-tartományában van módunk *valós számot* képviselő (egyértelmű) függvényértéket rendelni;
  - az integrál és derivált ezen függvény-értékei egyúttal függvényei γ-nak is, azaz az *analízis általános elmélete* alapvető állandójának;
  - ez a γ-állandó összefüggésben van a Q(k)-aritmetika k konstansával: $0 < \gamma 1/k$.

d) Az *analízis javasolt általános elmélete* jó esélyt ad arra, hogy γ állandójának az értékét (számítógéppel támogatott nagypontosságú numerikus számítások eredményeként) magából a rendszerből határozhassuk meg.

e) Dolgozatunkban arra a következtetésre jutottunk, hogy az Euklideszi geometriához hasonlóan (amelyikről kiderült, hogy számos általánosítása lehetséges, pl. a Bolyai-geometria) az *analízis klasszikus elméletének* is kell, hogy legyen *általánosítása*, ami a fizikusok számára hatékony eszközt nyújthat ahhoz, hogy elméleteiket a mainál talán még jobban közelíthessék a fizikai valósághoz.

f) A dolgozatunkban *bemutatott új elmélet* pusztán csak egy lehetséges módját adja az *analízis általánosításának*, és nem kívánja kizárni, hogy más módszerekkel talán még hatékonyabb *általános matematikai elméletekhez* juthassunk el.

Hivatkozások

[1] VAN DANTZIG: *Is* $10^{10^{10}}$ *a Finite Number?* Dialectica, Vol. **9**. 3/4, 1955.

[2] ROHIT J. PARIKH: *Existence and Feasibility in Arithmetic.* Journal of Symbolic Logic, **36** (1971), 494–508.

[3] Mirco A. Mannucci and Rose M. Cherubin: *Model Theory of Ultrafinitism I.*: Fuzzy Initial Segments of Arithmetic (Preliminary Draft), http://aps.arxiv.org/PS_cache/cs/pdf/0611/0611100v1.pdf

[4] Buss, S. R.: *First-Order Proof Theory of Arithmetic Handbook of Proof Theory.* Edited by S. R. Buss, Elsevier Science B. V. 1998

[5] Rázga, T.: *A természetes számok Peano aritmetikáját is vitató új, általános elmélete.* Alkalmazott Matematikai Lapok (Appl. Math. J.), 1994–1998, pp. 139–154.

[6] Petr Hájek, Pavel Pudlak: *Metamathematics of First-Order Arithmetic*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1998 (second edition)

[7] Nelson, E.: *Predicative Arithmetic.* Princeton University, 1986.

[8] Harvey M. Friedman: *PHILOSOPHY 536. PHILOSOPHY OF MATHEMATICS.* http://www.math.ohio-state.edu/~friedman/pdf/Princeton536.pdf

[9] Jan Krajicek: *On the Number of Steps in Proofs.* Annals of Pure and Applied Logic, **41** (1989), 163–178.

[10] Rohit J. Parikh: *Some Results on the Length of Proofs.* Transactions of the American Mathematical Society, **177** (1973), 29–36.

[11] David Bailey, Peter Borwein and Simon Plouffe: *On the Rapid Computation of Various Polylogarithmic Constants.* http://www.ams.org/mcom/1997-66-218/S0025-5718-97-00856-9/S0025-5718-97-00856-9.pdf

(Beérkezett: 2008. október 6.)

A POTENTIAL GENERALIZATION OF THE CLASSICAL MATHEMATICS

Tamás Rázga

The notion of *realisticly contradiction-free mathematical theory* is introduced. It is shown that it is equivalent to the classical notion of contradiction-free theory in the sense of epistemology. Potential new theories for the natural numbers and real analysis are suggested. They are realisticly contradiction-free. These theories are more adjustable to the physical reality than the existing ones.

Alkalmazott Matematikai Lapok **30** (2013), 107-109.

EMLÉKEK KLAFSZKY EMIL (1934–2009) MATEMATIKUSRÓL

HUJTER MIHÁLY

Jelen írás célja, hogy kollégámról, barátomról, földimről, „fogadott” nagybátyámról megemlékezzek kötetlen keretek között, személyes hangvétellel.

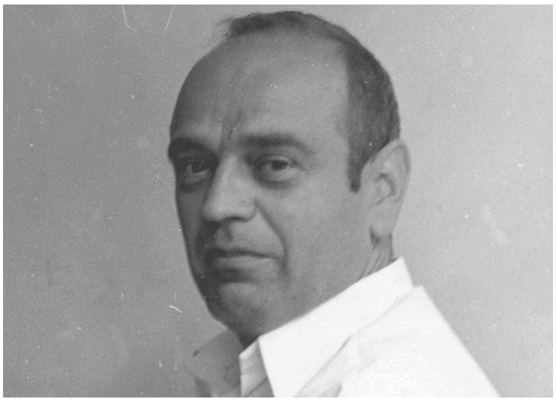
Klafszky Emil 1934. december 3-án született. Amikor először hallottam az ő születési dátumát, akkor rögtön az jutott eszembe, hogy csak pár héttel idősebb, mint a „király”, azaz *Elvis Aaron Presley*. Emil Kónyban született; Kóny Győr és Csorna közötti kisközség. Emil édesapja községi vendéglőt üzemeltetett. Napjainkban már az internetről megtudható, hogy a község nevezetessége a *kónyi verbunk*. Ez a rábaközi tánc háttérbe szorította a huszas–harmincas években a korábban általánosabb *karéj* nevezetű táncot. A koncsmaudvaron sokszor láthatta a gyermek Emil a falu táncosait. Az interneten fellelhető egy kép, ami a falu 1942-es regrutái között mutatja Emilt, az édesanyját, Csonka Irmát, és a húgocskát, Valériát. Hála Istennek, Valéria még mindig jó egészségnek örvend; napjainkban is sikeres rejtvényfejtő. A család távoli rokona volt *Klafszky Katalin* (1855–1896) világhírű operaénekesnő.

Szeretet szülőföldjét tanulmányai végett elhagyni kényszerült Emil. Műegyetemi kollégánk, Molnár Emil emlékszik rá kisgyermek korából, mert Klafszky Emil abban a győri kollégiumban lakott, ahol Molnár Emil édesapja volt a kollégium igazgatója. Mivel mindkét Molnár jó matematikus volt és Klafszky Emil is, no meg mivel a ritka keresztnév is egyezett, kialakult az ismerettség.

Klafszky Emil egyetemi éveiről nincs sok információm. Csak azt tudom biztosan, hogy az ELTÉ-re és a BMÉ-re is járt. Mindkét helyen diplomát szerzett. A mérnöki diplomáját 1959-ben, a matematikus oklevelet 1965-ben kapta. A műegyetemi diákélet egyik legmegdöbbentőbb élményeként említette évtizedekkel később Emil, hogy milyen szomorú eseményláncolat volt Egerváry professzor meghurcoltatása és öngyilkosságba kergetése 1958 őszén. (Ezekről a dolgokról Emil az akkori szobatársától értesült, aki Egerváry közelében gyakornokoskodott.)

Emil további szakmai tevékenységéről a *História–Tudósnaptár* révén tájékozódhatunk az internetről. Korábban volt itt egy fiatalkori kép is, de azt valaki valamely titokzatos oknál fogva eltávolította. Jelen írásban tisztelettel közreadjuk ezt a képet is és egy másikat is.

Klafszky Emil 1959–65 között a Budapesti Műszaki Egyetemen (akkori nevén Építőipari és Közlekedési Műszaki Egyetem) volt tanársegéd. Akkoriban hallhatott egy megható történetet egy öreg hivatalszolgától, aki már a negyvenes években is a Műegyetemen dolgozott. A történet szereplői a legendás Kőnig Dini tanár úr és Egerváry Jenő akadémikus úr, és a történet — vélhetőleg — az 1944-es esztendő tavaszi szemeszterében játszódik. Kőnig Dénes (1884–1944) éppen előadást

tartott, de szélsőjobboldali hallgatók hangos bekiabálásokkal zavarták a rendes előadást; követelték, hogy az előadó tűzze ki a Dávid-csillagot. Amikor Egerváry Jenő (1891–1958) tudomására jutott az eset, hivatali hatalma felhasználásával gyorsan intézkedett, melynek nyomán az egyetemi rendészek kísérték ki a nyilasérzelmű hőzöngőket.

Klafszky Emil 1965–76 között az MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutatóintézetének, majd az Országos Tervhivatal Számítóközpontjának munkatársa volt; kandidátusi értekezését 1974-ben védte meg geometriai programozás témában; 1979-től 1989-ig tanszékvezető volt a Miskolci Egyetemen, 1989-től a Budapesti Műszaki Egyetem Építéskivitelezési tanszékének professzoraként működött.

Emil szerette a jó matematikát. Az elsők között tanította magyar nyelven a híres *Hungarian Method* algoritmust a szállítási feladat megoldására. Klafszky legkeresettebb könyve: *Hálózati folyamok*, Budapest, 1969. (Miután a kevés eredeti példány legtöbbjét ellopkodták a könyvtárakból, akinek pedig saját példány jutott, az jól megfontolt önérdekből letagadta a könyv meglétét az érdeklődő kollégák előtt, nagy nehezen sikerült megszereznünk a szükséges engedélyeket és az internetre helyeznünk a könyv teljes tartalmát.)

A jelen sorok szerzőjének nehéz dolga akadt 1987-ben: Kiderült, hogy az egyetemi doktori értekezésének Klafszky Emil lesz az egyik bírálója. (A másik bírálóval nem volt semmi gond: elolvasta a dolgozatot, megírta a bírálatot, és minden rendben volt.) Klafszky tanár úrnak azonban ez nem volt megfelelő módszer. Találkoznom kellett vele, és szép részletesen mindent el kellett neki mondanom. És állandóan belekérdezett. Csak akkor mondta ki az elfogadó igent, amikor már ő is annyira értette a mondanivalót, mintha maga írta volna az egész disszertációt.

Kétségtelen, hogy Klafszky Emil nagyon jó tanár, nagyon jó kutató matematikus volt. Bizonyos esetekben azonban nyelve élességét is tapasztaltuk. Körülbelül tíz-tizenöt éve együtt hallgattuk egy régi munkatársunk előadását, melyet — mint kvázi egyetemi hallgatóknak — tartott nekünk a kolléga. Amikor az előadó oda ért, hogy a végeredmény az Euler-féle szám, ami közelítőleg $2,7$, és ekkor az előadó elakadt, és a papírjait kereste, akkor Emil arcára ült a megdöbbenés. Felém fordult, és én erre halkan súgtam a folytatást: *tizennyolc-huszonnyolc-tizennyolc-huszonnyolc*; ezzel jeleztem, hogy nem csak neki, Emilnek, hanem nekem, Misinek is rendes tanárom volt már a középiskolában. Ekkor Emil odadünnyögte nekem: *No, ez a Béla még az egyszeregyet is papírból írná fel a gyerekeknek a táblára. Ez a Béla akar habilitált professzor lenni?*

Nem untatom a nyájas olvasót Emil munkásságának technikai részleteivel, hiszen az érdeklődő kutató hamar megtalál minden adatot az interneten.

Soraimat azzal zárom, hogy Klafszky Emil legfontosabb kitüntetése az *Egerváry Jenő emlékplakett* volt 2004-ben. Nagy öröm volt látni Emil arcán, mennyire meghatódott, és nagy öröm volt látni a kollégák arcán az elismerést, hogy mennyire megfelelő embernek ítélték oda a rangos kitüntetést.

Klafszky Emil öt éve, január 31-én hunyt el. Hamvait szülőfalujában, rokonai mellé temették.

HUJTER MIHÁLY
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Matematika Intézet
hujter.misi@gmail.com